

Fonction de deux variables

Table des matières

| | |
|--|----------|
| 1. Introduction. | 1 |
| 1.1. Rappels. | 1 |
| 1.2. Premières définitions. | 1 |
| 2. La topologie de la norme de \mathbb{R}^2. | 2 |
| 2.1. Norme euclidienne. | 2 |
| 2.2. Disques ouverts/fermés et sous-ensembles ouverts/fermés. | 3 |
| 3. Limites de suites. | 4 |
| 4. Points limites et adhérence d'un sous-ensemble. | 4 |
| 5. Limites de fonctions. | 5 |
| 6. Continuité. | 6 |
| 7. Différentielle. | 7 |
| 7.1. Courbe paramétrée | 7 |
| 8. Dérivées partielles et directionnelles. | 8 |
| 8.1. Premières définitions. | 8 |
| 8.2. Matrice Jacobienne. | 9 |
| 8.3. Critère de différentiabilité. | 9 |
| 9. Dérivées partielles d'ordre supérieur. | 9 |

1. Introduction.

1.1. Rappels.

Définition 1.1.1 (fonction d'une variable): Soit A, B deux ensembles. Une application f est la donnée d'un ensemble de départ A et d'un ensemble d'arrivée B et qui, à chaque $x \in A$ associe un unique $f(x) \in B$. On la note $f : A \rightarrow B; x \mapsto f(x)$.

Définition 1.1.2 (Graphe d'une application): Soit $f : A \rightarrow B$ une application. On appelle graphe de f l'ensemble suivant $\text{Graphe}(f) = \{(x, f(x)) \mid x \in A\} \subset A \times B$

1.2. Premières définitions.

Définition 1.2.1 (fonction de deux variables): Soit A un sous ensemble de \mathbb{R}^2 et B un ensemble. Une application f de deux variables de A dans B est la donnée d'un ensemble de départ A et d'un ensemble d'arrivée B et qui, à chaque $(x, y) \in A$ associe un unique $f(x, y) \in B$. On la note $f : A \rightarrow B; (x, y) \mapsto f(x, y)$.

Définition 1.2.2 (Graphe d'une application): Soit $f : A \rightarrow B$ une application de deux variables. On appelle graphe de f l'ensemble suivant $\text{Graphe}(f) = \{(x, y, f(x, y)) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in A\}$

Exemple: L'aire d'un rectangle : $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}; (x, y) \mapsto xy$.

Soit a un réel fixé et $x, y \in \mathbb{R}$. l'équation associée est $a = xy \Leftrightarrow y = \frac{a}{x}$. On cherche le rectangle d'aire a de côté x, y .

2. La topologie de la norme de \mathbb{R}^2 .

2.1. Norme euclidienne.

Définition 2.1.1 (Norme Euclidienne): Soit $v = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$. La norme Euclidienne est la longueur du vecteur v . Elle est donnée par $\|v\| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Proposition 2.1.1: Soit $v \in \mathbb{R}^2, \lambda \in \mathbb{R}$. Alors $\|\cdot\|$ vérifie:

1. $\|v\| \geq 0$ et $\|v\| = 0 \Leftrightarrow v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.
2. $\|\lambda v\| = |\lambda| \|v\|$ (homogénéité).
3. $\|v + u\| \leq \|v\| + \|u\|$ (inégalité triangulaire).

i.e la norme Euclidienne est une norme.

Démonstration:

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}^2, x^2 \geq 0$ d'où $\forall u \in \mathbb{R}^2, \|u\| \geq 0$.

2. Soit $u = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2, \lambda \in \mathbb{R}$.

On a $\|\lambda u\| = \|(\lambda a, \lambda b)\| = \sqrt{(\lambda a)^2 + (\lambda b)^2} = \sqrt{\lambda^2(a^2 + b^2)} = |\lambda| \|u\|$.

3.

□

Corollaire 2.1.1: Soit $v, u \in \mathbb{R}^2$. On a :

$$\|v - u\| \geq |\|v\| - \|u\||.$$

Démonstration: On a $\forall u, v \in \mathbb{R}^2$,

$$v = (v - u) + u$$

$$\|v\| = \|v - u + u\| \leq \|v - u\| + \|u\|$$

$$\Leftrightarrow \|v - u\| \geq \|v\| - \|u\|$$

De même avec u , on obtient par ailleurs $\|v - u\| \geq \|u\| - \|v\|$ d'où $\|v - u\| \geq |\|v\| - \|u\||$.

□

Définition 2.1.2: Soient $u = (a, b), v = (x, y) \in \mathbb{R}^2$. On définit le produit scalaire par

$$u \cdot v = ax + by.$$

Proposition 2.1.2: Soient $u, v, w \in \mathbb{R}^2, \lambda \in \mathbb{R}$.

1. $u \cdot v = v \cdot u$ (symétrie).
2. $(w + v) \cdot u = w \cdot u + v \cdot u$ (bilinéarité).
3. $(v \cdot u)^2 \leq \|u\|^2 \|v\|^2$ (inégalité de Cauchy-Schwartz).

Démonstration: Soient $u, v \in \mathbb{R}^2, t \in \mathbb{R}$. $\|v + tu\|^2 = (v + tu) \cdot (v + tu) = v \cdot v + 2t(v \cdot u) + (u \cdot u)t^2$.

On pose $f(t) = \|v\|^2 + 2(v \cdot u)t + \|u\|^2 t^2$. On peut supposer que $u \neq 0$ sinon l'égalité est évidente. \square

2.2. Disques ouverts/fermés et sous-ensembles ouverts/fermés.

Définition 2.2.1 (disque): Soient $u \in \mathbb{R}^2, R > 0$. On appelle **disque ouvert** de rayon R centré en u l'ensemble:

$$B(u, r) := \{v \in \mathbb{R}^2 \mid \|v - u\| < R\}.$$

On appelle **disque fermé** de rayon R centré en u l'ensemble:

$$\overline{B}(u, R) := \{v \in \mathbb{R}^2 \mid \|v - u\| \leq R\}.$$

Définition 2.2.2 (ouvert): Soit U un sous-ensemble de \mathbb{R}^2 . On dit que U est un **ouvert** de \mathbb{R}^2 si

$$\forall u \in U, \exists r_u > 0, B(u, r_u) \subset U.$$

Remarque: L'ensemble de ces sous-ensembles sont notés O_{norm} .

Proposition 2.2.1:

1. Les sous-ensembles \emptyset et \mathbb{R}^2 sont des ouverts.
2. Soit $\{H_i\}_{i \in I} \subset O_{\text{norm}}$. Alors leur réunion est un sous-ensemble ouvert de \mathbb{R}^2 i.e,

$$\forall \{H_i\}_{i \in I} \subset O_{\text{norm}}, \bigcup_{i \in I} H_i \in O_{\text{norm}}.$$

3. Soit $\{H_i\}_{i \in \{1, \dots, n\}} \subset O_{\text{norm}}$ alors leur intersection est un sous-ensemble de \mathbb{R}^2 i.e,

$$\forall \{H_i\}_{i \in \{1, \dots, n\}} \subset O_{\text{norm}}, \bigcap_{i \in \{1, \dots, n\}} H_i \in O_{\text{norm}}.$$

Démonstration:

- 1.
2. On peut supposer la réunion non-vide. Soit $v \in V = \bigcup_{i \in I} H_i$, alors $\exists i_0, v \in H_{i_0}$. D'où

$$\exists v_{i_0}, B(v, v_{i_0}) \subset H_{i_0} \subset \bigcup_{i \in I} H_i$$

\square

Définition 2.2.3: La collection O_{norm} s'appelle la topologie de \mathbb{R}^2 associée avec la norme euclidienne. (ou la topologie de la norme de \mathbb{R}^2).

Définition 2.2.4 (voisinage): Soit $u \in \mathbb{R}^2$. On appelle **voisinage ouvert** de u tout sous-ensemble ouvert U de \mathbb{R}^2 qui contient u .

Définition 2.2.5 (fermé): Soit $F \subset \mathbb{R}^2$. On dit que F est un fermé si le complémentaire de F dans \mathbb{R}^2 est un ouvert de \mathbb{R}^2 , i.e, F est un fermé $\Leftrightarrow F^c \in O_{\text{norm}}$

Remarque: L'ensemble de ces sous-ensembles sont notés F_{norm} .

Proposition 2.2.2:

1. Les sous-ensembles \emptyset et \mathbb{R}^2 sont des fermés.
2. Soit $\{H_i\}_{i \in \{1, -, n\}} \subset F_{\text{norm}}$. Alors leur réunion est un sous-ensemble fermé de \mathbb{R}^2 i.e,

$$\forall \{H_i\}_{i \in I} \subset F_{\text{norm}}, \bigcup_{i \in I} H_i \in F_{\text{norm}}.$$

3. Soit $\{H_i\}_{i \in I} \subset F_{\text{norm}}$ alors leur intersection est un sous-ensemble de \mathbb{R}^2 . i.e,

$$\forall \{H_i\}_{i \in \{1, -, n\}} \subset F_{\text{norm}}, \bigcap_{i \in \{1, -, n\}} H_i \in F_{\text{norm}}.$$

3. Limites de suites.

Définition 3.1 (limite): Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de points de \mathbb{R}^2 . On dit que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet une **limite** si

$$\exists L \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow \|x_n - L\| \leq \varepsilon.$$

Dans ce cas on dit que la suite converge vers L . Sinon, on dit qu'elle diverge.

Proposition 3.1: Soit $x_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}, n \in \mathbb{N}$ une suite dans \mathbb{R}^2 . Alors $L = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ est la limite de x_n si et seulement si on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = b.$$

4. Points limites et adhérence d'un sous-ensemble.

Définition 4.1 (point isolé): Soit $A \subset \mathbb{R}^2$ un ensemble, $a \in A$. On dit que a est un point isolé s'il existe un voisinage ouvert V_a dans \mathbb{R}^2 tel que $V_a \cap A = \{a\}$.

Définition 4.2 (point intérieur): Soit $A \subset \mathbb{R}^2$ un ensemble, $a \in A$. On dit que a est un point intérieur s'il existe un voisinage ouvert de V_a dans \mathbb{R}^2 tel que $V_a \subset A$.

Le sous-ensemble des points intérieurs de A est noté $\text{int}(A)$ et on l'appelle l'intérieur de A .

$$\text{int}(A) := \{u \in A \mid \exists r > 0, B(u, r) \subset A\}.$$

Proposition 4.1: Soit $A \subset \mathbb{R}^2$ un ensemble. Alors son intérieur est le plus grand sous-ensemble ouvert contenu dans A .

Remarque: L'intérieur d'un ensemble A est une approximation de A par un sous-ensemble ouvert.

Définition 4.3 (Point limite): Soit $A \subset \mathbb{R}^2$ un ensemble, $x \in \mathbb{R}^2$. On dit que x est un point limite de A s'il existe une suite infinie $\{a_n\}_n \in \mathbb{N}$ de points deux-à-deux distincts dans A telle que $a_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x$.

Définition 4.4 (Adhérence): L'ensemble des points limites s'appelle l'adhérence de A et on la désigne par \overline{A}

$$\overline{A} := \{u \in \mathbb{R}^2 \mid \forall r > 0, B(u, r) \cap A \neq \emptyset\}.$$

Proposition 4.2: Soit $A \subset \mathbb{R}^2$ un ensemble. Alors son adhérence est le plus petit sous-ensemble fermé qui contient A .

Remarque: Tout ouvert $A \subset \mathbb{R}^2$ est encadré de la manière suivante: $\text{Int}(A) \subset A \subset \overline{A}$.

Définition 4.5 (Frontière): Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. On appelle frontière de f l'ensemble constitué des points limites de f .

5. Limites de fonctions.

Définition 5.1: Soit U un ouvert, $f : U \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in \overline{U}$.

1. On dit que f admet l comme limite en a si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in U, \|x - a\| \leq \eta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon.$$

2. On dit que f admet $+\infty$ comme limite en a si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in U, \|x - a\| \leq \eta \Rightarrow f(x) \geq A.$$

3. On dit que f admet $-\infty$ comme limite si $-f$ admet $+\infty$ pour limite en a .

Exemple:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{(x+2y)^3}{x^2+y^2}.$$

On étudie la fonction $f : U = \{x^2 + y^2 \neq 0\} = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$. On a $f(x, 0) = \frac{x^3}{x^2} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$ et $f(0, y) = \frac{(2y)^3}{y^2} \xrightarrow{y \rightarrow 0} 0$. Montrons que $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x) = 0$.

Passons aux coordonnées polaires. On note $x = r \cos(\theta)$, $y = r \sin(\theta)$. Ainsi,

$$f(x, y) = r^3 \frac{(\cos(\theta) + 2 \sin(\theta))^3}{r^2} = r(\cos(\theta) + 2 \sin(\theta))^3$$

De plus, $|\cos(\theta) + 2 \sin(\theta)|^3 \leq |\cos \theta| + 2|\sin \theta| \leq 3 \Rightarrow 3^3 = 27$

Proposition 5.1: Soit U un ouvert, $f : U \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in \overline{U}$. Si f admet une limite, alors cette limite est unique.

6. Continuité.

Définition 6.1 (continue): Soit U un ouvert, $f : U \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in \overline{U}$, et $x \in U$. On dit que f est continue en x si

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} f(a).$$

Définition 6.2: On dit que f est continue sur X si f est continue en tout point de X .

Proposition 6.1: Soit U un ouvert, $f, g : U \rightarrow \mathbb{R}$, des applications continues sur U , $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$|f|, \lambda f, f + g, fg$$

sont continues sur U . Si $\forall x \in U, g(x) \neq 0$, alors $\frac{f}{g}$ est continue sur U .

Corollaire 6.1: Toute fonction polynomiale est continue sur \mathbb{R}^2 .

Proposition 6.2: Soit U, V deux ouverts, $f : U \rightarrow V, g : V \rightarrow \mathbb{R}$ des applications continues respectivement sur U et V . Alors $g(f(x))$ est continue sur U .

Proposition 6.3: Soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, $I \subset \mathbb{R}$ un ouvert (resp. fermé). $f^{-1}(I) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in U \mid f(x, y) \in I \right\}$ est un sous-ensemble ouvert (resp. fermé).

Définition 6.3: Soit U un ouvert, $f : U \rightarrow \mathbb{R}$. Pour une valeur $c \in \mathbb{R}$, $f^{-1}(c)$ s'appelle l'ensemble de niveau c .

Corollaire 6.2: Soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur U . Alors pour tout $a \in \mathbb{R}$, l'ensemble de niveau a est un sous-ensemble fermé dans U .

7. Différentielle.

Définition 7.1 (Différentielle): Soit $U \subset \mathbb{R}^2$ un ouvert, $f : U \rightarrow \mathbb{R}$. On munit \mathbb{R}^2 d'une norme. Soit $a \in U$, on appelle la différentielle de f en u_0 l'application linéaire $L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$f(a+h) = f(a) + L(h) + o_{h \rightarrow 0}(h)$$

Proposition 7.1: Si la différentielle existe elle est unique.

Définition 7.2 (Différentiable): Soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}$, $u_0 \in U$. On dit que f est différentiable en u_0 (resp. sur U) si la différentielle df_{u_0} existe (resp. différentiable en tout point de U).

Proposition 7.2: Soit U un ouvert, $f, g : U \rightarrow \mathbb{R}$, des applications différentiables sur U , $\lambda \in \mathbb{R}$. λf , $f + g$, fg sont différentiables sur U . Si $\forall x \in U$, $g(x) \neq 0$, alors $\frac{f}{g}$ est différentiable sur U .

Proposition 7.3: Soit U un ouvert, $f, g : U \rightarrow \mathbb{R}$, des applications différentiables sur U , de différentielle df_{u_0}, dg_{u_0} .

$$\begin{aligned} d(f+g)_{u_0} &= df_{u_0} + dg_{u_0} \\ d(fg)_{u_0} &= g(u_0) df_{u_0} + f(u_0) dg_{u_0} \\ d\left(\frac{f}{g}\right)_{u_0} &= \frac{g(u_0) df_{u_0} - f(u_0) dg_{u_0}}{g^2(u_0)}, g(u_0) \neq 0 \end{aligned}$$

Proposition 7.4: Soit U, V deux ouverts, $f : U \rightarrow V$, $g : V \rightarrow \mathbb{R}$ des applications différentiables respectivement sur U et V . Alors $g(f(x))$ est différentiable sur U .

Proposition 7.5: Toute fonction polynomiale est différentiable sur \mathbb{R}^2 .

7.1. Courbe paramétrée

Proposition 7.1.1: Soit $I \subset \mathbb{R}$, $F : I \rightarrow \mathbb{R}^2; t \mapsto \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{pmatrix}$. Alors F est différentiable en $u_0 \in \mathbb{R}$ de différentielle :

$$dF_{u_0}(h) = h \begin{pmatrix} f'_1(u_0) \\ f'_2(u_0) \end{pmatrix}.$$

8. Dérivées partielles et directionnelles.

8.1. Premières définitions.

Définition 8.1.1: Soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}$, $u_0 \in U$, $v \in \mathbb{R}^2$. On appelle dérivée de f en u_0 de direction v la valeur

$$D_{u_0, v} f := \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(u_0 + tv) - f(u_0)}{t}.$$

Remarque: En pratique, pour trouver la dérivée directionnelle $D_{u_0, v} f$, on cherche le développement limité à l'ordre 1 de $f(u_0 + tv)$.

Exemples:

1. Soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}; (x, y) \mapsto 2x^2 - y^2$ Calculons $D_{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}} f$.

On a $f(u_0) = 2 - 1 = 1$

$$f(u_0 + tv) = 2(1 + 2t)^2 - (-1 + t)^2 = 2 + 8t + 8t^2 - (1 - 2t + t^2) = 1 + 10t + 7t^2.$$

Ainsi,

$$\frac{f(u_0 + tv) - f(u_0)}{t} = \frac{7t^2 + 10t}{t} = 7t + 10 \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} 10.$$

D'où $D_{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}} f = 10$.

2. Soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}^2; (x, y) \mapsto xy^2$, $u_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$$f(u_0) = 1$$

$$f(u_0 + tv) = f((2 + t, -1 + t)) = (2 + t)(t - 1)^2 = (2 + t)(t^2 - 2t + 1) = -3t + 2.$$

Ainsi

$$\frac{f(u_0 + tv) - f(u_0)}{t} = \frac{-3t + 1}{t} \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} -3$$

D'où $D_{u_0, v} f = -3$.

Définition 8.1.2: Soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}$, $u_0 \in U$, et $B = (e_1, e_2)$ une base de \mathbb{R}^2 . On appelle i -ème dérivée partielle de f en u_0 la valeur

$$D_{u_0, e_i} f = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(u_0 + te_i) - f(u_0)}{t}.$$

Remarque: En pratique, on calcule la dérivée de f par rapport à x (resp. y) en considérant y (resp. x) comme une constante.

Remarque (Notation): On note $d_{x/y} f(u_0)$ la dérivée de f en u_0 par rapport à la variable x/y .

Exemples:

1. Soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}; (x, y) \mapsto 2x^2 - y^2$, $u_0 = (1, -1)$

$$d_x(u_0) = (4x)((1, -1)) = 4$$

$$d_y(u_0) = (-2y)((1, -1)) = 2.$$

2. Soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}^2; (x, y) \mapsto xy^2$, $u_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$d_x(u_0) = (y^2)((2, -1)) = 1$$

$$d_y(u_0) = (2xy)((2, -1)) = -4.$$

8.2. Matrice Jacobienne.

Proposition 8.2.1: Soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction différentiable à un point $u_0 \in U$ de différentielle $df_{u_0} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Pour tout $v \in \mathbb{R}^2$, $D_{u_0,v}$ existe et est déterminée par $D_{u_0,v}f = df_{u_0}(v)$.

Corollaire 8.2.1: Soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction différentiable à un point $u_0 \in U$ de différentielle $df_{u_0} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Pour tout $v \in \mathbb{R}^2$, $d_x f$ et $d_y f$ existe et sont déterminées par $d_x f = df_{u_0}(1, 0)$, et $d_y f = df_{u_0}(0, 1)$.

Définition 8.2.1: Soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On appelle matrice *Jacobienne* notée $J(f)_{u_0}$ la matrice composée des dérivées partielles d'une fonction f .

8.3. Critère de différentiabilité.

Définition 8.3.1: Soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On dit que f est C^1 sur U si ses dérivées partielles existent et sont continues en tout point de U .

Proposition 8.3.1: Soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction C^1 sur U . Alors la différentielle df_u existe en tout point de U et est donnée par

$$\partial f_u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}; \begin{pmatrix} h_0 \\ h_1 \end{pmatrix} \mapsto J(f)_{u_0} \begin{pmatrix} h_0 \\ h_1 \end{pmatrix}.$$

9. Dérivées partielles d'ordre supérieur.

Définition 9.1: Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. On dit que f est de classe C^2 si f est C^1 et que $(x, y) \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}$ et $(x, y) \mapsto \frac{\partial f}{\partial y}$ le sont aussi.

Remarque (notation): Soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction C^2 .

On note $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ la dérivée partielle d'ordre 2 par rapport à x et on note $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ la dérivée partielle d'ordre 2 par rapport à x puis à y .

Définition 9.2: Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 . On appelle matrice hessienne de f la matrice :

$$H(f) := \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix}.$$

Exemple: $f(x) = x^3 + y^3 - 5xy$. $H(f) = \begin{pmatrix} 6x & -5 \\ -5 & 6y \end{pmatrix}$.

Théorème 9.1: Soit $U \subset \mathbb{R}^2$ un ouvert, $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 . La matrice hessienne de f est symétrique.

Démonstration: Montrer $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$.

□