Analyse numérique

Table des matières

1. Rappels / Compléments d'analyse.

Lemme 1.1 (Rolle généralisé): Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ayant une dérivée $n - 1$ –ième continue sur $[a, b]$ et n fois dérivable sur $]a, b[$ avec $f(a) = f(b)$ et $\forall j \in \{1, -, n - 1\}, f^j(a) = 0$ Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f^n(c) = 0$.

Démonstration: récurrence. □

Théorème 1.1 (formule de Taylor): Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ayant une dérivée $(n - 1)$ –ième continue sur $[a, b]$ et n fois dérivable sur $]a, b[$. Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$f(b) = f(a) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(b-a)^k}{k!} f^k(a) + \frac{(b-a)^n}{n!} f^n(c)$$

Démonstration: Basée sur le Lemme. □

Définition 1.1 (convexité): Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction. On dit que f est **convexe** si

$$\forall x, y \in I, \forall t \in [0, 1], f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y).$$

Définition 1.2 (concavité): Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction. On dit que f est **concave** si

$$\forall x, y \in I, \forall t \in [0, 1], f(tx + (1-t)y) \geq tf(x) + (1-t)f(y).$$