تکلیف اول درس نظریه بازی ها

مهسا امینی به شماره دانشجویی ۹۸۱۷۸۲۳

Problem 1

اگر بازیکن سطری را player1 بنامیم و بازیکن ستونی را player2 بنامیم. زمانی که player2، confess را بازی میکند بهترین کار برای player1 این است که او هم confess را بازی کند چون که نسبت به دو حالت قبلی ضرر کمتری دارد حال اگر player2، don't confess بازی کند باز هم کمترین هزینه را زمانی میدهیم که confess بازی کنیم و در نهایت اگر player2 ، run away بازی کند کمترین ضرر را در حالتی میبریم که don't confess را بازی کنیم. همانطور که مشاهده میکنیم در هیچ حالتی run away انتخاب نمیشود پس یک استراتژی مغلوب است که از آن استفاده نمیکنیم.

حال خود را جای بازیکن ستونی یا player2 میگذاریم. اگر player1، confess بازی کند player2 هم confess بازی میکند و اگر player1 استراتژی don't confess را بازی کند player2 در اینجا confess بازی میکند و اگر player1 استراتژی runaway را بازی کند player2 هم don't confess را بازی میکند پس در نتیجه player2 هم استراتژی runway را بازی نمیکند و این استراتژی مغلوب است و انتخاب نمیشود پس جدول جدید بازی به شکل زیر خواهد بود:

-5,-5	0,-6
-6,0	0,0

حال دوباره خود را جای player1 میگذاریم . اگر player2 استراتژی confess را بازی کند player1 هم confess را بازی میکند و اگر player2 استراتژی don't confess را بازی کند باز هم player1 استراتژی confess را بازی میکند پس میتوانیم بگوییم استراتژی confess برای player1 یک استراتژی strictly dominant حساب میشود پس طبق قانون های نظریه بازی زمانی که یک استراتژی strictly dominant داریم بر اساس rationality حتما باید آن را بازی کنیم. همه ی موارد گفته شده برای player2 هم به صورت است و player2 هم طبق همین دلایل باید confess بازی کند پس در نهایت به نقطه (-5,-5) میرویم.

Problem2

در ابتدا در نظر میگیریم player1 مقدار 0 را انتخاب کند با توجه به روابط مطرح شده در سوال بهترین استراتژی برای player2 این است که مقدار 100 را انتخاب کند. مقدار بدست آمده نهایی برای player1 با p1 و برای player2 با p2 نشان میدهیم.

1: a1=0 , p1=0 - a2=100, p2=100

حال با توجه به مقادیر بدست آمده player1 متوجه میشود که در صورت انتخاب 1 وضعیتش بهتر خواهد شد و استراتژی انتخاب عدد 1 یک استراتژی strictly dominant برای استراتژی انتخاب عدد صفر است.

2: a1=1, p1=1 – a2=99, p2=99

حال باز هم اگر player1 عدد 2 را انتخاب میکرد وضعیت بهتری داشت و انتخاب عدد 2 یک استراتژی strictly dominant برای استراتژی انتخاب عدد 1 است.

با استدلال مشابه به این نتیجه میرسیم که انتخاب از بازه [0,50] صورت نمیگیرد چرا که این استراتژی ها strictly dominated هستند و برای هر کدوم یک استراتژی غالب وجود دارد. پس از آنجایی که player های ما شرط rationality را دارند و قانون نظریه بازی این است که در صورت وجود استراتژی strictly dominant آن را باید بازی کرد پس در این بازه را حذف میکنیم.

حال در نظر میگیریم player1 عدد 100 را انتخاب کنید در این صورت player2 عدد 99 را بازی میکند و داریم:

3: a1=100, p1=1 – a2=99 ,p2=99

حال player1 اگر 99 را انتخاب کند وضعیت بهتری پیدا میکند.

4: a1= 99, p1=2 – a2=98, p2=98

در این حالت مشاهده میکنیم که انتخاب عدد 99 یک استراتژی strictly dominant درمقابل انتخاب عدد 100 است و انتخاب عدد یک استراتژی strictly dominated به حساب می آید.

حال با استدلال مشابه ادامه میدهیم تا به انتخاب عدد 52 توسط player1 میرسیم.

5: a1=52, p1=49 – a2=51, p2=51

که اگر player1 51 را بازی کند استراتژی انتخاب 52 را مغلوب میکند.

پس انتخاب هر کدام باید عدد 51 باشد.

که نتیجه ی نهایی به شکل زیر خواهد بود:

6: a1=51 , p1=50 – a2=51, p2=50

Problem3

a

اگر یک استراتژی بدون توجه به استراتژی های انتخاب شده توسط بازیکنان دیگر، حداقل payoff یا outcome یکسانی را برای بازیکنان به همراه داشته باشد و حداقل در یک موقعیت هم نتیجه ی بهتری را داشته باشد در این صورت می گوییم این این استراتژی ، استراتژی های دیگر را weakly dominates میکند. و در واقع استراتژی های دیگر weakly dominant هستند.

در ابتدا در نظر میگیریم $x_i \neq x_i^*$ و فرض میکنیم $x_i > x_i^*$. اگر تعداد بازیکن ها را n در نظر بگیریم در این صورت آن ها را به دو گروه تقسیم میکنیم. یکی گروه اول که تعداد آن ها $(n-1)/2$ است و نیمه ی اول قرار دارند و حداکثر مقدار آن ها را برابر $\max$ قرار میدهیم و گروه دوم که تعداد آن ها برابر $(n+1)/2$ است و در نیمه ی دوم قرار میگیرند و حداقل مقدار آن ها را برابر $\min$ در نظر میگیریم. در این صورت اگر $x_i^* \geq \min$ در این صورت باز هم تفاوتی بین انتخاب x_i^* و x_i وجود ندارد. همچنین اگر $x_i \leq \max$ تفاوتی بین انتخاب x_i^* و x_i وجود ندارد. حالا شرایط دیگری را در نظر میگیریم که در آن $x_i^* < \min$ و $x_i > \max$ در این صورت انتخاب x_i^* بهتر است. همچنین اگر حالتی داشته باشیم که در آن نصف بازیکن های باقی مانده

از x_i^* کمتر باشند و نصف بازیکن های باقی مانده هم از x_i بیشتر باشند در این حالت هم انتخاب x_i^* بهتر است.

به همین روش میتوانیم اثبات کنیم که اگر $x_i^* > x_i$ باشد باز هم در همه ی حالت ها x_i^* یا وضعیت مشابه دارد یا از بقیه ی استراتژی ها بهتر است.

b

خیر در زمانی که از mean استفاده شود دیگر انتخاب استراتژی x_i^* نمیتواند استراتژی های دیگر را weakly dominates کند برای این قسمت میتوانیم یک مثال نقض ارائه کنیم فرض کنید سیاست های زیر را داریم :

$-3, 0.2, 1, 9$

و همیچنین سیاست مورد علاقه ی ما عدد 3 است در این حالت اگر عدد 3 را انتخاب کنیم میانگین به صورت زیر خواهد شد:

$$\frac{-3+0.2+1+9+3}{5} = 2.04$$

در صورتی که اگر عدد 4.8 را انتخاب کنیم در نهایت میانگین برابر 3 خواهد شد:

$$\frac{-3+0.2+1+9+4.8}{5} = 3$$

Problem4

قسمت a

مقادیری را به عنوان نمونه محاسبه میکنیم تا الگو را در صورت وجود بیابیم:

N=11

P1(3,8) = 5 , P2(3,8) =6

P1(5,6) = 5 , p2(5,6)=6

P1(1,11) = 5.5 , P2(1,11)=5.5

P1(2,10) = 5.5 ,P2(2,10)=5.5

P1(3,9) = 5.5, P2(3,9)=5.5

P1(3,4)=3 , P2(3,4)=8

P1(1,6)=3 , P2(1,6)=8

P1(3,7)=4.5 , P2(3,7)=6.5

طبق اعداد به دست آمده رابطه ی زیر را متوجه خواهیم شد:

$$p_i(s_i, s_{-i}) = \frac{s_i + s_{-i} - 1}{2}$$
$$p_{-i}(s_i, s_{-i}) = N - \frac{s_i + s_{-i} - 1}{2}$$

به عنوان مثال داریم:

$$p_1(3,7) = \frac{3+7-1}{2} = 4.5$$
$$p_2(3,7) = 11 - \frac{3+7-1}{2} = 6.5$$

قسمت b

$$outcome = p_i(s_i, s_{-i}) + p_{-i}(s_i, s_{-i}) = \frac{s_i + s_{-i} - 1}{2} + N - \frac{s_i + s_{-i} - 1}{2} = N = 2k - 1$$

قسمت c

با توجه به قسمت b مقدار outcome برابر با $N = 2k - 1$ شد پس مقدار آن منحصر به فرد خواهد بود.

Problem5

رمزگذاری آستانه یک تکنیک است که از آن برای توزیع یک رمز بین گروهی از شرکت کنندگان استفاده میشود و رمز تنها زمانی قابل استفاده است که تعداد مشخصی از شرکت کنندگان باهم همکاری کنند و هیچ یک از شرکت کنندگان به طور کامل از رمز آگاهی ندارد. چنین روشی باعث میشود سطح بهتری از امنیت بدست آید.

فرض میکنیم سه فرد به نام های A,B,C داریم که هر کدام قسمتی از رمز را در اختیار دارند و راز زمانی بر ملا میشود که حداقل دو نفر از افراد تصمیم بگیرند آن را برملا کنند پس به طور خلاصه سه فرد داریم که حد آستانه هم برای نمایان شدن در این مسئله دو تعریف شده است.

Payoff functions هم به صورت زیر تعریف میشود :

سود هر یک از طرفین بر اساس این است که آیا آنها می توانند راز را بازسازی کنند و منافع فردی خود را از دانستن راز بدست بیاورند اگر یک طرف بتواند راز را بازسازی کند، payoff یک را دریافت می کند. در غیر این صورت، سود آنها صفر است.

اما این سناریو از استراتژی های weakly dominated در امان نمی ماند زیرا:

در ابتدا، هر سه طرف سهمی از راز دارند سپس A متوجه میشود که اگر B همکاری کند میتوانند راز را بازسازی کنند. در همین هنگام C به عنوان یک عضو rational میفهمد که A و B به او نیازی ندارند پس تصمیم

میگیرد سهم خود را به B بفروشد تا حداقل مقداری را بدست آورد پسB دارای دو سهم است و دیگر نیازی به A ندارد پس در اینجا A هم تصمیم میگیرد سهم خود را به B بفروشد تا چیزی عایدش شود. پس در نهایت B سه سهم را دارد و میتواند به تنهایی تصمیمات را بگیرد. پس حذف weakly dominated استراتژی ها در این سوال باعث میشود که دیگر رمز تحث اشتراک سه نفر نباشد و عملا به دست یک نفر بیفتد.