Géométrie affine et euclidienne

Table des matières

1. Géométrie affine.

1.1. Espaces affines

Définition 1.1. Soit E un espace vectoriel. Un ensemble (non vide) $\mathcal{E}$ est un *espace affine* s'il existe une application $\theta : \mathcal{E}x\mathcal{E} \to E\ ;\ (A,B) \mapsto \overrightarrow{AB}$ telle que :
(1) Pour tout $A \in \mathcal{E}$ fixé, l'application $\theta_A : \mathcal{E} \to E\ ;\ B \mapsto \overrightarrow{AB}$ est bijective.
(2) Pour tout $A, B, C \in \mathcal{E}$, on a $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ (relation de Chasles).

Remarques 1.2.
(1) Les elements de $\mathcal{E}$ sont les points.
(2) La dimension de $\mathcal{E}$ est celle de E.
(3) L'espace vectoriel E est appelé la direction de $\mathcal{E}$, on dit aussi que $\mathcal{E}$ est dirigé par E.
On notera $(\mathcal{E}, E)$.

Exemple 1.3. Tout espace vectoriel E admet une structure naturelle d'espace affine.
Soit $\theta : ExE \to E\ ;\ (u,v) \mapsto v-u$. On vérifie les deux conditions de la définition d'un espace affine.
1. Soit $u \in \mathcal{E}$. L'application $\theta_u : \mathcal{E} \to \mathcal{E}\ ;\ v \mapsto v-u$ est bijective car la réciproque existe : $v \mapsto v+u$
2. $\overrightarrow{uv} + \overrightarrow{vw} = v-u+w-v = w-u = \overrightarrow{uw}$.

Exercice 1. Soit $f : E \to E', g : E' \to E$ telle que $f \circ g = \mathrm{id}_{E'}, g \circ f = \mathrm{id}_E$ alors f et g sont bijectives.

Remarque 1.4. La relation de Chasles donne
(1) $\overrightarrow{AA} + \overrightarrow{AA} = \overrightarrow{AA}$ donc $\overrightarrow{AA} = 0$
(2) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA} = 0$ donc $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$.

Proposition 1.5 (règle du parallélogramme). Soit $A, A', B, B' \in \mathcal{E}$.
$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'} \Leftrightarrow \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'}$$

Démonstration.
$\Rightarrow \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{B'A'} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{A'B'} + \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{BB'}$
$\Leftarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB'} + \overrightarrow{B'B} = \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'B'} + \overrightarrow{B'B} = \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'B'} - \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{A'B'}$. □

Définition 1.6. Soit $A, A', B, B' \in \mathcal{E}$. On dit que $ABB'A'$ forme un parallélogramme s'ils vérifient la règle du parallélogramme.

Proposition 1.7. Soit $A \in \mathcal{E}, u \in E$. Il existe un unique $B \in \mathcal{E}$ tel que $\overrightarrow{AB} = u$.

Démonstration. θ_A est bijective. □

Notation 1.8. On pourra noter $B = A + u$.

1.2. Sous-espaces affines.

Définition 1.9. Soit $(\mathcal{E}, E)$, $\mathcal{F} \subset \mathcal{E}$. On dit que $\mathcal{F}$ est un sous-espace affine de $\mathcal{E}$ s'il existe $A \in \mathcal{F}$ tel que $\theta_A(\mathcal{F})$ est un sous-espace vectoriel de E.

Proposition 1.10. Si $\mathcal{F} \subset \mathcal{E}$ est un sous-espace affine dirigé par F alors

$$\forall B \in \mathcal{F}, \theta_B(\mathcal{F}) = F.$$

Démonstration. Il existe $A \in \mathcal{F}$ tel que $\theta_A(\mathcal{F}) = F$. On veut montrer que $\theta_A(\mathcal{F}) = \theta_B(\mathcal{F})$.

(1) Soit $u \in \theta_A(\mathcal{F})$. On montre que $u \in \theta_B(\mathcal{F})$.
Comme θ_B est bijective, on peut trouver $N \in \mathcal{E}$ tel que $\overrightarrow{BN} = u$. Or $\overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BN} \in \theta_A(\mathcal{F})$.
Ainsi, $N \in \mathcal{F}$ et $u = \overrightarrow{BN} \in \theta_B(\mathcal{F})$

(2) On montre $\theta_B(\mathcal{F}) \subset \theta_A(\mathcal{F})$. Soit $u \in \theta_B(\mathcal{F})$ alors $u = \overrightarrow{BM}$ avec $M \in \mathcal{F}$. Par la relation de Chasles, $u = \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AM} \in \theta_A(\mathcal{F})$ donc $u \in \theta_A(\mathcal{F})$.

□

Proposition 1.11. Soit $A \in \mathcal{E}$ et $F \subset E$ un sous-espace vectoriel. Il existe un unique sous-espace affine $\mathcal{F} \subset \mathcal{E}$ qui passe par A et dirigé par F.

Démonstration. $\mathcal{F} = \{A + u \mid u \in F\} = \left\{M \in \mathcal{E} \mid \overrightarrow{AM} \in F\right\}$. Soit $B \in \mathcal{F}$,
on pose $\theta_A : \mathcal{F} \to F\,;\ M \mapsto \overrightarrow{BM}$.

(1) Puisque $B \in \mathcal{F}$, $\theta_A(B) = \overrightarrow{AB} = u \in F$.
(2) Soit $u, v, w \in \mathcal{F}$, alors $u, v, w \in \mathcal{E}$ or puisque $\mathcal{E}$ est un sous-espace affine, u, v, w verifient la relation de chasles. Ainsi, F est bien un sous-espace affine de direction F.
(3) De plus, $A + 0 = A \in \mathcal{F}$ donc $\mathcal{F}$ passe par A.

□

Proposition 1.12. Soit $f : E \to F$ une application linéaire entre deux espaces vectoriels.
Si $v \in f(E)$ alors $f^{-1}(v)$ est un sous-espace affine de E dirigé par $\ker(f)$.

Démonstration. Soit $u \in f^{-1}(v)$. On montre que $w \in f^{-1}(v) \Leftrightarrow \theta(u, w) \in \ker f$. En effet,

$$\begin{aligned} w \in f^{-1}(v) \Leftrightarrow f(w) = v &\Leftrightarrow f(w) = f(u) \\ &\Leftrightarrow f(w-u) = 0 \\ &\Leftrightarrow w - u \in \ker(f) \Leftrightarrow \theta(u, w) \in \ker(f) \end{aligned}$$

□

Remarque 1.13.

(1) Un sous espace affine de dimension 0 est constitué d'un seul point.
(2) Un sous-espace affine de dimension 1 est une droite.
(3) un sous-espace affune de dimension 2 est un plan

Exemple 1.14. Dans $\mathbb{R}^n$, les solutions d'une équation $\sum_{i=1}^n a_i x_i = b$ forment un sous-espace affine de $\mathbb{R}^n$ dirigé par l'espace vectoriel $\{\sum a_i x_i = 0\}$:

Proposition 1.15. Les sous-espaces affines de E sont de la forme $G + v_0$ où $G \subset E$ est un sous-espace vectoriel et $v_0 \in E$.

Démonstration. exercice. $\square$

Proposition 1.16. Un sous-espace affine E est un sous-espace vectoriel si et seulement il contient 0.

Démonstration. En effet supposons que $\mathcal{G} \subset E$ soit un sous-espace affine contenant 0. Soit G la direction de $\mathcal{G}$. Alors $\mathcal{G} = G + 0 = G$ est un sev de E. $\square$

1.3. Sous-espaces affines engendrés par une partie.

Notation 1.17. Soit $(\mathcal{E}, E)$ un espace affine, S une partie non-vide de $\mathcal{E}$. $\langle S \rangle$ est l'intersection de tout les sous-espaces affines de $\mathcal{E}$ contenant S.

Proposition 1.18. Soit $(\mathcal{F}_\alpha)_{\alpha \in I}$ une famille de sous-espaces affines de $\mathcal{E}$ tel que $\bigcap_{\alpha \in I} \mathcal{F}_\alpha \neq \emptyset$. Alors $\bigcap F_\alpha$ est un sous-espace affine de $\mathcal{E}$.

Démonstration. Soit $A \in \bigcap_{\alpha \in I} F_\alpha =: \mathcal{F}$. Soit $F_\alpha := \theta_A(\mathcal{F}_\alpha)$. Alors F_α est un sous-espace vectoriel de E. Montrons $F := \bigcap_{\alpha \in I} F_\alpha = \theta_A(\mathcal{F})$. Donc F est un sous-espace vectoriel de E
Montrons $\theta_A(F) = \bigcap_{\alpha \in I} \theta_A(F_\alpha) \subset$ « facile »
$\supset$ Soit $v \in \bigcap_{\alpha \in I} \theta_A(F_\alpha)$ Par surjéctivité de θ_A, on peut trouver $B \in \mathcal{E}$ tel que $\overrightarrow{AB} = v$. Pour chaque $\alpha \in I$, on a $v \in \theta_A(\mathcal{F}_\alpha)$ donc

$$v = \overrightarrow{AM_\alpha}, M_\alpha \in F_\alpha \Rightarrow B = M_\alpha \in \mathcal{F}_\alpha \forall \alpha \Leftrightarrow B \in \bigcap_{\alpha \in I} \mathcal{F}_\alpha$$

$\square$

Exemple 1.19. Soit $\{A_1, \ldots, A_k\}$ une partie de $\mathcal{E}$ Alors $\langle A_0, \ldots, A_k \rangle$ est le sous-espace affine $A_0 + \left\langle \overrightarrow{A_0A_1}, \ldots, \overrightarrow{A_0A_k} \right\rangle$.

Montrons $\langle A_0, \ldots, A_k \rangle = A_0 + \left\langle \overrightarrow{A_0A_1}, \ldots, \overrightarrow{A_0A_k} \right\rangle$. Soit $(\mathcal{F}, F)$ une sous-espace affine de $\mathcal{E}$ qui contient $A_0, \ldots, A_k$, alors $A_0 \in \mathcal{F}$. Donc $\overrightarrow{A_0A_1}, \ldots, \overrightarrow{A_0A_k} \in F$ et $A_0 + \left\langle \overrightarrow{A_0A_1}, \ldots, \overrightarrow{A_0A_k} \right\rangle \subset \mathcal{F}$. De plus $A_0 + \left\langle \overrightarrow{A_0A_1}, \ldots, \overrightarrow{A_0A_k} \right\rangle$ est un sous-espace affine qui contient $A_0, A_1 = A_0 + \overrightarrow{A_0A_1}, \ldots, a_k = A_0 + \overrightarrow{A_0A_k}$. Ainsi, $\langle A_0, \ldots A_k \rangle \subset A_0 + \left\langle \overrightarrow{A_0A_1}, \ldots, \overrightarrow{A_0A_k} \right\rangle$.

Remarque 1.20. On a $\dim \langle A_0, \ldots, A_k \rangle \leq k$.

Définition 1.21 (Affinement indépendante). Soit $\{A_1, \ldots, A_k\}$ une partie de $\mathcal{E}$. On dit que la famille est *affinement indépendante* si $\langle A_0, \ldots A_k \rangle$ est de dimension k.

Définition 1.22 (Repère affine). Soit $\{A_1, \ldots, A_k\}$ une famille affinement indépendante, et $\mathcal{E} := \langle A_0, \ldots A_k \rangle$. Alors on dit que $\{A_1, \ldots, A_k\}$ est un *repère affine* de $\mathcal{E}$.

Exemple 1.23. Un repère affine d'une droite est constitué de 2 points.

Notation 1.24.
(1) $\langle A, B \rangle, A \neq B$ désigne la droite passant par A et B. On la note aussi AB.
(2) $[AB]$ désigne le segment défini par $[AB] := \left[M \in \mathcal{E} \mid \overrightarrow{AM} = \lambda \overrightarrow{AB}, \lambda \in [0, 1] \right]$

1.4. Parallélisme.

Définition 1.25 (Parallèle)**.** Soit $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ deux sous-espaces affines. On dit que $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sont parallèles s'ils ont la même direction. On note $\mathcal{F} \mathbin{/\!/} \mathcal{G}$.

Remarque 1.26. Une droite n'est pas parallèle à un plan.

Proposition 1.27. Soit E, F deux espaces vectoriels, $f : E \to F$ une application linéaire. Alors $\forall v, w \in f(E)$, on a $f^{-1}(v) \mathbin{/\!/} f^{-1}(w)$.

Démonstration. Par la Proposition 1.12, on a que $f^{-1}(v)$ et $f^{-1}(w)$ sont dirigés par $\ker(f)$. □

Proposition 1.28. Si $\mathcal{F} \mathbin{/\!/} \mathcal{G}$ et $\mathcal{F} \cap \mathcal{G} \neq \varnothing$, alors $\mathcal{F} = \mathcal{G}$.

Démonstration. Soit $A \in \mathcal{F} \cap \mathcal{G}$. Alors $\mathcal{F} = A + F, \mathcal{G} = A + G$ mais $F = G$ par parallélisme de $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ d'où $\mathcal{F} = \mathcal{G}$. □

Proposition 1.29. Soit D une droite. Par tout point de A d'un espace affine, passe une unique droite D' parallèle à D.

Démonstration. $D' = A_{\text{point}} + D_{\text{direction}}$. □

Proposition 1.30. Soit $(\mathcal{F}, F)$, $(\mathcal{G}, G)$ deux sous-espaces affines de $(\mathcal{E}, E)$. On suppose $F + G = E$. Alors tout sous-espace affine parallèle à $\mathcal{F}$ rencontre $\mathcal{G}$.

Démonstration. Soit $\mathcal{H}$ un sous-espace affine de $\mathcal{E}$ parralèle à $\mathcal{F}$. Montrons que $H \cap G \neq \varnothing$. Soit $A \in \mathcal{H}, B \in \mathcal{G}$. On peut écrire $\overrightarrow{AB} = u + v$ avec $u \in F, v \in G$. On pose $\theta_A : \mathcal{H} \to H, \theta_B : \mathcal{G} \to G$ et on a $\theta_A(\mathcal{H}) = H$ et $\theta_B(\mathcal{G}) = G$. On peut écrire $u = \overrightarrow{AC}, C \in \mathcal{H}, v = \overrightarrow{DB}, D \in \mathcal{G}$.
On a $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} \Leftrightarrow \overrightarrow{DC} = 0 \Leftrightarrow D = C \in \mathcal{H} \cap \mathcal{G}$. □

Corollaire 1.31. Dans un plan affine $(\mathcal{E}, E)$ deux droites distinctes non parallèles se rencontrent en un seul point.

Démonstration.
unicité : Si D, D' se coupent en deux points $A \neq B$ alors $D = \langle A, B\rangle, D' = \langle A, B\rangle$ donc $D = D'$.
$D \cap D' \neq \varnothing$. D est dirigée par $\langle u\rangle$, D' est dirigée par $\langle v\rangle$. $\langle u\rangle \neq \langle v\rangle \Rightarrow \{u, v\}$ est linéairement indépendante. DOnc $\langle u\rangle + \langle v\rangle$ est de dimension 2. Or E est aussi de dimension 2 Par conséquent, $\langle u\rangle + \langle v\rangle = E$ par la proposition on a $D \cap D' \neq \varnothing$. □

1.5. Barycentres.

Définition 1.32 (Points pondérés)**.** Soit $(\mathcal{E}, E)$ un espace affine, $A_1, \ldots, A_r$ des points de $\mathcal{E}$, et $\alpha_1, \ldots, \alpha_r \in \mathbb{R}$. On appelle système de points pondérés un ensemble $\{(A_1, \alpha_1), \ldots, (A_r, \alpha_r)\}$.

Définition 1.33 (Barycentre)**.** Soit $F := (A_1, \alpha_1), \ldots, (A_r, \alpha_r)$ tel que $\sum \alpha_j = 1$. On appelle barycentre de F l'unique point M tel que $\sum \alpha_j \overrightarrow{MA_j} = 0$.

Remarque 1.34. On pourrait parler d'existence d'un milieu.

Exemple 1.35.
1. Soit $(A_1), \ldots, (A_2)$, $\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{1}{2}$. Alors A est le milieu de A_1A_2 $\frac{1}{2}\overrightarrow{AA_1} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AA_2} = 0$.
2. $A_1, A_2, A_3, \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \frac{1}{3}$. On obtient le centre de gravité d'un triangle.

Définition 1.36 (Coordonnée barycentrique)**.** $(\alpha_0, \dots, \alpha_n)$ est appelé coordonnée barycentrique de M dans le repère $A_0, \dots, A_n$.

Exemple 1.37. $\mathcal{E}$ = droite, $\mathcal{E} = \langle A, B \rangle$, M le milieu de AB. Les coordonnées barycentriques de M sont $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

Notation 1.38. $M = \sum \alpha_j A_j$. Il **faut** que $\sum \alpha_j = 1$. On peut écrire $M = \frac{A}{2} + \frac{B}{2}$ mais pas $M = A + B$.

Proposition 1.39. Soit $(A_0, \dots, A_n)$ un repère affine de $\mathcal{E}$. Alors pour tout $M \in \mathcal{E}$, il existe une unique famille $(\alpha_0, \dots, \alpha_n)$ telle que

$$\begin{cases} \sum_{j=0}^n \alpha_j = 1 \\ \sum_{j=0}^n \alpha_j \overrightarrow{MA_j} = 0 \end{cases}.$$

Démonstration. On note $\left(\star \coloneqq \sum_{j=0}^n \alpha_j \overrightarrow{MA_j} = 0\right)$
<u>Existence</u>: Les vecteurs $\overrightarrow{MA_j}$ sont linéairement indépendants car il y en a $n+1$ et $\dim E = n$. On peut trouver $\alpha_0, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ non tous nuls tels que $\sum \alpha_j \overrightarrow{MA_j} = 0$. On montre par l'absurde que $\sum_{j=0}^n \alpha_j \neq 0$. Supposons $\sum \alpha_j = 0$ Par $\star$ et la relation de Chasles,

$$\sum_{j=0}^n \alpha_j \left(\overrightarrow{MA_0} + \overrightarrow{A_0A_j}\right) = 0 \Leftrightarrow \sum_{j=0}^n \alpha_j \overrightarrow{MA_0} + \sum_{j=1}^n \alpha_j \overrightarrow{A_0A_j} = 0.$$

Or, $\sum_{j=0}^n \alpha_j = 0$. D'où $\sum_{j=1}^n \alpha_j \overrightarrow{A_0A_j} = 0$.
Comme $\left\{\overrightarrow{A_0A_1}, \dots, \overrightarrow{A_0A_n}\right\}$ est une base de E, on déduit que $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$. On obtient aussi que $\alpha_0 = 0$ par $\sum_{j=0}^n \alpha_j = 0$. On a donc une contradiction.
Ainsi, on peut défnir

$$\beta_j = \frac{\alpha_j}{\sum_{i=0}^n \alpha_i}.$$

et on a, $\sum_{j=0}^n \beta_j = 1$ et $\sum_{j=0}^n \beta_j \overrightarrow{MA_j} = 0$.
<u>Unicité</u>: Par $(\star)$, on a

$$\sum_{j=0}^n \alpha_j \left(\overrightarrow{MA_0} + \overrightarrow{A_0A_j}\right) = 0 \Leftrightarrow \sum_{j=0}^n \alpha_j \overrightarrow{MA_0} + \sum_{j=1}^n \overrightarrow{A_0A_j} \Leftrightarrow \overrightarrow{A_0M} = \sum_{j=1}^n \alpha_j \overrightarrow{A_0A_j}$$

Comme $\left\{\overrightarrow{A_0A_1}, \dots, \overrightarrow{A_0A_n}\right\}$ est une base de E, les coefficients $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ sont uniquement déterminés par $\overrightarrow{A_0M}$. Comme $\sum_{j=1}^n \alpha_j = 1$, α_0 est également uniquement determiné Si $\sum \alpha_j \overrightarrow{MA_j} = 0$, $\sum \gamma_j \overrightarrow{MA_j} = 0$. Alors

$$\sum (\alpha_j - \gamma_j) \overrightarrow{MA_j} = 0 \Leftrightarrow \sum (\alpha_j - \gamma_j) \left(\overrightarrow{MA_0} + \overrightarrow{A_0A_j}\right) = 0 \Leftrightarrow \sum_{j=1}^n (\alpha_j - \gamma_j) \overrightarrow{A_0A_j} = 0 \Rightarrow \alpha_j = \gamma_j \forall j.$$

□

2. Applications affines.

Définition 2.1 (Applications affines)**.** Soit $(\mathcal{E}, E), (\mathcal{F}, F)$ deux espaces affines. $\varphi : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ est une <u>application affine</u> s'il existe $O \in \mathcal{E}$ et $f : E \to F$ une application linéaire tels que pour tout $M \in \mathcal{E}$, $\overrightarrow{\varphi(O)\varphi(M)} = f\left(\overrightarrow{OM}\right)$.

Remarques 2.2.
(1) f ne dépend pas de O. En effet, si O' est un autre point de $\mathcal{E}$,

$$f\left(\overrightarrow{O'M}\right) = f\left(\overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{OM}\right) = f\left(\overrightarrow{O'O}\right) + f\left(\overrightarrow{OM}\right) = \overrightarrow{\varphi(O')\varphi(O)} + \overrightarrow{\varphi(O)\varphi(M)} = \overrightarrow{\varphi(O')\varphi(M)}.$$

(2) On a toujours $f\left(\overrightarrow{AB}\right) = \overrightarrow{\varphi(A)\varphi(B)}$. On va noter $\vec{\varphi} = f$ et donc $\vec{\varphi}\left(\overrightarrow{AB}\right) = \overrightarrow{\varphi(A)\varphi(B)}$. $\vec{\varphi}$ est l'application linéaire associée à φ.

Exemples 2.3.
1. $\varphi(M) = O\ \forall M \in \mathcal{E}$. $\vec{\varphi}\left(\overrightarrow{MM'}\right) = \overrightarrow{\varphi(M)\varphi(M')} = 0$ Donc $\vec{\varphi} = 0$ et φ est une application affine.
2. Soit E, F deux espaces vectoriels avec leur structure affine naturelle ($\overrightarrow{uv} = v - u$). Soit $\varphi : E \to F$ affine. On a $\varphi(u) - \varphi(0) = \overrightarrow{\varphi(0)\varphi(u)} = \vec{\varphi}(\overrightarrow{ou}) = \vec{\varphi}(u) \Leftrightarrow \varphi(u) = \varphi(0) + \vec{\varphi}(u)$. Toutes applications affines $\varphi : E \to F$ s'écrivent donc $\varphi(u) = v_0 + f(u)$ où $v_0 \in F$ est fixé et $f : E \to F$ linéaire.
3. Les applications affines $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sont les $x \mapsto ax + b$.

Définition 2.4 (Translations)**.** Soit $\varphi : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$. $\varphi(M) = M_{\in\mathcal{E}} + u_{\in E}$. φ est la translation de vecteur u. On a $\overrightarrow{\varphi(A)\varphi(B)} = \overrightarrow{AB}$. L'application linéaire associée est id_E. On a $\overrightarrow{A\varphi(A)} = \overrightarrow{A(A+u)} = u, \overrightarrow{B\varphi(B)} = \overrightarrow{B(B+u)} = u$.

Proposition 2.5. L'image d'un sous-espace affine par une application affine est un sous-espace affine

Démonstration. Soit $\varphi : \mathcal{E} \to \mathcal{E}'$ une application affine, $\mathcal{F} \subset \mathcal{E}$ un sous-espace affine. On prend $A \in \mathcal{F}$ et on note $F' = \vec{\varphi}(F)$. (F' est un sous-espace vectoriel de E'). On veut montrer que $\varphi(F)$ est un sous-espace affine passant par $\varphi(A)$ et dirigé par F'. On a

$$M' \in \varphi(\mathcal{F}) \Leftrightarrow M' = \varphi(M), M \in \mathcal{F}$$

$$\text{et } \overrightarrow{A'M'} = \overrightarrow{\varphi(A)\varphi(M)} = \vec{\varphi}\left(\overrightarrow{AM}\right) \in \vec{\varphi}(F).$$

On vient de voir que

$$M' i\varphi(\mathcal{F}) \Leftrightarrow \overrightarrow{A'M'} \in F'$$

donc $\varphi(F)$ est un sous-espace affine de $\mathcal{E}'$ dirigé par F'. □

Corollaire 2.6. Une application affine envoie trois points alignés sur 3 points alignés.

Proposition 2.7. L'image inverse d'un sous-espace affine par une application affine est un sous-espace affine ou un ensemble vide.

Démonstration. Exercice. □

2.1. Effet sur les barycentres.

Proposition 2.8. Soit $\varphi : \mathcal{E} \to \mathcal{E}'$ affine. L'image du barycentre d'un système de points pondérés par φ est le barycentre $(\varphi(A_1), \alpha_1), \ldots, (\varphi(A_r), \alpha_r)$.

Démonstration. Soit A le barycentre de $(\varphi(A_1), \alpha_1), \ldots, (\varphi(A_r), \alpha_r)$. Alors $\sum_{j=1}^{r} \alpha_j \overrightarrow{AA_j} = 0$ donc $\vec{\varphi}\left(\sum_{j=1}^{r} \alpha_j \overrightarrow{AA_j}\right) = 0$. Comme $\vec{\varphi}$ est linéaire, on a $\sum_{j=1}^{r} \alpha_j \vec{\varphi}\left(\overrightarrow{AA_j}\right) = 0$ donc $\sum_{j=1}^{r} \alpha_j \overrightarrow{\varphi(A)\varphi(A_j)} = 0$. Cela veut dire que $\varphi(A)$ est le barycentre de $(\varphi(A_1), \alpha_1), \ldots, (\varphi(A_r), \alpha_r)$. □

Proposition 2.9. Soit $\varphi : \mathcal{E} \to \mathcal{E}'$ une application qui vérifie

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall A, B \in \mathcal{E}, \varphi(\alpha A + (1-\alpha)B) = \alpha\varphi(A) + (1-\alpha)\varphi(B).$$

Alors φ est affine.

Démonstration. On fixe $O \in \mathcal{E}, O' = \varphi(O)$ et on défnit $f : E \to E'$; $u = \overrightarrow{OM} \mapsto \overrightarrow{O'M'}$ où $M' = \varphi(M)$. Il reste à montrer que f est linéaire. On a $\forall \alpha \in \mathbb{R}, M = \alpha A + (1-\alpha)B$ on a

$$M' = \varphi(M) = \alpha\varphi(A) + (1-\alpha)\varphi(B) = \alpha A' + (1-\alpha)B'$$

Par défnition de f, on a

$$f\left(\alpha\overrightarrow{OA} + (1-\alpha)\overrightarrow{OB}\right) = f\left(\overrightarrow{OM}\right) = \overrightarrow{O'M'} = \alpha\overrightarrow{O'A'} + (1-\alpha)\overrightarrow{O'B'}.$$

(1) On prend $A = M, B = O$ et $f\left(\alpha\overrightarrow{OM}\right) = \alpha\overrightarrow{O'M'} = \alpha f\left(\overrightarrow{OM}\right)$.

(2) On prend $u = \overrightarrow{OA}, v = \overrightarrow{OB}$, $f(u+v) = f\left(2\frac{u+v}{2}\right) = f\left(2\overrightarrow{OM}\right) = 2f\left(\overrightarrow{OM}\right)$
Mais $f\left(\overrightarrow{OM}\right) = \frac{1}{2}\overrightarrow{O'A'} + \frac{1}{2}\overrightarrow{O'B'}$ donc

$$f(u+v) = \overrightarrow{O'A'} + \overrightarrow{O'B'} = f\left(\overrightarrow{OA}\right) + f\left(\overrightarrow{OB}\right) = f(u) + f(v)$$

On a montré que f est linéaire

□

2.2. Transformations affines.

Définition 2.10 (Transformation affine)**.** Une transformation affine de $\mathcal{E}$ est une application affine de $\mathcal{E}$ dans lui même qui est bijective.

Proposition 2.11. Soit $\varphi : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ une application affine. φ est bijective si et suelement si $\vec{\varphi}$ l'est.

Démonstration. On suppose φ bijective. Si $u \in \ker(\vec{\varphi})$, $u = \overrightarrow{AB}$ alors $\overrightarrow{\varphi(A)\varphi(B)} = \vec{\varphi}\left(\overrightarrow{AB}\right) = 0$ donc $\varphi(A) = \varphi(B) \underset{\varphi \text{ inj}}{\Rightarrow} A = B \Rightarrow u = 0$ donc $\vec{\varphi}$ est injective. IL MANQUE UN BOUT on a $v = \overrightarrow{\varphi(A)\varphi(M)} = \vec{\varphi}\left(\overrightarrow{AM} \in \operatorname{Im}(\vec{\varphi})\right)$. Donc $\vec{\varphi}$ est surjective.
On suppose $\vec{\varphi}$ bijective. Si $\varphi(A) = \varphi(B)$ alors $\vec{\varphi}\left(\overrightarrow{AB}\right) = \overrightarrow{\varphi(A)\varphi(B)} = 0$ donc $\overrightarrow{AB} = 0 \Rightarrow A = B$ donc φ est injective.
Soit $M' \in \mathcal{F}, A \in \mathcal{E}, u \in E$. $\overrightarrow{\varphi(u)} \underset{\vec{\varphi} \text{ inj}}{=} \overrightarrow{\varphi(A)M'} \in F$. On écrit $u = \overrightarrow{AM}, M \in \mathcal{E}$ Alors $\overrightarrow{\varphi(A)\varphi(B)} = \vec{\varphi}\left(\overrightarrow{AM}\right) = \overrightarrow{\varphi(A)M'}$ donc $\varphi(M) = M'$ □

Proposition 2.12. Soit $\varphi : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$, $\psi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ des applications affines. Alors $\psi \circ \varphi : \mathcal{E} \to \mathcal{G}$ est affine et l'application linéaire associée est $\overrightarrow{\psi \circ \varphi} = \vec{\psi} \circ \vec{\varphi}$.

Démonstration. $\forall A, B \in \mathcal{E}$, $\overrightarrow{\psi \circ \varphi(A)\psi \circ \varphi(B)} = \vec{\psi}\left(\overrightarrow{\varphi(A)\varphi(B)}\right) = \vec{\psi}\left(\vec{\varphi}\left(\overrightarrow{AB}\right)\right) = \vec{\psi} \circ \vec{\varphi}\left(\overrightarrow{AB}\right)$

□

3. Points fixes.

Notation 3.1. Soit $\varphi : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ on note $\mathrm{Fix}(\varphi)$ l'ensemble des points fixés par φ

$$\mathrm{Fix}(\varphi) = \{M \in \mathcal{E} \mid \varphi(M) = M\}$$

Proposition 3.2. Soit $\mathcal{E}$ de dimension finie, φ une transformation affine de $\mathcal{E}$. φ admet un unique point fixe si et seulement si $\ker(\vec{\varphi} - \mathrm{id}_E) = 0$.

Démonstration. Soit $u \in \ker(\vec{\varphi} - \mathrm{id}_E)$, $u = \overrightarrow{OM}, M \in \mathcal{E}$. Alors

$$\overrightarrow{\varphi\left(\overrightarrow{OM}\right)} - \overrightarrow{OM} = 0 \Rightarrow \vec{\varphi}\left(\overrightarrow{OM}\right) = \overrightarrow{\varphi(O)\varphi(M)} = \overrightarrow{OM}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{O\varphi(M)} = \overrightarrow{OM} \Rightarrow \varphi(M) = M \Rightarrow M \in \mathrm{Fix}(\varphi) = \{O\} \Rightarrow M = O \Rightarrow u = 0$$

□

Proposition 3.3. Soit $\varphi : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ une transformation affine de $\mathcal{E}$. Si $\vec{\varphi} - \mathrm{id}_E$ est surjective alors $\mathrm{Card}(\mathrm{Fix}(\varphi)) = 1$

Démonstration.
unicité: $\varphi(A) = A, \varphi(B) = B \;\Rightarrow \vec{\varphi}\left(\overrightarrow{AB}\right) = \overrightarrow{\varphi(A)\varphi(B)} = \overrightarrow{AB} \Rightarrow \overrightarrow{AB} \in \ker(\vec{\varphi} - \mathrm{id}_E) \Rightarrow \overrightarrow{AB} = 0 \Rightarrow A = B$
existence : On cherche M tel que $\varphi(M) = M$ on fixe $0 \in \mathcal{E}$, $O' = \varphi(O)$ Alors

$$\varphi(M) = M \Leftrightarrow \overrightarrow{\varphi(O)M} = \vec{\varphi}\left(\overrightarrow{OM}\right) \Leftrightarrow \overrightarrow{\varphi(O)O} + \overrightarrow{OM} = \vec{\varphi}\left(\overrightarrow{OM}\right) \Leftrightarrow (\vec{\varphi} - \mathrm{id}_E)\left(\overrightarrow{OM}\right) = \overrightarrow{\varphi(O)O} \in E$$

Il est possible de trouver un tel M car $\vec{\varphi} - \mathrm{id}_E$ est surjective. □

Corollaire 3.4. Si $\dim \mathcal{E} < +\infty$ alors les assertions suivantes sont équivalentes :
(1) $\mathrm{Card}(\mathrm{Fix}(\varphi)) = 1$.
(2) $\ker(\vec{\varphi} - \mathrm{id}_E) = O$.

Démonstration. $f : E \to E$ dim non infinie:f inj $\Leftrightarrow f$ surj $\Leftrightarrow f$ bij. □

Définition 3.5 (Homothétie)**.** Une homothétie de centre O et de rapport $\lambda \in \mathbb{R}$ est une application affine $\mathcal{E} \to \mathcal{E}$ qui vérifie $0 \mapsto 0$ et $\overrightarrow{OM'} = \lambda\overrightarrow{OM}$. Elle est notée $h(0, \lambda)$.

Remarque 3.6. L'application linéaire associée à $h(0, \lambda)$ est donnée par $u \in E \mapsto \lambda u$.

Proposition 3.7. Soit $(\mathcal{E}, E)$ un espace affine, $A, B \in \mathcal{E}$ tels que $A \neq B$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, On pose $\varphi = h(B, \mu) + h(A, \lambda)$.
(1) Si $\lambda\mu \neq 1$ alors $\varphi(M, \lambda\mu)$, $M \in (AB)$,
(2) Si $\lambda\mu = 1$ alors φ est une translation de vecteur $u \in \mathrm{Vect}\left(\overrightarrow{AB}\right)$.

Démonstration. On a vu que φ est une application affine dont l'application linéaire associée est donnée par $\vec{\varphi} = \overrightarrow{h(B, \mu)} \circ \overrightarrow{h(A, \lambda)}$.

$$\vec{\varphi}(u) = \overrightarrow{h(B, \mu)}(\lambda u) = \lambda\mu u.$$

(1) $\lambda\mu \neq 1$: On a $\vec{\varphi} - \mathrm{id}_E = \underbrace{(\lambda\mu - 1)}_{\neq 0} \mathrm{id}_E$ est bijective.
D'après la Proposition 3.3, φ admet un unique point fixe que l'on note O. $O \overset{h(A,\lambda)}{\longmapsto} O' \overset{h(B,\mu)}{\longmapsto} O$.
On a $\overrightarrow{AO'} = \lambda\overrightarrow{AO}$, et $\overrightarrow{BO} = \mu\overrightarrow{BO'}$. Par Chasles,

$$\overrightarrow{BO} = \mu\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AO'}\right) = \mu\left(\overrightarrow{BA}\right) + \lambda\mu\overrightarrow{AO} \Leftrightarrow \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AO} = \mu\overrightarrow{BA} + \lambda\mu\overrightarrow{AO}$$

$$\Leftrightarrow (1-\lambda\mu)\overrightarrow{AO} = (\mu-1)\overrightarrow{BA} \Leftrightarrow \overrightarrow{AO} = \frac{\mu-1}{1-\mu\lambda}\overrightarrow{BA}.$$

Ceci détermine l'unique $O \in AB$. Ainsi, $\varphi = h(O, \lambda\mu)$.

(2) $\lambda\mu = 1$. Voir dessin tel. φ est une translation de vecteur $u = \overrightarrow{A\varphi(A)}$. Il reste à voir que $u \in \mathrm{Vect}\left(\overrightarrow{AB}\right)$. On a $A \overset{h(A,\lambda)}{\longmapsto} A \overset{h(B,\mu)}{\longmapsto} \varphi(A)$. On a $\overrightarrow{B\varphi(A)} = \mu\overrightarrow{BA}$.
$\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{A\varphi(A)} = \mu\overrightarrow{BA} \Leftrightarrow \overrightarrow{A\varphi(A)} = (\mu-1)\overrightarrow{BA}$. $\overrightarrow{A\varphi(A)} \in \mathrm{Vect}\left(\overrightarrow{AB}\right)$.

□

Proposition 3.8. Soit $A, B, C \in \mathcal{E}$ des points alignés,$\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}$. On pose $\varphi = h(c,\nu) \circ h(B,\mu) \circ h(A,\lambda)$

(1) Si $\lambda\mu\nu \neq 1$ alors $\varphi = h(O, \nu\mu\lambda)$, $O \in (AB)$

(2) Si $\lambda\mu\nu = 1$ alors φ est une translation t_u avec $u \in \mathrm{Vect}\left(\overrightarrow{AB}\right)$

Démonstration. On a $\vec{\varphi}(u) = (\lambda\mu\nu)u$

(1) On a $\vec{\varphi} - \mathrm{id}_E = (\lambda\mu\nu - 1)\,\mathrm{id}_E$ bijective donc φ admet un unique point fixe que l'on note O. $O \overset{h(A,\lambda)}{\longmapsto} O' \overset{h(B,\mu)}{\longmapsto} O'' \overset{h(C,\nu)}{\longmapsto} O$. On a $\overrightarrow{AO'} = \lambda\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{BO''} = \mu\overrightarrow{BO'}, \overrightarrow{CO} = \nu\overrightarrow{CO''}$. Par la relation de chasles:

$$\overrightarrow{CO} = \nu\left(\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BO''}\right) = \nu\overrightarrow{CB} + \mu\nu\overrightarrow{BO'} = \nu\overrightarrow{CB} + \mu\nu\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AO'}\right)$$

On a aussi $\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AO} = \nu\overrightarrow{CB} + \mu\nu\overrightarrow{BA} + \lambda\mu\nu\overrightarrow{AO}$

$\Leftrightarrow \mu\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CB} + \mu\nu\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} \Rightarrow \overrightarrow{AO} \in \mathrm{Vect}\left(\overrightarrow{AB}\right) \Rightarrow O \in AB$.

(2) $\lambda\mu\nu = 1$. $\vec{\varphi} = \mathrm{id}_E$ donc $\varphi = t_u$ il reste à voir que $u \in \mathrm{Vect}\left(\overrightarrow{AB}\right)$ (exercice).

□

Définition 3.9. Soit trois points A, B, C alignés. Le nombre $\lambda = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$ est défini par $\overrightarrow{AB} = \lambda\overrightarrow{AX}$.

Théorème 3.10 (Théorème de Thalès)**.** Soit $\mathcal{E}$ un plan affine, $d \mathbin{/\!/} d' \mathbin{/\!/} d''$ trois droites parallèles et $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2$ deux droites non parallèles à d. Soit $A_i = \mathcal{D}_i \cap d, A_i{}' = \mathcal{D}_i \cap d'$, et $A_i{}'' = \mathcal{D}_i \cap d''$. Alors

$$\frac{\overline{A_1A_1{}'}}{\overline{A_1A_1{}''}} = \frac{\overline{A_2A_2{}'}}{\overline{A_2A_2{}''}}.$$

Réciproquement, si $\mathcal{B} \in \mathcal{D}_1$ vérifie $\frac{\overline{A_1A_1{}'}}{\overline{A_1B}} = \frac{\overline{A_2A_{2'}}}{\overline{A_2A_{2''}}}$ alors $B = A_1$.

Démonstration.

□

fin du programme cc1.