Analyse Approfondie
Chapitre 1: Les nombres réels

Table des matières

1. Introduction.

Définition 1.1: L'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ muni de l'addition et de la multiplication et de la relation d'ordre est caracterisé par

1. Sa commutativité,
2. Son ordre total,
3. $\mathbb{R}$ est Dedekind complet.

Définition 1.2 (Dedekind-complet): On dit qu'un ensemble est Dedekind-complet si toute partie non vide de cet ensemble admet une borne supérieure.

1.1. Minoration, Majoration…

Définition 1.1.1 (Majorant): Soit $A \subset \mathbb{R}$, $M \in \mathbb{R}$. On dit que M est un majorant si $\forall x \in A, M \geq x$.

Définition 1.1.2 (Minorant): Soit $A \subset \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{R}$. On dit que m est un minorant si $\forall x \in A, m \leq x$. i.e

Définition 1.1.3 (Partie majorée): On dit qu'une partie de $\mathbb{R}$ est majorée si elle admet un majorant. A est majorée $\Leftrightarrow \exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in A, M \geq x$.

Définition 1.1.4 (Partie minorée): On dit qu'une partie de $\mathbb{R}$ est minorée si elle admet un minorant. A est minorée $\Leftrightarrow \exists m \in \mathbb{R}, \forall x \in A, m \leq A$.

Définition 1.1.5 (Partie bornée): Soit $A \subset \mathbb{R}$, $R \in \mathbb{R}$. On dit que A est bornée si $\forall x \in A, -R \leq x \leq R$.

1.2. Supremum et infimum.

Définition 1.2.1 (Borne supérieure): Soit $A \subset \mathbb{R}, S \in \mathbb{R}$. On dit que S est la borne supérieure de A si S est le plus petit des majorants. On la note $S = \sup(A)$.

Proposition 1.2.1: Soit $A \subset \mathbb{R}$ et $S \in \mathbb{R}$ alors

$$S = \sup(A) \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in A, x \leq S \\ \forall \varepsilon > 0, \exists x \in A, S - \varepsilon < x \leq S \end{cases}$$

Définition 1.2.2 (Borne inférieure): Soit $A \subset \mathbb{R}, I \in \mathbb{R}$. On dit que I est la borne supérieure de A si et seulement si I est le plus grand des minorants. On la note $I = \inf(A)$

Proposition 1.2.2: Soit $A \subset \mathbb{R}$ et $I \in \mathbb{R}$ alors

$$I = \inf(A) \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in A, x \geq I \\ \forall \varepsilon > 0, \exists x \in A, I + \varepsilon > x \geq I \end{cases}$$

Proposition 1.2.3: Si une partie de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure alors cette dernière est unique.

Démonstration: Supposons que S_1 et S_2 soient deux bornes supérieures de A. Puisque S_1 est un majorant, $\forall x \in A, S_1 \geq x$. Or S_2 est le plus petit des majorants donc $S_2 \leq S_1$. De même, on a $S_1 \leq S_2$ donc par ordre total de $\mathbb{R}$, $S_1 = S_2$ □

Remarque: On note $\sup A = +\infty$ si A est une partie de $\mathbb{R}$ non-majorée. On note $\inf A = -\infty$ si A est une partie de $\mathbb{R}$ non-minorée.

Définition 1.2.3 (Intervalle): Une partie I de $\mathbb{R}$ est un intervalle si

$$\forall x, z \in I, \forall y \in \mathbb{R}, x < y < z \Rightarrow y \in I$$

Théorème 1.2.1: $\mathbb{R}$ est archimédien:

$$\forall \varepsilon > 0, \forall A > 0, \exists n \in \mathbb{N}, \varepsilon n > A.$$

Démonstration: Soit $\varepsilon > 0, A > 0$. Supposons par l'absurde que $\forall n \in \mathbb{N}, n\varepsilon \leq A$. Alors $E := \{n\varepsilon \mid n \in \mathbb{N}\}$ est non-vide et majoré. Ainsi $M := \sup(E)$ existe. Puiseque $M - \varepsilon$ n'est pas un majorant de E, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $n\varepsilon > M - \varepsilon$. Ainsi, $(n+1)\varepsilon > M$. D'où une contradiction. □

2. Fonctions dans $\mathbb{R}$.

2.1. Valeur absolue.

Définition 2.1.1 (Valeur absolue): On définit la fonction valeur absolue par :

$$\texttt{abs}\ |\cdot| : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; x \mapsto \begin{cases} x \text{ si } x \geq 0 \\ -x \text{ si } x \leq 0 \end{cases}$$

Proposition 2.1.1: Soit $x, y \in \mathbb{R}$,
1. $|x| = |y| \Leftrightarrow (x = y \text{ ou } x = -y)$
2. $|x + y| \leq |x| + |y|$
3. $||x| - |y|| \leq |x - y|$

Proposition 2.1.2: Soit $a, x \in \mathbb{R}$, alors:
1. Si $a \geq 0, |x| = a \Leftrightarrow (x = a \text{ ou } x = -a)$
2. $|x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$
3. $|x| < a \Leftrightarrow -a < x < a$
4. $|x| \geq a \Leftrightarrow (x \geq a \text{ ou } x \leq -a)$
5. $|x| > a \Leftrightarrow (x > a \text{ ou } x \leftarrow a)$

2.2. Partie entière.

Théorème 2.2.1: Pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe un unique $n \in \mathbb{Z}$ tel que $n \leq x < n + 1$ On dit que n est la partie entière de x, que l'on note $\lfloor x \rfloor$

Corollaire 2.2.1.1: $\forall x \in \mathbb{R}, \lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$
$\forall x \in \mathbb{R}, x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x$

3. Irrationalitée

Théorème 3.1: $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

Démonstration: Supposons par l'absurde $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$. Alors il existe $a, b \in \mathbb{Z}$ tq $\sqrt{2} = \frac{a}{b} \Leftrightarrow b\sqrt{2} = a \Leftrightarrow 2b^2 = a^2$. Donc 2 apparait un nombre de fois impair dans la décomposition en facteur premier à gauche de l'équation et un nombre de fois pair à droite de l'équation. Or d'parès le théorème fondamental de l'arithmetique, la décomposition en facteur premier est unique. On obtient donc une contradiction. Ainsi, $\sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. $\square$

Théorème 3.2: $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$ i.e $\forall x, y \in \mathbb{R}, x < y \Rightarrow \exists q \in \mathbb{Q}, x < q < y$.

Démonstration: Soit $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $x < y$. Posons $\varepsilon := y - x > 0$.
Comme $\mathbb{R}$ est archimédien, il existe $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tel que $n\varepsilon > 1$, c'est-à-dire $\frac{1}{n} < \varepsilon$.
Posons $m := \lfloor nx \rfloor + 1$.
Alors $nx < m \leq nx + 1 \Rightarrow x < \frac{m}{n} \leq x + \frac{1}{n} < x + \varepsilon = y$.
Ainsi, $q = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$ vérifie $x < q < y$ □

Théorème 3.3: $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$. $\Leftrightarrow \exists x, y \in \mathbb{R}, x < y \Rightarrow \exists z \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, x < z < y$.

Démonstration: Soit $x, y \in \mathbb{R}, x < y$.
D'après la diapositive précédente, il existe
$q \in \mathbb{Q}, x < q < y$. De même, il existe $p \in \mathbb{Q}, x < p < q$. Ainsi, on a $x < p < q < y$.
Posons $s := p + \frac{\sqrt{2}}{2}(p - q)$.
Alors s in $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, sinon on aurait $\sqrt{2} = 2\frac{s-p}{q-p} \in \mathbb{Q}$.
De plus $p < s < q$ puisque $0 < \frac{\sqrt{2}}{2} < 1$. On a bien construit $s \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ vérifiant $x < s < y$. □

Chapitre 2: Continuité uniforme:

Définition 3.1 (Continuité): Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur $D \subset \mathbb{R}$. On dit que f est continue si $\forall x_1 \in D, \forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x_2 \in D, |x_1 - x_2| < \eta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$

Définition 3.2 (Continuité uniforme): Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur $D \subset \mathbb{R}$. On dit que f est uniformément continue si $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x_1, x_2 \in D, |x_1 - x_2| < \eta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$.

Remarque: Le quantificateur universel sur x_1 est positionné différemment dans les deux définitions. Ainsi:
1. La continuité est une notion locale puisque η depend de epsilon et de x_1.
2. La continuité uniforme est une notion globale pusique η doit être choisit indépendamment de x_1 et dépendre seulement de ε (η dépend du comportement de f sur tout son domaine).

Définition 3.3 (k-lipschitzienne): Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est dite k-lipschitzienne s'il existe $k > 0$ tel que

$$\forall x_1, x_2 \in I, |f(x_1) - f(x_2)| \leq k|x_1 - x_2|$$

Proposition 3.1: Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction k lipschitzienne. Alors f est uniformément continue.

Démonstration: Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction k lipschitzienne. Soit $\varepsilon > 0$. Posons $\eta = \frac{\varepsilon}{k}$.
On a $|x_1 - x_2| \leq \eta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| \leq k|x_1 - x_2| \leq k\eta = \varepsilon$. Ainsi, f est uniformément continue. □

Proposition 3.2: Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur un intervalle I. Si f' est bornée alors f est uniformément continue.

Démonstration: Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue et dérivable, $M \in \mathbb{R}$ tel quel $\forall x \in I, f'(x) \leq M$
On a f continue sur I un segment, et f dérivable sur I ouvert. Donc d'apres le théorème d'inégalité des accroissements finis, on a $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}, |f(x_1) - f(x_2)| \leq M(x_1 - x_2)$.
Posons $\eta = \frac{\varepsilon}{M}$. On a

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq M|x_1 - x_2| \leq M\eta = \varepsilon$$

donc f est uniformément continue. □

Proposition 3.3: Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$. Si f est uniformément continue, il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}_+, f(x) \leq ax + b$

Proposition 3.4: Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Si $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = l \in \mathbb{R}, f$ est uniformément continue.

Théorème 3.4 (de Heine): Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors elle est uniformément continue.