Chapitre 2:
Séries numériques

1. Introduction

Définition 1.1: On appelle série de terme général $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite $(S_n) := \forall n \in \mathbb{N}, S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + \ldots + u_n$. Elle est appelée somme partielle d'ordre n de la série. La série de terme général (u_n) sera notée par $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

Définition 1.2 (Convergence): On dit que $S = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ converge si la suite S_n converge vers une limite finie et $\lim S = \lim_{n\to+\infty} S_n$. Sinon on dit que $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$diverge.

Définition 1.3: Si la série $S = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ est convergente alors le reste (R_n) est défini par $R_n = S - S_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_n$

Proposition 1.1: Si l'on modifie la valeur d'un nombre fini de U_n la nature de la série $\sum_{n=0}^{+\infty} U_n$ est inchangée.

Démonstration: On suppose qu'on a deux séries $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} v_n$ tel que $\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, u_n = v_n$. On pose pour $n \geq N S_n - T_n = \sum_{k=0}^{n-1} u_k - v_k$. La suite est donc stationnaire, elle converge. Par conséquent (S_n) et (T_n) sont de même nature. □

Remarque:
Si $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ converge et $\sum_{n=0}^{+\infty} v_n$ diverge alors $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n + v_n$ diverge.
Si $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ converge et $\sum_{n=0}^{+\infty} v_n$ diverge alors $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n + v_n$ diverge.

Proposition 1.2: si $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ converge alors $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Démonstration: $U_n = S_n - S_{n-1} = S - S = 0$. □

Définition 1.4: Si $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n \neq 0$ on dit que la série diverge grossièrement.

Définition 1.5: On dit que $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$ est absolument convergente si $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} |u_n|$ est convergente.

Proposition 1.3: Si $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$ est absolument convergente alors elle est convergente.

Démonstration: On montre que $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$ vérifie le critère de Cauchy.
Soit $\varepsilon > 0$. Comme $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} |u_n|$ converge,elle vérifie le critère de Cauchy.

$$\exists N \in \mathbb{N}, \forall p \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, p > n \geq N \Rightarrow \left| \sum_{k=n}^{n+p} u_k \right| \leq \varepsilon.$$

$$\Rightarrow \forall n \leq N, p \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k \right| \underset{\triangle}{\leq} \sum_{k=n+1}^{n+p} |u_k| \leq \varepsilon.$$

i.e $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$ vérifie le critère de Cauchy. $\square$

Définition 1.6: Une série qui converge mais pas absolument est appelée série semi-convergente.

2. Série à termes généraux positifs

Nous allons désormais considérer des séries $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq 0$.

Proposition 2.1: $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ est convergente si et seulement si la suite des sommes partielles (S_n) est majorée.

Démonstration: On a $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$.
$S_{n+1} - S_n = u_{n+1} \geq 0$. La suite (S_n) est donc croissante. Par conséquent, (S_n) est convergente si et seulement si elle est majorée. □

2.1. Comparaison.

Théorème 2.1.1 (Comparaison): Soient $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} v_n$ deux séries a termes positifs tel que $\forall n \in \mathbb{N}, v_n \geq u_n \geq 0$.
$*$ Si $\sum_{n=0}^{+\infty} v_n$ converge, alors $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ converge et $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \leq \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$.
$*$ Si $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ diverge, alors $\sum_{n=0}^{+\infty} v_n$ diverge.

Démonstration: On pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ et $T_n = \sum_{k=0}^{n} v_k$. On remarque que $0 \leq S_n \leq T_n$.
Alors $\sum_{n=0}^{+\infty} v_n$ converge $\Rightarrow$ (T_n) majoréeé $\Rightarrow$ (S_n) majorée $\Rightarrow$ $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ converge. En faisant tendre n vers $+\infty$, on obtient $S \leq T$. □

Théorème 2.1.2 (Equivalence): Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}, (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de nombres positifs telles que $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$. Alors:
$*$ $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} v_n$ sont de même nature.
$*$ En cas de convergence, les restes sont équivalents.
$*$ En cas de divergence, les sommes partielles sont équivalentes.

Démonstration: Soit $\varepsilon > 0$
Comme $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n, \exists N \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow (1-\varepsilon)v_n \leq u_n \leq (1+\varepsilon)v_n$
$*$ Par le théorème de comparaison,

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \text{ converge} &\Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty}(1-\varepsilon)v_n \text{ converge}\\ &\Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} v_n \text{ converge}\\ &\Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty}(1+\varepsilon)v_n \text{ converge} \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \text{ converge}\end{aligned}$$

donc $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} v_n$ sont de meme nature.

$*$ On suppose que $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ converge. On pose $s_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ et $T_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$.

On a, $\forall n \geq N$ □

Théorème 2.1.3 (de domination): Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs et telles que $u_n = O_{n\to+\infty}(v_n)$.

1. Si la série $\sum v_n$ converge alors $\sum u_n$ converge également.
2. Si $\sum u_n$ diverge, alors $\sum v_n$ diverge également.

Théorème 2.1.4 (de négligeabilité): Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs telles que $u_n = o_{n\to+\infty}(v_n)$.

1. Si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge également.
2. Si $\sum u_n$ diverge, alors $\sum v_n$ diverge également.

2.2. Quelques critères.

Théorème 2.2.1 (Critère de Cauchy): $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ est convergente si et seulement si elle vérifie le critère de Cauchy:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall p \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, n \geq N \Rightarrow \left|\sum_{k=n}^{n+p} u_k\right| \leq \varepsilon.$$

Démonstration:

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} u_n &\Leftrightarrow (S_n) \text{ converge}\\ &\Leftrightarrow (S_n) \text{ est de Cauchy}\\ &\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, (m > n \geq N) \Rightarrow |S_n - S_m| \leq \varepsilon\end{aligned}$$

Si $m = n + p$ avec $p \in \mathbb{N}$ alors $|S_n - S_m| = \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k \right|$ □

Théorème 2.2.2 (critère de d'Alembert): Soit $\sum u_n$ une série a termes positifs strictement à partir d'un certain rang telle que $\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{U_{n+1}}{U_n} \right) = l \in \mathbb{R}$.
1. Si $l < 1$, alors $\sum u_n$ converge.
2. Si $l > 1$, alors $\sum u_n$ diverge grossièrement.
3. Si $l = 1$, on ne peut pas conclure.

Théorème 2.2.3 (de Bertrand): Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^{\alpha} (\ln n)^{\beta}}$$

converge si et seulement si $\alpha > 1$(ou $\alpha = 1$ et $\beta > 1$)

3. Série téléscopique

Définition 3.1: Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite. On appelle série téléscopique la série : $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n - a_{n-1}$.

Proposition 3.1: La série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n - a_{n-1}$ est de même nature que la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$. En cas de convergence on a $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n - a_{n-1} = a_n - a_0$.

Démonstration: On pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k - a_{k-1}$

$$\begin{aligned} S_n &= \cancel{a_1} - a_0 + \cancel{a_2} - \cancel{a_1} + \ldots + a_n - \cancel{a_{n-1}} \\ &= a_n - a_0 \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} a_n - a_0. \end{aligned}$$

□

Théorème 3.1 (De Riemann): Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ une suite. La série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$$

converge si et seulement si $\alpha > 1$.

Démonstration: La série de Riemann est à termes positifs.
$\alpha = 1$ On obtient la série harmonique qui diverge.
$\alpha < 1$. $\forall n \in \mathbb{N} \setminus 0$ On a $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{n^{\alpha}}$ donc la série $\sum \frac{1}{n^{\alpha}}$ est divergente par comparaison.

$\alpha > 1$ $\forall n \in \mathbb{N} \setminus 0$ on a $\frac{1}{n}^2 \geq \frac{1}{n^\alpha}$ or $\sum \frac{1}{n^2}$ converge donc $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge
A $\in]1, 2[$ On procède par téléscopage avec $n^\alpha = n^{\alpha-1} - (n+1)^{\alpha-1}$ □

4. Séries alternées.

Théorème 4.1 (Critère d'Abel): Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite positive à valeurs réelles décroissante avec $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes telle que $\exists M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, \forall m > n, |b_n + b_{n+1} + \ldots + b_m| < M$ alors $\sum a_n b_n$ converge et $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\left|\sum_{n+1}^{+\infty} a_n b_n\right| < M a_{n+1}.$$

En particulier si $b_n = (-1)^n$, on a $|b_n + b_{n+1} + \ldots + b_m| \leq 1$ donc le critère d'Abel implique le critère spécial des séries alternées.