

Topologie et calcul différentiel

Table des matières

- 1. Topologie des espaces vectoriels normés. 1
- 2. Topologie des espaces vectoriels normés. 1

1. Topologie des espaces vectoriels normés.

Définition 1.1 (Norme). Soit E un espace vectoriel. On appelle norme sur E une fonction $\|\cdot\| : E \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant:

- (1) $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in E, \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$,
- (2) $\forall x \in E, \|x\| = 0 \Rightarrow x = 0$,
- (3) $\forall x, y \in E, \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Définition 1.2. Soit E un espace vectoriel et $\|\cdot\|$ une norme sur E . On appelle espace vectoriel normé un couple $(E, \|\cdot\|)$.

Proposition 1.3. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé, alors :

- (1) $\|0\| = 0$,
- (2) $\forall x \in E, \|x\| \geq 0$,
- (3) $\forall x, y \in E, \left| \|x\| - \|y\| \right| \leq \|x - y\|$.

Démonstration.

- (1) $\|0_E\| = \|0_{\mathbb{R}} * 0_E\| = 0_{\mathbb{R}} * \|0_E\| = 0_{\mathbb{R}}$.
- (2) Soit $x \in E, \|0\| = \|x - x\| \leq \|x\| + \|-x\| = 2\|x\|$ d'où $\forall x \in E, \|x\| \geq 0$.
- (3) Soit $x, y \in E. \|x\| = \|x + y - y\| \leq \|x - y\| + \|y\| \Leftrightarrow \|x\| - \|y\| \leq \|x - y\|$
et $\|y\| = \|y + x - x\| \leq \|y - x\| + \|x\| \Leftrightarrow \|y\| - \|x\| \leq \|x - y\|$.
Ainsi, $\|x - y\| \geq \max(\|y\| - \|x\|, \|x\| - \|y\|) = \left| \|x\| - \|y\| \right|$.

□

Proposition 1.4. Soit $(E, \|\cdot\|), F \subset E$ un sous-espace vectoriel. La restriction de $\|\cdot\|$ à F est une norme appelée norme induite.

2. Topologie des espaces vectoriels normés.

Définition 2.1 (boule ouverte/fermée). Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé, $a \in E, r > 0$. On appelle boule ouverte centrée en a de rayon r la partie $B(a, r) := \{x \in E \mid \|x - a\| < r\}$, et boule fermée centrée en a de rayon r la partie $B_f(a, r) := \{x \in E \mid \|x - a\| \leq r\}$.

Définition 2.2 (Ouvert/fermé). Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. Soit $U \subset E$, on dit que U est:

- (1) un ouvert de E si $\forall x \in U, \exists r > 0, B(x, r) \subset U$.
- (2) un fermé de E si U^c est un ouvert de E .

Proposition 2.3. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé, alors

- (1) \emptyset et E sont ouverts et fermés.
- (2) Une union quelconque d'ouverts est un ouvert.
- (3) Une intersection finie d'ouverts est un ouvert.
- (4) Une union finie de fermés est un fermé.

(5) Une intersection quelconque de fermés est un fermé.

Démonstration.

- (1) $\forall x \in \emptyset, \exists \varepsilon, B(x, \varepsilon) \subset \emptyset$ donc \emptyset est un ouvert et $\emptyset^c = E$ donc E est un fermé. De plus, $\forall x \in E, B(x, 1) \subset E$ donc E est un ouvert et $\emptyset = E^c$ est un fermé.
- (2) Soit $(O_i)_{i \in I}$ une famille d'ouverts. Soit $x \in \bigcup_{i \in I} O_i$, alors $\exists j \in I, x \in O_j$. Or O_j est un ouvert donc $\exists r_j > 0$ tel que $B(x, r_j) \subset O_j \subset \bigcup_{i \in I} O_i$ donc $\bigcup_{i \in I} O_i$ est un ouvert.
- (3) Soit $(O_i)_{i \in \{1, \dots, n\}}$ une famille d'ouverts. Soit $x \in \bigcap_{i \in \{1, \dots, n\}} O_i$ alors $x \in O_1, \dots, x \in O_n$. Or (O_1, \dots, O_n) sont des ouverts de E donc $\exists (r_i)_{i \in \{1, \dots, n\}}$ tels que $B(x, (r_i)_{i \in \{1, \dots, n\}}) \subset (O_i)_{i \in \{1, \dots, n\}}$. Posons $\varepsilon := \min(r_1, \dots, r_n) > 0$. Alors $B(x, \varepsilon) \subset O_1 \cap \dots \cap O_n$ donc $\bigcap_{i \in \{1, \dots, n\}} O_i$ est un ouvert.
- (4) Soit (C_1, \dots, C_n) une famille de fermés. Alors $\left(\bigcup_{i \in \{1, \dots, n\}} C_i\right)^c = \bigcap_{i \in \{1, \dots, n\}} (C_i)^c$ qui est un ouvert. Ainsi $\bigcup_{i \in \{1, \dots, n\}} C_i$ est un fermé.
- (5) Soit $(C_i)_{i \in I}$ une famille de fermés. Alors $\left(\bigcap_{i \in I} C_i\right)^c = \bigcup_{i \in I} C_i^c$ qui est un ouvert. Ainsi, $\bigcap_{i \in I} C_i$ est un fermé.

□

Définition 2.4 (Intérieur). Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et $S \subset E$. On appelle intérieur de S l'ensemble $\overset{\circ}{S} := \{x \in E \mid \exists \varepsilon > 0, B(x, \varepsilon) \subset S\}$.

Définition 2.5 (Adhérence). Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et $S \subset E$. On appelle adhérence de S l'ensemble $\overline{S} := \{x \in E \mid \forall \varepsilon > 0, B(x, \varepsilon) \cap S \neq \emptyset\}$.

Définition 2.6 (Dense). Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé, $S \subset E$. On dit que S est dense dans E si $\overline{S} = E$.

Proposition 2.7. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé, $S \subset E$.

- (1) $\overline{S^c} = (\overset{\circ}{S})^c$,
- (2) $\overset{\circ}{S^c} = (\overline{S})^c$,
- (3) $\overset{\circ}{S} \subset S \subset \overline{S}$,
- (4) $\overset{\circ}{S}$ est le plus grand ouvert contenu dans S ,
- (5) \overline{S} est le plus petit fermé contenant S