

概率图中的条件独立性

Haishou Ma

January 20, 2019

1 定义

在给定随机事件 Z 的条件下，随机事件 X 的发生与随机事件 Y 的发生是相互独立的，则说明 X 与 Y 在给定 Z 的条件下条件独立。 X 与 Y 在给定 Z 的条件下条件独立，则说明如果事件 Z 发生，事件 X 是否发生对于计算 Y 的似然度不提供额外的信息。

$$(X \perp Y) | Z \iff \Pr(XY|Z) = \Pr(X|Z) \Pr(Y|Z) \quad (1.1)$$

$$\Pr(X|YZ) = \Pr(X|Z) \text{ or } \Pr(Y|XZ) = \Pr(Y|Z) \quad (1.2)$$

举例：

- X : 明天下雨；
- Y : 今天的地面是湿的；
- Z : 今天是否下雨。

事件 Z 成立，对 X 和 Y 均有影响，然而，在时间 Z 事件成立的前提下，今天的地面情况对明天是否下雨没有影响。

2 概率图中几种常见条件独立性

2.1 tail-to-tail

从一个父节点出发到两个子节点，如图2.1。

$$\Pr(XYZ) = \Pr(Z) \Pr(X|Z) \Pr(Y|Z) \quad (2.1)$$

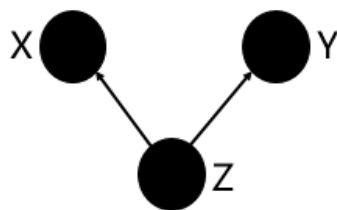


Figure 2.1: tail-to-tail

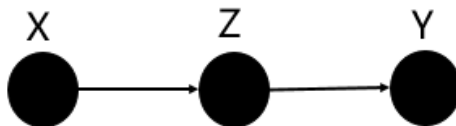


Figure 2.2: head-to-tail

2.2 head-to-tail

头尾相连的情况，如图2.2。

将Z作为观察点，图模型表示为：

$$\Pr(XY|Z) = \Pr(X|Z) \Pr(Y|Z) \quad (2.2)$$

2.3 head-to-head

从两个父节点出发到一个子节点，如图2.3。

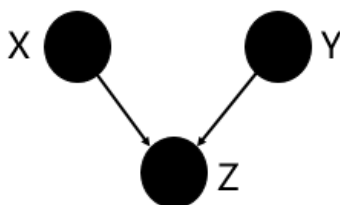


Figure 2.3: head-to-head

$$\Pr(XYZ) = \Pr(X) \Pr(Y) \Pr(Z|XY) \quad (2.3)$$

事件X和Y是相互独立的，但是在Z成立的条件下，打破了这两者的独立性。

2.4 小结

在概率图中，需要了解的是图中的节点从哪个开始，到哪个结束。条件概率中注意到哪个是原因，哪个是结果，贝叶斯公式也就是直接根据结果来推断原因推断不出来，因此需要转换为计算由原因来推断出结果。

条件独立性是在某种事件发生的情况下，才会使得另外的两个事件独立。但是也有情况特殊，就是在某个事件存在的条件下，使得原本独立的两个事件变得不独立，例如“head-to-head”。