Séries de Fourier

Table des matières

1. Séries trigonométriques.

1.1. Définitions.

Définition 1.1.1 (Série trigonométrique.): Une série trigonométrique est une série de la forme

$$a_0 + \sum_{n\geq 1} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx), a_n, b_n \in \mathbb{C}.$$

Remarque: Si cette série converge au point x, on note $S(x)$ sa somme. En notant E l'ensemble de ces points j'obtiens une fonction $S : E \to \mathbb{C}; x \mapsto S(x)$.

Remarque: S est $2\pi -$ périodique signifie $S(x + 2\pi) = S(x)$.

Remarque (Autre notation): On peut noter

$$\begin{cases} c_0 = a_0 \\ c_n = \frac{a_n - ib_n}{2} \\ c_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_n = c_n + c_{-n} \\ b_n = i(c_n - c_{-n}) \end{cases}.$$

Ainsi, on a

$$\begin{aligned} a_0 + \sum_{n=1}^{N} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) &= c_0 + \sum_{n=1}^{N} (c_n + c_{-n}) \cos(nx) + i(c_n - c_{-n}) \sin(nx) \\ &= c_0 + \sum_{n=1}^{N} c_n(\cos(nx) + i \sin(nx)) + c_{-n}(\cos(nx) + i \sin(nx)) \\ &= c_0 e^{i0x} + \sum_{n=1}^{N} c_n e^{inx} + c_{-n} e^{-inx} = \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{inx}. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx} \text{ si } x \in E.$$

2. Critères de convergence.

2.1. Convergence uniforme.

Remarque: $\sup_{x \in \mathbb{R}} |a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)| \leq |a_n| + |b_n|$.

Théorème 2.1.1: Soit $A = \sum a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$ une série trigonométrique telle que $\sum |a_n| + |b_n|$ converge. Alors A converge uniformément sur $\mathbb{R}$ et $S(x)$ est continue.

Exemple: $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(nx)}{n^2} = \frac{x^2}{4} - \pi \frac{x}{2} + \frac{\pi^2}{6}$ si $x \in [0, 2\pi]$.

Théorème 2.1.2: Soit $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}, (d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites dans $\mathbb{C}$, $C_n = \sum_{c_n}$, $D_n = \sum d_n$. Pour tous $N \leq M$, on a

$$\sum_{n=N}^{M} c_n d_n = C_M D_M - C_N D_{N-1} + \sum_{n=N}^{M-1} (c_n - c_{n+1} D_n).$$

Démonstration: Pour le voir poser $d_n = D_n - D_{n-1}$. □

Corollaire 2.1.1: Si la suite $(D_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée par un nombre $D > 0$ et $(C_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante, alors

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n=N}^{M} c_n d_n \right| &\leq |C_M D_M| + \sum_{n=N}^{M-1} \left| c_n - c_{n+1} D_n \right| + |C_n D_{n-1}| \\ &\leq D \left(|C_M| \sum_{n=N}^{M-1} (c_n - c_{n+1}) + c_N \right). \end{aligned}$$

Si de plus $(c_n) \in \mathbb{R}_+$, $\left| \sum_{n=N}^{M} c_n d_n \right| \leq 2 D C_N$

Théorème 2.1.3 (Critère d'Abel): Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite positive à valeurs réelles décroissante et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite dans $\mathbb{C}$ telle que $\exists D \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, \forall m > n, \left| b_n + b_{n+1} + \ldots + b_m \right| < D$. Alors $\sum a_n b_n$ converge et $\forall n \in \mathbb{N}$, $\sum_{n=N}^{M} a_n b_n \leq 2 D c_N$.

Exemple:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n} e^{ik\theta} &= \sum_{k=0}^{n} e^{(i\theta)^k} \\ &= \frac{\left(e^i \theta\right)^{n+1} - 1}{e^{i\theta} - 1} = \cdot\text{passage par l'angle moitié}\cdot = \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}\theta\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} e^{in\theta}. \end{aligned}$$

D'où

$$\sum_{k=0}^{n} \cos(k\theta) = \Re\left(\sum_{k=0}^{n} e^{ik\theta}\right) = \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}\theta\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} \cos\left(n\frac{\theta}{2}\right)$$

et `abs` $\left(\sum_{k=0}^{n} \cos(k\theta)\right) \leq \frac{1}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}$

Proposition 2.1.1: Soit $(a_n)_n \in \mathbb{N}$ une suite positive décroissante, $A = \sum a_n \cos(nx)$, $B = \sum a_n \sin(nx)$ deux séries trigonométriques. Alors A et B convergent uniformément sur $[\varepsilon, 2\pi - \varepsilon]$, $\forall \varepsilon > 0$. En particulier leurs sommes sont continues sur $]0, 2\pi[$.

Exemples:
1. $\sum_{n\geq 1} \frac{\cos(nx)}{n} = -\ln\left(2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right)$ sur $]0, \pi[$.
2. $\sum_{n\geq 1} \frac{z^n}{n}$ La série converge sur $\overline{D}(0,1) \setminus \{1\}$.

3. Une série fondamentale.

Lemme 3.1: Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors,

$$\lim_{A\to+\infty} \int_a^b f(t)\sin(At)\,\mathrm{d}t = 0, \lim_{A\to+\infty} \int_a^b f(t)\cos(At)\,\mathrm{d}t = 0$$

Démonstration: EN EXO. □

Exercice 1: Montrer que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{n} = \frac{\pi - x}{2}$ en posant $D_n(x) = 1 + 2\cos x + 2\cos(2x) + \ldots + 2\cos(nx) = \frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$

$$\begin{aligned}
D_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} e^{ikx} &= q^{-n} + q^{-n+1} + \ldots + q^{-1} + 1 + q^1 + \ldots + q^n \\
&= q^{-n}\left(1 + q + q^2 + \ldots + q^{2n}\right) = q^{-n}\frac{q^{2n+1} - 1}{q - 1} = \frac{q^{n+1} - q^{-n}}{q - 1} \\
&= \frac{e^{(i(n+1)x) - e^{-inx}}}{e^{ix} - 1} = \frac{2\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right)}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \frac{e^{i\frac{x}{2}}}{e^{i\frac{x}{2}}} \\
&= \frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}
\end{aligned}$$

Proposition 3.1:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{n} = \frac{\pi - x}{2}, x \in]0, 2\pi[.$$

Démonstration: Soit $x \in]0, 2\pi[$.

$$\int_{\pi}^{x} D_{n(t)}\,\mathrm{d}t = \int_{\pi}^{x}\left(1+2\sum_{k=1}^{n}\cos(kx)\right)\mathrm{d}t$$
$$= (x-\pi)+2\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{\sin(kt)}{k}\right]_{\pi}^{x} = (x-\pi)+2\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin(kx)}{k}$$

$$\text{Donc} = \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\sin(kx)}{k} = \frac{\pi-x}{2}) + \frac{1}{2}\int_{\pi}^{x}\frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}\,\mathrm{d}t$$

Or $t \mapsto \frac{1}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}$ est continue sur $[\pi, x]$ donc

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{\pi}^{x}\frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}\,\mathrm{d}t = 0$$

d'après le Lemme 3.1 □

4. Récupération des coefficients d'une série trigonométrique.

Remarque (Calcul préliminaire):

$$\int_{0}^{2\pi} e^{inx}\,\mathrm{d}x \overset{n\neq0}{=} \left[\frac{e^{inx}}{in}\right]_{0}^{2\pi} = \frac{e^{in2\pi}-e^{in0}}{in} = 0$$
$$\text{et} = \int_{0}^{2\pi} e^{i0}\,\mathrm{d}x = 2\pi$$

Donc

$$\int_{0}^{2\pi} e^{inx}\,\mathrm{d}x = \begin{cases}0 \text{ si } n\neq 0\\ 1 \text{ si } n = 0\end{cases}$$

Proposition 4.1: Soit A une série trigonométrique uniformément convergente de somme $f(x) \coloneqq a_0 + \sum a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx) = \sum_{n=-\infty} c_n e^{inx}$. Alors a_0, a_n, b_n sont donnés par:

$$\begin{cases} a_0 = c_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,\mathrm{d}x \\ a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos(nx)\,\mathrm{d}x. \\ b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin(nx)\,\mathrm{d}x \end{cases}$$

Démonstration: Par convergence uniforme, on peut intervertir $\int$ et $\sum$ Donc

$$\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi} f(x)e^{-inx}\,\mathrm{d}x = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k\int_{0}^{2\pi} e^{ikx}e^{-inx} = \begin{cases}0 \text{ si } k\neq n\\ 1 \text{ si } k = n\end{cases} = c_n$$

Donc

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi} f(x)e^{-inx}\,\mathrm{d}x, n\in\mathbb{Z}$$

et donc

$$a_0 = c_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,\mathrm{d}x, a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos(nx)\,\mathrm{d}$$
$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin(nx)\,\mathrm{d}x.$$

□

Remarque: Dans nos calcul on peut toujours remplacer l'intervalle$[0, 2\pi]$ par un autre intervalle de longueur 2π car on travaille avec des fonctions 2π périodique. Cela peut permettre de faciliter certains calculs.

Exemple: On a que la somme d'une certaine série trigo uniformément convergente est $f(x) = x^2$. Quels sont ses coeffs ?

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{2\pi}\frac{\pi^3+\pi^3}{3} = \frac{\pi^2}{3}$$
$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2\sin(nx)\,\mathrm{d}x = 0 \text{ (car c'est une fonction impaire or f est paire)}$$
$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2\cos(nx)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2\cos(nx)\,\mathrm{d}x$$
$$\overset{\text{ipp}}{=} \frac{2}{\pi}\left(\left[\frac{x^2\sin(nx)}{n}\right]_0^{\pi} - 2\int_0^{\pi}\frac{x\sin(nx)}{n}\,\mathrm{d}x\right) = -\frac{4}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{x\sin(nx)}{n}\,\mathrm{d}x$$
$$= -\frac{4}{\pi}\left(\left[\frac{-x\cos(nx)}{n^2}\right]_0^{\pi} + \int_0^{\pi}\frac{\cos(nx)}{n^2}\,\mathrm{d}x\right) = -\frac{4}{\pi}\left(\frac{-\pi\cos(n\pi)}{n^2}\right) + \frac{4}{\pi}\left[\frac{\sin(nx)}{n^3}\right]_0^{\pi}$$
$$= 4\frac{\cos(n\pi)}{n^2} = 4\frac{(-1)^n}{n^2}$$

Ainsi, $f(x) = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum\frac{(-1)^n}{n^2}\cos(nx)$ Donc sur $]-\pi,\pi[$,

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos(nx) = \frac{1}{4}\left(x^2 - \frac{\pi^2}{3}\right) \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}$$

non démontré pour l'instant.

5. Séries de Fourier.

5.1. Développement en série de Fourier.

Définition 5.1.1: Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, une fonction 2π-périodique et continue par morceaux. On appelle *série de Fourier* de f la série $a_0 + \sum a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx) = \sum c_n e^{inx}$ avec a_0, a_n, b_n définit par la Proposition 4.1.

Remarque: Vulgairement, cela signifie que la série de fourrier sera égale à f aux points continus, et différente aux autres points.

5.2. Convergence.

Lemme 5.2.1: Soit $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ une fonction continue et dérivable. On suppose que $f(c^+) = \lim_{x \to c^+} f(x)$ et $f'(c^+) = \lim_{x \to c^+} f'(x)$ existent dans $\mathbb{R}$. Alors:

$$f'(c^+) = \lim_{x \to c^+} \frac{f(x) - f(c^+)}{x - c}$$

Démonstration: Utiliser le théroème des accroissements finis. □

Définition 5.2.1: Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. On dit que f est de classe C^k par morceaux sur $[a, b]$ s'il existe une subdivision $P = \{a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b\}$ de $[a, b]$ telle que pour tout $i \in \{0, -, n - 1\}$, $f_i := f_{|]t_i, t_{i+1}[}$ soit de classe C^k sur $]t_i, t_{i+1}[$ et pour tout $k \in \{0, -, n\}$,

$$\lim_{x \to t_i^+} f_i^{(k)}(x) \in \mathbb{R} \text{ et } \lim_{x \to t_{i+1}^-} f_i^{(k)}(x) \in \mathbb{R}.$$

Définition 5.2.2: Soit $f : [a,b] \to \mathbb{C}$. On dit que f est de classe C^k si sa partie réelle et sa partie imaginaire sont C^k par morceaux.

Exemple:
1. $f(x) = |x|$ est C^0 mais pas C^1 mais est C^1 par morceaux car
$$\mathbb{R} \ni \lim_{x \to 0^+} f(x) = -1 \neq \lim_{x \to 0^-} f(x) = 1 \in \mathbb{R}.$$
2. $f(x) = \sqrt{|x|}$ n'est pas C^1 par morceaux

Définition 5.2.3: Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction 2π-périodique. On dit que f est C^k par morceaux si $f_{|[0,2\pi]}$ est C^k par morceaux.

Théorème 5.2.1 (de Dirichlet): Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction 2π-périodiqueet de classe C^1 par morceaux. Alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, la série de Fourier de f est convergente et

$$S(x) = \frac{f(x^-) + f(x^+)}{2}.$$

Démonstration:

$$S_N(x) = \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{inx}$$

avec $c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} \,\mathrm{d}t$. Donc

$$\begin{aligned} S_{N(x)} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sum_{n=-N}^{N} e^{in(x-t)} \,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) D_{N(x-t)} \,\mathrm{d}t, \end{aligned}$$

$$D_N(y) = 1 + 2\cos y + \ldots + 2\cos(ny) = \begin{cases} \frac{\sin((n+\frac{1}{2})y)}{\sin(\frac{y}{2})} \text{ si } y \notin 2\pi\mathbb{Z} \\ 1 + 2N \text{ si } y \in 2\pi\mathbb{Z} \end{cases}$$

Or D_n est une fonction paire d'où $\int_{-\pi}^{\pi} D_{n(y)} \,\mathrm{d}y = 2\pi$ (calcul) et $\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} D_N(y) \,\mathrm{d}y = 1$.
En posant $t = x + u$,

$$\begin{aligned} S_N(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi-x}^{\pi-x} f\left(x + uD_{N(-u)}\right) \mathrm{d}u \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+u)D_N(u) \,\mathrm{d}u, \text{car } 2\pi\text{-périodique} \\ &= \frac{1}{2}\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(x+u)D_N(u) \,\mathrm{d}u + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} f(x+u)D_N(u) \,\mathrm{d}u. \end{aligned}$$

On pose $I = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(x+u)D_N(u) \,\mathrm{d}u$ et on a

$$\begin{aligned} I - f(x^+) = I - f(x^+)\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} D_N(u) \,\mathrm{d}u &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} (f(x+u) - f(x^+))D_N(u) \,\mathrm{d}u \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{f(x+u) - f(x^+)}{\sin(\frac{u}{2})} \sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)u\right) \mathrm{d}u. \end{aligned}$$

Posons $g(x) = \frac{f(x+u)-f(x^+)}{\sin(\frac{u}{2})}$. g est continue par morceaux sur $]0,\pi]$ et quand $u \to 0$ on a $\sin(\frac{u}{2}) \sim \frac{u}{2}$ Donc

$$\frac{f(x+u) - f(x^+)}{\sin(\frac{u}{2})} \sim 2\frac{f(x+u) - f(x^+)}{u} \longrightarrow 2f'(x^+)$$

Ainsi, g se prolonge par continuité en 0 et d'après le lemme de RIemann Lebesgue, $\lim_{N\to+\infty} I - f(x^+) = 0$; On traite II de la meme manière et on obtient le résultat du théorème. □

Exemple: $f(x) = x^2$. pour $x \in [-\pi,\pi]$ que l'on prolonge par 2π-périodicité. On a vu que $a_0 = \frac{\pi^2}{3}, a_n = \frac{4}{n^2}(-1)^n, b_n = 0$

De plus, f est C^1 par morceaux. donc par Dirichlet:

$$\pi^2 + \int_{n=1}^{+\infty} 4\frac{(-1)^n}{n^2}\cos(nx) = \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2} = f(x) = x^2.$$

Avec $x = 0$, on trouve

$$\frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2} = 0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}.$$

5.3. Convergence des coefficients de Fourier.

Proposition 5.3.1: Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction 2π-périodique.
1. Si f est continue par morceaux alors $\lim_{n\to\pm\infty} c_n = 0$ i.e $\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} b_n = 0$.
2. Si f est C^k et C^{k+1} par morceaux, $\lim_{n\to\pm\infty} n^{k+1}|c_n| = 0$ i.e $\lim n^{k+1}a_n = \lim n^{k+1}b_n = 0$.

Démonstration: Voir moodle
Idée: I: $a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(nx) \, \mathrm{d}x \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ et $b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(nx) \, \mathrm{d}x \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ par Lemme 3.1
II: On montre d'abord que si f est C^k et C^{k+1} par morceaux alors $c_n(f) = \frac{1}{(in)^{k+1}} c_n f^{(k+1)}$ □