Diagonalisation

Table des matières

1. Déterminants.

1.1. forme n-linéaires alternée.

Définition 1.1.1 (forme n-linéaire): Soit E un espace vectoriel. Soit $\varphi : E^n \to \mathbb{R}; (x_1, x_2, -, x_n) \mapsto \varphi((x_1, x_2, -, x_n))$. On dit que φ est une **forme n-linéaire** si φ est linéaire par rapport à chaque variable $x_i, i \in [1, n]$ i.e, $\forall x_1, -, x_i, -, x_n, y_i \in E, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$,

$$\varphi(x_1, -, x_{i-1}, \alpha x_i + \beta y_i, -, x_n) = \alpha\varphi(x_1, -, x_{i-1}, x_i, -, x_n) + \beta\varphi(x_1, -, x_{i-1}, y_i, -, x_n)$$

Exemples:
1. Montrons que $\varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}; (x_1, x_2) \mapsto x_1 x_2$ est 2-linéaire. Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. On a $(\alpha x_1 + \beta y_1)x_2 = \alpha(x_1 x_2) + \beta(y_1 y_2)$ et $x_1(\alpha x_2 + \beta y_2) = \alpha(x_1 x_2) + \beta(x_1 y_2)$.
2. $\varphi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}; (u^{\to}, v^{\to}) \mapsto u^{\to} \times v^{\to}$ est 2-linéaire (et symétrique).
3. Le déterminant 2-2 est 2-linéaire.

Remarque: $\varphi(x_1, -, 0, -, x_n) = 0$.
En effet,

Définition 1.1.2 (alternée): Soit φ une application n-linéaire. On dit que φ est **alternée** si

$$\forall i, j \in [1, n] \text{ avec } i \neq j, x_i = x_j \Rightarrow \varphi(x_1, -, x_n) = 0$$

φ est alternée si des qu'il y a 2 vecteurs égaux dans $x_1, -, x_n$, $\varphi(x_1, -, x_n) = 0$

Proposition 1.1.1: Soient $f_1, -, f_n : E \to F$ n applications linéaires. Soit $\varphi : F^n \to \mathbb{R}$ n linéaire. Alors

$$\varphi \circ (f_1, -, f_n) : E^n \to \mathbb{R}; x_1, -, x_n \mapsto \varphi(f_1(x_1), -, f_n(x_n))$$

est n -linéaire.

Démonstration:

□

Définition 1.1.3 (antisymétrie) : Soit φ une application n-linéaire. On dit que φ est **antisymétrique** si

$$\forall i, j \in [1, n] \text{ avec } i \neq j, \varphi(x_1, -, x_i, -, x_j, -, x_n) = -\varphi(x_1, -, x_j, -, x_i, -, x_n)$$

$\varphi(x_1, -, x_n)$ est changé en son opposé lorsqu'on échange 2 de ses vecteurs.

Proposition 1.1.2 : Soit φ une application n-linéaire et alternée. On ne change pas la valeur de $\varphi(x_1, -, x_n)$ en ajoutant à un des vecteurs de la famille une combinaison linéaire des autres.

Démonstration :

$$\begin{aligned}\varphi\left(x_1 + \sum_{j=2}^{n} \alpha_j x_j, -, x_n\right) &= \varphi(x_1, -, x_n) + \sum_{j=2}^{n} \alpha_j \varphi(x_j, -, x_j, -, x_n) \\ &= \varphi(x_1, -, x_n)\end{aligned}$$

Car φ est alternée. □

Proposition 1.1.3 : Soit φ une application n-linéaire, alternée. φ est alternée si et seulement si φ est antisymétrique.

Démonstration :
$\Rightarrow$ Supposons que φ soit alternée. On pose $x_i = x_j$ Alors on a $\varphi(x_1, -, x_i, -, x_j, -, x_n) = 0$

$$\begin{aligned}\varphi(x_1, -, x_i, -, x_j, -, x_n) &= \varphi(x_1, -, x_i + x_j, -, x_j + x_i, -, x_n) \\ &= \varphi(x_1, -, x_i, -, x_j + x_i, -, x_n) + \varphi(x_1, -, x_j, -, x_j + x_i, -, x_n) \\ &= \varphi(x_1, -, x_i, -, x_j, -, x_n) + \cancel{\varphi(x_1, -, x_i, -, x_i, -, x_n)} \\ &\quad \cancel{+\varphi(x_1, -, x_j, -, x_j, -, x_n)} + \varphi(x_1, -, x_j, -, x_i, -, x_n) \quad \text{car } \varphi \text{ est alternée.} \\ &= \varphi(x_1, -, x_i, -, x_j, -, x_n) + \varphi(x_1, -, x_j, -, x_i, -, x_n)\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}&0 = \varphi(x_1, -, x_i, -, x_j, -, x_n) + \varphi(x_1, -, x_j, -, x_i, -, x_n) \\ &\Leftrightarrow \varphi(x_1, -, x_i, -, x_j, -, x_n) = -\varphi(x_1, -, x_j, -, x_i, -, x_n)\end{aligned}$$

Donc φ est antisymetrique.
$\Leftarrow$ Supposons que φ soit antisymétrique. Alors on a :

$$\varphi(x_1, -, x_i, -, x_j, -, x_n) = -\varphi(x_1, -, x_j, -, x_i, -, x_n)$$

En particulier, en posant $x_j = x_i$ on a :

$$\begin{aligned}\varphi(x_1, -, x_i, -, x_i, -, x_n) &= -\varphi(x_1, -, x_i, -, x_i, -, x_n) \\ &\Leftrightarrow 2\varphi(x_1, -, x_i, -, x_i, -, x_n) = 0 \\ &\Leftrightarrow \varphi(x_1, -, x_i, -, x_i, -, x_n) = 0\end{aligned}$$

□

Proposition 1.1.4: Soit φ une application linéaire et alternée. Si $(x_1, -, x_n)$ est une famille liée alors $\varphi(x_1, -, x_n) = 0$

Démonstration: $(x_1, -, x_n)$ est liée donc il existe $\alpha_1, -, \alpha_n \in \mathbb{R}$ tel que $\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n = 0$ avec $\alpha_i \neq 0$ cas $\alpha_1 \neq 0$, $x_1 = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1} x_2 - \ldots - \frac{\alpha_n}{\alpha_1} x_n$, alors

$$\begin{aligned} \varphi(x_1, -, x_n) &= \varphi\left(-\frac{\alpha_2}{\alpha_1} x_2 - \ldots - \frac{\alpha_n}{\alpha_1} x_n, x_2, -, x_n\right) \\ &= \text{TODO} = 0 \end{aligned}$$

□

1.2. Définition du déterminant.

Corollaire 1.2.1: Si $\dim(E) < n$ toutes les formes n-linéaires alternées sur E sont nulles.

Démonstration: Soit E un espace vetcoriel, soient $x_1, -, x_n \in E$. Alors $(x_1, -, x_n)$ est liée donc $\varphi(x_1, -, x_n) = 0$. □

Théorème 1.2.1: Si $\dim(E \geq n)$ alors il existe des formes n-linéaires alternées sur E non nulles.
De plus, si $\dim(E) = n$ deux formes n-linéaires alternées sur E φ_1 et φ_2 non nulles sont proportionnelles i.e,

$$\exists \lambda \in \mathbb{R} \text{ tq } \forall x_1, -, x_n \in E, \varphi_2(x_1, -, x_n) = \lambda \varphi_1(x_1, -, x_n)$$

Théorème 1.2.2: Soit E un espace vectoriel de dimension n. Soit $B = (e_1, -, e_n)$ une base de E. Alors il existe une unique forme n-linéaire alternée: $\det_B : E^n \to \mathbb{R}$ appelée déterminant par rapport à B tel que $\det(e_1, -, e_n) = 1$

Démonstration cas n=2: TODO VOIR MAXIME □

Théorème 1.2.3: Soit E un espace vectoriel de dimension n. Soit B une base de E. Une famille F de vecteurs de E est libre si et seulement si le determinannt de ces n vecteurs dans la base B est non nul. Dans ce cas on a:

$$\forall x_1, -, x_n \in E, \det_B(x_1, -, x_n) = \det_B(F) \det_F(x_1, -, x_n)$$

Démonstration: Soit $F = (f_1, -, f_n)$ une famille, $B = (e_1, -, e_n)$.
Si F est liée on a $\det_B$ est n-linéaire alternée. Alors $\det_B(f_1, -, f_n) = 0$.
Si F est libre alors F est une base donc $\exists \lambda \in \mathbb{R}, \det_B = \lambda \det_F$ voir (Théorème). En particulier,

$$\det_B(f_1, -, f_n) = \lambda \det_F(f_1, -, f_n) = \lambda \cdot 1$$
$$\text{Or } 1 = \det_B(e_1, -, e_n) = \lambda \det_F(f_1, -, f_n) \text{ d'où } \lambda \neq 0$$

D'où $\det_B(f_1, -, f_n) \neq 0$. □

2. Déterminant d'un endomorphisme.

Définition 2.1: Soit E un espace vectoriel de dimension n. On appelle determinant de f l'unique réel $\det f$ tel que pour toute forme n-linéaire alternée φ, et pour tout $(x_1, -, x_n) \in E$,

$$\varphi(f(x_1), f(x_n)) = \det f \varphi(x_1, -, x_n).$$

Proposition 2.1: Soient $f : E \to E$ et $g : E \to E$ deux endomorphismes. Alors,

$$\det(f \circ g) = \det f \det g.$$

Démonstration: Soit $\varphi : E^n \to \mathbb{R}$ n une application linéaire alternée. Soit $x_1, -, x_n \in E$.
On a

$$\begin{aligned} \varphi(f \circ g(x_1), -, f \circ g(x_n)) &= \det f \varphi(g(x_1), -, g(x_n)) \text{ par definition de} \det f. \\ &= \det f \det g \varphi(x_1, -, x_n) \text{ par definition de } \det g \end{aligned}$$

Par unicité de $\det(f \circ g)$, $\det(f \circ g) = \det f \det g$ □

Théorème 2.1: Soit $f : E \to E$ un endomorphisme.

$$f \text{ est bijectif} \Leftrightarrow \det f \neq 0 \text{ et on a: } \det(f^{-1}) = \frac{1}{\det(f)}.$$

Démonstration: Soit B une base de E un espace vectoriel.
On rappelle f est bijectif $\Leftrightarrow$ $f(B)$ est une base. $\Leftrightarrow$ $\det_B f(B) \neq 0$. Si f est bijectif, $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_E$ donc $\det(f \circ f^{-1}) = \det(\mathrm{id}_E)$ □

3. Déterminant d'une matrice carrée.