Algèbre linéaire et bilinéaire

Table des matières

1. Rappels d'algèbre linéaire.

1.1. Sous-espaces vctoriels.

Définition 1.1. Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. On dit que $F \subseteq E$ est un sous-espace vectoriel si
(1) $\forall(x, y) \in F^2, \forall\lambda \in \mathbb{K}, \lambda x + y \in F$,
(2) $0 \in F$.

Proposition 1.2. Soit F, G des sous-espaces vectoriels de E. Alors $F \cap G$ et $F + G$ sont des sous-espaces vectoriels de E.

Définition 1.3. Soit $A \subseteq E$ un sous-ensemble, on peut definir le plus petit sous-espace vectoriel contenant A par : $\text{Vect}(A) = \left\{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i, a_i \in A, \lambda_i \in \mathbb{K}\right\}$.

Remarque 1.4. Si $A = \{v\}, v \in E, v \neq 0$, $\text{Vect}(A) = \text{Vect}(v) = kv$.

Définition 1.5. Soit $F, G \subseteq E$ des sous-espaces vectoriels. On dit que F et G sont en somme directe si $F \cap G = \{0\}$.

1.2. Familles de vecteurs et bases.

Définition 1.6. Soit $(x_1, \ldots, x_n) \in E^n, (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. On dit que $(x_1, \ldots, x_n)$ est une famille libre si

$$\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0$$

Définition 1.7. Une famille infinie est libre si toute sous-famille finie est libre.

Définition 1.8. Soit $\mathcal{F} = (x_1, \ldots, x_n) \in E^n$. On dit que $\mathcal{F}$ est génératrice de E si $\text{Vect}(\mathcal{F}) = E$.

Définition 1.9. On appelle base de E toute famille libre et génératrice de E.

Définition 1.10. On appelle dimension de E le cardinal d'une base de E.

Proposition 1.11 (changement de base)**.** Soit $\mathcal{E} = e_1, \ldots, e_n$ et $\mathcal{F} = f_1, \ldots, f_n$ deux bases de E. Soit $x \in E$. Il existe d'unique $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$.
On note $[x]_{\mathcal{E}} := \begin{pmatrix} x_1 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} \in M_{nx1}(\mathbb{K})$, et $\text{Pass}_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}} = ([f_1]_{\mathcal{E}} \ \cdots \ [f_n]_{\mathcal{E}}) \in M_{nxn}(\mathbb{K})$ On a :

$$[x]_{\mathcal{E}} = \text{Pass}_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}} [x]_{\mathcal{F}}.$$

1.3. Applications linéaires.

Définition 1.12. Soit $u : E \to F$ une application. On dit que u est linéaire si $\forall x, y \in E^2, \forall\lambda \in \mathbb{K}$, $u(\lambda x + y) = \lambda u(x) + u(y)$.

Notation 1.13. On note $\mathcal{L}(E,F)$ l'espace vectoriel des applications linéaires de E dans F et $\mathcal{L}(E)$ l'espace vectoriel des endomorphismes.

Définition 1.14. Soit E un espace vectoriel, $u \in \mathcal{L}(E)$ On appelle noyau de u l'ensemble $\ker(u) = \{x \in E \mid u(x) = 0\}$.

Définition 1.15. Soit E un espace vectoriel, $u \in \mathcal{L}(E)$. On appelle image de u l'ensemble $\mathrm{Im}(u) = \{y \in F \mid \exists x \in E, y = u(x)\}$.

Théorème 1.16 (théorème du rang)**.** Soit E un espace vectoriel de dimension finie, $u : E \to E$.

$$\dim(E) = \dim(\ker(u)) + \dim(\dim(u)).$$

Démonstration. Notons $p := \dim(\ker(u)), n := \dim(E)$. Soit $(e_1, \ldots, e_p)$ une base de $\ker(u)$. Par le théorème de la base incomplète, on note $(e_1, \ldots, e_p, (e_{p+1}, \ldots, e_n))$.
Une base de $\mathcal{Im}(u)$ est $\mathrm{Vect}(u(e_1), \ldots, u(e_p), u(e_{p+1}), \ldots, u(e_n)) = \mathrm{Vect}(u(e_{p+1}), \ldots, u(e_n))$. Verifions que $(u(e_{p+1}), \ldots, u(e_n))$ est une famille libre. Soit $(\lambda_{p+1}, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}\lambda_{p+1}u(e_{p+1}) + \ldots + \lambda_n u(e_n) = 0 &\Leftrightarrow u(\lambda_{p+1}e_{p+1} + \ldots + \lambda_n e_n) = 0\\ &\Leftrightarrow \lambda_{p+1}e_{p+1} + \ldots + \lambda_n e_n \in \ker(u)\\ &\Leftrightarrow \exists(\lambda_1, \lambda_p) \in \mathbb{R}, \lambda_{p+1}e_{p+1} + \ldots + \lambda_n e_n = \lambda_1 e_1 + \ldots \lambda_p e_p\end{aligned}$$

Or $\lambda_1 e_1 + \ldots \lambda_p e_p \neq 0$ car c'est une famille libre. D'où, $\mathrm{Vect}(u(e_{p+1}), \ldots, u(e_n))$ libre. Ainsi, on a $\dim(\mathrm{Vect}(u(e_{p+1}), \ldots, u(e_n))) = \dim(\mathcal{Im}(u)) = n - p = \dim(E) - \dim(\ker(u))$.
On a bien montré, $\dim(\ker(u)) + \mathrm{rg}(u) = \dim(E)$. □

Corollaire 1.17. Soit $u : E \to E$ un endomorphisme, $\ker(u) = 0 \underset{1}{\Leftrightarrow} u$ injective $\underset{2}{\Leftrightarrow} u$ surjective.

Démonstration.
(1) $\Rightarrow$ Soit f une application linéaire injective. On a nécessairement $0_E \in \ker(f)$ or f est injective, donc $\forall x \in E, x \neq 0_E \Rightarrow f(x) \neq 0$ d'où $\ker(f) = \{0_E\}$.
$\Leftarrow$ Soit f une application linéaire tel que $\ker(f) = \{0_E\}$. Supposons par absurde f non injective. Alors $\exists u \neq v \in E, f(u) = f(v)$. Donc $f(u - v) = f(u) - f(v) = 0$ impossible car $u \neq v$.
(2) $\Rightarrow$ Supposons f injective. Alors $\ker(f) = \{0\} \Rightarrow \dim(\ker(f)) = 0 \Rightarrow \dim(\mathcal{Im}) = \dim(E) = \dim(F)$ d'où f surjective.
$\Leftarrow$ Supposons f surjective. Alors $\dim(\mathcal{Im}) = \dim(F) \Rightarrow \dim(\ker(f)) = 0$ d'où f injective.

□

Théorème 1.18. Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$,$g \in \mathcal{L}(F,G)$.

$$[g \circ f]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}} = [g]_{\mathcal{F}}^{\mathcal{G}}[f]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}}.$$

Corollaire 1.19. Soit $E, \mathcal{E}, \mathcal{F}$ deux bases de E, et $u \in \mathcal{L}(E)$. On note $P = \mathcal{P}\mathrm{ass}_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}} = [\mathrm{id}_E]_{\mathcal{F}}^{\mathcal{E}}$

$$[u]_{\mathcal{F}} = [\mathrm{id}_E]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}}[u]_E[\mathrm{id}_E]_{\mathcal{F}}^{\mathcal{E}} = P^{-1}[u]_{\mathcal{E}}P.$$

Proposition 1.20. Soit A une matrice carrée de la forme $A = \left(\begin{smallmatrix} B & D \\ 0 & C \end{smallmatrix}\right)$ avec B, C deux matrices carrées. Alors $\det A = \det B \det C$.

2. Sous-espaces stables par un endomorphisme.

Définition 2.1. Soit E un espace vectoriel de degré n, $u \in \mathcal{L}(E)$. Un sous-espace vectoriel F de E est dit stable par u si $u(F) \subseteq F$.

Remarque 2.2. Si je complète une base $\mathcal{F}$ de F en une base de $\mathcal{E}$ de E alors $[u]_{\mathcal{E}}$ est du type $[u]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} B & D \\ 0 & C \end{pmatrix}$ car si $\mathcal{F} = (f_1, \ldots, f_n), \forall i \in \{1, \ldots, n\}, u(f_i) \in F$ et $B \in M_{dxd}(\mathbb{K})$

Définition 2.3. Soit $u \in \mathcal{L}(E), \lambda \in \mathbb{K}$. On note $E_\lambda(u) = \ker(u - \lambda \operatorname{id}_E)$. λ est appelée valeur propre se $E_\lambda(u) \neq \{0\}$ auquel cas $E_\lambda(u)$ est l'espace propre associé. Les $u \in \ker(u - \lambda \operatorname{id}_E)$ sont les vecteurs propres.

Proposition 2.4. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Ses espaces propres sont en somme directe.

Démonstration. Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, on montre que $x_1 + \ldots + x_n = 0 \Rightarrow x_i = 0 \forall i \in [1, n]$ où $x_i \in E_{\lambda_i(u)}$ □

Corollaire 2.5. Si $n = \dim E$, u a au plus n valeurs propres et s'il y en a n, $\dim E_{\lambda_i} = 1$.

Définition 2.6. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On dit que u est diagonalisable si E est la somme directe de ses sous-espaces propres.

Proposition 2.7. Soit P, Q dans $\mathbb{K}[X]$ et D leur PGCD. Alors il existe $(U, V) \in \mathbb{K}[X]^2$ tels que

$$UP + VQ = D.$$

Corollaire 2.8. P, Q sont premiers entre eux ssi $\exists (U, V) \in \mathbb{K}[X]^2$ tels que $UP + VQ = 1$.

Définition 2.9. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On dit que f est muilplotent si $\exists r \in \mathbb{N}$ tq $f^{(r)} = 0$.

Proposition 2.10. Si $n = \dim E$, $f \in \mathcal{L}(E)$ milpotent $\Rightarrow \mathcal{X}_f = (-1)^n X^n$

Proposition 2.11. Soit $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ de degré unitaire $a_n = 1$. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & \ldots & \ldots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \ldots & \ldots & -a_1 \\ 0 & 1 & \ldots & \ldots & -a_1 \\ & & & & \\ 0 & \ldots & \ldots & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$.

Alors $\mathcal{X}_A = (-1)^n P$.

Théorème 2.12. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, $\dim E = n < +\infty$, (λ_i) ses valeurs propres. u est diagonalisable ssi $\forall \lambda$, $\dim E_\lambda(u) =$ multiplicité de λ dans X_u

$$\mathcal{X}_u \Pi_{\lambda_i} (X - \lambda_i)^{\dim E_\lambda(u)}$$

3. Trigonalisation

Définition 3.1. Soit $u \in \mathcal{L}, E$. $\dim E = n$. On dit que u est trigonalisable si il existe une base $\mathcal{E}$ telle que $[u]_{\mathcal{E}}$ est triangulaire supérieure : $i > j \Rightarrow \left([u]_{\mathcal{E}}\right) \coloneqq 0$.

Définition 3.2. Soit $M \in M_{nxn}(\mathbb{K})$. On dit que M est trigonalisable si elle est semblable a une matrice triangulaire supérieure.

Théorème 3.3. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. u est trigonalisable si et seulement si $\mathcal{X}_u$ est scindé.

Démonstration. Si u trigonalisable, il existe une base $\mathcal{E}$ telle que $[u]_{\mathcal{E}} = (\lambda_1) \Rightarrow \mathcal{X} = (-1)^n \Pi_{i=1}^n (X - \lambda_i)$ scindé.
Réciproque par récurrence Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, $\dim(E) = n$ avec $\mathcal{X}_u$ scindé. Soit λ une racine de $\mathcal{X}_u$ et $e_1 \in E_{\lambda_1}(u \setminus 0)$ que je complète en une base de $\mathcal{E}$. Alors $[u]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \star \\ 0 & C \end{pmatrix}$ et $\mathcal{X}_u = (\lambda_1 - X)\mathcal{X}_T$ donc $\mathcal{X}_T$ scindé aussi. Par hypothèse de récurrence,$\exists Q \in GL_{n-1}(\mathbb{K})$ telle que $QTQ^{-1} = \delta$. Soit $P = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ 0 & C & \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_n$ $\square$