

# Géométrie affine et euclidienne

## Table des matières

<b>1. Géométrie affine.</b>	<b>1</b>
1.1. Espaces affines . . . . .	1
1.2. Sous-espaces affines. . . . .	2
1.3. Sous-espaces affines engendrés par une partie. . . . .	3
1.4. Parallélisme. . . . .	4
1.5. Barycentres. . . . .	4
<b>2. Applications affines.</b>	<b>5</b>
2.1. Effet sur les barycentres. . . . .	6
2.2. Transformations affines. . . . .	7
<b>3. Points fixes.</b>	<b>8</b>

## 1. Géométrie affine.

### 1.1. Espaces affines

**Définition 1.1.** Soit  $E$  un espace vectoriel. Un ensemble (non vide)  $\mathcal{E}$  est un *espace affine* s'il existe une application  $\theta : \mathcal{E} \times \mathcal{E} \rightarrow E ; (A, B) \mapsto \overrightarrow{AB}$  telle que :

- (1) Pour tout  $A \in \mathcal{E}$  fixé, l'application  $\theta_A : \mathcal{E} \rightarrow E ; B \mapsto \overrightarrow{AB}$  est bijective.
- (2) Pour tout  $A, B, C \in \mathcal{E}$ , on a  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$  (relation de Chasles).

#### Remarques 1.2.

- (1) Les éléments de  $\mathcal{E}$  sont les points.
- (2) La dimension de  $\mathcal{E}$  est celle de  $E$ .
- (3) L'espace vectoriel  $E$  est appelé la direction de  $\mathcal{E}$ , on dit aussi que  $\mathcal{E}$  est dirigé par  $E$ .  
On notera  $(\mathcal{E}, E)$ .

**Exemple 1.3.** Tout espace vectoriel  $E$  admet une structure naturelle d'espace affine.

Soit  $\theta : E \times E \rightarrow E ; (u, v) \mapsto v - u$ . On vérifie les deux conditions de la définition d'un espace affine.

1. Soit  $u \in E$ . L'application  $\theta_u : E \rightarrow E ; v \mapsto v - u$  est bijective car la réciproque existe :  $v \mapsto v + u$
2.  $\overrightarrow{uv} + \overrightarrow{vw} = v - u + w - v = w - u = \overrightarrow{uw}$ .

**Exercice 1.** Soit  $f : E \rightarrow E', g : E' \rightarrow E$  telle que  $f \circ g = \text{id}_{E'}, g \circ f = \text{id}_E$  alors  $f$  et  $g$  sont bijectives.

**Remarque 1.4.** La relation de Chasles donne

- (1)  $\overrightarrow{AA} + \overrightarrow{AA} = \overrightarrow{AA}$  donc  $\overrightarrow{AA} = 0$
- (2)  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA} = 0$  donc  $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$ .

**Proposition 1.5** (règle du parallélogramme). Soit  $A, A', B, B' \in \mathcal{E}$ .

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'} \Leftrightarrow \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'}$$

*Démonstration.*

$$\begin{aligned} \Rightarrow \overrightarrow{AA'} &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{B'A'} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{A'B'} + \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{BB'} \\ \Leftarrow \overrightarrow{AB} &= \overrightarrow{AB'} + \overrightarrow{B'B} = \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'B'} + \overrightarrow{B'B} = \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'B'} - \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{A'B'}. \end{aligned}$$

□

**Définition 1.6.** Soit  $A, A', B, B' \in \mathcal{E}$ . On dit que  $ABB'A'$  forme un parallélogramme s'ils vérifient la règle du parallélogramme.

**Proposition 1.7.** Soit  $A \in \mathcal{E}$ ,  $u \in E$ . Il existe un unique  $B \in \mathcal{E}$  tel que  $\overrightarrow{AB} = u$ .

*Démonstration.*  $\theta_A$  est bijective. □

**Notation 1.8.** On pourra noter  $B = A + u$ .

## 1.2. Sous-espaces affines.

**Définition 1.9.** Soit  $(\mathcal{E}, E)$ ,  $\mathcal{F} \subset \mathcal{E}$ . On dit que  $\mathcal{F}$  est un sous-espace affine de  $\mathcal{E}$  s'il existe  $A \in \mathcal{F}$  tel que  $\theta_A(\mathcal{F})$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ .

**Proposition 1.10.** Si  $\mathcal{F} \subset \mathcal{E}$  est un sous-espace affine dirigé par  $F$  alors

$$\forall B \in \mathcal{F}, \theta_B(\mathcal{F}) = F.$$

*Démonstration.* Il existe  $A \in \mathcal{F}$  tel que  $\theta_A(\mathcal{F}) = F$ . On veut montrer que  $\theta_A(\mathcal{F}) = \theta_B(\mathcal{F})$ .

(1) Soit  $u \in \theta_A(\mathcal{F})$ . On montre que  $u \in \theta_B(\mathcal{F})$ .

Comme  $\theta_B$  est bijective, on peut trouver  $N \in \mathcal{E}$  tel que  $\overrightarrow{BN} = u$ . Or  $\overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BN} \in \theta_A(\mathcal{F})$ .  
Ainsi,  $N \in \mathcal{F}$  et  $u = \overrightarrow{BN} \in \theta_B(\mathcal{F})$

(2) On montre  $\theta_B(\mathcal{F}) \subset \theta_A(\mathcal{F})$ . Soit  $u \in \theta_B(\mathcal{F})$  alors  $u = \overrightarrow{BM}$  avec  $M \in \mathcal{F}$ . Par la relation de Chasles,  $u = \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AM} \in \theta_A(\mathcal{F})$  donc  $u \in \theta_A(\mathcal{F})$ . □

**Proposition 1.11.** Soit  $A \in \mathcal{E}$  et  $F \subset E$  un sous-espace vectoriel. Il existe un unique sous-espace affine  $\mathcal{F} \subset \mathcal{E}$  qui passe par  $A$  et dirigé par  $F$ .

*Démonstration.*  $\mathcal{F} = \{A + u \mid u \in F\} = \{M \in \mathcal{E} \mid \overrightarrow{AM} \in F\}$ . Soit  $B \in \mathcal{F}$ , on pose  $\theta_A : \mathcal{F} \rightarrow F$ ;  $M \mapsto \overrightarrow{BM}$ .

(1) Puisque  $B \in \mathcal{F}$ ,  $\theta_A(B) = \overrightarrow{AB} = u \in F$ .

(2) Soit  $u, v, w \in \mathcal{F}$ , alors  $u, v, w \in \mathcal{E}$  or puisque  $\mathcal{E}$  est un sous-espace affine,  $u, v, w$  vérifient la relation de Chasles. Ainsi,  $F$  est bien un sous-espace affine de direction  $F$ .

(3) De plus,  $A + 0 = A \in \mathcal{F}$  donc  $\mathcal{F}$  passe par  $A$ . □

**Proposition 1.12.** Soit  $f : E \rightarrow F$  une application linéaire entre deux espaces vectoriels. Si  $v \in f(E)$  alors  $f^{-1}(v)$  est un sous-espace affine de  $E$  dirigé par  $\ker(f)$ .

*Démonstration.* Soit  $u \in f^{-1}(v)$ . On montre que  $w \in f^{-1}(v) \Leftrightarrow \theta(u, w) \in \ker f$ . En effet,  $w \in f^{-1}(v) \Leftrightarrow f(w) = v \Leftrightarrow f(w) = f(u)$

$$\Leftrightarrow f(w - u) = 0$$

$$\Leftrightarrow w - u \in \ker(f) \Leftrightarrow \theta(u, w) \in \ker(f) \quad \square$$

**Remarque 1.13.**

- (1) Un sous-espace affine de dimension 0 est constitué d'un seul point.
- (2) Un sous-espace affine de dimension 1 est une droite.
- (3) un sous-espace affine de dimension 2 est un plan

**Exemple 1.14.** Dans  $\mathbb{R}^n$ , les solutions d'une équation  $\sum_{i=1}^n a_i x_i = b$  forment un sous-espace affine de  $\mathbb{R}^n$  dirigé par l'espace vectoriel  $\{\sum a_i x_i = 0\}$  :

**Proposition 1.15.** Les sous-espaces affines de  $E$  sont de la forme  $G + v_0$  où  $G \subset E$  est un sous-espace vectoriel et  $v_0 \in E$ .

*Démonstration.* exercice. □

**Proposition 1.16.** Un sous-espace affine  $E$  est un sous-espace vectoriel si et seulement il contient 0.

*Démonstration.* En effet supposons que  $\mathcal{G} \subset E$  soit un sous-espace affine contenant 0. Soit  $G$  la direction de  $\mathcal{G}$ . Alors  $\mathcal{G} = G + 0 = G$  est un sev de  $E$ . □

### 1.3. Sous-espaces affines engendrés par une partie.

**Notation 1.17.** Soit  $(\mathcal{E}, E)$  un espace affine,  $S$  une partie non-vide de  $\mathcal{E}$ .  $\langle S \rangle$  est l'intersection de tout les sous-espaces affines de  $\mathcal{E}$  contenant  $S$ .

**Proposition 1.18.** Soit  $(\mathcal{F}_\alpha)_{\alpha \in I}$  une famille de sous-espaces affines de  $\mathcal{E}$  tel que  $\bigcap_{\alpha \in I} \mathcal{F}_\alpha \neq \emptyset$ . Alors  $\bigcap \mathcal{F}_\alpha$  est un sous-espace affine de  $\mathcal{E}$ .

*Démonstration.* Soit  $A \in \bigcap_{\alpha \in I} \mathcal{F}_\alpha =: \mathcal{F}$ . Soit  $F_\alpha := \theta_A(\mathcal{F}_\alpha)$ . Alors  $F_\alpha$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ . Montrons  $F := \bigcap_{\alpha \in I} F_\alpha = \theta_A(\mathcal{F})$ . Donc  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $E$

Montrons  $\theta_A(F) = \bigcap_{\alpha \in I} \theta_A(F_\alpha) \subset \mathcal{F}$  « facile »

⊃ Soit  $v \in \bigcap_{\alpha \in I} \theta_A(F_\alpha)$  Par surjectivité de  $\theta_A$ , on peut trouver  $B \in \mathcal{E}$  tel que  $\overrightarrow{AB} = v$ . Pour chaque  $\alpha \in I$ , on a  $v \in \theta_A(\mathcal{F}_\alpha)$  donc

$$v = \overrightarrow{AM_\alpha}, M_\alpha \in F_\alpha \Rightarrow B = M_\alpha \in \mathcal{F}_\alpha \forall \alpha \Leftrightarrow B \in \bigcap_{\alpha \in I} \mathcal{F}_\alpha$$

□

**Exemple 1.19.** Soit  $\{A_1, \dots, A_k\}$  une partie de  $\mathcal{E}$  Alors  $\langle A_0, \dots, A_k \rangle$  est le sous-espace affine  $A_0 + \langle \overrightarrow{A_0A_1}, \dots, \overrightarrow{A_0A_k} \rangle$ .

Montrons  $\langle A_0, \dots, A_k \rangle = A_0 + \langle \overrightarrow{A_0A_1}, \dots, \overrightarrow{A_0A_k} \rangle$ . Soit  $(\mathcal{F}, F)$  une sous-espace affine de  $\mathcal{E}$  qui contient  $A_0, \dots, A_k$ , alors  $A_0 \in \mathcal{F}$ . Donc  $\overrightarrow{A_0A_1}, \dots, \overrightarrow{A_0A_k} \in F$  et  $A_0 + \langle \overrightarrow{A_0A_1}, \dots, \overrightarrow{A_0A_k} \rangle \subset \mathcal{F}$ . De plus  $A_0 + \langle \overrightarrow{A_0A_1}, \dots, \overrightarrow{A_0A_k} \rangle$  est un sous-espace affine qui contient  $A_0, A_1 = A_0 + \overrightarrow{A_0A_1}, \dots, A_k = A_0 + \overrightarrow{A_0A_k}$ . Ainsi,  $\langle A_0, \dots, A_k \rangle \subset A_0 + \langle \overrightarrow{A_0A_1}, \dots, \overrightarrow{A_0A_k} \rangle$ .

**Remarque 1.20.** On a  $\dim \langle A_0, \dots, A_k \rangle \leq k$ .

**Définition 1.21** (Affinement indépendante). Soit  $\{A_1, \dots, A_k\}$  une partie de  $\mathcal{E}$ . On dit que la famille est *affinement indépendante* si  $\langle A_0, \dots, A_k \rangle$  est de dimension  $k$ .

**Définition 1.22** (Repère affine). Soit  $\{A_1, \dots, A_k\}$  une famille affinement indépendante, et  $\mathcal{E} := \langle A_0, \dots, A_k \rangle$ . Alors on dit que  $\{A_1, \dots, A_k\}$  est un *repère affine* de  $\mathcal{E}$ .

**Exemple 1.23.** Un repère affine d'une droite est constitué de 2 points.

**Notation 1.24.**

- (1)  $\langle A, B \rangle$ ,  $A \neq B$  désigne la droite passant par  $A$  et  $B$ . On la note aussi  $AB$ .
- (2)  $[AB]$  désigne le segment défini par  $[AB] := \left[ M \in \mathcal{E} \mid \overrightarrow{AM} = \lambda \overrightarrow{AB}, \lambda \in [0, 1] \right]$

## 1.4. Parallélisme.

**Définition 1.25** (Parallèle). Soit  $\mathcal{F}, \mathcal{G}$  deux sous-espaces affines. On dit que  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{G}$  sont parallèles s'ils ont la même direction. On note  $\mathcal{F} \parallel \mathcal{G}$ .

**Remarque 1.26.** Une droite n'est pas parallèle à un plan.

**Proposition 1.27.** Soit  $E, F$  deux espaces vectoriels,  $f : E \rightarrow F$  une application linéaire. Alors  $\forall v, w \in f(E)$ , on a  $f^{-1}(v) \parallel f^{-1}(w)$ .

*Démonstration.* Par la Proposition 1.12, on a que  $f^{-1}(v)$  et  $f^{-1}(w)$  sont dirigés par  $\ker(f)$ . □

**Proposition 1.28.** Si  $\mathcal{F} \parallel \mathcal{G}$  et  $\mathcal{F} \cap \mathcal{G} \neq \emptyset$ , alors  $\mathcal{F} = \mathcal{G}$ .

*Démonstration.* Soit  $A \in \mathcal{F} \cap \mathcal{G}$ . Alors  $\mathcal{F} = A + F, \mathcal{G} = A + G$  mais  $F = G$  par parallélisme de  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{G}$  d'où  $\mathcal{F} = \mathcal{G}$ . □

**Proposition 1.29.** Soit  $D$  une droite. Par tout point de  $A$  d'un espace affine, passe une unique droite  $D'$  parallèle à  $D$ .

*Démonstration.*  $D' = A_{\text{point}} + D_{\text{direction}}$ . □

**Proposition 1.30.** Soit  $(\mathcal{F}, F), (\mathcal{G}, G)$  deux sous-espaces affines de  $(\mathcal{E}, E)$ . On suppose  $F + G = E$ . Alors tout sous-espace affine parallèle à  $\mathcal{F}$  rencontre  $\mathcal{G}$ .

*Démonstration.* Soit  $\mathcal{H}$  un sous-espace affine de  $\mathcal{E}$  parallèle à  $\mathcal{F}$ . Montrons que  $\mathcal{H} \cap \mathcal{G} \neq \emptyset$ . Soit  $A \in \mathcal{H}, B \in \mathcal{G}$ . On peut écrire  $\vec{AB} = u + v$  avec  $u \in F, v \in G$ . On pose  $\theta_A : \mathcal{H} \rightarrow F, \theta_B : \mathcal{G} \rightarrow G$  et on a  $\theta_A(\mathcal{H}) = F$  et  $\theta_B(\mathcal{G}) = G$ . On peut écrire  $u = \vec{AC}, C \in \mathcal{H}, v = \vec{DB}, D \in \mathcal{G}$ . On a  $\vec{AB} = \vec{AC} + \vec{DB} = \vec{AC} + \vec{CD} + \vec{DB} + \vec{DC} = \vec{AB} + \vec{DC} \Leftrightarrow \vec{DC} = 0 \Leftrightarrow D = C \in \mathcal{H} \cap \mathcal{G}$ . □

**Corollaire 1.31.** Dans un plan affine  $(\mathcal{E}, E)$  deux droites distinctes non parallèles se rencontrent en un seul point.

*Démonstration.*

unicité : Si  $D, D'$  se coupent en deux points  $A \neq B$  alors  $D = \langle A, B \rangle, D' = \langle A, B \rangle$  donc  $D = D'$ .  
 $D \cap D' \neq \emptyset$ .  $D$  est dirigée par  $\langle u \rangle, D'$  est dirigée par  $\langle v \rangle$ .  $\langle u \rangle \neq \langle v \rangle \Rightarrow \{u, v\}$  est linéairement indépendante. Donc  $\langle u \rangle + \langle v \rangle$  est de dimension 2. Or  $E$  est aussi de dimension 2 Par conséquent,  $\langle u \rangle + \langle v \rangle = E$  par la proposition on a  $D \cap D' \neq \emptyset$ . □

## 1.5. Barycentres.

**Définition 1.32** (Points pondérés). Soit  $(\mathcal{E}, E)$  un espace affine,  $A_1, \dots, A_r$  des points de  $\mathcal{E}$ , et  $\alpha_1, \dots, \alpha_r \in \mathbb{R}$ . On appelle système de points pondérés un ensemble  $\{(A_1, \alpha_1), \dots, (A_r, \alpha_r)\}$ .

**Définition 1.33.** Soit  $F := (A_1, \alpha_1), \dots, (A_r, \alpha_r)$  tel que  $\sum \alpha_j = 1$ . On appelle barycentre de  $F$  l'unique point  $M$  tel que  $\sum \alpha_j \vec{MA_j} = 0$ .

**Remarque 1.34.** On pourrait parler d'existence d'un milieu.

**Exemple 1.35.**

1. Soit  $(A_1), \dots, (A_2), \alpha_1 = \alpha_2 = \frac{1}{2}$ . Alors  $A$  est le milieu de  $A_1A_2$   $\frac{1}{2}\vec{AA_1} + \frac{1}{2}\vec{AA_2} = 0$ .
2.  $A_1, A_2, A_3, \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \frac{1}{3}$ . On obtient le centre de gravité d'un triangle.

**Définition 1.36.**  $(\alpha_0, \dots, \alpha_n)$  est appelé coordonnée barycentrique de  $M$  dans le repère  $A_0, \dots, A_n$ .

**Exemple 1.37.**  $\mathcal{E}$  = droite,  $\mathcal{E} = \langle A, B \rangle$ ,  $M$  le milieu de  $AB$ . Les coordonnées barycentriques de  $M$  sont  $\left(\frac{1}{2} \quad \frac{1}{2}\right)$

**Notation 1.38.**  $M = \sum \alpha_j A_j$ . Il faut que  $\sum \alpha_j = 1$ . On peut écrire  $M = \frac{A}{2} + \frac{B}{2}$  mais pas  $M = A + B$ .

**Proposition 1.39.** Soit  $(A_0, \dots, A_n)$  un repère affine de  $\mathcal{E}$ . Alors pour tout  $M \in \mathcal{E}$ , il existe une unique famille  $(\alpha_0, \dots, \alpha_n)$  telle que

$$\begin{cases} \sum_{j=0}^n \alpha_j = 1 \\ \sum_{j=0}^n \alpha_j \overrightarrow{MA_j} = \vec{0} \end{cases}$$

*Démonstration.* On note  $(\star := \sum_{j=0}^n \alpha_j \overrightarrow{MA_j} = \vec{0})$

Existence: Les vecteurs  $\overrightarrow{MA_j}$  sont linéairement indépendants car il y en a  $n+1$  et  $\dim E = n$ . On peut trouver  $\alpha_0, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$  non tous nuls tels que  $\sum \alpha_j \overrightarrow{MA_j} = \vec{0}$ . On montre par l'absurde que  $\sum_{j=0}^n \alpha_j \neq 0$ . Supposons  $\sum \alpha_j = 0$  Par  $\star$  et la relation de Chasles,

$$\sum_{j=0}^n \alpha_j (\overrightarrow{MA_0} + \overrightarrow{A_0 A_j}) = \vec{0} \Leftrightarrow \sum_{j=0}^n \alpha_j \overrightarrow{MA_0} + \sum_{j=1}^n \alpha_j \overrightarrow{A_0 A_j} = \vec{0}.$$

Or,  $\sum_{j=0}^n \alpha_j = 0$ . D'où  $\sum_{j=1}^n \alpha_j \overrightarrow{A_0 A_j} = \vec{0}$ .

Comme  $\{\overrightarrow{A_0 A_1}, \dots, \overrightarrow{A_0 A_n}\}$  est une base de  $E$ , on déduit que  $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$ . On obtient aussi que  $\alpha_0 = 0$  par  $\sum_{j=0}^n \alpha_j = 0$ . On a donc une contradiction.

Ainsi, on peut définir

$$\beta_j = \frac{\alpha_j}{\sum_{i=0}^n \alpha_i}.$$

et on a,  $\sum_{j=0}^n \beta_j = 1$  et  $\sum_{j=0}^n \beta_j \overrightarrow{MA_j} = \vec{0}$ .

Unicité: Par  $(\star)$ , on a

$$\sum_{j=0}^n \alpha_j (\overrightarrow{MA_0} + \overrightarrow{A_0 A_j}) = \vec{0} \Leftrightarrow \sum_{j=0}^n \alpha_j \overrightarrow{MA_0} + \sum_{j=1}^n \alpha_j \overrightarrow{A_0 A_j} \Leftrightarrow \overrightarrow{A_0 M} = \sum_{j=1}^n \alpha_j \overrightarrow{A_0 A_j}$$

Comme  $\{\overrightarrow{A_0 A_1}, \dots, \overrightarrow{A_0 A_n}\}$  est une base de  $E$ , les coefficients  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  sont uniquement déterminés par  $\overrightarrow{A_0 M}$ . Comme  $\sum_{j=1}^n \alpha_j = 1$ ,  $\alpha_0$  est également uniquement déterminé Si  $\sum \alpha_j \overrightarrow{MA_j} = \vec{0}$ ,  $\sum \gamma_j \overrightarrow{MA_j} = \vec{0}$ . Alors

$$\sum (\alpha_j - \gamma_j) \overrightarrow{MA_j} = \vec{0} \Leftrightarrow \sum (\alpha_j - \gamma_j) (\overrightarrow{MA_0} + \overrightarrow{A_0 A_j}) = \vec{0} \Leftrightarrow \sum_{j=1}^n (\alpha_j - \gamma_j) \overrightarrow{A_0 A_j} = \vec{0} \Rightarrow \alpha_j = \gamma_j \forall j.$$

□

## 2. Applications affines.

**Définition 2.1.** Soit  $(\mathcal{E}, E), (\mathcal{F}, F)$  deux espaces affines.  $\varphi : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$  est une application affine s'il existe  $O \in \mathcal{E}$  et  $f : E \rightarrow F$  une application linéaire tels que pour tout  $M \in \mathcal{E}$ ,  $\overrightarrow{\varphi(O)\varphi(M)} = f(\overrightarrow{OM})$ .

**Remarques 2.2.**

(1)  $f$  ne dépend pas de  $O$ . En effet, si  $O'$  est un autre point de  $\mathcal{E}$ ,

$$f(\overrightarrow{O'M}) = f(\overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{OM}) = f(\overrightarrow{OO'}) + f(\overrightarrow{OM}) = \overrightarrow{\varphi(O')\varphi(O)} + \overrightarrow{\varphi(O)\varphi(M)} = \overrightarrow{\varphi(O')\varphi(M)}.$$

(2) On a toujours  $f(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{\varphi(A)\varphi(B)}$ . On va noter  $\vec{\varphi} = f$  et donc  $\vec{\varphi}(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{\varphi(A)\varphi(B)}$ .  $\vec{\varphi}$  est l'application linéaire associée à  $\varphi$ .

### Exemples 2.3.

1.  $\varphi(M) = O \forall M \in \mathcal{E}$ .  $\vec{\varphi}(\overrightarrow{MM'}) = \overrightarrow{\varphi(M)\varphi(M')} = 0$  Donc  $\vec{\varphi} = 0$  et  $\varphi$  est une application affine.
2. Soit  $E, F$  deux espaces vectoriels avec leur structure affine naturelle ( $\overrightarrow{uv} = v - u$ ). Soit  $\varphi : E \rightarrow F$  affine. On a  $\varphi(u) - \varphi(0) = \overrightarrow{\varphi(0)\varphi(u)} = \vec{\varphi}(\overrightarrow{ou}) = \vec{\varphi}(u) \Leftrightarrow \varphi(u) = \varphi(0) + \vec{\varphi}(u)$ . Toutes applications affines  $\varphi : E \rightarrow F$  s'écrivent donc  $\varphi(u) = v_0 + f(u)$  où  $v_0 \in F$  est fixé et  $f : E \rightarrow F$  linéaire.
3. Les applications affines  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  sont les  $x \mapsto ax + b$ .

**Définition 2.4** (Projection parallèle). Projection parallèle: Notons  $\vec{\pi}_G^E$  la projection de  $E$  dans  $G$ . Soit  $\mathcal{E}$  un plan affine et  $\mathcal{F}, \mathcal{G}$  deux droites non parallèles dans  $\mathcal{E}$ . La droite passant par  $M$  parallèle à  $\mathcal{F}$  rencontre  $\mathcal{G}$  en un seul point  $M' = \pi(M)$ .

**Proposition 2.5.**  $\pi : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{G}$  est affine

*Démonstration.*  $\vec{\pi} = \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{\pi(O)\pi(M)} = \overrightarrow{OM'}$ . Soit  $f : E \rightarrow G$  la projection donnée par  $u = v_{\in F} + w_{\in G} \mapsto w$ . Alors  $f$  est linéaire. On montre que  $\forall M \in \mathcal{E}$ ,  $\overrightarrow{\pi(O)\pi(M)} = f(\overrightarrow{OM})$ . Pour cela on écrit  $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM'}_{\in G} + \overrightarrow{M'M}_{\in F}$ . donc  $f(\overrightarrow{OM}) = \overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{\pi(O)\pi(M)}$ .  $\square$

**Définition 2.6** (Translations). Soit  $\varphi : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ .  $\varphi(M) = M_{\in \mathcal{E}} + u_{\in E}$ .  $\varphi$  est la translation de vecteur  $u$ . On a  $\overrightarrow{\varphi(A)\varphi(B)} = \overrightarrow{AB}$ . L'application linéaire associée est  $\text{id}_E$ . On a  $\overrightarrow{A\varphi(A)} = \overrightarrow{A(A+u)} = u$ ,  $\overrightarrow{B\varphi(B)} = \overrightarrow{B(B+u)} = u$ .

**Définition 2.7** (Homothétie). Une homothétie de centre  $O$  et de rapport  $\lambda \in \mathbb{R}$  est une application affine  $\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$  qui vérifie  $0 \mapsto 0$  et  $\overrightarrow{OM'} = \lambda \overrightarrow{OM}$ . Elle est notée  $h(0, \lambda)$ .

**Remarque 2.8.** L'application linéaire associée à  $h(0, \lambda)$  est donnée par  $u \in E \mapsto \lambda u$ .

**Proposition 2.9.** L'image d'un sous-espace affine par une application affine est un sous-espace affine

*Démonstration.* Soit  $\varphi : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}'$  une application affine,  $\mathcal{F} \subset \mathcal{E}$  un sous-espace affine. On prend  $A \in \mathcal{F}$  et on note  $F' = \vec{\varphi}(F)$ . ( $F'$  est un sous-espace vectoriel de  $E'$ ). On veut montrer que  $\varphi(F)$  est un sous-espace affine passant par  $\varphi(A)$  et dirigé par  $F'$ . On a

$$M' \in \varphi(\mathcal{F}) \Leftrightarrow M' = \varphi(M), M \in \mathcal{F}$$

$$\text{et } \overrightarrow{A'M'} = \overrightarrow{\varphi(A)\varphi(M)} = \vec{\varphi}(\overrightarrow{AM}) \in \vec{\varphi}(F).$$

On vient de voir que

$$M' \in \varphi(\mathcal{F}) \Leftrightarrow \overrightarrow{A'M'} \in F'$$

donc  $\varphi(F)$  est un sous-espace affine de  $\mathcal{E}'$  dirigé par  $F'$ .  $\square$

**Corollaire 2.10.** Une application affine envoie trois points alignés à 3 points alignés.

**Proposition 2.11.** L'image inverse d'un sous-espace affine par une application affine est un sous-espace affine ou un ensemble vide.

*Démonstration.* Exercice.  $\square$

## 2.1. Effet sur les barycentres.

**Proposition 2.12.** Soit  $\varphi : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}'$  affine. L'image du barycentre d'un système de points pondérés est le barycentre  $(\varphi(A_1), \alpha_1), \dots, (\varphi(A_r), \alpha_r)$ .

*Démonstration.* Soit  $A$  le barycentre de  $(\varphi(A_1), \alpha_1), \dots, (\varphi(A_r), \alpha_r)$ . Alors  $\sum_{j=1}^r \alpha_j \overrightarrow{AA_j} = 0$  donc  $\vec{\varphi}(\sum_{j=1}^r \alpha_j \overrightarrow{AA_j}) = 0$ . Comme  $\vec{\varphi}$  est linéaire, on a  $\sum_{j=1}^r \alpha_j \vec{\varphi}(\overrightarrow{AA_j}) = 0$  donc  $\sum_{j=1}^r \alpha_j \varphi(A) \varphi(A_j) = 0$ . Cela veut dire que  $\varphi(A)$  est le barycentre de  $(\varphi(A_1), \alpha_1), \dots, (\varphi(A_r), \alpha_r)$ .  $\square$

**Proposition 2.13.** Soit  $\varphi : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}'$  une application qui vérifie

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall A, B \in \mathcal{E}, \varphi(\alpha A + (1 - \alpha)B) = \alpha \varphi(A) + (1 - \alpha) \varphi(B).$$

Alors  $\varphi$  est affine.

*Démonstration.* On fixe  $O \in \mathcal{E}$ ,  $O' = \varphi(O)$  et on définit  $f : E \rightarrow E'$  ;  $u = \overrightarrow{OM} \mapsto \overrightarrow{O'M'}$  où  $M' = \varphi(M)$ . Il reste à montrer que  $f$  est linéaire. On a  $\forall \alpha \in \mathbb{R}, M = \alpha A + (1 - \alpha)B$  on a

$$M' = \varphi(M) = \alpha \varphi(A) + (1 - \alpha) \varphi(B) = \alpha A' + (1 - \alpha) B'$$

Par définition de  $f$ , on a

$$f(\alpha \overrightarrow{OA} + (1 - \alpha) \overrightarrow{OB}) = f(\overrightarrow{OM}) = \overrightarrow{O'M'} = \alpha \overrightarrow{O'A'} + (1 - \alpha) \overrightarrow{O'B'}.$$

- (1) On prend  $A = M, B = O$  et  $f(\alpha \overrightarrow{OM}) = \alpha \overrightarrow{O'M'} = \alpha f(\overrightarrow{OM})$ .  
(2) On prend  $u = \overrightarrow{OA}, v = \overrightarrow{OB}$ ,  $f(u + v) = f(2 \frac{u+v}{2}) = f(2 \overrightarrow{OM}) = 2f(\overrightarrow{OM})$   
Mais  $f(\overrightarrow{OM}) = \frac{1}{2} \overrightarrow{O'A'} + \frac{1}{2} \overrightarrow{O'B'}$  donc

$$f(u + v) = \overrightarrow{O'A'} + \overrightarrow{O'B'} = f(\overrightarrow{OA}) + f(\overrightarrow{OB}) = f(u) + f(v)$$

On a montré que  $f$  est linéaire

$\square$

## 2.2. Transformations affines.

**Définition 2.14.** Une transformation affine de  $\mathcal{E}$  est une application affine de  $\mathcal{E}$  dans lui même qui est bijective.

**Proposition 2.15.** Soit  $\varphi : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$  une application affine.  $\varphi$  est bijective si et seulement si  $\vec{\varphi}$  l'est.

*Démonstration.* On suppose  $\varphi$  bijective. Si  $u \in \ker(\vec{\varphi})$ ,  $u = \overrightarrow{AB}$  alors  $\overrightarrow{\varphi(A)\varphi(B)} = \vec{\varphi}(\overrightarrow{AB}) = 0$  donc  $\varphi(A) = \varphi(B) \Rightarrow A = B \Rightarrow u = 0$  donc  $\vec{\varphi}$  est injective. IL MANQUE UN BOUT on a  $v = \overrightarrow{\varphi(A)\varphi(M)} = \vec{\varphi}(\overrightarrow{AM}) \in \text{Im}(\vec{\varphi})$ . Donc  $\vec{\varphi}$  est surjective.

On suppose  $\vec{\varphi}$  bijective. Si  $\varphi(A) = \varphi(B)$  alors  $\vec{\varphi}(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{\varphi(A)\varphi(B)} = 0$  donc  $\overrightarrow{AB} = 0 \Rightarrow A = B$  donc  $\varphi$  est injective.

Soit  $M' \in \mathcal{F}, A \in \mathcal{E}, u \in E$ .  $\overrightarrow{\varphi(u)} = \overrightarrow{\varphi(A)M'} \in F$ . On écrit  $u = \overrightarrow{AM}, M \in \mathcal{E}$  Alors  $\overrightarrow{\varphi(A)\varphi(B)} = \vec{\varphi}(\overrightarrow{AM}) = \overrightarrow{\varphi(A)M'}$  donc  $\varphi(M) = M'$   $\square$

**Proposition 2.16.** Soit  $\varphi : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}, \psi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$  des applications affines. Alors  $\psi \circ \varphi : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{G}$  est affine et l'application linéaire associée est  $\vec{\psi \circ \varphi} = \vec{\psi} \circ \vec{\varphi}$

*Démonstration.*  $\forall A, B \in \mathcal{E}, \overrightarrow{\psi \circ \varphi(A) \psi \circ \varphi(B)} = \vec{\psi}(\overrightarrow{\varphi(A)\varphi(B)}) = \vec{\psi}(\vec{\varphi}(\overrightarrow{AB})) = \vec{\psi} \circ \vec{\varphi}(\overrightarrow{AB})$

$\square$

### 3. Points fixes.

**Notation 3.1.** Soit  $\varphi : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$  on note  $\text{Fix}(\varphi)$  l'ensemble des points fixés par  $\varphi$

$$\text{Fix}(\varphi) = \{M \in \mathcal{E} \mid \varphi(M) = M\}$$

**Proposition 3.2.** Soit  $\varphi$  une transformation affine de  $\mathcal{E}$  qui admet un unique point fixe  $O$ . Alors  $\ker(\vec{\varphi} - \text{id}_E) = 0$ .

*Démonstration.* Soit  $u \in \ker(\vec{\varphi} - \text{id}_E)$ ,  $u = \overrightarrow{OM}$ ,  $M \in \mathcal{E}$ . Alors

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\varphi(\overrightarrow{OM})} - \overrightarrow{OM} &= 0 \Rightarrow \vec{\varphi}(\overrightarrow{OM}) = \overrightarrow{\varphi(O)\varphi(M)} = \overrightarrow{OM} \\ \Rightarrow \overrightarrow{O\varphi(M)} &= \overrightarrow{OM} \Rightarrow \varphi(M) = M \Rightarrow M \in \text{Fix}(\varphi) = \{O\} \Rightarrow M = O \Rightarrow u = 0 \end{aligned}$$

□

**Proposition 3.3.** Soit  $\varphi : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$  une transformation affine de  $\mathcal{E}$ . Si  $\vec{\varphi} - \text{id}_E$  est surjective alors  $\text{Card}(\text{Fix}(\varphi)) = 1$

*Démonstration.*

unicité:  $\varphi(A) = A, \varphi(B) = B \Rightarrow \vec{\varphi}(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{\varphi(A)\varphi(B)} = \overrightarrow{AB} \Rightarrow \overrightarrow{AB} \in \ker(\vec{\varphi} - \text{id}_E) \Rightarrow \overrightarrow{AB} = 0 \Rightarrow A = B$

existence : On cherche  $M$  tel que  $\varphi(M) = M$  on fixe  $O \in \mathcal{E}$ ,  $O' = \varphi(O)$  Alors

$$\varphi(M) = M \Leftrightarrow \overrightarrow{\varphi(O)M} = \vec{\varphi}(\overrightarrow{OM}) \Leftrightarrow \overrightarrow{\varphi(O)O} + \overrightarrow{OM} = \vec{\varphi}(\overrightarrow{OM}) \Leftrightarrow (\vec{\varphi} - \text{id}_E)(\overrightarrow{OM}) = \overrightarrow{\varphi(O)O} \in E$$

Il est possible de trouver un tel  $M$  car  $\vec{\varphi} - \text{id}_E$  est surjective.

□

**Corollaire 3.4.** Si  $\dim \mathcal{E} < +\infty$  alors les assertions suivantes sont équivalentes :

- (1)  $\text{Card}(\text{Fix}(\varphi)) = 1$ .
- (2)  $\ker(\vec{\varphi} - \text{id}_E) = 0$ .

*Démonstration.*  $f : E \rightarrow E$  dim non infinie:  $f$  inj  $\Leftrightarrow f$  surj  $\Leftrightarrow f$  bij.

□