

# Suite et séries de fonctions

## Chapitre 1: Suites de fonctions

### Table des matières

1. Introduction.	1
2. Convergence simple.	1
3. Convergence uniforme.	2
3.1. Propriétés de la $\ \cdot\ _{+\infty}$	2
4. Intégration sur un segment et convergence uniforme.	5
5. Dérivation et convergence uniforme.	6
6. Modes de convergence d'une série de fonctions.	9
7. Intégration sur un segment d'une série de fonctions.	14
7.1. Dérivation d'une série de fonctions.	15
8. Généralités sur les séries entières.	17

## 1. Introduction.

On considère un ensemble  $X$  non vide (en général  $X \subset \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ ).

**Définition 1.1** (suite de fonctions): On appelle suite de fonctions  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sur  $X$  la suite définie pour tout  $n \in \mathbb{N}$  par la fonction  $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto f_n(x)$ .

*Exemple:*  $X = \mathbb{R}$

$\forall n \in \mathbb{N}, f_n(x) = \ln(1 + nx^2)$ .

## 2. Convergence simple.

**Définition 2.1** (convergence simple): Soit  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de fonctions sur  $X$ . On dit que  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  **converge simplement** sur  $X$ , si pour tout  $x \in X$ , la suite numérique  $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$  est convergente. Dans ce cas on note  $f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x)$  la limite et on dit que  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge simplement vers  $f$  sur  $X$ . i.e :

$$f_n \xrightarrow{\text{cs}} f \text{ sur } X \Leftrightarrow \forall x \in X, \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$$

*Remarque:* La convergence simple est une propriété locale.

*Exemples:*

- On considère  $(f_n)_{n \in \mathbb{N} \setminus 0}$  sur  $I = ]0, +\infty[$  définie par  $f_n : I \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto \frac{1}{x + \frac{1}{n}}$ . Soit  $x > 0$  fixé, on a  $f_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\text{cs}} \frac{1}{x}$ . On pose  $f : I \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto \frac{1}{x}$  et on a  $f_n \xrightarrow{\text{cs}} f$  sur  $X$ .
- Même suite mais sur  $I = [0; +\infty[$ . Pour  $x = 0$ ,  $f_n(0) = n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$  donc  $(f_n)_{n \in \mathbb{N} \setminus 0}$  ne converge pas simplement sur  $I$ .
- On considère  $(f_n)_{n \in \mathbb{N} \setminus 0}$  sur  $I = [0, +\infty[$  où  $f_n : I \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$   
\* pour  $x = 0$  fixé,  $f_n(0) = 1 \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 1$ .

\* pour  $x > 0$  fixé,  $f_n(x) = e^{n \ln(1+\frac{x}{n})} = e^{n(\frac{x}{n} + o(\frac{1}{n}))} = e^{x+o(1)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^x$

On pose  $f : I \rightarrow \mathbb{R}; x \rightarrow e^x$ , on a  $f_n \xrightarrow{\text{CS}} f$  sur  $I$ .

4. Soit  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sur  $I = [0, 1]$  définie par  $f_n(x) = x^n$ .

\* Si  $x \in [0, 1[$  fixé,  $f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

\* Si  $x = 1$ ,  $f_n(1) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$ .

On pose  $f : I \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x=1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ . On a  $f_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f$ .

### 3. Convergence uniforme.

**Définition 3.1** (Convergence uniforme): Soit  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de fonction sur  $X$ . Soit  $f$  une fonction sur  $X$ . On dit que  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge uniformément vers  $f$  sur  $X$  si:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow \forall x \in X, |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon.$$

On note  $f_n \xrightarrow{\text{CU}} f$  sur  $X$ .

*Remarque:* La convergence uniforme est une propriété globale.

**Définition 3.2:** Soit  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction. On appelle **norme sup** ou **norme infinie** sur  $X$  la valeur :

$$\|f\|_{+\infty, X} = \sup\{|f(x)|, x \in X\} \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}.$$

*Exemples:*

1.  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$

On a  $\forall x \in \mathbb{R}, 0 \leq f(x) \leq 1$  et  $f(0) = 1$  donc  $\|f\|_{+\infty, \mathbb{R}} = 1$ .

2.  $f : I = [0, 1[ \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto x^2$

On a  $f'(x) = 2x \geq 0$  Donc  $f(x)$  est croissante sur  $I$  et  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow 1} 1$ . D'où  $\{f(x), x \in I\} = [0, 1[$  donc  $\|f\|_{+\infty, I} = 1$ .

3.  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto x$ ,

$$\|f\|_{+\infty, \mathbb{R}} = +\infty.$$

#### 3.1. Propriétés de la $\|\cdot\|_{+\infty}$

**Proposition 3.1.1:** Soient  $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$  deux fonctions.

1. S'il existe  $M \in \mathbb{R}_+$  tel que  $\forall x \in X, |f(x)| \leq M$  alors  $\|f\|_{+\infty, X} \leq M$ .

2.  $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \|\alpha f\|_{+\infty, X} = |\alpha| \|f\|_{+\infty, X}$ .

3.  $\|f + g\|_{+\infty, X} \leq \|f\|_{+\infty, X} + \|g\|_{+\infty, X}$ .

4.  $\|fg\|_{+\infty, X} \leq \|f\|_{+\infty, X} \|g\|_{+\infty, X}$ .

*Démonstration:*

1. exercice

2. exercice

3.  $|f + g| \leq |f| + |g| \leq \|f\|_{+\infty, X} + |g| \leq \|f\|_{+\infty, X} + \|g\|_{+\infty, X}$  d'où d'après 1),

$$\|f + g\|_{+\infty, X} \leq \|f\|_{+\infty, X} + \|g\|_{+\infty, X}.$$

□

**Proposition 3.1.2** (Convergence uniforme avec la norme infinie): Soit  $(f_n)_{n \in \mathbb{N} \setminus 0}$  une suite de fonctions sur  $X$  et  $f$  une fonction sur  $X$ . Alors

$$f_n \xrightarrow{\text{CU}} f \Leftrightarrow \|f_n - f\|_{+\infty, X} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

*Démonstration:*

$\Rightarrow$  Si  $f_n \xrightarrow{\text{CU}} f$  sur  $X$ ,  $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$  tq  $n \geq N \Rightarrow \forall x \in X, |f_n - f| \leq \varepsilon$  donc  $\|f_n - f\|_{+\infty, X} \leq \varepsilon$ .

D'où  $\|f_n - f\|_{+\infty, X} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ .

$\Leftarrow$  Si  $\|f_n - f\|_{+\infty, X} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$  Alors

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow \forall x \in X, |f_n(x) - f(x)| \leq \|f_n(x) - f(x)\|_{+\infty, X} \leq \varepsilon.$$

Donc  $f_n \xrightarrow{\text{CU}} f$  sur  $X$ . □

**Théorème 3.1.1:** Soit  $(f_n)_{n \in \mathbb{N} \setminus 0}$  une suite de fonctions et soit  $f$  une fonction sur  $X$ . On a

$$f_n \xrightarrow{\text{CU}} f \text{ sur } X \Rightarrow f_n \xrightarrow{\text{CS}} f \text{ sur } X.$$

*Démonstration:* Immédiat. □

*Exemples:*

1.  $(f_n)_{n \in \mathbb{N} \setminus 0}$  définie par  $f_n : I = [1, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto \frac{1}{x + \frac{1}{n}}$ .

On a vu que  $f_n \xrightarrow{\text{CS}} f$  sur  $I$  où  $f : I \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto \frac{1}{x}$ . On pose:

$$g_n = f_n - f = \frac{1}{x} - \frac{1}{x + \frac{1}{n}} = \frac{\frac{1}{n}}{x(x + \frac{1}{n})} = \frac{1}{nx^2 + x}.$$

1<sup>ère</sup> méthode: Majoration de  $|g_n|$  par une expression qui ne dépend pas de  $x$  et qui tend vers 0 quand  $n \rightarrow +\infty$ .

Lorsque  $x \geq 1$ ;  $nx^2 + x \geq nx^2 + 1 \geq n + 1$  Donc  $\forall x \in I, 0 \leq g_n(x) \leq \frac{1}{n+1}$  Donc

$$\|f_n - f\|_{+\infty, I} \leq \frac{1}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

. D'où  $f_n \xrightarrow{\text{CU}} f$  sur  $I$ .

2<sup>e</sup> méthode: (en général plus couteuse): On étudie  $g_n$ . On a  $g_n'(x) = -\frac{2nx+1}{(nx^2+x)^2} \leq 0$  donc  $g_n$  est décroissante sur  $I$  et  $\|f\|_{+\infty, I} = \frac{1}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ . D'où  $f_n \xrightarrow{\text{CU}} f$  sur  $I$ .

2.  $(f_n)_{n \in \mathbb{N} \setminus 0}$  définie par  $f_n : I = [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto x^n$ . On a vu  $\xrightarrow{\text{CS}} f$  sur  $I$  où  $f : I \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0, 1[ \\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$

1<sup>ère</sup> méthode: On veut minorer  $|f_n(x) - f(x)|$ . Pour cela, on utilise une suite de  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  où  $\forall n, x_n \in I, x_n = 1 - \frac{1}{n}$ . Ainsi, on a bien  $|f_n(x_n) - f(x_n)| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ .

$$|f_n(x_n) - f(x_n)| = f_n(x_n) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = e^{n \ln(1 - \frac{1}{n})} = e^{n(-\frac{1}{n} + o(\frac{1}{n}))} = e^{-1 + o(1)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{e}$$

On a  $\|f_n - f\|_{+\infty, I} \geq |f_n(x_n) - f(x_n)| \not\rightarrow_{+\infty} 0$ . d'où  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ne converge pas uniformément sur  $I$ .

2<sup>e</sup> méthode:  $g_n(x) = f_n(x) - f(x) = \begin{cases} f_n(x) - x^n & \text{si } x \neq 1 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$  donc  $\|g_n\|_{+\infty, I} = 1 \not\rightarrow_{+\infty} 0$ . Donc  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ne converge pas uniformément sur  $I$ .

**Théorème 3.1.2** (convergence uniforme + continuité): Soit  $I \subset \mathbb{R}$  un intervalle et  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de fonctions définies sur  $I$ . Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction. Soit  $x_0 \in I$ . On suppose

1.  $\forall n \in \mathbb{N}, f_n$  est continue en  $x_0$  ( $f_n \in C^0(I, \mathbb{R})$ ).
2.  $f_n \xrightarrow{\text{CU}} f$  sur  $I$ .

Alors  $f$  est continue en  $x_0$ .

*Démonstration:* Soit  $\varepsilon > 0$ .

On a  $f_n \xrightarrow{\text{CU}} f$  sur  $I$  donc  $\exists N \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow \forall x \in I, |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{3}$ .

De plus,  $f_n$  est continue en  $x_0$  donc  $\exists \eta > 0, |x - x_0| \leq \eta \Rightarrow |f_n(x) - f_n(x_0)| \leq \frac{\varepsilon}{3}$ .

Soit  $n \geq N$  et  $x \in I$  tq  $|x - x_0| \leq \eta$ .

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &= |f(x) - f_n(x_0) + f_n(x_0) - f_n(x) + f_n(x) - f(x_0)| \\ &\leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)| \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Ainsi,  $f$  est continue en  $x_0$ . □

*Remarques:*

1. Le théorème nous donne un critère supplémentaire pour justifier la non-convergence uniforme.
2. On remarque que l'on a pas besoin de la continuité uniforme sur  $I$  en entier, c'est suffisant de l'avoir sur un voisinage de  $x_0$  (ou un intervalle fermé et borné contenant  $x_0$ ).

**Proposition 3.1.3** (Continuité uniforme sur tout segment + continuité): Soit  $I \subset \mathbb{R}$  un intervalle. Soient  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de fonctions sur  $I$  et  $f$  une fonction définie sur  $I$ . On suppose :

1.  $\forall n \in \mathbb{N}, f_n$  est continue en  $x_0$ .
2.  $f_n \xrightarrow{\text{CU}} f$  sur  $I$ . \ sur tout segment  $K = [a, b] \subset I$ .

Alors  $f$  est continue sur  $I$ .

*Démonstration:* Soit  $x_0 \in I, \exists K = [a, b]$  avec  $a \neq b \neq x_0$  tel que  $x_0 \in [a, b]$  On applique le théorème sur  $K$  donc  $f$  est continue en  $x_0$ . D'où  $f$  continue sur  $I$ . □

*Exemple:* Considérons pour  $n \in \mathbb{N} \setminus 0, f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto \begin{cases} x^2 \sin(\frac{1}{nx}) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$  Comme

$$\left| x^2 \sin\left(\frac{1}{nx}\right) \right| \leq x^2 \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0,$$

$f_n$  est continue en 0.

**Convergence simple:** Si  $x = 0, f_n(0) = 0 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ . Si  $x \in \mathbb{R} \setminus 0, f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x^2 \frac{1}{nx} = \frac{x}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ .

**Convergence uniforme** sur tout gement  $K = [-\alpha, \alpha] \forall \alpha \in \mathbb{R}_+ \setminus 0$ :

$g(x) = \sin x - x$  et  $g'(x) = \cos(x) - 1 \leq 0$ . De plus,  $\forall x \in K, g(x) \leq 0$  donc  $|\sin(x)| \leq |x|$ .

Donc  $\forall x \in \mathbb{R}, |f_n(x)| \leq x^2 \left(\frac{1}{nx}\right) \leq \frac{|x|}{n}$ .

D'où:  $\forall x \in [-\alpha, \alpha] = K, |f_n(x)| \leq \frac{\alpha}{n}$  donc  $\|f_n - f\|_{+\infty, K} = 0$  et  $f_n \xrightarrow{\text{CU}} f$  sur  $K$ .

Ainsi, il y a convergence uniforme sur tout segment.

Montrons qu'il n'y a **pas** de convergence uniforme sur  $\mathbb{R}$ :

On prend  $x_n = n$  et  $f_n(x_n) = n^2 \sin\left(\frac{1}{n^2}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n^2 \frac{1}{n^2} = 1$  On a

$$|f_n(x_n) - f(x_n)| = 1 \leq \|f_n - f\|_{+\infty, \mathbb{R}} \not\rightarrow_{n \rightarrow +\infty} 0$$

*Remarque:* La convergence uniforme ne se conserve pas lors d'une réunion infinie. Mais se conserve si elle l'est.

## 4. Intégration sur un segment et convergence uniforme.

On veut étudier une suite d'intégrales par exemple, on veut chercher la limite quand  $n \rightarrow +\infty$  de la suite  $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par  $I_n = \int_0^1 \frac{n^4 + x^4}{(n+x)^4} dx$ . La tentation serait de dire qu'à  $x$  fixé,  $\frac{n^4 + x^4}{(n+x)^4} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$  et donc  $I_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 1 dx = 1$ . En faisant cela, on dit que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f_n(x) dx = \int_0^1 \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) dx$$

ce qui est généralement **faux**.

**Théorème 4.1** (Convergence uniforme + intégration sur un segment): Soit  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de fonctions sur un **segment**  $I = [a, b]$ . On suppose que:

1.  $\forall n \in \mathbb{N}, f_n$  est continue sur  $I$ .
2.  $f_n \xrightarrow{\text{CU}} f$  sur  $I$ .

Alors  $f$  est continue sur  $I$  et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx.$$

*Démonstration:*  $f$  est continue sur  $I$  par le théorème de CU+continuité donc  $\forall n \in \mathbb{N}, \left| \int_a^b f_n(x) dx - \int_a^b f(x) dx \right| = \left| \int_a^b f_n(x) - f(x) dx \right|$

$$\leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)| dx$$

$$\leq \int_a^b \|f_n - f\|_{+\infty, I} dx = \|f_n - f\|_{+\infty, I} (b - a) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

□

*Remarque:* Le théorème peut être utilisé pour montrer la non convergence uniforme.

*Exemple:* Soit  $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto n \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right)$ .

On montre que  $f_n \xrightarrow{\text{CU}} f$  sur  $[0, 1]$  où  $f(x) = x$  (en exercice) et donc on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f_n(x) dx = \int_0^1 x dx = \frac{1}{2}.$$

## 5. Dérivation et convergence uniforme.

**Théorème 5.1** (Convergence uniforme + primitive): Soit  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de fonctions sur un **segment**  $I = [a, b]$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , par le théorème fondamental de l'analyse, on introduit la fonction  $F_n : I \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto \int_a^x f_n(t) dt$ . Si  $f_n \xrightarrow{\text{CU}} f$  sur  $I$ , alors  $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge uniformément sur  $I$  vers  $F : I \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto \int_a^x f(t) dt$  qui est  $C^1$  sur  $I$ .

*Démonstration:*

$$\begin{aligned} \forall x \in I, n \in \mathbb{N}, |F_n(x) - F(x)| &= \left| \int_a^x f_n(t) dt - \int_a^x f(t) dt \right| \\ &= \int_a^x |f_n(t) - f(t)| dt \\ &\leq \int_a^b |f_n(t) - f(t)| dt \\ &\leq \|f_n - f\|_{+\infty, I} (b - a) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \text{ voir thm précédent.} \end{aligned}$$

Donc  $F_n \xrightarrow{\text{CU}} F$ . □

**Théorème 5.2** (Convergence uniforme + dérivation): Soit  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie sur un **intervalle**  $I$ .

On suppose :

1.  $\forall n \in \mathbb{N}, f_n$  est  $C^1$  sur  $I$ .
2.  $\exists \alpha \in I$  tel que  $f_n(\alpha)$  converge.
3.  $\exists g$  définie sur  $I$  telle que  $f'_n \xrightarrow{\text{CU}} g$  sur tout segment  $K \subset I$ .

Alors :

1. La suite  $f_n \xrightarrow{\text{CU}} f$  sur tout segment  $K \subset I$ .
2.  $f' = g$

*Démonstration:* On note  $l = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(\alpha)$ . Par 3. on déduit que  $g$  est  $C^0$  sur tout segment  $K \subset I$  donc  $C^0$  sur  $I$ . On pose  $G_n : I \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto \int_a^x f'_n(t) dt$ .

Remarquons que  $\forall x \in I, G_n(x) = f_n(x) - f_n(a)$ . Par 3. + le thm de convergence uniforme+primitive  $A_n \xrightarrow{\text{CU}} G$  où □

**Corollaire 5.1** (Convergence uniforme + dérivation): Soit  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie sur un **intervalle**  $I$ . On suppose :

1.  $\forall n \in \mathbb{N}, f_n$  est  $C^1$  sur  $I$ .
2.  $\exists f$  définie sur  $I$  telle que  $\xrightarrow{\text{CS}} f$  sur  $I$ .
3. La suite de fonctions  $(f'_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge uniformément vers une fonction  $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ .

Alors :

1. La suite  $f_n \xrightarrow{\text{CU}} f$  sur tout segment  $K \subset I$ .
2. La fonction  $f$  est  $C^1$  sur  $I$ .
3.  $f' = g$

**Théorème 5.3**: Soit  $k > 1$ ,  $I \subset \mathbb{R}$  un intervalle, et  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} : I \rightarrow \mathbb{R}$  une suite de fonctions. On suppose :

1.  $\forall n \in \mathbb{N}, f_n$  est  $C^k$  sur  $I$ .
2.  $\forall i \in \{0, -, k-1\}$  la suite  $(f_n^{(i)})$  converge simplement sur  $I$ .
3. La suite des dérivées  $k$ -ième converge uniformément sur  $I$  (ou sur tout segment  $K \subset I$ ) vers une fonction  $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ .

Alors il existe une fonction  $f, C^k$  sur  $I$  telle que :

1.  $f^{(k)} = g$
2.  $\forall i \in \{0, -, k\}, f_n^{(i)} \xrightarrow{\text{CU}} f^{(i)}$ .

*Démonstration*: par récurrence. □

*Remarque*: Si  $f_n \xrightarrow{\text{CU}} f$  sur  $I$  et  $\forall n \in \mathbb{N}, f_n$  est  $C^1$  sur  $I$  alors  $f$  n'est pas forcément  $C^1$  sur  $I$ .

**Théorème 5.4** (double limite): Soit  $a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$  une borne d'un intervalle  $I$ ,  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de fonctions définies sur  $I$ , et  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction. On suppose :

1.  $\forall n \in \mathbb{N}, f_n(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} l_n \in \mathbb{R}$ .
2.  $f_n \xrightarrow{\text{CU}} f$  sur  $I$ .

Alors :

1. La suite numérique  $(l_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $l \in \mathbb{R}$ .
2.  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} l$ .

On a donc

$$\lim_{x \rightarrow a} \left( \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x)_{=f(x)} \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \lim_{x \rightarrow a} f_n(x)_{=l_n} \right) = l$$

*Démonstration*:

1. Montrons que la suite  $(l_n)$  converge, donc est de Cauchy. Soit  $\varepsilon > 0$  Par 2.,

$$\exists N \text{ tel que } \forall n \geq N, \text{ on a } \|f_n - f\|_{+\infty, I} \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Soit  $n \geq N$  et  $p \in \mathbb{N}$ .

$$\begin{aligned}
|f_n(x) - f_{n+p}(x)| &= |f_n(x) - f(x) + f(x) - f_{n+p}(x)| \\
&\leq |f_n(x) - f(x)| + |f_{n+p}(x) - f(x)| \leq \varepsilon.
\end{aligned}$$

On passe à la limite quand  $x \rightarrow a$  et  $l_n - l_{n+p} \leq \varepsilon$ . donc  $(l_n)$  est de Cauchy donc converge.

2. Montrons  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} l$ .

Comme  $f_n \xrightarrow{\text{CU}} f$  sur  $I$ ,  $\exists N_1 \in \mathbb{N}$  tel que  $n \geq N_1 \Rightarrow \|f_n - f\|_{+\infty, I} \leq \frac{\varepsilon}{3}$ .

Comme  $l_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} l$ ,  $\exists N_2 \in \mathbb{N}$ , tel que  $n \geq N_2 \Rightarrow |l_n - l| \leq \frac{\varepsilon}{3}$ .

Posons  $N = \max\{N_1, N_2\}$ . Puisque  $f_n(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} l_n$ ,

$$\exists \alpha > 0 \text{ tel que } \forall x \in I, |x - a| \leq \alpha \Rightarrow |f_n(x) - l_n| \leq \frac{\varepsilon}{3}$$

Soit  $x \in I$  tel que  $|x - a| \leq \alpha$  et soit  $n \geq N$ . On a :

$$\begin{aligned}
|f(x) - l| &= |f(x) - f_n(x) + f_n(x) - l_n + l_n - l| \\
&= |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - l_n| + |l_n - l| \leq \varepsilon.
\end{aligned}$$

Donc  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} l$ .

□

*Remarque:* La conclusion du théorème est vraie même si  $l_n = +\infty$ .

*Exemple (Pour montrer la non convergence uniforme):* On considère  $f_n : I \rightarrow \mathbb{R}_+; x \mapsto \frac{x}{n+x}, n \geq 1$ .

1.  $\forall n \in \mathbb{N}, f_{n(x)} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1 = l_n$  donc  $l_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1 = l$ .

2. CS de  $(f_n)$ : pour  $x = 0$   $f_n(0) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ . pour  $x > 0$  fixé,  $f_{n(x)} = \frac{x}{n+x} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$  donc  $f_n \xrightarrow{\text{CS}} 0$ .

Or

$$\lim_{x \rightarrow a} \left( \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x) \right) = 0 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \lim_{x \rightarrow a} l_n \right) = 1.$$

Faux donc 2. n'est pas vrai et il n'y a pas convergence uniforme.



# Chapitre 2: Séries de fonctions.

## 6. Modes de convergence d'une série de fonctions.

*Remarque:* On considérera un intervalle  $I \subset \mathbb{R}$  et des fonctions  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  mais il est possible de généraliser aux fonctions  $f : I \rightarrow \mathbb{C}$  en remplaçant la valeur absolue par le module.

**Définition 6.1:** Soit  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de fonctions sur  $I$ . On appelle série de fonctions de terme général  $f_n$  la suite de fonctions

$$(S_n)_{n \in \mathbb{N}} := S_n : I \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto \sum_{k=0}^n f_k(x).$$

On note  $\sum_{n \in \mathbb{N}} f_n$  une telle série de fonctions. La fonction  $S_n$  s'appelle la  $n$ -ième somme partielle de  $\sum f_n$ .

**Définition 6.2** (Convergence simple): On dit qu'une série de fonctions  $\sum f_n$  converge simplement sur  $I$  si pour tout  $x \in I$ , la série numérique  $\sum f_n(x)$  converge.

Si  $\sum f_n$  converge simplement sur  $I$ , on définit la fonction limite

$$S : I \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$$

La fonction  $S$  est appelée la fonction somme de  $\sum f_n$  et est notée  $S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ .

**Définition 6.3** (Reste): La fonction  $S - S_n$  notée  $R_n$  s'appelle la fonction reste d'ordre  $n$  de  $\sum f_n$ , on note  $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k$ . On a  $R_n \xrightarrow{\text{cs}} 0$  sur  $I$ .

*Remarques:*

1. Montrer que  $\sum f_n$  converge simplement sur  $I$  c'est montrer que  $S_n \xrightarrow{\text{cs}} S$ .
2. Si  $\sum f_n$  converge simplement sur  $I$ , alors  $S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$  est définie sur  $I$ .
3. En général, il n'est pas possible de calculer explicitement  $S$ .

*Exemple:* Soit  $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto x^n$ . Pour  $x \in \mathbb{R}$ , tel que  $|x| \geq 1$ ,  $\sum f_n(x)$  diverge grossièrement car  $f_n(x) \not\rightarrow 0$ .

Si  $x \in ]-1, 1[$ ,  $S_n(x) = \sum_{k=0}^n x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} S(x) = \frac{1}{1-x}$  donc  $\sum f_n$  converge simplement sur  $] -1, 1[$ . La fonction somme de  $\sum f_n$  est seulement définie sur  $] -1, 1[$ .

$$S : ]-1, 1[ \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto \frac{1}{1-x}, \text{ et } R_n : ]-1, 1[ \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto S(x) - S_n(x) = \frac{x^{n+1}}{1-x}.$$

**Définition 6.4** (convergence absolue): On dit qu'une série de fonctions  $\sum f_n$  converge absolument, noté  $CA$  sur  $I$  si  $\forall x \in I$ , la série numérique  $\sum |f_n(x)|$  converge.

**Proposition 6.1** (Convergence absolue  $\Rightarrow$  convergence simple): Si  $\sum f_n$  converge absolument sur  $I$  alors  $\sum f_n$  converge simplement sur  $I$ .

*Démonstration:* Voir cours séries numériques. □

*Exemples:*

1. On considère la série de fonctions  $\sum_{n \geq 1} f_n$  où  $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto \frac{(-1)^n}{x^2 + n^2}$ .  
Soit  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$|f_n(x)| = \frac{1}{x^2 + n^2} = \frac{1}{n^2 \left( \frac{x^2}{n^2} + 1 \right)} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}.$$

Par Riemann, et par équivalence,  $\sum f_n$  converge absolument sur  $\mathbb{R}$  donc converge.

2. On considère  $\sum_{n \geq 1} f_n$  où  $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto \frac{(-1)^n}{\sqrt{x^2 + n^2}}$ .

Soit  $x \in \mathbb{R}$

$$|f_n(x)| = \frac{1}{\sqrt{x^2 + n^2}} = \frac{1}{n \sqrt{\frac{x^2}{n^2} + 1}} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n}.$$

Donc  $f_n$  ne converge pas absolument sur  $\mathbb{R}$ .

Soit  $x \in \mathbb{R}$ . On pose  $u_n(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + n^2}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ . On a  $(n+1)^2 \geq n^2$  donc  $x^2 + (n+1)^2 \geq x^2 + n^2$  donc

$$\sqrt{x^2 + (n+1)^2} \geq \sqrt{x^2 + n^2} > 0 \text{ (par croissance de } \sqrt{\odot})$$
$$u_{n+1}(x) \leq u_n(x).$$

Donc  $(u_n(x))_{n \in \mathbb{N} \setminus 0}$  est décroissante. Par le critère spécial des séries alternées,  $\sum f_n(x)$  converge et donc  $\sum f_n$  converge simplement sur  $\mathbb{R}$ .

**Définition 6.5** (convergence uniforme): On dit qu'une série de fonctions  $\sum f_n$  converge uniformément sur  $I$  si la suite de fonctions  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$  des sommes partielles converge uniformément sur  $I$ .

*Remarque:* Cette définition est en général inutilisable car on ne connaît pas une forme simple de  $S_n$  et  $S$  non plus.

**Proposition 6.2:** Si la série de fonctions  $\sum f_n$  converge uniformément sur  $I$  alors  $\sum f_n$  converge simplement sur  $I$ .

*Démonstration:* Cours sur les suites de fonctions □

**Proposition 6.3:** Si une série de fonctions  $\sum f_n$  converge uniformément sur  $I$  alors la suite de fonctions  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge uniformément sur  $I$  vers la fonction nulle.

*Démonstration:* Supposons  $\sum f_n$  converge uniformément sur  $I$ . Pour tout  $n \geq 1$ , pour tout  $x \in I$ ,

$$\begin{aligned} |f_n(x)| &= |S_n(x) - S_{n-1}(x)| = |S_n(x) - S(x) + S(x) - S_{n-1}(x)| \\ &\leq |S_n(x) - S(x) + S(x)| + |S(x) - S_{n-1}(x)| \\ &\leq \|S_n - S\|_{+\infty, I} + \|S_{n-1} - S\|_{+\infty, I} \end{aligned}$$

Donc  $\|f_n - 0\|_{+\infty, I} \leq \|S_n - S\|_{+\infty, I} + \|S_{n-1} - S\|_{+\infty, I} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$  donc  $f_n \xrightarrow{\text{CU}} \text{fct nulle sur } I$ .  $\square$

*Remarque:* On se sert de ce résultat pour démontrer dans certains cas la non convergence uniforme.

*Exemple:*

On considère  $\sum f_n$  où  $f_n : \mathbb{R}_+ \setminus 0 \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto \frac{1}{1+n^2x}$ .

Soit  $x \in I$ . On a  $\frac{1}{1+n^2x} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2x}$ . Par Riemann et par équivalence,  $\sum f_n(x)$  converge donc  $\sum f_n$  converge simplement et converge absolument sur  $I$ . On a  $f_n \xrightarrow{\text{CS}} \text{fct nulle sur } I$ . On va voir qu'elle n'est pas uniforme. Soit  $x_n = \frac{1}{n^2}, n \geq 1$ .  $f_n(x_n) = \frac{1}{2}$  donc  $\|f_n - 0\|_{+\infty, X} \geq \frac{1}{2}$  donc  $\|f_n - 0\|_{+\infty, X} \not\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ . D'où la non convergence uniforme.

*Remarque:* Cet exemple montre  $\text{CA} \not\Rightarrow \text{CU}$ .

**Proposition 6.4** (caractérisation de la convergence uniforme avec les restes): Soit  $\sum f_n$  une série de fonctions.  $\sum f_n$  converge uniformément sur  $I$  si et seulement si

1.  $\sum f_n$  converge simplement sur  $I$ .
2. La suite de fonctions  $(R_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge uniformément vers la fonction nulle sur  $I$ .

*Démonstration:*

On suppose  $\sum f_n$  converge uniformément sur  $I$  donc  $S$  est bien définie sur  $I$  et on a  $H_1$ .

$\sum f_n$  converge uniformément sur  $I \Leftrightarrow S_n \xrightarrow{\text{CU}} S$  sur  $I \Leftrightarrow S_n - S \xrightarrow{\text{CU}} 0$ . D'où  $H_2$ .  $\square$

*Remarque:* Ce résultat est en général inexploitable car on en connaît pas  $R_n$ .

**Définition 6.6** (convergence normale): On dit qu'une série de fonctions  $\sum f_n$  **converge normalement** sur  $I$  si la série numérique  $\sum \|f_n\|_{+\infty, I}$  est convergente.

**Proposition 6.5:** Soit  $\sum f_n$  une série de fonctions.  $\sum f_n$  converge normalement sur  $I$  si et seulement si il existe une suite numérique  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  convergente telle que  $\|f_n\|_{+\infty, I} \leq a_n$ .

La série numérique  $\sum a_n$  est appelée une série majorante de  $\sum f_n$ .

*Démonstration:*

$\Rightarrow$  Si  $\sum f_n$  converge normalement sur  $I$ , on pose  $a_n = \|f_n\|_{+\infty, I}$  et  $\sum a_n$  est une série majorante.

$\Leftarrow$  Si  $\sum a_n$  est une série majorante, par le théorème de comparaison,  $\sum \|f_n\|_{+\infty, I}$  converge.  $\square$

**Théorème 6.1** (Comparaison des modes de convergence): Soit  $\sum f_n$  une série de fonctions sur  $I$ . On a

convergence normale  $\Rightarrow$  convergence absolue  $\Rightarrow$  convergence simple

et

convergence normale  $\Rightarrow$  convergence uniforme  $\Rightarrow$  convergence simple

*Démonstration:* On suppose que  $\sum f_n$  converge normalement sur  $I$ . Il existe une série majorante  $\sum a_n$  pour  $\sum f_n$ .

1. Comme  $\forall n \in \mathbb{N}, \|f_n\|_{+\infty, I} \leq a_n$ , on a  $\forall x \in I, 0 \leq |f_n(x)| \leq \|f_n\|_{+\infty, I} \leq a_n$ . Par le théorème de comparaison,  $\sum |f_n(x)|$  converge pour tout  $x \in I$ , donc  $\sum f_n$  converge absolument sur  $I$ .
2. Comme converge normale  $\Rightarrow$  convergence absolue  $\Rightarrow$  convergence simple,  
 $\sum f_n$  converge simplement sur  $I$ . Donc  $\forall x \in I, R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x)$  est bien défini, et  $\sum |f_n(x)|$  converge simplement sur  $I$  donc ses restes associés que l'on appellera  $R'_n$  sont bien définis..  
 Comme  $\sum a_n$  converge, les restes d'ordre  $n, r_n$  sont bien définis.

$$\forall x \in I, |R_n(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k \right| \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} |f_k| \leq r_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k \in \mathbb{R}.$$

Ainsi,  $\|R_n - 0\|_{+\infty, I} \leq r_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ . D'où  $R_n \xrightarrow{\text{CU}} \text{fct nulle sur } I$ . Donc  $\sum f_n$  converge uniformément sur  $I$ .

□

*Exemple:*

1.  $\sum_{n \geq 1} f_n$  où  $f_n(x) = \frac{(-1)^n}{x^2 + n^{\frac{3}{2}}}$
2. Etudions les convergences sur  $I = ]0, +\infty[$  de  $\sum f_n$  où  $f_n(x) = nx^2 e^{-x\sqrt{n}}$ .

\* Convergence normale :

$$f'_n(x) = 2nxe^{-x\sqrt{n}} - n^{\frac{3}{2}}x^2e^{-x\sqrt{n}} = nxe^{-x\sqrt{n}}(2 - \sqrt{n}x)$$

par étude de tableau de variation on obtient que  $\|f_n\|_{+\infty, I} = f_n\left(\frac{2}{\sqrt{n}}\right) = \frac{4}{e^2} \not\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$  Donc  $\sum \|f_n\|_{+\infty, I}$  diverge grossièrement, ainsi, il n'y a pas de convergence normale.

\* Convergence absolue : Soit  $x \in ]0, +\infty[$ . On a  $n^2 f_n(x) = n^3 x^2 e^{-x\sqrt{n}}$  Donc par la règle de  $n^\alpha u_n$ ,  $\sum |f_n(x)|$  converge. Donc converge absolument sur  $I$ . (et converge simplement sur  $I$ ). \* Comme  $\|f_n\|_{+\infty, I} \not\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ , donc  $(f_n)$  ne converge pas uniformément vers la fonction nulle donc  $\sum f_n$  ne converge pas uniformément sur  $I$ .

*Remarque:* La convergence absolue et la convergence simple sont locales tandis que la convergence normale et uniforme sont globales.

**Théorème 6.2** (double limite): Soit  $\sum f_n$  une série de fonctions sur  $I$  un intervalle,  $a$  une borne de cet intervalle. On suppose :

1.  $\forall n \in \mathbb{N}, f_n(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} l_n \in \mathbb{R}$ .
2.  $\sum f_n$  converge uniformément sur  $I$ .

Alors en notant  $S$  la fonction somme de la série  $\sum f_n$  sur  $I$ ,

1. La série des  $l_n$  converge.
2.  $S(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \sum_{n=0}^{+\infty} l_n$

C'est-à-dire :

$$\lim_{x \rightarrow a} \left( \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n f_k(x) \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \lim_{x \rightarrow a} \sum_{k=0}^n f_k(x) \right)$$

*Démonstration:* On considère  $S_n(x) = \sum_{k=0}^n f_k(x)$  et on applique le théorème de la double limite à la suite de fonctions  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

□

*Remarques:*

1. Sous l'hypothèse de convergence uniforme, on peut intervertir limite en  $x$  et signe somme à l'infini en  $n$ . On a :

$$\lim_{x \rightarrow a} \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \lim_{x \rightarrow a} f_k(x)$$

2. On peut se servir de ce théorème pour montrer qu'une série de fonctions ne converge pas uniformément.

*Exemple:*

On considère  $\sum f_n$  où  $f_n(x) = \frac{x^n}{1+nx^n}$  sur  $[0, 1[$ .

Convergence simple: On a  $f_n(x) \underset{+\infty}{\sim} x^n$  donc par équivalence (car  $f_n \geq 0$ ),  $\sum f_n$  converge et,  $\forall x \in [0, 1[, f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ . Donc  $\sum f_n$  converge absolument et simplement sur  $[0, 1[$ .

Convergence normale: On a  $f'_n(x) = \frac{nx^{n-1}(1+nx^n) - n^2x^{2n-1}}{(1+nx^n)^2} = n \frac{x^{n-1}}{(1+nx^n)^2} \geq 0$  Après étude du tableau de variations,  $\|f_n\|_{+\infty, [0, 1[} = f_n(1) = \frac{1}{1+n} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$  Or,  $\sum \frac{1}{n}$  diverge d'après Riemann. Donc par théorème d'équivalence,  $\sum \|f_n\|_{+\infty, [0, 1[}$  diverge. Il n'y a donc pas convergence normale.

Convergence uniforme: Si  $\sum f_n$  converge sur  $I$ , alors le théorème de la double limite s'applique donc  $\lim_{x \rightarrow 1} f_n(x) = \frac{1}{1+n} = l_n$  et donc  $\sum l_n$  converge. Contradiction donc  $\sum f_n$  ne converge pas uniformément sur  $I$ .

*Remarque:* Pour montrer la non convergence uniforme on peut montrer que les  $f_n$  ne convergent pas uniformément vers la fonction nulle.

**Théorème 6.3** (Continuité uniforme et continuité): Soit  $I$  un intervalle,  $\sum f_n$  une série de fonctions sur  $I$ ,  $a \in I$ . On suppose :

1.  $\forall n, f_n$  est continue en  $a$ .
2.  $\sum f_n$  converge uniformément sur  $I$ .

Alors la fonction somme  $S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$  de  $\sum f_n$  est continue en  $a$ .

*Démonstration:* On applique le théorème de continuité uniforme+continuité à la suite de fonctions  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$

□

**Théorème 6.4:** Soit  $\sum f_n$  une série de fonctions sur  $I$ . On suppose

1.  $\forall n \in \mathbb{N}, f_n$  est continue sur  $I$ .
2.  $\sum f_n$  converge uniformément sur tout segment  $K \subset I$ .

Alors la fonction somme est continue sur  $I$ .

*Exemple:*

1. Déterminer l'ensemble de définition  $I$  de  $S : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} n^x e^{-nx}$ .
2. Montrer que  $S$  est continue sur  $I$ .
3. Déterminer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} S$ .

## 7. Intégration sur un segment d'une série de fonctions.

**Théorème 7.1** (Convergence uniforme et intégration termes à termes): Soit  $\sum f_n$  une série de fonctions définies sur  $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ . On suppose :

1.  $\forall n \in \mathbb{N}, f_n$  est continue sur  $I$ .
2.  $\sum f_n$  converge uniformément sur  $I$ .

Alors

1. La fonction somme  $S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$  est continue sur  $I$ .
2. La série numérique  $\sum \int_a^b f_n(x) dx$  converge.
3. On peut intervertir la somme et l'intégrale, i.e  $\int_a^b \sum f_n(x) dx = \sum \int_a^b f_n(x) dx$ .

*Démonstration:* On applique le théorème de convergence uniforme + intégration sur un segment à la suite de fonctions  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$  où  $S_n = \sum_{k=0}^n f_k$ .  $\square$

*Exemple:* Série « Mina-bili » de Johan Bernouilli 1697.

On veut montrer que

$$\int_0^1 x^x dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^n}.$$

On admet  $\forall y \in \mathbb{R}, e^y = \sum \frac{y^n}{n!}$ .

Pout  $x > 0$ ,

$$x^x = e^{x \ln(x)} = \sum \frac{x^n \ln(x)^n}{n!}$$

Posons  $f_0 = 1, f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto \begin{cases} \frac{x^n \ln(x)^n}{n!} & \text{si } x \in ]0, 1[ \\ 0 & \text{si } x=0 \end{cases}$  et posons par  $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto x \ln x$ . Par étude de fonctions, on trouve  $\|g\|_{+\infty, [0, 1]} = \frac{1}{e}$  donc  $\|f_n\|_{+\infty, [0, 1]} = \frac{1}{e^n n!}$ . Par d'Alembert,  $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{e^{n+1}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$  donc  $\sum u_n$  converge. Ainsi,  $\sum f_n$  converge normalement sur  $[0, 1]$  donc converge uniformément sur  $[0, 1]$ . De plus,  $\forall n \in \mathbb{N}, f_n$  est  $C^0$  sur  $[0, 1]$ . Par le théorème de convergence uniforme + intégration pour les séries de fonctions,

$$\int_0^1 x^x dx = \int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) dx \stackrel{\text{thm}}{=} \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 f_n(x) dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 \frac{x^n \ln(x)^n}{n!} dx.$$

On pose  $J_{n,p} = \int_0^1 x^n \ln(x)^p dx$ . Par changement de variables,

$$\begin{aligned} J_{n,p} &= \left[ \ln(x)^p \frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{p}{n+1} x^n \ln(x)^{p-1} dx = -\frac{p}{n+1} J_{n,p-1} \\ &= (-1)^p \frac{p!}{(n+1)^p} J_{n,0} = (-1)^p \frac{p!}{(n+1)^{p+1}} \end{aligned}$$

## 7.1. Dérivation d'une série de fonctions.

**Théorème 7.1.1** (Convergence uniforme de la série des primitives.): Soit  $\sum f_n$  une série de fonctions **continues** sur un **segment**  $I = [a, b]$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on considère par le théorème fondamental de l'analyse  $F_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto \int_a^x f_n(t) dt$ . Alors, si la série de fonctions  $\sum f_n$  converge uniformément sur  $I$  vers la fonction somme  $S$ , la série des primitives  $\sum F_n$  converge uniformément sur  $I$  vers la fonction (somme)  $T : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto \int_a^x S(t) dt$ .

*Démonstration:* On applique le théorème de convergence uniforme de la suite des primitives à la suite de fonctions  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$  où  $S_n = \sum_{k=0}^n f_k$  □

**Théorème 7.1.2** (Dérivation,  $C^1$  et CU, dérivation terme à terme): Soit  $I \subset \mathbb{R}$  un intervalle et soit  $\sum f_n$  une série de fonctions où  $F_n : I \rightarrow \mathbb{R}$ . On suppose :

1.  $\forall n \in \mathbb{N}, f_n$  est  $C^1$  sur  $I$ .
2.  $\sum f_n$  converge simplement sur  $I$ .
3.  $\sum f'_n$  converge uniformément sur  $I$ .

Alors :

1.  $\sum f_n$  converge uniformément sur tout segment  $K \subset I$ .
2.  $S = \sum f_n$  est  $C^1$  sur  $I$ .
3. On peut permuter sommes et dérivées.  $S' = \sum f'_n$

*Remarque:* On peut remplacer H2. par  $\exists a \in I$  tel que  $\sum f_n(a)$  converge. H3. par  $\sum f'_n$  converge uniformément sur tout segment  $K \subset I$ .

**Théorème 7.1.3:** Soit  $I \subset \mathbb{R}$  un intervalle et  $\sum f_n$  une série de fonctions où  $f_n : I \rightarrow \mathbb{R}$ , et  $k \geq$

1. On suppose:
  1.  $\forall n \in \mathbb{N}, f_n$  est  $C^k$  sur  $I$ .
  2.  $\forall i \in \{0, \dots, k-1\}, \sum f_n^{(i)}$  converge simplement sur  $I$ .
  3.  $\sum f_n^{(k)}$  converge uniformément sur tout segment  $K \subset I$ .

Alors :

1.  $\forall i \in \{0, \dots, k-1\}, \sum f_n^{(i)}$  CU sur tout segment  $K \subset I$
2. la fonction somme est  $C^k$  sur  $I$ .
3.  $S^{(i)} = \sum f_n^{(i)}$ .

*Exemple:* On pose  $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n$  avec  $u_n = \frac{(-1)^n e^{-nx}}{n}$ .

1. Donner le domaine de définition  $I$  de  $f$ .
2. Montrer que  $f$  est  $C^0$  sur  $I$ .
3. Montrer que  $f$  est  $C^1$  sur  $I$  et calculer  $f'$ .
4. Calculer  $f$  sur  $I$ .

•

1. Si  $x < 0$ ,  $u_n$  ne tend pas vers 0 donc  $\sum u_n(x)$  diverge grossièrement.  
Si  $x \geq 0$ , On obtient une série alternée avec  $\frac{e^{-nx}}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$  et  $u_{n+1} \leq u_n$  donc par le critère spécial des séries alternées,  $\sum u_n$  converge donc  $I = \mathbb{R}_+$ .
2. Pour  $x = 0$ ,  $|u_{n(0)}| = \frac{1}{n}$  donc  $|u_n(0)|$  diverge. Il n'y a pas de convergence absolue donc pas de convergence normale sur  $I$ . Etudions directement la convergence uniforme.

$$|R_n(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x) \right| \underset{\text{CSSA}}{\leq} |u_{n+1}(x)| = \frac{e^{-(n+1)x}}{n+1} \leq \frac{1}{n+1}$$

Donc  $\sum u_n$  converge uniformément sur  $I \Leftrightarrow R_n$  converge uniformément vers la fonction nulle sur  $I$ . Ainsi,  $\|R_n\|_{+\infty, I} \leq \frac{1}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$  donc  $\sum u_n$  converge uniformément sur  $I$ . Enfin, par le théorème de convergence uniforme+continuité,  $f$  est  $C^0$  sur  $I$  car  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n$  est  $C^{+\infty}$  sur  $I$ .

3. On a  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n$  est  $C^1$  sur  $I$ .  $\sum u_n$  converge simplement sur  $I$ .  
De plus,  $u'_n(x) = (-1)^{n+1} e^{-nx} = -(-e^{-x})^n$ . Pour  $x > 0$ , c'est le terme général d'une série géométrique convergente.

On regarde des intervalles de la forme  $[a, +\infty[$ ,  $a > 0$ . On a  $\|u'_n\|_{+\infty, [a, b[} = e^{-an}$  qui est un terme d'une série géométrique qui converge.

Donc  $\sum u'_n$  converge normalement sur  $[a, +\infty[$ . On applique le théorème de convergence uniforme + dérivation et donc  $f$  est  $C^1$  sur  $[a, +\infty[$  et  $\forall x \in [a, +\infty[$ ,  $f'(x) = -\sum -e^{(-x)^n}$  donc  $f$  est  $C^1$  sur  $\bigcup_{a>0} [a, +\infty[ = ]0, +\infty[$ .

Enfin,

$$\forall x \in ]0, +\infty[, f'(x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} (-e^{-x})^n = -\frac{-e^{-x}}{1+e^{-x}} = \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{1}{2}$$

On en déduit que  $f$  est  $C^1$  sur  $I$  et  $f'(0) = \frac{1}{2}$ .

$$4. \quad \forall x \in I, \int_0^1 f'(t) dt = \int_0^x \frac{e^{-t}}{1+e^{-t}} dt = [-\ln(1+e^{-t})]_0^x = -\ln(1+e^{-x}) + \ln 2$$

$$\text{Donc } f(x) = -\ln(1+e^{-x}) + \ln(2) + f(0)_{\sum \frac{(-1)^n}{n}}$$

VOIR TEL !!

$$\text{Donc } f(x) = -\ln(1+e^{-x})$$



# Chapitre 3: Séries entières.

## 8. Généralités sur les séries entières.

**Définition 8.1:** On appelle série entières de coefficients  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la série de fonctions de la forme  $\sum f_n$  où  $f_n : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}; z \mapsto a_n z^n$ . On notera une telle série sous la forme  $\sum a_n z^n$ .

**Définition 8.2:** L'ensemble  $D$  des  $z \in \mathbb{C}$  tels que la série numérique  $\sum a_n z^n$  converge est appelé domaine de convergence de la série entière.

**Définition 8.3:** Soit  $\sum a_n z^n$  une série entière,  $D$  le domaine de convergence de la série. On appelle la somme de la série entière la fonction

$$S := D \rightarrow \mathbb{C}; z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$$

*Exemples:*

1.  $\sum z^n$   
Si  $|z| < 1$ , la série géométrique converge absolument donc simplement.  
Si  $|z| \geq 1$ ,  $z^n \not\rightarrow 0$  donc la série diverge grossièrement. donc  $D = B(0, 1)$ .
2.  $\sum_{n \geq 1} u_n$  avec  $u_n = \frac{z^n}{n^2}$ .  
Si  $|z| \leq 1$ ,  $\frac{|z^n|}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}$  donc  $\sum u_n$  converge absolument.  
Si  $|z| > 1$ , on utilise la règle de d'Alembert. on a

$$\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \frac{|z|^{n+1}}{|z|^n} * \frac{n^2}{(n+1)^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} |z| > 1$$

Donc  $\sum u_n$  diverge grossièrement. Ici le domaine de convergence est donc  $D = \overline{B}(0, 1)$

3.  $\sum_{n \geq 1} u_n$  avec  $u_n = \frac{z^n}{2^n n}$ .

$$\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = |z| \frac{2^n n}{2^{n+1} n + 1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{|z|}{2}.$$

Donc  $\sum u_n$  converge absolument lorsque  $\frac{|z|}{2} < 1 \Leftrightarrow |z| < 2$  et pour  $|z| > 2$ ,  $\sum u_n$  diverge par d'Alembert.

Si  $z = 2$ , la série devient  $\sum \frac{1}{n}$  qui diverge par Riemann.

Si  $z = -2$ , la série devient  $\sum \frac{(-1)^n}{n}$  qui converge par le critère spécial des séries alternées.

Ainsi,  $B(0, 2) \subsetneq D \subsetneq \overline{B}(0, 2)$ .

**Proposition 8.1:** Soit  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de nombres complexes, et  $z_0 \in \mathbb{C}$  tel que la suite  $(a_n z_0^n)_{n \in \mathbb{N}}$  soit bornée. Alors

$$\forall z \in \mathbb{C}, |z| < |z_0| \Rightarrow \sum a_n z^n \text{ converge absolument.}$$

*Démonstration:* Soit  $z_0 \in \mathbb{C}$  On suppose  $z_0 \neq 0$  car sinon il n'y a rien à faire.

On suppose  $(a_n z_0^n)_{n \in \mathbb{N}}$  bornée. Il existe  $M > 0$  tel que  $\forall n \in \mathbb{N}, |a_n z_0^n| \leq M \Leftrightarrow |a_n| \leq \frac{M}{|z_0|^n}$ .

Soit  $z \in \mathbb{C}, |z| < |z_0|$ .

$$\forall n \in \mathbb{N}, |a_n| |z^n| \leq M \frac{|z^n|}{z_0}.$$

On a majoré la série par un terme d'une série géométrique convergente. Ainsi, par comparaison,  $\sum a_n z^n$  converge absolument.  $\square$

**Définition 8.4:** On appelle rayon de convergence de la série entière  $\sum a_n z^n$  le nombre

$$R := \sup \{ r \in \mathbb{R}_+ \mid \exists M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, (a_n r^n) < M \} \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$$

*Exemples:*

1. Le rayon de convergence de  $\sum z^n$  est  $R = 1$ .

**Proposition 8.2:** soit  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de nombres complexes. Le rayon de convergence de la série entière  $\sum a_n z^n$  vaut

$$R := \sup \left\{ r \geq 0 \mid a_n r^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \right\}$$

*Démonstration:* On note  $I = \{ r \in \mathbb{R}_+ \mid \exists M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, (a_n r^n) < M \}$ ,  $J = \sup \left\{ r \geq 0 \mid a_n r^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \right\}$ . Par définition,  $R = \sup I$ . On veut montrer que  $R = \sup J$ . On a  $J \subset I$  donc  $\sup J \leq R$ .

Si  $I = \{0\}$ ,  $I = J$  donc  $\sup I = \sup J$

Si  $I \neq \{0\}$ , on peut poser  $r \neq 0$ . Soit  $s \in [0, r[$ ,

$$|a_n s^n| = |a_n r^n| \left| \frac{s}{r} \right|^n \leq M \left| \frac{s}{r} \right|^n$$

Donc  $\sum |a_n s^n|$  converge par comparaison donc  $|a_n s^n| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$  or  $s \in J$  donc  $[0, r[ \subset J$  donc  $\sup \{ [0, r[ \} = r \leq \sup J$  donc par ordre total,  $\sup I = \sup J = R$ .  $\square$

*Remarques:* Avec les notations de la preuve,

1.  $0 \in I, 0 \in J$
2.  $[0, R[ \subset J \subset I \subset [0, R]$

**Proposition 8.3** (Caractérisation du rayon de convergence): Soit  $\sum a_n z^n$  une série entière et soit  $R \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ . On a une équivalence entre les propriétés suivantes:

1.  $R$  est la rayon de convergence de  $\sum a_n z^n$ .
2.  $\forall z \in \mathbb{C}, |z| < R \Rightarrow \sum |a_n z^n|$  converge,  $|z| > R \Rightarrow \sum a_n z^n$  diverge grossièrement.

*Remarque:*

1. Si  $R = 0$ , les points 1. et 2. se réduisent à  $\forall z \in \mathbb{C} \setminus 0, \sum a_n z^n$  diverge grossièrement.
2. Si  $R = +\infty$  les points 1. et 2. se réduisent à  $\forall z \in \mathbb{C}, \sum a_n z^n$  converge absolument.