Fonction de deux variables

Table des matières

1. Introduction.

1.1. Rappels.

Définition 1.1 (fonction d'une variable)**.** Soit A, B deux ensembles. Une application f est la donnée d'un ensemble de départ A et d'un ensemble d'arrivée B et qui, à chaque $x \in A$ associe un unique $f(x) \in B$. On la note $f : A \to \mathbb{B}; x \mapsto f(x)$.

Définition 1.2 (Graphe d'une application)**.** Soit $f : A \to B$ une application. On appelle graphe de f l'ensemble suivant $\text{Graphe}(f) = \{(x, f(x)) \mid x \in A\} \subset A \times B$

1.2. Premières définitions.

Définition 1.3 (fonction de deux variables)**.** Soit A un sous ensemble de $\mathbb{R}^2$ et B un ensemble. Une application f de deux variables de A dans B est la donnée d'un ensemble de départ A et d'un ensemble d'arrivée B et qui, à chaque $(x, y) \in A$ associe un unique $f(x, y) \in B$. On la note $f : A \to B; x, y \mapsto f(x, y)$.

Définition 1.4 (Graphe d'une application)**.** Soit $f : A \to B$ une application de deux variables. On appelle graphe de f l'ensemble suivant $\text{Graphe}(f) = \{(x, y, f(x, y)) \in \mathbb{R}^3 \mid x, y \in \mathbb{R}\}$

Exemple 1.5. L'aire d'un rectangle : $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}; (x, y) \mapsto xy$.
Soit a un réel fixé et $x, y \in \mathbb{R}$. l'équation associée est $a = xy \Leftrightarrow y = \frac{a}{x}$. On cherche le rectangle d'aire a de côté x, y.

2. La topologie de la norme de $\mathbb{R}^2$.

2.1. Norme euclidienne.

Définition 2.1 (Norme Euclidienne)**.** Soit $v = \binom{a}{b} \in \mathbb{R}^2$. La norme Euclidienne est la longueur du vecteur v. Elle est donnée par $\|v\| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Proposition 2.2. Soit $v \in \mathbb{R}^2$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors $\|\cdot\|$ vérifie:
(1) $\|v\| \geq 0$ et $\|v\| = 0 \Leftrightarrow v = \binom{0}{0}$.
(2) $\|\lambda v\| = |\lambda|\|v\|$ (homogénéïté).
(3) $\|v + u\| \leq \|v\| + \|u\|$ (inégalité triangulaire).

i.e la norme Euclidienne est une norme.

Démonstration.
(1) Pour tout $x \in \mathbb{R}^2$, $x^2 \geq 0$ d'où $\forall u \in \mathbb{R}^2, \|u\| \geq 0$.
(2) Soit $u = \binom{a}{b} \in \mathbb{R}^2, \lambda \in \mathbb{R}$.
On a $\|\lambda u\| = \|(\lambda a, \lambda b)\| = \sqrt{(\lambda a)^2 + (\lambda b)^2} = \sqrt{\lambda^2(a^2 + b^2)} = |\lambda|\|u\|$.
(3)

$\square$

Corollaire 2.3. Soit $v, u \in \mathbb{R}^2$. On a :

$$\|v - u\| \geq \big|\|v\| - \|u\|\big|.$$

Démonstration. On a $\forall u, v \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned} v &= (v - u) + u \\ \|v\| &= \|v - u + u\| \leq \|v - u\| + \|u\| \\ \Leftrightarrow \|v - u\| &\geq \|v\| - \|u\| \end{aligned}$$

De même avec u, on obtient par ailleurs $\|v - u\| \geq \|u\| - \|v\|$ d'où $\|v - u\| \geq \big|\|v\| - \|u\|\big|$. $\square$

Définition 2.4. Soient $u = (a, b), v = (x, y) \in \mathbb{R}^2$. On définit le produit scalaire par

$$u \cdot v = ax + by.$$

Proposition 2.5. Soient $u, v, w \in \mathbb{R}^2, \lambda \in \mathbb{R}$.
(1) $u \cdot v = v \cdot u$ (symétrie).
(2) $(w + v) \cdot u = w \cdot u + v \cdot u$ (bilinéarité).
(3) $(v \cdot u)^2 \leq \|u\|^2\|v\|^2$ (inégalité de Cauchy-Schwartz).

Démonstration. Soient $u, v \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}$. $\|v + tu\|^2 = (v + tu) \cdot (v + tu) = v \cdot v + 2t(v \cdot u) + (u \cdot u)t^2$. On pose $f(t) = \|v\|^2 + 2(v \cdot u)t + \|u\|^2 t^2$.On peut supposer que $u \neq 0$ sinon l'égalité est évidente.
$\square$

2.2. Disques ouverts/fermés et sous-ensembles ouverts/fermés.

Définition 2.6 (disque)**.** Soient $u \in \mathbb{R}^2$,$R > 0$. On appelle **disque ouvert** de rayon R centré en u l'ensemble:

$$B(u, r) := \{v \in \mathbb{R} \mid \|v - u\| < R\}.$$

On appelle **disque fermé** de rayon R centré en u l'ensemble:

$$\overline{B}(u,R) := \{v \in \mathbb{R}^2 \mid \|v-u\| \leq R\}.$$

Définition 2.7 (ouvert)**.** Soit U un sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$. On dit que U est un **ouvert** de $\mathbb{R}^2$ si

$$\forall u \in U, \exists r_u > 0, B(u,r_u) \subset U.$$

Remarque 2.8. L'ensemble de ces sous-ensembles sont notés O_{norm}.

Proposition 2.9.
(1) Les sous-ensembles $\varnothing$ et $\mathbb{R}^2$ sont des ouverts.
(2) Soit $\{H_i\}_{i\in I} \subset O_{\text{norm}}$. Alors leur réunion est un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R}^2$ i.e,

$$\forall \{H_i\}_{i\in I} \subset O_{\text{norm}}, \bigcup_{i\in I} H_i \in O_{\text{norm}}.$$

(3) Soit $\{H_i\}_{i\in\{1,-,n\}} \subset O_{\text{norm}}$ alors leur intersection est un sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$. i.e,

$$\forall \{H_i\}_{i\in\{1,-,n\}} \subset O_{\text{norm}}, \bigcap_{i\in\{1,-,n\}} H_i \in O_{\text{nom}}.$$

Démonstration.

(1) On peut supposer la réunion non-vide.
Soit $v \in V = \bigcup_{i\in I} H_i$, alors $\exists i_0, v \in H_{i_0}$. D'où $\exists v_{i_0}, B(v, v_{i_0}) \subset H_{i_0} \subset \bigcup_{i\in I} H_i$.

(2) On peut supposer l'intersection non-vide.
Soit $v \in V = \bigcap_{i\in\{1,-,n\}} H_i$, alors $\forall i \in \{1,-,n\}, \exists v_i > 0$ tel que, $B(v,v_i) \subset H_i$.
Ainsi, en posant $v_{i_0} = \min(v_i \mid i \in \{1,-,n\})$, on a $\forall i \in \{1,-,n\}, B(v, v_{i_0}) \subset B(v,v_i) \subset H_i$, donc $B(v, v_{i_0}) \subset V$.

□

Définition 2.10. La collection O_{norm} s'appelle la topologie de $\mathbb{R}^2$ associée avec la norme euclidienne. (ou la topologie de la norme de $\mathbb{R}^2$).

Définition 2.11 (voisinage)**.** Soit $u \in \mathbb{R}^2$. On appelle **voisinage ouvert** de u tout sous-ensemble ouvert U de $\mathbb{R}^2$ qui contient u.

Définition 2.12 (fermé)**.** Soit $F \subset \mathbb{R}^2$. On dit que F est un fermé si le complémentaire de F dans $\mathbb{R}^2$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$, i.e, F est un fermé $\Leftrightarrow F^c \in O_{\text{norm}}$

Remarque 2.13. L'ensemble de ces sous-ensembles sont notés F_{norm}.

Proposition 2.14.
(1) Les sous-ensembles $\varnothing$ et $\mathbb{R}^2$ sont des fermés.
(2) Soit $\{H_i\}_{i\in\{1,-,n\}} \subset F_{\text{norm}}$. Alors leur réunion est un sous-ensemble fermé de $\mathbb{R}^2$ i.e,

$$\forall \{H_i\}_{i\in\{1,-,n\}} \subset F_{\text{norm}}, \bigcup_{i\in\{1,-,n\}} H_i \in F_{\text{norm}}.$$

(3) Soit $\{H_i\}_{i\in I} \subset F_{\text{norm}}$ alors leur intersection est un sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$. i.e,

$$\forall \{H_i\}_{i\in I} \subset F_{\text{norm}}, \bigcap_{i\in I} H_i \in F_{\text{nom}}.$$

3. Limites de suites.

Définition 3.1 (limite)**.** Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de points de $\mathbb{R}^2$. On dit que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une **limite** si

$$\exists L \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow \|x_n - L\| \leq \varepsilon.$$

Dans ce cas on dit que la suite converge vers L. Sinon, on dit qu'elle diverge.

Proposition 3.2. Soit $x_n = \binom{a_n}{b_n}, n \in \mathbb{N}$ une suite dans $\mathbb{R}^2$. Alors $L = \binom{a}{b}$ est la limite de x_n si et seulement si on a

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = a \text{ et } \lim_{n\to+\infty} b_n = b.$$

4. Points limites et adhérence d'un sous-ensemble.

Définition 4.1 (point isolé)**.** Soit $A \subset \mathbb{R}^2$ un ensemble, $a \in A$. On dit que a est un point isolé s'il existe un voisinage ouvert V_a dans $\mathbb{R}^2$ tel que $V_a \cap A = \{a\}$.

Définition 4.2 (point intérieur)**.** Soit $A \subset \mathbb{R}^2$ un ensemble, $a \in A$. On dit que a est un point intérieur s'il existe un voisinage ouvert V_a dans $\mathbb{R}^2$ tel que $V_a \subset A$.
Le sous-ensemble des points intérieurs de A est noté $\mathrm{int}(A)$ et on l'appelle l'intérieur de A.

$$\mathrm{int}(A) := \{u \in A \mid \exists r > 0, B(u,r) \subset A\}.$$

Proposition 4.3. Soit $A \subset \mathbb{R}^2$ un ensemble. Alors son intérieur est le plus grand sous-ensemble ouvert contenu dans A.

Remarque 4.4. L'intérieur d'un ensemble A est une approximation de A par un sous-ensemble ouvert.

Définition 4.5 (Point limite)**.** Soit $A \subset \mathbb{R}^2$ un ensemble, $x \in \mathbb{R}^2$. On dit que x est un point limite de A s'il existe une suite inifie $\{a_n\}_n \in \mathbb{N}$ de points deux-à-deux distincts dans A telle que $a_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x$.

Définition 4.6 (Adhérence)**.** L'ensemble des points limites s'appelle l'adhérence de A et on la designe par $\overline{A}$

$$\overline{A} := \{u \in \mathbb{R}^2 \mid \forall r > 0, B(u,r) \cap A \neq \varnothing\}.$$

Proposition 4.7. Soit $A \subset \mathbb{R}^2$ un ensemble. Alors son adhérence est le plus petit sous-ensemble fermé qui contient A.

Remarque 4.8. Tout ouvert $A \subset \mathbb{R}^2$ est encadré de la manière suivante: $\mathrm{Int}(A) \subset A \subset \overline{A}$.

Définition 4.9 (Frontière)**.** Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. On appelle frontière de f l'ensemble constitué des points limites de f.

5. Limites de fonctions.

Définition 5.1. Soit U un ouvert, $f : U \to \mathbb{R}$, $a \in \overline{U}$.

(1) On dit que f admet l comme limite en a si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in U, \|x - a\| \leq \eta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon.$$

(2) On dit que f admet $+\infty$ comme limite en a si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in U, \|x - a\| \leq \eta \Rightarrow f(x) \geq A.$$

(3) On dit que f admet $-\infty$ comme limite si $-f$ admet $+\infty$ pour limite en a.

Exemple 5.2.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x+2y)^3}{x^2+y^2}.$$

On étudie la fonction $f : U = \{x^2 + y^2 \neq 0\} = \mathbb{R}^2 \setminus 0 \to \mathbb{R}^2$ On a $f(x,0) = \frac{x^3}{x^2} \xrightarrow[x\to 0]{} 0$ et $f(0,y) = \frac{(2y)^3}{y^2} \xrightarrow[y\to 0]{} 0$. Montrons que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x) = 0$.
Passons aux coordonnées polaires. On note $x = r\cos(\theta), y = r\sin(\theta)$. Ainsi,

$$f(x,y) = r^3 \frac{(\cos(\theta) + 2\sin(\theta))^3}{r^2} = r(\cos(\theta) + 2\sin(\theta))^3$$

De plus, $|\cos(\theta) + 2\sin(\theta)|^3 \leq |\cos\theta| + 2|\sin\theta| \leq 3^3 = 27$

Proposition 5.3. Soit U un ouvert, $f : U \to \mathbb{R}$, $a \in \overline{U}$. Si f admet une limite, alors cette limite est unique.

6. Continuité.

Définition 6.1 (continue)**.** Soit U un ouvert, $f : U \to \mathbb{R}$, $a \in \overline{U}$, et $x \in U$. On dit que f est continue en x si

$$f(x) \xrightarrow[x\to a]{} f(a).$$

Définition 6.2. On dit que f est continue sur X si f est continue en tout point de X.

Proposition 6.3. Soit U un ouvert, $f, g : U \to \mathbb{R}$, des applications continues sur U, $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$|f|, \lambda f, f+g, fg$$

sont continues sur U. Si $\forall x \in U, g(x) \neq 0$, alors $\frac{f}{g}$ est continue sur U.

Corollaire 6.4. Toute fonction polynomiale est continue sur $\mathbb{R}^2$.

Proposition 6.5. Soit U, V deux ouverts, $f : U \to V, g : V \to \mathbb{R}$ des applications continues repsectivement sur U et V. Alors $g(f(x))$ est continue sur U.

Proposition 6.6. Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction continue, $I \subset \mathbb{R}$ un ouvert (resp. fermé). $f^{-1}(I) = \left\{\binom{x}{y} \in U \mid f(x,y) \in I\right\}$ est un sous-ensemble ouvert (resp. fermé).

Définition 6.7. Soit U un ouvert, $f : U \to \mathbb{R}$. Pour une valeur $c \in \mathbb{R}$, $f^{-1}(c)$ s'appelle l'ensemble de niveau c.

Corollaire 6.8. Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur U. Alors pour tout $a \in \mathbb{R}$, l'ensemble de niveau a est un sous-ensemble fermé dans U.

7. Différentielle.

Définition 7.1 (Différentielle)**.** Soit $U \in \mathbb{R}^2$ un ouvert, $f : U \to \mathbb{R}$. On munit $\mathbb{R}^2$ d'une norme. Soit $a \in U$, on appelle la différentielle de f en u_0 l'application linéaire $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ telle que

$$f(a+h) = f(a) + L(h) + o_{h\to 0}(h)$$

Proposition 7.2. Si la différentielle existe elle est unique.

Définition 7.3 (Différentiable). Soit $f : U \to \mathbb{R}$, $u_0 \in U$. On dit que f est différentiable en u_0 (resp. sur U) si la différentielle df_{u_0} existe (resp. différentiable en tout point de U).

Proposition 7.4. Soit U un ouvert, $f,g : U \to \mathbb{R}$, des applications différentiables sur U, $\lambda \in \mathbb{R}$. $\lambda f, f+g, fg$ sont différentiables sur U. Si $\forall x \in U, g(x) \neq 0$, alors $\frac{f}{g}$ est différentiable sur U.

Proposition 7.5. Soit U un ouvert, $f,g : U \to \mathbb{R}$, des applications différentiables sur U, de différentielle $\mathrm{d}f_{u_0}, \mathrm{d}g_{u_0}$.

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}(f+g)_{u_0} &= \mathrm{d}f_{u_0} + \mathrm{d}g_{u_0} \\
\mathrm{d}(fg)_{u_0} &= g(u_0)\,\mathrm{d}f_{u_0} + f(u_0)\,\mathrm{d}g_{u_0} \\
\mathrm{d}\left(\frac{f}{g}\right)_{u_0} &= \frac{g(u_0)\,\mathrm{d}f_{u_0} - f(u_0)\,\mathrm{d}g_{u_0}}{g^2(u_0)}, g(u_0) \neq 0
\end{aligned}$$

Proposition 7.6. Soit U, V deux ouverts, $f : U \to V, g : V \to \mathbb{R}$ des applications différentiables respectivement sur U et V. Alors $g(f(x))$ est différeniable sur U.

Proposition 7.7. Toute fonction polynomiale est différentiable sur $\mathbb{R}^2$.

7.1. Courbe paramétrée

Proposition 7.8. Soit $I \subset \mathbb{R}$, $F : I \to \mathbb{R}^2; t \mapsto \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{pmatrix}$.
Alors F est différentiable en $u_0 \in \mathbb{R}$ de différentielle :

$$\mathrm{d}F_{u_0}(h) = h\begin{pmatrix} f_1'(u_0) \\ f_2'(u_0) \end{pmatrix}.$$

8. Dérivées partielles et directionnelles.

8.1. Premières définitions.

Définition 8.1. Soit $f : U \to \mathbb{R}$, $u_0 \in U, v \in \mathbb{R}^2$. On appelle dérivée de f en u_0 de direction v la valeur

$$D_{u_0,v}f := \lim_{t\to 0} \frac{f(u_0+tv) - f(u_0)}{t}.$$

Remarque 8.2. En pratique, pour trouver la dérivée directionnelle $D_{u_0,v}f$, on cherche le développement limité à l'ordre 1 de $f(u_0+tv)$.

Exemples 8.3.

1. Soit $f : U \to \mathbb{R}; (x,y) \mapsto 2x^2 - y^2$ Calculons $D_{\binom{1}{-1},\binom{2}{1}}f$.
   On a $f(u_0) = 2 - 1 = 1$
   $f(u_0+tv) = 2(1+2t)^2 - (-1+t)^2 = 2 + 8t + 8t^2 - (1 - 2t + t^2) = 1 + 10t + 7t^2$.
   Ainsi,

$$\frac{f(u_0+tv) - f(u_0)}{t} = \frac{7t^2 + 10t}{t} = 7t + 10 \xrightarrow[t\to 0]{} 10.$$

D'où $D_{\binom{1}{-1},\binom{2}{1}}f = 10$.

2. Soit $f : U \to \mathbb{R}^2; (x,y) \mapsto xy^2, u_0 = \binom{2}{-1}, v = \binom{1}{1}$.
   $f(u_0) = 1$
   $f(u_0 + tv) = f((2+t, -1+t)) = (2+t)(t-1)^2 = (2+t)\left(t^2 - 2t + 1\right) = -3t + 2$.
   Ainsi
   $$\frac{f(u_0+tv) - f(u_0)}{t} = \frac{-3t+1}{t} \xrightarrow[t\to 0]{} -3$$
   D'où $D_{u_0,v}f = -3$.

Définition 8.4. Soit $f : U \to \mathbb{R}, u_0 \in U$, et $B = (e_1, e_2)$ une base de $\mathbb{R}^2$. On appelle i-ème dérivée partielle de f en u_0 la valeur

$$D_{u_0,e_i}f = \lim_{t\to 0} \frac{f(u_0 + te_i) - f(u_0)}{t}.$$

Remarque 8.5. En pratique, on calcule la dérivée de f par rapport à x (resp. y) en considérant y (resp x) comme une constante.

Remarque 8.6 (Notation)**.** On note $\mathrm{d}_{x/y}f(u_0)$ la dérivée de f en u_0 par rapport à la variable x/y.

Exemples 8.7.
1. Soit $f : U \to \mathbb{R}; (x,y) \mapsto 2x^2 - y^2, u_0 = (1,-1)$
   $\mathrm{d}_x(u_0) = (4x)((1,-1)) = 4$
   $\mathrm{d}_y(u_0) = (-2y)((1,-1)) = 2$.
2. Soit $f : U \to \mathbb{R}^2; (x,y) \mapsto xy^2, u_0 = \binom{2}{-1}$
   $\mathrm{d}_x(u_0) = \left(y^2\right)((2,-1)) = 1$
   $\mathrm{d}_y(u_0) = (2xy)((2,-1)) = -4$.

8.2. Critère de différentiabilité.

Proposition 8.8. Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable à un point $u_0 \in U$ de différentielle $\mathrm{d}f_{u_0} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Pour tout $v \in \mathbb{R}^2$, $\partial_{u_0,v}$ existe et est déterminée par $\partial_{u_0,v}f = \mathrm{d}f_{u_0}(v)$.

Corollaire 8.9. Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable à un point $u_0 \in U$ de différentielle $\mathrm{d}f_{u_0} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Pour tout $v \in \mathbb{R}^2$, $\partial_x f$ et $\partial_y f$ existe et sont déterminées par $\partial_x f = \mathrm{d}f_{u_0}((1,0))$, et $\partial_y f = \mathrm{d}f_{u_0}((0,1))$.

Définition 8.10. Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction. On appelle matrice *Jacobienne* de f la matrice

$$J_f := \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix}.$$

Définition 8.11. Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction. On dit que f est C^1 sur U si ses dérivées partielles existent et sont continues en tout point de U.

Proposition 8.12. Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction C^1 sur U. Alors la différentielle $\mathrm{d}f_u$ existe en tout point de U et est donnée par

$$\mathrm{d}f_u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}; \begin{pmatrix} h_0 \\ h_1 \end{pmatrix} \mapsto J(f)_{u_0}\begin{pmatrix} h_0 \\ h_1 \end{pmatrix}.$$

9. Dérivées partielles d'ordre supérieur.

Définition 9.1. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. On dit que f est de classe C^2 si f est C^1 et que $(x,y) \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}$ et $(x,y) \mapsto \frac{\partial f}{\partial y}$ le sont aussi.

Remarque 9.2 (notation)**.** Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction C^2.
On note $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ la dérivée partielle d'ordre 2 par rapport à x et on note $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ la dérivée partielle d'ordre 2 par rapport à x puis à y.

Définition 9.3. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2. On appelle matrice hessienne de f la matrice :

$$H(f) := \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix}.$$

Exemple 9.4. $f(x) = x^3 + y^3 - 5xy$. $H(f) = \begin{pmatrix} 6x & -5 \\ -5 & 6y \end{pmatrix}$.

Théorème 9.5. Soit $U \subset \mathbb{R}^2$ un ouvert, $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2. La matrice hessienne de f est symétrique.

Démonstration. Montrer $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$. □

10. Développement limité.

Théorème 10.1. Soit $U \subset \mathbb{R}^2$ un ouvert,$h \in U$ et $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2. Alors pour tout $u \in U$, f admet le développement :

$$f(u+h) = f(u) + J_f(u)h + \frac{1}{2}{}^t h h_f(u) h + o\left(\|h\|^2\right).$$

Exercice 10.2. TODO (page 43/44)

11. Extremums locaux.

Définition 11.1. Soit $U \subset \mathbb{R}^2$, $u_0 \in U$, $f : U \to \mathbb{R}$. On dit que f admet un *maximum local* en u_0 s'il existe un voisinage ouvert $V_{u_0} \subset U$ tel que $\forall u \in V_{u_0}, f(u_0) \geq f(u)$.

Définition 11.2. Soit $U \subset \mathbb{R}^2$, $u_0 \in U$, $f : U \to \mathbb{R}$. On dit que f admet un *minimum local* en u_0 s'il existe un voisinage ouvert $V_{u_0} \subset U$ tel que $\forall u \in V_{u_0}, f(u_0) \leq f(u)$.

Définition 11.3. Soit $U \subset \mathbb{R}^2$, $f : U \to \mathbb{R}$. On appelle *extremums locaux* de f les valeurs minimales et maximales de f.

Proposition 11.4. Soit $U \subset \mathbb{R}^2$, $f : U \to \mathbb{R}$, $u_0 \in U$ une fonction de classe C^1. Si $f(u_0)$ est un extremum, alors $df_{u_0} = 0_{F(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})}$.

Remarque 11.5. C'est une condition nécessaire mais pas suffisante.

Définition 11.6. Soit $U \subset \mathbb{R}^2$,$f : U \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1. On appelle *points critiques* de f les $u \in U$ tels que $df_u = 0$.

Définition 11.7. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique. A est dite *définie positive* si toute ses valeurs propres sont strictement positives.

Définition 11.8. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique. A est dite *définie négative* si toute ses valeurs propres sont strictement négatives.

Proposition 11.9. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$, une matrice symétrique définie positive (resp négative). Pour tout $v \in \mathbb{R}^n \setminus 0$, ${}^t vAv > 0$ (resp < 0).

Théorème 11.10. Soit $U \subset \mathbb{R}^2$, $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction C^2, $u \in U$ un point critique de f.
(1) Tout extremum de f est un point critique
(2) $f(u)$ est un maximum (resp. minimum) local si et seulement si $H_f(u)$ est définie négative (resp. positive).

Corollaire 11.11. Soit $U \subset \mathbb{R}^2$, $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction C^2, $u \in U$ un point critique de f. u est un extremum de f si $\det\big(H_f(u)\big) > 0$. De plus, u est un maximum (resp. minimum) local si $\mathrm{Tr}\big(H_f(u)\big) < 0$ (resp $\mathrm{Tr}\big(H_f(u)\big) > 0$).

Proposition 11.12. Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1. L'ensemble des points critiques de f est un sous-ensemble fermé de U.

Corollaire 11.13. Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1. L'ensemble U privé des points critiques est un sous-ensemble ouvert de U.

Définition 11.14. Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction C^1. On appelle points réguliers de f les $u \in U$ tels que u ne soit pas un point critique.

(1) Tout sur les différentielles (donc avec les dérivées partielles) savoir faire sans et avec.
(2) Matrice Hesiienne
(3) points critiques
(4) points Extremums