通信基础数学

第 一 章 信号与系统

1.1信号

连续信号和离散信号

从时间上做区分

$$x[n] = x(n\Delta t)$$

模拟信号也数字信号

从因变量的取值区分，即取值是连续的还是离散的。

1.2系统

线性系统：满足叠加性和数乘性质。

连续信号

$$H\big(x(t)+y(t)\big) = H\big(x(t)\big) + H(y(t))$$
$$H\big(a\cdot x(t)\big) = a\cdot H(x(t))$$

离散信号

$$H\{x[n]+y[n]\} = H\{x[n]\} + H\{y[n]\}$$
$$H\{a\cdot x[n]\} = a\cdot H\{x[n]\}$$

时/移不变系统：

$$y(t) = H\{x(t)\} \rightarrow y(t-\tau) = H\{x(t-\tau)\}$$
$$y[n] = H\{x[n]\} \rightarrow y[n+m] = H\{x[n+m]\}$$

1.3信号通过系统

输入的信号称为激励，输出称为响应。

离散冲激序列

$$\delta[n] = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases}$$

离散信号可以表示为

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k]$$

$$y[n] = H\{x[n]\} = H\left\{\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k]\right\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]H\{\delta[n-k]\}$$

记$h[n] = H\{\delta[n]\}$，

则

$$y[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x[k]\mathrm{h}[n-k]$$

也就是离散卷积公式，

$$y[n]=x[n]*h[n]$$

输入信号位于位置k的脉冲强度为$x[k]$，产生的响应为$x[k]\mathrm{h}[n-k]$，然后对k求和就得到卷积运算。

连续δ函数

$$\begin{cases}\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)dt=1\\ \delta(t)=0, \qquad t\neq 0\end{cases}$$

δ函数对信号抽样的特性

$$\int_{-\infty}^{\infty}x(t)\delta(t-t_0)dt=\int_{-\infty}^{\infty}x(t_0)\delta(t-t_0)dt=x(t_0)$$

则：

$$x(t)=\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau$$

令$y(t)=H\{x(t)\}$，$h(t)=H\{\delta(t)\}$，

则

$$y(t)=H\{x(t)\}=H\left\{\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau\right\}=\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)H\{\delta(t-\tau)\}d\tau=\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

1.4卷积性质

$$\delta(t)*x(t)=x(t)*\delta(t)=x(t)$$
$$\delta[n]*x[n]=x[n]*\delta[n]=x[n]$$

第 二 章 傅里叶变换

欧拉公式

$$e^{j\omega t}=\cos\omega t+j\sin\omega t$$

2.1.1 傅里叶级数

一个周期信号$x(t)$，周期为T_1，角频率为$\omega_1=2\pi/T_1$。

2.1.1.1 三角形式的傅里叶级数

$$x(t)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\{a_n\cos(n\omega_1 t)+b_n\sin(n\omega_1 t)\}$$

其中，

$$a_0=\frac{1}{T_1}\int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}}x(t)dt$$

$$a_n=\frac{2}{T_1}\int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}}x(t)\cos(n\omega_1 t)\,dt\,,n\geq 1$$

$$b_n=\frac{2}{T_1}\int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}}x(t)\sin(n\omega_1 t)\,dt\,,n\geq 1$$

三角函数的正交性：

$$\int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}}\cos(n\omega_1 t)\sin(m\omega_1 t)\,dt=0$$

$$\int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}}\cos(n\omega_1 t)\cos(m\omega_1 t)\,dt=\begin{cases}\frac{T_1}{2},m=n\\0,m\neq n\end{cases}$$

$$\int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}}\sin(n\omega_1 t)\sin(m\omega_1 t)\,dt=\begin{cases}\frac{T_1}{2},m=n\\0,m\neq n\end{cases}$$

2.1.1.2 复指数形式的傅里叶级数

$$x(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n e^{jn\omega_1 t}$$

其中c_n称为离散频谱，

$$c_n=\frac{1}{T_1}\int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}}x(t)e^{-jn\omega_1 t}dt$$

2.1.2 傅里叶变换

2.1.3

2.2

第 三 章

第 四 章