Topologie et calcul différentiel

Table des matières

1. Topologie des espaces vectoriels normés.

1.1. Espaces vectoriels normés.

Définition 1.1 (Norme)**.** Soit E un espace vectoriel. On appelle norme sur E une fonction $\|\cdot\| : E \to \mathbb{R}$ vérifiant:
(1) $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in E, \|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$,
(2) $\forall x \in E, \|x\| = 0 \Rightarrow x = 0$,
(3) $\forall x, y \in E, \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Définition 1.2. Soit E un espace vectoriel et $\|\cdot\|$ une norme sur E. On appelle espace vectoriel normé un couple $(E, \|\cdot\|)$.

Proposition 1.3. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé, alors :
(1) $\|0\| = 0$,
(2) $\forall x \in E, \|x\| \geq 0$,
(3) $\forall x, y \in E, \big|\|x\| - \|y\|\big| \leq \|x - y\|$.

Démonstration.
(1) $\|0_E\| = \|0_{\mathbb{R}} * 0_E\| = 0_{\mathbb{R}} * \|0_E\| = 0_{\mathbb{R}}$.
(2) Soit $x \in E$, $\|0\| = \|x - x\| \leq \|x\| + \|-x\| = 2\|x\|$ d'où $\forall x \in E, \|x\| \geq 0$.
(3) Soit $x, y \in E$. $\|x\| = \|x + y - y\| \leq \|x - y\| + \|y\| \Leftrightarrow \|x\| - \|y\| \leq \|x - y\|$
et $\|y\| = \|y + x - x\| \leq \|y - x\| + \|x\| \Leftrightarrow \|y\| - \|x\| \leq \|x - y\|$.
Ainsi, $\|x - y\| \geq \max\big(\|y\| - \|x\|, \|x\| - \|y\|\big) = \big|\|x - y\|\big|$.

□

Proposition 1.4. Soit $(E, \|\cdot\|), F \subset E$ un sous-espace vectoriel. La restriction de $\|\cdot\|$ à F est une norme appelée norme induite.

1.2. Topologie des espaces vectoriels normés

Définition 1.5 (Boule ouverte/fermée)**.** Soit $\left(E, \|\cdot\|\right)$ un espace vectoriel normé, $a \in E, r > 0$. On appelle boule ouverte centrée en a de rayon r la partie $B(a,r) \coloneqq \left\{x \in E \mid \|x-a\| < r\right\}$, et boule fermée centrée en a de rayon r la partie $B_f(a,r) \coloneqq \left\{x \in E \mid \|x-a\| \leq r\right\}$.

Définition 1.6 (Ouvert/fermé)**.** Soit $\left(E, \|\cdot\|\right)$ un espace vectoriel normé. Soit $U \subset E$, on dit que U est:
(1) un ouvert de E si $\forall x \in U, \exists r > 0, B(x,r) \subset U$.
(2) un fermé de E si U^c est un ouvert de E.

Proposition 1.7. Soit $\left(E, \|\cdot\|\right)$ un espace vectoriel normé, alors
(1) $\varnothing$ et E sont ouverts et fermés.
(2) Une union quelconque d'ouverts est un ouvert.
(3) Une intersection finie d'ouverts est un ouvert.
(4) Une union finie de fermés est un fermé.
(5) Une intersection quelconque de fermés est un fermé.

Démonstration.
(1) $\forall x \in \varnothing, \exists \varepsilon, B(x,\varepsilon) \subset \varnothing$ donc $\varnothing$ est un ouvert et $\varnothing^c = E$ donc E est un fermé. De plus, $\forall x \in E, B(x,1) \subset E$ donc E est un ouvert et $\varnothing = E^c$ est un fermé.
(2) Soit $(O_i)_{i\in I}$ une famille d'ouverts. Soit $x \in \bigcup_{i\in\{1,\dots,n\}} O_i$, alors $\exists j \in I, x \in O_j$. Or O_j est un ouvert donc $\exists r_j > 0$ tel que $B\left(x, r_j\right) \subset O_j \subset \bigcup_{i\in I} O_i$ donc $\bigcup_{i\in I} O_i$ est un ouvert.
(3) Soit $(O_i)_{i\in\{1,\dots,n\}}$ une famille d'ouverts. Soit $x \in \bigcap_{i\in\{1,\dots,n\}}$ alors $x \in O_1, \dots, x \in O_n$. Or $(0_1, \dots, O_n)$ sont des ouverts de E donc $\exists (r_i)_{i\in I}$ tels que $B\left(x, (r_i)_{i\in\{1,\dots,n\}}\right) \subset (O_i)_{i\in I}$. Posons $\varepsilon \coloneqq \min(r_1, \dots, r_n) > 0$. Alors $B(x,\varepsilon) \subset O_1 \cap \dots \cap O_n$ donc $\bigcup_{i\in\{1,\dots,n\}} C_i$ est un ouvert.
(4) Soit $(C_1, \dots, C_n)$ une famille de fermés. Alors $\left(\bigcup_{i\in\{1,\dots,n\}} C_i\right)^c = \bigcap_{i\in\{1,\dots,n\}} (C_i)^c$ qui est un ouvert. Ainsi $\bigcup_{i\in\{1,\dots,n\}} C_i$ est un fermé.
(5) Soit $(C_i)_{i\in I}$ une famille de fermés. Alors $\left(\bigcap_{i\in I} C_i\right)^c = \bigcup_{i\in I} C_i^c$ qui est un ouvert. Ainsi, $\bigcap_{i\in I} C_i$ est un fermé.

$\square$

Définition 1.8 (Intérieur)**.** Soit $\left(E, \|\cdot\|\right)$ un espace vectoriel normé et $S \subset E$. On appelle *intérieur* de S l'ensemble $\mathring{S} \coloneqq \{x \in E \mid \exists \varepsilon > 0, B(x,\varepsilon) \subset S\}$.

Définition 1.9 (Adhérence)**.** Soit $\left(E, \|\cdot\|\right)$ un espace vectoriel normé et $S \subset E$. On appelle *adhérence* de S l'ensemble $\overline{S} \coloneqq \{x \in E \mid \forall \varepsilon > 0, B(x,\varepsilon) \cap S \neq \varnothing.\}$.

Définition 1.10 (Dense)**.** Soit $\left(E, \|\cdot\|\right)$ un espace vectoriel normé, $S \subset E$. On dit que S est *dense* dans E si $\overline{S} = E$.

Proposition 1.11. Soit $\left(E, \|\cdot\|\right)$ un espace vectoriel normé, $S \subset E$.
(1) $\overline{S^c} = \left(\mathring{S}\right)^c$,
(2) $\mathring{S^c} = \left(\overline{S}\right)^c$,
(3) $\mathring{S} \subset S \subset \overline{S}$,
(4) $\mathring{S}$ est le plus grand ouvert contenu dans S,
(5) $\overline{S}$ est le plus petit ouvert contenant S.

Proposition 1.12. Soit $\left(E, \|\cdot\|\right)$ un espace vectoriel normé et $S \subset E$.
(1) S est un ouvert si et seulement si $S = \mathring{S}$.

(2) S est un fermé si et seulement si $S = \overline{S}$.

Démonstration. A FAIRE □

Proposition 1.13. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé.
(1) $\forall S, T \subset E, \overline{S \cup T} = \overline{S} \cup \overline{T}$.
(2) $\forall S, T \subset E, \overline{S \cap T} \subset \overline{S} \cap \overline{T}$.
(3) $\forall S, T \subset E, S \mathring{\cap} T = \mathring{S} \cap \mathring{T}$.
(4) $\forall S, T \subset E, S \mathring{\cup} T \supset \mathring{S} \cup \mathring{T}$.

Définition 1.14 (Frontière)**.** Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et $S \subset E$. On appelle *frontière* de S l'ensemble noté par $\partial S \coloneqq \overline{S} \setminus \mathring{S}$.

Proposition 1.15. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et $S \subset E$, alors
(1) $\partial S = \{x \in E, \forall \varepsilon > 0, B(x, \varepsilon) \cap S \neq \varnothing \wedge B(x, \varepsilon) \cap S^c \neq \varnothing\}$.
(2) $\overline{S} = S \cup \partial S$.

S est fermé si et seulement si $\partial S \subset S$.
(1) S est ouverte si et seulement si $\partial S \cap S = \varnothing$.
(2) ∂S est un fermé.

Démonstration. TO DO □

1.3. Continuité.

Définition 1.16 (continue)**.** Soit $\left(E, \|\cdot\|_E\right), \left(F, \|\cdot\|_F\right)$ deux espaces vectoriels normés. Soit $S \subset E$. On dit que $f : S \to F$ est *continue* si :

$$\forall x \in S, \forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall y \in F, \|x - y\|_E \leq \eta \Rightarrow \|f(x) - f(y)\|_F \leq \varepsilon.$$

Proposition 1.17. Soit $\left(E, \|\cdot\|_E\right), \left(F, \|\cdot\|_F\right)$ deux espaces vectoriels normés, $S \subset E$, $f : S \to F$ alors les points suivants sont équivalents :
(1) f est continue.
(2) Pour tout ouvert U de F, il existe un ouvert V de E tel que $f^{-1}(U) = V \cap S$,
(3) Pour tout fermé C de F, il existe un fermé D de E tel que $f^{-1}(C) = D \cap S$.

Démonstration. TO DO □

Remarque 1.18. Formellement la proposition revient à dire que l'image reciproque d'un ouvert par une fonction continue est un ouvert.

Proposition 1.19. Soit $\left(E, \|\cdot\|_E\right), \left(F, \|\cdot\|_F\right)$ deux espaces vectoriels normés, $f : E \to F$ une application linéaire. Les points suivants sont équivalents:
(1) f est continue.
(2) f est continue en 0.
(3) $\exists M \geq 0, \forall x \in E, \|f(x)\|_F \leq M\|x\|_E$.

Démonstration.
(1) $1 \Rightarrow 2$: f est continue sur E alors elle est continue en 0.

(2) $2 \Rightarrow 1$: Supposons f continue en 0. Alors il existe $\eta > 0$ tel que $\forall x \in E, \|x\|_E \Rightarrow \|f(x)\|_F \leq 1$. Soit $x \in E \setminus \{0\}$ alors $\left\| f\left(\frac{\eta}{\|x\|_E} x\right)\right\| \leq 1$ d'où $f(x)_F \leq \frac{1}{\eta}\|x\|_E$. Si $x = 0$ alors $\|f(0)\|_F = 0 \leq \frac{1}{\eta}\|0\|_E$. Donc $M := \frac{1}{\eta}$ convient.
(3) A faire.

$\square$

Notation 1.20. On note $\mathcal{L}_c(E, F)$ l'espace vectoriel des fonctions linéaires continues de E dans F.

Corollaire 1.21. Soit $\left(E, \|\cdot\|_E\right)$ et $\left(F, \|\cdot\|_F\right)$ deux espaces vectoriels normés. Pour tout $L \in \mathcal{L}_c(E, F)$ on pose $|||L||| := \sup_{\|x\|_E \leq 1} \|L(x)\|_F$. Alors,
(1) $\forall L \in \mathcal{L}_c(E, F)$, $|||L||| < \infty$,
(2) Si $E \neq \{0\}$, $\forall L \in \mathcal{L}_c(E, F)$:

$$|||L||| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|L(x)\|_F}{\|x\|_E} = \sup_{\|x\|_E \in]0,1[} \frac{\|L(x)\|_F}{\|x\|_E} = \sup_{\|x\|_E = 1} \|L(x)\|_F,$$

(3) $|||\cdot|||$ est une norme sur $\mathcal{L}_c(E, F)$ appelée norme d'opératuer ou norme subordonnée,
(4) $\forall L \in \mathcal{L}_c(E, F), \forall x \in E$, $\|L(x)\|_F \leq |||L|||\ \|x\|_E$,
(5) Si $\left(G, \|\cdot\|_G\right)$ est un espace vectoriel normé, alors $\forall L \in \mathcal{L}_c(E, F), \forall K \in \mathcal{L}_c(F, G)$,

$$|||K \circ L||| \leq |||K|||\ |||L|||\ .$$

1.4. Suites dans un espace vectoriel normé.

Définition 1.22 (Convergente)**.** Soit $\left(E, \|\cdot\|_E\right)$, un espace vectoriel normé, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suité d'éléments de E et $l \in E$. On dit que $(x_n)_n$ tend vers l si $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, n \geq N \Rightarrow \|x_n - l\| \leq \varepsilon$. On dit qu'une suite est *convergente* si elle admet une limite.

Proposition 1.23. Il y a unicité de la limite.

Démonstration. Supposons $x_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} l_1$, et $x_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} l_2$.
Soit $\varepsilon > 0$ alors il existe $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ tels que $n \geq N_1 \Rightarrow \|l_1 - x_n\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ et $n \geq N_2 \Rightarrow \|l_2 - x_n\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$
Posons $n := \max(N_1, N_2)$. Alors $\|l_1 - l_2\| \leq \|l_1 + x_n + l_2 - x_n\| \leq \|x_n - l_1\| + \|x_n - l_2\| \leq \varepsilon$. D'où $\|l_1 - l_2\| = 0 \Leftrightarrow l_1 = l_2$. $\square$

Lemme 1.24. Soit $\left(E, \|\cdot\|_E\right)$, un espace vectoriel normé, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite dans E convergente. Alors $(x_n)_n$ est bornée.

Proposition 1.25. Soit $\left(E, \|\cdot\|_E\right)$, un espace vectoriel normé, et $S \subset E$. Si une suite d'éléments converge alors sa limite est dans $\overline{S}$.

Corollaire 1.26. Soit $\left(E, \|\cdot\|_E\right)$, un espace vectoriel normé, $S \subset E$. S est fermé si et seulement si pour toute suite convergente d'éléments de S, sa limite est dans S.

Proposition 1.27. Soit $\left(E, \|\cdot\|_E\right)$ et $\left(F, \|\cdot\|_F\right)$ deux espaces vectoriels normés, $S \subset E$, $a \in S$, et $f : S \to F$. Alors f est continue en a si et seulement si pour toute suite $(x_n)_n \in S^{\mathbb{N}}$ convergeant vers a, $(f(x_n))_n$ converge vers $f(a)$.

1.5. Compacité.

Définition 1.28 (Compacte)**.** Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et $S \subset E$. On dit que S est *compacte* si de toute suite d'éléments de S on peut extraire une sous-suite convergeant dans S.

Proposition 1.29. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé $K \subset E$ un compact, et $S \subset K$. Si S est fermée alors S est compacte.

Démonstration. Soit K un compact, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de S, alors $(x_n) \in K$ alors il existe une sous-suite de (x_n) qui converge dans K vers un élément $l \in \overline{S}$. Or $\overline{S} = S$ car S est fermé. $\square$

Définition 1.30 (bornée). Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. On dit qu'une partie $S \subset E$ est *bornée* s'il existe $M > 0$ tel que pour tout $x \in S, \|S\| \leq M$.

Proposition 1.31. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. Toute partie compacte de E est fermée et bornée.

Démonstration.
Montrons $K \subset E$ compacte $\Rightarrow$ K fermée. Soit $(x_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'élements de K convergeant vers $l \in E$. Montrons $l \in K$. Comme K est compacte, on peut extraire une sous-suite telle que $x_{\varphi(n)}$ converge vers $\bar{l} \in K$. Or, $x_{\varphi(n)}$ converge aussi vers l comme suite extraite d'une suite convergeante. Ainsi, par unicité de la limite, $l = \bar{l}$.
Montrons par contraposition K compact $\Rightarrow$ K borné. Supposons que K soit une partie non-bornée de E. Alors pour $n \in \mathbb{N}$, il existe $x_n \in K$ tel que $\|x_n\| > n$. Montrons que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ainsi construite n'admet pas de sous-suite convergeant dans K. Soit $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une fonction strictement croissante. Alors $\left\|x_{\varphi(n)}\right\| > \varphi(n) = n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Donc $x_{\varphi(n)}$ n'est pas convergente. Ainsi, K n'est pas compact. $\square$

Corollaire 1.32. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et $K \subset E$ un compact non-vide. Alors $\min_{x\in K} \|x\|$ et $\max_{x\in K} \|x\|$ sont bien définis.

Proposition 1.33. Soit $\left(E, \|\cdot\|_E\right), \left(F, \|\cdot\|_F\right)$ deux espaces vectoriels normés, $S \subset E$ et $f : S \to F$ une fonction continue. Si K est un compact de E inclus dans S alors $f(K)$ est compacte.

Démonstration. Soit $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $f(K)$. Alors pour $n \in \mathbb{N}$, il existe $x_n \in K$ tel que $y_n = f(x_n)$. Puisque $(x_n)_n$ est une suite d'éléments de K, il existe une sous suite $\left(x_{\varphi(n)}\right)_n$ qui converge vers un $l \in K$. Par continuité de f, il vient que $y_{\varphi(n)} = f\left(x_{\varphi(n)}\right) \longrightarrow f(l) \in f(K)$. Donc $f(K)$ est compacte. $\square$

1.6. Comparaison de normes.

Définition 1.34 (Equivalente). Soit E un espace vectoriel, N et N' deux normes sur E. On dit que N et N' sont *équivalentes* si

$$\exists \alpha, \beta > 0, \forall x \in E, \alpha N(x) \leq N'(x) \leq \beta N(x)$$

Proposition 1.35. L'équivalence de normes est une relation d'équivalence.

Proposition 1.36. Soit E un espace vectoriel, deux normes N, N' sur E sont équivalentes si et seulement si elles définissent la même topologie sur E.

1.7. Cas de la dimensions finie.

Proposition 1.37. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé de dimension fnie. Alors,

- Toutes les normes sur E sont équivalentes.
- Les parties compactes de E sont les parties fermées bornées

Lemme 1.38. Soit E un espace vectoriel de **dimension finie** et $\beta = (e_1, \dots, e_d)$ une base de E. On définit $\|\cdot\|_\infty : E \to \mathbb{R}$ par $\left\|\sum_{i=1}^d \lambda_i e_i\right\|_\infty = \max_i |\lambda_i|$ alors on a :

(1) $\|\cdot\|_\infty$ est une norme sur E.
(2) Pour tout $a > 0$, $B_f(0, a)$ est un compact de $(E, \|\cdot\|_\infty)$,
(3) Les compacts de $(E, \|\cdot\|_\infty)$ sont les fermés bornés.

Proposition 1.39. Soit $(E, \|\cdot\|_E), (F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces normés avec E de dimension finie. Alors toute application linéaire $E \longrightarrow F$ est continue.

2. Calcul différentiel.

2.1. Différentielle, propriétés élémentaires.

Définition 2.1 (Différentiable)**.** Soit E, F deux espaces vectoriels normés, $U \subset E$ $f : U \to F$, $a \in U$.

- On dit que f est *différentiable* au point a s'il existe une application linéaire continue $g : E \to F$ telle que $f(a+h) - f(a) - g(h) = o_{h\to 0}(h)$.
- On dit que f est différentiable dans U si f est différentiable en tout point de U.
- On appelle g la différentielle de f en a.

Proposition 2.2. Si la différentielle existe, elle est unique.

Démonstration. Soit $g, \tilde{g}$ deux différentielles de f en a. Montrons $g = \tilde{g}$.
En soustrayant on a $g - \tilde{g} = o_{h\to 0}(h)$ i.e $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall h \in E, \|h\|_E \leq \eta \Rightarrow \|\tilde{g}(h) - g(h)\|_F \leq \varepsilon \|h\|$.
Soit $h \in E \setminus \{0\}$. On a :

$$\left\|\frac{\eta}{2} \cdot \frac{h}{\|h\|_E}\right\| < \eta \Rightarrow \left\|\tilde{g}\left(\frac{\eta}{2} \cdot \frac{h}{\|h\|_E}\right) - g\left(\frac{\eta}{2} \cdot \frac{h}{\|h\|_E}\right)\right\| \leq \varepsilon \left\|\frac{\eta}{2} \frac{h}{\|h\|_E}\right\| \Leftrightarrow \frac{\eta}{2\|h\|_E} \|\tilde{g}(h) - g(h)\| \leq \varepsilon \frac{\eta}{2\|h\|_E} \|h\|_E$$
$$\Leftrightarrow \|\tilde{g}(h) - g(h)\| \leq \varepsilon \|h\|_E$$

donc on a bien $\|\tilde{g} - g\| \leq 0$ d'où $\tilde{g} = g$. $\square$

Définition 2.3. On appelle aussi g l'application *linéaire tangente*.

Proposition 2.4. Soit $U \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert, $a \in U$ et $f : U \to \mathbb{R}$. Alors f est différentiable en a si et seulement si f est dérivable en a. Dans ce cas, pour tout $h \in \mathbb{R}$, $\mathrm{d}f_a(h) = f'(a)h$.

Démonstration.
$\Rightarrow$ Supposons que f est différentiable en a.
Par définition, $f(a+h) - f(a) \underset{h\to 0}{=} \mathrm{d}f_a(h) + |h|\varepsilon(h)$, $\mathrm{d}f_a \in \mathcal{L}_{c(\mathbb{R},\mathbb{R})}$. On peut donc écrire pour un certain $c \in \mathbb{R}, \forall h \in \mathbb{R}, \mathrm{d}f_a(h) = ch$. D'où

$$f(a+h) - f(a) = ch + |h|\varepsilon(h).$$

Donc pour $h \neq 0$,

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = c + \frac{|h|}{h}\varepsilon(h).$$

f est bien dérivable en a et $f'(a) = c$. En particulier pour tout $h \in \mathbb{R}, \mathrm{d}f_a(h) = f'(a)h$.

$\Leftarrow$ Supposons f dérivable en a.
Il existe $c \in \mathbb{R}$, $\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = c + o(1)$. Alors

$$f(a+h) - f(a) = ch + o(h).$$

L'application $: \mathbb{R} \to \mathbb{R}\ ;\ h \mapsto ch$ est linéaire continue. Par définition, f est donc différentiable. $\square$

Proposition 2.5. Soit $f : U \to F$ une application. Si f est différentiable en a alors f est continue en a.

Démonstration. On a $f(a+h) \underset{h\to 0}{=} f(a) + \mathrm{d}f_a(h) + \|h\|\varepsilon(h)$. Puisque $\mathrm{d}f_a$ est continue et linéaire, $\mathrm{d}f_a(h) \underset{h\to 0}{\longrightarrow} 0$, de plus $\|h\|\varepsilon(h) \underset{h\to 0}{\longrightarrow} 0$. Ainsi, on a bien f continue. $\square$

Définition 2.6 (Différentielle). Soit E, F deux espaces vectoriels normés, $U \subset E$ $f : U \to F$. L'application $\mathrm{d}f : U \to \mathcal{L}_c(E,F)\ ;\ x \mapsto \mathrm{d}f_x$ est appellée *différentielle* de f.

Définition 2.7 (Continuement différentiable). Soit E, F deux espaces vectoriels normés, $U \subset E$ $f : U \to F$, $a \in \mathbb{R}$. On dit que f est *continuement différentiable* ou de classe C^1 en a si f est différentiable en tout point d'un voisinage ouvert V de a dans U et si $\mathrm{d}f : V \to \mathcal{L}_c(E,F)$ est continue en a.

2.2. Dérivée directionnelle et différentielle.

Définition 2.8. Soit E, F deux espaces vectoriels normés, $U \subset E$ $f : U \to F$. On dit que f est différentiable en a dans la direction $h \in E$ s'il existe $l \in \mathbb{R}$ telle que

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(a+th) - f(a)}{t} = l.$$

Dans ce cas on la note $\partial_h f(a) \in F$.

Proposition 2.9. Si f est différentiable en a alors elle est différentiable dans toutes les directions et $\forall h \in E, \mathrm{d}f_a(h) = \partial_h f(a)$.

Démonstration. On peut écrire $f(a+k) - f(a) = \mathrm{d}f_a(k) + \|k\|\varepsilon(k)$. Soit $h \in E$. Pour $t \neq 0$ suffisamment petit, $th \longrightarrow 0$. On a $f(a+th) - f(a) = \mathrm{d}f_a(th) + |t|\|h\|\varepsilon(h)$.
D'où $\frac{f(a+th)-f(a)}{t} = \mathrm{d}f_a(h) \underbrace{\left(\frac{|t|}{t}\|h\|\right)}_{\text{borné}} \underbrace{\varepsilon(th)}_{\underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0}$. Par définition, on a bien $\mathrm{d}f_a(h) = \partial_h f(a)$. $\square$

2.3. Dimension finie.

Notation 2.10. Soit $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ une fonction différentiable, $\mathcal{C} = (e_1, \ldots, e_m)$ la base canonique de $\mathbb{R}^m$. Alors on notera la dérivée de f en a de direction $(e_j)_{j\in\{1,\ldots,n\}}$ par $\partial_{e_j} f(a) = \partial_j f(a) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(a)$ et $\mathrm{d}f_a(e_j) = \partial_{e_j} f(a)$. Par ailleurs on pourra aussi noter $f = (f_1, \ldots, f_n)$.

Proposition 2.11. Soit $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ une fonction différentiable, $\mathcal{C} = (e_1, \ldots, e_m)$ la base canonique de $\mathbb{R}^m$, $\mathcal{C}, \mathcal{B}$ les matrices canoniques de $\mathbb{R}^m$ et $\mathbb{R}^n$. La matrice de df_a est donnée par

$$J_a(f) := \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)\right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(a) & \ldots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m}(a) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(a) & \ldots & \frac{\partial f_2}{\partial x_m}(a) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_n}{\partial x_2}(a) & \ldots & \frac{\partial f_n}{\partial x_m}(a) \end{pmatrix}.$$

Définition 2.12 (Jacobienne). La matrice $J_a(f)$ est appelée *matrice jacobienne*.

Définition 2.13 (Gradient)**.** Dans le cas $n = 1$, on note $\nabla f(a) = \begin{pmatrix} \partial_1(f) \\ \vdots \\ \partial_m f(a) \end{pmatrix}$ et on l'appelle *gradient* de f en a.

2.4. Propositions élémentaires.

Proposition 2.14. Soit E, F, G trois espaces vectoriels normés, U, V des ouverts respectifs de E et F, et $f : U \to F, g : V \to G$, 2 fonctions telles que $f(U) \subset V$.

- Si f est constante alors elle est différentiable en a et $\mathrm{d}f_a = 0$.
- Si f est différentiable en a et g différentiable en $f(a)$ alors $g \circ f$ est différentiable en a et $\mathrm{d}(g \circ f)_a = \mathrm{d}g_{f(a)} \circ \mathrm{d}f_a$. De plus en dimension finie,

$$\frac{\partial (g \circ f)_i}{\partial x_j}(a) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial g_i}{\partial y_k}(f(a)) \frac{\partial f_k}{\partial x_j}(a).$$

Démonstration.

- Soit f une fonction constante. On écrit $f(a+h) - f(a) = 0 = \|h\|\varepsilon(h)$.
- On écrit $f(a+h) = f(a) + (\mathrm{d}f_a)(h) + \|h\|\varepsilon_1(h)$. Ainsi, $g(f(a+h)) = g\big(f(a) + (\mathrm{d}f_a)(h) + \|h\|\varepsilon_1(h)\big)$. On note $\tilde{h} = (\mathrm{d}f_a)(h) + \|h\|\varepsilon_1(h)$ Comme g est différentiable en $f(a)$, on peut écrire

$$\begin{aligned} g(f(a+h)) &= g(f(a)) + \mathrm{d}g_b\big(\tilde{h}\big) + \left\|\tilde{h}\right\|_F \varepsilon_2\big(\tilde{h}\big) \\ &\underset{h\to 0}{=} g(f(a)) + \mathrm{d}g_b(\mathrm{d}f_a(h)) + \|h\|\,\mathrm{d}g_b(\varepsilon_1(h)) + \left\|\mathrm{d}f_a(h) + \|h\|\varepsilon_1(h)\right\|_F \cdot \varepsilon_2\big(\mathrm{d}f_a(h) + \|h\|\varepsilon_1\big). \end{aligned}$$

Or $\mathrm{d}g_b(\varepsilon_1(h)) \underset{h\to 0}{\longrightarrow} 0$, et $\varepsilon_2\big(\mathrm{d}f_a(h) + \|h\|\varepsilon_1\big) \underset{h\to 0}{\longrightarrow} 0$. De plus,

$\left\|\mathrm{d}f_a(h) + \|h\|\varepsilon_1(h)\right\|_F \leq \|\mathrm{d}f_a(h)\| + \|h\| \cdot \|\varepsilon_1(h)\| \leq \|\mathrm{d}f_a\| \cdot \|h\| + \|h\|\|\varepsilon_1(h)\| \leq \|h\|\big(\|\mathrm{d}f_a\| + \|\varepsilon_1(h)\|\big)$.

Il s'ensuit que $g(f(a+h)) = g(f(a)) + \mathrm{d}g_b(\mathrm{d}f_a(h)) + \|h\|\varepsilon_3(h)$ où $\varepsilon_3(h) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$ Or $\mathrm{d}f_a$ et $\mathrm{d}g_{f(a)}$ sont linéaires et continues donc $\mathrm{d}g_{f(a)} \circ \mathrm{d}f_a$ l'est aussi et $g \circ f$ est différientiable. En dimension finie (noté n), on pose $\mathcal{C}$ la base canonique. On a $\mathrm{d}(g \circ f)_a(e_j) = \mathrm{d}g_b\big(\mathrm{d}f_a(e_j)\big)$. Ainsi,

$$\frac{\partial (g \circ f)}{\partial x_j}(a) = \mathrm{d}g_b\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}(a)\right).$$

Ici, $F = \mathbb{R}^n$ et $f = (f_1, \ldots, f_n) = \sum_{k=1}^{n} f_k \tilde{e}_k$, on a $\frac{\partial f}{\partial x_j}(a) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f_k}{\partial x_j}(a)\tilde{e}_k$ d'où

$$\mathrm{d}g_{f(a)}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}(a)\right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f_k}{\partial x_j}(a)\,\mathrm{d}g_{f(a)}(\tilde{e}_k) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f_k}{\partial x_j}(a) \frac{\partial g}{\partial y_k}(f(a)).$$

On en déduit que

$$\frac{\partial (g \circ f)_i}{\partial x_j}(a) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial g_i}{\partial y_k}(f(a)) \frac{\partial f_k}{\partial x_j}(a).$$

□

Exemple 2.15. Soit $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ différentiable sur $\mathbb{R}^2$. Considérons $\varphi(x, y) = g(x+y, x-y)$. On pose $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$; $(x, y) \mapsto (x+y, x-y)$. f est linéaire en dimension finie et elle est donc différentiable sur $\mathbb{R}^2$ et,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y) &= \partial_1 g(x+y, x-y) \frac{\partial f_1}{\partial x}(x, y) + \partial g(x+y, x-y) \frac{\partial f_2}{\partial x}(x, y) \\ &= \partial g(x+y, x-y) + \partial f(x+y, x-y) \end{aligned}$$

De la meme manière, $\frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, y) = \partial_1 g(x+y, x-y) - \partial_2 g(x+y, x-y)$

Proposition 2.16. Soit E, F deux espaces vectoriels normés, $U \subset E$ un ouvert, et $f : U \to F$.
- Si $f : U \to F$ est une application linéaire continue de E vers F, alors f est différentiable et C^1 en tout point de U et $\forall x \in U, \mathrm{d}f_x = f$.
- Si $E = E_1 x ... x E_m$, $E_1, \cdots, E_n$ des espaces vectoriels normés, et f est une application multilinéaire continue, alors f est différentiable en tout point de U et pour tout $(x_1, ..., x_m) \in U$, $\forall (h_1, ..., h_m) \in E$,

$$(df_a)(h_1, ..., h_m) = f(h_1, x_2, ... x_m) + f(x_1, h_2, ..., x_m) + ... + f(x_1, ..., x_{n-1}, h_n).$$

Démonstration.
- Soit f une application linéaire continue. On a $f(a+h) - f(a) = f(a+h-a) = f(h) = f(h) + \|h\|\varepsilon(h)$.
- voir notes de cours.

$\square$

Exemple 2.17. $\rho : \mathbb{R}x\mathbb{R} \to \mathbb{R}\ ;\ (x,y) \mapsto xy$ est bilinéaire continue. Donc ρ est différentiable en tout point $a \in \mathbb{R}x\mathbb{R}$, on a $\mathrm{d}\rho_a(h_1, h_2) = a_1 h_2 + a_2 h_1$.

Proposition 2.18. Soit E, F deux espaces vectoriels normés,$U \subset E$ un ouvert, et $f : U \to F$. Si $F = F_1 \times ... \times F_n$ et $f = (f_1, ..., f_n)$ alors f est différentiable en a si et seulement si $f_1, ..., f_n$ sont différentiables enn a et $\mathrm{d}f_a = \big((\mathrm{d}f_1)_a, ..., (\mathrm{d}f_n)_a\big)$.

Démonstration.

$\Rightarrow$ On considère $f = (f_1, f_2, ..., f_n)$ différentiable en a. On peut écrire : $f(a+h) = f(a) + \mathrm{d}f_a(h) + \|h\|\varepsilon(h)$. En particulier, $f_j(a+h) = f_j(a) + p_j(\mathrm{d}f_a(h)) + \|h\|\varepsilon_j(h)$ où $p_j(u) = u_j$ dès que $u = (u_1, u_2, ..., u_n) \in F_1 x ... x F_n$. p_j est linéaire continue sur $(F_1 x ... x F_n, \|\cdot\|_\infty)$ à valeur dans $\left(F_j, \|\cdot\|_{F_j}\right)$. f_j est donc différentiable en a par la Proposition 2.14 et $\mathrm{d}f_j = p_j \circ \mathrm{d}f_a$.

$\Leftarrow$ Supposons $f_1, ..., f_n$ sont différentiables en a, $f_j(a+h) = f_j(a) + \left(\mathrm{d}f_j\right)_a(h) + \|h\|\varepsilon_j(h)$ où $l(h) = \big((\mathrm{d}f_1)_a(h), \cdots, (\mathrm{d}f_n)_a(h)\big)$ et $\varepsilon(h) = (\varepsilon_1(h), ..., \varepsilon_n(h))$. l est linéaire continue et $\varepsilon(h) \xrightarrow[h \to 0]{} 0$.

$\square$

Corollaire 2.19. Soit E, F deux espaces vectoriels normés,$U \subset E$ un ouvert, $(f, f_1, f_2) : U \to F$ des fonctions différentiables en a. et $\lambda \in \mathbb{R}$.
- $\mathrm{d}(f_1 + \lambda f_2)_a$ est différentiable en a et $\mathrm{d}(f_1 + \lambda f_2)_a = (\mathrm{d}f_1)_a + \lambda(\mathrm{d}f_2)_a$,
- Si $F = \mathbb{R}$ et si f_1, f_2 différentiables en a alors $f_1 f_2$ est différentiable en a et

$$\mathrm{d}(f_1 f_2)_a = f_2(a)(\mathrm{d}f_1)_a + f_1(a)(\mathrm{d}f_2)_a.$$

Démonstration.
- Soit f_1, f_2 différentiable en a et $\lambda \in \mathbb{R}$, on considère $f = (f_1, f_2)$ différentiable en a et $C : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\ ;\ (x,y) \mapsto x + \lambda y$ différentiable en tout point car linéaire continue. Alors $c \circ f$ est différentiable en a par Proposition 2.14 et $\mathrm{d}(c \circ f)_a = \mathrm{d}C_{f(a)} \circ \mathrm{d}f_a = c \circ \mathrm{d}f_a = c\big((\mathrm{d}f_1)_a, (\mathrm{d}f_2)_a\big) = \mathrm{d}(f_1)_a + \lambda(\mathrm{d}f_2)_a$.
- Soit f_1, f_2 à valeurs réelles différentiables en a, $p : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\ ;\ (x_1, x_2) \mapsto x_1 x_2$ est bilinéaire continue donc différentiable en tout point de $\mathbb{R}^2$ par la Proposition 2.16. Ainsi, par composition, $p \circ f$ est différentiable en a. De plus,

$$\mathrm{d}(p \circ f)_a = \mathrm{d}p_{f(a)} \circ \mathrm{d}f_a = \mathrm{d}p_{f(a)}\big((\mathrm{d}f_1)_a, (\mathrm{d}f_2)_a\big) = f_2(a)(\mathrm{d}f_1)_a + f_1(a)(\mathrm{d}f_2)_a.$$

$\square$

Théorème 2.20 (Inég. des accroissements finis)**.** Soit $(F, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé, $I = [\alpha, \beta]$, $\varphi : I \to F$, et $\Phi : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables telles que $\forall x \in [\alpha, \beta], \|\Phi'(x)\| \leq \varphi'(x)$. Alors,

$$\|\Phi(\beta) - \Phi(\alpha)\| \leq \varphi(\beta) - \varphi(\alpha).$$

Remarque 2.21. $\varphi(x) = Mx, M > 0$; alors $\forall x \in [\alpha, \beta], \|\Phi'(x)\| \leq M \Rightarrow \|\Phi(\beta) - \Phi(\alpha)\| \leq M(\beta - \alpha)$.

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$. Considérons l'ensemble

$$A = \left\{\alpha \in [\alpha, \beta] \mid \forall t \in [\alpha, \gamma], \|\Phi(t) - \Phi(\alpha)\| \leq \varphi(t) - \varphi(\alpha) + \varepsilon(t - \alpha)\right\} \subset [\alpha, \beta].$$

Puisque $\alpha \in A$ et A est majoré par β, $\theta \coloneqq \sup A$ existe. De plus, A est fermé du fait de la continuité de φ et Φ, donc $\theta \in A$, par ailleurs, A est un intervalle. Ainsi, on peut écrire $A = [\alpha, \theta]$. Montrons par absurde $\theta = \beta$. Supposons $\theta < \beta$.
Par définition de θ, $\|\Phi(\theta) - \Phi(\alpha)\| \leq \varphi(\theta) - \varphi(\alpha) + \varepsilon(\theta - \alpha)$. Puisque φ et Φ sont dérivables, $\exists \delta > 0$ tel que $\forall t \in [0, \delta]$, $\|\Phi(\theta + t) - \Phi(\theta) - t\Phi'(\theta)\| \leq \frac{\varepsilon}{2}t$, et $|\varphi(\theta + t) - \varphi(\theta) - t\varphi'(\theta)| \leq \frac{\varepsilon}{2}t$. Ainsi,

$$\begin{aligned}\|\Phi(\theta + t) - \Phi(\alpha)\| &\leq \|\Phi(\theta + t) - \Phi(\theta)\| + \|\Phi(\theta) - \Phi(\alpha)\| \\ &\leq \|\Phi(\theta + t) - \Phi(\theta)\| + \varphi(\theta) - \varphi(\alpha) + \varepsilon(\theta - \alpha).\end{aligned}$$

Or par inégalité triangulaire (inversée ?),

$$\begin{aligned}\|\Phi(\theta + t) - \Phi(\theta)\| \leq t\|\Phi'(\theta)\| + \frac{\varepsilon}{2}t &\leq t\varphi'(\theta) + \frac{\varepsilon}{2}t \\ &\leq \varphi(\theta + t) - \varphi(\theta) + \varepsilon t.\end{aligned}$$

Alors, pour tout $t \in [\alpha, \beta]$, $\|\Phi(t) - \Phi(\alpha)\| \leq \varphi(t) - \varphi(\alpha) + \varepsilon(t - \alpha)$. D'où

$$\begin{aligned}\|\Phi(\theta) - \Phi(t)\| &\leq \varphi(\theta) - \varphi(\alpha) + \varepsilon(\theta - \alpha) + \varphi(\theta + t) - \varphi(\theta) + \varepsilon t \\ &= \varphi(\theta + t) - \varphi(\alpha) + \varepsilon(\theta + t - \alpha).\end{aligned}$$

Cela montre que pour tout $t \in [0, \delta]$, $\theta + t \in A$ absurde. D'où $t = \beta$, et

$$\|\Phi(b) - \Phi(\alpha)\| \leq \varphi(\beta) - \varphi(\alpha) + \varepsilon(\beta - \alpha) \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} \varphi(\beta) - \varphi(\alpha).$$

□

Proposition 2.22. Soit E, F deux espaces vectoriels normés, $U \subset E$ un ouvert non vide, et $f : U \to F$ une application C^1. On considère $a_t = (1 - t)a_0 + ta_1, t \in [0, 1]$. S'il existe $M \geq 0$ tel que $\left\|\mathrm{d}f_{a_t}\right\| \leq M$, alors

$$\|f(a_1) - f(a_0)\| \leq M\|a_1 - a_0\|.$$

Démonstration. Considérons $a_t = (1 - t)a_0 + ta_1, t \in [0, 1]$, et $\varphi : [0, 1] \to F$; $t \mapsto f(a_t)$. $t \mapsto a_t$ est une fonction affine donc dérivable. Puisque f est différentiable sur U, on peut appliquer la Proposition 2.14 et on trouve Φ dérivable et $\Phi'(t) = \mathrm{d}f_{a_t}\left(\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}\right) = \mathrm{d}f_{a_t}(a_1 - a_0)$.
On a $\|\Phi'(t)\| = \left\|\mathrm{d}f_{a_t}(a_1 - a_0)\right\| \leq \left\|\mathrm{d}f_{a_t}\right\| \cdot \|a_1 - a_0\| \leq M\|a_1 - a_0\|$ On pose $\varphi(t) = M\|a_1 - a_0\| \cdot t$
On a $\|\Phi'(t)\| \leq \varphi'(t)$. Ainsi, $\|f(a_1) - f(a_0)\| = \|\Phi(1) - \Phi(0)\| \leq \varphi(1) - \varphi(0) = M\|a_1 - a_0\|$. □

Corollaire 2.23. Supposons U convexe, et $\forall x \in U, \|\mathrm{d}f_x\| \leq M$. Alors f est M- lipschitzienne.

Remarque 2.24. Sur un ouvert convexe, et si la différentielle est nulle alors f est constante.

Proposition 2.25. Si U est un connexe par arcs et si $\mathrm{d}f_x = 0$ pour tout $x \in U$, alors f est constante sur U

2.5. Différentielles partielles et d'ordre supérieur.

2.5.1. Différentielles partielles.

Soit $E_1, \cdots, E_n$, F des espaces vectoriels normés. On note $E = E_1 x \cdots x E_n$ que l'on muni de $\|(x_1, \dots, x_n)\| = \max \|x_i\|_{E_i}$.

Définition 2.26. Soit U un ouvert de E et $f : u \to F$, $a = (a_1, \dots, a_n) \in U \subset E$. On dit que f est différentiable par rapport à la i-ème variable au point a lorsque l'application partielle $f_i : E_i \to F$; $x \mapsto f(a_1, a_2, \dots, x, a_{i+1}, \dots, a_n)$ est différentiable en a_i.
La différentielle de cette application est notée $\partial_i f_a$. C'est un élément de $\mathcal{L}_c(E_i, F)$.

Proposition 2.27. Si f est différentiable en $a \in U$, alors f est différentiable partiellement par rapport à chaque variable en a et

$$\mathrm{d}f_a(h_1, \dots, h_n) = \sum_{i=1}^{n} \partial_i f_a(h_i).$$

Démonstration. Soit $i \in \{1, \dots, n\}$. Pour $x \in E_i$, on pose $\tilde{x}_i = \big(0, 0, \dots, x_{i\text{ème pos}}, 0, \dots, 0\big) = q_i(x)$. Comme f est différentiable en a on peut écrire

$$f(a + \tilde{x}_i) - f(a) - \mathrm{d}f_a(\tilde{x}_i) \underset{x \to 0}{=} \|\tilde{x}_i\| \varepsilon(\widetilde{x_i}).$$

C'est la définition de la différentiabilité partielle de f en a par rapport à la i-ème variable. La différentielle est $\partial_i f_a = \mathrm{d}f_a \circ q_i$. Enfin, pour $h \in E$, $h = \sum_{i=1}^{n} \tilde{h}_i$ d'où

$$\mathrm{d}f_a(h) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{d}f_a\big(\tilde{h}_i\big) = \sum_{i=1}^{n} \partial_i f_a(h_i).$$

□