Suite et séries de fonctions
Chapitre 1: Suites de fonctions

Table des matières

1. Introduction.

On considère un ensemble X non vide (en général $X \subset \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

Définition 1.1 (suite de fonctions): On appelle suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur X la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par la fonction $f_n : X \to \mathbb{R}; x \mapsto f_n(x)$.

Exemple: $X = \mathbb{R}$
$\forall n \in \mathbb{N}, f_n(x) = \ln(1 + nx^2)$.

2. Convergence simple.

On cherche à étudier le comportement d'une suite de fonction quand n tend vers $+\infty$, il faut définir une notion de convergence. Le plus simple c'est d'utiliser la convergence des suites numériques.

Définition 2.1 (convergence simple): Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions sur X. On dit que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge simplement** sur X, si pour tout $x \in X$, la suite numérique $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente. Dans ce cas on note $f(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n(x)$ la limite et on dit que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers f sur X et on note $f_n \xrightarrow{\text{CS}} f$ sur X. i.e :

$$f_n \xrightarrow{\text{CS}} f \text{ sur } X \Leftrightarrow \forall x \in X, \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$$

Remarques:
1. Le N de la définition dépend de x et de ε.
2. La convergence simple est une propriété locale.

Remarque (méthode): Pour étudier la convergence simple d'une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur X on doit :
1. Fixer $x \in X$.
2. Etudier la suite numérique $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$.
3. S'il y a convergence, on construit $f : X \to \mathbb{R}$ tq $f(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n(x)$ et on dit $f_n \xrightarrow{\text{CS}} f$ sur X.

Exemples:

1. On considère $(f_n)_{n\in\mathbb{N}\setminus 0}$ sur $I =]0, +\infty[$ définie par $f_n : I \to \mathbb{R}; x \mapsto \frac{1}{x+\frac{1}{n}}$ Soit $x > 0$ fixé, on a $f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{x}$. On pose $f : I \to \mathbb{R}; x \to \frac{1}{x}$ et on a $f_n \xrightarrow{\text{CS}} f$ sur X.
2. Même suite mais sur $I = [0; +\infty[$. Pour $x = 0$, $f_n(0) = n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ donc $(f_n)_{n\in\mathbb{N}\setminus 0}$ ne converge pas simplement sur I.

3. On considère $(f_n)_{n\in\mathbb{N}\setminus 0}$ sur $I = [0, +\infty[$ où $f_n : I \to \mathbb{R}; x \mapsto \left(1+\frac{x}{n}\right)^n$
   $*$ pour $x = 0$ fixé, $f_n(0) = 1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.
   $*$ pour $x > 0$ fixé, $f_{n(x)} = e^{n\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)} = e^{n\left(\frac{x}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)} = e^{x+o(1)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^x$
   On pose $f : I \to \mathbb{R}; x \to e^x$, on a $f_n \overset{\text{CS}}{\longrightarrow} f$ sur I.
4. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $I = [0, 1]$ définie par $f_{n(x)} = x^n$.
   $*$ Si $x \in [0, 1[$ fixé, $f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$
   $*$ Si $x = 1$, $f_n(1) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.
   On pose $f : I \to \mathbb{R}; x \mapsto \begin{cases} 1 \text{ si } x=1 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$. On a $f_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f$.
   On veut définir une convergence qui conserve la continuité à la limite. On suppose $f_n \overset{\text{CS}}{\longrightarrow} f$ sur I un intervalle de $\mathbb{R}$. On suppose $\forall n \in N, f_n \in C^0(I, \mathbb{R})$. Soit $\alpha \in I, \varepsilon > 0$. On veut majorer $|f(x) - f(\alpha)|$ par ε. On a :

$$\begin{aligned} |f(x) - f(\alpha)| &= |f(x) - f_n(x) + f_n(x) + f_n(\alpha) - f_n(\alpha) - f(\alpha)| \\ &\leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(\alpha)| + |f_n(\alpha) - f(\alpha)| \end{aligned}$$

   1^{er} terme: $\forall n \in \mathbb{N}, f_n$ est continue en α donc

$$\exists \eta_n \in \mathbb{R}, x \in]\alpha - \eta, \alpha + \eta[\Rightarrow |f_n(x) - f_n(\alpha)|.$$

   2^{eme} terme: Comme f_n tend vers f quand $n \to (+\infty)$,

$$\exists N_{x,\varepsilon}, n \geq N_{x,\varepsilon} \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

   3^{eme} terme: Comme $f_n(\alpha)$ tend vers $f(\alpha)$ quand $n \to (+\infty)$,

$$\exists \eta_n \in \mathbb{R}, x \in]\alpha - \eta, \alpha + \eta[\Rightarrow |f_n(\alpha) - f(\alpha)| \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

   Le problème est dû au fait que on doit satisfaire les deux conditions $x \in]\alpha - \eta; \alpha + \eta[$ et $x \geq N_{x,\varepsilon}$ pour une infinité de x.

3. Convergence uniforme.

Définition 3.1 (Convergence uniforme): Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonction sur X. Soit f une fonction sur X. On dit que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur X si:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow \forall x \in X, |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon.$$

On note $f_n \overset{\text{CU}}{\longrightarrow} f$ sur X.

Remarques:
1. Le N ne dépend que de ε.
2. La convergence uniforme est une propriété globale.

Définition 3.2: Soit $f : X \to \mathbb{R}$ une fonction. On appelle **norme sup** ou **norme infinie** sur X la valeur :

$$\|f\|_{+\infty,X} = \sup\{|f(x)|, x \in X\} \in \mathbb{R}_+ \cup \{\pm\infty\}.$$

Exemples:
1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$
   On a $\forall x \in \mathbb{R}, 0 \leq f(x) \leq 1$ et $f(0) = 1$ donc $\|f\|_{+\infty,\mathbb{R}} = 1$.
2. $f : I = [0,1[\to \mathbb{R}; x \mapsto x^2$
   On a $f'(x) = 2x \geq 0$ Donc $f(x)$ est croissante sur I et $f(x) \underset{x\to 1}{\longrightarrow} 1$. D'où $\{f(x), x \in I\} = [0,1[$ donc $\|f\|_{+\infty,I} = 1$.
3. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; x \mapsto x$,
   $\|f\|_{+\infty,\mathbb{R}} = +\infty$.

3.1. Propriétés de la $\|\cdot\|_{+\infty}$

Proposition 3.1.1: Soient $f, g : X \to \mathbb{R}$ deux fonctions.
1. S'il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que $\forall x \in X, |f(x)| \leq M$ alors $\|f\|_{+\infty,X} \leq M$.
2. $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \|\alpha f\|_{+\infty,X} = |\alpha| \|f\|_{+\infty,X}$.
3. $\|f + g\|_{+\infty,X} \leq \|f\|_{+\infty,X} + \|g\|_{+\infty,X}$.
4. $\|fg\|_{+\infty,X} \leq \|f\|_{+\infty,X} \|g\|_{+\infty,X}$.

Démonstration:
1. exercice
2. exercice
3. $|f + g| \leq |f| + |g| \leq \|f\|_{+\infty,X} + |g| \leq \|f\|_{+\infty,X} + \|g\|_{+\infty,X}$ d'où d'après 1),

$$\|f + g\|_{+\infty,X} \leq \|f\|_{+\infty,X} + \|g\|_{+\infty,X}.$$

□

Proposition 3.1.2 (Convergence uniforme avec la norme infinie): Soient $(f_n)_{n\in\mathbb{N}\setminus 0}$ une suite de fonctions sur X et f une fonction sur X. Alors

$$f_n \overset{\text{CU}}{\longrightarrow} f \Leftrightarrow \|f_n - f\|_{+\infty,X} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Démonstration:
$\Rightarrow$ Si $f_n \overset{\text{CU}}{\longrightarrow} f$ sur $X, \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$ tq $n \geq N \Rightarrow \forall x \in X, |f_n - f| \leq \varepsilon$ donc $\|f_n - f\|_{+\infty,X} \leq \varepsilon$.
D'où $\|f_n - f\|_{+\infty,X} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
$\Leftarrow$ Si $\|f_n - f\|_{+\infty,X} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ Alors

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow \forall x \in X, |f_n(x) - f(x)| \leq \|f_n(x) - f(x)\|_{+\infty,X} \leq \varepsilon.$$

Donc $f_n \overset{\text{CU}}{\longrightarrow} f$ sur X. □

Théorème 3.1.1: Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}\setminus 0}$ une suite de fonctions et soit f une fonction sur X. On a

$$f_n \overset{\text{CU}}{\longrightarrow} f \text{ sur } X \Rightarrow f_n \overset{\text{CS}}{\longrightarrow} f \text{ sur } X.$$

Démonstration: Immédiat. □

Remarque (Méthode): Plan pour étudier la convergence uniforme d'une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}\setminus 0}$ sur X.

1. Etudier la convergence simple.
2. S'il y a convergence simple, on définit la fonction $f : X \to \mathbb{R}; x \mapsto f_n(x)$ quand $n \to +\infty$.
3. Etudier la convergence uniforme: s'il y a convergence uniforme, **cela ne peut être que vers f** !
4. Pour montrer la **convergence uniforme** : on majore $\|f_n - f\|_{+\infty,X}$ par une suite numérique (sans x) qui tend vers 0 quand $n \to +\infty$.

Pour montrer la **non-convergence uniforme** : on minore $\|f_n - f\|_{+\infty,X}$ par une suite numérique positive (sans x) qui ne tend pas vers 0 quand $n \to +\infty$.
On pourra étudier la suite: $g_n = f_n - f$.

Exemples:

1. $(f_n)_{n\in\mathbb{N}\setminus 0}$ définie par $f_n : I = [1, +\infty[\to \mathbb{R}; x \mapsto \frac{1}{x+\frac{1}{n}}$.
   On a vu que $f_n \overset{\text{CS}}{\longrightarrow} f$ sur I où $f : I \to \mathbb{R}; x \mapsto \frac{1}{x}$. On pose:

   $$g_n = f_n - f = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+\frac{1}{n}} = \frac{\frac{1}{n}}{x\left(x+\frac{1}{n}\right)} = \frac{1}{nx^2+x}.$$

   1^{ere} méthode: Majoration de $|g_n|$ par une expression qui ne dépend pas de x et qui tend vers 0 quand $n \to +\infty$.
   Lorsque $x \geq 1$; $nx^2 + x \geq nx^2 + 1 \geq n + 1$ Donc $\forall x \in I, 0 \leq g_n(x) \leq \frac{1}{n+1}$ Donc

   $$\|f_n - f\|_{+\infty,I} \leq \frac{1}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

   . D'où $f_n \overset{\text{CU}}{\longrightarrow} f$ sur I.

   2^{e} méthode: (en général plus couteuse): On étudie g_n. On a ${g_n}'(x) = -\frac{2nx+1}{(nx^2+x)^2} \leq 0$ donc g_n est décroissante sur I et $\|f\|_{+\infty,I} = \frac{1}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. D'où $f_n \overset{\text{CU}}{\longrightarrow} f$ sur I.
2. $(f_n)_{n\in\mathbb{N}\setminus 0}$ définie par $f_n : I = [0, 1] \to \mathbb{R}; x \mapsto x^n$. On a vu $f_n \overset{\text{CS}}{\longrightarrow} f$ sur I où $f : I \to \mathbb{R}; x \mapsto \begin{cases} 0 \text{ si } x\in[0,1[\\ 1 \text{ si } x=1 \end{cases}$

   1^{ere} méthode: On veut minorer $|f_n(x) - f(x)|$. Pour cela, on utilise une suite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où $\forall n, x_n \in I, x_n = 1 - \frac{1}{n}$. Ainsi, on a bien $|f_n(x_n) - f(x_n)| \underset{n\to+\infty}{\not\longrightarrow} 0$.

   $$|f_n(x_n) - f(x_n)| = f_n(x_n) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = e^{n\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)} = e^{n\left(-\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)} = e^{-1+o(1)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{e}$$

   On a $\|f_n - f\|_{+\infty,I} \geq |f_n(x_n) - f(x_n)| \not\longrightarrow_{+\infty} 0$. d'où $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément sur I.

   2^{e} méthode: $g_n(x) = f_n(x) - f(x) = \begin{cases} f_n(x)=x^n \text{ si } x\neq 1 \\ 1 \text{ sinon} \end{cases}$ donc $\|g_n\|_{+\infty,I} = 1 \underset{n\to+\infty}{\not\longrightarrow} 0$. Donc $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément sur I.

Théorème 3.1.2: Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur I. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction. Soit $x_0 \in I$. On suppose

1. $\forall n \in \mathbb{N}, f_n$ est continue en x_0 ($f_n \in C^0(I, \mathbb{R})$).
2. $f_n \xrightarrow{\text{CU}} f$ sur I.

Alors f est continue en x_0.