

# Calcul intégral et applications

## Table des matières

<b>1. Ensembles et applications.</b>	<b>1</b>
<b>2. Espaces mesurables.</b>	<b>1</b>
2.1. Tribus. . . . .	1
2.2. Rappels sur la topologie. . . . .	2
2.3. Applications mesurables. . . . .	3
<b>3. Fonctions indicatrices.</b>	<b>6</b>
<b>4. Mesure.</b>	<b>9</b>
4.1. Mesure de Lebesgue. . . . .	10
4.2. Ensemble négligeable. . . . .	11
<b>5. Intégrale de Lebesgue.</b>	<b>11</b>
5.1. Intégrale des fonctions étagées positives. . . . .	11
5.2. Intégrales de fonctions mesurables positives. . . . .	13
5.3. Mesure à densité. . . . .	16
5.4. Intégrales de fonctions mesurables quelconques. . . . .	16

## Chapitre 1: Espaces et applications mesurables.

### 1. Ensembles et applications.

**Proposition 1.1.** Soit  $E$  un ensemble et  $(A_i)_{i \in I}$  une collection quelconque de sous-ensembles de  $E$ .

- (1)  $E \setminus \bigcap_{i \in I} A_i = \bigcup_{i \in I} E \setminus A_i$ .  
(2)  $E \setminus \bigcup_{i \in I} A_i = \bigcap_{i \in I} E \setminus A_i$

**Définition 1.2.** Soit  $E$  et  $F$  deux ensembles quelconques et soit  $f : E \rightarrow F$  une application quelconque. L'image par  $f$  d'un sous-ensemble  $A \subset E$  est le sous ensemble de  $F$  noté  $f(A)$  défini par :  $f(A) = \{y \in F, \exists x \in A, y = f(x)\} = \{f(x), x \in A\}$ .

L'image réciproque d'un sous-ensemble  $B \subset F$  est le sous-ensemble noté  $f^{-1}(B)$  de  $E$  et défini par  $f^{-1}(B) = \{x \in E, f(x) \in B\}$ .

### 2. Espaces mesurables.

#### 2.1. Tribus.

**Définition 2.1** (Tribu). Soit  $E$  un ensemble quelconque,  $\mathcal{P}(E)$  désigne l'ensemble des parties de  $E$ . On appelle *tribu* sur  $E$  (ou  $\sigma$ -algèbre) une famille de parties de  $E$ ,  $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(E)$  telle que :

- (1)  $\emptyset \in \mathcal{A}$ ,  
(2) Si  $A \in \mathcal{A}$  alors  $A^c \in \mathcal{A}$ .  
(3) Si  $(A_n)_{n \in N}$  est une suite d'éléments de  $\mathcal{A}$ , alors  $\bigcup_{n \geq 1} A_n \in \mathcal{A}$ .

#### Remarques 2.2.

- (1) Pour toute famille  $(B_i)_{i \in I}$  de  $\mathcal{P}(E)$ ,

$$\left( \bigcup_{i \in I} B_i \right)^c = \bigcap_{i \in I} (B_i)^c \text{ et } \left( \bigcap_{i \in I} B_i \right)^c = \bigcup_{i \in I} (B_i)^c$$

- (2) On peut remplacer le point (3) de la définition par : Si  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , est une suite de  $\mathcal{A}$  alors  $\bigcap_{n \in I} A_n \in \mathcal{A}$ .
- (3) De même, par le point (2), on peut remplacer le premier point par  $E \in \mathcal{A}$ .

**Exemples 2.3.**

1.  $\mathcal{P}(E)$  est une tribu sur  $E$ . C'est la tribu *fine* sur  $E$ .
2.  $\{\emptyset, E\}$  est une tribu sur  $E$ . C'est la tribu *grossière* sur  $E$ .
3. Si  $A \subset E$  est un sous-ensemble de  $E$ ,  $\{\emptyset, A, A^c, E\}$  est une tribu sur  $E$ .
4.  $\{A \in \mathcal{P}(E) \mid A \text{ ou } A^c \text{ est au plus dénombrable}\}$  est une tribu sur  $E$ .

**Définition 2.4** (Espace mesurable). Soit  $E$  un ensemble et  $\mathcal{A}$  une tribu sur  $E$ . Le couple  $(E, \mathcal{A})$  est appelé un *espace mesurable*.

**Définition 2.5** (Ensemble mesurable). Soit  $E$  un ensemble et  $\mathcal{A}$  une tribu sur  $E$ . Les éléments d'une tribu  $\mathcal{A}$  sont appelés les *ensembles mesurables* ou les parties mesurables de  $(E, \mathcal{A})$ .

**Proposition 2.6.** Une intersection quelconque de tribus sur  $E$  est une tribu sur  $E$ .

*Démonstration.* Soit  $(\mathcal{A}_i)_{i \in I}$  une famille de tribus sur  $E$ . Posons  $\mathcal{A} = \bigcap_{i \in I} \mathcal{A}_i$ .

- (1)  $\emptyset \in \mathcal{A}$  car  $\emptyset \in (\mathcal{A}_i)_{i \in I}$ .
- (2) Soit  $A \in \mathcal{A}$  alors  $A \in (\mathcal{A}_i)_{i \in I}$  donc  $A^c \in (\mathcal{A}_i)_{i \in I}$  car les  $\mathcal{A}_i$  sont des tribus donc  $A^c \in \bigcap_{i \in I} \mathcal{A}_i$ .
- (3) Soit  $(A_n)_{n \geq 1}$  une suite d'éléments de  $\mathcal{A}$ . Alors  $(A_n)_{n \geq 1} \in (\mathcal{A}_i)_{i \in I}$  donc  $\bigcup_{n \geq 1} A_n \in \mathcal{A}_{i \in I}$ . Ainsi,  $\bigcup_{n \geq 1} A_n \in \bigcap_{i \in I} \mathcal{A}_i$ .

□

**Corollaire 2.7.** Soit  $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(E)$  une famille de parties de  $E$ . L'intersection de toutes les tribus sur  $E$  qui contiennent  $\mathcal{C}$  est une tribu sur  $E$ .

*Démonstration.* Application directe de la proposition précédente. □

**Définition 2.8** (Engendrée). On appelle tribu *engendrée* par  $\mathcal{C}$  la tribu notée par

$$\sigma(\mathcal{C}) := \{\bigcap \mathcal{A} \mid \mathcal{A} \text{ soit tribu sur } E \text{ et } \mathcal{C} \subset \mathcal{A}\}.$$

**Remarque 2.9.**  $\sigma(\mathcal{C})$  est la plus petite des tribus sur  $E$  qui contiennent  $\mathcal{C}$ , i.e si  $\mathcal{A}$  est une tribu qui contient  $\mathcal{C}$  alors  $\sigma(\mathcal{C}) \subset \mathcal{A}$

**Exemples 2.10.**

1. Soit  $A \subset E$ . Alors  $(\sigma(\{A\})) = \{\emptyset, E, A, A^c\}$ .
2. La tribu engendrée par les singlentons sur  $E$  est égale à la tribu engendrée par les ensembles dénombrables et on a  $\sigma(\{x\} \mid x \in E) = \sigma(A \in \mathcal{P}(E) \mid A \text{ est au plus dénombrable}) = \{A \in \mathcal{P}(E) \mid A \text{ ou } A^c \text{ est au plus dénombrable}\}$ .

## 2.2. Rappels sur la topologie.

**Définition 2.11** (Topologie). Soit  $E$  un ensemble quelconque,  $O \subset \mathcal{P}(E)$  une famille de parties de  $E$ . On dit que  $O$  est une *topologie* sur  $E$  si elle vérifie :

- (1)  $\emptyset \in O$  et  $E \in O$ .
- (2) Si  $(A_i)_{i \in I}$  est une famille quelconque de  $O$  alors  $\bigcup_{i \in I} A_i \in O$ .
- (3) Pour toute famille finie d'éléments de  $O$ ,  $(A_1, \dots, A_n)$ ,  $\bigcap_{k \in \{1, \dots, n\}} A_k \in O$ .

Les éléments d'une topologie sont appelés les ouverts.

**Proposition 2.12.** Une intersection quelconque de topologies est une topologie.

**Corollaire 2.13.** Soit  $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(E)$  une famille de parties de  $E$ . L'intersection de toutes les topologies sur  $E$  qui contiennent  $\mathcal{C}$  est une topologie sur  $E$ .

**Définition 2.14.** Un ensemble  $E$  muni d'une topologie  $\mathcal{O}$  est appelé un *espace topologique*.

**Définition 2.15** (Tribu borélienne). Soit  $(E, \mathcal{O})$  un espace topologique. On appelle tribu borélienne sur  $E$  notée  $\mathcal{B}(E)$  la tribu engendrée par la topologie  $\mathcal{O}$  ;  $\mathcal{B}(E) = \sigma(\mathcal{O})$ .

**Remarque 2.16.** Dans la suite de ce cours nous ne considérons que les tribus boréliennes sur  $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$  ou des sous-ensembles de  $\overline{\mathbb{R}}$  et sur  $\mathbb{R}^d$  pour  $d \geq 1$ .

**Notation 2.17.** On note  $\mathcal{B}(\mathbb{R})$  la tribu borélienne sur  $\mathbb{R}$  engendrée par la topologie usuelle (euclidienne).

**Proposition 2.18.** La tribu borélienne sur  $\mathbb{R}$  est définie par :

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma(\{]a, b[, a < b \in \mathbb{R}\}) = \sigma(\{]-\infty, a[, a \in \mathbb{R}\}) = \dots$$

*Démonstration.* Soit  $\mathcal{O}(\mathbb{R})$  la topologie sur  $\mathbb{R}$ , i.e l'ensemble des ouverts de  $\mathbb{R}$ . Par définition,  $\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma(\mathcal{O}(\mathbb{R}))$ . On a  $a, b \in \mathbb{Q}, a < b, ]a, b[ \in \mathcal{O}(\mathbb{R})$  et donc  $\sigma(\{]a, b[, a, b \in \mathbb{Q}\}) \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma(\mathcal{O}(\mathbb{R}))$ .

Réciproquement, soit  $A \in \mathcal{O}(\mathbb{R})$ . Rappelons que  $A = \bigcup_{]a, b[ \subset A, (a, b) \in \mathbb{Q}^2} ]a, b[$ .

Cela entraîne que  $A \in \sigma(\{]a, b[, a, b \in \mathbb{R}\})$ . On conclut que

$$\mathcal{O}(\mathbb{R}) \subset \sigma(\{]a, b[, a, b \in \mathbb{Q}\}) \Rightarrow \sigma(\mathcal{O}(\mathbb{R})) \subset \sigma(\{]a, b[, a, b \in \mathbb{Q}\}).$$

Montrons que  $\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma(\{]-\infty, a[, a \in \mathbb{Q}\})$ . Soit  $a \in \mathbb{Q}$  de telle sorte que

$$]-\infty, a[ \subset \mathcal{O}(\mathbb{R}) \Rightarrow ]-\infty, a[ \in \sigma(\mathcal{O}(\mathbb{R})) = \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

On fait de même avec  $]-\infty, a[, [a, +\infty[ \dots$

□

**Proposition 2.19.** La tribu borélienne sur  $\mathbb{R}^d$  est engendrée par l'ensemble des pavés ouverts dont les extrémités sont rationnelles  $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d) = \sigma(\{]a_1, b_1[ \times \dots \times ]a_d, b_d[, a_i, b_i \in \mathbb{Q}\})$ .

**Définition 2.20.** On définit sur  $\overline{\mathbb{R}}$  la tribu borélienne par

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma(\{]-\infty, a[, a \in \mathbb{R}\} \cup \{]a, +\infty], a \in \mathbb{R}\})$$

**Définition 2.21** (Tribu trace). Soit  $(E, \mathcal{A})$  un espace mesurable,  $B \subset E$  un sous-ensemble de  $E$ . On appelle *tribu trace* de  $\mathcal{A}$  sur  $B$  la tribu  $\mathcal{A}_B := \{A \cap B, A \in \mathcal{A}\}$

**Proposition 2.22.**  $\mathcal{A}_B$  est une tribu sur  $B$ .

*Démonstration.*  $\emptyset \in \mathcal{A}_B, C = A \cap B \in \mathcal{A}_B$ . Alors  $B \setminus C = B \cap E \setminus A$ .

$b_i(c_n)$  est une suite de  $\mathcal{A}_B$ , alors  $\cup C_n = \cup A_n \cap B = (\cup A_n) \cap B \in \mathcal{A}_B$ .

□

**Exemple 2.23.** Par exemple  $\mathcal{B}(\mathbb{R})$  est la tribu trace de  $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$  sur  $\mathbb{R}$ . Soit  $\overline{\mathbb{R}}_+ = \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\} = [0, +\infty]$ . On définit la tribu  $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}_+)$  comme la tribu trace de  $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$  sur  $\overline{\mathbb{R}}_+$ . On étendra la multiplication sur  $\overline{\mathbb{R}}_+$  en posant :  $\forall x \in ]0, +\infty[, x \cdot +\infty = +\infty \cdot x = +\infty$  et  $0 \cdot +\infty = +\infty \cdot 0 = 0$ .

## 2.3. Applications mesurables.

**Remarques 2.24.**

- (1) Soit  $f : E \rightarrow F$  une application,  $C \subset F$ . L'image réciproque de  $C$  par  $f$  est défini par  $f^{-1}(C) = \{x \in E, f(x) \in C\}$ .
- (2)  $f^{-1}(\bigcup_{i \in I} C_i) = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(C_i)$  et  $f^{-1}(\bigcap_{i \in I} C_i) = \bigcap_{i \in I} f^{-1}(C_i)$ .

**Définition 2.25** (Image réciproque). Soit  $E$  et  $F$  deux ensembles,  $f : E \rightarrow F$  une application. L'image réciproque d'une famille de parties  $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(F)$  par  $f$  comme :  $f^{-1}(\mathcal{C}) = \{f^{-1}(c), c \in \mathcal{C}\}$ .

**Proposition 2.26.** Soit  $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(F)$  une tribu sur  $F$ . Alors  $f^{-1}(\mathcal{B})$  est une tribu sur  $E$ .

*Démonstration.*

- (1)  $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset \in f^{-1}(\mathcal{B})$ .
- (2) Soit  $B \in \mathcal{B}$ .  $f^{-1}(F \setminus B) = E \setminus f^{-1}(B)$ . Or  $f^{-1}(B) \in f^{-1}(\mathcal{B})$  et  $f^{-1}(F \setminus B) \in f^{-1}(\mathcal{B})$  donc  $E \setminus f^{-1}(B) \in f^{-1}(\mathcal{B})$ .
- (3) Soit  $(A_n)_{n \geq 1}$  une suite de  $f^{-1}(\mathcal{B})$ ,  $(B_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{B}$ . Alors  $f^{-1}(B_n) = A_n$  et  $\cup f^{-1}(\cup B_n) \in f^{-1}(\mathcal{B})$ .

□

**Proposition 2.27.** Soit  $f : E \rightarrow F$  une application quelconque et  $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(F)$  une famille de parties de  $F$ .

$$\sigma(f^{-1}(\mathcal{C})) = f^{-1}(\sigma(\mathcal{C})).$$

**Définition 2.28** (Appl mesurable). Soit  $(E, \mathcal{A}), (F, \mathcal{B})$  deux espaces mesurables. Une application  $f : E \rightarrow F$  est dite  $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ -mesurable si  $f^{-1}(\mathcal{B}) \subset \mathcal{A}$ .

**Remarque 2.29.** Cela revient à dire  $\forall B \in \mathcal{B}, f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ .

**Notation 2.30.**

- (1)  $f : (E, \mathcal{A}) \rightarrow (F, \mathcal{B})$  signifie que  $f$  est  $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ -mesurable.
- (2) S'il n'y a pas de confusion possible, on pourra dire que  $f$  est mesurable.

**Exemple 2.31.** Soit  $f : (E, \mathcal{A}) \rightarrow [0, 1]$ . Par défaut,  $[0, 1]$  muni de la tribu borélienne sur  $[0, 1]$ . Une application mesurable à valeurs dans (une partie de)  $\overline{\mathbb{R}}$  sera toujours appelée une fonction borélienne.

**Proposition 2.32.** Soit  $(E, \mathcal{A}), (F, \mathcal{B})$  des espaces mesurables. Soit  $\mathcal{C} \subset \mathcal{B}$  tel que  $\mathcal{B} = \sigma(\mathcal{C})$ . Alors  $f$  est  $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ -mesurable si et seulement si  $f^{-1}(\mathcal{C}) \subset \mathcal{A}$ .

*Démonstration.* Remarquons que  $f^{-1}(\mathcal{C}) \subset f^{-1}(\mathcal{B})$  car  $\mathcal{C} \subset \mathcal{B}$ . Par conséquent si  $f$  est mesurable,  $f^{-1}(\mathcal{C}) \subset \mathcal{A}$ .

Supposons maintenant que  $f^{-1}(\mathcal{C}) \subset \mathcal{A}$ . Par la Proposition 2.27,  $\sigma(f^{-1}(\mathcal{C})) = f^{-1}(\sigma(\mathcal{C})) = f^{-1}(\mathcal{B})$  donc  $f^{-1}(\mathcal{B}) \subset \mathcal{A}$ . Donc  $f$  est mesurable. □

**Corollaire 2.33.** Toute fonction monotone  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est mesurable (borélienne).

*Démonstration.* En effet, l'image réciproque d'un intervalle par une fonction monotone est une intervalle. Puisque  $\mathcal{B}(\mathbb{R})$  est engendré par les intervalles, ce corollaire se déduit de la proposition ci dessus avec  $\mathcal{C} = \{\text{intervalles de } \mathbb{R}\}, \mathcal{A} = \mathcal{B} = \mathbb{R}$ . □

**Notation 2.34.** Soit  $f : (E, \mathcal{A}) \rightarrow \mathbb{R}$ .

- (1) Pour tout  $a \in \mathbb{R}$ , on note  $\{f < a\} := f^{-1}(]-\infty, a[) = \{x \in E, f(x) < a\}$ ;
- (2) Pour tout  $a \in \mathbb{R}$ , on note  $\{f \leq a\} = f^{-1}[\{-\infty, a\}]$
- (3) ...
- (4) Pour tout  $a, b \in \mathbb{R}_+, a < b$  on note  $\{a < f < b\} := f^{-1}(]a, b[)$
- (5) ...

**Définition 2.35** (Continue). Soit  $(E, \mathcal{O}_E), (F, \mathcal{O}_F)$  deux espaces topologiques,  $f : E \rightarrow F$ . On dit que  $f$  est *continue* si pour tout  $\mathcal{B} \in \mathcal{O}_F$ ,  $f^{-1}(\mathcal{B}) \in \mathcal{O}_E$ .

**Exercice 1.** Vérifier que cette définition est bonne pour les  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .

**Proposition 2.36.** Soit  $(E, \mathcal{O}_E), (F, \mathcal{O}_F)$  deux espaces topologiques munis respectivement de leur tribu borélienne  $\mathcal{B}(F)$  et  $\mathcal{B}(E)$ . Alors toute application  $f : E \rightarrow F$  continue est  $(\mathcal{B}(E), \mathcal{B}(F))$ -mesurable.

*Démonstration.* Soit  $f : E \rightarrow F$  continue. Alors,  $f^{-1}(\mathcal{O}_F) \subset \mathcal{O}_E$  donc  $\sigma(f^{-1}(\mathcal{O}_F)) \subset \sigma(\mathcal{O}_E)$ . Soit  $f^{-1}(\sigma(\mathcal{O}_F)) \subset \sigma(\mathcal{O}_E)$  donc  $f^{-1}(\mathcal{B}(F)) \subset \mathcal{B}(E)$ . Ainsi,  $f$  est bien  $(\mathcal{B}(E), \mathcal{B}(F))$ -mesurable.  $\square$

**Remarque 2.37.** On retiendra que si  $I$  et  $J$  sont deux intervalles de  $\mathbb{R}$  et  $f : I \rightarrow J$  une application continue alors  $f$  est borélienne.

**Proposition 2.38.** Soit  $(E, \mathcal{A}), (F, \mathcal{B}), (G, \mathcal{C})$  trois espaces topologiques mesurables,  $f : E \rightarrow F, g : F \rightarrow G$  deux applications mesurables. Alors  $g \circ f : E \rightarrow G$  est mesurable.

*Démonstration.* Remarquons d'abord que pour toute partie  $C \subset G$ ,  $(g \circ f)^{-1}(P) = (f^{-1} \circ g^{-1})(P)$ . Ainsi,  $(g \circ f)^{-1}(\mathcal{C}) = f^{-1}(g^{-1}(\mathcal{C}))$ . De plus,  $g^{-1}(\mathcal{C}) \subset \mathcal{B}$  Ainsi, on a  $f^{-1}(g^{-1}(\mathcal{C})) \subset f^{-1}(\mathcal{B}) \subset \mathcal{A}$ , D'où la mesurabilité de  $f \circ g$ .  $\square$

**Exemples 2.39.**

1. Si  $f : (E, \mathcal{A}) \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction borélienne alors  $|f| : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction borélienne.
2. Si  $f : (E, \mathcal{A}) \rightarrow \mathbb{R} \setminus 0$  est borélienne, alors  $\frac{1}{f}$  l'est aussi.

**Proposition 2.40.** Soit  $f = (f_1, f_2) : (E, \mathcal{A}) \rightarrow \mathbb{R}^2$ .  $f$  est  $(\mathcal{A}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^2))$ -mesurable si et seulement si  $f_1 : (E, \mathcal{A}) \rightarrow \mathbb{R}$  et  $f_2 : (E, \mathcal{A}) \rightarrow \mathbb{R}$  sont mesurables.

*Démonstration.*

$\Rightarrow$  Soit  $(\pi_1, \pi_2) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  les projections canoniques  $\pi_i(x_1, x_2) = x_i$ .  $\pi_i$  sont continues donc  $(\mathcal{B}(\mathbb{R}^2), \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ -mesurables. De plus,  $f_1 = \pi_1 \circ f$  et  $f_2 = \pi_2 \circ f$ . Par conséquent, si  $f$  est mesurable alors  $f_1$  et  $f_2$  le sont.

$\Leftarrow$  Supposons que  $f_1$  et  $f_2$  sont mesurables. Soit  $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$  une partie de  $\mathbb{R}^2$  alors on vérifie que  $f^{-1}([a_1, b_1] \times [a_2, b_2]) = f_1^{-1}([a_1, b_1]) \cap f_2^{-1}([a_2, b_2]) \in \mathcal{A}$ . On a montré que l'image réciproque de tout pavé de  $\mathbb{R}^2$  par  $f$  est dans  $\mathcal{A}$ .

Comme  $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$  est engendré par les pavés, on a bien  $f^{-1}(\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)) \subset \mathcal{A}$ .  $\square$

**Proposition 2.41.** Soit  $f : (E, \mathcal{A}) \rightarrow \mathbb{R}, g : (E, \mathcal{A}) \rightarrow \mathbb{R}$  deux fonctions boréliennes,  $\lambda \in \mathbb{R}$

- (1)  $\lambda f + g$  est borélienne pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,
- (2)  $fg$  est borélienne.

*Démonstration.*

- (1) Posons  $\varphi(x) = (f(x), g(x)), \psi(s, t) = \alpha s + t$ .

On écrit  $\lambda f + g = \psi \circ \varphi$ . Alors puisque  $f$  et  $g$  sont boréliennes,  $\varphi(f, g)$  est borélienne par la Proposition 2.40. De plus,  $\psi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction continue donc borélienne. Ainsi en appliquant Proposition 2.38, on obtient bien que  $\lambda f + g$  est borélienne.

- (1) On raisonne ici de la même manière en posant  $\psi(s, t) = st$  une fonction continue.

$\square$

**Remarque 2.42.** Le point (1) se généralise à toute combinaison linéaire finie de fonctions boréliennes.

### 3. Fonctions indicatrices.

**Proposition 3.1.** Soit  $(E, \mathcal{A})$  un espace mesurable et  $A \subset E$ . Alors l'application  $\mathbb{1}_A : (E, \mathcal{A}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$  est mesurable si et seulement si  $A \in \mathcal{A}$ .

*Démonstration.*  $\mathbb{1}_A : E \rightarrow \{0, 1\} \subset \mathbb{R}$ . Remarquons d'abord que si  $B \subset \mathbb{R}$  alors

$$\mathbb{1}_A^{-1}(B) = \begin{cases} \emptyset & \text{si } 0 \notin B \wedge 1 \notin B \\ E & \text{si } 0 \in B \wedge 1 \in B \\ A & \text{si } 1 \in B \wedge 0 \notin B \\ A^c & \text{si } 1 \notin B \wedge 0 \in B \end{cases}.$$

Supposons  $\mathbb{1}_A$  mesurable alors puisque  $\{1\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ ,  $\mathbb{1}_A^{-1}(\{1\}) = A \in \mathcal{A}$ .

Supposons que  $A \in \mathcal{A}$  alors pour tout  $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ ,  $\mathbb{1}_A^{-1}(B) = \emptyset$  ou  $E$  ou  $A$  ou  $A^c \in \mathcal{A}$  D'où  $\mathbb{1}_A$  mesurable.

□

**Définition 3.2** (Fonction étagée). Soit  $(E, \mathcal{A})$  un espace mesurable,  $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ ,  $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}$ . On appelle *fonction étagée* toute application  $f : (E, \mathcal{A}) \rightarrow \mathbb{R}$  telle que

$$f = \sum_{k=1}^n \alpha_k \mathbb{1}_{A_k}.$$

**Proposition 3.3.** Les fonctions étagées sont mesurables.

*Démonstration.* Application des propositions précédentes □

**Proposition 3.4.** Une fonction étagée est une fonction mesurable de  $(E, \mathcal{A})$  dans  $\mathbb{R}$  qui prend un nombre fini de valeurs.

*Démonstration.* Soit  $f : (E, \mathcal{A}) \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction borélienne qui prend les valeurs  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  deux à deux distinctes. Alors on peut écrire  $f = \sum_{k=1}^n \alpha_k \mathbb{1}_{\{f=\alpha_k\}}$ . Soit  $x$  tel que  $f(x) = \alpha_i$  alors  $\mathbb{1}_{\{f=\alpha_k\}}(x) = 1$  si  $k = i$  et 0 si  $k \neq i$ . □

**Remarque 3.5.** L'écriture  $f = \sum_{k=1}^n \alpha_k \mathbb{1}_{\{f=\alpha_k\}}$  est l'écriture canonique des fonctions étagées. En effet, une fonction étagée peut s'écrire sous la forme  $\sum \alpha_i A_i$  de plusieurs manières si les  $(A_i)$  ne constituent pas une partition de  $E$ .

**Exemple 3.6.**  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ;  $x \mapsto 2\mathbb{1}_{[0,1]} + \mathbb{1}_{]1,2]}$ . Alors  $f$  admet aussi l'écriture  $f(x) = 2\mathbb{1}_{[-1,1]} + \mathbb{1}_{]1,2]} - 2\mathbb{1}_{[-1,0]}$

**Proposition 3.7.** Une application  $\delta : (E, \mathcal{A}) \rightarrow (\mathbb{C}, \mathcal{B}(\mathbb{C}))$  est mesurable si et seulement si les applications  $\operatorname{Re}(f) : (E, \mathcal{A}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$  et  $\operatorname{Im}(f) : (E, \mathcal{A}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$  sont mesurables.

**Définition 3.8.** Soit  $f_n : E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ ,  $n \geq 0$ , une suite de fonctions. On définit les fonctions  $\limsup f_n : E \rightarrow F$ , et  $\liminf f_n : E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  pour tout  $x \in E$  par ;

$$(\limsup f_n)(x) := \lim_{n \rightarrow +\infty} \sup(f_n(x))$$

$$(\liminf f_n)(x) := \lim_{n \rightarrow +\infty} \inf(f_n(x)).$$

**Notation 3.9.** On note parfois  $\limsup$  =  $\overline{\lim}$  et  $\liminf$  =  $\underline{\lim}$ .

**Proposition 3.10.** Soit  $(f_n)_{n \geq 0}$  une suite de fonctions mesurables  $(E, \mathcal{A})$  dans  $(\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ .

- (1) Les fonctions  $x \mapsto (\sup f_n)(x)$  et  $x \mapsto (\inf f_n)(x)$  sont mesurables de  $(E, \mathcal{A})$  dans  $(\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$ .
- (2) Les fonctions  $x \mapsto (\limsup f_n)(x)$  et  $x \mapsto (\liminf f_n)(x)$  sont mesurables de  $(E, \mathcal{A})$  dans  $(\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$ .
- (3) Si  $(f_n)_{n \geq 0}$  converge simplement vers  $f$ , alors  $f$  est mesurable.

**Proposition 3.11.** Soit  $f : (E, \mathcal{A}) \rightarrow (\mathbb{R}_+, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+))$  une fonction mesurable positive. Il existe une suite de fonctions croissante  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de fonctions étagées positives telles que pour tout  $x \in E$ ,  $f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x)$  et si  $f$  est bornée alors  $(f_n)_n$  converge uniformément vers  $f$ .

*Démonstration.* On pose

$$(f_n)_n := \sum_{k=0}^{n2^n-1} \frac{k}{2^n} \mathbb{1}_{\left\{ \frac{k}{2^n} \leq f < \frac{k+1}{2^n} \right\}} + n \mathbb{1}_{\{f \geq n\}}$$

et on vérifie qu'elle vérifie bien la convergence simple vers  $f$  et qu'elle est croissante.

- Soit  $x \in E$ .
  - Si  $f(x) = +\infty$ , pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $f_n(x) = n$  donc  $f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x)$ .
  - si  $f(x) < +\infty$ , pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , tel que  $n > f(x)$ , il existe  $k \leq n2^n - 1$  tq  $k \leq 2^n f(x) < k + 1$  donc  $|f(x) - f_n(x)| = \left| f(x) - \frac{k}{2^n} \right| \leq \frac{1}{2^n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$
- Vérifions que  $(f_n)$  est croissante. Soit  $x \in E$ 
  - si  $f(x) \geq n + 1$ ,  $f_n(x) = n < n + 1 = f_{n+1}(x)$ .
  - Si  $f(x) < n$ , on note  $k$  l'entier tq  $k \leq 2^n f(x) < k + 1$ . Ainsi,  $f_n(x) = \frac{k}{2^n}$ . Comme  $f(x) \geq \frac{2k}{2^{n+1}}$ , on en déduit que  $f_{n+1}(x) \geq \frac{2k}{2^{n+1}} = f_n(x)$ .
  - si  $n \leq f(x) < n + 1$ ,  $f_{n(x)} = n$  et il existe  $k \geq n2^{n+1}$  tel que  $\frac{k}{2^{n+1}} \leq f(x) \leq \frac{k+1}{2^{n+1}}$  donc  $f_{n+1}(x) \geq n = f_n(x)$ .

□

**Proposition 3.12.** Soit  $f : (E, \mathcal{A}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$  une fonction mesurable quelconque. Il existe une suite de fonctions étagées  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de fonctions étagées telles que pour tout  $x \in E$ ,  $f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x)$  et si  $f$  est bornée alors  $(f_n)_n$  converge uniformément vers  $f$ .

*Démonstration.* Il suffit d'appliquer Proposition 3.11 à  $f$  en la décomposant par  $f = f^+ - |f^-|$ . □

# Chapitre 2: Mesures intégrables.

## 4. Mesure.

**Définition 4.1** (Mesure). Soit  $(E, \mathcal{A})$  un espace mesurable. On appelle *mesure* sur  $(E, \mathcal{A})$  une application  $\mu : \mathcal{A} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$  telle que :

- (1)  $\mu(\emptyset) = 0$ .
- (2)  $\mu$  est  $\sigma$ -additive, i.e pour toute suite  $(A_n)_n$  d'éléments de  $\mathcal{A}$  deux à deux distincts, alors :  

$$\mu\left(\bigcup_{n \geq 0} A_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu(A_n).$$

**Définition 4.2** (Espace mesuré). Soit  $(E, \mathcal{A})$  un espace mesurable et  $\mu : \mathcal{A} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$  une mesure. On appelle le triplet  $(E, \mathcal{A}, \mu)$  un espace mesuré, et pour tout  $A \in \mathcal{A}$ ,  $\mu(A)$  est la mesure de  $A$ .

### Exemples 4.3.

1.  $\mu : \mathcal{A} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+ ; A \mapsto 0$  est appelé la mesure *nulle*.
2.  $\mu : \mathcal{A} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+ ; A \mapsto \begin{cases} \text{Card}(A) & \text{si } A \text{ est fini} \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$  est appelé mesure de *comptage*.
3.  $\mu : \mathcal{A} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+ ; A \mapsto \begin{cases} +\infty & \text{si } A \neq \emptyset \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$   $A \neq \emptyset \in \mathcal{A}, \mu(A) = +\infty$  est appelée mesure *infinie* ou *grossière*.
4.  $\delta_x := \mathbb{1}_A : \mathcal{A} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+ ; x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases}$  est appelé mesure de *Dirac* en  $x \in E$

**Proposition 4.4.** Soit  $(E, \mathcal{A}, \mu)$  un espace mesuré. Pour tout  $A, B \in \mathcal{A}$ , on a les propriétés suivantes :

- (1)  $\mu(A) = \mu(A \setminus B) + \mu(A \cap B)$ ,
- (2)  $\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B)$ ,
- (3)  $\mu(A \cup B) \leq \mu(A) + \mu(B)$ ,
- (4) Si  $A \subset B$ ,  $\mu(A) \leq \mu(B)$ .

*Démonstration.*

- (1) On a  $A \setminus B = \{A \cap (E \setminus B)\}$  et  $A \cap B$  disjoints donc  $A = (A \setminus B) \cup (A \cap B)$ . Or d'après la  $\sigma$ -additivité, pour tout  $C$  et  $D$  disjoints alors  $\mu(C \cup D) = \mu(C) + \mu(D)$ . D'où  $\mu(A) = \mu(A \setminus B) + \mu(A \cap B)$ .
- (2) On remarque que  $A \setminus B, A \cap B$  et  $B \setminus A$  sont deux à deux disjoints et  $A \cup B = (A \setminus B) \cup (A \cap B) \cup (B \setminus A)$ , donc

$$\begin{aligned} \mu(A \cup B) &= \mu(A \setminus B) + \mu(A \cap B) + \mu(B \setminus A) \\ &\Rightarrow \mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = \mu(A \setminus B) + \mu(A \cap B) + \mu(B \setminus A) + \mu(A \cap B) \\ &\Rightarrow \mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B). \end{aligned}$$

- (3) Si  $\mu(A) + \mu(B) = +\infty$ , l'inégalité est évidente. Sinon, par (2),

$$\begin{aligned} \mu(a) + \mu(b) &= \mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) \\ &\stackrel{\mu \geq 0}{\Rightarrow} \mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B) \leq \mu(A) + \mu(B) \end{aligned}$$

- (4) On a  $\mu(B) = \mu(B \setminus A) + \mu(A \cap B) = \mu(B \setminus A) + \mu(A) \geq \mu(A)$  car  $\mu(A \setminus B) = \mu(\emptyset) = 0$ .

□

**Définition 4.5** (Finie). Soit  $(E, \mathcal{A})$  un espace mesurable,  $\mu : \mathcal{A} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$  une mesure sur  $(E, \mathcal{A})$ :

- On dit qu'une mesure  $\mu$  est *finie* si  $\mu(E) < +\infty$ .
- On dit que  $\mu(E)$  est la *masse* de la mesure  $\mu$ .

**Définition 4.6** (Probabilité). Soit  $(E, \mathcal{A})$  un espace mesurable,  $\mu : \mathcal{A} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$  une mesure sur  $(E, \mathcal{A})$ . Si la masse de  $\mu$  vaut 1, On dit que  $\mu$  est une *probabilité*.

**Définition 4.7** (Finie). On dit que  $\mu$  est  $\sigma$ -finie s'il existe une suite  $(A_n)$  de  $\mathcal{A}$  telle que  $E = \bigcup_{n \geq 0} A_n$  et pour tout  $n \geq 0$ ,  $\mu(A_n) < +\infty$ .

**Remarque 4.8.** On dit qu'une suite de parties de  $E$ ,  $(A_n)_n$  est croissante si  $\forall n \geq 0, A_n \subset A_{n+1}$ .

**Proposition 4.9.** Soit  $(E, \mathcal{A}, \mu)$  un espace mesuré et  $(A_n)_{n \geq 0}$  une suite d'éléments de  $\mathcal{A}$ .

- (1) Si la suite  $(A_n)_{n \geq 0}$  est croissante alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mu(A_n) = \mu\left(\bigcup_{n \geq 0} A_n\right)$
- (2) Si la suite  $(A_n)_{n \geq 0}$  est décroissante et si il existe  $n_0 \geq 0$  tel que  $\mu_{n_0} < +\infty$  alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mu(A_n) = \mu\left(\bigcap_{n \geq 0} A_n\right)$ .

*Démonstration.*

- (1) S'il existe  $n_0$  tel que  $\mu(A_{n_0}) = +\infty$  alors puisque  $A_{n_0} \subset \bigcup_{n \geq 0} A_n$  on a  $\mu(A_{n_0}) \leq \mu(\bigcup_{n \geq 0} A_n)$  et l'égalité est évidente.  $\mu(A_{n_0}) = +\infty \leq \mu(A_n)$ . Sinon, on pose  $(B_n)_n := \begin{cases} A_0 & \text{si } n=0 \\ A_n \setminus A_{n-1} & \text{pour } n > 0 \end{cases}$ . Les  $B_n$  sont alors deux à deux disjoints et  $\bigcup_{n \geq 0} A_n = \bigcup_{n \geq 0} B_n$ . Ainsi,

$$\begin{aligned} \mu\left(\bigcup_{n \geq 0} A_n\right) &= \mu\left(\bigcup_{n \geq 0} B_n\right) = \sum_{n \geq 0} \mu(B_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \sum_{k=1}^n \mu(A_k) - \mu(A_{k-1}) \right) + \mu(A_0) \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \mu(A_n). \end{aligned}$$

(2)

□

**Proposition 4.10.** Soit  $(E, \mathcal{A}, \mu)$  un espace mesuré,  $(F, \mathcal{B})$  un espace mesurable, et  $f : (E, \mathcal{A}) \rightarrow (F, \mathcal{B})$  une application mesurable. Alors l'application

$$\mu_f : (\mathcal{B}) \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+ ; B \mapsto \mu(f^{-1}(B))$$

est une mesure sur  $(F, \mathcal{B})$ . On l'appelle la *mesure image*.

*Démonstration.*

- $\mu_f(\emptyset) = \mu(f^{-1}(\emptyset)) = \mu(\emptyset) = 0$ .
- Soit  $(B_n)_{n \geq 0}$  une suite d'éléments de  $\mathcal{B}$  deux à deux distincts.

$$\mu_f\left(\bigcup_{n \geq 0} B_n\right) = \mu\left(f^{-1}\left(\bigcup_{n \geq 0} B_n\right)\right) = \mu\left(\bigcup_{n \geq 0} f^{-1}(B_n)\right)$$

Or les  $f^{-1}(B_n)$  sont 2 à 2 disjoints. Donc d'après la  $\sigma$ -additivité de  $\mu$ , on a  $\mu_f(\bigcup B_n) = \sum \mu(f^{-1}B_n) = \sum \mu_f(B_n)$ .

Ainsi,  $\mu_f$  est une mesure sur  $(F, \mathcal{B})$ .

□

## 4.1. Mesure de Lebesgue.

**Théorème 4.11** (Unicité des mesures). Soit  $\mu, \nu$  deux mesures sur un espace mesurable  $(E, \mathcal{A})$ .

Si :

- $\mu$  et  $\nu$  coincident sur une partie  $\mathcal{C} \subset \mathcal{A}$  qui engendre  $\mathcal{A}$ ,
- $\mathcal{C}$  est stable par intersections finies,
- $E \in \mathcal{C}$ ,
- $\mu$  ou  $\nu$  est  $\sigma$ -finie,

alors  $\mu = \nu$ .

*Démonstration.* Admis. □

**Corollaire 4.12.** Il existe sur  $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$  une unique mesure  $\lambda$  telle que pour tout pavé  $\Pi_{i=1}^d]a_i, b_i[$ ,

$$\lambda\left(\Pi_{i=1}^d]a_i, b_i[\right) = \prod_{i=1}^d(b_i - a_i).$$

Cette mesure est appelée la *mesure de Lebesgue* sur  $\mathbb{R}^d$ .

*Démonstration.*  $\mathcal{C} = \{\Pi_{i=1}^d]a_i, b_i[, a_i < b_i \in \mathbb{R}\}$ . Alors  $\sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$  □

**Proposition 4.13.** Soit  $\mu$  une mesure sur  $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$  vérifiant :

- pour tout  $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ , pour tout  $x \in \mathbb{R}^d$ ,  $\mu(x + B) = \mu(B)$ ,
- $\mu([0, 1]^d) = 1$ ,

alors  $\mu$  est la mesure de Lebesgue,  $\mu = \lambda d$ .

*Démonstration.* Admis □

## 4.2. Ensemble négligeable.

**Définition 4.14** (Négligeable). Soit  $(E, \mathcal{A}, \mu)$  un espace mesuré,  $M \subset E$ . On dit que  $M$  est *négligeable* s'il existe  $A \in \mathcal{A}$  tel que  $M \subset A$  et  $\mu(A) = 0$ .

**Remarque 4.15.** Un ensemble négligeable n'appartient pas nécessairement à la tribu.

**Définition 4.16.** On dit que la mesure  $\mu$  est complète si  $\mathcal{A}$  contient tous les ensembles négligeables.

**Définition 4.17.** Une propriété sur l'ensemble  $E$  est une application  $P : E \rightarrow \{\text{vrai, faux}\}$ .

**Définition 4.18.** On dit qu'une propriété est vraie  $\mu$ -presque partout si l'ensemble  $\{x \in E : P(x) = \text{faux}\}$  est négligeable.

## 5. Intégrale de Lebesgue.

### 5.1. Intégrale des fonctions étagées positives.

**Notation 5.1.** On rappelle que l'écriture canonique est  $f = \sum_{\alpha \in f(E)} \alpha \mathbb{1}_{\{f=\alpha\}}$ . On a bien que  $\{\{f=\alpha\} | \alpha \in f(E)\}$  forme une partition de  $E$ . On note  $\mathcal{E}_+$  l'ensemble des fonctions étagées.

**Définition 5.2** (Intégrale). Soit  $f \in \mathcal{E}_+$ . On appelle intégrale de  $f$  par rapport à la mesure  $\mu$  sur  $(E, \mathcal{A})$  définie par :

$$\int_E f(x) d\mu(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mu(A_i).$$

**Remarque 5.3.** Si  $f$  admet deux écritures canoniques, alors  $\int_E f d\mu$  ne dépend pas de ces écritures.

**Remarque 5.4.** Sous la forme canonique,  $f = \sum_{\alpha \in f(E)} \alpha \mathbb{1}_{\{f=\alpha\}}$ , on a

$$\int_E f(x) d\mu(x) = \sum_{\alpha \in f(E)} \alpha \mu(\{f = \alpha\}).$$

Attention, L'ensemble  $\{f = 0\}$  peut être tel que  $\mu(\{f = 0\}) = +\infty$ . La convention  $0(+\infty) = +\infty 0 = 0$  est alors très importante.

**Remarque 5.5.** On peut avoir  $\alpha > 0$  et  $\mu(\{f = \alpha\}) = +\infty$  et dans ce cas,  $\int_E f d\mu = +\infty$ .

#### Exemples 5.6.

1. Soit  $f : \mathbb{E} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+ ; x \mapsto 0$ .

$$\int_E f(x) d\mu(x) = \sum_{\alpha \in f(E)} \alpha \mu(\{f = \alpha\}) = 0 \cdot \mu(\{f = 0\}) = 0 \cdot \mu(E) = 0.$$

2.  $\mu = \delta_a, a \in E$ .

$$\int_E f(x) d\mu(x) = \sum_{\alpha \in f(E)} \alpha \mu(\{f = \alpha\}) = \sum_{\alpha \in f(E)} \alpha \delta_a(\{f = \alpha\}) = f(a).$$

3. Si l'espace mesuré est  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ ,  $\lambda$  mesure de lebesgue. On a vu  $\forall x \in \mathbb{R}, \lambda(\{x\}) = 0$ . Plus généralement, pour tout sous-ensemble dénombrable  $D \subset \mathbb{R}$ , on a  $D \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$  et  $\lambda(D) = 0$ . Soit alors  $f = 2\mathbb{1}_{\mathbb{Q}} + 3\mathbb{1}_{\mathbb{N}}$ . On a

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) d\lambda(x) = 2\lambda(\mathbb{Q}) + 3\lambda(\mathbb{N}) = 0.$$

4. Soit  $f = \mathbb{1}_{[(2,3)]} + 3\mathbb{1}_{[0,1]} = \mathbb{1}_{[-2,0[} + 4\mathbb{1}_{[0,1]} + \mathbb{1}_{]1,3]}$ . Calculons son intégrale. On a pour la 1ere écriture :  $\lambda([(2,3)]) + 3\lambda([0,1]) = 5 + 3 = 8$ . et pour la 2eme écriture :  $\lambda([-2,0[) + 4\lambda([0,1]) + \lambda(]1,3]) = 8$ .

**Proposition 5.7.** L'application  $f \mapsto \int_E f d\mu$  de  $\mathcal{E}_+$  dans  $\overline{\mathbb{R}}_+$  satisfait les propriétés suivantes

- Pour toutes fonctions  $f, g \in \mathcal{E}_+$ ,  $f + g \in \mathcal{E}_+$  et  $\int_E f + g d\mu = \int_E f d\mu + \int_E g d\mu$ ,
- Pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}_+$ ,  $\lambda f \in \mathcal{E}_+$  et  $\int_E \lambda f d\mu = \lambda \int_E f d\mu$ ,
- Pour toutes fonctions  $f, g \in \mathcal{E}_+$ ,  $f \leq g \Rightarrow \int_E f d\mu \leq \int_E g d\mu$ .

*Démonstration.*

- On pose  $f = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbb{1}_{A_i}, g = \sum \beta_i \mathbb{1}_{B_i}$  avec  $A_i := \{f = \alpha_i\}, B_i := \{g = \beta_i\}, (A_i)_{i \in \{1, \dots, n\}}, (B_i)_{i \in \{1, \dots, m\}}$  sont des partitions de  $E$ . On a

$$\begin{aligned} \int_E f + g d\mu &= \int_E \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (\alpha_i + \beta_j) \mathbb{1}_{A_i \cap B_j} d\mu(x) \\ &\stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (\alpha_i + \beta_j) \mu(A_i \cap B_j) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \sum_{j=1}^m \mu(A_i \cap B_j) + \sum_{j=1}^m \beta_j \sum_{i=1}^n \mu(A_i \cap B_j) \\ &= \sum_{i=1}^n \alpha_i \mu\left(\bigcup_{j=1}^m A_i \cap B_j\right) + \sum_{j=1}^m \beta_j \mu\left(\bigcup_{i=1}^n A_i \cap B_j\right) \stackrel{\text{prop 4.4}}{=} \sum_{i=1}^n \alpha_i \mu(A_i) + \sum_{j=1}^m \beta_j \mu(B_j) \stackrel{\text{def}}{=} \int_E f d\mu + \int_E g d\mu. \end{aligned}$$

- Notons  $f := \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbb{1}_{A_i}$  alors  $\alpha f = \sum_{i=1}^n \alpha \alpha_i \mathbb{1}_{A_i}$  d'où  $\alpha f \in \mathcal{E}_+$  et

$$\int_E \alpha f d\mu = \sum_{i=1}^n \alpha \alpha_i \mu(A_i) = \alpha \sum_{i=1}^n \alpha_i \mu(A_i) = \alpha \int_E f d\mu.$$

- Comme  $f \leq g$ ,  $g - f$  est une fonction étagée positive. Par la point 1, on a donc

$$\int_E g d\mu = \int_E f + (g - f) d\mu = \int_E f d\mu + \int_E (g - f) d\mu \geq \int_E f d\mu.$$

□

**Proposition 5.8.** Pour tout  $A \in \mathcal{A}$ ,  $\int_E \mathbb{1}_A(x) d\mu(x) = \mu(A)$ . Si  $f = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbb{1}_{A_i}(x) d\mu(x)$  alors,

$$\int_E f d\mu = \sum_{i=1}^n \alpha_i \int_E \mathbb{1}_{A_i}(x) d\mu(x).$$

## 5.2. Intégrales de fonctions mesurables positives.

**Notation 5.9.** On notera  $\mathcal{M}_+$  l'ensembles des fonctions mesurables positives de  $(E, \mathcal{A})$  dans  $(\overline{\mathbb{R}}_+, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}_+))$ . On munit  $(E, \mathcal{A})$  d'une mesure  $\mu$ .

**Définition 5.10** (Intégrale). On définit l'intégrale de toute fonction  $f \in \mathcal{M}_+$  par rapport à la mesure  $\mu$  par :

$$\int_E f(x) d\mu(x) = \sup \left\{ \int_E g(x) d\mu(x) : g \in \mathcal{E}_+, g \leq f \right\}.$$

Cette intégrale sera notée indifféremment  $\int_E f(x) d\mu(x)$ ,  $\int_E f(x) \mu(dx)$ ,  $\int_E f d\mu$ .

**Définition 5.11** ( $\mu$ -intégrable). Si  $\int_E f d\mu < +\infty$ , on dira que  $f$  est  $\mu$ -intégrable.

**Remarque 5.12.** L'intégrale d'une fonction mesurable positive  $(E, \mathcal{M}_+)$  est toujours définie, sa valeur pouvant éventuellement être infinie.

**Proposition 5.13.** Pour toutes fonctions  $f, g \in \mathcal{M}_+$

$$f \leq g \Rightarrow \int_E f d\mu \leq \int_E g d\mu.$$

*Démonstration.* Soit  $h \in \mathcal{E}_+, h \leq f$ . Alors  $h \leq g$  donc

$$\begin{aligned} & \left\{ \int_E h(x) d\frac{\mu(x)}{h} \in \mathcal{E}_+, h \leq f \right\} \subset \left\{ \int_E h(x) d\frac{\mu(x)}{h} \in \mathcal{E}_+, h \leq g \right\} \\ & \Rightarrow \sup \left\{ \int_E h(x) d\frac{\mu(x)}{h} \in \mathcal{E}_+, h \leq f \right\} \leq \sup \left\{ \int_E h(x) d\frac{\mu(x)}{h} \in \mathcal{E}_+, h \leq g \right\}. \end{aligned}$$

Le cas particulier découle du fait que l'intégrale de la fonction  $x \mapsto 0$  sur  $E$  est nulle. □

**Théorème 5.14** (Théorème de Beppo-Levi). Si  $(f_n)$  est une suite croissante de fonctions de  $\mathcal{M}_+$  alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n \in \mathcal{M}_+$ . Posons  $f = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n$  alors

$$\int_E f d\mu = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_E f_n d\mu.$$

**Proposition 5.15.** Soi  $f, g \in \mathcal{M}_+$ . Alors,

- $\int_E (f + g) d\mu = \int_E f d\mu + \int_E g d\mu$ .
- Pour tout  $\alpha \geq 0$ ,  $\int_E \alpha f d\mu = \alpha \int_E f d\mu$ .

*Démonstration.*

- Par Proposition 3.11, il existe des suites croissantes  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , et  $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de  $\mathcal{E}_+$  telles que  $f_n$ , et  $g_n$  convergent respectivement vers  $f$  et  $g$ . Alors  $f_n + g_n$  est une suite croissante de  $\mathcal{M}_+$  telle que  $f + g = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n + g_n$ . De plus par Proposition 5.7,  $\int_E f_n + g_n d\mu = \int_E f_n d\mu + \int_E g_n d\mu$  donc par le Théorème de Beppo-Levi, et unicité de la limite on a bien que

$$\int_E (f + g) d\mu = \int_E f d\mu + \int_E g d\mu.$$

- Par Proposition 3.11, on pose la suite  $(\alpha f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite croissante de  $\mathcal{M}_+$  qui converge vers  $\alpha f$ . De plus,  $\int_E \alpha f_n d\mu = \alpha \int_E f_n d\mu$  donc par le Théorème de Beppo-Levi, et unicité de la limite on a bien que

$$\int_E \alpha f d\mu = \alpha \int_E f d\mu.$$

□

**Proposition 5.16.** Soit  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de fonctions de  $\mathcal{M}_+$ . On a

$$\int_E \sum_{n \geq 0} f_n = \sum_{n \geq 0} \int_E f_n d\mu.$$

*Démonstration.* La suite des sommes partielles de  $f_n$  est une suite croissante de  $\mathcal{M}_+$ . Par le Théorème de Beppo-Levi, on a

$$\int_E \sum_{k=0}^n f_k d\mu \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_E \sum_{k \geq 0} f_k d\mu \text{ et } \sum_{k=0}^n \int_E f_k d\mu \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \sum_{k \geq 0} \int_E f_k d\mu.$$

Or par additivité des intégrales de fonctions de  $\mathcal{M}_+$ ,

$$\int_E \sum_{k=0}^n f_k d\mu = \sum_{k=0}^n \int_E f_k d\mu,$$

d'où  $\int_E \sum_{n \geq 0} f_n = \sum_{n \geq 0} \int_E f_n d\mu$ . □

**Lemme 5.17** (Inégalité de Markov). Soit  $f \in \mathcal{M}_+, a > 0$ . Alors

$$\mu(\{f \geq a\}) \leq \frac{1}{a} \int_E f d\mu.$$

*Démonstration.* On a  $\mu$ -presque partout  $a \mathbb{1}_{\{f \geq a\}} \leq f$ , donc pour  $\mu$ -presque tout  $x \in E$ ,  $a \mathbb{1}_{\{f \geq a\}}(x) \leq f(x)$  et par la positivité de l'intégrale,

$$a \mu(\{f \geq a\}) = \int_E \mathbb{1}_{\{f \geq a\}} d\mu \leq \int_E f d\mu.$$

□

**Corollaire 5.18.** Soit  $f \in \mathcal{M}_+$ . Si  $f$  est intégrable alors  $\mu(\{f = +\infty\}) = 0$  i.e  $f$  est finie  $\mu$ -p.p.

*Démonstration.* Soit  $n \geq 1$ .

$$\{f = +\infty\} \subset \{f \geq n\} \Rightarrow \mu(\{f = +\infty\}) \leq \mu(\{f \geq n\}) \leq \frac{1}{n} \int_E f d\mu \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

□

**Corollaire 5.19.** Soit  $f, g \in \mathcal{M}_+$ . Alors

- $\int_E f d\mu = 0$  si et seulement si  $f = 0$   $\mu$ -presque partout.
- Si  $f = g$   $\mu$ -presque partout, alors  $\int_E f d\mu = \int_E g d\mu$ .

*Démonstration.*

- ⇒ Supposons  $\int_E f d\mu = 0$ . Soit  $n \geq 1$ , d'après l'Inégalité de Markov,  $\mu\left(\left\{f \geq \frac{1}{n}\right\}\right) \leq n \int_E f d\mu = 0$ . De plus,  $\left\{f \geq \frac{1}{n}\right\}$  est une suite croissante d'ensembles telle que  $\bigcup_{n \geq 1} \left\{f \geq \frac{1}{n}\right\} = \{f > 0\}$ .
 
$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mu\left(\left\{f \geq \frac{1}{n}\right\}\right) = \mu\left(\bigcup_{n \geq 1} \left\{f \geq \frac{1}{n}\right\}\right) = \mu(\{f > 0\}) = \mu(\{f \neq 0\}) = 0.$$

D'où  $f = 0$   $\mu$ -p.p.

$\Leftarrow$  Supposons  $f = 0$   $\mu$ -presque partout. Alors il existe une suite croissante de fonctions étagées positives  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  telle que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n = f$   $\mu$ -presque partout. Ainsi, puisque  $\forall n \in \mathbb{N}, f_n \leq f$ ,  $f_n = 0$   $\mu$ -presque partout. Ainsi,  $\mu(A_k) = 0$  dès que  $\alpha_k \neq 0$  et  $\int_E f_n d\mu = \sum_{k=1}^m \alpha_k \mu(A_k) = 0$ . Donc par le Théorème de Beppo-Levi,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_E f_n d\mu = \int_E \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n d\mu = \int_E f d\mu = 0.$$

- Soit  $f, g \in \mathcal{M}_+$  telles que  $f = g$   $\mu$ -presque partout. On a  $1 = \mathbb{1}_{\{f=g\}} + \mathbb{1}_{\{f \neq g\}}$ .

$$\int_E f d\mu = \int_E f \mathbb{1}_{\{f=g\}} d\mu + \int_E f \mathbb{1}_{\{f \neq g\}} d\mu$$

On obtient une égalité similaire pour l'intégrale de  $g$ . Or  $f \mathbb{1}_{\{f \neq g\}}$  et  $g \mathbb{1}_{\{f \neq g\}}$  sont des fonctions nulles  $\mu$ -presque partout donc  $\int_E f \mathbb{1}_{\{f \neq g\}} d\mu = \int_E g \mathbb{1}_{\{f \neq g\}} d\mu = 0$ . D'où,

$$\int_E f d\mu = \int_E f \mathbb{1}_{\{f=g\}} d\mu = \int_E g \mathbb{1}_{\{f=g\}} d\mu = \int_E g d\mu.$$

□

**Rappel 5.20.**

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \inf f_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \inf_{k \geq n} f_k = \sup_{n \geq 1} \inf_{k \geq n} f_n.$$

**Théorème 5.21** (Lemme de Fatou). Soit  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de  $\mathcal{M}_+$  alors

$$\int_E (\liminf_{n \rightarrow +\infty} f_n) d\mu \leq (\liminf_{n \rightarrow +\infty}) \int_E f_n d\mu.$$

*Démonstration.* Soit  $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .  $g_n = \inf_{k \geq n} f_k$  est une suite croissante de fonctions de  $\mathcal{M}_+$  et d'après le Théorème de Beppo-Levi,

$$\int_E \lim g_n d\mu = \lim \int_E g_n d\mu \Rightarrow \int_E \liminf f_n d\mu = \lim \int_{k \geq n} f_k d\mu.$$

Soit  $m \geq n$ ,

$$\inf_k f_k \leq f_m \Rightarrow \int_E \inf_{k \geq n} f_n d\mu \leq \int_E f_m d\mu \Rightarrow \int_E \inf_{k \geq n} f_k d\mu \leq \inf_{m \geq n} \int_E f_m d\mu \text{ par passage à l'inf.}$$

On obtient donc  $\int_E \liminf f_n d\mu \leq \liminf_{m \geq n} \int_E f_m d\mu = \liminf \int_E f_n d\mu$ . □

**Proposition 5.22.** Soit  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de  $\mathcal{M}_+$  telle qu'il existe  $g \in \mathcal{M}_+$  intégrable vérifiant  $f_n \leq g$  pour  $\mu$ -presque tout  $n \in \mathbb{N}$ , alors:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup \int_E f_n d\mu \leq \int_E \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n d\mu.$$

*Démonstration.* La suite de fonctions  $(g - f_n)_{n \geq 0}$  est une suite de  $\mathcal{M}_+$  et par le Lemme de Fatou,  $\int_E \liminf(g - f_n) d\mu \leq \liminf \int_E (g - f_n) d\mu$ . Or  $f_n <_g$  pour tout  $n$  donc  $\limsup_g f_n \leq g$ . Par conséquent,  $\limsup f_n$  est une fonction de  $\mathcal{M}_+$  intégrable. D'autre part,

$$\begin{aligned}\liminf_{n \rightarrow +\infty} \int_E g - f_n \, d\mu &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \int_E g \, d\mu - \int_E f_n \, d\mu \right) = \int_E g \, d\mu + \liminf_{n \rightarrow +\infty} \left( - \int_E f_n \, d\mu \right) \\ &= \int_E f \, d\mu - \limsup_{n \rightarrow +\infty} \int_E f_n \, d\mu\end{aligned}$$

Donc en revenant à l'inégalité,

$$\int_E g \, d\mu - \int_E \limsup f_n \, d\mu \leq \int_E g \, d\mu - \limsup \int_E f_n \, d\mu \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \sup \int_E f_n \, d\mu \leq \int_E \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n \, d\mu. \quad \square$$

### 5.3. Mesure à densité.

**Proposition 5.23.** Soit  $f \in \mathcal{M}_+$ . Posons pour tout  $A \in \mathcal{A}$ ,  $\nu(A) := \int_A g \, d\nu = \int_E g \mathbb{1}_A \, d\mu$ . Alors  $\nu$  est une mesure sur  $(E, \mathcal{A})$ . De plus, pour toute fonction  $f \in \mathcal{M}_+$ ,  $\int_E f \, d\nu = \int_E fg \, d\mu$

*Démonstration.*

- $\nu(\emptyset) = \int_E g \mathbb{1}_{\emptyset} \, d\mu = 0$ .
- Soit  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de  $\mathcal{A}$  d'ensembles deux à deux disjoints. Alors

$$\begin{aligned}\nu\left(\bigcup_{n \geq 1} A_n\right) &= \int_E g \mathbb{1}_{\bigcup_{n \geq 1} A_n} \, d\mu = \int_E g \sum \mathbb{1}_{A_n} \, d\mu = \int_E \sum g \mathbb{1}_{A_n} \, d\mu = \sum \int_E g \mathbb{1}_{A_n} \, d\mu \\ &= \sum_{n \geq 1} \nu(A_n).\end{aligned}$$

- Par définition pour  $f = \mathbb{1}_A, A \in \mathcal{A}$  il n'y a aucun prblm. Par linéarité, de même pour toute fonction  $f$  étagée positive. Si  $f \in \mathcal{M}_+$ , il existe une suite croissante  $(f_n)_n$  de fonctions de  $\mathcal{M}_+$  telle que  $\lim f_n = f$ . On a  $\int_E f_n \, d\nu = \int_E f_n g \, d\nu$ . De plus,  $(f_n g)$  est une suite croissante de  $\mathcal{M}_+$  telle que  $\lim f_n g = fg$ . Ainsi, par Théorème de Beppo-Levi,

$$\int_E \lim f_n \, d\nu = \int_E f \, d\nu = \int_E f_n g \, d\nu = \int_E fg \, d\nu \quad \square$$

**Définition 5.24.** On dit que  $\nu$  est la mesure de densité  $g$  par rapport à la mesure  $\mu$ .

### 5.4. Intégrales de fonctions mesurables quelconques.

**Notation 5.25.** Soit  $(E, \mathcal{A}, \mu)$ . On note  $\mathcal{M}$  l'ensemble des appl mesurables de  $(E, \mathcal{A})$  dans  $(\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$ .

**Définition 5.26** (Intégrable). Une fonction  $f \in \mathcal{M}$  est dite  $\mu$ -intégrable si  $\int_E |f| \, d\mu < +\infty$ .

**Notation 5.27.**

- L'ensemble des fonctions intégrables sera noté  $\mathcal{L}^1(E, \mathcal{A}, \mu) = \{f \in \mathcal{M}, \int_E |f| \, d\mu < +\infty\} = \mathcal{L}^1(E)$ .
- Soit  $f : E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ ,  $f^+ := \max(f, 0)$  et  $f^- := -\min(f, 0)$ .

**Proposition 5.28.** Soit  $f \in \mathcal{M}$ .  $f \in \mathcal{L}^1(E)$  si et seulement si  $f^+ \in \mathcal{L}^1(E)$  et  $f^- \in \mathcal{L}^1(E)$ .

*Démonstration.* On a  $|f| = f^+ + f^-$ .

$$\int_E f^- \, d\mu \leq \int_E |f| \, d\mu = \int_E f^+ + \int_E f^- \, d\mu \int_E f^+ \, d\mu \leq \int_E |f| \, d\mu = \int_E f^+ + \int_E f^- \, d\mu. \quad \square$$

**Définition 5.29** (Intégrale). Soit  $f \in \mathcal{L}^1(E)$ . Alors l'intégrale de  $f$  est définie par

$$\int_E f \, d\mu = \int_E f^+ \, d\mu - \int_E f^- \, d\mu.$$

**Proposition 5.30.** Soit  $f, g : (E, \mathcal{A}) \rightarrow (\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$  deux fonctions mesurables telles que  $f = g$   $\mu$ -presque partout. Alors  $f \in \mathcal{L}^1(E) \Leftrightarrow g \in \mathcal{L}^1(E)$ .

*Démonstration.*  $\{f^+ \neq g^+\}, \{f^- \neq g^-\} \subset \{f \neq g\}$  Cela entraîne que  $f = g$   $\mu$ -presque partout  $\Rightarrow f^+ = g^+$   $\mu$ -presque partout et  $f^- = g^-$   $\mu$ -presque partout donc  $f^+$  et  $f^-$  sont intégrables si et seulement si  $g^+$  et  $g^-$  le sont.  $\square$

**Proposition 5.31.** Soit  $f \in \mathcal{L}^1(E)$ , alors :  $\mu(\{f = -\infty\}) = \mu(\{f = +\infty\}) = \mu(\{|f| = +\infty\}) = 0$

*Démonstration.* On observe que  $\{|f| = +\infty\} = \{f^+ = +\infty\} \cup \{f^- = +\infty\}$ . Donc

$$\mu(\{|f| = +\infty\}) = \mu(\{f^+ = +\infty\}) + \mu(\{f^- = +\infty\}).$$

Or  $f^+, f^- \in \mathcal{L}^1(E)$  donc  $\mu(\{f^+ = +\infty\}) = \mu(\{f^- = +\infty\}) = 0$ .  $\square$

**Proposition 5.32.** Soit  $f, g \in \mathcal{L}^1(E)$ . Alors

- $f + g \in \mathcal{L}^1(E)$  et  $\int_E (f + g) \, d\mu = \int_E f \, d\mu + \int_E g \, d\mu$ .
- Pour tout  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $\alpha f \in \mathcal{L}^1(E)$  et  $\int_E \alpha f \, d\mu = \alpha \int_E f \, d\mu$ .

**Proposition 5.33.** Soit  $f, g \in \mathcal{L}^1(E)$ . Si  $f \leq g$   $\mu$ -presque partout alors

$$\int_E f \, d\mu \leq \int_E g \, d\mu.$$

*Démonstration.* Supposons  $\forall x \in E, f(x) \leq g(x)$ . On a  $g - f \in \mathcal{M}_+$  donc  $\int_E (g - f) \, d\mu \geq 0$ . On conclut par la linéarité de l'intégrale, si  $f \leq g$   $\mu$ -presque partout, alors on applique ceci aux fonctions  $f_1 = f \mathbb{1}_{\{f \leq g\}}$  et  $g_1 = g \mathbb{1}_{\{f \leq g\}}$ . Ces fonctions vérifient pour tout  $x \in E, f_1(x) \leq g_1(x)$ . On a donc  $\int_E f_1 \, d\mu \leq \int_E g_1 \, d\mu$ . Mais comme  $f_1 = f$   $\mu$ -presque partout et  $g_1 = g$   $\mu$ -presque partout, on a  $\int_E f_1 \, d\mu = \int_E f \, d\mu$  et  $\int_E g_1 \, d\mu = \int_E g \, d\mu$ .  $\square$

**Proposition 5.34.** Soit  $f \in \mathcal{L}^1(E)$ . Alors  $|\int_E f \, d\mu| \leq \int_E |f| \, d\mu$ .

*Démonstration.*  $|\int_E f \, d\mu| = |\int_E f^+ \, d\mu - \int_E f^- \, d\mu| < \int_E f^+ \, d\mu + \int_E f^- \, d\mu = \int_E |f| \, d\mu$ .  $\square$

**Proposition 5.35** (Formule de transfert). Soit  $f : (F, \mathcal{B}) \rightarrow (\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$  une fonction mesurable. La fonction  $f$  est  $\mu_\varphi$  intégrable si et seulement si la fonction  $f \circ \varphi$  est  $\mu$ -intégrable sur  $E$ . Dans ce cas, on a

$$\int_E f \circ \varphi \, d\mu = \int_F f \, d\mu_\varphi.$$

*Démonstration.* Voir poly.  $\square$