Calcul intégral et applications

Table des matières

Chapitre 1: Espaces et applications mesurables.

1. Ensembles et applications.

Proposition 1.1. Soit E un ensemble et $(A_i)_{i\in I}$ une collection quelconque de sous-ensembles de E.
(1) $E \setminus \bigcap_{i\in I} A_i = \bigcup_{i\in I} E \setminus A_i$.
(2) $E \setminus \bigcup_{i\in I} A_i = \bigcap_{i\in I} E \setminus A_i$

Définition 1.2. Soit E et F deux ensembles quelconques et soit $f : E \to F$ une application quelconque. L'image par f d'un sous-ensemble $A \subset E$ est le sous ensemble de F noté f(A) défini par : $f(A) = \{y \in F, \exists x \in A, y = f(x)\} = \{f(x), x \in A\}$.
L'image réciproque d'un sous-ensemble $B \subset F$ est le sous-ensemble noté $f^{-1}(B)$ de E et défini par $f^{-1}(B) = \{x \in E, f(x) \in B\}$.

2. Espaces mesurables.

2.1. Tribus.

Définition 2.1 (Tribu). Soit E un ensemble quelconque, $\mathcal{P}(E)$ désigne l'ensemble des parties de E. On appelle *tribu* sur E (ou σ-algèbre) une famille de parties de E, $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(E)$ telle que :
(1) $\emptyset \in \mathcal{A}$,
(2) Si $A \in \mathcal{A}$ alors $A^c \in \mathcal{A}$.
(3) Si $(A_n)_{n\in N}$ est une suite d'éléments de $\mathcal{A}$, alors $\bigcup_{n\geq 1} A_n \in \mathcal{A}$.

Remarques 2.2.
(1) Pour toute famille $(B_i)_{i\in I}$ de $\mathcal{P}(E)$,
$$\left(\bigcup_{i\in I} B_i\right)^c = \bigcap_{i\in I} (B_i)^c \text{ et } \left(\bigcap_{i\in I} B_i\right)^c = \bigcup_{i\in I} (B_i)^c$$
(2) On peut remplacer le point (3) de la définition par : Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$, est une suite de $\mathcal{A}$ alors $\bigcap_{n\in I} A_n \in \mathcal{A}$.
(3) De même, par le point (2), on peut remplacer le premier point par $E \in \mathcal{A}$.

Exemples 2.3.
1. $\mathcal{P}(E)$ est une tribu sur E. C'est la tribu fine sur E.

2. $\{\emptyset, E\}$ est une tribu sur E. C'est la tribu grossière sur E.
3. Si $A \subset E$ est un sous-ensemble de $E, \{\emptyset, A, A^c, E\}$ est une tribu sur E.
4. $\{A \in \mathcal{P}(E) \mid A$ ou A^c est au plus dénombrable ou $\}$ est une tribu sur E.

Définition 2.4 (Espace mesurable)**.** Soit E un ensemble et A une tribu sur E. Le couple $(E, \mathcal{A})$ est appelé un *espace mesurable*.

Définition 2.5 (Ensemble mesurables)**.** Soit E un ensemble et A une tribu sur E. Les éléments d'une tribu A sont appelés les ensembles mesurables ou les parties mesurables de $(E, \mathcal{A})$.

Proposition 2.6. Une intersection quelconque de tribus sur E est une tribu sur E.

Démonstration. Soit $(\mathcal{A}_i)_{i\in I}$ une famille de tribus sur E. Posons $\mathcal{A} = \cap_{i\in I} \mathcal{A}_i$.
(1) $\emptyset \in \mathcal{A}$ car $\emptyset \in (\mathcal{A}_i)_{i\in I}$.
(2) Soit $A \in \mathcal{A}$ alors $A \in (\mathcal{A}_i)_{i\in I}$ donc $A^c \in (\mathcal{A}_i)_{i\in I}$ car les a_i sont des tribus donc $A^c \in \cap_{i\in I} \mathcal{A}_i$.
(3) Soit $(A_n)_{n\geq 1}$ une suite d'éléments de $\mathcal{A}$. Alors $(A_n)_{n\geq 1} \in (\mathcal{A}_i)_{i\in I}$ donc $\bigcup_{n\geq 1} A_n \in \mathcal{A}_{i\in I}$. Ainsi, $\bigcup_{n\geq 1} A_n \in \bigcap_{i\in I} A_i$.

□

Corollaire 2.7. Soit $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(E)$ une famille de parties de E. L'intersection de toutes les tribus sur E qui contiennent $\mathcal{C}$ est une tribu sur E.

Démonstration. Application directe de la proposition précédente. □

Définition 2.8. On appelle tribu *engendrée* par $\mathcal{C}$ la tribu notée par

$$\sigma(\mathcal{C}) := \{\cap \mathcal{A} \mid A \text{ tribu sur } E \text{ et } \mathcal{C} \subset \mathcal{A}\}.$$

Remarque 2.9. $\sigma(\mathcal{C})$ est la plus petite des tribus sur E qui contiennent $\mathcal{C}$, i.e si $\mathcal{A}$ est une tribu qui contient $\mathcal{C}$ alors $\sigma(\mathcal{C}) \subset \mathcal{A}$

Exemples 2.10.
1. Soit $A \subset E$. Alors $(\sigma(\{A\})) = \{\emptyset, E, A, A^c\}$.
2. La tribu engendrée par les singletons sur E est égale à la tribu engendrée par les ensembles dénombrables et on a $\sigma(\{\{x\} | \, x \in E\}) = \sigma(A \in \mathcal{P}(E) \mid A \text{ est au plus dénombrable}) = \{A \in \mathcal{P}(E) \mid A \text{ ou } A^c \text{ est au plus dénombrable}\}$.

2.2. Rappels sur la topologie.

Définition 2.11 (Topologie)**.** Soit E un ensemble quelconque, $O \subset \mathcal{P}(E)$ une famille de parties de E. On dit que O est une topologie sur E si elle vérifie :
(1) $\emptyset \in O$ et $E \in O$.
(2) Si $(A_i)_{i\in I}$ est une famille quelconque de O alors $\bigcup_{i\in I} A_i \in O$.
(3) Pour toute famille finie d'élements de $\mathcal{O}$ $(A_1, \dots, A_n)$, $\cap_{k\in\{1,\dots,n\}} A_k \in O$.

Les éléments d'une topologie sont appelés les ouverts.

Proposition 2.12. Une intersection quelconque de topologies est une topologie.

Corollaire 2.13. Soit $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(E)$ une famille de parties de E. L'intersection de toutes les topologies sur E qui contiennent $\mathcal{C}$ est une topologie sur E.

Remarque 2.14. C'est la plus petite topologie contenant $\mathcal{C}$.

Définition 2.15. Un ensemble E muni d'une topologie $\mathcal{O}$ est appelé un espace topologique.

Définition 2.16. Soit $(E, \mathcal{O})$ un espace topologique. On appelle tribu borélienne sur E notée $\mathcal{B}(E)$ la tribu engendrée par la topologie $\mathcal{O}$; $\mathcal{B}(E) = \sigma(\mathcal{O})$.

Remarque 2.17. Dans la suite de ce cours nous ne considérons que les tribus boréliennes sur $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ ou des sous-ensembles de $\overline{\mathbb{R}}$ et sur $\mathbb{R}^d$ pour $d \geq 1$.

Notation 2.18. On note $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ la tribu borélienne sur $\mathbb{R}$ engendrée par la topologie usuelle (euclidienne).

Proposition 2.19. La tribu borélienne sur $\mathbb{R}$ est définie par :

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma(\{]a, b[, a < b \in \mathbb{R}\}) = \sigma(\{]-\infty, a[, a \in \mathbb{R}\}) = \ldots$$

Démonstration. Soit $O(\mathbb{R})$ la topologie sur $\mathbb{R}$, i.e l'ensemble des ouverts de $\mathbb{R}$. Par définition, $\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma(\mathcal{O}(\mathbb{R}))$. On a $a, b \in \mathbb{Q}, a < b,]a, b[\in \mathcal{O}(\mathbb{R})$ et donc $\sigma(\{]a, b[, a, b \in \mathbb{Q}\}) \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma(\mathcal{O}(\mathbb{R}))$.
Réciproquement, soit $A \in \mathcal{O}(\mathbb{R})$. Rappelons que $A = \bigcup_{]a,b[\subset A,(a,b)\in\mathbb{Q}^2}]a, b[$.
Cela entraine que $A \in \sigma(\{]a, b[, a, b \in \mathbb{R}\})$. On conclut que

$$\mathcal{O}(\mathbb{R} \subset \sigma(\{]a, b[, a, b \in \mathbb{Q}\}) \Rightarrow \sigma(\mathcal{O}(\mathbb{R})) \subset \sigma(\{]a, b[, a, b \in \mathbb{Q}\}).$$

Montrons que $\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma(\{]-\infty, a[, a \in \mathbb{Q}\})$. Soit $a \in \mathbb{Q}$ de telle sorte que

$$]-\infty, a[\subset \mathcal{O}(\mathbb{R}) \Rightarrow]-\infty, a[\in \sigma(\mathcal{O}(\mathbb{R})) = \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

On fait de même avec $]-\infty, a[, [a, +\infty[\ldots$ ☐

Proposition 2.20. La tribu boréienne sur $\mathbb{R}^d$ est engendrée par l'ensemble des pavés ouverts dont kes extremités sont rationnelles $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d) = \sigma(\{]a_1, b_1[x\ldots x]a_d, b_d[, a_i, b_i \in \mathbb{Q}\})$.

Définition 2.21. On définit sur $\overline{\mathbb{R}}$ la tribu borélienne par

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma(\{[-\infty, a[, a \in \mathbb{R}\} \cup \{]a, +\infty], a \in \mathbb{R}\})$$

Définition 2.22 (tribu trace). Soit $(E, \mathcal{A})$ un espace mesurable, $B \subset E$ un sous-ensemble de E. On appelle tribu tracede $\mathcal{A}$ sur B la tribu $\mathcal{A}_B := \{A \cap B, A \in \mathcal{A}\}$

Proposition 2.23. $\mathcal{A}_B$ est une tribu sur B.

Démonstration. $\emptyset \in \mathcal{A}_B$, $C = A \cap B \in \mathcal{A}_B$. Alors $B \setminus C = B \cap E \setminus A$.
$b_i(c_n)$ est une suite de $\mathcal{A}_B$, alors $\cup C_n = \cup A_n \cap B = (\cup A_n) \cap B \in \mathcal{A}_B$

☐

Exemple 2.24. Par exemple $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ est la tribu trace de $\mathcal{B}\big(\overline{\mathbb{R}}\big)$ sur $\mathbb{R}$. Soit $\overline{\mathbb{R}}_+ = \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\} = [0, +\infty]$. On définit la tribu $\mathcal{B}\big(\overline{\mathbb{R}}_+\big)$ comme la tribu trace de $\mathcal{B}\big(\overline{\mathbb{R}}\big)$ sur $\overline{\mathbb{R}}_+$ On étendra la multiplication sur $\overline{\mathbb{R}}_+$ en posant : $\forall x \in]0, +\infty[, x \cdot +\infty = +\infty \cdot x = +\infty$ et $0 \cdot +\infty = +\infty \cdot 0 = 0$.

2.3. Applications mesurables.

Remarques 2.25.

(1) Soit $f : E \to F$ une application, $C \subset F$. L'image réciproque de C par f est défini par $f^{-1}(C) = \{x \in E, f(x) \in C\}$.
(2) $f^{-1}(\cup_{i\in I} C_i) = \cup_{i\in I} f^{-1}(c_i)$ et $f^{-1}(\cap_{i\in I} C_i) = \cap_{i\in I} f^{-1}(c_i)$

Définition 2.26. Soit E et F deux ensembles, $f : E \to F$ une application. L'image réciproque d'une famille de parties $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(F)$ par f comme : $f^{-1}(\mathcal{C}) = \{f^{-1}(c), c \in \mathcal{C}\}$.

Proposition 2.27. Soit $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(F)$ une tribu sur F. Alors $f^{-1}(\mathcal{B})$ est une tribu sur E.

Démonstration.
(1) $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset \in f^{-1}(\mathcal{B})$.
(2) Soit $B \in \mathcal{B}$. $f^{-1}(F \setminus B) = E \setminus f^{-1}(B)$. Or $f^{-1}(B) \in f^{-1}(\mathcal{B})$ et $f^{-1}(F \setminus B) \in f^{-1}(\mathcal{B})$ donc $E \setminus f^{-1}(B) \in f^{-1}(\mathcal{B})$.
(3) Soit $(A_n)_{n \geq 1}$ une suite de $f^{-1}(\mathcal{B})$, $(B_n)_{n \in N} \in B$. Alors $f^{-1}(B_n) = A_n$ et $\cup f^{-1}(\cup B_n) \in f^{-1}(\mathcal{B})$.

$\square$

Proposition 2.28. Soit $f : E \to F$ une application quelconque et $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(F)$ une famille de parties de F.

$$\sigma\big(f^{-1}(\mathcal{C})\big) = f^{-1}(\sigma(\mathcal{C})).$$

Définition 2.29. Soit $(E, \mathcal{A})$, $(F, \mathcal{B})$ deux espaces mesurables. Une application $f : E \to F$ est dite $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$-mesurable si $f^{-1}(\mathcal{B}) \subset \mathcal{A}$.

Remarque 2.30. Cela revient à dire $\forall B \in \mathcal{B}, f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$.

Notation 2.31.
(1) $f : (E, \mathcal{A}) \to (F, \mathcal{B})$ signifie que f est $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$-mesurable.
(2) S'il n'y a pas de confusion possible, on pourra dire que f est mesurable.

Exemple 2.32. Soit $f : (E, \mathcal{A}) \to [0, 1]$. Par défaut, $[0, 1]$ muni de la tribu borélienne sur $[0, 1]$. Une application mesurable à valeurs dans (une partie de) $\overline{\mathbb{R}}$ sera toujours appelée une fonction borélienne.

Proposition 2.33. Soit $(E, \mathcal{A}), (F, \mathcal{B})$ des espaces mesurables. Soit $\mathcal{C} \subset \mathcal{B}$ tel que $\mathcal{B} = \sigma(\mathcal{C})$. Alors f est $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$-mesurable si et seulement si $f^{-1}(\mathcal{C}) \subset \mathcal{A}$.

<

Démonstration. Remarquons que $f^{-1}(\mathcal{C}) \subset f^{-1}(\mathcal{B})$ car $\mathcal{C} \subset \mathcal{B}$. Par conséquent si f est mesurable, $f^{-1}(C) \subset \mathcal{A}$. Supposons maintenant que $f^{-1}(C) \subset \mathcal{A}$.
Or par la Proposition 2.28, $\sigma\big(f^{-1}(\mathcal{C})\big) = f^{-1}(\sigma(\mathcal{C})) = f^{-1}(\mathcal{B})$ donc $f^{-1}(\mathcal{B}) \subset \mathcal{A}$. Donc f est mesurable. $\square$

Corollaire 2.34. Toute fonction monote $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est mesurable (borélienne).

Démonstration. En effet, l'image réciproqie d'un intervalle par une fonction monotone est une intervalle. Puisque $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ est engendr&e par les intervalles, ce corollaire se déduit de la proposition ci dessus avec $\mathcal{C} = \{\text{intervalles de } \mathbb{R}\}, \mathcal{A} = \mathcal{B} = \mathbb{R}$. $\square$

Notation 2.35. Soit $f : (E, \mathcal{A}) \to \mathbb{R}$.
(1) Pour tout $a \in \mathbb{R}$, on note $\{f < a\} := f^{-1}(]-\infty, a[) = \{x \in E, f(x) < a\}$;
(2) Pour tout $a \in \mathbb{R}$, on note $\{f \leq a\} = f^{-1}\{]-\infty, a]\}$
(3) ...
(4) Pour tout $a, b \in \mathbb{R}_+$, $a < b$ on note $\{a < f < b\} := f^{-1}(]a, b[)$
(5) ...

Définition 2.36. Soit $(E, \mathcal{O}_E), (F, \mathcal{O}_F)$ deux espaces topologiques, $f : E \to F$. On dit que f est continue si pour tout $\mathcal{B} \in \mathcal{O}_F$, $f^{-1}(\mathcal{B}) \in \mathcal{O}_E$.

Exercice 1. Vérifier que cette définition est bonne pour les $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Proposition 2.37. Soit $(E, \mathcal{O}_E), (F, \mathcal{O}_F)$ deux espaces topologiques munis respectivement de leur tribu borélienne. $\mathcal{B}(F)$ et $\mathcal{B}(E)$. Alors toute application $f : E \to F$ continue est $(\mathcal{B}(E), \mathcal{B}(F))$ -mesurable.

Démonstration. Soit $f : E \to F$ continue. Alors, $f^{-1}(\mathcal{O}_F) \subset \mathcal{O}_E$ donc $\sigma\big(f^{-1}(\mathcal{O}_F)\big) \subset \sigma(\mathcal{O}_E)$.
Soit $f^{-1}(\sigma(\mathcal{O}_F)) \subset \sigma(\mathcal{O}_E)$ donc $f^{-1}(\mathcal{B}(F)) \subset \mathcal{B}(E)$. Ainis, f est bien $(\mathcal{B}(E), \mathcal{B}(F))$-mesurable. ☐

Remarque 2.38. On retiendra que si I et J sont deux intervalles de $\mathbb{R}$ et $f : I \to J$ une aaplication continue alors f est borélienne.

Proposition 2.39. Soit $(E, \mathcal{A}), (F, \mathcal{B}), (G, \mathcal{C})$ trois espaces topologiques mesurables, $f : E \to F, g : F \to G$ deux applciations mesurables. Alors $g \circ f : E \to G$ est mesurable.

Démonstration. Remarquons d'bord que pour toute partie $C \subset G$, $(g \circ f)^{-1}(P) = \big(f^{-1} \circ g^{-1}\big)(P)$. Ainsi, $(g \circ f)^{-1}(\mathcal{C}) = f^{-1}\big(g^{-1}(\mathcal{C})\big)$. De plus, $g^{-1}(\mathcal{C} \subset \mathcal{B})$ Ainsi, on a $f^{-1}\big(g^{-1}(\mathcal{C})\big) \subset f^{-1}(\mathcal{B}) \subset \mathcal{A}$, D'où la mesurabilité de $f \circ g$. ☐

Exemples 2.40.
1. Si $f : (E, \mathcal{A}) \to \mathbb{R}$ est une fonction borélienne alors $|f| : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction borélienne.
2. Si $f : (E, \mathcal{A}) \to \mathbb{R} \setminus 0$ est borélienne, alors $\frac{1}{f}$ l'est aussi.

Proposition 2.41. Soit $f = (f_1, f_2) : (E, \mathcal{A}) \to \mathbb{R}^2$. f est $(\mathcal{A}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^2))$-mesurable si et seulement si $f_1 : (E, \mathcal{A}) \to \mathbb{R}$ et $f_2 : (E, \mathcal{A}) \to \mathbb{R}$ sont mesurables.

Démonstration.
$\Rightarrow$ Soit $(\pi_1, \pi_2) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ les projections canoniques $\pi_i(x_1, x_2) = x_i$. π_i sont continues donc $\big(\mathcal{B}(\mathbb{R}^2), \mathcal{B}(\mathbb{R})\big)$-mesurables. De plus, $f_1 = \pi_1 \circ f$ et $f_2 = \pi_2 \circ f$. Par conséquent, si f est mesurable alors f_1 et f_2 le sont.
$\Leftarrow$ Supposons que f_1 et f_2 sont mesurables. Soit $]a_1, b_1[x]a_2, b_2[$ une partie de $\mathbb{R}^2$ alors on vérifie que $f^{-1}(]a_1, b_1[x]a_2, b_2[) = f_1^{-1}(]a_1, b_1[) \cap f_2^{-1}(]a_2, b_2[) \in \mathcal{A}$. On amontré que l'image réciproque de tout pavé de $\mathbb{R}^2$ par f est dans $\mathcal{A}$.
Comme $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ est engendré par les pavés, on a bien $f^{-1}(\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)) \subset \mathcal{A}$. ☐

Proposition 2.42. Soit $f : (E, \mathcal{A}) \to \mathbb{R}, g : (E, \mathcal{A}) \to \mathbb{R}$ deux fonctions boréliennes, $\lambda \in \mathbb{R}$
(1) $\lambda f + g$ est borélienne pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$,
(2) fg est borélienne.

Démonstration.
(1) Posons $\varphi(x) = (f(x), g(x))$, $\psi(s, t) = \alpha s + t$.

On écrit $\lambda f + g = \psi \circ \varphi$. Alors puisque f et g sont boréliennes, $\varphi(f, g)$ est borélienne par la Proposition 2.41. De plus, $\psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est une fonction continue donc borélienne. Ainsi en appliquant Proposition 2.39, on obtient bien que $\lambda f + g$ est borélienne.
(1) On raisonne ici de la même manière en posant $\psi(s, t) = st$ une fonction continue.

☐

Remarque 2.43. Le point (1) se généralise à toute combinaisaon linéaire finie de fonctions boréliennes.

3. Fonctions indicatrices

Proposition 3.1. Soit $(E, \mathcal{A})$ un espace mesurable et $A \subset E$. Alors l'application $\mathbb{1}_A : (E, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ est mesurable si et seulement si $A \in \mathcal{A}$.

Démonstration. $1_A : E \to \{0, 1\} \subset \mathbb{R}$. Remarquons d'abord que si $B \subset \mathbb{R}$ alors

$$\mathbb{1}_A^{-1}(B) = \begin{cases} \varnothing \text{ si } 0 \notin B \wedge 1 \notin B \\ E \text{ si } 0 \in B \wedge 1 \in B \\ A \text{ si } 1 \in B \wedge 0 \notin B \\ A^c \text{ si } 1 \notin B \wedge 0 \in B \end{cases}.$$

Supposons $\mathbb{1}_A$ mesurable alors puisque $\{1\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $\mathbb{1}_A^{-1}(\{1\}) = A \in \mathcal{A}$.
Supposons que $A \in \mathcal{A}$ alors pour tout $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $\mathbb{1}_A^{-1} = \varnothing$ ou E ou A ou $A^c \in \mathcal{A}$ D'ou $\mathbb{1}_A$ mesurable.
□

Définition 3.2 (fonction étagée). Soit $(E, \mathcal{A})$ un espace mesurable, $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$, $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$. On appelle fonction étagée toute application $f : (E, \mathcal{A}) \to \mathbb{R}$ telle que $f = \sum_{k=1}^n \alpha_k \mathbb{1}_{A_k}$.

Proposition 3.3. Les fonctions étagées sont mesurables.

Démonstration. Application des propositions précédentes □

Proposition 3.4. Une fonction étagée est une fonction mesurable de $(E, \mathcal{A})$ dans $\mathbb{R}$ qui prend un nombre fini de valeurs.

Démonstration. Soit $f : (E, \mathcal{A}) \to \mathbb{R}$ une fonction borélienne qui prend les valeurs $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ deux à deux distincts. Alors on peut écrire $f = \sum_{k=1}^n \alpha_k \mathbb{1}_{\{f=\alpha_k\}}$. Soit x tel que $f(x) = \alpha_i$ alors $\mathbb{1}_{\{f=\alpha_k\}}(x) = 1$ si $k = i$ et 0 si $k \neq i$. □

Remarque 3.5. L'ecriture $f = \sum_{k=1}^n \alpha_k \mathbb{1}_{\{f=\alpha_k\}}$ est l'écriture cacnonique des fonctions étagées. En effet, une fonction étagée peut s'écrire sous la forme $\sum \alpha_i A_i$ de plusieurs manières si les (A_i) ne constituent pas une partition de E.

Exemple 3.6. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,;\ x \mapsto 2\mathbb{1}_{[0,1]} + \mathbb{1}_{]1,2]}$. Alors f admet aussi lécriture $f(x) = 2\mathbb{1}_{[-1,1]} + \mathbb{1}_{]1,2]} - 2\mathbb{1}_{[-1,0[}$

Proposition 3.7. Une application $\delta : (E, \mathcal{A}) \to (\mathbb{C}, \mathcal{B}(\mathbb{C}))$ est mesurable si et seulement si les applications $\mathrm{Re}\,(f) : (E, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ et $\mathrm{Im}\,(f) : (E, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ sont mesurables.

Définition 3.8. Soit $f_n : E \to \overline{\mathbb{R}}$, $n \geq 0$, une suite de fonctions. On défnit les fonctions $\limsup f_n : E \to F$, et $\liminf f_n : E \to \overline{\mathbb{R}}$ pour tout $x \in E$;

$$(\limsup f_n)(x) \coloneqq \lim_{n \to +\infty} \sup(f_n(x))$$

$$(\liminf f_n)(x) \coloneqq \lim_{n \to +\infty} \inf(f_n(x)).$$

Notation 3.9. On note parfois $\limsup = \overline{\lim}$ et $\liminf = \underline{\lim}$.

Proposition 3.10. Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de fonctions mesurables $(E, \mathcal{A})$ dans $\left(\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\mathbb{R})\right)$.

(1) Les fonctions $x \mapsto (\sup f_n)(x)$ et $x \mapsto (\inf f_n)(x)$ sont mesurables de $(E, \mathcal{A})$ dans $\left(\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}\left(\overline{\mathbb{R}}\right)\right)$.

(2) Les fonctions $x \mapsto (\limsup f_n)(x)$ et $x \mapsto (\liminf f_n)(x)$ sont mesurables de $(E, \mathcal{A})$ dans $\left(\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}\left(\overline{\mathbb{R}}\right)\right)$.

(3) Si $(f_n)_{n\geq 0}$ converge simplement vers f, alors f est mesurable.

Proposition 3.11. Soit $f : (E, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}_+, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+))$ une fonction mesurable positive. Il existe une suite de fonctions croissante $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions étagées positives telles que pour tout $x \in E$, $f(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n(x)$ et si f est bornée alors $(f_n)_n$ converge uniformément vers f

Proposition 3.12. Soit $f : (E, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}_+, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+))$ une fonction mesurable quelconque. Il existe une suite de fonctions étagées $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions étagées positives telles que pour tout $x \in E$, $f(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n(x)$ et si f est bornée alors $(f_n)_n$ converge uniformément vers f

Chapitre 2: Mesures intégrables.

4. Mesures.

Définition 4.1. Soit $(E, \mathcal{A})$ un espace mesurable. On appelle mesure sur $(E, \mathcal{A})$ une application $\mu : \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ telle que :

(1) $p(\varnothing) = 0$.

(2) μ est σ-additive : pour toute suite $(A_n)_n$ d'éléments de $\mathcal{A}$ deux à deux distincts, alors : $\mu\left(\bigcup_{n\geq 0} A_n\right) = \sum_{n=0} \mu(A_n)$.

Définition 4.2. Soit $(E, \mathcal{A})$ un espace mesurable et $\mu : \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ une mesure. On appelle le triplet $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré, et pour tout $A \in \mathcal{A}, \mu(A)$ est la mesure de A.

Exemples 4.3.

1. $\mu : \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}}_+ \ ; \ A \mapsto 0$ est appelé la mesure nulle.
2. $\mu : \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}}_+ \ ; \ A \mapsto \begin{cases} \text{Card}(A) \text{ si } A \text{ est fini} \\ +\infty \text{ sinon} \end{cases}$ est appelé mesure de comptage.
3. $\mu : \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}}_+ \ ; \ A \mapsto \begin{cases} +\infty \text{ si } A \neq \varnothing \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$ $A \neq \varnothing \in \mathcal{A}, \mu(A) = +\infty$ est appelée mesure infine ou grossière.
4. $\delta_x \coloneqq \mathtt{bb}_A : \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}}_+ \ ; \ A \mapsto \begin{cases} 1 \text{ si } x \in A \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$ est appelé mesure de dirac en $x \in E$

Proposition 4.4. Soit $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré. Pour tout $A, B \in \mathcal{A}$, on a les propriétés suivantes ;

(1) $\mu(A) = \mu(A \setminus B) + \mu(A \cap B)$,

(2) $\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B)$,

(3) $\mu(A \cup B) \leq \mu(A) + \mu(b)$,

(4) Si $A \subset B, \mu(A) \leq \mu(B)$

Démonstration.

(1) D'après la σ-additivité, si A et B sont disjoints alors $\mu(A \cup B) = \cup(A) + \cup(B)$. Ici, $A \setminus B = \{A \cap (E \setminus B)\}$ et $A \cap B$ sont disjoints et vérifient $A = (A \setminus B) \cup (A \cap B)$.

(2) On remaruqe que $A \setminus B, A \cap B$ et $B \setminus A$ sont disjoints deux à deux et $A \cup B = (A \setminus B) \cup (A \cap B) \cup (B \setminus A)$, donc $\mu(A \cup B) = \mu(A \setminus B) + \mu(A \cap B) + \mu(B \setminus A)$. D'où

$$\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = \mu(A \setminus B) + \mu(A \cap B) + \mu(B \setminus A) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B).$$

(3) Si $\mu(A) + \mu(B) = +\infty$, l'inégalité est évidente. Sinon, si $\mu(A) + \mu(B) < +\infty$ alors d'après 2, $\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) < +\infty$. Et alors on peut écrire $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B) \leq \mu(A) + \mu(B)$,

(4) On a $\mu(B) = \mu(B \setminus A) + \mu(A \cap B) = \mu(B \setminus A) + \mu(A) \geq \mu(A)$.

□

Remarque 4.5. En conséquence, pour tout $A \subset E, \mu(A) \leq \mu(E)$.

Définition 4.6. finie

Définition 4.7 (Masse)**.** On dit que $\mu(E)$ est la masse de la mesure μ.

Définition 4.8 (probabilité)**.** Si $\mu(E) = 1$ alors μ est appelée une probabilité.

Définition 4.9. On dir que μ est σ-finie s'il existe une suite (A_n) de $\mathcal{A}$ telle que $E = \bigcup_{n\geq 0} A_n$ et pour tout $n \geq 0, \mu(A_n) < +\infty$.

Remarque 4.10. On dit qu'une suite de parties de E, $(A_n)_{n\geq 0}$ est croissante si pour tout $n \geq 0$, $A_n \subset A_{n+1}$

Proposition 4.11. Soit $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et $(A_n)_{n\geq 0}$ une suite d'éléments de $\mathcal{A}$.
(1) Si la suite $(A_n)_{n\geq 0}$ est croissante alors $\lim_{n\to+\infty} \mu(A_n) = \mu\left(\bigcup_{n\geq 0} A_n\right)$
(2) Si la suite $(A_n)_{n\geq 0}$ est décroissante et si ile xiste $n_0 \geq 0$ tel que $\mu_{n_0} < +\infty$ alors $\lim_{n\to+\infty} \mu(A_n) = \mu\left(\bigcap_{n\geq 0} A_n\right)$

Démonstration. A FAIRE □

Proposition 4.12. Soit $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et $(F, \mathcal{B})$ un espace mesurable, et $f : (E, \mathcal{A}) \to (F, \mathcal{B})$ une application mesurable. Alors l'application

$$\mu_f : (\mathcal{B}) \to \overline{\mathbb{R}}_+ \ ; \ B \mapsto \mu\big(f^{-1}(B)\big)$$

est une mesure sur $(F, \mathcal{B})$. On l'appelle la *mesure image*.

Démonstration.
- $\mu_f(\varnothing) = \mu\big(f^{-1}(\varnothing)\big) = \mu(\varnothing) = 0$.
- Soit $(B_n)_{n\geq 0}$ une suite d'éléments de $\mathcal{B}$ deux à deux distincts.

$$\mu_f\left(\bigcup_{n\geq 0} B_n\right) = \mu\Big(f^{-1}\big(\bigcup B_n\big)\Big) = \mu\Big(\bigcup f^{-1}(B)\Big)$$

Or les $f^{-1}(B_n)$ sont 2 à 2 disjoints. Donc d'après la σ- additivité de μ, on a $\mu_f\big(\bigcup B_n\big) = \sum \mu\big(f^{-1}B_n\big) = \sum \mu_f(B_n)$.

Ainsi, μ_f est une mesure sur $(F, \mathcal{B})$. □

4.1. Mesure de Lebesgue.

Théorème 4.13 (Unicité des mesures)**.** Soit μ, ν deux mesures sur un espace mesurable $(E, \mathcal{A})$. Si :
- μ et ν coincident sur une partie $\mathcal{C} \subset \mathcal{A}$ qui engendre $\mathcal{A}$,
- $\mathcal{C}$ est stable par intersections finies,
- $E \in \mathcal{C}$,
- μ ou ν est σ-finie,

alors $\mu = \nu$.

Démonstration. admis ou voir cours on sait pas. □

Corollaire 4.14. Il existe sur $\big(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\big)$ une unique mesure λ telle que pour tout pavé $\Pi_{i=1}^d]a_i, b_i[$,

$$\lambda\big(\Pi_{i=1}^d]a_i, b_i[\big) = \Pi_{i=1}^d (b_i - a_i).$$

Cette mesure est appelée la *mesure de Lebesgue* sur $\mathbb{R}^d$

Démonstration. $\mathcal{C} = \left\{\Pi_{i=1}^d]a_i, b_i[, a_i < b_i \in \mathbb{R}\right\}$. Alors $\sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{B}\big(\mathbb{R}^d\big)$ □

Proposition 4.15. Soit μ une mesure sur $\big(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\big)$ qui vérifie les deux propriétés suivantes :
- Pour tout $B \in \mathcal{B}\big(\mathbb{R}^d\big)$, pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, $\mu(x + B) = \mu(B)$,
- $\mu\big([0,1]^d\big)1$,

alors μ est la mesure de Lebesgue, $\mu = \lambda d$.

4.2. Ensemble négligeable.

Définition 4.16. Soit $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré. On dit qu'un sous-ensemble M de E est négligeable s'il existe $A \in \mathcal{A}$ tel que $M \subset A$ et $\mu(A) = 0$.

Remarque 4.17. Un ensemble négligeable n'appartient pas nécéssairement à la tribu.

Définition 4.18. On dit que la mesure μ est complète si $\mathcal{A}$ contient tous les ensembles négligeables.

Définition 4.19. Une propriété sur l'ensemble E est une application $P : E \to \{\text{vrai,faux}\}$.

Définition 4.20. On dit qu'une propriété est vraie μ-presque partout si l'ensemble $\{x \in E : P(x) = \text{faux}\}$ est négligeable.