Fonction de deux variables

Table des matières

1. Introduction.

1.1. Rappels.

Définition 1.1.1 (fonction d'une variable): Soit A, B deux ensembles. Une application f est la donnée d'un ensemble de départ A et d'un ensemble d'arrivée B et qui, à chaque $x \in A$ associe un unique $f(x) \in B$. On la note $f : A \to \mathbb{B}; x \mapsto f(x)$.

Définition 1.1.2 (Graphe d'une application): Soit $f : A \to B$ une application. On appelle graphe de f l'ensemble suivant $\text{Graphe}(f) = \{(x, f(x)) \mid x \in A\} \subset A \times B$

1.2. Premières définitions.

Définition 1.2.1 (fonction de deux variables): Soit A un sous ensemble de $\mathbb{R}^2$ et B un ensemble. Une application f de deux variables de A dans B est la donnée d'un ensemble de départ A et d'un ensemble d'arrivée B et qui, à chaque $(x, y) \in A$ associe un unique $f(x, y) \in B$. On la note $f : A \to B; x, y \mapsto f(x, y)$.

Définition 1.2.2 (Graphe d'une application): Soit $f : A \to B$ une application de deux variables. On appelle graphe de f l'ensemble suivant $\text{Graphe}(f) = \{(x, y, f(x, y)) \in \mathbb{R}^3 \mid x, y \in \mathbb{R}\}$

Exemple: L'aire d'un rectangle : $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}; (x, y) \mapsto xy$.
Soit a un réel fixé et $x, y \in \mathbb{R}$. l'équation associée est $a = xy \Leftrightarrow y = \frac{a}{x}$. On cherche le rectangle d'aire a de côté x, y.

2. La topologie de la norme de $\mathbb{R}^2$.

2.1. Norme euclidienne.

Définition 2.1.1 (Norme Euclidienne): Soit $v = \binom{a}{b} \in \mathbb{R}^2$. La norme Euclidienne est la longueur du vecteur v. Elle est donnée par $\|v\| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Proposition 2.1.1: Soit $v \in \mathbb{R}^2$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors $\|\cdot\|$ vérifie:
1. $\|v\| \geq 0$ et $\|v\| = 0 \Leftrightarrow v = \binom{0}{0}$.
2. $\|\lambda v\| = |\lambda|\|v\|$ (homogénéïté).
3. $\|v + u\| \leq \|v\| + \|u\|$ (inégalité triangulaire).

i.e la norme Euclidienne est une norme.

Démonstration:
1. Pour tout $x \in \mathbb{R}^2$, $x^2 \geq 0$ d'où $\forall u \in \mathbb{R}^2, \|u\| \geq 0$.
2. Soit $u = \binom{a}{b} \in \mathbb{R}^2, \lambda \in \mathbb{R}$.
   On a $\|\lambda u\| = \|(\lambda a, \lambda b)\| = \sqrt{(\lambda a)^2 + (\lambda b)^2} = \sqrt{\lambda^2(a^2 + b^2)} = |\lambda|\|u\|$.
3.

□

Corollaire 2.1.1: Soit $v, u \in \mathbb{R}^2$. On a :

$$\|v - u\| \geq |\|v\| - \|u\||.$$

Démonstration: On a $\forall u, v \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned} v &= (v - u) + u \\ \|v\| &= \|v - u + u\| \leq \|v - u\| + \|u\| \\ \Leftrightarrow \|v - u\| &\geq \|v\| - \|u\| \end{aligned}$$

De même avec u, on obtient par ailleurs $\|v - u\| \geq \|u\| - \|v\|$ d'où $\|v - u\| \geq |\|v\| - \|u\||$. □

Définition 2.1.2: Soient $u = (a, b), v = (x, y) \in \mathbb{R}^2$. On définit le produit scalaire par

$$u \cdot v = ax + by.$$

Proposition 2.1.2: Soient $u, v, w \in \mathbb{R}^2, \lambda \in \mathbb{R}$.
1. $u \cdot v$=$v \cdot u$ (symétrie).
2. $(w + v) \cdot u = w \cdot u + v \cdot u$ (bilinéarité).
3. $(v \cdot u)^2 \leq \|u\|^2\|v\|^2$ (inégalité de Cauchy-Schwartz).

Démonstration: Soient $u, v \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}$. $\|v + tu\|^2 = (v + tu) \cdot (v + tu) = v \cdot v + 2t(v \cdot u) + (u \cdot u)t^2$.
On pose $f(t) = \|v\|^2 + 2(v \cdot u)t + \|u\|^2 t^2$.On peut supposer que $u \neq 0$ sinon l'égalité est évidente. □

2.2. Disques ouverts/fermés et sous-ensembles ouverts/fermés.

Définition 2.2.1 (disque): Soient $u \in \mathbb{R}^2$,$R > 0$. On appelle **disque ouvert** de rayon R centré en u l'ensemble:

$$B(u, r) \coloneqq \{v \in \mathbb{R} \mid \|v - u\| < R\}.$$

On appelle **disque fermé** de rayon R centré en u l'ensemble:

$$\overline{B}(u, R) \coloneqq \{v \in \mathbb{R}^2 \mid \|v - u\| \leq R\}.$$

Définition 2.2.2 (ouvert): Soit U un sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$. On dit que U est un **ouvert** de $\mathbb{R}^2$ si

$$\forall u \in U, \exists r_u > 0, B(u, r_u) \subset U.$$

Remarque: L'ensemble de ces sous-ensembles sont notés O_{norm}.

Proposition 2.2.1:
1. Les sous-ensembles $\emptyset$ et $\mathbb{R}^2$ sont des ouverts.
2. Soit $\{H_i\}_{i \in I} \subset O_{\text{norm}}$. Alors leur réunion est un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R}^2$ i.e,
$$\forall \{H_i\}_{i \in I} \subset O_{\text{norm}}, \bigcup_{i \in I} H_i \in O_{\text{norm}}.$$
3. Soit $\{H_i\}_{i \in \{1, -, n\}} \subset O_{\text{norm}}$ alors leur intersection est un sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$. i.e,
$$\forall \{H_i\}_{i \in \{1, -, n\}} \subset O_{\text{norm}}, \bigcap_{i \in \{1, -, n\}} H_i \in O_{\text{nom}}.$$

Démonstration:
1.
2. On peut supposer la réunion non-vide. Soit $v \in V = \bigcup_{i \in I} H_i$, alors $\exists i_0, v \in H_{i_0}$. D'où
$$\exists v_{i_0}, B\left(v, v_{i_0}\right) \subset H_{i_0} \subset \bigcup_{i \in I} H_i$$

□

Définition 2.2.3: La collection O_{norm} s'appelle la topologie de $\mathbb{R}^2$ associée avec la norme euclidienne. (ou la topologie de la norme de $\mathbb{R}^2$).

Définition 2.2.4 (voisinage): Soit $u \in \mathbb{R}^2$. On appelle **voisinage ouvert** de u tout sous-ensemble ouvert U de $\mathbb{R}^2$ qui contient u.

Définition 2.2.5 (fermé): Soit $F \subset \mathbb{R}^2$. On dit que F est un fermé si le complémentaire de F dans $\mathbb{R}^2$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$, i.e, F est un fermé $\Leftrightarrow F^c \in O_{\text{norm}}$

Remarque: L'ensemble de ces sous-ensembles sont notés F_{norm}.

Proposition 2.2.2:
1. Les sous-ensembles $\emptyset$ et $\mathbb{R}^2$ sont des fermés.
2. Soit $\{H_i\}_{i\in\{1,-,n\}} \subset F_{\text{norm}}$. Alors leur réunion est un sous-ensemble fermé de $\mathbb{R}^2$ i.e,

$$\forall \{H_i\}_{i\in I} \subset F_{\text{norm}}, \bigcup_{i\in I} H_i \in F_{\text{norm}}.$$

3. Soit $\{H_i\}_{i\in I} \subset F_{\text{norm}}$ alors leur intersection est un sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$. i.e,

$$\forall \{H_i\}_{i\in\{1,-,n\}} \subset F_{\text{norm}}, \bigcap_{i\in\{1,-,n\}} H_i \in F_{\text{nom}}.$$

3. Limites de suites.

Définition 3.1 (limite): Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de points de $\mathbb{R}^2$. On dit que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une **limite** si

$$\exists L \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow \|x_n - L\| \leq \varepsilon.$$

Dans ce cas on dit que la suite converge vers L. Sinon, on dit qu'elle diverge.

Proposition 3.1: Soit $x_n = \binom{a_n}{b_n}, n \in \mathbb{N}$ une suite dans $\mathbb{R}^2$. Alors $L = \binom{a}{b}$ est la limite de x_n si et seulement si on a

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = a \text{ et } \lim_{n\to+\infty} b_n = b.$$

4. Points limites et adhérence d'un sous-ensemble.

Définition 4.1 (point isolé): Soit $A \subset \mathbb{R}^2$ un ensemble, $a \in A$. On dit que a est un point isolé s'il existe un voisinage ouvert V_a dans $\mathbb{R}^2$ tel que $V_a \cap A = \{a\}$.

Définition 4.2 (point intérieur): Soit $A \subset \mathbb{R}^2$ un ensemble, $a \in A$. On dit que a est un point intérieur s'il existe un voisinage ouvert de V_a dans $\mathbb{R}^2$ tel que $V_a \subset A$.
Le sous-ensemble des points intérieurs de A est noté $\text{int}(A)$ et on l'appelle l'intérieur de A.

$$\text{int}(A) := \{u \in A \mid \exists r > 0, B(u,r) \subset A\}.$$

Proposition 4.1: Soit $A \subset \mathbb{R}^2$ un ensemble. Alors son intérieur est le plus grand sous-ensemble ouvert contenu dans A.

Remarque: L'intérieur d'un ensemble A est une approximation de A par un sous-ensemble ouvert.

Définition 4.3 (point limite): Soit $A \subset \mathbb{R}^2$ un ensemble, $x \in \mathbb{R}^2$. On dit que x est un point limite de A s'il existe une suite inifie $\{a_n\}_n \in \mathbb{N}$ de points deux-à-deux distincts dans A telle que $a_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x$.

Définition 4.4 (Adhérence): L'ensemble des points limites s'appelle l'adhérence de A et on la designe par $\overline{A}$

$$\overline{A} := \{u \in \mathbb{R}^2 \mid \forall r > 0, B(u,r) \cap A \neq \emptyset\}.$$

Proposition 4.2: Soit $A \subset \mathbb{R}^2$ un ensemble. Alors son adhérence est le plus petit sous-ensemble fermé qui contient A.

Remarque: Tout ouvert $A \subset \mathbb{R}^2$ est encadré de la manière suivante: $\mathrm{Int}(A) \subset A \subset \overline{A}$.

5. Limites de fonctions.

Définition 5.1: Soit U un ouvert, $f : U \to \mathbb{R}$, $a \in \overline{U}$. On dit que l est la limite de f en a si pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset U$ convergente vers a, $f(u_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l$

Exemple:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x+2y)^3}{x^2+y^2}.$$

On étudie la fonction $f : U = \{x^2 + y^2 \neq 0\} = \mathbb{R}^2 \setminus 0 \to \mathbb{R}^2$ On a $f(x,0) = \frac{x^3}{x^2} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$ et $f(0,y) = \frac{(2y)^3}{y^2} \underset{y\to 0}{\longrightarrow} 0$. Montrons que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x) = 0$.
Passons aux coordonnées polaires. On note $x = r\cos(\theta), y = r\sin(\theta)$. Ainsi,

$$f(x,y) = r^3 \frac{(\cos(\theta) + 2\sin(\theta))^3}{r^2} = r(\cos(\theta) + 2\sin(\theta))^3$$

De plus, $|\cos(\theta) + 2\sin(\theta)|^3 \leq |\cos\theta| + 2|\sin\theta| \leq 3^3 = 27$