Fonction de deux variables

Table des matières

1. Introduction.

1.1. Rappels.

Définition 1.1.1 (fonction d'une variable): Soit A, B deux ensembles. Une application f est la donnée d'un ensemble de départ A et d'un ensemble d'arrivée B et qui, à chaque $x \in A$ associe un unique $f(x) \in B$. On la note $f : A \to \mathbb{B}; x \mapsto f(x)$.

Définition 1.1.2 (Graphe d'une application): Soit $f : A \to B$ une application. On appelle graphe de f l'ensemble suivant $\text{Graphe}(f) = \{(x, f(x)) \mid x \in A\} \subset A \times B$

1.2. Premières définitions.

Définition 1.2.1 (fonction de deux variables): Soit A un sous ensemble de $\mathbb{R}^2$ et B un ensemble. Une application f de deux variables de A dans B est la donnée d'un ensemble de départ A et d'un ensemble d'arrivée B et qui, à chaque $(x, y) \in A$ associe un unique $f(x, y) \in B$. On la note $f : A \to B; x, y \mapsto f(x, y)$.

Définition 1.2.2 (Graphe d'une application): Soit $f : A \to B$ une application de deux variables. On appelle graphe de f l'ensemble suivant $\text{Graphe}(f) = \{(x, y, f(x, y)) \in \mathbb{R}^3 \mid x, y \in \mathbb{R}\}$

Exemple: L'aire d'un rectangle : $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}; (x, y) \mapsto xy$.
Soit a un réel fixé et $x, y \in \mathbb{R}$. l'équation associée est $a = xy \Leftrightarrow y = \frac{a}{x}$. On cherche le rectangle d'aire a de côté x, y.

2. La topologie de la norme de $\mathbb{R}^2$.

Définition 2.1 (Norme Euclidienne): Soit $v = \binom{a}{b} \in \mathbb{R}^2$. La norme Euclidienne est la longueur du vecteur v. Elle est donnée par $\|v\| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Proposition 2.1: Soit $v \in \mathbb{R}^2$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors $\|\cdot\|$ vérifie:
1. $\|v\| \geq 0$ et $\|v\| = 0 \Leftrightarrow v = \binom{0}{0}$.
2. $\|\lambda v\| = |\lambda| \|v\|$ (homogénéïté).
3. $\|v + u\| \leq \|v\| + \|u\|$ (inégalité triangulaire).

i.e la norme Euclidienne est une norme.

Démonstration:

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}^2$, $x^2 \geq 0$ d'où $\forall u \in \mathbb{R}^2, \|u\| \geq 0$.
2. Soit $u = \binom{a}{b} \in \mathbb{R}^2, \lambda \in \mathbb{R}$.
   On a $\|\lambda u\| = \|(\lambda a, \lambda b)\| = \sqrt{(\lambda a)^2 + (\lambda b)^2} = \sqrt{\lambda^2(a^2+b^2)} = |\lambda|\|u\|$.
3.

$\square$

Corollaire 2.1: Soit $v, u \in \mathbb{R}^2$. On a :

$$\|v-u\| \geq |\|v\| - \|u\||.$$

Démonstration: On a $\forall u, v \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned} v &= (v-u)+u \\ \|v\| &= \|v-u+u\| \leq \|v-u\| + \|u\| \\ \Leftrightarrow \|v-u\| &\geq \|v\| - \|u\| \end{aligned}$$

De même avec u, on obtient par ailleurs $\|v-u\| \geq \|u\| - \|v\|$ d'où $\|v-u\| \geq |\|v\| - \|u\||$. $\square$

Définition 2.2: Soient $u = (a,b), v = (x,y) \in \mathbb{R}^2$. On définit le produit scalaire par

$$u \cdot v = ax + by.$$

Proposition 2.2: Soient $u, v, w \in \mathbb{R}^2, \lambda \in \mathbb{R}$.
1. $u \cdot v$=$v \cdot u$ (symétrie).
2. $(w+v) \cdot u = w \cdot u + v \cdot u$ (bilinéarité).
3. $(v \cdot u)^2 \leq \|u\|^2\|v\|^2$ (inégalité de Cauchy-Schwartz).

Démonstration: Soient $u, v \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}$. $\|v+tu\|^2 = (v+tu) \cdot (v+tu) = v \cdot v + 2t(v \cdot u) + (u \cdot u)t^2$.
On pose $f(t) = \|v\|^2 + 2(v \cdot u)t + \|u\|^2t^2$.On peut supposer que $u \neq 0$ sinon l'égalité est évidente. $\square$

Définition 2.3 (disque): Soient $u \in \mathbb{R}^2$,$R > 0$. On appelle **disque ouvert** de rayon R centré en u l'ensemble:

$$B(u,r) := \{v \in \mathbb{R} \mid \|v-u\| < R\}.$$

On appelle **disque fermé** de rayon R centré en u l'ensemble:

$$\overline{B}(u,R) := \{v \in \mathbb{R}^2 \mid \|v-u\| \leq R\}.$$

Définition 2.4: Soit U un sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$. On dit que U est un **ouvert** de $\mathbb{R}^2$ si U est le sous-ensemble vide ou si

$$\forall u \in U, \exists r_u > 0, B(u, r_u) \subset U.$$

L'ensemble de ces sous-ensembles sont notés O_{norm}.