5 تیر پنجشنبه 25 Jun. 2020 Thursday

مرسا احسن ۹۸۱۷۸۲۳

سوال یک

a-

$$w_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad w_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$u_1 = \frac{w_1}{\|w_1\|} = \frac{1}{\sqrt{4}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}$$

$$u_2 = \frac{w_2 - \langle w_2, u_1 \rangle u_1}{\| w_2 - \langle w_2, u_1 \rangle u_1 \|} =$$

$$\langle w_2, u_1 \rangle = 3/2 + 3/2 - 1/2 - 1/2 = 2$$

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix} \qquad u_2 = \frac{\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix}}{\sqrt{16}} =$$

$$u_2 = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ -1/2 \\ -1/2 \end{bmatrix}$$

6 تیر جمعه 26 Jun. 2020 Friday

b-

$$\text{proj}_w^y = \langle y, u_1 \rangle u_1 + \langle y, u_2 \rangle u_2$$

$$y = \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \langle y, u_1 \rangle = 6 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{2} = 4$$

$$\langle y, u_2 \rangle = 6 \times \frac{1}{2} - 2 \times \frac{1}{2} = 2$$

$$4 \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ -1/2 \\ -1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

4 1399

$proj_{w}^{y} \in w$ $\qquad$ $y - proj_{w}^{y} \in \perp$

$$\begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \in w^{\perp} \qquad \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \in w$$

سوال ۲

$u \perp v$

زمانی که دو بردار برهم عمودند ضرب داخلی آن ها صفر است

$u \perp v \rightarrow \langle u, v \rangle = 0 \quad \langle v, u \rangle = 0$

$(u+v) \perp (u-v) \rightarrow \langle u+v, u-v \rangle = 0$

$\langle u, u \rangle - \langle u, v \rangle + \langle v, u \rangle - \langle v, v \rangle = 0$

$\xrightarrow{\langle u, v \rangle = 0} \langle u, u \rangle - \langle v, v \rangle = 0$

ضرب داخلی یک بردار در خودش برابر مجذور اندازه است

$\|u\|^2 - \|v\|^2 = 0 \rightarrow \|u\|^2 = \|v\|^2$

چون اندازه‌ی بردار بزرگتر مساوی صفر است از دو طرف

$\|u\| = \|v\|$

می توانیم جذر بگیریم

Scanned by CamScanner

سوال ۳

$B=\{x^2, x\}$

$u_1 = \frac{x}{\|x\|} \longrightarrow \|x\| = \sqrt{\int_0^1 x^2\, dx} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$u_1 = \sqrt{3}\, x \qquad u_2 = \frac{x^2 - \langle x^2, \sqrt{3}x\rangle \sqrt{3}x}{\|x^2 - \langle x^2, \sqrt{3}x\rangle \sqrt{3}x\|}$

$\langle x^2, \sqrt{3}x\rangle = \int_0^1 \sqrt{3}\, x^3\, dx = \frac{\sqrt{3}}{4}$

$u_2 = \frac{x^2 - \sqrt{3}x\,\frac{\sqrt{3}}{4}}{\|x^2 - \sqrt{3}x\,\frac{\sqrt{3}}{4}\|} = \frac{x^2 - \frac{3}{4}x}{*\|\qquad\|}$

$* \int_0^1 (x^2 - \frac{3}{4}x)(x^2 - \frac{3}{4}x)\, dx = 1/80$

$u_2 = \sqrt{80}\,(x^2 - \frac{3}{4}x) = 4\sqrt{5}\,(x^2 - 3/4\, x)$

$\text{proj}_w^{v} = \text{proj}_{u_1}^{v} + \text{proj}_{u_2}^{v}$

$\text{proj}_w^{x+2} = \langle x+2, u_1\rangle u_1 + \langle x+2, u_2\rangle u_2$

$\langle x+2, \sqrt{3}x\rangle = \int_0^1 (x+2)\sqrt{3}\, x\, dx = \frac{4}{\sqrt{3}}\ ]$

$\langle x+2, 4\sqrt{5}(x^2 - \frac{3}{4}x)\rangle = \int_0^1 (x+2)(4\sqrt{5}(x^2 - \frac{3}{4}x))\, dx$

$= -\frac{\sqrt{5}}{3}\ ] \quad \text{proj}_w^{x+2} = \frac{4}{\sqrt{3}} \times \sqrt{3}x - \frac{\sqrt{5}}{3}(4\sqrt{5})(x^2 - \frac{3}{4}x)$

$4x - \frac{20}{3}(x^2 - \frac{3}{4}x) = -\frac{20}{3}x^2 + 9x\ ]$

سوال ۴

a)

خواص ضرب داخلی

① $\langle x,x\rangle \geq 0 \quad \langle x,x\rangle = 0 \rightarrow x = 0$

② $\langle x,y\rangle = \langle y,x\rangle$

③ $\langle x,y+z\rangle = \langle x,y\rangle + \langle x,z\rangle$

④ $\langle \alpha x,y\rangle = \alpha\langle x,y\rangle$

$\langle (a,b,c),(d,e,f)\rangle =$

$$\begin{bmatrix} 2a+b & a+2b+c & b+2c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d \\ e \\ f \end{bmatrix}$$

$(2a+b)d + (a+2b+c)e + (b+2c)f$

① $\langle (a,b,c),(a,b,c)\rangle$

$(2a+b)a + (a+2b+c)b + (b+2c)c =$

$2a^2 + ba + ba + 2b^2 + bc + bc + 2c^2 =$

$(a+b)^2 + (b+c)^2 + a^2 + b^2 + c^2 = 0$

واضح است عبارت فوق همواره بزرگتر از صفر است

② I $(2d+e)a + (d+2e+f)b + (e+2f)c =$

$2ad + ae + bd + 2be + bf + ec + 2fc$

II $2ad + bd + ae + 2be + ec + bf + 2fc$

I و II برابر اند

۳

$\langle (a,b,c), (d+x, e+y, f+z) \rangle$

$(2a+b)(d+x) + (a+2b+c)(e+y) + (b+2c)(f+z)$

با توجه به اینکه خاصیتی به شکل زیر وجود دارد:

$\lambda(\alpha+B) = \lambda\alpha + \lambda B$

مثلاً می‌توان $(2a+b)(d+x)$ را به این صورت در نظر گرفت $(2a+b)d + (2a+b)x$ که در نهایت می‌توان آن را برابر

$\langle (a,b,c), (d,e,f) \rangle + \langle (a,b,c), (x,y,z) \rangle$

قرار داد.

۴

$\langle (a,b,c), (\lambda d, \lambda e, \lambda f) \rangle =$

$(2a+b)\lambda d + (a+2b+c)e\lambda + (b+2c)\lambda f =$

$\lambda \langle (a,b,c), (d,e,f) \rangle$

b $u_1 = (0,1,0)$ $u_2 = (0,0,1)$ $a = (1,0,0)$

$\langle a, u_1 \rangle = (2)\times 0 + (1\times 1) + 0 = 1$

$\langle a, u_2 \rangle = 0$ $\mathrm{proj}_{w}^{\alpha} = (0,1,0)$

۱۱

① -۵

$$X=\begin{bmatrix}۱ & -۵\\ ۱ & -۴\\ ۱ & \\ ۱ & \\ ۱ & \\ ۱ & \end{bmatrix}\qquad y=\begin{bmatrix}۲\\ ۷\\ ۱\\ ۱\\ ۱\end{bmatrix}$$

$$X^TX=\begin{bmatrix}۱۱ & ۰\\ ۰ & ۱۱۰\end{bmatrix}\qquad X^Ty=\begin{bmatrix}۱۰۶\\ ۲۶\end{bmatrix}$$

$$(X^TX)^{-1}X^Ty=\begin{bmatrix}۹٫۶\\ ۰٫۱۸\end{bmatrix}\qquad y=۹٫۶+۰٫۱۸x$$

$$X=\begin{bmatrix}۱ & -۵ & (-۵)^۲\\ ۱ & -۴ & (-۴)^۲\\ ۱ & ۱ & ۱\\ ۱ & ۱ & ۱\end{bmatrix}\qquad \begin{bmatrix}۲\\ ۷\\ ۱\\ ۱\end{bmatrix}$$

$$X^TX=\begin{bmatrix}۱۱ & ۰ & ۱۱۰\\ ۰ & ۱۱۰ & ۰\\ ۱۱۰ & ۰ & ۱۹۵۸\end{bmatrix}\qquad X^Ty=\begin{bmatrix}۱۰۶\\ ۲۰\\ ۴۸۸\end{bmatrix}$$

$$(X^TX)^{-1}X^Ty=\begin{bmatrix}۱۳٫۹۷\\ ۰٫۱۸\\ -۰٫۴۳\end{bmatrix}=$$

$$Y=۱۳٫۹۷+۰٫۱۸x-۰٫۴۳x^۲$$

① $۹٫۶+۰٫۱۸(-۵)=۸٫۷$

② $۱۳٫۹۷+۰٫۱۸(-۵)-۰٫۴۳(-۵)^۲=۲٫۳۲$

حل دوم بهتر است

سوال ۶ـ

① $\langle x, x\rangle = 0 \rightarrow x = 0$

a) $\langle x, x\rangle \geq 0$

$\langle S, S\rangle = tr(SS)$

$= \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{4} s_{ij}\, s_{ij} \overset{*}{\Rightarrow} \sum_{i=1}^{4} s_{ij}^{2} \geq 0$

* چون S یک ماتریس متقارن است

$\langle S, S\rangle = 0 \rightarrow S = 0$

② $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$

$\langle S, T\rangle = tr(ST) = \sum\sum s_{ij} T_{ij}$

چون هردو متقارن هستند $\rightarrow \sum\sum T_{ij} S_{ij} =$

$\langle T, S\rangle \rightarrow \langle S, T\rangle = \langle T, S\rangle$

③ $\langle x, y+z\rangle = \langle x, y\rangle + \langle x, z\rangle$

$\langle S, T+T'\rangle = tr(S(T+T')) =$

$tr(ST + ST') = tr(ST) + tr(ST') :$

$\langle S, T\rangle + \langle S, T'\rangle$

④ $\langle \alpha x, y\rangle = \alpha\langle x, y\rangle$

$\langle \alpha S, T\rangle = tr(\alpha S T) = \alpha\, tr(ST)$

b-

$$S_1S_2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$tr(S_1S_2) = 2 - 3 + 1 = 0$$

چون ضرب داخلی برابر صفر شد یعنی بر هم عمودند

d) $proj^{T}_{\langle S_1, S_2\rangle} =$

$$\langle T, S_1\rangle = tr(TS)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & - & - \\ - & 1 & 1 \\ & & 1 \end{bmatrix}$$

$$2 + 1 + 1 = 4$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & & \\ & -3 & \\ & & 1 \end{bmatrix}$$

$$2 - 3 + 1 = 0$$

$\|S_1\| \rightarrow \langle S_1, S_1\rangle = 2 + 1 + 1 = 4$

$= 2$ $\qquad proj^{T}_{\langle S_1, S_2\rangle} = \frac{4}{2} S_1 = 2S_1$

Scanned by CamScanner

سوال ۷ (a

$T(1,0,0) = (1,0,1)$

$T(0,1,0) = (2,-1,0)$

$T(0,0,1) = (-1,0,7)$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

(b

$[v_1]_B = (1,-1,1)$

$[v_2]_B = (3,-1,0)$

$[v_3]_B = (-1,-7,7)$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & -7 \\ 1 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

۸

a)

$v = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \dots + \lambda_r u_r$

چون $v \in span(u_1, u_2, \dots u_r)$ است

$Au_i = v \xrightarrow{\text{دو طرف را } A} A^2 u_i = Av$

$A^2 = A \rightarrow \quad Au_i = Av = A(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \dots + \lambda_r u_r)$

$A[(u_i - \lambda_i u_i) + (\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_{i-1} u_{i-1} + \lambda_{i+1} u_{i+1} \dots \lambda_r u_r)] = 0$

$\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_{i-1} u_{i-1} + (1-\lambda_i) u_i + \lambda_{i+1} u_{i+1} + \dots + \lambda_r u_r = 0$

چون u_i ها مستقل خطی است پس ضرایب صفر اند

$1 - \lambda_i = 0 \quad \lambda_i = 1$

$v = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \dots + \lambda_r u_r \quad 1 \times u_i = u_i$

b) برای اینکه پایه باشد اولا باید مستقل خطی باشد دوما باید مولد باشد یعنی کل فضا را تولید کند.

$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \dots + \lambda_r u_r + \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \dots + \beta_{n-r} v_{n-r} = 0$

$\lambda_1 A u_1 + \lambda_2 A u_2 + \dots + \lambda_r A u_r + \beta_1 A v_1 + \beta_2 A v_2$

$+ \dots + \beta_{n-r} A v_{n-r} = 0$

v_i ها عضو فضای پوچ هستند پس داریم :

$\lambda_1 A u_1 + \lambda_2 A u_2 + \dots + \lambda_r A u_r = 0$

$A(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \dots + \lambda_r u_r) = 0$

$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \dots + \lambda_r u_r = 0$

می دانیم u_i ها مستقل اند پس ضرایب λ_1 ، λ_2 تا λ_r صفر اند

$\underbrace{\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \dots + \lambda_r u_r}_{0} + \beta_1 v_1 + \dots + \beta_{n-r} v_{n-r} = 0$

چون v_i ها مستقل خطی اند پس ضرایب β_1 ، β_2 تا β_{n-r} نیز صفر اند

پس کل ضرایب صفر شد $B_1 \cup B_2$ مستقل خطی است