

# Chapitre 2:

## Séries numériques

### 1. Introduction

**Définition 1.1:** On appelle série de terme général  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite  $(S_n) := \forall n \in \mathbb{N}, S_n = \sum_{k=0}^n u_k = u_0 + \dots + u_n$ . Elle est appelée somme partielle d'ordre  $n$  de la série. La série de terme général  $(u_n)$  sera notée par  $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ .

**Définition 1.2 (Convergence):** On dit que  $S = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$  converge si la suite  $S_n$  converge vers une limite finie et  $\lim S = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$ . Sinon on dit que  $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$  diverge.

**Définition 1.3:** Si la série  $S = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$  est convergente alors le reste  $(R_n)$  est défini par  $R_n = S - S_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$ .

**Proposition 1.1:** Si l'on modifie la valeur d'un nombre fini de  $U_n$  la nature de la série  $\sum_{n=0}^{+\infty} U_n$  est inchangée.

*Démonstration:* On suppose qu'on a deux séries  $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$  et  $\sum_{n=0}^{+\infty} v_n$  tel que  $\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, u_n = v_n$ . On pose pour  $n \geq N$   $S_n - T_n = \sum_{k=0}^{n-1} u_k - v_k$ . La suite est donc stationnaire, elle converge. Par conséquent  $(S_n)$  et  $(T_n)$  sont de même nature.  $\square$

*Remarque:*

Si  $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$  converge et  $\sum_{n=0}^{+\infty} v_n$  diverge alors  $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n + v_n$  diverge.

Si  $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$  converge et  $\sum_{n=0}^{+\infty} v_n$  diverge alors  $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n + v_n$  diverge.

**Proposition 1.2:** si  $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$  converge alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ .

*Démonstration:*  $U_n = S_n - S_{n-1} = S - S = 0$ .  $\square$

**Définition 1.4:** Si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \neq 0$  on dit que la série diverge grossièrement.

**Définition 1.5:** On dit que  $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$  est absolument convergente si  $\sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$  est convergente.

**Proposition 1.3:** Si  $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$  est absolument convergente alors elle est convergente.

*Démonstration:* On montre que  $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$  vérifie le critère de Cauchy.

Soit  $\varepsilon > 0$ . Comme  $\sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$  converge, elle vérifie le critère de Cauchy.

$$\exists N \in \mathbb{N}, \forall p \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, p > n \geq N \Rightarrow \left| \sum_{k=n}^{n+p} u_k \right| \leq \varepsilon.$$

$$\Rightarrow \forall n \leq N, p \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k \right| \underset{\triangle}{\leq} \sum_{k=n+1}^{n+p} |u_k| \leq \varepsilon.$$

i.e  $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$  vérifie le critère de Cauchy.

□

**Définition 1.6:** Une série qui converge mais pas absolument est appelée série semi-convergente.

## 2. Série à termes généraux positifs

Nous allons désormais considérer des séries  $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$  tel que  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq 0$ .

**Proposition 2.1:**  $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$  est convergente si et seulement si la suite des sommes partielles  $(S_n)$  est majorée.

*Démonstration:* On a  $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$ .

$S_{n+1} - S_n = u_{n+1} \geq 0$ . La suite  $(S_n)$  est donc croissante. Par conséquent,  $(S_n)$  est convergente si et seulement si elle est majorée.  $\square$

### 2.1. Comparaison.

**Théorème 2.1.1 ( Comparaison):** Soient  $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$  et  $\sum_{n=0}^{+\infty} v_n$  deux séries à termes positifs tel que  $\forall n \in \mathbb{N}, v_n \geq u_n \geq 0$ .

- \* Si  $\sum_{n=0}^{+\infty} v_n$  converge, alors  $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$  converge et  $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \leq \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$ .
- \* Si  $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$  diverge, alors  $\sum_{n=0}^{+\infty} v_n$  diverge.

*Démonstration:* On pose  $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$  et  $T_n = \sum_{k=0}^n v_k$ . On remarque que  $0 \leq S_n \leq T_n$ .

Alors  $\sum_{n=0}^{+\infty} v_n$  converge  $\Rightarrow (T_n)$  majorée  $\Rightarrow (S_n)$  majorée  $\Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$  converge. En faisant tendre  $n$  vers  $+\infty$ , on obtient  $S \leq T$ .  $\square$

**Théorème 2.1.2 ( Equivalence ):** Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}, (v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  deux suites de nombres positifs telles que  $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$ . Alors:

- \*  $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$  et  $\sum_{n=0}^{+\infty} v_n$  sont de même nature.
- \* En cas de convergence, les restes sont équivalents.
- \* En cas de divergence, les sommes partielles sont équivalentes.

*Démonstration:* Soit  $\varepsilon > 0$

Comme  $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n, \exists N \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow (1 - \varepsilon)v_n \leq u_n \leq (1 + \varepsilon)v_n$

\* Par le théorème de comparaison,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \text{ converge} &\Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} (1 - \varepsilon) v_n \text{ converge} \\
&\Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} v_n \text{ converge} \\
&\Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} (1 + \varepsilon) v_n \text{ converge} \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \text{ converge}
\end{aligned}$$

donc  $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$  et  $\sum_{n=0}^{+\infty} v_n$  sont de meme nature.

\* On suppose que  $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$  converge. On pose  $s_n = \sum_{k=0}^n u_k$  et  $T_n = \sum_{k=0}^n u_k$ .

On a,  $\forall n \geq N$

□

**Théorème 2.1.3** (de domination): Soit  $\sum u_n$  et  $\sum v_n$  deux séries à termes positifs et telles que  $u_n = O_{n \rightarrow +\infty}(v_n)$ .

1. Si la série  $\sum v_n$  converge alors  $\sum u_n$  converge également.
2. Si  $\sum u_n$  diverge, alors  $\sum v_n$  diverge également.

**Théorème 2.1.4** (de négligeabilité): Soit  $\sum u_n$  et  $\sum v_n$  deux séries à termes positifs telles que  $u_n = o_{n \rightarrow +\infty}(v_n)$ .

1. Si  $\sum v_n$  converge, alors  $\sum u_n$  converge également.
2. Si  $\sum u_n$  diverge, alors  $\sum v_n$  diverge également.

## 2.2. Quelques critères.

**Théorème 2.2.1** (Critère de Cauchy):  $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$  est convergente si et seulement si elle vérifie le critère de Cauchy:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall p \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, n \geq N \Rightarrow \left| \sum_{k=n}^{n+p} u_k \right| \leq \varepsilon.$$

*Démonstration:*

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{+\infty} u_n &\Leftrightarrow (S_n) \text{ converge} \\
&\Leftrightarrow (S_n) \text{ est de Cauchy} \\
&\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, (m > n \geq N) \Rightarrow |S_n - S_m| \leq \varepsilon
\end{aligned}$$

Si  $m = n + p$  avec  $p \in \mathbb{N}$  alors  $|S_n - S_m| = \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k \right|$  □

**Théorème 2.2.2** (critère de d'Alembert): Soit  $\sum u_n$  une série à termes positifs strictement à partir d'un certain rang telle que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{u_{n+1}}{u_n} \right) = l \in \mathbb{R}$ .

1. Si  $l < 1$ , alors  $\sum u_n$  converge.
2. Si  $l > 1$ , alors  $\sum u_n$  diverge grossièrement.
3. Si  $l = 1$ , on ne peut pas conclure.

**Théorème 2.2.3** (de Bertrand): Soit  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ .

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$$

converge si et seulement si  $\alpha > 1$  (ou  $\alpha = 1$  et  $\beta > 1$ )

### 3. Série télescopique

**Définition 3.1:** Soit  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite. On appelle série télescopique la série :  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n - a_{n-1}$ .

**Proposition 3.1:** La série  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n - a_{n-1}$  est de même nature que la suite  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . En cas de convergence on a  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n - a_{n-1} = a_n - a_0$ .

*Démonstration:* On pose  $S_n = \sum_{k=1}^n a_k - a_{k-1}$

$$\begin{aligned} S_n &= \cancel{a_1} - a_0 + \cancel{a_2} - \cancel{a_1} + \dots + a_n - \cancel{a_{n-1}} \\ &= a_n - a_0 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} a_n - a_0. \end{aligned}$$

□

**Théorème 3.1** (De Riemann): Soit  $\alpha \in \mathbb{R}$  une suite. La série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$$

converge si et seulement si  $\alpha > 1$ .

*Démonstration:* La série de Riemann est à termes positifs.

$\alpha = 1$  On obtient la série harmonique qui diverge.

$\alpha < 1$ .  $\forall n \in \mathbb{N} \setminus 0$  On a  $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{n^\alpha}$  donc la série  $\sum \frac{1}{n^\alpha}$  est divergente par comparaison.

$\alpha > 1 \forall n \in \mathbb{N} \setminus 0$  on a  $\frac{1}{n^2} \geq \frac{1}{n^\alpha}$  or  $\sum \frac{1}{n^2}$  converge donc  $\sum \frac{1}{n^\alpha}$  converge  
 A  $\in ]1, 2[$  On procède par télescopage avec  $n^\alpha = n^{\alpha-1} - (n+1)^{\alpha-1}$

□

## 4. Séries alternées.

**Théorème 4.1** ( Critère d'Abel ): Soit  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite positive à valeurs réelles décroissante avec  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$  et  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de nombres complexes telle que  $\exists M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, \forall m > n, |b_n + b_{n+1} + \dots + b_m| < M$  alors  $\sum a_n b_n$  converge et  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,

$$\left| \sum_{n+1}^{+\infty} a_n b_n \right| < M a_{n+1}.$$

En particulier si  $b_n = (-1)^n$ , on a  $|b_n + b_{n+1} + \dots + b_m| \leq 1$  donc le critère d'Abel implique le critère spécial des séries alternées.