Topologie et calcul différentiel

Table des matières

1. Topologie des espaces vectoriels normés.

1.1. Espaces vectoriels normés.

Définition 1.1 (Norme)**.** Soit E un espace vectoriel. On appelle norme sur E une fonction $\|\cdot\| : E \to \mathbb{R}$ vérifiant:
(1) $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in E, \|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$,
(2) $\forall x \in E, \|x\| = 0 \Rightarrow x = 0$,
(3) $\forall x, y \in E, \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Définition 1.2. Soit E un espace vectoriel et $\|\cdot\|$ une norme sur E. On appelle espace vectoriel normé un couple $(E, \|\cdot\|)$.

Proposition 1.3. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé, alors :
(1) $\|0\| = 0$,
(2) $\forall x \in E, \|x\| \geq 0$,
(3) $\forall x, y \in E, \big|\|x\| - \|y\| \leq \|x - y\|\big|$.

Démonstration.
(1) $\|0_E\| = \|0_{\mathbb{R}} * 0_E\| = 0_{\mathbb{R}} * \|0_E\| = 0_{\mathbb{R}}$.
(2) Soit $x \in E, \|0\| = \|x - x\| \leq \|x\| + \|-x\| = 2\|x\|$ d'où $\forall x \in E, \|x\| \geq 0$.
(3) Soit $x, y \in E$. $\|x\| = \|x + y - y\| \leq \|x - y\| + \|y\| \Leftrightarrow \|x\| - \|y\| \leq \|x - y\|$
et $\|y\| = \|y + x - x\| \leq \|y - x\| + \|x\| \Leftrightarrow \|y\| - \|x\| \leq \|x - y\|$.
Ainsi, $\|x - y\| \geq \max(\|y\| - \|x\|, \|x\| - \|y\|) = \big|\|x - y\|\big|$.

□

Proposition 1.4. Soit $(E, \|\cdot\|), F \subset E$ un sous-espace vectoriel. La restriction de $\|\cdot\|$ à F est une norme appelée norme induite.

1.2. Topologie des espaces vectoriels normés

Définition 1.5 (boule ouverte/fermée)**.** Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé, $a \in E, r > 0$. On appelle boule ouverte centrée en a de rayon r la partie $B(a, r) \coloneqq \{x \in E \mid \|x - a\| < r\}$, et boule fermée centrée en a de rayon r la partie $B_f(a, r) \coloneqq \{x \in E \mid \|x - a\| \leq r\}$.

Définition 1.6 (Ouvert/fermé)**.** Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. Soit $U \subset E$, on dit que U est:
(1) un ouvert de E si $\forall x \in U, \exists r > 0, B(x, r) \subset U$.
(2) un fermé de E si U^c est un ouvert de E.

Proposition 1.7. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé, alors

(1) $\varnothing$ et E sont ouverts et fermés.
(2) Une union quelconque d'ouverts est un ouvert.
(3) Une intersection finie d'ouverts est un ouvert.
(4) Une union finie de fermés est un fermé.
(5) Une intersection quelconque de fermés est un fermé.

Démonstration.
(1) $\forall x \in \varnothing, \exists \varepsilon, B(x,\varepsilon) \subset \varnothing$ donc $\varnothing$ est un ouvert et $\varnothing^c = E$ donc E est un fermé. De plus, $\forall x \in E, B(x,1) \subset E$ donc E est un ouvert et $\varnothing = E^c$ est un fermé.
(2) Soit $(O_i)_{i\in I}$ une famille d'ouverts. Soit $x \in \bigcup_{i\in\{1,\dots,n\}} O_i$, alors $\exists j \in I, x \in O_j$. Or O_j est un ouvert donc $\exists r_j > 0$ tel que $B(x, r_j) \subset O_j \subset \bigcup_{i\in I} O_i$ donc $\bigcup_{i\in I} O_i$ est un ouvert.
(3) Soit $(O_i)_{i\in\{1,\dots,n\}}$ une famille d'ouverts. Soit $x \in \bigcap_{i\in\{1,\dots,n\}}$ alors $x \in O_1, \dots, x \in O_n$. Or $(0_1, \dots, O_n)$ sont des ouverts de E donc $\exists (r_i)_{i\in I}$ tels que $B\left(x, (r_i)_{i\in\{1,\dots,n\}}\right) \subset (O_i)_{i\in I}$. Posons $\varepsilon \coloneqq \min(r_1, \dots, r_n) > 0$. Alors $B(x,\varepsilon) \subset O_1 \cap \dots \cap O_n$ donc $\bigcup_{i\in\{1,\dots,n\}} C_i$ est un ouvert.
(4) Soit $(C_1, \dots, C_n)$ une famille de fermés. Alors $\left(\bigcup_{i\in\{1,\dots,n\}} C_i\right)^c = \bigcap_{i\in\{1,\dots,n\}} (C_i)^c$ qui est un ouvert. Ainsi $\bigcup_{i\in\{1,\dots,n\}} C_i$ est un fermé.
(5) Soit $(C_i)_{i\in I}$ une famille de fermés. Alors $\left(\bigcap_{i\in I} C_i\right)^c = \bigcup_{i\in I} C_i^c$ qui est un ouvert. Ainsi, $\bigcap_{i\in I} C_i$ est un fermé.

□

Définition 1.8 (Intérieur)**.** Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et $S \subset E$. On appelle intérieur de S l'ensemble $\mathring{S} \coloneqq \{x \in E \mid \exists \varepsilon > 0, B(x,\varepsilon) \subset S\}$.

Définition 1.9 (Adhérence)**.** Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et $S \subset E$. On appelle *adhérence* de S l'ensemble $\overline{S} \coloneqq \{x \in E \mid \forall \varepsilon > 0, B(x,\varepsilon) \cap S \neq \varnothing.\}$.

Définition 1.10 (Dense)**.** Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé, $S \subset E$. On dit que S est *dense* dans E si $\overline{S} = E$.

Proposition 1.11. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé, $S \subset E$.
(1) $\overline{S^c} = \left(\mathring{S}\right)^c$,
(2) $\mathring{S^c} = \left(\overline{S}\right)^c$,
(3) $\mathring{S} \subset S \subset \overline{S}$,
(4) $\mathring{S}$ est le plus grand ouvert contenu dans S,
(5) $\overline{S}$ est le plus petit ouvert contenant S.

Proposition 1.12. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et $S \subset E$.
(1) S est un ouvert si et seulement si $S = \mathring{S}$.
(2) S est un fermé si et seulement si $S = \overline{S}$.

Démonstration. A FAIRE □

Proposition 1.13. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé.
(1) $\forall S, T \subset E, \overline{S \cup T} = \overline{S} \cup \overline{T}$.
(2) $\forall S, T \subset E, \overline{S \cap T} \subset \overline{S} \cap \overline{T}$.
(3) $\forall S, T \subset E, S \mathring{\cap} T = \mathring{S} \cap \mathring{T}$.
(4) $\forall S, T \subset E, S \mathring{\cup} T \supset \mathring{S} \cup \mathring{T}$.

Définition 1.14 (Frontière)**.** Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et $S \subset E$. On appelle *frontière* de S par $\partial S \coloneqq \overline{S} \setminus \mathring{S}$.

Proposition 1.15. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et $S \subset E$, alors
(1) $\partial S = \{x \in E, \forall \varepsilon > 0, B(x,\varepsilon) \cap S \neq \varnothing \wedge B(x,\varepsilon) \cap S^c \neq \varnothing\}$.
(2) $\overline{S} = S \cup \partial S$.

S est fermé si et seulement si $\partial S \subset S$.
(1) S est ouverte si et seulement si $\partial S \cap S = \varnothing$.
(2) ∂S est un fermé.

Démonstration. TO DO □

2. Continuité.

Définition 2.1 (continue)**.** Soit $\left(E, \|\cdot\|_E\right)$, $\left(F, \|\cdot\|_F\right)$ deux espaces vectoriels normés. Soit $S \subset E$. On dit que $f : S \to F$ est *continue* si :

$$\forall x \in S, \forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall y \in F, \|x - y\|_E \leq \eta \Rightarrow \|f(x) - f(y)\|_F \leq \varepsilon.$$

Proposition 2.2. Soit $\left(E, \|\cdot\|_E\right)$, $\left(F, \|\cdot\|_F\right)$ deux espaces vectoriels normés, $S \subset E$, $f : S \to F$ alors les points suivants sont équivalents :
(1) f est continue.
(2) Pour tout ouvert U de F, il existe un ouvert V de E tel que $f^{-1}(U) = V \cap S$,
(3) Pour tout fermé C de F, il existe un fermé D de E tel que $f^{-1}(C) = D \cap S$.

Démonstration. TO DO □

Remarque 2.3. Formellement la proposition revient à dire que l'image reciproque d'un ouvert par une fonction continue est un ouvert.

Proposition 2.4. Soit $\left(E, \|\cdot\|_E\right)$, $\left(F, \|\cdot\|_F\right)$ deux espaces vectoriels normés, $f : E \to F$ une application linéaire. Les points suivants sont équivalents:
(1) f est continue.
(2) f est continue en 0.
(3) $\exists M \geq 0, \forall x \in E, \|f(x)\|_F \leq M\|x\|_E$.

Démonstration.
(1) $1 \Rightarrow 2$: f est continue sur E alors elle est continue en 0.
(2) $2 \Rightarrow 1$: Supposons f continue en 0. Alors il existe $\eta > 0$ tel que $\forall x \in E, \|x\|_E \Rightarrow \|f(x)\|_F \leq 1$. Soit $x \in E \setminus \{0\}$ alors $\left\|f\left(\frac{\eta}{\|x\|_E}x\right)\right\| \leq 1$ d'où $f(x)_F \leq \frac{1}{\eta}\|x\|_E$. Si $x = 0$ alors $\|f(0)\|_F = 0 \leq \frac{1}{\eta}\|0\|_E$. Donc $M \coloneqq \frac{1}{\eta}$ convient.
(3) A faire.

□

3. Suites dans un espace vectoriel normé.

Définition 3.1 (Convergente)**.** Soit $\left(E, \|\cdot\|_E\right)$, un espace vectoriel normé, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suité d'éléments de E et $l \in E$. On dit que $(x_n)_n$ tend vers l si $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, n \geq N \Rightarrow \|x_n - l\| \leq \varepsilon$. On dit qu'une suite est *convergente* si elle admet une limite.

Proposition 3.2. Il y a unicité de la limite.

Démonstration. Supposons $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l_1$, et $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l_2$.
Soit $\varepsilon > 0$ alors il existe $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ tels que $n \geq N_1 \Rightarrow \|l_1 - x_n\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ et $n \geq N_2 \Rightarrow \|l_2 - x_n\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$
Posons $n := \max(N_1, N_2)$. Alors $\|l_1 - l_2\| \leq \|l_1 + x_n + l_2 - x_n\| \leq \|x_n - l_1\| + \|x_n - l_2\| \leq \varepsilon$. D'où $\|l_1 - l_2\| = 0 \Leftrightarrow l_1 = l_2$. $\square$

Lemme 3.3. Soit $\left(E, \|\cdot\|_E\right)$, un espace vectoriel normé, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans E convergente. Alors $(x_n)_n$ est bornée.

Proposition 3.4. Soit $\left(E, \|\cdot\|_E\right)$, un espace vectoriel normé, et $S \subset E$. Si une suite d'éléments converge alors sa limite est dans $\overline{S}$.

Corollaire 3.5. Soit $\left(E, \|\cdot\|_E\right)$, un espace vectoriel normé, $S \subset E$. S est fermé si et seulement si pour toute suite convergente d'éléments de S, sa limite est dans S.