

# Fonction de deux variables

## Table des matières

<b>1. Introduction.</b>	<b>1</b>
1.1. Rappels.	1
1.2. Premières définitions.	1
<b>2. La topologie de la norme de <math>\mathbb{R}^2</math>.</b>	<b>2</b>
2.1. Norme euclidienne.	2
2.2. Disques ouverts/fermés et sous-ensembles ouverts/fermés.	3
<b>3. Limites de suites.</b>	<b>4</b>
<b>4. Points limites et adhérence d'un sous-ensemble.</b>	<b>4</b>
<b>5. Limites de fonctions.</b>	<b>5</b>
<b>6. Continuité.</b>	<b>5</b>
<b>7. Différentielle.</b>	<b>6</b>

## 1. Introduction.

### 1.1. Rappels.

**Définition 1.1.1** (fonction d'une variable): Soit  $A, B$  deux ensembles. Une application  $f$  est la donnée d'un ensemble de départ  $A$  et d'un ensemble d'arrivée  $B$  et qui, à chaque  $x \in A$  associe un unique  $f(x) \in B$ . On la note  $f : A \rightarrow B; x \mapsto f(x)$ .

**Définition 1.1.2** (Graphe d'une application): Soit  $f : A \rightarrow B$  une application. On appelle graphe de  $f$  l'ensemble suivant  $\text{Graphe}(f) = \{(x, f(x)) \mid x \in A\} \subset A \times B$

### 1.2. Premières définitions.

**Définition 1.2.1** (fonction de deux variables): Soit  $A$  un sous ensemble de  $\mathbb{R}^2$  et  $B$  un ensemble. Une application  $f$  de deux variables de  $A$  dans  $B$  est la donnée d'un ensemble de départ  $A$  et d'un ensemble d'arrivée  $B$  et qui, à chaque  $(x, y) \in A$  associe un unique  $f(x, y) \in B$ . On la note  $f : A \rightarrow B; (x, y) \mapsto f(x, y)$ .

**Définition 1.2.2** (Graphe d'une application): Soit  $f : A \rightarrow B$  une application de deux variables. On appelle graphe de  $f$  l'ensemble suivant  $\text{Graphe}(f) = \{(x, y, f(x, y)) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in A\}$

*Exemple:* L'aire d'un rectangle :  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}; (x, y) \mapsto xy$ .

Soit  $a$  un réel fixé et  $x, y \in \mathbb{R}$ . l'équation associée est  $a = xy \Leftrightarrow y = \frac{a}{x}$ . On cherche le rectangle d'aire  $a$  de côté  $x, y$ .

## 2. La topologie de la norme de $\mathbb{R}^2$ .

### 2.1. Norme euclidienne.

**Définition 2.1.1** (Norme Euclidienne): Soit  $v = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ . La norme Euclidienne est la longueur du vecteur  $v$ . Elle est donnée par  $\|v\| = \sqrt{a^2 + b^2}$ .

**Proposition 2.1.1:** Soit  $v \in \mathbb{R}^2, \lambda \in \mathbb{R}$ . Alors  $\|\cdot\|$  vérifie:

1.  $\|v\| \geq 0$  et  $\|v\| = 0 \Leftrightarrow v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ .
2.  $\|\lambda v\| = |\lambda| \|v\|$  (homogénéité).
3.  $\|v + u\| \leq \|v\| + \|u\|$  (inégalité triangulaire).

i.e la norme Euclidienne est une norme.

*Démonstration:*

1. Pour tout  $x \in \mathbb{R}^2, x^2 \geq 0$  d'où  $\forall u \in \mathbb{R}^2, \|u\| \geq 0$ .

2. Soit  $u = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2, \lambda \in \mathbb{R}$ .

On a  $\|\lambda u\| = \|(\lambda a, \lambda b)\| = \sqrt{(\lambda a)^2 + (\lambda b)^2} = \sqrt{\lambda^2(a^2 + b^2)} = |\lambda| \|u\|$ .

3.

□

**Corollaire 2.1.1:** Soit  $v, u \in \mathbb{R}^2$ . On a :

$$\|v - u\| \geq \left| \|v\| - \|u\| \right|.$$

*Démonstration:* On a  $\forall u, v \in \mathbb{R}^2$ ,

$$v = (v - u) + u$$

$$\|v\| = \|v - u + u\| \leq \|v - u\| + \|u\|$$

$$\Leftrightarrow \|v - u\| \geq \|v\| - \|u\|$$

De même avec  $u$ , on obtient par ailleurs  $\|v - u\| \geq \|u\| - \|v\|$  d'où  $\|v - u\| \geq \left| \|v\| - \|u\| \right|$ . □

**Définition 2.1.2:** Soient  $u = (a, b), v = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ . On définit le produit scalaire par

$$u \cdot v = ax + by.$$

**Proposition 2.1.2:** Soient  $u, v, w \in \mathbb{R}^2, \lambda \in \mathbb{R}$ .

1.  $u \cdot v = v \cdot u$  (symétrie).
2.  $(w + v) \cdot u = w \cdot u + v \cdot u$  (bilinéarité).
3.  $(v \cdot u)^2 \leq \|u\|^2 \|v\|^2$  (inégalité de Cauchy-Schwartz).

*Démonstration:* Soient  $u, v \in \mathbb{R}^2, t \in \mathbb{R}$ .  $\|v + tu\|^2 = (v + tu) \cdot (v + tu) = v \cdot v + 2t(v \cdot u) + (u \cdot u)t^2$ .

On pose  $f(t) = \|v\|^2 + 2(v \cdot u)t + \|u\|^2 t^2$ . On peut supposer que  $u \neq 0$  sinon l'égalité est évidente. □

## 2.2. Disques ouverts/fermés et sous-ensembles ouverts/fermés.

**Définition 2.2.1** (disque): Soient  $u \in \mathbb{R}^2, R > 0$ . On appelle **disque ouvert** de rayon  $R$  centré en  $u$  l'ensemble:

$$B(u, r) := \{v \in \mathbb{R}^2 \mid \|v - u\| < R\}.$$

On appelle **disque fermé** de rayon  $R$  centré en  $u$  l'ensemble:

$$\overline{B}(u, R) := \{v \in \mathbb{R}^2 \mid \|v - u\| \leq R\}.$$

**Définition 2.2.2** (ouvert): Soit  $U$  un sous-ensemble de  $\mathbb{R}^2$ . On dit que  $U$  est un **ouvert** de  $\mathbb{R}^2$  si

$$\forall u \in U, \exists r_u > 0, B(u, r_u) \subset U.$$

*Remarque:* L'ensemble de ces sous-ensembles sont notés  $O_{\text{norm}}$ .

### Proposition 2.2.1:

1. Les sous-ensembles  $\emptyset$  et  $\mathbb{R}^2$  sont des ouverts.
2. Soit  $\{H_i\}_{i \in I} \subset O_{\text{norm}}$ . Alors leur réunion est un sous-ensemble ouvert de  $\mathbb{R}^2$  i.e,

$$\forall \{H_i\}_{i \in I} \subset O_{\text{norm}}, \bigcup_{i \in I} H_i \in O_{\text{norm}}.$$

3. Soit  $\{H_i\}_{i \in \{1, \dots, n\}} \subset O_{\text{norm}}$  alors leur intersection est un sous-ensemble de  $\mathbb{R}^2$  i.e,

$$\forall \{H_i\}_{i \in \{1, \dots, n\}} \subset O_{\text{norm}}, \bigcap_{i \in \{1, \dots, n\}} H_i \in O_{\text{norm}}.$$

*Démonstration:*

- 1.
2. On peut supposer la réunion non-vide. Soit  $v \in V = \bigcup_{i \in I} H_i$ , alors  $\exists i_0, v \in H_{i_0}$ . D'où

$$\exists v_{i_0}, B(v, v_{i_0}) \subset H_{i_0} \subset \bigcup_{i \in I} H_i$$

□

**Définition 2.2.3:** La collection  $O_{\text{norm}}$  s'appelle la topologie de  $\mathbb{R}^2$  associée avec la norme euclidienne. (ou la topologie de la norme de  $\mathbb{R}^2$ ).

**Définition 2.2.4** (voisinage): Soit  $u \in \mathbb{R}^2$ . On appelle **voisinage ouvert** de  $u$  tout sous-ensemble ouvert  $U$  de  $\mathbb{R}^2$  qui contient  $u$ .

**Définition 2.2.5** (fermé): Soit  $F \subset \mathbb{R}^2$ . On dit que  $F$  est un fermé si le complémentaire de  $F$  dans  $\mathbb{R}^2$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^2$ , i.e,  $F$  est un fermé  $\Leftrightarrow F^c \in O_{\text{norm}}$

*Remarque:* L'ensemble de ces sous-ensembles sont notés  $F_{\text{norm}}$ .

**Proposition 2.2.2:**

1. Les sous-ensembles  $\emptyset$  et  $\mathbb{R}^2$  sont des fermés.
2. Soit  $\{H_i\}_{i \in \{1, -, n\}} \subset F_{\text{norm}}$ . Alors leur réunion est un sous-ensemble fermé de  $\mathbb{R}^2$  i.e,

$$\forall \{H_i\}_{i \in I} \subset F_{\text{norm}}, \bigcup_{i \in I} H_i \in F_{\text{norm}}.$$

3. Soit  $\{H_i\}_{i \in I} \subset F_{\text{norm}}$  alors leur intersection est un sous-ensemble de  $\mathbb{R}^2$  i.e,

$$\forall \{H_i\}_{i \in \{1, -, n\}} \subset F_{\text{norm}}, \bigcap_{i \in \{1, -, n\}} H_i \in F_{\text{norm}}.$$

**3. Limites de suites.**

**Définition 3.1** (limite): Soit  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de points de  $\mathbb{R}^2$ . On dit que  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  admet une **limite** si

$$\exists L \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow \|x_n - L\| \leq \varepsilon.$$

Dans ce cas on dit que la suite converge vers  $L$ . Sinon, on dit qu'elle diverge.

**Proposition 3.1:** Soit  $x_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}, n \in \mathbb{N}$  une suite dans  $\mathbb{R}^2$ . Alors  $L = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$  est la limite de  $x_n$  si et seulement si on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = b.$$

**4. Points limites et adhérence d'un sous-ensemble.**

**Définition 4.1** (point isolé): Soit  $A \subset \mathbb{R}^2$  un ensemble,  $a \in A$ . On dit que  $a$  est un point isolé s'il existe un voisinage ouvert  $V_a$  dans  $\mathbb{R}^2$  tel que  $V_a \cap A = \{a\}$ .

**Définition 4.2** (point intérieur): Soit  $A \subset \mathbb{R}^2$  un ensemble,  $a \in A$ . On dit que  $a$  est un point intérieur s'il existe un voisinage ouvert de  $V_a$  dans  $\mathbb{R}^2$  tel que  $V_a \subset A$ .

Le sous-ensemble des points intérieurs de  $A$  est noté  $\text{int}(A)$  et on l'appelle l'intérieur de  $A$ .

$$\text{int}(A) := \{u \in A \mid \exists r > 0, B(u, r) \subset A\}.$$

**Proposition 4.1:** Soit  $A \subset \mathbb{R}^2$  un ensemble. Alors son intérieur est le plus grand sous-ensemble ouvert contenu dans  $A$ .

*Remarque:* L'intérieur d'un ensemble  $A$  est une approximation de  $A$  par un sous-ensemble ouvert.

**Définition 4.3** (point limite): Soit  $A \subset \mathbb{R}^2$  un ensemble,  $x \in \mathbb{R}^2$ . On dit que  $x$  est un point limite de  $A$  s'il existe une suite infinie  $\{a_n\}_n \in \mathbb{N}$  de points deux-à-deux distincts dans  $A$  telle que  $a_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x$ .

**Définition 4.4** (Adhérence): L'ensemble des points limites s'appelle l'adhérence de  $A$  et on la désigne par  $\overline{A}$

$$\overline{A} := \{u \in \mathbb{R}^2 \mid \forall r > 0, B(u, r) \cap A \neq \emptyset\}.$$

**Proposition 4.2:** Soit  $A \subset \mathbb{R}^2$  un ensemble. Alors son adhérence est le plus petit sous-ensemble fermé qui contient  $A$ .

*Remarque:* Tout ouvert  $A \subset \mathbb{R}^2$  est encadré de la manière suivante:  $\text{Int}(A) \subset A \subset \overline{A}$ .

## 5. Limites de fonctions.

**Définition 5.1:** Soit  $U$  un ouvert,  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $a \in \overline{U}$ .

1. On dit que  $f$  admet  $l$  comme limite en  $a$  si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in U, \|x - a\| \leq \eta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon.$$

2. On dit que  $f$  admet  $+\infty$  comme limite en  $a$  si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in U, \|x - a\| \leq \eta \Rightarrow f(x) \geq A.$$

3. On dit que  $f$  admet  $-\infty$  comme limite si  $-f$  admet  $+\infty$  pour limite en  $a$ .

*Exemple:*

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{(x+2y)^3}{x^2+y^2}.$$

On étudie la fonction  $f : U = \{x^2 + y^2 \neq 0\} = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ . On a  $f(x, 0) = \frac{x^3}{x^2} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$  et  $f(0, y) = \frac{(2y)^3}{y^2} \xrightarrow{y \rightarrow 0} 0$ . Montrons que  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x) = 0$ .

Passons aux coordonnées polaires. On note  $x = r \cos(\theta)$ ,  $y = r \sin(\theta)$ . Ainsi,

$$f(x, y) = r^3 \frac{(\cos(\theta) + 2 \sin(\theta))^3}{r^2} = r(\cos(\theta) + 2 \sin(\theta))^3$$

De plus,  $|\cos(\theta) + 2 \sin(\theta)|^3 \leq |\cos \theta| + 2|\sin \theta| \leq 3^3 = 27$

**Proposition 5.1:** Soit  $U$  un ouvert,  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $a \in \overline{U}$ . Si  $f$  admet une limite, alors cette limite est unique.

## 6. Continuité.

**Définition 6.1:** Soit  $U$  un ouvert,  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $a \in \overline{U}$ , et  $x \in U$ . On dit que  $f$  est continue en  $x$  si

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} f(a).$$

**Définition 6.2:** On dit que  $f$  est continue sur  $X$  si  $f$  est continue en tout point de  $X$ .

**Proposition 6.1:** Soit  $U$  un ouvert,  $f, g : U \rightarrow \mathbb{R}$ , des applications continues sur  $U$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

$$|f|, \lambda f, f + g, fg$$

sont continues sur  $X$ . Si  $\forall x \in X, g(x) \neq 0$ , alors  $\frac{f}{g}$  est continue sur  $X$ .

**Corollaire 6.1:** Toute fonction polynomiale est continue sur  $\mathbb{R}^2$ .

**Proposition 6.2:** Soit  $U, V$  deux ouverts,  $f : U \rightarrow V, g : V \rightarrow \mathbb{R}$  des applications continues respectivement sur  $U$  et  $V$ . Alors  $g(f(x))$  est continue sur  $U$ .

**Proposition 6.3:** Soit  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue,  $I \subset \mathbb{R}$  un ouvert (resp. fermé).  $f^{-1}(I) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in U \mid f(x, y) \in I \right\}$  est un sous-ensemble ouvert (resp. fermé).

**Définition 6.3:** Soit  $U$  un ouvert,  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ . Pour une valeur  $c \in \mathbb{R}$ ,  $f^{-1}(c)$  s'appelle l'ensemble de niveau  $c$ .

**Corollaire 6.2:** Soit  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue sur  $U$ . Alors pour tout  $a \in \mathbb{R}$ , l'ensemble de niveau  $a$  est un sous-ensemble fermé dans  $U$ .

## 7. Différentielle.