Licence 3 de mathématiques à distance

Cours d'analyse complexe

Lionel BAYLE 5 février 2024

Chapitre 1, partie 2.
Les fonctions holomorphes.

Table des matières

2 Lien avec la différentiabilité.

But : On va montrer que dérivable (au sens complexe) équivaut à différentiable plus les conditions de Cauchy.

2.1 Rappels sur la différentiabilité.

Remarque 1.
Pour une fonction $f : U \to \mathbb{C}$ et $z \in U$, on peut écrire $z = x + iy$ donc $f(z) = f(x + iy)$ est en fait une fonction $f(x, y)$ des deux variables réelles x et y. On peut donc utiliser la notion de différentiabilité des fonctions de plusieurs variables.

Notation 1.

Définissons la bijection $e : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$, $(x, y) \mapsto x + iy$. Notons l'application première coordonnée définie sur $\mathbb{R}^2$, $dx : (x, y) \mapsto x$ et de même l'application seconde coordonnée, $dy : (x, y) \mapsto y$. Notons $dz = \mathrm{Id}_{\mathbb{C}} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto z$. Remarquons que via la bijection e, $dz = dx + idy$. La bijection e permet de voir une application comme une application définie sur $\mathbb{R}^2$ quand nous voulons faire du calcul différentiel et comme une application définie sur $\mathbb{C}$ pour faire de la dérivation complexe, par l'identification $f(x, y) = f(x + iy) = f(z)$, qui constitue un abus de notation, car nous notons de la même manière deux application différentes, nous devrions noter $f(x, y) = h(z)$. Exemple : $f : z \mapsto 2z$, $f(x, y) = f(x + iy) = f(z) = 2z = 2x + 2iy$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2i$ et $f'(z) = 2$.

Définition 1 (différentiabilité).

f est différentiable en $z_0 \in U$ si il existe $a, b \in \mathbb{C}$ tels que $\dfrac{f(z) - f(z_0) - a(x - x_0) - b(y - y_0)}{z - z_0} \to 0$ quand $z \to z_0$, $z \neq z_0$, $z \in U$. Ce qui équivaut à dire qu'il existe une fonction $\epsilon : U \to \mathbb{C}$ tendant vers 0 quand z tend vers z_0 telle que $f(z) = f(z_0) + a(x - x_0) + b(y - y_0) + (z - z_0)\epsilon(z)$. On dit que f est différentiable sur U si elle est différentiable en tout point de U.

Remarque 2.
La notion de différentielle définie ci-dessus correspond à celle vue en cours de calcul différentiel si on identifie $\mathbb{C}$ à $\mathbb{R}^2$. a et b sont alors uniques.

Preuve :
Si un autre couple (a', b') est solution, il vérifie $f(z) = f(z_0) + a'(x - x_0) + b'(y - y_0) + (z - z_0)\epsilon'(z)$, avec $\lim_{z \to z_0} \epsilon'(z) = 0$. On a par différence : $0 = (a' - a)(x - x_0) + (b' - b)(y - y_0) + (z - z_0)(\epsilon'(z) - \epsilon(z))$. En posant $z = x + iy_0$, on trouve $0 = (a' - a)(x - x_0) + (x - x_0)(\epsilon'(z) - \epsilon(z))$. Soit $0 = a' - a + \epsilon'(z) - \epsilon(z) \to a' - a$ quand $z \to z_0$, donc $a' = a$. De même, en posant $z = x_0 + iy$, on trouve $b' = b$.

Ceci implique que f (abus de notations) admet des dérivées partielles par rapport à x et y, et on a : $a = \dfrac{\partial f}{\partial x}(z_0) = f'_x(z_0)$ et $b = \dfrac{\partial f}{\partial y}(z_0) = f'_y(z_0)$. L'application $\mathbb{R}$-linéaire $\mathrm{d}\, f(z_0) : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z = x + iy \mapsto ax + by$ est appelée différentielle de f en z_0. Si on note $\mathrm{d}\, x = \mathrm{Re}$ et $\mathrm{d}\, y = \mathrm{Im}$, on a $\mathrm{d}\, f(z_0)(z - z_0) = a\ \mathrm{d}\, x(z - z_0) + b\ \mathrm{d}\, y(z - z_0)$.

Définition 2 ($\mathbb{R}$-linéarité).

Une application $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ est dite $\mathbb{R}$-linéaire, si $\forall c \in \mathbb{R}$, $\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2$, $f(cz + z') = cf(z) + f(z')$. Ce qui est équivalent à dire que si on considère f comme une application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$, elle est linéaire.

Proposition 1.

Si f et g sont des fonctions de U vers $\mathbb{C}$ différentiables en z_0 et si $\lambda \in \mathbb{C}$ alors λf, $f + g$ et fg sont différentiables en z_0. Si de plus $g(z_0) \neq 0$ alors $\dfrac{f}{g}$ est différentiable en z_0.

L'exercice 4 montre la différentiabilité de fg.

Proposition 2.

Si f est de classe C^1 sur U, c'est à dire qu'elle possède des dérivées partielles f'_x et f'_y continues sur U, alors f est différentiable sur U.

Remarque 3.
x et y sont des variables réelles paramétrant $\mathbb{C}$ comme $\mathbb{R}$-espace vectoriel, on peut aussi paramétrer $\mathbb{C}$ comme $\mathbb{R}$-espace vectoriel à l'aide de combinaisons linéaires de x et y, $z = x + iy$ et $\bar{z} = x - iy$.

2.2 Dérivées partielles par rapport à z et $\bar{z}$.

Définition 3 (dérivée partielle par rapport à z ou $\bar{z}$)**.**

Si f est différentiable en z_0, on note :
$\dfrac{\partial f}{\partial z}(z_0) = f'_z(z_0) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}(z_0) - i\dfrac{\partial f}{\partial y}(z_0)\right)$ appelée dérivée partielle par rapport à z.
$\dfrac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0) = f'_{\bar{z}}(z_0) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}(z_0) + i\dfrac{\partial f}{\partial y}(z_0)\right)$ appelée dérivée partielle par rapport à $\bar{z}$.
On définit les applications $\mathbb{R}$-linéaires de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$: $\mathrm{d}\,z = \mathrm{Id} = \mathrm{d}\,x + i\,\mathrm{d}\,y$ et $\mathrm{d}\,\bar{z} = \mathrm{d}\,x - i\,\mathrm{d}\,y$ qui est en fait la conjugaison.

Remarque 4.
$\mathrm{d}\,z$ est $\mathbb{C}$-linéaire, en effet si $z_0 \in \mathbb{C}$ et $\lambda \in \mathbb{C}$, $\mathrm{d}\,z(\lambda z_0) = \mathrm{Id}(\lambda z_0) = \lambda z_0 = \lambda\,\mathrm{Id}(z_0)$. Si de plus, $z_1 \in \mathbb{C}$, $\mathrm{d}\,z(z_0 + z_1) = \mathrm{Id}(z_0 + z_1) = z_0 + z_1 = \mathrm{Id}(z_0) + \mathrm{Id}(z_1)$.

Pourquoi ces notations ?
C'est pour avoir l'écriture naturelle en $(z, \bar{z})$:
$$\mathrm{d}\,f(z_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(z_0)\,\mathrm{d}\,x + \frac{\partial f}{\partial y}(z_0)\,\mathrm{d}\,y = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(z_0) - i\frac{\partial f}{\partial y}(z_0)\right)(\mathrm{d}\,x + i\,\mathrm{d}\,y) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(z_0) + i\frac{\partial f}{\partial y}(z_0)\right)(\mathrm{d}\,x - i\,\mathrm{d}\,y) = \frac{\partial f}{\partial z}(z_0)\,\mathrm{d}\,z + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0)\,\mathrm{d}\,\bar{z}.$$

Proposition 3.

f est différentiable en z_0 avec dérivées partielles $\dfrac{\partial f}{\partial z}(z_0)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0)$ si et seulement si
$\dfrac{f(z) - f(z_0) - \frac{\partial f}{\partial z}(z_0)(z - z_0) - \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0)(\bar{z} - \bar{z}_0)}{z - z_0} \to 0$ *quand $z \to z_0$, $z \in U$.*

Preuve :
C'est la définition de la différentiabilité car $\dfrac{\partial f}{\partial x}(z_0)(x - x_0) + \dfrac{\partial f}{\partial y}(z_0)(y - y_0) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(z_0)\,\mathrm{d}\,x(z - z_0) + \dfrac{\partial f}{\partial y}(z_0)\,\mathrm{d}\,y(z - z_0) = \dfrac{\partial f}{\partial z}(z_0)\,\mathrm{d}\,z(z - z_0) +$

$\dfrac{\partial f}{\partial \bar z}(z_0)\ \mathrm{d}\,\bar z(z-z_0) = \dfrac{\partial f}{\partial z}(z_0)(z-z_0) + \dfrac{\partial f}{\partial \bar z}(z_0)(\bar z - \bar z_0)$. En effet, $\mathrm{d}\,x(z-z_0) = x - x_0$ et $\mathrm{d}\,y(z-z_0) = y - y_0$. La suite du calcul se justifie par les formules de la définition ci-dessus.

Proposition 4.

Soit $f : U \to \mathbb{C}$ différentiable en $z_0 \in U$, alors $\bar f$ est différentiable en z_0 et $\dfrac{\partial \bar f}{\partial z}(z_0) = \overline{\dfrac{\partial f}{\partial \bar z}}(z_0)$ et $\dfrac{\partial \bar f}{\partial \bar z}(z_0) = \overline{\dfrac{\partial f}{\partial z}}(z_0)$.

Preuve :

On remarque que $\dfrac{f(z) - f(z_0) - a(z-z_0) - b(\bar z - \bar z_0)}{z - z_0} \to 0$ quand $z \to z_0$ équivaut à $\dfrac{f(z) - f(z_0) - a(z-z_0) - b(\bar z - \bar z_0)}{|z - z_0|} \to 0$ quand $z \to z_0$, car un nombre tend vers 0 si et seulement si son module tend vers 0 et les deux nombres ont même module.

En effet $\left|\dfrac{f(z) - f(z_0) - a(z-z_0) - b(\bar z - \bar z_0)}{z - z_0}\right| = \left|\dfrac{f(z) - f(z_0) - a(z-z_0) - b(\bar z - \bar z_0)}{|z - z_0|}\right|$.

On peut donc prendre comme définition de la différentiabilité en z_0, $\dfrac{f(z) - f(z_0) - \frac{\partial f}{\partial z}(z_0)(z-z_0) - \frac{\partial f}{\partial \bar z}(\bar z - \bar z_0)}{|\ z - z_0\ |} \to 0$ quand $z \to z_0$, $z \in U$. Ceci implique par conjugaison $\dfrac{\bar f(z) - \bar f(z_0) - \overline{\frac{\partial f}{\partial z}}(z_0)(\bar z - \bar z_0) - \overline{\frac{\partial f}{\partial \bar z}}(z - z_0)}{|\ z - z_0\ |} \to 0$ quand $z \to z_0$, $z \in U$, ce qui signifie que $\bar f$ est différentiable en z_0 et $\dfrac{\partial \bar f}{\partial z}(z_0) = \overline{\dfrac{\partial f}{\partial \bar z}}(z_0)$, $\dfrac{\partial \bar f}{\partial \bar z}(z_0) = \overline{\dfrac{\partial f}{\partial z}}(z_0)$.

Proposition 5.

Soit $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction différentiable en $z_0 \in U$ et $g : V \to \mathbb{C}$ une fonction différentiable en $f(z_0) \in V$, alors $g \circ f$ est différentiable en z_0 et $\dfrac{\partial g \circ f}{\partial z}(z_0) = \dfrac{\partial g}{\partial z}(f(z_0))\dfrac{\partial f}{\partial z}(z_0) + \dfrac{\partial g}{\partial \bar z}(f(z_0))\dfrac{\partial \bar f}{\partial z}(z_0)$ et $\dfrac{\partial g \circ f}{\partial \bar z}(z_0) = \dfrac{\partial g}{\partial z}(f(z_0))\dfrac{\partial f}{\partial \bar z}(z_0) + \dfrac{\partial g}{\partial \bar z}(f(z_0))\dfrac{\partial \bar f}{\partial \bar z}(z_0)$.

Preuve :

Soit $z_1 = f(z_0)$, on a $f(z) = f(z_0) + a(z - z_0) + b(\bar z - \bar z_0) + (z - z_0)\epsilon_1(z)$ et $g(z) = g(z_1) + c(z - z_1) + d(\bar z - \bar z_1) + (z - z_1)\epsilon_2(z)$.
$g \circ f(z) = g(f(z_0)) + c(f(z) - f(z_0)) + d(\overline{f(z)} - \overline{f(z_0)}) + (f(z) - f(z_0))\epsilon_2(f(z)) = g(f(z_0)) + ca(z - z_0) + cb(\bar z - \bar z_0) + d\bar a(\bar z - \bar z_0) + d\bar b(z - z_0) + c(z - z_0)\epsilon_1(z) + d(\bar z - \bar z_0)\overline{\epsilon_1(z)} + (f(z) - f(z_0))\epsilon_2(f(z)) = g(f(z_0)) + (ca + d\bar b)(z - z_0) + (cb + d\bar a)(\bar z - \bar z_0) + (z - z_0)\epsilon_3(z)$ avec $\epsilon_3(z) \to 0$ quand $z \to z_0$. Donc $g \circ f$ est différentiable en z_0. Puisque $a = \dfrac{\partial f}{\partial z}(z_0)$, $b = \dfrac{\partial f}{\partial \bar z}(z_0))$, $c = \dfrac{\partial g}{\partial z}(f(z_0))$ et $d = \dfrac{\partial g}{\partial \bar z}(f(z_0))$, on a $\dfrac{\partial g \circ f}{\partial z}(z_0) = \dfrac{\partial g}{\partial z}(f(z_0))\dfrac{\partial f}{\partial z}(z_0) + \dfrac{\partial g}{\partial \bar z}(f(z_0))\dfrac{\partial \bar f}{\partial z}(z_0)$ et $\dfrac{\partial g \circ f}{\partial \bar z}(z_0) = \dfrac{\partial g}{\partial z}(f(z_0))\dfrac{\partial f}{\partial \bar z}(z_0) + \dfrac{\partial g}{\partial \bar z}(f(z_0))\dfrac{\partial \bar f}{\partial \bar z}(z_0)$.

2.3 Conditions de dérivabilité en coordonnées cartésiennes et conditions de Cauchy en coordonnées cartésiennes.

Proposition 6 (condition nécessaire de dérivabilité)**.**

Si f est dérivable en $a \in U$ alors f est différentiable en a et sa différentielle est $\mathbb{C}$-linéaire.

Preuve :
On a $\lim\limits_{z\to a}\left(\dfrac{f(z)-f(a)}{z-a}-f'(a)\right)=0$ donc $\lim\limits_{z\to a}\left(\dfrac{f(z)-f(a)-f'(a)(z-a)}{z-a}\right)=0$. Donc f est différentiable en a de différentielle l'application $\mathbb{C}$-linéaire $\mathrm{d}\,f(a):\mathbb{C}\to\mathbb{C}$, $z\mapsto f'(a)z$.

Remarque 5.

On a $\mathrm{d}\,f(a)=f'(a)\,\mathrm{d}\,z$, c'est pour celà qu'on note $f'=\dfrac{\mathrm{d}\,f}{\mathrm{d}\,z}$.

Théorème 1 (conditions de dérivabilité en coordonnées cartésiennes)**.**

Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$ et f différentiable en $a\in U$, alors les conditions suivantes sont équivalentes :
i)f est dérivable en a
ii)$\dfrac{\partial f}{\partial y}(a)=i\dfrac{\partial f}{\partial x}(a)$
iii)$\mathrm{d}\,f(a)$ *est $\mathbb{C}$-linéaire.*

Preuve :
i) implique $\mathrm{d}\,f(a)$ est $\mathbb{C}$-linéaire d'après la proposition précédente, donc $\mathrm{d}\,f(a)(i)=i\,\mathrm{d}\,f(a)(1)$. Or, $\mathrm{d}\,f(a)=\dfrac{\partial f}{\partial x}(a)\,\mathrm{d}\,x+\dfrac{\partial f}{\partial y}(a)\,\mathrm{d}\,y$, donc $\mathrm{d}\,f(a)(i)=\dfrac{\partial f}{\partial x}(a)\,\mathrm{d}\,x(i)+\dfrac{\partial f}{\partial y}(a)\,\mathrm{d}\,y(i)=\dfrac{\partial f}{\partial y}(a)$ car $\mathrm{d}\,x(i)=\mathrm{Re}(i)=0$ et $\mathrm{d}\,y(i)=\mathrm{Im}(i)=1$, et $\mathrm{d}\,f(a)(1)=\dfrac{\partial f}{\partial x}(a)\,\mathrm{d}\,x(1)+\dfrac{\partial f}{\partial y}(a)\,\mathrm{d}\,y(1)=\dfrac{\partial f}{\partial x}(a)$ car $\mathrm{d}\,x(1)=\mathrm{Re}(1)=1$ et $\mathrm{d}\,y(1)=\mathrm{Im}(1)=0$. D'où, $\mathrm{d}\,f(a)(i)=\dfrac{\partial f}{\partial y}(a)=i\,\mathrm{d}\,f(a)(1)=i\dfrac{\partial f}{\partial x}(a)$. Soit $\dfrac{\partial f}{\partial y}(a)=i\dfrac{\partial f}{\partial x}(a)$, donc on a ii).
ii) implique $\mathrm{d}\,f(a)=\dfrac{\partial f}{\partial x}(a)\,\mathrm{d}\,x+i\dfrac{\partial f}{\partial x}(a)\,\mathrm{d}\,y=\dfrac{\partial f}{\partial x}(a)\,\mathrm{d}\,z=\dfrac{\partial f}{\partial x}(a)\,\mathrm{Id}$ est $\mathbb{C}$-linéaire.
iii) implique $\mathrm{d}\,f(a):z\mapsto cz$, $c\in\mathbb{C}$ donc $\dfrac{f(z)-f(a)-c(z-a)}{z-a}$ tend vers 0 quand z tend vers a, ce qui signifie que $\dfrac{f(z)-f(a)}{z-a}\underset{z\to a}{\longrightarrow}c$, donc f est dérivable en a.

Remarque 6 (moyen mnémotechnique).

Pour retrouver la condition $\frac{\partial f}{\partial y}(a) = i\frac{\partial f}{\partial x}(a)$, il suffit de la tester sur l'application identique $\frac{\partial z}{\partial y}(a) = i = i\frac{\partial z}{\partial x}(a)$.

Exemple 1.

Soit $e^z = \exp(z) : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z = x + iy \mapsto e^x(\cos y + i \sin y)$. Montrons que f est holomorphe.
On a $\frac{\partial f}{\partial x}(z) = e^x(\cos y + i \sin y)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(z) = e^x(-\sin y + i \cos y) = ie^x(\cos y + i \sin y)$. $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ étant continues sur $\mathbb{C}$, f est différentiable sur $\mathbb{C}$, puisque $\frac{\partial f}{\partial y} = i\frac{\partial f}{\partial x}$, f est holomorphe sur $\mathbb{C}$.

Proposition 7 (conditions de Cauchy en coordonnées cartésiennes).

Soit $f = P + iQ$ une fonction différentiable, définie par ses parties réelle et imaginaire ($P = \mathrm{Re}(f)$, $Q = \mathrm{Im}(f)$), sur un ouvert U de $\mathbb{C}$. Soit $a \in U$, alors f est dérivable en a si et seulement si $\frac{\partial P}{\partial x}(a) = \frac{\partial Q}{\partial y}(a)$ et $\frac{\partial P}{\partial y}(a) = -\frac{\partial Q}{\partial x}(a)$.

Preuve :
$\frac{\partial f}{\partial x}(a) = \frac{\partial P}{\partial x}(a) + i\frac{\partial Q}{\partial x}(a)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(a) = \frac{\partial P}{\partial y}(a) + i\frac{\partial Q}{\partial y}(a)$. f est dérivable en a si et seulement si $\frac{\partial f}{\partial y}(a) = i\frac{\partial f}{\partial x}(a)$, ce qui équivaut à $\frac{\partial P}{\partial y}(a) = -\frac{\partial Q}{\partial x}(a)$ et $\frac{\partial Q}{\partial y}(a) = \frac{\partial P}{\partial x}(a)$.

2.4 Conditions de dérivabilité en coordonnées polaires et conditions de Cauchy en coordonnées polaires.

Proposition 8 (condition dérivabilité en coordonnées polaires).

$v : \mathbb{R}^{+*} \times [0, 2\pi[\to \mathbb{R}^2$, $(r, \theta) \mapsto (x = r\cos\theta, y = r\sin\theta)$ réalise un changement de variables. Soit $g(r, \theta) = f(r\cos\theta, r\sin\theta) = h(z)$ une fonction différentiable de (r, θ), alors g est holomorphe sur un ouvert U de $\mathbb{C}^*$ (plus exactement h, il s'agit d'un abus de notations) si et seulement si $\frac{1}{r}\frac{\partial g}{\partial \theta} = i\frac{\partial g}{\partial r}$ sur U. Le résultat peut aussi s'énoncer en terme de dérivabilité en un point a.

Preuve :

$$\left|\begin{array}{l}\dfrac{\partial g}{\partial r}=\cos\theta\dfrac{\partial f}{\partial x}+\sin\theta\dfrac{\partial f}{\partial y}\\ \dfrac{\partial g}{\partial \theta}=-r\sin\theta\dfrac{\partial f}{\partial x}+r\cos\theta\dfrac{\partial f}{\partial y}\end{array}\right.$$. D'après les formules de Cramer : $$\left|\begin{array}{l}\dfrac{\partial f}{\partial x}=\cos\theta\dfrac{\partial g}{\partial r}-\dfrac{\sin\theta}{r}\dfrac{\partial g}{\partial \theta}\\ \dfrac{\partial f}{\partial y}=\sin\theta\dfrac{\partial g}{\partial r}+\dfrac{\cos\theta}{r}\dfrac{\partial g}{\partial \theta}\end{array}\right.$$.

Or g est holomorphe si et seulement si $\dfrac{\partial f}{\partial y}=i\dfrac{\partial f}{\partial x}$, soit $\sin\theta\dfrac{\partial g}{\partial r}+\dfrac{\cos\theta}{r}\dfrac{\partial g}{\partial \theta}=i\left(\cos\theta\dfrac{\partial g}{\partial r}-\dfrac{\sin\theta}{r}\dfrac{\partial g}{\partial \theta}\right)$, soit $i(\cos\theta+i\sin\theta)\dfrac{\partial g}{\partial r}=\left(\dfrac{\cos\theta}{r}+i\dfrac{\sin\theta}{r}\right)\dfrac{\partial g}{\partial \theta}$, soit $\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial g}{\partial \theta}=i\dfrac{\partial g}{\partial r}$.

Proposition 9 (conditions de Cauchy en coordonnées polaires).

On reprend les hypothèses de la proposition précédente en écrivant la décomposition en parties réelle et imaginaire $g(r,\theta)=P(r,\theta)+iQ(r,\theta)$, alors g est holomorphe sur un ouvert U de $\mathbb{C}^*$ si et seulement si $\dfrac{\partial P}{\partial r}=\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial Q}{\partial \theta}$ et $\dfrac{\partial Q}{\partial r}=-\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial P}{\partial \theta}$ sur U. Le résultat peut aussi s'énoncer en terme de dérivabilité en un point a.

Preuve :

$\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial g}{\partial \theta}=i\dfrac{\partial g}{\partial r}$ s'écrit $\dfrac{1}{r}\left(\dfrac{\partial P}{\partial \theta}+i\dfrac{\partial Q}{\partial \theta}\right)=i\left(\dfrac{\partial P}{\partial r}+i\dfrac{\partial Q}{\partial r}\right)$ soit $\dfrac{\partial P}{\partial r}=\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial Q}{\partial \theta}$ et $\dfrac{\partial Q}{\partial r}=-\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial P}{\partial \theta}$.

Application 1 (Existence d'une fonction racine carrée holomorphe).

Soit $f:\mathbb{C}^*\to\mathbb{C}$, $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ avec $r>0$ et $0<\theta<2\pi$ associe $f(z)=\sqrt{r}\left(\cos\dfrac{\theta}{2}+i\sin\dfrac{\theta}{2}\right)$. On a $f(z)^2=z$ donc $f(z)$ est une racine carrée de z et f est holomorphe car $\dfrac{\partial P}{\partial r}=\dfrac{1}{2\sqrt{r}}\cos\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{1}{r}\left(\dfrac{1}{2}\sqrt{r}\cos\dfrac{\theta}{2}\right)=\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial Q}{\partial \theta}$ et $\dfrac{\partial Q}{\partial r}=\dfrac{1}{2\sqrt{r}}\sin\dfrac{\theta}{2}=-\dfrac{1}{r}\left(-\dfrac{1}{2}\sqrt{r}\sin\dfrac{\theta}{2}\right)=-\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial P}{\partial \theta}$.

Proposition 10 (expression de la dérivée en fonction des dérivées partielles).

On reprend les notations précédentes. Si f est dérivable en z, on a
$f'(z)=\dfrac{\partial f}{\partial x}(z)=-i\dfrac{\partial f}{\partial y}(z)=(\cos\theta-i\sin\theta)\dfrac{\partial f}{\partial r}(z)=-\dfrac{i}{z}\dfrac{\partial f}{\partial \theta}(z)$.

Preuve :

On a $\mathrm{d}\,f(z)=f'(z)\,\mathrm{d}\,z=f'(z)\,\mathrm{d}\,x+if'(z)\,\mathrm{d}\,y=\dfrac{\partial f}{\partial x}(z)\,\mathrm{d}\,x+\dfrac{\partial f}{\partial y}(z)\,\mathrm{d}\,y$ donc $f'(z)=\dfrac{\partial f}{\partial x}(z)=-i\dfrac{\partial f}{\partial y}(z)$.
$\mathrm{d}\,z=\mathrm{d}(r\cos\theta+ir\sin\theta)=(\cos\theta+i\sin\theta)\,\mathrm{d}\,r+r(-\sin\theta+i\cos\theta)\,\mathrm{d}\,\theta=(\cos\theta+i\sin\theta)\,\mathrm{d}\,r+ir(\cos\theta+i\sin\theta)\,\mathrm{d}\,\theta$, or $\mathrm{d}\,f(z)=f'(z)\,\mathrm{d}\,z=$

$f'(z)(\cos\theta + i\sin\theta)\ \mathrm{d}\,r + f'(z)ir(\cos\theta + i\sin\theta)\ \mathrm{d}\,\theta = \dfrac{\partial f}{\partial r}(z)\ \mathrm{d}\,r + \dfrac{\partial f}{\partial \theta}(z)\ \mathrm{d}\,\theta$, donc $f'(z) = \dfrac{1}{\cos\theta + i\sin\theta}\dfrac{\partial f}{\partial r}(z) = (\cos\theta - i\sin\theta)\dfrac{\partial f}{\partial r}(z) = \dfrac{-i}{r(\cos\theta + i\sin\theta)}\dfrac{\partial f}{\partial \theta}(z) = -\dfrac{i}{z}\dfrac{\partial f}{\partial \theta}(z)$.

Écoutez le bilan du deuxième paragraphe.

3 Rappels.

Définition 4 (ouvert)**.**

Un sous-ensemble U de $\mathbb{C}$ est un ouvert de $\mathbb{C}$ si $\forall x \in U$, $\exists r > 0$ tel que le disque ouvert $D(x,r) = \{y \in \mathbb{C},\ |y-x| < r\}$ soit inclus dans U.

Bon travail, posez-moi des questions sur le forum et lors des classes virtuelles, s'il y a des points à éclaircir.

Lionel Bayle