

Géométrie affine et euclidienne

Table des matières

1. Géométrie affine.	1
1.1. Espaces affines	1
1.2. Sous-espaces affines.	2
1.3. Sous-espaces affines engendrés par une partie.	3
1.4. Parallélisme.	4
1.5. Barycentres.	4
2. Applications affines.	5
2.1. Effet sur les barycentres.	6
2.2. Transformations affines.	7
3. Points fixes.	8
4. Espaces vectoriels euclidiens.	11
4.1. Norme.	12
4.2. Orthogonalité.	13

1. Géométrie affine.

1.1. Espaces affines

Définition 1.1. Soit E un espace vectoriel. Un ensemble (non vide) \mathcal{E} est un *espace affine* s'il existe une application $\theta : \mathcal{E} \times \mathcal{E} \rightarrow E ; (A, B) \mapsto \overrightarrow{AB}$ telle que :

- (1) Pour tout $A \in \mathcal{E}$ fixé, l'application $\theta_A : \mathcal{E} \rightarrow E ; B \mapsto \overrightarrow{AB}$ est bijective.
- (2) Pour tout $A, B, C \in \mathcal{E}$, on a $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ (relation de Chasles).

Remarques 1.2.

- (1) Les éléments de \mathcal{E} sont les points.
- (2) La dimension de \mathcal{E} est celle de E .
- (3) L'espace vectoriel E est appelé la direction de \mathcal{E} , on dit aussi que \mathcal{E} est dirigé par E .
On notera (\mathcal{E}, E) .

Exemple 1.3. Tout espace vectoriel E admet une structure naturelle d'espace affine.

Soit $\theta : E \times E \rightarrow E ; (u, v) \mapsto v - u$. On vérifie les deux conditions de la définition d'un espace affine.

1. Soit $u \in E$. L'application $\theta_u : E \rightarrow E ; v \mapsto v - u$ est bijective car la réciproque existe : $v \mapsto v + u$
2. $\overrightarrow{uv} + \overrightarrow{vw} = v - u + w - v = w - u = \overrightarrow{uw}$.

Exercice 1. Soit $f : E \rightarrow E', g : E' \rightarrow E$ telle que $f \circ g = \text{id}_{E'}, g \circ f = \text{id}_E$ alors f et g sont bijectives.

Remarque 1.4. La relation de Chasles donne

- (1) $\overrightarrow{AA} + \overrightarrow{AA} = \overrightarrow{AA}$ donc $\overrightarrow{AA} = 0$
- (2) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA} = 0$ donc $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$.

Proposition 1.5 (règle du parallélogramme). Soit $A, A', B, B' \in \mathcal{E}$.

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'} \Leftrightarrow \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'}$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} \Rightarrow \overrightarrow{AA'} &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{B'A'} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{A'B'} + \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{BB'} \\ \Leftarrow \overrightarrow{AB} &= \overrightarrow{AB'} + \overrightarrow{B'B} = \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'B'} + \overrightarrow{B'B} = \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'B'} - \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{A'B'}. \end{aligned}$$

□

Définition 1.6. Soit $A, A', B, B' \in \mathcal{E}$. On dit que $ABB'A'$ forme un parallélogramme s'ils vérifient la règle du parallélogramme.

Proposition 1.7. Soit $A \in \mathcal{E}, u \in E$. Il existe un unique $B \in \mathcal{E}$ tel que $\overrightarrow{AB} = u$.

Démonstration. θ_A est bijective. □

Notation 1.8. On pourra noter $B = A + u$.

1.2. Sous-espaces affines.

Définition 1.9. Soit $(\mathcal{E}, E), \mathcal{F} \subset \mathcal{E}$. On dit que \mathcal{F} est un sous-espace affine de \mathcal{E} s'il existe $A \in \mathcal{F}$ tel que $\theta_A(\mathcal{F})$ est un sous-espace vectoriel de E .

Proposition 1.10. Si $\mathcal{F} \subset \mathcal{E}$ est un sous-espace affine dirigé par F alors

$$\forall B \in \mathcal{F}, \theta_B(\mathcal{F}) = F.$$

Démonstration. Il existe $A \in \mathcal{F}$ tel que $\theta_A(\mathcal{F}) = F$. On veut montrer que $\theta_A(\mathcal{F}) = \theta_B(\mathcal{F})$.

(1) Soit $u \in \theta_A(\mathcal{F})$. On montre que $u \in \theta_B(\mathcal{F})$.

Comme θ_B est bijective, on peut trouver $N \in \mathcal{E}$ tel que $\overrightarrow{BN} = u$. Or $\overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BN} \in \theta_A(\mathcal{F})$. Ainsi, $N \in \mathcal{F}$ et $u = \overrightarrow{BN} \in \theta_B(\mathcal{F})$.

(2) On montre $\theta_B(\mathcal{F}) \subset \theta_A(\mathcal{F})$. Soit $u \in \theta_B(\mathcal{F})$ alors $u = \overrightarrow{BM}$ avec $M \in \mathcal{F}$. Par la relation de Chasles, $u = \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AM} \in \theta_A(\mathcal{F})$ donc $u \in \theta_A(\mathcal{F})$. □

Proposition 1.11. Soit $A \in \mathcal{E}$ et $F \subset E$ un sous-espace vectoriel. Il existe un unique sous-espace affine $\mathcal{F} \subset \mathcal{E}$ qui passe par A et dirigé par F .

Démonstration. $\mathcal{F} = \{A + u \mid u \in F\} = \{M \in \mathcal{E} \mid \overrightarrow{AM} \in F\}$. Soit $B \in \mathcal{F}$, on pose $\theta_A : \mathcal{F} \rightarrow F; M \mapsto \overrightarrow{BM}$.

(1) Puisque $B \in \mathcal{F}$, $\theta_A(B) = \overrightarrow{AB} = u \in F$.

(2) Soit $u, v, w \in \mathcal{F}$, alors $u, v, w \in E$ or puisque E est un sous-espace affine, u, v, w vérifient la relation de Chasles. Ainsi, F est bien un sous-espace affine de direction F .

(3) De plus, $A + 0 = A \in \mathcal{F}$ donc \mathcal{F} passe par A . □

Proposition 1.12. Soit $f : E \rightarrow F$ une application linéaire entre deux espaces vectoriels. Si $v \in f(E)$ alors $f^{-1}(v)$ est un sous-espace affine de E dirigé par $\ker(f)$.

Démonstration. Soit $u \in f^{-1}(v)$. On montre que $w \in f^{-1}(v) \Leftrightarrow \theta(u, w) \in \ker f$. En effet, $w \in f^{-1}(v) \Leftrightarrow f(w) = v \Leftrightarrow f(w) = f(u)$

$$\Leftrightarrow f(w - u) = 0$$

$$\Leftrightarrow w - u \in \ker(f) \Leftrightarrow \theta(u, w) \in \ker(f) \quad \square$$

Remarque 1.13.

(1) Un sous-espace affine de dimension 0 est constitué d'un seul point.

(2) Un sous-espace affine de dimension 1 est une droite.

(3) un sous-espace affine de dimension 2 est un plan

Exemple 1.14. Dans \mathbb{R}^n , les solutions d'une équation $\sum_{i=1}^n a_i x_i = b$ forment un sous-espace affine de \mathbb{R}^n dirigé par l'espace vectoriel $\{\sum a_i x_i = 0\}$:

Proposition 1.15. Les sous-espaces affines de E sont de la forme $G + v_0$ où $G \subset E$ est un sous-espace vectoriel et $v_0 \in E$.

Démonstration. exercice. □

Proposition 1.16. Un sous-espace affine E est un sous-espace vectoriel si et seulement il contient 0.

Démonstration. En effet supposons que $\mathcal{G} \subset E$ soit un sous-espace affine contenant 0. Soit G la direction de \mathcal{G} . Alors $\mathcal{G} = G + 0 = G$ est un sev de E . □

1.3. Sous-espaces affines engendrés par une partie.

Notation 1.17. Soit (\mathcal{E}, E) un espace affine, S une partie non-vide de \mathcal{E} . $\langle S \rangle$ est l'intersection de tout les sous-espaces affines de \mathcal{E} contenant S .

Proposition 1.18. Soit $(\mathcal{F}_\alpha)_{\alpha \in I}$ une famille de sous-espaces affines de \mathcal{E} tel que $\bigcap_{\alpha \in I} \mathcal{F}_\alpha \neq \emptyset$. Alors $\bigcap F_\alpha$ est un sous-espace affine de \mathcal{E} .

Démonstration. Soit $A \in \bigcap_{\alpha \in I} F_\alpha =: \mathcal{F}$. Soit $F_\alpha := \theta_A(\mathcal{F}_\alpha)$. Alors F_α est un sous-espace vectoriel de E . Montrons $F := \bigcap_{\alpha \in I} F_\alpha = \theta_A(\mathcal{F})$. Donc F est un sous-espace vectoriel de E

Montrons $\theta_A(F) = \bigcap_{\alpha \in I} \theta_A(F_\alpha) \subset \ll \text{facile} \gg$

\supset Soit $v \in \bigcap_{\alpha \in I} \theta_A(F_\alpha)$ Par surjectivité de θ_A , on peut trouver $B \in \mathcal{E}$ tel que $\overrightarrow{AB} = v$. Pour chaque $\alpha \in I$, on a $v \in \theta_A(\mathcal{F}_\alpha)$ donc

$$v = \overrightarrow{AM_\alpha}, M_\alpha \in F_\alpha \Rightarrow B = M_\alpha \in \mathcal{F}_\alpha \forall \alpha \Leftrightarrow B \in \bigcap_{\alpha \in I} \mathcal{F}_\alpha$$

□

Exemple 1.19. Soit $\{A_1, \dots, A_k\}$ une partie de \mathcal{E} Alors $\langle A_0, \dots, A_k \rangle$ est le sous-espace affine $A_0 + \langle \overrightarrow{A_0 A_1}, \dots, \overrightarrow{A_0 A_k} \rangle$.

Montrons $\langle A_0, \dots, A_k \rangle = A_0 + \langle \overrightarrow{A_0 A_1}, \dots, \overrightarrow{A_0 A_k} \rangle$. Soit (\mathcal{F}, F) une sous-espace affine de \mathcal{E} qui contient A_0, \dots, A_k , alors $A_0 \in \mathcal{F}$. Donc $\overrightarrow{A_0 A_1}, \dots, \overrightarrow{A_0 A_k} \in F$ et $A_0 + \langle \overrightarrow{A_0 A_1}, \dots, \overrightarrow{A_0 A_k} \rangle \subset \mathcal{F}$. De plus $A_0 + \langle \overrightarrow{A_0 A_1}, \dots, \overrightarrow{A_0 A_k} \rangle$ est un sous-espace affine qui contient $A_0, A_1 = A_0 + \overrightarrow{A_0 A_1}, \dots, A_k = A_0 + \overrightarrow{A_0 A_k}$. Ainsi, $\langle A_0, \dots, A_k \rangle \subset A_0 + \langle \overrightarrow{A_0 A_1}, \dots, \overrightarrow{A_0 A_k} \rangle$.

Remarque 1.20. On a $\dim \langle A_0, \dots, A_k \rangle \leq k$.

Définition 1.21 (Affinement indépendante). Soit $\{A_1, \dots, A_k\}$ une partie de \mathcal{E} . On dit que la famille est *affinement indépendante* si $\langle A_0, \dots, A_k \rangle$ est de dimension k .

Définition 1.22 (Repère affine). Soit $\{A_1, \dots, A_k\}$ une famille affinement indépendante, et $\mathcal{E} := \langle A_0, \dots, A_k \rangle$. Alors on dit que $\{A_1, \dots, A_k\}$ est un *repère affine* de \mathcal{E} .

Exemple 1.23. Un repère affine d'une droite est constitué de 2 points.

Notation 1.24.

- (1) $\langle A, B \rangle$, $A \neq B$ désigne la droite passant par A et B . On la note aussi AB .
- (2) $[AB]$ désigne le segment défini par $[AB] := \{M \in \mathcal{E} \mid \overrightarrow{AM} = \lambda \overrightarrow{AB}, \lambda \in [0, 1]\}$

1.4. Parallélisme.

Définition 1.25 (Parallèle). Soit \mathcal{F}, \mathcal{G} deux sous-espaces affines. On dit que \mathcal{F} et \mathcal{G} sont parallèles s'ils ont la même direction. On note $\mathcal{F} \parallel \mathcal{G}$.

Remarque 1.26. Une droite n'est pas parallèle à un plan.

Proposition 1.27. Soit E, F deux espaces vectoriels, $f : E \rightarrow F$ une application linéaire. Alors $\forall v, w \in f(E)$, on a $f^{-1}(v) \parallel f^{-1}(w)$.

Démonstration. Par la Proposition 1.12, on a que $f^{-1}(v)$ et $f^{-1}(w)$ sont dirigés par $\ker(f)$. □

Proposition 1.28. Si $\mathcal{F} \parallel \mathcal{G}$ et $\mathcal{F} \cap \mathcal{G} \neq \emptyset$, alors $\mathcal{F} = \mathcal{G}$.

Démonstration. Soit $A \in \mathcal{F} \cap \mathcal{G}$. Alors $\mathcal{F} = A + F, \mathcal{G} = A + G$ mais $F = G$ par parallélisme de \mathcal{F} et \mathcal{G} d'où $\mathcal{F} = \mathcal{G}$. □

Proposition 1.29. Soit D une droite. Par tout point de A d'un espace affine, passe une unique droite D' parallèle à D .

Démonstration. $D' = A_{\text{point}} + D_{\text{direction}}$. □

Proposition 1.30. Soit $(\mathcal{F}, F), (\mathcal{G}, G)$ deux sous-espaces affines de (\mathcal{E}, E) . On suppose $F + G = E$. Alors tout sous-espace affine parallèle à \mathcal{F} rencontre \mathcal{G} .

Démonstration. Soit \mathcal{H} un sous-espace affine de \mathcal{E} parallèle à \mathcal{F} . Montrons que $\mathcal{H} \cap \mathcal{G} \neq \emptyset$. Soit $A \in \mathcal{H}, B \in \mathcal{G}$. On peut écrire $\overrightarrow{AB} = u + v$ avec $u \in F, v \in G$. On pose $\theta_A : \mathcal{H} \rightarrow F, \theta_B : \mathcal{G} \rightarrow G$ et on a $\theta_A(\mathcal{H}) = F$ et $\theta_B(\mathcal{G}) = G$. On peut écrire $u = \overrightarrow{AC}, C \in \mathcal{H}, v = \overrightarrow{DB}, D \in \mathcal{G}$. On a $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} \Leftrightarrow \overrightarrow{DC} = 0 \Leftrightarrow D = C \in \mathcal{H} \cap \mathcal{G}$. □

Corollaire 1.31. Dans un plan affine (\mathcal{E}, E) deux droites distinctes non parallèles se rencontrent en un seul point.

Démonstration.

unicité : Si D, D' se coupent en deux points $A \neq B$ alors $D = \langle A, B \rangle, D' = \langle A, B \rangle$ donc $D = D'$.
 $D \cap D' \neq \emptyset$. D est dirigée par $\langle u \rangle, D'$ est dirigée par $\langle v \rangle$. $\langle u \rangle \neq \langle v \rangle \Rightarrow \{u, v\}$ est linéairement indépendante. Donc $\langle u \rangle + \langle v \rangle$ est de dimension 2. Or E est aussi de dimension 2 Par conséquent, $\langle u \rangle + \langle v \rangle = E$ par la proposition on a $D \cap D' \neq \emptyset$. □

1.5. Barycentres.

Définition 1.32 (Points pondérés). Soit (\mathcal{E}, E) un espace affine, A_1, \dots, A_r des points de \mathcal{E} , et $\alpha_1, \dots, \alpha_r \in \mathbb{R}$. On appelle système de points pondérés un ensemble $\{(A_1, \alpha_1), \dots, (A_r, \alpha_r)\}$.

Définition 1.33 (Barycentre). Soit $F := (A_1, \alpha_1), \dots, (A_r, \alpha_r)$ tel que $\sum \alpha_j = 1$. On appelle barycentre de F l'unique point M tel que $\sum \alpha_j \overrightarrow{MA_j} = 0$.

Remarque 1.34. On pourrait parler d'existence d'un milieu.

Exemple 1.35.

1. Soit $(A_1), \dots, (A_2), \alpha_1 = \alpha_2 = \frac{1}{2}$. Alors A est le milieu de A_1A_2 $\frac{1}{2}\overrightarrow{AA_1} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AA_2} = 0$.
2. $A_1, A_2, A_3, \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \frac{1}{3}$. On obtient le centre de gravité d'un triangle.

Définition 1.36 (Coordonnée barycentrique). $(\alpha_0, \dots, \alpha_n)$ est appelé coordonnée barycentrique de M dans le repère A_0, \dots, A_n .

Exemple 1.37. \mathcal{E} = droite, $\mathcal{E} = \langle A, B \rangle$, M le milieu de AB . Les coordonnées barycentriques de M sont $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

Notation 1.38. $M = \sum \alpha_j A_j$. Il faut que $\sum \alpha_j = 1$. On peut écrire $M = \frac{A}{2} + \frac{B}{2}$ mais pas $M = A + B$.

Proposition 1.39. Soit (A_0, \dots, A_n) un repère affine de \mathcal{E} . Alors pour tout $M \in \mathcal{E}$, il existe une unique famille $(\alpha_0, \dots, \alpha_n)$ telle que

$$\begin{cases} \sum_{j=0}^n \alpha_j = 1 \\ \sum_{j=0}^n \alpha_j \overrightarrow{MA_j} = \vec{0} \end{cases}$$

Démonstration. On note $(\star := \sum_{j=0}^n \alpha_j \overrightarrow{MA_j} = \vec{0})$

Existence: Les vecteurs $\overrightarrow{MA_j}$ sont linéairement indépendants car il y en a $n+1$ et $\dim E = n$. On peut trouver $\alpha_0, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ non tous nuls tels que $\sum \alpha_j \overrightarrow{MA_j} = \vec{0}$. On montre par l'absurde que $\sum_{j=0}^n \alpha_j \neq 0$. Supposons $\sum \alpha_j = 0$ Par \star et la relation de Chasles,

$$\sum_{j=0}^n \alpha_j (\overrightarrow{MA_0} + \overrightarrow{A_0 A_j}) = \vec{0} \Leftrightarrow \sum_{j=0}^n \alpha_j \overrightarrow{MA_0} + \sum_{j=1}^n \alpha_j \overrightarrow{A_0 A_j} = \vec{0}.$$

Or, $\sum_{j=0}^n \alpha_j = 0$. D'où $\sum_{j=1}^n \alpha_j \overrightarrow{A_0 A_j} = \vec{0}$.

Comme $\{\overrightarrow{A_0 A_1}, \dots, \overrightarrow{A_0 A_n}\}$ est une base de E , on déduit que $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$. On obtient aussi que $\alpha_0 = 0$ par $\sum_{j=0}^n \alpha_j = 0$. On a donc une contradiction.

Ainsi, on peut définir

$$\beta_j = \frac{\alpha_j}{\sum_{i=0}^n \alpha_i}.$$

et on a, $\sum_{j=0}^n \beta_j = 1$ et $\sum_{j=0}^n \beta_j \overrightarrow{MA_j} = \vec{0}$.

Unicité: Par (\star) , on a

$$\sum_{j=0}^n \alpha_j (\overrightarrow{MA_0} + \overrightarrow{A_0 A_j}) = \vec{0} \Leftrightarrow \sum_{j=0}^n \alpha_j \overrightarrow{MA_0} + \sum_{j=1}^n \alpha_j \overrightarrow{A_0 A_j} \Leftrightarrow \overrightarrow{A_0 M} = \sum_{j=1}^n \alpha_j \overrightarrow{A_0 A_j}$$

Comme $\{\overrightarrow{A_0 A_1}, \dots, \overrightarrow{A_0 A_n}\}$ est une base de E , les coefficients $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ sont uniquement déterminés par $\overrightarrow{A_0 M}$. Comme $\sum_{j=1}^n \alpha_j = 1$, α_0 est également uniquement déterminé Si $\sum \alpha_j \overrightarrow{MA_j} = \vec{0}$, $\sum \gamma_j \overrightarrow{MA_j} = \vec{0}$. Alors

$$\sum (\alpha_j - \gamma_j) \overrightarrow{MA_j} = \vec{0} \Leftrightarrow \sum (\alpha_j - \gamma_j) (\overrightarrow{MA_0} + \overrightarrow{A_0 A_j}) = \vec{0} \Leftrightarrow \sum_{j=1}^n (\alpha_j - \gamma_j) \overrightarrow{A_0 A_j} = \vec{0} \Rightarrow \alpha_j = \gamma_j \forall j.$$

□

2. Applications affines.

Définition 2.1 (Applications affines). Soit $(\mathcal{E}, E), (\mathcal{F}, F)$ deux espaces affines. $\varphi : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$ est une application affine s'il existe $O \in \mathcal{E}$ et $f : E \rightarrow F$ une application linéaire tels que pour tout $M \in \mathcal{E}$, $\overrightarrow{\varphi(O)\varphi(M)} = f(\overrightarrow{OM})$.

Remarques 2.2.

(1) f ne dépend pas de O . En effet, si O' est un autre point de \mathcal{E} ,

$$f(\overrightarrow{O'M}) = f(\overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{OM}) = f(\overrightarrow{O'O}) + f(\overrightarrow{OM}) = \overrightarrow{\varphi(O')\varphi(O)} + \overrightarrow{\varphi(O)\varphi(M)} = \overrightarrow{\varphi(O')\varphi(M)}.$$

(2) On a toujours $f(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{\varphi(A)\varphi(B)}$. On va noter $\vec{\varphi} = f$ et donc $\vec{\varphi}(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{\varphi(A)\varphi(B)}$. $\vec{\varphi}$ est l'application linéaire associée à φ .

Exemples 2.3.

1. $\varphi(M) = O \forall M \in \mathcal{E}$. $\vec{\varphi}(\overrightarrow{MM'}) = \overrightarrow{\varphi(M)\varphi(M')} = 0$ Donc $\vec{\varphi} = 0$ et φ est une application affine.
2. Soit E, F deux espaces vectoriels avec leur structure affine naturelle ($\overrightarrow{uv} = v - u$). Soit $\varphi : E \rightarrow F$ affine. On a $\varphi(u) - \varphi(0) = \overrightarrow{\varphi(0)\varphi(u)} = \vec{\varphi}(\overrightarrow{ou}) = \vec{\varphi}(u) \Leftrightarrow \varphi(u) = \varphi(0) + \vec{\varphi}(u)$. Toutes applications affines $\varphi : E \rightarrow F$ s'écrivent donc $\varphi(u) = v_0 + f(u)$ où $v_0 \in F$ est fixé et $f : E \rightarrow F$ linéaire.
3. Les applications affines $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sont les $x \mapsto ax + b$.

Définition 2.4 (Translations). Soit $\varphi : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$. $\varphi(M) = M_{\in \mathcal{E}} + u_{\in E}$. φ est la translation de vecteur u . On a $\overrightarrow{\varphi(A)\varphi(B)} = \overrightarrow{AB}$. L'application linéaire associée est id_E . On a $\overrightarrow{A\varphi(A)} = \overrightarrow{A(A+u)} = u$, $\overrightarrow{B\varphi(B)} = \overrightarrow{B(B+u)} = u$.

Proposition 2.5. L'image d'un sous-espace affine par une application affine est un sous-espace affine

Démonstration. Soit $\varphi : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}'$ une application affine, $\mathcal{F} \subset \mathcal{E}$ un sous-espace affine. On prend $A \in \mathcal{F}$ et on note $F' = \vec{\varphi}(F)$. (F' est un sous-espace vectoriel de E'). On veut montrer que $\varphi(F)$ est un sous-espace affine passant par $\varphi(A)$ et dirigé par F' . On a

$$\begin{aligned} M' \in \varphi(\mathcal{F}) &\Leftrightarrow M' = \varphi(M), M \in \mathcal{F} \\ \text{et } \overrightarrow{A'M'} &= \overrightarrow{\varphi(A)\varphi(M)} = \vec{\varphi}(\overrightarrow{AM}) \in \vec{\varphi}(F). \end{aligned}$$

On vient de voir que

$$M' \in \varphi(\mathcal{F}) \Leftrightarrow \overrightarrow{A'M'} \in F'$$

donc $\varphi(F)$ est un sous-espace affine de \mathcal{E}' dirigé par F' . □

Corollaire 2.6. Une application affine envoie trois points alignés sur 3 points alignés.

Proposition 2.7. L'image inverse d'un sous-espace affine par une application affine est un sous-espace affine ou un ensemble vide.

Démonstration. Exercice. □

2.1. Effet sur les barycentres.

Proposition 2.8. Soit $\varphi : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}'$ affine. L'image du barycentre d'un système de points pondérés par φ est le barycentre $(\varphi(A_1), \alpha_1), \dots, (\varphi(A_r), \alpha_r)$.

Démonstration. Soit A le barycentre de $(\varphi(A_1), \alpha_1), \dots, (\varphi(A_r), \alpha_r)$. Alors $\sum_{j=1}^r \alpha_j \overrightarrow{AA_j} = 0$ donc $\vec{\varphi}(\sum_{j=1}^r \alpha_j \overrightarrow{AA_j}) = 0$. Comme $\vec{\varphi}$ est linéaire, on a $\sum_{j=1}^r \alpha_j \vec{\varphi}(\overrightarrow{AA_j}) = 0$ donc $\sum_{j=1}^r \alpha_j \overrightarrow{\varphi(A)\varphi(A_j)} = 0$. Cela veut dire que $\varphi(A)$ est le barycentre de $(\varphi(A_1), \alpha_1), \dots, (\varphi(A_r), \alpha_r)$. □

Proposition 2.9. Soit $\varphi : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}'$ une application qui vérifie

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall A, B \in \mathcal{E}, \varphi(\alpha A + (1 - \alpha)B) = \alpha \varphi(A) + (1 - \alpha)\varphi(B).$$

Alors φ est affine.

Démonstration. On fixe $O \in \mathcal{E}$, $O' = \varphi(O)$ et on définit $f : E \rightarrow E'$; $u = \overrightarrow{OM} \mapsto \overrightarrow{O'M'}$ où $M' = \varphi(M)$.
Il reste à montrer que f est linéaire. On a $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $M = \alpha A + (1 - \alpha)B$ on a

$$M' = \varphi(M) = \alpha \varphi(A) + (1 - \alpha) \varphi(B) = \alpha A' + (1 - \alpha) B'$$

Par définition de f , on a

$$f(\alpha \overrightarrow{OA} + (1 - \alpha) \overrightarrow{OB}) = f(\overrightarrow{OM}) = \overrightarrow{O'M'} = \alpha \overrightarrow{O'A'} + (1 - \alpha) \overrightarrow{O'B'}.$$

- (1) On prend $A = M, B = O$ et $f(\alpha \overrightarrow{OM}) = \alpha \overrightarrow{O'M'} = \alpha f(\overrightarrow{OM})$.
(2) On prend $u = \overrightarrow{OA}, v = \overrightarrow{OB}$, $f(u + v) = f(2 \frac{u+v}{2}) = f(2 \overrightarrow{OM}) = 2f(\overrightarrow{OM})$
Mais $f(\overrightarrow{OM}) = \frac{1}{2} \overrightarrow{O'A'} + \frac{1}{2} \overrightarrow{O'B'}$ donc

$$f(u + v) = \overrightarrow{O'A'} + \overrightarrow{O'B'} = f(\overrightarrow{OA}) + f(\overrightarrow{OB}) = f(u) + f(v)$$

On a montré que f est linéaire

□

2.2. Transformations affines.

Définition 2.10 (Transformation affine). Une transformation affine de \mathcal{E} est une application affine de \mathcal{E} dans lui même qui est bijective.

Proposition 2.11. Soit $\varphi : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$ une application affine. φ est bijective si et seulement si $\vec{\varphi}$ l'est.

Démonstration. On suppose φ bijective. Si $u \in \ker(\vec{\varphi})$, $u = \overrightarrow{AB}$ alors $\overrightarrow{\varphi(A)\varphi(B)} = \vec{\varphi}(\overrightarrow{AB}) = 0$ donc $\varphi(A) = \varphi(B) \Rightarrow A = B \Rightarrow u = 0$ donc $\vec{\varphi}$ est injective. IL MANQUE UN BOUT on a $v = \overrightarrow{\varphi(A)\varphi(M)} = \vec{\varphi}(\overrightarrow{AM}) \in \text{Im}(\vec{\varphi})$. Donc $\vec{\varphi}$ est surjective.

On suppose $\vec{\varphi}$ bijective. Si $\varphi(A) = \varphi(B)$ alors $\vec{\varphi}(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{\varphi(A)\varphi(B)} = 0$ donc $\overrightarrow{AB} = 0 \Rightarrow A = B$ donc φ est injective.

Soit $M' \in \mathcal{F}, A \in \mathcal{E}, u \in E$. $\overrightarrow{\varphi(u)} = \overrightarrow{\varphi(A)M'} \in F$. On écrit $u = \overrightarrow{AM}, M \in \mathcal{E}$ Alors $\overrightarrow{\varphi(A)\varphi(B)} = \vec{\varphi}(\overrightarrow{AM}) = \overrightarrow{\varphi(A)M'}$ donc $\varphi(M) = M'$

□

Proposition 2.12. Soit $\varphi : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$, $\psi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ des applications affines. Alors $\psi \circ \varphi : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{G}$ est affine et l'application linéaire associée est $\vec{\psi \circ \varphi} = \vec{\psi} \circ \vec{\varphi}$.

Démonstration. $\forall A, B \in \mathcal{E}$, $\overrightarrow{\psi \circ \varphi(A) \psi \circ \varphi(B)} = \vec{\psi}(\overrightarrow{\varphi(A)\varphi(B)}) = \vec{\psi}(\vec{\varphi}(\overrightarrow{AB})) = \vec{\psi} \circ \vec{\varphi}(\overrightarrow{AB})$

□

3. Points fixes.

Notation 3.1. Soit $\varphi : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ on note $\text{Fix}(\varphi)$ l'ensemble des points fixés par φ

$$\text{Fix}(\varphi) = \{M \in \mathcal{E} \mid \varphi(M) = M\}$$

Proposition 3.2. Soit \mathcal{E} de dimension finie, φ une transformation affine de \mathcal{E} . φ admet un unique point fixe si et seulement si $\ker(\vec{\varphi} - \text{id}_E) = 0$.

Démonstration. Soit $u \in \ker(\vec{\varphi} - \text{id}_E)$, $u = \overrightarrow{OM}$, $M \in \mathcal{E}$. Alors

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\varphi(\overrightarrow{OM})} - \overrightarrow{OM} &= 0 \Rightarrow \vec{\varphi}(\overrightarrow{OM}) = \overrightarrow{\varphi(O)\varphi(M)} = \overrightarrow{OM} \\ \Rightarrow \overrightarrow{\varphi(M)} &= \overrightarrow{OM} \Rightarrow \varphi(M) = M \Rightarrow M \in \text{Fix}(\varphi) = \{O\} \Rightarrow M = O \Rightarrow u = 0 \end{aligned}$$

□

Proposition 3.3. Soit $\varphi : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ une transformation affine de \mathcal{E} . Si $\vec{\varphi} - \text{id}_E$ est surjective alors $\text{Card}(\text{Fix}(\varphi)) = 1$

Démonstration.

unicité: $\varphi(A) = A, \varphi(B) = B \Rightarrow \vec{\varphi}(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{\varphi(A)\varphi(B)} = \overrightarrow{AB} \Rightarrow \overrightarrow{AB} \in \ker(\vec{\varphi} - \text{id}_E) \Rightarrow \overrightarrow{AB} = 0 \Rightarrow A = B$

existence : On cherche M tel que $\varphi(M) = M$ on fixe $O \in \mathcal{E}$, $O' = \varphi(O)$ Alors

$$\varphi(M) = M \Leftrightarrow \overrightarrow{\varphi(O)M} = \vec{\varphi}(\overrightarrow{OM}) \Leftrightarrow \overrightarrow{\varphi(O)O} + \overrightarrow{OM} = \vec{\varphi}(\overrightarrow{OM}) \Leftrightarrow (\vec{\varphi} - \text{id}_E)(\overrightarrow{OM}) = \overrightarrow{\varphi(O)O} \in E$$

Il est possible de trouver un tel M car $\vec{\varphi} - \text{id}_E$ est surjective.

□

Corollaire 3.4. Si $\dim \mathcal{E} < +\infty$ alors les assertions suivantes sont équivalentes :

- (1) $\text{Card}(\text{Fix}(\varphi)) = 1$.
- (2) $\ker(\vec{\varphi} - \text{id}_E) = 0$.

Démonstration. $f : E \rightarrow E$ dim non infinie: f inj $\Leftrightarrow f$ surj $\Leftrightarrow f$ bij.

□

Définition 3.5 (Homothétie). Une homothétie de centre O et de rapport $\lambda \in \mathbb{R}$ est une application affine $\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ qui vérifie $O \mapsto O$ et $\overrightarrow{OM'} = \lambda \overrightarrow{OM}$. Elle est notée $h(O, \lambda)$.

Remarque 3.6. L'application linéaire associée à $h(O, \lambda)$ est donnée par $u \in E \mapsto \lambda u$.

Proposition 3.7. Soit (\mathcal{E}, E) un espace affine, $A, B \in \mathcal{E}$ tels que $A \neq B$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, On pose $\varphi = h(B, \mu) \circ h(A, \lambda)$.

- (1) Si $\lambda\mu \neq 1$ alors φ est une homothétie de rapport $\lambda\mu$,
- (2) Si $\lambda\mu = 1$ alors φ est une translation de vecteur $(1 - \mu)\overrightarrow{AB}$.

Démonstration. On a vu que φ est une application affine dont l'application linéaire associée est donnée par $\vec{\varphi} = \overrightarrow{h(B, \mu)} \circ \overrightarrow{h(A, \lambda)}$.

$$\vec{\varphi}(u) = \overrightarrow{h(B, \mu)}(\lambda u) = \lambda\mu u.$$

- (1) $\lambda\mu \neq 1$: On a $\vec{\varphi} - \text{id}_E = (\lambda\mu - 1)_{\neq 0} \text{id}_E$ est bijective.

D'après la Proposition 3.3, φ admet un unique point fixe que l'on note O . $O \xrightarrow{h(A, \lambda)} O' \xrightarrow{h(B, \mu)} O$.
On a $\overrightarrow{AO'} = \lambda \overrightarrow{AO}$, et $\overrightarrow{BO} = \mu \overrightarrow{BO'}$. Par Chasles,

$$\begin{aligned}\vec{BO} &= \mu(\vec{BA} + \vec{AO'}) = \mu(\vec{BA}) + \lambda\mu\vec{AO} \Leftrightarrow \vec{BA} + \vec{AO} = \mu\vec{BA} + \lambda\mu\vec{AO} \\ &\Leftrightarrow (1 - \lambda\mu)\vec{AO} = (\mu - 1)\vec{BA} \Leftrightarrow \vec{AO} = \frac{\mu - 1}{1 - \mu\lambda}\vec{BA}.\end{aligned}$$

Ceci détermine l'unique $O \in AB$. Ainsi, $\varphi = h(O, \lambda\mu)$.

- (2) $\lambda\mu = 1$. Voir dessin tel. φ est une translation de vecteur $u = \vec{A\varphi(A)}$. Il reste à voir que $u \in \text{Vect}(\vec{AB})$. On a $A \xrightarrow{h(A,\lambda)} A \xrightarrow{h(B,\mu)} \varphi(A)$. On a $\vec{B\varphi(A)} = \mu\vec{BA}$.
 $\vec{BA} = \vec{A\varphi(A)} = \mu\vec{BA} \Leftrightarrow \vec{A\varphi(A)} = (\mu - 1)\vec{BA}$. $\vec{A\varphi(A)} \in \text{Vect}(\vec{AB})$.

□

Proposition 3.8. Soit $A, B, C \in \mathcal{E}$ des points alignés, $\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}$. On pose $\varphi = h(C, \nu) \circ h(B, \mu) \circ h(A, \lambda)$

- (1) Si $\lambda\mu\nu \neq 1$ alors $\varphi = h(O, \nu\mu\lambda)$, $O \in (AB)$
(2) Si $\lambda\mu\nu = 1$ alors φ est une translation t_u avec $u \in \text{Vect}(\vec{AB})$

Démonstration. On a $\vec{\varphi}(u) = (\lambda\mu\nu)u$

- (1) On a $\vec{\varphi} - \text{id}_E = (\lambda\mu\nu - 1)\text{id}_E$ bijective donc φ admet un unique point fixe que l'on note O .
 $O \xrightarrow{h(A,\lambda)} O' \xrightarrow{h(B,\mu)} O'' \xrightarrow{h(C,\nu)} O$. On a $\vec{AO'} = \lambda\vec{AO}$, $\vec{BO''} = \mu\vec{BO'}$, $\vec{CO} = \nu\vec{CO''}$. Par la relation de chasles:

$$\begin{aligned}\vec{CO} &= \nu(\vec{CB} + \vec{BO''}) = \nu\vec{CB} + \mu\nu\vec{BO'} = \nu\vec{CB} + \mu\nu(\vec{BA} + \vec{AO'}) \\ &\text{On a aussi } \vec{CA} + \vec{AO} = \nu\vec{CB} + \mu\nu\vec{BA} + \lambda\mu\nu\vec{AO} \\ &\Leftrightarrow \mu\vec{CB} + \vec{CB} + \mu\nu\vec{BA} + \vec{AC} \Rightarrow \vec{AO} \in \text{Vect}(\vec{AB}) \Rightarrow O \in AB.\end{aligned}$$

- (2) $\lambda\mu\nu = 1$. $\vec{\varphi} = \text{id}_E$ donc $\varphi = t_u$ il reste à voir que $u \in \text{Vect}(\vec{AB})$ (exercice).

□

Définition 3.9. Soit trois points A, B, C alignés. Le nombre $\lambda = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$ est défini par $\vec{AB} = \lambda\vec{AX}$.

Théorème 3.10 (Théorème de Thalès). Soit \mathcal{E} un plan affine, $d \parallel d' \parallel d''$ trois droites parallèles et $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2$ deux droites non parallèles à d . Soit $A_i = \mathcal{D}_i \cap d, A_i' = \mathcal{D}_i \cap d'$, et $A_i'' = \mathcal{D}_i \cap d''$. Alors

$$\frac{\overline{A_1A_1'}}{\overline{A_1A_1''}} = \frac{\overline{A_2A_2'}}{\overline{A_2A_2''}}.$$

Réciproquement, si $B \in \mathcal{D}_1$ vérifie $\frac{\overline{A_1A_1'}}{\overline{A_1B}} = \frac{\overline{A_2A_2'}}{\overline{A_2A_2''}}$ alors $B = A_1$.

Démonstration.

□

fin du programme cc1.

Remarque 3.11 (Rappel). $h(O, \alpha) : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E} ; M \mapsto M'$ tel que $\vec{OM'} = \alpha\vec{OM}$.

Théorème 3.12 (Théorème de Ménélaüs). Soit A, B, C trois points affinement indépendant dans \mathcal{E} , $M \in (BC) \setminus \{B, C\}$, $N \in (AC) \setminus \{A, C\}$, $P \in (AB) \setminus \{A, B\}$. Alors M, N et P sont alignés si et seulement si $\frac{\overline{MB}}{\overline{MC}} \cdot \frac{\overline{NC}}{\overline{NA}} \cdot \frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = 1$.

Démonstration. Soit $\varphi = h\left(P, \frac{\overline{PA}}{\overline{PB}}\right) \circ h\left(M, \frac{\overline{MB}}{\overline{MC}}\right) \circ h\left(N, \frac{\overline{NC}}{\overline{NA}}\right)$. φ est une application affine vérifiant:

- $\varphi(A) = A$,
- $\forall u \in E, \vec{\varphi}(u) = \lambda u$ avec $\lambda = \frac{\overline{MB}}{\overline{MC}} \cdot \frac{\overline{NC}}{\overline{NA}} \cdot \frac{\overline{PA}}{\overline{PB}}$.

Ainsi, φ est une homothétie de centre A et de rapport λ , i.e, $\varphi = h(A, \lambda)$.

- \Rightarrow Supposons M, N, P alignés.

Comme $A \notin (MN)$, car sinon $A \in (MNP) \Rightarrow B \in (MNP) \Rightarrow C \in (MNP) \Rightarrow A, B, C$ sont alignés.

Donc φ n'est pas une homothétie de centre (MN) donc par la Proposition 3.8, on a nécessairement $\lambda = 1$.

- \Leftarrow Supposons $\lambda = 1$. Alors

$$\varphi = h\left(P, \frac{\overline{PA}}{\overline{PB}}\right) \circ h\left(M, \frac{\overline{MB}}{\overline{MC}}\right) \circ h\left(N, \frac{\overline{NC}}{\overline{NA}}\right) = \text{id}_{\mathcal{E}} \Leftrightarrow h\left(P, \frac{\overline{PA}}{\overline{PB}}\right) \circ h\left(M, \frac{\overline{MB}}{\overline{MC}}\right) = h\left(N, \frac{\overline{NA}}{\overline{NC}}\right).$$

Or $\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} \cdot \frac{\overline{MB}}{\overline{MC}} \neq 1$ car $\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} \cdot \frac{\overline{MB}}{\overline{MC}} \cdot \frac{\overline{NC}}{\overline{NA}} = 1$ or $\frac{\overline{NC}}{\overline{NA}} \neq 1$ car $A \neq C$ par hypothèse.

Donc d'après la Proposition 3.7, $h\left(P, \frac{\overline{PA}}{\overline{PB}}\right) \circ h\left(M, \frac{\overline{MB}}{\overline{MC}}\right)$ est une homothétie dont le centre est sur la droite MP , donc $N \in (MP)$.

□

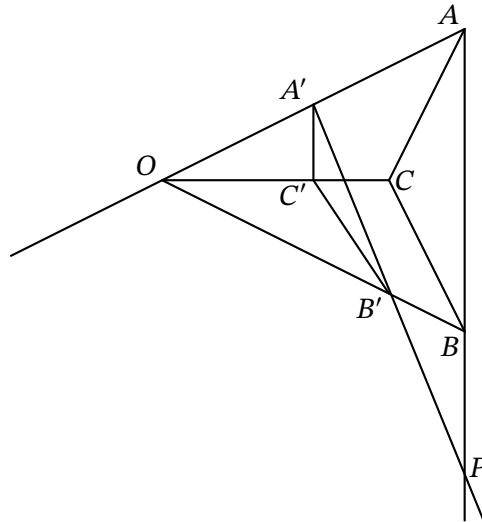
Remarque 3.13. En fonction du signe de $\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}}$, on sait si P est en dehors du segment $[AB]$.

Remarque 3.14. Regarder le theoreme de ceva pour le cc.

Théorème 3.15 (Théorème de Desargues). Soit \mathcal{E} un espace affine, $[ABC]$, $[A'B'C']$ deux triangles dans \mathcal{E} tels que :

- Les droites (AA') , (BB') , (C, C') se coupent en un point O ,
- $(AB) \cap (A'B') = \{P\}$, $(BC) \cap (B'C') = \{M\}$, et $(AC) \cap (A'C') = \{N\}$,

Alors M, N et P sont alignés.

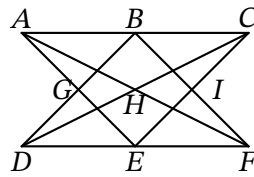


Démonstration. On utilise le Théorème de Ménélaüs :

- Pour $[OBC]$ et $B'C'$ (a) := $\left(\frac{\overline{MB}}{\overline{MC}} \cdot \frac{\overline{CC'}}{\overline{C'O}} \cdot \frac{\overline{B'O}}{\overline{B'B}} = 1\right)$.
- Pour $[OCA]$ et $C'A'$ (b) := $\left(\frac{\overline{NC}}{\overline{NA}} \cdot \frac{\overline{A'A}}{\overline{A'O}} \cdot \frac{\overline{C'O}}{\overline{C'C}} = 1\right)$.
- Pour $[OAB]$ et $A'B'$ (c) := $\left(\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} \cdot \frac{\overline{A'O}}{\overline{A'A}} \cdot \frac{\overline{B'B}}{\overline{B'O}} = 1\right)$.

En multipliant (a), (b), et (c), on obtient: $\frac{\overline{MB}}{\overline{MC}} \cdot \frac{\overline{NC}}{\overline{NA}} \cdot \frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = 1$ donc par le Théorème de Ménélaüs, M, N et P sont alignés. \square

Théorème 3.16 (Théorème de Pappus). Soit \mathcal{E} un espace affine de dimension 2, A, B , et C trois points alignés et D, E , et F trois autres points alignés. $(AE) \cap (BD) = \{G\}$, $(AF) \cap (DC) = \{H\}$, et $(BF) \cap (CE) = \{I\}$. Alors G, H et I sont alignés.



Démonstration. On considère le repère affine $\{A, D, I\}$. Les coordonnées barycentriques des points $A, B, C, D, E, F, G, H, I$ sont : $A = (1, 0, 0), B = (a_1, b_1, c_1), C = (a_2, b_2, c_2), D = (0, 1, 0), E = (a_3, b_3, c_3), F = (a_4, b_4, c_4), G = (a_5, b_5, c_5), H = (a_6, b_6, c_6), I = (0, 0, 1)$.

$$A, G, E \text{ alignés} \Leftrightarrow \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a_5 & b_5 & c_5 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow b_5 c_3 = b_3 c_5.$$

$$A, B, C \text{ alignés} \Leftrightarrow b_1 c_2 = b_2 c_1,$$

$$A, H, F \text{ alignés} \Leftrightarrow b_6 c_4 = b_4 c_6,$$

$$D, G, B \text{ alignés} \Leftrightarrow a_5 c_4 = a_1 c_5$$

$$D, H, C \text{ alignés} \Leftrightarrow a_2 c_6 = a_6 c_2$$

$$D, E, F \text{ alignés} \Leftrightarrow a_4 c_3 = a_3 c_4$$

$$I, B, F \text{ alignés} \Leftrightarrow a_1 b_4 = a_4 b_1$$

$$a_3 b_2 = a_2 b_3$$

En multipliant les égalités obtenues on obtient $a = a_1 a_2 \dots a_6, b = b_1 b_2 \dots b_6$, et $c = c_1 c_2 \dots c_6$. Donc

$$\frac{a}{a_6}$$

... $a_6 b_5 = a_5 b_6$ donc G, H, I sont alignés. \square

4. Espaces vectoriels euclidiens.

Définition 4.1 (Produit scalaire). Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension finie. Un produit scalaire sur E est une application $f : E \times E \rightarrow \mathbb{R} ; (x, y) \mapsto \langle x, y \rangle$ vérifiant :

- la bilinéarité : $\forall x, y, z \in E, \lambda \in \mathbb{R} \langle x + \lambda y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \lambda \langle y, z \rangle$,
- la symétrie : $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$,
- la définition positive : $\forall x \in E, \langle x, x \rangle \geq 0$ et $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Proposition 4.2. $\langle 0, x \rangle = 0 = \langle x, 0 \rangle$.

Démonstration. $0 = y - y, \langle y - y, x \rangle = \langle y, x \rangle - \langle y, x \rangle = 0$. \square

Proposition 4.3. Soit $x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n)$. $\langle x, y \rangle = \sum_{j=1}^n x_j y_j$ est un produit scalaire. On l'appelle produit scalaire *canonique* sur \mathbb{R}^n .

Démonstration. On vérifie les trois propriétés.

- $\langle x, y + \lambda z \rangle = \sum_{j=1}^n x_j (y_j + \lambda z_j) = \sum_{j=1}^n x_j y_j + \lambda \sum_{j=1}^n x_j z_j = \langle x, y \rangle + \lambda \langle x, z \rangle$,
- $\langle x, y \rangle = \sum_{j=1}^n x_j y_j = \sum_{j=1}^n y_j x_j = \langle y, x \rangle$,
- $\langle x, x \rangle = \sum_{j=1}^n x_j^2 \geq 0$, et $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x_j^2 = 0 \forall j \in \{1, \dots, n\} \Leftrightarrow x = 0$.

□

Exercice 1. Montrer que l'application $\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + 2x_2 y_2 + 3x_3 y_3 + x_1 y_2 + x_2 y_1$ définit un produit scalaire sur \mathbb{R}^n .

Définition 4.4 (Espace euclidien). Un espace vectoriel muni d'un produit scalaire est appelé un *espace vectoriel euclidien*.

4.1. Norme.

Définition 4.5 (Norme). Soit E un espace vectoriel. On appelle norme sur E une fonction $\|\cdot\| : E \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant:

- (1) $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in E, \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$,
- (2) $\forall x \in E, \|x\| = 0 \Rightarrow x = 0$,
- (3) $\forall x, y \in E, \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Définition 4.6 (Norme euclidienne). Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien, $x \in E$. Alors $\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}$ est appelé la *norme euclidienne* de x .

Remarque 4.7. $2\langle x, y \rangle = \|x + y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2$. En effet,

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 &= \langle x + y, x + y \rangle = \langle x + y, x \rangle + \langle x + y, y \rangle \\ &= \langle x, x \rangle + \langle y, x \rangle + \langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle = \|x\|^2 + 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2. \end{aligned}$$

Lemme 4.8 (Inégalité de Cauchy-Schwarz). $\forall x, y \in E$,

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|.$$

Avec égalité si et seulement si x, y sont liés.

Démonstration.

Si $y = 0$, ok.

On suppose $y \neq 0$ alors $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, on a $0 \leq \langle x - \lambda y, x - \lambda y \rangle = \|x\|^2 - 2\lambda \langle x, y \rangle + \lambda^2 \|y\|^2$ (par la remarque précédente). Le discriminant (simplifié) est ≤ 0 si et seulement si

$$\begin{aligned} |\langle x, y \rangle|^2 - \|x\|^2 \|y\|^2 &\leq 0 \\ \Leftrightarrow |\langle x, y \rangle| &\leq \|x\| \|y\| \end{aligned}$$

Alors le discriminant est 0 et il y a donc une racine double λ donc $\|x - \lambda y\| = 0 \Leftrightarrow x = \lambda y$. □

Proposition 4.9. Soit $x, y \in E, \lambda \in \mathbb{R}$. La norme euclidienne est une norme avec:

- $\|x\| = 0$ si et seulement si $x = 0$,
- $\|x + y\| = \|x\| + \|y\|$ si et seulement si il existe $\lambda \geq 0$ tel que $x = \lambda y$ ou $y = \lambda x$.

4.2. Orthogonalité.

Définition 4.10 (Orthogonal). Soit $x, y \in (E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$. On dit que x et y sont orthogonaux si $\langle x, y \rangle = 0$. On écrit $x \perp y$.

Définition 4.11. Soit $E \subset E$ on définit les points orthogonaux à A par $A^\perp := \{x \in E \mid \langle a, x \rangle = 0, \forall a \in A\}$

Exemples 4.12.

1. $O^\perp = \{0\}^\perp = E$.
2. $E^\perp = 0$ car $x \in E^\perp \Rightarrow x \perp x \Rightarrow \langle x, x \rangle = 0 \Rightarrow x = 0$.

Proposition 4.13. Soit $A \subset (E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$. A^\perp est un eous-espace vectoriel de E .

Démonstration. Soit $x, y \in A^\perp, \lambda \in \mathbb{R}$. Soit $a \in A$.

$$\langle x + \lambda y, a \rangle = \langle x, a \rangle + \lambda \langle y, a \rangle = 0 + \lambda 0 = 0 \Rightarrow x + \lambda y \in A^\perp.$$

□

Exercice 2. $x \perp y \Leftrightarrow \|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 \Leftrightarrow \|x + y\|^2 = \|x - y\|^2$.

Proposition 4.14. Soit $u \in E$.

- $\{u\}^\perp = \text{Vect}(u)^\perp$,
- $E = u^\perp \oplus \text{Vect}(u)$,
- Si $u \neq 0$, $\dim \{u\}^\perp = \dim E - 1$.

Démonstration.

- $\text{Vect}(u)^\perp \subset \{u\}^\perp$.
- Montrons $\{u\}^\perp \subset \text{Vect}(u)^\perp$.

$$x \in \{u\}^\perp \Rightarrow \langle x, y \rangle = 0 \Rightarrow \langle x, \lambda u \rangle = 0 \forall \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \langle x, u \rangle = 0 \Rightarrow x \in \text{Vect}(u)^\perp.$$

- Montrons $u^\perp \oplus \text{Vect}(u)$ On a $\{u\}^\perp \cap \text{Vect}(u) = 0$. Soit $x \in \{u\}^\perp \cap \text{Vect}(u)$. Alors $\langle x, u \rangle = 0$ et $x = \lambda u, \lambda \in \mathbb{R}$. D'où $\langle \lambda u, u \rangle = 0 \Rightarrow \lambda \|u\|^2 = 0 \Rightarrow x = 0$.
- Montrons $E \subset \{u\}^\perp + \text{Vect}(u)$. Soit $x \in E$, on écrit $x = x - \lambda u + \lambda u$, $\lambda = \frac{\langle x, u \rangle}{\|u\|^2}$. On a $\langle x - \lambda u, u \rangle = \langle x, u \rangle - \lambda \|u\|^2 = 0$, et si $u = 0$, alors $\{u\}^\perp = O^\perp = E$ donc $E \subset \{u\}^\perp + \text{Vect}(u)$.
- Par le point précédant, $\dim E = \dim \{u\}^\perp + \dim \text{Vect}(u)$. Si $u \neq 0$, $\text{Vect}(u)$ est de dimension 1 donc $\dim \{u\}^\perp = \dim E - 1$.

□

Définition 4.15. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E . On dit que \mathcal{B} est

- orthogonale si $\langle e_j, e_k \rangle = 0$.
- orthonormée si $\langle e_j, e_k \rangle = \begin{cases} 1 & \text{si } j=k \\ 0 & \text{si } j \neq k \end{cases}$