Analyse Approfondie
Chapitre 3: Intégrale de Riemann, à la Darboux.

Table des matières

1. Subdivisions.

Définition 1.1 (Subdivision): Une Subdivision P d'un segment $[a, b]$ est la donnée d'une suite finie de $[a, b]$ qui est strictement croisssante, dont le premier élément est a et dont le dernier élément est b. On note une subdivision de la facon suivante: $P = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\}$.

Définition 1.2 (plus fine que): Soit P et Q deux subdivision de $[a, b]$. On dit que Q est plus fine que P si $P \subset Q$.

2. Sommes de Darboux.

Définition 2.1 (Somme de Darboux supérieure): Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction bornée et $P = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\}$ une subdivision de $[a, b]$. On défnit la somme de Darboux supérieure de f selon P par :

$$U_{p(f)} = \sum_{k=1}^{n} \left((x_k - x_{k-1}) \sup_{[x_{k-1}, x_k]} f \right).$$

Définition 2.2 (Somme de Darboux inférieure): Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction bornée et $P = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\}$ une subdivision de $[a, b]$. On défnit la somme de Darboux inférieure de f selon P par :

$$L_{p(f)} = \sum_{k=1}^{n} \left((x_k - x_{k-1}) \inf_{[x_{k-1}, x_k]} f \right).$$

Proposition 2.1: Soit P et Q deux subdivisions de $[a, b]$. Si Q est plus fine que P,

$$U_Q(f) \leq U_P(f) \text{ et } L_Q(f) \geq L_P(f).$$

Démonstration: Soit P, Q deux subdivisions de $[a,b]$ telles que Q plus fine que P. Soit $c \in]x_{k-1}, x_k[$, alors

$$\begin{aligned}(x_k - x_{k-1}) \sup_{[x_{k-1},x_k]} f &= (x_k - c + c - x_{k-1}) \sup_{[x_{k-1},x_k]} f \\ &= (c - x_{k-1}) \sup_{[x_{k-1},x_k]} f + (x_k - c) \sup_{[x_{k-1},x_k]} f \\ &\geq (c - x_{k-1}) \sup_{[x_{k-1},c]} f + (x_k - c) \sup_{[c,x_k]} f\end{aligned}$$

□

Proposition 2.2: Soit P et Q deux subdivisions de $[a,b]$, alors $L_{p(f)} \leq U_{Q(f)}$.

Démonstration: En effet si on pose $R := P \cup Q$ alors R est plus fine que P et que Q, donc $L_{P(f)} \leq L_{R(f)} \leq U_{R(f)} \leq U_{Q(f)}$. □

3. Intégrales.

Définition 3.1 (intégrale inférieure): Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction bornée.
On définit l'intégrale inférieure de f par $\underline{\int_a^b} f := \sup\left\{L_{p(f)} : P \text{ subdvision de } [a,b]\right\}$.

Définition 3.2 (intégrale supérieure): Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction bornée.
On définit l'intégrale supérieure de f par $\overline{\int_a^b} f := \inf\left\{U_{p(f)} : P \text{ subdvision de } [a,b]\right\}$.

Définition 3.3: Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction bornée. On dit que f est intégrable si $\overline{\int_a^b} f = \underline{\int_a^b} f$. Alors on dénote cette quantité par :

$$\int_a^b f(x) \,\mathrm{d}x := \underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f.$$

4. Critère d'intégrabilité.

Théorème 4.1: Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction bornée. Alors f est intégrable si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \text{ une subdivision } P \text{ de } [a,b] \text{ telle que } U_{P(f)} - L_{P(f)} \leq \varepsilon$$

Démonstration: $\Rightarrow$: Supposons que f soit intégrable, i.e $\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f$.
Soit $\varepsilon > 0$. Alors il existe une subdivision P_1 de $[a,b]$ telle que $U_{p_1}(f) < \overline{\int_a^b} f + \frac{\varepsilon}{2}$ et une subdivision P_1 de $[a,b]$ telle que $U_{p_1}(f) < \underline{\int_a^b} f - \frac{\varepsilon}{2}$.
Posons $P := P_1 \cup P_2$.
Alors $U_{P(f)} < U_{P_1}(f) < \overline{\int_a^b} f + \frac{\varepsilon}{2}$ et $L_{P(f)} > L_{P_1}(f) > \underline{\int_a^b} f - \frac{\varepsilon}{2}$.

Donc $U_{P(f)} - L_{P(f)} < \overline{\int_a^b} f + \frac{\varepsilon}{2} - \left(\underline{\int_a^b} f + \frac{\varepsilon}{2}\right) = \varepsilon$.

$\leq$: Soit $\varepsilon > 0$. Alors il existe une subdivision P de $[a,b]$ telle que $U_{P(f)} - L_{P(f)} \leq \varepsilon$. Ainsi,

$$L_{P(f)} \leq \underline{\int_a^b} f \leq \overline{\int_a^b} f \leq U_{P(f)}$$

d'où $0 \leq \overline{\int_a^b} f - \underline{\int_a^b} f \leq U_{p(f)} - L_{p(f)} \leq \varepsilon$. On a montré que $\forall \varepsilon > 0, 0 \geq \overline{\int_a^b} f - \underline{\int_a^b} f \leq \varepsilon$ d'où, $\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f$ d'où f intégrable. $\square$

Théorème 4.2 (relation de Chasles): Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ et $c \in [a,b]$.
Alors f est intégrable si et seulement si $f|_{[a,c]}$ et $f|_{[c,b]}$ sont intégrables, dans ce cas, on a légalité suivante:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Corollaire 4.2.1: Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est intégrable et si $[c,d] \subset [a,b]$ alors $f|_{[c,d]} \to \mathbb{R}$ est intégrable.

Théorème 4.3: Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction telle que $[a,b] \setminus f^{-1}(\{0\})$