

# Diagonalisation

## Table des matières

<b>1. Déterminants.</b>	<b>1</b>
1.1. forme n-linéaires alternée.	1
1.2. Définition du déterminant.	3
1.3. Déterminant d'un endomorphisme.	4
1.4. Déterminant d'une matrice carrée.	6
1.5. Déterminant d'une matrice triangulaire par blocs.	7

## 1. Déterminants.

### 1.1. forme n-linéaires alternée.

**Définition 1.1.1** (forme n-linéaire): Soit  $E$  un espace vectoriel. Soit  $\varphi : E^n \rightarrow \mathbb{R}; (x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)$ . On dit que  $\varphi$  est une **forme n-linéaire** si  $\varphi$  est linéaire par rapport à chaque variable  $x_i, i \in [1, n]$  i.e,  $\forall x_1, \dots, x_i, \dots, x_n, y_i \in E, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ,

$$\varphi(x_1, \dots, x_{i-1}, \alpha x_i + \beta y_i, \dots, x_n) = \alpha \varphi(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, \dots, x_n) + \beta \varphi(x_1, \dots, x_{i-1}, y_i, \dots, x_n)$$

*Exemples:*

1. Montrons que  $\varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; (x_1, x_2) \mapsto x_1 x_2$  est 2-linéaire. Soit  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ . On a  $(\alpha x_1 + \beta y_1) x_2 = \alpha(x_1 x_2) + \beta(y_1 x_2)$  et  $x_1(\alpha x_2 + \beta y_2) = \alpha(x_1 x_2) + \beta(x_1 y_2)$ .
2.  $\varphi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}; (u^{\rightarrow}, v^{\rightarrow}) \mapsto u^{\rightarrow} \times v^{\rightarrow}$  est 2-linéaire (et symétrique).
3. Le déterminant 2-2 est 2-linéaire.

*Remarque:*  $\varphi(x_1, \dots, 0, \dots, x_n) = 0$ .

En effet,

**Définition 1.1.2** (alternée): Soit  $\varphi$  une application n-linéaire. On dit que  $\varphi$  est **alternée** si

$$\forall i, j \in [1, n] \text{ avec } i \neq j, x_i = x_j \Rightarrow \varphi(x_1, \dots, x_n) = 0$$

$\varphi$  est alternée si des qu'il y a 2 vecteurs égaux dans  $x_1, \dots, x_n$ ,  $\varphi(x_1, \dots, x_n) = 0$

**Proposition 1.1.1:** Soient  $f_1, \dots, f_n : E \rightarrow F$   $n$  applications linéaires. Soit  $\varphi : F^n \rightarrow \mathbb{R}$   $n$  linéaire. Alors

$$\varphi \circ (f_1, \dots, f_n) : E^n \rightarrow \mathbb{R}; x_1, \dots, x_n \mapsto \varphi(f_1(x_1), \dots, f_n(x_n))$$

est  $n$ -linéaire.

*Démonstration:*

□

**Définition 1.1.3** (antisymétrie): Soit  $\varphi$  une application n-linéaire. On dit que  $\varphi$  est **antisymétrique** si

$$\forall i, j \in [1, n] \text{ avec } i \neq j, \varphi(x_1, -, x_i, -, x_j, -, x_n) = -\varphi(x_1, -, x_j, -, x_i, -, x_n)$$

$\varphi(x_1, -, x_n)$  est changé en son opposé lorsqu'on échange 2 de ses vecteurs.

**Proposition 1.1.2:** Soit  $\varphi$  une application n-linéaire et alternée. On ne change pas la valeur de  $\varphi(x_1, -, x_n)$  en ajoutant à un des vecteurs de la famille une combinaison linéaire des autres.

*Démonstration:*

$$\begin{aligned} \varphi\left(x_1 + \sum_{j=2}^n \alpha_j x_j, -, x_n\right) &= \varphi(x_1, -, x_n) + \sum_{j=2}^n \alpha_j \varphi(x_j, -, x_j, -, x_n) \\ &= \varphi(x_1, -, x_n) \end{aligned}$$

Car  $\varphi$  est alternée. □

**Proposition 1.1.3:** Soit  $\varphi$  une application n-linéaire.

$\varphi$  est alternée si et seulement si  $\varphi$  est antisymétrique.

*Démonstration:*

$\Rightarrow$  Supposons que  $\varphi$  soit alternée. On pose  $x_i = x_j$  Alors on a  $\varphi(x_1, -, x_i, -, x_j, -, x_n) = 0$

$$\begin{aligned} \varphi(x_1, -, x_i, -, x_j, -, x_n) &= \varphi(x_1, -, x_i + x_j, -, x_j + x_i, -, x_n) \\ &= \varphi(x_1, -, x_i, -, x_j + x_i, -, x_n) + \varphi(x_1, -, x_j, -, x_j + x_i, -, x_n) \\ &= \varphi(x_1, -, x_i, -, x_j, -, x_n) + \cancel{\varphi(x_1, -, x_i, -, x_i, -, x_n)} \\ &\quad + \cancel{\varphi(x_1, -, x_j, -, x_j, -, x_n)} + \varphi(x_1, -, x_j, -, x_i, -, x_n) \text{ car } \varphi \text{ est alternée.} \\ &= \varphi(x_1, -, x_i, -, x_j, -, x_n) + \varphi(x_1, -, x_j, -, x_i, -, x_n) \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} 0 &= \varphi(x_1, -, x_i, -, x_j, -, x_n) + \varphi(x_1, -, x_j, -, x_i, -, x_n) \\ \Leftrightarrow \varphi(x_1, -, x_i, -, x_j, -, x_n) &= -\varphi(x_1, -, x_j, -, x_i, -, x_n) \end{aligned}$$

Donc  $\varphi$  est antisymétrique.

$\Leftarrow$  Supposons que  $\varphi$  soit antisymétrique. Alors on a :

$$\varphi(x_1, -, x_i, -, x_j, -, x_n) = -\varphi(x_1, -, x_j, -, x_i, -, x_n)$$

En particulier, en posant  $x_j = x_i$  on a :

$$\begin{aligned} \varphi(x_1, -, x_i, -, x_i, -, x_n) &= -\varphi(x_1, -, x_i, -, x_i, -, x_n) \\ \Leftrightarrow 2\varphi(x_1, -, x_i, -, x_i, -, x_n) &= 0 \\ \Leftrightarrow \varphi(x_1, -, x_i, -, x_i, -, x_n) &= 0 \end{aligned}$$

□

**Proposition 1.1.4:** Soit  $\varphi$  une application linéaire et alternée. Si  $(x_1, -, x_n)$  est une famille liée alors  $\varphi(x_1, -, x_n) = 0$

*Démonstration:*  $(x_1, -, x_n)$  est liée donc il existe  $\alpha_1, -, \alpha_n \in \mathbb{R}$  tel que  $\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n = 0$  avec  $\alpha_i \neq 0$  cas  $\alpha_1 \neq 0$ ,  $x_1 = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1} x_2 - \dots - \frac{\alpha_n}{\alpha_1} x_n$ , alors

$$\begin{aligned}\varphi(x_1, -, x_n) &= \varphi\left(-\frac{\alpha_2}{\alpha_1} x_2 - \dots - \frac{\alpha_n}{\alpha_1} x_n, x_2, -, x_n\right) \\ &= \text{TODO} = 0\end{aligned}$$

□

**Corollaire 1.1.1:** Si  $\dim(E) < n$  toutes les formes n-linéaires alternées sur  $E$  sont nulles.

*Démonstration:* Soient  $E$  un espace vectoriel,  $x_1, -, x_n \in E$ . Alors  $(x_1, -, x_n)$  est liée donc  $\varphi(x_1, -, x_n) = 0$ . □

**Théorème 1.1.1:** Si  $\dim(E) \geq n$  alors il existe des formes n-linéaires alternées sur  $E$  non nulles.

De plus, si  $\dim(E) = n$  deux formes n-linéaires alternées sur  $E$   $\varphi_1$  et  $\varphi_2$  non nulles sont proportionnelles i.e,  $\exists \lambda \in \mathbb{R}$  tel que  $\forall x_1, -, x_n \in E, \varphi_2(x_1, -, x_n) = \lambda \varphi_1(x_1, -, x_n)$ .

## 1.2. Définition du déterminant.

**Lemme 1.2.1:** Soient  $m : E^2 \rightarrow \mathbb{R}, a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Alors  $a \circ m$  définie par

$$(a \circ m)(x_1, x_2) = m(x_1, x_2) - m(x_2, x_1)$$

est bilinéaire antisymétrique.

*Démonstration:* Soient  $x_1, x_2 \in E$ . On montre l'antisymétrie.

$$\begin{aligned}(a \circ m)(x_1, x_2) &= m(x_1, x_2) - m(x_2, x_1) = -(m(x_2, x_1) - m(x_1, x_2)) \\ &= -(a \circ m)(x_2, x_1)\end{aligned}$$

La linéarité est évidente. □

**Théorème 1.2.1:** Soient  $E$  un espace vectoriel de dimension  $n$ , et  $B = (e_1, -, e_n)$  une base de  $E$ . Alors il existe une unique forme n-linéaire alternée:  $\det_B : E^n \rightarrow \mathbb{R}$  appelée déterminant par rapport à  $B$  telle que  $\det(e_1, -, e_n) = 1$ .

Démonstration cas  $n=2$ : TODO VOIR MAXIME

□

**Théorème 1.2.2:** Soient  $E$  un espace vectoriel de dimension  $n$ , et  $B$  une base de  $E$ . Une famille  $F$  de  $n$  vecteurs de  $E$  est libre si et seulement si le déterminant de ces  $n$  vecteurs dans la base  $B$  est non nul.  
Dans ce cas on a:

$$\forall x_1, \dots, x_n \in E, \det_B(x_1, \dots, x_n) = \det_B(F) \det_F(x_1, \dots, x_n).$$

*Démonstration:* Soit  $F = (f_1, \dots, f_n)$  une famille,  $B = (e_1, \dots, e_n)$ .

Si  $F$  est liée on a  $\det_B$  est  $n$ -linéaire alternée. Alors  $\det_B(f_1, \dots, f_n) = 0$ .

Si  $F$  est libre alors  $F$  est une base donc  $\exists \lambda \in \mathbb{R}, \det_B = \lambda \det_F$  voir (Théorème). En particulier,

$$\begin{aligned} \det_B(f_1, \dots, f_n) &= \lambda \det_F(f_1, \dots, f_n) \stackrel{\text{par définition}}{=} \lambda \cdot 1 \\ \text{Or } 1 &= \det_B(e_1, \dots, e_n) = \lambda \det_F(e_1, \dots, e_n) \text{ d'où } \lambda \neq 0 \end{aligned}$$

POURQUOI

D'où  $\det_B(f_1, \dots, f_n) \neq 0$ .

□

### 1.3. Déterminant d'un endomorphisme.

**Définition 1.3.1:** Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension  $n$ . On appelle **déterminant de  $f$**  l'unique réel  $\det f$  tel que pour toute application  $\varphi$   $n$ -linéaire alternée, et pour tout  $(x_1, \dots, x_n) \in E$ ,

$$\varphi(f(x_1), \dots, f(x_n)) = \det f \varphi(x_1, \dots, x_n).$$

*Remarque:* En prenant  $x_1, \dots, x_n = e_1, \dots, e_n$ ,

$$\det(f(B)) = \det f.$$

*Démonstration:* Existence: Soit  $\varphi$  une forme  $n$ -linéaire alternée non-nulle et

$\psi : E^n \rightarrow \mathbb{R}; x_1, \dots, x_n \mapsto \varphi(f(x_1), \dots, f(x_n))$  qui est une forme  $n$ -linéaire alternée. Alors  $\varphi$  et  $\psi$  sont proportionnelles, i.e il existe  $\lambda \in \mathbb{R}$  tel que  $\psi = \lambda \varphi$  (Théorème).

Soit  $\Phi$  une forme  $n$ -linéaire alternée quelconque, alors il existe  $\alpha \in \mathbb{R}$  tel que  $\Phi = \alpha \varphi$ , et

$\forall x_1, \dots, x_n \in E$ ,

$$\Phi(\psi(x_1), \dots, \psi(x_n)) = \alpha \lambda \varphi(x_1, \dots, x_n) = \lambda \Phi(x_1, \dots, x_n)$$

MYSTIQUE

□

**Proposition 1.3.1:** Soient  $f : E \rightarrow E$  et  $g : E \rightarrow E$  deux endomorphismes. Alors,

$$\det(f \circ g) = \det f \det g.$$

*Démonstration:* Soient  $\varphi : E^n \rightarrow \mathbb{R}$  une application  $n$ -linéaire alternée,  $x_1, \dots, x_n \in E$ .

On a:

$$\begin{aligned} \varphi(f \circ g(x_1), \dots, f \circ g(x_n)) &= \det f \varphi(g(x_1), \dots, g(x_n)) \text{ par définition de } \det f. \\ &= \det f \det g \varphi(x_1, \dots, x_n) \text{ par définition de } \det g \end{aligned}$$

Par unicité de  $\det(f \circ g)$ ,  $\det(f \circ g) = \det f \det g$

□

**Théorème 1.3.1:** Soit  $f : E \rightarrow E$  un endomorphisme.

$$f \text{ est bijectif} \Leftrightarrow \det f \neq 0 \text{ et on a: } \det(f^{-1}) = \frac{1}{\det(f)}.$$

*Démonstration:* Soit  $B$  une base de  $E$  un espace vectoriel.

On rappelle  $f$  est bijectif  $\Leftrightarrow f(B)$  est une base.  $\Leftrightarrow \det_B f(B) \neq 0$ . Si  $f$  est bijectif,  $f \circ f^{-1} = \text{id}_E$  donc  $\det(f \circ f^{-1}) = \det(\text{id}_E) = \det f \det f^{-1}$  or  $\det(\text{id}_E) = 1$

D'où  $\det(f^{-1}) = \frac{1}{\det(f)}$ .

□

**Proposition 1.3.2:** Soient  $F$  une famille de vecteurs de  $E$ ,  $f : E \rightarrow E$  un isomorphisme d'espace vectoriel,  $B$  une base de  $E$ . Alors  $f(B)$  est une base de  $F$  et

$$\det_{f(B)} f(F) = \det_B F.$$

*Démonstration:*  $\det_{f(B)} f$  et  $\det_B F$  sont deux formes  $n$ -linéaires alternées sur  $E$  qui valent 1 sur  $B$  donc elles sont égales.

□

**Théorème 1.3.2:** Soient  $E$  un espace vectoriel de dimension finie,  $f : E \rightarrow E$  un endomorphisme. Alors

$$\det f = \det M_{B,B}(f).$$

Où  $M_{B,B}(f)$  est la matrice associée à  $f$  dans la base  $B$ .

## 1.4. Déterminant d'une matrice carrée.

**Définition 1.4.1:** Soit  $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$  une matrice. On appelle **déterminant de  $A$**

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

le déterminant dans la base canonique de  $\mathbb{R}^n$  des  $n$  vecteurs colonnes de  $A$ .

**Proposition 1.4.1:** Soient  $A, B \in M_{n \times n}(\mathbb{R}), \lambda \in \mathbb{R}$

1.  $\det(AB) = \det(A) \det(B)$ .
2.  $A$  inversible  $\Leftrightarrow \det A \neq 0$ . Si  $A$  est inversible alors  $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$ .
3.  $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$ .

*Démonstration:*

1. Soient  $f : E \rightarrow E, g : E \rightarrow E, A, B$  les matrices associées respectivement à  $f$  et  $g$ . Alors la matrice associée à  $f \circ g$  est  $M_{B,B}(f \circ g) = AB$ . Ainsi,

$$\det(AB) = \det M(f \circ g) = \det(f \circ g) = \det f \det g = \det A \det B.$$

2.

3. Par n-linéarité

□

*Remarque (ATTENTION):*  $\det(A + B) \neq \det(A) + \det(B)$

**Théorème 1.4.1:** Soient  $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R}), E$  un espace vectoriel de dimension  $n, B$  une base de  $E$ , et  $x_1, \dots, x_n$  tels que  $x_i := a_{1i}e_1 + \dots + a_{ni}e_n$ . Alors

$$\det A = \det_B(x_1, \dots, x_n).$$

*Démonstration:* Soit  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow E$ ; base canonique  $\mapsto$  base  $B = y_1, \dots, y_n \mapsto y_1e_1 + \dots + y_ne_n$ .  $f$  est bien un isomorphisme. On a :  $f(a_{1i}, \dots, a_{ni}) = x_i$ . D'après la proposition,

$$\det_{f(C)} f(a_{1i}, \dots, a_{ni}) = \det_C(a_{1i}, \dots, a_{ni}) = \det A = \det_B(x_1, \dots, x_n).$$

□

*Remarque:* Le déterminant est indépendant de la base  $B$  choisie.

**Définition 1.4.2** (transposée): Soit  $A \in M_{B,B}(\mathbb{K})$  avec

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,q} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p,1} & \cdots & a_{p,q} \end{pmatrix}$$

Alors la transposée est notée  ${}^tA \in M_{p,q}(\mathbb{K})$  est la matrice

$${}^tA = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{p,1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1,q} & \cdots & a_{p,q} \end{pmatrix}.$$

**Théorème 1.4.2** (Admis): Soit  $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$  une matrice carrée. Alors :

$$\det {}^tA = \det A.$$

*Remarque:* Conséquence directe: Toutes les propriétés des déterminants qui ont été étendues sur les colonnes sont aussi valables en opérant sur les lignes.

**Proposition 1.4.2:** Le déterminant est une forme n-linéaire alternée. Ainsi :

1. Il y a n-linéarité du déterminant par rapport aux vecteurs colonnes (ou lignes).
2. Soit  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

$$\alpha \det(\cdot) = \det(\alpha C_i).$$

3. Si on échange deux colonnes, le déterminant est multiplié par  $-1$ .
4.  $\det A \neq 0 \Leftrightarrow$  les  $n$  vecteurs colonnes forment une famille libre

## 1.5. Déterminant d'une matrice triangulaire par blocs.

**Théorème 1.5.1:** Soit  $M$  une matrice carrée de la forme  $\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$ . Alors :

$$\det M = \det A \det B.$$