Algèbre linéaire et bilinéaire

Table des matières

1. Rappels d'algèbre linéaire.

1.1. Sous-espaces vectoriels.

Définition 1.1. Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. On dit que $F \subseteq E$ est un sous-espace vectoriel si
(1) $\forall (x, y) \in F^2, \forall \lambda \in \mathbb{K}, \lambda x + y \in F$,
(2) $0 \in F$.

Proposition 1.2. Soit F, G des sous-espaces vectoriels de E. Alors $F \cap G$ et $F + G$ sont des sous-espaces vectoriels de E.

Définition 1.3. Soit $A \subseteq E$ un sous-ensemble, on peut definir le plus petit sous-espace vectoriel contenant A par : $\mathrm{Vect}(A) = \left\{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i, a_i \in A, \lambda_i \in \mathbb{K}\right\}$.

Remarque 1.4. Si $A = \{v\}, v \in E, v \neq 0$, $\mathrm{Vect}(A) = \mathrm{Vect}(v) = kv$.

Définition 1.5. Soit $F, G \subseteq E$ des sous-espaces vectoriels. On dit que F et G sont en somme directe si $F \cap G = \{0\}$.

1.2. Familles de vecteurs et bases.

Définition 1.6 (Libre). Soit $(x_1, \cdots, x_n) \in E^n, (\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$. On dit que $(x_1, \cdots, x_n)$ est une famille *libre* si

$$\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0$$

Définition 1.7. Une famille infinie est libre si toute sous-famille finie est libre.

Définition 1.8 (Génératrice)**.** Soit $\mathcal{F} = (x_1, \cdots, x_n) \in E^n$. On dit que $\mathcal{F}$ est *génératrice* de E si $\mathrm{Vect}(\mathcal{F}) = E$.

Définition 1.9 (Base)**.** On appelle *base* de E toute famille libre et génératrice de E.

Définition 1.10 (Dimension)**.** On appelle *dimension* de E le cardinal d'une base de E.

Proposition 1.11 (Changement de base)**.** Soit $\mathcal{E} = e_1, \cdots, e_n$ et $\mathcal{F} = f_1, \cdots, f_n$ deux bases de E. Soit $x \in E$. Il existe d'unique $(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$.
On note $[x]_{\mathcal{E}} \coloneqq \begin{pmatrix} x_1 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} \in M_{nx1}(\mathbb{K})$, et $\mathrm{Pass}_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}} = ([f_1]_{\mathcal{E}} \ \cdots \ [f_n]_{\mathcal{E}}) \in M_{nxn}(\mathbb{K})$ On a :

$$[x]_{\mathcal{E}} = \mathrm{Pass}_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}} [x]_{\mathcal{F}}.$$

1.3. Applications linéaires.

Définition 1.12 (Linéaire)**.** Soit $u : E \to F$ une application. On dit que u est *linéaire* si $\forall x, y \in E^2, \forall \lambda \in \mathbb{K}, u(\lambda x + y) = \lambda u(x) + u(y)$.

Notation 1.13. On note $\mathcal{L}(E, F)$ l'espace vectoriel des applications linéaires de E dans F et $\mathcal{L}(E)$ l'espace vectoriel des endomorphismes.

Définition 1.14 (Noyau)**.** Soit E un espace vectoriel, $u \in \mathcal{L}(E)$. On appelle *noyau* de u l'ensemble

$$\ker(u) = \{x \in E |\ u(x) = 0\}.$$

Définition 1.15 (Image)**.** Soit E un espace vectoriel, $u \in \mathcal{L}(E)$. On appelle *image* de u l'ensemble

$$\mathrm{Im}(u) = \{y \in F |\ \exists x \in E, y = u(x)\}.$$

Théorème 1.16 (Théorème du rang)**.** Soit E un espace vectoriel de dimension finie, $u : E \to E$.

$$\dim(E) = \dim(\ker(u)) + \dim(\dim(u)).$$

Démonstration. Notons $p \coloneqq \dim(\ker(u)), n \coloneqq \dim(E)$. Soit $(e_1, \cdots, e_p)$ une base de $\ker(u)$. Par le théorème de la base incomplète, on note $(e_1, \cdots, e_p, (e_{p+1}, \ldots, e_n))$.
Une base de $\mathcal{Im}(u)$ est $\mathrm{Vect}(u(e_1), \cdots, u(e_p), u(e_{p+1}), \cdots, u(e_n)) = \mathrm{Vect}(u(e_{p+1}), \cdots, u(e_n))$. Verifions que $(u(e_{p+1}), \cdots, u(e_n))$ est une famille libre. Soit $(\lambda_{p+1}, \cdots, \lambda_n) \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \lambda_{p+1} u(e_{p+1}) + \ldots + \lambda_n u(e_n) = 0 &\Leftrightarrow u(\lambda_{p+1} e_{p+1} + \ldots + \lambda_n e_n) = 0 \\ &\Leftrightarrow \lambda_{p+1} e_{p+1} + \ldots + \lambda_n e_n \in \ker(u) \\ &\Leftrightarrow \exists (\lambda_1, \lambda_p) \in \mathbb{R}, \lambda_{p+1} e_{p+1} + \ldots + \lambda_n e_n = \lambda_1 e_1 + \ldots \lambda_p e_p \end{aligned}$$

Or $\lambda_1 e_1 + \ldots \lambda_p e_p \neq 0$ car c'est une famille libre. D'où, $\mathrm{Vect}(u(e_{p+1}), \cdots, u(e_n))$ libre. Ainsi, on a $\dim(\mathrm{Vect}(u(e_{p+1}), \cdots, u(e_n))) = \dim(\mathcal{Im}(u)) = n - p = \dim(E) - \dim(\ker(u))$.
On a bien montré, $\dim(\ker(u)) + \mathrm{rg}(u) = \dim(E)$. ☐

Corollaire 1.17. Soit $u : E \to E$ un endomorphisme, $\ker(u) = 0 \underset{1}{\Leftrightarrow} u$ injective $\underset{2}{\Leftrightarrow} u$ surjective.

Démonstration.
(1) $\Rightarrow$ Soit f une application linéaire injective. On a nécessairement $0_E \in \ker(f)$ or f est injective, donc $\forall x \in E, x \neq 0_E \Rightarrow f(x) \neq 0$ d'où $\ker(f) = \{0_E\}$.

$\Leftarrow$ Soit f une application linéaire tel que $\ker(f) = \{0_E\}$. Supposons par absurde f non injective. Alors $\exists u \neq v \in E, f(u) = f(v)$. Donc $f(u - v) = f(u) - f(v) = 0$ impossible car $u \neq v$.

(2) $\Rightarrow$ Supposons f injective. Alors $\ker(f) = \{0\} \Rightarrow \dim(\ker(f)) = 0 \Rightarrow \dim(\mathcal{I}m) = \dim(E) = \dim(F)$ d'où f surjective.

$\Leftarrow$ Supposons f surjective. Alors $\dim(\mathcal{I}m) = \dim(F) \Rightarrow \dim(\ker(f)) = 0$ d'où f injective. $\square$

Théorème 1.18. Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$,$g \in \mathcal{L}(F,G)$.

$$[g \circ f]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}} = [g]_{\mathcal{F}}^{\mathcal{G}}[f]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}}.$$

Corollaire 1.19. Soit $E, \mathcal{E}, \mathcal{F}$ deux bases de E, et $u \in \mathcal{L}(E)$. On note $P = \mathcal{P}\mathrm{ass}_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}} = [\mathrm{id}_E]_{\mathcal{F}}^{\mathcal{E}}$

$$[u]_{\mathcal{F}} = [\mathrm{id}_E]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}}[u]_E[\mathrm{id}_E]_{\mathcal{F}}^{\mathcal{E}} = P^{-1}[u]_{\mathcal{E}}P.$$

Proposition 1.20. Soit A une matrice carrée de la forme $A = \begin{pmatrix} B & D \\ 0 & C \end{pmatrix}$ avec B, C deux matrices carrées. Alors $\det A = \det B \det C$.

2. Sous-espaces stables par un endomorphisme.

Définition 2.1 (Stable). Soit E un espace vectoriel de degré n, $u \in \mathcal{L}(E)$. Un sous-espace vectoriel F de E est dit *stable* par u si $u(F) \subseteq F$.

Définition 2.2 (Valeur propre). Soit $u \in \mathcal{L}(E), \lambda \in \mathbb{K}$. On note $E_\lambda(u) = \ker(u - \lambda\,\mathrm{id}_E)$. λ est appelée *valeur propre* de u si $E_\lambda(u) \neq \{0\}$. Auquel cas $E_\lambda(u)$ est l'espace propre associé. Les $u \in \ker(u - \lambda\,\mathrm{id}_E)$ sont les vecteurs propres.

Proposition 2.3. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Ses espaces propres sont en somme directe.

Démonstration. Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, on montre que $x_1 + \cdots + x_n = 0 \Rightarrow x_i = 0 \forall i \in [1, n]$ où $x_i \in E_{\lambda_i(u)}$ □

Corollaire 2.4. Si $n = \dim E$, u a au plus n valeurs propres et s'il y en a n, $\dim E_{\lambda_i} = 1$.

Définition 2.5 (Diagonalisable). Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On dit que u est diagonalisable si E est la somme directe de ses sous-espaces propres.

Définition 2.6 (Nilpotent). Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On dit que f est *nilplotent* si $\exists r \in \mathbb{N}$ tq $f^{(r)} = 0$.

3. Polynôme caracteristique.

3.1. Rappels sur les polynômes.

Proposition 3.1. Soit P, Q dans $\mathbb{K}[X]$ et D leur PGCD. Alors il existe $(U, V) \in \mathbb{K}[X]^2$ tels que

$$UP + VQ = D.$$

Corollaire 3.2. P, Q sont premiers entre eux ssi $\exists (U, V) \in \mathbb{K}[X]^2$ tels que $UP + VQ = 1$.

Proposition 3.3 (Matrice compagnon). Soit $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ de degré unitaire $a_n = 1$. Soit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots & -a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

Alors $\chi_A = (-1)^n P$. A est appelée la matrice *compagnon* de P.

3.2. Polynôme caractéristique.

Définition 3.4 (Polynôme caractéristique)**.** Soit $u : E \to E$ un endomorphisme, et M une matrice associée à u. On définit son polynôme caractéristique par $\chi_u \coloneqq \det(X \operatorname{id}_E - M)$.

Proposition 3.5. Soit E un espace vectoriel de dimension n, et $u : E \to E$ une application linéaire. Le polynôme caractéristique de u est un polynôme unitaire de la forme

$$\chi_u(X) \coloneqq X^n - \operatorname{Tr}(u)X^{n-1} + \dots + (-1)^n \det(u).$$

Lemme 3.6. Soit M, N deux matrices semblables. Alors $\chi_M = \chi_N$.

Démonstration. Soit $M, N \in \mathcal{M}_n$. Puisque M et N sont semblables, il existe $P \in \mathcal{M}_n$ tel que $M = P^{-1}NP$. Ainsi,

$$\begin{aligned} \chi(M) = \det(X \operatorname{id}_E - M) &= \det(P - 1(X \operatorname{id}_E - N)P) \\ &= \det P^{-1} \det(X \operatorname{id}_E - N) \det P = \det(X \operatorname{id}_E - N). \end{aligned}$$

□

Proposition 3.7. Soit $u : E \to E$ un endomorphisme, et $\lambda \in \mathbb{R}$. λ est une valeur propre de u si et seulement si $\chi_u(\lambda) = 0$.

Proposition 3.8. Soit E un espace vectoriel tel que $\dim E = n$, $u : E \to E$ un endomorphisme. Si u est Nilpotent alors $\chi_u = X^n$.

Démonstration. Soit $\lambda \in \operatorname{Sp}(u)$, $x \in E \setminus \{0\}$ un vecteur propre associé à λ. Alors

$$u(x) = \lambda x \Rightarrow u^n(x) = \lambda^n x.$$

Or $u^n = 0$ donc $\lambda^n = 0 \Rightarrow \lambda = 0$. Ainsi, $\chi_u = X^n$. □

Théorème 3.9. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, $\dim E = n < +\infty$, (λ_i) ses valeurs propres. u est diagonalisable si et seulement si pour tout $\lambda_i \in \operatorname{Sp}(u)$,

$$\chi_u = \prod_{\lambda_i} (X - \lambda_i)^{\dim E_\lambda(u)}.$$

Démonstration.

$\Rightarrow$ Si u est diagonalisable, il existe $\mathcal{B}$ une base de B telle que

$$u = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

où $\lambda_{i \in \{1, \cdots, \# \operatorname{Sp}(u)\}} \in \operatorname{Sp}(u)$ apparaissent $\dim E_{\lambda_i}(u)$ fois chacune. Ainsi, par Lemme 3.6, χ_u est de la forme souhaitée.

$\Leftarrow$ Soit $\chi_u = \prod_{\lambda_i} (X - \lambda_i)^{\dim E_\lambda(u)}$. Alors $n = \deg \chi_u = \sum_{\lambda \in \operatorname{Sp}(u)} \dim E_\lambda(u)$. Donc E est la somme directe des espaces propres de u i.e, u est diagonalisable. □

3.3. Polynôme d'endomorphisme.

Définition 3.10. Soit $u : E \to E$ un endomorphisme, $P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k$. Alors on définit P de u par

$$P(u) \coloneqq \sum a_k u^k \in \mathcal{L}(E).$$

Proposition 3.11. Soit $P, Q \in \mathbb{K}[X]$, et $u : E \to E$ un endomorphisme. Alors
- $(P+Q)(u) = P(u) + Q(u)$,
- $P(u) \circ Q(u) = PQ(u)$,
- si A est semblable à B, alors $P(A) = Q^{-1}P(B)Q$,
- Un polynôme d'une matrice triangulaire supérieure est une matrice triangulaire supérieure.

Proposition 3.12. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P(u) = 0$. Alors pour toute valeur propre de u λ, $P(\lambda) = 0$.

Démonstration. Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$, $x \in E \setminus \{0\}$ un vecteur propre associé à λ. Alors $u^k(x) = \lambda^k x$ par linéarité, donc $P(u)(x) = P(\lambda)x = 0$. Comme $x \neq 0$, on a $P(u) = 0$. □

4. Trigonalisation.

Définition 4.1 (Trigonalisable). Soit $u : E \to E$ un endomorphisme, M une matrice associée à u. On dit que u est *trigonalisable* s'il existe une base $\mathcal{E}$ de E telle que $M_{\mathcal{E}}$ soit triangulaire supérieure.

Théorème 4.2. Soit E un espace vectoriel de dimension finie, $u : E \to E$ un endomorphisme. u est trigonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé sur $\mathbb{K}$.

Démonstration.

$\Rightarrow$ Supposons u trigonalisable. Soit $\mathcal{E}$ une base de E telle que M_u soit triangulaire supérieure. Alors $\chi_u(X) = \left(a_{1,1} - X\right)\cdots\left(a_{n,n} - X\right)$, qui est scindé sur $\mathbb{K}$.

$\Leftarrow$ Supposons χ_u scindé sur $\mathbb{K}$. Montrons par récurrence sur $n \coloneqq \dim E$ que u est trigonalisable. Pour $n = 1$, c'est évident. Supposons le résultat vrai à un rang n. montrons le au rang $n+1$. Comme χ_u est scindé, il existe λ_1 une racine, et e_1 un vecteur propre associé e_1. On complète (e_1) en une base $(\mathcal{E})$ de E et on a $M_u = \begin{pmatrix} \lambda 1 & \star & \cdots & \star \\ 0 & & & \\ \vdots & & N & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$, $N \in \mathcal{M}_n$. Ainsi, $\chi_M = (\lambda_1 - X)\chi_N$, avec χ_N scindé sur $\mathbb{K}$. Par hypothèse de récurrence ca fonctionne on trust □

4.1. Décomposition des noyaux.

Théorème 4.3 (Lemme des noyaux). Soit $u : E \to E$ un endomorphisme et $P_1, \cdots, P_r \in \mathbb{K}[X]$ 2 à 2 premiers entres eux. Soit $P = \Pi_{k=1}^r P_k$. Alors

$$\ker P(u) = \bigoplus_{k=1}^{r} \ker P_k(u).$$

Démonstration.

$\subseteq$ $P_k(u) = 0 \Rightarrow P(u) = 0$.

$\supseteq$ Par récurrence sur $r \geq 2$, $r = 2$, puisque P_1, et P_2 sont premiers entre eux, il existe $Q_1, Q_2 \in \mathbb{K}[X]$ tels que $Q_1P_1 + Q_2P_2 = 1_{\mathbb{K}[X]}$. Soit $x \in \ker P_1(u) \cap \ker P_2(u)$, alors

$$x = Q_1(u) \circ P_1(u)(x) + Q_2(u) \circ P_2(u)(x) = 0$$

Ainsi, $\ker P_1(u) \cap \ker P_2(u) = \{0\}$. On pose $y \coloneqq Q_1(u) \circ P_1(u)(x)$, $z \coloneqq Q_2(u) \circ P_2(u)(x)$ et $x = y + z \in \ker(P)$. On a alors $P_2(u)(y) = (P_2(u) \circ P_1(u) \circ Q_1(u))(x) = Q_1(u) \circ P(u)(x) = 0$,. De même, $P_1(u)(z) = 0$. D'où le résultat vrai au rang 2.
On suppose le résultat vrai au rang r. Notons $Q = P_1 \cdots P_r$. Les polynômes Q et P_{r+1} sont premiers

entre eux donc d'après la cas $r=2$, on a $\ker(P(u)) = \ker(Q(u)) \oplus \ker P_{r+1}(u)$. Ainsi, par récurrence on à bien $\ker P(u) = \bigoplus_{k=1}^{r} \ker P_k(u)$. $\square$

Théorème 4.4. Soit $u : E \to E$ un endomorphisme. u est diagonalisable si et seulement si, il existe $P \in \mathbb{K}[X]$ simplement scindé tel que $P(u) = 0$.

Démonstration.

$\Rightarrow$
$$E = \oplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} \ker(u - \lambda\,\mathrm{id}_E) = \oplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} \ker(X-\lambda)(u)$$
$$= \ker\left(\left(\Pi_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)}(X-\lambda)\right)(u)\right).$$

Par le Lemme des noyaux car $\mathrm{pgcd}(X-\lambda, X-\mu) = 1$ si $\lambda \neq \mu$. Ainsi, $P = \Pi(X-\lambda)$ simplement scindé annule $P(u) = 0$.

$\Leftarrow$ Si $P = \Pi_{k=1}^{r}$ simplement scindé vérifie $P(u) = 0$ alors $E = \ker(P(u)) = \oplus_{k=1}^{r} \ker(u - \lambda_k\,\mathrm{id}_E)$. Donc u est diagonalisable quitte ne pas prendre en compte les E_{λ_k} où $E_{\lambda_k} = \{0\}$. $\square$

Corollaire 4.5. Soit E un espace vectoriel, $u : E \to E$ un endomorphisme diagonalisable, $F \subset E$ stable par u. Alors $u_F \in \mathcal{L}(E)$ est diagonalisable.

Démonstration. $\exists P$ simplement scindé tq $P(u) = 0 \Rightarrow P(u_F) = P(u)_{|_F} = 0$. Ainsi, u est diagonalisable par le Théorème 4.4. $\square$

4.2. Théorème de Cayley-Hamilton.

Notation 4.6. Considérons $u : E \to E$ un endomorphisme. On notera I_u l'ensemble des polynômes annulateurs de u.

Proposition 4.7. Soit $u : E \to E$ un endomorphisme.
(1) $0 \in I_u$,
(2) $\forall P, Q \in I_u, P + Q \in I_u$,
(3) $\forall P \in I_u, \forall Q \in \mathbb{K}[X], PQ \in I_u$.

Démonstration.
- On a bien $0_{\mathbb{K}[X]} = Ou^0 = 0$,
- $(P+Q)(u) = P(u) + Q(u) = 0$,
- En effet, $(PQ)(u) = P(u) \circ Q(u) = 0$. $\square$

Remarque 4.8. I_n contient forcément un polynôme non nul car si $n = \dim E$, la famille $\left(\mathrm{id}_E, u, u^2, \ldots, u^{n^2}\right)$ est liée car $\dim \mathcal{L}(E) = n^2$.

Théorème 4.9 (Théorème de Cayley-Hamilton). Soit E un espace vectoriel de dimension finie, $u : E \to E$ un endomorphisme, Alors $\chi_u(u) = 0$.

Démonstration. Soit $x \in E \setminus \{0\}$. Soit $r > 0$ tel que $\mathcal{F} = \left(x, u(x), \cdots, u^{r-1}(x)\right)$ soit libre.
Alors $u^r(x) \in \mathrm{Vect}\left(x, u(x), \cdots, u^{r-1}(x)\right)$ et il existe par la Remarque 4.8 un polynôme unitaire de degré r tel que $P(u)(x) = 0$. Complétons $\mathcal{F}$ en une base de $\mathcal{E}$. Ainsi dans cette base,
$$u_{\mathcal{E}} = \left(\begin{array}{c|c} A & \star \\ \hline 0 & N \end{array}\right)$$
avec N une matrice carrée et A matrice compagnon du polynôme P. Par la Matrice compagnon, $\chi_{u_{\mathcal{E}}} = (-1)^r P$, donc $\chi_u = (-1)^r \chi_N P$. Ainsi, $\chi_u(u)(x) = (-1)^r \chi_N(u)(P(u)(x)) = \chi_N(u)(0) = 0$. $\square$

5. Polynôme minimal.

Proposition 5.1. Soit $u : E \to E$ un endomorphisme, et $P \in I_u \setminus \{0\}$ de degré minimal. Alors pour tout $S \in I_u$, $P| S$.

Démonstration. La division de S par P nous donne: $S = PQ + R$ $\deg R < \deg P \Rightarrow R = 0$ par minimalité. □

Définition 5.2 (Polynôme minimal)**.** Soit $u : E \to E$ un endomorphisme. On appelle *polynôme minimal* de u, noté μ_u l'unique $P \in I_u \setminus \{0\}$ de degré minimal et de coeff dominant 1.

Remarque 5.3. Le polynôme minimal de u divise le polynôme caractéristique et ils ont les mêmes racines.

$$\chi_u = (-1)^n \prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} (X - \lambda)^{n_\lambda} \Rightarrow \mu_u = \prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} (X - \lambda)^{m_\lambda}$$

avec $1 \leq m_\lambda \leq n_\lambda$. On a u diagonalisable si et seulement si tous les m_λ sont égaux à 1.

Théorème 5.4. Soit $u : E \to E$ un endomorphisme. Alors u est diagonalisable si et seulement si μ_u est simplement scindé.

Démonstration.

$\Rightarrow$ Soit u un endomorphisme diagonalisable. Alors par le Théorème 4.4, $\exists P$ simplement scindé tel que $P(u) = 0$ et $\mu_u \mid P$ donc μ_u simplement scindé.

$\Leftarrow$ Supposons μ_u simplement scindé. Alors par le Théorème 4.4, u est diagonalisable. □

Proposition 5.5. Soit $u : E \to E$ un endomorphisme, $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors, λ est valeur propre si et seulement si $\mu_u(\lambda) = 0$.

Démonstration.

$\Rightarrow$ Par Proposition 3.7, toute valeur propre de u annule le polynôme μ_u.

$\Leftarrow$ On a $\mu_u(\lambda) = 0$ or $\mu_u \mid \chi_u$ donc $\chi_u(\lambda) = 0$ d'où λ valeur propre. □

6. Réduction d'endomorphisme.

6.1. Décomposition de Dunford.

Lemme 6.1. Soit $(u, v) : E \to E$ deux endomorphismes diagonalisables tels que $u \circ v = v \circ u$. Alors il existe une base $\mathcal{E}$ de E telle que $[u]_\mathcal{E}$ et $[v]_\mathcal{E}$ sont diagonales.

Démonstration. Soit $F = E_\lambda(u)$ un espace-propre. Alors F est stable par v. Soit $x \in F$, alors

$$u(v(x)) = v(u(x)) = v(\lambda x) = \lambda v(x).$$

Donc $v(x) \in E_\lambda(u) = F$. On sait alors que $v_F \in \mathcal{L}(\mathcal{F})$ est diagonalisable (car v l'est)$\Rightarrow \exists \mathcal{E}_\lambda$ une base de F faite de vecteurs propres pour v (et pour u!)$\Rightarrow \mathcal{E} = \bigcup_{\lambda \in S_{p(u)}} \mathcal{E}_\lambda$ convient. □

Définition 6.2 (Espace caractéristique)**.** Soit $u : E \to E$ un endomorphisme, λ une valeur propre de f, et m_λ sa multiplicité dans χ_u. On appelle sous-espace propre caractéristique par rapport à u et λ l'espace vectoriel

$$N_\lambda(u) \coloneqq \ker\big((u - \lambda \,\mathrm{id}_E)^{m_\lambda}\big).$$

Proposition 6.3. Soit $u : E \to E$ un endomorphisme de polynôme caractéristique scindé. Alors,

$$E = \bigoplus_{\lambda \in Sp(u)} N_\lambda(u).$$

De plus, $\dim N_\lambda(u)$ est égale à la multiplicité de λ dans χ_u.

Démonstration. Par le Lemme des noyaux on a la décomposition facilement. De plus, on déduit de la décomposition que $\sum_\lambda n_\lambda = \dim E = \sum_\lambda \dim N_\lambda(u)$. Montrons $n_\lambda \geq \dim N_\lambda(u)$. Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$. On a que N_λ est stable par u... TO DO. □

Théorème 6.4 (Décomposition de Dunford (Jordan-Charalley))**.** Soit E un espace de dimension n, $u : E \to E$ un endomorphisme, tel que χ_u scindé. Alors il existe un unique couple $(D, V) \in \mathcal{M}_n$ tel que

- D est diagonalisable et V milpotent,
- D et V commutent,
- $M_u = D + V$.

Démonstration. TO DO □

6.2. Réduction de Jordan.

Proposition 6.5 (Indice)**.** Soit $u : E \to E$ un endomorphisme. Il existe un unique $r \in \mathbb{N}$, appelé *l'indice* de u tel que $\{0\} = \ker(u^0) \subsetneq \ker(u) \subsetneq \ker(u^r) = \ker(u^{r+k}) \forall k \in \mathbb{N}$.

Démonstration. Posons $n_p := \dim \ker(u^p)$. Comme $\ker(u^p) \subseteq \ker(u^{p+1})$. La suite $(n_p)_{p\in\mathbb{N}}$ est croissante à valeur dans $\mathbb{N}$. On peut donc définir $r = \min\{p \in \mathbb{N} \mid n_p = n_{p+1}\}$.
Pour tout $p \geq r$, pour tout $x \in \ker(u^{p+1})$, on a $u^{r+1}(u^{p-r}(x)) = 0$. Donc $u^{p-r} \in \ker(u^{r+1}) = \ker(u^r)$ donc $x \in \ker(u^p)$. D'où $u^p(x) = u^r(u^{p-r}(x)) = 0$ Ainsi, $\ker(u^p) = \ker(u^{p+1})$. □

Théorème 6.6. Soit $u : E \to E$ un endomorphisme tel que χ_u scindé et λ une valeur propre. La multiplicité de λ dans μ_u est donnée par l'indice de $u - \lambda\,\mathrm{id}_E$.

Démonstration. On écrit $\mu_u = (X-\lambda)^m Q$ où λ est la multiplicité cherchée de sorte que Q et $(X-\lambda)^m$ sont premiers entre eux.
Par le Lemme des noyaux, $E = \ker(u - \lambda\,\mathrm{id}_E)^m \oplus \ker(Q(u))$. Pour chaque $k \in \{1, -, n\}$, on pose $Q_k = (X-\lambda)^k Q$. On a $\ker(Q_k(u)) = \ker(u - \lambda\,\mathrm{id}_E) \oplus \ker(Q(u))$.
Par minimalité de μ_u, si $k < m$, on a $\ker(Q_k(u)) \subset E$ donc $\ker(u - \lambda\,\mathrm{id}_E)^k \subset \ker(u - \lambda\,\mathrm{id}_E)^m$ tandis que si $k \geq m$,$\ker(Q_k(u)) = E$, et $\ker(u-v)^k = \ker(u - \lambda\,\mathrm{id}_E)^m$. □

Définition 6.7 (Bloc de Jordan)**.** On appelle bloc de Jordan une matrice $J_k(\lambda) \in \mathcal{M}_k(\mathbb{K})$, $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \lambda \in \mathbb{K}$ définie par

$$J_k(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Définition 6.8. On appelle matrice de Jordan toute matrice de la forme :

$$J = \begin{pmatrix} J_{n_1}(\mu_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_{n_2}(\mu_2) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & J_{n_r}(\mu_r) \end{pmatrix}$$

Théorème 6.9. Soit $u : E \to E$ un endomorphisme nilpotent. Alors il existe une base $\mathcal{E}$ de E telle que

$$[u]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} J_{n_1}(0) & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & J_{n_r}(0) \end{pmatrix}.$$

Théorème 6.10. Soit $u : E \to E$ un endomorphisme tel que χ_u soit scindé, alors il existe une base $\mathcal{E}$ de E telle que :

$$[u]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} J_{n_1}(\lambda_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_{n_2}(\lambda_2) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & J_{n_r}(\lambda_r) \end{pmatrix}.$$

Cette décomposition est unique à permutation de blocs près.

7. Formes bilinéaires.

7.1. Généralités.

Définition 7.1 (Forme bilinéaire). Soit E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, et $\varphi : ExF \to \mathbb{K}$ une application. On dit que φ est une *forme bilinéaire* si

- $\forall x \in E, \forall (y, y') \in F^2, \forall \alpha \in K, \varphi(x, y + \alpha y') = \varphi(x, y) + \alpha\varphi(x, y')$,
- $\forall y \in F, \forall (x, x') \in E^2, \forall \alpha \in \mathbb{K}, \varphi(x + \alpha x', y) = \varphi(x, y) + \alpha\varphi(x', y)$.

Notation 7.2. Soit $\varphi : ExF \to \mathbb{K}$ bilinéaire. On note

- $\lambda_\varphi \coloneqq\ : E \to F^* = \mathcal{L}(F, K)\,;\ x \mapsto \varphi(x, \cdot) \coloneqq y \mapsto \varphi(x, y)$
- $\rho_\varphi \coloneqq\ : E \to F^* = \mathcal{L}(F, K)\,;\ y \mapsto \varphi(\cdot, y) \coloneqq x \mapsto \varphi(x, y)$

Définition 7.3 (Non-dégénéré). Soit $\varphi : ExF \to \mathbb{K}$. On dit que φ est

- non-dégénérée à gauche si $\lambda_\varphi : E \to F^*$ est injective,
- non-dégénérée à droite si $\rho_\varphi : F \to E^*$ est injective,
- non-dégénérée si φ est non dégénérée à gauche et à droite.

Remarque 7.4. Concrétement, φ est non dégénérée à gauche si

$$\forall x \in E, (\varphi(x, y) = 0\ \forall y \in F \Rightarrow x = 0).$$

7.2. Dualité.

Définition 7.5 (Dual). Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. On appelle *dual* de E, noté E^* l'ensemble des formes linéaires de E à valeurs dans $\mathbb{K}$.

Définition 7.6 (Forme coordonnée)**.** Soit E un espace vectoriel de dimension finie n, et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E. Pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, on apppelle *i-ème forme coordonnée* dans la base $\mathcal{B}$, noté e_i^* l'unique forme linéaire telle que :

$$\forall j \in \{1, \dots, n\}, e_i^*(e_j) = \begin{cases} 1 \text{ si } i = j \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}.$$

Proposition 7.7. Soit E un espace vectoriel et $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ une base de E. Alors $\mathcal{B}^* = (e_1^*, \cdots, e_n^*)$ forme une base de E^* et pour toute forme linéaire f in E^*,

$$f = \sum_{i=1}^{n} f(e_i) e_i^*.$$

Démonstration. Il suffit de montrer que c'est une famille libre et génératrice de E^*. □

Définition 7.8. Soit E un espace vectoriel et $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ une base de E. Alors $\mathcal{B}^* = (e_1^*, \cdots, e_n^*)$ est appelée *base duale* de E^*.

Remarque 7.9. De plus, si $\mathcal{F} = (f_1, \cdots, f_n)$ est une base de E, $\left(\mathcal{P}_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}}\right)_{i,j} = e_i^*(f_j)$. On a $\mathcal{P}_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}} = {}^t\mathcal{P}_{\mathcal{E}^*}^{\mathcal{F}^*}$

Définition 7.10 (Bidual)**.** Soit E un espace vectoriel. On appelle *bidual* de E, noté E^{**}, le dual de E^*.

Remarque 7.11. On peut introduire une application naturelle

$$\text{ev} : E \to E^{**} = \mathcal{L}(E^*, \mathbb{K})\ ;\ x \mapsto (\ : E^* \to \mathbb{K}\ ;\ \varphi \mapsto \varphi(x)).$$

Théorème 7.12. ev est bijective.

Démonstration. Soit $x \in E \setminus \{0\}$ Complétons (x) en une base de E. Alors $\text{ev}(x)(x^*) = x^*(x) = 1 \neq 0$ donnc e_v est injective. De plus, $\dim E^{**} = \dim E^* = \dim E$, donc ev est un isomorphisme. □

Proposition 7.13. Soit E un espace vectoriel, $\mathcal{B} = (e_1^*, \dots, e_n^*)$ une base de E^*.
Alors $\mathcal{F} = (f_1, \cdots, f_n)$ telle que $f_j = \text{ev}^{-1}\left(e_j^{**}\right)$ forme une base de E appelée base *antéduale*.

7.3. Formes bilinéaires symétriques et formes quadratiques.

Définition 7.14 (Symétrique)**.** Soit $\varphi : ExE \to \mathbb{K}$ une application bilinéaire. φ est dite symétrique si

$$\forall (x, y) \in E^2, \varphi(x, y) = \varphi(y, x).$$

Remarque 7.15. C'est équivalent à $\lambda_\varphi = \rho_\varphi$. Ainsi, φ symétrique implique que $[\varphi]_{\mathcal{E}}$ symétrique pour toute base $\mathcal{E}$.

Définition 7.16 (Quadratique)**.** Soit $Q : E \to \mathbb{K}$ une application. On dit que Q est *quadratique* si il existe φ bilinéaire symétrique sur E telle que $\forall x \in E, Q(x) = \varphi(x, x)$. On dit que φ est la *forme polaire* de Q.

Remarque 7.17. Toute forme quadratique admet une unique forme polaire.

Remarque 7.18.
- En général, $Q(x + \alpha x') \neq Q(x) + \alpha Q(x)'$.
- Si φ est une forme bilinéaire symétrique sur E, on appelle *forme quadratique associée à φ*.

Proposition 7.19 (Formule de polarisation)**.** Soit $Q : E \to \mathbb{K}$ une forme quadratique, φ une application bilinéaire symétrique sur E telle que $Q(x) = \varphi(x, x) \forall x \in E$. Alors $\forall (x, y) \in E^2$,

$$\varphi(x,y) = \frac{1}{2}(Q(x+y) - Q(x) - Q(y)) = \frac{1}{4}(Q(x+y) + -Q(x-y)).$$

Démonstration. $Q(x+y) - Q(x) - Q(y) = \varphi(x+y, x+y) - \varphi(x,x) - \varphi(y,y) = 2\varphi(x,y)$ □

Exemple 7.20. todo

7.4. Formes quadratiques définies.

Définition 7.21. Soit Q une forme quadratique sur E et φ sa forme polaire. On dit que φ ou Q est *définie* si $\forall x \in E, Q(x) = 0 \Rightarrow x = 0$.

Proposition 7.22. Soit φ bilinéaire symétrique et définie. Alors φ est non dégénérée.

Démonstration. Soit $x \in E$ tel que $\forall y \in E, \varphi(x,y) = 0$ alors $\varphi(x,x) = 0$ donc $x = 0$. □

Remarque 7.23. La reciproque est fausse : Soit $E = \mathbb{R}^2$, $\varphi : ExE \to \mathbb{R}$; $((x,y),(x',y')) \mapsto (xy)\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}(xx') = \frac{yx'}{2} + \frac{xy'}{2}$ est non dégénérée car $\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$ est inversible. Mais $\varphi((1,0),(1,0)) = 0$.

Proposition 7.24. Soit Q une forme quadratique sur un $\mathbb{R}$-ev E. Si Q est définie, alors
- Soit $\forall x \in E \setminus \{0\}, Q(x) > 0$ (Q définie positive),

-Soit $\forall x \in E \setminus \{0\}, Q(x) ><$ (Q définie négative).

Démonstration. Par l'absurde, Supposons qu'il existe $(x,y) \in (E \setminus \{0\})^2$ tel que $Q(x)Q(y) < 0$.
- x et y non colinéaires, sinon $\exists \alpha \in \mathbb{R}$ tel que $x = \lambda y \Rightarrow Q(x) = Q(\lambda y) = \varphi(\lambda y, \lambda y) = \lambda^2 Q(x,y)$.
- Si φ est la forme polaire de Q alors $Q(x)Q(y) = \lambda^2 Q(y)^2 \geq 0$.
  Soit $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $t \mapsto Q(tx + (1-t)y)$. On a $\gamma(0)\gamma(1) < 0$ et
  $$\gamma(t) = \varphi(tx + (1-t)y, tx + (1-t)y) \overset{\cdots}{=} t^2 Q(x) + (1-t)^2 Q(y) + 2t(1-t)\varphi(x,y)$$
  donc φ polynomiale à fonction continue. Par le théorème des valeurs intérmédiaires, $\exists t_0 \in]0,1[$ tel que $\gamma(t_0) = 0$ par définition de Q on a $t_0 x + (1-t_0)y = 0$. □

7.5. Réduction d'une forme quadratique en somme de carrés.

Exemples 7.25.

- On se place dans $\mathbb{R}^3$. Q associée à $\begin{pmatrix} 1 & 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 & 0 \end{pmatrix}$.
  $$\begin{aligned} Q(x,y,z) = x^2 + xy + yz + xz &= \left(x + \frac{y+z}{2}\right)^2 - \left(\frac{y+z}{2}\right)^2 + yz \\ &= \left(x + \frac{y+z}{2}\right)^2 - \left(\frac{y-z}{2}\right)^2. \end{aligned}$$
- $Q(x,y,z) = xy + xz + yz = (x+z)(y+z) - z^2 = \frac{1}{4}\left((x+y+2z)^2 - (x-y)^2\right) - z^2$

Théorème 7.26. Soit Q une forme quadratique sur E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n. Alors il existe une famille libre $\mathcal{F} = (f_1, \dots, f_n)$ de formes linéaires telle que $\exists \alpha_1, \cdots, \alpha_r \in \mathbb{K}^r$ tel que

$$Q = \sum_{k=1}^{r} \alpha_k f_k^2$$

i.e $\forall x \in E, Q(x) = \sum_{k=1}^{r} \alpha_k f_k(x)^2$.

Démonstration. Par récurrence sur $n = \dim E$,

- Si $n = 1, E \simeq \mathbb{K}, \exists \alpha \in \mathbb{K}$ tel que $\forall x \in E, Q(x) = ax^2$.
- Supposons la propositio vraie à un rang k. Soit E de dimension $k+1$. Soit $\mathcal{E}$ une base de E, φ forme polaire de Q. $A = (a_{ij}) \coloneqq [\varphi]_{\mathcal{E}}, X \coloneqq [x]_{\mathcal{E}} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. Alors

$$Q(x) = {}^tXAX = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}x_i^2 + \sum_{i\neq j} a_j x_i x_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}x_i^2 + 2\sum_{i<j} a_i j x_i x_j$$

.

  - Cas 1: $\exists i$ tel que $a_{ii} \neq 0$ supposons sans perte de généralite $a_{11} \neq 0$. Alors $Q(x) = a_{11}\left(x_1 + \sum_{j>1} \frac{(a_j x_j)^2}{a_{11}}\right)^2 + \delta(x_2, \dots, x_n)$ où δ est une forme quadratique sur $\mathbb{K}^{n-1}$ ok par hérédité.
  -

□

Remarque 7.27. Il n'y a pas d'unicité par exemple $Q(x, y) = 2x^2 + 2y^2 = (x+y)^2 + (x+y)^2 = 2\|(x, y)\|^{2^2}$