

# Fonction de deux variables

## Table des matières

<b>1. Introduction.</b>	<b>1</b>
1.1. Rappels.	1
1.2. Premières définitions.	1
<b>2. La topologie de la norme de <math>\mathbb{R}^2</math>.</b>	<b>1</b>
2.1. Norme euclidienne.	1
2.2. Disques ouverts/fermés et sous-ensembles ouverts/fermés.	3

## 1. Introduction.

### 1.1. Rappels.

**Définition 1.1.1** (fonction d'une variable): Soit  $A, B$  deux ensembles. Une application  $f$  est la donnée d'un ensemble de départ  $A$  et d'un ensemble d'arrivée  $B$  et qui, à chaque  $x \in A$  associe un unique  $f(x) \in B$ . On la note  $f : A \rightarrow B; x \mapsto f(x)$ .

**Définition 1.1.2** (Graphe d'une application): Soit  $f : A \rightarrow B$  une application. On appelle graphe de  $f$  l'ensemble suivant  $\text{Graphe}(f) = \{(x, f(x)) \mid x \in A\} \subset A \times B$

### 1.2. Premières définitions.

**Définition 1.2.1** (fonction de deux variables): Soit  $A$  un sous ensemble de  $\mathbb{R}^2$  et  $B$  un ensemble. Une application  $f$  de deux variables de  $A$  dans  $B$  est la donnée d'un ensemble de départ  $A$  et d'un ensemble d'arrivée  $B$  et qui, à chaque  $(x, y) \in A$  associe un unique  $f(x, y) \in B$ . On la note  $f : A \rightarrow B; (x, y) \mapsto f(x, y)$ .

**Définition 1.2.2** (Graphe d'une application): Soit  $f : A \rightarrow B$  une application de deux variables. On appelle graphe de  $f$  l'ensemble suivant  $\text{Graphe}(f) = \{(x, y, f(x, y)) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in A\}$

*Exemple:* L'aire d'un rectangle :  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}; (x, y) \mapsto xy$ .

Soit  $a$  un réel fixé et  $x, y \in \mathbb{R}$ . l'équation associée est  $a = xy \Leftrightarrow y = \frac{a}{x}$ . On cherche le rectangle d'aire  $a$  de côté  $x, y$ .

## 2. La topologie de la norme de $\mathbb{R}^2$ .

### 2.1. Norme euclidienne.

**Définition 2.1.1** (Norme Euclidienne): Soit  $v = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ . La norme Euclidienne est la longueur du vecteur  $v$ . Elle est donnée par  $\|v\| = \sqrt{a^2 + b^2}$ .

**Proposition 2.1.1:** Soit  $v \in \mathbb{R}^2$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Alors  $\|\cdot\|$  vérifie:

1.  $\|v\| \geq 0$  et  $\|v\| = 0 \Leftrightarrow v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ .
2.  $\|\lambda v\| = |\lambda| \|v\|$  (homogénéité).
3.  $\|v + u\| \leq \|v\| + \|u\|$  (inégalité triangulaire).

i.e la norme Euclidienne est une norme.

*Démonstration:*

1. Pour tout  $x \in \mathbb{R}^2$ ,  $x^2 \geq 0$  d'où  $\forall u \in \mathbb{R}^2$ ,  $\|u\| \geq 0$ .

2. Soit  $u = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

On a  $\|\lambda u\| = \|(\lambda a, \lambda b)\| = \sqrt{(\lambda a)^2 + (\lambda b)^2} = \sqrt{\lambda^2(a^2 + b^2)} = |\lambda| \|u\|$ .

3.

□

**Corollaire 2.1.1:** Soit  $v, u \in \mathbb{R}^2$ . On a :

$$\|v - u\| \geq \left| \|v\| - \|u\| \right|.$$

*Démonstration:* On a  $\forall u, v \in \mathbb{R}^2$ ,

$$\begin{aligned} v &= (v - u) + u \\ \|v\| &= \|v - u + u\| \leq \|v - u\| + \|u\| \\ \Leftrightarrow \|v - u\| &\geq \|v\| - \|u\| \end{aligned}$$

De même avec  $u$ , on obtient par ailleurs  $\|v - u\| \geq \|u\| - \|v\|$  d'où  $\|v - u\| \geq \left| \|v\| - \|u\| \right|$ .

□

**Définition 2.1.2:** Soient  $u = (a, b), v = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ . On définit le produit scalaire par

$$u \cdot v = ax + by.$$

**Proposition 2.1.2:** Soient  $u, v, w \in \mathbb{R}^2$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

1.  $u \cdot v = v \cdot u$  (symétrie).
2.  $(w + v) \cdot u = w \cdot u + v \cdot u$  (linéarité).
3.  $(v \cdot u)^2 \leq \|u\|^2 \|v\|^2$  (inégalité de Cauchy-Schwartz).

*Démonstration:* Soient  $u, v \in \mathbb{R}^2, t \in \mathbb{R}$ .  $\|v + tu\|^2 = (v + tu) \cdot (v + tu) = v \cdot v + 2t(v \cdot u) + (u \cdot u)t^2$ .

On pose  $f(t) = \|v\|^2 + 2(v \cdot u)t + \|u\|^2 t^2$ . On peut supposer que  $u \neq 0$  sinon l'égalité est évidente. □

## 2.2. Disques ouverts/fermés et sous-ensembles ouverts/fermés.

**Définition 2.2.1** (disque): Soient  $u \in \mathbb{R}^2, R > 0$ . On appelle **disque ouvert** de rayon  $R$  centré en  $u$  l'ensemble:

$$B(u, r) := \{v \in \mathbb{R}^2 \mid \|v - u\| < R\}.$$

On appelle **disque fermé** de rayon  $R$  centré en  $u$  l'ensemble:

$$\overline{B}(u, R) := \{v \in \mathbb{R}^2 \mid \|v - u\| \leq R\}.$$

**Définition 2.2.2:** Soit  $U$  un sous-ensemble de  $\mathbb{R}^2$ . On dit que  $U$  est un **ouvert** de  $\mathbb{R}^2$  si

$$\forall u \in U, \exists r_u > 0, B(u, r_u) \subset U.$$

L'ensemble de ces sous-ensembles sont notés  $O_{\text{norm}}$ .

### Proposition 2.2.1:

1. Les sous-ensembles  $\emptyset$  et  $\mathbb{R}^2$  sont des ouverts.
2. Soit  $\{H_i\}_{i \in I} \in O_{\text{norm}}$ . Alors leur réunion est un sous-ensemble ouvert de  $\mathbb{R}^2$  i.e,

$$\forall \{H_i\}_{i \in I} \subset O_{\text{norm}}, \bigcup_{i \in I} H_i \in O_{\text{norm}}.$$

3. Soit  $\{H_i\}_{i \in \{1, \dots, n\}} \in O_{\text{norm}}$  alors leur intersection est un sous-ensemble de  $\mathbb{R}^2$  i.e,

$$\forall \{H_i\}_{i \in \{1, \dots, n\}} \subset O_{\text{norm}}, \bigcap_{i \in \{1, \dots, n\}} H_i \in O_{\text{norm}}.$$

*Démonstration:*

- 1.
2. On peut supposer la réunion non-vide. Soit  $v \in V = \bigcup_{i \in I} H_i$ , alors  $\exists i_0, v \in H_{i_0}$ . D'où

$$\exists v_{i_0}, B(v, v_{i_0}) \subset H_{i_0} \subset \bigcup_{i \in I} H_i$$

□