سوال یک

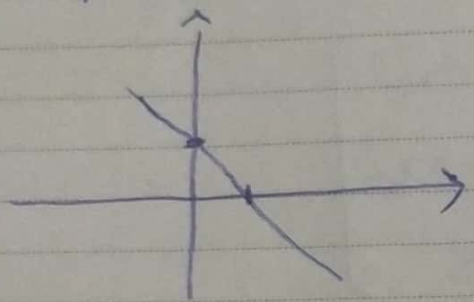
a)

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} x+y \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow x+y=1$$

فضای برداری به حالت مقابل خواهد بود.

R^2



همان طور که می دانیم یکی از ویژگی های فضای برداری این است که

$$\exists 0 \in V \qquad \forall x \in V \qquad x+0=x$$

که صفر جز این فضا نیست پس a فضای برداری نیست

b)

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 &= 0 \\ 4x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 &= 0 \end{aligned}$$

پس از حل سه معادله سه مجهول برای این جواب می رسیم

$$(x_1, x_2, x_3) = (0,0,0)$$

پس فقط با نقطه‌ی صفر سروکار داریم که یک فضای برداری است

c) $$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + 3x_2 + x_3 + 4x_4 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 \\ 5x_1 + 3x_2 + 3x_4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \\ y_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1' + 3x_2' + x_3' + 4x_4' \\ 2x_1' + x_2' + x_3' + 2x_4' \\ 5x_1' + 3x_2' + 3x_4' \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y_1'' \\ y_2'' \\ y_3'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1'' + 3x_2'' + x_3'' + 4x_4'' \\ 2x_1'' + x_2'' + x_3'' + 2x_4'' \\ 5x_1'' + 3x_2'' + 3x_4'' \end{bmatrix}$$

۱ $x + y = y + x \rightarrow \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \\ y_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \\ y_3' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$

۲ $x + (y + z) = (x + y) + z$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} + \left(\begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \\ y_3' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_1'' \\ y_2'' \\ y_3'' \end{bmatrix} \right) = \left(\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \\ y_3' \end{bmatrix} \right) + \begin{bmatrix} y_1'' \\ y_2'' \\ y_3'' \end{bmatrix}$$

۳ $\exists\, 0 \in V \quad \forall x \in V \quad x + 0 = x$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

(۴) $\forall x \quad \exists -x \qquad x+(-x)=0$

$$\begin{bmatrix} x_1+3x_2+x_3+4x_4 \\ 2x_1+x_2+x_3+2x_4 \\ 5x_1+3x_2+3x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -x_1-3x_2-x_3-4x_4 \\ -2x_1-x_2-x_3-2x_4 \\ -5x_1-3x_2-3x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(۵) $\forall \lambda \in F \quad \forall x, y \in V \qquad \lambda(x+y) = \lambda x + \lambda y$

$$\lambda\left(\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \\ y_3' \end{bmatrix}\right) = \lambda\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} + \lambda\begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \\ y_3' \end{bmatrix}$$

(۶) $(\lambda\mu)x = \lambda(\mu x)$

$$(\lambda\mu)\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda\mu y_1 \\ \lambda\mu y_2 \\ \lambda\mu y_3 \end{bmatrix} \qquad \lambda\begin{bmatrix} \mu y_1 \\ \mu y_2 \\ \mu y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda\mu y_1 \\ \lambda\mu y_2 \\ \lambda\mu y_3 \end{bmatrix}$$

باهم برابرند

(۷) $(\lambda+\mu)x = \lambda x + \mu x$

$$(\lambda+\mu)\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\lambda+\mu)y_1 \\ (\lambda+\mu)y_2 \\ (\lambda+\mu)y_3 \end{bmatrix}$$

= باهم برابرند

$$\lambda\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} + \mu\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\mu+\lambda)y_1 \\ (\mu+\lambda)y_2 \\ (\mu+\lambda)y_3 \end{bmatrix}$$

(۸) $1 \cdot x = x$

$$1\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1y_1 \\ 1y_2 \\ 1y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

سوال ۲

استقلال خطی ← بردار های $v_1, v_2, \ldots, v_k$ را مستقل خطی می گوییم هرگاه نتوان یک ترکیب خطی با ضرایب ناصفر را برابر صفر قرار داد

$\forall \lambda_i \in R$

$\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_k v_k = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_k = 0$

$$\lambda_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \lambda_3 \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ a \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_1 \\ \lambda_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \lambda_2 \\ \lambda_2 \\ 2\lambda_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5\lambda_3 \\ 5\lambda_3 \\ a\lambda_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + 5\lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + 5\lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 + a\lambda_3 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + 5\lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 + a\lambda_3 = 0 \end{cases}$$

$\lambda_2 + (a - 5)\lambda_3 = 0 \rightarrow \lambda_2 + a\lambda_3 - 5\lambda_3 = 0$

$a\lambda_3 = 5\lambda_3 - \lambda_2$ $\quad \boxed{a = \dfrac{5\lambda_3 - \lambda_2}{\lambda_3}}$

سوال ۳ - (a

می خواهیم یک ترکیب خطی پیدا کنیم که برابر v شود این عبارت را

$(x^3 + 2x^2 - x + \frac{1}{2})$ را در -1 ضرب می کنیم ← $-x^3 - 2x^2 + x - \frac{1}{2}$

و این عبارت را $(x^3 + x^2 + 1)$ در 2 ضرب می کنیم ← $2x^3 + 2x^2 + 2$

حال هر دو را با هم جمع می کنیم ← $\boxed{x^2 + x + \frac{3}{2}}$

۱۴۰۰

b) $y = \cos(2x)$

$$\cos(2x) = 2\cos^2 x - 1 = 2\cos^2 x - (\cos^2 x + \sin^2 x)$$

$$\boxed{\cos^2 x - \sin^2 x}$$

که برای رسیدن به آن کافی است $\sin^2 x$ را در منفی یک ضرب کرده و با $\cos^2 x$ جمع کنیم.

۴) سا زیر فضای برداری گوییم اگر W نسبت به جمع و ضرب اسکالر بسته باشد

① $\forall\, x,y \in W \quad x+y \in W$

② $\forall\, x \in W,\ \lambda \in R \quad \lambda x \in W$

اثبات ①

$$v_1 = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \in W \rightarrow \begin{cases} b_1 + b_2 = b_3 \\ b_1 + 2b_2 + b_3 = 0 \end{cases}$$

$$v_1' = \begin{bmatrix} b_1' \\ b_2' \\ b_3' \end{bmatrix} \in W \rightarrow \begin{cases} b_1' + b_2' = b_3' \\ b_1' + 2b_2' + b_3' = 0 \end{cases}$$

$$v_1 + v_1' = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1' \\ b_2' \\ b_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 + b_1' \\ b_2 + b_2' \\ b_3 + b_3' \end{bmatrix}$$

حال چک می‌کنیم برای بردار حاصل جمع بدست آمده آیا روابط صدق می‌کند یا نه

$$(b_1 + b_1') + (b_2 + b_2') = b_3 + b_3'$$

$$b_3 \qquad b_3'$$

چون $b_1 + b_2 = b_3$ و $b_1' + b_2' = b_3'$ در نتیجه رابطه‌ی فوق درست است

$$b_1 + b_1' + 2b_2 + 2b_2' + b_3 + b_3' = 0$$

عبارت را جداسازی کنیم

$$\underbrace{b_1 + 2b_2 + b_3}_{0} + \underbrace{b_1' + 2b_2' + b_3'}_{0} = 0$$

در هر دو رابطه صدق کرد.

۱۴۰۰

اثبات ۲

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \in w$$

می‌خواهیم اثبات کنیم $\lambda \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$ نیز عضو w است

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \in w \rightarrow \begin{aligned} & b_1 + b_2 = b_3 \\ & b_1 + 2b_2 + b_3 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} \lambda b_1 \\ \lambda b_2 \\ \lambda b_3 \end{bmatrix} \in w \rightarrow \lambda b_1 + \lambda b_2 \overset{?}{=} \lambda b_3$$

$$\rightarrow \lambda (b_1 + b_2) = \lambda b_3$$

$$\rightarrow b_1 + b_2 = b_3 \checkmark$$

$$\lambda b_1 + 2\lambda b_2 + \lambda b_3 = 0$$

$$\lambda (b_1 + 2b_2 + b_3) = 0$$

$$b_1 + 2b_2 + b_3 = 0 \checkmark$$

- پس اثبات کردیم که زیر فضا است

پیدا کردن پایه

$$b_1 + b_2 = b_3 \qquad b_1 + 2b_2 + b_1 + b_2 = 0$$

$$2b_1 + 3b_2 = 0 \qquad b_1 = -\frac{3}{2} b_2$$

$$b_3 = -\frac{3}{2} b_2 + b_2 = -\frac{b_2}{2} \rightarrow \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} b_2 \\ b_2 \\ -\frac{1}{2} b_2 \end{bmatrix}$$

b) $v_1 = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \in W$ $\quad b_1 b_2 - b_3 = 0$

$v_1' = \begin{bmatrix} b_1' \\ b_2' \\ b_3' \end{bmatrix} \in W$ $\quad b_1' b_2' - b_3' = 0$

$$v_1 + v_1' = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1' \\ b_2' \\ b_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 + b_1' \\ b_2 + b_2' \\ b_3 + b_3' \end{bmatrix}$$

حال باید چک کنیم بردار حاصل جمع v_1 و v_1' در زیر فضا هست یا نه

$$(b_1 + b_1')(b_2 + b_2') - (b_3 + b_3') \overset{?}{=} 0$$

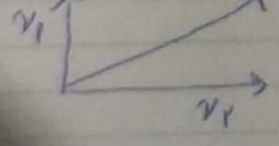
$$b_1 b_2 + b_1 b_2' + b_1' b_2 + b_1' b_2' - b_3 - b_3' \overset{?}{=} 0$$

$$\underbrace{b_1 b_2 - b_3}_{0} + \underbrace{b_1' b_2' - b_3'}_{0} + b_1 b_2' + b_1' b_2 \overset{?}{=} 0$$

$\to b_1 b_2' + b_1' b_2 \to$ که لزوما برابر صفر نیست پس زیر فضا نیست

سوال ۵) _ a) غلط است _ می دانیم برای اینکه یک صفحه در R^3 زیر فضا باشد باید از مبدا عبور کند و اگر دو صفحه‌ی موازی داشته باشیم که هیچکدام از مبدا عبور نکنند در این صورت هیچکدام زیر فضا نیستند.

b) غلط است اگر داشته باشیم



که آن ها متقاطع نیستند اما $v_1 + v_2 = v_3$ پس v_1, v_2, v_3
می بینیم
پس آن ها وابسته هستند

c) خیر اشتباه است زیرا ممکن است دو ماتریس نا متقارن

را باهم جمع بزنیم و متقارن شود

d) x است اگر w_1 متعامد xy باشد $\{a_1, a_2, 0, 0\}$

و w_2 متعامد zt باشد $\{0, 0, a_3, a_4\}$ اشتراک این

دو متعامد صفر است که بعد آن صفر است

سوال ۶ -

$$B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

برای اینکه پایه باشد ① باید مستقل خطی باشد ② باید فضا را
باشد یعنی کل فضا را تولید کند

① ← هرکدام یک درایه ی غیر صفر دارند که در دوتای دیگر صفر
است پس به ناچار c ها باید صفر باشند

② هر ترکیب درایه های به جز قطر صفر اند
(a 0 0

سوال ۷ـ W را زیرفضا گوییم اگر W نسبت به جمع برداری و ضرب اسکالر بسته باشد

a) ① $\forall x,y \in W \quad x+y = W$

$$W_A = \{ M \in R^{3\times 3} \mid AM = MA \}$$

$$AM_x = M_x A$$

$$AM_y = M_y A$$

حال دو طرف را باهم جمع می‌کنیم ←

$$AM_x + AM_y = M_x A + M_y A$$

$$A(M_x + M_y) = (M_x + M_y)A$$

کافی است یک تغییر متغیر بدهیم بجای $M_x + M_y$ ، M_z را قرار دهیم

$$AM_z = M_z A \in W$$

پس نسبت به جمع برداری بسته است

② $\forall x \in W \quad \lambda \in R \quad \lambda x \in W$

$$A \lambda M_1 = \lambda M_1 A \rightsquigarrow A(\lambda M) = \lambda AM = \lambda MA$$

$$\rightarrow AM = MA$$

که ضریب قابل حذف است

۱۴۰۰

b) $AM = MA$

$$\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_4 & a_5 & a_6 \\ a_7 & a_8 & a_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_4 & a_5 & a_6 \\ a_7 & a_8 & a_9 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} aa_1 & aa_2 & aa_3 \\ ba_4 & ba_5 & ba_6 \\ ca_7 & ca_8 & ca_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} aa_1 & ba_2 & ca_3 \\ aa_4 & ba_5 & ca_6 \\ aa_7 & ba_8 & ca_9 \end{bmatrix}$$

برای اینکه رابطه ی فوق برقرار باشد a_1 ، a_5 و a_9 هر عدد دلخواهی می توانند باشند و بقیه باید صفر باشند پس داریم:

$$\begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_5 & 0 \\ 0 & 0 & a_9 \end{bmatrix}$$

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

پایه برای این زیرفضا

$\dim(W_A) = 3$

c) $$\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_4 & a_5 & a_6 \\ a_7 & a_8 & a_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_4 & a_5 & a_6 \\ a_7 & a_8 & a_9 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} aa_1 & aa_2 & aa_3 \\ aa_4 & aa_5 & aa_6 \\ ba_7 & ba_8 & ba_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} aa_1 & aa_2 & ba_3 \\ aa_4 & aa_5 & ba_6 \\ aa_7 & aa_8 & ba_9 \end{bmatrix}$$

a_1 ، a_5 و a_9 ، a_4 ، a_2 می توانند آزاد باشند دیگر صفر پس داریم:

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & 0 \\ a_4 & a_5 & 0 \\ 0 & 0 & a_9 \end{bmatrix}$$

باید برای این زیرفضا

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

پس ۵ بعد داریم