Chapitre 2:
Intégrales Généralisées

Table des matières

1. Rappel sur les integrales 1

2. Premières définitions. 2

3. Critères fondamentaux. 2

4. Critère de convergence pour le cas f de signe constant. 3

5. Intégrales généralisées absolument convergente. 5

6. Comparaison série-intégrale. 6

7. Produits infinis. 6

1. Rappel sur les integrales

Définition 1.1: Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ et une subdivision $\sigma := \{x_0 < \ldots < x_n\}$ de $[a, b]$.
On dit que f est Riemann intégrable si

$$\inf_{\sigma} \sum_{i=1}^{n} \left((x_i - x_{i-1}) \sup_{[x_{i-1}, x_i]} f \right) = \sup_{\sigma} \sum_{i=1}^{n} \left((x_i - x_{i-1}) \inf_{[x_{i-1}, x_i]} f \right)$$

Théorème 1.1: $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est Riemann intégrable si elle est continue par morceaux i.e il existe une subdivision $\sigma := \{x_0 < \ldots < x_n\}$ de $[a, b]$ tel que f soit continue sur les $]x_{i-1}; x_i[_{i \in [1;n]}$.

$f : [a, b] \to \mathbb{C}$ est Riemann intégrable si Re(f) et Im(f) sont Riemann intégrables. On a alors :

$$\int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x = \int_a^b \mathfrak{R}(f(x)) \, \mathrm{d}x + i \int_a^b \mathfrak{I}(f(x)) \, \mathrm{d}x$$

Proposition 1.1: Soit $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ intégrables, $\lambda \in \mathbb{R}$.

1. $f + \lambda g$ est intégrable et $\int_a^b f + \lambda g = \int_a^b f + \lambda \int_a^b g$.
2. fg est intégrable (voir théorème d'intégration par parties).
3. $f \geq 0 \to \int_a^b f \geq 0$ avec $\int_a^b f = 0 \leftrightarrow \forall x \in [a; b] f(x) = 0$.
4. $f \geq g \to \int_a^b f \geq \int_a^b g$.
5. $|f|$ est intégrable et $\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|$.

Théorème 1.2 (d'intégration par parties): Soit $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ de classe C^1

$$\int_a^b f' g = [fg]_a^b - \int_a^b f g'$$

Théorème 1.3 (changement de variable): Soit I un intervalle, $\varphi : [a, b] \to I$ une fonction de classe C^1 et $f : I \to \mathbb{R}$ continue. On a:

$$\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t) \,\mathrm{d}t = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x) \,\mathrm{d}x$$

avec le changement de variables $x = \varphi(t)$ ou $\mathrm{d}x = \varphi'^{(t)} \,\mathrm{d}t$.

2. Premières définitions.

Définition 2.1:
1. Soit $f : [a, b[\to \mathbb{R}$ continue. On dit que l'intégrale $\int_a^b f(x) \,\mathrm{d}x$ converge si $\int_a^t f(x) \,\mathrm{d}x$ admet une limite finie quand $t \to b^-$.
2. Soit $f :]a, b] \to \mathbb{R}$ continue. On dit que l'intégrale $\int_a^b f(x) \,\mathrm{d}x$ converge si $\int_t^b f(x) \,\mathrm{d}x$ admet une limite finie quand $t \to a^+$.

Définition 2.2: Si $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ continue, on dit que l'intégrale $\int_a^b f(x) \,\mathrm{d}x$ converge s'il existe $c \in]a, b[$ tel que $\int_a^c f(x) \,\mathrm{d}x$ converge et $\int_c^b f(x) \,\mathrm{d}x$ converge.

Remarque: Si il existe $c \in]a, b[$ tel que $\int_a^c f(x) \,\mathrm{d}x$ converge alors pour tout $d \in]a, b[$, $\int_a^d f(x) \,\mathrm{d}x$ converge car $\int_a^c f(x) \,\mathrm{d}x = \int_a^d f(x) \,\mathrm{d}x + \int_d^c f(x) \,\mathrm{d}x$ car $\int_d^c f(x) \,\mathrm{d}x$ converge.

3. Critères fondamentaux.

Théorème 3.1 (de Riemann): Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.
1. $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} \,\mathrm{d}x$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.
2. $\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} \,\mathrm{d}x$ converge si et seulement si $\alpha < 1$.

En particulier, $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} \,\mathrm{d}x$ diverge toujours.

Démonstration:
1. Soit $t > 1$.

$$\int_1^t \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha} = \begin{cases} [\ln(x)]_1^t = \ln(t) \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty \text{ si } \alpha = 1 \\ [\frac{1}{1-\alpha} x^{-\alpha+1}]_1^t = \frac{1}{1-\alpha}[x^{-\alpha+1}]_1^t = \frac{1}{1-\alpha}\left(\frac{1}{t^{\alpha-1}} - 1\right) \text{ si } \alpha \neq 1 \end{cases}$$

Si $\alpha > 1$: $\int_1^t \frac{1}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} -1\frac{1}{1} - \alpha = \frac{1}{\alpha-1} \in \mathbb{R} \Rightarrow \int_1^+ \infty \frac{1}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x$converge.
Si $\alpha < 1$: $\int_1^t \frac{1}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty \Rightarrow \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x$ diverge.

1. $\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x$ par le changement de variable $y = \frac{1}{x}, \mathrm{d}x = -\frac{1}{y^2}\,\mathrm{d}y$, On obtient :

$\int_1^t \frac{1}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x = \int_{\frac{1}{t}}^1 -\frac{y^\alpha}{y^2}\,\mathrm{d}y = \int_{\frac{1}{t}}^1 \frac{1}{y^{2-\alpha}}\,\mathrm{d}y$ converge si et seulement si $2 - \alpha < 1 \Leftrightarrow 1 < \alpha$ $\square$

Corollaire 3.1.1:
1. $\int_a^b \frac{1}{(x-a)^\alpha}\,\mathrm{d}x$ converge si et seulement si $\alpha < 1$.
2. $\int_a^b \frac{1}{(b-x)^\alpha}\,\mathrm{d}x$ converge si et seulement si $\alpha < 1$.

Démonstration:
1. Soit $t \in]a, b[$.
   $\int_t^b \frac{1}{(x-a)^\alpha}\,\mathrm{d}x = \int_{t-a}^{b-a} \frac{1}{y^\alpha}\,\mathrm{d}y$.
2. Pareil.

$\square$

4. Critère de convergence pour le cas f de signe constant.

Théorème 4.1:
$*$ Soit $f : [a, b[\to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que pour tout $x \in [a, b[, f(x) \geq 0$. $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ converge si et seulement si $F : [a, b[\to \mathbb{R}; t \mapsto \int_a^t f(x)\,\mathrm{d}x$ est majorée.
$*$ Soit $f :]a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que pour tout $x \in]a, b], f(x) \geq 0$. $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ converge si et seulement si $F :]a, b] \to \mathbb{R}; t \mapsto \int_t^b f(x)\,\mathrm{d}x$ est majorée.

Démonstration: $*$ La fonction F est dérivanle et $F'(t) = f(t) \geq 0 \Rightarrow F$ est croissante $\Rightarrow$ $\lim_{t\to b^-} F(t)$ existe et $\lim_{t\to b^-} F(t) = \sup_{[a,b]} F(t) = l \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ or $l \in \mathbb{R}$ si et seulement si F est majoréé.

$* \; F(t) = \int_t^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^t f(x)\,\mathrm{d}x$.
On a F dérivable et $F'(t) = -f(t) \leq 0 \Rightarrow F$ est décroissante $\Rightarrow \lim_{t\to a^+} F(t)$ existe et $\lim_{t\to a^+} F(t) = \inf_{[a,b]} F(t) = l \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ or $l \in \mathbb{R}$ si et seulement si F est majoréé. $\square$

Exemple:
1. $F(t) = \int_0^1 \sin^2\left(\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x . f :]0, 1] \to \mathbb{R}; x \mapsto \sin^2\left(\frac{1}{x}\right)$ continue et positive.

De plus, $\forall x \in]0, 1], f(x) \leq 1$ et $F(t) = \int_t^1 \sin^2\left(\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x \leq \int_t^1 1\,\mathrm{d}x = [x]_t^1 = 1 - t \leq 1$. Donc $F(t)$ est bornée $\Rightarrow \int_t^1 \sin^2\left(\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x$ converge.

Théorème 4.2 (Critère de comparaison): Soit $f, g : [a, b[\to \mathbb{R}$ continues telles que pour tout $t \in [a, b[, f(t) \leq g(t)$. Alors:

1. $\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ converge $\Rightarrow \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.
2. $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge $\Rightarrow \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ diverge.

Démonstration: Soit $F : [a, b[\to \mathbb{R}; t \mapsto \int_a^t f(x)\,\mathrm{d}x$ et $G : [a, b[\to \mathbb{R}; t \mapsto \int_a^t g(x)\,\mathrm{d}x$
$f \leq g \underset{\substack{\text{par monotonie}\\ \text{de l'intégrale}}}{\Longrightarrow} \int_a^t f(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_a^t g(x)\,\mathrm{d}x \Longrightarrow F(x) \leq G(x)$.

1. Si $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$ converge G est bornée donc F est bornée donc $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.
2. Si $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$ diverge F n'est pas majorée i.e $\forall M \in \mathbb{R}, \exists x \in [a, b[$ tq $F(x) > M$. De plus, $G(x) \geq F(x) > M$ donc G n'est pas majorée donc d'après le théorème $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$ diverge.

$\square$

Exemple:
1. $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(x)^2}{x^2}\,\mathrm{d}x$.
   $f : [1, +\infty[\to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{\sin(x)^2}{x^2}$ est continue et positive et $\forall x \in [1, +\infty[, f(x) \leq \frac{1}{x^2}$.

D'après le théorème de Riemann, $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$ converge donc par le critère de comparaison, $\int_1^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ converge.

Théorème 4.3 (critère des équivalents): Soit $f, g : [a, b[\to \mathbb{R}$ continues et positives.
$f \underset{b}{\sim} g \Rightarrow \left(\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \text{ et } \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right)$ sont de même nature.

Démonstration: $f \underset{b}{\sim} g \Rightarrow \exists \delta > 0, \exists \lambda :]b - \delta; b[\to \mathbb{R}$ telle que $\lim_{x \to b^-} \lambda(x) = 0$ tels que $\forall x \in]b - \delta; b[, f(x) - g(x) + \lambda(x)g(x)$.
Posons $\varepsilon = \frac{1}{2}$.
$\exists \eta > 0$ tel que $b - \eta < x < b \Rightarrow |\lambda(x)| < \frac{1}{2} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} < \lambda(x) < \frac{1}{2}$ car $\lim_{x \to b^-} \lambda(x) = 0$.
On pose $\alpha = \max\{b - \delta, b - \eta.\}$ Ainsi,$\forall x \in]\alpha, b[\cap]\alpha, b[$:

$$
\begin{aligned}
& -\frac{1}{2}g(x) \leq \lambda(x)g(x) \leq \frac{1}{2}g(x) \text{ car } g(x) > 0 \\
\Leftrightarrow & -\frac{1}{2}g(x) \leq f(x) - g(x) \leq \frac{1}{2}g(x) \text{ car } f \underset{b}{\sim} g \\
\Rightarrow & \frac{1}{2}g(x) \leq f(x) \leq \frac{3}{2}g(x).
\end{aligned}
$$

Ainsi, par le théorème des comparaisons, si $\int_\alpha^b f(x)\,\mathrm{d}x$ converge, alors $\int_\alpha^b \frac{1}{2}g(x)\,\mathrm{d}x$ converge donc $\int_\alpha^b g(x)\,\mathrm{d}x$ converge.
De même, si $\int_\alpha^b \frac{3}{2}g(x)\,\mathrm{d}x$ converge, alors $\int_\alpha^b g(x)\,\mathrm{d}x$ converge donc $\int_\alpha^b f(x)\,\mathrm{d}x$ converge.
Enfin comme f et g sont bien définit sur $[a, \alpha]$, il n'y a pas de problème d'intégration. $\square$

Théorème 4.4 (de négligeabilité): Soit $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ continues et positives.
Si $f = o_b(g)$ alors:

1. $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$ converge $\Rightarrow \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ converge.
2. $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ diverge $\Rightarrow \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ diverge.

Démonstration: Soit $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ continues et positives. Soit $\lambda : [c, b[\to \mathbb{R}$ telle que $\lim\limits_{t\to b^-} \lambda(t) = 0$. On a $f = \lambda g$. Posons $\varepsilon = \frac{1}{2}$.

$$\exists c' > c \text{ tq } \forall x \in [c', b[, |\lambda(x)| < \frac{1}{2}$$

.

$$f(x) = \lambda(x)g(x) < \frac{1}{2}g(x).$$

Ainsi, par le théorème des comparaisons, si $\int_{c'}^b g(x)\,\mathrm{d}x$ converge, alors $\int_{c'}^b f(x)\,\mathrm{d}x$ converge.
Et si, $\int_{c'}^b f(x)\,\mathrm{d}x$ diverge, alors $\int_\alpha^b g(x)\,\mathrm{d}x$ diverge. □

Théorème 4.5 (de Bertrand): Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

1. $\int_b^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha \ln(x)^\beta}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$ ou ($\alpha = 1$ et $\beta > 1$).
2. $\int_a^{b<1} \frac{1}{x^\alpha |\ln(x)|^\beta}$ converge si et seulement si $\alpha < 1$ ou ($\alpha = 1$ et $\beta > 1$).

Démonstration: A FAIRE !!!! □

5. Intégrales généralisées absolument convergente.

Définition 5.1: On dit que l'intégrale $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ est absolument convergente si $\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$ converge. Si $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ converge mais pas absolument, on dit qu'elle est semi-convergente.

Théorème 5.1: Si $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ est absolument convergente alors $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ est convergente.

Démonstration: Soit $f : [a, b[\to \mathbb{R}$ continue.
On définit $f_+(x) = \max\{0, f(x)\} = \frac{f(x)+|f(x)|}{2}$ et $f_-(x) = \min\{0, f(x)\} = \frac{|f(x)|-f(x)}{2}$
On a: $*\ f_+, f_-$ continue sur $[a, b]$.
$*\ f_+ \geq 0, f_- \geq 0.$
$*\ f = f_+ - f_-.$
$*\ |f| = f_+ + f_- \Rightarrow f_+ \leq |f|$ et $f_- \leq |f|.$
On pose $F : [a, b[\to \mathbb{R}; t \mapsto \int_a^t f(x)\,\mathrm{d}x$.

Pour chaque $t \in [a, b[$: $\int_a^t f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^t f_+(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^t f_-(x)\,\mathrm{d}x$.
Comme $0 \le f_+, f_- \le |f|$ et $\int_a^t |f(x)|\,\mathrm{d}x$ converge (Hypothèse inititiale),
$\int_a^b f_+(x)\,\mathrm{d}x$ et $\int_a^b f_-(x)\,\mathrm{d}x$ convergent. Ainsi $\int_a^b f_+(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b f_-\,\mathrm{d}x$ converge □

Exemple:
1. $\int_0^1 \sin\left(\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x$

$f :]0, 1] \to \mathbb{R}; x \mapsto \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ est continue. De plus, $\forall x \in]0, 1], |f(x)| \le 1$ et $\int_0^1 1\,\mathrm{d}x = 1$ Par le critère de comparaison, $\int_0^1 |f(x)|\,\mathrm{d}x$ converge $\Rightarrow \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ converge.

Théorème 5.2: Soit $\varphi :]\alpha, \beta[\to]a, b[$ de classe C^1 bijective et $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ continue.
Les intègrales $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\int_\alpha^\beta f(\varphi(x))\varphi'(x)\,\mathrm{d}x$ ont la même nature.

Démonstration: A FAIRE !!!!! □

6. Comparaison série-intégrale.

Théorème 6.1: Soit $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue, positive et décroissante.
$\int_a^+ \infty f(x)\,\mathrm{d}x$ et $\sum_{n=a}^{+\infty} f(n)$ ont la même nature.
Si elles convergent, :

$$\int_{n+1}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t \le R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f(k) \le \int_n^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

7. Produits infinis.

Proposition 7.1: Si $\Pi(1 + a_n)$ converge alors $1 + a_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1 \Leftrightarrow a_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Théorème 7.1: Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels positifs. Le porduit infini $\Pi(1 + a_n)$ converge si et seulement si $\sum a_n$ converge.

Démonstration: VOIR POLY !!!!! □

Exemple:
1. On a vu que $\Pi\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ converge $\Rightarrow \sum\left(\frac{1}{n}\right)$ diverge.
2. Pour $\alpha > 1$: $\sum\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$ converge $\Rightarrow \Pi\left(1 + \frac{1}{n^\alpha}\right)$ converge.
3. Soit $x \in [0, 1[$, $\sum(x^n)$ converge $\Rightarrow \Pi(1 + x^n)$ converge.

Théorème 7.2: Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels positifs. $\Pi(1 - a_n)$ converge si et seulement si $\sum(a_n)$ converge si et seulement si $\Pi(1 + a_n)$ converge.

Démonstration: Si $\lim_{n \to +\infty} a_n \neq 0$, $\sum(a_n)$ diverge et $\Pi(a_n + 1)$ diverge.
Si $\lim_{n \to +\infty} a_n = 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N, a_n \leq \frac{1}{2}$.

VOIR POLY!!!!! (On voit rien avec son stylo vert nul). $\square$

Exemple: $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge $\Rightarrow \Pi\left(1 - \frac{1}{n^\alpha}\right)$ converge si $\alpha > 1$.

Remarque: Sans l'hypothèse de positivité, le théorème est faux.

Définition 7.1 (convergence absolue): Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle. Le produit infini $\Pi(1 + a_k)$ est dit absolument convergent si $\Pi(1 + |a_k|)$ converge.

Théorème 7.3: Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle. Si le produit infini $\Pi(1 + a_k)$ est absolument convergent alors il est convergent.

Théorème 7.4: Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle telle que pour tout $n \in \mathbb{N}, a_n + 1 \geq 0$.
$\Pi(1 + a_n)$ converge si et seulement si $\sum \ln(1 + a_n)$ converge. De plus, une convergence est absolue si et seulement si l'autre l'est.

Remarque: Il existe une variante du théorème avec a_n une suite complexe.

Théorème 7.5: Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de nombres réels telle que $\sum a_n^2$ converge. On a $\sum a_n$ et $\Pi(1 + a_n)$ sont de même nature.