

Topologie et calcul différentiel

Table des matières

1. Topologie des espaces vectoriels normés.	1
1.1. Espaces vectoriels normés.	1
1.2. Topologie des espaces vectoriels normés	2
1.3. Continuité.	3
1.4. Suites dans un espace vectoriel normé.	4
1.5. Compacité.	4
1.6. Comparaison de normes.	5
1.7. Cas de la dimensions finie.	5
2. Calcul différentiel.	6
2.1. Différentielle, propriétés élémentaires.	6
2.2. Dérivée directionnelle et différentielle.	7
2.3. Dimension finie.	7
2.4. Propositions élémentaires.	8
2.5. Différentielles partielles et d'ordre supérieur.	11
2.5.1. Différentielles partielles.	11
2.5.2. Différentielles d'ordre 2.	12

1. Topologie des espaces vectoriels normés.

1.1. Espaces vectoriels normés.

Définition 1.1 (Norme). Soit E un espace vectoriel. On appelle norme sur E une fonction $\|\cdot\| : E \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant:

- (1) $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in E, \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$,
- (2) $\forall x \in E, \|x\| = 0 \Rightarrow x = 0$,
- (3) $\forall x, y \in E, \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Définition 1.2. Soit E un espace vectoriel et $\|\cdot\|$ une norme sur E . On appelle espace vectoriel normé un couple $(E, \|\cdot\|)$.

Proposition 1.3. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé, alors :

- (1) $\|0\| = 0$,
- (2) $\forall x \in E, \|x\| \geq 0$,
- (3) $\forall x, y \in E, \left| \|x\| - \|y\| \right| \leq \|x - y\|$.

Démonstration.

- (1) $\|0_E\| = \|0_{\mathbb{R}} * 0_E\| = 0_{\mathbb{R}} * \|0_E\| = 0_{\mathbb{R}}$.
- (2) Soit $x \in E, \|0\| = \|x - x\| \leq \|x\| + \|-x\| = 2\|x\|$ d'où $\forall x \in E, \|x\| \geq 0$.
- (3) Soit $x, y \in E. \|x\| = \|x + y - y\| \leq \|x - y\| + \|y\| \Leftrightarrow \|x\| - \|y\| \leq \|x - y\|$
et $\|y\| = \|y + x - x\| \leq \|y - x\| + \|x\| \Leftrightarrow \|y\| - \|x\| \leq \|x - y\|$.
Ainsi, $\|x - y\| \geq \max(\|y\| - \|x\|, \|x\| - \|y\|) = \left| \|x\| - \|y\| \right|$.

□

Proposition 1.4. Soit $(E, \|\cdot\|), F \subset E$ un sous-espace vectoriel. La restriction de $\|\cdot\|$ à F est une norme appelée norme induite.

1.2. Topologie des espaces vectoriels normés

Définition 1.5 (Boule ouverte/fermée). Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé, $a \in E, r > 0$. On appelle boule ouverte centrée en a de rayon r la partie $B(a, r) := \{x \in E \mid \|x - a\| < r\}$, et boule fermée centrée en a de rayon r la partie $B_f(a, r) := \{x \in E \mid \|x - a\| \leq r\}$.

Définition 1.6 (Ouvert/fermé). Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. Soit $U \subset E$, on dit que U est:

- (1) un ouvert de E si $\forall x \in U, \exists r > 0, B(x, r) \subset U$.
- (2) un fermé de E si U^c est un ouvert de E .

Proposition 1.7. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé, alors

- (1) \emptyset et E sont ouverts et fermés.
- (2) Une union quelconque d'ouverts est un ouvert.
- (3) Une intersection finie d'ouverts est un ouvert.
- (4) Une union finie de fermés est un fermé.
- (5) Une intersection quelconque de fermés est un fermé.

Démonstration.

- (1) $\forall x \in \emptyset, \exists \varepsilon, B(x, \varepsilon) \subset \emptyset$ donc \emptyset est un ouvert et $\emptyset^c = E$ donc E est un fermé. De plus, $\forall x \in E, B(x, 1) \subset E$ donc E est un ouvert et $\emptyset = E^c$ est un fermé.
- (2) Soit $(O_i)_{i \in I}$ une famille d'ouverts. Soit $x \in \bigcup_{i \in \{1, \dots, n\}} O_i$, alors $\exists j \in I, x \in O_j$. Or O_j est un ouvert donc $\exists r_j > 0$ tel que $B(x, r_j) \subset O_j \subset \bigcup_{i \in I} O_i$ donc $\bigcup_{i \in I} O_i$ est un ouvert.
- (3) Soit $(O_i)_{i \in \{1, \dots, n\}}$ une famille d'ouverts. Soit $x \in \bigcap_{i \in \{1, \dots, n\}} O_i$ alors $x \in O_1, \dots, x \in O_n$. Or (O_1, \dots, O_n) sont des ouverts de E donc $\exists (r_i)_{i \in \{1, \dots, n\}}$ tels que $B(x, (r_i)_{i \in \{1, \dots, n\}}) \subset (O_i)_{i \in I}$. Posons $\varepsilon := \min(r_1, \dots, r_n) > 0$. Alors $B(x, \varepsilon) \subset O_1 \cap \dots \cap O_n$ donc $\bigcap_{i \in \{1, \dots, n\}} O_i$ est un ouvert.
- (4) Soit (C_1, \dots, C_n) une famille de fermés. Alors $(\bigcup_{i \in \{1, \dots, n\}} C_i)^c = \bigcap_{i \in \{1, \dots, n\}} (C_i)^c$ qui est un ouvert. Ainsi $\bigcup_{i \in \{1, \dots, n\}} C_i$ est un fermé.
- (5) Soit $(C_i)_{i \in I}$ une famille de fermés. Alors $(\bigcap_{i \in I} C_i)^c = \bigcup_{i \in I} C_i^c$ qui est un ouvert. Ainsi, $\bigcap_{i \in I} C_i$ est un fermé.

□

Définition 1.8 (Intérieur). Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et $S \subset E$. On appelle *intérieur* de S l'ensemble $\overset{\circ}{S} := \{x \in E \mid \exists \varepsilon > 0, B(x, \varepsilon) \subset S\}$.

Définition 1.9 (Adhérence). Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et $S \subset E$. On appelle *adhérence* de S l'ensemble $\bar{S} := \{x \in E \mid \forall \varepsilon > 0, B(x, \varepsilon) \cap S \neq \emptyset\}$.

Définition 1.10 (Dense). Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé, $S \subset E$. On dit que S est *dense* dans E si $\bar{S} = E$.

Proposition 1.11. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé, $S \subset E$.

- (1) $\bar{S}^c = (\overset{\circ}{S})^c$,
- (2) $\overset{\circ}{S}^c = (\bar{S})^c$,
- (3) $\overset{\circ}{S} \subset S \subset \bar{S}$,
- (4) $\overset{\circ}{S}$ est le plus grand ouvert contenu dans S ,
- (5) \bar{S} est le plus petit ouvert contenant S .

Proposition 1.12. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et $S \subset E$.

- (1) S est un ouvert si et seulement si $S = \overset{\circ}{S}$.

(2) S est un fermé si et seulement si $S = \overline{S}$.

Démonstration. A FAIRE

□

Proposition 1.13. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé.

- (1) $\forall S, T \subset E, \overline{S \cup T} = \overline{S} \cup \overline{T}$.
- (2) $\forall S, T \subset E, \overline{S \cap T} \subset \overline{S} \cap \overline{T}$.
- (3) $\forall S, T \subset E, S \overset{\circ}{\cap} T = \overset{\circ}{S} \cap \overset{\circ}{T}$.
- (4) $\forall S, T \subset E, S \overset{\circ}{\cup} T \supset \overset{\circ}{S} \cup \overset{\circ}{T}$.

Définition 1.14 (Frontière). Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et $S \subset E$. On appelle *frontière* de S l'ensemble noté par $\partial S := \overline{S} \setminus \overset{\circ}{S}$.

Proposition 1.15. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et $S \subset E$, alors

- (1) $\partial S = \{x \in E, \forall \varepsilon > 0, B(x, \varepsilon) \cap S \neq \emptyset \wedge B(x, \varepsilon) \cap S^c \neq \emptyset\}$.
- (2) $\overline{S} = S \cup \partial S$.

S est fermé si et seulement si $\partial S \subset S$.

- (1) S est ouverte si et seulement si $\partial S \cap S = \emptyset$.
- (2) ∂S est un fermé.

Démonstration. TO DO

□

1.3. Continuité.

Définition 1.16 (continue). Soit $(E, \|\cdot\|_E), (F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces vectoriels normés. Soit $S \subset E$. On dit que $f : S \rightarrow F$ est *continue* si :

$$\forall x \in S, \forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall y \in F, \|x - y\|_E \leq \eta \Rightarrow \|f(x) - f(y)\|_F \leq \varepsilon.$$

Proposition 1.17. Soit $(E, \|\cdot\|_E), (F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces vectoriels normés, $S \subset E, f : S \rightarrow F$ alors les points suivants sont équivalents :

- (1) f est continue.
- (2) Pour tout ouvert U de F , il existe un ouvert V de E tel que $f^{-1}(U) = V \cap S$,
- (3) Pour tout fermé C de F , il existe un fermé D de E tel que $f^{-1}(C) = D \cap S$.

Démonstration. TO DO

□

Remarque 1.18. Formellement la proposition revient à dire que l'image réciproque d'un ouvert par une fonction continue est un ouvert.

Proposition 1.19. Soit $(E, \|\cdot\|_E), (F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces vectoriels normés, $f : E \rightarrow F$ une application linéaire. Les points suivants sont équivalents:

- (1) f est continue.
- (2) f est continue en 0.
- (3) $\exists M \geq 0, \forall x \in E, \|f(x)\|_F \leq M\|x\|_E$.

Démonstration.

- (1) $1 \Rightarrow 2$: f est continue sur E alors elle est continue en 0.

- (2) $2 \Rightarrow 1$: Supposons f continue en 0. Alors il existe $\eta > 0$ tel que $\forall x \in E, \|x\|_E \Rightarrow \|f(x)\|_F \leq 1$.
 Soit $x \in E \setminus \{0\}$ alors $\left\|f\left(\frac{\eta}{\|x\|_E}x\right)\right\| \leq 1$ d'où $f(x)_F \leq \frac{1}{\eta}\|x\|_E$. Si $x = 0$ alors $\|f(0)\|_F = 0 \leq \frac{1}{\eta}\|0\|_E$.
 Donc $M := \frac{1}{\eta}$ convient.
- (3) A faire. □

Notation 1.20. On note $\mathcal{L}_c(E, F)$ l'espace vectoriel des fonctions linéaires continues de E dans F .

Corollaire 1.21. Soit $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces vectoriels normés. Pour tout $L \in \mathcal{L}_c(E, F)$ on pose $\|L\| := \sup_{\|x\|_E \leq 1} \|L(x)\|_F$. Alors,

- (1) $\forall L \in \mathcal{L}_c(E, F), \|L\| < \infty$,
 (2) Si $E \neq \{0\}, \forall L \in \mathcal{L}_c(E, F)$:

$$\|L\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|L(x)\|_F}{\|x\|_E} = \sup_{\|x\|_E \in]0,1[} \frac{\|L(x)\|_F}{\|x\|_E} = \sup_{\|x\|_E=1} \|L(x)\|_F,$$

- (3) $\|\cdot\|$ est une norme sur $\mathcal{L}_c(E, F)$ appelée norme d'opérateur ou norme subordonnée,
 (4) $\forall L \in \mathcal{L}_c(E, F), \forall x \in E, \|L(x)\|_F \leq \|L\| \|x\|_E$,
 (5) Si $(G, \|\cdot\|_G)$ est un espace vectoriel normé, alors $\forall L \in \mathcal{L}_c(E, F), \forall K \in \mathcal{L}_c(F, G)$,

$$\|K \circ L\| \leq \|K\| \|L\|.$$

1.4. Suites dans un espace vectoriel normé.

Définition 1.22 (Convergente). Soit $(E, \|\cdot\|_E)$, un espace vectoriel normé, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E et $l \in E$. On dit que $(x_n)_n$ tend vers l si $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, n \geq N \Rightarrow \|x_n - l\| \leq \varepsilon$. On dit qu'une suite est *convergente* si elle admet une limite.

Proposition 1.23. Il y a unicité de la limite.

Démonstration. Supposons $x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} l_1$, et $x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} l_2$.

Soit $\varepsilon > 0$ alors il existe $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ tels que $n \geq N_1 \Rightarrow \|l_1 - x_n\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ et $n \geq N_2 \Rightarrow \|l_2 - x_n\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$.
 Posons $n := \max(N_1, N_2)$. Alors $\|l_1 - l_2\| \leq \|l_1 - x_n\| + \|x_n - l_2\| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. D'où $\|l_1 - l_2\| = 0 \Leftrightarrow l_1 = l_2$. □

Lemme 1.24. Soit $(E, \|\cdot\|_E)$, un espace vectoriel normé, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite dans E convergente. Alors $(x_n)_n$ est bornée.

Proposition 1.25. Soit $(E, \|\cdot\|_E)$, un espace vectoriel normé, et $S \subset E$. Si une suite d'éléments converge alors sa limite est dans \bar{S} .

Corollaire 1.26. Soit $(E, \|\cdot\|_E)$, un espace vectoriel normé, $S \subset E$. S est fermé si et seulement si pour toute suite convergente d'éléments de S , sa limite est dans S .

Proposition 1.27. Soit $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces vectoriels normés, $S \subset E, a \in S$, et $f : S \rightarrow F$. Alors f est continue en a si et seulement si pour toute suite $(x_n)_n \in S^{\mathbb{N}}$ convergant vers a , $(f(x_n))_n$ converge vers $f(a)$.

1.5. Compacité.

Définition 1.28 (Compacte). Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et $S \subset E$. On dit que S est *compacte* si de toute suite d'éléments de S on peut extraire une sous-suite convergant dans S .

Proposition 1.29. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé $K \subset E$ un compact, et $S \subset K$. Si S est fermée alors S est compacte.

Démonstration. Soit K un compact, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de S , alors $(x_n) \in K$ alors il existe une sous-suite de (x_n) qui converge dans K vers un élément $l \in \bar{S}$. Or $\bar{S} = S$ car S est fermé. \square

Définition 1.30 (bornée). Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. On dit qu'une partie $S \subset E$ est *bornée* s'il existe $M > 0$ tel que pour tout $x \in S$, $\|x\| \leq M$.

Proposition 1.31. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. Toute partie compacte de E est fermée et bornée.

Démonstration.

Montrons $K \subset E$ compacte $\Rightarrow K$ fermée. Soit $(x_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de K convergeant vers $l \in E$. Montrons $l \in K$. Comme K est compacte, on peut extraire une sous-suite telle que $x_{\varphi(n)}$ converge vers $\bar{l} \in K$. Or, $x_{\varphi(n)}$ converge aussi vers l comme suite extraite d'une suite convergente. Ainsi, par unicité de la limite, $l = \bar{l}$.

Montrons par contraposition K compact $\Rightarrow K$ borné. Supposons que K soit une partie non-bornée de E . Alors pour $n \in \mathbb{N}$, il existe $x_n \in K$ tel que $\|x_n\| > n$. Montrons que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ainsi construite n'admet pas de sous-suite convergeant dans K . Soit $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ une fonction strictement croissante. Alors $\|x_{\varphi(n)}\| > \varphi(n) = n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$. Donc $x_{\varphi(n)}$ n'est pas convergente. Ainsi, K n'est pas compact. \square

Corollaire 1.32. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et $K \subset E$ un compact non-vide. Alors $\min_{x \in K} \|x\|$ et $\max_{x \in K} \|x\|$ sont bien définis.

Proposition 1.33. Soit $(E, \|\cdot\|_E), (F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces vectoriels normés, $S \subset E$ et $f : S \rightarrow F$ une fonction continue. Si K est un compact de E inclus dans S alors $f(K)$ est compacte.

Démonstration. Soit $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $f(K)$. Alors pour $n \in \mathbb{N}$, il existe $x_n \in K$ tel que $y_n = f(x_n)$. Puisque $(x_n)_n$ est une suite d'éléments de K , il existe une sous suite $(x_{\varphi(n)})_n$ qui converge vers un $l \in K$. Par continuité de f , il vient que $y_{\varphi(n)} = f(x_{\varphi(n)}) \rightarrow f(l) \in f(K)$. Donc $f(K)$ est compacte. \square

1.6. Comparaison de normes.

Définition 1.34 (Equivalente). Soit E un espace vectoriel, N et N' deux normes sur E . On dit que N et N' sont *équivalentes* si

$$\exists \alpha, \beta > 0, \forall x \in E, \alpha N(x) \leq N'(x) \leq \beta N(x)$$

Proposition 1.35. L'équivalence de normes est une relation d'équivalence.

Proposition 1.36. Soit E un espace vectoriel, deux normes N, N' sur E sont équivalentes si et seulement si elles définissent la même topologie sur E .

1.7. Cas de la dimensions finie.

Proposition 1.37. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé de dimension finie. Alors,

- Toutes les normes sur E sont équivalentes.
- Les parties compactes de E sont les parties fermées bornées

Lemme 1.38. Soit E un espace vectoriel de **dimension finie** et $\beta = (e_1, \dots, e_d)$ une base de E . On définit $\|\cdot\|_\infty : E \rightarrow \mathbb{R}$ par $\left\| \sum_{i=1}^d \lambda_i e_i \right\|_\infty = \max_i |\lambda_i|$ alors on a :

- (1) $\|\cdot\|_\infty$ est une norme sur E .
- (2) Pour tout $a > 0$, $B_f(0, a)$ est un compact de $(E, \|\cdot\|_\infty)$,
- (3) Les compacts de $(E, \|\cdot\|_\infty)$ sont les fermés bornés.

Proposition 1.39. Soit $(E, \|\cdot\|_E), (F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces normés avec E de dimension finie. Alors toute application linéaire $E \rightarrow F$ est continue.

2. Calcul différentiel.

2.1. Différentielle, propriétés élémentaires.

Définition 2.1 (Différentiable). Soit E, F deux espaces vectoriels normés, $U \subset E$ $f : U \rightarrow F$, $a \in U$.

- On dit que f est *différentiable* au point a s'il existe une application linéaire continue $g : E \rightarrow F$ telle que $f(a+h) - f(a) - g(h) = o_{h \rightarrow 0}(h)$.
- On dit que f est différentiable dans U si f est différentiable en tout point de U .
- On appelle g la différentielle de f en a .

Proposition 2.2. Si la différentielle existe, elle est unique.

Démonstration. Soit g, \tilde{g} deux différentielles de f en a . Montrons $g = \tilde{g}$.

En soustrayant on a $g - \tilde{g} = o_{h \rightarrow 0}(h)$ i.e $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall h \in E, \|h\|_E \leq \eta \Rightarrow \|g(h) - \tilde{g}(h)\|_F \leq \varepsilon \|h\|_E$.

Soit $h \in E \setminus \{0\}$. On a :

$$\left\| \frac{\eta}{2} \cdot \frac{h}{\|h\|_E} \right\| < \eta \Rightarrow \left\| \tilde{g}\left(\frac{\eta}{2} \cdot \frac{h}{\|h\|_E}\right) - g\left(\frac{\eta}{2} \cdot \frac{h}{\|h\|_E}\right) \right\| \leq \varepsilon \left\| \frac{\eta}{2} \cdot \frac{h}{\|h\|_E} \right\| \Leftrightarrow \frac{\eta}{2\|h\|_E} \|g(h) - \tilde{g}(h)\| \leq \varepsilon \frac{\eta}{2\|h\|_E} \|h\|_E$$

$$\Leftrightarrow \|g(h) - \tilde{g}(h)\| \leq \varepsilon \|h\|_E$$

donc on a bien $\|g - \tilde{g}\| \leq 0$ d'où $\tilde{g} = g$. □

Définition 2.3. On appelle aussi g l'application *linéaire tangente*.

Proposition 2.4. Soit $U \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert, $a \in U$ et $f : U \rightarrow \mathbb{R}$. Alors f est différentiable en a si et seulement si f est dérivable en a . Dans ce cas, pour tout $h \in \mathbb{R}$, $df_a(h) = f'(a)h$.

Démonstration.

\Rightarrow Supposons que f est différentiable en a .

Par définition, $f(a+h) - f(a) \underset{h \rightarrow 0}{=} df_a(h) + |h|\varepsilon(h)$, $df_a \in \mathcal{L}_{c(\mathbb{R}, \mathbb{R})}$. On peut donc écrire pour un certain $c \in \mathbb{R}, \forall h \in \mathbb{R}, df_a(h) = ch$. D'où

$$f(a+h) - f(a) = ch + |h|\varepsilon(h).$$

Donc pour $h \neq 0$,

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = c + \frac{|h|}{h} \varepsilon(h).$$

f est bien dérivable en a et $f'(a) = c$. En particulier pour tout $h \in \mathbb{R}, df_a(h) = f'(a)h$.

⇐ Supposons f dérivable en a .

Il existe $c \in \mathbb{R}$, $\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = c + o(1)$. Alors

$$f(a+h) - f(a) = ch + o(h).$$

L'application $:\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; h \mapsto ch$ est linéaire continue. Par définition, f est donc différentiable. \square

Proposition 2.5. Soit $f : U \rightarrow F$ une application. Si f est différentiable en a alors f est continue en a .

Démonstration. On a $f(a+h) \underset{h \rightarrow 0}{=} f(a) + df_a(h) + \|h\|\varepsilon(h)$. Puisque df_a est continue et linéaire, $df_a(h) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$, de plus $\|h\|\varepsilon(h) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$. Ainsi, on a bien f continue. \square

Définition 2.6 (Différentielle). Soit E, F deux espaces vectoriels normés, $U \subset E$ $f : U \rightarrow F$. L'application $df : U \rightarrow \mathcal{L}_c(E, F); x \mapsto df_x$ est appelée *différentielle* de f .

Définition 2.7 (Continuement différentiable). Soit E, F deux espaces vectoriels normés, $U \subset E$ $f : U \rightarrow F, a \in \mathbb{R}$. On dit que f est *continuellement différentiable* ou de classe C^1 en a si f est différentiable en tout point d'un voisinage ouvert V de a dans U et si $df : V \rightarrow \mathcal{L}_c(E, F)$ est continue en a .

2.2. Dérivée directionnelle et différentielle.

Définition 2.8. Soit E, F deux espaces vectoriels normés, $U \subset E$ $f : U \rightarrow F$. On dit que f est différentiable en a dans la direction $h \in E$ s'il existe $l \in F$ telle que

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a+th) - f(a)}{t} = l.$$

Dans ce cas on la note $\partial_h f(a) \in F$.

Proposition 2.9. Si f est différentiable en a alors elle est différentiable dans toutes les directions et $\forall h \in E, df_a(h) = \partial_h f(a)$.

Démonstration. On peut écrire $f(a+k) - f(a) = df_a(k) + \|k\|\varepsilon(k)$. Soit $h \in E$. Pour $t \neq 0$ suffisamment petit, $th \rightarrow 0$. On a $f(a+th) - f(a) = df_a(th) + |t|\|h\|\varepsilon(h)$. D'où $\frac{f(a+th)-f(a)}{t} = df_a(h) + \left(\frac{|t|}{t}\|h\|\right) \varepsilon(th) \xrightarrow[t \rightarrow 0]{\text{borné}} df_a(h)$. Par définition, on a bien $df_a(h) = \partial_h f(a)$. \square

2.3. Dimension finie.

Notation 2.10. Soit $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction différentiable, $\mathcal{C} = (e_1, \dots, e_m)$ la base canonique de \mathbb{R}^m . Alors on notera la dérivée de f en a de direction $(e_j)_{j \in \{1, \dots, m\}}$ par $\partial_{e_j} f(a) = \partial_j f(a) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(a)$ et $df_a(e_j) = \partial_{e_j} f(a)$. Par ailleurs on pourra aussi noter $f = (f_1, \dots, f_n)$.

Proposition 2.11. Soit $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction différentiable, $\mathcal{C} = (e_1, \dots, e_m)$ la base canonique de \mathbb{R}^m , \mathcal{C}, \mathcal{B} les matrices canoniques de \mathbb{R}^m et \mathbb{R}^n . La matrice de df_a est donnée par

$$J_a(f) := \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a) \right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(a) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m}(a) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(a) & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_m}(a) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_n}{\partial x_2}(a) & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_m}(a) \end{pmatrix}.$$

Définition 2.12 (Jacobienne). La matrice $J_a(f)$ est appelée *matrice jacobienne*.

Définition 2.13 (Gradient). Dans le cas $n = 1$, on note $\nabla f(a) = \begin{pmatrix} \partial_1(f) \\ \vdots \\ \partial_m f(a) \end{pmatrix}$ et on l'appelle *gradient* de f en a .

2.4. Propositions élémentaires.

Proposition 2.14. Soit E, F, G trois espaces vectoriels normés, U, V des ouverts respectifs de E et F , et $f : U \rightarrow F, g : V \rightarrow G$, 2 fonctions telles que $f(U) \subset V$.

- Si f est constante alors elle est différentiable en a et $df_a = 0$.
- Si f est différentiable en a et g différentiable en $f(a)$ alors $g \circ f$ est différentiable en a et $d(g \circ f)_a = dg_{f(a)} \circ df_a$. De plus en dimension finie,

$$\frac{\partial(g \circ f)_i}{\partial x_j}(a) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial g_i}{\partial y_k}(f(a)) \frac{\partial f_k}{\partial x_j}(a).$$

Démonstration.

- Soit f une fonction constante. On écrit $f(a+h) - f(a) = 0 = \|h\|\varepsilon(h)$.
- On écrit $f(a+h) = f(a) + (df_a)(h) + \|h\|\varepsilon_1(h)$. Ainsi, $g(f(a+h)) = g(f(a) + (df_a)(h) + \|h\|\varepsilon_1(h))$. On note $\tilde{h} = (df_a)(h) + \|h\|\varepsilon_1(h)$. Comme g est différentiable en $f(a)$, on peut écrire

$$g(f(a+h)) = g(f(a)) + dg_b(\tilde{h}) + \|\tilde{h}\|_F \varepsilon_2(\tilde{h})$$

$$\stackrel{h \rightarrow 0}{=} g(f(a)) + dg_b(df_a(h)) + \|h\| dg_b(\varepsilon_1(h)) + \|df_a(h) + \|h\|\varepsilon_1(h)\|_F \cdot \varepsilon_2(df_a(h) + \|h\|\varepsilon_1(h)).$$

Or $dg_b(\varepsilon_1(h)) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$, et $\varepsilon_2(df_a(h) + \|h\|\varepsilon_1(h)) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$. De plus,

$$\|df_a(h) + \|h\|\varepsilon_1(h)\|_F \leq \|df_a(h)\| + \|h\| \cdot \|\varepsilon_1(h)\| \leq \|df_a\| \cdot \|h\| + \|h\| \|\varepsilon_1(h)\| \leq \|h\| (\|df_a\| + \|\varepsilon_1(h)\|).$$

Il s'ensuit que $g(f(a+h)) = g(f(a)) + dg_b(df_a(h)) + \|h\|\varepsilon_3(h)$ où $\varepsilon_3(h) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$. Or df_a et $dg_{f(a)}$ sont linéaires et continues donc $dg_{f(a)} \circ df_a$ l'est aussi et $g \circ f$ est différentiable. En dimension finie (noté n), on pose \mathcal{C} la base canonique. On a $d(g \circ f)_a(e_j) = dg_b(df_a(e_j))$. Ainsi,

$$\frac{\partial(g \circ f)}{\partial x_j}(a) = dg_b\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}(a)\right).$$

Ici, $F = \mathbb{R}^n$ et $f = (f_1, \dots, f_n) = \sum_{k=1}^n f_k \tilde{e}_k$, on a $\frac{\partial f}{\partial x_j}(a) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial f_k}{\partial x_j}(a) \tilde{e}_k$ d'où

$$dg_{f(a)}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}(a)\right) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial f_k}{\partial x_j}(a) dg_{f(a)}(\tilde{e}_k) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial f_k}{\partial x_j}(a) \frac{\partial g}{\partial y_k}(f(a)).$$

On en déduit que

$$\frac{\partial(g \circ f)_i}{\partial x_j}(a) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial g_i}{\partial y_k}(f(a)) \frac{\partial f_k}{\partial x_j}(a).$$

□

Exemple 2.15. Soit $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ différentiable sur \mathbb{R}^2 . Considérons $\varphi(x, y) = g(x+y, x-y)$. On pose $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 ; (x, y) \mapsto (x+y, x-y)$. f est linéaire en dimension finie et elle est donc différentiable sur \mathbb{R}^2 et,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y) &= \partial_1 g(x+y, x-y) \frac{\partial f_1}{\partial x}(x, y) + \partial_2 g(x+y, x-y) \frac{\partial f_2}{\partial x}(x, y) \\ &= \partial g(x+y, x-y) + \partial f(x+y, x-y) \end{aligned}$$

De la même manière, $\frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, y) = \partial_1 g(x+y, x-y) - \partial_2 g(x+y, x-y)$

Proposition 2.16. Soit E, F deux espaces vectoriels normés, $U \subset E$ un ouvert, et $f : U \rightarrow F$.

- Si $f : U \rightarrow F$ est une application linéaire continue de E vers F , alors f est différentiable et C^1 en tout point de U et $\forall x \in U, df_x = f$.
- Si $E = E_1 \times \dots \times E_m$, E_1, \dots, E_m des espaces vectoriels normés, et f est une application multilinéaire continue, alors f est différentiable en tout point de U et pour tout $(x_1, \dots, x_m) \in U$, $\forall (h_1, \dots, h_m) \in E$,

$$(df_a)(h_1, \dots, h_m) = f(h_1, x_2, \dots, x_m) + f(x_1, h_2, \dots, x_m) + \dots + f(x_1, \dots, x_{m-1}, h_m).$$

Démonstration.

- Soit f une application linéaire continue. On a $f(a + h) - f(a) = f(a + h - a) = f(h) = f(h) + \|h\|\varepsilon(h)$.
- voir notes de cours. □

Exemple 2.17. $\rho : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} ; (x, y) \mapsto xy$ est bilinéaire continue. Donc ρ est différentiable en tout point $a \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, on a $d\rho_a(h_1, h_2) = a_1 h_2 + a_2 h_1$.

Proposition 2.18. Soit E, F deux espaces vectoriels normés, $U \subset E$ un ouvert, et $f : U \rightarrow F$. Si $F = F_1 \times \dots \times F_n$ et $f = (f_1, \dots, f_n)$ alors f est différentiable en a si et seulement si f_1, \dots, f_n sont différentiables en a et $df_a = ((df_1)_a, \dots, (df_n)_a)$.

Démonstration.

- \Rightarrow On considère $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ différentiable en a . On peut écrire : $f(a + h) = f(a) + df_a(h) + \|h\|\varepsilon(h)$. En particulier, $f_j(a + h) = f_j(a) + p_j(df_a(h)) + \|h\|\varepsilon_j(h)$ où $p_j(u) = u_j$ dès que $u = (u_1, u_2, \dots, u_n) \in F_1 \times \dots \times F_n$. p_j est linéaire continue sur $(F_1 \times \dots \times F_n, \|\cdot\|_\infty)$ à valeur dans $(F_j, \|\cdot\|_{F_j})$. f_j est donc différentiable en a par la Proposition 2.14 et $df_j = p_j \circ df_a$.
- \Leftarrow Supposons f_1, \dots, f_n sont différentiables en a , $f_j(a + h) = f_j(a) + (df_j)_a(h) + \|h\|\varepsilon_j(h)$ où $l(h) = ((df_1)_a(h), \dots, (df_n)_a(h))$ et $\varepsilon(h) = (\varepsilon_1(h), \dots, \varepsilon_n(h))$.
 l est linéaire continue et $\varepsilon(h) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$. □

Corollaire 2.19. Soit E, F deux espaces vectoriels normés, $U \subset E$ un ouvert, $(f, f_1, f_2) : U \rightarrow F$ des fonctions différentiables en a . et $\lambda \in \mathbb{R}$.

- $d(f_1 + \lambda f_2)_a$ est différentiable en a et $d(f_1 + \lambda f_2)_a = (df_1)_a + \lambda(df_2)_a$,
- Si $F = \mathbb{R}$ et si f_1, f_2 différentiables en a alors $f_1 f_2$ est différentiable en a et

$$d(f_1 f_2)_a = f_2(a)(df_1)_a + f_1(a)(df_2)_a.$$

Démonstration.

- Soit f_1, f_2 différentiables en a et $\lambda \in \mathbb{R}$, on considère $f = (f_1, f_2)$ différentiable en a et $C : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} ; (x, y) \mapsto x + \lambda y$ différentiable en tout point car linéaire continue. Alors $c \circ f$ est différentiable en a par Proposition 2.14 et $d(c \circ f)_a = dC_{f(a)} \circ df_a = c \circ df_a = c((df_1)_a, (df_2)_a) = d(f_1)_a + \lambda(df_2)_a$.
- Soit f_1, f_2 à valeurs réelles différentiables en a , $p : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} ; (x_1, x_2) \mapsto x_1 x_2$ est bilinéaire continue donc différentiable en tout point de \mathbb{R}^2 par la Proposition 2.16. Ainsi, par composition, $p \circ f$ est différentiable en a . De plus,

$$d(p \circ f)_a = dp_{f(a)} \circ df_a = dp_{f(a)}((df_1)_a, (df_2)_a) = f_2(a)(df_1)_a + f_1(a)(df_2)_a. \quad \square$$

Théorème 2.20 (Inég. des accroissements finis). Soit $(F, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé, $I = [\alpha, \beta]$, $\varphi : I \rightarrow F$, et $\Phi : I \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables telles que $\forall x \in [\alpha, \beta], \|\Phi'(x)\| \leq \varphi'(x)$. Alors,

$$\|\Phi(\beta) - \Phi(\alpha)\| \leq \varphi(\beta) - \varphi(\alpha).$$

Remarque 2.21. $\varphi(x) = Mx, M > 0$; alors $\forall x \in [\alpha, \beta], \|\Phi'(x)\| \leq M \Rightarrow \|\Phi(\beta) - \Phi(\alpha)\| \leq M(\beta - \alpha)$.

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$. Considérons l'ensemble

$$A = \{\alpha \in [\alpha, \beta] \mid \forall t \in [\alpha, \gamma], \|\Phi(t) - \Phi(\alpha)\| \leq \varphi(t) - \varphi(\alpha) + \varepsilon(t - \alpha)\} \subset [\alpha, \beta].$$

Puisque $\alpha \in A$ et A est majoré par β , $\theta := \sup A$ existe. De plus, A est fermé du fait de la continuité de φ et Φ , donc $\theta \in A$, par ailleurs, A est un intervalle. Ainsi, on peut écrire $A = [\alpha, \theta]$. Montrons par absurde $\theta = \beta$. Supposons $\theta < \beta$.

Par définition de θ , $\|\Phi(\theta) - \Phi(\alpha)\| \leq \varphi(\theta) - \varphi(\alpha) + \varepsilon(\theta - \alpha)$. Puisque φ et Φ sont dérivables, $\exists \delta > 0$ tel que $\forall t \in [0, \delta], \|\Phi(\theta + t) - \Phi(\theta) - t\Phi'(\theta)\| \leq \frac{\varepsilon}{2}t$, et $|\varphi(\theta + t) - \varphi(\theta) - t\varphi'(\theta)| \leq \frac{\varepsilon}{2}t$. Ainsi,

$$\begin{aligned} \|\Phi(\theta + t) - \Phi(\alpha)\| &\leq \|\Phi(\theta + t) - \Phi(\theta)\| + \|\Phi(\theta) - \Phi(\alpha)\| \\ &\leq \|\Phi(\theta + t) - \Phi(\theta)\| + \varphi(\theta) - \varphi(\alpha) + \varepsilon(\theta - \alpha). \end{aligned}$$

Or par inégalité triangulaire (inversée ?),

$$\begin{aligned} \|\Phi(\theta + t) - \Phi(\theta)\| &\leq t\|\Phi'(\theta)\| + \frac{\varepsilon}{2}t \leq t\varphi'(\theta) + \frac{\varepsilon}{2}t \\ &\leq \varphi(\theta + t) - \varphi(\theta) + \varepsilon t. \end{aligned}$$

Alors, pour tout $t \in [\alpha, \beta]$, $\|\Phi(t) - \Phi(\alpha)\| \leq \varphi(t) - \varphi(\alpha) + \varepsilon(t - \alpha)$. D'où

$$\begin{aligned} \|\Phi(\theta) - \Phi(t)\| &\leq \varphi(\theta) - \varphi(\alpha) + \varepsilon(\theta - \alpha) + \varphi(\theta + t) - \varphi(\theta) + \varepsilon t \\ &= \varphi(\theta + t) - \varphi(\alpha) + \varepsilon(\theta + t - \alpha). \end{aligned}$$

Cela montre que pour tout $t \in [0, \delta], \theta + t \in A$ absurde. D'où $t = \beta$, et

$$\|\Phi(b) - \Phi(\alpha)\| \leq \varphi(\beta) - \varphi(\alpha) + \varepsilon(\beta - \alpha) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \varphi(\beta) - \varphi(\alpha). \quad \square$$

Proposition 2.22. Soit E, F deux espaces vectoriels normés, $U \subset E$ un ouvert non vide, et $f : U \rightarrow F$ une application C^1 . On considère $a_t = (1 - t)a_0 + ta_1, t \in [0, 1]$. S'il existe $M \geq 0$ tel que $\|df_{a_t}\| \leq M$, alors

$$\|f(a_1) - f(a_0)\| \leq M\|a_1 - a_0\|.$$

Démonstration. Considérons $a_t = (1 - t)a_0 + ta_1, t \in [0, 1]$, et $\varphi : [0, 1] \rightarrow F; t \mapsto f(a_t)$. $t \mapsto a_t$ est une fonction affine donc dérivable. Puisque f est différentiable sur U , on peut appliquer la Proposition 2.14 et on trouve Φ dérivable et $\Phi'(t) = df_{a_t}\left(\frac{da}{dt}\right) = df_{a_t}(a_1 - a_0)$.

On a $\|\Phi'(t)\| = \|df_{a_t}(a_1 - a_0)\| \leq \|df_{a_t}\| \cdot \|a_1 - a_0\| \leq M\|a_1 - a_0\|$. On pose $\varphi(t) = M\|a_1 - a_0\| \cdot t$.

On a $\|\Phi'(t)\| \leq \varphi'(t)$. Ainsi, $\|f(a_1) - f(a_0)\| = \|\Phi(1) - \Phi(0)\| \leq \varphi(1) - \varphi(0) = M\|a_1 - a_0\|$. \square

Corollaire 2.23. Supposons U convexe, et $\forall x \in U, \|df_x\| \leq M$. Alors f est M -lipschitzienne.

Remarque 2.24. Sur un ouvert convexe, et si la différentielle est nulle alors f est constante.

Proposition 2.25. Si U est un connexe par arcs et si $df_x = 0$ pour tout $x \in U$, alors f est constante sur U .

2.5. Différentielles partielles et d'ordre supérieur.

2.5.1. Différentielles partielles.

Soit E_1, \dots, E_n, F des espaces vectoriels normés. On note $E = E_1 \times \dots \times E_n$ que l'on muni de $\|(x_1, \dots, x_n)\| = \max \|x_i\|_{E_i}$.

Définition 2.26. Soit U un ouvert de E et $f : U \rightarrow F$, $a = (a_1, \dots, a_n) \in U \subset E$. On dit que f est différentiable par rapport à la i -ème variable au point a lorsque l'application partielle $f_i : E_i \rightarrow F$; $x \mapsto f(a_1, a_2, \dots, x, a_{i+1}, \dots, a_n)$ est différentiable en a_i .

La différentielle de cette application est notée $\partial_i f_a$. C'est un élément de $\mathcal{L}_c(E_i, F)$.

Proposition 2.27. Si f est différentiable en $a \in U$, alors f est différentiable partiellement par rapport à chaque variable en a et

$$df_a(h_1, \dots, h_n) = \sum_{i=1}^n \partial_i f_a(h_i).$$

Démonstration. Soit $i \in \{1, \dots, n\}$. Pour $x \in E_i$, on pose $\tilde{x}_i = (0, 0, \dots, x_{i\text{ème pos}}, 0, \dots, 0) = q_i(x)$. Comme f est différentiable en a on peut écrire

$$f(a + \tilde{x}_i) - f(a) - df_a(\tilde{x}_i) \underset{x \rightarrow 0}{=} \|\tilde{x}_i\| \varepsilon(\tilde{x}_i).$$

C'est la définition de la différentiabilité partielle de f en a par rapport à la i -ème variable. La différentielle est $\partial_i f_a = df_a \circ q_i$. Enfin, pour $h \in E$, $h = \sum_{i=1}^n \tilde{h}_i$ d'où

$$df_a(h) = \sum_{i=1}^n df_a(\tilde{h}_i) = \sum_{i=1}^n \partial_i f_a(h_i).$$

□

Proposition 2.28. Soit U un ouvert connexe par arcs, et $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction \mathcal{C}^1 de différentielle nulle sur U . Alors f est constante.

Démonstration. Soit $x, y \in U$, $\gamma : [0, 1] \rightarrow U$; $t \mapsto \gamma(t)$ telle que $\gamma(0) = x, \gamma(1) = y$.

On considère $\forall t \in [0, 1], g(t) = f(\gamma(t))$. La fonction g est continue sur $[0, 1]$. On a $\begin{cases} g(0) = f(x) \\ g(1) = f(y) \end{cases}$.

Montrons que g est localement constante.

Soit $t_0 \in [0, 1]$. On a $\gamma(t_0) \in U$, alors il existe $\delta > 0$ tel que $B(\gamma(t_0), \eta) \subset U$. Par ailleurs, γ est continue en t_0 . Alors il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $t \in]t_0 - \delta, t_0 + \delta[\cap [0, 1]$, $\|\gamma(t) - \gamma(t_0)\| < \eta$, i.e $\gamma(t) \in B(\gamma(t_0), \eta)$. Les boules sont convexes, de plus f est de différentielle nulle sur U et donc sur $B(\gamma(t_0), \eta)$. Ainsi, f est constante sur $B(\gamma(t_0), \eta)$. On en déduit que g est constante sur $]t_0 - \delta, t_0 + \delta[\cap [0, 1]$. Ainsi, g est dérivable de dérivée nulle. Ainsi, par le théorème des accroissements finis, on en déduit que g est constante. □

Remarque 2.29. $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$. possède des différentielles partielles en $(0, 0)$ mais n'est pas différentiable en 0.

Proposition 2.30. Soit $f : U \rightarrow F$ une fonction. f est \mathcal{C}^1 si et seulement si f est différentiable par rapport à chaque variable de différentielle continue en tout point de U .

Démonstration.

⇒ Supposons que f est \mathcal{C}^1 sur U . Alors on sait que f est différentiable en tout point de U par rapport à chaque variable et on a $(\partial_i f)_a = df_a \circ q_i$, avec $q_i(x) = (0, 0, \dots, x_{i\text{-ème pos}}, 0, \dots, 0)$. Par hypothèse, $x \mapsto df_a$ est continue et donc par composition, $\partial_i f$ est continue sur U .

⇐ Supposons que les différentielles partielles existent et sont continues sur U . Soit $a \in U$, $\varepsilon > 0$. Il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $h = (h_1, h_2, \dots, h_n) \in E$ tq $\|h\| < \delta$, on a $a + h \in U$ et $\|\partial_i f_{a+h} - \partial_i f_a\|_{\mathcal{L}_c(E_i, F)} \leq \varepsilon$. On pose $h(k) = (h_1, h_2, \dots, h_k, 0, \dots, 0)$, $h(n) = h$ et $h(0) = 0$, et posons $\tilde{h}_k = (0, \dots, 0, k, 0, \dots, 0)$. Examinons

$$f(a + h) - f(a) = \sum_{k=1}^n f(a + h(k-1) - \tilde{h}_k) - f(a + h(k-1)).$$

On écrit

$$f(a + h) - f(a) - \sum_{k=1}^n \partial_k f_a(h_k) = \sum_{k=1}^n f(a + h(k-1) - \tilde{h}_k) - f(a + h(k-1)) - \partial_k f_a(h_k)$$

On considère $\Phi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$; $t \mapsto f(a + h(k-1) + t\tilde{h}_k) - t\partial_k f_a(h_k)$. On remarque $\Phi(1) = f(a + h(k-1) + \tilde{h}_k) - \partial_k f_a(h_k)$ et $\Phi(0) = f(a + h(k-1))$. Par différentiation des fonctions composées (on utilise que f est différentiable dans la direction k), on a :

$$\Phi'(t) = \partial_k f_{a+h(k-1)+t\tilde{h}_k}(h_k) - \partial_k f_a(h_k)$$

. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $r > 0$ tel que pour tout $h \in E$, $\|h\| < r$ et pour tout $t \in [0, 1]$,

$$\left\| \partial_k f_{a+h(k-1)+t\tilde{h}_k} - \partial_k f_a \right\|_{\mathcal{L}(E_k, F)} \Rightarrow \|\Phi'(t)\| \leq \varepsilon \|h_k\| = \varphi'(t).$$

Par l'Inég. des accroissements finis, on a que $\|\Phi(1) - \Phi(0)\| \leq \varepsilon \|h_k\|$. Par inégalité triangulaire, on a donc $\left\| f(a + h) - f(a) - \sum_{k=1}^n \partial_k f_a(h_k) \right\|_F \leq n\varepsilon \|h\|$. On reconnaît la définition de la différentiabilité en a . La différentielle étant donnée pour tout $h \in E$ par

$$df_a(h) = \sum_{k=1}^n \partial_k f_a(h_k)$$

qui est bien continue par somme de fonctions continue. □

Corollaire 2.31. Soit $f : U \rightarrow F$.

- Si f est différentiable en a , sa différentielle est donnée par

$$df_a(h) = \sum_{k=1}^m \frac{\partial f}{(\partial x_k(a)h_k)}.$$

- f est \mathcal{C}^1 sur U si et seulement si ses dérivées partielles existent et sont continues en tout point de U .

2.5.2. Différentielles d'ordre 2.

Définition 2.32. Soit E, F des espaces vectoriels normés, $U \subset E$ un ouvert $a \in U$, et $f : U \rightarrow F$. On dit que f est deux fois différentiables lorsque f est différentiable en tout point $x \in U$ et que $\cdot : V_a \rightarrow \mathcal{L}_c(E, F)$; $x \mapsto df_x$ est différentiable en a , on note sa différentielle au point a $d^2 f_a \in \mathcal{L}_c(E, \mathcal{L}_c(E, F))$.