

Calcul intégral et applications

Table des matières

1. Ensembles et applications.	1
2. Espaces mesurables.	1
2.1. Tribus.	1
2.2. Rappels sur la topologie.	2
2.3. Applications mesurables.	3
3. Fonctions indicatrices.	6
4. Mesure.	9
4.1. Mesure de Lebesgue.	10
4.2. Ensemble négligeable.	11
5. Intégrale de Lebesgue.	11
5.1. Intégrale des fonctions étagées positives.	11
5.2. Intégrales de fonctions mesurables positives.	13
5.3. Mesure à densité.	16
5.4. Intégrales de fonctions mesurables quelconques.	16

Chapitre 1: Espaces et applications mesurables.

1. Ensembles et applications.

Proposition 1.1. Soit E un ensemble et $(A_i)_{i \in I}$ une collection quelconque de sous-ensembles de E .

- (1) $E \setminus \bigcap_{i \in I} A_i = \bigcup_{i \in I} E \setminus A_i$.
- (2) $E \setminus \bigcup_{i \in I} A_i = \bigcap_{i \in I} E \setminus A_i$

Définition 1.2. Soit E et F deux ensembles quelconques et soit $f : E \rightarrow F$ une application quelconque. L'image par f d'un sous-ensemble $A \subset E$ est le sous ensemble de F noté $f(A)$ défini par : $f(A) = \{y \in F, \exists x \in A, y = f(x)\} = \{f(x), x \in A\}$.

L'image réciproque d'un sous-ensemble $B \subset F$ est le sous-ensemble noté $f^{-1}(B)$ de E et défini par $f^{-1}(B) = \{x \in E, f(x) \in B\}$.

2. Espaces mesurables.

2.1. Tribus.

Définition 2.1 (Tribu). Soit E un ensemble quelconque, $\mathcal{P}(E)$ désigne l'ensemble des parties de E . On appelle *tribu* sur E (ou σ -algèbre) une famille de parties de E , $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(E)$ telle que :

- (1) $\emptyset \in \mathcal{A}$,
- (2) Si $A \in \mathcal{A}$ alors $A^c \in \mathcal{A}$.
- (3) Si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de \mathcal{A} , alors $\bigcup_{n \geq 1} A_n \in \mathcal{A}$.

Remarques 2.2.

- (1) Pour toute famille $(B_i)_{i \in I}$ de $\mathcal{P}(E)$,

$$\left(\bigcup_{i \in I} B_i \right)^c = \bigcap_{i \in I} (B_i)^c \text{ et } \left(\bigcap_{i \in I} B_i \right)^c = \bigcup_{i \in I} (B_i)^c$$

- (2) On peut remplacer le point (3) de la définition par : Si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$, est une suite de \mathcal{A} alors $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$.
- (3) De même, par le point (2), on peut remplacer le premier point par $E \in \mathcal{A}$.

Exemples 2.3.

1. $\mathcal{P}(E)$ est une tribu sur E . C'est la tribu *fine* sur E .
2. $\{\emptyset, E\}$ est une tribu sur E . C'est la tribu *grossière* sur E .
3. Si $A \subset E$ est un sous-ensemble de E , $\{\emptyset, A, A^c, E\}$ est une tribu sur E .
4. $\{A \in \mathcal{P}(E) \mid A \text{ ou } A^c \text{ est au plus dénombrable}\}$ est une tribu sur E .

Définition 2.4 (Espace mesurable). Soit E un ensemble et \mathcal{A} une tribu sur E . Le couple (E, \mathcal{A}) est appelé un *espace mesurable*.

Définition 2.5 (Ensemble mesurable). Soit E un ensemble et \mathcal{A} une tribu sur E . Les éléments d'une tribu \mathcal{A} sont appelés les *ensembles mesurables* ou les parties mesurables de (E, \mathcal{A}) .

Proposition 2.6. Une intersection quelconque de tribus sur E est une tribu sur E .

Démonstration. Soit $(\mathcal{A}_i)_{i \in I}$ une famille de tribus sur E . Posons $\mathcal{A} = \bigcap_{i \in I} \mathcal{A}_i$.

- (1) $\emptyset \in \mathcal{A}$ car $\emptyset \in (\mathcal{A}_i)_{i \in I}$.
- (2) Soit $A \in \mathcal{A}$ alors $A \in (\mathcal{A}_i)_{i \in I}$ donc $A^c \in (\mathcal{A}_i)_{i \in I}$ car les \mathcal{A}_i sont des tribus donc $A^c \in \bigcap_{i \in I} \mathcal{A}_i$.
- (3) Soit $(A_n)_{n \geq 1}$ une suite d'éléments de \mathcal{A} . Alors $(A_n)_{n \geq 1} \in (\mathcal{A}_i)_{i \in I}$ donc $\bigcup_{n \geq 1} A_n \in \mathcal{A}_{i \in I}$. Ainsi, $\bigcup_{n \geq 1} A_n \in \bigcap_{i \in I} \mathcal{A}_i$.

□

Corollaire 2.7. Soit $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(E)$ une famille de parties de E . L'intersection de toutes les tribus sur E qui contiennent \mathcal{C} est une tribu sur E .

Démonstration. Application directe de la proposition précédente.

□

Définition 2.8 (Engendrée). On appelle tribu *engendrée* par \mathcal{C} la tribu notée par

$$\sigma(\mathcal{C}) := \{\cap \mathcal{A} \mid \mathcal{A} \text{ soit tribu sur } E \text{ et } \mathcal{C} \subset \mathcal{A}\}.$$

Remarque 2.9. $\sigma(\mathcal{C})$ est la plus petite des tribus sur E qui contiennent \mathcal{C} , i.e si \mathcal{A} est une tribu qui contient \mathcal{C} alors $\sigma(\mathcal{C}) \subset \mathcal{A}$

Exemples 2.10.

1. Soit $A \subset E$. Alors $(\sigma(\{A\})) = \{\emptyset, E, A, A^c\}$.
2. La tribu engendrée par les singletons sur E est égale à la tribu engendrée par les ensembles dénombrables et on a $\sigma(\{x\} \mid x \in E) = \sigma(A \in \mathcal{P}(E) \mid A \text{ est au plus dénombrable}) = \{A \in \mathcal{P}(E) \mid A \text{ ou } A^c \text{ est au plus dénombrable}\}$.

2.2. Rappels sur la topologie.

Définition 2.11 (Topologie). Soit E un ensemble quelconque, $\mathcal{O} \subset \mathcal{P}(E)$ une famille de parties de E . On dit que \mathcal{O} est une *topologie* sur E si elle vérifie :

- (1) $\emptyset \in \mathcal{O}$ et $E \in \mathcal{O}$.
- (2) Si $(A_i)_{i \in I}$ est une famille quelconque de \mathcal{O} alors $\bigcup_{i \in I} A_i \in \mathcal{O}$.
- (3) Pour toute famille finie d'éléments de \mathcal{O} , (A_1, \dots, A_n) , $\bigcap_{k \in \{1, \dots, n\}} A_k \in \mathcal{O}$.

Les éléments d'une topologie sont appelés les ouverts.

Proposition 2.12. Une intersection quelconque de topologies est une topologie.

Corollaire 2.13. Soit $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(E)$ une famille de parties de E . L'intersection de toutes les topologies sur E qui contiennent \mathcal{C} est une topologie sur E .

Définition 2.14. Un ensemble E muni d'une topologie \mathcal{O} est appelé un *espace topologique*.

Définition 2.15 (Tribu borélienne). Soit (E, \mathcal{O}) un espace topologique. On appelle *tribu borélienne* sur E notée $\mathcal{B}(E)$ la tribu engendrée par la topologie \mathcal{O} ; $\mathcal{B}(E) = \sigma(\mathcal{O})$.

Remarque 2.16. Dans la suite de ce cours nous ne considérons que les tribus boréliennes sur $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ ou des sous-ensembles de $\overline{\mathbb{R}}$ et sur \mathbb{R}^d pour $d \geq 1$.

Notation 2.17. On note $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ la tribu borélienne sur \mathbb{R} engendrée par la topologie usuelle (euclidienne).

Proposition 2.18. La tribu borélienne sur \mathbb{R} est définie par :

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma(\{]a, b[, a < b \in \mathbb{R}\}) = \sigma(\{]-\infty, a[, a \in \mathbb{R}\}) = \dots$$

Démonstration. Soit $\mathcal{O}(\mathbb{R})$ la topologie sur \mathbb{R} , i.e l'ensemble des ouverts de \mathbb{R} . Par définition, $\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma(\mathcal{O}(\mathbb{R}))$. On a $a, b \in \mathbb{Q}, a < b,]a, b[\in \mathcal{O}(\mathbb{R})$ et donc $\sigma(\{]a, b[, a, b \in \mathbb{Q}\}) \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma(\mathcal{O}(\mathbb{R}))$.

Réciproquement, soit $A \in \mathcal{O}(\mathbb{R})$. Rappelons que $A = \bigcup_{]a, b[\subset A, (a, b) \in \mathbb{Q}^2}]a, b[$.

Cela entraîne que $A \in \sigma(\{]a, b[, a, b \in \mathbb{Q}\})$. On conclut que

$$\mathcal{O}(\mathbb{R}) \subset \sigma(\{]a, b[, a, b \in \mathbb{Q}\}) \Rightarrow \sigma(\mathcal{O}(\mathbb{R})) \subset \sigma(\{]a, b[, a, b \in \mathbb{Q}\}).$$

Montrons que $\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma(\{]-\infty, a[, a \in \mathbb{Q}\})$. Soit $a \in \mathbb{Q}$ de telle sorte que

$$]-\infty, a[\subset \mathcal{O}(\mathbb{R}) \Rightarrow]-\infty, a[\in \sigma(\mathcal{O}(\mathbb{R})) = \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

On fait de même avec $]-\infty, a[, [a, +\infty[\dots$

□

Proposition 2.19. La tribu borélienne sur \mathbb{R}^d est engendrée par l'ensemble des pavés ouverts dont les extrémités sont rationnelles $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d) = \sigma(\{]a_1, b_1[\times \dots \times]a_d, b_d[, a_i, b_i \in \mathbb{Q}\})$.

Définition 2.20. On définit sur $\overline{\mathbb{R}}$ la tribu borélienne par

$$\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}) = \sigma(\{]-\infty, a[, a \in \mathbb{R}\} \cup \{]a, +\infty], a \in \mathbb{R}\})$$

Définition 2.21 (Tribu trace). Soit (E, \mathcal{A}) un espace mesurable, $B \subset E$ un sous-ensemble de E . On appelle *tribu trace* de \mathcal{A} sur B la tribu $\mathcal{A}_B := \{A \cap B, A \in \mathcal{A}\}$

Proposition 2.22. \mathcal{A}_B est une tribu sur B .

Démonstration. $\emptyset \in \mathcal{A}_B, C = A \cap B \in \mathcal{A}_B$. Alors $B \setminus C = B \cap E \setminus A$.

$b_i(c_n)$ est une suite de \mathcal{A}_B , alors $\bigcup C_n = \bigcup A_n \cap B = (\bigcup A_n) \cap B \in \mathcal{A}_B$.

□

Exemple 2.23. Par exemple $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ est la tribu trace de $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$ sur \mathbb{R} . Soit $\overline{\mathbb{R}}_+ = \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\} = [0, +\infty]$. On définit la tribu $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}_+)$ comme la tribu trace de $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$ sur $\overline{\mathbb{R}}_+$. On étendra la multiplication sur $\overline{\mathbb{R}}_+$ en posant : $\forall x \in]0, +\infty[, x \cdot +\infty = +\infty \cdot x = +\infty$ et $0 \cdot +\infty = +\infty \cdot 0 = 0$.

2.3. Applications mesurables.

Remarques 2.24.

(1) Soit $f : E \rightarrow F$ une application, $C \subset F$. L'image réciproque de C par f est défini par $f^{-1}(C) = \{x \in E, f(x) \in C\}$.

(2) $f^{-1}(\bigcup_{i \in I} C_i) = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(C_i)$ et $f^{-1}(\bigcap_{i \in I} C_i) = \bigcap_{i \in I} f^{-1}(C_i)$.

Définition 2.25 (Image réciproque). Soit E et F deux ensembles, $f : E \rightarrow F$ une application. L'image réciproque d'une famille de parties $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(F)$ par f comme : $f^{-1}(\mathcal{C}) = \{f^{-1}(c), c \in \mathcal{C}\}$.

Proposition 2.26. Soit $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(F)$ une tribu sur F . Alors $f^{-1}(\mathcal{B})$ est une tribu sur E .

Démonstration.

- (1) $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset \in f^{-1}(\mathcal{B})$.
- (2) Soit $B \in \mathcal{B}$. $f^{-1}(F \setminus B) = E \setminus f^{-1}(B)$. Or $f^{-1}(B) \in f^{-1}(\mathcal{B})$ et $f^{-1}(F \setminus B) \in f^{-1}(\mathcal{B})$ donc $E \setminus f^{-1}(B) \in f^{-1}(\mathcal{B})$.
- (3) Soit $(A_n)_{n \geq 1}$ une suite de $f^{-1}(\mathcal{B})$, $(B_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{B}$. Alors $f^{-1}(B_n) = A_n$ et $\cup f^{-1}(\cup B_n) \in f^{-1}(\mathcal{B})$.

□

Proposition 2.27. Soit $f : E \rightarrow F$ une application quelconque et $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(F)$ une famille de parties de F .

$$\sigma(f^{-1}(\mathcal{C})) = f^{-1}(\sigma(\mathcal{C})).$$

Définition 2.28 (Appl mesurable). Soit (E, \mathcal{A}) , (F, \mathcal{B}) deux espaces mesurables. Une application $f : E \rightarrow F$ est dite $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ -mesurable si $f^{-1}(\mathcal{B}) \subset \mathcal{A}$.

Remarque 2.29. Cela revient à dire $\forall B \in \mathcal{B}, f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$.

Notation 2.30.

- (1) $f : (E, \mathcal{A}) \rightarrow (F, \mathcal{B})$ signifie que f est $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ -mesurable.
- (2) S'il n'y a pas de confusion possible, on pourra dire que f est mesurable.

Exemple 2.31. Soit $f : (E, \mathcal{A}) \rightarrow [0, 1]$. Par défaut, $[0, 1]$ muni de la tribu borélienne sur $[0, 1]$. Une application mesurable à valeurs dans (une partie de) $\overline{\mathbb{R}}$ sera toujours appelée une fonction borélienne.

Proposition 2.32. Soit (E, \mathcal{A}) , (F, \mathcal{B}) des espaces mesurables. Soit $\mathcal{C} \subset \mathcal{B}$ tel que $\mathcal{B} = \sigma(\mathcal{C})$. Alors f est $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ -mesurable si et seulement si $f^{-1}(\mathcal{C}) \subset \mathcal{A}$.

Démonstration. Remarquons que $f^{-1}(\mathcal{C}) \subset f^{-1}(\mathcal{B})$ car $\mathcal{C} \subset \mathcal{B}$. Par conséquent si f est mesurable, $f^{-1}(\mathcal{C}) \subset \mathcal{A}$.

Supposons maintenant que $f^{-1}(\mathcal{C}) \subset \mathcal{A}$. Par la Proposition 2.27, $\sigma(f^{-1}(\mathcal{C})) = f^{-1}(\sigma(\mathcal{C})) = f^{-1}(\mathcal{B})$ donc $f^{-1}(\mathcal{B}) \subset \mathcal{A}$. Donc f est mesurable. □

Corollaire 2.33. Toute fonction monotone $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est mesurable (borélienne).

Démonstration. En effet, l'image réciproque d'un intervalle par une fonction monotone est un intervalle. Puisque $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ est engendré par les intervalles, ce corollaire se déduit de la proposition ci dessus avec $\mathcal{C} = \{\text{intervalles de } \mathbb{R}\}$, $\mathcal{A} = \mathcal{B} = \mathbb{R}$. □

Notation 2.34. Soit $f : (E, \mathcal{A}) \rightarrow \mathbb{R}$.

- (1) Pour tout $a \in \mathbb{R}$, on note $\{f < a\} := f^{-1}(]-\infty, a[) = \{x \in E, f(x) < a\}$;
- (2) Pour tout $a \in \mathbb{R}$, on note $\{f \leq a\} = f^{-1}(]-\infty, a])$
- (3) ...
- (4) Pour tout $a, b \in \mathbb{R}_+$, $a < b$ on note $\{a < f < b\} := f^{-1}(]a, b[)$
- (5) ...

Définition 2.35 (Continue). Soit $(E, \mathcal{O}_E), (F, \mathcal{O}_F)$ deux espaces topologiques, $f : E \rightarrow F$. On dit que f est *continue* si pour tout $\mathcal{B} \in \mathcal{O}_F$, $f^{-1}(\mathcal{B}) \in \mathcal{O}_E$.

Exercice 1. Vérifier que cette définition est bonne pour les $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Proposition 2.36. Soit $(E, \mathcal{O}_E), (F, \mathcal{O}_F)$ deux espaces topologiques munis respectivement de leur tribu borélienne $\mathcal{B}(F)$ et $\mathcal{B}(E)$. Alors toute application $f : E \rightarrow F$ continue est $(\mathcal{B}(E), \mathcal{B}(F))$ -mesurable.

Démonstration. Soit $f : E \rightarrow F$ continue. Alors, $f^{-1}(\mathcal{O}_F) \subset \mathcal{O}_E$ donc $\sigma(f^{-1}(\mathcal{O}_F)) \subset \sigma(\mathcal{O}_E)$. Soit $f^{-1}(\sigma(\mathcal{O}_F)) \subset \sigma(\mathcal{O}_E)$ donc $f^{-1}(\mathcal{B}(F)) \subset \mathcal{B}(E)$. Ainsi, f est bien $(\mathcal{B}(E), \mathcal{B}(F))$ -mesurable. \square

Remarque 2.37. On retiendra que si I et J sont deux intervalles de \mathbb{R} et $f : I \rightarrow J$ une application continue alors f est borélienne.

Proposition 2.38. Soit $(E, \mathcal{A}), (F, \mathcal{B}), (G, \mathcal{C})$ trois espaces topologiques mesurables, $f : E \rightarrow F, g : F \rightarrow G$ deux applications mesurables. Alors $g \circ f : E \rightarrow G$ est mesurable.

Démonstration. Remarquons d'abord que pour toute partie $C \subset G$, $(g \circ f)^{-1}(C) = (f^{-1} \circ g^{-1})(C)$. Ainsi, $(g \circ f)^{-1}(C) = f^{-1}(g^{-1}(C))$. De plus, $g^{-1}(C) \subset \mathcal{B}$ Ainsi, on a $f^{-1}(g^{-1}(C)) \subset f^{-1}(\mathcal{B}) \subset \mathcal{A}$, D'où la mesurabilité de $f \circ g$. \square

Exemples 2.39.

1. Si $f : (E, \mathcal{A}) \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction borélienne alors $|f| : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction borélienne.
2. Si $f : (E, \mathcal{A}) \rightarrow \mathbb{R} \setminus 0$ est borélienne, alors $\frac{1}{f}$ l'est aussi.

Proposition 2.40. Soit $f = (f_1, f_2) : (E, \mathcal{A}) \rightarrow \mathbb{R}^2$. f est $(\mathcal{A}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^2))$ -mesurable si et seulement si $f_1 : (E, \mathcal{A}) \rightarrow \mathbb{R}$ et $f_2 : (E, \mathcal{A}) \rightarrow \mathbb{R}$ sont mesurables.

Démonstration.

\Rightarrow Soit $(\pi_1, \pi_2) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ les projections canoniques $\pi_i(x_1, x_2) = x_i$. π_i sont continues donc $(\mathcal{B}(\mathbb{R}^2), \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ -mesurables. De plus, $f_1 = \pi_1 \circ f$ et $f_2 = \pi_2 \circ f$. Par conséquent, si f est mesurable alors f_1 et f_2 le sont.

\Leftarrow Supposons que f_1 et f_2 sont mesurables. Soit $]a_1, b_1[\times]a_2, b_2[$ une partie de \mathbb{R}^2 alors on vérifie que $f^{-1}(]a_1, b_1[\times]a_2, b_2[) = f_1^{-1}(]a_1, b_1[) \cap f_2^{-1}(]a_2, b_2[) \in \mathcal{A}$. On a montré que l'image réciproque de tout pavé de \mathbb{R}^2 par f est dans \mathcal{A} .

Comme $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ est engendré par les pavés, on a bien $f^{-1}(\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)) \subset \mathcal{A}$. \square

Proposition 2.41. Soit $f : (E, \mathcal{A}) \rightarrow \mathbb{R}, g : (E, \mathcal{A}) \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions boréliennes, $\lambda \in \mathbb{R}$
(1) $\lambda f + g$ est borélienne pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$,
(2) fg est borélienne.

Démonstration.

(1) Posons $\varphi(x) = (f(x), g(x)), \psi(s, t) = \lambda s + t$.

On écrit $\lambda f + g = \psi \circ \varphi$. Alors puisque f et g sont boréliennes, $\varphi(f, g)$ est borélienne par la Proposition 2.40. De plus, $\psi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue donc borélienne. Ainsi en appliquant Proposition 2.38, on obtient bien que $\lambda f + g$ est borélienne.

(1) On raisonne ici de la même manière en posant $\psi(s, t) = st$ une fonction continue.

\square

Remarque 2.42. Le point (1) se généralise à toute combinaison linéaire finie de fonctions boréliennes.

3. Fonctions indicatrices.

Proposition 3.1. Soit (E, \mathcal{A}) un espace mesurable et $A \subset E$. Alors l'application $\mathbb{1}_A : (E, \mathcal{A}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ est mesurable si et seulement si $A \in \mathcal{A}$.

Démonstration. $\mathbb{1}_A : E \rightarrow \{0, 1\} \subset \mathbb{R}$. Remarquons d'abord que si $B \subset \mathbb{R}$ alors

$$\mathbb{1}_A^{-1}(B) = \begin{cases} \emptyset & \text{si } 0 \notin B \wedge 1 \notin B \\ E & \text{si } 0 \in B \wedge 1 \in B \\ A & \text{si } 1 \in B \wedge 0 \notin B \\ A^c & \text{si } 1 \notin B \wedge 0 \in B \end{cases}.$$

Supposons $\mathbb{1}_A$ mesurable alors puisque $\{1\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $\mathbb{1}_A^{-1}(\{1\}) = A \in \mathcal{A}$.

Supposons que $A \in \mathcal{A}$ alors pour tout $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $\mathbb{1}_A^{-1} = \emptyset$ ou E ou A ou $A^c \in \mathcal{A}$ D'où $\mathbb{1}_A$ mesurable.

□

Définition 3.2 (Fonction étagée). Soit (E, \mathcal{A}) un espace mesurable, $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$, $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}$. On appelle *fonction étagée* toute application $f : (E, \mathcal{A}) \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$f = \sum_{k=1}^n \alpha_k \mathbb{1}_{A_k}.$$

Proposition 3.3. Les fonctions étagées sont mesurables.

Démonstration. Application des propositions précédentes

□

Proposition 3.4. Une fonction étagée est une fonction mesurable de (E, \mathcal{A}) dans \mathbb{R} qui prend un nombre fini de valeurs.

Démonstration. Soit $f : (E, \mathcal{A}) \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction borélienne qui prend les valeurs $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ deux à deux distinctes. Alors on peut écrire $f = \sum_{k=1}^n \alpha_k \mathbb{1}_{\{f=\alpha_k\}}$. Soit x tel que $f(x) = \alpha_i$ alors $\mathbb{1}_{\{f=\alpha_k\}}(x) = 1$ si $k = i$ et 0 si $k \neq i$. □

Remarque 3.5. L'écriture $f = \sum_{k=1}^n \alpha_k \mathbb{1}_{\{f=\alpha_k\}}$ est l'écriture canonique des fonctions étagées. En effet, une fonction étagée peut s'écrire sous la forme $\sum \alpha_i \mathbb{1}_{A_i}$ de plusieurs manières si les (A_i) ne constituent pas une partition de E .

Exemple 3.6. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} ; x \mapsto 2\mathbb{1}_{[0,1]} + \mathbb{1}_{]1,2]}$. Alors f admet aussi l'écriture $f(x) = 2\mathbb{1}_{[-1,1]} + \mathbb{1}_{]1,2]} - 2\mathbb{1}_{[-1,0]}$

Proposition 3.7. Une application $\delta : (E, \mathcal{A}) \rightarrow (\mathbb{C}, \mathcal{B}(\mathbb{C}))$ est mesurable si et seulement si les applications $\text{Re}(f) : (E, \mathcal{A}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ et $\text{Im}(f) : (E, \mathcal{A}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ sont mesurables.

Définition 3.8. Soit $f_n : E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, $n \geq 0$, une suite de fonctions. On définit les fonctions $\limsup f_n : E \rightarrow F$, et $\liminf f_n : E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ pour tout $x \in E$ par ;

$$\begin{aligned} (\limsup f_n)(x) &:= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sup(f_n(x)) \\ (\liminf f_n)(x) &:= \lim_{n \rightarrow +\infty} \inf(f_n(x)). \end{aligned}$$

Notation 3.9. On note parfois $\limsup = \overline{\lim}$ et $\liminf = \underline{\lim}$.

Proposition 3.10. Soit $(f_n)_{n \geq 0}$ une suite de fonctions mesurables (E, \mathcal{A}) dans $(\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$.
(1) Les fonctions $x \mapsto (\sup f_n)(x)$ et $x \mapsto (\inf f_n)(x)$ sont mesurables de (E, \mathcal{A}) dans $(\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$.
(2) Les fonctions $x \mapsto (\limsup f_n)(x)$ et $x \mapsto (\liminf f_n)(x)$ sont mesurables de (E, \mathcal{A}) dans $(\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$.
(3) Si $(f_n)_{n \geq 0}$ converge simplement vers f , alors f est mesurable.

Proposition 3.11. Soit $f : (E, \mathcal{A}) \rightarrow (\mathbb{R}_+, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+))$ une fonction mesurable positive. Il existe une suite de fonctions croissante $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions étagées positives telles que pour tout $x \in E$, $f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x)$ et si f est bornée alors $(f_n)_n$ converge uniformément vers f .

Démonstration. On pose

$$(f_n)_n := \sum_{k=0}^{n2^n-1} \frac{k}{2^n} \mathbb{1}_{\{\frac{k}{2^n} \leq f < \frac{k+1}{2^n}\}} + n \mathbb{1}_{\{f \geq n\}}$$

et on vérifie qu'elle vérifie bien la convergence simple vers f et qu'elle est croissante.

- Soit $x \in E$.
 - Si $f(x) = +\infty$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n(x) = n$ donc $f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x)$.
 - si $f(x) < +\infty$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, tel que $n > f(x)$, il existe $k \leq n2^n - 1$ tq $k \leq 2^n f(x) < k + 1$ donc $|f(x) - f_n(x)| = \left| f(x) - \frac{k}{2^n} \right| \leq \frac{1}{2^n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$
- Vérifions que (f_n) est croissante. Soit $x \in E$
 - si $f(x) \geq n + 1$, $f_n(x) = n < n + 1 = f_{n+1}(x)$.
 - Si $f(x) < n$, on note k l'entier tq $k \leq 2^n f(x) < k + 1$. Ainsi, $f_n(x) = \frac{k}{2^n}$. Comme $f(x) \geq \frac{2k}{2^{n+1}}$, on en déduit que $f_{n+1}(x) \geq \frac{2k}{2^{n+1}} = f_n(x)$.
 - si $n \leq f(x) < n + 1$, $f_n(x) = n$ et il existe $k \geq n2^{n+1}$ tel que $\frac{k}{2^{n+1}} \leq f(x) \leq \frac{k+1}{2^{n+1}}$ donc $f_{n+1}(x) \geq n = f_n(x)$.

□

Proposition 3.12. Soit $f : (E, \mathcal{A}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ une fonction mesurable quelconque. Il existe une suite de fonctions étagées $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions étagées telles que pour tout $x \in E$, $f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x)$ et si f est bornée alors $(f_n)_n$ converge uniformément vers f .

Démonstration. Il suffit d'appliquer Proposition 3.11 à f en la décomposant par $f = f^+ - |f^-|$. □

Chapitre 2: Mesures intégrables.

4. Mesure.

Définition 4.1 (Mesure). Soit (E, \mathcal{A}) un espace mesurable. On appelle *mesure* sur (E, \mathcal{A}) une application $\mu : \mathcal{A} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ telle que :

- (1) $\mu(\emptyset) = 0$.
- (2) μ est σ -additive, i.e pour toute suite $(A_n)_n$ d'éléments de \mathcal{A} deux à deux distincts, alors :

$$\mu\left(\bigcup_{n \geq 0} A_n\right) = \sum_{n=0} \mu(A_n).$$

Définition 4.2 (Espace mesuré). Soit (E, \mathcal{A}) un espace mesurable et $\mu : \mathcal{A} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ une mesure. On appelle le triplet (E, \mathcal{A}, μ) un espace mesuré, et pour tout $A \in \mathcal{A}$, $\mu(A)$ est la mesure de A .

Exemples 4.3.

1. $\mu : \mathcal{A} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$; $A \mapsto 0$ est appelé la mesure *nulle*.
2. $\mu : \mathcal{A} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$; $A \mapsto \begin{cases} \text{Card}(A) & \text{si } A \text{ est fini} \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$ est appelé mesure de *comptage*.
3. $\mu : \mathcal{A} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$; $A \mapsto \begin{cases} +\infty & \text{si } A \neq \emptyset \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ $A \neq \emptyset \in \mathcal{A}, \mu(A) = +\infty$ est appelée mesure *infinie* ou *grossière*.
4. $\delta_x := \mathbb{1}_A : \mathcal{A} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$; $x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases}$ est appelé mesure de *Dirac* en $x \in E$

Proposition 4.4. Soit (E, \mathcal{A}, μ) un espace mesuré. Pour tout $A, B \in \mathcal{A}$, on a les propriétés suivantes ;

- (1) $\mu(A) = \mu(A \setminus B) + \mu(A \cap B)$,
- (2) $\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B)$,
- (3) $\mu(A \cup B) \leq \mu(A) + \mu(B)$,
- (4) Si $A \subset B$, $\mu(A) \leq \mu(B)$.

Démonstration.

- (1) On a $A \setminus B = \{A \cap (E \setminus B)\}$ et $A \cap B$ disjoints donc $A = (A \setminus B) \cup (A \cap B)$. Or d'après la σ -additivité, pour tout C et D disjoints alors $\mu(C \cup D) = \mu(C) + \mu(D)$. D'où $\mu(A) = \mu(A \setminus B) + \mu(A \cap B)$.
- (2) On remarque que $A \setminus B$, $A \cap B$ et $B \setminus A$ sont deux à deux disjoints et $A \cup B = (A \setminus B) \cup (A \cap B) \cup (B \setminus A)$, donc

$$\begin{aligned} \mu(A \cup B) &= \mu(A \setminus B) + \mu(A \cap B) + \mu(B \setminus A) \\ &\Rightarrow \mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = \mu(A \setminus B) + \mu(A \cap B) + \mu(B \setminus A) + \mu(A \cap B) \\ &\Rightarrow \mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B). \end{aligned}$$

- (3) Si $\mu(A) + \mu(B) = +\infty$, l'inégalité est évidente. Sinon, par (2),

$$\begin{aligned} \mu(A) + \mu(B) &= \mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) \\ &\Rightarrow \mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B) \leq \mu(A) + \mu(B) \end{aligned}$$

- (4) On a $\mu(B) = \mu(B \setminus A) + \mu(A \cap B) = \mu(B \setminus A) + \mu(A) \geq \mu(A)$ car $\mu(A \setminus B) = \mu(\emptyset) = 0$.

□

Définition 4.5 (Finie). Soit (E, \mathcal{A}) un espace mesurable, $\mu : \mathcal{A} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ une mesure sur (E, \mathcal{A}) :

- On dit qu'une mesure μ est *finie* si $\mu(E) < +\infty$.
- On dit que $\mu(E)$ est la *masse* de la mesure μ .

Définition 4.6 (Probabilité). Soit (E, \mathcal{A}) un espace mesurable, $\mu : \mathcal{A} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ une mesure sur (E, \mathcal{A}) . Si la masse de μ vaut 1, On dit que μ est une *probabilité*.

Définition 4.7 (Finie). On dit que μ est σ -finie s'il existe une suite (A_n) de \mathcal{A} telle que $E = \bigcup_{n \geq 0} A_n$ et pour tout $n \geq 0$, $\mu(A_n) < +\infty$.

Remarque 4.8. On dit qu'une suite de parties de E , $(A_n)_n$ est croissante si $\forall n \geq 0, A_n \subset A_{n+1}$.

Proposition 4.9. Soit (E, \mathcal{A}, μ) un espace mesuré et $(A_n)_{n \geq 0}$ une suite d'éléments de \mathcal{A} .

- (1) Si la suite $(A_n)_{n \geq 0}$ est croissante alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mu(A_n) = \mu\left(\bigcup_{n \geq 0} A_n\right)$
- (2) Si la suite $(A_n)_{n \geq 0}$ est décroissante et si il existe $n_0 \geq 0$ tel que $\mu_{n_0} < +\infty$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mu(A_n) = \mu\left(\bigcap_{n \geq 0} A_n\right)$.

Démonstration.

- (1) S'il existe n_0 tel que $\mu(A_{n_0}) = +\infty$ alors puisque $A_{n_0} \subset \bigcup_{n \geq 0} A_n$ on a $\mu(A_{n_0}) \leq \mu(\bigcup_{n \geq 0} A_n)$ et l'égalité est évidente. $\mu(A_{n_0}) = +\infty \leq \mu(A_n)$. Sinon, on pose $(B_n)_n := \begin{cases} A_0 & \text{si } n=0 \\ A_n \setminus A_{n-1} & \text{si } n > 0 \end{cases}$. Les B_n sont alors deux à deux disjoints et $\bigcup_{n \geq 0} A_n = \bigcup_{n \geq 0} B_n$. Ainsi,

$$\begin{aligned} \mu\left(\bigcup_{n \geq 0} A_n\right) &= \mu\left(\bigcup_{n \geq 0} B_n\right) = \sum_{n \geq 0} \mu(B_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sum_{k=1}^n \mu(A_k) - \mu(A_{k-1}) \right) + \mu(A_0) \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \mu(A_n). \end{aligned}$$

(2)

□

Proposition 4.10. Soit (E, \mathcal{A}, μ) un espace mesuré, (F, \mathcal{B}) un espace mesurable, et $f : (E, \mathcal{A}) \rightarrow (F, \mathcal{B})$ une application mesurable. Alors l'application

$$\mu_f : (\mathcal{B}) \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+ ; B \mapsto \mu(f^{-1}(B))$$

est une mesure sur (F, \mathcal{B}) . On l'appelle la *mesure image*.

Démonstration.

- $\mu_f(\emptyset) = \mu(f^{-1}(\emptyset)) = \mu(\emptyset) = 0$.
- Soit $(B_n)_{n \geq 0}$ une suite d'éléments de \mathcal{B} deux à deux distincts.

$$\mu_f\left(\bigcup_{n \geq 0} B_n\right) = \mu\left(f^{-1}\left(\bigcup_{n \geq 0} B_n\right)\right) = \mu\left(\bigcup_{n \geq 0} f^{-1}(B_n)\right)$$

Or les $f^{-1}(B_n)$ sont 2 à 2 disjoints. Donc d'après la σ -additivité de μ , on a $\mu_f\left(\bigcup_{n \geq 0} B_n\right) = \sum \mu(f^{-1}B_n) = \sum \mu_f(B_n)$.

Ainsi, μ_f est une mesure sur (F, \mathcal{B}) .

□

4.1. Mesure de Lebesgue.

Théorème 4.11 (Unicité des mesures). Soit μ, ν deux mesures sur un espace mesurable (E, \mathcal{A}) .

Si :

- μ et ν coïncident sur une partie $\mathcal{C} \subset \mathcal{A}$ qui engendre \mathcal{A} ,
- \mathcal{C} est stable par intersections finies,
- $E \in \mathcal{C}$,
- μ ou ν est σ -finie,

alors $\mu = \nu$.

Démonstration. Admis. □

Corollaire 4.12. Il existe sur $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ une unique mesure λ telle que pour tout pavé $\Pi_{i=1}^d]a_i, b_i[$,

$$\lambda(\Pi_{i=1}^d]a_i, b_i[) = \Pi_{i=1}^d (b_i - a_i).$$

Cette mesure est appelée la *mesure de Lebesgue* sur \mathbb{R}^d .

Démonstration. $\mathcal{C} = \{\Pi_{i=1}^d]a_i, b_i[, a_i < b_i \in \mathbb{R}\}$. Alors $\sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ □

Proposition 4.13. Soit μ une mesure sur $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ vérifiant :

- pour tout $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, $\mu(x + B) = \mu(B)$,
- $\mu([0, 1]^d) = 1$,

alors μ est la mesure de Lebesgue, $\mu = \lambda d$.

Démonstration. Admis □

4.2. Ensemble négligeable.

Définition 4.14 (Négligeable). Soit (E, \mathcal{A}, μ) un espace mesuré, $M \subset E$. On dit que M est *négligeable* s'il existe $A \in \mathcal{A}$ tel que $M \subset A$ et $\mu(A) = 0$.

Remarque 4.15. Un ensemble négligeable n'appartient pas nécessairement à la tribu.

Définition 4.16. On dit que la mesure μ est complète si \mathcal{A} contient tous les ensembles négligeables.

Définition 4.17. Une propriété sur l'ensemble E est une application $P : E \rightarrow \{\text{vrai}, \text{faux}\}$.

Définition 4.18. On dit qu'une propriété est vraie μ -presque partout si l'ensemble $\{x \in E : P(x) = \text{faux}\}$ est négligeable.

5. Intégrale de Lebesgue.

5.1. Intégrale des fonctions étagées positives.

Notation 5.1. On rappelle que l'écriture canonique est $f = \sum_{\alpha \in f(E)} \alpha \mathbb{1}_{\{f=\alpha\}}$. On a bien que $\{\{f\alpha\} \mid \alpha \in f(E)\}$ forme une partition de E . On note \mathcal{E}_+ l'ensemble des fonctions étagées.

Définition 5.2 (Intégrale). Soit $f \in \mathcal{E}_+$. On appelle intégrale de f par rapport à la mesure μ sur (E, \mathcal{A}) définit par:

$$\int_E f(x) d\mu(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mu(A_i).$$

Remarque 5.3. Si f admet deux écritures canoniques, alors $\int_E f d\mu$ ne dépend pas de ces écritures.

Remarque 5.4. Sous la forme canonique, $f = \sum_{\alpha \in f(E)} \alpha \mathbb{1}_{\{f=\alpha\}}$, on a

$$\int_E f(x) d\mu(x) = \sum_{\alpha \in f(E)} \alpha \mu(\{f = \alpha\}).$$

Attention, L'ensemble $\{f = 0\}$ peut être tel que $\mu(\{f = 0\}) = +\infty$. La convention $0(+\infty) = +\infty 0 = 0$ est alors très importante.

Remarque 5.5. On peut avoir $\alpha > 0$ et $\mu(\{f = \alpha\}) = +\infty$ et dans ce cas, $\int_E f d\mu = +\infty$.

Exemples 5.6.

1. Soit $f : \mathbb{E} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+ ; x \mapsto 0$.

$$\int_E f(x) d\mu(x) = \sum_{\alpha \in f(E)} \alpha \mu(\{f = \alpha\}) = 0 \cdot \mu(\{f = 0\}) = 0 \cdot \mu(E) = 0.$$

2. $\mu = \delta_a, a \in E$.

$$\int_E f(x) d\mu(x) = \sum_{\alpha \in f(E)} \alpha \mu(\{f = \alpha\}) = \sum_{\alpha \in f(E)} \alpha \delta_a(\{f = \alpha\}) = f(a).$$

3. Si l'espace mesuré est $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$, λ mesure de lebesgue. On a vu $\forall x \in \mathbb{R}, \lambda(\{x\}) = 0$. Plus généralement, pour tout sous-ensemble dénombrable $D \subset \mathbb{R}$, on a $D \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ et $\lambda(D) = 0$. Soit alors $f = 2\mathbb{1}_{\mathbb{Q}} + 3\mathbb{1}_{\mathbb{N}}$. On a

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) d\lambda(x) = 2\lambda(\mathbb{Q}) + 3\lambda(\mathbb{N}) = 0.$$

4. Soit $f = \mathbb{1}_{[(2,3)]} + 3\mathbb{1}_{[0,1]} = \mathbb{1}_{[-2,0[} + 4\mathbb{1}_{[0,1]} + \mathbb{1}_{[1,3]}$. Calculons son intégrale. On a pour la 1ere écriture : $\lambda([(2,3)]) + 3\lambda([0,1]) = 5 + 3 = 8$. et pour la 2eme écriture : $\lambda([-2,0[) + 4\lambda([0,1]) + \lambda([1,3]) = 8$.

Proposition 5.7. L'application $f \mapsto \int_E f d\mu$ de \mathcal{E}_+ dans $\overline{\mathbb{R}}_+$ satisfait les propriétés suivantes

- Pour toutes fonctions $f, g \in \mathcal{E}_+$, $f + g \in \mathcal{E}_+$ et $\int_E f + g d\mu = \int_E f d\mu + \int_E g d\mu$,
- Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}_+$, $\lambda f \in \mathcal{E}_+$ et $\int_E \lambda f d\mu = \lambda \int_E f d\mu$,
- Pour toutes fonctions $f, g \in \mathcal{E}_+$, $f \leq g \Rightarrow \int_E f d\mu \leq \int_E g d\mu$.

Démonstration.

- On pose $f = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbb{1}_{A_i}$, $g = \sum_{j=1}^m \beta_j \mathbb{1}_{B_j}$ avec $A_i := \{f = \alpha_i\}$, $B_j := \{g = \beta_j\}$, $(A_i)_{i \in \{1, \dots, n\}}$, $(B_j)_{j \in \{1, \dots, m\}}$ sont des partitions de E . On a

$$\begin{aligned} \int_E f + g d\mu &= \int_E \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (\alpha_i + \beta_j) \mathbb{1}_{A_i \cap B_j} d\mu(x) \\ &\stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (\alpha_i + \beta_j) \mu(A_i \cap B_j) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \sum_{j=1}^m \mu(A_i \cap B_j) + \sum_{j=1}^m \beta_j \sum_{i=1}^n \mu(A_i \cap B_j) \\ &= \sum_{i=1}^n \alpha_i \mu\left(\bigcup_{j=1}^m A_i \cap B_j\right) + \sum_{j=1}^m \beta_j \mu\left(\bigcup_{i=1}^n A_i \cap B_j\right) \stackrel{\text{prop 4.4}}{=} \sum_{i=1}^n \alpha_i \mu(A_i) + \sum_{j=1}^m \beta_j \mu(B_j) \stackrel{\text{def}}{=} \int_E f d\mu + \int_E g d\mu. \end{aligned}$$

- Notons $f := \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbb{1}_{A_i}$ alors $\alpha f = \sum_{i=1}^n \alpha \alpha_i \mathbb{1}_{A_i}$ d'où $\alpha f \in \mathcal{E}_+$ et

$$\int_E \alpha f d\mu = \sum_{i=1}^n \alpha \alpha_i \mu(A_i) = \alpha \sum_{i=1}^n \alpha_i \mu(A_i) = \alpha \int_E f d\mu.$$

- Comme $f \leq g$, $g - f$ est une fonction étagée positive. Par la point 1, on a donc

$$\int_E g d\mu = \int_E f + (g - f) d\mu = \int_E f d\mu + \int_E (g - f) d\mu \geq \int_E f d\mu.$$

□

Proposition 5.8. Pour tout $A \in \mathcal{A}$, $\int_E \mathbb{1}_A(x) d\mu(x) = \mu(A)$. Si $f = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbb{1}_{A_i}(x) d\mu(x)$ alors,

$$\int_E f d\mu = \sum_{i=1}^n \alpha_i \int_E \mathbb{1}_{A_i}(x) d\mu(x).$$

5.2. Intégrales de fonctions mesurables positives.

Notation 5.9. On notera \mathcal{M}_+ l'ensemble des fonctions mesurables positives de (E, \mathcal{A}) dans $(\overline{\mathbb{R}}_+, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}_+))$. On munit (E, \mathcal{A}) d'une mesure μ .

Définition 5.10 (Intégrale). On définit l'intégrale de toute fonction $f \in \mathcal{M}_+$ par rapport à la mesure μ par :

$$\int_E f(x) d\mu(x) = \sup \left\{ \int_E g(x) d\mu(x) : g \in \mathcal{E}_+, g \leq f \right\}.$$

Cette intégrale sera notée indifféremment $\int_E f(x) d\mu(x)$, $\int_E f(x) \mu(dx)$, $\int_E f d\mu$.

Définition 5.11 (μ -intégrable). Si $\int_E f d\mu < +\infty$, on dira que f est μ -intégrable.

Remarque 5.12. L'intégrale d'une fonction mesurable positive (E, \mathcal{M}_+) est toujours définie, sa valeur pouvant éventuellement être infinie.

Proposition 5.13. Pour toutes fonctions $f, g \in \mathcal{M}_+$

$$f \leq g \Rightarrow \int_E f d\mu \leq \int_E g d\mu.$$

Démonstration. Soit $h \in \mathcal{E}_+$, $h \leq f$. Alors $h \leq g$ donc

$$\begin{aligned} & \left\{ \int_E h(x) d\frac{\mu(x)}{h} \in \mathcal{E}_+, h \leq f \right\} \subset \left\{ \int_E h(x) d\frac{\mu(x)}{h} \in \mathcal{E}_+, h \leq g \right\} \\ \Rightarrow \sup \left\{ \int_E h(x) d\frac{\mu(x)}{h} \in \mathcal{E}_+, h \leq f \right\} & \leq \sup \left\{ \int_E h(x) d\frac{\mu(x)}{h} \in \mathcal{E}_+, h \leq g \right\}. \end{aligned}$$

Le cas particulier découle du fait que l'intégrale de la fonction $x \mapsto 0$ sur E est nulle. □

Théorème 5.14 (Théorème de Beppo-Levi). Si (f_n) est une suite croissante de fonctions de \mathcal{M}_+ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n \in \mathcal{M}_+$. Posons $f = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n$ alors

$$\int_E f d\mu = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_E f_n d\mu.$$

Proposition 5.15. Soit $f, g \in \mathcal{M}_+$. Alors,

- $\int_E (f + g) d\mu = \int_E f d\mu + \int_E g d\mu$.
- Pour tout $\alpha \geq 0$, $\int_E \alpha f d\mu = \alpha \int_E f d\mu$.

Démonstration.

- Par Proposition 3.11, il existe des suites croissantes $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$, et $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de \mathcal{E}_+ telles que f_n , et g_n convergent respectivement vers f et g . Alors $f_n + g_n$ est une suite croissante de \mathcal{M}_+ telle que $f + g = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n + g_n$. De plus par Proposition 5.7, $\int_E f_n + g_n d\mu = \int_E f_n d\mu + \int_E g_n d\mu$ donc par le Théorème de Beppo-Levi, et unicité de la limite on a bien que

$$\int_E (f + g) d\mu = \int_E f d\mu + \int_E g d\mu.$$

- Par Proposition 3.11, on pose la suite $(\alpha f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite croissante de \mathcal{M}_+ qui converge vers αf . De plus, $\int_E \alpha f_n d\mu = \alpha \int_E f_n d\mu$ donc par le Théorème de Beppo-Levi, et unicité de la limite on a bien que

$$\int_E \alpha f d\mu = \alpha \int_E f d\mu.$$

□

Proposition 5.16. Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions de \mathcal{M}_+ . On a

$$\int_E \sum_{n \geq 0} f_n = \sum_{n \geq 0} \int_E f_n d\mu.$$

Démonstration. La suite des sommes partielles de f_n est une suite croissante de \mathcal{M}_+ . Par le Théorème de Beppo-Levi, on a

$$\int_E \sum_{k=0}^n f_k d\mu \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_E \sum_{k \geq 0} f_k d\mu \text{ et } \sum_{k=0}^n \int_E f_k d\mu \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \sum_{k \geq 0} \int_E f_k d\mu.$$

Or par additivité des intégrales de fonctions de \mathcal{M}_+ ,

$$\int_E \sum_{k=0}^n f_k d\mu = \sum_{k=0}^n \int_E f_k d\mu,$$

d'où $\int_E \sum_{n \geq 0} f_n = \sum_{n \geq 0} \int_E f_n d\mu$.

□

Lemme 5.17 (Inégalité de Markov). Soit $f \in \mathcal{M}_+$, $a > 0$. Alors

$$\mu(\{f \geq a\}) \leq \frac{1}{a} \int_E f d\mu.$$

Démonstration. On a μ -presque partout $a \mathbb{1}_{\{f \geq a\}} \leq f$, donc pour μ -presque tout $x \in E$, $a \mathbb{1}_{\{f \geq a\}}(x) \leq f(x)$ et par la positivité de l'intégrale,

$$a\mu(\{f \geq a\}) = \int_E \mathbb{1}_{\{f \geq a\}} d\mu \leq \int_E f d\mu.$$

□

Corollaire 5.18. Soit $f \in \mathcal{M}_+$. Si f est intégrable alors $\mu(\{f = +\infty\}) = 0$ i.e f est finie μ -p.p.

Démonstration. Soit $n \geq 1$.

$$\{f = +\infty\} \subset \{f \geq n\} \Rightarrow \mu(\{f = +\infty\}) \leq \mu(\{f \geq n\}) \leq \frac{1}{n} \int_E f d\mu \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

□

Corollaire 5.19. Soit $f, g \in \mathcal{M}_+$. Alors

- $\int_E f d\mu = 0$ si et seulement si $f = 0$ μ -presque partout.
- Si $f = g$ μ -presque partout, alors $\int_E f d\mu = \int_E g d\mu$.

Démonstration.

- \Rightarrow Supposons $\int_E f d\mu = 0$. Soit $n \geq 1$, d'après l'Inégalité de Markov, $\mu\left(\left\{f \geq \frac{1}{n}\right\}\right) \leq n \int_E f d\mu = 0$. De plus, $\left\{f \geq \frac{1}{n}\right\}$ est une suite croissante d'ensembles telle que $\bigcup_{n \geq 1} \left\{f \geq \frac{1}{n}\right\} = \{f > 0\}$.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mu\left(\left\{f \geq \frac{1}{n}\right\}\right) = \mu\left(\bigcup_{n \geq 1} \left\{f \geq \frac{1}{n}\right\}\right) = \mu(\{f > 0\}) = \mu(\{f \neq 0\}) = 0.$$

D'où $f = 0$ μ -p.p.

⇐ Supposons $f = 0$ μ -presque partout. Alors il existe une suite croissante de fonctions étagées positives $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n = f$ μ -presque partout. Ainsi, puisque $\forall n \in \mathbb{N}, f_n \leq f$, $f_n = 0$ μ -presque partout. Ainsi, $\mu(A_k) = 0$ dès que $\alpha_k \neq 0$ et $\int_E f_n d\mu = \sum_{k=1}^m \alpha_k \mu(A_k) = 0$.
Donc par le Théorème de Beppo-Levi,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_E f_n d\mu = \int_E \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n d\mu = \int_E f d\mu = 0.$$

- Soit $f, g \in \mathcal{M}_+$ telles que $f = g$ μ -presque partout. On a $1 = \mathbb{1}_{\{f=g\}} + \mathbb{1}_{f \neq g}$.

$$\int_E f d\mu = \int_E f \mathbb{1}_{\{f=g\}} d\mu + \int_E f \mathbb{1}_{f \neq g} d\mu$$

On obtient une égalité similaire pour l'intégrale de g . Or $f \mathbb{1}_{f \neq g}$ et $g \mathbb{1}_{f \neq g}$ sont des fonctions nulles μ -presque partout donc $\int \mathbb{1}_{\{f \neq g\}} d\mu = \int_E g \mathbb{1}_{\{f \neq g\}} d\mu = 0$. D'où,

$$\int_E f d\mu = \int_E f \mathbb{1}_{\{f=g\}} d\mu = \int_E g \mathbb{1}_{\{f=g\}} d\mu = \int_E g d\mu.$$

□

Rappel 5.20.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \inf f_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \inf_{k \geq n} f_k = \sup_{n \geq 1} \inf_{k \geq n} f_n.$$

Théorème 5.21 (Lemme de Fatou). Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de \mathcal{M}_+ alors

$$\int_E (\liminf)_{n \rightarrow +\infty} f_n d\mu \leq (\liminf)_{n \rightarrow +\infty} \int_E f_n d\mu.$$

Démonstration. Soit $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $g_n = \inf_{k \geq n} f_k$ est une suite croissante de fonctions de \mathcal{M}_+ et d'après le Théorème de Beppo-Levi,

$$\int_E \lim g_n d\mu = \lim \int_E g_n d\mu \Rightarrow \int_E \liminf f_n d\mu = \lim \int_E \inf_{k \geq n} f_k d\mu.$$

Soit $m \geq n$,

$$\inf_k \geq n f_k \leq f_m \Rightarrow \int_E \inf_{k \geq n} f_n d\mu \leq \int_E f_m d\mu \Rightarrow \int_E \inf_{k \geq n} f_k d\mu \leq \inf_{m \geq n} \int_E f_m d\mu \text{ par passage à l'inf.}$$

On obtient donc $\int_E \liminf f_n d\mu \leq \liminf_{m \geq n} \int_E f_n d\mu = \liminf \int_E f_n d\mu$. □

Proposition 5.22. Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de \mathcal{M}_+ telle qu'il existe $g \in \mathcal{M}_+$ intégrable vérifiant $f_n \leq g$ pour μ -presque tout $n \in \mathbb{N}$, alors:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup \int_E f_n d\mu \leq \int_E \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n d\mu.$$

Démonstration. La suite de fonctions $(g - f_n)_{n \geq 0}$ est une suite de \mathcal{M}_+ et par le Lemme de Fatou, $\int_E \liminf (g - f_n) d\mu \leq \liminf \int_E (g - f_n) d\mu$. Or $f_n \leq g$ pour tout n donc $\limsup f_n \leq g$. Par conséquent, $\limsup f_n$ est une fonction de \mathcal{M}_+ intégrable. D'autre part,

$$\begin{aligned}\liminf_{n \rightarrow +\infty} \int_E g - f_n \, d\mu &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\int_E g \, d\mu - \int_E f_n \, d\mu \right) = \int_E g \, d\mu + \liminf_{n \rightarrow +\infty} \left(- \int_E f_n \, d\mu \right) \\ &= \int_E g \, d\mu - \limsup_{n \rightarrow +\infty} \int_E f_n \, d\mu\end{aligned}$$

Donc en revenant à l'inégalité,

$$\int_E g \, d\mu - \int_E \limsup_{n \rightarrow +\infty} f_n \, d\mu \leq \int_E g \, d\mu - \limsup_{n \rightarrow +\infty} \int_E f_n \, d\mu \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \sup \int_E f_n \, d\mu \leq \int_E \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n \, d\mu. \quad \square$$

5.3. Mesure à densité.

Proposition 5.23. Soit $f \in \mathcal{M}_+$. Posons pour tout $A \in \mathcal{A}$, $\nu(A) := \int_A g \, d\mu = \int_E g \mathbb{1}_A \, d\mu$. Alors ν est une mesure sur (E, \mathcal{A}) . De plus, pour toute fonction $f \in \mathcal{M}_+$, $\int_E f \, d\nu = \int_E fg \, d\mu$

Démonstration.

- $\nu(\emptyset) = \int_E g \mathbb{1}_{\emptyset} \, d\mu = 0$.
- Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de \mathcal{A} d'ensembles deux à deux disjoints. Alors

$$\begin{aligned}\nu\left(\bigcup_{n \geq 1} A_n\right) &= \int_E g \mathbb{1}_{\bigcup_{n \geq 1} A_n} \, d\mu = \int_E g \sum \mathbb{1}_{A_n} \, d\mu = \int_E \sum g \mathbb{1}_{A_n} \, d\mu = \sum \int_E g \mathbb{1}_{A_n} \, d\mu \\ &= \sum_{n \geq 1} \nu(A_n).\end{aligned}$$

- Par définition pour $f = \mathbb{1}_A$, $A \in \mathcal{A}$ il n'y a aucun prblm. Par linéarité, de même pour toute fonction f étagée positive. Si $f \in \mathcal{M}_+$, il existe une suite croissante $(f_n)_n$ de fonctions de \mathcal{M}_+ telle que $\lim f_n = f$. On a $\int_E f_n \, d\nu = \int_E f_n g \, d\mu$. De plus, $(f_n g)$ est une suite croissante de \mathcal{M}_+ telle que $\lim f_n g = fg$. Ainsi, par Théorème de Beppo-Levi,

$$\int_E \lim f_n \, d\nu = \int_E f \, d\nu = \int_E f_n g \, d\mu = \int_E fg \, d\mu \quad \square$$

Définition 5.24. On dit que ν est la mesure de densité g par rapport à la mesure μ .

5.4. Intégrales de fonctions mesurables quelconques.

Notation 5.25. Soit (E, \mathcal{A}, μ) . On note \mathcal{M} l'ensemble des appl mesurables de (E, \mathcal{A}) dans $(\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$.

Définition 5.26 (Intégrable). Une fonction $f \in \mathcal{M}$ est dite μ -intégrable si $\int_E |f| \, d\mu < +\infty$.

Notation 5.27.

- L'ensemble des fonctions intégrables sera noté $\mathcal{L}^1(E, \mathcal{A}, \mu) = \{f \in \mathcal{M}, \int_E |f| \, d\mu < +\infty\} = \mathcal{L}^1(E)$.
- Soit $f : E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, $f^+ := \max(f, 0)$ et $f^- := -\min(f, 0)$.

Proposition 5.28. Soit $f \in \mathcal{M}$. $f \in \mathcal{L}^1(E)$ si et seulement si $f^+ \in \mathcal{L}^1(E)$ et $f^- \in \mathcal{L}^1(E)$.

Démonstration. On a $|f| = f^+ + f^-$.

$$\int_E f^- \, d\mu \leq \int_E |f| \, d\mu = \int_E f^+ + \int_E f^- \, d\mu \leq \int_E |f| \, d\mu = \int_E f^+ + \int_E f^- \, d\mu. \quad \square$$

Définition 5.29 (Intégrale). Soit $f \in \mathcal{L}^1(E)$. Alors l'intégrale de f est définie par

$$\int_E f \, d\mu = \int_E f^+ \, d\mu - \int_E f^- \, d\mu.$$

Proposition 5.30. Soit $f, g : (E, \mathcal{A}) \rightarrow (\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$ deux fonctions mesurables telles que $f = g$ μ -presque partout. Alors $f \in \mathcal{L}^1(E) \Leftrightarrow g \in \mathcal{L}^1(E)$.

Démonstration. $\{f^+ \neq g^+, \{f^- \neq g^-\} \subset \{f \neq g\}$ Cela entraîne que $f = g$ μ -presque partout $\Rightarrow f^+ = g^+$ μ -presque partout et $f^- = g^-$ μ -presque partout donc f^+ et f^- sont intégrables si et seulement si g^+ et g^- le sont. \square

Proposition 5.31. Soit $f \in \mathcal{L}^1(E)$, alors : $\mu(\{f = -\infty\}) = \mu(\{f = +\infty\}) = \mu(\{|f| = +\infty\}) = 0$

Démonstration. On observe que $\{|f| = +\infty\} = \{f^+ = +\infty\} \cup \{f^- = +\infty\}$. Donc

$$\mu(\{|f| = +\infty\}) = \mu(\{f^+ = +\infty\}) + \mu(\{f^- = +\infty\}).$$

Or $f^+, f^- \in \mathcal{L}^1(E)$ donc $\mu(\{f^+ = +\infty\}) = \mu(\{f^- = +\infty\}) = 0$. \square

Proposition 5.32. Soit $f, g \in \mathcal{L}^1(E)$. Alors

- $f + g \in \mathcal{L}^1(E)$ et $\int_E (f + g) \, d\mu = \int_E f \, d\mu + \int_E g \, d\mu$.
- Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha f \in \mathcal{L}^1(E)$ et $\int_E \alpha f \, d\mu = \alpha \int_E f \, d\mu$.

Proposition 5.33. Soit $f, g \in \mathcal{L}^1(E)$. Si $f \leq g$ μ -presque partout alors

$$\int_E f \, d\mu \leq \int_E g \, d\mu.$$

Démonstration. Supposons $\forall x \in E, f(x) \leq g(x)$. On a $g - f \in \mathcal{M}_+$ donc $\int_E (g - f) \, d\mu \geq 0$. On conclut par la linéarité de l'intégrale, si $f \leq g$ μ -presque partout, alors on applique ceci aux fonctions $f_1 = f \mathbb{1}_{\{f \leq g\}}$ et $g_1 = g \mathbb{1}_{\{f \leq g\}}$. Ces fonctions vérifient pour tout $x \in E$, $f_1(x) \leq g_1(x)$. On a donc $\int_E f_1 \, d\mu \leq \int_E g_1 \, d\mu$. Mais comme $f_1 = f$ μ -presque partout et $g_1 = g$ μ -presque partout, on a $\int_E f_1 \, d\mu = \int_E f \, d\mu$ et $\int_E g_1 \, d\mu = \int_E g \, d\mu$. \square

Proposition 5.34. Soit $f \in \mathcal{L}^1(E)$. Alors $|\int_E f \, d\mu| \leq \int_E |f| \, d\mu$.

Démonstration. $|\int_E f \, d\mu| = |\int_E f^+ \, d\mu - \int_E f^- \, d\mu| \leq \int_E f^+ \, d\mu + \int_E f^- \, d\mu = \int_E |f| \, d\mu$. \square

Proposition 5.35 (Formule de transfert). Soit $f : (F, \mathcal{B}) \rightarrow (\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$ une fonction mesurable. La fonction f est μ_φ intégrable si et seulement si la fonction $f \circ \varphi$ est μ -intégrable sur E . Dans ce cas, on a

$$\int_E f \circ \varphi \, d\mu = \int_F f \, d\mu_\varphi.$$

Démonstration. Voir poly. \square