Suite et séries de fonctions
Chapitre 1: Suites de fonctions

Table des matières

1. Introduction.

On considère un ensemble X non vide (en général $X \subset \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

Définition 1.1 (suite de fonctions): On appelle suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur X la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par la fonction $f_n : X \to \mathbb{R}; x \mapsto f_n(x)$.

Exemple: $X = \mathbb{R}$
$\forall n \in \mathbb{N}, f_n(x) = \ln(1 + nx^2)$.

2. Convergence simple.

On cherche à étudier le comportement d'une suite de fonction quand n tend vers $+\infty$, il faut définir une notion de convergence. Le plus simple c'est d'utiliser la convergence des suites numériques.

Définition 2.1 (convergence simple): Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions sur X. On dit que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge simplement** sur X, si pour tout $x \in X$, la suite numérique $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente. Dans ce cas on note $f(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)$ la limite et on dit que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers f sur X et on note $f_n \xrightarrow{\text{CS}} f$ sur X. i.e :

$$f_n \xrightarrow{\text{CS}} f \text{ sur } X \Leftrightarrow \forall x \in X, \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$$

Remarques:
1. Le N de la définition dépend de x et de ε.
2. La convergence simple est une propriété locale.

Remarque (méthode): Pour étudier la convergence simple d'une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur X on doit :
1. Fixer $x \in X$.
2. Etudier la suite numérique $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$.
3. S'il y a convergence, on construit $f : X \to \mathbb{R}$ tq $f(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)$ et on dit $f_n \xrightarrow{\text{CS}} f$ sur X.

Exemples:

1. On considère $(f_n)_{n\in\mathbb{N}\setminus 0}$ sur $I =]0,+\infty[$ définie par $f_n : I \to \mathbb{R}; x \mapsto \frac{1}{x+\frac{1}{n}}$ Soit $x > 0$ fixé, on a $f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{x}$. On pose $f : I \to \mathbb{R}; x \to \frac{1}{x}$ et on a $f_n \xrightarrow{\text{CS}} f$ sur X.
2. Même suite mais sur $I = [0;+\infty[$. Pour $x = 0$, $f_n(0) = n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ donc $(f_n)_{n\in\mathbb{N}\setminus 0}$ ne converge pas simplement sur I.
3. On considère $(f_n)_{n\in\mathbb{N}\setminus 0}$ sur $I = [0,+\infty[$ où $f_n : I \to \mathbb{R}; x \mapsto \left(1+\frac{x}{n}\right)^n$
$*$ pour $x = 0$ fixé, $f_n(0) = 1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.
$*$ pour $x > 0$ fixé, $f_{n(x)} = e^{n\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)} = e^{n\left(\frac{x}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)} = e^{x+o(1)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^x$
On pose $f : I \to \mathbb{R}; x \to e^x$, on a $f_n \xrightarrow{\text{CS}} f$ sur I.
4. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $I = [0,1]$ définie par $f_{n(x)} = x^n$.
$*$ Si $x \in [0,1[$ fixé, $f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$
$*$ Si $x = 1$, $f_n(1) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.
On pose $f : I \to \mathbb{R}; x \mapsto \begin{cases} 1 \text{ si } x=1 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$. On a $f_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f$.
On veut définir une convergence qui conserve la continuité à la limite. On suppose $f_n \xrightarrow{\text{CS}} f$ sur I un intervalle de $\mathbb{R}$. On suppose $\forall n \in N, f_n \in C^0(I,\mathbb{R})$. Soit $\alpha \in I, \varepsilon > 0$. On veut majorer $|f(x) - f(\alpha)|$ par ε. On a :
$$\begin{aligned} |f(x) - f(\alpha)| &= |f(x) - f_n(x) + f_n(x) + f_n(\alpha) - f_n(\alpha) - f(\alpha)| \\ &\leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(\alpha)| + |f_n(\alpha) - f(\alpha)| \end{aligned}$$
1er terme: $\forall n \in \mathbb{N}$, f_n est continue en α donc
$$\exists \eta_n \in \mathbb{R}, x \in]\alpha-\eta, \alpha+\eta[\Rightarrow |f_n(x) - f_n(\alpha)|.$$
2eme terme: Comme f_n tend vers f quand $n \to (+\infty)$,
$$\exists N_{x,\varepsilon}, n \geq N_{x,\varepsilon} \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$
3eme terme: Comme $f_n(\alpha)$ tend vers $f(\alpha)$ quand $n \to (+\infty)$,
$$\exists \eta_n \in \mathbb{R}, x \in]\alpha-\eta, \alpha+\eta[\Rightarrow |f_n(\alpha) - f(\alpha)| \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$
Le problème est dû au fait que on doit satisfaire les deux conditions $x \in]\alpha-\eta; \alpha+\eta[$ et $x \geq N_{x,\varepsilon}$ pour une infinité de x.

3. Convergence uniforme.

Définition 3.1 (Convergence uniforme): Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonction sur X. Soit f une fonction sur X. On dit que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur X si:
$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow \forall x \in X, |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon.$$
On note $f_n \xrightarrow{\text{CU}} f$ sur X.

Remarques:
1. Le N ne dépend que de ε.
2. La convergence uniforme est une propriété globale.

Définition 3.2: Soit $f : X \to \mathbb{R}$ une fonction. On appelle **norme sup** ou **norme infinie** sur X la valeur :

$$\|f\|_{+\infty,X} = \sup\{|f(x)|, x \in X\} \in \mathbb{R}_+ \cup \{\pm\infty\}.$$

Exemples:
1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$
   On a $\forall x \in \mathbb{R}, 0 \leq f(x) \leq 1$ et $f(0) = 1$ donc $\|f\|_{+\infty,\mathbb{R}} = 1$.
2. $f : I = [0, 1[\to \mathbb{R}; x \mapsto x^2$
   On a $f'(x) = 2x \geq 0$ Donc $f(x)$ est croissante sur I et $f(x) \underset{x\to 1}{\longrightarrow} 1$. D'où $\{f(x), x \in I\} = [0, 1[$ donc $\|f\|_{+\infty,I} = 1$.
3. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; x \mapsto x$,
   $\|f\|_{+\infty,\mathbb{R}} = +\infty$.

3.1. Propriétés de la $\|\cdot\|_{+\infty}$

Proposition 3.1.1: Soient $f, g : X \to \mathbb{R}$ deux fonctions.
1. S'il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que $\forall x \in X, |f(x)| \leq M$ alors $\|f\|_{+\infty,X} \leq M$.
2. $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \|\alpha f\|_{+\infty,X} = |\alpha| \|f\|_{+\infty,X}$.
3. $\|f + g\|_{+\infty,X} \leq \|f\|_{+\infty,X} + \|g\|_{+\infty,X}$.
4. $\|fg\|_{+\infty,X} \leq \|f\|_{+\infty,X} \|g\|_{+\infty,X}$.

Démonstration:
1. exercice
2. exercice
3. $|f + g| \leq |f| + |g| \leq \|f\|_{+\infty,X} + |g| \leq \|f\|_{+\infty,X} + \|g\|_{+\infty,X}$ d'où d'après 1),

$$\|f + g\|_{+\infty,X} \leq \|f\|_{+\infty,X} + \|g\|_{+\infty,X}.$$

□

Proposition 3.1.2 (Convergence uniforme avec la norme infinie): Soient $(f_n)_{n\in\mathbb{N}\setminus 0}$ une suite de fonctions sur X et f une fonction sur X. Alors

$$f_n \overset{\text{CU}}{\longrightarrow} f \Leftrightarrow \|f_n - f\|_{+\infty,X} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Démonstration:
$\Rightarrow$ Si $f_n \overset{\text{CU}}{\longrightarrow} f$ sur $X, \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$ tq $n \geq N \Rightarrow \forall x \in X, |f_n - f| \leq \varepsilon$ donc $\|f_n - f\|_{+\infty,X} \leq \varepsilon$.
D'où $\|f_n - f\|_{+\infty,X} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
$\Leftarrow$ Si $\|f_n - f\|_{+\infty,X} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ Alors

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow \forall x \in X, |f_n(x) - f(x)| \leq \|f_n(x) - f(x)\|_{+\infty,X} \leq \varepsilon.$$

Donc $f_n \overset{\text{CU}}{\longrightarrow} f$ sur X. □

Théorème 3.1.1: Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}\setminus 0}$ une suite de fonctions et soit f une fonction sur X. On a

$$f_n \xrightarrow{\text{CU}} f \text{ sur } X \Rightarrow f_n \xrightarrow{\text{CS}} f \text{ sur } X.$$

Démonstration: Immédiat. □

Remarque (Méthode): Plan pour étudier la convergence uniforme d'une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}\setminus 0}$ sur X.

1. Etudier la convergence simple.
2. S'il y a convergence simple, on définit la fonction $f : X \to \mathbb{R}; x \mapsto f_n(x)$ quand $n \to +\infty$.
3. Etudier la convergence uniforme: s'il y a convergence uniforme, **cela ne peut être que vers f** !
4. Pour montrer la **convergence uniforme** : on majore $\|f_n - f\|_{+\infty,X}$ par une suite numérique (sans x) qui tend vers 0 quand $n \to +\infty$.

Pour montrer la **non-convergence uniforme** : on minore $\|f_n - f\|_{+\infty,X}$ par une suite numérique positive (sans x) qui ne tend pas vers 0 quand $n \to +\infty$.
On pourra étudier la suite: $g_n = f_n - f$.

Exemples:

1. $(f_n)_{n\in\mathbb{N}\setminus 0}$ définie par $f_n : I = [1, +\infty[\to \mathbb{R}; x \mapsto \frac{1}{x+\frac{1}{n}}$.
   On a vu que $f_n \xrightarrow{\text{CS}} f$ sur I où $f : I \to \mathbb{R}; x \mapsto \frac{1}{x}$. On pose:

   $$g_n = f_n - f = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+\frac{1}{n}} = \frac{\frac{1}{n}}{x\left(x+\frac{1}{n}\right)} = \frac{1}{nx^2+x}.$$

   1$^{\text{ere}}$ méthode: Majoration de $|g_n|$ par une expression qui ne dépend pas de x et qui tend vers 0 quand $n \to +\infty$.
   Lorsque $x \geq 1$; $nx^2 + x \geq nx^2 + 1 \geq n + 1$ Donc $\forall x \in I, 0 \leq g_n(x) \leq \frac{1}{n+1}$ Donc

   $$\|f_n - f\|_{+\infty,I} \leq \frac{1}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

   . D'où $f_n \xrightarrow{\text{CU}} f$ sur I.

   2$^{\text{e}}$ méthode: (en général plus couteuse): On étudie g_n. On a $g_n'(x) = -\frac{2nx+1}{(nx^2+x)^2} \leq 0$ donc g_n est décroissante sur I et $\|f\|_{+\infty,I} = \frac{1}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. D'où $f_n \xrightarrow{\text{CU}} f$ sur I.
2. $(f_n)_{n\in\mathbb{N}\setminus 0}$ définie par $f_n : I = [0, 1] \to \mathbb{R}; x \mapsto x^n$. On a vu $f_n \xrightarrow{\text{CS}} f$ sur I où $f : I \to \mathbb{R}; x \mapsto \begin{cases} 0 \text{ si } x\in[0,1[\\ 1 \text{ si } x=1 \end{cases}$

   1$^{\text{ere}}$ méthode: On veut minorer $|f_n(x) - f(x)|$. Pour cela, on utilise une suite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où $\forall n, x_n \in I, x_n = 1 - \frac{1}{n}$. Ainsi, on a bien $|f_n(x_n) - f(x_n)| \underset{n\to+\infty}{\not\longrightarrow} 0$.

   $$|f_n(x_n) - f(x_n)| = f_n(x_n) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = e^{n\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)} = e^{n\left(-\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)} = e^{-1+o(1)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{e}$$

   On a $\|f_n - f\|_{+\infty,I} \geq |f_n(x_n) - f(x_n)| \not\longrightarrow_{+\infty} 0$. d'où $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément sur I.

   2$^{\text{e}}$ méthode: $g_n(x) = f_n(x) - f(x) = \begin{cases} f_n(x)=x^n \text{ si } x\neq 1 \\ 1 \text{ sinon} \end{cases}$ donc $\|g_n\|_{+\infty,I} = 1 \underset{n\to+\infty}{\not\longrightarrow} 0$. Donc $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément sur I.

Théorème 3.1.2 (convergence uniforme + continuite): Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur I. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction. Soit $x_0 \in I$. On suppose
1. $\forall n \in \mathbb{N}, f_n$ est continue en x_0 ($f_n \in C^0(I, \mathbb{R})$).
2. $f_n \overset{\text{CU}}{\longrightarrow} f$ sur I.

Alors f est continue en x_0.

Démonstration: Soit $\varepsilon > 0$.
On a $f_n \overset{\text{CU}}{\longrightarrow} f$ sur I donc $\exists N \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow \forall x \in I, \left|f_{n(x)} - f(x)\right| \leq \frac{\varepsilon}{3}$.
De plus, f_n est continue en x_0 donc $\exists \eta > 0, |x - x_0| \leq \eta \Rightarrow |f_n(x) - f_n(x_0)| \leq \frac{\varepsilon}{3}$.
Soit $n \geq N$ et $x \in I$ tq $|x - x_0| \leq \eta$.

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &= |f(x) - f_N(x_0) + f_N(x_0) - f_N(x) + f_N(x) - f(x_0)| \\ &\leq |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f_N(x_0)| + |f_N(x_0) - f(x_0)| \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Ainsi, f est continue en x_0. □

Remarques:
1. Il n'y a pas réciprocité.
2. Le théorème nous donne un critère supplémentaire pour justifier la non-convergence uniforme.
3. On remarque que l'on a pas besoin de la continuité uniforme sur I en entier, c'est suffisant de l'avoir sur un voisinage de x_0 (ou un intervalle fermé et borné contenant x_0).

Proposition 3.1.3 (Continuité uniforme sur tout segment + continuité): Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle. Soient $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions sur I et f une fonction définie sur I. On suppose :

1. $\forall n \in \mathbb{N}, f_n$ est continue en x_0.
2. $f_n \overset{\text{CU}}{\longrightarrow} f$ sur tout segment $K = [a, b] \subset I$.

Alors f est continue sur I.

Démonstration: Soit $x_0 \in I, \exists K = [a, b]$ avec $a \neq b \neq x_0$ tel que $x_0 \in [a, b]$ On applique le théorème sur K donc f est continue en x_0. D'où f continue sur I. □

Remarques: Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$.
1. f est continue sur $I \Leftrightarrow f$ est continue sur n'importe quel segment $K \subset I$.
2. $f_n \overset{\text{CS}}{\longrightarrow} f$ sur $I \Leftrightarrow f_n \overset{\text{CS}}{\longrightarrow} f$ sur $K \subset I$ pour tout segment $K \subset I$.
3. $f_n \overset{\text{CU}}{\longrightarrow} f$ sur $I * \Rightarrow * f_n \overset{\text{CU}}{\longrightarrow} f$ sur $K \subset I$ pour tout segment $K \subset I$.

Exemple: Considérons pour $n \in \mathbb{N} \setminus 0$, $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; x \mapsto \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{nx}\right) \text{ si } x \neq 0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$ Comme

$$\left|x^2 \sin\left(\frac{1}{nx}\right)\right| \leq x^2 \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0,$$

f_n est continue en 0.
Convergence simple: Si $x = 0, f_n(0) = 0 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Si $x \in \mathbb{R} \setminus 0, f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\sim} x^2 \frac{1}{nx} = \frac{x}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
Convergence uniforme sur tout gement $K = [-\alpha, \alpha] \forall \alpha \in \mathbb{R}_+ \setminus 0$:
$g(x) = \sin x - x$ et $g'(x) = \cos(x) - 1 \leq 0$. De plus, $\forall x \in K, g(x) \leq 0$ donc $|\sin(x)| \leq |x|$.

Donc $\forall x \in \mathbb{R}, |f_n(x)| \leq x^2\left(\frac{1}{nx}\right) \leq \frac{|x|}{n}$.
D'où: $\forall x \in [-\alpha, \alpha] = K, |f_n(x)| \leq \frac{\alpha}{n}$ donc $\|f_n - f\|_{+\infty,K} = 0.$ et $f_n \overset{\text{CU}}{\longrightarrow} f$ sur K. Ainsi, il y a convergence uniforme sur tout segment.
Montrons qu'il n'y a **pas** de convergence uniforme sur $\mathbb{R}$:
On prend $x_n = n$ et $f_n(x_n) = n^2 \sin\left(\frac{1}{n^2}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} n^2 \frac{1}{n^2} = 1$ On a

$$|f_n(x_n) - f(x_n)| = 1 \leq \|f_n - f\|_{+\infty,\mathbb{R}} \cancel{\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}} 0$$

Remarque: La convergence uniforme ne se conserve pas lors d'une réunion infinie. Mais se conserve si elle l'est.

4. Intégration sur un segment et convergence uniforme.

On veut étudier une suite d'intégrales par exemple, on veut chercher la limite quand $n \to +\infty$ de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $I_n = \int_0^1 \frac{n^4+x^4}{(n+x)^4} \,\mathrm{d}x$. La tentation serait de dire qu'à x fixé, $\frac{n^4+x^4}{(n+x)^4} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ et donc $I_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 1 \,\mathrm{d}x = 1$. En faisant cela, on dit que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(x) \,\mathrm{d}x = \int_0^1 \lim_{n\to+\infty} f_n(x) \,\mathrm{d}x$$

ce qui est généralement **faux**.

Théorème 4.1 (Convergence uniforme + intégration sur un segmnent): Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions sur un **segment** $I = [a, b]$. On suppose que:
1. $\forall n \in \mathbb{N}, f_n$ est continue sur I.
2. $f_n \overset{\text{CU}}{\longrightarrow} f$ sur I.

Alors f est continue sur I et

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(x) \,\mathrm{d}x = \int_a^b \lim_{n\to+\infty} f_n(x) \,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x) \,\mathrm{d}x.$$

Démonstration: f est continue sur I par le théorème de CU+continuité donc $\forall n \in \mathbb{N}, \left|\int_a^b f_n(x) \,\mathrm{d}x - \int_a^b f(x) \,\mathrm{d}x\right| = \left|\int_a^b f_n(x) - f(x) \,\mathrm{d}x\right|$

$$\leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)| \,\mathrm{d}x$$
$$\leq \int_a^b \|f_n - f\|_{+\infty,I} \,\mathrm{d}x = \|f_n - f\|_{+\infty,I}(b-a) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

□

Remarque: Le théorème peut être utilisé pour montrer la non convergence uniforme.

Exemple: Soit $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}; x \mapsto n \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right)$.
On montre que $f_n \overset{\text{CU}}{\longrightarrow} f$ sur $[0, 1]$ où $f(x) = x$ (en exercice) et donc on a

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_{n(x)} \,\mathrm{d}x = \int_0^1 x \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}.$$

5. Dérivation et convergence uniforme.

On a vu que si $f_n \xrightarrow{\text{CU}} f$ sur I, et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ continue sur I alors f est continue sur I.

Exemple: $f_n(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; x \mapsto \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}$.
$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est continue sur $\mathbb{R}$. On a $f_n \xrightarrow{\text{CS}} f$ sur $\mathbb{R}$ où $f(x) = |x|$ (C^0 sur $\mathbb{R}$ pas C^1 sur $\mathbb{R}$).

$$|f_n(x) - f(x)| = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} - \sqrt{x^2} = \frac{x^2 + \frac{1}{n} - x^2}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} + \sqrt{x^2}} = \frac{\frac{1}{n}}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} + \sqrt{x^2}}$$
$$\leq \frac{\frac{1}{n}}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}} \leq \frac{\frac{1}{n}}{\sqrt{\frac{1}{n}}} = \sqrt{\frac{1}{n}}$$

Donc $\|f_n - f\|_{+\infty,\mathbb{R}} \leq \sqrt{\frac{1}{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. D'où $f_n \xrightarrow{\text{CU}} f$ sur $\mathbb{R}$.

Théorème 5.1 (Convergence uniforme + primitive): Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions sur un **segment** $I = [a, b]$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, par le théorème fondamental de l'analyse, on introduit la fonction $F_n : I \to \mathbb{R}; x \mapsto \int_a^x f_n(t)\,\mathrm{d}t$. Si $f_n \xrightarrow{\text{CU}} f$ sur I,
alors $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur I vers $F : I \to \mathbb{R}; x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ qui est C^1 sur I.

Démonstration:

$$\begin{aligned}\forall x \in I, n \in \mathbb{N}, |F_n(x) - F(x)| &= \left|\int_a^x f_n(t)\,\mathrm{d}t - f(t)\,\mathrm{d}t\right| \\ &= \int_a^x |f_n(t) - f(t)|\,\mathrm{d}t \\ &\leq \int_a^b |f_n(t) - f(t)|\,\mathrm{d}t \\ &\leq \|f_n - f\|_{+\infty,I}(b-a) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \text{ voir thm précedent.}\end{aligned}$$

Donc $f_n \xrightarrow{\text{CU}} F$ sur I. □

Théorème 5.2 (Convergence uniforme+ dérivation hypothèses minimales): Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ défnie sur un **intervalle** I. On suppose :
1. $\forall n \in \mathbb{N}, f_n$ est C^1 sur I.
2. $\exists \alpha \in I$ tel que $f_n(a)$ converge.
3. $\exists g$ définie sur I telle que $f_n' \xrightarrow{\text{CU}} g$ sur tout segment $K \subset I$.

Alors :
1. La suite $f_n \xrightarrow{\text{CU}} f$ sur tout segment $K \subset I$.
2. $f' = g$

Démonstration: On note $l = \lim_{n\to+\infty} f_n(x)$. Par 3. on déduit que g est C^0 sur tout segment $K \subset I$ donc C^0 sur I. On pose $G_n : I \to \mathbb{R}; x \mapsto \int_a^x f_n'(t)\,\mathrm{d}t$.
Remarquons que $\forall x \in I, G_{n(x)} = f_n(x) - f_n(a)$. Par 3. + le thm de convergence uniforme+primitive $f_n \xrightarrow{\text{CU}} G$ sur sur tout segment $K \subset I$ où □

Corollaire 5.1 (Dérivation et continuité uniforme): Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ défnie sur un **intervalle** I. On suppose :
1. $\forall n \in \mathbb{N}, f_n$ est C^1 sur I.
2. $\exists f$ définie sur I telle que $f_n \overset{\text{CS}}{\longrightarrow} f$ sur I.
3. La suite de fonctions $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers une fonvtion $g : I \to \mathbb{R}$.

Alors :
1. La suite $f_n \overset{\text{CU}}{\longrightarrow} f$ sur tout segment $K \subset I$.
2. La fonction f est C^1 sur I.
3. $f' = g$

Théorème 5.3: Soit $k > 1$, $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle, et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} : I \to \mathbb{R}$ une suite de fonctions. On suppose :
1. $\forall n \in \mathbb{N}, f_n$ est C^k sur I.
2. $\forall i \in \{0, -, k-1\}$ la suite $\left(f_n^{(i)}\right)$ converge simplement sur I.
3. La suite des dérivées k-ième converge uniformément sur I (ou sur tout segment $K \subset I$) vers une fonction $g : I \to \mathbb{R}$.

Alors il existe une fonction f, C^k sur I telle que :
1. $f^{(k)} = g$
2. $\forall i \in \{0, -, k\}, f_n \overset{\text{CU}}{\longrightarrow} f^{(i)}$ sur sur tout segment $K \subset I$ **PROBLEME FONCTION**

Démonstration: par récurrence. □

Remarque: Si $f_n \overset{\text{CU}}{\longrightarrow} f$ sur I et $\forall n \in \mathbb{N}, f_n$ est C^1 sur I alors f n'est pas forcément C^1 sur I.

Théorème 5.4 (double limite): Soit $a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ une borne d'un intervalle I, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur I, et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction. On suppose :
1. $\forall n \in \mathbb{N}, f_n(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} l_n \in \mathbb{R}$.
2. $f_n \overset{\text{CU}}{\longrightarrow} f$ sur I.

Alors :
1. La suite numérique $(l_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $l \in \mathbb{R}$.
2. $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} l$.

On a donc

$$\lim_{x\to a}\left(\lim_{n\to+\infty} f_n(x)_{=f(x)}\right) = \lim_{n\to+\infty}\left(\lim_{x\to a} f_n(x)_{=l_n}\right) = l$$

Démonstration:
1. Montrons que la suite (l_n) converge, donc est de Cauchy. Soit $\varepsilon > 0$ Par 2.,

$$\exists N \text{ tel que } \forall n \geq N, \text{on a } \|f_n - f\|_{+\infty,I} \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Soit $n \geq N$ et $p \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}\left|f_n(x) - f_{n+p}(x)\right| &= \left|f_n(x) - f(x) + f(x) - f_{n+p}(x)\right| \\ &\leq |f_n(x) - f(x)| + \left|f_{n+p}(x) - f(x)\right| \leq \varepsilon.\end{aligned}$$

On passe à la limite quand $x \longrightarrow a$ et $l_n - l_{n+p} \leq \varepsilon$. donc (l_n) est de Cauchy donc converge.

2. Montrons $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} l$.

   Comme $f_n \overset{\text{CU}}{\longrightarrow} f$ sur $I, \exists N_1 \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq N_1 \Rightarrow \|f_n - f\|_{+\infty,I} \leq \frac{\varepsilon}{3}$.
   Comme $l_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l, \exists N_2 \in \mathbb{N}$, tel que $n \geq N_2 \Rightarrow |l_n - l| \leq \frac{\varepsilon}{3}$.
   Posons $N = \max\{N_1, N_2\}$. Puisque $f_n(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} l_n$,

$$\exists \alpha > 0 \text{ tel que } \forall x \in I, |x-a| \leq \alpha \Rightarrow |f_n(x) - l_n| \leq \frac{\varepsilon}{3}$$

   Soit $x \in I$ tel que $|x - a| \leq \alpha$ et soit $n \geq N$. On a :

$$\begin{aligned}|f(x) - l| &= |f(x) - f_n(x) + f_n(x) - l_n + l_n - l| \\ &= |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - l_n| + |l_n - l| \leq \varepsilon.\end{aligned}$$

   DOnc $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} l$.

□

Remarque: La conclusion du théorème est vraie même si $l_n = +\infty$.

Exemple (Pour montrer la non convergence uniforme): On considère $f_n : I \to \mathbb{R}_+; x \mapsto \frac{x}{n+x}, n \geq 1$.

1. $\forall n \in \mathbb{N}, f_{n(x)} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1 = l_n$ donc $l_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1 = l$.
2. CS de (f_n): pour $x = 0$ $f_n(0) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. pour $x > 0$ fixé, $f_{n(x)} = \frac{x}{n+x} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc $f_n \overset{\text{CS}}{\longrightarrow} 0$.

Or

$$\lim_{x\to a}\left(\lim_{n\to+\infty} f(x)\right) = 0 = \lim_{n\to+\infty}\left(\lim_{x\to a} l_n\right)) = 1.$$

Faux donc 2. n'est pas vrai et il n'y a pas convergence uniforme.

Chapitre 2: Séries de fonctions.

6. Modes de convergence d'une série de fonctions.

Remarque: On considèrera un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ et des fonctions $f : I \to \mathbb{R}$ mais il est possible de généraliser aux fonctions $f : I \to \mathbb{C}$ en remplacnt la valeur absolue par le module.

Définition 6.1: Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions sur I. On appelle série de fonctions de terme général f_n la suite de fonctions

$$(S_n)_{n\in\mathbb{N}} := S_n : I \to \mathbb{R}; x \mapsto \sum_{k=0}^{n} f_k(x).$$

On note $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n$ une telle série de fonctions. La fonction S_n s'appelle la n-ième somme partielle de $\sum f_n$.

Définition 6.2 (Convergence simple): On dit qu'une série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur I si pour tout $x \in I$, la série numérique $\sum f_n(x)$ converge.
Si $\sum f_n$ converge simplement sur I, on définit la fonction limite

$$S : I \to \mathbb{R}; x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$$

La fonction S est appelée la fonction somme de $\sum f_n$ et est notée $S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$.

Définition 6.3 (Reste): La fonction $S - S_n$ notée R_n s'appelle la fonction reste d'ordre n de $\sum f_n$, on note $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k$. On a $R_n \xrightarrow{\text{CS}} 0$ sur I.

Remarques:
1. Montrer que $\sum f_n$ converge simplement sur I c'est montrer que $S_n \xrightarrow{\text{CS}} S$.
2. Si $\sum f_n$ converge simplement sur I, alors $S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est définie sur I.
3. En général, il n'est pas posssible de calculer explicitement S.

Exemple: Soit $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; x \mapsto x^n$. Pour $x \in \mathbb{R}$, tel que $|x| \geq 1$, $\sum f_n(x)$ diverge grossièrement car $f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\not\longrightarrow} 0$.
Si $x \in]-1,1[$, $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} S(x) = \frac{1}{1-x}$ donc $\sum f_n$ converge simplement sur $]-1,1[$. La fonction somme de $\sum f_n$ est seulement définie sur $]-1,1[$.

$$S :]\text{-}1{,}1 \to \mathbb{R}; x \mapsto \frac{1}{1-x}, \text{et } R_n :]\text{-}1{,}1 \to \mathbb{R}; x \mapsto S(x) - S_{n(x)} = \frac{x^{n+1}}{1-x}.$$

Définition 6.4 (convergence absolue): On dit qu'une série de fonctions $\sum f_n$ converge absolument, noté CA sur I si $\forall x \in I$, la série numérique $\sum |f_n(x)|$ converge.

Proposition 6.1 (Convergence absolue => convergence simple): Si $\sum f_n$ converge absolument sur I alors $\sum f_n$ converge simplement sur I.

Démonstration: Voir cours séries numériques. □

Exemples:

1. On considère la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} f_n$ où $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; x \mapsto \frac{(-1)^n}{x^2+n^2}$.
   Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$|f_n(x)| = \frac{1}{x^2+n^2} = \frac{1}{n^2\left(\frac{x^2}{n^2}+1\right)} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}.$$

   Par Riemann, et par équivalence, $\sum f_n$ converge absolument sur $\mathbb{R}$ donc converge.

2. On considère $\sum_{n\geq 1} f_n$ où $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; x \mapsto \frac{(-1)^n}{\sqrt{(x^2+n^2)}}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$

$$|f_n(x)| = \frac{1}{\sqrt{x^2+n^2}} = \frac{1}{n\sqrt{\frac{x^2}{n^2}+1}} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n}.$$

Donc f_n ne converge pas absolument sur $\mathbb{R}$.
Soit $x \in \mathbb{R}$. On pose $u_n(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+n^2}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. On a $(n+1)^2 \geq n^2$ donc $x^2+(n+1)^2 \geq x^2+n^2$ donc

$$\begin{aligned} &\sqrt{x^2+(n+1)^2} \geq \sqrt{x^2+n^2} > 0 \text{ (par croissance de } \sqrt{\odot}) \\ &u_{n+1}(x) \leq u_n(x). \end{aligned}$$

Donc $(u_n(x))_{n\in\mathbb{N}\setminus 0}$ est décroissante. Par le critère special des séries alternées, $\sum f_n(x)$ converge et donc $\sum f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$.

Définition 6.5 (convergence uniforme): On dit qu'une série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur I si la suite de fonctions $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des sommes partielles converge uniformément sur I.

Remarque: Cette définition est en général inutilisable car on ne connait pas une forme simple de S_n et S non plus.

Proposition 6.2: Si la série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur I alors $\sum f_n$ converge simplement sur I.

Démonstration: Cours sur les suites de fonctions □

Proposition 6.3: Si une série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur I alors la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur I vers la fonction nulle.

Démonstration: Supposons $\sum f_n$ converge uniformément sur I. Pour tout $n \geq 1$, pour tout $x \in I$,

$$\begin{aligned} |f_n(x)| = |S_n(x) - S_{n-1}(x)| &= |S_n(x) - S(x) + S(x) - S_{n-1}(x)|) \\ &\leq |S_n(x) - S(x) + S(x)| + |S(x) - S_{n-1}x| \\ &\leq \|S_n - S\|_{+\infty,I} + \|S_{n-1} - S\|_{+\infty,I} \end{aligned}$$

Donc $\|f_n - 0\|_{+\infty,I} \leq \|S_n - S\|_{+\infty,I} + \|S_{n-1} - S\|_{+\infty,I} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc $f_n \overset{\text{CU}}{\longrightarrow}$ fct nulle sur I.

□

Remarque: On se sert de ce résultat pour démontrer dans certains cas la non convergence uniforme.

Exemple:
On considère $\sum f_n$ où $f_n : \mathbb{R}_+ \setminus 0 \to \mathbb{R}; x \mapsto \frac{1}{1+n^2 x}$.
Soit $x \in I$. On a $\frac{1}{1+n^2 x} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2 x}$. Par Riemann et par équivalence, $\sum f_n(x)$ converge donc $\sum f_n$ converge simplement et converge absolument sur I. On a $f_n \overset{\text{CS}}{\longrightarrow}$ fct nulle sur I. On va voir qu'elle n'est pas uniforme. Soit $x_n = \frac{1}{n^2}, n \geq 1$. $f_{n(x_n)} = \frac{1}{2}$ donc $\|f_n - 0\|_{+\infty,X} \geq \frac{1}{2}$ donc $\|f_n - 0\|_{+\infty,X} \underset{n\to+\infty}{\not\longrightarrow} 0$. D'où la non convegrence uniforme.

Remarque: Cet exemple montre CA $\not\Rightarrow$ CU.

Proposition 6.4 (caractérisation de la convegrence uniforme avec les restes): Soit $\sum f_n$ une série de fonctions. $\sum f_n$ converge uniformément sur I si et seulement si
1. $\sum f_n$ converge simplement sur I.
2. La suite de fonctions $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers la fonction nulle sur I.

Démonstration:
On suppose $\sum f_n$ converge uniformément sur I donc S est bien définie sur I et on a H_1.
$\sum f_n$ converge uniformément sur $I \Leftrightarrow S_n \overset{\text{CU}}{\longrightarrow} S$ sur $I \Leftrightarrow S_n - S \overset{\text{CU}}{\longrightarrow} 0$. D'où H_2. □

Remarque: Ce résultat est en général inexploitable car on en connait pas R_n.

Définition 6.6 (convergence normale): On dit qu'une série de fonctions $\sum f_n$ **converge normalement** sur I si la série numérique $\sum \|f_n\|_{+\infty,I}$ est convergente.

Proposition 6.5: Soit $\sum f_n$ une série de fonctions. $\sum f_n$ converge normalement sur I si et seulement si il existe une suite numérique $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente telle que $\|f_n\|_{+\infty,I} \leq a_n$.
La série numérique $\sum a_n$ est appelée une série majorante de $\sum f_n$.

Démonstration:
$\Rightarrow$ Si $\sum f_n$ converge normalement sur I, on pose $a_n = \|f_n\|_{+\infty,I}$ et $\sum a_n$ est une série majorante.
$\Leftarrow$ Si $\sum a_n$ est une série majorante, par le théorème de comparaison, $\sum \|f_n\|_{+\infty,I}$ converge. □

Théorème 6.1 (Comparaison des modes de convergence): Soit $\sum f_n$ une série de fonctions sur I. On a

$$\text{convergence normale} \Rightarrow \text{convergence absolue} \Rightarrow \text{convergence simple}$$

et

$$\text{convergence normale} \Rightarrow \text{convergence uniforme} \Rightarrow \text{convergence simple}$$

Démonstration: On suppose que $\sum f_n$ converge normalement sur I. Il existe une série majorante $\sum a_n$ pour $\sum f_n$.

1. Comme $\forall n \in \mathbb{N}, \|f_n\|_{+\infty,I} \leq a_n$, on a $\forall x \in I, 0 \leq |f_n(x)| \leq \|f_n\|_{+\infty,I} \leq a_n$. Par le théorème de comparaison, $\sum|f_n(x)|$ converge pour tout $x \in I$, donc $\sum f_n$ converge absolument sur I.
2. Comme converge normale $\Rightarrow$ convergence absolue $\Rightarrow$ convergence simple,
   $\sum f_n$ converge simplement sur I. Donc $\forall x \in I, R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x)$ est bien défini, et $\sum|f_n(x)|$ converge simplement sur I donc ses restes associés que l'on appelera R'_n sont bien défnis.. Comme $\sum a_n$ converge, les restes d'ordre n, r_n sont bien définis.

   $$\forall x \in I, |R_n(x)| = \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} f_n\right| \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} |f_n| \leq r_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_n \in \mathbb{R}.$$

   Ainsi, $\|R_n - 0\|_{+\infty,I} \leq r_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. D'où $R_n \overset{\text{CU}}{\longrightarrow}$ fct nulle sur I. Donc $\sum f_n$ converge uniformément sur I.

$\square$

Exemple:

1. $\sum_{n\geq 1} f_n$ où $f_n(x) = \frac{(-1)^n}{x^2+n^{\frac{3}{2}}}$
2. Etudions les convergences sur $I =]0, +\infty[$ de $\sum f_n$ où $f_n(x) = nx^2e^{-x\sqrt{n}}$.
   $*$ Convergence normale :

   $$f'_n(x) = 2nxe^{-x\sqrt{n}} - n^{\frac{3}{2}}x^2e^{-x\sqrt{n}} = nxe^{-x\sqrt{n}}\left(2 - \sqrt{n}x\right)$$

   par etude de tableau de variation on obtient que $\|f_n\|_{+\infty,I} = f_n\left(\frac{2}{\sqrt{n}}\right) = \frac{4}{e^2} \underset{n\to+\infty}{\not\longrightarrow} 0$ Donc $\sum \|f_n\|_{+\infty,I}$ diverge grossièrement, ainsi, il n'y a pas de convergence normale.
   $*$ Convergence absolue : Soit $x \in]0, +\infty[$. On a $n^2 f_n(x) = n^3x^2e^{-x\sqrt{n}}$ Donc par la règle de $n^\alpha u_n$, $\sum|f_n(x)|$ converge. Donc converge absolument sur I. (et converge simplement sur I). $*$ Comme $\|f_n\|_{+\infty,I} \underset{n\to+\infty}{\not\longrightarrow} 0$, donc (f_n) ne converge pas uniformément vers la fonction nulle donc $\sum f_n$ ne converge pas uniformément sur I.

Remarque: La convergence absolue et la convergence simple sont locales tandis que la convergence normale et uniforme sont globales.

Théorème 6.2 (double limite): Soit $\sum f_n$ une série de fonctions sur I un intervalle et soit a une borne de cet intervalle. On suppose :

1. $\forall n \in \mathbb{N}, f_n(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} l \in \mathbb{R}$.
2. $\sum f_n$ converge uniformément sur I.

Alros en notant S la fonction somme de la série $\sum f_n$ sur I,

1. La série des l_n converge.
2. $S(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \sum l_n$