Licence 3 de mathématiques à distance

Cours d'analyse complexe

Lionel BAYLE

17 janvier 2024

Chapitre 1, partie 1.
Les fonctions holomorphes.

Table des matières

Ressources disponibles.

• 1 vidéo de présentation du chapitre.
• 1 QCM, interactif avec le cours (liens cliquables), accessible après avoir été étudié en classe virtuelle.
• 1 recueil d'exercices, interactif avec le cours (liens cliquables si les fichiers sont dans le même dossier).
• 1 fiche méthodologique.
• 1 formulaire récapitulant les principales définitions et les principaux résultats.
• 1 classe à distance au moins par semaine, *au cours de laquelle je répondrai à vos questions sur les exercices, je ferai une présentation détaillée de certaines parties du cours et proposerai des QCM afin de vous permettre de tester votre compréhension du cours et des exercices.* Le lien ne sera actif, qu'aux horaires que j'indiquerai pour les classes virtuelles.
• 1 sondage sur votre avancement dans le cours (disponible sur Moodle).
• 1 fichier "Déroulé du cours" indiquant la progression dans le cours (disponible sur Moodle).
• 1 fichier "Vidéos des classes à distance" indiquant le programme des classes à distance et donnant accès au enregistrement des classes (disponible sur Moodle).

Cliquez pour écouter mes conseils., puis cliquez sur l'écran qui apparaît.

Bonjour,
-Ce chapitre étudie la notion de dérivabilité d'une application de la variable complexe.
-J'utilise l'écriture en italique bleu quand je donne des consignes de travail, des idées pour vous guider dans une démonstration, des conseils méthodologiques ou pour expliquer une terminologie.
-Je suis à votre disposition pour répondre à vos questions sur le forum et je souhaite que ce soit en priorité les étudiants qui répondent aux questions, quand ils connaissent la réponse. J'indiquerai alors si les réponses sont justes, je les complèterai ou les corrigerai.
-Pouvoir discuter avec moi des notions étudiées vous aidera beaucoup, je vous invite donc à participer aux classes virtuelles. Vous pouvez me demander d'ajouter des classes virtuelles, en plus de celles que j'ai prévues, si cela peut vous aider.

N'hésitez pas à me poser des questions via le forum ou les classes virtuelles, s'il y a des points que vous ne comprenez pas bien.

Bon travail.

Lionel Bayle.

Comment utiliser ce cours.

-Je vous conseille de commencer par visionner la vidéo de présentation de ce chapitre, afin d'avoir une idée de ce que vous allez étudier.
-Ensuite, je vous conseille de lire le paragraphe "Objectifs et compétences recherchées", c'est un résumé des notions clés que nous allons étudier.
-Lors du travail sur la feuille d'exercices, cherchez les exercices, puis comparez votre solution à celle proposée. Si vous avez une solution différente de celle proposée, vous pouvez la soumettre sur le forum, afin de savoir si c'est juste.
-Si vous n'arrivez pas à faire un exercice, aidez-vous des indications. Il y a en général, plusieurs indications afin de vous permettre d'arriver à la solution. Si vous n'arrivez toujours pas à faire l'exercice, aidez-vous du corrigé, puis refaites l'exercice quelques jours plus tard sans utiliser le corrigé.
-Relisez régulièrement le cours et dressez une liste de définitions et résultats qui vous semblent importants. L'étude de cette liste, vous aidera à apprendre le cours.
-Une fois le cours et la feuille d'exercices étudiés, répondez aux questions du QCM. En cas d'erreurs, recommencez le QCM quelques jours plus tard.
-Le cours et les travaux dirigés sont interactifs, il y a des liens cliquables qui relient le cours et les travaux dirigés. Pour utliser cette interactivité, vous devez télécharger les fichiers dans un même dossier en conservant leurs noms.
-Vous avez à votre disposition des enregistrements sonores et des vidéos, il faut cliquer sur les boîtes jaunes pour y accéder, puis cliquer sur l'écran qui apparaît.

Écoutez-moi.

Prérequis.

-Savoir montrer qu'un sous-ensemble de $\mathbb{C}$ est ouvert.
-Savoir calculer les dérivées partielles d'une application définie sur un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R}^2$.
-Savoir étudier la différentiabilité d'une application définie sur un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R}^2$.

Objectifs et compétences recherchées.

L'objectif de ce chapitre est d'étudier la notion de dérivabilité d'une application d'une variable complexe.

À l'issue de ce cours vous devrez être capables de :
-de montrer qu'une application de la variable complexe est dérivable et calculer sa dérivée, à l'aide de la définition de la dérivée.
-de montrer qu'une application n'est pas holomorphe à l'aide de sa non continuité.
-de déterminer si une application différentiable est dérivable au sens complexe, à l'aide des conditions étudiées.
-de montrer qu'une application est holomorphe (donc de distinguer les notions de dérivabilité et d'holomorphie).
-de calculer à l'aide des dérivées partielles en z et $\bar{z}$.
-d'écrire une différentielle à l'aide des dérivées partielles en z et $\bar{z}$.
-de montrer qu'une application est dérivable à l'aide de la condition de dérivabilité en coordonnées cartésiennes ou des conditions de Cauchy en coordonnées cartésiennes.
-de retrouver les conditions de Cauchy en coordonnées cartésiennes en fonction de la condition de dérivabilité en coordonnées cartésiennes et vice versa.
-de montrer qu'une application est dérivable à l'aide de la condition de dérivabilité en coordonnées polaires ou des conditions de Cauchy en coordonnées polaires.
-de retrouver les conditions de Cauchy en coordonnées polaires en fonction de la condition de dérivabilité en coordonnées polaires et vice versa.

1 Dérivabilité.

Définition 1 (dérivabilité en un point)**.**

Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$, on dit que la fonction $f : U \to \mathbb{C}$ est dérivable (au sens complexe) en $a \in U$, si l'expression $\dfrac{f(z) - f(a)}{z - a}$ a une limite l appartenant à $\mathbb{C}$ quand z tend vers a, $z \neq a$. C'est à dire $\exists l \in \mathbb{C}$, tel que $\forall \epsilon > 0,\ \exists d > 0$ tel que $|z - a| < d$ et $z \in U \Rightarrow \left|\dfrac{f(z) - f(a)}{z - a} - l\right| < \epsilon$. Cette limite est alors notée $f'(a)$ et est appelée dérivée de f en a.

Remarque 1.
C'est la même définition que pour la dérivée d'une fonction d'une variable réelle mis à part que z est dans $\mathbb{C}$.

Dans la suite f désigne une application d'un ouvert U de $\mathbb{C}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$.

Définition 2 (fonction holomorphe)**.**

On dit que f est holomorphe dans U si elle est dérivable (au sens complexe) en tout point de U. f' est aussi notée $\dfrac{\mathrm{d}\, f}{\mathrm{d}\, z}$. On dit que f est holomorphe en $a \in U$ si elle est holomorphe dans un voisinage de a.

Exemple 1.

$\mathrm{Id} : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ z \mapsto z$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$ car elle est dérivable en tout point de $\mathbb{C}$, de dérivée la fonction constante égale à 1.
$\dfrac{\mathrm{Id}(z) - \mathrm{Id}(a)}{z-a} = \dfrac{z-a}{z-a} = 1 \underset{z \to a}{\to} 1$, on a $\mathrm{Id}'(z) = 1$, $\forall z \in \mathbb{C}$.

Exemple 2.

$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ z \mapsto z^2$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$. En effet, $\dfrac{f(z) - f(a)}{z-a} = \dfrac{z^2 - a^2}{z-a} = z + a \underset{z \to a}{\to} 2a$, $f'(a) = 2a$ donc $f' = 2\,\mathrm{Id}$.

Exemple 3.

$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ z \mapsto |z|$ n'est dérivable en aucun point de $\mathbb{C}$.
Si $a \neq 0$, $\dfrac{f(z) - f(a)}{z-a} = \dfrac{|z| - |a|}{z-a}$, or cette expression n'a pas de limite quand $z \to a$, puisque on va trouver deux directions de $\mathbb{C}$ différentes, selon lesquelles cette quantité a des limites différentes.
Si $z = a + ua$, $u \in \mathbb{R}^{+*}$, $\dfrac{f(z) - f(a)}{z-a} = \dfrac{|a + ua| - |a|}{ua} = \dfrac{|a|(1+u) - |a|}{ua} = \dfrac{|a|}{a} \to \dfrac{|a|}{a}$, quand $u \to 0$.
Si $z = a + iua$, $u \in \mathbb{R}^{+*}$, $\dfrac{f(z) - f(a)}{z-a} = \dfrac{\mid 1 + iu \mid\mid a \mid - \mid a \mid}{iua} = \dfrac{(\sqrt{1+u^2} - 1) \mid a \mid}{iua} \sim \dfrac{1}{2}\dfrac{u^2}{iu}\dfrac{\mid a \mid}{a} = \dfrac{1}{2i} u \dfrac{\mid a \mid}{a} \to 0$, quand $u \to 0$. Donc f n'est pas dérivable en $a \in \mathbb{C}^*$.
f n'est pas dérivable en 0 car $\dfrac{f(z) - f(0)}{z - 0} = \dfrac{\mid z \mid}{z}$ tend vers 1 si z tend vers 0 en appartenant à $\mathbb{R}^+$ et vers -1 si z tend vers 0 en appartenant à $\mathbb{R}^-$.

Exemple 4.

Un polynôme $P(z) = \sum_{n=0}^N a_n z^n$ est holomorphe dans $\mathbb{C}$ de dérivée $P'(z) = \sum_{n=0}^N n a_n z^{n-1}$.

Entraînez-vous avec l'exercice n°1.
Entraînez-vous avec l'exercice n°2.

Remarque 2.
Expliquez sur le forum, pourquoi dans l'exemple précédent, j'ai le droit de commencer la sommation à $n = 0$, alors qu'habituellement on commence à $n = 1$. Quel est l'intérêt de faire cela ?

Proposition 1.

Soient f et g deux fonctions dérivables de $U \to \mathbb{C}$, $\lambda \in \mathbb{C}$, alors $f + g$, λf, fg, f^n sont dérivables et $(f + g)' = f' + g'$, $(\lambda f)' = \lambda f'$, $(fg)' = f'g + fg'$, $(f^n)' = nf'f^{n-1}$. En les points où g ne s'annule pas $\frac{f}{g}$ est dérivable de dérivée $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$. Une composée d'applications holomorphes est holomorphe.

Preuve :
La preuve est similaire à la preuve faite pour la dérivation des applications de la variable réelle.

Application 1.

On note $\mathbb{C}(x)$ l'ensemble des fractions rationnelles obtenues par quotient de deux polynômes de $\mathbb{C}[x]$, une telle fonction est holomorphe sur son domaine de définition, $\mathbb{C}$ privé des pôles de la fraction rationnelle.

Définition 3 (continuité)**.**

$f : U \to \mathbb{C}$ est continue en $a \in U$ si $\forall \epsilon > 0,\ \exists d > 0$ tel que $z \in U$ et $\mid z - a \mid < d \Rightarrow \mid f(z) - f(a) \mid < \epsilon$.

Proposition 2.

Si une application $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ est dérivable au point a, alors elle est continue au point a, la réciproque est fausse.

Preuve :
Si f est dérivable en a, $\exists l \in \mathbb{C}$ tel que $\forall \epsilon > 0$, $\exists d > 0$, que l'on peut choisir inférieur à 1, tel que $|z - a| < d \Rightarrow \left|\frac{f(z) - f(a)}{z - a} - l\right| < \frac{\epsilon}{2}$, donc $|z - a| < d \Rightarrow ||f(z) - f(a)| - |l(z - a)|| \leq |f(z) - f(a) - l(z - a)| < \frac{\epsilon}{2}|z - a| < \frac{\epsilon}{2} \Rightarrow |f(z) - f(a)| \leq |l(z - a)| + \frac{\epsilon}{2}$. Or, $\exists 0 < d' < d$ tel que $|z - a| < d' \Rightarrow |l(z - a)| < \frac{\epsilon}{2}$. On peut prendre par exemple $d' < \min\left(\frac{\epsilon}{2(1 + |l|)}, d\right)$. Donc $|z - a| < d' \Rightarrow |f(z) - f(a)| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$, ce qui signifie que f est continue en a.

La réciproque est fausse comme le montre la fonction $|z|$ en 0.

Écoutez le bilan du premier paragraphe.