Calcul intégral et applications

Table des matières

1. Ensembles et applications. **1**

2. Espaces mesurables. **1**

2.1. Tribus. 1

2.2. Rappels sur la topologie. 2

2.3. Applications mesurables. 3

Chapitre 1: Espaces et applications mesurables.

1. Ensembles et applications.

Proposition 1.1. Soit E un ensemble et $(A_i)_{i\in I}$ une collection quelconque de sous-ensembles de E.
(1) $E \setminus \bigcap_{i\in I} A_i = \bigcup_{i\in I} E \setminus A_i$.
(2) $E \setminus \bigcup_{i\in I} A_i = \bigcap_{i\in I} E \setminus A_i$

Définition 1.2. Soit E et F deux ensembles quelconques et soit $f : E \to F$ une application quelconque. L'image par f d'un sous-ensemble $A \subset E$ est le sous ensemble de F noté f(A) défini par : $f(A) = \{y \in F, \exists x \in A, y = f(x)\} = \{f(x), x \in A\}$.
L'image réciproque d'un sous-ensemble $B \subset F$ est le sous-ensemble noté $f^{-1}(B)$ de E et défini par $f^{-1}(B) = \{x \in E, f(x) \in B\}$.

2. Espaces mesurables.

2.1. Tribus.

Définition 2.1 (Tribu)**.** Soit E un ensemble quelconque, $\mathcal{P}(E)$ désigne l'ensemble des parties de E. On appelle *tribu* sur E (ou σ-algèbre) une famille de parties de E, $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(E)$ telle que :
(1) $\varnothing \in \mathcal{A}$,
(2) Si $A \in \mathcal{A}$ alors $A^c \in \mathcal{A}$.
(3) Si $(A_n)_{n\in N}$ est une suite d'éléments de $\mathcal{A}$, alors $\bigcup_{n\geq 1} A_n \in \mathcal{A}$.

Remarques 2.2.
(1) Pour toute famille $(B_i)_{i\in I}$ de $\mathcal{P}(E)$,
$$\left(\bigcup_{i\in I} B_i\right)^c = \bigcap_{i\in I} (B_i)^c \text{ et } \left(\bigcap_{i\in I} B_i\right)^c = \bigcup_{i\in I} (B_i)^c$$
(2) On peut remplacer le point (3) de la définition par : Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$, est une suite de $\mathcal{A}$ alors $\bigcap_{n\in I} A_n \in \mathcal{A}$.
(3) De même, par le point (2), on peut remplacer le premier point par $E \in \mathcal{A}$.

Exemples 2.3.
1. $\mathcal{P}(E)$ est une tribu sur E. C'est la tribu fine sur E.
2. $\{\varnothing, E\}$ est une tribu sur E. C'est la tribu grossière sur E.
3. Si $A \subset E$ est un sous-ensemble de E, $\{\varnothing, A, A^c, E\}$ est une tribu sur E.
4. $\{A \in \mathcal{P}(E) \mid A \text{ ou } A^c \text{ est au plus dénombrable ou } \}$ est une tribu sur E.

Définition 2.4 (Espace mesurable)**.** Soit E un ensemble et A une tribu sur E. Le couple $(E, \mathcal{A})$ est appelé un *espace mesurable*.

Définition 2.5 (Ensemble mesurables)**.** Soit E un ensemble et A une tribu sur E. Les éléments d'une tribu A sont appelés les ensembles mesurables ou les parties mesurables de $(E, \mathcal{A})$.

Proposition 2.6. Une intersection quelconque de tribus sur E est une tribu sur E.

Démonstration. Soit $(\mathcal{A}_i)_{i\in I}$ une famille de tribus sur E. Posons $\mathcal{A} = \cap_{i\in I} \mathcal{A}_i$.
(1) $\varnothing \in \mathcal{A}$ car $\varnothing \in (\mathcal{A}_i)_{i\in I}$.
(2) Soit $A \in \mathcal{A}$ alors $A \in (\mathcal{A}_i)_{i\in I}$ donc $A^c \in (\mathcal{A}_i)_{i\in I}$ car les a_i sont des tribus donc $A^c \in \cap_{i\in I} \mathcal{A}_i$.
(3) Soit $(A_n)_{n\geq 1}$ une suite d'éléments de $\mathcal{A}$. Alors $(A_n)_{n\geq 1} \in (\mathcal{A}_i)_{i\in I}$ donc $\bigcup_{n\geq 1} A_n \in \mathcal{A}_{i\in I}$. Ainsi, $\bigcup_{n\geq 1} A_n \in \bigcap_{i\in I} A_i$.

□

Corollaire 2.7. Soit $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(E)$ une famille de parties de E. L'intersection de toutes les tribus sur E qui contiennent $\mathcal{C}$ est une tribu sur E.

Démonstration. Application directe de la proposition précédente. □

Définition 2.8. On appelle tribu *engendrée* par $\mathcal{C}$ la tribu notée par

$$\sigma(\mathcal{C}) := \{\cap \mathcal{A} \mid A \text{ tribu sur } E \text{ et } \mathcal{C} \subset \mathcal{A}\}.$$

Remarque 2.9. $\sigma(\mathcal{C})$ est la plus petite des tribus sur E qui contiennent $\mathcal{C}$, i.e si $\mathcal{A}$ est une tribu qui contient $\mathcal{C}$ alors $\sigma(\mathcal{C}) \subset \mathcal{A}$

Exemples 2.10.
1. Soit $A \subset E$. Alors $(\sigma(\{A\})) = \{\varnothing, E, A, A^c\}$.
2. La tribu engendrée par les singletons sur E est égale à la tribu engendrée par les ensembles dénombrables et on a $\sigma(\{\{x\} | \ x \in E\}) = \sigma(A \in \mathcal{P}(E) \mid A \text{ est au plus dénombrable}) = \{A \in \mathcal{P}(E) \mid A \text{ ou } A^c \text{ est au plus dénombrable}\}$.

2.2. Rappels sur la topologie.

Définition 2.11 (Topologie)**.** Soit E un ensemble quelconque, $O \subset \mathcal{P}(E)$ une famille de parties de E. On dit que O est une topologie sur E si elle vérifie :
(1) $\varnothing \in O$ et $E \in O$.
(2) Si $(A_i)_{i\in I}$ est une famille quelconque de O alors $\bigcup_{i\in I} A_i \in O$.
(3) Pour toute famille finie d'élements de $\mathcal{O}$ $(A_1, \dots, A_n)$, $\cap_{k\in\{1,\dots,n\}} A_k \in O$.

Les éléments d'une topologie sont appelés les ouverts.

Proposition 2.12. Une intersection quelconque de topologies est une topologie.

Corollaire 2.13. Soit $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(E)$ une famille de parties de E. L'intersection de toutes les topologies sur E qui contiennent $\mathcal{C}$ est une topologie sur E.

Remarque 2.14. C'est la plus petite topologie contenant $\mathcal{C}$.

Définition 2.15. Un ensemble E muni d'une topologie $\mathcal{O}$ est appelé un espace topologique.

Définition 2.16. Soit $(E, \mathcal{O})$ un espace topologique. On appelle tribu borélienne sur E notée $\mathcal{B}(E)$ la tribu engendrée par la topologie $\mathcal{O}$; $\mathcal{B}(E) = \sigma(\mathcal{O})$.

Remarque 2.17. Dans la suite de ce cours nous ne considérons que les tribus boréliennes sur $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ ou des sous-ensembles de $\overline{\mathbb{R}}$ et sur $\mathbb{R}^d$ pour $d \geq 1$.

Notation 2.18. On note $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ la tribu borélienne sur $\mathbb{R}$ engendrée par la topologie usuelle (euclidienne).

Proposition 2.19. La tribu borélienne sur $\mathbb{R}$ est définie par :

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma(\{]a,b[, a < b \in \mathbb{R}\}) = \sigma(\{]-\infty, a[, a \in \mathbb{R}\}) = \ldots$$

Démonstration. Soit $O(\mathbb{R})$ la topologie sur $\mathbb{R}$, i.e l'ensemble des ouverts de $\mathbb{R}$. Par définition, $\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma(\mathcal{O}(\mathbb{R}))$. On a $a, b \in \mathbb{Q}, a < b,]a,b[\in \mathcal{O}(\mathbb{R})$ et donc $\sigma(\{]a,b[, a, b \in \mathbb{Q}\}) \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma(\mathcal{O}(\mathbb{R}))$.
Réciproquement, soit $A \in \mathcal{O}(\mathbb{R})$. Rappelons que $A = \bigcup_{]a,b[\subset A, (a,b) \in \mathbb{Q}^2}]a,b[$.
Cela entraine que $A \in \sigma(\{]a,b[, a, b \in \mathbb{R}\})$. On conclut que

$$\mathcal{O}(\mathbb{R} \subset \sigma(\{]a,b[, a, b \in \mathbb{Q}\}) \Rightarrow \sigma(\mathcal{O}(\mathbb{R})) \subset \sigma(\{]a,b[, a, b \in \mathbb{Q}\}).$$

Montrons que $\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma(\{]-\infty, a[, a \in \mathbb{Q}\})$. Soit $a \in \mathbb{Q}$ de telle sorte que

$$]-\infty, a[\subset \mathcal{O}(\mathbb{R}) \Rightarrow]-\infty, a[\in \sigma(\mathcal{O}(\mathbb{R})) = \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

On fait de même avec $]-\infty, a[, [a, +\infty[\ldots$ □

Proposition 2.20. La tribu boréienne sur $\mathbb{R}^d$ est engendrée par l'ensemble des pavés ouverts dont kes extremités sont rationnelles $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d) = \sigma(\{]a_1, b_1[x\ldots x]a_d, b_d[, a_i, b_i \in \mathbb{Q}\})$.

Définition 2.21. On définit sur $\overline{\mathbb{R}}$ la tribu borélienne par

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma(\{[-\infty, a[, a \in \mathbb{R}\} \cup \{]a, +\infty], a \in \mathbb{R}\})$$

Définition 2.22 (tribu trace)**.** Soit $(E, \mathcal{A})$ un espace mesurable, $B \subset E$ un sous-ensemble de E. On appelle tribu tracede $\mathcal{A}$ sur B la tribu $\mathcal{A}_B \coloneqq \{A \cap B, A \in \mathcal{A}\}$

Proposition 2.23. $\mathcal{A}_B$ est une tribu sur B.

Démonstration. $\emptyset \in \mathcal{A}_B$, $C = A \cap B \in \mathcal{A}_B$. Alors $B \setminus C = B \cap E \setminus A$.
$b_i(c_n)$ est une suite de $\mathcal{A}_B$, alors $\cup C_n = \cup A_n \cap B = (\cup A_n) \cap B \in \mathcal{A}_B$

□

Exemple 2.24. Par exemple $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ est la tribu trace de $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$ sur $\mathbb{R}$. Soit $\overline{\mathbb{R}}_+ = \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\} = [0, +\infty]$. On définit la tribu $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}_+)$ comme la tribu trace de $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$ sur $\overline{\mathbb{R}}_+$ On étendra la multiplication sur $\overline{\mathbb{R}}_+$ en posant : $\forall x \in]0, +\infty[, x \cdot +\infty = +\infty \cdot x = +\infty$ et $0 \cdot +\infty = +\infty \cdot 0 = 0$.

2.3. Applications mesurables.

Remarques 2.25.
(1) Soit $f : E \to F$ une application, $C \subset F$. L'image réciproque de C par f est défini par $f^{-1}(C) = \{x \in E, f(x) \in C\}$.
(2) $f^{-1}(\cup_{i\in I} C_i) = \cup_{i \in I} f^{-1}(c_i)$ et $f^{-1}(\cap_{i\in I} C_i) = \cap_{i\in I} f^{-1}(c_i)$

Définition 2.26. Soit E et F deux ensembles, $f : E \to F$ une application. L'image réciproque d'une famille de parties $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(F)$ par f comme : $f^{-1}(\mathcal{C}) = \{f^{-1}(c), c \in \mathcal{C}\}$.

Proposition 2.27. Soit $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(F)$ une tribu sur F. Alors $f^{-1}(\mathcal{B})$ est une tribu sur E.

Démonstration.
(1) $f^{-1}(\varnothing) = \varnothing \in f^{-1}(\mathcal{B})$.
(2) Soit $B \in \mathcal{B}$. $f^{-1}(F \setminus B) = E \setminus f^{-1}(B)$. Or $f^{-1}(B) \in f^{-1}(\mathcal{B})$ et $f^{-1}(F \setminus B) \in f^{-1}(\mathcal{B})$ donc $E \setminus f^{-1}(B) \in f^{-1}(\mathcal{B})$.
(3) Soit $(A_n)_{n\geq 1}$ une suite de $f^{-1}(\mathcal{B})$, $(B_n)_{n\in N} \in B$. Alors $f^{-1}(B_n) = A_n$ et $\cup f^{-1}(\cup B_n) \in f^{-1}(\mathcal{B})$.

□

Proposition 2.28. Soit $f : E \to F$ une application quelconque et $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(F)$ une famille de parties de F.

$$\sigma\big(f^{-1}(\mathcal{C})\big) = f^{-1}(\sigma(\mathcal{C})).$$

Définition 2.29. Soit $(E, \mathcal{A})$, $(F, \mathcal{B})$ deux espaces mesurables. Une application $f : E \to F$ est dite $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$-mesurable si $f^{-1}(\mathcal{B}) \subset \mathcal{A}$.

Remarque 2.30. Cela revient à dire $\forall B \in \mathcal{B}, f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$.

Notation 2.31.
(1) $f : (E,\mathcal{A}) \to (F,\mathcal{B})$ signifie que f est $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$-mesurable.
(2) S'il n'y a pas de confusion possible, on pourra dire que f est mesurable.