تکلیف سوم نظریه بازی

مهسا امینی ۹۸۱۷۸۲۳

سوال یک

این بازی pure NE ندارد.

احتمال اینکه بازیکن شماره یک T را بازی کند p و احتمال اینکه B را بازی کند 1-p در نظر میگیریم. بازیکن دو اگر L را بازی کند q و احتمال اینکه R را بازی کند 1-q فرض میکنیم و در نهایت بازیکن شماره سه X را با احتمال z و Y را با احتمال 1-z انتخاب میکند.

$$E[U_3((p,1-p),(q,1-q),X)] = (0*p*q)+(2*p(1-q))+(2*(1-p)q)-(2(1-p)(1-q)) =$$
$$2p-2pq+2q-2pq-2+2q+2p-2pq = 4p+4q-6pq-2$$
$$E[U_3((p,1-p),(q,1-q),Y)] = (-2*pq)+(2*p(1-q))+(2*(1-p)q)+0 =$$
$$-2pq+2p-2pq+2q-2pq = -6pq+2p+2q$$
$$E[U_3((p,1-p),(q,1-q),X)] = E[U_3((p,1-p),(q,1-q),Y)]$$
$$4p+4q-6pq-2 = -6pq+2p+2q$$
$$2p+2q-2=0$$

$$E[U_2((p,1-p),L,(z,1-z)] = (0*p*z)+((1-p)z(-4))+(3p(1-z))+((1-p)(1-z)) =$$
$$-4z+4pz+3p-3pz+1+pz-p-z = -5z+2pz+2p+1$$
$$E[U_2((p,1-p),R,(z,1-z)] = (z*p)+(2(1-p)z)+(-4(p)(1-z)) =$$
$$pz+2z-2pz-4p+4pz = 3pz+2z-4p$$
$$E[U_2((p,1-p),L,(z,1-z)] = E[U_2((p,1-p),R,(z,1-z)]$$
$$-5z+2pz+2p+1 = 3pz+2z-4p$$
$$pz+7z-6p-1=0$$

$$E[U_1(T,(q,(1-q),(z,1-z)] = 0+(-4(1-q)z)+(3(q)(1-z))+((1-q)(1-z)) =$$
$$-4z+4qz+3q-3qz+1-z-q+qz = -5z+2qz+2q+1$$
$$E[U_1(B,(q,(1-q),(z,1-z)] = (qz)+(2(1-q)z)+(-4(q)(1-z)) =$$
$$3qz+2z-4q$$
$$E[U_1(T,(q,(1-q),(z,1-z)] = E[U_1(B,(q,(1-q),(z,1-z)]$$
$$3qz+2z-4q = -5z+2qz+2q+1$$
$$qz+7z-6q-1=0$$

پس در نهایت به سه عبارت زیر میرسیم:

$$2p-2q-2=0$$
$$pz+7z-6p-1=0$$
$$qz+7z-6q-1=0$$

پس از حل معادلات بالا داریم:

$$p=\frac{1}{2}$$
$$z=\frac{8}{15}$$
$$q=\frac{1}{2}$$

سوال دو

ماتریس این بازی را به صورت زیر در نظر میگیریم:

	R	S	P
R	0, 0	1, -1	-1, 1
S	-1, 1	0, 0	1, -1
P	1, -1	-1, 1	0, 0

ابتدا برای بازیکن یک بررسی میکنیم. احتمال انتخاب R توسط بازیکن دو برابر p احتمال انتخاب S برابر q و احتمال انتخاب P را برابر 1-p-q در نظر میگیریم.

$$U_1(R,(p,q,(1-p-q))=p*0+q+(1-p-q)*-1=2q+p-1$$
$$U_1(S,(p,q,(1-p-q))=-p+1-p-q=1-2p-q$$
$$U_1(p,(p,q,(1-p-q))=p-q$$

$$U_1(R,(p,q,(1-p-q))=U_1(S,(p,q,(1-p-q))$$
$$U_1(R,(p,q,(1-p-q))=U_1(P,(p,q,(1-p-q))$$

$$1)2q+p-1=p-q$$
$$2)2q+p-1=1-2p-q$$
$$3q=1->q=1/3$$
$$3p=1->p=1/3$$
$$1-1/3-1/3=1/3$$

برای بازیکن دو هم به صورت مشابه میتوانیم اثبات کنیم.

سوال سه

a)

ابتدا برای واضح شدن مسئله برای n=2 و n=3 ماتریس ها را رسم میکنیم:

n=2

	زنگ زدن	زنگ نزدن
زنگ زدن	v-c, v-c	v-c, v
زنگ نزدن	v, v-c	0, 0

n=3

بازیکن سوم زنگ بزند:

	زنگ زدن	زنگ نزدن
زنگ زدن	v-c, v-c, v-c	v-c, v, v-c
زنگ نزدن	v, v-c, v-c	v, v, v-c

بازیکن سوم زنگ نزند:

	زنگ زدن	زنگ نزدن
زنگ زدن	v-c, v-c, v	v-c, v, v
زنگ نزدن	v, v-c, v	0, 0, 0

اگر در یک بازی n بازیکن داشته باشیم زمانی که فقط یکی از بازیکن ها زنگ بزند نقطه ی NE است زیرا در این صورت بازیکنی که زنگ زده است payoff آن برابر v-c است و اگر زنگ نزدن چون بقیه ی بازیکنان نیز زنگ نزده اند payoff اش به 0 تغییر میکند همچنین بقیه ی بازیکن ها که استراتژی زنگ نزدن را انتخاب کرده اند payoff آن ها v است و اگر استراتژی خود را به زنگ زدن تغییر دهند payoff آن ها از v به v-c تغییر میکند و کم میشود پس هیچ بازیکنی به تنهایی با تغییر استراتژی نمیتواند وضعیت خود را بهبود ببخشد. پس حالتی که یک بازیکن زنگ میزند و بقیه زنگ نمیزنند NE است و از آنجایی که n بازیکن داریم پس n حالت و در نهایت n تا NE داریم. همچنین اگر حالت های دیگر را بررسی کنیم در حالتی که هیچکس زنگ نزده است همه ی افراد payoff صفر را دارند که در این حالت پشیمانی داریم زیرا اگر یکی از بازیکن ها استراتژی خود را به زنگ زدن تغییر دهد payoff اش از صفر به v-c افزایش می یابد . همچنین در حالتی که بیشتر از یک نفر هم زنگ زده اند باز هم پشیمانی داریم زیرا فرد میتوانست payoff اش را v-c به v افزایش دهد.

همچنین این بازی symmetric است پس باید symmetric NE داشته باشد اما symmetric pure NE نداشت پس باید symmetric mixed NE داشته باشد.

b)

احتمال اینکه هیچ یک از افراد به پلیس زنگ نزند:

اگر احتمال زنگ زدن به پلیس را برابر p در نظر بگیریم:

$$(1-p)^n$$

احتمال اینکه حداقل یک نفر به پلیس زنگ بزند:

این احتمال برابر با اینکه احتمال اینکه هیچکس زنگ نزند را از یک کم کنیم:

$$1-(1-p)^n$$

c)

در حالت mix باید رابطه ی زیر برقرارباشد:

$$U_i(call, p_{-i}) = U_i(don't\,call, p_{-i})$$

در حالتی که زنگ بزنیم بدون توجه به اینکه بقیه ی افراد چه استراتژی ای انتخاب میکنند payoff ما برابر v-c خواهد بود.

$$U_i(call, p_{-i}) = v-c$$

در حالتی که زنگ نزنیم اگر بقیه ی افراد هم زنگ نزده باشند payoff ما برابر صفر است. اگر حداقل یکی از افراد زنگ زده باشد payoff ما برابر v خواهد بود. همان طور که در قسمت b دیدیم احتمال اینکه حداقل یک نفر زنگ بزند در حالتی که تعداد افراد ما n باشد برابر است با :

$$1-(1-p)^n$$

در این قسمت چون تکلیف یک نفر مشخص شده است پس باید n-1 را در نظر بگیریم.

$$U_i(don't\,call, p_{-i}) \quad = v(1-(1-p)^{n-1})$$

حال دو عبارت بدست آمده را برابرقرار میدهیم:

$$v-c = v(1-(1-p)^{n-1})$$

$$1-\frac{c}{v} = 1-(1-p)^{n-1}$$

$$\frac{c}{v} = (1-p)^{n-1}$$

$$p = 1-(\frac{c}{v})^{\frac{1}{n-1}}$$

d)

با توجه به رابطه ای که در قسمت c بدست آوردیم اگر n افزایش یابد p کاهش می یابد و احتمال اینکه فردی زنگ بزند کمتر خواهد شد. همچنین تا توجه به رابطه ای که قسمت اول b بدست آوردیم اگر n افزایش یابد احتمال اینکه هیچکس زنگ نزند هم کاهش می یابد.

سوال چهار

اگر بازیکن سه X را انتخاب کند:

	R	T
Z	1, 1, -0.5	0, 0, 0
Y	1, -1.5, 1	2, -0.5, -0.5

اگر بازیکن سه Y را انتخاب کند:

	R	T
Z	-0.5, 2, -0.5	-1.5, 1, 1
Y	-0.5, -0.5, 2	0.5, 0.5, 0.5

خانه هایی که توسط سه رنگ مشخص شده اند NE هستند. در این بازی سه تا NE داریم.

سوال پنج

Bertrand duopoly

در این بازی دوfirms داریم. که قیمت را انتخاب میکنند و انتخاب قیمت در واقع همان استراتژی است.

Two firms 1, 2

Selects price $p_i \in [0, \infty)$

خریدار ها کالا را از فردی میخرند که قیمت کمتری داشته باشد و فردی که قیمت کمتری معین کند کل بازار را در دست میگیرد. و همچنین کالا های تولید شده توسط دو شرکت را کاملا یکسان میگیریم و تنها وجه تفاوت آن ها قیمت آن ها خواهد بود.

$market \quad price \to$

$$Q = \frac{a - p_i}{b}$$

حال برای اینکه profit function را بدست آوریم باید میزان قیمتی که داریم را از هزینه ای که برای ساخت یک محصول صرف میکنیم کم کنیم و آن را در تعداد که Q در نظر گرفتیم ضرب کنیم. همچنین هزینه ی تولید هر محصول را هم برای هر دو شرکت یکسان در نظر خواهیم گرفت.

Profit function of firm i:

$$\pi_i = \begin{cases} (p_i - c)(\frac{a-p_i}{b}) & p_i < p_j \\ \frac{(p_i - c)}{2}(\frac{a-p_i}{b}) & p_i = p_j \\ 0 & p_i > p_j \end{cases}$$

حال به سراغ NE میرویم. میتوانیم از روش مشتق گیری حل کنیم اما یک روش راحتر guess and verify approach است.

حدس:

Unique NE is $p_1 = p_2 = c$, $\pi_1 = \pi_2 = 0$

فرض کنیم بازیکن یک مقداری کمتر از c قیمت گذاری میکرد در این صورت profit آن از منفی میشد در حالی که الان profit آن صفر است پس وضعیتش بدتر میشد. همچنین اگر مقداری بیشتر از c قیمت گذاری میکرد در این صورت بازیکن دوم کل بازار را میتوانست در دست بگیرد پس در این نقطه پشیمانی وجود ندارد و هیچ از بازیکنان به تنهایی نمیتوانند profit خود را افزایش دهند.

حال در این مرحله بررسی میکنیم که آیا NE دیگری وجود دارد یا نه.

اگر قیمت گذاری را کمتر از c بگذاریم که شرکت ضرر میکند پس حالاتی را بررسی میکنیم از بزرگتر یا مساوی c باشد.

اگر $p_1 = p_2 > c$:

این نقطه NE نیست زیرا پشیمانی به همراه دارد. از آنجایی که قیمت ها با هم برابر هستند در نتیجه هر کدام نصف بازار را شامل میشوند. در صورتی که اگر به اندازه ی ε از قیمت خود کم میکرد میتوانست کل بازار را دربر بگیرد.

اگر $p_1 \neq p_2$:

۱- فرض میکنیم $c < p_1 < p_2$ که در این حالت بازیکن شماره ۲ پشیمان خواهد شد زیرا بازیکن یک کل بازار را میگیرد. همچنین عکس این قضیه نیز برقرار است. یعنی اگر بازیکن یک قیمت بیشتری را مشخص کرده بود در این حالت بازیکن یک پشیمان میشد.

۲- اگر $c = p_1 < p_2$ در این صورت باز هم پشیمانی وجود دارد زیرا بازیکن یک میتوانست قیمت خود را بیشتر کند و profit خود را افزایش دهد. این رابطه به صورت مشابه برای بازیکن دو نیز برقرار است.

پس اثبات کردیم این بازی یک NE دارد و زمانی است که هر دو بازیکن قیمت را برابر c قرار بدهند و هر یک profit صفر را بدست آورند.

در Cournot duopoly ما تعداد را مشخص میکردیم ولی در این بازی ما قیمت را مشخص میکنیم. همچنین در Cournot duopoly ، profit ما مثبت ما بود در حالی که در این بازی صفر است.

به طور کلی Bertrand duopoly زمانی مناسب تر است که شرکت توانایی تغییر قیمت را به آسانی داشته باشند و محصولات هم در آن همگن تر هستند و علاوه بر این ها مصرف کنندگان به قیمت حساس تر باشند. و Cournot duopoly زمانی مناسب تراست که شرکت ها توانایی تنظیم سطح تولیدات خود را داشته باشند و محصولات هم جایگزین کامل هم نیستند اما متمایز هستند.