Suite et séries de fonctions
Chapitre 1: Suites de fonctions

Table des matières

1. Introduction.

On considère un ensemble X non vide (en général $X \subset \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

Définition 1.1 (suite de fonctions): On appelle suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur X la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par la fonction $f_n : X \to \mathbb{R}; x \mapsto f_n(x)$.

Exemple: $X = \mathbb{R}$
$\forall n \in \mathbb{N}, f_n(x) = \ln(1 + nx^2)$.

2. Convergence simple.

On cherche à étudier le comportement d'une suite de fonction quand n tend vers $+\infty$, il faut définir une notion de convergence. Le plus simple c'est d'utiliser la convergence des suites numériques.

Définition 2.1 (convergence simple): Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions sur X. On dit que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge simplement** sur X, si pour tout $x \in X$, la suite numérique $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente. Dans ce cas on note $f(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n(x)$ la limite et on dit que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers f sur X et on note $f_n \xrightarrow{\text{CS}} f$ sur X. i.e :

$$f_n \xrightarrow{\text{CS}} f \text{ sur } X \Leftrightarrow \forall x \in X, \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$$

Remarques:
1. Le N de la définition dépend de x et de ε.
2. La convergence simple est une propriété locale.

Remarque (méthode): Pour étudier la convergence simple d'une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur X on doit :
1. Fixer $x \in X$.
2. Etudier la suite numérique $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$.
3. S'il y a convergence, on construit $f : X \to \mathbb{R}$ tq $f(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n(x)$ et on dit $f_n \xrightarrow{\text{CS}} f$ sur X.

Exemples:

1. On considère $(f_n)_{n\in\mathbb{N}\setminus 0}$ sur $I =]0, +\infty[$ définie par $f_n : I \to \mathbb{R}; x \mapsto \frac{1}{x+\frac{1}{n}}$ Soit $x > 0$ fixé, on a $f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{x}$. On pose $f : I \to \mathbb{R}; x \to \frac{1}{x}$ et on a $f_n \xrightarrow{\text{CS}} f$ sur X.

2. Même suite mais sur $I = [0; +\infty[$. Pour $x = 0$, $f_n(0) = n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ donc $(f_n)_{n\in\mathbb{N}\setminus 0}$ ne converge pas simplement sur I.
3. On considère $(f_n)_{n\in\mathbb{N}\setminus 0}$ sur $I = [0, +\infty[$ où $f_n : I \to \mathbb{R}; x \mapsto \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$
$*$ pour $x = 0$ fixé, $f_n(0) = 1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.
$*$ pour $x > 0$ fixé, $f_{n(x)} = e^{n\ln(1+\frac{x}{n})} = e^{n(\frac{x}{n}+o(\frac{1}{n}))} = e^{x+o(1)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^x$
On pose $f : I \to \mathbb{R}; x \to e^x$, on a $f_n \overset{\text{CS}}{\longrightarrow} f$ sur I.
4. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $I = [0, 1]$ définie par $f_{n(x)} = x^n$.
$*$ Si $x \in [0, 1[$ fixé, $f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$
$*$ Si $x = 1$, $f_n(1) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.
On pose $f : I \to \mathbb{R}; x \mapsto \begin{cases} 1 \text{ si } x=1 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$. On a $f_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f$.
On veut définir une convergence qui conserve la continuité à la limite. On suppose $f_n \overset{\text{CS}}{\longrightarrow} f$ sur I un intervalle de $\mathbb{R}$. On suppose $\forall n \in N, f_n \in C^0(I, \mathbb{R})$. Soit $\alpha \in I, \varepsilon > 0$. On veut majorer $|f(x) - f(\alpha)|$ par ε. On a :
$$\begin{aligned} |f(x) - f(\alpha)| &= |f(x) - f_n(x) + f_n(x) + f_n(\alpha) - f_n(\alpha) - f(\alpha)| \\ &\leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(\alpha)| + |f_n(\alpha) - f(\alpha)| \end{aligned}$$
1^{er} terme: $\forall n \in \mathbb{N}$, f_n est continue en α donc
$$\exists \eta_n \in \mathbb{R}, x \in]\alpha - \eta, \alpha + \eta[\Rightarrow |f_n(x) - f_n(\alpha)|.$$
2^{eme} terme: Comme f_n tend vers f quand $n \to (+\infty)$,
$$\exists N_{x,\varepsilon}, n \geq N_{x,\varepsilon} \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$
3^{eme} terme: Comme $f_n(\alpha)$ tend vers $f(\alpha)$ quand $n \to (+\infty)$,
$$\exists \eta_n \in \mathbb{R}, x \in]\alpha - \eta, \alpha + \eta[\Rightarrow |f_n(\alpha) - f(\alpha)| \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$
Le problème est dû au fait que on doit satisfaire les deux conditions $x \in]\alpha - \eta; \alpha + \eta[$ et $x \geq N_{x,\varepsilon}$ pour une infinité de x.

3. Convergence uniforme.

Définition 3.1 (Convergence uniforme): Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonction sur X. Soit f une fonction sur X. On dit que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur X si:
$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow \forall x \in X, |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon.$$
On note $f_n \overset{\text{CU}}{\longrightarrow} f$ sur X.

Remarques:
1. Le N ne dépend que de ε.
2. La convergence uniforme est une propriété globale.

Définition 3.2: Soit $f : X \to \mathbb{R}$ une fonction. On appelle **norme sup** ou **norme infinie** sur X la valeur :
$$\|f\|_{+\infty,X} = \sup\{|f(x)|, x \in X\} \in \mathbb{R}_+ \cup \{\pm\infty\}.$$

Exemples:
1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$
   On a $\forall x \in \mathbb{R}, 0 \leq f(x) \leq 1$ et $f(0) = 1$ donc $\|f\|_{+\infty,\mathbb{R}} = 1$.
2. $f : I = [0,1[\to \mathbb{R}; x \mapsto x^2$
   On a $f'(x) = 2x \geq 0$ Donc $f(x)$ est croissante sur I et $f(x) \underset{x\to 1}{\longrightarrow} 1$. D'où $\{f(x), x \in I\} = [0,1[$ donc $\|f\|_{+\infty,I} = 1$.
3. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; x \mapsto x$,
   $\|f\|_{+\infty,\mathbb{R}} = +\infty$.

3.1. Propriétés de la $\|\cdot\|_{+\infty}$

Proposition 3.1.1: Soient $f, g : X \to \mathbb{R}$ deux fonctions.
1. S'il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que $\forall x \in X, |f(x)| \leq M$ alors $\|f\|_{+\infty,X} \leq M$.
2. $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \|\alpha f\|_{+\infty,X} = |\alpha| \|f\|_{+\infty,X}$.
3. $\|f+g\|_{+\infty,X} \leq \|f\|_{+\infty,X} + \|g\|_{+\infty,X}$.
4. $\|fg\|_{+\infty,X} \leq \|f\|_{+\infty,X} \|g\|_{+\infty,X}$.

Démonstration:
1. exercice
2. exercice
3. $|f+g| \leq |f| + |g| \leq \|f\|_{+\infty,X} + |g| \leq \|f\|_{+\infty,X} + \|g\|_{+\infty,X}$ d'où d'après 1),

$$\|f+g\|_{+\infty,X} \leq \|f\|_{+\infty,X} + \|g\|_{+\infty,X}.$$

□

Proposition 3.1.2 (Convergence uniforme avec la norme infinie): Soient $(f_n)_{n\in\mathbb{N}\setminus 0}$ une suite de fonctions sur X et f une fonction sur X. Alors

$$f_n \overset{\text{CU}}{\longrightarrow} f \Leftrightarrow \|f_n - f\|_{+\infty,X} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Démonstration:
$\Rightarrow$ Si $f_n \overset{\text{CU}}{\longrightarrow} f$ sur X, $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$ tq $n \geq N \Rightarrow \forall x \in X, |f_n - f| \leq \varepsilon$ donc $\|f_n - f\|_{+\infty,X} \leq \varepsilon$.
D'où $\|f_n - f\|_{+\infty,X} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
$\Leftarrow$ Si $\|f_n - f\|_{+\infty,X} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ Alors

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow \forall x \in X, |f_n(x) - f(x)| \leq \|f_n(x) - f(x)\|_{+\infty,X} \leq \varepsilon.$$

Donc $f_n \overset{\text{CU}}{\longrightarrow} f$ sur X. □

Théorème 3.1.1: Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}\setminus 0}$ une suite de fonctions et soit f une fonction sur X. On a

$$f_n \overset{\text{CU}}{\longrightarrow} f \text{ sur } X \Rightarrow f_n \overset{\text{CS}}{\longrightarrow} f \text{ sur } X.$$

Démonstration: Immédiat. □

Remarque (Méthode): Plan pour étudier la convergence uniforme d'une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}\setminus 0}$ sur X.

1. Etudier la convergence simple.
2. S'il y a convergence simple, on définit la fonction $f : X \to \mathbb{R}; x \mapsto f_n(x)$ quand $n \to +\infty$.
3. Etudier la convergence uniforme: s'il y a convergence uniforme, **cela ne peut être que vers f** !
4. Pour montrer la **convergence uniforme** : on majore $\|f_n - f\|_{+\infty,X}$ par une suite numérique (sans x) qui tend vers 0 quand $n \to +\infty$.

Pour montrer la **non-convergence uniforme** : on minore $\|f_n - f\|_{+\infty,X}$ par une suite numérique positive (sans x) qui ne tend pas vers 0 quand $n \to +\infty$.
On pourra étudier la suite: $g_n = f_n - f$.

Exemples:

1. $(f_n)_{n\in\mathbb{N}\setminus 0}$ définie par $f_n : I = [1,+\infty[\to \mathbb{R}; x \mapsto \frac{1}{x+\frac{1}{n}}$.
   On a vu que $f_n \overset{\text{CS}}{\longrightarrow} f$ sur I où $f : I \to \mathbb{R}; x \mapsto \frac{1}{x}$. On pose:
   $$g_n = f_n - f = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+\frac{1}{n}} = \frac{\frac{1}{n}}{x\left(x+\frac{1}{n}\right)} = \frac{1}{nx^2+x}.$$
   1$^{\text{ere}}$ méthode: Majoration de $|g_n|$ par une expression qui ne dépend pas de x et qui tend vers 0 quand $n \to +\infty$.
   Lorsque $x \geq 1$; $nx^2 + x \geq nx^2 + 1 \geq n + 1$ Donc $\forall x \in I, 0 \leq g_n(x) \leq \frac{1}{n+1}$ Donc
   $$\|f_n - f\|_{+\infty,I} \leq \frac{1}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$
   . D'où $f_n \overset{\text{CU}}{\longrightarrow} f$ sur I.

   2$^{\text{e}}$ méthode: (en général plus couteuse): On étudie g_n. On a $g_n{}'(x) = -\frac{2nx+1}{(nx^2+x)^2} \leq 0$ donc g_n est décroissante sur I et $\|f\|_{+\infty,I} = \frac{1}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. D'où $f_n \overset{\text{CU}}{\longrightarrow} f$ sur I.
2. $(f_n)_{n\in\mathbb{N}\setminus 0}$ définie par $f_n : I = [0,1] \to \mathbb{R}; x \mapsto x^n$. On a vu $f_n \overset{\text{CS}}{\longrightarrow} f$ sur I où $f : I \to \mathbb{R}; x \mapsto \begin{cases} 0 \text{ si } x\in[0,1[\\ 1 \text{ si } x=1 \end{cases}$

   1$^{\text{ere}}$ méthode: On veut minorer $|f_n(x) - f(x)|$. Pour cela, on utilise une suite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où $\forall n, x_n \in I, x_n = 1 - \frac{1}{n}$. Ainsi, on a bien $|f_n(x_n) - f(x_n)| \underset{\cancel{n\to+\infty}}{\cancel{\longrightarrow}} 0$.
   $$|f_n(x_n) - f(x_n)| = f_n(x_n) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = e^{n\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)} = e^{n\left(-\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)} = e^{-1+o(1)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{e}$$
   On a $\|f_n - f\|_{+\infty,I} \geq |f_n(x_n) - f(x_n)| \not\to_{+\infty} 0$. d'où $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément sur I.

   2$^{\text{e}}$ méthode: $g_n(x) = f_n(x) - f(x) = \begin{cases} f_n(x)=x^n \text{ si } x\neq 1 \\ 1 \text{ sinon} \end{cases}$ donc $\|g_n\|_{+\infty,I} = 1 \underset{\cancel{n\to+\infty}}{\cancel{\longrightarrow}} 0$. Donc $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément sur I.

Théorème 3.1.2: Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur I. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction. Soit $x_0 \in I$. On suppose

1. $\forall n \in \mathbb{N}, f_n$ est continue en x_0 ($f_n \in C^{\circ}(I, \mathbb{R})$).
2. $f_n \overset{\text{CU}}{\longrightarrow} f$ sur I.

Alors f est continue en x_0.

Démonstration: Soit $\varepsilon > 0$.
On a $f_n \overset{\text{CU}}{\longrightarrow} f$ sur I donc $\exists N \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow \forall x \in I, \left|f_{n(x)} - f(x)\right| \leq \frac{\varepsilon}{3}$.
De plus, f_n est continue en x_0 donc $\exists \eta > 0, |x - x_0| \leq \eta \Rightarrow |f_n(x) - f_n(x_0)| \leq \frac{\varepsilon}{3}$.
Soit $n \geq N$ et $x \in I$ tq $|x - x_0| \leq \eta$.

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &= |f(x) - f_N(x_0) + f_N(x_0) - f_N(x) + f_N(x) - f(x_0)| \\ &\leq |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f_N(x_0)| + |f_N(x_0) - f(x_0)| \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Ainsi, f est continue en x_0. □

Remarques:
1. Il n'y a pas réciprocité.
2. Le théorème nous donne un critère supplémentaire pour justifier la non-convergence uniforme.
3. On remarque que l'on a pas besoin de la continuité uniforme sur I en entier, c'est suffisant de l'avoir sur un voisinage de x_0 (ou un intervalle fermé et borné contenant x_0).

Proposition 3.1.3 (Continuité uniforme sur tout segment + continuité): Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle. Soient $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions sur I et f une fonction définie sur I. On suppose :

1. $\forall n \in \mathbb{N}, f_n$ est continue en x_0.
2. $f_n \overset{\text{CU}}{\longrightarrow} f$ sur tout segment $K = [a, b] \subset I$.

Alors f est continue sur I.

Démonstration: Soit $x_0 \in I, \exists K = [a, b]$ avec $a \neq b \neq x_0$ tel que $x_0 \in [a, b]$ On applique le théorème sur K donc f est continue en x_0. D'où f continue sur I. □

Remarques: Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$.
1. f est continue sur $I \Leftrightarrow f$ est continue sur n'importe quel segment $K \subset I$.
2. $f_n \overset{\text{CS}}{\longrightarrow} f$ sur $I \Leftrightarrow f_n \overset{\text{CS}}{\longrightarrow} f$ sur $K \subset I$ pour tout segment $K \subset I$.
3. $f_n \overset{\text{CU}}{\longrightarrow} f$ sur $I * \Rightarrow * f_n \overset{\text{CU}}{\longrightarrow} f$ sur $K \subset I$ pour tout segment $K \subset I$.

Exemple: Considérons pour $n \in \mathbb{N} \setminus 0$, $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; x \mapsto \begin{cases} x^2 \sin(\frac{1}{nx}) \text{ si } x \neq 0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$ Comme

$$\left|x^2 \sin\left(\frac{1}{nx}\right)\right| \leq x^2 \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0,$$

f_n est continue en 0.
Convergence simple: Si $x = 0, f_n(0) = 0 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Si $x \in \mathbb{R} \setminus 0, f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\sim} x^2 \frac{1}{nx} = \frac{x}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
Convergence uniforme sur tout gement $K = [-\alpha, \alpha] \forall \alpha \in \mathbb{R}_+ \setminus 0$:
$g(x) = \sin x - x$ et $g'(x) = \cos(x) - 1 \leq 0$. De plus, $\forall x \in K, g(x) \leq 0$ donc $|\sin(x)| \leq |x|$.

Donc $\forall x \in \mathbb{R}, |f_n(x)| \leq x^2\left(\frac{1}{nx}\right) \leq \frac{|x|}{n}$.
D'où: $\forall x \in [-\alpha, \alpha] = K, |f_n(x)| \leq \frac{\alpha}{n}$ donc $\|f_n - f\|_{+\infty, K} = 0.$ et $f_n \overset{\text{CU}}{\longrightarrow} f$ sur K. Ainsi, il y a convergence uniforme sur tout segment.
Montrons qu'il n'y a **pas** de convergence uniforme sur $\mathbb{R}$:
On prend $x_n = n$ et $f_n(x_n) = n^2 \sin\left(\frac{1}{n^2}\right) \underset{n \to +\infty}{\sim} n^2 \frac{1}{n^2} = 1$ On a

$$|f_n(x_n) - f(x_n)| = 1 \leq \|f_n - f\|_{+\infty, \mathbb{R}} \cancel{\underset{n \to +\infty}{\longrightarrow}} 0$$

Remarque: La convergence uniforme ne se conserve pas lors d'une réunion infinie. Mais se conserve si elle l'est.

4. Intégration sur un segment et convergence uniforme.

On veut étudier une suite d'intégrales par exemple, on veut chercher la limite quand $n \to +\infty$ de la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $I_n = \int_0^1 \frac{n^4 + x^4}{(n+x)^4} \,\mathrm{d}x$. La tentation serait de dire qu'à x fixé, $\frac{n^4+x^4}{(n+x)^4} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 1$ et donc $I_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 1 \,\mathrm{d}x = 1$. En faisant cela, on dit que

$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^1 f_n(x) \,\mathrm{d}x = \int_0^1 \lim_{n \to +\infty} f_n(x) \,\mathrm{d}x$$

ce qui est généralement **faux**.

Théorème 4.1 (Convergence uniforme + intégration sur un segmnent): Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions sur un segment $I = [a, b]$. On suppose que:

1. $\forall n \in \mathbb{N}, f_n$ est continue sur I.
2. $f_n \overset{\text{CU}}{\longrightarrow} f$ sur I.

Alors f est continue sur I et

$$\lim_{n \to +\infty} \int_a^b f_n(x) \,\mathrm{d}x = \int_a^b \lim_{n \to +\infty} f_n(x) \,\mathrm{d}x.$$