Développements limités

Rappels et définitions

Définitions

Soient f, g deux fonctions définies sur un intervalle I. Soit $a \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ un point **adhérent** à I, c'est-à-dire un point de I ou l'une de bornes de I.

— f est **équivalente** à g en a s'il existe une fonction λ telle que $f = g\lambda$ au voisinage de a, et $\lambda \underset{a}{\to} 1$. On le note $f \underset{a}{\sim} g$.

— f est **dominée** par g en a s'il existe une fonction μ telle que $f = g\mu$ au voisinage de a, et μ bornée (*i.e.* il existe une constante M telle que $|\mu(x)| \leqslant M$). On le note $f = O_a(g)$.

— f est **négligeable** devant g en a (ou g est **prépondérante** devant f en a) s'il existe une fonction ε telle que $f = g\varepsilon$ au voisinage de a, et $\varepsilon \underset{a}{\to} 0$. On le note $f \underset{a}{\ll} g$ ou $f = o_a(g)$.

NB1 : Si g ne s'annule pas au voisinage de a, sauf peut-être [1] en a, alors

$$f \underset{a}{\sim} g \iff \frac{f}{g} \underset{a}{\to} 1 \qquad \text{et} \qquad f = o_a(g) \iff \frac{f}{g} \underset{a}{\to} 0.$$

NB2 : Dans tous les cas, $\underset{a}{\sim}$ et o_a sont liées par la relation suivante.

$$f \underset{a}{\sim} g \iff f = g + o_a(g).$$

Notons aussi que $f \underset{a}{\sim} g \Rightarrow f = O_a(g)$, et que $f = o_a(g) \Rightarrow f = O_a(g)$.

NB3 : Les notations $o(\,)$ et $O(\,)$ (de Landau) sont très pratiques dans les calculs, mais fallacieuses. Par exemple $f_1 = o_a(g)$ et $f_2 = o_a(g)$ *ne signifie pas* que $f_1 = f_2$, mais que $f_1 = g\varepsilon_1$ et $f_2 = g\varepsilon_2$ avec ε_1 et ε_2 des fonctions qui tendent vers 0 en a, et qui ne sont pas forcément égales. Pour la même raison on a par exemple :

$$o_a(g) - o_a(g) = o_a(g)$$

(et non pas $o_a(g) - o_a(g) = 0$!!) car $o_a(g) - o_a(g) = g\varepsilon_1 - g\varepsilon_2 = g \cdot (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)$ avec $\varepsilon_1 - \varepsilon_2 \underset{0}{\to} 0$ (mais $\varepsilon_1 - \varepsilon_2 \neq 0$ en général).

Cas particuliers

— $f \underset{a}{\sim} 0 \iff f$ est identiquement nulle au voisinage de a.

— $f \underset{a}{\sim} \ell \neq 0 \iff f$ tend vers une limite $\ell \neq 0$ en a.

— $f = o_a(1) \iff f$ tend vers 0 en a.

Définition

$f : I \to \mathbb{R}$ admet un **développement limité d'ordre** n en un point $a \in \mathbb{R}$ adhérent à I (en abrégé, un $\mathrm{DL}_n(a)$) si :

$$f(x) = \underbrace{\alpha_0 + \alpha_1(x-a) + \alpha_2(x-a)^2 + \cdots + \alpha_n(x-a)^n}_{\text{« partie régulière »}} + \underbrace{o_a\big((x-a)^n\big)}_{\text{« reste »}}$$

1. Pour que ces équivalences soient exactes en tenant compte *aussi* de ce qui se passe quand $x = a$ (et qui ne nous intéresse pas vraiment), il faut en fait supposer : ou bien que f et g ne sont pas définies en a ; ou bien qu'elles le sont toutes les deux et que $f(a) = g(a)$ (pour $f \underset{a}{\sim} g$) ou que $f(a) = 0$ (pour $f = o_a(g)$).

Un $\mathrm{DL}_n(a)$ d'une fonction f est donc une approximation de f par une fonction polynomiale, localement, lorsque x tend vers a. L'ordre du DL mesure la précision de cette approximation : plus il est élevé, meilleure est l'approximation. L'unicité du $\mathrm{DL}_n(a)$ (voir plus loin) montre que sa partie régulière est en ce sens la *meilleure approximation possible* de f, quand x tend vers a, par un polynôme de degré $\leqslant n$.

Application (principale)

Le premier terme non nul d'un $\mathrm{DL}_n(a)$ de f fournit un *équivalent simple* de f en a, qui donne « l'ordre de grandeur » de f en a. Il permet de connaître la limite de f en a, et son signe au voisinage de a. D'autres applications sont présentées à la fin de ce document.

NB : Le calcul d'un DL se fait toujours en 0 *via* le changement de variable $u = x - a$. Tous les DL usuels (énumérés plus loin) sont donc donnés en 0 et l'indice $a = 0$ est omis.

Proposition (unicité du DL)

Si une fonction admet un $DL_n(a)$ alors celui-ci est unique.

Autrement dit, pour un $\mathrm{DL}_n(0)$, si on a

$$\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \cdots + \alpha_n x^n + o_0\big(x^n\big) = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2 + \cdots + \beta_n x^n + o\big(x^n\big)$$

alors on peut identifier les coefficients : $\alpha_0 = \beta_0$, $\alpha_1 = \beta_1$, $\alpha_2 = \beta_2 \ldots$, *etc.*

Corollaire (DL et parité/imparité)

Soit f une fonction admettant un $DL_n(0)$:

$$f(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \cdots + \alpha_n x^n + o\big(x^n\big).$$

— *Si f est paire alors son DL n'a que des termes pairs (tous les α_{2k+1} sont nuls).*

— *Si f est impaire alors son DL n'a que des termes impairs (tous les α_{2k} sont nuls).*

Opérations sur les DL

Proposition

— *Si f et g admettent un $DL_n(a)$ alors $f + g$, $f - g$ et $f.g$ aussi.*

— *Si f et g admettent un $DL_n(a)$ si le coefficient constant du $DL_n(a)$ de f est non nul alors g/f admet un $DL_n(a)$.*

— *Si f admet un $DL_n(a)$ dont le coefficient constant est b, et si g admet un $DL_n(b)$ alors $g \circ f$ admet un $DL_n(a)$.*

Toutes ces opérations sur les DL se déduisent des trois règles *fondamentales* suivantes, qui découlent directement de la définition des $o(\,)$. Dans la simplification, λ désigne une fonction bornée au voisinage de a.

$$\boxed{\begin{array}{rcll} f = h.o_a(g) & \iff & f = o_a(h.g) & \text{(Absorption)} \\ f = o_a(g) + o_a(g) & \Longrightarrow & f = o_a(g) & \text{(Troncature)} \\ f = o_a(\lambda g + o_a(g)) & \Longrightarrow & f = o_a(g) & \text{(Simplification)} \end{array}}$$

Les règles *auxiliaires* suivantes, cas particuliers ou variantes des précédentes, s'en déduisent facilement (ou, tout aussi bien, découlent de la définition des $o_a(\,)$).

— $f = o_a(o_a(g)) \implies f = o_a(g)$. (Simplification bis)

— $f = o_a(g_1) + o_a(g_2)$ et $g_2 = O_a(g_1) \implies f = o_a(g_1)$. (Troncature bis)

Addition

La somme de deux DL se fait terme à terme : on regroupe les termes de même degré, et la règle de troncature détermine le reste.

$$\begin{aligned}&\left(1-3x+x^3+o(x^3)\right)+\left(2x+x^2+o(x^2)\right)\\&=1+\left(2x-3x\right)+x^2+x^3+o(x^2)+o(x^3)\\&=1-x+x^2+o(x^2)\end{aligned}$$

Ici on obtient l'ordre 2 car les termes x^3 et $o(x^3)$ sont des $o(x^2)$ (règle de troncature bis).

Multiplication

Pour faire le produit de deux DL on peut commencer par le développer par distributivité.

$$\begin{aligned}&\left(1-3x+x^3+o(x^3)\right)\left(2x+x^2+o(x^2)\right)\\&=2x+x^2+o(x^2)-6x^2-3x^3-3x.o(x^2)\\&\quad+2x^4+x^5+x^3.o(x^2)+o(x^3)2x+o(x^3)x^2+o(x^3)o(x^2)\end{aligned}$$

Notons que sur ces $4\times 3=12$ termes, plusieurs vont disparaître et on aurait pu s'épargner [2] leur calcul. On poursuit en regroupant les différents $o(.)$ et en appliquant les trois règles habituelles (ou leurs variantes bis).

$$\begin{aligned}&o(x^2)-3x.o(x^2)+x^3.o(x^2)+o(x^3)2x+o(x^3)x^2+o(x^3)o(x^2)\\&=o(x^2)+o(-3x^3)+o(x^5)+o(2x^4)+o(x^5)+o(o(x^5)) &&\text{(Absorption)}\\&=o(x^2)+o(x^3)+o(x^5)+o(x^4)+o(x^5)+o(x^5) &&\text{(Simplification)}\\&=o(x^2) &&\text{(Troncature)}\end{aligned}$$

On regroupe alors les termes de même degré en tronquant à l'ordre donné par le reste :

$$\begin{aligned}&\left(1-3x+x^3+o(x^3)\right)\left(2x+x^2+o(x^2)\right)\\&=2x+\left(x^2-6x^2\right)+o(x^2)\\&=2x-5x^2+o(x^2)\end{aligned}$$

Division

Une fraction de deux DL peut se calculer de deux façons différentes. La première consiste à se ramener à un produit et une composée (voir plus loin), et la seconde à effectuer une « division suivant les puissances croissantes ». Nous les pratiquerons en TD.

Composition

Le DL d'une composée se calcule par changement de variable, à une condition : vérifier que la nouvelle variable tend bien vers 0.

Par exemple en 0 on a $\ln(1+u)=u+o(u)$ mais on ne peut pas en déduire que $\ln(1+\cos x)=\cos(x)+o(\cos x)$ car $u=\cos x$ ne tend pas vers 0 quand x tend vers 0 !
En revanche comme $\ln(ab)=\ln a+\ln b$ on peut se ramener à :

$$\ln(1+\cos x)=\ln\left(2-\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)=\ln(2)+\ln\left(1-\frac{x^2}{4}+\frac{1}{2}o(x^2)\right)$$

2. Pour éviter de calculer les termes intermédiaires qui disparaissent par troncature, il suffit de les repérer au fur et à mesure du développement du produit par distributivité. Si par exemple on vise un DL d'ordre 2, tous les termes négligeables devant x^2 ne sont pas calculés mais juste remplacés par $o(x^2)$ (voir TD).

On simplifie le reste par les règles d'absorption et de simplification :

$$\frac{1}{2}o(x^2)=o\left(\frac{x^2}{2}\right)=o(x^2)$$

En 0 on a $\ln(1+u)=u+o(u)$. Or $u=-x^2/4+o(x^2)$ tend bien vers 0 quand x tend vers 0.
On peut donc remplacer :

$$\ln\left(1-\frac{x^2}{4}+o(x^2)\right)=\left(-\frac{x^2}{4}+o(x^2)\right)+o\left(-\frac{x^2}{4}+o(x^2)\right)$$

La règle de simplification s'applique au reste :

$$o\left(-\frac{x^2}{4}+o(x^2)\right)=o(x^2)$$

D'où par la règle de troncature :

$$\begin{aligned}\ln(1+\cos x)&=\ln 2-\frac{x^2}{4}+o(x^2)+o(x^2)\\&=\ln 2-\frac{x^2}{4}+o(x^2)\end{aligned}$$

Premiers DL usuels

Rappelons la formule de la somme géométrique :

$$1+x+x^2+x^3+\cdots+x^n=\frac{1-x^{n+1}}{1-x}$$

On en déduit immédiatement :

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\cdots+x^n+\frac{x^{n+1}}{1-x}$$

Or le dernier terme est un $o(x^n)$ en 0, d'où :

$$\boxed{\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\cdots+x^n+o(x^n)}$$

En remplaçant x par $-x$ ou par $\pm x^2$ (ce qu'on peut faire car $-x$ et $\pm x^2$ tendent vers 0 quand x tend vers 0) on obtient diverses variantes utiles :

$$\begin{aligned}\frac{1}{1+x}&=1-x+x^2-x^3+\cdots+(-1)^nx^n+o(x^n)\\\frac{1}{1+x^2}&=1-x^2+x^4-x^6+\cdots+(-1)^nx^{2n}+o(x^{2n})\\\frac{1}{1-x^2}&=1+x^2+x^4+x^6+\cdots+x^{2n}+o(x^{2n})\end{aligned}$$

En passant aux primitives on obtient de nouveaux DL usuels grâce au théorème suivant.

Théorème (primitivation des DL)
Si f est dérivable et si f' admet un $DL_n(0)$:

$$f'(x)=\alpha_0+\alpha_1x+\alpha_2x^2+\cdots+\alpha_nx^n+o(x^n)$$

alors f elle-même admet un $DL_{n+1}(0)$ donné par :

$$f(x)=f(0)+\alpha_0x+\frac{\alpha_1}{2}x^2+\frac{\alpha_2}{3}x^3+\cdots+\frac{\alpha_n}{n+1}x^{n+1}+o(x^{n+1})$$

En appliquant ceci aux DL de $1/(1+x)$ et de $1/(1+x^2)$ on obtient de nouveaux DL usuels :

$$\boxed{\begin{aligned} \ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + o\big(x^n\big) \\ \arctan x &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o\big(x^{2n+1}\big) \end{aligned}}$$

Le théorème de primitivation des DL permet de montrer le résultat fondamental suivant.

Théorème (Taylor-Young)
Si f est n fois dérivable au voisinage de a (ou juste continue en a si $n=0$), alors elle admet un $\mathrm{DL}_n(a)$ donné par :

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + o_a\big((x-a)^n\big)$$

Remarques
Une fonction f définie au voisinage de a peut très bien admettre un $\mathrm{DL}_n(a)$ avec $n \geqslant 2$ sans être n fois dérivable au voisinage de a (voir TD). Cependant, *si f est définie en a*, la réciproque du théorème est vraie pour $n=0$ et $n=1$:

- f est continue en a ssi elle admet un $\mathrm{DL}_0(a)$.
- f est dérivable en a ssi elle admet un $\mathrm{DL}_1(a)$.

Dans ce cas le coefficient constant et le cofficient de $(x-a)$ dans ces DL sont respectivement $f(a)$ et $f'(a)$.

Le calcul de la dérivée n^{e} d'une fonction ordinaire est inextricable dès que n est grand. Toutefois il est aisé pour les fonctions suivantes. Il est donc inefficace en général d'utiliser la formule de Taylor-Young pour calculer un DL, sauf pour les fonctions suivantes.

$$\boxed{\begin{aligned} e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o\big(x^n\big) \\ \sin x &= x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o\big(x^{2n+1}\big) \\ \cos x &= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o\big(x^{2n}\big) \end{aligned}}$$

Le calcul des dérivées successives de tan est très compliqué. En principe on peut par exemple en calculer un DL en 0 par quotient des DL de sin et cos (voir TD), mais ce n'est pas simple non plus. On se contentera de connaître son DL d'ordre 3 ci-dessous :

$$\boxed{\tan x = x + \frac{x^3}{3} + o\big(x^3\big)}$$

DL et binôme généralisé

Pour tout entier $p \in \mathbb{N}$ et tout $k \in \{0,1,2,\ldots,n\}$ on note :

$$\binom{p}{k} = \frac{p!}{k!(p-k)!} = \frac{p(p-1)\cdots(p-(k-1))}{k!}$$

Le coefficient $\binom{p}{k}$ est aussi noté C_p^k. La formule du binôme de Newton dit que :

$$(a+b)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} a^k b^{p-k}$$

Avec $a = x$ et $b = 1$ elle donne donc :

$$(1+x)^p = 1 + px + \frac{p(p-1)}{2}x^2 + \frac{p(p-1)(p-2)}{6}x^3 + \cdots + px^{p-1} + x^p$$

Cette formule n'est plus valable (elle n'a même plus de sens) si l'exposant p n'est pas un entier naturel. Cependant les DL permettent d'en donner une généralisation partielle dans ce cas. Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ (ou même $\alpha \in \mathbb{C}$) et $k \in \mathbb{N}^*$ on pose [3] :

$$\binom{\alpha}{k} := \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-(k-1))}{k!}$$

Rappelons que la dérivée de $f_\alpha(x) = (1+x)^\alpha$ est $\alpha(1+x)^{\alpha-1}$. En itérant on obtient immédiatement sa dérivée k^{e} pour tout entier k :

$$f_\alpha^{(k)}(x) = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-(k-1))(1+x)^{\alpha-k}$$

Pour tout entier $k \geqslant 0$ on a donc :

$$\frac{f_\alpha^{(k)}(0)}{k!} = \binom{\alpha}{k}$$

La formule de Taylor-Young donne alors :

$$\boxed{(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{6}x^3 + \cdots + \binom{\alpha}{n}x^n + o\big(x^n\big)}$$

En prenant $\alpha = -1$ on peut retrouver de cette façon le $\mathrm{DL}_n(0)$ de $1/(1+x)$. Toutefois il est beaucoup plus simple et plus direct de déduire ce $\mathrm{DL}_n(0)$ de la formule de la somme géométrique, comme nous l'avons vu.

Plus intéressant, en prenant $\alpha = 1/2$ on trouve :

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \cdots + \binom{\frac{1}{2}}{n}x^n + o\big(x^n\big)$$

En prenant $\alpha = -1/2$, on trouve de même :

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{3x^2}{8} + \cdots + \binom{-\frac{1}{2}}{n}x^n + o\big(x^n\big)$$

D'où, en remplaçant x par $-x^2$ (car $-x^2$ tend vers 0 quand x tend vers 0) :

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{3x^4}{8} + \cdots + \binom{-\frac{1}{2}}{n}x^{2n} + o\big(x^{2n}\big)$$

Par le theorème de primitivation des DL on en déduit :

$$\arcsin x = x + \frac{x^3}{6} + \frac{3}{40}x^5 - \cdots + \frac{(-1)^n}{2n+1}\binom{-\frac{1}{2}}{n}x^{2n+1} + o(x^{2n+1})$$

$$\arccos x = \frac{\pi}{2} - x - \frac{x^3}{6} - \frac{3}{40}x^5 - \cdots - \frac{(-1)^n}{2n+1}\binom{-\frac{1}{2}}{n}x^{2n+1} + o(x^{2n+1})$$

NB1 : Ces derniers DL ne sont pas forcément à connaître par cœur, mais on doit être capable de les retrouver rapidement en partant de celui de $(1+x)^\alpha$.

3. Si $k=0$, la convention habituelle sur les produits de 0 facteur(s) indique que $\binom{\alpha}{0} = 1$.

NB2 : Notons que $\binom{-1/2}{n}$ est du signe du $(-1)^n$, donc tous les coefficients du DL de $1/\sqrt{1-x^2}$ sont positifs :

$$\begin{aligned}\binom{-\frac{1}{2}}{n} &= \frac{1}{n!}\Big(-\frac{1}{2}\Big)\Big(-\frac{3}{2}\Big)\Big(-\frac{5}{2}\Big)\dots\Big(-\frac{1}{2}-n+1\Big)\\ &= \frac{(-1)^n}{n!}\times\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}\times\cdots\times\frac{2n-1}{2}\\ &= (-1)^n\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}{n!2^n}\\ &= (-1)^n\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdots2n}\end{aligned}$$

En multipliant en haut et en bas par $2^n n! = 2\cdot4\cdot6\cdots2n$, on peut aussi écrire :

$$\binom{-\frac{1}{2}}{n} = (-1)^n\frac{(2n)!}{(2^n n!)^2}$$

Applications des DL

Calcul d'équivalent et de limite

On a vu que :

$$f \underset{a}{\sim} g \iff f = g + o_a(g)$$

Pour calculer un équivalent simple d'une fonction f, il suffit donc d'en calculer un DL : le premier terme (non nul!) avant le o fournit l'équivalent cherché. C'est un moyen extrêmement efficace de calculer une limite complexe (voir TD).

Calcul de la position par rapport à une tangente

Si une fonction f définie en a admet un $\mathrm{DL}_1(a)$:

$$f(x) = \alpha_0 + \alpha_1(x-a) + o_a(x-a)$$

alors nous savons que f est dérivable en a, que $\alpha_0 = f(a)$ et $\alpha_1 = f'(a)$. Il s'ensuit que le graphe de f admet au point d'abcisse a une tangente dont l'équation est donnée par la partie régulière du DL : $y = \alpha_0 + \alpha_1(x-a)$.
En effet cette droite a pour pente $f'(a)$, qui est bien la pente de la tangente, et passe clairement par le point $(a, f(a))$. En outre, si au voisinage de a on a :

- $f(x) - (\alpha_0 + \alpha_1(x-a)) \geqslant 0$ alors la courbe de f est au-dessus de sa tangente.
- $f(x) - (\alpha_0 + \alpha_1(x-a)) \leqslant 0$ alors la courbe de f est au-dessous de sa tangente.

Pour connaître la position de la courbe de f par rapport à sa tangente, il suffit donc de pousser le DL jusqu'au premier terme *non nul* suivant :

$$f(x) = \alpha_0 + \alpha_1(x-a) + a_p(x-a)^p + o_a\big((x-a)^p\big).$$

Comme $a_p \neq 0$, on en déduit que $f(x) - \big(\alpha_0 + \alpha_1(x-a)\big) \underset{a}{\sim} a_p(x-a)^p$.
Le signe de $f(x) - (\alpha_0 + \alpha_1(x-a))$ au voisinage de a (qui donne la position de la courbe de f) est donc exactement celui de $a_p(x-a)^p$.

Calcul d'asymptote oblique

Si f admet en $a = \pm\infty$ un développement asymptotique (alias DA, voir plus loin) de la forme

$$f(x) = \alpha x + \beta + o_\infty(1)$$

alors la droite d'équation $y = \alpha x + \beta$ est asymptote au graphe de f. Là encore la position par rapport à l'asymptote est donnée par le signe de $f(x) - (\alpha x + \beta)$, qui s'obtient en poursuivant le DA jusqu'au premier terme non nul après β (voir TD).

NB : Pour le calcul d'un tel DA en $\pm\infty$, on commence par se ramener en 0 par le changement de variable $x = 1/u$.

Calcul de dérivée k^{e} en un point

Si une fonction f est n fois dérivable au voisinage d'un point a alors elle admet un $\mathrm{DL}_n(a)$ d'après Taylor-Young. Si on calcule un $\mathrm{DL}_n(a)$ de f par un autre moyen (par exemple par opération sur les DL) alors l'unicité du DL permet, en identifiant les coefficients de x^k dans ces deux expressions, d'en déduire la valeur de $f^{(k)}(a)$ pour $0 \leqslant k \leqslant n$.

Par exemple un DL de $\exp(x^2)$ est donné par

$$\exp\big(x^2\big) = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + \cdots + \frac{x^{2n}}{n!} + o\big(x^{2n}\big).$$

Par ailleurs la formule de Taylor-Young à l'ordre $2n$, appliquée à $f(x) = \exp(x^2)$, donne

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \cdots + \frac{f^{(2n)}(0)}{(2n)!}x^{2n} + o\big(x^{2n}\big).$$

En identifiant, on en déduit que $\dfrac{f^{(2n)}(0)}{(2n)!} = \dfrac{1}{n!}$, et donc $f^{(2n)}(0) = \dfrac{(2n)!}{n!}$.

Généralisation : développements asymptotiques (DA)

Toute écriture de la forme :

$$f(x) = g_0(x) + g_1(x) + g_2(x) + \cdots + g_n(x) + o_a\big(g_n(x)\big)$$

où $g_0 \underset{a}{\gg} g_1 \underset{a}{\gg} g_2 \underset{a}{\gg} \cdots \underset{a}{\gg} g_n$ et $a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ fournit un équivalent de f en a : c'est le premier terme de la somme, c'est-à-dire g_0, car il est prépondérant devant tous les autres. Une telle écriture s'appelle un **développement asymptotique** de f en a, et se manipule essentiellement comme un DL.

Exemple
Considérons la suite $u_n = n^{\frac{1}{n}}$. Par définition $n^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{1}{n}\ln n} = e^{\frac{\ln n}{n}}$. Or $(\ln n)/n$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$, et on sait qu'en 0 :

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n).$$

Comme $(\ln n)/n$ tend vers 0, on peut le substituer à x dans ce DL. On en déduit :

$$n^{\frac{1}{n}} = 1 + \frac{\ln n}{n} + \frac{1}{2}\left(\frac{\ln n}{n}\right)^2 + \cdots + \frac{1}{n!}\left(\frac{\ln n}{n}\right)^n + o_{+\infty}\left(\left(\frac{\ln n}{n}\right)^n\right).$$

D'où, en particulier, un équivalent de $n^{\frac{1}{n}} - 1$:

$$n^{\frac{1}{n}} - 1 = \left(1 + \frac{\ln n}{n} + o\left(\frac{\ln n}{n}\right)\right) - 1 = \frac{\ln n}{n} + o_{+\infty}\left(\frac{\ln n}{n}\right)$$

donc $n^{\frac{1}{n}} - 1 \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\ln n}{n}$.

Ceci montre que $n^{\frac{1}{n}}$ tend vers 1, par valeurs inférieurs et très lentement. En effet, au voisinage de $+\infty$ la différence $n^{\frac{1}{n}} - 1$ est du même signe et du même ordre que son équivalent $(\ln n)/n$, lequel est positif et tend vers 0 très lentement (moins vite que $1/n$, par exemple).