Géométrie affine et euclidienne

Table des matières

1. Géométrie affine.

1.1. Espaces affines

Définition 1.1. Soit E un espace vectoriel. Un ensemble (non vide) $\mathcal{E}$ est un *espace affine* s'il existe une application $\theta : \mathcal{E}x\mathcal{E} \to E\ ;\ (A, B) \mapsto \overrightarrow{AB}$ telle que :
(1) Pour tout $A \in \mathcal{E}$ fixé, l'application $\theta_A : \mathcal{E} \to E\ ;\ B \mapsto \overrightarrow{AB}$ est bijective.
(2) Pour tout $A, B, C \in \mathcal{E}$, on a $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ (relation de Chasles).

Remarques 1.2.
(1) Les elements de $\mathcal{E}$ sont les points.
(2) La dimension de $\mathcal{E}$ est celle de E.
(3) L'espace vectoriel E est appelé la direction de $\mathcal{E}$, on dit aussi que $\mathcal{E}$ est dirigé par E.
On notera $(\mathcal{E}, E)$.

Exemple 1.3. Tout espace vectoriel E admet une structure naturelle d'espace affine.
Soit $\theta : ExE \to E\ ;\ (u, v) \mapsto v - u$. On vérifie les deux conditions de la définition d'un espace affine.
1. Soit $u \in \mathcal{E}$. L'application $\theta_u : \mathcal{E} \to \mathcal{E}\ ;\ v \mapsto v - u$ est bijective car la réciproque existe : $v \mapsto v + u$
2. $\overrightarrow{uv} + \overrightarrow{vw} = v - u + w - v = w - u = \overrightarrow{uw}$.

Exercice 1. Soit $f : E \to E', g : E' \to E$ telle que $f \circ g = \mathrm{id}_{E'}, g \circ f = \mathrm{id}_E$ alors f et g sont bijectives.

Remarque 1.4. La relation de Chasles donne
(1) $\overrightarrow{AA} + \overrightarrow{AA} = \overrightarrow{AA}$ donc $\overrightarrow{AA} = 0$
(2) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA} = 0$ donc $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$.

Proposition 1.5 (règle du parallélogramme). Soit $A, A', B, B' \in \mathcal{E}$.

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'} \Leftrightarrow \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'}$$

Démonstration.
$\Rightarrow \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{B'A'} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{A'B'} + \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{BB'}$
$\Leftarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB'} + \overrightarrow{B'B} = \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'B'} + \overrightarrow{B'B} = \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'B'} - \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{A'B'}$. □

Définition 1.6. Soit $A, A', B, B' \in \mathcal{E}$. On dit que $ABB'A'$ forme un parallélogramme s'ils vérifient la règle du parallélogramme.

Proposition 1.7. Soit $A \in \mathcal{E}, u \in E$. Il existe un unique $B \in \mathcal{E}$ tel que $\overrightarrow{AB} = u$.

Démonstration. θ_A est bijective. □

Notation 1.8. On pourra noter $B = A + u$.

1.2. Sous-espaces affines.

Définition 1.9. Soit $(\mathcal{E}, E)$, $\mathcal{F} \subset \mathcal{E}$. On dit que $\mathcal{F}$ est un sous-espace affine de $\mathcal{E}$ s'il existe $A \in \mathcal{F}$ tel que $\theta_A(\mathcal{F})$ est un sous-espace vectoriel de E.

Proposition 1.10. Si $\mathcal{F} \subset \mathcal{E}$ est un sous-espace affine dirigé par F alors
$$\forall B \in \mathcal{F}, \theta_B(\mathcal{F}) = F.$$

Démonstration. Il existe $A \in \mathcal{F}$ tel que $\theta_A(\mathcal{F}) = F$. On veut montrer que $\theta_A(\mathcal{F}) = \theta_B(\mathcal{F})$.

(1) Soit $u \in \theta_A(\mathcal{F})$. On montre que $u \in \theta_B(\mathcal{F})$.
Comme θ_B est bijective, on peut trouver $N \in \mathcal{E}$ tel que $\overrightarrow{BN} = u$. Or $\overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BN} \in \theta_A(\mathcal{F})$. Ainsi, $N \in \mathcal{F}$ et $u = \overrightarrow{BN} \in \theta_B(\mathcal{F})$
(2) On montre $\theta_B(\mathcal{F}) \subset \theta_A(\mathcal{F})$. Soit $u \in \theta_B(\mathcal{F})$ alors $u = \overrightarrow{BM}$ avec $M \in \mathcal{F}$. Par la relation de Chasles, $u = \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AM} \in \theta_A(\mathcal{F})$ donc $u \in \theta_A(\mathcal{F})$.

□

Proposition 1.11. Soit $A \in \mathcal{E}$ et $F \subset E$ un sous-espace vectoriel. Il existe un unique sous-espace affine $\mathcal{F} \subset \mathcal{E}$ qui passe par A et dirigé par F.

Démonstration. $\mathcal{F} = \{A + u \mid u \in F\} = \left\{M \in \mathcal{E} \mid \overrightarrow{AM} \in F\right\}$. Soit $B \in \mathcal{F}$, on pose $\theta_A : \mathcal{F} \to F\ ;\ M \mapsto \overrightarrow{BM}$.

(1) Puisque $B \in \mathcal{F}, \theta_A(B) = \overrightarrow{AB} = u \in F$.
(2) Soit $u, v, w \in \mathcal{F}$, alors $u, v, w \in \mathcal{E}$ or puisque $\mathcal{E}$ est un sous-espace affine, u, v, w verifient la relation de chasles. Ainsi, F est bien un sous-espace affine de direction F.
(3) De plus, $A + 0 = A \in \mathcal{F}$ donc $\mathcal{F}$ passe par A.

□

Proposition 1.12. Soit $f : E \to F$ une application linéaire entre deux espaces vectoriels. Si $v \in f(E)$ alors $f^{-1}(v)$ est un sous-espace affine de E dirigé par $\ker(f)$.

Démonstration. Soit $u \in f^{-1}(v)$. On montre que $w \in f^{-1}(v) \Leftrightarrow \theta(u, w) \in \ker f$. En effet,
$$\begin{aligned} w \in f^{-1}(v) \Leftrightarrow f(w) = v &\Leftrightarrow f(w) = f(u) \\ &\Leftrightarrow f(w - u) = 0 \\ &\Leftrightarrow w - u \in \ker(f) \Leftrightarrow \theta(u, w) \in \ker(f) \end{aligned}$$
□

Remarque 1.13.

(1) Un sous espace affine de dimension 0 est constitué d'un seul point.

(2) Un sous-espace affine de dimension 1 est une droite.
(3) un sous-espace affune de dimension 2 est un plan

Exemple 1.14. Dans $\mathbb{R}^n$, les solutions d'une équation $\sum_{i=1}^n a_i x_i = b$ forment un sous-espace affine de $\mathbb{R}^n$ dirigé par l'espace vectoriel $\{\sum a_i x_i = 0\}$:

Proposition 1.15. Les sous-espaces affines de E sont de la forme $G + v_0$ où $G \subset E$ est un sous-espace vectoriel et $v_0 \in E$.

Démonstration. exercice. $\square$

Proposition 1.16. Un sous-espace affine E est un sous-espace vectoriel si et seulement il contient 0.

Démonstration. En effet supposons que $\mathcal{G} \subset E$ soit un sous-espace affine contenant 0. Soit G la direction de $\mathcal{G}$. Alors $\mathcal{G} = G + 0 = G$ est un sev de E. $\square$

1.3. Sous-espaces affines engendrés par une partie.

Notation 1.17. Soit $(\mathcal{E}, E)$ un espace affine, S une partie non-vide de $\mathcal{E}$. $\langle S \rangle$ est l'intersection de tout les sous-espaces affines de $\mathcal{E}$ contenant S.

Proposition 1.18. Soit $(\mathcal{F}_\alpha)_{\alpha \in I}$ une famille de sous-espaces affines de $\mathcal{E}$ tel que $\bigcap_{\alpha \in I} \mathcal{F}_\alpha \neq \emptyset$. Alors $\bigcap F_\alpha$ est un sous-espace affine de $\mathcal{E}$.

Démonstration. Soit $A \in \bigcap_{\alpha \in I} F_\alpha =: \mathcal{F}$. Soit $F_\alpha := \theta_A(\mathcal{F}_\alpha)$. Alors F_α est un sous-espace vectoriel de E. Montrons $F := \bigcap_{\alpha \in I} F_\alpha = \theta_A(\mathcal{F})$. Donc F est un sous-espace vectoriel de E
Montrons $\theta_A(F) = \bigcap_{\alpha \in I} \theta_A(F_\alpha) \subset$ « facile »
$\supset$ Soit $v \in \bigcap_{\alpha \in I} \theta_A(F_\alpha)$ Par surjéctivité de θ_A, on peut trouver $B \in \mathcal{E}$ tel que $\overrightarrow{AB} = v$. Pour chaque $\alpha \in I$, on a $v \in \theta_A(\mathcal{F}_\alpha)$ donc

$$v = \overrightarrow{AM_\alpha}, M_\alpha \in F_\alpha \Rightarrow B = M_\alpha \in \mathcal{F}_\alpha \forall \alpha \Leftrightarrow B \in \bigcap_{\alpha \in I} \mathcal{F}_\alpha$$

$\square$

Exemple 1.19. Soit $\{A_1, \cdots, A_k\}$ une partie de $\mathcal{E}$ Alors $\langle A_0, \cdots, A_k \rangle$ est le sous-espace affine $A_0 + \left\langle \overrightarrow{A_0A_1}, \cdots, \overrightarrow{A_0A_k} \right\rangle$.

Montrons $\langle A_0, \cdots, A_k \rangle = A_0 + \left\langle \overrightarrow{A_0A_1}, \cdots, \overrightarrow{A_0A_k} \right\rangle$. Soit $(\mathcal{F}, F)$ une sous-espace affine de $\mathcal{E}$ qui contient $A_0, \cdots, A_k$, alors $A_0 \in \mathcal{F}$. Donc $\overrightarrow{A_0A_1}, \cdots, \overrightarrow{A_0A_k} \in F$ et $A_0 + \left\langle \overrightarrow{A_0A_1}, \cdots, \overrightarrow{A_0A_k} \right\rangle \subset \mathcal{F}$. De plus $A_0 + \left\langle \overrightarrow{A_0A_1}, \cdots, \overrightarrow{A_0A_k} \right\rangle$ est un sous-espace affine qui contient $A_0, A_1 = A_0 + \overrightarrow{A_0A_1}, \ldots, a_k = A_0 + \overrightarrow{A_0A_k}$. Ainsi, $\langle A_0, \ldots A_k \rangle \subset A_0 + \left\langle \overrightarrow{A_0A_1}, \cdots, \overrightarrow{A_0A_k} \right\rangle$.

Remarque 1.20. On a $\dim \langle A_0, \ldots, A_k \rangle \leq k$.

Définition 1.21 (Affinement indépendante)**.** Soit $\{A_1, \cdots, A_k\}$ une partie de $\mathcal{E}$. On dit que la famille est *affinement indépendante* si $\langle A_0, \ldots A_k \rangle$ est de dimension k.

Définition 1.22 (Repère affine)**.** Soit $\{A_1, \cdots, A_k\}$ une famille affinement indépendante, et $\mathcal{E} := \langle A_0, \ldots A_k \rangle$. Alors on dit que $\{A_1, \cdots, A_k\}$ est un *repère affine* de $\mathcal{E}$.

Exemple 1.23. Un repère affine d'une droite est constitué de 2 points.

Notation 1.24.

(1) $\langle A, B\rangle, A \neq B$ désigne la droite passant par A et B. On la note aussi AB.
(2) $[AB]$ désigne le segment défini par $[AB] := \left[M \in \mathcal{E} \mid \overrightarrow{AM} = \lambda \overrightarrow{AB}, \lambda \in [0,1]\right]$

1.4. Parallélisme.

Définition 1.25 (Parallèle)**.** Soit $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ deux sous-espaces affines. On dit que $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sont parallèles s'ils ont la même direction. On note $\mathcal{F} \mathbin{/\!/} \mathcal{G}$.

Remarque 1.26. Une droite n'est pas parallèle à un plan.

Proposition 1.27. Soit E, F deux espaces vectoriels, $f : E \to F$ une application linéaire. Alors $\forall v, w \in f(E)$, on a $f^{-1}(v) \mathbin{/\!/} f^{-1}(w)$.

Démonstration. Par la Proposition 1.12, on a que $f^{-1}(v)$ et $f^{-1}(w)$ sont dirigés par $\ker(f)$. □

Proposition 1.28. Si $\mathcal{F} \mathbin{/\!/} \mathcal{G}$ et $\mathcal{F} \cap \mathcal{G} \neq \varnothing$, alors $\mathcal{F} = \mathcal{G}$.

Démonstration. Soit $A \in \mathcal{F} \cap \mathcal{G}$. Alors $\mathcal{F} = A + F, \mathcal{G} = A + G$ mais $F = G$ par parallélisme de $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ d'où $\mathcal{F} = \mathcal{G}$. □

Proposition 1.29. Soit D une droite. Par tout point de A d'un espace affine, passe une unique droite D' parallèle à D.

Démonstration. $D' = A_{\text{point}} + D_{\text{direction}}$. □

Proposition 1.30. Soit $(\mathcal{F}, F)$, $(\mathcal{G}, G)$ deux sous-espaces affines de $(\mathcal{E}, E)$. On suppose $F + G = E$. Alors tout sous-espace affine parallèle à $\mathcal{F}$ rencontre $\mathcal{G}$.

Démonstration. Soit $\mathcal{H}$ un sous-espace affine de $\mathcal{E}$ parralèle à $\mathcal{F}$. Montrons que $H \cap G \neq \varnothing$. Soit $A \in \mathcal{H}, B \in \mathcal{G}$. On peut écrire $\overrightarrow{AB} = u + v$ avec $u \in F, v \in G$. On pose $\theta_A : \mathcal{H} \to H, \theta_B : \mathcal{G} \to G$ et on a $\theta_A(\mathcal{H}) = H$ et $\theta_B(\mathcal{G}) = G$. On peut écrire $u = \overrightarrow{AC}, C \in \mathcal{H}, v = \overrightarrow{DB}, D \in \mathcal{G}$.
On a $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} \Leftrightarrow \overrightarrow{DC} = 0 \Leftrightarrow D = C \in \mathcal{H} \cap \mathcal{G}$. □

Corollaire 1.31. Dans un plan affine $(\mathcal{E}, E)$ deux droites distinctes non parallèles se rencontrent en un seul point.

Démonstration.
unicité : Si D, D' se coupent en deux points $A \neq B$ alors $D = \langle A, B\rangle, D' = \langle A, B\rangle$ donc $D = D'$.
$D \cap D' \neq \varnothing$. D est dirigée par $\langle u\rangle$, D' est dirigée par $\langle v\rangle$. $\langle u\rangle \neq \langle v\rangle \Rightarrow \{u, v\}$ est linéairement indépendante. DOnc $\langle u\rangle + \langle v\rangle$ est de dimension 2. Or E est aussi de dimension 2 Par conséquent, $\langle u\rangle + \langle v\rangle = E$ par la proposition on a $D \cap D' \neq \varnothing$. □

1.5. Barycentres.

Définition 1.32 (Points pondérés). Soit $(\mathcal{E}, E)$ un espace affine, $A_1, \cdots, A_r$ des points de $\mathcal{E}$, et $\alpha_1, \cdots, \alpha_r \in \mathbb{R}$. On appelle système de points pondérés un ensemble $\{(A_1, \alpha_1), \cdots, (A_r, \alpha_r)\}$.

Définition 1.33 (Barycentre)**.** Soit $F := (A_1, \alpha_1), \cdots, (A_r, \alpha_r)$ tel que $\sum \alpha_j = 1$. On appelle barycentre de F l'unique point M tel que $\sum \alpha_j \overrightarrow{MA_j} = 0$.

Remarque 1.34. On pourrait parler d'existence d'un milieu.

Exemple 1.35.
1. Soit $(A_1), \ldots, (A_2)$, $\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{1}{2}$. Alors A est le milieu de A_1A_2 $\frac{1}{2}\overrightarrow{AA_1} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AA_2} = 0$.

2. $A_1, A_2, A_3, \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \frac{1}{3}$. On obtient le centre de gravité d'un triangle.

Définition 1.36 (Coordonnée barycentrique)**.** $(\alpha_0, \cdots, \alpha_n)$ est appelé coordonnée barycentrique de M dans le repère $A_0, \cdots, A_n$.

Exemple 1.37. $\mathcal{E}$ = droite, $\mathcal{E} = \langle A, B\rangle$, M le milieu de AB. Les coordonnées barycentriques de M sont $\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$

Notation 1.38. $M = \sum \alpha_j A_j$. Il **faut** que $\sum \alpha_j = 1$. On peut écrire $M = \frac{A}{2} + \frac{B}{2}$ mais pas $M = A + B$.

Proposition 1.39. Soit $(A_0, \cdots, A_n)$ un repère affine de $\mathcal{E}$. Alors pour tout $M \in \mathcal{E}$, il existe une unique famille $(\alpha_0, \cdots, \alpha_n)$ telle que

$$\begin{cases} \sum_{j=0}^n \alpha_j = 1 \\ \sum_{j=0}^n \alpha_j \overrightarrow{MA_j} = 0 \end{cases}.$$

Démonstration. On note $\left(\star \coloneqq \sum_{j=0}^n \alpha_j \overrightarrow{MA_j} = 0\right)$
Existence: Les vecteurs $\overrightarrow{MA_j}$ sont linéairement indépendants car il y en a $n+1$ et $\dim E = n$. On peut trouver $\alpha_0, \cdots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ non tous nuls tels que $\sum \alpha_j \overrightarrow{MA_j} = 0$. On montre par l'absurde que $\sum_{j=0}^n \alpha_j \neq 0$. Supposons $\sum \alpha_j = 0$ Par $\star$ et la relation de Chasles,

$$\sum_{j=0}^n \alpha_j \left(\overrightarrow{MA_0} + \overrightarrow{A_0A_j}\right) = 0 \Leftrightarrow \sum_{j=0}^n \alpha_j \overrightarrow{MA_0} + \sum_{j=1}^n \alpha_j \overrightarrow{A_0A_j} = 0.$$

Or, $\sum_{j=0}^n \alpha_j = 0$. D'où $\sum_{j=1}^n \alpha_j \overrightarrow{A_0A_j} = 0$.
Comme $\left\{\overrightarrow{A_0A_1}, \ldots, \overrightarrow{A_0A_n}\right\}$ est une base de E, on déduit que $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$. On obtient aussi que $\alpha_0 = 0$ par $\sum_{j=0}^n \alpha_j = 0$. On a donc une contradiction.
Ainsi, on peut défnir

$$\beta_j = \frac{\alpha_j}{\sum_{i=0}^n \alpha_i}.$$

et on a, $\sum_{j=0}^n \beta_j = 1$ et $\sum_{j=0}^n \beta_j \overrightarrow{MA_j} = 0$.
Unicité: Par $(\star)$, on a

$$\sum_{j=0}^n \alpha_j \left(\overrightarrow{MA_0} + \overrightarrow{A_0A_j}\right) = 0 \Leftrightarrow \sum_{j=0}^n \alpha_j \overrightarrow{MA_0} + \sum_{j=1}^n \overrightarrow{A_0A_j} \Leftrightarrow \overrightarrow{A_0M} = \sum_{j=1}^n \alpha_j \overrightarrow{A_0A_j}$$

Comme $\left\{\overrightarrow{A_0A_1}, \cdots, \overrightarrow{A_0A_n}\right\}$ est une base de E, les coefficients $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ sont uniquement déterminés par $\overrightarrow{A_0M}$. Comme $\sum_{j=1}^n \alpha_j = 1$, α_0 est également uniquement determiné Si $\sum \alpha_j \overrightarrow{MA_j} = 0$, $\sum \gamma_j \overrightarrow{MA_j} = 0$. Alors

$$\sum(\alpha_j - \gamma_j)\overrightarrow{MA_j} = 0 \Leftrightarrow \sum(\alpha_j - \gamma_j)\left(\overrightarrow{MA_0} + \overrightarrow{A_0A_j}\right) = 0 \Leftrightarrow \sum_{j=1}^n (\alpha_j - \gamma_j)\overrightarrow{A_0A_j} = 0 \Rightarrow \alpha_j = \gamma_j \forall j.$$

□

2. Applications affines.

Définition 2.1 (Applications affines)**.** Soit $(\mathcal{E}, E), (\mathcal{F}, F)$ deux espaces affines. $\varphi : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ est une application affine s'il existe $O \in \mathcal{E}$ et $f : E \to F$ une application linéaire tels que pour tout $M \in \mathcal{E}$, $\overrightarrow{\varphi(O)\varphi(M)} = f\left(\overrightarrow{OM}\right)$.

Remarques 2.2.

(1) f ne dépend pas de O. En effet, si O' est un autre point de $\mathcal{E}$,

$$f\left(\overrightarrow{O'M}\right) = f\left(\overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{OM}\right) = f\left(\overrightarrow{O'O}\right) + f\left(\overrightarrow{OM}\right) = \overrightarrow{\varphi(O')\varphi(O)} + \overrightarrow{\varphi(O)\varphi(M)} = \overrightarrow{\varphi(O')\varphi(M)}.$$

(2) On a toujours $f\left(\overrightarrow{AB}\right) = \overrightarrow{\varphi(A)\varphi(B)}$. On va noter $\vec{\varphi} = f$ et donc $\vec{\varphi}\left(\overrightarrow{AB}\right) = \overrightarrow{\varphi(A)\varphi(B)}$. $\vec{\varphi}$ est l'application linéaire associée à φ.

Exemples 2.3.
1. $\varphi(M) = O\ \forall M \in \mathcal{E}$. $\vec{\varphi}\left(\overrightarrow{MM'}\right) = \overrightarrow{\varphi(M)\varphi(M')} = 0$ Donc $\vec{\varphi} = 0$ et φ est une application affine.
2. Soit E, F deux espaces vectoriels avec leur structure affine naturelle ($\overrightarrow{uv} = v - u$). Soit $\varphi : E \to F$ affine. On a $\varphi(u) - \varphi(0) = \overrightarrow{\varphi(0)\varphi(u)} = \vec{\varphi}\left(\overrightarrow{ou}\right) = \vec{\varphi}(u) \Leftrightarrow \varphi(u) = \varphi(0) + \vec{\varphi}(u)$. Toutes applications affines $\varphi : E \to F$ s'écrivent donc $\varphi(u) = v_0 + f(u)$ où $v_0 \in F$ est fixé et $f : E \to F$ linéaire.
3. Les applications affines $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sont les $x \mapsto ax + b$.

Définition 2.4 (Translations)**.** Soit $\varphi : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$. $\varphi(M) = M_{\in\mathcal{E}} + u_{\in E}$. φ est la translation de vecteur u. On a $\overrightarrow{\varphi(A)\varphi(B)} = \overrightarrow{AB}$. L'application linéaire associée est id_E. On a $\overrightarrow{A\varphi(A)} = \overrightarrow{A(A+u)} = u$, $\overrightarrow{B\varphi(B)} = \overrightarrow{B(B+u)} = u$.

Proposition 2.5. L'image d'un sous-espace affine par une application affine est un sous-espace affine

Démonstration. Soit $\varphi : \mathcal{E} \to \mathcal{E}'$ une application affine, $\mathcal{F} \subset \mathcal{E}$ un sous-espace affine. On prend $A \in \mathcal{F}$ et on note $F' = \vec{\varphi}(F)$. (F' est un sous-espace vectoriel de E'). On veut montrer que $\varphi(F)$ est un sous-espace affine passant par $\varphi(A)$ et dirigé par F'. On a

$$M' \in \varphi(\mathcal{F}) \Leftrightarrow M' = \varphi(M), M \in \mathcal{F}$$
$$\text{et } \overrightarrow{A'M'} = \overrightarrow{\varphi(A)\varphi(M)} = \vec{\varphi}\left(\overrightarrow{AM}\right) \in \vec{\varphi}(F).$$

On vient de voir que

$$M' i\varphi(\mathcal{F}) \Leftrightarrow \overrightarrow{A'M'} \in F'$$

donc $\varphi(F)$ est un sous-espace affine de $\mathcal{E}'$ dirigé par F'. □

Corollaire 2.6. Une application affine envoie trois points alignés sur 3 points alignés.

Proposition 2.7. L'image inverse d'un sous-espace affine par une application affine est un sous-espace affine ou un ensemble vide.

Démonstration. Exercice. □

2.1. Effet sur les barycentres.

Proposition 2.8. Soit $\varphi : \mathcal{E} \to \mathcal{E}'$ affine. L'image du barycentre d'un système de points pondérés par φ est le barycentre $(\varphi(A_1), \alpha_1), \cdots, (\varphi(A_r), \alpha_r)$.

Démonstration. Soit A le barycentre de $(\varphi(A_1), \alpha_1), \cdots, (\varphi(A_r), \alpha_r)$. Alors $\sum_{j=1}^{r} \alpha_j \overrightarrow{AA_j} = 0$ donc $\vec{\varphi}\left(\sum_{j=1}^{r} \alpha_j \overrightarrow{AA_j}\right) = 0$. Comme $\vec{\varphi}$ est linéaire, on a $\sum_{j=1}^{r} \alpha_j \vec{\varphi}\left(\overrightarrow{AA_j}\right) = 0$ donc $\sum_{j=1}^{r} \alpha_j \overrightarrow{\varphi(A)\varphi(A_j)} = 0$. Cela veut dire que $\varphi(A)$ est le barycentre de $(\varphi(A_1), \alpha_1), \cdots, (\varphi(A_r), \alpha_r)$. □

Proposition 2.9. Soit $\varphi : \mathcal{E} \to \mathcal{E}'$ une application qui vérifie

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall A, B \in \mathcal{E}, \varphi(\alpha A + (1-\alpha)B) = \alpha\varphi(A) + (1-\alpha)\varphi(B).$$

Alors φ est affine.

Démonstration. On fixe $O \in \mathcal{E}, O' = \varphi(O)$ et on défnit $f : E \to E'$; $u = \overrightarrow{OM} \mapsto \overrightarrow{O'M'}$ où $M' = \varphi(M)$. Il reste à montrer que f est linéaire. On a $\forall \alpha \in \mathbb{R}, M = \alpha A + (1-\alpha)B$ on a

$$M' = \varphi(M) = \alpha\varphi(A) + (1-\alpha)\varphi(B) = \alpha A' + (1-\alpha)B'$$

Par défnition de f, on a

$$f\left(\alpha\overrightarrow{OA} + (1-\alpha)\overrightarrow{OB}\right) = f\left(\overrightarrow{OM}\right) = \overrightarrow{O'M'} = \alpha\overrightarrow{O'A'} + (1-\alpha)\overrightarrow{O'B'}.$$

(1) On prend $A = M, B = O$ et $f\left(\alpha\overrightarrow{OM}\right) = \alpha\overrightarrow{O'M'} = \alpha f\left(\overrightarrow{OM}\right)$.

(2) On prend $u = \overrightarrow{OA}, v = \overrightarrow{OB}, f(u+v) = f\left(2\frac{u+v}{2}\right) = f\left(2\overrightarrow{OM}\right) = 2f\left(\overrightarrow{OM}\right)$
Mais $f\left(\overrightarrow{OM}\right) = \frac{1}{2}\overrightarrow{O'A'} + \frac{1}{2}\overrightarrow{O'B'}$ donc

$$f(u+v) = \overrightarrow{O'A'} + \overrightarrow{O'B'} = f\left(\overrightarrow{OA}\right) + f\left(\overrightarrow{OB}\right) = f(u) + f(v)$$

On a montré que f est linéaire

□

2.2. Transformations affines.

Définition 2.10 (Transformation affine)**.** Une transformation affine de $\mathcal{E}$ est une application affine de $\mathcal{E}$ dans lui même qui est bijective.

Proposition 2.11. Soit $\varphi : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ une application affine. φ est bijective si et suelement si $\vec{\varphi}$ l'est.

Démonstration. On suppose φ bijective. Si $u \in \ker(\vec{\varphi})$, $u = \overrightarrow{AB}$ alors $\overrightarrow{\varphi(A)\varphi(B)} = \vec{\varphi}\left(\overrightarrow{AB}\right) = 0$ donc $\varphi(A) = \varphi(B) \underset{\varphi \text{ inj}}{\Rightarrow} A = B \Rightarrow u = 0$ donc $\vec{\varphi}$ est injective. IL MANQUE UN BOUT on a $v = \overrightarrow{\varphi(A)\varphi(M)} = \vec{\varphi}\left(\overrightarrow{AM} \in \text{Im}\left(\vec{\varphi}\right)\right)$. Donc $\vec{\varphi}$ est surjective.
On suppose $\vec{\varphi}$ bijective. Si $\varphi(A) = \varphi(B)$ alors $\vec{\varphi}\left(\overrightarrow{AB}\right) = \overrightarrow{\varphi(A)\varphi(B)} = 0$ donc $\overrightarrow{AB} = 0 \Rightarrow A = B$ donc φ est injective.
Soit $M' \in \mathcal{F}, A \in \mathcal{E}, u \in E$. $\overrightarrow{\varphi(u)} \underset{\vec{\varphi} \text{ inj}}{=} \overrightarrow{\varphi(A)M'} \in F$. On écrit $u = \overrightarrow{AM}, M \in \mathcal{E}$ Alors $\overrightarrow{\varphi(A)\varphi(B)} = \vec{\varphi}\left(\overrightarrow{AM}\right) = \overrightarrow{\varphi(A)M'}$ donc $\varphi(M) = M'$ □

Proposition 2.12. Soit $\varphi : \mathcal{E} \to \mathcal{F}, \psi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ des applications affines. Alors $\psi \circ \varphi : \mathcal{E} \to \mathcal{G}$ est affine et l'application linéaire associée est $\overrightarrow{\psi \circ \varphi} = \vec{\psi} \circ \vec{\varphi}$.

Démonstration. $\forall A, B \in \mathcal{E}, \overrightarrow{\psi \circ \varphi(A)\psi \circ \varphi(B)} = \vec{\psi}\left(\overrightarrow{\varphi(A)\varphi(B)}\right) = \vec{\psi}\left(\vec{\varphi}\left(\overrightarrow{AB}\right)\right) = \vec{\psi} \circ \vec{\varphi}\left(\overrightarrow{AB}\right)$

□

3. Points fixes.

Notation 3.1. Soit $\varphi : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ on note $\mathrm{Fix}(\varphi)$ l'ensemble des points fixés par φ

$$\mathrm{Fix}(\varphi) = \{M \in \mathcal{E} \mid \varphi(M) = M\}.$$

Proposition 3.2. Soit $\mathcal{E}$ de dimension finie, φ une transformation affine de $\mathcal{E}$. φ admet un unique point fixe si et seulement si $\ker(\vec{\varphi} - \mathrm{id}_E) = 0$.

Démonstration. Soit $u \in \ker(\vec{\varphi} - \mathrm{id}_E)$, $u = \overrightarrow{OM}, M \in \mathcal{E}$. Alors

$$\overrightarrow{\varphi\left(\overrightarrow{OM}\right)} - \overrightarrow{OM} = 0 \Rightarrow \vec{\varphi}\left(\overrightarrow{OM}\right) = \overrightarrow{\varphi(O)\varphi(M)} = \overrightarrow{OM}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{O\varphi(M)} = \overrightarrow{OM} \Rightarrow \varphi(M) = M \Rightarrow M \in \mathrm{Fix}(\varphi) = \{O\} \Rightarrow M = O \Rightarrow u = 0.$$

□

Proposition 3.3. Soit $\varphi : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ une transformation affine de $\mathcal{E}$. Si $\vec{\varphi} - \mathrm{id}_E$ est surjective alors $\mathrm{Card}(\mathrm{Fix}(\varphi)) = 1$.

Démonstration.
unicité: $\varphi(A) = A, \varphi(B) = B \ \Rightarrow \vec{\varphi}\left(\overrightarrow{AB}\right) = \overrightarrow{\varphi(A)\varphi(B)} = \overrightarrow{AB} \Rightarrow \overrightarrow{AB} \in \ker(\vec{\varphi} - \mathrm{id}_E) \Rightarrow \overrightarrow{AB} = 0 \Rightarrow A = B$
existence : On cherche M tel que $\varphi(M) = M$ on fixe $0 \in \mathcal{E}$, $O' = \varphi(O)$ Alors

$$\varphi(M) = M \Leftrightarrow \overrightarrow{\varphi(O)M} = \vec{\varphi}\left(\overrightarrow{OM}\right) \Leftrightarrow \overrightarrow{\varphi(O)O} + \overrightarrow{OM} = \vec{\varphi}\left(\overrightarrow{OM}\right) \Leftrightarrow (\vec{\varphi} - \mathrm{id}_E)\left(\overrightarrow{OM}\right) = \overrightarrow{\varphi(O)O} \in E$$

Il est possible de trouver un tel M car $\vec{\varphi} - \mathrm{id}_E$ est surjective. □

Corollaire 3.4. Si $\dim \mathcal{E} < +\infty$ alors les assertions suivantes sont équivalentes :
(1) $\mathrm{Card}(\mathrm{Fix}(\varphi)) = 1$,
(2) $\ker(\vec{\varphi} - \mathrm{id}_E) = O$.

Démonstration. $f : E \to E$ dim non infinie:f inj $\Leftrightarrow$ f surj $\Leftrightarrow$ f bij. □

Définition 3.5 (Homothétie)**.** Une *homothétie* de centre O et de rapport $\lambda \in \mathbb{R}$ est une application affine $\mathcal{E} \to \mathcal{E}$ qui vérifie $0 \mapsto 0$ et $\overrightarrow{OM'} = \lambda\overrightarrow{OM}$. Elle est notée $h(0, \lambda)$.

Remarque 3.6. L'application linéaire associée à $h(0, \lambda)$ est donnée par $u \in E \mapsto \lambda u$.

Proposition 3.7. Soit $(\mathcal{E}, E)$ un espace affine, $A, B \in \mathcal{E}$ tels que $A \neq B$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, On pose $\varphi = h(B, \mu) \circ h(A, \lambda)$.
(1) Si $\lambda\mu \neq 1$ alors φ est une homothétie de rapport $\lambda\mu$,
(2) Si $\lambda\mu = 1$ alors φ est une translation de vecteur $(1 - \mu)\overrightarrow{AB}$.

Démonstration. On a vu que φ est une application affine dont l'application linéaire associée est donnée par $\vec{\varphi} = \overrightarrow{h(B, \mu)} \circ \overrightarrow{h(A, \lambda)}$.

$$\vec{\varphi}(u) = \overrightarrow{h(B, \mu)}(\lambda u) = \lambda\mu u.$$

(1) $\lambda\mu \neq 1$: On a $\vec{\varphi} - \mathrm{id}_E = \underbrace{(\lambda\mu - 1)}_{\neq 0}\mathrm{id}_E$ est bijective.
D'après la Proposition 3.3, φ admet un unique point fixe que l'on note O. $O \xmapsto{h(A,\lambda)} O' \xmapsto{h(B,\mu)} O$.
On a $\overrightarrow{AO'} = \lambda\overrightarrow{AO}$, et $\overrightarrow{BO} = \mu\overrightarrow{BO'}$. Par Chasles,

$$\overrightarrow{BO} = \mu\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AO'}\right) = \mu\left(\overrightarrow{BA}\right) + \lambda\mu\overrightarrow{AO} \Leftrightarrow \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AO} = \mu\overrightarrow{BA} + \lambda\mu\overrightarrow{AO}$$

$$\Leftrightarrow (1-\lambda\mu)\overrightarrow{AO} = (\mu-1)\overrightarrow{BA} \Leftrightarrow \overrightarrow{AO} = \frac{\mu-1}{1-\mu\lambda}\overrightarrow{BA}.$$

Ceci détermine l'unique $O \in AB$. Ainsi, $\varphi = h(O, \lambda\mu)$.

(2) $\lambda\mu = 1$. Voir dessin tel. φ est une translation de vecteur $u = \overrightarrow{A\varphi(A)}$. Il reste à voir que $u \in \mathrm{Vect}\left(\overrightarrow{AB}\right)$. On a $A \overset{h(A,\lambda)}{\longmapsto} A \overset{h(B,\mu)}{\longmapsto} \varphi(A)$. On a $\overrightarrow{B\varphi(A)} = \mu\overrightarrow{BA}$.
$\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{A\varphi(A)} = \mu\overrightarrow{BA} \Leftrightarrow \overrightarrow{A\varphi(A)} = (\mu-1)\overrightarrow{BA}$. $\overrightarrow{A\varphi(A)} \in \mathrm{Vect}\left(\overrightarrow{AB}\right)$.

□

Proposition 3.8. Soit $A, B, C \in \mathcal{E}$ des points alignés, $\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}$. On pose $\varphi = h(c,\nu) \circ h(B,\mu) \circ h(A,\lambda)$

(1) Si $\lambda\mu\nu \neq 1$ alors $\varphi = h(O, \nu\mu\lambda)$, $O \in (AB)$,

(2) Si $\lambda\mu\nu = 1$ alors φ est une translation t_u avec $u \in \mathrm{Vect}\left(\overrightarrow{AB}\right)$.

Démonstration. On a $\vec{\varphi}(u) = (\lambda\mu\nu)u$

(1) On a $\vec{\varphi} - \mathrm{id}_E = (\lambda\mu\nu - 1)\,\mathrm{id}_E$ bijective donc φ admet un unique point fixe que l'on note O. $O \overset{h(A,\lambda)}{\longmapsto} O' \overset{h(B,\mu)}{\longmapsto} O'' \overset{h(C,\nu)}{\longmapsto} O$. On a $\overrightarrow{AO'} = \lambda\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{BO''} = \mu\overrightarrow{BO'}, \overrightarrow{CO} = \nu\overrightarrow{CO''}$. Par la relation de chasles:

$$\overrightarrow{CO} = \nu\left(\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BO''}\right) = \nu\overrightarrow{CB} + \mu\nu\overrightarrow{BO'} = \nu\overrightarrow{CB} + \mu\nu\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AO'}\right)$$

$$\text{On a aussi } \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AO} = \nu\overrightarrow{CB} + \mu\nu\overrightarrow{BA} + \lambda\mu\nu\overrightarrow{AO}$$

$$\Leftrightarrow \mu\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CB} + \mu\nu\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} \Rightarrow \overrightarrow{AO} \in \mathrm{Vect}\left(\overrightarrow{AB}\right) \Rightarrow O \in AB.$$

(2) $\lambda\mu\nu = 1$. $\vec{\varphi} = \mathrm{id}_E$ donc $\varphi = t_u$ il reste à voir que $u \in \mathrm{Vect}\left(\overrightarrow{AB}\right)$ (exercice).

□

Définition 3.9. Soit trois points A, B, C alignés. Le nombre $\lambda = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$ est défini par $\overrightarrow{AB} = \lambda\overrightarrow{AX}$.

Théorème 3.10 (Théorème de Thalès)**.** Soit $\mathcal{E}$ un plan affine, $d \mathbin{/\!/} d' \mathbin{/\!/} d''$ trois droites parallèles et $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2$ deux droites non parallèles à d. Soit $A_i = \mathcal{D}_i \cap d, A_i{}' = \mathcal{D}_i \cap d'$, et $A_i{}'' = \mathcal{D}_i \cap d''$. Alors

$$\frac{\overline{A_1A_1{}'}}{\overline{A_1A_1{}''}} = \frac{\overline{A_2A_2{}'}}{\overline{A_2A_2{}''}}.$$

Réciproquement, si $\mathcal{B} \in \mathcal{D}_1$ vérifie $\frac{\overline{A_1A_1{}'}}{\overline{A_1B}} = \frac{\overline{A_2A_2{}'}}{\overline{A_2A_2{}''}}$ alors $B = A_1$.

Démonstration.

□

Remarque 3.11 (Rappel)**.** $h(O,\alpha) : \mathcal{E} \to E\,;\ M \mapsto M'$ tel que $\overrightarrow{OM'} = \alpha\overrightarrow{OM}$.

Théorème 3.12 (Théorème de Ménélaüs)**.** Soit A, B, C trois points affinement indépendant dans $\mathcal{E}$, $M \in (BC) \setminus \{B, C\}, N \in (AC) \setminus \{A, C\}, P \in (AB) \setminus \{A, B\}$. Alors M, N et P sont alignés si et seulement si $\frac{\overline{MB}}{\overline{MC}} \cdot \frac{\overline{NC}}{\overline{NA}} \cdot \frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = 1$.

Démonstration. Soit $\varphi = h\left(P, \overline{\overline{\frac{PA}{PB}}}\right) \circ h\left(M, \overline{\overline{\frac{MB}{MC}}}\right) \circ h\left(N, \overline{\overline{\frac{NC}{NA}}}\right)$. φ est une application affine vérifiant:

- $\varphi(A) = A$,
- $\forall u \in E, \vec{\varphi}(u) = \lambda u$ avec $\lambda = \overline{\overline{\frac{MB}{MC}}} \cdot \overline{\overline{\frac{NC}{NA}}} \cdot \overline{\overline{\frac{PA}{PB}}}$.

Ainsi, φ est une homothétie de centre A et de rapport λ, *i.e*, $\varphi = h(A, \lambda)$.

- $\Rightarrow$ Supposons M, N, P alignés.
  Comme $A \notin (MN)$, car sinon $A \in (MNP) \Rightarrow B \in (MNP) \Rightarrow C \in (MNP) \Rightarrow A, B, C$ sont alignés. Donc φ n'est pas une homothétie de centre (MN) donc par la Proposition 3.8, on a nécessairement $\lambda = 1$.
- $\Leftarrow$ Supposons $\lambda = 1$. Alors
  $$\varphi = h\left(P, \overline{\overline{\frac{PA}{PB}}}\right) \circ h\left(M, \overline{\overline{\frac{MB}{MC}}}\right) \circ h\left(N, \overline{\overline{\frac{NC}{NA}}}\right) = \mathrm{id}_{\mathcal{E}} \Leftrightarrow h\left(P, \overline{\overline{\frac{PA}{PB}}}\right) \circ h\left(M, \overline{\overline{\frac{MB}{MC}}}\right) = h\left(N, \overline{\overline{\frac{NA}{NC}}}\right).$$
  Or $\overline{\overline{\frac{PA}{PB}}} \cdot \overline{\overline{\frac{MB}{MC}}} \neq 1$ car $\overline{\overline{\frac{PA}{PB}}} \cdot \overline{\overline{\frac{MB}{MC}}} \cdot \overline{\overline{\frac{NC}{NA}}} = 1$ or $\overline{\overline{\frac{NC}{NA}}} \neq 1$ car $A \neq C$ par hypothèse.
  Donc d'après la Proposition 3.7, $h\left(P, \overline{\overline{\frac{PA}{PB}}}\right) \circ h\left(M, \overline{\overline{\frac{MB}{MC}}}\right)$ est une homothétie dont le centre est sur la droite MP, donc $N \in (MP)$.

$\square$

Remarque 3.13. En fonction du signe de $\overline{\overline{\frac{PA}{PB}}}$, on sait si P est en dehors du segment $[AB]$.

Remarque 3.14. Regarder le theoreme de ceva pour le cc.

Théorème 3.15 (Théorème de Desargues)**.** Soit $\mathcal{E}$ un espace affine, $[ABC]$, $[A'B'C']$ deux triangles dans $\mathcal{E}$ tels que :
- Les droites $(AA'), (BB'), (C, C')$ se coupent en un point O,
- $(AB) \cap (A'B') = \{P\}$, $(BC) \cap (B'C') = \{M\}$, et $(AC) \cap (A'C') = \{N\}$,

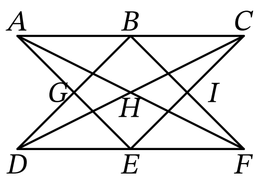
Alors M, N et P sont alignés.

Démonstration. On utilise le Théorème de Ménélaüs :

- Pour $[OBC]$ et $B'C'$ $(a) := \left(\overline{\overline{\frac{MB}{MC}}} \cdot \overline{\overline{\frac{CC'}{C'O}}} \cdot \overline{\overline{\frac{B'O}{B'B}}} = 1\right)$.
- Pour $[OCA]$ et $C'A'$ $(b) := \left(\overline{\overline{\frac{NC}{NA}}} \cdot \overline{\overline{\frac{A'A}{A'O}}} \cdot \overline{\overline{\frac{C'O}{C'C}}} = 1\right)$.
- Pour $[OAB]$ et $A'B'$ $(c) := \left(\overline{\overline{\frac{PA}{PB}}} \cdot \overline{\overline{\frac{A'O}{A'A}}} \cdot \overline{\overline{\frac{B'B}{B'O}}} = 1\right)$.

En mulitpliant $(a), (b)$, et (c), on obtient: $\overline{\overline{\frac{MB}{MC}}} \cdot \overline{\overline{\frac{NC}{NA}}} \cdot \overline{\overline{\frac{PA}{PB}}} = 1$ donc par le Théorème de Ménélaüs, M, N et P sont alignés. $\square$

Théorème 3.16 (Théorème de Pappus)**.** SoiT $\mathcal{E}$ un espace affine de dimension 2, A, B, et C trois points alignés et D, E, et F trois autres points alignés. $(AE) \cap (BD) = \{G\}$, $(AF) \cap (DC) = \{H\}$, et $(BF) \cap (CE) = \{I\}$. Alors G, H et I sont alignés.



Démonstration. On considère le repère affine $\{A, D, I\}$. Les coordonnées barycentriques des points $A, B, C, D, E, F, G, H, I$ sont : $A = (1,0,0), B = (a_1, b_1, c_1), C = (a_2, b_2, c_2), D = (0,1,0), E = (a_3, b_3, c_3), F = (a_4, b_4, c_4), G = (a_5, b_5, c_5), H = (a_6, b_6, c_6), I = (0,0,1)$.
A, G, E alignés $\Leftrightarrow \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a_5 & b_5 & c_5 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow b_5c_3 = b_3c_5$.
A, B, C alignés $\Leftrightarrow b_1c_2 = b_2c_1$,
A, H, F alignés $\Leftrightarrow b_6c_4 = b_4c_6$,
D, G, B alignés $\Leftrightarrow a_5c_4 = a_1c_5$
D, H, C alignés $\Leftrightarrow a_2c_6 = a_6c_2$
D, E, F alignés $\Leftrightarrow a_4c_3 = a_3c_4$
I, B, F alignés $\Leftrightarrow a_1b_4 = a_4b_1$
$a_3b_2 = a_2b_3$
En mulitpliant les égalités obtenues on obtient $a = a_1a_2...a_6$, $b = b_1b_2...b_6$, et $c = c_1c_2...c_6$. Donc

$$\frac{a}{a_6}$$

... $a_6b_5 = a_5b_6$ donc G, H, I sont alignés. □

Fin du programme cc1.

4. Espaces vectoriels euclidiens.

Définition 4.1 (Produit scalaire)**.** Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie. Un produit scalaire sur E est une application $f : ExE \to \mathbb{R}$; $(x, y) \mapsto \langle x, y\rangle$ vérifiant :

- la bilinéarité : $\forall x, y, z \in E, \lambda \in \mathbb{R} \langle x + \lambda y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \lambda\langle y, z\rangle$,
- la symétrie : $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$,
- la définition positive : $\forall x \in E$, $\langle x, x\rangle \geq 0$ et $\langle x, x\rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Proposition 4.2. $\langle 0, x\rangle = 0 = \langle x, 0\rangle$.

Démonstration. $0 = y - y, \langle y - y, x\rangle = \langle y, x\rangle - \langle y, x\rangle = 0$. □

Proposition 4.3. Soit $x = (x_1, \cdots, x_n), y = (y_1, \cdots, y_n) \in E$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

$$\langle x, y\rangle = \sum_{j=1}^{n} x_j y_j$$

est un produit scalaire. On l'appelle produit scalaire *canonique* sur $\mathbb{R}^n$.

Démonstration. On vérifie les trois propriétés.

- $\langle x, y + \lambda z\rangle = \sum_{j=1}^{n} x_j(y_j + \lambda z_j) = \sum_{j=1}^{n} x_j y_j + \lambda x_j z_j = \sum x_j y_j + \lambda \sum x_j z_j = \langle x, y\rangle + \lambda\langle x, z\rangle$,
- $\langle x, y\rangle = \sum x_j y_j = \sum y_j x_j = \langle y, x\rangle$,
- $\langle x, x\rangle = \sum x_j^2 \geq 0$, et $\langle x, x\rangle = 0 \Leftrightarrow x_j^2 = 0 \forall j \in \{1, ..., n\} \Leftrightarrow x = 0$.

□

Exercice 1. Montrer que l'application $\langle x, y\rangle = x_1y_1 + 2x_2y_2 + 3x_3y_3 + x_1y_2 + x_2y_1$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$.

Définition 4.4 (Espace euclidien)**.** Un espace vectoriel munit d'un produit scalaire est appelé un *espace vectoriel euclidien*.

4.1. Norme.

Définition 4.5 (Norme)**.** Soit E un espace vectoriel. On appelle *norme* sur E une fonction $\|\cdot\| : E \to \mathbb{R}$ vérifiant:
(1) $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in E, \|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$,
(2) $\forall x \in E, \|x\| = 0 \Rightarrow x = 0$,
(3) $\forall x, y \in E, \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Définition 4.6 (Norme euclidienne)**.** Soit $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace euclidien, $x \in E$. Alors $\|x\| := \sqrt{\langle x, x\rangle}$ est appelé la *norme euclidienne* de x.

Remarque 4.7. $2\langle x, y\rangle = \|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2$. En effet,

$$\begin{aligned}\|x+y\|^2 &= \langle x+y, x+y\rangle = \langle x+y, x\rangle + \langle x+y, y\rangle \\ &= \langle x, x\rangle + \langle y, x\rangle + \langle x, y\rangle + \langle y, y\rangle = \|x\|^2 + 2\langle x, y\rangle + \|y\|^2.\end{aligned}$$

Lemme 4.8 (Inégalité de Cauchy-Schwarz)**.** $\forall x, y \in E$,

$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\|y\|.$$

Avec égalité si et seulement si x, y sont liés.

Démonstration.
Si $y = 0$, ok.
On suppose $y \neq 0$ alors $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, on a $0w \leq \langle x - \lambda y, x - \lambda y\rangle = \|x\|^2 - 2\lambda\langle x, y\rangle + \lambda^2\|y\|^2$ (par la remarque précédente). Le discriminant (simplifié) est ≤ 0 si et seulement si

$$|\langle x, y\rangle|^2 - \|x\|^2\|y\|^2 \leq 0 \Leftrightarrow |\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\|y\|.$$

Alors le discriminant est 0 et il y a donc une racine double λ donc $\|x - \lambda y\| = 0 \Leftrightarrow x = \lambda y$. □

Proposition 4.9. Soit $x, y \in E$, $\lambda \in \mathbb{R}$. La norme euclidienne est une norme avec $\|x + y\| = \|x\| + \|y\|$ si et seulement si il existe $\lambda \geq 0$ tel que $x = \lambda y$ ou $y = \lambda x$.

Démonstration.
- - Soit $\lambda \in \mathbb{R}, x \in E$. $\|\lambda x\| = \sqrt{\langle \lambda x, \lambda x\rangle} = \sqrt{\lambda^2\langle x, x\rangle)} = \lambda\|x\|$.
  - Soit $x \in E$. $\|x\| = 0 \Rightarrow \sqrt{\langle x, x\rangle} = 0 \Rightarrow \langle x, x\rangle = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^n x_i^2 = 0 \Rightarrow x = 0$.
  - Soit $x, y \in E$. Alors $\|x + y\| = \sqrt{\langle x+y, x+y\rangle} = \sqrt{\langle x, x+y\rangle + \langle y, x+y\rangle} = \sqrt{2\langle x, y\rangle + \langle x, x\rangle + \langle y, y\rangle} \leq \sqrt{\langle x, x\rangle + \langle y, y\rangle} \leq \sqrt{\langle x, x\rangle} + \sqrt{\langle y, y\rangle}$.
- - Supposons $\|x + y\| = \|x\| + \|y\|$. TO DO
  - Suppososns $x = \lambda y$. TO DO

□

4.2. Orthogonalité.

Définition 4.10 (Orthogonal)**.** Soit $x, y \in (E, \langle\ ,\ \rangle)$. On dit que x et y sont *orthogonaux*, noté $x \perp y$ si $\langle x, y\rangle = 0$.

Définition 4.11. Soit $A \subset E$ on définit l'ensemble des points orthogonaux à A par

$$A^\perp := \{x \in E \mid \langle a, x\rangle = 0, \forall a \in A\}.$$

Exemples 4.12.
1. $O^\perp = \{0\}^\perp = E$.
2. $E^\perp = 0$ car $x \in E^\perp \Rightarrow x \perp x \Rightarrow \langle x, x\rangle = 0 \Rightarrow x = 0$.

Proposition 4.13. Soit $A \subset (E, \langle\ ,\ \rangle)$. $A^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E.

Démonstration. Soit $x, y \in A^\perp$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Soit $a \in A$.

$$\langle x + \lambda y, a\rangle = \langle x, a\rangle + \lambda\langle y, a\rangle = 0 + \lambda 0 = 0 \Rightarrow x + \lambda y \in A^\perp.$$

□

Exercice 2. $x \perp y \Leftrightarrow \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 \Leftrightarrow \|x+y\|^2 = \|x-y\|^2$.

Proposition 4.14. Soit $u \in E$.
- $\{u\}^\perp = \mathrm{Vect}(u)^\perp$,
- $E = u^\perp \oplus \mathrm{Vect}(u)$,
- Si $u \neq 0$, $\dim \{u\}^\perp = \dim E - 1$.

Démonstration.
- ‣ $\mathrm{Vect}(u)^\perp \subset \{u\}^\perp$.
  ‣ Montrons $\{u\}^\perp \subset \mathrm{Vect}(u)^\perp$.

$$x \in \{u\}^\perp \Rightarrow \langle x, u\rangle = 0 \Rightarrow \forall \lambda \in \mathbb{R}, \langle x, \lambda u\rangle = 0 \Rightarrow \forall y \in \mathrm{Vect}(u), \langle x, y\rangle = 0 \Rightarrow x \in \mathrm{Vect}(u)^\perp.$$

- ‣ Montrons $u^\perp \oplus \mathrm{Vect}(u)$ i.e, $\{u\}^\perp \cap \mathrm{Vect}(u) = 0$. Soit $x \in \{u\}^\perp \cap \mathrm{Vect}(u)$. Alors $\langle x, u\rangle = 0$ et $x = \lambda u, \lambda \in \mathbb{R}$. D'où $\langle \lambda u, u\rangle = 0 \Rightarrow \lambda \|u\|^2 = 0 \Rightarrow x = 0$.
  ‣ Montrons $E \subset \{u\}^\perp + \mathrm{Vect}(u)$. Soit $x \in E$, on écrit $x = x - \lambda u + \lambda u$, $\lambda = \frac{\langle x, u\rangle}{\|u\|^2}$. On a $\langle x - \lambda u, u\rangle = \langle x, u\rangle - \lambda\|u\|^2 = 0$, donc $E \subset \{u\}^\perp + \mathrm{Vect}(u)$.
- Par le point précédent, $\dim E = \dim\{u\}^\perp + \dim \mathrm{Vect}(u)$. Si $u \neq 0$, $\mathrm{Vect}(u)$ est de dimension 1 donc $\dim \{u\}^\perp = \dim E - 1$ et si $u = 0$, alors $\{u\}^\perp = O^\perp = E$. □

Définition 4.15. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ une base de E. On dit que $\mathcal{B}$ est
- *orthogonale* si $\forall i \neq j, \langle e_j, e_k\rangle = 0$,
- *ohrthonormée* si $\langle e_j, e_k\rangle = \begin{cases} 1 \text{ si } j = k \\ 0 \text{ si } j \neq k \end{cases}$.

Remarque 4.16. Si $(e_1, \cdots, e_n)$ est une base orthogonale, $\left(\frac{e_1}{\|e_1\|}, \cdots, \frac{e_n}{\|e_n\|}\right)$ est une base orthonormée.

Exemple 4.17. Dans $(\mathbb{R}^n, \langle, \rangle)$ la base $(e_1, \ldots, e_n)$ est orthonormée .

Théorème 4.18. Sur un espace vectoriel euclidien il existe toujours une base orthonormée.

Démonstration. Il suffit de montrer l'existence d'une base orthogonale. Montrons le par récurrence sur $\dim E$.
Si $\dim E = 1$ toute base est orthogonale puisqu'elle contient qu'un seul vecteur.
Supposons $\dim E = n > 1$ et que tout espace euclidien de dim $n-1$ admet une base orthognale. Soit $x \in E, x \neq 0$. Alors $x^\perp = \mathrm{Vect}(x)^\perp$ est un sous-espace vectoriel de dimension $n-1$ par la Proposition 4.13.
Par l'hypothèse de récurrence, il existe une base orthogonale de $x^\perp$ que l'on note $(e_1, \ldots, e_{n-1})$. La base $(x, e_1, \ldots, e_{n-1})$ est bien orthogonale car $\langle e_j, e_k\rangle = 0$ si $j \neq k$ $\langle x, e_j\rangle = 0$ car $e_j \in x^\perp$. □

Proposition 4.19. Soit $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace euclidien et $F \subset E$ un sous-espace vectoriel de E. Alors
- $E = F \oplus F^\perp$, (et $\dim E = \dim F + \dim F^\perp$),
- $\left(F^\perp\right)^\perp = F$.

Démonstration.

- On a deja vu $F \cap F^{\perp} = \{0\}$ car $\langle x, x\rangle = 0 \Rightarrow x = 0$. Soit $x \in E$. On cherche à ecrire $x = y + z$ avec $y \in F, z \in F^{\perp}$. Soit $\mathcal{B} := (f_1, \dots, f_n)$ une base orthonormée de F. On définit
$$y := \sum_{j=1}^{k} \langle x, e_j\rangle \cdot e_j \in F, \text{et } z := x - y$$
Il suffit de montrer que $z \in F^{\perp}$, i.e, $\forall j \in \{1, \dots, k\}, \langle z, e_j\rangle = 0$. Cela est assuré par la définition de y :
$$\langle x - y, e_l\rangle = \langle x, e_l\rangle - \langle y, e_l\rangle = \langle x, e_l\rangle - \sum_{j=1}^{k} \langle x, e_j\rangle\langle e_j, e_l\rangle = \langle x, e_l\rangle - \langle x, e_l\rangle = 0$$
D'où $x - y \in F^{\perp}$.
Soit $(e_{k+1}, \dots, e_n)$ une base orthonormée de $F^{\perp}$. Alors on vérifie facilement que $(e_1, \cdots, e_k, e_{k+1}, \cdots, e_n)$ est une base orthonormée de E. Par conséquent, $\dim E = \dim F + \dim F^{\perp}$.
- On a pour tout $x \in F$, $y \in F^{\perp}$, $\langle x, y\rangle = 0$. Donc $F \subset \left(F^{\perp}\right)^{\perp}$. Or $\dim \left(F^{\perp}\right)^{\perp} = n - \dim F^{\perp} = n - (n - \dim F) = \dim F$. Par conséquent, $F = \left(F^{\perp}\right)^{\perp}$. $\square$

4.3. Groupe orthogonal.

Définition 4.20 (Orthogonal)**.** Soit $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace euclidien, $f \in \mathcal{L}(\mathcal{E}, \mathcal{E})$ un endomorphisme. On dit que f est *orthogonal* si $\forall x, y \in E, \langle f(x), f(y)\rangle = \langle x, y\rangle$.

Remarque 4.21. Un endomorphisme orthogonal est aussi appelé une *isométrie vectorielle*.

Notation 4.22. On note $\mathcal{O}(E)$ l'ensemble des isométries vectorielles de E.

Proposition 4.23. $(\mathcal{O}(E), \circ)$ est un groupe.

Démonstration.

- $\mathrm{id}_E \in \mathcal{O}(E)$,
- Soit $f, g \in \mathcal{O}(E)$, et $x, y \in E$. $\langle f \circ g(x), f \circ g(y)\rangle = \langle g(x), g(y)\rangle = \langle x, y\rangle$,
- $f \in \mathcal{O}(E) \Rightarrow f^{-}1 \in \mathcal{O}(E)$ Soit $f \in \mathcal{O}(E)$. Alors f est bijective et $\det f = \pm 1$ car par la Proposition 4.26 ${}^tAA = A{}^tA = I_n$. donc $\det\left({}^tAA\right) = 1$ det $\det A = \pm 1$. On vient de montrer que $\forall f \in \mathcal{O}(E)$, f est bijective. De plus, $\forall x, y \in E$,
$$\left\langle f^{-1}(x), f^{-1}(y)\right\rangle = \left\langle f f^{-1}(x), f f^{-1}(y)\right\rangle = \langle x, y\rangle.$$
$\square$

Définition 4.24. $(\mathcal{O}(E), \circ)$ est appelé *sous-groupe orthogonal* de E.

Définition 4.25. Soit $A \in \mathcal{M}_n$ une matrice. On dit que A est *orthogonale* si ${}^tAA = A{}^tA = I_n$.

Proposition 4.26. Soit $f \in \mathcal{L}(E, E)$ un endomorphisme. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :
(1) $f \in \mathcal{O}(E)$,
(2) $\forall x \in E, \|f(x)\| = \|x\|$,
(3) Pour toute base orthonormée $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$ de E, $A = M_{\mathcal{E}}(f)$ est une matrice orthogonale.

Démonstration.

- (1) $\Rightarrow$ (2): Pour tout $x, y \in E$, $\langle f(x), f(y)\rangle = \langle x, y\rangle$ donc en posant $y := x$, $\|f(x)\| = \|x\|$.
- (2) $\Rightarrow$ (1): Soit $x, y \in E$.

$$\|f(x)\|^2 + \|f(y)\|^2 + 2\langle f(x), f(y)\rangle = \|f(x) + f(y)\|^2 = \|f(x+y)\|^2 = \|x+y\|^2$$
$$= \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\langle x, y\rangle = \|f(x)\|^2 + \|f(y)\|^2 + 2\langle x, y\rangle$$

D'où $\langle f(x), f(y)\rangle = \langle x, y\rangle$.

- (1) $\Rightarrow$ (3): Soit $f \in \mathcal{O}(E), (e_1, e_n)$ une base orthonormée de E et $A = \left(a_{jk}\right)$ la matrice de f dans cette base. Alors
$$\left\langle f(e_k), f\left(e_j\right)\right\rangle = \left\langle \sum_{j=1}^{n} a_{jk} e_j, \sum_{i=1}^{n} a_{il} e_i \right\rangle = \sum_{i,j=1}^{n} a_{jk} \cdot a_{il} \cdot \delta_{ij} = \sum_{i=1}^{n} a_{ik} a_{il}.$$
Or l'identité $\sum_{i=1}^{n} a_{ik} a_{il} = \delta_{kl}$

est équivalente à ${}^tAA = A{}^tA = I_n$ donc A est orthogonale.

- (3) $\Rightarrow$ (1): Par le même calcul que précédemment,
$$\left\langle f(e_k), f\left(e_j\right)\right\rangle = \sum_{i,j=1}^{n} a_{jk} \cdot a_{il} \cdot \delta_{ij} = \sum_{i=1}^{n} a_{ik} a_{il} = \delta_{kl} = \langle e_k, e_l\rangle.$$
Or pour tout $x, y \in E$ on peut écrire $x = \sum \alpha_j e_j$, et $y = \sum \beta_j e_j$. Ainsi,
$$\left\langle f(e_k), f\left(e_j\right)\right\rangle = \left\langle \sum \alpha_j f\left(e_j\right), \sum \beta_j f\left(e_j\right)\right\rangle = \sum \alpha_j \beta_j \left\langle f\left(e_j\right), f\left(e_j\right)\right\rangle = \sum \alpha_j \beta_j = \langle x, y\rangle.$$
□

4.4. Isométries directes et indirectes.

Définition 4.27. Soit $f \in \mathcal{O}(E)$. On dit que f est *directe* si $\det(f) > 0$, ou qu'elle est *indirecte* si $\det(f) < 0$.