Diagonalisation

Table des matières

Chapitre 1

1. Déterminants.

1.1. forme n-linéaires alternée.

Définition 1.1.1 (forme n-linéaire): Soit E un espace vectoriel, et $\varphi : E^n \to \mathbb{R}$ une application. On dit que φ est une **forme n-linéaire** si φ est linéaire par rapport à chaque variable i.e, $\forall x_1, -, x_i, -, x_n, y_i \in E, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$,

$$\varphi(x_1, -, x_{i-1}, \alpha x_i + \beta y_i, -, x_n) = \alpha\varphi(x_1, -, x_{i-1}, x_i, -, x_n) + \beta\varphi(x_1, -, x_{i-1}, y_i, -, x_n)$$

Exemples:

1. Montrons que $\varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}; (x_1, x_2) \mapsto x_1 x_2$ est 2-linéaire. Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. On a
$$(\alpha x_1 + \beta y_1)x_2 = \alpha(x_1 x_2) + \beta(y_1 y_2) \text{ et } x_1(\alpha x_2 + \beta y_2) = \alpha(x_1 x_2) + \beta(x_1 y_2).$$
2. $\varphi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}; (u^{\to}, v^{\to}) \mapsto u^{\to} \times v^{\to}$ est 2-linéaire (et symétrique).
3. Le déterminant 2-2 est 2-linéaire.

Remarque: $\varphi(x_1, -, 0, -, x_n) = 0$.

Définition 1.1.2 (alternée): Soit φ une application n-linéaire. On dit que φ est **alternée** si

$$\forall i, j \in \{1, -, n\} \text{ avec } i \neq j, x_i = x_j \Rightarrow \varphi(x_1, -, x_n) = 0.$$

Proposition 1.1.1: Soit $f_1, -, f_n : E \to F$ n applications linéaires. Soit $\varphi : F^n \to \mathbb{R}$ n-linéaire. Alors

$$\varphi \circ (f_1, -, f_n) : E^n \to \mathbb{R}; x_1, -, x_n \mapsto \varphi(f_1(x_1), -, f_n(x_n))$$

est n-linéaire.

Démonstration: Puisque les $f_1, -, f_n$ sont linéaires, et que φ est n-linéaire, il est évident que $\varphi \circ (f_1, -, f_n)$ est n-linéaire. □

Définition 1.1.3 (antisymétrie): Soit φ une application n-linéaire. On dit que φ est **antisymétrique** si

$$\forall i, j \in [1, n] \text{ avec } i \neq j, \varphi(x_1, -, x_i, -, x_j, -, x_n) = -\varphi(x_1, -, x_j, -, x_i, -, x_n)$$

Proposition 1.1.2: Soit φ une application n-linéaire et alternée. On ne change pas la valeur de $\varphi(x_1, -, x_n)$ en ajoutant à un des vecteurs de la famille une combinaison linéaire des autres. i.e, $\forall i \in \{1, -, n\}, \forall a_1, -, a_{i-1}, a_{i+1}, -, a_n \in \mathbb{R}$,

$$\varphi\left(x_1, -, x_i + \sum_{j=1, j\neq i}^{n} \alpha_j x_j, -, x_n\right) = \varphi(x_1, -, x_n)$$

Démonstration: Sans perte de généralité, on montre le cas où $i = 1$.

$$\begin{aligned}\varphi\left(x_1 + \sum_{j=2}^{n} \alpha_j x_j, -, x_n\right) &= \varphi(x_1, -, x_n) + \sum_{j=2}^{n} \alpha_j \varphi(x_j, -, x_j, -, x_n) \\ &= \varphi(x_1, -, x_n)\end{aligned}$$

Car φ est alternée. □

Proposition 1.1.3: Soit φ une application n-linéaire. φ est alternée si et seulement si φ est antisymétrique.

Démonstration:
$\Rightarrow$ Supposons que φ soit alternée. On pose $x_i = x_j$ Alors on a $\varphi(x_1, -, x_i, -, x_j, -, x_n) = 0$

$$\begin{aligned}\varphi(x_1, -, x_i, -, x_j, -, x_n) &= \varphi(x_1, -, x_i + x_j, -, x_j + x_i, -, x_n) \\ &= \varphi(x_1, -, x_i, -, x_j + x_i, -, x_n) + \varphi(x_1, -, x_j, -, x_j + x_i, -, x_n) \\ &= \varphi(x_1, -, x_i, -, x_j, -, x_n) + \cancel{\varphi(x_1, -, x_i, -, x_i, -, x_n)} \\ &\quad \cancel{+\varphi(x_1, -, x_j, -, x_j, -, x_n)} + \varphi(x_1, -, x_j, -, x_i, -, x_n) \quad \text{car } \varphi \text{ est alternée.} \\ &= \varphi(x_1, -, x_i, -, x_j, -, x_n) + \varphi(x_1, -, x_j, -, x_i, -, x_n)\end{aligned}$$

D'où

$$
\begin{aligned}
0 &= \varphi(x_1, -, x_i, -, x_j, -, x_n) + \varphi(x_1, -, x_j, -, x_i, -, x_n) \\
&\Leftrightarrow \varphi(x_1, -, x_i, -, x_j, -, x_n) = -\varphi(x_1, -, x_j, -, x_i, -, x_n)
\end{aligned}
$$

Donc φ est antisymetrique.
$\Leftarrow$ Supposons que φ soit antisymétrique. Alors on a :

$$\varphi(x_1, -, x_i, -, x_j, -, x_n) = -\varphi(x_1, -, x_j, -, x_i, -, x_n)$$

En particulier, en posant $x_j = x_i$ on a :

$$
\begin{aligned}
\varphi(x_1, -, x_i, -, x_i, -, x_n) = -\varphi(x_1, -, x_i, -, x_i, -, x_n) \\
\Leftrightarrow 2\varphi(x_1, -, x_i, -, x_i, -, x_n) = 0 \\
\Leftrightarrow \varphi(x_1, -, x_i, -, x_i, -, x_n) = 0
\end{aligned}
$$

□

Proposition 1.1.4: Soit φ une application n-linéaire et alternée. Si $(x_1, -, x_n)$ est une famille liée alors $\varphi(x_1, -, x_n) = 0$

Démonstration: $(x_1, -, x_n)$ est liée donc il existe $\alpha_1, -, \alpha_n \in \mathbb{R}$ tel que $\alpha_1 x_1 + ... + \alpha_n x_n = 0$ avec $\alpha_i \neq 0$ cas $\alpha_1 \neq 0$, $x_1 = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1} x_2 - ... - \frac{\alpha_n}{\alpha_1} x_n$, alors

$$
\begin{aligned}
\varphi(x_1, -, x_n) &= \varphi\left(-\frac{\alpha_2}{\alpha_1} x_2 - ... - \frac{\alpha_n}{\alpha_1} x_n, x_2, -, x_n\right) \\
&= \text{TODO} = 0
\end{aligned}
$$

□

Corollaire 1.1.1: Si $\dim(E) < n$ toutes les formes n-linéaires alternées sur E sont nulles.

Démonstration: Soit E un espace vectoriel, $x_1, -, x_n \in E$. Alors $(x_1, -, x_n)$ est liée donc $\varphi(x_1, -, x_n) = 0$. □

Théorème 1.1.1: Si $\dim(E \geq n)$ alors il existe des formes n-linéaires alternées sur E non nulles.
De plus, si $\dim(E) = n$ deux formes n-linéaires alternées sur E φ_1 et φ_2 non nulles sont proportionnelles i.e, $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x_1, -, x_n \in E, \varphi_2(x_1, -, x_n) = \lambda \varphi_1(x_1, -, x_n)$.

1.2. Déterminant d'une famille de E^n.

Lemme 1.2.1: Soit $m : E^2 \to \mathbb{R}$. Alors $a_m : E^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$a_m(x_1, x_2) = m(x_1, x_2) - m(x_2, x_1)$$

est bilinéaire antisymétrique.

Démonstration: Soit $x_1, x_2 \in E$. On montre l'antisymétrie.

$$\begin{aligned} a_m(x_1, x_2) = m(x_1, x_2) - m(x_2, x_1) &= -(m(x_2, x_1) - m(x_1, x_2)) \\ &= -a_m(x_2, x_1) \end{aligned}$$

La linéarité est évidente. □

Théorème 1.2.1: Soit E un espace vectoriel de dimension n, et $B = (e_1, -, e_n)$ une base de E. Alors il existe une unique forme n-linéaire alternée: $\det_B : E^n \to \mathbb{R}$ telle que $\det_B(e_1, -, e_n) = 1$.

Démonstration cas n=2: TODO VOIR MAXIME □

Définition 1.2.1 (Déterminant): Soit E un espace vectoriel de dimension n, et $B = (e_1, -, e_n)$ une base de E. On appelle **déterminant** dans la base B la forme n-linéaire du Théorème précédent

Théorème 1.2.2: Soit E un espace vectoriel de dimension n, et B une base de E.
Une famille $F = \{f_1, -, f_n\}$ de E est libre si et seulement si $\det_B(f_1, -, f_n) \neq 0$.
Dans ce cas on a :

$$\forall x_1, -, x_n \in E, \det_B(x_1, -, x_n) = \det_B(F) \det_F(x_1, -, x_n).$$

Démonstration: Soit $F = (f_1, -, f_n)$ une famille, $B = (e_1, -, e_n)$.
Si F est liée on a $\det_B$ est n-linéaire alternée. Alors $\det_B(f_1, -, f_n) = 0$.
Si F est libre alors F est une base donc $\exists \lambda \in \mathbb{R}, \det_B = \lambda \det_F$ voir (Théorème). En particulier,

$$\det_B(f_1, -, f_n) = \lambda \det_F(f_1, -, f_n) \underset{\text{par définition}}{=} \lambda \cdot 1$$

$$\text{Or} \qquad 1 = \det_B(e_1, -, e_n) = \lambda \det_F(e_1, -, e_n) \text{ d'où } \lambda \neq 0$$

D'où $\det_B(f_1, -, f_n) \neq 0$. □

1.3. Déterminant d'un endomorphisme.

Théorème 1.3.1: Soit E un espace vectoriel de dimension n et $f : E \to E$ un endomorphisme. Alors il existe un unique réel $\det(f)$ tel que pour toute application φ n-linéaire alternée, et pour tout $(x_1, -, x_n) \in E$,

$$\varphi(f(x_1), f(x_n)) = \det(f)\varphi(x_1, -, x_n).$$

Remarque: En prenant $x_1, -, x_n = e_1, -, e_n$,

$$\det_B(f(B)) = \det F.$$

Démonstration: Existence: Soit φ une forme n-linéaire alternée non-nulle et
$\psi : E^n \to \mathbb{R}; x_1, -, x_n \mapsto (f(x_1), -, f(x_n))$ qui est une forme n-linéaire alternée. Alors φ et ψ sont proportionnelles, i.e il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\psi = \lambda\varphi$ (Théorème).
Soit Φ une forme n-linéaire alternée quelconque, alors il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\Phi = \alpha\varphi$, et
$\forall x_1, -, x_n \in E$,

$$\Phi(f(x_1), -, f(x_n)) = \alpha\varphi(f(x_1), -, f(x_n)) = \alpha\varphi(\psi(x_1, -, x_n))) = \lambda\Phi(x_1, -, x_n)$$

MYSTIQUE □

Définition 1.3.1: Soit E un espace vectoriel de dimension n et $f : E \to E$ un endomorphisme. On appelle **déterminant de f** le réel $\det(f)$ du Théorème précédent.

Proposition 1.3.1: Soit $f : E \to E$ et $g : E \to E$ deux endomorphismes. Alors,

$$\det(f \circ g) = \det(f)\det(g).$$

Démonstration: Soit $\varphi : E^n \to \mathbb{R}$ une application n-linéaire alternée, $x_1, -, x_n \in E$.
On a:

$$\begin{aligned}\varphi(f \circ g(x_1), -, f \circ g(x_n)) &= \det(f)\varphi(g(x_1), -, g(x_n)) \text{ par definition de} \det(f). \\ &= \det(f)\det(g)\varphi(x_1, -, x_n) \text{ par definition de } \det(g)\end{aligned}$$

Par unicité de $\det(f \circ g)$, $\det(f \circ g) = \det f \det(g)$. □

Proposition 1.3.2: Soit F une famille de vecteurs de E, $f : E \to E$ un isomorphisme d'espace vectoriel, et B une base de E. Alors $f(B)$ est une base de F et

$$\det_{f(B)} f(F) = \det_B F.$$

Démonstration: $\det_{f(B)} f$ et $\det_B$ sont deux formes n-linéaires alternées sur E qui valent 1 sur B donc elles sont égales. □

Théorème 1.3.2: Soit $f : E \to E$ un endomorphisme. Alors, f est bijectif si et seulement si $\det(f) \neq 0$ et on a :

$$\det(f^{-1}) = \frac{1}{\det(f)}.$$

Démonstration: Soit B une base de E un espace vectoriel.
On rappelle f est bijectif $\Leftrightarrow f(B)$ est une base. $\Leftrightarrow \det_B f(B) \neq 0$. Si f est bijectif, $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_E$ donc $\det(f \circ f^{-1}) = \det(\mathrm{id}_E) = \det f \det f^{-1}$ or $\det(\mathrm{id}_E) = 1$
D'où $\det(f^{-1}) = \frac{1}{\det(f)}$. □

1.4. Déterminant d'une matrice carrée.

Définition 1.4.1: Soit $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ une matrice. On appelle **déterminant de A**

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix} := \det_{(e_1,-,e_n)}((a_{11},-,a_{n1}),-,(a_{1n},-,a_{nn}))$$

le déterminant dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$ des n vecteurs colonnes de A .

Théorème 1.4.1: Soit E un espace vectoriel de dimension finie, $f : E \to E$ un endomorphisme. Alors

$$\det f = \det M_{B,B}(f).$$

Où $M_{B,B}(f)$ est la matrice associée à f dans la base B.

Proposition 1.4.1: Soit $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{R}), \lambda \in \mathbb{R}$
1. $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.
2. A inversible $\Leftrightarrow \det A \neq 0$. Si A est inversible alors $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$.
3. $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$.

Démonstration:
1. Soit $f : E \to E$, $g : E \to E$, A, B les matrices associées respectivement à f et g. Alors la matrice associee a $f \circ g$ est $M_{B,B}(f \circ g) = AB$. Ainsi,
$$\det(AB) = \det M(f \circ g) = \det(f \circ g) = \det f \det g = \det A \det B.$$
2. De même en considérant les endomorphismes associés.
3. Par n-linéarité.

□

Remarque (ATTENTION): $\det(A + B) \neq \det(A) + \det(B)$

Théorème 1.4.2: Soit $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$, E un espace vectoriel de dimension n, B une base de E, et $x_1, -, x_n$ tels que $x_i := a_{1i}e_1 + ... + a_{ni}e_n$. Alors

$$\det A = \det_B(x_1, -, x_n).$$

Démonstration: Soit $f : \mathbb{R}^n \to E$; base canonique $\mapsto$ base B $= y_1, -, y_n \mapsto y_1e_1 + ... + y_ne_n$. f est bien un isomorphisme. On a : $f(a_{1i}, -, a_{ni}) = x_i$. D'après la proposition,

$$\det_{f(C)} f(a_{1i}, -, a_{ni}) = \det_C(a_{1i}, -, a_{ni}) = \det A = \det_B(x_1, -, x_n).$$

$\square$

Remarque: Le déterminant est indépendant de la base B choisie.

Définition 1.4.2 (transposée): Soit $A \in M_{p,q}(\mathbb{K})$ avec

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1}, -, a_{1,q} \\ |, -, | \\ a_{p,1}, -, a_{p,q} \end{pmatrix}$$

Alors la transposée est notée ${}^tA \in M_{p,q}(\mathbb{K})$ est la matrice

$${}^tA = \begin{pmatrix} a_{1,1}, -, a_{p,1} \\ |, -, | \\ a_{1,q}, -, a_{p,q} \end{pmatrix}.$$

Théorème 1.4.3 (Admis): Soit $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ une matrice carrée. Alors :

$$\det {}^tA = \det A.$$

Remarque: Conséquence directe: Toutes les propriétés des déterminants qui ont éténdues sur les colonnes sont aussi valables en opérant sur les lignes.

Proposition 1.4.2: Le déterminant est une forme n-linéaire alternée. Ainsi :

1. Il y a n-linéarité du déterminant par rapport aux vecteurs colonnes (ou lignes).
2. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$\alpha \det(\cdot) = \det(\alpha C_i).$$

3. Si on échange deux colonnes, le déterminant est multiplié par −1.
4. $\det A \neq 0 \Leftrightarrow$ les n vecteurs colonnes forment une famille libre

1.5. Déterminant d'une matrice triangulaire par blocs.

Théorème 1.5.1: Soit $A, B \in \mathrm{Mat}(\mathbb{R})$ des matrices carrées, M une matrice carrée de la forme $M = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$. Alors :

$$\det M = \det A \det B.$$

Démonstration: Soit B, C des matrices de dimension n,
$\varphi_{B,C} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}; (c_1, -, c_n)_{\text{vecteurs colonnes}} \mapsto \begin{vmatrix} A & C \\ 0 & B \end{vmatrix}$. $\Phi_{B,C}$ est n-linéaire alternée donc

$$\forall A \in \mathrm{Mat}(\mathbb{R}), \begin{vmatrix} A & C \\ 0 & B \end{vmatrix} = \varphi_{B,C}(c_1, -, c_n) = \lambda_{B,C} \det A.$$

En prenant $A = I_n$, $\det A = 1c_1$ ... incompréhensible...
En faisant des opérations sur les colonnes, $\lambda_B, C = \begin{vmatrix} I_n & 0 \\ 0 & B \end{vmatrix}$ □

Théorème 1.5.2 (même généralisé): Soit M une matrice carrée de la forme
$M = \begin{pmatrix} A_1 & * & \cdots & * \\ 0 & A_2 & * & \vdots \\ & & & \\ 0 & \cdots & 0 & A_k \end{pmatrix}$ avec $(A_i)_{i \in \{1,-,k\}} \in \mathrm{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R})$. Alors

$$\det M = \det A_1 \cdot \ldots \cdot \det A_k$$

Remarque (Cas particulier): Déterminant d'une matrice triangulaire (ou diagonale):

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & \cdots \\ 0 & a_{22} & 0 & \cdots \\ & & & \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} \cdot \ldots \cdot a_{nn}$$

1.6. Développements d'un déterminant par rapport à une colonne.

Définition 1.6.1 (Déterminant mineur): Soit $A = (a_{ij})_{i,j \in \{1,-,n\}} \in \mathrm{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R})$. On appelle **déterminant mineur** de A, relatif à a_{ij}, le determinant d'ordre $n-1$ obtenu en rayant dans A la i-ème ligne et la i-ème colonne. On le note Δ_{ij}.

Définition 1.6.2 (Cofacteur): Soit $A = (a_{ij})_{i,j \in \{1,-,n\}} \in \mathrm{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R})$. On appelle **cofacteur** de A relatif à a_{ij},

$$c(ij) = (-1)^{i+j} \Delta_{ij}.$$

Définition 1.6.3 (Comatrice): Soit $A = (a_{ij})_{i,j \in \{1,-,n\}} \in \mathrm{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R})$. On appelle **comatrice** de A la matrice des cofacteurs $(c_{ij})_{i,j \in \{1,-,n\}}$. On la note $\mathrm{com}\ A$.

Théorème 1.6.1: Développement par rapport à la j-ième colonne.
Soit $A = \left(a_{ij}\right)_{i,j\in\{1,-,n\}} \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$.

$$\det A = a_{1j}c_{1j} + \ldots + a_{nj}c_{nj}$$

Remarque: On a toujours intéret à développer suivant la ligne ou la colonne avec le plus de 0.

Exemple: Développement d'un déterminant par rapport à la deuxième colonne.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & -2 & 1 \\ -3 & -3 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 5 & -3 \end{vmatrix} = -0 * \begin{vmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -3 & 3 & 2 \\ 1 & 5 & -3 \end{vmatrix} + 4 * \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -3 & 3 & 2 \\ 1 & 5 & -3 \end{vmatrix} - (-3) * \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & 5 & -3 \end{vmatrix} + 0 * \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \\ -3 & 3 & 2 \end{vmatrix}.$$

Cette méthode reste très longue, on privilégira donc de faire d'abord en amont un pivot de Gauss sur la matrice afin d'intégrer le plus de 0 à la matrice: $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & -2 & 1 \\ -3 & -3 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 5 & -3 \end{vmatrix} \underset{C_3-C_1}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & -4 & 1 \\ -3 & -3 & 6 & 2 \\ 1 & 0 & 4 & 9 \end{vmatrix}$ D'où

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & -2 & 1 \\ -3 & -3 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 5 & -3 \end{vmatrix} = 1 * \begin{vmatrix} 4 & -4 & 1 \\ -3 & 6 & 2 \\ 0 & 4 & -3 \end{vmatrix} \underset{C_2+c_1}{=} \begin{vmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -3 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & -3 \end{vmatrix} \underset{C_1-4C_3}{=} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -11 & 3 & 2 \\ 12 & 4 & -3 \end{vmatrix} \underset{\text{par dvlp}}{=} 1 \begin{vmatrix} -11 & 3 \\ 12 & 4 \end{vmatrix}$$
$$= -11 * 4 - 3 * 12 = -44 - 36 = -80.$$

Corollaire 1.6.1: Soit $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$. On a :

$$A^t(\mathrm{com}A) = \det(A)I_n = {}^t(\mathrm{com}\ A)A$$

En particulier, si A est inversible,

$$A^{-1} = \frac{{}^t(\mathrm{com}A)}{\det A}$$

Démonstration: $\mathrm{com}(A)_{ij} = C_{ij}$ donc ${}^t\mathrm{com}(A)_{ij} = C_{ji}$. Les coefficients du produit matriciel $A^t\mathrm{com}(A)$ sont égaux à

$$\left(A({}^t\mathrm{com}\ A)\right)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\left({}^t\mathrm{com}\ A\right)_{kj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}c_{jk} = \begin{cases} \det A & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

Car le déterminant comporte deux fois les lignes a_{11}, a_{1k}, a_{in}... On obtient l'autre formule en développant par rapport à une colonne. □

Exemple: $A = \begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix}$ Alors com $A = \begin{pmatrix} b' & -a' \\ -b & a \end{pmatrix}$.

$\det(A) = ab' - ba'$. $A^{-1} = \frac{1}{ab'-ba'}\begin{pmatrix} b & -b' \\ -a' & a \end{pmatrix}$ En déduire si $ab' - ba' \neq 0$.
$\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$ admet comme unique solution

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A^{-1}\begin{pmatrix} c \\ c' \end{pmatrix} = \frac{1}{ab' - ba'}\begin{pmatrix} b'c - c'b \\ -a'c + ac' \end{pmatrix} => x = \frac{\begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}} \text{ et } y = \frac{\begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}}$$

1.7. Formule de Cramer.

Théorème 1.7.1: Soit (S) le système de n équations à n inconnues: $\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = y_1 \\ \ldots = \ldots \\ a_{n1}x_1 + \ldots + a_{nn}x_n = y_n \end{cases}$

Soit $A = \left(a_{ij}\right)_{i,j \in \{1,-,n\}}$ (S) admet une unique solution si et seuleument si det $A \neq 0$. Dans ce cas, la solution est donnée par

$$x_k = \frac{1}{\det(A)}\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,k-1} & y_1 & a_{1,k+1} & \cdots & a_{1n} \\ & . & . & . & . & . & \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,k-1} & y_n & a_{n,k+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

La k-ième colonne est remplacée par le vecteur de second membre.

Chapitre 2

2. 2

2.1. Rappels sur les équations linéaires.

Proposition 2.1.1: Soit E, F deux sous espaces vectoriels, $y \in F$ l'ensemble des solutions $x \in E$ de l'équation linéaire de second membre $f(x) = y$ est vide si $y \notin \mathfrak{I}(f)$, est de la forme $x_0 + \ker(f)$, x_0 solution particulière si $y \in \mathfrak{I}(f)$.

Démonstration: Si l'ensemble des solutions $x \in E$ de $f(x) = y$ n'est pas vide, il existe $x_0 \in E$ telle que $f(x_0) = y$. Soit $x \in E$. Alors x est solution de

$$f(x) = y \Leftrightarrow f(x) = f(x_0) \Leftrightarrow f(x - x_0) = 0 \Leftrightarrow x - x_0 \in \ker(f).$$

□

Définition 2.1.1: Soit E un espace vectoriel, $F_1, -, F_p$ des sous espaces vectoriels de E. On appelle **somme de Minkowski** l'ensemble des vecteurs de la forme $x_1 + ... + x_p$ avec $x_i \in F_i$ est un sous-espace vectoriel de E noté $F_1 + ... + F_p$.

Proposition 2.1.2: La somme de Minkowski est associative, commutative et 0 est l'unique élément neutre.

Définition 2.1.2: On dit que la somme $F_1 + ... + F_p$ est **directe** si pour tout vecteur $x_1 \in F_1, -, x_n \in F_n$ on a l'implication $x_1 + ... + x_p = 0 \Rightarrow x_1 = ... = x_p = 0$. Dans ce cas on la note $F_1 \oplus ... \oplus F_p$.

Proposition 2.1.3: La somme $F_1 + ... + F_p$ est directe si pour tout vecteur x_1 « de » $F_1, ..., x_n$ de F_n, l'ecriture $x_1 + ... + x_n$ est unique

Démonstration: Supposons par absurde que $x_1 + ... + x_n = y_1 + ... + y_n$ avec $x_i, y_i \in F_i$.
$(x_1 - y_1) + ... + (x_n - y_n) = 0$. Comme $F_1 \oplus ... \oplus F_p$, $x_1 - y_1 = 0, -, x_n - y_n = 0$ □

Proposition 2.1.4: La somme $F_1 + F_2$ est directe si et seulement si $F_1 \cap F_2 = \{0\}$

Démonstration:
$\Rightarrow$ Supposons $F_1 \oplus F_2$.
Soit $x \in F_1 \cap F_2$. donc $x \in F_1, x \in F_2$. $x_{\text{de } F_1} - x_{\text{de } F_2} = 0$ Comme $F_1 \oplus F_2$, on a $x_{\text{de } F_1} = x_{\text{de } F_2} = 0$ donc $f_1 \cap F_2 = \{0\}$.
$\Leftarrow$ Supposons $F_1 \cap F_2 = \{0\}$. Soient $x_1 \in F_1, x_2 \in F_2$ tel que $x_1 + x_2 = 0$ $x_1 = -x_2 \in F_1 \cap F_2 = \{0\}$. □

Proposition 2.1.5: Si la somme $F_1 + ... + F_n$ est directe alors

$$\forall i \neq j, F_i \cap F_j = \{0\}$$

Proposition 2.1.6: Soit F_1, F_2 des espaces vectoriels de dimension p et q, $B_1 = (e_1, -, e_p)$ et $B_2 = (e_{p+1}, -, e_{p+q})$ des bases resepctives de F_1 et F_2. Alors la réunion des bases est une base de la somme $F_1 + F_2$ si et seulement si la somme est directe. En particulier,

$$\dim(F_1 \oplus F_2) = \dim(F_1) + \dim(F_2).$$

Démonstration: Montrons que $(e_1, -, e_n)$ est une famille génératrice de la somme $F_1 + F_2$.
Soit $y \in F_1 + F_2 \Rightarrow \exists x_1 \in F_1, x_2 \in F_2, y = x_1 + x_2$. Comme $(e_1, -, e_n)$ engendre F_1,

$$\exists \alpha_1, -, \alpha_p \in \mathbb{R}, x_1 = \sum_{i=0}^{p} \alpha_i e_i \quad \text{de même,} \quad \exists \alpha_{p+1}, -, \alpha_{p+q} \in \mathbb{R}, x_1 = \sum_{i=p+1}^{p+q} \alpha_i e_i$$

□

2.2. Décomposition d'un espace vectoriel en sous-espace vectoriels stables.

Définition 2.2.1 (stable): Soit E un esapce vectoriel de dimension finie. Soit $u : E \to E$ une application linéaire. Soit F un sous espace vectoriel de E. On dit que F est stable par u si $u(F) \subset F$, i.e,

$$\forall x \in F, u(x) \in F.$$

Définition 2.2.2: Soit F un sous-espace vectoriel de E stable par u. La restriction de u à F, définie par: $u|_F : F \to E$ induit une application linéaire de F dans F que par abus de notation on notera $u|_F$.

VOIR COURS

2.3. Sous- espaces propres.

Définition 2.3.1 (Valeur propre): Soit E un espace vectoriel de dimension finie ou infini,$u : E \to E$, et $\lambda \in \mathbb{R}$. On dit que λ est une **valeur propre** de u s'il existe un vecteur x non nul de E tel que $u(x) = \lambda x$.

Définition 2.3.2: Soi λ une valeur propre de u. On appelle vecteur de u (associé a la valeur propre λ) tout vecteur x non nul de E tel que $u(x) = \lambda x$.

Proposition 2.3.1: Soi $\lambda \in \mathbb{R}$, λ est une valeur propre de u si et seulement si

$$\ker(u + \lambda \operatorname{id}_E) \neq \{0\} \Leftrightarrow (u - \lambda \operatorname{id}_E) \text{ n'est pas injectif.}$$

Démonstration: Soit $x \in E$.
$u(x) = \lambda x \Leftrightarrow u(x) = \lambda \operatorname{id}_E(x) \Leftrightarrow u(x) - \lambda \operatorname{id}_E(x) = 0 \Leftrightarrow X \in \ker(u - \lambda \operatorname{id}_E)$ □

Définition 2.3.3 (sous-espaces propres): Soit $u : E \to E$, et λ une valeur propre de u. On appelle sous-espace propre associé à la valeur propre λ le sous-espace vectoriel stable par u, $\ker(u - \lambda \operatorname{id}_E)$.

Théorème 2.3.1: Soit $\lambda_1, -, \lambda_p$ p valeurs propres distinctes de u. Alors

$$\ker(u - \lambda_1 \operatorname{id}_E) \oplus \dots \oplus \ker\left(u - \lambda_p \operatorname{id}_E\right).$$

Démonstration: Initialisation : $p = 1$. Il n'y a rien a démontrer.
Hérédité. Supposons la proposition vraie à un rang $p - 1$ l'est-elle au rang p ?
Soit $x_i \in \ker(u - \lambda_i \operatorname{id}_E)$ tels que $\sum x_i = 0$. En appliquant u à cette équation, on obtient $\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_p x_p = 0$.

$$\begin{cases} x_1 + \dots + x_p & = 0 \\ \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_p x_p & = 0 \end{cases} \underset{L_2 - \lambda_p L_1}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x_1 + \dots + x_p & = 0 \\ \left(\lambda_1 - \lambda_p\right) x_1 + \dots + \lambda_{p-1} x_{p-1} & = 0 \end{cases}.$$

Comme la somme est directe, on a $\left(\lambda_1 - \lambda_p\right) x_1 = \dots = \left(\lambda_p - 1 - \lambda_p\right) x_{p-1} = 0$.
Comme λ_i sont distincts, $x_1 = \dots = x_{p-1} = 0$, on obtient $x_p = 0$. On a montré que la somme $\ker(u - \lambda_1 \operatorname{id}_E) + \dots + \ker\left(u - \lambda_p \operatorname{id}_E\right)$ est directe. □

Proposition 2.3.2: Soit E un espace vectoriel de dimension n, $u : E \to E$ une application linéaire et $\lambda \in \mathbb{R}$. λ est une valeur propre si et seulement si $\det(u - \lambda \operatorname{id}_E) = 0$.

2.4. Polynomes caractéristique.

Définition 2.4.1: On appelle polynôme caractéristique de u noté X_u la fonction
$\mathrm{X}_u(X) \coloneqq \det(X \operatorname{id}_E - u)$.

Proposition 2.4.1: Soit E un espace vectoriel de dimension n, et $u : E \to E$ une application linéaire. Le polynome caractéristique de u, X_u est un polynome unitaire de la forme

$$\mathrm{X}_u(X) = X^n - \operatorname{tr}(u) X^{n-1} + \dots + (-1)^n \det(u).$$

avec $\operatorname{tr} u \coloneqq$ « somme des éléments sur la diagonale de la matrice »

Exemple: Considérons $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4;\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 3x+y+z+t \\ x+3y+z+t \\ x+y+3z+t \\ x+y+z+3t \end{pmatrix}$. Soit A la matrice associée à f dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$. $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

$$\mathrm{X}_f(X) = \det(X\,\mathrm{id}_{\mathbb{R}^4} - f) = \det(XI_4 - A) = \det\left(X\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix} - A\right) = \begin{vmatrix}X-3&-1&-1&-1\\-1&X-3&-1&-1\\-1&-1&X-3&-1\\-1&-1&-1&X-3\end{vmatrix}$$

$$\underset{C_1+\ldots+C_4}{=} \begin{vmatrix}X-6&-1&-1&-1\\X-6&X-3&-1&-1\\X-6&-1&X-3&-1\\X-6&-1&-1&X-3\end{vmatrix} = (x-6)\begin{vmatrix}1&-1&-1&-1\\1&X-3&-1&-1\\1&-1&X-3&-1\\1&-1&-1&X-3\end{vmatrix}$$

$$= (X-6)\begin{vmatrix}1&-1&-1&-1\\0&X-2&0&0\\0&0&X-2&0\\0&0&0&X-2\end{vmatrix}_{\substack{L_1\\L_2-L_1\\L_3-L_1\\L_4-L_1}} = (X-6)(X-2)^3.$$

Corollaire 2.4.1: Les racines du polynome caracteristique d'une application u sont exactement les valeurs propres de u.