

Diagonalisation

Table des matières

1. Déterminants.	1
1.1. forme n-linéaires alternée.	1
1.2. Déterminant d'une famille de E^n .	3
1.3. Déterminant d'un endomorphisme.	4
1.4. Déterminant d'une matrice carrée.	6
1.5. Déterminant d'une matrice triangulaire par blocs.	7
1.6. Développements d'un déterminant par rapport à une colonne.	8
1.7. Formule de Cramer.	9
2. Equations linéaires.	10

1. Déterminants.

1.1. forme n-linéaires alternée.

Définition 1.1.1 (forme n-linéaire): Soient E un espace vectoriel, et $\varphi : E^n \rightarrow \mathbb{R}$ une application. On dit que φ est une **forme n-linéaire** si φ est linéaire par rapport à chaque variable i.e, $\forall x_1, -, x_i, -, x_n, y_i \in E, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$,

$$\varphi(x_1, -, x_{i-1}, \alpha x_i + \beta y_i, -, x_n) = \alpha \varphi(x_1, -, x_{i-1}, x_i, -, x_n) + \beta \varphi(x_1, -, x_{i-1}, y_i, -, x_n)$$

Exemples:

1. Montrons que $\varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; (x_1, x_2) \mapsto x_1 x_2$ est 2-linéaire. Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. On a

$$(\alpha x_1 + \beta y_1) x_2 = \alpha(x_1 x_2) + \beta(y_1 x_2) \text{ et } x_1(\alpha x_2 + \beta y_2) = \alpha(x_1 x_2) + \beta(x_1 y_2).$$

2. $\varphi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}; (u^\rightarrow, v^\rightarrow) \mapsto u^\rightarrow \times v^\rightarrow$ est 2-linéaire (et symétrique).

3. Le déterminant 2-2 est 2-linéaire.

Remarque: $\varphi(x_1, -, 0, -, x_n) = 0$.

Définition 1.1.2 (alternée): Soit φ une application n-linéaire. On dit que φ est **alternée** si

$$\forall i, j \in \{1, -, n\} \text{ avec } i \neq j, x_i = x_j \Rightarrow \varphi(x_1, -, x_n) = 0.$$

Proposition 1.1.1: Soient $f_1, -, f_n : E \rightarrow F$ n applications linéaires. Soit $\varphi : F^n \rightarrow \mathbb{R}$ n -linéaire. Alors

$$\varphi \circ (f_1, -, f_n) : E^n \rightarrow \mathbb{R}; x_1, -, x_n \mapsto \varphi(f_1(x_1), -, f_n(x_n))$$

est n -linéaire.

Démonstration: Puisque les $f_1, -, f_n$ sont linéaires, et que φ est n -linéaire, il est évident que $\varphi \circ (f_1, -, f_n)$ est n -linéaire. \square

Définition 1.1.3 (antisymétrie): Soit φ une application n-linéaire. On dit que φ est **antisymétrique** si

$$\forall i, j \in [1, n] \text{ avec } i \neq j, \varphi(x_1, -, x_i, -, x_j, -, x_n) = -\varphi(x_1, -, x_j, -, x_i, -, x_n)$$

Proposition 1.1.2: Soit φ une application n-linéaire et alternée. On ne change pas la valeur de $\varphi(x_1, -, x_n)$ en ajoutant à un des vecteurs de la famille une combinaison linéaire des autres. i.e, $\forall i \in \{1, -, n\}, \forall a_1, -, a_{i-1}, a_{i+1}, -, a_n \in \mathbb{R}$,

$$\varphi\left(x_1, -, x_i + \sum_{j=1, j \neq i}^n \alpha_j x_j, -, x_n\right) = \varphi(x_1, -, x_n)$$

Démonstration: Sans perte de généralité, on montre le cas où $i = 1$.

$$\begin{aligned} \varphi\left(x_1 + \sum_{j=2}^n \alpha_j x_j, -, x_n\right) &= \varphi(x_1, -, x_n) + \sum_{j=2}^n \alpha_j \varphi(x_j, -, x_j, -, x_n) \\ &= \varphi(x_1, -, x_n) \end{aligned}$$

Car φ est alternée. □

Proposition 1.1.3: Soit φ une application n-linéaire. φ est alternée si et seulement si φ est antisymétrique.

Démonstration:

\Rightarrow Supposons que φ soit alternée. On pose $x_i = x_j$ Alors on a $\varphi(x_1, -, x_i, -, x_j, -, x_n) = 0$

$$\begin{aligned} \varphi(x_1, -, x_i, -, x_j, -, x_n) &= \varphi(x_1, -, x_i + x_j, -, x_j + x_i, -, x_n) \\ &= \varphi(x_1, -, x_i, -, x_j + x_i, -, x_n) + \varphi(x_1, -, x_j, -, x_j + x_i, -, x_n) \\ &= \varphi(x_1, -, x_i, -, x_j, -, x_n) + \cancel{\varphi(x_1, -, x_i, -, x_i, -, x_n)} \\ &\quad + \cancel{\varphi(x_1, -, x_j, -, x_j, -, x_n)} + \varphi(x_1, -, x_j, -, x_i, -, x_n) \quad \text{car } \varphi \text{ est alternée.} \\ &= \varphi(x_1, -, x_i, -, x_j, -, x_n) + \varphi(x_1, -, x_j, -, x_i, -, x_n) \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} 0 &= \varphi(x_1, -, x_i, -, x_j, -, x_n) + \varphi(x_1, -, x_j, -, x_i, -, x_n) \\ \Leftrightarrow \varphi(x_1, -, x_i, -, x_j, -, x_n) &= -\varphi(x_1, -, x_j, -, x_i, -, x_n) \end{aligned}$$

Donc φ est antisymétrique.

\Leftarrow Supposons que φ soit antisymétrique. Alors on a :

$$\varphi(x_1, -, x_i, -, x_j, -, x_n) = -\varphi(x_1, -, x_j, -, x_i, -, x_n)$$

En particulier, en posant $x_j = x_i$ on a :

$$\begin{aligned}
\varphi(x_1, -, x_i, -, x_i, -, x_n) &= -\varphi(x_1, -, x_i, -, x_i, -, x_n) \\
&\Leftrightarrow 2\varphi(x_1, -, x_i, -, x_i, -, x_n) = 0 \\
&\Leftrightarrow \varphi(x_1, -, x_i, -, x_i, -, x_n) = 0
\end{aligned}$$

□

Proposition 1.1.4: Soit φ une application n -linéaire et alternée. Si $(x_1, -, x_n)$ est une famille liée alors $\varphi(x_1, -, x_n) = 0$

Démonstration: $(x_1, -, x_n)$ est liée donc il existe $\alpha_1, -, \alpha_n \in \mathbb{R}$ tel que $\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n = 0$ avec $\alpha_i \neq 0$ cas $\alpha_1 \neq 0$, $x_1 = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1} x_2 - \dots - \frac{\alpha_n}{\alpha_1} x_n$, alors

$$\begin{aligned}
\varphi(x_1, -, x_n) &= \varphi\left(-\frac{\alpha_2}{\alpha_1} x_2 - \dots - \frac{\alpha_n}{\alpha_1} x_n, x_2, -, x_n\right) \\
&= \text{TODO} = 0
\end{aligned}$$

□

Corollaire 1.1.1: Si $\dim(E) < n$ toutes les formes n -linéaires alternées sur E sont nulles.

Démonstration: Soient E un espace vectoriel, $x_1, -, x_n \in E$. Alors $(x_1, -, x_n)$ est liée donc $\varphi(x_1, -, x_n) = 0$. □

Théorème 1.1.1: Si $\dim(E) \geq n$ alors il existe des formes n -linéaires alternées sur E non nulles.

De plus, si $\dim(E) = n$ deux formes n -linéaires alternées sur E φ_1 et φ_2 non nulles sont proportionnelles i.e, $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x_1, -, x_n \in E, \varphi_2(x_1, -, x_n) = \lambda \varphi_1(x_1, -, x_n)$.

1.2. Déterminant d'une famille de E^n .

Lemme 1.2.1: Soit $m : E^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Alors $a_m : E^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$a_m(x_1, x_2) = m(x_1, x_2) - m(x_2, x_1)$$

est bilinéaire antisymétrique.

Démonstration: Soient $x_1, x_2 \in E$. On montre l'antisymétrie.

$$\begin{aligned}
a_m(x_1, x_2) &= m(x_1, x_2) - m(x_2, x_1) = -(m(x_2, x_1) - m(x_1, x_2)) \\
&= -a_m(x_2, x_1)
\end{aligned}$$

La linéarité est évidente. □

Théorème 1.2.1: Soient E un espace vectoriel de dimension n , et $B = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E . Alors il existe une unique forme n -linéaire alternée: $\det_B : E^n \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $\det_B(e_1, \dots, e_n) = 1$.

Démonstration cas $n=2$: TODO VOIR MAXIME □

Définition 1.2.1 (Déterminant): Soient E un espace vectoriel de dimension n , et $B = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E . On appelle **déterminant** dans la base B la forme n -linéaire du **Théorème** précédent

Théorème 1.2.2: Soient E un espace vectoriel de dimension n , et B une base de E . Une famille $F = \{f_1, \dots, f_n\}$ de E est libre si et seulement si $\det_B(f_1, \dots, f_n) \neq 0$. Dans ce cas on a :

$$\forall x_1, \dots, x_n \in E, \det_B(x_1, \dots, x_n) = \det_B(F) \det_F(x_1, \dots, x_n).$$

Démonstration: Soit $F = (f_1, \dots, f_n)$ une famille, $B = (e_1, \dots, e_n)$.

Si F est liée on a \det_B est n -linéaire alternée. Alors $\det_B(f_1, \dots, f_n) = 0$.

Si F est libre alors F est une base donc $\exists \lambda \in \mathbb{R}, \det_B = \lambda \det_F$ voir (**Théorème**). En particulier,

$$\det_B(f_1, \dots, f_n) = \lambda \det_F(f_1, \dots, f_n) \stackrel{\text{par définition}}{=} \lambda \cdot 1$$

$$\text{Or} \quad 1 = \det_B(e_1, \dots, e_n) = \lambda \det_F(e_1, \dots, e_n) \text{ d'où } \lambda \neq 0$$

D'où $\det_B(f_1, \dots, f_n) \neq 0$. □

1.3. Déterminant d'un endomorphisme.

Théorème 1.3.1: Soient E un espace vectoriel de dimension n et $f : E \rightarrow E$ un endomorphisme. Alors il existe un unique réel $\det(f)$ tel que pour toute application φ n -linéaire alternée, et pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in E$,

$$\varphi(f(x_1), \dots, f(x_n)) = \det(f) \varphi(x_1, \dots, x_n).$$

Remarque: En prenant $x_1, \dots, x_n = e_1, \dots, e_n$,

$$\det(f(B)) = \det F.$$

Démonstration: Existence: Soit φ une forme n -linéaire alternée non-nulle et

$\psi : E^n \rightarrow \mathbb{R}; x_1, \dots, x_n \mapsto (\varphi(x_1), \dots, \varphi(x_n))$ qui est une forme n -linéaire alternée. Alors φ et ψ sont proportionnelles, i.e il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\psi = \lambda \varphi$ (**Théorème**).

Soit Φ une forme n -linéaire alternée quelconque, alors il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\Phi = \alpha \varphi$, et

$\forall x_1, \dots, x_n \in E$,

$$\Phi(f(x_1), \dots, f(x_n)) = \alpha \varphi(f(x_1), \dots, f(x_n)) = \alpha \varphi(\psi(x_1, \dots, x_n)) = \lambda \Phi(x_1, \dots, x_n)$$

MYSTIQUE □

Définition 1.3.1: Soient E un espace vectoriel de dimension n et $f : E \rightarrow E$ un endomorphisme. On appelle **déterminant de f** le réel $\det(f)$ du **Théorème** précédent.

Proposition 1.3.1: Soient $f : E \rightarrow E$ et $g : E \rightarrow E$ deux endomorphismes. Alors,

$$\det(f \circ g) = \det(f) \det(g).$$

Démonstration: Soient $\varphi : E^n \rightarrow \mathbb{R}$ une application n -linéaire alternée, $x_1, \dots, x_n \in E$.

On a:

$$\begin{aligned} \varphi(f \circ g(x_1), \dots, f \circ g(x_n)) &= \det(f) \varphi(g(x_1), \dots, g(x_n)) \text{ par définition de } \det(f). \\ &= \det(f) \det(g) \varphi(x_1, \dots, x_n) \text{ par définition de } \det(g) \end{aligned}$$

Par unicité de $\det(f \circ g)$, $\det(f \circ g) = \det f \det(g)$. □

Proposition 1.3.2: Soient F une famille de vecteurs de E , $f : E \rightarrow E$ un isomorphisme d'espace vectoriel, et B une base de E . Alors $f(B)$ est une base de F et

$$\det_{f(B)} f(F) = \det_B F.$$

Démonstration: $\det_{f(B)} f$ et \det_B sont deux formes n -linéaires alternées sur E qui valent 1 sur B donc elles sont égales. □

Théorème 1.3.2: Soit $f : E \rightarrow E$ un endomorphisme. Alors, f est bijectif si et seulement si $\det(f) \neq 0$ et on a :

$$\det(f^{-1}) = \frac{1}{\det(f)}.$$

Démonstration: Soit B une base de E un espace vectoriel.

On rappelle f est bijectif $\Leftrightarrow f(B)$ est une base. $\Leftrightarrow \det_B f(B) \neq 0$. Si f est bijectif, $f \circ f^{-1} = \text{id}_E$ donc $\det(f \circ f^{-1}) = \det(\text{id}_E) = \det f \det f^{-1}$ or $\det(\text{id}_E) = 1$

D'où $\det(f^{-1}) = \frac{1}{\det(f)}$. □

1.4. Déterminant d'une matrice carrée.

Définition 1.4.1: Soit $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ une matrice. On appelle **déterminant de A**

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} := \det_{(e_1, \dots, e_n)}((a_{11}, \dots, a_{n1}), \dots, (a_{1n}, \dots, a_{nn}))$$

le déterminant dans la base canonique de \mathbb{R}^n des n vecteurs colonnes de A .

Théorème 1.4.1: Soient E un espace vectoriel de dimension finie, $f : E \rightarrow E$ un endomorphisme. Alors

$$\det f = \det M_{B,B}(f).$$

Où $M_{B,B}(f)$ est la matrice associée à f dans la base B .

Proposition 1.4.1: Soient $A, B \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$, $\lambda \in \mathbb{R}$

1. $\det(AB) = \det(A) \det(B)$.
2. A inversible $\Leftrightarrow \det A \neq 0$. Si A est inversible alors $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$.
3. $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$.

Démonstration:

1. Soient $f : E \rightarrow E$, $g : E \rightarrow E$, A, B les matrices associées respectivement à f et g . Alors la matrice associée à $f \circ g$ est $M_{B,B}(f \circ g) = AB$. Ainsi,

$$\det(AB) = \det M(f \circ g) = \det(f \circ g) = \det f \det g = \det A \det B.$$

2. De même en considérant les endomorphismes associés.
3. Par n -linéarité.

□

Remarque (ATTENTION): $\det(A + B) \neq \det(A) + \det(B)$

Théorème 1.4.2: Soient $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$, E un espace vectoriel de dimension n , B une base de E , et x_1, \dots, x_n tels que $x_i := a_{1i}e_1 + \dots + a_{ni}e_n$. Alors

$$\det A = \det_B(x_1, \dots, x_n).$$

Démonstration: Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow E$; base canonique \mapsto base $B = y_1, \dots, y_n \mapsto y_1e_1 + \dots + y_ne_n$. f est bien un isomorphisme. On a : $f(a_{1i}, \dots, a_{ni}) = x_i$. D'après la proposition,

$$\det_{f(C)} f(a_{1i}, \dots, a_{ni}) = \det_C(a_{1i}, \dots, a_{ni}) = \det A = \det_B(x_1, \dots, x_n).$$

□

Remarque: Le déterminant est indépendant de la base B choisie.

Définition 1.4.2 (transposée): Soit $A \in M_{p,q}(\mathbb{K})$ avec

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,q} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p,1} & \cdots & a_{p,q} \end{pmatrix}$$

Alors la transposée est notée ${}^tA \in M_{p,q}(\mathbb{K})$ est la matrice

$${}^tA = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{p,1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1,q} & \cdots & a_{p,q} \end{pmatrix}.$$

Théorème 1.4.3 (Admis): Soit $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ une matrice carrée. Alors :

$$\det {}^tA = \det A.$$

Remarque: Conséquence directe: Toutes les propriétés des déterminants qui ont été étendues sur les colonnes sont aussi valables en opérant sur les lignes.

Proposition 1.4.2: Le déterminant est une forme n-linéaire alternée. Ainsi :

1. Il y a n-linéarité du déterminant par rapport aux vecteurs colonnes (ou lignes).
2. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$\alpha \det(\cdot) = \det(\alpha C_i).$$

3. Si on échange deux colonnes, le déterminant est multiplié par -1 .
4. $\det A \neq 0 \Leftrightarrow$ les n vecteurs colonnes forment une famille libre

1.5. Déterminant d'une matrice triangulaire par blocs.

Théorème 1.5.1: Soient $A, B \in \text{Mat}(\mathbb{R})$ des matrices carrées, M une matrice carrée de la forme $M = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$. Alors :

$$\det M = \det A \det B.$$

Démonstration: Soient B, C des matrices de dimension n ,

$\varphi_{B,C} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}; (c_1, \dots, c_n)_{\text{vecteurs colonnes}} \mapsto \begin{vmatrix} A & C \\ 0 & B \end{vmatrix}$. $\Phi_{B,C}$ est n -linéaire alternée donc

$$\forall A \in \text{Mat}(\mathbb{R}), \begin{vmatrix} A & C \\ 0 & B \end{vmatrix} = \varphi_{B,C}(c_1, \dots, c_n) = \lambda_{B,C} \det A.$$

En prenant $A = I_n$, $\det A = 1$ $c_1 \dots$ incompréhensible...

En faisant des opérations sur les colonnes, $\lambda_{B,C} = \begin{vmatrix} I_n & 0 \\ 0 & B \end{vmatrix}$

□

Théorème 1.5.2 (même généralisé): Soit M une matrice carrée de la forme

$$M = \begin{pmatrix} A_1 & * & \cdots & * \\ 0 & A_2 & * & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & A_k \end{pmatrix} \text{ avec } (A_i)_{i \in \{1, \dots, k\}} \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R}). \text{ Alors}$$

$$\det M = \det A_1 \cdot \dots \cdot \det A_k$$

Remarque (Cas particulier): Déterminant d'une matrice triangulaire (ou diagonale):

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & \cdots \\ 0 & a_{22} & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}$$

1.6. Développements d'un déterminant par rapport à une colonne.

Définition 1.6.1 (Déterminant mineur): Soit $A = (a_{ij})_{i,j \in \{1, \dots, n\}} \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R})$. On appelle **déterminant mineur** de A , relatif à a_{ij} , le déterminant d'ordre $n - 1$ obtenu en rayant dans A la i -ème ligne et la j -ème colonne. On le note Δ_{ij} .

Définition 1.6.2 (Cofacteur): Soit $A = (a_{ij})_{i,j \in \{1, \dots, n\}} \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R})$. On appelle **cofacteur** de A relatif à a_{ij} ,

$$c(ij) = (-1)^{i+j} \Delta_{ij}.$$

Définition 1.6.3 (Comatrice): Soit $A = (a_{ij})_{i,j \in \{1, \dots, n\}} \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R})$. On appelle **comatrice** de A la matrice des cofacteurs $(c_{ij})_{i,j \in \{1, \dots, n\}}$. On la note $\text{com } A$.

Théorème 1.6.1: Développement par rapport à la j -ième colonne.

Soit $A = (a_{ij})_{i,j \in \{1, \dots, n\}} \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R})$.

$$\det A = a_{1j} c_{1j} + \dots + a_{nj} c_{nj}$$

Remarque: On a toujours intérêt à développer suivant la ligne ou la colonne avec le plus de 0.

Exemple: Développement d'un déterminant par rapport à la deuxième colonne.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & -2 & 1 \\ -3 & -3 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 5 & -3 \end{vmatrix} = -0 * \begin{vmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -3 & 3 & 2 \\ 1 & 5 & -3 \end{vmatrix} + 4 * \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -3 & 3 & 2 \\ 1 & 5 & -3 \end{vmatrix} - (-3) * \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & 5 & -3 \end{vmatrix} + 0 * \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \\ -3 & 3 & 2 \end{vmatrix}.$$

Cette méthode reste très longue, on privilégiera donc de faire d'abord en amont un pivot de Gauss sur

la matrice afin d'intégrrer le plus de 0 à la matrice: $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & -2 & 1 \\ -3 & -3 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 5 & -3 \end{vmatrix} \xrightarrow{C_3 - C_1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & -4 & 1 \\ -3 & -3 & 6 & 2 \\ 1 & 0 & 4 & -3 \end{vmatrix}$ D'où

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & -2 & 1 \\ -3 & -3 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 5 & -3 \end{vmatrix} = 1 * \begin{vmatrix} 4 & -4 & 1 \\ -3 & 6 & 2 \\ 0 & 4 & -3 \end{vmatrix} \stackrel{C_2+C_1}{=} \begin{vmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -3 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & -3 \end{vmatrix} \stackrel{C_1-4C_3}{=} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -11 & 3 & 2 \\ 12 & 4 & -3 \end{vmatrix} \stackrel{\text{par d'vlp}}{=} 1 \begin{vmatrix} -11 & 3 \\ 12 & 4 \end{vmatrix} \\
= -11 * 4 - 3 * 12 = -44 - 36 = -80.$$

Corollaire 1.6.1: Soit $A \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R})$. On a :

$$A^t(\text{com} A) = \det(A) I_n = {}^t(\text{com } A) A$$

En particulier, si A est inversible,

$$A^{-1} = \frac{{}^t(\text{com} A)}{\det A}$$

Démonstration: $\text{com}(A)_{ij} = C_{ij}$ donc ${}^t\text{com}(A)_{ij} = C_{ji}$. Les coefficients du produit matriciel $A^t\text{com}(A)$ sont égaux à

$$(A({}^t\text{com } A))_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} ({}^t\text{com } A)_{kj} = \sum_{k=1}^n a_{ik} C_{jk} = \begin{cases} \det A & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

Car le déterminant comporte deux fois les lignes $a_{11}, a_{1k}, a_{in} \dots$. On obtient l'autre formule en développant par rapport à une colonne. \square

Exemple: $A = \begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix}$ Alors $\text{com } A = \begin{pmatrix} b' & -a' \\ -b & a \end{pmatrix}$.

$\det(A) = ab' - ba'$. $A^{-1} = \frac{1}{ab' - ba'} \begin{pmatrix} b & -b' \\ -a' & a \end{pmatrix}$ En déduire si $ab' - ba' \neq 0$.
 $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$ admet comme unique solution

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} c \\ c' \end{pmatrix} = \frac{1}{ab' - ba'} \begin{pmatrix} b'c - c'b \\ -a'c + ac' \end{pmatrix} \Rightarrow x = \frac{\begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}} \text{ et } y = \frac{\begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}}$$

1.7. Formule de Cramer.

Théorème 1.7.1: Soit (S) le système de n équations à n inconnues: $\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = y_1 \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn}x_n = y_n \end{cases}$

Soit $A = (a_{ij})_{i,j \in \{1, \dots, n\}}$ (S) admet une unique solution si et seulement si $\det A \neq 0$. Dans ce cas, la solution est donnée par

$$x_k = \frac{1}{\det(A)} \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,k-1} & y_1 & a_{1,k+1} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{n,k-1} & y_n & a_{n,k+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

La k -ième colonne est remplacée par le vecteur de second membre.

2. Equations linéaires.

Proposition 2.1: Soient E, F deux sous espaces vectoriels, $y \in F$ l'ensemble des solutions $x \in E$ de l'équation linéaire de second membre $f(x) = y$ est vide si $y \notin \mathcal{I}(f)$, est de la forme $x_0 + \ker(f)$, x_0 solution particulière si $y \in \mathcal{I}(f)$.

Démonstration: Si l'ensemble des solutions $x \in E$ de $f(x) = y$ n'est pas vide, il existe $x_0 \in E$ telle que $f(x_0) = y$. Soit $x \in E$. Alors x est solution de

$$f(x) = y \Leftrightarrow f(x) = f(x_0) \Leftrightarrow f(x - x_0) = 0 \Leftrightarrow x - x_0 \in \ker(f).$$

□

Définition 2.1: Soient E un espace vectoriel, F_1, \dots, F_p des sous espaces vectoriels de E . On appelle **somme de Minkowski** l'ensemble des vecteurs de la forme $x_1 + \dots + x_p$ avec $x_i \in F_i$ est un sous-espace vectoriel de E noté $F_1 + \dots + F_p$.

Proposition 2.2: La somme de Minkowski est associative, commutative et 0 est l'unique élément neutre.

Définition 2.2: On dit que la somme $F_1 + \dots + F_p$ est **directe** si pour tout vecteur $x_1 \in F_1, \dots, x_n \in F_n$ on a l'implication $x_1 + \dots + x_p = 0 \Rightarrow x_1 = \dots = x_p = 0$. Dans ce cas on la note $F_1 \oplus \dots \oplus F_p$.