Algèbre linéaire et bilinéaire

Table des matières

1. Rappels d'algèbre linéaire.

1.1. Sous-espaces vctoriels.

Définition 1.1. Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. On dit que $F \subseteq E$ est un sous-espace vectoriel si
(1) $\forall (x, y) \in F^2, \forall \lambda \in \mathbb{K}, \lambda x + y \in F$,
(2) $0 \in F$.

Proposition 1.2. Soit F, G des sous-espaces vectoriels de E. Alors $F \cap G$ et $F + G$ sont des sous-espaces vectoriels de E.

Définition 1.3. Soit $A \subseteq E$ un sous-ensemble, on peut definir le plus petit sous-espace vectoriel contenant A par : $\mathrm{Vect}(A) = \left\{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i, a_i \in A, \lambda_i \in \mathbb{K}\right\}$.

Remarque 1.4. Si $A = \{v\}, v \in E, v \neq 0$, $\mathrm{Vect}(A) = \mathrm{Vect}(v) = kv$.

Définition 1.5. Soit $F, G \subseteq E$ des sous-espaces vectoriels. On dit que F et G sont en somme directe si $F \cap G = \{0\}$.

1.2. Familles de vecteurs et bases.

Définition 1.6. Soit $(x_1, \dots, x_n) \in E^n, (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. On dit que $(x_1, \dots, x_n)$ est une famille libre si

$$\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$$

Définition 1.7. Une famille infinie est libre si toute sous-famille finie est libre.

Définition 1.8. Soit $\mathcal{F} = (x_1, \dots, x_n) \in E^n$. On dit que $\mathcal{F}$ est génératrice de E si $\mathrm{Vect}(\mathcal{F}) = E$.

Définition 1.9. On appelle base de E toute famille libre et génératrice de E.

Définition 1.10. On appelle dimension de E le cardinal d'une base de E.

Proposition 1.11 (changement de base). Soit $\mathcal{E} = e_1, \dots, e_n$ et $\mathcal{F} = f_1, \dots, f_n$ deux bases de E. Soit $x \in E$. Il existe d'unique $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$.
On note $[x]_{\mathcal{E}} \coloneqq \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \in M_{nx1}(\mathbb{K})$, et $\mathrm{Pass}_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}} = ([f_1]_{\mathcal{E}} \ \cdots \ [f_n]_{\mathcal{E}}) \in M_{nxn}(\mathbb{K})$ On a :

$$[x]_{\mathcal{E}} = \mathrm{Pass}_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}} [x]_{\mathcal{F}}.$$

1.3. Applications linéaires.

Définition 1.12. Soit $u : E \to F$ une application. On dit que u est linéaire si $\forall x, y \in E^2, \forall \lambda \in \mathbb{K}$, $u(\lambda x + y) = \lambda u(x) + u(y)$.

Notation 1.13. On note $\mathcal{L}(E, F)$ l'espace vectoriel des applications linéaires de E dans F et $\mathcal{L}(E)$ l'espace vectoriel des endomorphismes.

Définition 1.14. Soit E un espace vectoriel, $u \in \mathcal{L}(E)$ On appelle noyau de u l'ensemble $\ker(u) = \{x \in E |\ u(x) = 0\}$.

Définition 1.15. Soit E un espace vectoriel, $u \in \mathcal{L}(E)$. On appelle image de u l'ensemble $\mathrm{Im}(u) = \{y \in F |\ \exists x \in E, y = u(x)\}$.

Théorème 1.16 (théorème du rang)**.** Soit E un espace vectoriel de dimension finie, $u : E \to E$.

$$\dim(E) = \dim(\ker(u)) + \dim(\dim(u)).$$

Démonstration. Notons $p := \dim(\ker(u)), n := \dim(E)$. Soit $(e_1, \dots, e_p)$ une base de $\ker(u)$. Par le théorème de la base incomplète, on note $(e_1, \dots, e_p, (e_{p+1}, \dots, e_n))$.
Une base de $\mathcal{I}m(u)$ est $\mathrm{Vect}(u(e_1), \dots, u(e_p), u(e_{p+1}), \dots, u(e_n)) = \mathrm{Vect}(u(e_{p+1}), \dots, u(e_n))$. Verifions que $(u(e_{p+1}), \dots, u(e_n))$ est une famille libre. Soit $(\lambda_{p+1}, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
\lambda_{p+1} u(e_{p+1}) + \dots + \lambda_n u(e_n) = 0 &\Leftrightarrow u(\lambda_{p+1} e_{p+1} + \dots + \lambda_n e_n) = 0 \\
&\Leftrightarrow \lambda_{p+1} e_{p+1} + \dots + \lambda_n e_n \in \ker(u) \\
&\Leftrightarrow \exists (\lambda_1, \lambda_p) \in \mathbb{R}, \lambda_{p+1} e_{p+1} + \dots + \lambda_n e_n = \lambda_1 e_1 + \dots \lambda_p e_p
\end{aligned}$$

Or $\lambda_1 e_1 + \dots \lambda_p e_p \neq 0$ car c'est une famille libre. D'où, $\mathrm{Vect}(u(e_{p+1}), \dots, u(e_n))$ libre. Ainsi, on a $\dim(\mathrm{Vect}(u(e_{p+1}), \dots, u(e_n))) = \dim(\mathcal{I}m(u)) = n - p = \dim(E) - \dim(\ker(u))$.
On a bien montré, $\dim(\ker(u)) + \mathrm{rg}(u) = \dim(E)$. $\square$

Corollaire 1.17. Soit $u : E \to E$ un endomorphisme, $\ker(u) = 0 \underset{1}{\Leftrightarrow} u$ injective $\underset{2}{\Leftrightarrow} u$ surjective.

Démonstration.

(1) $\Rightarrow$ Soit f une application linéaire injective. On a nécessairement $0_E \in \ker(f)$ or f est injective, donc $\forall x \in E, x \neq 0_E \Rightarrow f(x) \neq 0$ d'où $\ker(f) = \{0_E\}$.
$\Leftarrow$ Soit f une application linéaire tel que $\ker(f) = \{0_E\}$. Supposons par absurde f non injective. Alors $\exists u \neq v \in E, f(u) = f(v)$. Donc $f(u - v) = f(u) - f(v) = 0$ impossible car $u \neq v$.

(2) $\Rightarrow$ Supposons f injective. Alors $\ker(f) = \{0\} \Rightarrow \dim(\ker(f)) = 0 \Rightarrow \dim(\mathcal{I}m) = \dim(E) = \dim(F)$ d'où f surjective.
$\Leftarrow$ Supposons f surjective. Alors $\dim(\mathcal{I}m) = \dim(F) \Rightarrow \dim(\ker(f)) = 0$ d'où f injective.

$\square$

Théorème 1.18. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$,$g \in \mathcal{L}(F, G)$.

$$[g \circ f]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}} = [g]_{\mathcal{F}}^{\mathcal{G}} [f]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}}.$$

Corollaire 1.19. Soit $E, \mathcal{E}, \mathcal{F}$ deux bases de E, et $u \in \mathcal{L}(E)$. On note $P = \mathcal{P}\mathrm{ass}_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}} = [\mathrm{id}_E]_{\mathcal{F}}^{\mathcal{E}}$

$$[u]_{\mathcal{F}} = [\mathrm{id}_E]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}} [u]_E [\mathrm{id}_E]_{\mathcal{F}}^{\mathcal{E}} = P^{-1} [u]_{\mathcal{E}} P.$$

Proposition 1.20. Soit A une matrice carrée de la forme $A = \begin{pmatrix} B & D \\ 0 & C \end{pmatrix}$ avec B, C deux matrices carrées. Alors $\det A = \det B \det C$.

2. Sous-espaces stables par un endomorphisme.

Définition 2.1. Soit E un espace vectoriel de degré n, $u \in \mathcal{L}(E)$. Un sous-espace vectoriel F de E est dit stable par u si $u(F) \subseteq F$.

Remarque 2.2. Si je complète une base $\mathcal{F}$ de F en une base de $\mathcal{E}$ de E alors $[u]_{\mathcal{E}}$ est du type $[u]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} B & D \\ 0 & C \end{pmatrix}$ car si $\mathcal{F} = (f_1, \ldots, f_n)$, $\forall i \in \{1, \ldots, n\}$, $u(f_i) \in F$ et $B \in M_{dxd}(\mathbb{K})$

Définition 2.3. Soit $u \in \mathcal{L}(E), \lambda \in \mathbb{K}$. On note $E_\lambda(u) = \ker(u - \lambda \operatorname{id}_E)$. λ est appelée valeur propre se $E_\lambda(u) \neq \{0\}$ auquel cas $E_\lambda(u)$ est l'espace propre associé. Les $u \in \ker(u - \lambda \operatorname{id}_E)$ sont les vecteurs propres.

Proposition 2.4. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Ses espaces propres sont en somme directe.

Démonstration. Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, on montre que $x_1 + \ldots + x_n = 0 \Rightarrow x_i = 0 \forall i \in [1, n]$ où $x_i \in E_{\lambda_i(u)}$ □

Corollaire 2.5. Si $n = \dim E$, u a au plus n valeurs propres et s'il y en a n, $\dim E_{\lambda_i} = 1$.

Définition 2.6. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On dit que u est diagonalisable si E est la somme directe de ses sous-espaces propres.

Proposition 2.7. Soit P, Q dans $\mathbb{K}[X]$ et D leur PGCD. Alors il existe $(U, V) \in \mathbb{K}[X]^2$ tels que

$$UP + VQ = D.$$

Corollaire 2.8. P, Q sont premiers entre eux ssi $\exists (U, V) \in \mathbb{K}[X]^2$ tels que $UP + VQ = 1$.

Définition 2.9. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On dit que f est muilplotent si $\exists r \in \mathbb{N}$ tq $f^{(r)} = 0$.

Proposition 2.10. Si $n = \dim E$, $f \in \mathcal{L}(E)$ milpotent $\Rightarrow \mathcal{X}_f = (-1)^n X^n$

Proposition 2.11. Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ de degré unitaire $a_n = 1$. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & \ldots & \ldots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \ldots & \ldots & -a_1 \\ 0 & 1 & \ldots & \ldots & -a_1 \\ & & & & \\ 0 & \ldots & \ldots & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$.

Alors $\mathcal{X}_A = (-1)^n P$.

Théorème 2.12. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, $\dim E = n < +\infty$, (λ_i) ses valeurs propres. u est diagonalisable ssi $\forall \lambda$, $\dim E_\lambda(u) =$ multiplicité de λ dans X_u

$$\mathcal{X}_u \Pi_{\lambda_i} (X - \lambda_i)^{\dim E_\lambda(u)}$$

3. Trigonalisation

Définition 3.1. Soit $u \in \mathcal{L}, E$. $\dim E = n$. On dit que u est trigonalisable si il existe une base $\mathcal{E}$ telle que $[u]_{\mathcal{E}}$ est triangulaire supérieure : $i > j \Rightarrow ([u]_{\mathcal{E}}) := 0$.

Définition 3.2. Soit $M \in M_{nxn}(\mathbb{K})$. On dit que M est trigonalisable si elle est semblable a une matrice triangulaire supérieure.

Théorème 3.3. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. u est trigonalisable si et seulement si $\mathcal{X}_u$ est scindé.

Démonstration. Si u trigonalisable, il existe une base $\mathcal{E}$ telle que $[u]_{\mathcal{E}} = (\lambda_1) => \mathcal{X} = (-1)^n \Pi_{i=1}^n (X - \lambda_i)$ scindé.
Réciproque par récurrence Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, $\dim(E) = n$ avec $\mathcal{X}_u$ scindé. Soit λ une racine de $\mathcal{X}_u$ et $e_1 \in E_{\lambda_1}(u \setminus 0)$ que je complète en une base de $\mathcal{E}$. Alors $[u]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \star \\ 0 & C \end{pmatrix}$ et $\mathcal{X}_u = (\lambda_1 - X)\mathcal{X}_T$ donc $\mathcal{X}_T$ scindé aussi. Par hypothèse de récurrence,$\exists Q \in GL_{n-1}(\mathbb{K})$ telle que $QTQ^{-1} = \delta$. Soit $P = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ 0 & C & \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_n$ □

4. Polynômes d'endomorphismes.

Définition 4.1. Soit $u \in \mathrm{End}(E)$. Pour tout polynôme $P = \sum_{0 \leq k \leq d} a_k u^k \in \mathcal{L}(E)$.

Proposition 4.2. Soit $(P, Q) \in \mathbb{K}[X]^2$ et $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors $(P + Q)(u) = P(u) + Q(u)$ et $P(u) \circ Q(u) = PQ(u)$. De plus, si A est semblable à B, $P(A)$ est semblable à $P(B)$.

Proposition 4.3. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P(u) = 0$. Alors $\forall \lambda$ valeur propre de u, on a $P(\lambda) = 0 \in \mathbb{K}$.

Démonstration. Soit $x \neq 0$ tel que $u(x) = \lambda x$. par récurrence ommédiate, $u^k(x) = \lambda^k x$ par linéarité, $P(u)(x) = P(\lambda)x$. □

Théorème 4.4 (Lemme des noyaux). Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $P_1, \dots, P_r$ des polynomes 2 à 2 premiers entres eux. Soit $P = \Pi_{k=1}^r P_k$. Alors

$$\ker(P(u)) = \bigoplus_{k=1}^{r} \ker P_k(u).$$

Démonstration. Par récurrence sur r, $r = 1$ ok
$r = 2, : P_1, P_2$ premiers entre eux $\Leftrightarrow \exists Q_1, Q_2 \in \mathbb{K}[X]^2$, $Q_1 P_1 + Q_2 P_2 = 1$
Soit $x \in \ker(P_1(u)) \cap \ker(P_2(x))$. On a $(Q_1 P_1)(u)(x) + (Q_2 P_2)(u)(x) = x \dots$ □

Théorème 4.5. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. u est diagonalisable si et seulement si il existe $P \in \mathbb{K}[X]$ simplement scindé tel que $P(u) = 0$.

Démonstration.
$\Rightarrow$

$$\begin{aligned} E = \oplus_{\lambda \text{ valeur propre}} \ker(u - \lambda\, \mathrm{id}_E) &= \oplus_{\lambda \text{ valeur propre}} \ker(X - \lambda)(u) \\ &= \ker\left((\Pi_{\lambda \text{ valeur propre}} (X - \lambda))(u) \right). \end{aligned}$$

Par le lemme des noyaux car $\mathrm{pgcd}(X - \lambda, X - \mu) = 1$ si $\lambda \neq \mu$. Ainsi, $P = \Pi(X - \lambda)$ simplement scindé annule $P(u) = 0$.
$\Leftarrow$ Si $P = \Pi_{k=1}^r$ simplement scindé vérifie $P(u) = 0$ alors $E = \ker(P(u)) = \oplus_{k=1}^r \ker(u - \lambda_k\, \mathrm{id}_E)$. Donc u est diagonalisable. □

Corollaire 4.6. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ diagonalisable, F stable par u. Alors $u_F \in \mathcal{L}(E)$ est diagonalisable.

Démonstration. il existe P simplement scindé tel que $P(u) = 0 \Rightarrow P(u_F) = P(u)_{|_F} = 0 \Rightarrow u$ diagonalisable. $\square$

4.1. Théorème de Cayley-Hamilton.

Notation 4.7. SI $u \in \mathcal{L}(E), I_u = \{P \in \mathbb{K}[X] \mid P(u) = 0\}$.

Proposition 4.8. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.
(1) $0 \in I_u$
(2) $\forall P, Q \in I_u, P + Q \in I_u$.
(3) $\forall P \in I_u, \forall Q \in \mathbb{K}(X), PQ \in I_u$.

Démonstration. En effet, $(PQ)(u) = P(u) \circ Q(u) = 0$. $\square$

Remarque 4.9. I_n contient forcément un polynôme non nul car si $n = \dim E$, la famille $\left(\mathrm{id}_E, u, u^2, \dots, u^{n^2}\right)$ est liée car $\dim \mathcal{L}(E) = n^2$.

Proposition 4.10. Soit $P \in I_n \setminus \{0\}$ de degré minimal. Alors $\forall S \in I_u$, $P|\, S$.

Démonstration. La division de S par P nous donne: $S = PQ + R$ $\deg R < \deg P \Rightarrow R = 0$ par minimalité. $\square$

Remarque 4.11. Si $P_1, P_2 \in I_u \setminus \{0\}$ de degré minimal.
$P_1 \mid P_2$ et $P_2 \mid P_1 \Rightarrow \exists \alpha \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ tel que $P_2 = \alpha P_1$.

Définition 4.12. On appelle polynôme minmal de u l'unique $P \in I_u \setminus \{0\}$ de degré minimal et de coeff dominant 1. On le note $\mu_u, \mathrm{P}_u, \pi_u \dots$.

Théorème 4.13 (Théorème de Cayley-Hamilton). Pour tout $u \in \mathcal{L}(E)$, $\chi_u(u) = 0$

Théorème 4.14. Soit $u \in \mathcal{E}$. u diagonalisable $\Leftrightarrow \mu_u$ simplement scindé.

Démonstration.
$\Rightarrow$ ok.
$\Leftarrow \exists P$ simplement scindé tel que $P(u) = 0$ et $\mu_u \mid P$ donc μ_u simplement scindé. $\square$

Proposition 4.15. Soit $u \in \mathcal{E}$. λ est valeur propre si et seulement si $\mu_{u(\lambda)} = 0$.

Démonstration.
$\Rightarrow$ ok.
$\Leftarrow \chi_u(u) = 0 \Rightarrow \mu_u(u) = 0 \Rightarrow \mu_u \mid \chi_u \Rightarrow \chi_u(\lambda) = 0 \Rightarrow \lambda$ valeur propre.

$\square$

4.2. Décomposition de Dunford.

Lemme 4.16. Soit $u, v \in \mathcal{L}(E)^2$ diagonalisables telles que $u \circ v = v \circ u$ Alors il existe une base de $\mathcal{E}$ de E telle que $[u]_{\mathcal{E}}$ et $[v]_{\mathcal{E}}$ sont diagonales.

Démonstration. Soit $F = E_\lambda(u)$ un espace-propre. Alors F est stable par v. Soit $x \in F$, alors

$$u(v(x)) = v(u(x)) = v(\lambda x) = \lambda v(x).$$

Donc $v(x) \in E_\lambda(u) = F$. On sait alors que $v_F \in \mathcal{L}(\mathcal{F})$ est diagonalisable (car v l'est) $\Rightarrow \exists \mathcal{E}_\lambda$ une base de F faite de vecteurs propres pour v (et pour u!) $\Rightarrow \mathcal{E} = \bigcup_{\lambda \in S_{p(u)}} \mathcal{E}_\lambda$ convient. □

Définition 4.17. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $\chi_u = \Pi_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)}(X-\lambda)^{m_\lambda}$. On note $N_\lambda(u) := \ker\big((u - \lambda\,\mathrm{id}_E)^{m_\lambda}\big)$ qu'on appelle sous-espace propre généralisé ou sous-espace propre caractéristique par rapport à u et λ.

Remarque 4.18. Par le lemme de décomposition des noyaux et le théorème de Cayley hamilton,

$$E = \bigoplus_{\lambda \in Sp(u)} N_\lambda(u).$$

Proposition 4.19. On a $m_\lambda = \dim N_\lambda(u) \forall \lambda \in Sp(u)$.

Démonstration. On a $n = \dim E = \sum_{\lambda \in Sp(u)} \dim N_\lambda(u)$. Il suffit de montrer que $\forall \lambda$, $m_\lambda \geq \dim N_\lambda(u)$. $N_\lambda(u)$ est stable par u car $\forall P \in \mathbb{K}[x]$, $\ker(P(u))$ est stable par u $\forall x \in \ker(P(u))$, $P(u)(u(x)) = XP(u)(x) = u(P(x)(x)) = 0$ □

Théorème 4.20 (Décomposition de Dunford (Jordan-Charalley))**.** Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ telle que χ_u scindé. Alors ilun unique couple $(d, v) \in \mathcal{L}(E)^2$ tel que

- $u = d + v$,
- d est diagonalisable et v milpotent,
- $d \circ v = v \circ d$.

4.3. Réduction de Jordan.

Proposition 4.21. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Il existe $r \in \mathbb{N}$, appelé l'indice de u tel que $\ker(u) \subset \ker\big(u^2\big) \not\subseteq \ker(u^r) = \ker\big(u^{r+k}\big) \forall k \in \mathbb{N}$

q