Topologie et calcul différentiel

Table des matières

1. Topologie des espaces vectoriels normés.

1.1. Espaces vectoriels normés.

Définition 1.1 (Norme)**.** Soit E un espace vectoriel. On appelle norme sur E une fonction $\|\cdot\| : E \to \mathbb{R}$ vérifiant:
(1) $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in E, \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$,
(2) $\forall x \in E, \|x\| = 0 \Rightarrow x = 0$,
(3) $\forall x, y \in E, \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Définition 1.2. Soit E un espace vectoriel et $\|\cdot\|$ une norme sur E. On appelle espace vectoriel normé un couple $(E, \|\cdot\|)$.

Proposition 1.3. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé, alors :
(1) $\|0\| = 0$,
(2) $\forall x \in E, \|x\| \geq 0$,
(3) $\forall x, y \in E, \big|\|x\| - \|y\| \leq \|x - y\|\big|$.

Démonstration.
(1) $\|0_E\| = \|0_\mathbb{R} * 0_E\| = 0_\mathbb{R} * \|0_E\| = 0_\mathbb{R}$.
(2) Soit $x \in E, \|0\| = \|x - x\| \leq \|x\| + \|-x\| = 2\|x\|$ d'où $\forall x \in E, \|x\| \geq 0$.
(3) Soit $x, y \in E$. $\|x\| = \|x + y - y\| \leq \|x - y\| + \|y\| \Leftrightarrow \|x\| - \|y\| \leq \|x - y\|$
et $\|y\| = \|y + x - x\| \leq \|y - x\| + \|x\| \Leftrightarrow \|y\| - \|x\| \leq \|x - y\|$.
Ainsi, $\|x - y\| \geq \max\big(\|y\| - \|x\|, \|x\| - \|y\|\big) = \big|\|x - y\|\big|$.

□

Proposition 1.4. Soit $(E, \|\cdot\|), F \subset E$ un sous-espace vectoriel. La restriction de $\|\cdot\|$ à F est une norme appelée norme induite.

1.2. Topologie des espaces vectoriels normés

Définition 1.5 (boule ouverte/fermée)**.** Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé, $a \in E, r > 0$. On appelle boule ouverte centrée en a de rayon r la partie $B(a, r) := \{x \in E \mid \|x - a\| < r\}$, et boule fermée centrée en a de rayon r la partie $B_f(a, r) := \{x \in E \mid \|x - a\| \leq r\}$.

Définition 1.6 (Ouvert/fermé)**.** Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. Soit $U \subset E$, on dit que U est:
(1) un ouvert de E si $\forall x \in U, \exists r > 0, B(x, r) \subset U$.
(2) un fermé de E si U^c est un ouvert de E.

Proposition 1.7. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé, alors
(1) $\varnothing$ et E sont ouverts et fermés.
(2) Une union quelconque d'ouverts est un ouvert.

(3) Une intersection finie d'ouverts est un ouvert.
(4) Une union finie de fermés est un fermé.
(5) Une intersection quelconque de fermés est un fermé.

Démonstration.
(1) $\forall x \in \varnothing, \exists \varepsilon, B(x, \varepsilon) \subset \varnothing$ donc $\varnothing$ est un ouvert et $\varnothing^c = E$ donc E est un fermé. De plus, $\forall x \in E, B(x, 1) \subset E$ donc E est un ouvert et $\varnothing = E^c$ est un fermé.
(2) Soit $(O_i)_{i \in I}$ une famille d'ouverts. Soit $x \in \bigcup_{i \in \{1,\ldots,n\}} O_i$, alors $\exists j \in I, x \in O_j$. Or O_j est un ouvert donc $\exists r_j > 0$ tel que $B\left(x, r_j\right) \subset O_j \subset \bigcup_{i \in I} O_i$ donc $\bigcup_{i \in I} O_i$ est un ouvert.
(3) Soit $(O_i)_{i \in \{1,\ldots,n\}}$ une famille d'ouverts. Soit $x \in \bigcap_{i \in \{1,\ldots,n\}}$ alors $x \in O_1, \ldots, x \in O_n$. Or $(0_1, \ldots, O_n)$ sont des ouverts de E donc $\exists (r_i)_{i \in I}$ tels que $B\left(x, (r_i)_{i \in \{1,\ldots,n\}}\right) \subset (O_i)_{i \in I}$. Posons $\varepsilon \coloneqq \min(r_1, \ldots, r_n) > 0$. Alors $B(x, \varepsilon) \subset O_1 \cap \ldots \cap O_n$ donc $\bigcup_{i \in \{1,\ldots,n\}} C_i$ est un ouvert.
(4) Soit $(C_1, \ldots, C_n)$ une famille de fermés. Alors $\left(\bigcup_{i \in \{1,\ldots,n\}} C_i\right)^c = \bigcap_{i \in \{1,\ldots,n\}} (C_i)^c$ qui est un ouvert. Ainsi $\bigcup_{i \in \{1,\ldots,n\}} C_i$ est un fermé.
(5) Soit $(C_i)_{i \in I}$ une famille de fermés. Alors $\left(\bigcap_{i \in I} C_i\right)^c = \bigcup_{i \in I} C_i^c$ qui est un ouvert. Ainsi, $\bigcap_{i \in I} C_i$ est un fermé.

$\square$

Définition 1.8 (Intérieur)**.** Soit $\left(E, \|\cdot\|\right)$ un espace vectoriel normé et $S \subset E$. On appelle intérieur de S l'ensemble $\mathring{S} \coloneqq \{x \in E \mid \exists \varepsilon > 0, B(x, \varepsilon) \subset S\}$.

Définition 1.9 (Adhérence)**.** Soit $\left(E, \|\cdot\|\right)$ un espace vectoriel normé et $S \subset E$. On appelle adhérence de S l'ensemble $\overline{S} \coloneqq \{x \in E \mid \forall \varepsilon > 0, B(x, \varepsilon) \cap S \neq \varnothing.\}$.

Définition 1.10 (Dense)**.** Soit $\left(E, \|\cdot\|\right)$ un espace vectoriel normé, $S \subset E$. On dit que S est dense dans E si $\overline{S} = E$.

Proposition 1.11. Soit $\left(E, \|\cdot\|\right)$ un espace vectoriel normé, $S \subset E$.
(1) $\overline{S^c} = \left(\mathring{S}\right)^c$,
(2) $\mathring{S^c} = \left(\overline{S}\right)^c$,
(3) $\mathring{S} \subset S \subset \overline{S}$,
(4) $\mathring{S}$ est le plus grand ouvert contenu dans S,
(5) $\overline{S}$ est le plus petit ouvert contenant S