

# Diagonalisation

## Table des matières

<b>1. Déterminants.</b>	<b>1</b>
1.1. forme n-linéaires alternée.	1
1.2. Déterminant d'une famille de $E^n$ .	4
1.3. Déterminant d'un endomorphisme.	5
1.4. Déterminant d'une matrice carrée.	6
1.5. Déterminant d'une matrice triangulaire par blocs.	8
1.6. Développements d'un déterminant par rapport à une colonne.	8
1.7. Formule de Cramer.	10
<b>2. Reduction d'endomorphisme.</b>	<b>11</b>
2.1. Rappels sur les équations linéaires.	11
2.2. Décomposition d'un espace vectoriel en sous-espace vectoriels stables.	12
2.3. Sous- espaces propres.	12
2.4. Polynomes caractéristique.	13
<b>3. Diagonalisation.</b>	<b>14</b>
<b>4. Polynômes d'endomorphismes.</b>	<b>16</b>
<b>5. Applications aux suites récurrentes.</b>	<b>17</b>
<b>6. Système linéaire d'équations différentielles du 1<sup>er</sup> ordre.</b>	<b>17</b>
<b>7. Equations différentielles linéaires à coefficients constants.</b>	<b>18</b>

## Chapitre 1

### 1. Déterminants.

#### 1.1. forme n-linéaires alternée.

**Définition 1.1.1** (forme n-linéaire): Soit  $E$  un espace vectoriel, et  $\varphi : E^n \rightarrow \mathbb{R}$  une application. On dit que  $\varphi$  est une **forme n-linéaire** si  $\varphi$  est linéaire par rapport à chaque variable i.e,  $\forall x_1, -, x_i, -, x_n, y_i \in E, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ,

$$\varphi(x_1, -, x_{i-1}, \alpha x_i + \beta y_i, -, x_n) = \alpha \varphi(x_1, -, x_{i-1}, x_i, -, x_n) + \beta \varphi(x_1, -, x_{i-1}, y_i, -, x_n)$$

*Exemples:*

1. Montrons que  $\varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; (x_1, x_2) \mapsto x_1 x_2$  est 2-linéaire. Soit  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ . On a

$$(\alpha x_1 + \beta y_1) x_2 = \alpha (x_1 x_2) + \beta (y_1 x_2) \text{ et } x_1 (\alpha x_2 + \beta y_2) = \alpha (x_1 x_2) + \beta (x_1 y_2).$$

2.  $\varphi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}; (u^{\rightarrow}, v^{\rightarrow}) \mapsto u^{\rightarrow} \times v^{\rightarrow}$  est 2-linéaire (et symétrique).

3. Le déterminant 2-2 est 2-linéaire.

*Remarque:*  $\varphi(x_1, -, 0, -, x_n) = 0$ .

**Définition 1.1.2** (alternée): Soit  $\varphi$  une application n-linéaire. On dit que  $\varphi$  est **alternée** si

$$\forall i, j \in \{1, -, n\} \text{ avec } i \neq j, x_i = x_j \Rightarrow \varphi(x_1, -, x_n) = 0.$$

**Proposition 1.1.1:** Soit  $f_1, -, f_n : E \rightarrow F$   $n$  applications linéaires. Soit  $\varphi : F^n \rightarrow \mathbb{R}$   $n$ -linéaire. Alors

$$\varphi \circ (f_1, -, f_n) : E^n \rightarrow \mathbb{R}; x_1, -, x_n \mapsto \varphi(f_1(x_1), -, f_n(x_n))$$

est  $n$ -linéaire.

*Démonstration:* Puisque les  $f_1, -, f_n$  sont linéaires, et que  $\varphi$  est  $n$ -linéaire, il est évident que  $\varphi \circ (f_1, -, f_n)$  est  $n$ -linéaire.  $\square$

**Définition 1.1.3** (antisymétrie): Soit  $\varphi$  une application  $n$ -linéaire. On dit que  $\varphi$  est **antisymétrique** si

$$\forall i, j \in [1, n] \text{ avec } i \neq j, \varphi(x_1, -, x_i, -, x_j, -, x_n) = -\varphi(x_1, -, x_j, -, x_i, -, x_n)$$

**Proposition 1.1.2:** Soit  $\varphi$  une application  $n$ -linéaire et alternée. On ne change pas la valeur de  $\varphi(x_1, -, x_n)$  en ajoutant à un des vecteurs de la famille une combinaison linéaire des autres. i.e,  $\forall i \in \{1, -, n\}, \forall a_1, -, a_{i-1}, a_{i+1}, -, a_n \in \mathbb{R}$ ,

$$\varphi\left(x_1, -, x_i + \sum_{j=1, j \neq i}^n \alpha_j x_j, -, x_n\right) = \varphi(x_1, -, x_n)$$

*Démonstration:* Sans perte de généralité, on montre le cas où  $i = 1$ .

$$\begin{aligned} \varphi\left(x_1 + \sum_{j=2}^n \alpha_j x_j, -, x_n\right) &= \varphi(x_1, -, x_n) + \sum_{j=2}^n \alpha_j \varphi(x_j, -, x_j, -, x_n) \\ &= \varphi(x_1, -, x_n) \end{aligned}$$

Car  $\varphi$  est alternée.  $\square$

**Proposition 1.1.3:** Soit  $\varphi$  une application  $n$ -linéaire.  $\varphi$  est alternée si et seulement si  $\varphi$  est antisymétrique.

*Démonstration:*

$\Rightarrow$  Supposons que  $\varphi$  soit alternée. On pose  $x_i = x_j$  Alors on a  $\varphi(x_1, -, x_i, -, x_j, -, x_n) = 0$

$$\begin{aligned} \varphi(x_1, -, x_i, -, x_j, -, x_n) &= \varphi(x_1, -, x_i + x_j, -, x_j + x_i, -, x_n) \\ &= \varphi(x_1, -, x_i, -, x_j + x_i, -, x_n) + \varphi(x_1, -, x_j, -, x_j + x_i, -, x_n) \\ &= \varphi(x_1, -, x_i, -, x_j, -, x_n) + \cancel{\varphi(x_1, -, x_i, -, x_i, -, x_n)} \\ &\quad + \cancel{\varphi(x_1, -, x_j, -, x_j, -, x_n)} + \varphi(x_1, -, x_j, -, x_i, -, x_n) \quad \text{car } \varphi \text{ est alternée.} \\ &= \varphi(x_1, -, x_i, -, x_j, -, x_n) + \varphi(x_1, -, x_j, -, x_i, -, x_n) \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}
0 &= \varphi(x_1, -, x_i, -, x_j, -, x_n) + \varphi(x_1, -, x_j, -, x_i, -, x_n) \\
&\Leftrightarrow \varphi(x_1, -, x_i, -, x_j, -, x_n) = -\varphi(x_1, -, x_j, -, x_i, -, x_n)
\end{aligned}$$

Donc  $\varphi$  est antisymétrique.

$\Leftarrow$  Supposons que  $\varphi$  soit antisymétrique. Alors on a :

$$\varphi(x_1, -, x_i, -, x_j, -, x_n) = -\varphi(x_1, -, x_j, -, x_i, -, x_n)$$

En particulier, en posant  $x_j = x_i$  on a :

$$\begin{aligned}
\varphi(x_1, -, x_i, -, x_i, -, x_n) &= -\varphi(x_1, -, x_i, -, x_i, -, x_n) \\
&\Leftrightarrow 2\varphi(x_1, -, x_i, -, x_i, -, x_n) = 0 \\
&\Leftrightarrow \varphi(x_1, -, x_i, -, x_i, -, x_n) = 0
\end{aligned}$$

□

**Proposition 1.1.4:** Soit  $\varphi$  une application  $n$ -linéaire et alternée. Si  $(x_1, -, x_n)$  est une famille liée alors  $\varphi(x_1, -, x_n) = 0$

*Démonstration:*  $(x_1, -, x_n)$  est liée donc il existe  $\alpha_1, -, \alpha_n \in \mathbb{R}$  tel que  $\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n = 0$  avec  $\alpha_i \neq 0$  cas  $\alpha_1 \neq 0$ ,  $x_1 = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1} x_2 - \dots - \frac{\alpha_n}{\alpha_1} x_n$ , alors

$$\begin{aligned}
\varphi(x_1, -, x_n) &= \varphi\left(-\frac{\alpha_2}{\alpha_1} x_2 - \dots - \frac{\alpha_n}{\alpha_1} x_n, x_2, -, x_n\right) \\
&= \text{TODO} = 0
\end{aligned}$$

□

**Corollaire 1.1.1:** Si  $\dim(E) < n$  toutes les formes  $n$ -linéaires alternées sur  $E$  sont nulles.

*Démonstration:* Soit  $E$  un espace vectoriel,  $x_1, -, x_n \in E$ . Alors  $(x_1, -, x_n)$  est liée donc  $\varphi(x_1, -, x_n) = 0$ . □

**Théorème 1.1.1:** Si  $\dim(E) \geq n$  alors il existe des formes  $n$ -linéaires alternées sur  $E$  non nulles.

De plus, si  $\dim(E) = n$  deux formes  $n$ -linéaires alternées sur  $E$   $\varphi_1$  et  $\varphi_2$  non nulles sont proportionnelles i.e,  $\exists \lambda \in \mathbb{R}$  tel que  $\forall x_1, -, x_n \in E$ ,  $\varphi_2(x_1, -, x_n) = \lambda \varphi_1(x_1, -, x_n)$ .

## 1.2. Déterminant d'une famille de $E^n$ .

**Lemme 1.2.1:** Soit  $m : E^2 \rightarrow \mathbb{R}$ . Alors  $a_m : E^2 \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$a_m(x_1, x_2) = m(x_1, x_2) - m(x_2, x_1)$$

est bilinéaire antisymétrique.

*Démonstration:* Soit  $x_1, x_2 \in E$ . On montre l'antisymétrie.

$$\begin{aligned} a_m(x_1, x_2) &= m(x_1, x_2) - m(x_2, x_1) = -(m(x_2, x_1) - m(x_1, x_2)) \\ &= -a_m(x_2, x_1) \end{aligned}$$

La linéarité est évidente. □

**Théorème 1.2.1:** Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension  $n$ , et  $B = (e_1, \dots, e_n)$  une base de  $E$ . Alors il existe une unique forme  $n$ -linéaire alternée:  $\det_B : E^n \rightarrow \mathbb{R}$  telle que  $\det_B(e_1, \dots, e_n) = 1$ .

*Démonstration cas  $n=2$ :* TODO VOIR MAXIME □

**Définition 1.2.1** (Déterminant): Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension  $n$ , et  $B = (e_1, \dots, e_n)$  une base de  $E$ . On appelle **déterminant** dans la base  $B$  la forme  $n$ -linéaire du Théorème précédent

**Théorème 1.2.2:** Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension  $n$ , et  $B$  une base de  $E$ . Une famille  $F = \{f_1, \dots, f_n\}$  de  $E$  est libre si et seulement si  $\det_B(f_1, \dots, f_n) \neq 0$ . Dans ce cas on a :

$$\forall x_1, \dots, x_n \in E, \det_B(x_1, \dots, x_n) = \det_B(F) \det_F(x_1, \dots, x_n).$$

*Démonstration:* Soit  $F = (f_1, \dots, f_n)$  une famille,  $B = (e_1, \dots, e_n)$ .

Si  $F$  est liée on a  $\det_B$  est  $n$ -linéaire alternée. Alors  $\det_B(f_1, \dots, f_n) = 0$ .

Si  $F$  est libre alors  $F$  est une base donc  $\exists \lambda \in \mathbb{R}, \det_B = \lambda \det_F$  voir (Théorème). En particulier,

$$\det_B(f_1, \dots, f_n) = \lambda \det_F(f_1, \dots, f_n) \stackrel{\text{par définition}}{=} \lambda \cdot 1$$

$$\text{Or} \quad 1 = \det_B(e_1, \dots, e_n) = \lambda \det_F(e_1, \dots, e_n) \text{ d'où } \lambda \neq 0$$

D'où  $\det_B(f_1, \dots, f_n) \neq 0$ . □

### 1.3. Déterminant d'un endomorphisme.

**Théorème 1.3.1:** Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension  $n$  et  $f : E \rightarrow E$  un endomorphisme. Alors il existe un unique réel  $\det(f)$  tel que pour toute application  $\varphi$   $n$ -linéaire alternée, et pour tout  $(x_1, -, x_n) \in E$ ,

$$\varphi(f(x_1), f(x_n)) = \det(f)\varphi(x_1, -, x_n).$$

*Remarque:* En prenant  $x_1, -, x_n = e_1, -, e_n$ ,

$$\det_B(f(B)) = \det F.$$

*Démonstration:* Existence: Soit  $\varphi$  une forme  $n$ -linéaire alternée non-nulle et  $\psi : E^n \rightarrow \mathbb{R}; x_1, -, x_n \mapsto (f(x_1), -, f(x_n))$  qui est une forme  $n$ -linéaire alternée. Alors  $\varphi$  et  $\psi$  sont proportionnelles, i.e il existe  $\lambda \in \mathbb{R}$  tel que  $\psi = \lambda\varphi$  (**Théorème**).

Soit  $\Phi$  une forme  $n$ -linéaire alternée quelconque, alors il existe  $\alpha \in \mathbb{R}$  tel que  $\Phi = \alpha\varphi$ , et  $\forall x_1, -, x_n \in E$ ,

$$\Phi(f(x_1), -, f(x_n)) = \alpha\varphi(f(x_1), -, f(x_n)) = \alpha\varphi(\psi(x_1, -, x_n)) = \lambda\Phi(x_1, -, x_n)$$

MYSTIQUE □

**Définition 1.3.1:** Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension  $n$  et  $f : E \rightarrow E$  un endomorphisme. On appelle **déterminant de  $f$**  le réel  $\det(f)$  du **Théorème** précédent.

**Proposition 1.3.1:** Soit  $f : E \rightarrow E$  et  $g : E \rightarrow E$  deux endomorphismes. Alors,

$$\det(f \circ g) = \det(f) \det(g).$$

*Démonstration:* Soit  $\varphi : E^n \rightarrow \mathbb{R}$  une application  $n$ -linéaire alternée,  $x_1, -, x_n \in E$ .

On a:

$$\begin{aligned} \varphi(f \circ g(x_1), -, f \circ g(x_n)) &= \det(f)\varphi(g(x_1), -, g(x_n)) \text{ par definition de } \det(f). \\ &= \det(f) \det(g)\varphi(x_1, -, x_n) \text{ par definition de } \det(g) \end{aligned}$$

De plus :

$$\varphi(f \circ g(x_1), -, f \circ g(x_n)) = \det(f \circ g)\varphi(x_1, -, x_n)$$

Par unicité de  $\det(f \circ g)$ ,  $\det(f \circ g) = \det f \det(g)$ . □

**Proposition 1.3.2:** Soit  $E$  et  $F$  deux espaces vectoriels,  $f : E \rightarrow F$  un isomorphisme d'espace vectoriel, et  $B$  une base de  $E$ . Alors  $f(B)$  est une base de  $F$  et

$$\det_{f(B)} f(F) = \det_B F.$$

*Démonstration:*  $\det_{f(B)} f$  et  $\det_B$  sont deux formes  $n$ -linéaires alternées sur  $E$  qui valent 1 sur  $B$  donc elles sont égales. □

**Théorème 1.3.2:** Soit  $f : E \rightarrow E$  un endomorphisme. Alors,  $f$  est bijectif si et seulement si  $\det(f) \neq 0$  et on a :

$$\det(f^{-1}) = \frac{1}{\det(f)}.$$

*Démonstration:* Soit  $B$  une base de  $E$  un espace vectoriel.

On rappelle  $f$  est bijectif  $\Leftrightarrow f(B)$  est une base.  $\Leftrightarrow \det_B f(B) \neq 0$ . Si  $f$  est bijectif,  $f \circ f^{-1} = \text{id}_E$  donc  $\det(f \circ f^{-1}) = \det(\text{id}_E) = \det f \det f^{-1}$  or  $\det(\text{id}_E) = 1$

D'où  $\det(f^{-1}) = \frac{1}{\det(f)}$ . □

## 1.4. Déterminant d'une matrice carrée.

**Définition 1.4.1:** Soit  $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$  une matrice. On appelle **déterminant de  $A$**

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} := \det_{(e_1, \dots, e_n)}((a_{11}, \dots, a_{1n}), \dots, (a_{n1}, \dots, a_{nn}))$$

le déterminant dans la base canonique de  $\mathbb{R}^n$  des  $n$  vecteurs colonnes de  $A$ .

**Théorème 1.4.1:** Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension finie,  $f : E \rightarrow E$  un endomorphisme. Alors

$$\det f = \det M_{B,B}(f).$$

Où  $M_{B,B}(f)$  est la matrice associée à  $f$  dans la base  $B$ .

**Proposition 1.4.1:** Soit  $A, B \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$

1.  $\det(AB) = \det(A) \det(B)$ .
2.  $A$  inversible  $\Leftrightarrow \det A \neq 0$ . Si  $A$  est inversible alors  $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$ .
3.  $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$ .

*Démonstration:*

1. Soit  $f : E \rightarrow E$ ,  $g : E \rightarrow E$ ,  $A, B$  les matrices associées respectivement à  $f$  et  $g$ . Alors la matrice associée à  $f \circ g$  est  $M_{B,B}(f \circ g) = AB$ . Ainsi,

$$\det(AB) = \det M(f \circ g) = \det(f \circ g) = \det f \det g = \det A \det B.$$

2. De même en considérant les endomorphismes associés.
3. Par  $n$ -linéarité.

□

*Remarque (ATTENTION):*  $\det(A + B) \neq \det(A) + \det(B)$

**Théorème 1.4.2:** Soit  $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ ,  $E$  un espace vectoriel de dimension  $n$ ,  $B$  une base de  $E$ , et  $x_1, \dots, x_n$  tels que  $x_i := a_{1i}e_1 + \dots + a_{ni}e_n$ . Alors

$$\det A = \det_B(x_1, \dots, x_n).$$

*Démonstration:* Soit  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow E$ ; base canonique  $\mapsto$  base  $B = y_1, \dots, y_n \mapsto y_1e_1 + \dots + y_ne_n$ .  $f$  est bien un isomorphisme. On a :  $f(a_{1i}, \dots, a_{ni}) = x_i$ . D'après la proposition,

$$\det_{f(C)} f(a_{1i}, \dots, a_{ni}) = \det_C(a_{1i}, \dots, a_{ni}) = \det A = \det_B(x_1, \dots, x_n).$$

□

*Remarque:* Le déterminant est indépendant de la base  $B$  choisie.

**Définition 1.4.2** (transposée): Soit  $A \in M_{p,q}(\mathbb{K})$  avec

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,q} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p,1} & \dots & a_{p,q} \end{pmatrix}$$

Alors la transposée est notée  ${}^tA \in M_{p,q}(\mathbb{K})$  est la matrice

$${}^tA = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{p,1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1,q} & \dots & a_{p,q} \end{pmatrix}.$$

**Théorème 1.4.3** (Admis): Soit  $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$  une matrice carrée. Alors :

$$\det {}^tA = \det A.$$

*Remarque:* Conséquence directe: Toutes les propriétés des déterminants qui ont été étendues sur les colonnes sont aussi valables en opérant sur les lignes.

**Proposition 1.4.2:** Le déterminant est une forme n-linéaire alternée. Ainsi :

1. Il y a n-linéarité du déterminant par rapport aux vecteurs colonnes (ou lignes).
2. Soit  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

$$\alpha \det(\cdot) = \det(\alpha C_i).$$

3. Si on échange deux colonnes, le déterminant est multiplié par  $-1$ .
4.  $\det A \neq 0 \Leftrightarrow$  les  $n$  vecteurs colonnes forment une famille libre

## 1.5. Déterminant d'une matrice triangulaire par blocs.

**Théorème 1.5.1:** Soit  $A, B \in \text{Mat}(\mathbb{R})$  des matrices carrées,  $M$  une matrice carrée de la forme  $M = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$ . Alors :

$$\det M = \det A \det B.$$

*Démonstration:* Soit  $B, C$  des matrices de dimension  $n$ ,

$\varphi_{B,C} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}; (c_1, -, c_n)_{\text{vecteurs colonnes}} \mapsto \begin{vmatrix} A & C \\ 0 & B \end{vmatrix}$ .  $\Phi_{B,C}$  est  $n$ -linéaire alternée donc

$$\forall A \in \text{Mat}(\mathbb{R}), \begin{vmatrix} A & C \\ 0 & B \end{vmatrix} = \varphi_{B,C}(c_1, -, c_n) = \lambda_{B,C} \det A.$$

En prenant  $A = I_n$ ,  $\det A = 1$  ... incompréhensible...

En faisant des opérations sur les colonnes,  $\lambda_{B,C} = \begin{vmatrix} I_n & 0 \\ 0 & B \end{vmatrix}$

□

**Théorème 1.5.2** (même généralisé): Soit  $M$  une matrice carrée de la forme

$$M = \begin{pmatrix} A_1 & * & \cdots & * \\ 0 & A_2 & * & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & A_k \end{pmatrix} \text{ avec } (A_i)_{i \in \{1, -, k\}} \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R}). \text{ Alors}$$

$$\det M = \det A_1 \cdot \dots \cdot \det A_k$$

*Remarque (Cas particulier):* Déterminant d'une matrice triangulaire (ou diagonale):

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & \cdots \\ 0 & a_{22} & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}$$

## 1.6. Développements d'un déterminant par rapport à une colonne.

**Définition 1.6.1** (Déterminant mineur): Soit  $A = (a_{ij})_{i,j \in \{1, -, n\}} \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R})$ . On appelle **déterminant mineur** de  $A$ , relatif à  $a_{ij}$ , le déterminant d'ordre  $n-1$  obtenu en rayant dans  $A$  la  $i$ -ème ligne et la  $j$ -ème colonne. On le note  $\Delta_{ij}$ .

**Définition 1.6.2** (Cofacteur): Soit  $A = (a_{ij})_{i,j \in \{1, -, n\}} \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R})$ . On appelle **cofacteur** de  $A$  relatif à  $a_{ij}$ ,

$$c(ij) = (-1)^{i+j} \Delta_{ij}.$$

**Définition 1.6.3** (Comatrice): Soit  $A = (a_{ij})_{i,j \in \{1, -, n\}} \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R})$ . On appelle **comatrice** de  $A$  la matrice des cofacteurs  $(c_{ij})_{i,j \in \{1, -, n\}}$ . On la note  $\text{com } A$ .



**Théorème 1.6.1:** Développement par rapport à la  $j$ -ième colonne.

Soit  $A = (a_{ij})_{i,j \in \{1, \dots, n\}} \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R})$ .

$$\det A = a_{1j}c_{1j} + \dots + a_{nj}c_{nj}$$

*Remarque:* On a toujours intérêt à développer suivant la ligne ou la colonne avec le plus de 0.

*Exemple:* Développement d'un déterminant par rapport à la deuxième colonne.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & -2 & 1 \\ -3 & -3 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 5 & -3 \end{vmatrix} = -0 * \begin{vmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -3 & 3 & 2 \\ 1 & 5 & -3 \end{vmatrix} + 4 * \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -3 & 3 & 2 \\ 1 & 5 & -3 \end{vmatrix} - (-3) * \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & 5 & -3 \end{vmatrix} + 0 * \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \\ -3 & 3 & 2 \end{vmatrix}.$$

Cette méthode reste très longue, on privilégiera donc de faire d'abord en amont un pivot de Gauss sur

la matrice afin d'intégrrer le plus de 0 à la matrice:  $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & -2 & 1 \\ -3 & -3 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 5 & -3 \end{vmatrix} \xrightarrow{C_3 - C_1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & -4 & 1 \\ -3 & -3 & 6 & 2 \\ 1 & 0 & 4 & -3 \end{vmatrix}$  D'où

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & -2 & 1 \\ -3 & -3 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 5 & -3 \end{vmatrix} = 1 * \begin{vmatrix} 4 & -4 & 1 \\ -3 & 6 & 2 \\ 0 & 4 & -3 \end{vmatrix} \xrightarrow{C_2 + C_1} \begin{vmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -3 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & -3 \end{vmatrix} \xrightarrow{C_1 - 4C_3} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -11 & 3 & 2 \\ 12 & 4 & -3 \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{par d'vlp}} 1 * \begin{vmatrix} -11 & 3 \\ 12 & 4 \end{vmatrix} \\ = -11 * 4 - 3 * 12 = -44 - 36 = -80.$$

**Corollaire 1.6.1:** Soit  $A \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R})$ . On a :

$$A^t(\text{com} A) = \det(A)I_n = {}^t(\text{com } A)A$$

En particulier, si  $A$  est inversible,

$$A^{-1} = \frac{{}^t(\text{com} A)}{\det A}$$

*Démonstration:*  $\text{com}(A)_{ij} = C_{ij}$  donc  ${}^t\text{com}(A)_{ij} = C_{ji}$ . Les coefficients du produit matriciel  $A {}^t\text{com}(A)$  sont égaux à

$$(A({}^t\text{com } A))_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik}({}^t\text{com } A)_{kj} = \sum_{k=1}^n a_{ik}c_{jk} = \begin{cases} \det A & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

Car le déterminant comporte deux fois les lignes  $a_{11}, a_{1k}, a_{in} \dots$ . On obtient l'autre formule en développant par rapport à une colonne.  $\square$

*Exemple:*  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix}$  Alors  $\text{com } A = \begin{pmatrix} b' & -a' \\ -b & a \end{pmatrix}$ .

$\det(A) = ab' - ba'$ .  $A^{-1} = \frac{1}{ab' - ba'} \begin{pmatrix} b & -b' \\ -a' & a \end{pmatrix}$  En déduire si  $ab' - ba' \neq 0$ .

$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$  admet comme unique solution

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} c \\ c' \end{pmatrix} = \frac{1}{ab' - ba'} \begin{pmatrix} b'c - c'b \\ -a'c + ac' \end{pmatrix} \Rightarrow x = \frac{\begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}} \text{ et } y = \frac{\begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}}$$

## 1.7. Formule de Cramer.

**Théorème 1.7.1:** Soit  $(S)$  le système de  $n$  équations à  $n$  inconnues:  $\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = y_1 \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn}x_n = y_n \end{cases}$

Soit  $A = (a_{ij})_{i,j \in \{1, \dots, n\}}$   $(S)$  admet une unique solution si et seulement si  $\det A \neq 0$ . Dans ce cas, la solution est donnée par

$$x_k = \frac{1}{\det(A)} \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,k-1} & y_1 & a_{1,k+1} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{n,k-1} & y_n & a_{n,k+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

La  $k$ -ième colonne est remplacée par le vecteur de second membre.

# Chapitre 2

## 2. Reduction d'endomorphisme.

### 2.1. Rappels sur les équations linéaires.

**Proposition 2.1.1:** Soit  $E, F$  deux sous espaces vectoriels,  $y \in F$  l'ensemble des solutions  $x \in E$  de l'équation linéaire de second membre  $f(x) = y$  est vide si  $y \notin \mathcal{I}(f)$ , est de la forme  $x_0 + \ker(f)$ ,  $x_0$  solution particulière si  $y \in \mathcal{I}(f)$ .

*Démonstration:* Si l'ensemble des solutions  $x \in E$  de  $f(x) = y$  n'est pas vide, il existe  $x_0 \in E$  telle que  $f(x_0) = y$ . Soit  $x \in E$ . Alors  $x$  est solution de

$$f(x) = y \Leftrightarrow f(x) = f(x_0) \Leftrightarrow f(x - x_0) = 0 \Leftrightarrow x - x_0 \in \ker(f).$$

□

**Définition 2.1.1:** Soit  $E$  un espace vectoriel,  $F_1, \dots, F_p$  des sous espaces vectoriels de  $E$ . On appelle **somme de Minkowski** l'ensemble des vecteurs de la forme  $x_1 + \dots + x_p$  avec  $x_i \in F_i$  est un sous-espace vectoriel de  $E$  noté  $F_1 + \dots + F_p$ .

**Proposition 2.1.2:** La somme de Minkowski est associative, commutative et 0 est l'unique élément neutre.

**Définition 2.1.2:** On dit que la somme  $F_1 + \dots + F_p$  est **directe** si pour tout vecteur  $x_1 \in F_1, \dots, x_n \in F_n$  on a l'implication  $x_1 + \dots + x_p = 0 \Rightarrow x_1 = \dots = x_p = 0$ . Dans ce cas on la note  $F_1 \oplus \dots \oplus F_p$ .

**Proposition 2.1.3:** La somme  $F_1 + \dots + F_p$  est directe si pour tout vecteur  $x_1 \ll \dots \ll F_1, \dots, x_n$  de  $F_n$ , l'écriture  $x_1 + \dots + x_n$  est unique

*Démonstration:* Supposons par absurde que  $x_1 + \dots + x_n = y_1 + \dots + y_n$  avec  $x_i, y_i \in F_i$ .

$(x_1 - y_1) + \dots + (x_n - y_n) = 0$ . Comme  $F_1 \oplus \dots \oplus F_p$ ,  $x_1 - y_1 = 0, \dots, x_n - y_n = 0$

□

**Proposition 2.1.4:** Soit  $F_1, F_2$  des espaces vectoriels de dimension  $p$  et  $q$ ,  $B_1 = (e_1, \dots, e_p)$  et  $B_2 = (e_{p+1}, \dots, e_{p+q})$  des bases respectives de  $F_1$  et  $F_2$ . Alors la réunion des bases est une base de la somme  $F_1 + F_2$  si et seulement si la somme est directe. En particulier,

$$\dim(F_1 \oplus F_2) = \dim(F_1) + \dim(F_2).$$

*Démonstration:* Montrons que  $(e_1, \dots, e_n)$  est une famille génératrice de la somme  $F_1 + F_2$ .

Soit  $y \in F_1 + F_2 \Rightarrow \exists x_1 \in F_1, x_2 \in F_2, y = x_1 + x_2$ . Comme  $(e_1, \dots, e_n)$  engendrent  $F_1$ ,

$$\exists \alpha_1, \dots, \alpha_p \in \mathbb{R}, x_1 = \sum_{i=0}^p \alpha_i e_i \text{ de même, } \exists \alpha_{p+1}, \dots, \alpha_{p+q} \in \mathbb{R}, x_1 = \sum_{i=p+1}^{p+q} \alpha_i e_i$$

□

## 2.2. Décomposition d'un espace vectoriel en sous-espaces vectoriels stables.

**Définition 2.2.1** (stable): Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension finie. Soit  $u : E \rightarrow E$  une application linéaire. Soit  $F$  un sous-espace vectoriel de  $E$ . On dit que  $F$  est stable par  $u$  si  $u(F) \subset F$ , i.e.,

$$\forall x \in F, u(x) \in F.$$

**Définition 2.2.2:** Soit  $F$  un sous-espace vectoriel de  $E$  stable par  $u$ . La restriction de  $u$  à  $F$ , définie par:  $u|_F : F \rightarrow E$  induit une application linéaire de  $F$  dans  $F$  que par abus de notation on notera  $u|_F$ .

VOIR COURS

## 2.3. Sous-espaces propres.

**Définition 2.3.1** (Valeur propre): Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension finie ou infinie,  $u : E \rightarrow E$ , et  $\lambda \in \mathbb{R}$ . On dit que  $\lambda$  est une **valeur propre** de  $u$  s'il existe un vecteur  $x$  non nul de  $E$  tel que  $u(x) = \lambda x$ .

**Définition 2.3.2:** Soit  $\lambda$  une valeur propre de  $u$ . On appelle vecteur de  $u$  (associé à la valeur propre  $\lambda$ ) tout vecteur  $x$  non nul de  $E$  tel que  $u(x) = \lambda x$ .

**Proposition 2.3.1:** Soit  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $\lambda$  est une valeur propre de  $u$  si et seulement si

$$\ker(u - \lambda \text{id}_E) \neq \{0\} \Leftrightarrow (u - \lambda \text{id}_E) \text{ n'est pas injectif.}$$

*Démonstration:* Soit  $x \in E$ .

$$u(x) = \lambda x \Leftrightarrow u(x) = \lambda \text{id}_E(x) \Leftrightarrow u(x) - \lambda \text{id}_E(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \ker(u - \lambda \text{id}_E)$$

□

**Définition 2.3.3** (sous-espaces propres): Soit  $u : E \rightarrow E$ , et  $\lambda$  une valeur propre de  $u$ . On appelle sous-espace propre associé à la valeur propre  $\lambda$  le sous-espace vectoriel stable par  $u$ ,  $\ker(u - \lambda \text{id}_E)$ .

**Théorème 2.3.1:** Soit  $\lambda_1, \dots, \lambda_p$   $p$  valeurs propres distinctes de  $u$ . Alors

$$\ker(u - \lambda_1 \text{id}_E) \oplus \dots \oplus \ker(u - \lambda_p \text{id}_E).$$

*Démonstration:* Initialisation :  $p = 1$ . Il n'y a rien à démontrer.

Hérédité. Supposons la proposition vraie à un rang  $p - 1$  l'est-elle au rang  $p$  ?

Soit  $x_i \in \ker(u - \lambda_i \text{id}_E)$  tels que  $\sum x_i = 0$ . En appliquant  $u$  à cette équation, on obtient  $\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_p x_p = 0$ .

$$\begin{cases} x_1 + \dots + x_p = 0 \\ \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_p x_p = 0 \end{cases} \Leftrightarrow_{L_2 - \lambda_p L_1} \begin{cases} x_1 + \dots + x_p = 0 \\ (\lambda_1 - \lambda_p)x_1 + \dots + \lambda_{p-1}x_{p-1} = 0 \end{cases}$$

Comme la somme est directe, on a  $(\lambda_1 - \lambda_p)x_1 = \dots = (\lambda_p - 1 - \lambda_p)x_{p-1} = 0$ .

Comme  $\lambda_i$  sont distincts,  $x_1 = \dots = x_{p-1} = 0$ , on obtient  $x_p = 0$ . On a montré que la somme  $\ker(u - \lambda_1 \text{id}_E) + \dots + \ker(u - \lambda_p \text{id}_E)$  est directe.  $\square$

**Proposition 2.3.2:** Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension  $n$ ,  $u : E \rightarrow E$  une application linéaire et  $\lambda \in \mathbb{R}$ .  $\lambda$  est une valeur propre si et seulement si  $\det(u - \lambda \text{id}_E) = 0$ .

## 2.4. Polynômes caractéristique.

**Définition 2.4.1:** On appelle polynôme caractéristique de  $u$  noté  $\chi_u$  la fonction  $\chi_u(X) := \det(X \text{id}_E - u)$ .

**Proposition 2.4.1:** Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension  $n$ , et  $u : E \rightarrow E$  une application linéaire. Le polynôme caractéristique de  $u$ ,  $\chi_u$  est un polynôme unitaire de la forme

$$\chi_u(X) = X^n - \text{tr}(u)X^{n-1} + \dots + (-1)^n \det(u).$$

avec  $\text{tr } u :=$  « somme des éléments sur la diagonale de la matrice »

*Exemple:* Considérons  $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4; \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 3x+y+z+t \\ x+3y+z+t \\ x+y+3z+t \\ x+y+z+3t \end{pmatrix}$ . Soit  $A$  la matrice associée à  $f$  dans la base canonique de  $\mathbb{R}^4$ .  $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ .

$$\begin{aligned} \chi_f(X) &= \det(X \text{id}_{\mathbb{R}^4} - f) = \det(XI_4 - A) = \det \left( X \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - A \right) = \begin{vmatrix} X-3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & X-3 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & X-3 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & X-3 \end{vmatrix} \\ &\stackrel{C_1+\dots+C_4}{=} \begin{vmatrix} X-6 & -1 & -1 & -1 \\ X-6 & X-3 & -1 & -1 \\ X-6 & -1 & X-3 & -1 \\ X-6 & -1 & -1 & X-3 \end{vmatrix} = (X-6) \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & X-3 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & X-3 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & X-3 \end{vmatrix} \\ &= (X-6) \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & X-2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & X-2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & X-2 \end{vmatrix} \stackrel{\substack{L_1 \\ L_2-L_1 \\ L_3-L_1 \\ L_4-L_1}}{=} (X-6)(X-2)^3. \end{aligned}$$

**Corollaire 2.4.1:** Les racines du polynôme caractéristique d'une application  $u$  sont exactement les valeurs propres de  $u$ .

**Théorème 2.4.1:** Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension finie  $n$ ,  $F$  un sous espace vectoriel de  $E$ ,  $u : E \rightarrow E$  une application linéaire.  $F$  est tel qu'il soit stable par  $u$ . Alors  $\chi_{u|_F}$ , le polynome caractéristique de  $u|_F$  divise le polynome caractéristique de  $u$ ,  $\chi_u$ .

**Définition 2.4.2:** Soit  $u : E \rightarrow E$ ,  $\lambda$  une valeur propre de  $u$ . On appelle multiplicité de la valeur propre sa multiplicité en tant que racine du polynome caractéristique de  $u$ .

**Théorème 2.4.2:** Soit  $u : E \rightarrow E$ ,  $\lambda$  une valeur propre de  $u$  de multiplicité  $k$ . Alors

$$1 \leq \dim \ker(u - \lambda \text{id}_E) \leq k.$$

*Démonstration:* Soit  $F = \ker(u - \lambda \text{id}_E)$  le sous-espace propre associé à la valeur propre  $\lambda$ ,  $d$  sa dimension. Comme  $F$  n'est pas réduit à  $\{0\}$ ,  $d \geq 1$ .  $F$  est stable par  $u$ .

Soit  $x \in F$ , alors  $u(x) = \lambda x \in F$  car  $x \in F$  et  $F$  est un sous-espace vectoriel. D'après le théorème précédent,  $\chi_{u|_F}$  divise  $\chi_u$ . Comme  $u|_F$  est égale à  $\lambda \text{id}_F$ ,

$$\chi_{u|_F}(X) = (X - \lambda)^d$$

Puisque  $(X - \lambda)^d$  divise  $\chi(X)$ ,  $\lambda$  est une racine de  $\chi_X$  de multiplicité  $d$ , supérieure ou égale à  $d$ .  $\square$

### 3. Diagonalisation.

**Définition 3.1** (Diagonalisable): Soit  $E$  un espace vectoriel. On dit que  $E$  est *diagonalisable* si  $E$  est la somme (nécessairement directe) de tout ses sous-espaces propres.

**Lemme 3.1:** Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension  $n$ ,  $u : E \rightarrow E$  une application linéaire, et  $\lambda_1, \dots, \lambda_p$  les valeurs propres de  $u$ .

$$E = F_1 \oplus \dots \oplus F_p \Leftrightarrow \sum_{i=1}^p \dim \ker(u - \lambda_i \text{id}) = n.$$

*Démonstration:* Comme la somme des sous-espaces propres est directe, on a

$$\dim(\ker(u - \lambda_1 \text{id}) \oplus \dots \oplus \ker(u - \lambda_p \text{id})) = \sum_{i=1}^p \dim \ker(u - \lambda_i \text{id}).$$

De plus, un sous-espace de  $E$  coïncide avec  $E$  si et seulement si sa dimension est égale à celle de  $E$ .  $\square$

**Corollaire 3.1:** Soit  $u : E \rightarrow E$  une application linéaire. Si  $u$  admet  $n$  valeurs propres distinctes,  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ , alors  $u$  est diagonalisable.

*Démonstration:* Comme  $\lambda_i$  est une valeur propre,  $\dim(u - \lambda_i \text{id}) \geq 1$  donc

$$n \geq \sum_{i=1}^n \dim \ker(u - \lambda_i \text{id}).$$

Ainsi, d'après le lemme,  $u$  est diagonalisable. □

**Théorème 3.1:** Soit  $E$  un espace vectoriel,  $u : E \rightarrow E$  une application linéaire. Les propriétés suivantes sont équivalentes.

1.  $u$  est diagonalisable.
2. Il existe une base de  $E$  formée de vecteurs propres de  $u$ .
3. Il existe une base de  $E$  dans laquelle la matrice de  $u$  est diagonale.
4. Le polynôme caractéristique de  $u$  est scindé dans  $\mathbb{K}[X]$  et pour toute valeur propre, la multiplicité est égale à la dimension du sous-espace propre associé.

*Démonstration:*

\* 1.  $\Rightarrow$  2. Soit  $\lambda_1, \dots, \lambda_p$  toutes les valeurs propres de  $u$ , et  $(B_i)_{i \in \{1, \dots, p\}}$  des bases respectives de  $\ker(u - \lambda_i \text{id})$ . Supposons que  $u$  est diagonalisable. Alors

$$E = \sum_{i=1}^p \ker(u - \lambda_i \text{id}).$$

Comme la réunion des bases  $B_i$  est une base  $B$  de  $E$ .

\* 2.  $\Rightarrow$  3. Soit  $B = (e_1, \dots, e_n)$  une base de  $E$  formée de vecteurs propres de  $u$ . Comme  $e_i$  est un vecteur propre de  $u$ , il existe  $\alpha_i \in \mathbb{K}$ ,  $u(e_i) = \alpha_i e_i$  donc la matrice de  $u$  dans cette base est la matrice diagonale : mat.

\* 3.  $\Rightarrow$  4. Supposons qu'il existe une base  $B = (e_1, \dots, e_n)$  de  $E$  telle que la matrice  $D$  de  $u$  dans  $B$  soit diagonale donc  $e_1$  est un vecteur propre de  $u$ . Soit  $\lambda_1, \dots, \lambda_p$  les éléments de la diagonale distincts deux à deux qui se retrouvent respectivement  $m_1$  fois,  $\dots$ ,  $m_p$  fois. En échangeant les éléments de la base, nous pouvons supposer que  $D$  est la matrice par blocs :

$$u = \begin{pmatrix} \lambda_1 I_{m_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 I_{m_2} & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_p I_{m_p} \end{pmatrix}$$

i.e nous pouvons supposer que  $e_1, \dots, e_{m_1}$  sont  $m_1$  vecteurs propres associés à  $\lambda_1$ .  $e_{m_1+1}, \dots, e_{m_1+m_2}$  sont  $m_2$  vecteurs propres associés à  $\lambda_2$ ... etc. En calculant le polynôme caractéristique de  $D$ ,

$$\chi_u(X) = \prod_{i=1}^p (X - \lambda_i)^{m_i}$$

Donc  $\chi_u(X)$  est scindé et a pour racines  $\lambda_1, \dots, \lambda_p$  de multiplicité  $m_i$ . Soit  $d_i = \dim \ker(u - \lambda_i \text{id}_E)$ . □

**Proposition 3.1:** Soit  $E$  un espace vectoriel,  $u : E \rightarrow E$  une application diagonalisable,  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  les  $n$  valeurs propres de  $u$  (chacune étant écrite autant de fois que sa multiplicité). Alors :

$$\operatorname{tr} u = \sum_{i=1}^n \lambda_i \text{ et } \det u = \prod_{i=1}^n \lambda_i.$$

*Démonstration:* Supposons que  $u$  soit diagonalisable. Alors il existe une base de  $E$  dans laquelle la matrice de  $u$  est diagonale.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \chi_A(X) = \prod_{i=1}^n (X - a_{ii})$$

donc les  $a_{ii}$  sont les valeurs propres de  $u$ .

$$\operatorname{tr} u = \operatorname{tr} A = \sum_{i=1}^n a_{ii} \text{ et } \det A = \prod_{i=1}^n a_{ii}.$$

□

**Corollaire 3.2:** Soit  $u$  un endomorphisme tel que  $\chi_u(X)$  soit scindé. Alors

$$\operatorname{tr}(u) = \sum_{i=1}^n m_i \lambda_i \text{ et } \det(u) = \prod_{i=1}^n \lambda_i^{m_i}.$$

## 4. Polynômes d'endomorphismes.

*Remarque (Notation):* Soit  $E$  un espace vectoriel,  $u : E \rightarrow E$  une application linéaire. Pour tout  $p \in \mathbb{N}$ , on note  $u^p$  la composée  $p$  fois de  $u$ .

**Définition 4.1:** Soit  $u$  une application linéaire et  $A$  sa matrice associée. On appelle valeur de  $P$  en  $u$ , l'application linéaire de  $E$  dans  $E$ ,  $P(u) := \alpha_q u^q + \dots + \alpha_1 u + \alpha_0 \operatorname{id}_E$ .

De même, on appelle valeur de  $P$  en  $A$  la matrice carrée  $P(A) = \alpha_q A^q + \dots + \alpha_1 A + \alpha_0$ .

*Remarque:* De manière générale, on peut remarquer que ces définitions ont un sens pour une  $\mathbb{K}$  — algèbre.

**Proposition 4.1:** Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension  $n$  finie,  $B$  une base de  $E$ ,  $u : E \rightarrow E$ , et  $A$  la matrice associée à  $u$  dans la base  $B$ . Alors  $A^p$  est la matrice de  $u^p$  dans la base  $B$  et  $P(A)$  est la matrice de  $P(u)$  dans la base  $B$ .

*Démonstration:* Considérons l'application  $M : L(E) \rightarrow M_{n(\mathbb{K})}; u \mapsto A := M(u)$  est un isomorphisme de  $\mathbb{K}$  — algèbre. □



**Théorème 4.1:** Soient  $D, N \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$  2 matrices qui commutent entre elles. Alors la formule du binôme de Newton s'applique.

$$(D + N)^r = \sum_{k=0}^r \binom{r}{k} D^k N^{r-k}$$

## 5. Applications aux suites récurrentes.

**Théorème 5.1:**

Soit  $a_0, \dots, a_{k-1} \in \mathbb{C}$ , et  $\chi = X^k - a_{k-1}X^{k-1} - \dots - a_1X - a_0$ .

On considère l'ensemble  $\varepsilon := \left\{ (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+k} = a_{k-1}u_{n+k-1} + \dots + a_0u_n \right\}$ . Alors

$$\{v_n = \lambda^n, \lambda \in \mathbb{R} \setminus 0\} \in \varepsilon \Leftrightarrow \chi(\lambda) = 0.$$

**Théorème 5.2:** Supposons que ce polynome admettent  $k$  racines distinctes simples  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ . Alors les  $k$  suites géométriques  $(\lambda_1^n)_{n \in \mathbb{N}}, \dots, (\lambda_k^n)_{n \in \mathbb{N}}$  forment une base de  $\varepsilon$ .

## 6. Système linéaire d'équations différentielles du 1<sup>er</sup> ordre.

Pour cette partie du cours, on notera  $S$  le système suivant défini pour tout  $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ :

$$S := \begin{cases} x_1' = \alpha_{1,1}x_1 + \dots + \alpha_{n,1}x_n \\ \dots \\ x_n' = \alpha_{1,n}x_1 + \dots + \alpha_{n,n}x_n \end{cases}$$

**Proposition 6.1:** Soit  $A \in M_{n \times n}$ ,  $X : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n; t \mapsto \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \dots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$ ,  $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ .

Les applications  $x_1(t), \dots, x_n(t)$  sont solutions du système différentielle  $(S)$  si et seulement si  $\forall t \in \mathbb{R}, X'(t) = AX(t)$ .

*Démonstration:* On rappelle que  $X = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \dots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$  est dérivable si et seulement si les  $(x_i)_{i \in \{1, \dots, n\}}$  le sont.

Dans ce cas,  $X'(t) = \begin{pmatrix} x_1'(t) \\ \dots \\ x_n'(t) \end{pmatrix}$ . La suite résulte donc d'une simple solution de système.  $\square$

**Proposition 6.2:** Soit  $E$  un espace vectoriel,  $B$  et  $C$  deux bases de  $E$ . Un système différentielle admet des solutions dans la base  $B$  si et seulement si il en admet dans la base  $C$ .

**Théorème 6.1:** Soit  $A \in M_{n \times n}$  diagonalisable,  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$  ses valeurs propres,  $D = (v_1, \dots, v_n)$  une base de vecteurs propres.

1. Les solutions du système différentiel  $S$  sont les fonctions de la forme:

$$X(t) = \sum_{i=1}^n C_i \exp(\lambda_i t) v_i, (C_i)_{i \in \{1, \dots, n\}} \in \mathbb{R}.$$

2. Il existe une unique solution du système différentiel  $S$  vérifiant une condition initiale  $X(0) = \Gamma$ . Les constantes sont alors les  $C_i = P^{-1} \Gamma$  où  $P^{-1}$  est la matrice de passage de  $D$  à la base canonique.

3. L'ensemble des solutions du système différentiel  $S$  est un espace vectoriel de dimension  $n$ .

## 7. Equations différentielles linéaires à coefficients constants.

On notera  $S$  l'équation différentielle linéaire à coefficients constants d'ordre  $k$ ,

$$(S) := (y^{(k)} = a_{k-1}y^{(k-1)} + \dots + a_1y' + a_0y)$$

**Proposition 7.1:** Toute équation différentielle linéaire d'ordre  $k$  est équivalente à un système de  $k$  équations du 1<sup>er</sup> ordre.

**Proposition 7.2:** Soit  $\varphi : \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \times \dots \times \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$

Considérons l'équation différentielle d'ordre  $k$

$$y^{(k)} = a_{k-1}y^{(k-1)} + \dots + a_1y' + a_0y, (a_i)_{i \in I} \text{ des fonctions}$$