# Algèbre linéaire et bilinéaire

## Table des matières



## 1. Rappels d'algèbre linéaire.

### 1.1. Sous-espaces vctoriels.

**Définition 1.1.** Soit $E$ un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. On dit que $F \subseteq E$ est un sous-espace vectoriel si
(1) $\forall (x, y) \in F^2, \forall \lambda \in \mathbb{K}, \lambda x + y \in F$,
(2) $0 \in F$.

**Proposition 1.2.** Soit $F, G$ des sous-espaces vectoriels de $E$. Alors $F \cap G$ et $F + G$ sont des sous-espaces vectoriels de $E$.

**Définition 1.3.** Soit $A \subseteq E$ un sous-ensemble, on peut definir le plus petit sous-espace vectoriel contenant $A$ par : $\mathrm{Vect}(A) = \left\{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i, a_i \in A, \lambda_i \in \mathbb{K}\right\}$.

**Remarque 1.4.** Si $A = \{v\}, v \in E, v \neq 0$, $\mathrm{Vect}(A) = \mathrm{Vect}(v) = kv$.

**Définition 1.5.** Soit $F, G \subseteq E$ des sous-espaces vectoriels. On dit que $F$ et $G$ sont en somme directe si $F \cap G = \{0\}$.

### 1.2. Familles de vecteurs et bases.

**Définition 1.6.** Soit $(x_1, \ldots, x_n) \in E^n, (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. On dit que $(x_1, \ldots, x_n)$ est une famille libre si

$$\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0$$

**Définition 1.7.** Une famille infinie est libre si toute sous-famille finie est libre.

**Définition 1.8.** Soit $\mathcal{F} = (x_1, \ldots, x_n) \in E^n$. On dit que $\mathcal{F}$ est génératrice de $E$ si $\mathrm{Vect}(\mathcal{F}) = E$.

**Définition 1.9.** On appelle base de $E$ toute famille libre et génératrice de $E$.

**Définition 1.10.** On appelle dimension de $E$ le cardinal d'une base de $E$.

**Proposition 1.11** (changement de base). Soit $\mathcal{E} = e_1, \ldots, e_n$ et $\mathcal{F} = f_1, \ldots, f_n$ deux bases de $E$. Soit $x \in E$. Il existe d'unique $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$.
On note $[x]_{\mathcal{E}} := \begin{pmatrix} x_1 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} \in M_{nx1}(\mathbb{K})$, et $\mathrm{Pass}_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}} = \left([f_1]_{\mathcal{E}} \ \cdots \ [f_n]_{\mathcal{E}}\right) \in M_{nxn}(\mathbb{K})$ On a :

$$[x]_{\mathcal{E}} = \mathrm{Pass}_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}} [x]_{\mathcal{F}}.$$

### 1.3. Applications linéaires.

**Définition 1.12.** Soit $u : E \to F$ une application. On dit que $u$ est linéaire si $\forall x, y \in E^2, \forall \lambda \in \mathbb{K}$, $u(\lambda x + y) = \lambda u(x) + u(y)$.

**Notation 1.13.** On note $\mathcal{L}(E, F)$ l'espace vectoriel des applications linéaires de $E$ dans $F$ et $\mathcal{L}(E)$ l'espace vectoriel des endomorphismes.

**Définition 1.14.** Soit $E$ un espace vectoriel, $u \in \mathcal{L}(E)$ On appelle noyau de $u$ l'ensemble $\ker(u) = \{x \in E|\ u(x) = 0\}$.

**Définition 1.15.** Soit $E$ un espace vectoriel, $u \in \mathcal{L}(E)$. On appelle image de $u$ l'ensemble $\mathrm{Im}(u) = \{y \in F|\ \exists x \in E, y = u(x)\}$.

**Théorème 1.16** (théorème du rang)**.** Soit $E$ un espace vectoriel de dimension finie, $u : E \to E$.

$$\dim(E) = \dim(\ker(u)) + \dim(\dim(u)).$$

*Démonstration.* Notons $p \coloneqq \dim(\ker(u)), n \coloneqq \dim(E)$. Soit $(e_1, \dots, e_p)$ une base de $\ker(u)$. Par le théorème de la base incomplète, on note $(e_1, \dots, e_p, (e_{p+1}, \dots, e_n))$.
Une base de $\mathcal{Im}(u)$ est $\mathrm{Vect}(u(e_1), \dots, u(e_p), u(e_{p+1}), \dots, u(e_n)) = \mathrm{Vect}(u(e_{p+1}), \dots, u(e_n))$. Verifions que $(u(e_{p+1}), \dots, u(e_n))$ est une famille libre. Soit $(\lambda_{p+1}, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \lambda_{p+1}u(e_{p+1}) + \dots + \lambda_n u(e_n) = 0 &\Leftrightarrow u(\lambda_{p+1}e_{p+1} + \dots + \lambda_n e_n) = 0 \\ &\Leftrightarrow \lambda_{p+1}e_{p+1} + \dots + \lambda_n e_n \in \ker(u) \\ &\Leftrightarrow \exists(\lambda_1, \lambda_p) \in \mathbb{R}, \lambda_{p+1}e_{p+1} + \dots + \lambda_n e_n = \lambda_1 e_1 + \dots \lambda_p e_p \end{aligned}$$

Or $\lambda_1 e_1 + \dots \lambda_p e_p \neq 0$ car c'est une famille libre. D'où, $\mathrm{Vect}(u(e_{p+1}), \dots, u(e_n))$ libre. Ainsi, on a $\dim(\mathrm{Vect}(u(e_{p+1}), \dots, u(e_n))) = \dim(\mathcal{Im}(u)) = n - p = \dim(E) - \dim(\ker(u))$.
On a bien montré, $\dim(\ker(u)) + \mathrm{rg}(u) = \dim(E)$. □

**Corollaire 1.17.** Soit $u : E \to E$ un endomorphisme, $\ker(u) = 0 \underset{1}{\Leftrightarrow} u$ injective $\underset{2}{\Leftrightarrow} u$ surjective.

*Démonstration.*
(1) $\Rightarrow$ Soit $f$ une application linéaire injective. On a nécessairement $0_E \in \ker(f)$ or $f$ est injective, donc $\forall x \in E, x \neq 0_E \Rightarrow f(x) \neq 0$ d'où $\ker(f) = \{0_E\}$.
$\Leftarrow$ Soit $f$ une application linéaire tel que $\ker(f) = \{0_E\}$. Supposons par absurde $f$ non injective. Alors $\exists u \neq v \in E, f(u) = f(v)$. Donc $f(u - v) = f(u) - f(v) = 0$ impossible car $u \neq v$.
(2) $\Rightarrow$ Supposons $f$ injective. Alors $\ker(f) = \{0\} \Rightarrow \dim(\ker(f)) = 0 \Rightarrow \dim(\mathcal{Im}) = \dim(E) = \dim(F)$ d'où $f$ surjective.
$\Leftarrow$ Supposons $f$ surjective. Alors $\dim(\mathcal{Im}) = \dim(F) \Rightarrow \dim(\ker(f)) = 0$ d'où $f$ injective.

□

**Théorème 1.18.** Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$,$g \in \mathcal{L}(F, G)$.

$$[g \circ f]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}} = [g]_{\mathcal{F}}^{\mathcal{G}}[f]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}}.$$

**Corollaire 1.19.** Soit $E, \mathcal{E}, \mathcal{F}$ deux bases de $E$, et $u \in \mathcal{L}(E)$. On note $P = \mathcal{P}\mathrm{ass}_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}} = [\mathrm{id}_E]_{\mathcal{F}}^{\mathcal{E}}$

$$[u]_{\mathcal{F}} = [\mathrm{id}_E]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}}[u]_E[\mathrm{id}_E]_{\mathcal{F}}^{\mathcal{E}} = P^{-1}[u]_{\mathcal{E}}P.$$

$p(x) \in \mathbb{K}(x)$
$u(p(x)) = p(u(x)) = \lambda x, \lambda \in \mathbb{K}$
$u(p(x)) = u(\lambda x) = \lambda u(x) \Leftrightarrow u(x) = \lambda_2 x$