Géométrie affine et euclidienne

Table des matières

1. Géométrie affine.

1.1. Espaces affines

Définition 1.1. Soit E un espace vectoriel. Un ensemble (non vide) $\mathcal{E}$ est un *espace affine* s'il existe une application $\theta : \mathcal{E}x\mathcal{E} \to E\ ;\ (A, B) \mapsto \overrightarrow{AB}$ telle que :
(1) Pour tout $A \in \mathcal{E}$ fixé, l'application $\theta_A : \mathcal{E} \to E\ ;\ B \mapsto \overrightarrow{AB}$ est bijective.
(2) Pour tout $A, B, C \in \mathcal{E}$, on a $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ (relation de Chasles).

Remarques 1.2.
(1) Les elements de $\mathcal{E}$ sont les points.
(2) La dimension de $\mathcal{E}$ est celle de E.
(3) L'espace vectoriel E est appelé la direction de $\mathcal{E}$, on dit aussi que $\mathcal{E}$ est dirigé par E.
On notera $(\mathcal{E}, E)$.

Exemple 1.3. Tout espace vectoriel E admet une structure naturelle d'espace affine.
Soit $\theta : ExE \to E\ ;\ (u, v) \mapsto v - u$. On vérifie les deux conditions de la définition d'un espace affine.
1. Soit $u \in \mathcal{E}$. L'application $\theta_u : \mathcal{E} \to \mathcal{E}\ ;\ v \mapsto v - u$ est bijective car la réciproque existe : $v \mapsto v + u$
2. $\overrightarrow{uv} + \overrightarrow{vw} = v - u + w - v = w - u = \overrightarrow{uw}$.

Exercice 1. Soit $f : E \to E', g : E' \to E$ telle que $f \circ g = \mathrm{id}_{E'}, g \circ f = \mathrm{id}_E$ alors f et g sont bijectives.

Remarque 1.4. La relation de Chasles donne
(1) $\overrightarrow{AA} + \overrightarrow{AA} = \overrightarrow{AA}$ donc $\overrightarrow{AA} = 0$
(2) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA} = 0$ donc $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$.

Proposition 1.5 (règle du parallélogramme)**.** Soit $A, A', B, B' \in \mathcal{E}$.

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'} \Leftrightarrow \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'}$$

Démonstration.
$\Rightarrow \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{B'A'} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{A'B'} + \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{BB'}$
$\Leftarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB'} + \overrightarrow{B'B} = \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'B'} + \overrightarrow{B'B} = \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'B'} - \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{A'B'}$. □

Définition 1.6. Soit $A, A', B, B' \in \mathcal{E}$. On dit que $ABB'A'$ forme un parallélogramme s'ils vérifient la règle du parallélogramme.

Proposition 1.7. Soit $A \in \mathcal{E}, u \in E$. Il existe un unique $B \in \mathcal{E}$ tel que $\overrightarrow{AB} = u$.

Démonstration. θ_A est bijective. □

Notation 1.8. On pourra noter $B = A + u$.

1.2. Sous-espaces affines.

Définition 1.9. Soit $(\mathcal{E}, E)$, $\mathcal{F} \subset \mathcal{E}$. On dit que $\mathcal{F}$ est un sous-espace affine de $\mathcal{E}$ s'il existe $A \in \mathcal{F}$ tel que $\theta_A(\mathcal{F})$ est un sous-espace vectoriel de E.

Proposition 1.10. Si $\mathcal{F} \subset \mathcal{E}$ est un sous-espace affine dirigé par F alors
$$\forall B \in \mathcal{F}, \theta_B(\mathcal{F}) = F.$$

Démonstration. Il existe $A \in \mathcal{F}$ tel que $\theta_A(\mathcal{F}) = F$. On veut montrer que $\theta_A(\mathcal{F}) = \theta_B(\mathcal{F})$.

(1) Soit $u \in \theta_A(\mathcal{F})$. On montre que $u \in \theta_B(\mathcal{F})$.
Comme θ_B est bijective, on peut trouver $N \in \mathcal{E}$ tel que $\overrightarrow{BN} = u$. Or $\overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BN} \in \theta_A(\mathcal{F})$. Ainsi, $N \in \mathcal{F}$ et $u = \overrightarrow{BN} \in \theta_B(\mathcal{F})$

(2) On montre $\theta_B(\mathcal{F}) \subset \theta_A(\mathcal{F})$. Soit $u \in \theta_B(\mathcal{F})$ alors $u = \overrightarrow{BM}$ avec $M \in \mathcal{F}$. Par la relation de Chasles, $u = \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AM} \in \theta_A(\mathcal{F})$ donc $u \in \theta_A(\mathcal{F})$.

□

Proposition 1.11. Soit $A \in \mathcal{E}$ et $F \subset E$ un sous-espace vectoriel. Il existe un unique sous-espace affine $\mathcal{F} \subset \mathcal{E}$ qui passe par A et dirigé par F.

Démonstration. $\mathcal{F} = \{A + u \mid u \in F\} = \left\{M \in \mathcal{E} \mid \overrightarrow{AM} \in F\right\}$. Soit $B \in \mathcal{F}$,
on pose $\theta_A : \mathcal{F} \to F\ ;\ M \mapsto \overrightarrow{BM}$.

(1) Puisque $B \in \mathcal{F}$, $\theta_A(B) = \overrightarrow{AB} = u \in F$.

(2) Soit $u, v, w \in \mathcal{F}$, alors $u, v, w \in \mathcal{E}$ or puisque $\mathcal{E}$ est un sous-espace affine, u, v, w verifient la relation de chasles. Ainsi, F est bien un sous-espace affine de direction F.

(3) De plus, $A + 0 = A \in \mathcal{F}$ donc $\mathcal{F}$ passe par A.

□

Proposition 1.12. Soit $f : E \to F$ une application linéaire entre deux espaces vectoriels.
Si $v \in f(E)$ alors $f^{-1}(v)$ est un sous-espace affine de E dirigé par $\ker(f)$.

Démonstration. Soit $u \in f^{-1}(v)$. On montre que $w \in f^{-1}(v) \Leftrightarrow \theta(u, w) \in \ker f$. En effet,
$$\begin{aligned} w \in f^{-1}(v) \Leftrightarrow f(w) = v &\Leftrightarrow f(w) = f(u) \\ &\Leftrightarrow f(w - u) = 0 \\ &\Leftrightarrow w - u \in \ker(f) \Leftrightarrow \theta(u, w) \in \ker(f) \end{aligned}$$
□

Remarque 1.13.

(1) Un sous espace affine de dimension 0 est constitué d'un seul point.

(2) Un sous-espace affine de dimension 1 est une droite.

(3) un sous-espace affune de dimension 2 est un plan

Exemple 1.14. Dans $\mathbb{R}^n$, les solutions d'une équation $\sum_{i=1}^n a_i x_i = b$ forment un sous-espace affine de $\mathbb{R}^n$ dirigé par l'espace vectoriel $\{\sum a_i x_i = 0\}$:

Proposition 1.15. Les sous-espaces affines de E sont de la forme $G + v_0$ où $G \subset E$ est un sous-espace vectoriel et $v_0 \in E$.

Démonstration. exercice. □

Proposition 1.16. Un sous-espace affine E est un sous-espace vectoriel si et seulement il contient 0.

Démonstration. En effet supposons que $\mathcal{G} \subset E$ soit un sous-espace affine contenant 0. Soit G la direction de $\mathcal{G}$. Alors $\mathcal{G} = G + 0 = G$ est un sev de E. □

1.3. Sous-espaces affines engendrés par une partie.

Notation 1.17. Soit $(\mathcal{E}, E)$ un espace affine, S une partie non-vide de $\mathcal{E}$. $\langle S\rangle$ est l'intersection de tout les sous-espaces affines de $\mathcal{E}$ contenant S.

Proposition 1.18. Soit $(\mathcal{F}_\alpha)_{\alpha\in I}$ une famille de sous-espaces affines de $\mathcal{E}$ tel que $\bigcap_{\alpha\in I} \mathcal{F}_\alpha \neq \varnothing$. Alors $\bigcap F_\alpha$ est un sous-espace affine de $\mathcal{E}$.

Démonstration. Soit $A \in \bigcap_{\alpha\in I} F_\alpha =: \mathcal{F}$. Soit $F_\alpha := \theta_A(\mathcal{F}_\alpha)$. Alors F_α est un sous-espace vectoriel de E. Montrons $F := \bigcap_{\alpha\in I} F_\alpha = \theta_A(\mathcal{F})$. Donc F est un sous-espace vectoriel de E
Montrons $\theta_A(F) = \bigcap_{\alpha\in I} \theta_A(F_\alpha) \subset$ « facile »
$\supset$ Soit $v \in \bigcap_{\alpha\in I} \theta_A(F_\alpha)$ Par surjéctivité de θ_A, on peut trouver $B \in \mathcal{E}$ tel que $\overrightarrow{AB} = v$. Pour chaque $\alpha \in I$, on a $v \in \theta_A(\mathcal{F}_\alpha)$ donc

$$v = \overrightarrow{AM_\alpha}, M_\alpha \in F_\alpha \Rightarrow B = M_\alpha \in \mathcal{F}_\alpha \forall \alpha \Leftrightarrow B \in \bigcap_{\alpha\in I} \mathcal{F}_\alpha$$

□

Exemple 1.19. Soit $\{A_1, ..., A_k\}$ une partie de $\mathcal{E}$ Alors $\langle A_0, ..., A_k\rangle$ est le sous-espace affine $A_0 + \left\langle \overrightarrow{A_0A_1}, ..., \overrightarrow{A_0A_k}\right\rangle$.

Montrons $\langle A_0, ..., A_k\rangle = A_0 + \left\langle \overrightarrow{A_0A_1}, ..., \overrightarrow{A_0A_k}\right\rangle$. Soit $(\mathcal{F}, F)$ une sous-espace affine de $\mathcal{E}$ qui contient $A_0, ..., A_k$, alors $A_0 \in \mathcal{F}$. Donc $\overrightarrow{A_0A_1}, \overrightarrow{A_0A_k}) \in F$ et $A_0 + \left\langle \overrightarrow{A_0A_1}, ..., \overrightarrow{A_0A_k}\right\rangle \subset \mathcal{F}$. De plus$A_0 + \left\langle \overrightarrow{A_0A_1}, ..., \overrightarrow{A_0A_k}\right\rangle$ est un sous-espace affine qui contient $A_0, A_1 = A_0 + \overrightarrow{A_0A_1}, ..., a_k = A_0 + \overrightarrow{A_0A_k}$. Ainsi, $\langle A_0, ...A_k\rangle \subset A_0 + \left\langle \overrightarrow{A_0A_1}, ..., \overrightarrow{A_0A_k}\right\rangle$.

Remarque 1.20. On a $\dim \langle A_0, ..., A_k\rangle \leq k$.

Définition 1.21 (Affinement indépendante). Soit $\{A_1, ..., A_k\}$ une partie de $\mathcal{E}$. On dit que la famille est *affinement indépendante* si $\langle A_0, ...A_k\rangle$ est de dimension k.

Définition 1.22 (Repère affine). Soit $\{A_1, ..., A_k\}$ une famille affinement indépendante, et $\mathcal{E} := \langle A_0, ...A_k\rangle$. Alors on dit que $\{A_1, ..., A_k\}$ est un *repère affine* de $\mathcal{E}$.

Exemple 1.23. Un repère affine d'une droite est constitué de 2 points.

Notation 1.24.
(1) $\langle A, B\rangle, A \neq B$ désigne la droite passant par A et B. On la note aussi AB.
(2) $[AB]$ désigne le segment défini par $[AB] := \left[M \in \mathcal{E} \mid \overrightarrow{AM} = \lambda\overrightarrow{AB}, \lambda \in [0, 1]\right]$

1.4. Parallélisme.

Définition 1.25 (Parallèle). Soit $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ deux sous-espaces affines. On dit que $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sont parallèles s'ils ont la même direction. On note $\mathcal{F} \mathbin{/\!/} \mathcal{G}$.

Remarque 1.26. Une droite n'est pas parallèle à un plan.

Proposition 1.27. Soit E, F deux espaces vectoriels, $f : E \to F$ une application linéaire. Alors $\forall v, w \in f(E)$, on a $f^{-1}(v) \parallel f^{-1}(w)$.

Démonstration. Par la Proposition 1.12, on a que $f^{-1}(v)$ et $f^{-1}(w)$ sont dirigés par $\ker(f)$. □

Proposition 1.28. Si $\mathcal{F} \parallel \mathcal{G}$ et $F \cap G \neq \varnothing$, alors $\mathcal{F} = \mathcal{G}$.

Démonstration. Soit $A \in F \cap G$. Alors $\mathcal{F} = A + F, \mathcal{G} = A + G$ mais $F = G$ par parallélisme de $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ d'où $\mathcal{F} = \mathcal{G}$. □

Proposition 1.29. Soit D une droite. Par tout point de A d'un espace affine, passe une unique droite D' parallèle à D.

Démonstration. $D' = A_{\text{point}} + D_{\text{direction}}$. □

Proposition 1.30. Soit $(\mathcal{F}, F)$, $(\mathcal{G}, G)$ deux sous-espaces affines de $(\mathcal{E}, E)$. On suppose $F + G = E$. Alors tout sous-espace affine parallèle à $\mathcal{F}$ rencontre $\mathcal{G}$.

Démonstration. Soit $\mathcal{H}$ un sous-espace affine de $\mathcal{E}$ parralèle à $\mathcal{F}$. Montrons que $H \cap G \neq \varnothing$. Soit $A \in \mathcal{H}, B \in \mathcal{G}$. On peut écrire $\overrightarrow{AB} = u + v$ avec $u \in F, v \in G$. On pose $\theta_A : \mathcal{H} \to H, \theta_B : \mathcal{G} \to G$ et on a $\theta_A(\mathcal{H}) = H$ et $\theta_B(\mathcal{G}) = G$. On peut écrire $u = \overrightarrow{AC}, C \in \mathcal{H}, v = \overrightarrow{DB}, D \in \mathcal{G}$.
On a $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} \Leftrightarrow \overrightarrow{DC} = 0 \Leftrightarrow D = C \in \mathcal{H} \cap \mathcal{G}$. □

Corollaire 1.31. Dans un plan affine $(\mathcal{E}, E)$ deux droites distinctes non parallèles se rencontrent en un seul point.

Démonstration.
unicité : Si D, D' se coupent en deux points $A \neq B$ alors $D = \langle A, B \rangle, D' = \langle A, B \rangle$ donc $D = D'$.
$D \cap D' \neq \varnothing$. D est dirigée par $\langle u \rangle$, D' est dirigée par $\langle v \rangle$. $\langle u \rangle \neq \langle v \rangle \Rightarrow \{u, v\}$ est linéairement indépendante. DOnc $\langle u \rangle + \langle v \rangle$ est de dimension 2. Or E est aussi de dimension 2 Par conséquent, $\langle u \rangle + \langle v \rangle = E$ par la proposition on a $D \cap D' \neq \varnothing$. □

2. Barycentres

Définition 2.1 (Points pondérés)**.** Soit $(\mathcal{E}, E)$ un espace affine, $A_1, \dots, A_r$ des points de $\mathcal{E}$, et $\alpha_1, \dots, \alpha_r \in \mathbb{R}$. On appelle système de points pondérés un ensemble $\{(A_1, \alpha_1), \dots, (A_r, \alpha_r)\}$.

Lemme 2.2. On suppose $\sum_{j=1}^r \alpha_j = 1$. Alors il existe un unique $A \in \mathcal{E}$ tel que $\sum \alpha_j \overrightarrow{AA_j} = 0$.

Démonstration. Soit $O \in \mathcal{E}$, $A \in \mathcal{E}$ tel que $\overrightarrow{OA} = \sum_{j=1}^r \alpha_j \overrightarrow{OA_j}$. Alors par la relation de chasles, $\overrightarrow{OA} = \sum \alpha_j \left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AA_j}\right)$ donc $\sum_{j=1}^r \alpha_j \overrightarrow{AA_j} = 0$. Réciproquement, si A vérifie l'égalite, Alors $\overrightarrow{OA} = \sum \alpha_j \overrightarrow{OA} = \sum \alpha_j (\to (OA) + \overrightarrow{A_j A} \sum \alpha j \overrightarrow{OA}$. □

Remarque 2.3. On pourrait parler d'existence d'un milieu.

Exemple 2.4.
1. Soit $(A_1), \dots, (A_2)$, $\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{1}{2}$. Alors A est le milieu de $A_1 A_2$ $\frac{1}{2}\overrightarrow{AA_1} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AA_2} = 0$.
2. $A_1, A_2, A_3, \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \frac{1}{3}$. On obtient le centre de gravité d'un triangle.