

Séries de Fourier

Table des matières

1. Séries trigonométriques.	1
1.1. Définitions.	1
2. Critères de convergence.	2
2.1. Convergence uniforme.	2
3. Une série fondamentale.	3
4. Récupération des coefficients d'une série trigonométrique.	4
5. Séries de Fourier.	5
5.1. Développement en série de Fourier.	5
5.2. Convergence.	6
5.3. Convergence des coefficients de Fourier.	7

1. Séries trigonométriques.

1.1. Définitions.

Définition 1.1.1 (Série trigonométrique.): Une série trigonométrique est une série de la forme

$$a_0 + \sum_{n \geq 1} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx), a_n, b_n \in \mathbb{C}.$$

Remarque: Si cette série converge au point x , on note $S(x)$ sa somme. En notant E l'ensemble de ces points j'obtiens une fonction $S : E \rightarrow \mathbb{C}; x \mapsto S(x)$.

Remarque: S est 2π -périodique signifie $S(x + 2\pi) = S(x)$.

Remarque (Autre notation): On peut noter

$$\begin{cases} c_0 = a_0 \\ c_n = \frac{a_n - ib_n}{2} \\ c_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_n = c_n + c_{-n} \\ b_n = i(c_n - c_{-n}) \end{cases}.$$

Ainsi, on a

$$\begin{aligned} a_0 + \sum_{n=1}^N a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) &= c_0 + \sum_{n=1}^N (c_n + c_{-n}) \cos(nx) + i(c_n - c_{-n}) \sin(nx) \\ &= c_0 + \sum_{n=1}^N c_n (\cos(nx) + i \sin(nx)) + c_{-n} (\cos(nx) + i \sin(nx)) \\ &= c_0 e^{i0x} + \sum_{n=1}^N c_n e^{inx} + c_{-n} e^{-inx} = \sum_{n=-N}^N c_n e^{inx}. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx} \text{ si } x \in E.$$

2. Critères de convergence.

2.1. Convergence uniforme.

Remarque: $\sup_{x \in \mathbb{R}} |a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)| \leq |a_n| + |b_n|$.

Théorème 2.1.1: Soit $A = \sum a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$ une série trigonométrique telle que $\sum |a_n| + |b_n|$ converge. Alors A converge uniformément sur \mathbb{R} et $S(x)$ est continue.

Exemple: $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(nx)}{n^2} = \frac{x^2}{4} - \pi \frac{x}{2} + \frac{\pi^2}{6}$ si $x \in [0, 2\pi]$.

Théorème 2.1.2: Soit $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}, (d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites dans \mathbb{C} , $C_n = \sum_{k=0}^n c_k, D_n = \sum_{k=0}^n d_k$. Pour tous $N \leq M$, on a

$$\sum_{n=N}^M c_n d_n = C_M D_M - C_N D_{N-1} + \sum_{n=N}^{M-1} (c_n - c_{n+1}) D_n.$$

Démonstration: Pour le voir poser $d_n = D_n - D_{n-1}$. □

Corollaire 2.1.1: Si la suite $(D_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée par un nombre $D > 0$ et $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante, alors

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n=N}^M c_n d_n \right| &\leq |C_M D_M| + \sum_{n=N}^{M-1} |c_n - c_{n+1}| D_n + |C_N D_{N-1}| \\ &\leq D \left(|C_M| \sum_{n=N}^{M-1} (c_n - c_{n+1}) + c_N \right). \end{aligned}$$

Si de plus $(c_n) \in \mathbb{R}_+$, $\left| \sum_{n=N}^M c_n d_n \right| \leq 2DC_N$

Théorème 2.1.3 (Critère d'Abel): Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite positive à valeurs réelles décroissante et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite dans \mathbb{C} telle que $\exists D \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, \forall m > n, |b_n + b_{n+1} + \dots + b_m| < D$. Alors $\sum a_n b_n$ converge et $\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=n}^{\infty} a_k b_k \leq 2DC_n$.

Exemple:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n e^{ik\theta} &= \sum_{k=0}^n e^{(i\theta)^k} \\ &= \frac{(e^{i\theta})^{n+1} - 1}{e^{i\theta} - 1} = \text{passage par l'angle moitié} = \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}\theta\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} e^{in\theta}. \end{aligned}$$

D'où

$$\sum_{k=0}^n \cos(k\theta) = \Re \left(\sum_{k=0}^n e^{ik\theta} \right) = \frac{\sin(\frac{n+1}{2}\theta)}{\sin(\frac{\theta}{2})} \cos\left(n\frac{\theta}{2}\right)$$

et $\text{abs} \left(\sum_{k=0}^n \cos(k\theta) \right) \leq \frac{1}{\sin(\frac{\theta}{2})}$

Proposition 2.1.1: Soit $(a_n)_n \in \mathbb{N}$ une suite positive décroissante, $A = \sum a_n \cos(nx)$, $B = \sum a_n \sin(nx)$ deux séries trigonométriques. Alors A et B convergent uniformément sur $[\varepsilon, 2\pi - \varepsilon]$, $\forall \varepsilon > 0$. En particulier leurs sommes sont continues sur $]0, 2\pi[$.

Exemples:

1. $\sum_{n \geq 1} \frac{\cos(nx)}{n} = -\ln(2 \sin(\frac{x}{2}))$ sur $]0, \pi[$.
2. $\sum_{n \geq 1} \frac{z^n}{n}$ La série converge sur $\overline{D}(0, 1) \setminus \{1\}$.

3. Une série fondamentale.

Lemme 3.1: Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors,

$$\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t) \sin(At) dt = 0, \quad \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t) \cos(At) dt = 0$$

Démonstration: EN EXO. □

Exercice 1: Montrer que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{n} = \frac{\pi-x}{2}$ en posant $D_n(x) = 1 + 2 \cos x + 2 \cos(2x) + \dots + 2 \cos(nx) = \frac{\sin((n+\frac{1}{2})x)}{\sin(\frac{x}{2})}$

$$\begin{aligned} D_n(x) &= \sum_{k=-n}^n e^{ikx} = q^{-n} + q^{-n+1} + \dots + q^{-1} + 1 + q^1 + \dots + q^n \\ &= q^{-n}(1 + q + q^2 + \dots + q^{2n}) = q^{-n} \frac{q^{2n+1} - 1}{q - 1} = \frac{q^{n+1} - q^{-n}}{q - 1} \\ &= \frac{e^{i(n+1)x} - e^{-inx}}{e^{ix} - 1} = \frac{2 \sin((n + \frac{1}{2})x) e^{i\frac{x}{2}}}{2 \sin(\frac{x}{2}) e^{i\frac{x}{2}}} \\ &= \frac{\sin((n + \frac{1}{2})x)}{\sin(\frac{x}{2})} \end{aligned}$$

Proposition 3.1:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{n} = \frac{\pi - x}{2}, x \in]0, 2\pi[.$$

Démonstration: Soit $x \in]0, 2\pi[$.

$$\begin{aligned}
\int_{\pi}^x D_{n(t)} dt &= \int_{\pi}^x \left(1 + 2 \sum_{k=1}^n \cos(kx) \right) dt \\
&= (x - \pi) + 2 \sum_{k=1}^n \left[\frac{\sin(kt)}{k} \right]_{\pi}^x = (x - \pi) + 2 \sum_{k=1}^n \frac{\sin(kx)}{k} \\
\text{Donc} &= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sin(kx)}{k} = \frac{\pi - x}{2} + \frac{1}{2} \int_{\pi}^x \frac{\sin((n + \frac{1}{2})t)}{\sin(\frac{t}{2})} dt
\end{aligned}$$

Or $t \mapsto \frac{1}{\sin(\frac{t}{2})}$ est continue sur $[\pi, x]$ donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\pi}^x \frac{\sin((n + \frac{1}{2})t)}{\sin(\frac{t}{2})} dt = 0$$

d'après le [Lemme 3.1](#)

□

4. Récupération des coefficients d'une série trigonométrique.

Remarque (Calcul préliminaire):

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} e^{inx} dx &\stackrel{n \neq 0}{=} \left[\frac{e^{inx}}{in} \right]_0^{2\pi} = \frac{e^{in2\pi} - e^{in0}}{in} = 0 \\
\text{et} &= \int_0^{2\pi} e^{i0} dx = 2\pi
\end{aligned}$$

Donc

$$\int_0^{2\pi} e^{inx} dx = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq 0 \\ 2\pi & \text{si } n = 0 \end{cases}$$

Proposition 4.1: Soit A une série trigonométrique uniformément convergente de somme $f(x) := a_0 + \sum a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx}$. Alors a_0, a_n, b_n sont donnés par:

$$\begin{cases} a_0 = c_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx \\ a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(nx) dx. \\ b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(nx) dx \end{cases}$$

Démonstration: Par convergence uniforme, on peut intervertir \int et \sum Donc

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-inx} dx = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \int_0^{2\pi} e^{ikx} e^{-inx} dx = \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq n \\ c_n & \text{si } k = n \end{cases}$$

Donc

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-inx} dx, n \in \mathbb{Z}$$

et donc

$$a_0 = c_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx, a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(nx) dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(nx) dx.$$

□

Remarque: Dans nos calculs on peut toujours remplacer l'intervalle $[0, 2\pi]$ par un autre intervalle de longueur 2π car on travaille avec des fonctions 2π périodiques. Cela peut permettre de faciliter certains calculs.

Exemple: On a que la somme d'une certaine série trigo uniformément convergente est $f(x) = x^2$. Quels sont ses coeffs ?

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{x^3}{3} \right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{2\pi} \frac{\pi^3 + \pi^3}{3} = \frac{\pi^2}{3}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \sin(nx) dx = 0 \quad (\text{car c'est une fonction impaire or } f \text{ est paire})$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos(nx) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 \cos(nx) dx$$

$$\stackrel{\text{ipp}}{=} \frac{2}{\pi} \left(\left[\frac{x^2 \sin(nx)}{n} \right]_0^{\pi} - 2 \int_0^{\pi} \frac{x \sin(nx)}{n} dx \right) = -\frac{4}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{x \sin(nx)}{n} dx$$

$$= -\frac{4}{\pi} \left(\left[\frac{-x \cos(nx)}{n^2} \right]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \frac{\cos(nx)}{n^2} dx \right) = -\frac{4}{\pi} \left(\frac{-\pi \cos(n\pi)}{n^2} \right) + \frac{4}{\pi} \left[\frac{\sin(nx)}{n^3} \right]_0^{\pi}$$

$$= 4 \frac{\cos(n\pi)}{n^2} = 4 \frac{(-1)^n}{n^2}$$

Ainsi, $f(x) = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum \frac{(-1)^n}{n^2} \cos(nx)$ Donc sur $] -\pi, \pi[$,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos(nx) = \frac{1}{4} \left(x^2 - \frac{\pi^2}{3} \right) \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}$$

non démontré pour l'instant.

5. Séries de Fourier.

5.1. Développement en série de Fourier.

Définition 5.1.1: Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, une fonction 2π -périodique et continue par morceaux. On appelle *série de Fourier* de f la série $a_0 + \sum a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) = \sum c_n e^{inx}$ avec a_0, a_n, b_n définis par la Proposition 4.1.

Remarque: Vulgairement, cela signifie que la série de Fourier sera égale à f aux points continus, et différente aux autres points.

5.2. Convergence.

Lemme 5.2.1: Soit $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et dérivable. On suppose que $f(c^+) = \lim_{x \rightarrow c^+} f(x)$ et $f'(c^+) = \lim_{x \rightarrow c^+} f'(x)$ existent dans \mathbb{R} . Alors:

$$f'(c^+) = \lim_{x \rightarrow c^+} \frac{f(x) - f(c^+)}{x - c}$$

Démonstration: Utiliser le théorème des accroissements finis. □

Définition 5.2.1: Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. On dit que f est de classe C^k par morceaux sur $[a, b]$ s'il existe une subdivision $P = \{a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b\}$ de $[a, b]$ telle que pour tout $i \in \{0, \dots, n-1\}$, $f_i := f|_{[t_i, t_{i+1}[}$ soit de classe C^k sur $]t_i, t_{i+1}[$ et pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$,

$$\lim_{x \rightarrow t_i^+} f_i^{(k)}(x) \in \mathbb{R} \text{ et } \lim_{x \rightarrow t_{i+1}^-} f_i^{(k)}(x) \in \mathbb{R}.$$

Définition 5.2.2: Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$. On dit que f est de classe C^k si sa partie réelle et sa partie imaginaire sont C^k par morceaux.

Exemple:

1. $f(x) = |x|$ est C^0 mais pas C^1 mais est C^1 par morceaux car

$$\mathbb{R} \ni \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -1 \neq \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 1 \in \mathbb{R}.$$

2. $f(x) = \sqrt{|x|}$ n'est pas C^1 par morceaux.

Définition 5.2.3: Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction 2π -périodique. On dit que f est C^k par morceaux si $f|_{[0, 2\pi[}$ est C^k par morceaux.

Théorème 5.2.1 (de Dirichlet): Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction 2π -périodique et de classe C^1 par morceaux. Alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, la série de Fourier de f est convergente et

$$S(x) = \frac{f(x^-) + f(x^+)}{2}.$$

Démonstration: $S_N(x) = \sum_{n=-N}^N c_n e^{inx}$ avec $c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} dt$. On a

$$S_N(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sum_{n=-N}^N e^{in(x-t)} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) D_N(x-t) dt,$$

$$D_N(y) = 1 + 2 \cos y + \dots + 2 \cos(ny) = \begin{cases} \frac{\sin((n+\frac{1}{2})y)}{\sin(\frac{y}{2})} & \text{si } y \notin 2\pi\mathbb{Z} \\ 1 + 2N & \text{si } y \in 2\pi\mathbb{Z} \end{cases}$$

Or D_n est une fonction paire d'où $\int_{-\pi}^{\pi} D_n(y) dy = 2\pi$ (calcul) et $\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} D_N(y) dy = 1$. De plus, en posant $t = x + u$,

$$\begin{aligned}
S_N(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi-x}^{\pi-x} f(x+uD_N(-u)) \, du \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+u)D_N(u) \, du, \text{ car } 2\pi\text{-périodique} \\
&= \frac{1}{2} \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(x+u)D_N(u) \, du + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 f(x+u)D_N(u) \, du.
\end{aligned}$$

On pose $I = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(x+u)D_N(u) \, du$ et on a:

$$\begin{aligned}
I - f(x^+) &= I - f(x^+) \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} D_N(u) \, du = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (f(x+u) - f(x^+))D_N(u) \, du \\
&= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{f(x+u) - f(x^+)}{\sin(\frac{u}{2})} \sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)u\right) \, du.
\end{aligned}$$

Posons $g(x) = \frac{f(x+u) - f(x^+)}{\sin(\frac{u}{2})}$. g est continue par morceaux sur $]0, \pi]$, on a $\sin(\frac{u}{2}) \underset{u \rightarrow 0}{\sim} \frac{u}{2}$ Donc

$$\frac{f(x+u) - f(x^+)}{\sin(\frac{u}{2})} \sim 2 \frac{f(x+u) - f(x^+)}{u} \rightarrow 2f'(x^+)$$

Ainsi, g se prolonge par continuité en 0 et d'après le **Lemme 3.1**, $\lim_{N \rightarrow +\infty} I - f(x^+) = 0$;

On traite II de la même manière et on obtient le résultat du théorème. \square

Exemple: $f(x) = x^2$. pour $x \in [-\pi, \pi]$ que l'on prolonge par 2π -périodicité.

On a vu que $a_0 = \frac{\pi^2}{3}$, $a_n = \frac{4}{n^2}(-1)^n$, $b_n = 0$

De plus, f est C^1 par morceaux. D'où, par Dirichlet:

$$\pi^2 + \int_{n=1}^{+\infty} 4 \frac{(-1)^n}{n^2} \cos(nx) = \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2} = f(x) = x^2.$$

Avec $x = 0$, on trouve

$$\frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = 0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}.$$

5.3. Convergence des coefficients de Fourier.

Proposition 5.3.1: Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction 2π -périodique.

1. Si f est continue par morceaux alors $\lim_{n \rightarrow \pm\infty} c_n = 0$ i.e $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = 0$.
2. Si f est C^k et C^{k+1} par morceaux, $\lim_{n \rightarrow \pm\infty} n^{k+1}|c_n| = 0$ i.e $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^{k+1}a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} n^{k+1}b_n = 0$.

Démonstration: Voir moodle

Idée: I: $a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(nx) \, dx \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ et $b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(nx) \, dx \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ par **Lemme 3.1**

II: On montre d'abord que si f est C^k et C^{k+1} par morceaux alors $c_n(f) = \frac{1}{(in)^{k+1}} c_n f^{(k+1)}$ \square

Corollaire 5.3.1: Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ est 2π -périodique de classe C^1 et C^2 par morceaux alors la série de Fourier de f converge normalement vers f .

Démonstration: Exercice.

□