۹۸۱۷۸۲۳

ROOYAN DAROU PHARMACEUTICAL COMPANY

سوال یک

$$[A \mid I] \longrightarrow [I \mid A^{-1}]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{2R_1+R_2}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\frac{1}{3}R_2+R_3}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{-\frac{2}{3}R_2+R_1}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{6R_3+R_2}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 6 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{-4R_3+R_1}$$

May
Mon. 31 3 10 17 24
Tue. 4 11 18 25
Wed. 5 12 19 26
Thu. 6 13 20 27
Fri. 7 14 21 28

Scanned by CamScanner

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} ١ & ٠ & ٠ & -٣ & -٢ & -٤ \\ ٠ & ٣ & ٠ & ٦ & ٣ & ٦ \\ ٠ & ٠ & ١/٤ & ٢/٤ & ١/٤ & ١ \end{array}\right] \xrightarrow{R٢/٣}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} ١ & ٠ & ٠ & -٣ & -٢ & -٤ \\ ٠ & ١ & ٠ & ٢ & ١ & ٢ \\ ٠ & ٠ & ١/٤ & ٢/٣ & ١/٣ & ٣ \end{array}\right] \xrightarrow{٣R٣}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} ١ & ٠ & ٠ & -٣ & -٢ & -٤ \\ ٠ & ١ & ٠ & ٢ & ١ & ٢ \\ ٠ & ٠ & ١ & ٢ & ١ & ٣ \end{array}\right]$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -٣ & -٢ & -٤ \\ ٢ & ١ & ٢ \\ ٢ & ١ & ٣ \end{bmatrix}$$

سوال ۲

$$\underbrace{\begin{bmatrix} k & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & k \end{bmatrix}}_{B}\underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}}_{Y}$$

$$X = B^{-1}Y$$

برای اینکه جواب داشته باشد باید $\det B$ را مخالف صفر قرار دهیم

$$k(k^2-1) - (k-1) + (1-k)$$

$$k^3 - k - k + 1 + 1 - k \to k^3 - 3k + 2 = 0$$

$$k = -2 \quad \text{و} \quad \underset{\text{ریشه مضاعف}}{k = 1}$$

پس در حالتی که ما می‌خواهیم جواب داشته باشد k باید مخالف -2 و 1 باشد.

برای پیدا کردن جواب یکتا از قضیه‌ی کرامر استفاده می‌کنیم

$$\to \forall j \quad x_j = \frac{\det A_j(b)}{\det A}$$

$$\to x \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & k \end{bmatrix} \to \det = (k^2-1) - (k-1) + (1-k) = (k-1)^2$$

$$\to \frac{(k-1)^2}{(k-1)^2(k+2)} = x \to x = \frac{1}{k+2}$$

روز بزرگداشت شیخ کلینی

May
Mon. 31 3 10 17 24
Tue. 4 11 18 25
Wed. 5 12 19 26
Thu. 6 13 20 27
Fri. 7 14 21 28
Sat. 1 8 15 22 29
Sun. 2 9 16 23 30

$y \rightarrow \begin{bmatrix} k & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & k \end{bmatrix}$

$\det = k(k-1) - (k-1) + 0 =$

$-k + k^2 - k + 1 = k^2 - 2k + 1 \Rightarrow$

$$y = \frac{(k-1)^2}{(k-1)^2(k+2)} = \frac{1}{k+2}$$

$z \rightarrow \begin{bmatrix} k & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow$

$k(k-1) - 0 + (1-k) \rightarrow$

$k^2 - k + 1 - k \rightarrow k^2 - 2k + 1 \rightarrow$

$$z = \frac{(k-1)^2}{(k-1)^2(k+2)} = \frac{1}{k+2}$$

$x, y, z = \frac{1}{k+2}$

یک جواب یکتا ← $k = 1 \,,\, k \neq -2$

جواب نداشته باشد ← $k = -2$

بی‌شمار جواب ← $k = 1$

PHARMACEUTICAL COMPANY

سوال ۳ ←

$$a_{i+1} = a_i \cdot q$$

$$a_{2+1} = a_2 \cdot q$$

$$\begin{bmatrix} a_2 q & a_{2+4} q & a_{2+8} q \\ a_{2+6} q & a_{2+10} q & a_{2+14} q \\ a_{2+10} q & a_{2+16} q & a_{2+20} q \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_2 q & a_2 q^5 & a_2 q^9 \\ a_2 q^7 & a_2 q^{11} & a_2 q^{15} \\ a_2 q^{11} & a_2 q^{17} & a_2 q^{21} \end{bmatrix}$$

$$a_2 q (a_2^2 q^{32} - a_2^2 q^{32}) - a_2 q^5 (a_2^2 q^{28} - a_2^2 q^{26})$$
$$+ a_2 q^9 (a_2^2 q^{24} - a_2^2 q^{22})$$

$$-a_2^3 q^{31} (q^2 - 1) + a_2^3 q^{31} (q^2 - 1)$$
$$= 0$$

det برابر صفر شد پس ماتریس ۲ وارون ندارد

May
Mon. 31 3 10 17 24
Tue. 4 11 18 25
Wed. 5 12 19 26
Thu. 6 13 20 27
21 28

Scanned by CamScanner

(۴

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1+\sin A & 1+\sin B & 1+\sin C \\ \sin A+\sin^2 A & \sin B+\sin^2 B & \sin C+\sin^2 C \end{pmatrix} = 0$$

$C_1 \to C_1 - C_3$ & $C_2 \to C_2 - C_3$

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \sin\hat{A}-\sin\hat{C} & \sin B-\sin C & 1+\sin C \\ \sin\hat{A}+\sin^2\hat{A}-\sin\hat{C}-\sin^2\hat{C} & \sin B+\sin^2 B-\sin C-\sin^2 C & \sin C+\sin^2 C \end{vmatrix}$$

$$(\sin\hat{A}-\sin\hat{C})(\sin B-\sin\hat{C})\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1+\sin C \\ \sin\hat{A}+\sin\hat{C}+1 & \sin\hat{B}+\sin\hat{C}+1 & \sin C+\sin^2 C \end{vmatrix}$$

~~[illegible]~~ & $C_1 \to C_1 - C_2$

$$(\sin\hat{A}-\sin\hat{C})(\sin B-\sin C)\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1+\sin C \\ \sin\hat{A}-\sin B & \sin\hat{B}+\sin\hat{C}+1 & \sin C+\sin^2 C \end{vmatrix}$$

$$(\sin A-\sin\hat{C})(\sin B-\sin C)\left(0-(\sin A-\sin B)\right)=0$$

$$(\sin\hat{A}-\sin C)(\sin B-\sin C)(\sin B-\sin A)=0$$

$\sin A = \sin C$ | $\sin B = \sin C$ |

$\sin B = \sin A$

د- a)

تعداد ستون های A^tA با ستون های A برابر است و برابر n است

$\operatorname{rank}(A) = n - \operatorname{nul}(A)$

$\operatorname{rank}(AA^t) = n - \operatorname{nul}(A^tA)$

پس برای اینکه نشان دهیم $\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(AA^t)$ کافی است
نشان دهیم $\operatorname{nul}(A) = \operatorname{nul}(A^tA)$

① $x \in N(A) \rightarrow Ax = 0 \xrightarrow{\text{دو طرف را در } A^t \text{ ضرب}}$
$A^tAx = 0 \rightarrow x \in N(A^tA)$

② $x \in N(AA^t) \rightarrow A^tAx = 0 \xrightarrow{\text{از طرف } x^t}$

$x^tA^tAx = 0 \quad (Ax)^tAx = 0 \quad \|Ax\|^2 = 0$

$Ax = 0$

از ① و ② نتیجه می گیریم $N(A) \subseteq N(A^tA)$ و $N(AA^t) \subseteq N(A)$

پس این دو برابرند.

Scanned by CamScanner

ROOYAN DAROU PHARMACEUTICAL COMPANY

A^tA

۵) b

$A \to ۳\times۵$ $\qquad A^t \to ۵\times۳$

می‌دانیم اگر $A_{m\times n}$ و $B_{n\times p}$ باشد آنگاه:

$\text{rank}A + \text{rank}B - n \le \text{rank}AB \le \min\{\text{rank}A, \text{rank}B\}$

$\text{rank}(A^t) \le ۵ \qquad \text{rank}(A) \le ۳$

$\to \boxed{\text{rank}(A^tA) \le ۳}$

$A^tA \to ۵\times۵$, $\text{rank}(A^tA) \le ۳$

$\Rightarrow A^tA \to$ معکوس‌پذیر نیست

اگر فول رنک نباشد وارون‌پذیر هم نیست یعنی دترمینان

$\det(A^tA)$ برابر صفر است

Scanned by CamScanner

4)

$$[q_1 \ q_2 \ \dots \ q_n] \rightarrow Q$$

$$\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2^T \\ q_3^T \\ \dots \\ q_n \end{bmatrix}^T \longrightarrow Q^T = Q^{-1}$$

$$Q^TQ = I \qquad \begin{bmatrix} q_1^Tq_1 & q_1^Tq_2 & \dots & q_1^Tq_n \\ q_2^Tq_1 & q_2^Tq_2 & \dots & q_2^Tq_n \\ q_n^Tq_1 & q_n^Tq_2 & & q_n^Tq_n \end{bmatrix} = I$$

$$i=j \Rightarrow q_i^Tq_i = 1 \rightarrow q_i^Tq_i = \|q_i\|^2 = 1$$

$$i\neq j \Rightarrow q_i^Tq_j = 0$$

یا به عبارت دیگر

$$(Q^TQ)_{ij} = \langle q_i, q_j \rangle = \begin{cases} q_i^Tq_i & i=j \\ q_i^Tq_j & i\neq j \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i\neq j \end{cases}$$

این نشان می‌دهد ستون‌های Q اورتونرمال است.

اردیبهشت

شنبه		4	11	18	25
۱شنبه		5	12	19	26
۲شنبه		6	13	20	27
۳شنبه		7	14	21	28
۴شنبه	1	8	15	22	29
۵شنبه	2	9	16	23	30

ROOYAN DAROU
PHARMACEUTICAL COMPANY

می‌دانیم اگر یک سطر A صفر باشد آنگاه $\det A = 0$

چون اگر یک سطر A را در α ضرب کنیم تغییرات آن نیز در α ضرب می‌شود و اگر یک سطر صفر داشته باشیم و آن را در عددی ضرب کنیم $\alpha \det A = \det A$

← پس می‌توان نتیجه گرفت که $\det A = 0$

$$\begin{bmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \cdots \\ & & \\ & & \end{bmatrix} \qquad \begin{aligned} \det A &= \sum \operatorname{sign}(\pi)\, \alpha a_{1\pi_1} a_{2\pi_2} \cdots a_{n\pi_n} \\ &= \alpha \det A \end{aligned}$$

← نتیجه: اگر یک سطر A صفر باشد $\det A = 0$

پس داریم

$a = b = c = d = 0 \rightarrow$ سطر صفر داریم

$\rightarrow \det A = 0$

پس طرف قضیه یعنی $a=b=c=d=0 \rightarrow \det(A)=0$ را اثبات کردیم حالا به سراغ طرف دوم می‌رویم

قضیه: ماتریس A وارون‌پذیر است $\Longleftrightarrow$ $0 \neq \det A$

پس از آنجایی که $\det(A)=0$ است پس ماتریس A وارون‌پذیر نیست پس A full rank نیست

Scanned by CamScanner

$$A=\begin{bmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & d & -c \\ c & -d & a & b \\ d & c & -b & a \end{bmatrix}$$

$$A=[u_1 \quad u_2 \quad u_3 \quad u_4]$$

u_1 تا u_4 مستقل خطی هستند زیرا هیچکدام را نمی‌توان به صورت ترکیب خطی از ستون های دیگر نوشت به عنوان مثال a_{11} برابر a است در ستون های u_2, u_3, u_4 ما مقدار a در u_{22} و u_{33} و u_{44} قرار دارد پس هیچکدام از ستون های u_2 و u_3 و u_4 در درایه ی اول خود a یا ضریبی از a را ندارند برای دیگر متغیرهای b و c و d نیز همین را داریم پس ستون ها مستقل خطی هستند

حال که مستقل هستند آن ها را یکه می‌کنیم

$$\|u_i\| = \sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2}$$

ماتریس A' را داریم که ستون های آن اورتونرمال است چون ستون های A' اورتونرمال است پس A' ماتریس یکه است و همچنین می‌دانیم مقدار ویژه ی هر ماتریس یکه برابر یک است زیرا:

۸ $A'^t A' = I$

اگر λ مقدار ویژه‌ی A' باشد

۹ $\exists v \in R^n \to$ ① $A'v = \lambda v$

۱۰ ترانهاده می‌گیریم $\to$ ② $v^t A^t = \bar{\lambda} v^t$

ضرب ① و ② $\to$

۱۱ $$v^t A'^t A' v = \lambda^2 v^t v$$

۱۲ $$\to v^t I v = \lambda^2 v^t v$$

$$\|v\|^2 = \lambda^2 \|v\|^2 \to \|\lambda\|^2 = 1$$

۱۳ $$\to |\lambda| = 1$$

۱۴ $$\det A' = |\lambda_1| \times |\lambda_2| \times \dots \times |\lambda_n| = 1$$

۱۵ تفاوت A' با A این است که درایه‌های A' را در $\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2}}$ ضرب کردیم پس

۱۶ $\det A = (\sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2})^4$

روز ملی جمعیت

$$\det(A) = (a^2+b^2+c^2+d^2)^2 = 0$$

جمع چند مقدار نامنفی برابر صفر شده پس همه

برابر صفرند $\to a = b = c = d = 0$

ROOYAN DAROU
PHARMACEUTICAL COMPANY

از رو صدق ترانهاده

۷)

$$M = (S + A) \longrightarrow$$

$$M^T = S^T + A^T \xrightarrow{S = S^T} M^T = S + A^T \qquad A^T = -A \longrightarrow$$

$$M^T = S - A \Longrightarrow \begin{cases} M^T = S - A \\ M = S + A \end{cases}$$

$$\longrightarrow M + M^T = ۲S \longrightarrow S = \frac{M + M^T}{۲}$$

$$M = S + A \qquad A = M - S$$

$$A = M - \frac{M + M^T}{۲} \qquad A = \frac{M - M^T}{۲}$$

سوال ۸)

از آنجایی که A وارون پذیر است $\det(A)\neq 0$ است

$$\det(A) \cdot \det(A)^{-1} = 1$$

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$$

$$\Delta \quad \det(A) = \sum_{\pi \in S(n)} \operatorname{sign}(\pi)\, a_{1\pi_1} a_{2\pi_2} \cdots a_{n\pi_n}$$

چون تمام درایه‌های A، عدد صحیح هستند پس $\det(A)$ نیز

با توجه به Δ عدد صحیح خواهد شد.

$$(A^{-1})_{ij} = \frac{(-1)^{i+j} A_{ji}}{\det A}$$

برای اینکه درایه‌های $(A^{-1})_{ij}$ عدد صحیح باشند باید $\det(A) = \pm 1$ باشد تا به عدد صحیح برسیم

Scanned by CamScanner

۲ / a)

$$\det(A+B) = \det(A) + \det(B)$$

$$A = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix} \Rightarrow \det(A) = -۲$$

$$B = \begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ ۱ & ۲ \end{bmatrix} \Rightarrow \det(B) = -۱$$

$$A+B = \begin{bmatrix} ۱ & ۳ \\ ۲ & ۲ \end{bmatrix} \Rightarrow \det(A+B) = -٤$$

$$\left.\begin{aligned} \det(A) + \det(B) &= -۳ \\ \det(A+B) &= -٤ \end{aligned}\right\} \longrightarrow$$ مساوی نیستند

b)