Calcul intégral et applications

Table des matières

Chapitre 1: Espaces et applications mesurables.

1. Ensembles et applications.

Proposition 1.1. Soit E un ensemble et $(A_i)_{i\in I}$ une collection quelconque de sous-ensembles de E.
(1) $E \setminus \bigcap_{i\in I} A_i = \bigcup_{i\in I} E \setminus A_i$.
(2) $E \setminus \bigcup_{i\in I} A_i = \bigcap_{i\in I} E \setminus A_i$

Définition 1.2. Soit E et F deux ensembles quelconques et soit $f : E \to F$ une application quelconque. L'image par f d'un sous-ensemble $A \subset E$ est le sous ensemble de F noté f(A) défini par : $f(A) = \{y \in F, \exists x \in A, y = f(x)\} = \{f(x), x \in A\}$.
L'image réciproque d'un sous-ensemble $B \subset F$ est le sous-ensemble noté $f^{-1}(B)$ de E et défini par $f^{-1}(B) = \{x \in E, f(x) \in B\}$.

2. Espaces mesurables.

2.1. Tribus.

Définition 2.1 (Tribu). Soit E un ensemble quelconque, $\mathcal{P}(E)$ désigne l'ensemble des parties de E. On appelle *tribu* sur E (ou σ-algèbre) une famille de parties de E, $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(E)$ telle que :
(1) $\emptyset \in \mathcal{A}$,
(2) Si $A \in \mathcal{A}$ alors $A^c \in \mathcal{A}$.
(3) Si $(A_n)_{n\in N}$ est une suite d'éléments de $\mathcal{A}$, alors $\bigcup_{n\geq 1} A_n \in \mathcal{A}$.

Remarques 2.2.
(1) Pour toute famille $(B_i)_{i\in I}$ de $\mathcal{P}(E)$,

$$\left(\bigcup_{i\in I} B_i\right)^c = \bigcap_{i\in I} (B_i)^c \text{ et } \left(\bigcap_{i\in I} B_i\right)^c = \bigcup_{i\in I} (B_i)^c$$

(2) On peut remplacer le point (3) de la définition par : Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$, est une suite de $\mathcal{A}$ alors $\bigcap_{n\in I} A_n \in \mathcal{A}$.
(3) De même, par le point (2), on peut remplacer le premier point par $E \in \mathcal{A}$.

Exemples 2.3.
1. $\mathcal{P}(E)$ est une tribu sur E. C'est la tribu *fine* sur E.
2. $\{\emptyset, E\}$ est une tribu sur E. C'est la tribu *grossière* sur E.
3. Si $A \subset E$ est un sous-ensemble de E, $\{\emptyset, A, A^c, E\}$ est une tribu sur E.
4. $\{A \in \mathcal{P}(E) \mid A$ ou A^c est au plus dénombrable ou $\}$ est une tribu sur E.

Définition 2.4 (Espace mesurable)**.** Soit E un ensemble et A une tribu sur E. Le couple $(E, \mathcal{A})$ est appelé un *espace mesurable*.

Définition 2.5 (Ensemble mesurable)**.** Soit E un ensemble et A une tribu sur E. Les éléments d'une tribu A sont appelés les *ensembles mesurables* ou les parties mesurables de $(E, \mathcal{A})$.

Proposition 2.6. Une intersection quelconque de tribus sur E est une tribu sur E.

Démonstration. Soit $(\mathcal{A}_i)_{i\in I}$ une famille de tribus sur E. Posons $\mathcal{A} = \bigcap_{i\in I} \mathcal{A}_i$.
(1) $\emptyset \in \mathcal{A}$ car $\emptyset \in (\mathcal{A}_i)_{i\in I}$.
(2) Soit $A \in \mathcal{A}$ alors $A \in (\mathcal{A}_i)_{i\in I}$ donc $A^c \in (\mathcal{A}_i)_{i\in I}$ car les $\mathcal{A}_i$ sont des tribus donc $A^c \in \bigcap_{i\in I} \mathcal{A}_i$.
(3) Soit $(A_n)_{n\geq 1}$ une suite d'éléments de $\mathcal{A}$. Alors $(A_n)_{n\geq 1} \in (\mathcal{A}_i)_{i\in I}$ donc $\bigcup_{n\geq 1} A_n \in \mathcal{A}_{i\in I}$. Ainsi, $\bigcup_{n\geq 1} A_n \in \bigcap_{i\in I} \mathcal{A}_i$.

□

Corollaire 2.7. Soit $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(E)$ une famille de parties de E. L'intersection de toutes les tribus sur E qui contiennent $\mathcal{C}$ est une tribu sur E.

Démonstration. Application directe de la proposition précédente. □

Définition 2.8 (Engendrée)**.** On appelle tribu *engendrée* par $\mathcal{C}$ la tribu notée par

$$\sigma(\mathcal{C}) := \{\cap \mathcal{A} \mid \mathcal{A} \text{ soit tribu sur } E \text{ et } \mathcal{C} \subset \mathcal{A}\}.$$

Remarque 2.9. $\sigma(\mathcal{C})$ est la plus petite des tribus sur E qui contiennent $\mathcal{C}$, i.e si $\mathcal{A}$ est une tribu qui contient $\mathcal{C}$ alors $\sigma(\mathcal{C}) \subset \mathcal{A}$

Exemples 2.10.
1. Soit $A \subset E$. Alors $(\sigma(\{A\})) = \{\emptyset, E, A, A^c\}$.
2. La tribu engendrée par les singletons sur E est égale à la tribu engendrée par les ensembles dénombrables et on a $\sigma(\{x\} \mid x \in E\}) = \sigma(A \in \mathcal{P}(E) \mid A$ est au plus dénombrable$)$ = $\{A \in \mathcal{P}(E) \mid A$ ou A^c est au plus dénombrable$\}$.

2.2. Rappels sur la topologie.

Définition 2.11 (Topologie)**.** Soit E un ensemble quelconque, $O \subset \mathcal{P}(E)$ une famille de parties de E. On dit que O est une *topologie* sur E si elle vérifie :
(1) $\emptyset \in O$ et $E \in O$.
(2) Si $(A_i)_{i\in I}$ est une famille quelconque de O alors $\bigcup_{i\in I} A_i \in O$.
(3) Pour toute famille finie d'élements de O, $(A_1, \cdots, A_n)$, $\bigcap_{k\in\{1,\dots,n\}} A_k \in O$.

Les éléments d'une topologie sont appelés les ouverts.

Proposition 2.12. Une intersection quelconque de topologies est une topologie.

Corollaire 2.13. Soit $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(E)$ une famille de parties de E. L'intersection de toutes les topologies sur E qui contiennent $\mathcal{C}$ est une topologie sur E.

Définition 2.14. Un ensemble E muni d'une topologie $\mathcal{O}$ est appelé un *espace topologique*.

Définition 2.15 (Tribu borélienne)**.** Soit $(E, \mathcal{O})$ un espace topologique. On appelle tribu borélienne sur E notée $\mathcal{B}(E)$ la tribu engendrée par la topologie $\mathcal{O}$; $\mathcal{B}(E) = \sigma(\mathcal{O})$.

Remarque 2.16. Dans la suite de ce cours nous ne considérons que les tribus boréliennes sur $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ ou des sous-ensembles de $\overline{\mathbb{R}}$ et sur $\mathbb{R}^d$ pour $d \geq 1$.

Notation 2.17. On note $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ la tribu borélienne sur $\mathbb{R}$ engendrée par la topologie usuelle (euclidienne).

Proposition 2.18. La tribu borélienne sur $\mathbb{R}$ est définie par :

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma(\{]a, b[, a < b \in \mathbb{R}\}) = \sigma(\{] - \infty, a[, a \in \mathbb{R}\}) = \ldots$$

Démonstration. Soit $O(\mathbb{R})$ la topologie sur $\mathbb{R}$, i.e l'ensemble des ouverts de $\mathbb{R}$. Par définition, $\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma(\mathcal{O}(\mathbb{R}))$. On a $a, b \in \mathbb{Q}, a < b,]a, b[\in \mathcal{O}(\mathbb{R})$ et donc $\sigma(\{]a, b[, a, b \in \mathbb{Q}\}) \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma(\mathcal{O}(\mathbb{R}))$.
Réciproquement, soit $A \in \mathcal{O}(\mathbb{R})$. Rappelons que $A = \bigcup_{]a,b[\subset A,(a,b)\in\mathbb{Q}^2}]a, b[$.
Cela entraine que $A \in \sigma(\{]a, b[, a, b \in \mathbb{R}\})$. On conclut que

$$\mathcal{O}(\mathbb{R} \subset \sigma(\{]a, b[, a, b \in \mathbb{Q}\}) \Rightarrow \sigma(\mathcal{O}(\mathbb{R})) \subset \sigma(\{]a, b[, a, b \in \mathbb{Q}\}).$$

Montrons que $\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma(\{] - \infty, a[, a \in \mathbb{Q}\})$. Soit $a \in \mathbb{Q}$ de telle sorte que

$$] - \infty, a[\subset \mathcal{O}(\mathbb{R}) \Rightarrow] - \infty, a[\in \sigma(\mathcal{O}(\mathbb{R})) = \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

On fait de même avec $] - \infty, a[, [a, +\infty[\ldots$ □

Proposition 2.19. La tribu boréienne sur $\mathbb{R}^d$ est engendrée par l'ensemble des pavés ouverts dont les extremités sont rationnelles $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d) = \sigma(\{]a_1, b_1[x\ldots x]a_d, b_d[, a_i, b_i \in \mathbb{Q}\})$.

Définition 2.20. On définit sur $\overline{\mathbb{R}}$ la tribu borélienne par

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma(\{[-\infty, a[, a \in \mathbb{R}\} \cup \{]a, +\infty], a \in \mathbb{R}\})$$

Définition 2.21 (Tribu trace)**.** Soit $(E, \mathcal{A})$ un espace mesurable, $B \subset E$ un sous-ensemble de E. On appelle *tribu trace* de $\mathcal{A}$ sur B la tribu $\mathcal{A}_B \coloneqq \{A \cap B, A \in \mathcal{A}\}$

Proposition 2.22. $\mathcal{A}_B$ est une tribu sur B.

Démonstration. $\emptyset \in \mathcal{A}_B$, $C = A \cap B \in \mathcal{A}_B$. Alors $B \setminus C = B \cap E \setminus A$.
$b_i(c_n)$ est une suite de $\mathcal{A}_B$, alors $\cup C_n = \cup A_n \cap B = (\cup A_n) \cap B \in \mathcal{A}_B$. □

Exemple 2.23. Par exemple $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ est la tribu trace de $\mathcal{B}\left(\overline{\mathbb{R}}\right)$ sur $\mathbb{R}$. Soit $\overline{\mathbb{R}}_+ = \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\} = [0, +\infty]$. On définit la tribu $\mathcal{B}\left(\overline{\mathbb{R}}_+\right)$ comme la tribu trace de $\mathcal{B}\left(\overline{\mathbb{R}}\right)$ sur $\overline{\mathbb{R}}_+$ On étendra la multiplication sur $\overline{\mathbb{R}}_+$ en posant : $\forall x \in]0, +\infty[, x \cdot +\infty = +\infty \cdot x = +\infty$ et $0 \cdot +\infty = +\infty \cdot 0 = 0$.

2.3. Applications mesurables.

Remarques 2.24.

(1) Soit $f : E \to F$ une application, $C \subset F$. L'image réciproque de C par f est défini par $f^{-1}(C) = \{x \in E, f(x) \in C\}$.
(2) $f^{-1}\left(\bigcup_{i\in I} C_i\right) = \bigcup_{i\in I} f^{-1}(C_i)$ et $f^{-1}\left(\bigcap_{i\in I} C_i\right) = \bigcap_{i\in I} f^{-1}(C_i)$.

Définition 2.25 (Image réciproque)**.** Soit E et F deux ensembles, $f : E \to F$ une application. L'image réciproque d'une famille de parties $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(F)$ par f comme : $f^{-1}(\mathcal{C}) = \left\{f^{-1}(c), c \in \mathcal{C}\right\}$.

Proposition 2.26. Soit $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(F)$ une tribu sur F. Alors $f^{-1}(\mathcal{B})$ est une tribu sur E.

Démonstration.
(1) $f^{-1}(\varnothing) = \varnothing \in f^{-1}(\mathcal{B})$.
(2) Soit $B \in \mathcal{B}$. $f^{-1}(F \setminus B) = E \setminus f^{-1}(B)$. Or $f^{-1}(B) \in f^{-1}(\mathcal{B})$ et $f^{-1}(F \setminus B) \in f^{-1}(\mathcal{B})$ donc $E \setminus f^{-1}(B) \in f^{-1}(\mathcal{B})$.
(3) Soit $(A_n)_{n\geq 1}$ une suite de $f^{-1}(\mathcal{B})$, $(B_n)_{n\in N} \in B$. Alors $f^{-1}(B_n) = A_n$ et $\cup f^{-1}(\cup B_n) \in f^{-1}(\mathcal{B})$.

$\square$

Proposition 2.27. Soit $f : E \to F$ une application quelconque et $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(F)$ une famille de parties de F.

$$\sigma\left(f^{-1}(\mathcal{C})\right) = f^{-1}(\sigma(\mathcal{C})).$$

Définition 2.28 (Appl mesurable)**.** Soit $(E, \mathcal{A}), (F, \mathcal{B})$ deux espaces mesurables. Une application $f : E \to F$ est dite $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$*-mesurable* si $f^{-1}(\mathcal{B}) \subset \mathcal{A}$.

Remarque 2.29. Cela revient à dire $\forall B \in \mathcal{B}, f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$.

Notation 2.30.
(1) $f : (E,\mathcal{A}) \to (F,\mathcal{B})$ signifie que f est $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$-mesurable.
(2) S'il n'y a pas de confusion possible, on pourra dire que f est mesurable.

Exemple 2.31. Soit $f : (E, \mathcal{A}) \to [0, 1]$. Par défaut, $[0, 1]$ muni de la tribu borélienne sur $[0, 1]$. Une application mesurable à valeurs dans (une partie de) $\overline{\mathbb{R}}$ sera toujours appelée une fonction borélienne.

Proposition 2.32. Soit $(E, \mathcal{A}), (F, \mathcal{B})$ des espaces mesurables. Soit $\mathcal{C} \subset \mathcal{B}$ tel que $\mathcal{B} = \sigma(\mathcal{C})$. Alors f est $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$-mesurable si et seulement si $f^{-1}(\mathcal{C}) \subset \mathcal{A}$.

Démonstration. Remarquons que $f^{-1}(\mathcal{C}) \subset f^{-1}(\mathcal{B})$ car $\mathcal{C} \subset \mathcal{B}$. Par conséquent si f est mesurable, $f^{-1}(\mathcal{C}) \subset \mathcal{A}$.
Supposons maintenant que $f^{-1}(\mathcal{C}) \subset \mathcal{A}$. Par la Proposition 2.27, $\sigma\left(f^{-1}(\mathcal{C})\right) = f^{-1}(\sigma(\mathcal{C})) = f^{-1}(\mathcal{B})$ donc $f^{-1}(\mathcal{B}) \subset \mathcal{A}$. Donc f est mesurable. $\square$

Corollaire 2.33. Toute fonction monotone $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est mesurable (borélienne).

Démonstration. En effet, l'image réciproque d'un intervalle par une fonction monotone est une intervalle. Puisque $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ est engendré par les intervalles, ce corollaire se déduit de la proposition ci dessus avec $\mathcal{C} = \{\text{intervalles de } \mathbb{R}\}, \mathcal{A} = \mathcal{B} = \mathbb{R}$. $\square$

Notation 2.34. Soit $f : (E, \mathcal{A}) \to \mathbb{R}$.
(1) Pour tout $a \in \mathbb{R}$, on note $\{f < a\} := f^{-1}(]-\infty, a[) = \{x \in E, f(x) < a\}$;
(2) Pour tout $a \in \mathbb{R}$, on note $\{f \leq a\} = f^{-1}\{]-\infty, a]\}$
(3) ...

(4) Pour tout $a, b \in \mathbb{R}_+$, $a < b$ on note $\{a < f < b\} := f^{-1}(]a, b[)$
(5) ...

Définition 2.35 (Continue)**.** Soit $(E, \mathcal{O}_E), (F, \mathcal{O}_F)$ deux espaces topologiques, $f : E \to F$. On dit que f est *continue* si pour tout $\mathcal{B} \in \mathcal{O}_F$, $f^{-1}(\mathcal{B}) \in \mathcal{O}_E$.

Exercice 1. Vérifier que cette définition est bonne pour les $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Proposition 2.36. Soit $(E, \mathcal{O}_E), (F, \mathcal{O}_F)$ deux espaces topologiques munis respectivement de leur tribu borélienne $\mathcal{B}(F)$ et $\mathcal{B}(E)$. Alors toute application $f : E \to F$ continue est $(\mathcal{B}(E), \mathcal{B}(F))$ -mesurable.

Démonstration. Soit $f : E \to F$ continue. Alors, $f^{-1}(\mathcal{O}_F) \subset \mathcal{O}_E$ donc $\sigma\big(f^{-1}(\mathcal{O}_F)\big) \subset \sigma(\mathcal{O}_E)$.
Soit $f^{-1}(\sigma(\mathcal{O}_F)) \subset \sigma(\mathcal{O}_E)$ donc $f^{-1}(\mathcal{B}(F)) \subset \mathcal{B}(E)$. Ainis, f est bien $(\mathcal{B}(E), \mathcal{B}(F))$-mesurable. ☐

Remarque 2.37. On retiendra que si I et J sont deux intervalles de $\mathbb{R}$ et $f : I \to J$ une application continue alors f est borélienne.

Proposition 2.38. Soit $(E, \mathcal{A}), (F, \mathcal{B}), (G, \mathcal{C})$ trois espaces topologiques mesurables, $f : E \to F, g : F \to G$ deux applications mesurables. Alors $g \circ f : E \to G$ est mesurable.

Démonstration. Remarquons d'abord que pour toute partie $C \subset G$, $(g \circ f)^{-1}(P) = \big(f^{-1} \circ g^{-1}\big)(P)$. Ainsi, $(g \circ f)^{-1}(\mathcal{C}) = f^{-1}\big(g^{-1}(\mathcal{C})\big)$. De plus, $g^{-1}(\mathcal{C}) \subset \mathcal{B}$ Ainsi, on a $f^{-1}\big(g^{-1}(\mathcal{C})\big) \subset f^{-1}(\mathcal{B}) \subset \mathcal{A}$, D'où la mesurabilité de $f \circ g$. ☐

Exemples 2.39.
1. Si $f : (E, \mathcal{A}) \to \mathbb{R}$ est une fonction borélienne alors $|f| : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction borélienne.
2. Si $f : (E, \mathcal{A}) \to \mathbb{R} \setminus 0$ est borélienne, alors $\frac{1}{f}$ l'est aussi.

Proposition 2.40. Soit $f = (f_1, f_2) : (E, \mathcal{A}) \to \mathbb{R}^2$. f est $(\mathcal{A}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^2))$-mesurable si et seulement si $f_1 : (E, \mathcal{A}) \to \mathbb{R}$ et $f_2 : (E, \mathcal{A}) \to \mathbb{R}$ sont mesurables.

Démonstration.
$\Rightarrow$ Soit $(\pi_1, \pi_2) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ les projections canoniques $\pi_i(x_1, x_2) = x_i$. π_i sont continues donc $\big(\mathcal{B}(\mathbb{R}^2), \mathcal{B}(\mathbb{R})\big)$-mesurables. De plus, $f_1 = \pi_1 \circ f$ et $f_2 = \pi_2 \circ f$. Par conséquent, si f est mesurable alors f_1 et f_2 le sont.
$\Leftarrow$ Supposons que f_1 et f_2 sont mesurables. Soit $]a_1, b_1[x]a_2, b_2[$ une partie de $\mathbb{R}^2$ alors on vérifie que $f^{-1}(]a_1, b_1[x]a_2, b_2[) = f_1^{-1}(]a_1, b_1[) \cap f_2^{-1}(]a_2, b_2[) \in \mathcal{A}$. On amontré que l'image réciproque de tout pavé de $\mathbb{R}^2$ par f est dans $\mathcal{A}$.
Comme $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ est engendré par les pavés, on a bien $f^{-1}(\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)) \subset \mathcal{A}$. ☐

Proposition 2.41. Soit $f : (E, \mathcal{A}) \to \mathbb{R}$, $g : (E, \mathcal{A}) \to \mathbb{R}$ deux fonctions boréliennes, $\lambda \in \mathbb{R}$
(1) $\lambda f + g$ est borélienne pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$,
(2) fg est borélienne.

Démonstration.
(1) Posons $\varphi(x) = (f(x), g(x))$, $\psi(s, t) = \alpha s + t$.

On écrit $\lambda f + g = \psi \circ \varphi$. Alors puisque f et g sont boréliennes, $\varphi(f, g)$ est borélienne par la Proposition 2.40. De plus, $\psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est une fonction continue donc borélienne. Ainsi en appliquant Proposition 2.38, on obtient bien que $\lambda f + g$ est borélienne.

(1) On raisonne ici de la même manière en posant $\psi(s,t) = st$ une fonction continue.

$\square$

Remarque 2.42. Le point (1) se généralise à toute combinaisaon linéaire finie de fonctions boréliennes.

3. Fonctions indicatrices.

Proposition 3.1. Soit $(E, \mathcal{A})$ un espace mesurable et $A \subset E$. Alors l'application $\mathbb{1}_A : (E, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ est mesurable si et seulement si $A \in \mathcal{A}$.

Démonstration. $\mathbb{1}_A : E \to \{0,1\} \subset \mathbb{R}$. Remarquons d'abord que si $B \subset \mathbb{R}$ alors

$$\mathbb{1}_A^{-1}(B) = \begin{cases} \varnothing \text{ si } 0 \notin B \wedge 1 \notin B \\ E \text{ si } 0 \in B \wedge 1 \in B \\ A \text{ si } 1 \in B \wedge 0 \notin B \\ A^c \text{ si } 1 \notin B \wedge 0 \in B \end{cases}.$$

Supposons $\mathbb{1}_A$ mesurable alors puisque $\{1\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $\mathbb{1}_A^{-1}(\{1\}) = A \in \mathcal{A}$.
Supposons que $A \in \mathcal{A}$ alors pour tout $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $\mathbb{1}_A^{-1} = \varnothing$ ou E ou A ou $A^c \in \mathcal{A}$ D'ou $\mathbb{1}_A$ mesurable.
$\square$

Définition 3.2 (Fonction étagée)**.** Soit $(E, \mathcal{A})$ un espace mesurable, $\alpha_1, \cdots, \alpha_n \in \mathbb{R}$, $A_1, \cdots, A_n \in \mathcal{A}$. On appelle *fonction étagée* toute application $f : (E, \mathcal{A}) \to \mathbb{R}$ telle que

$$f = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \mathbb{1}_{A_k}.$$

Proposition 3.3. Les fonctions étagées sont mesurables.

Démonstration. Application des propositions précédentes $\square$

Proposition 3.4. Une fonction étagée est une fonction mesurable de $(E, \mathcal{A})$ dans $\mathbb{R}$ qui prend un nombre fini de valeurs.

Démonstration. Soit $f : (E, \mathcal{A}) \to \mathbb{R}$ une fonction borélienne qui prend les valeurs $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ deux à deux distinctes. Alors on peut écrire $f = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \mathbb{1}_{\{f=\alpha_k\}}$. Soit x tel que $f(x) = \alpha_i$ alors $\mathbb{1}_{\{f=\alpha_k\}}(x) = 1$ si $k = i$ et 0 si $k \neq i$. $\square$

Remarque 3.5. L'ecriture $f = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \mathbb{1}_{\{f=\alpha_k\}}$ est l'écriture canonique des fonctions étagées. En effet, une fonction étagée peut s'écrire sous la forme $\sum \alpha_i A_i$ de plusieurs manières si les (A_i) ne constituent pas une partition de E.

Exemple 3.6. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $x \mapsto 2\mathbb{1}_{[0,1]} + \mathbb{1}_{]1,2]}$. Alors f admet aussi lécriture $f(x) = 2\mathbb{1}_{[-1,1]} + \mathbb{1}_{]1,2]} - 2\mathbb{1}_{[-1,0[}$

Proposition 3.7. Une application $\delta : (E, \mathcal{A}) \to (\mathbb{C}, \mathcal{B}(\mathbb{C}))$ est mesurable si et seulement si les applications $\mathrm{Re}\,(f) : (E, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ et $\mathrm{Im}\,(f) : (E, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ sont mesurables.

Définition 3.8. Soit $f_n : E \to \overline{\mathbb{R}}$, $n \geq 0$, une suite de fonctions. On définit les fonctions $\limsup f_n : E \to F$, et $\liminf f_n : E \to \overline{\mathbb{R}}$ pour tout $x \in E$ par ;

$$(\limsup f_n)(x) := \lim_{n\to+\infty} \sup(f_n(x))$$
$$(\liminf f_n)(x) := \lim_{n\to+\infty} \inf(f_n(x)).$$

Notation 3.9. On note parfois $\limsup = \overline{\lim}$ et $\liminf = \underline{\lim}$.

Proposition 3.10. Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de fonctions mesurables $(E, \mathcal{A})$ dans $\left(\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})\right)$.
(1) Les fonctions $x \mapsto (\sup f_n)(x)$ et $x \mapsto (\inf f_n)(x)$ sont mesurables de $(E, \mathcal{A})$ dans $\left(\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}\left(\overline{\mathbb{R}}\right)\right)$.
(2) Les fonctions $x \mapsto (\limsup f_n)(x)$ et $x \mapsto (\liminf f_n)(x)$ sont mesurables de $(E, \mathcal{A})$ dans $\left(\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}\left(\overline{\mathbb{R}}\right)\right)$.
(3) Si $(f_n)_{n\geq 0}$ converge simplement vers f, alors f est mesurable.

Proposition 3.11. Soit $f : (E, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}_+, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+))$ une fonction mesurable positive. Il existe une suite de fonctions croissante $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions étagées positives telles que pour tout $x \in E$, $f(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n(x)$ et si f est bornée alors $(f_n)_n$ converge uniformément vers f.

Démonstration. On pose
$$(f_n)_n := \sum_{k=0}^{n2^n-1} \frac{k}{2^n} \mathbb{1}_{\{\frac{k}{2^n} \leq f < \frac{k+1}{2^n}\}} + n\mathbb{1}_{\{f\geq n\}}$$
et on vérifie qu'elle vérifie bien la convergence simple vers f et qu'elle est croissante.

- Soit $x \in E$.
  - Si $f(x) = +\infty$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n(x) = n$ donc $f(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n(x)$.
  - si $f(x) < +\infty$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, tel que $n > f(x)$, il existe $k \leq n2^n - 1$ tq $k \leq 2^n f(x) < k + 1$ donc $|f(x) - f_n(x)| = \left|f(x) - \frac{k}{2^n}\right| \leq \frac{1}{2^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$
- Vérifions que (f_n) est croisssante. Soit $x \in E$
  - si $f(x) \geq n + 1$, $f_n(x) = n < n + 1 = f_{n+1}(x)$.
  - Si $f(x) < n$, on note k l'entier tq $k \leq 2^n f(x) < k + 1$. Ainsi, $f_n(x) = \frac{k}{2^n}$. Comme $f(x) \geq \frac{2k}{2^{n+1}}$, on en déduit que $f_{n+1}(x) \geq \frac{2k}{2^{n+1}} = f_n(x)$.
  - si $n \leq f(x) < n + 1$, $f_{n(x)} = n$ et il existe $k \geq n2^{n+1}$ tel que $\frac{k}{2^{n+1}} \leq f(x) \leq \frac{k+1}{2^{n+1}}$ donc $f_{n+1}(x) \geq n = f_n(x)$.

□

Proposition 3.12. Soit $f : (E, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ une fonction mesurable quelconque. Il existe une suite de fonctions étagées $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions étagées telles que pour tout $x \in E$, $f(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n(x)$ et si f est bornée alors $(f_n)_n$ converge uniformément vers f.

Démonstration. Il suffit d'appliquer Proposition 3.11 à f en la décomposant par $f = f^+ - |f^-|$. □

Chapitre 2: Mesures intégrables.

4. Mesure.

Définition 4.1 (Mesure)**.** Soit $(E, \mathcal{A})$ un espace mesurable. On appelle *mesure* sur $(E, \mathcal{A})$ une application $\mu : \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ telle que :
(1) $\mu(\varnothing) = 0$.
(2) μ est σ-additive, i.e pour toute suite $(A_n)_n$ d'éléments de $\mathcal{A}$ deux à deux distincts, alors : $\mu\left(\bigcup_{n\geq 0} A_n\right) = \sum_{n=0} \mu(A_n)$.

Définition 4.2 (Espace mesuré)**.** Soit $(E, \mathcal{A})$ un espace mesurable et $\mu : \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ une mesure. On appelle le triplet $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré, et pour tout $A \in \mathcal{A}, \mu(A)$ est la mesure de A.

Exemples 4.3.

1. $\mu : \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}}_+ \; ; \; A \mapsto 0$ est appelé la mesure *nulle*.
2. $\mu : \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}}_+ \; ; \; A \mapsto \begin{cases} \text{Card}(A) \text{ si } A \text{ est fini} \\ +\infty \text{ sinon} \end{cases}$ est appelé mesure de *comptage*.
3. $\mu : \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}}_+ \; ; \; A \mapsto \begin{cases} +\infty \text{ si } A \neq \varnothing \\ 0 \text{ sinon} \end{cases} A \neq \varnothing \in \mathcal{A}, \mu(A) = +\infty$ est appelée mesure *infinie* ou *grossière*.
4. $\delta_x := \mathbb{1}_A : \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}}_+ \; ; \; x \mapsto \begin{cases} 1 \text{ si } x \in A \\ 0 \text{ si } x \notin A \end{cases}$ est appelé mesure de *Dirac* en $x \in E$

Proposition 4.4. Soit $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré. Pour tout $A, B \in \mathcal{A}$, on a les propriétés suivantes ;
(1) $\mu(A) = \mu(A \setminus B) + \mu(A \cap B)$,
(2) $\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B)$,
(3) $\mu(A \cup B) \leq \mu(A) + \mu(b)$,
(4) Si $A \subset B, \mu(A) \leq \mu(B)$.

Démonstration.
(1) On a $A \setminus B = \{A \cap (E \setminus B)\}$ et $A \cap B$ disjoints donc $A = (A \setminus B) \cup (A \cap B)$. Or d'après la σ-additivité, pour tout C et D disjoints alors $\mu(C \cup D) = \mu(C) + \mu(D)$. D'où $\mu(A) = \mu(A \setminus B) + \mu(A \cap B)$.
(2) On remarque que $A \setminus B, A \cap B$ et $B \setminus A$ sont deux à deux disjoints et $A \cup B = (A \setminus B) \cup (A \cap B) \cup (B \setminus A)$, donc

$$\begin{aligned} &\mu(A \cup B) = \mu(A \setminus B) + \mu(A \cap B) + \mu(B \setminus A) \\ \Rightarrow\; &\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = \mu(A \setminus B) + \mu(A \cap B) + \mu(B \setminus A) + \mu(A \cap B) \\ \underset{(1)}{\Rightarrow}\; &\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B). \end{aligned}$$

(3) Si $\mu(A) + \mu(B) = +\infty$, l'inégalité est évidente. Sinon, par (2),

$$\begin{aligned} &\mu(a) + \mu(b) = \mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) \\ \underset{\mu \geq 0}{\Rightarrow}\; &\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B) \leq \mu(A) + \mu(B) \end{aligned}$$

(4) On a $\mu(B) = \mu(B \setminus A) + \mu(A \cap B) = \mu(B \setminus A) + \mu(A) \geq \mu(A)$ car $\mu(A \setminus B) = \mu(\varnothing) = 0$.

□

Définition 4.5 (Finie)**.** Soit $(E, \mathcal{A})$ un espace mesurable, $\mu : \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ une mesure sur $(E, \mathcal{A})$:
- On dit qu'une mesure μ est *finie* si $\mu(E) < +\infty$.
- On dit que $\mu(E)$ est la *masse* de la mesure μ.

Définition 4.6 (Probabilité)**.** Soit $(E, \mathcal{A})$ un espace mesurable, $\mu : \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ une mesure sur $(E, \mathcal{A})$. Si la masse de μ vaut 1, On dit que μ est une *probabilité*.

Définition 4.7 (Finie)**.** On dir que μ est *σ-finie* s'il existe une suite (A_n) de $\mathcal{A}$ telle que $E = \bigcup_{n\geq 0} A_n$ et pour tout $n \geq 0$, $\mu(A_n) < +\infty$.

Remarque 4.8. On dit qu'une suite de parties de E, $(A_n)_n$ est croissante si $\forall n \geq 0, A_n \subset A_{n+1}$.

Proposition 4.9. Soit $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et $(A_n)_{n\geq 0}$ une suite d'éléments de $\mathcal{A}$.
(1) Si la suite $(A_n)_{n\geq 0}$ est croissante alors $\lim_{n\to+\infty} \mu(A_n) = \mu\left(\bigcup_{n\geq 0} A_n\right)$
(2) Si la suite $(A_n)_{n\geq 0}$ est décroissante et si il existe $n_0 \geq 0$ tel que $\mu_{n_0} < +\infty$ alors $\lim_{n\to+\infty} \mu(A_n) = \mu\left(\bigcap_{n\geq 0} A_n\right)$.

Démonstration.
(1) S'il existe n_0 tel que $\mu(A_{n_0}) = +\infty$ alors puisque $A_{n_0} \subset \bigcup_{n\geq 0} A_n$ on a $\mu(A_{n_0}) \leq \mu(\cup_{n\geq 0} A_n)$ et l'égalité est évidente. $\mu(A_{n_0}) = +\infty \leq \mu(A_n)$. Sinon, on pose $(B_n)_n \coloneqq \begin{cases} A_0 \text{ si } n=0 \\ A_n \backslash A_{n-1} n>0 \end{cases}$. Les B_n sont alors deux à deux disjoints et $\bigcup_{n\geq 0} A_n = \bigcup_{n\geq 0} B_n$. Ainsi,

$$\begin{aligned} \mu\left(\bigcup_{n\geq 0} A_n\right) = \mu\left(\bigcup_{n\geq 0} B_n\right) = \sum_{n\geq 0} \mu(B_n) &= \lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=1}^{n} \mu(A_k) - \mu(A_{k-1})\right) + \mu(A_0) \\ &= \lim_{n\to+\infty} \mu(A_n). \end{aligned}$$

(2)

$\square$

Proposition 4.10. Soit $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré, $(F, \mathcal{B})$ un espace mesurable, et $f : (E, \mathcal{A}) \to (F, \mathcal{B})$ une application mesurable. Alors l'application

$$\mu_f : (\mathcal{B}) \to \overline{\mathbb{R}}_+ \ ; \ B \mapsto \mu(f^{-1}(B))$$

est une mesure sur $(F, \mathcal{B})$. On l'appelle la *mesure image*.

Démonstration.
- $\mu_f(\varnothing) = \mu\left(f^{-1}(\varnothing)\right) = \mu(\varnothing) = 0$.
- Soit $(B_n)_{n\geq 0}$ une suite d'éléments de $\mathcal{B}$ deux à deux distincts.

$$\mu_f\left(\bigcup_{n\geq 0} B_n\right) = \mu\left(f^{-1}\left(\bigcup B_n\right)\right) = \mu\left(\bigcup f^{-1}(B)\right)$$

Or les $f^{-1}(B_n)$ sont 2 à 2 disjoints. Donc d'après la σ- additivité de μ, on a $\mu_f\left(\bigcup B_n\right) = \sum \mu\left(f^{-1} B_n\right) = \sum \mu_f(B_n)$.

Ainsi, μ_f est une mesure sur $(F, \mathcal{B})$. $\square$

4.1. Mesure de Lebesgue.

Théorème 4.11 (Unicité des mesures)**.** Soit μ, ν deux mesures sur un espace mesurable $(E, \mathcal{A})$. Si :
- μ et ν coincident sur une partie $\mathcal{C} \subset \mathcal{A}$ qui engendre $\mathcal{A}$,
- $\mathcal{C}$ est stable par intersections finies,
- $E \in \mathcal{C}$,
- μ ou ν est σ-finie,

alors $\mu = \nu$.

Démonstration. Admis. □

Corollaire 4.12. Il existe sur $\left(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\right)$ une unique mesure λ telle que pour tout pavé $\Pi_{i=1}^d]a_i, b_i[$,

$$\lambda\left(\Pi_{i=1}^d]a_i, b_i[\right) = \Pi_{i=1}^d (b_i - a_i).$$

Cette mesure est appelée la *mesure de Lebesgue* sur $\mathbb{R}^d$.

Démonstration. $\mathcal{C} = \left\{\Pi_{i=1}^d]a_i, b_i[, a_i < b_i \in \mathbb{R}\right\}$. Alors $\sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ □

Proposition 4.13. Soit μ une mesure sur $\left(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\right)$ vérifiant :
- pour tout $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, $\mu(x + B) = \mu(B)$,
- $\mu\left([0,1]^d\right) = 1$,

alors μ est la mesure de Lebesgue, $\mu = \lambda d$.

Démonstration. Admis □

4.2. Ensemble négligeable.

Définition 4.14 (Négligeable). Soit $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré, $M \subset E$. On dit que M est *négligeable* s'il existe $A \in \mathcal{A}$ tel que $M \subset A$ et $\mu(A) = 0$.

Remarque 4.15. Un ensemble négligeable n'appartient pas nécéssairement à la tribu.

Définition 4.16. On dit que la mesure μ est complète si $\mathcal{A}$ contient tous les ensembles négligeables.

Définition 4.17. Une propriété sur l'ensemble E est une application $P : E \to \{\text{vrai,faux}\}$.

Définition 4.18. On dit qu'une propriété est vraie μ-presque partout si l'ensemble $\{x \in E : P(x) = \text{faux}\}$ est négligeable.

5. Intégrale de Lebesgue.

5.1. Intégrale des fonctions étagées positives.

Notation 5.1. On rappelle que l'écriture canonique est $f = \sum_{\alpha \in f(E)} \alpha \mathbb{1}_{\{f=\alpha\}}$. On a bien que $\{\{f\alpha\} | \alpha \in f(E)\}$ forme une partition de E. On note $\mathcal{E}_+$ l'ensemble des fonctions étagées.

Définition 5.2 (Intégrale). Soit $f \in \mathcal{E}_+$. On appelle intégrale de f par rapport à la mesure μ sur $(E, \mathcal{A})$ définit par:

$$\int_E f(x)\, \mathrm{d}\mu(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mu(A_i).$$

Remarque 5.3. Si f admet deux écritures canoniques, alors $\int_E f d\mu$ ne dépend pas de ces écritures.

Remarque 5.4. Sous la forme canonique, $f = \sum_{\alpha \in f(E)} \alpha \mathbb{1}_{\{f=\alpha\}}$, on a

$$\int_E f(x) d\mu(x) = \sum_{\alpha \in f(E)} \alpha \mu(\{f = \alpha\}).$$

Attention, L'ensemble $\{f = 0\}$ peut être tel que $\mu(\{f = 0\}) = +\infty$. La convention $0(+\infty) = +\infty 0 = 0$ est alors très importante.

Remarque 5.5. On peut avoir $\alpha > 0$ et $\mu(\{f = \alpha\}) = +\infty$ et dans ce cas, $\int_E f\, \mathrm{d}\mu = +\infty$.

Exemples 5.6.
1. Soit $f : \mathbb{E} \to \overline{\mathbb{R}}_+ \,;\ x \mapsto 0$.

$$\int_E f(x)\,\mathrm{d}\mu(x) = \sum_{\alpha\in f(E)} \alpha\mu(\{f=\alpha\}) = 0\cdot\mu(\{f=0\}) = 0\cdot\mu(E) = 0.$$

2. $\mu = \delta_a, a \in E$.
$$\int_E f(x)d\mu(x) = \sum_{\alpha\in f(E)} \alpha\mu(\{f=\alpha\}) = \sum_{\alpha\in f(E)} \alpha\delta_a(\{f=\alpha\}) = f(a).$$
3. Si l'espace mesuré est $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$, λ mesure de lebesgue. On a vu $\forall x \in \mathbb{R}, \lambda(\{x\}) = 0$. Plus généralement, pour tout sous-ensemble dénombrable $D \subset \mathbb{R}$, on a $D \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ et $\lambda(D) = 0$. Soit alors $f = 2\mathbb{1}_{\mathbb{Q}} + 3\mathbb{1}_{\mathbb{N}}$. On a
$$\int_{\mathbb{R}} f(x)d\lambda(x) = 2\lambda(\mathbb{Q}) + 3\lambda(\mathbb{N}) = 0.$$
4. Soit $f = \mathbb{1}_{[(2,3)]} + 3\mathbb{1}_{[0,1]} = \mathbb{1}_{[-2,0[} + 4\mathbb{1}_{[0,1]} + \mathbb{1}_{]1,3]}$. Calculons son intégrale. On a pour la 1ere écriture : $\lambda([(2,3)]) + 3\lambda([0,1]) = 5 + 3 = 8$. et pour la 2eme écriture : $\lambda([-2,0[) + 4\lambda([0,1]) + \lambda(]1,3]) = 8$.

Proposition 5.7. L'application $f \mapsto \int_E f d\mu$ de $\mathcal{E}_+$ dans $\overline{\mathbb{R}}_+$ satisfait les propriétés suivantes
- Pour toutes fonctions $f, g \in \mathcal{E}_+$, $f + g \in \mathcal{E}_+$ et $\int_E f + g\,\mathrm{d}\mu = \int_E f\,\mathrm{d}\mu + \int_E g\,\mathrm{d}\mu$,
- Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}_+, \lambda f \in \mathcal{E}_+$ et $\int_E \alpha f\,\mathrm{d}\mu = \alpha\int_E f\,\mathrm{d}\mu$,
- Pour toutes fonctions $f, g \in \mathcal{E}_+, f \leq g \Rightarrow \int_E f\,\mathrm{d}\mu \leq \int_E g\,\mathrm{d}\mu$.

Démonstration.

- On pose $f = \sum_{i=1}^n \alpha_i\mathbb{1}_{A_i}, g = \sum \beta_i\mathbb{1}_{B_i}$ avec $A_i := \{f = \alpha_i\}, B_i := \{g = \beta_i\}$, $(A_i)_{i\in\{1,\ldots,n\}}, (B_i)_{i\in\{1,\ldots,m\}}$ sont des partitions de E. On a

$$\begin{aligned}\int_E f + g\,\mathrm{d}\mu &= \int_E \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^m (\alpha_i + \beta_j)\mathbb{1}_{A_i\cap B_j}\,\mathrm{d}\mu(x)\\ &\underset{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^m (\alpha_i+\beta_j)\mu(A_i\cap B_j) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \sum_{j=1}^m \mu(A_i\cap B_j) + \sum_{j=1}^m \beta_j \sum_{i=1}^n \mu(A_i\cap B_j)\\ &= \sum_{i=1}^n \alpha_i\mu\left(\bigcup_{j=1}^n A_i\cap B_j\right) + \sum_{j=1}^m \beta_j\mu\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\cap B_j\right) \underset{\text{prop 4.4}}{=} \sum_{i=1}^n \alpha_i\mu(A_i) + \sum_{j=1}^m \alpha_i\mu(B_j) \underset{\text{def}}{=} \int_E f\,\mathrm{d}\mu + \int_E g\,\mathrm{d}\mu.\end{aligned}$$

- Notons $f := \sum_{i=1}^n \alpha_i\mathbb{1}_{A_i}$ alors $\alpha f = \sum_{i=1}^n \alpha\alpha_i\mathbb{1}_{A_i}$ d'où $\alpha f \in \mathcal{E}_+$ et
$$\int_E \alpha f\,\mathrm{d}\mu = \sum_{i=1}^n \alpha\alpha_i\mu(A_i) = \alpha\sum_{i=1}^n \alpha_i\mu(A_i) = \alpha\int f\,\mathrm{d}\mu.$$
- Comme $f \leq g$, $g - f$ est une fonction étagée positive. Par la point 1, on a donc
$$\int_E g\,\mathrm{d}\mu = \int_E f + (g-f)\,\mathrm{d}\mu = \int_E f\,\mathrm{d}\mu + \int_E (g-f)\,\mathrm{d}\mu \geq \int_E f\,\mathrm{d}\mu.$$

□

Proposition 5.8. Pour tout $A \in \mathcal{A}$, $\int_E \mathbb{1}_A(x)\,\mathrm{d}\mu(x) = \mu(A)$. Si $f = \sum_{i=1}^n \alpha_i\mathbb{1}_{A_i}(x)\,\mathrm{d}\mu(x)$ alors,
$$\int_E f\,\mathrm{d}\mu = \sum_{i=1}^n \alpha_i \int_E \mathbb{1}_{A_i}(x)\,\mathrm{d}\mu(x).$$

5.2. Intégrales de fonctions mesurables positives.

Notation 5.9. On notera $\mathcal{M}_+$ l'ensembles des fonctions mesurables positives de $(E, \mathcal{A})$ dans $\left(\overline{\mathbb{R}}_+, \mathcal{B}\left(\overline{\mathbb{R}}_+\right)\right)$. On munit $(E, \mathcal{A})$ d'une mesure μ.

Définition 5.10 (Intégrale)**.** On définit l'intégrale de toute fonction $f \in \mathcal{M}_+$ par rapport à la mesure μ par :

$$\int_E f(x)\,\mathrm{d}\mu(x) = \sup\left\{\int_E g(x)\,\mathrm{d}\mu(x) : g \in \mathcal{E}_+ g \leq f\right\}.$$

Cette intégrale sera notée indifféremment $\int_E f(x)\,\mathrm{d}\mu(x)$, $\int_E f(x)\mu(\mathrm{d}x)$, $\int_E f\,\mathrm{d}\mu$.

Définition 5.11 (μ-intégrable)**.** Si $\int_E f\,\mathrm{d}\mu < +\infty$, on dira que f est μ-intégrable.

Remarque 5.12. L'intégrale d'une fonction mesurable positive $(E, \mathcal{M}_+)$ est toujours définie, sa valeur pouvant éventuellement être infinie.

Proposition 5.13. Pour toutes fonctions $f, g \in \mathcal{M}_+$

$$f \leq g \Rightarrow \int_E f\,\mathrm{d}\mu \leq \int_E g\,\mathrm{d}\mu.$$

Démonstration. Soit $h \in \mathcal{E}_+, h \leq f$. Alors $h \leq g$ donc

$$\left\{\int_E h(x)\,\mathrm{d}\frac{\mu(x)}{h} \in \mathcal{E}_+ h \leq f\right\} \subset \left\{\int_E h(x)\,\mathrm{d}\frac{\mu(x)}{h} \in \mathcal{E}_+, h \leq g\right\}$$

$$\Rightarrow \sup\left\{\int_E h(x)\,\mathrm{d}\frac{\mu(x)}{h} \in \mathcal{E}_+ h \leq f\right\} \leq \sup\left\{\int_E h(x)\,\mathrm{d}\frac{\mu(x)}{h} \in \mathcal{E}_+, h \leq g\right\}.$$

Le cas particulier découle du fait que l'intégrale de la fonction $x \mapsto 0$ sur E est nulle. $\square$

Théorème 5.14 (Théorème de Beppo-Levi)**.** Si (f_n) est une suite croissante de fonctions de $\mathcal{M}_+$ alors $\lim_{n\to+\infty} f_n \in \mathcal{M}_+$. Posons $f = \lim_{n\to+\infty} f_n$ alors

$$\int_E f\,\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to+\infty} \int_E f_n\,\mathrm{d}\mu.$$

Proposition 5.15. Soi $f, g \in \mathcal{M}_+$. Alors,
- $\int_E (f+g)\,\mathrm{d}\mu = \int_E f\,\mathrm{d}\mu + \int_E g\,\mathrm{d}\mu$.
- Pour tout $\alpha \geq 0$, $\int_E \alpha f\,\mathrm{d}\mu = \alpha \int_E f\,\mathrm{d}\mu$.

Démonstration.
- Par Proposition 3.11, il existe des suites croissantes $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, et $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathcal{E}_+$ telles que f_n, et g_n convergent respectivement vers f et g. Alors $f_n + g_n$ est une suite croissante de $\mathcal{M}_+$ telle que $f + g = \lim_{n\to+\infty} f_n + g_n$. De plus par Proposition 5.7, $\int_E f_n + g_n\,\mathrm{d}\mu = \int_E f_n\,\mathrm{d}\mu + \int_E g_n\,\mathrm{d}\mu$ donc par le Théorème de Beppo-Levi, et unicité de la limite on a bien que

$$\int_E (f+g)\,\mathrm{d}\mu = \int_E f\,\mathrm{d}\mu + \int_E g\,\mathrm{d}\mu.$$

- Par Proposition 3.11, on pose la suite $(\alpha f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante de $\mathcal{M}_+$ qui converge vers αf. De plus, $\int_E \alpha f_n \,\mathrm{d}\mu = \alpha \int_E f_n \,\mathrm{d}\mu$ donc par le Théorème de Beppo-Levi, et unicité de la limite on a bien que

$$\int_E \alpha f \,\mathrm{d}\mu = \alpha \int_E f \,\mathrm{d}\mu.$$

□

Proposition 5.16. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de $\mathcal{M}_+$. On a

$$\int_E \sum_{n\geq 0} f_n = \sum_{n\geq 0} \int_E f_n \,\mathrm{d}\mu.$$

Démonstration. La suite des sommes partielles de f_n est une suite croissante de $\mathcal{M}_+$. Par le Théorème de Beppo-Levi,on a

$$\int_E \sum_{k=0}^{n} f_k \,\mathrm{d}\mu \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_E \sum_{k\geq 0} f_k \,\mathrm{d}\mu \text{ et } \sum_{k=0}^{n} \int_E f_k \,\mathrm{d}\mu \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \sum_{k\geq 0} \int_E f_k \,\mathrm{d}\mu.$$

Or par additivité des intégrales de fonctions de $\mathcal{M}_+$,

$$\int_E \sum_{k=0}^{n} f_k \,\mathrm{d}\mu = \sum_{k=0}^{n} \int_E f_k \,\mathrm{d}\mu,$$

d'où $\int_E \sum_{n\geq 0} f_n = \sum_{n\geq 0} \int_E f_n \,\mathrm{d}\mu$. □

Lemme 5.17 (Inégalité de Markov). Soit $f \in \mathcal{M}_+$, $a > 0$. Alors

$$\mu(\{f \geq a\}) \leq \frac{1}{a} \int_E f \,\mathrm{d}\mu.$$

Démonstration. On a μ-presque partout $a\mathbb{1}_{\{f\geq a\}} \leq f$, donc pour μ-presque tout $x \in E$, $a\mathbb{1}_{\{f\geq a\}}(x) \leq f(x)$ et par la positivité de l'intégrale,

$$a\mu(\{f \geq x\}) = \int_E \mathbb{1}_{\{f\geq a\}} \,\mathrm{d}\mu \leq \int_E f \,\mathrm{d}\mu.$$

□

Corollaire 5.18. Soit $f \in \mathcal{M}_+$. Si f est intégrable alors $\mu(\{f = +\infty\}) = 0$ i.e f est finie μ-p.p.

Démonstration. Soit $n \geq 1$.

$$\{f = +\infty\} \subset \{f \geq n\} \Rightarrow \mu(\{f = +\infty\}) \leq \mu(\{f \geq n\}) \leq \frac{1}{n} \int_E f \,\mathrm{d}\mu \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

□

Corollaire 5.19. Soit $f, g \in \mathcal{M}_+$. Alors
- $\int_E f \,\mathrm{d}\mu = 0$ si et seulement si $f = 0$ μ-presque partout.
- Si $f = g$ μ-presque partout, alors $\int_E f \,\mathrm{d}\mu = \int_E g \,\mathrm{d}\mu$.

Démonstration.

- $\Rightarrow$ Supposons $\int_E f \,\mathrm{d}\mu = 0$. Soit $n \geq 1$, d'après l'Inégalité de Markov, $\mu\left(\left\{f \geq \frac{1}{n}\right\}\right) \leq n \int_E f \,\mathrm{d}\mu = 0$. De plus, $\left\{f \geq \frac{1}{n}\right\}$ est une suite croissante d'ensembles telle que $\bigcup_{n\geq 1}\left\{f \geq \frac{1}{n}\right\} = \{f > 0\}$.

$$\lim_{n\to+\infty} \mu\left(\left\{f \geq \frac{1}{n}\right\}\right) = \mu\left(\cup_{n\geq 1}\left\{f \geq \frac{1}{n}\right\}\right) = \mu(\{f > 0\}) = \mu(\{f \neq 0\}) = 0.$$

  D'où $f = 0$ μ-p.p.

$\Leftarrow$ Supposons $f = 0$ μ-preque partout. Alors il existe une suite croissante de fonctions étagées positives $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\lim_{n\to+\infty} f_n = f$ μ-presque partout. Ainsi, puisque $\forall n \in \mathbb{N}, f_n \leq f$, $f_n = 0$ μ-presque partout. Ainsi, $\mu(A_k) = 0$ dès que $\alpha_k \neq 0$ et $\int_E f_n \,\mathrm{d}\mu = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k \mu(A_k) = 0$ Donc par le Théorème de Beppo-Levi,

$$\lim_{n\to+\infty} \int_E f_n \,\mathrm{d}\mu = \int_E \lim_{n\to+\infty} f_n \,\mathrm{d}\mu = \int_E f \,\mathrm{d}\mu = 0.$$

- Soit $f, g \in \mathcal{M}_+$ telles que $f = g$ μ-presque partout. On a $1 = \mathbb{1}_{\{f=g\}} + \mathbb{1}_{f\neq g}$.

$$\int_E f \,\mathrm{d}\mu = \int_E f\mathbb{1}_{\{f=g\}} \,\mathrm{d}\mu + \int_E f\mathbb{1}_{\mathbb{f}\neq\mathbb{g}} \,\mathrm{d}\mu$$

On obtient une égalité similaire pour l'intégrale de g. Or $f\mathbb{1}_{\{f\neq g\}}$ et $g\mathbb{1}_{\{f\neq g\}}$ sont des fonctions nulles μ- presque partout donc $\int \mathbb{1}_{\{f\neq g\}} \,\mathrm{d}\mu = \int_E g\mathbb{1}_{\{f\neq g\}} = 0$ D'où,

$$\int_E f \,\mathrm{d}\mu = \int_E f\mathbb{1}_{\{f=g\}} \,\mathrm{d}\mu = \int_E g\mathbb{1}_{\{f=g\}} \,\mathrm{d}\mu = \int_E g \,\mathrm{d}\mu.$$

□

Rappel 5.20.

$$\lim_{n\to+\infty} \inf f_n = \lim_{n\to+\infty} \inf_{k\geq n} f_k = \sup_{n\geq 1} \inf_{k\geq n} f_n.$$

Théorème 5.21 (Lemme de Fatou). Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathcal{M}_+$ alors

$$\int_E (\lim\inf)_{n\to+\infty} f_n \,\mathrm{d}\mu \leq (\lim\inf)_{n\to+\infty} \int_E f_n \,\mathrm{d}\mu.$$

Démonstration. Soit $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$. $g_n = \inf_{k\geq n} f_k$ est une suite croissante de fonctions de $\mathcal{M}_+$ et d'après le Théorème de Beppo-Levi,

$$\int_E \lim g_n \,\mathrm{d}\mu = \lim \int_E g_n \,\mathrm{d}\mu \Rightarrow \int_E \lim\inf f_n \,\mathrm{d}\mu \underset{*}{=} \lim \int \inf_{k\geq n} f_k \,\mathrm{d}\mu.$$

Soit $m \geq n$,

$$\inf_k \geq n f_k \leq f_m \Rightarrow \int_E \inf_{k\geq n} f_n \,\mathrm{d}\mu \leq \int_E f_m \,\mathrm{d}\mu \Rightarrow \int_E \inf_{k\geq n} f_k \,\mathrm{d}\mu \leq \inf_{m\geq n} \int_E f_m \,\mathrm{d}m \text{ par passage à l'inf}.$$

On obtient donc $\int_E \lim\inf f_n \,\mathrm{d}\mu \leq \lim\inf_{m\geq n} \int_E f_n \,\mathrm{d}\mu = \lim\inf \int_E f_n \,\mathrm{d}\mu$. □

Proposition 5.22. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathcal{M}_+$ telle qu'il existe $g \in \mathcal{M}_+$ intégrable vérifiant $f_n \leq g$ pour μ-presque tout $n \in \mathbb{N}$, alors:

$$\lim_{n\to+\infty} \sup \int_E f_n \,\mathrm{d}\mu \leq \int_E \lim_{n\to+\infty} f_n \,\mathrm{d}\mu.$$

Démonstration. La suite de fonctions $(g - f_n)_{n\geq 0}$ est une suite de $\mathcal{M}_+$ et par le Lemme de Fatou, $\int_E \lim\inf(g - f_n) \,\mathrm{d}\mu \leq \lim\inf \int_E (g - f_n) \,\mathrm{d}\mu$. Or $f_n \underset{g}{<}$ pour tout n donc $\lim\sup f_n \leq g$. Par conséquent, limsup f_n est une fonction de $\mathcal{M}_+$ intégrable. D'autre part,

$$\liminf_{n\to+\infty}\int_E g-f_n\,\mathrm{d}\mu=\lim_{n\to+\infty}\left(\int_E g\,\mathrm{d}\mu-\int_E f_n\,\mathrm{d}\mu\right)=\int_E g\,\mathrm{d}\mu+\liminf\left(-\int_E f_n\,\mathrm{d}\mu\right)$$
$$=\int_E f\,\mathrm{d}\mu-\limsup_{n\to+\infty}\int_E f_n\,\mathrm{d}\mu$$

Donc en revenant à l'inégalité,

$$\int_E g\,\mathrm{d}\mu-\int_E \limsup f_n\,\mathrm{d}\mu\leq\int_E g\,\mathrm{d}\mu-\limsup\int_E f_n\,\mathrm{d}\mu\Leftrightarrow\lim_{n\to+\infty}\sup\int_E f_n\,\mathrm{d}\mu\leq\int_E\lim_{n\to+\infty}f_n\,\mathrm{d}\mu.$$

□

5.3. Mesure à densité.

Proposition 5.23. Soit $f\in\mathcal{M}_+$. Posons pour tout $A\in\mathcal{A}$, $\nu(A):=\int_A g\,\mathrm{d}\nu=\int_E g\mathbb{1}_A\,\mathrm{d}\mu$. Alors ν est une mesure sur $(E,\mathcal{A})$. De plus, pour toute fonction $f\in\mathcal{M}_+$, $\int_E f\,\mathrm{d}\nu=\int_E fg\,\mathrm{d}\mu$

Démonstration.

- ▸ $\nu(\varnothing)=\int_E g\mathbb{1}_\varnothing\,\mathrm{d}\mu=0$.
  ▸ Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathcal{A}$ d'ensembles deux à deux disjoints. Alors

$$\nu\left(\bigcup_{n\geq1}A_n\right)=\int_E g\mathbb{1}_{\bigcup_{n\geq1}A_n}\,\mathrm{d}\mu=\int_E g\sum\mathbb{1}A_n\,\mathrm{d}\mu=\int_E\sum g\mathbb{1}_{A_n}\,\mathrm{d}\mu=\sum\int_E g\mathbb{1}_{A_n}\,\mathrm{d}\mu$$
$$=\sum_{n\geq1}\nu(A_n).$$

- Par définition pour $f=\mathbb{1}_A, A\in\mathcal{A}$ il n'y a aucun prblm. Par linéarité, de même pour toute fonction f étagée positive. Si $f\in\mathcal{M}_+$, il existe une suite croissante $(f_n)_n$ de fonctions de $\mathcal{M}_+$ telle que $\lim f_n=f$. On a $\int_E f_n\,\mathrm{d}\nu=\int_E f_n g\,\mathrm{d}\nu$. De plus, $(f_n g)$ est une suite croissante de $\mathcal{M}_+$ telle que $\lim f_n g=fg$. Ainsi, par Théorème de Beppo-Levi,

$$\int_E\lim f_n\,\mathrm{d}\nu=\int f\,\mathrm{d}\nu=\int f_n g\,\mathrm{d}\nu=\int_E fg\,\mathrm{d}\nu$$

□

Définition 5.24. On dit que ν est la mesure de densité g par rapport à la mesure μ.

5.4. Intégrales de fonctions mesurables quelconques.

Notation 5.25. Soit $(E,\mathcal{A},\mu)$. On note $\mathcal{M}$ l'ensemble des appl mesurables de $(E,\mathcal{A})$ dans $\left(\overline{\mathbb{R}},\mathcal{B}\left(\overline{\mathbb{R}}\right)\right)$.

Définition 5.26 (Intégrable)**.** Une fonction $f\in\mathcal{M}$ est dite *μ-intégrable* si $\int_E|f|\,\mathrm{d}\mu<+\infty$.

Notation 5.27.
- L'ensemble des fonctions intégrables sera noté $\mathcal{L}^1(E,\mathcal{A},\mu)=\left\{f\in\mathcal{M},\int_E|f|\,\mathrm{d}\mu<+\infty\right\}=\mathcal{L}^1(E)$.
- Soit $f:E\to\overline{\mathbb{R}}$, $f^+:=\max(f,0)$ et $f^-:=-\min(f,0)$.

Proposition 5.28. Soit $f\in\mathcal{M}$. $f\in\mathcal{L}^1(E)$ si et seulement si $f^+\in\mathcal{L}^1(E)$ et $f^-\in\mathcal{L}^1(E)$.

Démonstration. On a $|f|=f^++f^-$.

$$\int_E f^-\,\mathrm{d}\mu\leq\int_E|f|\,\mathrm{d}\mu=\int_E f^++\int_E f^-\,\mathrm{d}\mu\int_E f^+\,\mathrm{d}\mu\leq\int_E|f|\,\mathrm{d}\mu=\int_E f^++\int_E f^-\,\mathrm{d}\mu.$$

□

Définition 5.29 (Intégrale)**.** Soit $f \in \mathcal{L}^1(E)$. Alors l'intégrale de f est défnie par

$$\int_E f \, \mathrm{d}\mu = \int_E f^+ \, \mathrm{d}\mu - \int_E f^- \, \mathrm{d}\mu.$$

Proposition 5.30. Soit $f, g : (E, \mathcal{A}) \to \left(\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}\left(\overline{\mathbb{R}}\right)\right)$ deux fonctions mesurables telles que $f = g$ μ presque partout. Alors $f \in \mathcal{L}^1(E) \Leftrightarrow g \in \mathcal{L}^1(E)$.

Démonstration. $\{f^+ \neq g^+\}, \{f^- \neq g^-\} \subset \{f \neq g\}$ Cela entraine que $f = g$ μ-presque partout $\Rightarrow f^+ = g^+ \mu$ −presque partout et $f^- = g^- \mu$-presque partout donc f^+ et f^- sont intégrables si et seulement si g^+ et g^- le sont. $\square$

Proposition 5.31. Soit $f \in \mathcal{L}^1(E)$, alors : $\mu(\{f = -\infty\}) = \mu(\{f = +\infty\}) = \mu(\{|f| = +\infty\}) = 0$

Démonstration. On observe que $\{|f| = +\infty\} = \{f^+ = +\infty\} \cup \{f^- = +\infty\}$. Donc

$$\mu(\{|f| = +\infty\}) = \mu(\{f^+ = +\infty\}) + \mu(\{f^- = +\infty\}).$$

Or $f^+, f^- \in \mathcal{L}^1(E)$ donc $\mu(\{f^+ = +\infty\}) = \mu(\{f^- = +\infty\}) = 0$. $\square$

Proposition 5.32. Soit $f, g \in \mathcal{L}^1(E)$. Alors

- $f + g \in \mathcal{L}^1(E)$ et $\int_E (f + g) \, \mathrm{d}\mu = \int_E f \, \mathrm{d}\mu + \int_E g \, \mathrm{d}\mu$.
- Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha f \in \mathcal{L}^1(E)$ et $\int_E \alpha f \, \mathrm{d}\mu = \alpha \int_E f \, \mathrm{d}\mu$.

Proposition 5.33. Soit $f, g \in \mathcal{L}^1(E)$. Si $f \leq g$ μ-presque partout alors

$$\int_E f \, \mathrm{d}\mu \leq \int_E g \, \mathrm{d}\mu.$$

Démonstration. Supposons $\forall x \in E, f(x) \leq g(x)$. On a $g - f \in \mathcal{M}_+$ donc $\int_E (g - f) \, \mathrm{d}\mu \geq 0$. On conclut par la linéarité de l'intégrale, si $f \leq g$ μ-presque partout, alors on applique ceci aux fonctions $f_1 = f \mathbb{1}_{\{f \leq g\}}$ et $g_1 = g \mathbb{1}_{\{f \leq g\}}$. Ces fonctions vérifient pour tout $x \in E$, $f_1(x) \leq g_1(x)$. On a donc $\int_E f_1 \, \mathrm{d}\mu \leq \int_E g_1 \, \mathrm{d}\mu$. Mais comme $f_1 = f$ μ-presque partout et $g_1 = g$ μ-presque partout, on a $\int_E f_1 \, \mathrm{d}\mu = \int_E f \, \mathrm{d}\mu$ et $\int_E g_1 \, \mathrm{d}\mu = \int_E g \, \mathrm{d}\mu$. $\square$

Proposition 5.34. Soit $f \in \mathcal{L}^1(E)$. Alors $\left|\int_E f \, \mathrm{d}\mu\right| \leq \int_E |f| \, \mathrm{d}\mu$.

Démonstration. $\left|\int_E f \, \mathrm{d}\mu\right| = \left|\int_E f^+ \, \mathrm{d}\mu - \int_E f^- \, \mathrm{d}\mu\right| <) \int f^+ \, \mathrm{d}\mu + \int_E f^- \, \mathrm{d}\mu = \int_E |f| \, \mathrm{d}\mu$. $\square$

Proposition 5.35 (Formule de transfert)**.** Soit $f : (F, \mathcal{B}) \to \left(\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}\left(\overline{\mathbb{R}}\right)\right)$ une fonction mesurable. La fonction f est μ_φ intégrable si et seulement si la fonction $f \circ \varphi$ est μ- intégrable sur E. Dans ce cas, on a

$$\int_E f \circ \varphi \, \mathrm{d}\mu = \int_F f \, \mathrm{d}\mu_\varphi.$$

Démonstration. Voir poly. $\square$

Remarque 5.36. Pour la proposition suivante voir Proposition 4.10

Proposition 5.37. Soit $f : (F, \mathcal{B}) \to \left(\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}\left(\overline{\mathbb{R}}\right)\right)$ une fonction mesurable. Alors f est μ_φ-intégrable si et seulement si $f \circ \varphi$ est μ-intégrable. Dans ce cas,

$$\int_E f \circ \varphi \, \mathrm{d}\mu = \int_E f \, \mathrm{d}\mu_\varphi.$$

Démonstration.

- Prenons le cas simple où $f = \mathbb{1}_B, B \in \mathcal{B}$. On vérifie que $f \circ \varphi = \mathbb{1}_{\varphi^{-1}(B)}$. On a alors
$$\int_E f \circ \varphi \, \mathrm{d}\mu = \mu\left(\varphi^{-1}(B)\right) = \int_F f \, \mathrm{d}\mu_\varphi.$$
- Supposons maintenant que f soit une fonction étagée et positive, i.e $f = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \mathbb{1}_{B_k}$. Alors le résultat découle du point précédent et de la linéarité de l'intégrale.
- Soit $f \in \mathcal{M}_+$. Alors par Proposition 3.11, il existe une suite croissante (f_n) de fonction de $\mathcal{E}_+$ telles que $\lim f_n = f$. On remarque que les fonctions $f_n \circ \varphi$ sont aussi des fonctions étagées positives telles que $\lim_{n\to+\infty} f \circ \varphi$ et la suite $(f_n \circ \varphi)$ est croissante. En appliquant le Théorème de Beppo-Levi deux fois, on obtient
$$\int_E f \circ \varphi \, \mathrm{d}\mu = \lim_{n\to+\infty} \int_E f_n \circ \varphi \, \mathrm{d}\mu = \lim_{n\to+\infty} \int_F f_n \, \mathrm{d}\mu_\varphi = \int_F f \, \mathrm{d}\mu_\varphi.$$
- Soit f une fonction mesurable quelconque. Alors on peut décomposer f comme $f = f^+_{\in \mathcal{M}_+} - f^-_{\in \mathcal{M}_+}$. On remarque que $(f \circ \varphi)^+ = f^+ \circ \varphi$ et $(f \circ \varphi)^- = f^- \circ \varphi$. On a alors $\int_E (f \circ \varphi)^+ \, \mathrm{d}\mu < +\infty$ et $\int_E (f \circ \varphi)^- \, \mathrm{d}\mu < +\infty$ ssi $\int_F f^+ \, \mathrm{d}\mu_\varphi < +\infty$ et $\int_F f^- \, \mathrm{d}\mu_\varphi < +\infty$. On en déduit que $f \circ \varphi \in \mathcal{L}^1_\mu(E)$ si et seulement si $f \in \mathcal{L}^1_{\mu_\varphi}(F)$, et dans ce cas,
$$\int_E f \circ \varphi \, \mathrm{d}\mu = \int_E (f \circ \varphi)^+ \, \mathrm{d}\mu - \int_E (f \circ \varphi)^- \, \mathrm{d}\mu = \int_F f^+ \, \mathrm{d}\mu_\varphi - \int_F f^- \, \mathrm{d}\mu_\varphi = \int_F f \, \mathrm{d}\mu_\varphi.$$

$\square$

Remarque 5.38. Lorsque $(E, \mathcal{A}, \mu)$ est un espace de probabilité, φ est appelée une variable aléatoire et μ_φ est la loi sous μ de φ. La Formule de transfert permet de caractériser la loi μ_φ.

Théorème 5.39 (Théorème de Lebesgue). Soit $(f_n)_{n\geq 1}$ et f des fonctions mesurables de $(E, \mathcal{A})$ dans $\left(\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}\left(\overline{\mathbb{R}}\right)\right)$ telles que

- La suite $(f_n)_n$ converge vers f μ-presaue partout,
- Il existe une fonction $g \in \mathcal{L}^1_\mu(E)$ (intégrable) telle que pour tout $n \geq 1$, $|f_n| \leq g$ μ-presaue partout.

Alors les fonctions $(f_n)_n$ et f sont intégrables et $\lim_{n\to+\infty} \int_E |f_n - f| \, \mathrm{d}\mu = 0$, en particulier,

$$\lim_{n\to+\infty} \int_E f_n \, \mathrm{d}\mu = \int_E f \, \mathrm{d}\mu.$$

Démonstration. D'après les hypothèses, il est clair que les fonctions $(f_n)_n$ et f sont intégrables car $|f_n| \leq g, |f| \leq g\mu$-presque partout et g intégrable. Posons alors l'ensemble $A = \{x \in E |\, \lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x) \text{ et } |f_n(x)| \leq g(x), n \in \mathbb{N}\}$ et vérifions que $A \in \mathcal{A}$ (vérifié d'après le td). De plus, $\mu(A^c) = \mu(\{f_n \not\longrightarrow f\} \cap \{|f_n| > g\}) \leq \mu(\{f_n \not\longrightarrow f\}) + \mu(\{|f_n| > g\}) = 0$. Ainsi, par définition, pour tout $x \in A$, on a

$$|f_n(x) - f(x)| \leq |f_n(x)| + |f(x)| \leq 2g(x) \Rightarrow \mathbb{1}_A(2g - |f_n - f|) \in \mathcal{M}_+.$$

De plus, $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{1}_A(2g - |f_n - f|) = \mathbb{1}_A 2g$. D'où par le Lemme de Fatou, $\int_E \liminf_{n\to+\infty} 2g(|f_n - f|)) = \int_A \liminf(2g - |f_n - f|)\,\mathrm{d}\mu \le \liminf_n \int_A 2g - |f_n - f|\,\mathrm{d}\mu$ Or, $\liminf_n 2g - |f_n - f|\mathbb{1}_A = \lim_n 2g - |f_n - f|\mathbb{1}_A = 2g\mathbb{1}_A$ D'où,

$$\Rightarrow \int_A 2g \le \int_A 2g\,\mathrm{d}\mu - \limsup_n \int_A |f_n - f|\,\mathrm{d}\mu$$

$$\Rightarrow \limsup_n \int_A |f_n - f|\,\mathrm{d}\mu \le 0 \Rightarrow \limsup \int_A |f_n - f|\,\mathrm{d}\mu = 0$$

$$\Rightarrow 0 \le \liminf \int_A |f_n - f|\,\mathrm{d}\mu \le \limsup \int_A |f_n - f|\,\mathrm{d}\mu = 0 \Rightarrow \lim \int_A |f_n - f| = 0.$$

Enfin, comme $\mu(A^c) = 0$, $\int_{A^c} |f_n - f|\,\mathrm{d}\mu = 0$ et

$$\lim \int_E |f_n - f|\,\mathrm{d}\mu = \lim \int_A |f_n - f| + \lim \int_A |f_n - f|\,\mathrm{d}\mu = 0.$$

□

Remarque 5.40. Ce théorème est aussi appelé Théorème de convergence dominée.

Corollaire 5.41. Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions mesurables de $(E, \mathcal{A})$ dans $\left(\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}\left(\overline{\mathbb{R}}\right)\right)$ telle que $\sum \int_E |f_n|\,\mathrm{d}\mu < +\infty$. Alors la fonction $\sum_{n\ge1} f_n$ est définie μ-presque partout et est μ-intégrable. De plus,

$$\sum_{n\ge1} \int_E f_n\,\mathrm{d}\mu = \int_E \sum_{n\ge1} f_n\,\mathrm{d}\mu.$$

Démonstration. Puisque $\sum \int_E |f_n|\,\mathrm{d}\mu < +\infty$, en particulier pour tout $n \in \mathbb{N}$ fixé, f_n est intégrable. De plus, d'après le cas positif vu en cours, $\sum_{n\ge1} \int_E |f_n|\,\mathrm{d}\mu = \int_E \sum_{n\ge1} |f_n|\,\mathrm{d}\mu$. D'après l'hypothèse, on a $\int_E \sum_{n\ge1} |f_n|\,\mathrm{d}\mu < +\infty$.
Par conséquent par le Corollaire 5.18, $\sum_{n\ge1} |f_n| < +\infty$, μ-presque partout. Cela signifie que pour μ -presque tout $x \in E$, la série $\sum_{n\ge1} f_n(x)$ est absolument convergente.
La fonction $\sum_{n\ge1} f_n$ est donc bien définie μ-presque partout.
Soit $A = \{x \in E \mid \sum |f_n(x)| = +\infty\} \in \mathcal{A}$ et $\mu(A)) = 0$. Soit $x \in A$, on pose $\sum_{n\ge1} f_n(x) = 0$ de sorte que la fonction $\sum f_n$ converge sur tout E. La fonction $\sum f_n$ peut donc être écrite $\sum f_n \mathbb{1}_{A^c}$. Alors $\sum_{n\ge1} f_n$ est limite simple de $\sum_{k=1}^n f_k \mathbb{1}_{A^c}$.
Enfin, comme $\int_E |\sum f_n|\,\mathrm{d}\mu \le \int_E \sum_{n\ge1} |f_n|\,\mathrm{d}\mu < +\infty$. La fonction $\sum f_n$ est intégrable . On peut donc appliquer le Théorème de Lebesgue à $g_n = \sum_{k=1}^n f_k (g_n = 0 \text{ sur } A)$. En effet, on a

- $\lim_{n\to+\infty} g_n = \sum f_n$ μ-pp.
- Pour tout $n \ge 1$, $|g_n \le g| = |\sum f_n| \in \mathcal{L}^1_\mu(E)$.

On obtient donc

$$\lim_{n\to+\infty} \int_E g_n\,\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to+\infty} \int_E \sum_{k=1}^n f_k\,\mathrm{d}\mu = \sum \int_E f_n\,\mathrm{d}\mu.$$

□

5.5. Intégrale de Lebesgue et intégrale de Riemann.