Licence 3 de mathématiques à distance

Cours d'analyse complexe

Lionel BAYLE

12 février 2023

Chapitre 2.
Les fonctions analytiques.

Table des matières

Ressources disponibles.

• 1 vidéo de présentation du chapitre.
• 1 recueil d'exercices, interactif avec le cours (liens cliquables).
• 1 QCM, accessible après avoir été étudié en classe virtuelle.
• 1 formulaire récapitulant les principales définitions et les principaux résultats.

Cliquez pour écouter mes conseils., puis cliquez sur l'écran qui apparaît.

Bonjour,
-Ce chapitre étudie le lien entre la notion de série entière et la notion d'application holomorphe.
-J'utilise l'écriture en italique bleu quand je donne des consignes de travail, des idées pour vous guider dans une démonstration, des conseils méthodologiques ou pour expliquer une terminologie.
-Je suis à votre disposition pour répondre à vos questions sur le forum et je souhaite que ce soit en priorité les étudiants qui répondent aux questions, quand ils connaissent la réponse. J'indiquerai alors si les réponses sont justes, je les complèterai ou les corrigerai.
-Pouvoir discuter avec moi des notions étudiées vous aidera beaucoup, je vous invite donc à participer aux classes virtuelles. Vous pouvez me demander d'ajouter des classes virtuelles, en plus de celles que j'ai prévues, si cela peut vous aider.

N'hésitez pas à me poser des questions via le forum ou les classes virtuelles, s'il y a des points que vous ne comprenez pas bien.

Bon travail.

Lionel Bayle.

Comment utiliser ce cours.

-Je vous conseille de commencer par visionner la vidéo de présentation de ce chapitre, afin d'avoir une idée de ce que vous allez étudier.
-Ensuite, je vous conseille de lire le paragraphe "Objectifs et compétences recherchées", c'est un résumé des notions clés que nous allons étudier.
-Lors du travail sur la feuille d'exercices, cherchez les exercices, puis comparez votre solution à celle proposée. Si vous avez une solution différente de celle proposée, vous pouvez la soumettre sur le forum, afin de savoir si c'est juste.
-Si vous n'arrivez pas à faire un exercice, aidez-vous des indications. Il y a en général, plusieurs indications afin de vous permettre d'arriver à la solution. Si vous n'arrivez toujours pas à faire l'exercice, aidez-vous du corrigé, puis refaites l'exercice quelques jours plus tard sans utiliser le corrigé.
-Relisez régulièrement le cours et dressez une liste de définitions et résultats qui vous semblent importants. L'étude de cette liste, vous aidera à apprendre le cours.
-Une fois le cours et la feuille d'exercices étudiés, répondez aux questions du QCM. En cas d'erreurs, recommencez le QCM quelques jours plus tard.
-Le cours et les travaux dirigés sont interactifs, il y a des liens cliquables qui relient le cours et les travaux dirigés. Pour utliser cette interactivité, vous devez télécharger les fichiers dans un même dossier en conservant leurs noms.
-Vous avez à votre disposition des enregistrements sonores et des vidéos, il faut cliquer sur les boîtes jaunes pour y accéder, puis cliquer sur l'écran qui apparaît.

Écoutez-moi.

Objectifs et compétences recherchées.

L'objectif de ce chapitre est d'étudier les fonctions d'une variable complexe qui sont localement somme d'une série entière et montrer que ce sont exactement les fonctions holomorphes.

À l'issue de ce cours vous devrez être capables de :
-déterminer le rayon de convergence d'une série entière et d'effectuer des calculs avec des séries entières.
-d'utiliser les propriétés des applications définies par des séries entières.
-de développer une fonction holomorphe en série entière et de déterminer le domaine où c'est possible.

-d'appliquer le principe des zéros isolés et le principe du prolongement analytique.
-de travailler avec les fonctions trigonométriques complexes classiques.

1 Séries entières

Définition 1 (série entière)**.**

On appelle série entière à coefficients complexes et à variable complexe z une série de la forme $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ où a_n et z sont dans $\mathbb{C}$.

Lemme 1 (d'Abel)**.**

Soient $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ une série entière et $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que la suite $(a_n z_0^n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathbb{C}$ soit bornée. Alors pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < |z_0|$, la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ est absolument convergente.

Preuve :
Si $z_0 = 0$, c'est évident car $\{z \in \mathbb{C},\ |z| < |z_0|\} = \emptyset$.
Si $z_0 \neq 0$, on a $\forall n \in \mathbb{N}$, $|a_n z^n| \leq M \left|\frac{z}{z_0}\right|^n$.
Pour $|z| < |z_0|$, on a $\left|\frac{z}{z_0}\right| < 1$ donc $\sum_{n=0}^{\infty} M \left|\frac{z}{z_0}\right|^n$ converge, donc $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n z^n|$ converge.

Corollaire 1.

Soient $\sum a_n z^n$ une série entière et $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que la série $\sum a_n z_0^n$ soit convergente. Alors pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < |z_0|$, la série $\sum a_n z^n$ est absolument convergente.

Preuve :
Puisque $\sum a_n z_0^n$ converge, on a $\lim_{n\to+\infty} |a_n z_0^n| = 0$, donc $(a_n z_0^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée et on a le résultat d'après le lemme d'Abel.

Théorème et définition 1 (rayon de convergence)**.**

A toute série entière $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, on peut associer un et un seul nombre $R \in \overline{\mathbb{R}_+}$ qui possède les deux propriétés suivantes :
i)Pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < R$, la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ est absolument convergente.
ii)Pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| > R$, la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ est divergente.
On dit que R est le rayon de convergence de la série entière.

Preuve :
Soit E l'ensemble des $r \in \mathbb{R}^+$ tels que la suite $(a_n r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit bornée. $E \neq \emptyset$ car il contient 0, il admet donc une borne supérieure dans $\overline{\mathbb{R}_+}$, notée R.
Si $z \in \mathbb{C}$ vérifie $|z| < R$, d'après la définition de R, il existe $r \in E$ tel que $|z| < r < R$, la suite $(a_n r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant bornée, le lemme d'Abel montre que la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ est absolument convergente.
Si $z \in \mathbb{C}$ vérifie $|z| > R$, la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ est divergente sinon la suite $(a_n |z|^n)_{n\in\mathbb{N}}$ serait bornée et on aurait $|z| \in E$ ce qui contredit $|z| > R$.
Il résulte de la définition de R qu'il est unique.

L'exercice n°1 présente d'autres définitions possibles du rayon de convergence.

Rappelons comment déterminer le rayon de convergence.

Définition 2 (limite supérieure)**.**

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathbb{R}$ minorée, la suite des $v_n = \sup_{k\geq n} u_k$ est une suite décroissante minorée d'éléments de $\bar{\mathbb{R}}$, donc converge vers un élément de $\bar{\mathbb{R}}$, appelé limite supérieure de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, noté $\limsup_{n\in\mathbb{N}}(u_n)$ ou $\overline{\lim}_{n\in\mathbb{N}}(u_n)$.

Proposition 1 (règle de Hadamard)**.**

Le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ est donné par la formule $R = \dfrac{1}{\limsup |a_n|^{\frac{1}{n}}}$ (avec les conventions habituelles $\dfrac{1}{0^+} = +\infty$ et $\dfrac{1}{+\infty} = 0$).

Preuve :
$\sup_{k\geq n} |a_k z^k|^{\frac{1}{k}} = \sup_{k\geq n} |z||a_k|^{\frac{1}{k}} = |z| \sup_{k\geq n} |a_k|^{\frac{1}{k}}$, donc par passage à la limite quand $n \to +\infty$, on trouve $\limsup |a_n z^n|^{\frac{1}{n}} = |z| \limsup |a_n|^{\frac{1}{n}}$.
Si $|z| \limsup |a_n|^{\frac{1}{n}} < 1$, on a $\limsup |a_n z^n|^{\frac{1}{n}} = l < 1$, d'où pour n grand $\sup_{k\geq n} |a_k z^k|^{\frac{1}{k}} \leq \dfrac{l+1}{2} < 1$, d'où pour n grand $|a_k z^k|^{\frac{1}{k}} \leq \dfrac{l+1}{2} < 1$, car $|a_n z^n|^{\frac{1}{n}} \leq \sup_{k\geq n} |a_k z^k|^{\frac{1}{k}}$. Donc, par application de la règle de Cauchy, on trouve que la série $\sum a_n z^n$ est absolument convergente pour $|z| \limsup |a_n|^{\frac{1}{n}} < 1$.
Si $|z| \limsup |a_n|^{\frac{1}{n}} > 1$, on a $\limsup |a_n z^n|^{\frac{1}{n}} > 1$, soit $\lim_{n\to+\infty} \sup_{k\geq n} |a_k z^k|^{\frac{1}{k}} > 1$. Donc, il existe un entier naturel N, tel que $n \geq N$ implique $\sup_{k\geq n} |a_k z^k|^{\frac{1}{k}} > 1$, donc $(a_n z^n)$ ne tend pas vers 0 et $\sum a_n z^n$ diverge grossièrement. Donc $R = \dfrac{1}{\limsup |a_n|^{\frac{1}{n}}}$.

Exemple 1.

Le rayon de convergence de la série $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ est $R = +\infty$.

Preuve :
Par application de la règle de D'Alembert : $\dfrac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \left| \dfrac{z^{n+1}}{(n+1)!} \dfrac{n!}{z^n} \right| = \left| \dfrac{z}{n+1} \right| \to 0$, donc la série converge pour tout $z \in \mathbb{C}$ et $R = +\infty$.

Exemple 2.

Le rayon de convergence de la série $\sum_{n=0}^{\infty} n! z^n$ est $R = 0$.

Preuve :
Par application de la règle de D'Alembert : $\dfrac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \left| \dfrac{(n+1)! z^{n+1}}{n! z^n} \right| = |(n+1)z| \to +\infty$ si $z \neq 0$, donc la série diverge pour $z \neq 0$ et $R = 0$.

Exemple 3.

Le rayon de convergence de la série $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n z^{2n}$ est $R = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Preuve :
Première méthode :
On a $a_n = 0$ si $n \neq 2p$ et $a_n = 2^p$ si $n = 2p$, $p \in \mathbb{N}$, $\limsup a_n^{\frac{1}{n}} = \limsup (2^p)^{\frac{1}{2p}} = \limsup 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$, donc $R = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ d'après la règle de Hadamard.
Seconde méthode :
La série géométrique $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n z^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} (2z^2)^n$ converge pour $|z| < \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ et diverge pour $|z| > \dfrac{1}{\sqrt{2}}$. Donc le rayon de convergence de la série $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n z^{2n}$ est $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Entraînez vous à calculer des rayons de convergence avec l'exercice n°3 ou l'exercice n°4.

Lemme 2.

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels convergeant vers $l \in \mathbb{R}^+$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels possédant une limite supérieure l' dans $\mathbb{R}^+$. Montrer que la suite $(a_n u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ possède une limite supérieure dans $\mathbb{R}$ égale à ll'.

Preuve :
Traitons le cas où $l > 0$ et $l' > 0$, les autres cas se traitant de manière identique.
Soit $\epsilon > 0$ tel que $l > \epsilon$ et $l' > \epsilon$. Il existe $N \in \mathbb{N}$, tel que $n \geq N \Rightarrow l - \epsilon \leq a_n \leq l + \epsilon$ et $l' - \epsilon \leq \sup_{k \geq n} u_k \leq l' + \epsilon$. Puisque pour $n \geq N$, on a $(l-\epsilon)(l'-\epsilon) \leq (l-\epsilon)\sup_{k\geq n} u_k = \sup_{k \geq n}(l-\epsilon)u_k \leq \sup_{k\geq n} a_k u_k \leq \sup_{k \geq n}(l+\epsilon)u_k = (l+\epsilon)\sup_{k\geq n} u_k \leq (l+\epsilon)(l'+\epsilon)$.

Application 1 (de la formule de Hadamard)**.**

Les séries entières $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ et $\sum_{n=0}^{\infty} n a_n z^{n-1}$ ont même rayon de convergence.

Preuve :
Les séries entières $\sum_{n=0}^{\infty} n a_n z^{n-1}$ et $\sum_{n=0}^{\infty} n a_n z^n$ ont même rayon de convergence.
Si $\limsup |a_n|^{\frac{1}{n}} \in \mathbb{R}$, appliquons le lemme précédent. $n^{\frac{1}{n}} = \exp\left(\frac{1}{n}\ln n\right) \to \exp 0 = 1$, quand $n \to +\infty$. Donc $\limsup |n a_n|^{\frac{1}{n}} = \lim_n \sup_{k\geq n} |k a_k|^{\frac{1}{k}} = \lim_n \sup_{k \geq n} k^{\frac{1}{k}} |a_k|^{\frac{1}{k}} = \lim_n \sup_{k\geq n} |a_k|^{\frac{1}{k}} = \limsup |a_n|^{\frac{1}{n}}$, car $n^{\frac{1}{n}} \to 1$ quand $n \to +\infty$. D'où le résultat en passant à l'inverse.
Si $\limsup |a_n|^{\frac{1}{n}} = +\infty$, $\limsup |n a_n|^{\frac{1}{n}} = \lim_n \sup_{k \geq n} |k a_k|^{\frac{1}{k}} = \lim_n \sup_{k\geq n} k^{\frac{1}{k}} |a_k|^{\frac{1}{k}} \geq \lim_n \sup_{k \geq n} |a_k|^{\frac{1}{k}} = \limsup |a_n|^{\frac{1}{n}} = +\infty$. D'où le résultat en passant à l'inverse.

Théorème 1 (convergence uniforme et continuité)**.**

Soit E un espace topologique, F un espace vectoriel normé, z_0 un point de E et $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ une série d'applications de E dans F, toutes continues en z_0, qui converge uniformément sur E, alors l'application $f : z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(z)$ est continue en z_0.

Théorème 2 (holomorphie des séries entières)**.**

Une série entière $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ à variable complexe est holomorphe à l'intérieur du disque de convergence et sa dérivée est $\sum_{n=0}^{\infty} n a_n z^{n-1}$

Preuve :
Soit R le rayon de convergence commun de $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ et $\sum_{n=0}^{\infty} n a_n z^{n-1}$. Soit $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que $|z_0| < R$ et $r \in \mathbb{R}$ tel que $|z_0| < r < R$.
Pour $z \in D(0,r) - \{z_0\}$, $\dfrac{\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n z_0^n}{z - z_0} = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n (z-z_0)(z^{n-1} + z_0 z^{n-2} + \cdots + z_0^{n-2} z + z_0^{n-1})}{z - z_0} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n (z^{n-1} + z_0 z^{n-2} + \cdots + z_0^{n-2} z + z_0^{n-1})$.
Soit $f_n : D(0,r) \to \mathbb{C}$, $z \mapsto f_n(z) = a_n(z^{n-1} + z_0 z^{n-2} + \cdots + z_0^{n-2} z + z_0^{n-1})$, pour $n \geq 1$. Chaque f_n est continue en z_0 et $\sup_{|z| \leq r} |f_n(z)| \leq n|a_n| r^{n-1}$.
Puisque $r < R$, $\sum n |a_n| r^{n-1}$ converge, donc la série d'applications $\sum_{n\geq 1} f_n$ converge normalement, donc uniformément, sur $D(0,r)$. Sa somme s définie par $s(z) = \dfrac{\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n z_0^n}{z - z_0}$ si $z \in D(0,r) - \{z_0\}$ et $s(z_0) = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n z_0^{n-1}$ est donc continue en z_0. Donc $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ est dérivable

en z_0 de dérivée $\sum_{n=0}^{\infty} n a_n z_0^{n-1}$.

Par récurrence, on en déduit :

Proposition 2 (dérivée p-ième d'une série entière).

$\forall p \in \mathbb{N}^*$, une série entière $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ à variable complexe est p fois dérivable à l'intérieur du disque de convergence de dérivée p-ième $\sum_{n=p}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-p+1)a_n z^{n-p} = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-p+1)a_n z^{n-p}$. Cette notation se justifie par le fait que la différence entre les deux séries réside est le terme $\sum_{n=0}^{p-1} n(n-1)\cdots(n-p+1)a_n z^{n-p} = 0(0-1)\cdots(0-p+1)a_0 z^{0-p} + 1(0)\cdots(1-p+1)a_1 z^{1-p} + \cdots + (p-1)(p-1-1)\cdots(0)a_{p-1}z^{-1}$ qui est nul.

Exemple 4.

Pour $|z| < 1$, on a $\dfrac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$, donc par dérivation $\dfrac{1}{(1-z)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} n z^{n-1}$ pour $|z| < 1$.

2 Fonctions analytiques

Définition 3 (fonction analytique).

Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$, $f : U \to \mathbb{C}$ et $a \in U$, on dit que f est analytique en a, si f est développable en série entière au voisinage de a, c'est à dire si il existe un nombre $r > 0$ tel que $D(a,r) = \{z \in \mathbb{C},\ |z-a| < r\} \subset U$ et une série entière $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ de rayon de convergence $R \geq r$ tels que $\forall z \in D(a,r)$, $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n$. On dit que f est analytique sur U si elle est analytique en tout point de U.

Proposition 3 (holomorphie des fonctions analytiques).

Toute fonction analytique en un point a est holomorphe en a, en particulier toute fonction analytique est holomorphe.

Preuve :

Si $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n$ sur $D(a,r)$, la translation $t : D(a,r) \to D(0,r)$, $z \mapsto z-a$ est holomorphe. $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ est holomorphe sur $D(0,r)$ donc la composée $f = g \circ t$ est holomorphe sur $D(a,r)$.

Remarque 1.
On verra que la réciproque est vraie toute fonction holomorphe est analytique.

Proposition 4 (unicité du développement en série entière).

Soit $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction analytique et $a \in U$, alors le développement de f en série entière au voisinage de a, $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$ est unique et $a_p = \dfrac{f^{(p)}(a)}{p!}$.

Preuve :
En effet $f^{(p)}(z) = \sum_{n \geq p} n(n-1)\cdots(n-p+1)a_n(z-a)^{n-p}$ et $f^{(p)}(a) = p!a_p$, car par convention $(z-a)^0 = 1$ et pour $n > p$, $(a-a)^{n-p} = 0$.

Théorème 3 (Principe des zéros isolés).

Soit U un ouvert connexe de $\mathbb{C}$, soit f une fonction analytique non identiquement nulle sur U, alors les zéros de f sont isolés dans U.

Preuve :
Notons Z l'ensemble des zéros non isolés de f, Z est fermé car si z est un point adhérent à Z n'appartenant pas à Z, z est limite d'une suite (u_n) d'éléments de Z, donc de zéros de f. Par continuité de f, z est alors un zéro de f et il est non isolé ce qui contredit l'hypothèse $z \notin Z$.
Montrons que Z est ouvert. Soit $z_0 \in Z$ et $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ le développement de f en série entière sur un disque $D(z_0, r')$, alors tous les a_n sont nuls. En effet, appelons sinon p le plus petit indice tel que $a_i \neq 0$, alors $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n = (z-z_0)^p \sum_{n=p}^{\infty} a_n(z-z_0)^{n-p} = (z-z_0)^p \sum_{N=0}^{\infty} a_{N+p}(z-z_0)^N$, où on a posé $N = n-p$. Donc $f(z) = (z-z_0)^p \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+p}(z-z_0)^n$ n'a pas de zéro différent de z_0 sur un disque $D(z_0, r)$, $r > 0$, car $\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+p}(z-z_0)^n$ tend vers $a_p \neq 0$ quand $z \to z_0$. Donc tous les a_n sont nuls, donc f est nulle sur $D(z_0, r')$, ce qui implique que $D(z_0, r') \subset Z$ et Z est ouvert. Par connexité de U, $Z = \emptyset$, car si $Z = U$, $f \equiv 0$.

Corollaire 2 (Principe du prolongement analytique).

Soient f et g deux fonctions analytiques définies sur un ouvert connexe U de $\mathbb{C}$. Alors si elle coïncident sur un ouvert non vide de U, elles sont égales sur U.

Preuve :
Première rédaction :
Si f était différente de g, $f - g$ serait non nulle et aurait donc un ensemble de zéros discret ce qui est absurde, car cet ensemble doit contenir un ouvert non vide, donc $f = g$.
Seconde rédaction :

Si $f-g$ est nulle sur un ouvert, elle est nulle sur un disque ouvert, donc a des zéros non isolés, donc est nulle sur la composante connexe de ce disque, donc sur U qui est connexe.

Proposition 5.

Soit U un ouvert connexe de $\mathbb{C}$. Soit f une fonction analytique non identiquement nulle de U dans $\mathbb{C}$. Soit $a \in U$. Alors il existe un entier n et une unique fonction analytique $g : U \to \mathbb{C}$ qui ne s'annule pas en a telle que $\forall z \in U$, $f(z) = (z-a)^n g(z)$. On dit que a est un zéro d'ordre n de f.

Preuve :
D'après le principe des zéros isolés f ne s'annule pas sur un voisinage de a et on a vu que $f(z) = (z-a)^n \sum_{k=0}^{\infty} a_{n+k}(z-a)^k$, avec $a_n \neq 0$. $g = \dfrac{f(z)}{(z-a)^n}$ est analytique en a et sur $U - \{a\}$, donc est analytique sur U.
Montrons que n et g sont uniques. Si n et g vérifient les hypothèses, $\forall z \in U$, $f(z) = (z-a)^n g(z)$, donc $f^{(p)}(a) = 0$ pour $p < n$ et $f^{(n)}(a) = n! g(a) \neq 0$, donc n est unique. g est alors unique.

Proposition 6.

Soit U un ouvert connexe de $\mathbb{C}$ et $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction analytique telle que $f' = 0$, alors f est constante.

Preuve :
Montrons que f est localement constante, soit $a \in U$, $\exists r > 0$ tel que $D(a,r) \subset U$ et $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n$ sur $D(a,r)$. Puisque $f'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n (z-a)^{n-1} = 0$, $\forall z \in D(a,r)$, on a $a_n = 0$ $\forall n \geq 1$, donc f est constante sur $D(a,r)$. Montrons que f est constante sur U. Soit $z_0 \in U$ et $Z = \{z \in U \text{ tels que } f(z) = f(z_0)\} = f^{-1}(\{f(z_0)\})$ est non vide. Z est fermé car f est continue et l'image réciproque du fermé $\{f(z_0)\}$ par une application continue est fermé. Z est ouvert car $\forall z \in Z$, $\exists D(z,r) \subset U$ tel que $f = f(z_0)$ sur $D(z,r)$, car nous venons de voir que $a_n = 0$ pour $n \geq 1$. U étant connexe et Z étant ouvert et fermé, on a $Z = U$.

3 Les fonctions trigonométriques classiques.

Définition 4 (exponentielle).

On définit $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto e^z = \exp(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ ce qui est possible car le rayon de convergence de la série est $+\infty$.

Proposition 7 (propriétés de l'exponentielle).

exp *est une fonction holomorphe de* $\mathbb{C}$ *dans* $\mathbb{C}^*$ *vérifiant :*
$\forall z \in \mathbb{C}$, $\exp(z)' = \exp(z)$
$\forall z, z' \in \mathbb{C}$, $\exp(z+z') = \exp(z)\exp(z')$
$\forall z \in \mathbb{C}$, $\exp(-z) = \dfrac{1}{\exp(z)}$
$\forall z \in \mathbb{C}$, $\overline{\exp(z)} = \exp(\bar{z})$.

Preuve :
Par application de la règle de D'Alembert, $\dfrac{n!z}{(n+1)!} \to 0$ quand n tend vers $+\infty$, donc le rayon de convergence de la série est $+\infty$, exp est donc holomorphe sur $\mathbb{C}$ et $\exp'(z) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n\frac{z^{n-1}}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = \exp(z)$.
$(\exp(z)\exp(-z))' = \exp(z)\exp(-z) - \exp(z)\exp(-z) = 0$ donc la fonction est constante, or $\exp(0)\exp(-0) = 1$, donc $\exp(z)\exp(-z) = 1$. En particulier $\exp(z) \neq 0$ donc exp est à valeur dans $\mathbb{C}^*$.
Fixons $z_0 \in \mathbb{C}$, $(\exp(z+z_0)\exp(-z)\exp(-z_0))' = \exp(z+z_0)\exp(-z)\exp(-z_0) - \exp(z+z_0)\exp(-z)\exp(-z_0) = 0$, donc la fonction est constante, puisqu'elle vaut 1 en 0, on a $\exp(z+z_0) = \exp(z)\exp(z_0)$.
$\overline{\exp(z)} = \overline{\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\bar{z}^n}{n!} = \exp(\bar{z})$.

Proposition 8.

exp *réalise un homomorphisme de groupes surjectif de* $(\mathbb{C}, +)$ *dans* $(\mathbb{C}^*, \times)$. *Son noyau est le sous-groupe* $2i\pi\mathbb{Z} = \{2i\pi k,\ k \in \mathbb{Z}\}$ *de* $\mathbb{C}$.

Preuve :
exp est un homomorphisme de groupe car $\exp(z+z') = \exp(z)\exp(z')$, $\forall z, z' \in \mathbb{C}$.
$f(z) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ définit une fonction holomorphe sur $D(0,1)$ car son rayon de convergence est 1 (Penser à $\log(1-z)$). On a $f'(z) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n\frac{z^{n-1}}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} z^{n-1} = \frac{1}{1-z}$ car $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} z^{n-1} = \frac{1-z^N}{1-z} \to \frac{1}{1-z}$.
$[(1-z)\exp(f(z))]' = -\exp(f(z)) + (1-z)f'(z)\exp(f(z)) = -\exp(f(z)) + \exp(f(z)) = 0$, donc la fonction est constante sur $D(0,1)$ et vaut sa valeur en 0 qui est $\exp(f(0)) = \exp(0) = 1$, donc $\forall z \in D(0,1)$, $\exp(f(z)) = \dfrac{1}{1-z}$.

Soit $a = x + iy \in \mathbb{C}^*$, $\dfrac{1}{1-z} = a \Leftrightarrow 1 = a - az \Leftrightarrow az = a - 1 \Leftrightarrow z = \dfrac{a-1}{a}$ et $\left|\dfrac{a-1}{a}\right|^2 = \dfrac{(x-1)^2+y^2}{x^2+y^2}$. Si $x = \mathrm{Re}(a) > \dfrac{1}{2}$, on a $|z| = |\dfrac{a-1}{a}| < 1$ car $(x-1)^2 < x^2$. Donc I l'image de exp contient tous les nombres complexes de partie réelle $> \dfrac{1}{2}$, donc tous les réels ≥ 1 donc par inversion tout $\mathbb{R}_+^*$. En effet, si $y \in]0,1[$, $y = \dfrac{1}{y'}$ avec $y' \in]1, +\infty[$, donc $y' = \exp(x)$ et $y = \exp(-x)$.

Soit $(a,b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$, $a + ib = (c+id)^2 = c^2 - d^2 + 2icd \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} c^2 - d^2 = a \\ b = 2cd \end{array} \right. \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} \dfrac{b^2}{4d^2} - d^2 = a \\ c = \dfrac{b}{2d} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} 4d^4 + 4ad^2 - b^2 = 0 \\ c = \dfrac{b}{2d} \end{array} \right.$

Soit $\Delta' = 4a^2 + 4b^2$, $d^2 = \dfrac{-2a - 2\sqrt{a^2+b^2}}{4} = -\dfrac{a + \sqrt{a^2+b^2}}{2}$ est impossible, donc $d^2 = \dfrac{-2a + 2\sqrt{a^2+b^2}}{4} = \dfrac{-a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}$. En prenant pour d la solution du signe de b, on trouve $c > 0$ et il existe $\lambda > 0$ tel que $\lambda c > \dfrac{1}{2}$. On a alors $a + ib = \dfrac{1}{\lambda^2}(\lambda c + i\lambda d)^2$ qui est dans l'image de exp, car le carré d'un élément de l'image d'exponentielle reste dans l'image d'exponentielle. L'image de exp contient donc $\mathbb{C} - \mathbb{R}^-$. Un élément de $\mathbb{R}_-^*$ s'écrit λi^2 avec $\lambda > 0$, donc appartient à l'image de exp. Donc l'image de exp contient $\mathbb{C}^*$, comme elle est incluse dans $\mathbb{C}^*$, elle lui est égale.
Montrons que si un réel x vérifie $e^x = 1$, alors $x = 0$.
Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $e^x = 1$, puisque exp est un morphisme de groupe $e^{-x} = 1$, car l'image de l'opposé de x est égale à l'inverse de 1, soit $\left| \begin{array}{lcl} \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} & = & 1 \\ \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n!} & = & 1 \end{array} \right.$, donc par addition, $2\displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{x^{2p}}{(2p)!} = 2$, soit $\displaystyle\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{x^{2p}}{(2p)!} = 0$, ce qui implique $x = 0$.
Si $\exp(z) = 1$, on a $\exp(\bar{z}) = 1$, donc $\exp(z + \bar{z}) = 1 = \exp(z)\exp(\bar{z}) = \exp(2\,\mathrm{Re}(z))$ donc $\exp(2\,\mathrm{Re}(z)) = 1$ soit $2\,\mathrm{Re}(z) = 0$, c'est à dire $\mathrm{Re}(z) = 0$ et $z = iy$, $y \in \mathbb{R}$. On appelle π le plus petit réel > 0 tel que $e^{2i\pi} = 1$, π est bien défini car les uns de exp sont isolés sur $i\mathbb{R}$ et ne sont pas réduits à 0, car la surjectivité de exponentielle à valeurs dans $\mathbb{C}^*$ entraîne qu'il existe $a \in \mathbb{C}$, tel que $e^a = -1$, donc $a \neq 0$, car $e^0 = 1$, et $e^{2a} = (e^a)^2 = e^{-2a} = 1$ avec $2a \neq 0$. Remarquons que $\exp(\mathrm{Re}(a))\exp(i\,\mathrm{Im}(a)) = -1$, donc $\exp(\mathrm{Re}(a)) = 1$ et $\mathrm{Re}(a) = 0$. Or $2\,\mathrm{Im}(a)$ ou $-2\,\mathrm{Im}(a)$ est positif, donc $\inf\{x \in \mathbb{R}_+^*$, tels que $e^{ix} = 1\} \neq 0$ puisque 0 est un un isolé de exp. Si $e^{iy} = 1$, on a $e^{i(y - \mathrm{E}(\frac{y}{2\pi})2\pi)} = 1$. Or $0 \leq y - \mathrm{E}\left(\dfrac{y}{2\pi}\right)2\pi < 2\pi$, donc $y = \mathrm{E}\left(\dfrac{y}{2\pi}\right)2\pi \in 2\pi\mathbb{Z}$.

Définition 5 (fonctions trigonométriques complexes)**.**

On définit sur $\mathbb{C}$ les fonctions suivantes :

$\cos z = \dfrac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$; $\sin z = \dfrac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$; $\tan z = \dfrac{\sin z}{\cos z}$, pour $z \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$; $\cot z = \dfrac{\cos z}{\sin z}$, pour $z \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Définition 6 (fonctions trigonométriques hyperboliques complexes)**.**

On définit sur $\mathbb{C}$ les fonctions suivantes :
$\cosh z = \dfrac{e^{z}+e^{-z}}{2}$; $\sinh z = \dfrac{e^{z}-e^{-z}}{2}$; $\tanh z = \dfrac{\sinh z}{\cosh z}$, pour $z \neq i\dfrac{\pi}{2} + ik\pi$, $k \in \mathbb{Z}$; $\coth z = \dfrac{\cosh z}{\sinh z}$, pour $z \neq ik\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Proposition 9 (développement en séries entières des fonctions trigonométriques)**.**

Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a :
$\cos z = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}$; $\sin z = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$; $\cosh z = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}$; $\sinh z = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$.

Preuve :
C'est évident à partir du développement en série entière de exp.

Remarque 2.
Ceci montre que ces fonctions sont les prolongements complexes des fonctions de la variable réelle portant le même nom, car elles ont la même écriture comme séries entières.

Proposition 10.

On a pour tout $z \in \mathbb{C}$: $e^z = \cosh z + \sinh z$, $e^{iz} = \cos z + i \sin z$, $\cosh(iz) = \cos z$, $\sinh(iz) = i \sin z$, $\cos^2 z + \sin^2 z = 1$, $\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1$, *et les autres formules trigonométriques bien connues.*

Preuve :
$\cosh^2 z - \sinh^2 z = \dfrac{(e^z+e^{-z})^2}{4} - \dfrac{(e^z-e^{-z})^2}{4} = \dfrac{e^{2z}+2+e^{-2z}-(e^{2z}-2+e^{-2z})}{4} = 1.$
On démontre les autres de la même façon.

Proposition 11.

Tout $z \in \mathbb{C}^*$ s'écrit $z = \exp(a+ib)$ avec $a, b \in \mathbb{R}$, on a alors $|z| = e^a$ et $\arg(z) = b \ (2\pi)$.

Preuve :
exp étant surjective sur $\mathbb{C}^*$, a et b existent, on a alors $z = e^a e^{ib} = e^a(\cos b + i \sin b)$, donc $|z| = e^a$ et $\arg(z) = b$ (2π).

Proposition 12 (zéros des fonctions trigonométriques).

Soit $z \in \mathbb{C}$,
$\cos z = 0 \Leftrightarrow z = \dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$
$\sin z = 0 \Leftrightarrow z = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$
$\cosh z = 0 \Leftrightarrow z = i\left(\dfrac{\pi}{2} + k\pi\right),\ k \in \mathbb{Z}$
$\sinh z = 0 \Leftrightarrow z = ik\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$

Preuve :
$\cos(z) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = 0 \Leftrightarrow e^{iz} = -e^{-iz} \Leftrightarrow e^{2iz} = -1 \Leftrightarrow e^{2iz} = e^{i\pi} \Leftrightarrow e^{2iz-i\pi} = 1 \Leftrightarrow 2iz - i\pi = 2ik\pi \Leftrightarrow z = \dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$. En effet, $-1 = e^{i\pi}$ car $(e^{i\pi})^2 = e^{2i\pi} = 1$ et $e^{i\pi} \neq 1$ car $i\pi \neq 2ik\pi$.
$\cosh z = \dfrac{e^z + e^{-z}}{2} = \dfrac{e^{i(-iz)} + e^{-i(-iz)}}{2} = \cos(-iz) = 0 \Leftrightarrow -iz = \dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow z = i\left(\dfrac{\pi}{2} + k\pi\right),\ k \in \mathbb{Z}.$
Idem pour les autres preuves.

L'exercice n°18 fait calculer les zéros de $\sin z$ et $\sinh z$.

4 Logarithme complexe.

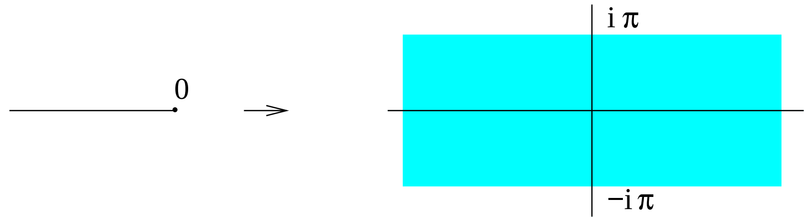
Remarque 3.
Pour $a = r(\cos\theta + i\sin\theta)$, $r > 0$, l'équation $e^z = a$ a une infinité de solutions. Si $z = x + iy$, ceci équivaut à $e^x = r$, $y = \theta \bmod 2\pi$, qui équivaut à $x = \ln r$ et $y = \theta + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, qui équivaut à $z = \ln r + i(\theta + 2k\pi)$.
Contrairement au cas de la variable réelle, on voit que exp n'est pas injective, on ne peut donc pas définir un logarithme, comme réciproque de exp. Pour avoir une bijection, il va falloir réduire le domaine de définition de exp.

Remarque 4.
Si pour avoir une bijection, on réduit le domaine de définition à l'ensemble des $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$, $r > 0$, $-\pi < \theta \leq \pi$, on peut définir une réciproque de la restriction de exp à cet ensemble par $L : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$, $z \mapsto \ln|z| + i\arg_p z$, où $\arg_p z$ est l'argument principal de z, c'est à dire le nombre $\theta \in]-\pi, \pi]$ tel que $z = |z|e^{i\theta}$. Un nouveau problème surgit alors : L n'est pas holomorphe car non continue. En effet si z tend vers -1

en étant dans le demi-plan $\operatorname{Im} z > 0$, on a $L(z)$ qui tend vers $L(-1) = i\pi$. Si z tend vers -1 dans le demi-plan $\operatorname{Im} z < 0$, $L(z)$ tend vers $-i\pi$, donc L n'est pas continue. On va donc devoir encore restreindre le domaine de définition, en enlevant la demi-droite $\mathbb{R}^-$ pour enfin avoir une bijection biholomorphe.

Définition 7 (détermination principale du logarithme)**.**

On définit $\log : \mathbb{C} - \mathbb{R}^- \to \mathbb{C}$, $z \mapsto \ln|z| + i \arg_p z$, $z = r(\cos\theta + i \sin\theta) \mapsto \ln r + i\theta$ avec $r > 0$, $\theta \in]-\pi, \pi[$.



Proposition 13 (image de log)**.**

L'image de $\log$ *est* $\mathbb{R} + i]-\pi, \pi[$.

Preuve :
Pour $z \in \mathbb{C} - \mathbb{R}^-$, $(\ln|z|, \arg_p z)$ décrit $\mathbb{R}\times]-\pi, \pi[$. Donc l'image de log est $\mathbb{R} + i]-\pi, \pi[$.

Proposition 14 (holomorphie de log)**.**

$\log$ *est une fonction holomorphe de dérivée* $\log' z = \dfrac{1}{z}$.

Preuve :
$\log(r, \theta)$ est différentiable comme somme de fonctions dérivables à une variable.
On vérifie la condition d'holomorphie en coordonnées polaires : $\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial \log}{\partial \theta} = i\dfrac{\partial \log}{\partial r}$, en effet $\dfrac{\partial \log}{\partial \theta} = i$, $\dfrac{\partial \log}{\partial r} = \dfrac{1}{r}$. On a alors $\log' z = -\dfrac{i}{z}\dfrac{\partial \log}{\partial \theta} = -\dfrac{ii}{z} = \dfrac{1}{z}$.

Proposition 15.

On a $z = \exp(\log z)$, $\forall z \in \mathbb{C} - \mathbb{R}^-$.
$\log(\exp z) = z$ *si* $-\pi < \operatorname{Im} z < \pi$.

$\log z_1 z_2 = \log z_1 + \log z_2 \bmod 2i\pi$ *si* $z_1, z_2, z_1 z_2 \in \mathbb{C} - \mathbb{R}^-$.

Preuve :
$\exp(\log z) = \exp(\ln|z| + i\arg_p(z)) = |z|\exp(i\arg_p(z)) = z$.
$\log(\exp z) = \log[\exp(\mathrm{Re}(z))\exp(i\,\mathrm{Im}(z))] = \mathrm{Re}(z) + i\,\mathrm{Im}(z)$, car $\mathrm{Im}(z) = \arg_p(z)$ pour $-\pi < \mathrm{Im}\, z < \pi$.
$\log(z_1 z_2) = \log[|z_1||z_2|\exp\{i(\arg_p(z_1)+\arg_p(z_2))\}] = \ln(|z_1||z_2|)+i(\arg_p[\exp\{i(\arg_p(z_1)+\arg_p(z_2))\}] = \ln|z_1|+i\arg_p(z_1)+\ln|z_2|+i\arg_p(z_2)+2ik\pi = \log(z_1) + \log(z_2) + 2ik\pi$.

Définition 8 (détermination du logarithme)**.**

Soit U un ouvert de $\mathbb{C}^*$, on appelle détermination du logarithme sur U, toute fonction holomorphe L définie sur U, vérifiant $\exp(L(z)) = z$, $\forall z \in U$.

Remarque 5.
Une telle détermination n'existe pas toujours. Sur $\mathbb{C}$ privé d'une demi-droite de sommet 0, on peut en définir une en reproduisant ce que l'on a fait pour la détermination principale.

Proposition 16.

Toute détermination du logarithme a pour dérivée $\dfrac{1}{z}$.

Preuve :
En dérivant l'égalité $\exp(L(z)) = z$, on trouve $L'(z)\exp(L(z)) = 1$, soit $L'(z) = \dfrac{1}{z}$.

Application 2 (racine n-ième complexe)**.**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on définit sur $\mathbb{C} - \mathbb{R}^-$, une détermination de $\sqrt[n]{z}$ par $f(z) = \exp\left(\dfrac{1}{n}\log z\right)$.

f est holomorphe comme composée de fonctions holomorphes et $f'(z) = \dfrac{1}{nz}\exp\left(\dfrac{1}{n}\log z\right) = \dfrac{1}{n}\exp\left[\left(\dfrac{1}{n} - 1\right)\log z\right]$ car $z = \exp(\log z)$.

5 Rappels.

Définition 9 (divergence grossière)**.**

On dit que la série $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ diverge grossièrement si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne tend pas vers 0.

Définition 10 (convergence absolue)**.**

La série $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ est absolument convergente si la série $\sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$ converge.

Théorème 4 (critère de D'Alembert)**.**

Une série $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ à termes strictement positifs, converge si $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$ et diverge si $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$. Si cette limite n'existe pas ou vaut 1, on ne peut rien conclure.

Définition 11 (convergence uniforme d'une série)**.**

Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$, $f : U \to \mathbb{C}$ et $f_n : U \to \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$ des applications. La série d'applications $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ converge uniformément vers f sur U si $\forall\epsilon > 0$, $\exists N_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall N \geq N_0$, $\forall z \in U$, $|f(z) - \sum_{n=0}^{N} f_n(z)| \leq \epsilon$.

Définition 12 (point isolé)**.**

Soit Z un sous-ensemble de $\mathbb{C}$. On dit que les points de Z sont isolés dans Z, si pour tout point $p \in Z$, il existe un disque ouvert $D(p, r)$, $r > 0$, tel que $D(p, r) \cap Z = \{p\}$. Plus généralement, un point p d'un espace topologique Z est dit isolé s'il existe un voisinage de p rencontrant Z uniquement en p.

J'ai mis des rappels de topologie dans le chapitre 0 sur la notion de compacité, nous les utiliserons pour mettre en œuvre le théorème des zéros isolés.

Bon travail, posez-moi des questions sur le forum et lors des classes virtuelles, s'il y a des points à éclaircir.

Lionel Bayle