Diagonalisation

Table des matières

1. Déterminants.

1.1. forme n-linéaires alternée.

Définition 1.1.1 (forme n-linéaire): Soit E un espace vectoriel. Soit $\varphi : E^n \to \mathbb{R}; (x_1, x_2, -, x_n) \mapsto \varphi((x_1, x_2, -, x_n))$. On dit que φ est une **forme n-linéaire** si φ est linéaire par rapport à chaque variable $x_i, i \in [1, n]$ i.e, $\forall x_1, -, x_i, -, x_n, y_i \in E, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$,

$$\varphi(x_1, -, x_{i-1}, \alpha x_i + \beta y_i, -, x_n) = \alpha\varphi(x_1, -, x_{i-1}, x_i, -, x_n) + \beta\varphi(x_1, -, x_{i-1}, y_i, -, x_n)$$

Exemples:
1. Montrons que $\varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}; (x_1, x_2) \mapsto x_1 x_2$ est 2-linéaire. Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. On a $(\alpha x_1 + \beta y_1)x_2 = \alpha(x_1 x_2) + \beta(y_1 y_2)$ et $x_1(\alpha x_2 + \beta y_2) = \alpha(x_1 x_2) + \beta(x_1 y_2)$.
2. $\varphi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}; (u^{\to}, v^{\to}) \mapsto u^{\to} \times v^{\to}$ est 2-linéaire (et symétrique).
3. Le déterminant 2-2 est 2-linéaire.

Remarque: $\varphi(x_1, -, 0, -, x_n) = 0$.
En effet,

Définition 1.1.2 (alternée): Soit φ une application n-linéaire. On dit que φ est **alternée** si

$$\forall i, j \in [1, n] \text{ avec } i \neq j, x_i = x_j \Rightarrow \varphi(x_1, -, x_n) = 0$$

φ est alternée si des qu'il y a 2 vecteurs égaux dans $x_1, -, x_n$, $\varphi(x_1, -, x_n) = 0$

Proposition 1.1.1: Soient $f_1, -, f_n : E \to F$ n applications linéaires. Soit $\varphi : F^n \to \mathbb{R}$ n linéaire. Alors

$$\varphi \circ (f_1, -, f_n) : E^n \to \mathbb{R}; x_1, -, x_n \mapsto \varphi(f_1(x_1), -, f_n(x_n))$$

est n -linéaire.

Démonstration:

□

Définition 1.1.3 (antisymétrie) : Soit φ une application n-linéaire. On dit que φ est **antisymétrique** si

$$\forall i, j \in [1, n] \text{ avec } i \neq j, \varphi(x_1, -, x_i, -, x_j, -, x_n) = -\varphi(x_1, -, x_j, -, x_i, -, x_n)$$

$\varphi(x_1, -, x_n)$ est changé en son opposé lorsqu'on échange 2 de ses vecteurs.

Proposition 1.1.2 : Soit φ une application n-linéaire et alternée. On ne change pas la valeur de $\varphi(x_1, -, x_n)$ en ajoutant à un des vecteurs de la famille une combinaison linéaire des autres.

Démonstration :

$$\begin{aligned}\varphi\left(x_1 + \sum_{j=2}^{n} \alpha_j x_j, -, x_n\right) &= \varphi(x_1, -, x_n) + \sum_{j=2}^{n} \alpha_j \varphi(x_j, -, x_j, -, x_n) \\ &= \varphi(x_1, -, x_n)\end{aligned}$$

Car φ est alternée. □

Proposition 1.1.3 : Soit φ une application n-linéaire.

$$\varphi \text{ est alternée si et seulement si } \varphi \text{ est antisymétrique.}$$

Démonstration :
⇒ Supposons que φ soit alternée. On pose $x_i = x_j$ Alors on a $\varphi(x_1, -, x_i, -, x_j, -, x_n) = 0$

$$\begin{aligned}\varphi(x_1, -, x_i, -, x_j, -, x_n) &= \varphi(x_1, -, x_i + x_j, -, x_j + x_i, -, x_n) \\ &= \varphi(x_1, -, x_i, -, x_j + x_i, -, x_n) + \varphi(x_1, -, x_j, -, x_j + x_i, -, x_n) \\ &= \varphi(x_1, -, x_i, -, x_j, -, x_n) + \cancel{\varphi(x_1, -, x_i, -, x_i, -, x_n)} \\ &\quad \cancel{+\varphi(x_1, -, x_j, -, x_j, -, x_n)} + \varphi(x_1, -, x_j, -, x_i, -, x_n) \quad \text{car } \varphi \text{ est alternée.} \\ &= \varphi(x_1, -, x_i, -, x_j, -, x_n) + \varphi(x_1, -, x_j, -, x_i, -, x_n)\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}&0 = \varphi(x_1, -, x_i, -, x_j, -, x_n) + \varphi(x_1, -, x_j, -, x_i, -, x_n) \\ &\Leftrightarrow \varphi(x_1, -, x_i, -, x_j, -, x_n) = -\varphi(x_1, -, x_j, -, x_i, -, x_n)\end{aligned}$$

Donc φ est antisymetrique.
⇐ Supposons que φ soit antisymétrique. Alors on a :

$$\varphi(x_1, -, x_i, -, x_j, -, x_n) = -\varphi(x_1, -, x_j, -, x_i, -, x_n)$$

En particulier, en posant $x_j = x_i$ on a :

$$\begin{aligned}\varphi(x_1, -, x_i, -, x_i, -, x_n) &= -\varphi(x_1, -, x_i, -, x_i, -, x_n) \\ &\Leftrightarrow 2\varphi(x_1, -, x_i, -, x_i, -, x_n) = 0 \\ &\Leftrightarrow \varphi(x_1, -, x_i, -, x_i, -, x_n) = 0\end{aligned}$$

□

Proposition 1.1.4: Soit φ une application linéaire et alternée. Si $(x_1, -, x_n)$ est une famille liée alors $\varphi(x_1, -, x_n) = 0$

Démonstration: $(x_1, -, x_n)$ est liée donc il existe $\alpha_1, -, \alpha_n \in \mathbb{R}$ tel que $\alpha_1 x_1 + ... + \alpha_n x_n = 0$ avec $\alpha_i \neq 0$ cas $\alpha_1 \neq 0$, $x_1 = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1} x_2 - ... - \frac{\alpha_n}{\alpha_1} x_n$, alors

$$\begin{aligned} \varphi(x_1, -, x_n) &= \varphi\left(-\frac{\alpha_2}{\alpha_1} x_2 - ... - \frac{\alpha_n}{\alpha_1} x_n, x_2, -, x_n\right) \\ &= \text{TODO} = 0 \end{aligned}$$

□

Corollaire 1.1.1: Si $\dim(E) < n$ toutes les formes n-linéaires alternées sur E sont nulles.

Démonstration: Soient E un espace vectoriel, $x_1, -, x_n \in E$. Alors $(x_1, -, x_n)$ est liée donc $\varphi(x_1, -, x_n) = 0$. □

Théorème 1.1.1: Si $\dim(E \geq n)$ alors il existe des formes n-linéaires alternées sur E non nulles.
De plus, si $\dim(E) = n$ deux formes n-linéaires alternées sur E φ_1 et φ_2 non nulles sont proportionnelles i.e, $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x_1, -, x_n \in E, \varphi_2(x_1, -, x_n) = \lambda \varphi_1(x_1, -, x_n)$.

1.2. Définition du déterminant.

Lemme 1.2.1: Soient $m : E^2 \to \mathbb{R}, a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Alors $a \circ m$ définie par

$$(a \circ m)(x_1, x_2) = m(x_1, x_2) - m(x_2, x_1)$$

est bilinéaire antisymétrique.

Démonstration: Soient $x_1, x_2 \in E$. On montre l'antisymétrie.

$$\begin{aligned} (a \circ m)(x_1, x_2) = m(x_1, x_2) - m(x_2, x_1) &= -(m(x_2, x_1) - m(x_1, x_2)) \\ &= -(a \circ m)(x_2, x_1) \end{aligned}$$

La linéarité est évidente. □

Théorème 1.2.1: Soient E un espace vectoriel de dimension n, et $B = (e_1, -, e_n)$ une base de E. Alors il existe une unique forme n-linéaire alternée: $\det_B : E^n \to \mathbb{R}$ appelée déterminant par rapport à B telle que $\det(e_1, -, e_n) = 1$.

Démonstration cas n=2: TODO VOIR MAXIME □

Théorème 1.2.2: Soient E un espace vectoriel de dimension n, et B une base de E.
Une famille F de n vecteurs de E est libre si et seulement si le déterminant de ces n vecteurs dans la base B est non nul.
Dans ce cas on a:

$$\forall x_1, -, x_n \in E, \det_B(x_1, -, x_n) = \det_B(F) \det_F(x_1, -, x_n).$$

Démonstration: Soit $F = (f_1, -, f_n)$ une famille, $B = (e_1, -, e_n)$.
Si F est liée on a $\det_B$ est n-linéaire alternée. Alors $\det_B(f_1, -, f_n) = 0$.
Si F est libre alors F est une base donc $\exists \lambda \in \mathbb{R}, \det_B = \lambda \det_F$ voir (Théorème). En particulier,

$$\det_B(f_1, -, f_n) = \lambda \det_F(f_1, -, f_n) \underset{\text{par définition}}{=} \lambda \cdot 1$$
$$\text{Or } 1 = \det_B(e_1, -, e_n) = \lambda \det_F(f_1, -, f_n) \text{ d'où } \lambda \neq 0$$

POURQUOI
D'où $\det_B(f_1, -, f_n) \neq 0$. □

1.3. Déterminant d'un endomorphisme.

Définition 1.3.1: Soit E un espace vectoriel de dimension n. On appelle **determinant de f** l'unique réel $\det f$ tel que pour toute application φ n-linéaire alternée, et pour tout $(x_1, -, x_n) \in E$,

$$\varphi(f(x_1), f(x_n)) = \det f \varphi(x_1, -, x_n).$$

Remarque: En prenant $x_1, -, x_n = e_1, -, e_n$,

$$\det_B(f(B)) = \det F.$$

Démonstration: Existence: Soit φ une forme n-linéaire alternée non-nulle et $\psi : E^n \to \mathbb{R}; x_1, -, x_n \mapsto (f(x_1), -, f(x_n))$ qui est une forme n-linéaire alternée. Alors φ et ψ sont proportionnelles, i.e il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\psi = \lambda\varphi$ (Théorème).
Soit Φ une forme n-linéaire alternée quelconque, alors il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\Phi = \alpha\varphi$, et $\forall x_1, -, x_n \in E$,

$$\Phi(\psi(x_1), -, \psi(x_n)) = \alpha\lambda\varphi(x_1, -, x_n) = \lambda\Phi(x_1, -, x_n)$$

MYSTIQUE □

Proposition 1.3.1: Soient $f : E \to E$ et $g : E \to E$ deux endomorphismes. Alors,

$$\det(f \circ g) = \det f \det g.$$

Démonstration: Soient $\varphi : E^n \to \mathbb{R}$ une application n-linéaire alternée, $x_1, -, x_n \in E$.
On a:

$$\begin{aligned}\varphi(f \circ g(x_1), -, f \circ g(x_n)) &= \det f \varphi(g(x_1), -, g(x_n)) \text{ par definition de} \det f.\\ &= \det f \det g \varphi(x_1, -, x_n) \text{ par definition de } \det g\end{aligned}$$

Par unicité de $\det(f \circ g)$, $\det(f \circ g) = \det f \det g$ $\square$

Théorème 1.3.1: Soit $f : E \to E$ un endomorphisme.

$$f \text{ est bijectif} \Leftrightarrow \det f \neq 0 \text{ et on a: } \det(f^{-1}) = \frac{1}{\det(f)}.$$

Démonstration: Soit B une base de E un espace vectoriel.
On rappelle f est bijectif $\Leftrightarrow f(B)$ est une base. $\Leftrightarrow \det_B f(B) \neq 0$. Si f est bijectif, $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_E$ donc $\det(f \circ f^{-1}) = \det(\mathrm{id}_E) = \det f \det f^{-1}$ or $\det(\mathrm{id}_E) = 1$
D'où $\det(f^{-1}) = \frac{1}{\det(f)}$. $\square$

Proposition 1.3.2: Soient F une famille de vetceurs de E, $f : E \to E$ un isomorphisme d'espace vectoriel, B une base de E. Alors $f(B)$ est une base de F et

$$\det_{f(B)} f(F) = \det_B F.$$

Démonstration: $\det_{f(B)} f$ et $\det_B F$ sont deux formes n-linéaires alternées sur E qui valent 1 sur B donc elles sont égales. $\square$

Théorème 1.3.2: Soient E un espace vectoriel de dimension finie, $f : E \to F$ un endomorphisme. Alors

$$\det f = \det M_{B,B}(f).$$

Où $M_{B,B}(f)$ est la matrice associée à f dans la base B.

1.4. Déterminant d'une matrice carrée.

Définition 1.4.1: Soit $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ une matrice. On appelle **déterminant de A**

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & - & a_{1n} \\ a_{n1} & - & a_{n,n} \end{vmatrix},$$

le déterminant dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$ des n vecteurs colonnes de A .

Proposition 1.4.1: Soient $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{R}), \lambda \in \mathbb{R}$
1. $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.
2. A inversible $\Leftrightarrow$ $\det A \neq 0$. Si A est inversible alors $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$.
3. $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$.

Démonstration:
1. Soient $f : E \to E, g : E \to E, A, B$ les matrices associées respectivement à f et g. Alors la matrice associée a $f \circ g$ est $M_{B,B}(f \circ g) = AB$. Ainsi,
$$\det(AB) = \det M(f \circ g) = \det(f \circ g) = \det f \det g = \det A \det B.$$
2.
3. Par n-linéarité

□

Remarque (ATTENTION): $\det(A + B) \neq \det(A) + \det(B)$

Théorème 1.4.1: Soient $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$, E un espace vectoriel de dimension n, B une base de E, et $x_1, -, x_n$ tels que $x_i := a_{1i}e_1 + ... + a_{ni}e_n$. Alors

$$\det A = \det_B(x_1, -, x_n).$$

Démonstration: Soit $f : \mathbb{R}^n \to E$; base canonique $\mapsto$ base $\mathrm{B} = y_1, -, y_n \mapsto y_1 e_1 + ... + y_n e_n$. f est bien un isomorphisme. On a : $f(a_{1i}, -, a_{ni}) = x_i$. D'après la proposition,

$$\det_{f(C)} f(a_{1i}, -, a_{ni}) = \det_C(a_{1i}, -, a_{ni}) = \det A = \det_B(x_1, -, x_n).$$

□

Remarque: Le déterminant est indépendant de la base B choisie.

Définition 1.4.2 (transposée): Soit $A \in M_{B,B}(\mathbb{K})$ avec

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1}, -, a_{1,q} \\ |, -, | \\ a_{p,1}, -, a_{p,q} \end{pmatrix}$$

Alors la transposée est notée ${}^tA \in M_{p,q}(\mathbb{K})$ est la matrice

$${}^tA = \begin{pmatrix} a_{1,1}, -, a_{p,1} \\ |, -, | \\ a_{1,q}, -, a_{p,q} \end{pmatrix}.$$

Théorème 1.4.2 (Admis): Soit $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ une matrice carrée. Alors :

$$\det {}^tA = \det A.$$

Remarque: Conséquence directe: Toutes les propriétés des déterminants qui ont étendues sur les colonnes sont aussi valables en opérant sur les lignes.

Proposition 1.4.2: Le détermiant est une forme n-linéaire alternée. Ainsi :

1. Il y a n-linéarité du déterminant par rapport aux vecteurs colonnes (ou lignes).
2. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.
$$\alpha \det(\cdot) = \det(\alpha C_i).$$
3. Si on échange deux colonnes, le déterminant est multiplié par −1.
4. $\det A \neq 0 \Leftrightarrow$ les n vetceurs colonnse forment une famille libre

1.5. Déterminant d'une matrice triangulaire par blocs.

Théorème 1.5.1: Soient $A, B \in \mathrm{Mat}(\mathbb{R})$ des matrices carrées, M une matrice carrée de la forme $M = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$. Alors :

$$\det M = \det A \det B.$$

Démonstration: Soient B, C des matrices de dimension n,
$\varphi_{B,C} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}; (c_1, -, c_n)_{\text{vecteurs colonnes}} \mapsto \begin{vmatrix} A & C \\ 0 & B \end{vmatrix}$. $\Phi_{B,C}$ est n-linéaire alternée donc

$$\forall A \in \mathrm{Mat}(\mathbb{R}), \begin{vmatrix} A & C \\ 0 & B \end{vmatrix} = \varphi_{B,C}(c_1, -, c_n) = \lambda_{B,C} \det A.$$

En prenant $A = I_n$, $\det A = 1c_1$ ... incompréhensible...
En faisant des opérations sur les colonnes, $\lambda_B, C = \begin{vmatrix} I_n & 0 \\ 0 & B \end{vmatrix}$ □

Théorème 1.5.2 (même généralisé): Soit M une matrice carrée de la forme $M = \begin{pmatrix} A_1 & * & -- & -- \\ 0 & A_2 & * & -- \\ \\ 0 & -- & 0 & A_k \end{pmatrix}$ avec $(A_i)_{i \in \{1, -, k\}} \in \mathrm{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R})$. Alors

$$\det M = \det A_1 \cdot \ldots \cdot \det A_k$$

Remarque (Cas particulier): Déterminant d'une matrice triangulaire (ou diagonale):

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & -- & -- \\ 0 & a_{22} & 0 & -- \\ \\ 0 & -- & 0 & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} \cdot \ldots \cdot a_{nn}$$

1.6. Développements d'un déterminant par rapport à une colonne.

Définition 1.6.1 (Détermineur): Soit $A = \left(a_{ij}\right)_{i,j \in \{1, -, n\}} \in \mathrm{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R})$. On appelle **détermineur** de A, relatif à a_{ij}, le determinant d'ordre $n - 1$ obtenu en rayant dans A la i-ème ligne et la i-ème colonne. On le note Δ_{ij}.

Définition 1.6.2 (Cofacteur): Soit $A = \left(a_{ij}\right)_{i,j \in \{1, -, n\}} \in \mathrm{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R})$. On appelle **cofacteur** de A relatif à a_{ij},

$$c(ij) = (-1)^{j+1} \Delta_{ij}.$$

Définition 1.6.3 (Comatrice): Soit $A = \left(a_{ij}\right)_{i,j \in \{1, -, n\}} \in \mathrm{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R})$. On appelle **comatrice** de A la matrice des cofacteurs $\left(c_{ij}\right)_{i,j \in \{1, -, n\}}$. On la note $\mathrm{com}\ A$.

Théorème 1.6.1: Développement par rapport à la j-ième colonne.
Soit $A = \left(a_{ij}\right)_{i,j \in \{1, -, n\}} \in \mathrm{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R})$.

$$\det A = a_{1j} c_{1j} + \ldots + a_{nj} c_{nj}$$

Remarque: On a toujours intéret à développer suivant la ligne ou la colonne avec le plus de 0.

Exemple: Développement d'un déterminant par rapport à la deuxième colonne.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & -2 & 1 \\ -3 & -3 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 5 & -3 \end{vmatrix} = -0 * \begin{vmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -3 & 3 & 2 \\ 1 & 5 & -3 \end{vmatrix} + 4 * \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -3 & 3 & 2 \\ 1 & 5 & -3 \end{vmatrix} - (-3) * \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & 5 & -3 \end{vmatrix} + 0 * \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \\ -3 & 3 & 2 \end{vmatrix}.$$

Cette méthode reste très longue, on privilégira donc de faire d'abord en amont un pivot de Gauss sur la matrice afin d'intégrer le plus de 0 à la matrice: $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & -2 & 1 \\ -3 & -3 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 5 & -3 \end{vmatrix} \underset{C_3 - C_1}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & -4 & 1 \\ -3 & -3 & 6 & 2 \\ 1 & 0 & 4 & 9 \end{vmatrix}$ D'où

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & -2 & 1 \\ -3 & -3 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 5 & -3 \end{vmatrix} = 1 * \begin{vmatrix} 4 & -4 & 1 \\ -3 & 6 & 2 \\ 0 & 4 & -3 \end{vmatrix} \underset{C_2+c_1}{=} \begin{vmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -3 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & -3 \end{vmatrix} \underset{C_1-4C_3}{=} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -11 & 3 & 2 \\ 12 & 4 & -3 \end{vmatrix} \underset{\text{par dvlp}}{=} 1 \begin{vmatrix} -11 & 3 \\ 12 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= -11 * 4 - 3 * 12 = -44 - 36 = -80.$$

Corollaire 1.6.1: Soit $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$. On a :

$$A^t(\mathrm{com}A) = \det(A)I_n \text{ et } {}^t(\mathrm{com}\ A)A = \det(A)I_n$$

En particulier, si A est inversible,

$$A^{-1} = \frac{{}^t(\mathrm{com}A)}{\det}A$$