

تکلیف دوم درس نظریه بازی

مهسا امینی ۹۸۱۷۸۲۳

سوال یک

در این بازی اگر هر دو بازیکن منحرف شوند هر یک payoff ۱ را بدست می آورد همچنین اگر یکی از بازیکن ها منحرف شود، بازیکنی که منحرف شده است و از میدان خارج شده است payoff ۱ را بدست می آورد و بازیکنی که مستقیم به حرکتش ادامه داده و منحرف نشده است payoff ۲ را بدست می آورد و اگر هر دو منحرف نشود از آنجایی که به هم برخورد میکنند بدترین حالت پیش می آید و بیشترین ضرر را میکنند که آن را با M نشان میدهیم.

ماتریس این بازی به شکل زیر خواهد بود:

	منحرف	مستقیم
منحرف	1, 1	1, 2
مستقیم	2, 1	M, M

حال فرض میکنیم بازیکن ستونی منحرف میشود در این صورت برای بازیکن سطری best response این است که مستقیم حرکت کند. حال اگر بازیکن ستونی مستقیم حرکت کند best response برای بازیکن سطری این است که منحرف شود. برای بازیکن ستونی اگر بازیکن سطری منحرف شود best response این است که مستقیم حرکت کند و اگر بازیکن سطری مستقیم حرکت کند best response این است که منحرف شود پس داریم:

	منحرف	مستقیم
منحرف	1, 1	1, 2
مستقیم	2, 1	M, M

پس در این بازی ما دو نقطه ی Nash equilibria داریم که در ماتریس فوق مشخص شده است.

سوال دو

در این بازی سه player داریم که هر کدام دو استراتژی دارند. بازیکن شماره دو را به عنوان بازیکن سطری و بازیکن شماره سه را به عنوان بازیکن ستونی در نظر میگیریم.

در این سوال از payoff هایی منفی استفاده میکنیم که به معنای همان ضرر است و ما به دنبال کم کردن ضرر هستیم. ماتریس های به شکل زیر خواهد بود:

در حالتی که بازیکن شماره یک تصفیه میکند:

	تصفیه کردن	تصفیه نکردن
تصفیه کردن	-1, -1, -1	-1, -1, 0
تصفیه نکردن	-1, 0, -1	-4, -3, -3

در حالتی که بازیکن شماره یک تصفیه نمیکند:

	تصفیه کردن	تصفیه نکردن
تصفیه کردن	0, -1, -1	-3, -4, -3
تصفیه نکردن	-3, -3, -4	-3, -3, -3

حال best response را برای هر بازیکن پیدا میکنیم و در نهایت تلاقی آن را در نظر میگیریم.

	تصفیه کردن	تصفیه نکردن
تصفیه کردن	-1, -1, -1	-1, -1, 0
تصفیه نکردن	-1, 0, -1	-4, -3, -3

	تصفیه کردن	تصفیه نکردن
تصفیه کردن	0, -1, -1	-3, -4, -3
تصفیه نکردن	-3, -3, -4	-3, -3, -3

همانطور که می بینیم به چهار نقطه ی Nash equilibria در این بازی رسیدیم.

سوال سه

در حالتی که در کلاس بحث شد ما دو Nash داشتیم یکی زمانی که هیچکس سرمایه گذاری نکند در این صورت پشیمانی برای کسی وجود ندارد و دومی زمانی که همه ی افراد سرمایه گذاری میکردند در این صورت هم کسی پشیمان نمیشد اما در این مسئله از آنجایی که اگر بیش از ۹۰ درصد افراد سرمایه گذاری کنند به همه ۵ دلار داده میشود پس در حالتی که همه سرمایه گذاری کرده اند دیگر نقطه ی Nash نیست زیرا اگر فردی سرمایه گذاری نکند باز هم ممکن بود بیش از ۹۰ درصد افراد سرمایه گذاری کرده باشند فرد بدون اینکه ده دلار سرمایه گذاری کند، ۵ دلار بدست بیاورد. اما نقطه ای که هیچکس سرمایه گذاری نکند باز هم میتواند نقطه ی تعادل Nash باشد زیرا زمانی که هیچکس سرمایه گذاری نکند کسی پشیمان نخواهد بود. و نقطه ی تعادل بعدی در این مسئله زمانی است که دقیقا ۹۰ درصد افراد سرمایه گذاری کنند در این حالت نیز هیچ پشیمانی ای وجود ندارد چرا که اگر افرادی که سرمایه گذاری کرده اند، سرمایه گذاری نمیکردند در این صورت ۵ دلار را بدست نمی آورند و افرادی هم که سرمایه گذاری نکرده اند از آنجایی که بدون ریسک ۵ دلار را بدست می آورند پس آن ها هم پشیمان نیستند پس در نتیجه در این نقطه هیچ کس پشیمان نخواهد بود و همه best response خود را انجام داده اند.

سوال چهار

a)

در این حالت اگر $m=k=1$ باشد در این صورت چون $m=n-k$ است پس n برابر دو خواهد بود در یک بازی دو نفره که یک نفر طرفدار A است و یک نفر هم طرفدار B است اگر هر فردی به کاندیدای مورد نظرش رای دهد نتیجه ی بازی مساوی خواهد شد و هر یک payoff یک را بدست می آورند و از آنجایی که هزینه ی هر رای هم برابر c است در نهایت 1-c برای هر فرد باقی خواهد ماند. حال اگر یک فرد رای ممتنع دهد و فرد دیگر به کاندید دلخواه خود رای دهد در این صورت فردی که به کاندید مورد نظر خود رای داده 2-c بدست می آورد و فردی که ممتنع بوده 0 بدست می آورد و در نهایت اگر هر دو رای ممتنع دهند هر یک 0 بدست خواهد آورد. ماتریس بازی در این حالت به شکل زیر خواهد بود:

	رای دادن	ممتنع بودن
رای دادن	1-c, 1-c	2-c, 0
ممتنع بودن	0, 2-c	0,0

در این بازی اگر بازیکن ستونی رای دادن را انتخاب کند best response برای بازی کن سطری این است که او هم رای دادن را انتخاب کند و اگر بازی کن ستونی ممتنع بودن را انتخاب کند باز هم best response این است که بازیکن سطری رای دادن را انتخاب کند. همچنین اگر بازیکن سطری رای دادن را انتخاب کند در این صورت best response برای بازیکن این است که رای دادن را انتخاب کند و اگر بازیکن سطری ممتنع بودن را انتخاب کند best response اینجا انتخاب رای دادن است. پس همان طور که واضح است هر کدام از بازیکنان یک dominant strategy دارند که انتخاب رای دادن است پس داریم:

	رای دادن	ممتنع بودن
رای دادن	1-c, 1-c	2-c, 0
ممتنع بودن	0, 2-c	0,0

از آنجایی که اگر در یک بازی dominant strategy داشتیم شرط rationality این است که آن را انتخاب کنیم در نهایت هر دو رای دادن را انتخاب میکنند و هر یک 1-c را بدست می آورند.

b)

۱- اگر حالتی را در نظر بگیریم که همه ی افراد رای دهند و هر کس به کاندید مورد نظر خودش رای دهد چون تعداد رای ها برابر میشود در این صورت هر کدام مقدار 1-c را بدست می آورند حال اگر فردی تصمیم بگیرد که رای ممتنع بدهد باعث میشود تعداد رای های کاندید مورد نظرش کمتر شود و در این صورت مقدار 0 نصیبش میشود که از حالت قبلی کمتر است پس هیچکس با توجه به وضعیت فعلی نمی تواند کاری انجام دهد که payoff است بهتر شود و همه best response خود را انجام داده اند. و این حالت که همه رای داده اند حالت Nash equilibria است.

۲- حال اگر حالتی داشته باشیم که همه رای نداده باشند و تعداد افرادی که به A رای داده اند با تعداد افرادی که به B رای داده اند با هم مساوی باشد در این صورت اگر فردی که رای نداده است تصمیم خود را عوض کند و

به کاندیدای مورد نظر خودش رای بدهد در این صورت کاندید مورد نظرش برنده خواهد شد و مقداری که بدست می آورد از یک به 2-c می رسد. مثلاً اگر دو نفر طرفدار A باشند و دو نفر هم طرفدار B باشند و یکی از طرفداران A به A رای داده باشد و یکی از طرفداران B هم به B رای داده باشد در این صورت این دو فرد 1-c دریافت میکنند و آن دو فردی که رای نداده اند هم 1 دریافت میکنند که اگر یکی از آن ها تصمیم به رای دادن بکند به جای یک، 2-c میگیرد. پس این حالت Nash equilibria نیست.

۳- در این حالت فرض میکنیم که یک گروه با اختلاف بیشتر از یک از گروه دیگری جلو است مثلاً دو فرد به B رای داده اند و دو نفر دیگر که طرفدار A هستند هر دو رای ممتنع داده اند در این صورت فردی که در گروه B است میتواند رای بدهد و باز هم برنده ی بازی شود و به جای 2-c به 2 برسد پس این حالت Nash equilibria نیست. چون امکان بهبود وضعیت برای بازیکنی که در گروهی پیشرو با اختلاف بیشتر از یک است وجود دارد.

۴- در این حالت در نظر میگیریم یکی از گروه ها به اندازه یکی جلوتر از گروه دیگری است در این صورت فردی که طرفدار گروه عقب تر است و ممتنع باقی مانده است اگر به کاندید مورد نظر خود رای بدهد به جای اینکه صفر بدست بیاورد باعث مساوی شدن بازی میشود و 1-c بدست می آورد پس این حالت هم Nash equilibria نیست.

c)

در این حالت Nash equilibria نداریم فرض میکنیم در حالت اول همه ی افراد رای بدهند در این صورت افراد جز k چون تعداد k کمتر از m است بازنده خواهند شد پس در این صورت اگر رای نمیداند هزینه ای هم نداشتند و افراد جز m هم ممکن است تعداد از آن ها با رای ندادن به جای 2-c بتوانند 2 بدست بیاورند پس این حالت Nash equilibria نیست در حالت دیگر اگر همه ی افراد رای ندهند مشابه حالت قبل است که بررسی کردیم و در این حالت هم Nash equilibria نداریم به عنوان مثال فرض کنید در ابتدا هر k فرد رای میدهند گروه مقابل بهترین کاری که میتواند انجام دهد این است که تعداد k+1 نفر رای بدهند در این صورت گروه اول که میبیند بازنده است تصمیم میگرد کلاً رای ندهد بعد دوباره گروه دیگر میبیند میتواند به جای 2-c به 2 برسد و پس در حالتی که در گروه مقابل کسی رای نداده است تصمیم میگیرد یک رای بدهد که باز گروه مقابل میتواند تصمیم خود را عوض کند.

سوال پنج

در این مسئله ما دو استراتژی داریم یکی اینکه هر دو جعبه ی A و B را انتخاب کنیم و دیگری اینکه فقط جعبه ی B را انتخاب کنیم همچنین omega هم دو استراتژی دارد یکی اینکه حدس بزند ما دو جعبه را انتخاب می کنیم و صفر دلار را در جعبه بگذارد و دیگری اینکه حدس بزند ما جعبه ی B را انتخاب میکنیم و 1000000 دلار داخل جعبه ی B بگذارد ماتریس این مسئله به صورت زیر خواهد بود:

	حدس انتخاب B	حدس انتخاب A, B
انتخاب B	1000000	0
انتخاب A, B	1001000	1000

در این حالت ما اگر بدانیم omega حدس انتخاب B را انجام میدهد در این صورت best response ما انتخاب A, B است و اگر بدانیم omega حدس انتخاب A, B را انتخاب کرده است در این حالت هم ما best response مان این است که انتخاب A, B را بازی کنیم همان طور که میبینیم انتخاب A, B در این مسئله با این شرایط یک dominant strategy است. و در صورتی که omega حدس انتخاب B را بازی کند payoff ما برابر 1001000 خواهد بود و اگر حدس انتخاب A, B را بازی کند در این صورت payoff ما برابر 1000 خواهد بود. و چون شرط rationality این است که اگر ما dominant strategy داشتیم حتما آن را بازی کنیم پس در این حالت انتخاب A, B را بازی میکنیم.

میتوانیم این مورد را هم بررسی کنیم که به مثلاً دقت omega برابر 0.9 است.

$$B \text{ انتخاب} = 0.9 * 1000000 + 0.1 * 0 = 900000$$

$$A, B \text{ انتخاب} = 0.1 * 1001000 + 0.9 * 1000 = 101000$$

که همان طور که میبینید اگر چنین اطلاعاتی داشته باشیم میتواند نتیجه ی تصمیم را تغییر بدهد.