Diagonalisation

Table des matières

Chapitre 1

1. Déterminants.

1.1. forme n-linéaires alternée.

Définition 1.1 (forme n-linéaire)**.** Soit E un espace vectoriel, et $\varphi : E^n \to \mathbb{R}$ une application. On dit que φ est une **forme n-linéaire** si φ est linéaire par rapport à chaque variable i.e, $\forall x_1, -, x_i, -, x_n, y_i \in E, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$,

$$\varphi(x_1, -, x_{i-1}, \alpha x_i + \beta y_i, -, x_n) = \alpha\varphi(x_1, -, x_{i-1}, x_i, -, x_n) + \beta\varphi(x_1, -, x_{i-1}, y_i, -, x_n)$$

Exemples 1.2.

1. Montrons que $\varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}; (x_1, x_2) \mapsto x_1 x_2$ est 2-linéaire. Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. On a
$$(\alpha x_1 + \beta y_1)x_2 = \alpha(x_1 x_2) + \beta(y_1 y_2) \text{ et } x_1(\alpha x_2 + \beta y_2) = \alpha(x_1 x_2) + \beta(x_1 y_2).$$
2. $\varphi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}; (u^{\rightarrow}, v^{\rightarrow}) \mapsto u^{\rightarrow} \times v^{\rightarrow}$ est 2-linéaire (et symétrique).
3. Le déterminant 2-2 est 2-linéaire.

Remarque 1.3. $\varphi(x_1, -, 0, -, x_n) = 0$.

Définition 1.4 (alternée)**.** Soit φ une application n-linéaire. On dit que φ est **alternée** si

$$\forall i, j \in \{1, -, n\} \text{ avec } i \neq j, x_i = x_j \Rightarrow \varphi(x_1, -, x_n) = 0.$$

Proposition 1.5. Soit $f_1, -, f_n : E \to F$ n applications linéaires. Soit $\varphi : F^n \to \mathbb{R}$ n-linéaire. Alors

$$\varphi \circ (f_1, -, f_n) : E^n \to \mathbb{R}; x_1, -, x_n \mapsto \varphi(f_1(x_1), -, f_n(x_n))$$

est n-linéaire.

Démonstration. Puisque les $f_1, -, f_n$ sont linéaires, et que φ est n-linéaire, il est évident que $\varphi \circ (f_1, -, f_n)$ est n-linéaire. □

Définition 1.6 (antisymétrie)**.** Soit φ une application n-linéaire. On dit que φ est **antisymétrique** si

$$\forall i, j \in [1, n] \text{ avec } i \neq j, \varphi\big(x_1, -, x_i, -, x_j, -, x_n\big) = -\varphi\big(x_1, -, x_j, -, x_i, -, x_n\big)$$

Proposition 1.7. Soit φ une application n-linéaire et alternée. On ne change pas la valeur de $\varphi(x_1, -, x_n)$ en ajoutant à un des vecteurs de la famille une combinaison linéaire des autres. i.e, $\forall i \in \{1, -, n\}, \forall a_1, -, a_{i-1}, a_{i+1}, -, a_n \in \mathbb{R}$,

$$\varphi\left(x_1, -, x_i + \sum_{j=1, j\neq i}^{n} \alpha_j x_j, -, x_n\right) = \varphi(x_1, -, x_n)$$

Démonstration. Sans perte de généralité, on montre le cas où $i = 1$.

$$\begin{aligned}\varphi\left(x_1 + \sum_{j=2}^{n} \alpha_j x_j, -, x_n\right) &= \varphi(x_1, -, x_n) + \sum_{j=2}^{n} \alpha_j \varphi\big(x_j, -, x_j, -, x_n\big) \\ &= \varphi(x_1, -, x_n)\end{aligned}$$

Car φ est alternée. □

Proposition 1.8. Soit φ une application n-linéaire. φ est alternée si et seulement si φ est antisymétrique.

Démonstration.
$\Rightarrow$ Supposons que φ soit alternée. On pose $x_i = x_j$ Alors on a $\varphi(x_1, -, x_i, -, x_j, -, x_n) = 0$

$$\begin{aligned}\varphi(x_1, -, x_i, -, x_j, -, x_n) &= \varphi(x_1, -, x_i + x_j, -, x_j + x_i, -, x_n)\\ &= \varphi(x_1, -, x_i, -, x_j + x_i, -, x_n) + \varphi(x_1, -, x_j, -, x_j + x_i, -, x_n)\\ &= \varphi(x_1, -, x_i, -, x_j, -, x_n) + \cancel{\varphi(x_1, -, x_i, -, x_i, -, x_n)}\\ &\quad \cancel{+\varphi(x_1, -, x_j, -, x_j, -, x_n)} + \varphi(x_1, -, x_j, -, x_i, -, x_n) \text{ car } \varphi \text{ est alternée.}\\ &= \varphi(x_1, -, x_i, -, x_j, -, x_n) + \varphi(x_1, -, x_j, -, x_i, -, x_n)\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}0 &= \varphi(x_1, -, x_i, -, x_j, -, x_n) + \varphi(x_1, -, x_j, -, x_i, -, x_n)\\ \Leftrightarrow \varphi(x_1, -, x_i, -, x_j, -, x_n) &= -\varphi(x_1, -, x_j, -, x_i, -, x_n)\end{aligned}$$

Donc φ est antisymetrique.
$\Leftarrow$ Supposons que φ soit antisymétrique. Alors on a :

$$\varphi(x_1, -, x_i, -, x_j, -, x_n) = -\varphi(x_1, -, x_j, -, x_i, -, x_n)$$

En particulier, en posant $x_j = x_i$ on a :

$$\begin{aligned}\varphi(x_1, -, x_i, -, x_i, -, x_n) &= -\varphi(x_1, -, x_i, -, x_i, -, x_n)\\ &\Leftrightarrow 2\varphi(x_1, -, x_i, -, x_i, -, x_n) = 0\\ &\Leftrightarrow \varphi(x_1, -, x_i, -, x_i, -, x_n) = 0\end{aligned}$$

□

Proposition 1.9. Soit φ une application n-linéaire et alternée. Si $(x_1, -, x_n)$ est une famille liée alors $\varphi(x_1, -, x_n) = 0$

Démonstration. $(x_1, -, x_n)$ est liée donc il existe $\alpha_1, -, \alpha_n \in \mathbb{R}$ tel que $\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n = 0$ avec $\alpha_i \neq 0$ cas $\alpha_1 \neq 0$, $x_1 = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1}x_2 - \ldots - \frac{\alpha_n}{\alpha_1}x_n$, alors

$$\begin{aligned}\varphi(x_1, -, x_n) &= \varphi\left(-\frac{\alpha_2}{\alpha_1}x_2 - \ldots - \frac{\alpha_n}{\alpha_1}x_n, x_2, -, x_n\right)\\ &= \text{TODO} = 0\end{aligned}$$

□

Corollaire 1.10. Si $\dim(E) < n$ toutes les formes n-linéaires alternées sur E sont nulles.

Démonstration. Soit E un espace vectoriel, $x_1, -, x_n \in E$. Alors $(x_1, -, x_n)$ est liée donc $\varphi(x_1, -, x_n) = 0$. □

Théorème 1.11. Si $\dim(E \geq n)$ alors il existe des formes n-linéaires alternées sur E non nulles. De plus, si $\dim(E) = n$ deux formes n-linéaires alternées sur E φ_1 et φ_2 non nulles sont proportionnelles i.e, $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x_1, -, x_n \in E, \varphi_2(x_1, -, x_n) = \lambda\varphi_1(x_1, -, x_n)$.

1.2. Déterminant d'une famille de E^n.

Lemme 1.12. Soit $m : E^2 \to \mathbb{R}$. Alors $a_m : E^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$a_m(x_1, x_2) = m(x_1, x_2) - m(x_2, x_1)$$

est bilinéaire antisymétrique.

Démonstration. Soit $x_1, x_2 \in E$. On montre l'antisymétrie.

$$\begin{aligned} a_m(x_1, x_2) = m(x_1, x_2) - m(x_2, x_1) &= -(m(x_2, x_1) - m(x_1, x_2)) \\ &= -a_m(x_2, x_1) \end{aligned}$$

La linéarité est évidente. □

Théorème 1.13. Soit E un espace vectoriel de dimension n, et $B = (e_1, -, e_n)$ une base de E. Alors il existe une unique forme n-linéaire alternée: $\det_B : E^n \to \mathbb{R}$ telle que $\det_B(e_1, -, e_n) = 1$.

Démonstration. « cas n=2 » TODO VOIR MAXIME □

Définition 1.14 (Déterminant)**.** Soit E un espace vectoriel de dimension n, et $B = (e_1, -, e_n)$ une base de E. On appelle **déterminant** dans la base B la forme n-linéaire du Théorème 1.13 précédent

Théorème 1.15. Soit E un espace vectoriel de dimension n, et B une base de E.
Une famille $F = \{f_1, -, f_n\}$ de E est libre si et seulement si $\det_B(f_1, -, f_n) \neq 0$.
Dans ce cas on a :

$$\forall x_1, -, x_n \in E, \det_B(x_1, -, x_n) = \det_B(F)\det_F(x_1, -, x_n).$$

Démonstration. Soit $F = (f_1, -, f_n)$ une famille, $B = (e_1, -, e_n)$.
Si F est liée on a $\det_B$ est n-linéaire alternée. Alors $\det_B(f_1, -, f_n) = 0$.
Si F est libre alors F est une base donc $\exists \lambda \in \mathbb{R}, \det_B = \lambda \det_F$ voir (Théorème 1.11). En particulier,

$$\det_B(f_1, -, f_n) = \lambda \det_F(f_1, -, f_n) \underset{\text{par définition}}{=} \lambda \cdot 1$$

$$\text{Or} \qquad 1 = \det_B(e_1, -, e_n) = \lambda \det_F(e_1, -, e_n) \text{ d'où } \lambda \neq 0$$

D'où $\det_B(f_1, -, f_n) \neq 0$. □

1.3. Déterminant d'un endomorphisme.

Théorème 1.16. Soit E un espace vectoriel de dimension n et $f : E \to E$ un endomorphisme. Alors il existe un unique réel $\det(f)$ tel que pour toute application φ n-linéaire alternée, et pour tout $(x_1, -, x_n) \in E$,

$$\varphi(f(x_1), f(x_n)) = \det(f)\varphi(x_1, -, x_n).$$

Remarque 1.17. En prenant $x_1, -, x_n = e_1, -, e_n$,

$$\det_B(f(B)) = \det F.$$

Démonstration. Existence: Soit φ une forme n-linéaire alternée non-nulle et
$\psi : E^n \to \mathbb{R}; x_1, -, x_n \mapsto (f(x_1), -, f(x_n))$ qui est une forme n-linéaire alternée. Alors φ et ψ sont proportionnelles, i.e il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\psi = \lambda\varphi$ (Théorème 1.11).
Soit Φ une forme n-linéaire alternée quelconque, alors il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\Phi = \alpha\varphi$, et
$\forall x_1, -, x_n \in E$,

$$\Phi(f(x_1), -, f(x_n)) = \alpha\varphi(f(x_1), -, f(x_n)) = \alpha\varphi(\psi(x_1, -, x_n))) = \lambda\Phi(x_1, -, x_n)$$

MYSTIQUE $\square$

Définition 1.18. Soit E un espace vectoriel de dimension n et $f : E \to E$ un endomorphisme. On appelle **déterminant de** f le réel $\det(f)$ du Théorème 1.16 précédent.

Proposition 1.19. Soit $f : E \to E$ et $g : E \to E$ deux endomorphismes. Alors,

$$\det(f \circ g) = \det(f) \det(g).$$

Démonstration. Soit $\varphi : E^n \to \mathbb{R}$ une application n-linéaire alternée, $x_1, -, x_n \in E$.
On a:

$$\begin{aligned} \varphi(f \circ g(x_1), -, f \circ g(x_n)) &= \det(f)\varphi(g(x_1), -, g(x_n)) \text{ par definition de } \det(f). \\ &= \det(f)\det(g)\varphi(x_1, -, x_n) \text{ par definition de } \det(g) \end{aligned}$$

De plus :

$$\varphi(f \circ g(x_1), -, f \circ g(x_n)) = \det(f \circ g)\varphi(x_1, -, x_n)$$

Par unicité de $\det(f \circ g)$, $\det(f \circ g) = \det f \det(g)$. $\square$

Proposition 1.20. Soit E et F deux espaces vectoriels, $f : E \to F$ un isomorphisme d'espace vectoriel, et B une base de E. Alors $f(B)$ est une base de F et

$$\det_{f(B)} f(F) = \det_B F.$$

Démonstration. $\det_{f(B)} f$ et $\det_B$ sont deux formes n-linéaires alternées sur E qui valent 1 sur B donc elles sont égales. $\square$

Théorème 1.21. Soit $f : E \to E$ un endomorphisme. Alors, f est bijectif si et seulement si $\det(f) \neq 0$ et on a :

$$\det\left(f^{-1}\right) = \frac{1}{\det(f)}.$$

Démonstration. Soit B une base de E un espace vectoriel.
On rappelle f est bijectif $\Leftrightarrow$ $f(B)$ est une base. $\Leftrightarrow$ $\det_B f(B) \neq 0$. Si f est bijectif, $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_E$ donc $\det\left(f \circ f^{-1}\right) = \det(\mathrm{id}_E) = \det f \det f^{-1}$ or $\det(\mathrm{id}_E) = 1$
D'où $\det\left(f^{-1}\right) = \frac{1}{\det(f)}$. $\square$

1.4. Déterminant d'une matrice carrée.

Définition 1.22. Soit $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ une matrice. On appelle **déterminant de** A

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix} := \det_{(e_1, -, e_n)}((a_{11}, -, a_{n1}), -, (a_{1n}, -, a_{nn}))$$

le déterminant dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$ des n vecteurs colonnes de A .

Théorème 1.23. Soit E un espace vectoriel de dimension finie, $f : E \to E$ un endomorphisme. Alors

$$\det f = \det M_{B,B}(f).$$

Où $M_{B,B}(f)$ est la matrice associée à f dans la base B.

Proposition 1.24. Soit $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{R}), \lambda \in \mathbb{R}$
(1) $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.
(2) A inversible $\Leftrightarrow \det A \neq 0$. Si A est inversible alors $\det\left(A^{-1}\right) = \frac{1}{\det(A)}$.
(3) $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$.

Démonstration.
(1) Soit $f : E \to E$, $g : E \to E$, A, B les matrices associées respectivement à f et g. Alors la matrice associée a $f \circ g$ est $M_{B,B}(f \circ g) = AB$. Ainsi,
$$\det(AB) = \det M(f \circ g) = \det(f \circ g) = \det f \det g = \det A \det B.$$
(2) De même en considérant les endomorphismes associés.
(3) Par n-linéarité.

$\square$

Remarque 1.25 (ATTENTION)**.** $\det(A + B) \neq \det(A) + \det(B)$

Théorème 1.26. Soit $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$, E un espace vectoriel de dimension n, B une base de E, et $x_1, -, x_n$ tels que $x_i := a_{1i}e_1 + \ldots + a_{ni}e_n$. Alors
$$\det A = \det_B(x_1, -, x_n).$$

Démonstration. Soit $f : \mathbb{R}^n \to E$; base canonique $\mapsto$ base B $= y_1, -, y_n \mapsto y_1e_1 + \ldots + y_ne_n$. f est bien un isomorphisme. On a : $f(a_{1i}, -, a_{ni}) = x_i$. D'après la proposition,
$$\det_{f(C)} f(a_{1i}, -, a_{ni}) = \det_C(a_{1i}, -, a_{ni}) = \det A = \det_B(x_1, -, x_n).$$

$\square$

Remarque 1.27. Le déterminant est indépendant de la base B choisie.

Définition 1.28 (transposée)**.** Soit $A \in M_{p,q}(\mathbb{K})$ avec
$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1}, -, a_{1,q} \\ |, -, | \\ a_{p,1}, -, a_{p,q} \end{pmatrix}$$
Alors la transposée est notée ${}^tA \in M_{p,q}(\mathbb{K})$ est la matrice
$${}^tA = \begin{pmatrix} a_{1,1}, -, a_{p,1} \\ |, -, | \\ a_{1,q}, -, a_{p,q} \end{pmatrix}.$$

Théorème 1.29 (Admis)**.** Soit $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ une matrice carrée. Alors :
$$\det {}^tA = \det A.$$

Remarque 1.30. Conséquence directe: Toutes les propriétés des déterminants qui ont éténdues sur les colonnes sont aussi valables en opérant sur les lignes.

Proposition 1.31. Le déterminant est une forme n-linéaire alternée. Ainsi :
(1) Il y a n-linéarité du déterminant par rapport aux vecteurs colonnes (ou lignes).
(2) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.
$$\alpha \det(\cdot) = \det(\alpha C_i).$$

(3) Si on échange deux colonnes, le déterminant est multiplié par -1.
(4) $\det A \neq 0 \Leftrightarrow$ les n vecteurs colonnes forment une famille libre

1.5. Déterminant d'une matrice triangulaire par blocs.

Théorème 1.32. Soit $A, B \in \mathrm{Mat}(\mathbb{R})$ des matrices carrées, M une matrice carrée de la forme $M = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$. Alors :

$$\det M = \det A \det B.$$

Démonstration. Soit B, C des matrices de dimension n,
$\varphi_{B,C} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}; (c_1, -, c_n)_{\text{vecteurs colonnes}} \mapsto \begin{vmatrix} A & C \\ 0 & B \end{vmatrix}$. $\Phi_{B,C}$ est n-linéaire alternée donc

$$\forall A \in \mathrm{Mat}(\mathbb{R}), \begin{vmatrix} A & C \\ 0 & B \end{vmatrix} = \varphi_{B,C}(c_1, -, c_n) = \lambda_{B,C} \det A.$$

En prenant $A = I_n$, $\det A = 1c_1$ … incompréhensible…
En faisant des opérations sur les colonnes, $\lambda_B, C = \begin{vmatrix} I_n & 0 \\ 0 & B \end{vmatrix}$ □

Théorème 1.33 (même généralisé). Soit M une matrice carrée de la forme
$M = \begin{pmatrix} A_1 & * & \cdots & * \\ 0 & A_2 & * & \vdots \\ & & & \\ 0 & \cdots & 0 & A_k \end{pmatrix}$ avec $(A_i)_{i \in \{1,-,k\}} \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$. Alors

$$\det M = \det A_1 \cdot \ldots \cdot \det A_k$$

Remarque 1.34 (Cas particulier). Déterminant d'une matrice triangulaire (ou diagonale):

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & \cdots \\ 0 & a_{22} & 0 & \cdots \\ & & & \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} \cdot \ldots \cdot a_{nn}$$

1.6. Développements d'un déterminant par rapport à une colonne.

Définition 1.35 (Déterminant mineur). Soit $A = (a_{ij})_{i,j \in \{1,-,n\}} \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$. On appelle **déterminant mineur** de A, relatif à a_{ij}, le determinant d'ordre $n-1$ obtenu en rayant dans A la i-ème ligne et la i-ème colonne. On le note Δ_{ij}.

Définition 1.36 (Cofacteur). Soit $A = (a_{ij})_{i,j \in \{1,-,n\}} \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$. On appelle **cofacteur** de A relatif à a_{ij},

$$c(ij) = (-1)^{i+j}\Delta_{ij}.$$

Définition 1.37 (Comatrice). Soit $A = (a_{ij})_{i,j \in \{1,-,n\}} \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$. On appelle **comatrice** de A la matrice des cofacteurs $(c_{ij})_{i,j \in \{1,-,n\}}$. On la note $\mathrm{com}\, A$.

Théorème 1.38. Développement par rapport à la j-ième colonne.
Soit $A = (a_{ij})_{i,j \in \{1,-,n\}} \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$.

$$\det A = a_{1j}c_{1j} + \ldots + a_{nj}c_{nj}$$

Remarque 1.39. On a toujours intéret à développer suivant la ligne ou la colonne avec le plus de 0.

Exemple 1.40. Développement d'un déterminant par rapport à la deuxième colonne.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & -2 & 1 \\ -3 & -3 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 5 & -3 \end{vmatrix} = -0 * \begin{vmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -3 & 3 & 2 \\ 1 & 5 & -3 \end{vmatrix} + 4 * \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -3 & 3 & 2 \\ 1 & 5 & -3 \end{vmatrix} - (-3) * \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & 5 & -3 \end{vmatrix} + 0 * \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \\ -3 & 3 & 2 \end{vmatrix}.$$

Cette méthode reste très longue, on privilégira donc de faire d'abord en amont un pivot de Gauss sur la matrice afin d'intégrer le plus de 0 à la matrice: $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & -2 & 1 \\ -3 & -3 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 5 & -3 \end{vmatrix} \underset{C_3-C_1}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & -4 & 1 \\ -3 & -3 & 6 & 2 \\ 1 & 0 & 4 & 9 \end{vmatrix}$ D'où

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & -2 & 1 \\ -3 & -3 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 5 & -3 \end{vmatrix} = 1 * \begin{vmatrix} 4 & -4 & 1 \\ -3 & 6 & 2 \\ 0 & 4 & -3 \end{vmatrix} \underset{C_2+c_1}{=} \begin{vmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -3 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & -3 \end{vmatrix} \underset{C_1-4C_3}{=} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -11 & 3 & 2 \\ 12 & 4 & -3 \end{vmatrix} \underset{\text{par dvlp}}{=} 1 \begin{vmatrix} -11 & 3 \\ 12 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= -11 * 4 - 3 * 12 = -44 - 36 = -80.$$

Corollaire 1.41. Soit $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$. On a :

$$A^t(\mathrm{com}A) = \det(A)I_n = {}^t(\mathrm{com}\,A)A$$

En particulier, si A est inversible,

$$A^{-1} = \frac{^t(\mathrm{com}A)}{\det A}$$

Démonstration. $\mathrm{com}(A)_{ij} = C_{ij}$ donc ${}^t\mathrm{com}(A)_{ij} = C_{ji}$. Les coefficients du produit matriciel $A^t\mathrm{com}(A)$ sont égaux à

$$(A({}^t\mathrm{com}\,A))_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik}({}^t\mathrm{com}\,A)_{kj} = \sum_{k=1}^n a_{ik}c_{jk} = \begin{cases} \det A \text{ si } i=j \\ 0 \quad\quad \text{si } i \neq j \end{cases}$$

Car le déterminant comporte deux fois les lignes a_{11}, a_{1k}, a_{in}... On obtient l'autre formule en développant par rapport à une colonne. □

Exemple 1.42. $A = \begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix}$ Alors com $A = \begin{pmatrix} b' & -a' \\ -b & a \end{pmatrix}$.

$\det(A) = ab' - ba'$. $A^{-1} = \frac{1}{ab'-ba'}\begin{pmatrix} b & -b' \\ -a' & a \end{pmatrix}$ En déduire si $ab' - ba' \neq 0$.
$\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$ admet comme unique solution

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A^{-1}\begin{pmatrix} c \\ c' \end{pmatrix} = \frac{1}{ab'-ba'}\begin{pmatrix} b'c - c'b \\ -a'c + ac' \end{pmatrix} \Rightarrow x = \frac{\begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}} \text{ et } y = \frac{\begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}}$$

1.7. Formule de Cramer.

Théorème 1.43. Soit (S) le système de n équations à n inconnues: $\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = y_1 \\ \ldots \quad\quad = \ldots \\ a_{n1}x_1 + \ldots + a_{nn}x_n = y_n \end{cases}$

Soit $A = (a_{ij})_{i,j\in\{1,-,n\}}$ (S) admet une unique solution si et seulement si $\det A \neq 0$. Dans ce cas, la solution est donnée par

$$x_k = \frac{1}{\det(A)}\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,k-1} & y_1 & a_{1,k+1} & \cdots & a_{1n} \\ & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,k-1} & y_n & a_{n,k+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

La k-ième colonne est remplacée par le vecteur de second membre.

Chapitre 2

2. Reduction d'endomorphisme.

2.1. Rappels sur les équations linéaires.

Proposition 2.1. Soit E, F deux sous espaces vectoriels, $y \in F$ l'ensemble des solutions $x \in E$ de l'équation linéaire de second membre $f(x) = y$ est vide si $y \notin \mathrm{Im}(f)$, est de la forme $x_0 + \ker(f)$, x_0 solution particulière si $y \in \mathrm{Im}(f)$.

Démonstration. Si l'ensemble des solutions $x \in E$ de $f(x) = y$ n'est pas vide, il existe $x_0 \in E$ telle que $f(x_0) = y$. Soit $x \in E$. Alors x est solution de

$$f(x) = y \Leftrightarrow f(x) = f(x_0) \Leftrightarrow f(x - x_0) = 0 \Leftrightarrow x - x_0 \in \ker(f).$$

□

Définition 2.2. Soit E un espace vectoriel, $F_1, -, F_p$ des sous espaces vectoriels de E. On appelle **somme de Minkowski** l'ensemble des vecteurs de la forme $x_1 + \ldots + x_p$ avec $x_i \in F_i$ est un sous-espace vectoriel de E noté $F_1 + \ldots + F_p$.

Proposition 2.3. La somme de Minkowski est associative, commutative et 0 est l'unique élément neutre.

Définition 2.4. On dit que la somme $F_1 + \ldots + F_p$ est **directe** si pour tout vecteur $x_1 \in F_1, -, x_n \in F_n$ on a l'implication $x_1 + \ldots + x_p = 0 \Rightarrow x_1 = \ldots = x_p = 0$. Dans ce cas on la note $F_1 \oplus \ldots \oplus F_p$.

Proposition 2.5. La somme $F_1 + \ldots + F_p$ est directe si pour tout vecteur x_1 « de » $F_1, \ldots, x_n$ de F_n, l'ecriture $x_1 + \ldots + x_n$ est unique

Démonstration. Supposons par absurde que $x_1 + \ldots + x_n = y_1 + \ldots + y_n$ avec $x_i, y_i \in F_i$.
$(x_1 - y_1) + \ldots + (x_n - y_n) = 0$. Comme $F_1 \oplus \ldots \oplus F_p$, $x_1 - y_1 = 0, -, x_n - y_n = 0$ □

Proposition 2.6. Soit F_1, F_2 des espaces vectoriels de dimension p et q, $B_1 = \left(e_1, -, e_p\right)$ et $B_2 = \left(e_{p+1}, -, e_{p+q}\right)$ des bases resepctives de F_1 et F_2. Alors la réunion des bases est une base de la somme $F_1 + F_2$ si et seulement si la somme est directe. En particulier,

$$\dim(F_1 \oplus F_2) = \dim(F_1) + \dim(F_2).$$

Démonstration. Montrons que $(e_1, -, e_n)$ est une famille génératrice de la somme $F_1 + F_2$.
Soit $y \in F_1 + F_2 \Rightarrow \exists x_1 \in F_1, x_2 \in F_2, y = x_1 + x_2$. Comme $(e_1, -, e_n)$ engendre F_1,

$$\exists \alpha_1, -, \alpha_p \in \mathbb{R}, x_1 = \sum_{i=0}^{p} \alpha_i e_i \text{ de même, } \exists \alpha_{p+1}, -, \alpha_{p+q} \in \mathbb{R}, x_1 = \sum_{i=p+1}^{p+q} \alpha_i e_i$$

□

2.2. Décomposition d'un espace vectoriel en sous-espace vectoriels stables.

Définition 2.7 (stable)**.** Soit E un esapce vectoriel de dimension finie. Soit $u : E \to E$ une application linéaire. Soit F un sous espace vectoriel de E. On dit que F est stable par u si $u(F) \subset F$, i.e,

$$\forall x \in F, u(x) \in F.$$

Définition 2.8. Soit F un sous-espace vectoriel de E stable par u. La restriction de u à F, définie par: $u|_F : F \to E$ induit une application linéaire de F dans F que par abus de notation on notera $u|_F$.

VOIR COURS

2.3. Sous- espaces propres.

Définition 2.9 (Valeur propre)**.** Soit E un espace vectoriel de dimension finie ou infini,$u : E \to E$, et $\lambda \in \mathbb{R}$. On dit que λ est une **valeur propre** de u s'il existe un vecteur x non nul de E tel que $u(x) = \lambda x$.

Définition 2.10. Soi λ une valeur propre de u. On appelle vecteur de u (associé a la valeur propre λ) tout vecteur x non nul de E tel que $u(x) = \lambda x$.

Proposition 2.11. Soi $\lambda \in \mathbb{R}$, λ est une valeur propre de u si et seulement si

$$\ker(u + \lambda \operatorname{id}_E) \neq \{0\} \Leftrightarrow (u - \lambda \operatorname{id}_E) \text{ n'est pas injectif.}$$

Démonstration. Soit $x \in E$.
$u(x) = \lambda x \Leftrightarrow u(x) = \lambda \operatorname{id}_E(x) \Leftrightarrow u(x) - \lambda \operatorname{id}_E(x) = 0 \Leftrightarrow X \in \ker(u - \lambda \operatorname{id}_E)$ □

Définition 2.12 (sous-espaces propres)**.** Soit $u : E \to E$, et λ une valeur propre de u. On appelle sous-espace propre associé à la valeur propre λ le sous-espace vectoriel stable par u, $\ker(u - \lambda \operatorname{id}_E)$.

Théorème 2.13. Soit $\lambda_1, -, \lambda_p$ p valeurs propres distinctes de u. Alors

$$\ker(u - \lambda_1 \operatorname{id}_E) \oplus \ldots \oplus \ker\big(u - \lambda_p \operatorname{id}_E\big).$$

Démonstration. Initialisation : $p = 1$. Il n'y a rien a démontrer.
Hérédité. Supposons la proposition vraie à un rang $p - 1$ l'est-elle au rang p ?
Soit $x_i \in \ker(u - \lambda_i \operatorname{id}_E)$ tels que $\sum x_i = 0$. En appliquant u à cette équation, on obtient $\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_p x_p = 0$.

$$\begin{cases} x_1 + \ldots + x_p & = 0 \\ \lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_p x_p & = 0 \end{cases} \underset{L_2 - \lambda_p L_1}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x_1 + \ldots + x_p & = 0 \\ (\lambda_1 - \lambda_p) x_1 + \ldots + \lambda_{p-1} x_{p-1} & = 0 \end{cases}.$$

Comme la somme est directe, on a $\big(\lambda_1 - \lambda_p\big)x_1 = \ldots = \big(\lambda_p - 1 - \lambda_p\big)x_{p-1} = 0$.
Comme λ_i sont distincts, $x_1 = \ldots = x_{p-1} = 0$, on obtient $x_p = 0$. On a montré que la somme $\ker(u - \lambda_1 \operatorname{id}_E) + \ldots + \ker\big(u - \lambda_p \operatorname{id}_E\big)$ est directe. □

Proposition 2.14. Soit E un espace vectoriel de dimension n, $u : E \to E$ une application linéaire et $\lambda \in \mathbb{R}$. λ est une valeur propre si et seulement si $\det(u - \lambda \operatorname{id}_E) = 0$.

2.4. Polynomes caractéristique.

Définition 2.15. On appelle polynôme caractéristique de u noté χ_u la fonction
$\chi_u(X) \coloneqq \det\,(X \operatorname{id}_E - u)$.

Proposition 2.16. Soit E un espace vectoriel de dimension n, et $u : E \to E$ une application linéaire. Le polynome caractéristique de u, χ_u est un polynome unitaire de la forme

$$\chi_u(X) = X^n - \operatorname{Tr}(u)X^{n-1} + \ldots + (-1)^n \det\,(u).$$

avec $\operatorname{Tr} u \coloneqq$ « somme des éléments sur la diagonale de la matrice »

Exemple 2.17. Considérons $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4; \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 3x+y+z+t \\ x+3y+z+t \\ x+y+3z+t \\ x+y+z+3t \end{pmatrix}$. Soit A la matrice associée à f dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$. $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

$$\chi_f(X) = \det(X\,\mathrm{id}_{\mathbb{R}^4} - f) = \det(XI_4 - A) = \det\left(X\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - A\right) = \begin{vmatrix} X-3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & X-3 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & X-3 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & X-3 \end{vmatrix}$$

$$\underset{C_1+\ldots+C_4}{=} \begin{vmatrix} X-6 & -1 & -1 & -1 \\ X-6 & X-3 & -1 & -1 \\ X-6 & -1 & X-3 & -1 \\ X-6 & -1 & -1 & X-3 \end{vmatrix} = (x-6)\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & X-3 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & X-3 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & X-3 \end{vmatrix}$$

$$= (X-6)\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & X-2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & X-2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & X-2 \end{vmatrix}_{\substack{L_1 \\ L_2-L_1 \\ L_3-L_1 \\ L_4-L_1}} = (X-6)(X-2)^3.$$

Corollaire 2.18. Les racines du polynome caracteristique d'une application u sont exactement les valeurs propres de u.

Théorème 2.19. Soit E un espace vectoriel de dimension finie n, F un sous espace vectoriel de E, $u : E \to E$ une application linéaire. F est tel qu'il soit stable par u. Alors $\chi_{u|_F}$, le polynome caractéristique de $u|_F$ divise le polynome caractéristique de u, χ_u.

Définition 2.20. Soit $u : E \to E$, λ une valeur propre de u. On appelle multiplicité de la valeur propre sa multiplicité en tant que racine du polynome caractéristique de u.

Théorème 2.21. Soit $u : E \to E$, λ une valeur propre de u de multiplicité k. Alors

$$1 \leq \dim\ker(u - \lambda\,\mathrm{id}_E) \leq k.$$

Démonstration. Soit $F = \ker(u - \lambda\,\mathrm{id}_E)$ le sous-espace propre associé à al valeur propre λ, d sa dimension. Comme F n'est pas réduit à $\{0\}$, d>=1. F est stable par u.
Soit $x \in F$, alors $u(x) = \lambda x \in F$ car $x \in F$ et F est un sous-espace vectoriel. D'après le théorème préc&dent, $\chi_{u_{|F}}$ divise χ_u. Comme $u_{|}F$ est égale à $\lambda\,\mathrm{id}_F$,

$$\chi_{u_{|F}}(X) = (X-\lambda)^d$$

Puisque $(X-\lambda)^d$ divise $\chi(X)$, λ est une racine de χ_X de multiplicité d, supérieure ou égale à d. ☐

3. Diagonalisation.

Définition 3.1 (Diagonalisable)**.** Soit E un espace vectoriel et $u : E \to E$ un endomorphisme. On dit que u est *diagonalisable* si E est la somme (nécessairement directe) de tous les espaces propres de u.

Lemme 3.2. Soit E un espace vectoriel de dimension n, $u : E \to E$ une application linéaire, et $\lambda_1, -, \lambda_p$ les valeurs propres de u.

$$E = F_1 \oplus \cdots \oplus F_p \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{p} \dim \ker(u - \lambda_i \,\mathrm{id}) = n.$$

Démonstration. Comme la somme des sous-espaces propres est directe, on a

$$\dim\big(\ker(u - \lambda_1 \,\mathrm{id}) \oplus \cdots \oplus \ker(u - \lambda_p \,\mathrm{id})\big) = \sum_{i=1}^{p} \dim \ker(u - \lambda_i \,\mathrm{id}).$$

De plus, un sous-espace de E coincide avec E si et seulement si sa dimension est égale à celle de E.
□

Corollaire 3.3. Soit $u : E \to E$ une application linéaire. Si u admet n valeurs propres distinctes, $\lambda_1, -, \lambda_n$, alors u est diagonalisable.

Démonstration. Comme λ_i est une valeur propre, $\dim(u - \lambda \,\mathrm{id}) \geq 1$ donc

$$n \geq \sum_{i=1}^{n} \dim \ker(u - \lambda_i \,\mathrm{id}).$$

Ainsi, d'après le lemme, u est diagonalisable. □

Théorème 3.4. Soit E un espace vectoriel, $u : E \to E$ uen application linéaire. Les propriétés suivantes sont équivalentes.
(1) u est diagonalisable.
(2) Il existe une base de E formée de vecteurs propres de u.
(3) Il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est diagonale.
(4) Le polynôme caracteristique de u est scindée dans $\mathbb{K}[X]$ et pour toute valeur propre, la mulitplicité est égale à la dimension du sous-espace propre associé.

Démonstration.
$*$ 1. $\Rightarrow$ 2. Soit $\lambda_1, -, \lambda_p$ toutes les valeurs propres u, et $(B_i)_{i \in \{1,-,p\}}$ des bases respectives de $\ker(u - \lambda_i \,\mathrm{id})$. Supposons que u est diagonalisable. Alors

$$E = \sum_{i=1}^{p} \ker(u - \lambda_i).$$

Comme la réunion des bases B_i est une base B de E.
$*$ 2. $\Rightarrow$ 3. Soit $B = (e_1, -, e_n)$ une base de E formée de vecteurs propres de u. Comme e_i est un vecteur propre de u, il existe $\alpha_i \in \mathbb{K}, u(e_i) = \alpha_i e_i$ donc la matrice de u dans cette base est la matrice diagonale : mat.
$*$ 3. $\Rightarrow$ 4. Supposons qu'il existe une base $B = (e_1, -, e_n)$ de E telle que la matrice D de u dans B soit diagonale donc e_1 est un vecteur propre de u. Soit $\lambda_1, -, \lambda_p$ les éléments de la diagonale distincts deux à deux qui se retrouvent respectivement m_1 fois , … , m_p fois En échengeant les éléments de la base, nous pouvons supposer que D est la matrice par blocs :

$$u = \begin{pmatrix} \lambda_1 I_{m_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 I_{m_2} & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_p \; I_{m_p} \end{pmatrix}$$

i.e nous pouvons supposer que $e_1, -, e_{m_1}$ sont m_1 vecteurs propres associés à λ_1. $e_{m_1+1}, -, e_{m_1+m_2}$ sont m_2 vecteurs propres associés à λ_2… etc En calculant le polynome caractéristique de D,

$$\chi_u(X) = \Pi_{i=1}^{p} (X - \lambda_i)^{m_i}$$

Donc $\chi_u(X)$ est scindé et a pour racines $\lambda_1, -, \lambda_p$ de multiplicité m_i. Soit $d_i = \dim \ker(u - \lambda_i \operatorname{id}_E)$.
□

Proposition 3.5. Soit E un espace vectoriel, $u : E \to E$ une application diagonalisable, $\lambda_1, -, \lambda_n$ les n valeurs propres de u (chacune étant écrite autant de fois que sa multiplicité). Alors :

$$\operatorname{Tr} u = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \text{ et } \det u = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i.$$

Démonstration. Supposons que u soit diagonalisable. Alors il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est diagonale.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n1} \end{pmatrix}, \chi_A(X) = \prod_{i=1}^{n} (X - a_{ii})$$

docn les a_{ii} sont les valeurs propres de u.

$$\operatorname{Tr} u = \operatorname{Tr} A = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} \text{ et } \det A = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

□

Corollaire 3.6. Soit u un endomorphisme tel que $\chi_u(X)$ soit scindé. Alors

$$\operatorname{Tr}(u) = \sum_{i=1}^{n} m_i \lambda_i \text{ et } \det(u) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i^{m_i}.$$

4. Polynômes d'endomorphismes.

Remarque 4.1 (Notation). Soit E un espace vectoriel, $u : E \to E$ une application linéaire. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on note u^p la composée p fois de u.

Définition 4.2. Soit u une application linéaire et A sa matrice associée On appelle valeur de P en u, l'application linéaire de E dans E, $P(u) := \alpha_q u^q + \ldots + \alpha_1 u + \alpha_0 \operatorname{id}_E$.
De même, on appelle valeur de P en A la matrice carrée $P(A) = \alpha_q A^q + \ldots + \alpha_1 A + \alpha_0$

Remarque 4.3. De manière générale, on peut remarquer que ces définitions ont un sens pour une $\mathbb{K}$ −algèbre

Proposition 4.4. Soit E un esapce vectoriel de dimension n finie, B une base de E, $u : E \to E$, et A la matrice associée à u dans la base B. Alors A^p est la matrice de u^p dans la base B et $P(A)$ est la matrice de $P(u)$ dans la base B.

Démonstration. Considérons l'application $M : L(E) \to M_{n(\mathbb{R})}; u \mapsto A := M(u)$ est un isomorphisme de $\mathbb{K}$ −algèbre. □

Théorème 4.5. Soient $D, N \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ 2 matrices qui commuttent entre elles. Alors la formule du binôme de Newton s'applique.

$$(D+N)^r = \sum_{k=0}^{r} \binom{r}{k} D^k N^{r-k}$$

5. Applications aux suites récurrentes.

Théorème 5.1.
Soit $a_0, -, a_{k-1} \in \mathbb{C}$, et $\chi = X^k - a_{k-1}X^{k-1} - \ldots - a_1X - a_0$.
On considère l'ensemble $\varepsilon := \left\{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+k} = a_{k-1}u_{n+k-1} + \ldots + a_0u_n\right\}$. Alors
$$\{v_n = \lambda^n, \lambda \in \mathbb{R} \setminus 0\} \in \varepsilon \Leftrightarrow \chi(\lambda) = 0.$$

Théorème 5.2. Supposons que ce polynome admettent k racines distinctes simples $\lambda_1, -, \lambda_k$ Alors les k suites géométriques $(\lambda_1^n)_{n\in\mathbb{N}}, -, (\lambda_k^n)_{n\in\mathbb{N}}$ forment une base de ε.

6. Système linéaire d'équations differentielles du 1^er ordre.

Pour cette partie du cours, on notera S le système suivant définit pour tout $\alpha_1, -, \alpha_n \in \mathbb{R}^n$:
$$S := \begin{cases} x_1' = \alpha_{1,1}x_1 + \ldots + \alpha_{n,1}x_n \\ \ldots \\ x_n' = \alpha_{1,n}x_1 + \ldots + \alpha_{n,n}x_n \end{cases}$$

Proposition 6.1. Soit $A \in M_{n\times n}, X : R \to \mathbb{R}^n; t \mapsto \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \ldots \\ x_n(t) \end{pmatrix}, \alpha_1, -, \alpha_n \in \mathbb{R}$.
Les applications $x_1(t), \ldots, x_n(t)$ sont solutions du système diffenrentielle (S) si et seulement si $\forall t \in \mathbb{R}, X'(t) = AX(t)$.

Démonstration. On rappelle que $X = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \ldots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$ est dérivable si et seulement si les $(x_i)_{i\in\{1,-,n\}}$ le sont.
Dans ce cas, $X'(t) = \begin{pmatrix} x_1{}'(t) \\ \ldots \\ x_n{}'(t) \end{pmatrix}$ La suite résulte donc d'une simple solution de système. □

Proposition 6.2. Soit E un espace vectoriel, B et C deux bases de E.Un système différentielle admet des solutions dans la base B si et seulement si il en admet dans la base C.

Théorème 6.3. Soit $A \in M_{n\times n}$ diagonalisable, $\lambda_1, -, \lambda_n \in \mathbb{R}$ ses valeurs propres, $D = (v_1, -, v_n)$ une base de vecteurs propres.

(1) Les solutions du système différentiel S sont les fonctions de la forme:
$$X(t) = \sum_{i=1}^{n} C_i \exp(\lambda_i t)v_i, \quad (C_i)_{i\in\{1,-,n\}} \in \mathbb{R}.$$
(2) Il existe une unique solution du système différentiel S vérifiant une condition initiale $X(0) = \Gamma$. Les constantes sont alors les $C_i = P^{-1}\Gamma$ où P^{-1} est la matrice de passage de D à la base canonique.
(3) L'ensemble des solutions du système différentiel S est un espace vetcoriel de dimension n.

7. Equations differentielles linéaires à coefficients constants.

On notera S l'équation différentielle linéaire à coefficients constants d'ordre k,
$$(S) := \left(y^{(k)} = a_{k-1}y^{(k-1)} + \ldots + a_1y' + a_0y\right)$$

Théorème 7.1. Soit S le système d'équations précédent. Soit $P \coloneqq X^k - a_{k-1}X^{k-1} - \ldots - a_0$. Si P admet k racines,

(1) Les solutions de (E) sont de la forme

$$y(t) = \sum_{i=1}^{n} C_i \exp(\lambda_i t) v_i, \quad (C_i)_{i \in \{1,-,n\}} \in \mathbb{R}.$$

(2) Il existe une unique solution y de (E) vérifiant la condition initiale

$$\begin{cases} y(0) & = y_0 \\ y'(0) & = y_1 \\ \ldots \\ y^{(k-1)}(0) & = y_{k-1} \end{cases}.$$

(3) L'nesmble des solutions de (E) est un espace vectoriel de dimension k de base $\left(e^{\lambda_i t}\right)_{i \in \{1,-k\}}$ où λ_i désignent les racines de P.

Démonstration. Pour arriver à ce resultat on cehrche directement les solutions de la forme $y(t) = e^{\lambda t}$ en remplacant dans le système et divisant par $e^{\lambda t}$, on obtient que y est solution si et seulement si λ est solution du polynôme P. □

Proposition 7.2. Toute équation différentielle linéaire d'ordre k est équivalente à un système de k équations du 1^er ordre.