Topologie et calcul différentiel

Table des matières

1. Topologie des espaces vectoriels normés.

1.1. Espaces vectoriels normés.

Définition 1.1 (Norme)**.** Soit E un espace vectoriel. On appelle norme sur E une fonction $\|\cdot\| : E \to \mathbb{R}$ vérifiant:
(1) $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in E, \|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$,
(2) $\forall x \in E, \|x\| = 0 \Rightarrow x = 0$,
(3) $\forall x, y \in E, \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Définition 1.2. Soit E un espace vectoriel et $\|\cdot\|$ une norme sur E. On appelle espace vectoriel normé un couple $(E, \|\cdot\|)$.

Proposition 1.3. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé, alors :
(1) $\|0\| = 0$,
(2) $\forall x \in E, \|x\| \geq 0$,
(3) $\forall x, y \in E, \big|\|x\| - \|y\| \leq \|x - y\|\big|$.

Démonstration.
(1) $\|0_E\| = \|0_\mathbb{R} * 0_E\| = 0_\mathbb{R} * \|0_E\| = 0_\mathbb{R}$.
(2) Soit $x \in E$, $\|0\| = \|x - x\| \leq \|x\| + \|-x\| = 2\|x\|$ d'où $\forall x \in E, \|x\| \geq 0$.
(3) Soit $x, y \in E$. $\|x\| = \|x + y - y\| \leq \|x - y\| + \|y\| \Leftrightarrow \|x\| - \|y\| \leq \|x - y\|$
et $\|y\| = \|y + x - x\| \leq \|y - x\| + \|x\| \Leftrightarrow \|y\| - \|x\| \leq \|x - y\|$.
Ainsi, $\|x - y\| \geq \max(\|y\| - \|x\|, \|x\| - \|y\|) = \big|\|x - y\|\big|$.

□

Proposition 1.4. Soit $(E, \|\cdot\|), F \subset E$ un sous-espace vectoriel. La restriction de $\|\cdot\|$ à F est une norme appelée norme induite.

1.2. Topologie des espaces vectoriels normés

Définition 1.5 (boule ouverte/fermée)**.** Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé, $a \in E, r > 0$. On appelle boule ouverte centrée en a de rayon r la partie $B(a, r) := \{x \in E \mid \|x - a\| < r\}$, et boule fermée centrée en a de rayon r la partie $B_f(a, r) := \{x \in E \mid \|x - a\| \leq r\}$.

Définition 1.6 (Ouvert/fermé)**.** Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. Soit $U \subset E$, on dit que U est:
(1) un ouvert de E si $\forall x \in U, \exists r > 0, B(x, r) \subset U$.
(2) un fermé de E si U^c est un ouvert de E.

Proposition 1.7. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé, alors
(1) $\varnothing$ et E sont ouverts et fermés.
(2) Une union quelconque d'ouverts est un ouvert.
(3) Une intersection finie d'ouverts est un ouvert.
(4) Une union finie de fermés est un fermé.
(5) Une intersection quelconque de fermés est un fermé.

Démonstration.
(1) $\forall x \in \varnothing, \exists \varepsilon, B(x, \varepsilon) \subset \varnothing$ donc $\varnothing$ est un ouvert et $\varnothing^c = E$ donc E est un fermé. De plus, $\forall x \in E, B(x, 1) \subset E$ donc E est un ouvert et $\varnothing = E^c$ est un fermé.
(2) Soit $(O_i)_{i\in I}$ une famille d'ouverts. Soit $x \in \bigcup_{i\in\{1,\dots,n\}} O_i$, alors $\exists j \in I, x \in O_j$. Or O_j est un ouvert donc $\exists r_j > 0$ tel que $B(x, r_j) \subset O_j \subset \bigcup_{i\in I} O_i$ donc $\bigcup_{i\in I} O_i$ est un ouvert.
(3) Soit $(O_i)_{i\in\{1,\dots,n\}}$ une famille d'ouverts. Soit $x \in \bigcap_{i\in\{1,\dots,n\}}$ alors $x \in O_1, \dots, x \in O_n$. Or $(0_1, \dots, O_n)$ sont des ouverts de E donc $\exists (r_i)_{i\in I}$ tels que $B\Big(x, (r_i)_{i\in\{1,\dots,n\}}\Big) \subset (O_i)_{i\in I}$. Posons $\varepsilon \coloneqq \min(r_1, \dots, r_n) > 0$. Alors $B(x, \varepsilon) \subset O_1 \cap \dots \cap O_n$ donc $\bigcup_{i\in\{1,\dots,n\}} C_i$ est un ouvert.
(4) Soit $(C_1, \dots, C_n)$ une famille de fermés. Alors $\left(\bigcup_{i\in\{1,\dots,n\}} C_i\right)^c = \bigcap_{i\in\{1,\dots,n\}} (C_i)^c$ qui est un ouvert. Ainsi $\bigcup_{i\in\{1,\dots,n\}} C_i$ est un fermé.
(5) Soit $(C_i)_{i\in I}$ une famille de fermés. Alors $\left(\bigcap_{i\in I} C_i\right)^c = \bigcup_{i\in I} C_i^c$ qui est un ouvert. Ainsi, $\bigcap_{i\in I} C_i$ est un fermé.

□

Définition 1.8 (Intérieur)**.** Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et $S \subset E$. On appelle intérieur de S l'ensemble $\mathring{S} \coloneqq \{x \in E \mid \exists \varepsilon > 0, B(x, \varepsilon) \subset S\}$.

Définition 1.9 (Adhérence)**.** Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et $S \subset E$. On appelle *adhérence* de S l'ensemble $\overline{S} \coloneqq \{x \in E \mid \forall \varepsilon > 0, B(x, \varepsilon) \cap S \neq \varnothing.\}$.

Définition 1.10 (Dense)**.** Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé, $S \subset E$. On dit que S est *dense* dans E si $\overline{S} = E$.

Proposition 1.11. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé, $S \subset E$.
(1) $\overline{S^c} = \left(\mathring{S}\right)^c$,
(2) $\mathring{S^c} = \left(\overline{S}\right)^c$,
(3) $\mathring{S} \subset S \subset \overline{S}$,
(4) $\mathring{S}$ est le plus grand ouvert contenu dans S,
(5) $\overline{S}$ est le plus petit ouvert contenant S.

Proposition 1.12. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et $S \subset E$.
(1) S est un ouvert si et seulement si $S = \mathring{S}$.
(2) S est un fermé si et seulement si $S = \overline{S}$.

Démonstration. A FAIRE □

Proposition 1.13. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé.

(1) $\forall S, T \subset E, \overline{S \cup T} = \overline{S} \cup \overline{T}$.
(2) $\forall S, T \subset E, \overline{S \cap T} \subset \overline{S} \cap \overline{T}$.
(3) $\forall S, T \subset E, S \mathring{\cap} T = \mathring{S} \cap \mathring{T}$.
(4) $\forall S, T \subset E, S \mathring{\cup} T \supset \mathring{S} \cup \mathring{T}$.

Définition 1.14 (Frontière)**.** Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et $S \subset E$. On appelle *frontière* de S par $\partial S := \overline{S} \setminus \mathring{S}$.

Proposition 1.15. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et $S \subset E$, alors
(1) $\partial S = \{x \in E, \forall \varepsilon > 0, B(x, \varepsilon) \cap S \neq \varnothing \wedge B(x, \varepsilon) \cap S^c \neq \varnothing\}$.
(2) $\overline{S} = S \cup \partial S$.

S est fermé si et seulement si $\partial S \subset S$.
(1) S est ouverte si et seulement si $\partial S \cap S = \varnothing$.
(2) ∂S est un fermé.

Démonstration. TO DO ☐

1.3. Continuité.

Définition 1.16 (continue)**.** Soit $(E, \|\cdot\|_E), (F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces vectoriels normés. Soit $S \subset E$. On dit que $f : S \to F$ est *continue* si :

$$\forall x \in S, \forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall y \in F, \|x - y\|_E \leq \eta \Rightarrow \|f(x) - f(y)\|_F \leq \varepsilon.$$

Proposition 1.17. Soit $(E, \|\cdot\|_E)$, $(F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces vectoriels normés, $S \subset E$, $f : S \to F$ alors les points suivants sont équivalents :
(1) f est continue.
(2) Pour tout ouvert U de F, il existe un ouvert V de E tel que $f^{-1}(U) = V \cap S$,
(3) Pour tout fermé C de F, il existe un fermé D de E tel que $f^{-1}(C) = D \cap S$.

Démonstration. TO DO ☐

Remarque 1.18. Formellement la proposition revient à dire que l'image reciproque d'un ouvert par une fonction continue est un ouvert.

Proposition 1.19. Soit $(E, \|\cdot\|_E), (F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces vectoriels normés, $f : E \to F$ une application linéaire. Les points suivants sont équivalents:
(1) f est continue.
(2) f est continue en 0.
(3) $\exists M \geq 0, \forall x \in E, \|f(x)\|_F \leq M\|x\|_E$.

Démonstration.
(1) $1 \Rightarrow 2$: f est continue sur E alors elle est continue en 0.
(2) $2 \Rightarrow 1$: Supposons f continue en 0. Alors il existe $\eta > 0$ tel que $\forall x \in E, \|x\|_E \Rightarrow \|f(x)\|_F \leq 1$. Soit $x \in E \setminus \{0\}$ alors $\left\|f\left(\frac{\eta}{\|x\|_E}x\right)\right\| \leq 1$ d'où $f(x)_F \leq \frac{1}{\eta}\|x\|_E$. Si $x = 0$ alors $\|f(0)\|_F = 0 \leq \frac{1}{\eta}\|0\|_E$. Donc $M := \frac{1}{\eta}$ convient.
(3) A faire.

☐

Notation 1.20. On note $\mathcal{L}_c(E, F)$ l'espace vectoriel des fonctions linéaires continues de E dans F.

Corollaire 1.21. Soit $\left(E, \|\cdot\|_E\right)$ et $\left(F, \|\cdot\|_F\right)$ deux espaces vectoriels normés. Pour tout $L \in \mathcal{L}_c(E, F)$ on pose $|||L||| := \sup_{\|x\|_E \leq 1} \|L(x)\|_F$. Alors,

(1) $\forall L \in \mathcal{L}_c(E, F)$, $|||L||| < \infty$,

(2) Si $E \neq \{0\}$, $\forall L \in \mathcal{L}_c(E, F)$:

$$|||L||| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|L(x)\|_F}{\|x\|_E} = \sup_{\|x\|_E \in]0,1[} \frac{\|L(x)\|_F}{\|x\|_E} = \sup_{\|x\|_E = 1} \|L(x)\|_F,$$

(3) $|||\cdot|||$ est une norme sur $\mathcal{L}_c(E, F)$ appelée norme d'opératuer ou norme subordonnée,

(4) $\forall L \in \mathcal{L}_c(E, F), \forall x \in E, \|L(x)\|_F \leq |||L||| \ \|x\|_E$,

(5) Si $\left(G, \|\cdot\|_G\right)$ est un espace vectoriel normé, alors $\forall L \in \mathcal{L}_c(E, F), \forall K \in \mathcal{L}_c(F, G)$,

$$|||K \circ L||| \leq |||K||| \ |||L||| \ .$$

1.4. Suites dans un espace vectoriel normé.

Définition 1.22 (Convergente)**.** Soit $\left(E, \|\cdot\|_E\right)$, un espace vectoriel normé, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E et $l \in E$. On dit que $(x_n)_n$ tend vers l si $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, n \geq N \Rightarrow \|x_n - l\| \leq \varepsilon$. On dit qu'une suite est *convergente* si elle admet une limite.

Proposition 1.23. Il y a unicité de la limite.

Démonstration. Supposons $x_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} l_1$, et $x_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} l_2$.
Soit $\varepsilon > 0$ alors il existe $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ tels que $n \geq N_1 \Rightarrow \|l_1 - x_n\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ et $n \geq N_2 \Rightarrow \|l_2 - x_n\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$
Posons $n := \max(N_1, N_2)$. Alors $\|l_1 - l_2\| \leq \|l_1 + x_n + l_2 - x_n\| \leq \|x_n - l_1\| + \|x_n - l_2\| \leq \varepsilon$. D'où $\|l_1 - l_2\| = 0 \Leftrightarrow l_1 = l_2$. $\square$

Lemme 1.24. Soit $\left(E, \|\cdot\|_E\right)$, un espace vectoriel normé, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite dans E convergente. Alors $(x_n)_n$ est bornée.

Proposition 1.25. Soit $\left(E, \|\cdot\|_E\right)$, un espace vectoriel normé, et $S \subset E$. Si une suite d'éléments converge alors sa limite est dans $\overline{S}$.

Corollaire 1.26. Soit $\left(E, \|\cdot\|_E\right)$, un espace vectoriel normé, $S \subset E$. S est fermé si et seulement si pour toute suite convergente d'éléments de S, sa limite est dans S.

Proposition 1.27. Soit $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces vectoriels normés, $S \subset E$, $a \in S$, et $f : S \to F$. Alors f est continue en a si et seulement si pour toute suite $(x_n)_n \in S^{\mathbb{N}}$ convergeant vers a, $(f(x_n))_n$ converge vers $f(a)$.

1.5. Compacité.

Définition 1.28 (Compacte)**.** Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et $S \subset E$. On dit que S est *compacte* si de toute suite d'éléments de S on peut extraire une sous-suite convergeant dans S.

Proposition 1.29. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé $K \subset E$ un compact, et $S \subset K$. Si S est fermée alors S est compacte.

Démonstration. Soit K un compact, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de S, alors $(x_n) \in K$ alors il existe une sous-suite de (x_n) qui converge dans K vers un élément $l \in \overline{S}$. Or $\overline{S} = S$ car S est fermé. $\square$

Définition 1.30 (bornée)**.** Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. On dit qu'une partie $S \subset E$ est *bornée* s'il existe $M > 0$ tel que pour tout $x \in S$, $\|S\| \leq M$.

Proposition 1.31. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. Toute partie compacte de E est fermée et bornée.

Démonstration.
Montrons $K \subset E$ compacte $\Rightarrow$ K fermée. Soit $\left(x_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'élements de K convergeant vers $l \in E$. Montrons $l \in K$. Comme K est compacte, on peut extraire une sous-suite telle que $x_{\varphi(n)}$ converge vers $\bar{l} \in K$. Or, $x_{\varphi(n)}$ converge aussi vers l comme suite extraite d'une suite convergeante. Ainsi, par unicité de la limite, $l = \bar{l}$.
Montrons par contraposition K compact $\Rightarrow$ K borné. Supposons que K soit une partie non-bornée de E. Alors pour $n \in \mathbb{N}$, il existe $x_n \in K$ tel que $\|x_n\| > n$. Montrons que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ainsi construite n'admet pas de sous-suite convergeant dans K. Soit $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une fonction strictement croissante. Alors $\left\|x_{\varphi(n)}\right\| > \varphi(n) = n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Donc $x_{\varphi(n)}$ n'est pas convergente. Ainsi, K n'est pas compact. □

Corollaire 1.32. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et $K \subset E$ un compact non-vide. Alors $\min_{x\in K} \|x\|$ et $\max_{x\in K} \|x\|$ sont bien définis.

Proposition 1.33. Soit $\left(E, \|\cdot\|_E\right), \left(F, \|\cdot\|_F\right)$ deux espaces vectoriels normés, $S \subset E$ et $f : S \to F$ une fonction continue. Si K est un compact de E inclus dans S alors $f(K)$ est compacte.

Démonstration. Soit $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $f(K)$. Alors pour $n \in \mathbb{N}$, il existe $x_n \in K$ tel que $y_n = f(x_n)$. Puisque $(x_n)_n$ est une suite d'éléments de K, il existe une sous suite $\left(x_{\varphi(n)}\right)_n$ qui converge vers un $l \in K$. Par continuité de f, il vient que $y_{\varphi(n)} = f\left(x_{\varphi(n)}\right) \longrightarrow f(l) \in f(K)$. Donc $f(K)$ est compacte. □

1.6. Comparaison de normes.

Définition 1.34 (Equivalente)**.** Soit E un espace vectoriel, N et N' deux normes sur E. On dit que N et N' sont *équivalentes* si

$$\exists \alpha, \beta > 0, \forall x \in E, \alpha N(x) \leq N'(x) \leq \beta N(x)$$

Proposition 1.35. L'équivalence de normes est une relation d'équivalence.

Proposition 1.36. Soit E un espace vectoriel, deux normes N, N' sur E sont équivalentes si et seulement si elles définissent la même topologie sur E.

1.7. Cas de la dimensions finie.

Proposition 1.37. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé de dimension fnie. Alors,
- Toutes les normes sur E sont équivalentes.
- Les parties compactes de E sont les parties fermées bornées

Lemme 1.38. Soit E un espace vectoriel de **dimension finie** et $\beta = (e_1, \ldots, e_d)$ une base de E. On définit $\|\cdot\|_\infty : E \to \mathbb{R}$ par $\left\|\sum_{i=1}^d \lambda_i e_i\right\|_\infty = \max_i |\lambda_i|$ alors on a :
(1) $\|\cdot\|_\infty$ est une norme sur E.

(2) Pour tout $a > 0$, $B_f(0,a)$ est un compact de $(E, \|\cdot\|_\infty)$,
(3) Les compacts de $(E, \|\cdot\|_\infty)$ sont les fermés bornés.

Proposition 1.39. Soit $(E, \|\cdot\|_E), (F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces normés avec E de dimension finie. Alors toute application linéaire $E \longrightarrow F$ est continue.

2. Calcul différentiel.

2.1. Différentielle, propriétés élémentaires.

Définition 2.1 (Différentiable)**.** Soit E, F deux espaces vectoriels normés, $U \subset E$ $f : U \to F$, $a \in U$.

- On dit que f est *différentiable* au point a s'il existe une application linéaire continue $g : E \to F$ telle que $f(a+h) - f(a) - g(h) = o_{h\to 0}(h)$.
- On dit que f est différentiable dans U si f est différentiable en tout point de U.
- On appelle g la différentielle de f en a.

Proposition 2.2. Si la différentielle existe, elle est unique.

Démonstration. Soit $g, \tilde{g}$ deux différentielles de f en a. Montrons $g = \tilde{g}$.
En soustrayant on a $g - \tilde{g} = o_{h\to 0}(h)$ i.e $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall h \in E, \|h\|_E \leq \eta \Rightarrow \|\tilde{g}(h) - g(h)\|_F \leq \varepsilon \|h\|$.
Soit $h \in E \setminus \{0\}$. On a :

$$\left\|\frac{\eta}{2} \cdot \frac{h}{\|h\|_E}\right\| < \eta \Rightarrow \left\|\tilde{g}\left(\frac{\eta}{2} \cdot \frac{h}{\|h\|_E}\right) - g\left(\frac{\eta}{2} \cdot \frac{h}{\|h\|_E}\right)\right\| \leq \varepsilon \left\|\frac{\eta}{2} \frac{h}{\|h\|_E}\right\| \Leftrightarrow \frac{\eta}{2\|h\|_E} \|\tilde{g}(h) - g(h)\| \leq \varepsilon \frac{\eta}{2\|h\|_E} \|h\|_E$$
$$\Leftrightarrow \|\tilde{g}(h) - g(h)\| \leq \varepsilon \|h\|_E$$

donc on a bien $\|\tilde{g} - g\| \leq 0$ d'où $\tilde{g} = g$. □

Définition 2.3. On appelle aussi g l'application *linéaire tangente*.

Proposition 2.4. Soit $U \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert, $a \in U$ et $f : U \to \mathbb{R}$. Alors f est différentiable en a si et seulement si f est dérivable en a. Dans ce cas, pour tout $h \in \mathbb{R}$, $\mathrm{d}f_a(h) = f'(a)h$.

Démonstration.
$\Rightarrow$ Supposons que f est différentiable en a.
Par définition, $f(a+h) - f(a) \underset{h\to 0}{=} \mathrm{d}f_a(h) + |h|\varepsilon(h)$, $\mathrm{d}f_a \in \mathcal{L}_{c(\mathbb{R},\mathbb{R})}$. On peut donc écrire pour un certain $c \in \mathbb{R}, \forall h \in \mathbb{R}, \mathrm{d}f_a(h) = ch$. D'où

$$f(a+h) - f(a) = ch + |h|\varepsilon(h).$$

Donc pour $h \neq 0$,

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = c + \frac{|h|}{h}\varepsilon(h).$$

f est bien dérivable en a et $f'(a) = c$. En particulier pour tout $h \in \mathbb{R}, \mathrm{d}f_a(h) = f'(a)h$.

$\Leftarrow$ Supposons f dérivable en a.
Il existe $c \in \mathbb{R}$, $\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = c + o(1)$. Alors

$$f(a+h) - f(a) = ch + o(h).$$

L'application $: \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,;\ h \mapsto ch$ est linéaire continue. Par définition, f est donc différentiable. □

Proposition 2.5. Soit $f : U \to F$ une application. Si f est différentiable en a alors f est continue en a.

Démonstration. On a $f(a+h) \underset{h\to 0}{=} f(a) + \mathrm{d}f_a(h) + \|h\|\varepsilon(h)$. Puisque $\mathrm{d}f_a$ est continue et linéaire, $\mathrm{d}f_a(h) \underset{h\to 0}{\longrightarrow} 0$, de plus $\|h\|\varepsilon(h) \underset{h\to 0}{\longrightarrow} 0$. Ainsi, on a bien f continue. $\square$

Définition 2.6 (Différentielle)**.** Soit E, F deux espaces vectoriels normés, $U \subset E$ $f : U \to F$. L'application $\mathrm{d}f : U \to \mathcal{L}_c(E,F)$; $x \mapsto \mathrm{d}f_x$ est appellée *différentielle* de f.

Définition 2.7 (Continuement différentiable)**.** Soit E, F deux espaces vectoriels normés, $U \subset E$ $f : U \to F$, $a \in \mathbb{R}$. On dit que f est *continuement différentiable* ou de classe C^1 en a si f est différentiable en tout point d'un voisinage ouvert V de a dans U et si $\mathrm{d}f : V \to \mathcal{L}_c(E,F)$ est continue en a.

2.2. Dérivée directionnelle et différentielle.

Définition 2.8. Soit E, F deux espaces vectoriels normés, $U \subset E$ $f : U \to F$. On dit que f est différentiable en a dans la direction $h \in E$ s'il existe $l \in \mathbb{R}$ telle que

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(a+th) - f(a)}{t} = l.$$

Dans ce cas on la note $\partial_h f(a) \in F$.

Proposition 2.9. Si f est différentiable en a alors elle est différentiable dans toutes les directions et $\forall h \in E, \mathrm{d}f_a(h) = \partial_h f(a)$.

Démonstration. On peut écrire $f(a+k) - f(a) = \mathrm{d}f_a(k) + \|k\|\varepsilon(k)$. Soit $h \in E$. Pour $t \neq 0$ suffisamment petit, $th \longrightarrow 0$. On a $f(a+th) - f(a) = \mathrm{d}f_a(th) + |t|\|h\|\varepsilon(h)$.
D'où $\frac{f(a+th)-f(a)}{t} = \mathrm{d}f_a(h) \underbrace{\left(\frac{|t|}{t}\|h\|\right)}_{\text{borné}} \varepsilon(th) \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0$. Par définition, on a bien $\mathrm{d}f_a(h) = \partial_h f(a)$. $\square$