Géométrie affine et euclidienne

Table des matières

1. Géométrie affine.

1.1. Espaces affines

Définition 1.1. Soit E un espace vectoriel. Un ensemble (non vide) $\mathcal{E}$ est un *espace affine* s'il existe une application $\theta : \mathcal{E}x\mathcal{E} \to E\,;\ (A,B) \mapsto \overrightarrow{AB}$ telle que :
(1) Pour tout $A \in \mathcal{E}$ fixé, l'application $\theta_A : \mathcal{E} \to E\,;\ B \mapsto \overrightarrow{AB}$ est bijective.
(2) Pour tout $A, B, C \in \mathcal{E}$, on a $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ (relation de Chasles).

Remarques 1.2.
(1) Les elements de $\mathcal{E}$ sont les points.
(2) La dimension de $\mathcal{E}$ est celle de E.
(3) L'espace vectoriel E est appelé la direction de $\mathcal{E}$, on dit aussi que $\mathcal{E}$ est dirigé par E.
On notera $(\mathcal{E}, E)$.

Exemple 1.3. Tout espace vectoriel E admet une structure naturelle d'espace affine.
Soit $\theta : ExE \to E\,;\ (u,v) \mapsto v-u$. On vérifie les deux conditions de la définition d'un espace affine.
1. Soit $u \in \mathcal{E}$. L'application $\theta_u : \mathcal{E} \to \mathcal{E}\,;\ v \mapsto v-u$ est bijective car la réciproque existe : $v \mapsto v+u$
2. $\overrightarrow{uv} + \overrightarrow{vw} = v - u + w - v = w - u = \overrightarrow{uw}$.

Exercice 1. Soit $f : E \to E', g : E' \to E$ telle que $f \circ g = \mathrm{id}_{E'}, g \circ f = \mathrm{id}_E$ alors f et g sont bijectives.

Remarque 1.4. La relation de Chasles donne
(1) $\overrightarrow{AA} + \overrightarrow{AA} = \overrightarrow{AA}$ donc $\overrightarrow{AA} = 0$
(2) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA} = 0$ donc $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{AB}$.

Proposition 1.5 (règle du parallélogramme)**.** Soit $A, A', B, B' \in \mathcal{E}$.

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'} \Leftrightarrow \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'}$$

Démonstration.
$\Rightarrow \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{B'A'} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{A'B'} + \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{BB'}$
$\Leftarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB'} + \overrightarrow{B'B} = \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'B'} + \overrightarrow{B'B} = \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'B'} - \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{A'B'}$. □

Définition 1.6. Soit $A, A', B, B' \in \mathcal{E}$. On dit que $ABB'A'$ forme un parallélogramme s'ils vérifient la règle du parallélogramme.

Proposition 1.7. Soit $A \in \mathcal{E}, u \in E$. Il existe un unique $B \in \mathcal{E}$ tel que $\overrightarrow{AB} = u$.

Démonstration. θ_A est bijective. □

Notation 1.8. On pourra noter $B = A + u$.

1.2. Sous-espaces affines.

Définition 1.9. Soit $(\mathcal{E}, E)$, $\mathcal{F} \subset \mathcal{E}$. On dit que $\mathcal{F}$ est un sous-espace affine de $\mathcal{E}$ s'il existe $A \in \mathcal{F}$ tel que $\theta_A(\mathcal{F})$ est un sous-espace vectoriel de E.

Proposition 1.10. Si $\mathcal{F} \subset \mathcal{E}$ est un sous espace affine dirigé par F alors
$$\forall B \in \mathcal{F}, \theta_B(\mathcal{F}) = F.$$

Démonstration. Il existe $A \in \mathcal{F}$ tel que $\theta_A(\mathcal{F}) = F$. On veut montrer que $\theta_A(\mathcal{F}) = \theta_B(\mathcal{F})$.

(1) Soit $u \in \theta_A(\mathcal{F})$. On montre que $u \in \theta_B(\mathcal{F})$.
Comme θ_B est bijective, on peut trouver $N \in \mathcal{E}$ tel que $\overrightarrow{BN} = u$. Or $\overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BN} \in \theta_A(\mathcal{F})$. Ainsi, $N \in \mathcal{F}$ et $u = \overrightarrow{BN} \in \theta_B(\mathcal{F})$

(2) On montre $\theta_B(\mathcal{F}) \subset \theta_A(\mathcal{F})$. Soit $u \in \theta_B(\mathcal{F})$ alors $u = \overrightarrow{BM}$ avec $M \in \mathcal{F}$. Par la relation de Chasles, $u = \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AM} \in \theta_A(\mathcal{F})$ donc $u \in \theta_A(\mathcal{F})$.

□

Proposition 1.11. Soit $A \in \mathcal{E}$ et $F \subset E$ un sous-espace vectoriel. Il existe un unique sous-espace affine $\mathcal{F} \subset \mathcal{E}$ qui passe par A et dirigé par F.

Démonstration. $\mathcal{F} = \{A + u \mid u \in F\} = \left\{M \in \mathcal{E} \mid \overrightarrow{AM} \in F\right\}$. Soit $B \in \mathcal{F}$, on pose $\theta_B : \mathcal{F} \to F\,;\ M \mapsto \overrightarrow{BM}$.

(1) Puisque $B \in \mathcal{F}$, $B = A + u, u \in F$ d'où $\theta_B \coloneqq M \mapsto A + \overrightarrow{AM} + u$ Ainsi on trouve facilement sa reciproque, donnée par $\theta_B^{-1} : F \to \mathcal{F}\,;\ u \mapsto ?$ donc est bijective.

(2) Soit $u, v, w \in \mathcal{F}$, alors $u, v, w \in \mathcal{E}$ or puisque $\mathcal{E}$ est un sous-espace affine, u, v, w verifient la relation de chasles. Ainsi, F est bien un sous-espace affine de direction F.

(3) De plus, $A + 0 = A \in \mathcal{F}$ donc $\mathcal{F}$ passe par A.

□

Proposition 1.12. Soit $f : E \to F$ une application linéaire entre deux espaces vectoriels. Si $v \in f(E)$ alors f^{-1} est un sous-espace affine de E dirigé par $\ker(f) = f^{-1}(0) = \{u \in E \mid f(u) = 0\}$.

Démonstration. Soit $u \in f^{-1}(v)$. On montre que $w \in f^{-1}(v) \Leftrightarrow \theta(u, w) \in \ker f$. En effet, $w \in f^{-1}(v) \Leftrightarrow f(w) = v \Leftrightarrow f(w = f(u))$
$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow f(w - u) = 0 \\ &\Leftrightarrow w - u \in \ker(f) \Leftrightarrow \theta(u, w) \in \ker(f) \end{aligned}$$
□

Remarque 1.13.

(1) Un sous espace affine de dimension 0 est constitué d'un seul point.

(2) Un sous-espace affine de dimension 1 est une droite.

(3) un sous-espace affune de dimension 2 est un plan

Exemple 1.14. Dans $\mathbb{R}^n$, les solutions d'une équation $\sum_{i=1}^n a_i x_i = b$ forment un sous-espace affine de $\mathbb{R}^n$ dirigé par l'espace vectoriel $\{\sum a_i x_i = 0\} : f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$