

Fonction de deux variables

Table des matières

| | |
|--|----------|
| 1. Introduction. | 1 |
| 1.1. Rappels. | 1 |
| 1.2. Premières définitions. | 1 |
| 2. La topologie de la norme de \mathbb{R}^2. | 1 |
| 2.1. Norme euclidienne. | 1 |
| 2.2. Disques ouverts/fermés et sous-ensembles ouverts/fermés. | 3 |
| 3. Limites de suites. | 4 |
| 4. Points limites et adhérence d'un sous-ensemble. | 4 |

1. Introduction.

1.1. Rappels.

Définition 1.1.1 (fonction d'une variable): Soit A, B deux ensembles. Une application f est la donnée d'un ensemble de départ A et d'un ensemble d'arrivée B et qui, à chaque $x \in A$ associe un unique $f(x) \in B$. On la note $f : A \rightarrow B; x \mapsto f(x)$.

Définition 1.1.2 (Graphe d'une application): Soit $f : A \rightarrow B$ une application. On appelle graphe de f l'ensemble suivant $\text{Graphe}(f) = \{(x, f(x)) \mid x \in A\} \subset A \times B$

1.2. Premières définitions.

Définition 1.2.1 (fonction de deux variables): Soit A un sous ensemble de \mathbb{R}^2 et B un ensemble. Une application f de deux variables de A dans B est la donnée d'un ensemble de départ A et d'un ensemble d'arrivée B et qui, à chaque $(x, y) \in A$ associe un unique $f(x, y) \in B$. On la note $f : A \rightarrow B; (x, y) \mapsto f(x, y)$.

Définition 1.2.2 (Graphe d'une application): Soit $f : A \rightarrow B$ une application de deux variables. On appelle graphe de f l'ensemble suivant $\text{Graphe}(f) = \{(x, y, f(x, y)) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in A\}$

Exemple: L'aire d'un rectangle : $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}; (x, y) \mapsto xy$.

Soit a un réel fixé et $x, y \in \mathbb{R}$. l'équation associée est $a = xy \Leftrightarrow y = \frac{a}{x}$. On cherche le rectangle d'aire a de côté x, y .

2. La topologie de la norme de \mathbb{R}^2 .

2.1. Norme euclidienne.

Définition 2.1.1 (Norme Euclidienne): Soit $v = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$. La norme Euclidienne est la longueur du vecteur v . Elle est donnée par $\|v\| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Proposition 2.1.1: Soit $v \in \mathbb{R}^2$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors $\|\cdot\|$ vérifie:

1. $\|v\| \geq 0$ et $\|v\| = 0 \Leftrightarrow v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.
2. $\|\lambda v\| = |\lambda| \|v\|$ (homogénéité).
3. $\|v + u\| \leq \|v\| + \|u\|$ (inégalité triangulaire).

i.e la norme Euclidienne est une norme.

Démonstration:

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}^2$, $x^2 \geq 0$ d'où $\forall u \in \mathbb{R}^2$, $\|u\| \geq 0$.
2. Soit $u = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, $\lambda \in \mathbb{R}$.
On a $\|\lambda u\| = \|(\lambda a, \lambda b)\| = \sqrt{(\lambda a)^2 + (\lambda b)^2} = \sqrt{\lambda^2(a^2 + b^2)} = |\lambda| \|u\|$.
- 3.

□

Corollaire 2.1.1: Soit $v, u \in \mathbb{R}^2$. On a :

$$\|v - u\| \geq \left| \|v\| - \|u\| \right|.$$

Démonstration: On a $\forall u, v \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned} v &= (v - u) + u \\ \|v\| &= \|v - u + u\| \leq \|v - u\| + \|u\| \\ \Leftrightarrow \|v - u\| &\geq \|v\| - \|u\| \end{aligned}$$

De même avec u , on obtient par ailleurs $\|v - u\| \geq \|u\| - \|v\|$ d'où $\|v - u\| \geq \left| \|v\| - \|u\| \right|$.

□

Définition 2.1.2: Soient $u = (a, b), v = (x, y) \in \mathbb{R}^2$. On définit le produit scalaire par

$$u \cdot v = ax + by.$$

Proposition 2.1.2: Soient $u, v, w \in \mathbb{R}^2$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

1. $u \cdot v = v \cdot u$ (symétrie).
2. $(w + v) \cdot u = w \cdot u + v \cdot u$ (linéarité).
3. $(v \cdot u)^2 \leq \|u\|^2 \|v\|^2$ (inégalité de Cauchy-Schwartz).

Démonstration: Soient $u, v \in \mathbb{R}^2, t \in \mathbb{R}$. $\|v + tu\|^2 = (v + tu) \cdot (v + tu) = v \cdot v + 2t(v \cdot u) + (u \cdot u)t^2$.

On pose $f(t) = \|v\|^2 + 2(v \cdot u)t + \|u\|^2 t^2$. On peut supposer que $u \neq 0$ sinon l'égalité est évidente. □

2.2. Disques ouverts/fermés et sous-ensembles ouverts/fermés.

Définition 2.2.1 (disque): Soient $u \in \mathbb{R}^2, R > 0$. On appelle **disque ouvert** de rayon R centré en u l'ensemble:

$$B(u, r) := \{v \in \mathbb{R}^2 \mid \|v - u\| < R\}.$$

On appelle **disque fermé** de rayon R centré en u l'ensemble:

$$\overline{B}(u, R) := \{v \in \mathbb{R}^2 \mid \|v - u\| \leq R\}.$$

Définition 2.2.2 (ouvert): Soit U un sous-ensemble de \mathbb{R}^2 . On dit que U est un **ouvert** de \mathbb{R}^2 si

$$\forall u \in U, \exists r_u > 0, B(u, r_u) \subset U.$$

Remarque: L'ensemble de ces sous-ensembles sont notés O_{norm} .

Proposition 2.2.1:

1. Les sous-ensembles \emptyset et \mathbb{R}^2 sont des ouverts.
2. Soit $\{H_i\}_{i \in I} \subset O_{\text{norm}}$. Alors leur réunion est un sous-ensemble ouvert de \mathbb{R}^2 i.e,

$$\forall \{H_i\}_{i \in I} \subset O_{\text{norm}}, \bigcup_{i \in I} H_i \in O_{\text{norm}}.$$

3. Soit $\{H_i\}_{i \in \{1, \dots, n\}} \subset O_{\text{norm}}$ alors leur intersection est un sous-ensemble de \mathbb{R}^2 i.e,

$$\forall \{H_i\}_{i \in \{1, \dots, n\}} \subset O_{\text{norm}}, \bigcap_{i \in \{1, \dots, n\}} H_i \in O_{\text{norm}}.$$

Démonstration:

- 1.
2. On peut supposer la réunion non-vide. Soit $v \in V = \bigcup_{i \in I} H_i$, alors $\exists i_0, v \in H_{i_0}$. D'où

$$\exists v_{i_0}, B(v, v_{i_0}) \subset H_{i_0} \subset \bigcup_{i \in I} H_i$$

□

Définition 2.2.3: La collection O_{norm} s'appelle la topologie de \mathbb{R}^2 associée avec la norme euclidienne. (ou la topologie de la norme de \mathbb{R}^2).

Définition 2.2.4 (voisinage): Soit $u \in \mathbb{R}^2$. On appelle **voisinage ouvert** de u tout sous-ensemble ouvert U de \mathbb{R}^2 qui contient u .

Définition 2.2.5 (fermé): Soit $F \subset \mathbb{R}^2$. On dit que F est un fermé si le complémentaire de F dans \mathbb{R}^2 est un ouvert de \mathbb{R}^2 , i.e, F est un fermé $\Leftrightarrow F^c \in O_{\text{norm}}$

Remarque: L'ensemble de ces sous-ensembles sont notés F_{norm} .

Proposition 2.2.2:

1. Les sous-ensembles \emptyset et \mathbb{R}^2 sont des fermés.
2. Soit $\{H_i\}_{i \in \{1, -, n\}} \subset F_{\text{norm}}$. Alors leur réunion est un sous-ensemble fermé de \mathbb{R}^2 i.e,

$$\forall \{H_i\}_{i \in I} \subset F_{\text{norm}}, \bigcup_{i \in I} H_i \in F_{\text{norm}}.$$

3. Soit $\{H_i\}_{i \in I} \subset F_{\text{norm}}$ alors leur intersection est un sous-ensemble de \mathbb{R}^2 i.e,

$$\forall \{H_i\}_{i \in \{1, -, n\}} \subset F_{\text{norm}}, \bigcap_{i \in \{1, -, n\}} H_i \in F_{\text{norm}}.$$

3. Limites de suites.

Définition 3.1 (limite): Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de points de \mathbb{R}^2 . On dit que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet une **limite** si

$$\exists L \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow \|x_n - L\| \leq \varepsilon.$$

Dans ce cas on dit que la suite converge vers L . Sinon, on dit qu'elle diverge.

Proposition 3.1: Soit $x_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}, n \in \mathbb{N}$ une suite dans \mathbb{R}^2 . Alors $L = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ est la limite de x_n si et seulement si on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = b.$$

4. Points limites et adhérence d'un sous-ensemble.

Définition 4.1 (point isolé): Soit $A \subset \mathbb{R}^2$ un ensemble, $a \in A$. On dit que a est un point isolé s'il existe un voisinage ouvert V_a dans \mathbb{R}^2 tel que $V_a \cap A = \{a\}$.

Définition 4.2 (point intérieur): Soit $A \subset \mathbb{R}^2$ un ensemble, $a \in A$. On dit que a est un point intérieur s'il existe un voisinage ouvert de V_a dans \mathbb{R}^2 tel que $V_a \subset A$.

Le sous-ensemble des points intérieurs de A est noté $\text{int}(A)$ et on l'appelle l'intérieur de A .

Proposition 4.1: Soit $A \subset \mathbb{R}^2$ un ensemble. Alors son intérieur est le plus grand sous-ensemble ouvert contenu dans A .

Remarque: L'intérieur d'un ensemble A est une approximation de A par un sous-ensemble ouvert.

Définition 4.3 (point limite): Soit $A \subset \mathbb{R}^2$ un ensemble, $x \in \mathbb{R}^2$. On dit que x est un point limite de A s'il existe une suite infinie $\{a_n\}_n \in \mathbb{N}$ de points deux-à-deux distincts dans A telle que $a_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x$.

Définition 4.4 (Adhérence): L'ensemble des points limites s'appelle l'adhérence de A et on la désigne par \overline{A}

Proposition 4.2: Soit $A \subset \mathbb{R}^2$ un ensemble. Alors son adhérence est le plus petit sous-ensemble fermé qui contient A .

Remarque: Tout ouvert $A \subset \mathbb{R}^2$ est encadré de la manière suivante: $\text{Int}(A) \subset A \subset \overline{A}$.