



## CHƯƠNG I. ĐA THÚC

## BÀI 1. ĐƠN THÚC

## PHẦN A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

## 1. Đơn thức và đơn thức thu gọn

- Đơn thức là biểu thức đại số chỉ gồm một số hoặc một biến, hoặc có dạng tích của các số và biến.
- Đơn thức thu gọn là đơn thức chỉ gồm một số, hoặc có dạng tích của một số với các biến, mỗi biến chỉ xuất hiện một lần và đã được nâng lên lũy thừa với số mũ nguyên dương.
- Tổng số mũ của các biến trong một đơn thức thu gọn với hệ số khác 0 gọi là bậc của đơn thức đó.

## 2. Đơn thức đồng dạng

- Hai đơn thức đồng dạng là hai đơn thức với hệ số khác 0 và có phần biến giống nhau.
- Cộng và trừ đơn thức đồng dạng: Muốn cộng (hay trừ) các đơn thức đồng dạng, ta cộng (hay trừ) các hệ số với nhau và giữ nguyên phần biến.

## PHẦN B. PHÂN LOẠI CÁC BÀI TẬP

## I. Hệ số và biến của đơn thức

## Bài toán 1.

- Cho biết phần hệ số và phần biến của đơn thức:  $2,5x^2y; 0,25x^2y^2$
- Tính giá trị của mỗi đơn thức trên tại  $x = 1$  và  $y = -1$ .

**Bài toán 2.** Hãy viết một vài đơn thức với biến  $x, y$ . và có giá trị bằng 9 tại  $x = -1$  và  $y = 1$ .

**Hướng dẫn:** Đơn thức có dạng  $k \cdot x^m \cdot y^n$  ( $k$  là hệ số)

**Bài toán 3.** Cho biết phần hệ số, phần biến và bậc của các đơn thức sau:

- $3x^4 \cdot x^2$ ;
- $a^2a^3 \cdot a$ ;
- $-a^4 \cdot a^4 \cdot a^3$

**Hướng dẫn:** Áp dụng quy tắc nhân các lũy thừa.

**Bài toán 4.** Cho đơn thức  $\left(-\frac{1}{2}\right)x \cdot y^2 \cdot 2x^3$

- Tìm bậc của đơn thức;
- Tính giá trị của đơn thức tại  $x = 2; y = \frac{1}{4}$

**Hướng dẫn:** Áp dụng quy tắc nhân các lũy thừa.

**Bài toán 5.** Cho đơn thức:  $P = -\frac{2}{3}m^2np$ .

- Tìm phần biến và bậc của đơn thức.
- Tính giá trị của đơn thức tại  $m = 2; n = 6; p = 7$ .

## II. Đơn thức đồng dạng





**Bài toán 6.** Cho các đơn thức:  $2a^2b; \frac{1}{3}ab^2; -3a^2b; 5x^2y$ . Tìm đơn thức đồng dạng với  $-5a^2b$ .

**Hướng dẫn:** Các đơn thức có cùng phần biến  $a^2b$ .

**Bài toán khác:** Tìm các đơn thức đồng dạng với nhau trong các đơn thức sau:

$$5x^2y; -3xyy^2; \frac{1}{3}x^2y; 3a^2b; -3ab^2; -2a^2b; \frac{1}{5}xy^2$$

**Bài toán 7.** Viết ba đơn thức đồng dạng với đơn thức  $M = 2x^3y^2z$ .

**Bài toán 8.** Cặp đơn thức sau đó đồng dạng không?

a)  $P = 8ab^2 + 7ab^2$  và  $Q = \frac{3}{2}a^2b - \frac{5}{8}a^2b - \frac{7}{8}a^2b$ .

b)  $A = (2m)(-4n) - \left(\frac{1}{5}m\right)(-n) - 5mn$  và  $B = 4mn - \left(\frac{1}{2}m\right).(3n)$

**Hướng dẫn:** Cộng các đơn thức trước.

### III. Cộng (trừ) các đơn thức

**Bài toán 9.** Thu gọn và cho biết bậc của đơn thức:

a)  $A = \frac{1}{2}xy^2 - \frac{3}{4}y^2x - \frac{5}{6}xy^2$ ; b)  $B = 3x^4(x^2) - (-2x^3)^2$

**Bài toán 10.** Tính tổng:  $S = (-9a^2)\frac{1}{3}b + a^2b + 24a\left(-\frac{1}{4}ab\right)$ .

**Bài toán khác:** Tính tổng:

1.  $S_1 = x^2 + 5x^2 + (-3x^2); (S_1 = 3x^2)$

2.  $S_2 = 5xy^2 + \frac{1}{2}xy^2 + \frac{1}{4}xy^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)xy^2; (S_2 = \frac{21}{4}xy^2)$

3.  $S_3 = xyz - 5xyz; (S_3 = -4xyz)$

4.  $S_4 = x^2 - \frac{1}{2}x^2 - 2x^2; (S_4 = -\frac{3}{2}x^2)$ .

**Bài toán 11.** Tìm giá trị của biểu thức:  $A = 11m^2n - 2m^2n - 3m^2$  tại  $m = -\frac{1}{3}; n = 2\frac{3}{4}$

**Bài toán khác:** Tính giá trị của biểu thức:  $P = \frac{3}{2}mn^2 - \frac{5}{8}mn^2 + \frac{1}{8}mn^2 - \frac{3}{16}mn^2$  tại  $m = 2; n = -1$

**Bài toán 12.** Tìm đơn thức  $A$ , biết:  $A + 5x^3y^3z = -3x^3y^3z$ .

**Bài toán khác:** Tìm đơn thức  $P$ , biết:

1.  $P - 3ab^2 = -10ab^2$

2.  $3x^2y^3 - P = -5x^2y^3$





**Bài toán 13.** Cho  $A = -2x^3y; B = -yx^3; C = \left(\frac{2}{3}x\right) \cdot (-x^2y)$ . Tính  $A + 2B - 3C$ .

**Bài toán 14.** Chứng tỏ  $P = \frac{3}{2}x^4 - \frac{1}{16}x^4 + \frac{1}{32}x^4 > 0$  với mọi  $x \neq 0$

**Bài toán 15.** Viết đơn thức sau dưới dạng tổng hoặc hiệu của hai đơn thức trong đó có mặt số hạng bằng  $3x^2y^3$ .

a)  $5x^2y^3$

b)  $-3x^2y^3$

### PHẦN C. BÀI TẬP

**Bài 1.1.** Xếp các đơn thức sau thành từng nhóm các đơn thức đồng dạng.

$$\frac{5}{3}x^2y; xy^2; -\frac{1}{2x^2y}; -2xy^2; x^2y; \frac{1}{4}xy^2; \frac{2}{5}x^2y; xy.$$

**Bài 1.2.** Tính tổng của ba đơn thức

a)  $25xy^2; 55xy^2; 75xy^2$

b)  $-5x^2yz; \frac{2}{3}x^2yz; 2x^2yz$ .

**Bài 1.3.** Thu gọn.

a)  $A = 3xy^2 - (-3xy^2)$

b)  $B = 3x^2y^4 - 7x^2y^4 - 2x^2y^4$ .

c)  $C = 2x^2yz^3 + \frac{1}{3}x^2yz^3 - 4x^2yz^3$ .

**Bài 1.4.** Tính giá trị biểu thức:

a)  $A = \frac{1}{2}x^5y - \frac{3}{4}x^5y + x^5y$  tại  $x = 1; y = -1$ .

b)  $B = (-4x)\left(-\frac{1}{2}x^2y\right) + 3x^3y - \left(\frac{1}{2}xy\right)(5x^2)$  tại  $x = -1; y = 2$ .

**Bài 1.5.** Viết ba đơn thức đồng dạng với đơn thức  $-2x^2y$  rồi tính tổng của cả bốn đơn thức.

**Bài 1.6.** Điền đơn thức thích hợp vào ô trống

a)  $3x^2y + \boxed{\quad} = 5x^2y$

b)  $\boxed{\quad} - 2x^2 = -7x^2$

c)  $\boxed{\quad} + \boxed{\quad} + \boxed{\quad} = x^5$

**Bài 1.7.** Tìm đơn thức  $P$  sao cho

a)  $3x^3y + P = -5x^3y$

b)  $P + 5x^2y^3z^5 = -3x^2y^3z^5$

**Bài 1.8.** Chứng tỏ  $(-3x)xy^2 + (-2xy)^2$  luôn nhận giá trị không âm với mọi giá trị của  $x; y$ .

**Bài 1.9.** Viết đơn thức  $-4xy^2z^2$  thành một tổng hoặc một hiệu của hai đơn thức trong đó có một đơn thức bằng  $-2xy^2z^2$

**Bài 1.10.** Tìm  $m$  để  $mxy^2 - 3xy^2 + 7xy^2 = 5xy^2$ .

**Bài 1.11.** Thu gọn rồi tính giá trị của mỗi đơn thức sau





a)  $A = (-2)x^2y \frac{1}{2}xy$  khi  $x = -2; y = \frac{1}{2}$ ;

b)  $B = xyz(-0,5)y^2z$  khi  $x = 4; y = 0,5; z = 2$ .

**Bài 1.12.** Sắp xếp các đơn thức sau thành từng nhóm, mỗi nhóm chứa tất cả các đơn thức đồng dạng với nhau:  $3x^3y^2; -0,2x^2y^3; 7x^3y^2; -4y; \frac{3}{4}x^2y^3; y\sqrt{2}$

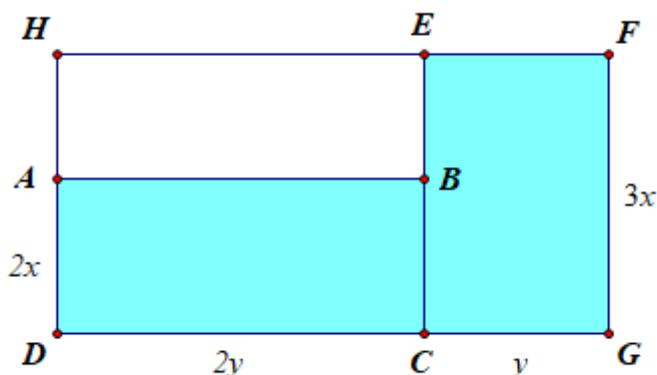
**Bài 1.13.** Rút gọn rồi tính giá trị của biểu thức  $S = \frac{1}{2}x^2y^5 - \frac{5}{2}x^2y^5$  khi  $x = -2; y = 1$ .

**Bài 1.14.** Tính tổng của các đơn thức  $2x^2y^3; -\frac{3}{5}x^2y^3; -14x^2y^3; \frac{8}{5}x^2y^3$ .

**Bài 1.15.** Một mảnh đất có dạng như phần tô đậm trong hình bên cùng với các kích thước được ghi trên đó. Hãy tìm đơn thức thu gọn với hai biến  $x$  và  $y$  biểu thị diện tích của mảnh đất đã cho bằng cách:

**Cách 1.** Tính tổng diện tích của hai hình chữ nhật  $ABCD$  và  $EFGC$ .

**Cách 2.** Lấy diện tích của hình chữ nhật  $HFGD$  trừ đi diện tích của hình chữ nhật  $HEBA$ .



☞ HẾT ☞





## ĐÁP ÁN THAM KHẢO

## Bài 1. ĐƠN THỨC

## PHẦN B. PHÂN LOẠI CÁC BÀI TẬP

## I. HỆ SỐ VÀ BIẾN CỦA ĐƠN THỨC

## Bài toán 1.

- a) Cho biết phần hệ số và phần biến của đơn thức:  $2,5x^2y; 0,25x^2y^2$   
b) Tính giá trị của mỗi đơn thức trên tại  $x=1$  và  $y=-1$ .

## Lời giải

a) Xét đơn thức:  $2,5x^2y$  ta có phần hệ số là 2,5; phần biến là  $x^2y$ .

**Nhận xét:** Đơn thức này có phần biến  $x^2y$  trong đó  $x$  là có bậc hai;  $y$  có bậc nhất nên bậc của đơn thức này bằng 3, tổng của 2 và 1:

$$2+1=3.$$

Phần hệ số của đơn thức  $0,25x^2y^2$  là 0,25; phần biến là  $x^2.y^2$ .

(Bậc của đơn thức bằng 4).

b) Thay  $x=1$  và  $y=-1$  vào biểu thức:  $2,5x^2y$ , ta được:  $2,5 \cdot 1^2 \cdot (-1) = -2,5$

Thay  $x=1$  và  $y=-1$  vào biểu thức  $0,25x^2y^2$ , ta được:  $0,25 \cdot 1^2 \cdot (-1)^2 = 0,25$

Bài toán 2. Hãy viết một vài đơn thức với biến  $x, y$ . và có giá trị bằng 9 tại  $x=-1$  và  $y=1$ .

**Hướng dẫn:** Đơn thức có dạng  $k \cdot x^m \cdot y^n$  ( $k$  là hệ số)

## Lời giải

Đặt đơn thức  $A = k \cdot x^m \cdot y^n$

Cho  $m=2; n=1$ , ta có:  $9 = k \cdot (-1)^2 \cdot 1 \Rightarrow k = 9$

Vậy, ta có thêm có:  $A = 9x^2y$

Tương tự:  $B = -9x^3.y, C = -9xy, v.v..$

## Bài toán 3. Cho biết phần hệ số, phần biến và bậc của các đơn thức sau:

- a)  $3x^4 \cdot x^2$ ;      b)  $a^2a^3 \cdot a$ ;      c)  $-a^4 \cdot a^4 \cdot a^3$

**Hướng dẫn:** Áp dụng quy tắc nhân các lũy thừa.

## Lời giải

a) Ta có:  $3x^4 \cdot x^2 = 3x^6$

Phần hệ số là 3; phần biến là  $x^6$ . Bậc của đơn thức là 6.

b) Ta có:  $a^2 \cdot a^3 \cdot a = a^{2+3+1} = a^6$

Phần hệ số là 1; phần biến là  $a^6$ ; bậc của đơn thức là 6.

c) Ta có:  $-a^4 \cdot a^4 \cdot a^3 = -a^{4+4+3} = -a^{11}$





Phần hệ số:  $-1$ ; phần biến:  $a^{11}$

Bậc của đơn thức là  $11$ .

**Bài toán 4.** Cho đơn thức  $\left(-\frac{1}{2}\right)x \cdot y^2 \cdot 2x^3$ .

a) Tìm bậc của đơn thức;

b) Tính giá trị của đơn thức tại  $x = 2; y = \frac{1}{4}$

**Hướng dẫn:** Áp dụng quy tắc nhân các lũy thừa.

#### Lời giải

a) Ta có:  $\left(-\frac{1}{2}\right)x \cdot y^2 \cdot 2 \cdot x^3 = -x^4 y^2$

Đơn thức này có bậc:  $4 + 2 = 6$  (hệ số là:  $-1$ ; phần biến:  $x^4 y^2$ )

b) Thay  $x = 2; y = \frac{1}{4}$  vào đơn thức, ta được:  $-2^4 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 = (-16) \cdot \frac{1}{16} = -1$

**Bài toán 5.** Cho đơn thức:  $P = -\frac{2}{3}m^2np$ .

a) Tìm phần biến và bậc của đơn thức.

b) Tính giá trị của đơn thức tại  $m = 2; n = 6; p = 7$ .

#### Lời giải

a) Ta có:  $P = -\frac{2}{3}m^2np$

Vậy phần biến là  $m^2np$ . Ta có số mũ của  $m, n, p$  theo thứ tự là  $2, 1$  và  $1$ .

Đơn thức có bậc là:  $2 + 1 + 1 = 4$ .

b) Thay  $m = 2; n = 6; p = 7$  vào đơn thức  $P$ , ta được:  $P = -\frac{2}{3} \cdot 2^2 \cdot 6 \cdot 7 = -112$

## II. Đơn thức đồng dạng

**Bài toán 6.** Cho các đơn thức:  $2a^2b; \frac{1}{3}ab^2; -3a^2b; 5x^2y$ . Tìm đơn thức đồng dạng với  $-5a^2b$ .

**Hướng dẫn:** Các đơn thức có cùng phần biến  $a^2b$ .

#### Lời giải

Các đơn thức đồng dạng với  $-5a^2b$  là:  $2a^2b; -3a^2b$

**Bài toán khác:** Tìm các đơn thức đồng dạng với nhau trong các đơn thức sau:

$$5x^2y; -3xyy^2; \frac{1}{3}x^2y; 3a^2b; -3ab^2; -2a^2b; \frac{1}{5}xy^2$$





( $5x^2y$  và  $\frac{1}{3}x^2y$ ;  $-3xy^2$  và  $\frac{1}{5}xy^2$ ;  $3a^2b$  và  $-2a^2b$  là các cặp đơn thức đồng dạng).

**Bài toán 7.** Viết ba đơn thức đồng dạng với đơn thức  $M = 2x^3y^2z$ .

### Lời giải

Các đơn thức đồng dạng với  $M = 2x^3y^2z$  là:

$$M_1 = -x^3y^2z; M_2 = \frac{1}{3}x^3y^2z; M_3 = 5x^3y^2z$$

(Bạn có thể lấy đơn thức khác nhau ở phần hệ số; còn phần biến luôn là  $x^3y^2z$ ).

**Bài toán 8.** Cặp đơn thức sau đó đồng dạng không?

a)  $P = 8ab^2 + 7ab^2$  và  $Q = \frac{3}{2}a^2b - \frac{5}{8}a^2b - \frac{7}{8}a^2b$ .

b)  $A = (2m)(-4n) - \left(\frac{1}{5}m\right)(-n) - 5mn$  và  $B = 4mn - \left(\frac{1}{2}m\right).(3n)$

**Hướng dẫn:** Cộng các đơn thức trước.

### Lời giải

a)  $P = 15ab^2; Q = 0a^2b$ . Vậy  $P$  và  $Q$  không phải là hai đơn thức đồng dạng.

b)  $A = -8mn + \frac{1}{5}mn - 5mn = -\frac{64}{5}mn$ ;

$B = \frac{5}{2}mn$ . Vậy  $A$  và  $B$  là hai đơn thức đồng dạng.

**Chú ý:** Hệ số của các đơn thức phải khác 0.

### III. Cộng (trừ) các đơn thức

**Bài toán 9.** Thu gọn và cho biết bậc của đơn thức:

a)  $A = \frac{1}{2}xy^2 - \frac{3}{4}y^2x - \frac{5}{6}xy^2$ ;

b)  $B = 3x^4(x^2) - (-2x^3)^2$

### Lời giải

a)  $A = \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{4} - \frac{5}{6}\right)xy^2 = -\frac{13}{12}xy^2$ . Đơn thức  $A$  có bậc là 3.

b)  $B = 3x^6 - 4x^6 = -x^6$ . Đơn thức  $B$  có bậc là 6.

**Bài toán 10.** Tính tổng:  $S = (-9a^2)\frac{1}{3}b + a^2b + 24a\left(-\frac{1}{4}ab\right)$

### Lời giải

$$S = -3a^2b + a^2b - 6a^2b = (-3 + 1 - 6)a^2b = -8a^2b$$

**Bài toán khác:** Tính tổng:

1.  $S_1 = x^2 + 5x^2 + (-3x^2); (S_1 = 3x^2)$





$$2. S_2 = 5xy^2 + \frac{1}{2}xy^2 + \frac{1}{4}xy^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)xy^2; \left(S_2 = \frac{21}{4}xy^2\right)$$

$$3. S_3 = xyz - 5xyz; (S_3 = -4xyz)$$

$$4. S_4 = x^2 - \frac{1}{2}x^2 - 2x^2; \left(S_4 = -\frac{3}{2}x^2\right).$$

**Bài toán 11.** Tìm giá trị của biểu thức:  $A = 11m^2n - 2m^2n - 3m^2$  tại  $m = -\frac{1}{3}; n = 2\frac{3}{4}$

### Lời giải

$$\text{Ta có: } A = (11 - 2)m^2n - 3m^2 = 9m^2n - 3m^2.$$

$$\text{Thay } m = -\frac{1}{3}; n = 2\frac{3}{4} = \frac{11}{4} \text{ vào biểu thức } A, \text{ ta được: } A = 9 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \frac{11}{4} - 3 \left(-\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{11}{4} - \frac{1}{3} = \frac{29}{12}$$

**Bài toán khác:** Tính giá trị của biểu thức:  $P = \frac{3}{2}mn^2 - \frac{5}{8}mn^2 + \frac{1}{8}mn^2 - \frac{3}{16}mn^2$  tại  $m = 2; n = -1$

### Hướng dẫn

$$\text{Ta có: } P = \left(\frac{3}{2} - \frac{5}{8} + \frac{1}{8} - \frac{3}{16}\right)mn^2 = \frac{13}{16}mn^2.$$

Thay  $m = 2; n = -1$  vào biểu thức  $P$  ta được:

$$P = \frac{13}{16} \cdot 2(-1)^2 = \frac{13}{8}$$

**Bài toán 12.** Tìm đơn thức  $A$ , biết:  $A + 5x^3y^3z = -3x^3y^3z$ .

### Lời giải

$$\text{Ta có: } A = -3x^3y^3z - 5x^3y^3z = -8x^3y^3z$$

**Bài toán khác:** Tìm đơn thức  $P$ , biết:

$$1. P - 3ab^2 = -10ab^2$$

$$2. 3x^2y^3 - P = -5x^2y^3$$

### Hướng dẫn

$$1. P = 3ab^2 - 10ab^2 = -7ab^2;$$

$$2. P = 3x^2y^3 - (-5x^2y^3) = 8x^2y^3$$

**Bài toán 13.** Cho  $A = -2x^3y; B = -yx^3; C = \left(\frac{2}{3}x\right) \cdot (-x^2y)$ . Tính  $A + 2B - 3C$ .

### Lời giải

$$A + 2B - 3C = -2x^3y + 2(-yx^3) - 3 \left(\frac{2}{3}x\right) \cdot (-x^2y) = -2x^3y - 2x^3y + 2x^3y = -2x^3y$$

**Bài toán 14.** Chứng tỏ  $P = \frac{3}{2}x^4 - \frac{1}{16}x^4 + \frac{1}{32}x^4 > 0$  với mọi  $x \neq 0$

### Lời giải





Ta có  $P = \frac{3}{2}x^4 - \frac{1}{16}x^4 + \frac{1}{32}x^4 = \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{16} + \frac{1}{32} - \frac{1}{4}\right)x^4$

$$\Rightarrow P = \frac{39}{32}x^4 \text{ vì } x \neq 0 \text{ nên } x^4 > 0 \text{ với mọi } x \neq 0.$$

**Bài toán 15.** Viết đơn thức sau dưới dạng tổng hoặc hiệu của hai đơn thức trong đó có mặt số hạng bằng  $3x^2y^3$ .

a)  $5x^2y^3$

b)  $-3x^2y^3$

**Lời giải**

a)  $5x^2y^3 = 3x^2y^3 + 2x^2y^3$

b)  $-3x^2y^3 = 3x^2y^3 - 6x^2y^3$

### PHẦN C. BÀI TẬP

**Bài 1.1.** Xếp các đơn thức sau thành từng nhóm các đơn thức đồng dạng.

$$\frac{5}{3}x^2y; xy^2; -\frac{1}{2x^2y}; -2xy^2; x^2y; \frac{1}{4}xy^2; \frac{2}{5}x^2y; xy.$$

**Lời giải**

$\frac{5}{3}x^2y; -\frac{1}{2}x^2y; x^2y; \frac{2}{5}x^2y$  là các đơn thức đồng dạng;

$xy^2; -2xy^2; \frac{1}{4}xy^2$  là các đơn thức đồng dạng.

**Bài 1.2.** Tính tổng của ba đơn thức

a)  $25xy^2; 55xy^2; 75xy^2$

b)  $-5x^2yz; \frac{2}{3}x^2yz; 2x^2yz.$

**Lời giải**

a)  $25xy^2 + 55xy^2 + 75xy^2 = 155xy^2$

b)  $-5x^2yz + \frac{2}{3}x^2yz + 2x^2yz = -\frac{7}{3}x^2yz$

c)  $\frac{3}{4}xyz^2 + \frac{1}{2}xyz^2 + \left(-\frac{1}{4}xyz^2\right) = xyz^2$

(Ta cộng các hệ số của các đơn thức)

**Bài 1.3.** Thu gọn.

a)  $A = 3xy^2 - (-3xy^2)$

b)  $B = 3x^2y^4 - 7x^2y^4 - 2x^2y^4.$

c)  $C = 2x^2yz^3 + \frac{1}{3}x^2yz^3 - 4x^2yz^3.$

**Lời giải**

a)  $A = 3xy^2 + 3xy^2 = 6xy^2$

b)  $B = (3 - 7 - 2)x^2y^4 = -6x^2y^4$





c)  $C = -\frac{5}{3}x^2yz^3$

**Bài 1.4.** Tính giá trị biểu thức:

a)  $A = \frac{1}{2}x^5y - \frac{3}{4}x^5y + x^5y$  tại  $x=1; y=-1$ .

b)  $B = (-4x)\left(-\frac{1}{2}x^2y\right) + 3x^3y - \left(\frac{1}{2}xy\right)(5x^2)$  tại  $x=-1; y=2$ .

### Lời giải

a)  $A = \frac{3}{4}x^5y$ . Thay  $x=1; y=-1$ ; ta có:  $A = -\frac{3}{4}$

b)  $B = \frac{5}{2}x^3y$ . Thay  $x=-1; y=2 \Rightarrow B = -5$ .

**Bài 1.5.** Viết ba đơn thức đồng dạng với đơn thức  $-2x^2y$  rồi tính tổng của cả bốn đơn thức.

### Lời giải

Ta lấy  $3x^2y; -6x^2y; -\frac{1}{2}x^2y$

Vậy tổng của bốn đơn thức:  $(-2x^2y) + 3x^2y + (-6x^2y) + \left(-\frac{1}{2}x^2y\right) = -\frac{11}{2}x^2y$ .

**Bài 1.6.** Điền đơn thức thích hợp vào ô trống

a)  $3x^2y + \boxed{\dots} = 5x^2y$

b)  $\boxed{\dots} - 2x^2 = -7x^2$

c)  $\boxed{\dots} + \boxed{\dots} + \boxed{\dots} = x^5$ .

### Lời giải

a)  $3x^2y + \boxed{2x^2y} = 5x^2y$ . Cách tính:  $5x^2y - 3x^2y = 2x^2y$

b)  $\boxed{-5x^2} - 2x^2 = -7x^2$

c) Có nhiều cách điền vào các ô trống:

Chẳng hạn:  $\boxed{x^5} + \boxed{3x^5} + \boxed{(-3x^5)} = x^5$ ;  $\boxed{x^5} + \boxed{(-x^5)} + \boxed{x^5} = x^5$

**Bài 1.7.** Tìm đơn thức  $P$  sao cho

a)  $3x^3y + P = -5x^3y$

b)  $P + 5x^2y^3z^5 = -3x^2y^3z^5$

### Lời giải

a)  $P = 3x^3y + 5x^3y = 8x^3y$

b)  $P = (-3x^2y^3z^5) - 5x^2y^3z^5 = -8x^2y^3z^5$

**Bài 1.8.** Chứng tỏ  $(-3x)xy^2 + (-2xy)^2$  luôn nhận giá trị không âm với mọi giá trị của  $x; y$ .



**Lời giải**

$$(-3x)xy^2 + (-2xy)^2 = -3x^2y^2 + 4x^2y^2 = x^2y^2$$

Vì  $x^2 \geq 0$  và  $y^2 \geq 0$ , với mọi giá trị  $x, y$  nên  $x^2y^2 \geq 0$ , với mọi giá trị của  $x, y$ .

- Bài 1.9.** Viết đơn thức  $-4xy^2z^2$  thành một tổng hoặc một hiệu của hai đơn thức trong đó có một đơn thức bằng  $-2xy^2z^2$ .

**Lời giải**

$$-4xy^2z^3 = (-2xy^2z^3) + (-2xy^2z^3)$$

$$-4xy^2z^3 = 6xy^2z^3 - 10xy^2z^3.$$

- Bài 1.10.** Tìm  $m$  để  $mxy^2 - 3xy^2 + 7xy^2 = 5xy^2$ .

**Lời giải**

$$(m-3+7)xy^2 = 5xy^2 \Rightarrow m-3+7=5 \Rightarrow m=1$$

- Bài 1.11.** Thu gọn rồi tính giá trị của mỗi đơn thức sau

a)  $A = (-2)x^2y \frac{1}{2}xy$  khi  $x = -2; y = \frac{1}{2}$ ;

b)  $B = xyz(-0,5)y^2z$  khi  $x = 4; y = 0,5; z = 2$ .

**Lời giải**

a)  $A = (-2)x^2y \cdot \frac{1}{2}xy \Rightarrow A = \left[ (-2) \cdot \frac{1}{2} \right] x^2 \cdot x \cdot y \cdot y \Rightarrow A = -3x^3y^2$ .

Thay  $x = -2; y = \frac{1}{2}$  vào biểu thức, ta có:  $A = -(-2)^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 8 \cdot \frac{1}{4} = 2$ .

b)  $B = xyz(-0,5)y^2z \Rightarrow B = (-0,5)x \cdot y \cdot y^2 \cdot z \cdot z \Rightarrow B = (-0,5)xy^3z^2$ .

Thay  $x = 4; y = 0,5; z = 2$  vào biểu thức, ta có :

$$B = (-0,5) \cdot 4 \cdot (0,5)^3 \cdot 2^2 = -1.$$

- Bài 1.12.** Sắp xếp các đơn thức sau thành từng nhóm, mỗi nhóm chứa tất cả các đơn thức đồng dạng với nhau:  $3x^3y^2; -0,2x^2y^3; 7x^3y^2; -4y; \frac{3}{4}x^2y^3; y\sqrt{2}$ .

**Lời giải**

$$3x^3y^2; 7x^3y^2.$$

$$-0,2x^2y^3; \frac{3}{4}x^2y^3.$$

$$-4y; y\sqrt{2}.$$





**Bài 1.13.** Rút gọn rồi tính giá trị của biểu thức  $S = \frac{1}{2}x^2y^5 - \frac{5}{2}x^2y^5$  khi  $x = -2; y = 1$ .

### Lời giải

$$S = \frac{1}{2}x^2y^5 - \frac{5}{2}x^2y^5 \Rightarrow S = \left(\frac{1}{2} - \frac{5}{2}\right)x^2y^5 \Rightarrow S = -2x^2y^5$$

Thay  $x = -2; y = 1$  vào biểu thức, ta có:  $S = (-2) \cdot (-2)^2 \cdot 1^5 \Rightarrow S = -8$ .

**Bài 1.14.** Tính tổng của các đơn thức  $2x^2y^3; -\frac{3}{5}x^2y^3; -14x^2y^3; \frac{8}{5}x^2y^3$ .

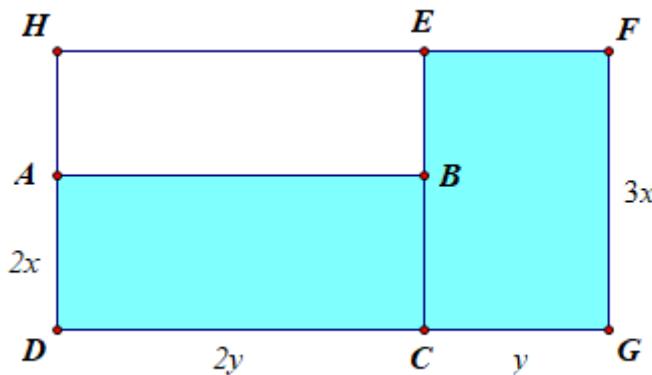
### Lời giải

$$2x^2y^3 + \left(-\frac{3}{5}x^2y^3\right) + (-14x^2y^3) + \frac{8}{5}x^2y^3 = \left[2 + \left(-\frac{3}{5}\right) - 14 + \frac{8}{5}\right]x^2y^3 = -11x^2y^3.$$

**Bài 1.15.** Một mảnh đất có dạng như phần tô đậm trong hình bên cùng với các kích thước được ghi trên đó. Hãy tìm đơn thức thu gọn với hai biến  $x$  và  $y$  biểu thị diện tích của mảnh đất đã cho bằng cách:

**Cách 1.** Tính tổng diện tích của hai hình chữ nhật  $ABCD$  và  $EFGC$ .

**Cách 2.** Lấy diện tích của hình chữ nhật  $HFGD$  trừ đi diện tích của hình chữ nhật  $HEBA$ .



### Lời giải

**Cách 1:**

Diện tích của hình chữ nhật  $ABCD$  là:  $2x \cdot 2y = 4xy$  (đơn vị diện tích)

Diện tích của hình chữ nhật  $EFGC$  là:  $3x \cdot y = 3xy$  (đơn vị diện tích)

Diện tích mảnh đất:  $4xy + 3xy = 7xy$  (đơn vị diện tích)

**Cách 2:**

Diện tích của hình chữ nhật  $AFGD$  là:  $3x \cdot (2y + y) = 3x \cdot 3y = 9xy$  (đơn vị diện tích)

Diện tích của hình chữ nhật  $HEBA$  là:  $(3x - 2x) \cdot 2y = 2xy$  (đơn vị diện tích)

Diện tích mảnh đất:  $9xy - 2xy = 7xy$  (đơn vị diện tích)

⇒ HẾT





## BÀI 2: ĐA THỨC

### PHẦN A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

#### 1. Khái niệm đa thức

Đa thức là tổng của những đơn thức, mỗi đơn thức trong tổng gọi là hạng tử của đa thức đó.

#### 2. Thu gọn đa thức

Đa thức thu gọn là đa thức không có hai hạng tử nào đồng dạng.

**Chú ý:**

Bậc của đa thức là bậc của hạng tử có bậc cao nhất trong dạng thu gọn của đa thức đó.

Một số khác 0 tùy ý được gọi là đa thức bậc 0.

Số 0 cũng là một đa thức, gọi là đa thức 0. Nó không có bậc xác định.

### PHẦN B. PHÂN LOẠI BÀI TẬP

#### 1. Thu gọn đa thức

##### Bài toán 1. Thu gọn

a)  $A = 11x^2 + 4x - x^2 - 4x$

b)  $B = \frac{3}{2}a^2b - \frac{5}{8}a^2b + \frac{1}{8}a^2b - \frac{3}{16}a^2b$

c)  $C = -\frac{3}{4}xy + \frac{2}{3}x^2y - 2xy + \frac{5}{6}x^2y$

d)  $D = 3ab - 2bc + 4ac - ab + 3bc + 4ab$

e)  $E = 2x^2\left(\frac{1}{2}y\right) - \frac{1}{3}ab(3a) + \frac{5}{4}x^2y + a^2b$

**Hướng dẫn:** Cộng trừ các đơn thức đồng dạng.

##### Bài toán 2. Thu gọn đa thức

a)  $A = 2x^2yz + 4xy^2z - 5x^2yz + xy^2z - xyz$

b)  $B = x^3 - 5xy + 3x^3 + xy - x^2 + \frac{1}{2}xy - x^2$

c)  $C = \frac{1}{2}x^2y^3 - x^2y^3 + 3x^2y^2z^2 - z^4 - 3x^2y^2z^2$

##### Bài toán 3. Thu gọn và tính giá trị của đa thức

a)  $A = \frac{1}{3}x^2y + xy^2 - xy + \frac{1}{2}xy^2 - 5xy - \frac{1}{3}x^2y$  tại  $x = \frac{1}{2}$  và  $y = 1$ .

b)  $B = 5xy^2 + 2xy - 3xy^2$  tại  $x = -2; y = 1$ .

c)  $C = x^6 + x^2y^5 + xy^6 + x^2y^5 - xy^6$  tại  $x = -1; y = -1$ .

##### Bài toán 4. Chứng tỏ giá trị của đa thức $M = 3x^2 + 5xy + 7x^2y - 3x^2 - 7x^2y + 3x^2 - 5xy + 2y^2$ luôn luôn không âm với mọi giá trị $x; y$ .

**Hướng dẫn:** Thu gọn đa thức  $M$ .

**Bài toán khác:** Chứng tỏ đa thức  $A = 11x^2 + 4x - 3x^2 - 4x + 5$  luôn nhận giá trị dương với mọi giá trị của  $x$ .





**Hướng dẫn:**  $A = 8x^2 + 5$ . Vì  $x^2 \geq 0 \Rightarrow 8x^2 \geq 0; 5 > 0 \Rightarrow 8x^2 + 5 > 0$ .

**Bài toán 5.** Cho đa thức  $P = 2x^2 - 6x + x^2 + 6x - 12$ . Tìm  $x$  để  $P$  nhận giá trị 0.

**Hướng dẫn:** Thu gọn đa thức  $P$

**Bài toán khác:** Tìm  $x$  để đa thức  $P = 3x^2 + 8x + 4 - 4x^2 - 8x - 3$  nhận giá trị -3.

**Hướng dẫn:**

$$P = -x^2 + 1$$

$$P = -3 \Rightarrow -x^2 + 1 = -3 \Rightarrow -x^2 = -4$$

$$\Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = 2 \text{ hoặc } x = -2.$$

Đáp số:  $x = 2$  hoặc  $x = -2$ .

**Bài toán 6.** Chứng tỏ rằng giá trị của đa thức  $P = -3xy^2 + 5y^2 - \frac{3}{2}xy + 2x^2$  tại  $y = -x$  luôn không âm.

**Hướng dẫn:** Thay giá trị  $y = -x$  ta tìm được  $P$  là đa thức của biến  $x$ .

**Bài toán 7.** Cho đa thức  $P = x^2 + 2mx - 3m + 5$ . Tìm  $m$  biết rằng đa thức  $P$  nhận giá trị 0 tại  $x = -2$ .

**Hướng dẫn:** Thay  $x = -2$  vào đa thức  $P$  và tìm  $m$  khi  $P = 0$

## II. BẬC CỦA ĐA THỨC

**Bài toán 8.** Tìm bậc của đa thức:

a)  $P = -3x^5 - \frac{1}{2}x^3y - \frac{3}{4}xy^2$

b)  $Q = 3x^2 - \frac{1}{2}x + 2$

c)  $T = 5x^2y - 4x^2y^2 + 5x - 3y + 1$

**Hướng dẫn:** Bậc của đơn thức nào lớn nhất là bậc của đa thức.

**Bài toán 9.** Tìm bậc của mỗi đa thức sau:

a)  $A = 3x^2 - \frac{1}{2}x + 1 + 2x - x^2$ ;

b)  $B = 3x^2 + 7x^3 - 3x^3 + 6x^3 - 3x^2$ .

**Hướng dẫn:** Thu gọn các đa thức.

**Bài toán khác:** Đa thức  $C = 3x^3 + 2x^2 - 2x^3 + 1 - 3x^2 + x - x^3$  thu gọn ta được:  $C = -x^2 + x + 1$ .

Vậy  $C$  có bậc là 2 (ta không nên vội kết luận đa thức  $C$  có bậc 3).

**Bài toán 10.** Tìm bậc của đa thức theo biến  $x; y$

a)  $P = 3x^3 + m^2x^2 - 2mx + m^5$ .

b)  $Q = mx^3 + 2xy + m^2x^2 + y + 2. (m \neq 0)$ .

**Hướng dẫn:** a) Biến của đa thức  $P$  là  $x; m$  là hệ số của mỗi đơn thức.

**Bài toán khác:** Tìm bậc của đa thức theo biến  $x$ .

1.  $P = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e. (a \neq 0)$

2.  $Q = mx^3 + x^3 + x^2 - 1. (m \neq 0)$

**Đáp số:**

1. Bậc của  $P$  là 4.

2. Bậc của  $Q$  là 3.





**Bài toán 11.** Cho đa thức  $P = 5xy^2 - 2x^2y + 3x^3 - 2y^4 - 3x^2y^2$

- a) Tìm bậc của đa thức  $P$ .  
b) Tìm các hạng tử bậc 3 trong đa thức  $P$ .

### PHẦN C. BÀI TẬP

**Bài 1.16.** Tìm bậc của các đa thức sau:

- a)  $A = 5x^2 + 6x^3 + 2x^3 - 4x^2 - 8x^3 + 2x$ ;  
b)  $B = 5xy - 4x^2y - 6x^2 - 2xy^2 + 3x^2y + 5x^2 + 4xy - 8x^2y - 3y^2$ ;  
c)  $C = 6x^4 - 3x^2 + 4x - 2x^4 + 3x^2 + x^3 - 4x^4 + 1$ .  
d)  $D = a^2 + 2ax^2 + x^2$

**Bài 1.17.** Thu gọn các đa thức:

- a)  $A = 5xy - 3,5y^2 - 2xy + 1,3y^2 - xy$ ;  
b)  $B = \frac{1}{2}ab^2 - \frac{7}{8}ab^2 + \frac{3}{4}a^2b - \frac{3}{8}a^2b - \frac{1}{2}ab^2$ ;  
c)  $C = 3ab - 2bc + 4ac - ab + 3bc + 4ab$ ;  
d)  $P = -2x^3 + xy^2 + x^2y - 1 + x^2y - xy^2 + 3x^3$ ;  
e)  $Q = 26ax^2 + 13ax + 41x - 16x - 13ax + 4ax^2$ .

**Bài 1.18.** Tính giá trị của đa thức:

- a)  $A = 3x^2 + 2xy - 4y^2 + 3x^2y - x^3 - 2xy + 4y^2$ , tại  $x = \frac{1}{2}; y = -1$ ;  
b)  $B = 2a^2 + 3ab - 5b^2 + ab + a^2 - b^2$ , tại  $a = -3; b = -2$ ;  
c)  $P = 3x^2y^2 - x^3 - 2xy + 6x^2 + 3x^2y - 2xy$  – tại  $x = -2; y = -1$ ;  
d)  $Q = 8a^2 - 10ab - b^2 - 6a^2 + 2ab - b^2 - a^2 + 6y^2$ , tại  $x = -2; y = -2$ .

**Bài 1.19.** Chứng minh rằng:  $M = 3x^2y^4 - 5xy^3 - \frac{3}{2}x^2y^4 + 3xy^3 + 2xy^3 + 1$  luôn dương với mọi  $x; y$ .

**Bài 1.20.** Cho đa thức:  $Q = 2x^2 + 6x + x^2 - 6x - 12$ . Tìm  $x$  để  $Q$  nhận giá trị 0.

☞ HẾT ☞





## ĐÁP ÁN THAM KHẢO

## BÀI 2: ĐA THỨC

## PHẦN B. PHÂN LOẠI BÀI TẬP

## 1. Thu gọn đa thức

**Bài toán 1.** Thu gọn

a)  $A = 11x^2 + 4x - x^2 - 4x$

b)  $B = \frac{3}{2}a^2b - \frac{5}{8}a^2b + \frac{1}{8}a^2b - \frac{3}{16}a^2b$

c)  $C = -\frac{3}{4}xy + \frac{2}{3}x^2y - 2xy + \frac{5}{6}x^2y$

d)  $D = 3ab - 2bc + 4ac - ab + 3bc + 4ab$

e)  $E = 2x^2\left(\frac{1}{2}y\right) - \frac{1}{3}ab(3a) + \frac{5}{4}x^2y + a^2b$

**Hướng dẫn:** Cộng trừ các đơn thức đồng dạng.**Lời giải**

a)  $A = 11x^2 + 4x - x^2 - 4x = 10x^2$

b)  $B = \frac{3}{2}a^2b - \frac{5}{8}a^2b + \frac{1}{8}a^2b - \frac{3}{16}a^2b = \frac{13}{16}a^2b$

c)  $C = -\frac{3}{4}xy + \frac{2}{3}x^2y - 2xy + \frac{5}{6}x^2y = -\frac{11}{4}xy + \frac{3}{2}x^2y$

d)  $D = 3ab - 2bc + 4ac - ab + 3bc + 4ab = 6ab + bc + 4ac$

e)  $E = 2x^2\left(\frac{1}{2}y\right) - \frac{1}{3}ab(3a) + \frac{5}{4}x^2y + a^2b = 2x^2y$

**Bài toán 2.** Thu gọn đa thức

a)  $A = 2x^2yz + 4xy^2z - 5x^2yz + xy^2z - xyz$

b)  $B = x^3 - 5xy + 3x^3 + xy - x^2 + \frac{1}{2}xy - x^2$

c)  $C = \frac{1}{2}x^2y^3 - x^2y^3 + 3x^2y^2z^2 - z^4 - 3x^2y^2z^2$

**Lời giải**

a)  $A = 2x^2yz + 4xy^2z - 5x^2yz + xy^2z - xyz$

$= (2x^2yz - 5x^2yz) + (4xy^2z + xy^2z) - xyz = -3x^2yz + 5xy^2z - xyz$

b)  $B = x^3 - 5xy + 3x^3 + xy - x^2 + \frac{1}{2}xy - x^2$

$= (x^3 + 3x^3) + (-5xy + xy + \frac{1}{2}xy) + (-x^2 - x^2) = 4x^3 - \frac{7}{2}xy - 2x^2$

c)  $C = \frac{1}{2}x^2y^3 - x^2y^3 + 3x^2y^2z^2 - z^4 - 3x^2y^2z^2$





$$= \left( \frac{1}{2}x^2y^3 - x^2y^3 \right) + \left( 3x^2y^2z^2 - 3x^2y^2z^2 \right) - z^4 = -\frac{1}{2}x^2y^3 - z^4$$

**Bài toán 3.** Thu gọn và tính giá trị của đa thức

a)  $A = \frac{1}{3}x^2y + xy^2 - xy + \frac{1}{2}xy^2 - 5xy - \frac{1}{3}x^2y$  tại  $x = \frac{1}{2}$  và  $y = 1$ .

b)  $B = 5xy^2 + 2xy - 3xy^2$  tại  $x = -2; y = 1$ .

c)  $C = x^6 + x^2y^5 + xy^6 + x^2y^5 - xy^6$  tại  $x = -1; y = -1$ .

### Lời giải

$$\begin{aligned} a) A &= \frac{1}{3}x^2y + xy^2 - xy + \frac{1}{2}xy^2 - 5xy - \frac{1}{3}x^2y \\ &= \left( \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \right)x^2y + \left( 1 + \frac{1}{2} \right)xy^2 + (-1 - 5)xy = \frac{3}{2}xy^2 - 6xy \end{aligned}$$

Thay  $x = \frac{1}{2}$  và  $y = 1$  vào đa thức  $A$  ta được:  $A = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1^2 - 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{3}{4} - 3 = -\frac{9}{4}$

b)  $B = 5xy^2 + 2xy - 3xy^2 = (5xy^2 - 3xy^2) + 2xy = 2xy^2 + 2xy$

Thay  $x = -2; y = 1$  vào đa thức  $B$  ta được:  $B = 2 \cdot (-2) \cdot 1^2 + 2 \cdot (-2) \cdot 1 = -4 - 4 = -8$ .

c)  $C = x^6 + x^2y^5 + xy^6 + x^2y^5 - xy^6 = x^6 + (x^2y^5 + x^2y^5) + (xy^6 - xy^6) = x^6 + 2x^2y^5$

Thay  $x = -1; y = -1$  vào đa thức  $C$  ta được:  $C = (-1)^6 + 2(-1)^2 \cdot (-1)^5 = 1 - 2 = -1$

**Bài toán 4.** Chứng tỏ giá trị của đa thức  $M = 3x^2 + 5xy + 7x^2y - 3x^2 - 7x^2y + 3x^2 - 5xy + 2y^2$  luôn luôn không âm với mọi giá trị  $x; y$ .

**Hướng dẫn:** Thu gọn đa thức  $M$ .

### Lời giải

Ta có:  $M = (3x^2 - 3x^2 + 3x^2) + (5xy - 5xy) + (7x^2y - 7x^2y) + 2y^2 = 3x^2 + 2y^2$

Vì  $x^2 \geq 0$  với mọi  $x$ ;  $y^2 \geq 0$  với mọi  $y \Rightarrow 3x^2 + 2y^2 \geq 0$  với mọi  $x, y$ .

**Bài toán khác:** Chứng tỏ đa thức  $A = 11x^2 + 4x - 3x^2 - 4x + 5$  luôn nhận giá trị dương với mọi giá trị của  $x$ .

**Hướng dẫn:**  $A = 8x^2 + 5$ . Vì  $x^2 \geq 0 \Rightarrow 8x^2 \geq 0; 5 > 0 \Rightarrow 8x^2 + 5 > 0$ .

**Bài toán 5.** Cho đa thức  $P = 2x^2 - 6x + x^2 + 6x - 12$ . Tìm  $x$  để  $P$  nhận giá trị 0.

**Hướng dẫn:** Thu gọn đa thức  $P$

### Lời giải

Ta có:  $P = 2x^2 - 6x + x^2 + 6x - 12 = 3x^2 - 12$

$P = 0 \Rightarrow 3x^2 - 12 = 0$

$\Rightarrow 3x^2 = 12 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = 2$  hoặc  $x = -2$ .





**Bài toán khác:** Tìm  $x$  để đa thức  $P = 3x^2 + 8x + 4 - 4x^2 - 8x - 3$  nhận giá trị  $-3$ .

**Hướng dẫn:**  $P = -x^2 + 1$

$$P = -3 \Rightarrow -x^2 + 1 = -3 \Rightarrow -x^2 = -4$$

$$\Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = 2 \text{ hoặc } x = -2.$$

Đáp số:  $x = 2$  hoặc  $x = -2$ .

**Bài toán 6.** Chứng tỏ rằng giá trị của đa thức  $P = -3xy^2 + 5y^2 - \frac{3}{2}xy + 2x^2$  tại  $y = -x$  luôn không âm.

**Hướng dẫn:** Thay giá trị  $y = -x$  ta tìm được  $P$  là đa thức của biến  $x$ .

### Lời giải

Thay  $y = -x$  vào biểu thức của  $P$  ta được:

$$P = -3x(-x)^2 + 5(-x)^2 - \frac{3}{2}x(-x) + 2x^2 = 3x^4 + 5x^2 + \frac{3}{2}x^2 + 2x^2 = 3x^4 + \frac{17}{2}x^2$$

Vì  $x^2 \geq 0$  và  $x^4 \geq 0$  nên  $3x^4 + \frac{17}{2}x^2 \geq 0$  với mọi  $x$ .

**Bài toán 7.** Cho đa thức  $P = x^2 + 2mx - 3m + 5$ . Tìm  $m$  biết rằng đa thức  $P$  nhận giá trị 0 tại  $x = -2$ .

**Hướng dẫn:** Thay  $x = -2$  vào đa thức  $P$  và tìm  $m$  khi  $P = 0$

### Lời giải

Thay  $x = -2$  vào biểu thức của  $P$ .

$$\text{Ta có: } P = (-2)^2 + 2m \cdot (-2) - 3m + 5 = 9 - 7m.$$

$$\text{Vì } P \text{ nhận giá trị 0 tại } x = -2 \Rightarrow 9 - 7m = 0 \Rightarrow m = \frac{9}{7}$$

## II. BẬC CỦA ĐA THỰC

**Bài toán 8.** Tìm bậc của đa thức:

a)  $P = -3x^5 - \frac{1}{2}x^3y - \frac{3}{4}xy^2$

1b)  $Q = 3x^2 - \frac{1}{2}x + 2$

c)  $T = 5x^2y - 4x^2y^2 + 5x - 3y + 1$

**Hướng dẫn:** Bậc của đơn thức nào lớn nhất là bậc của đa thức.

### Lời giải

a) Bậc của hạng tử  $-3x^5$  là 5 là bậc cao nhất trong các hạng tử. Vậy bậc của  $P$  là 5.

b) Bậc của hạng tử  $3x^2$  là bậc 2.

Vậy bậc của  $Q$  là 2.

c) Bậc của các hạng tử  $5x^2y$  và  $-4x^2y^2$  đều là 3. Vậy bậc của  $T$  là 3.

**Bài toán 9.** Tìm bậc của mỗi đa thức sau:





a)  $A = 3x^2 - \frac{1}{2}x + 1 + 2x - x^2;$

b)  $B = 3x^2 + 7x^3 - 3x^3 + 6x^3 - 3x^2.$

**Hướng dẫn:** Thu gọn các đa thức.

### Lời giải

a)  $A = 2x^2 + \frac{3}{2}x + 1$

Vậy đa thức  $A$  có bậc là 2.

b)  $B = 10x^3.$

Vậy  $B$  có bậc là 3.

**Bài toán khác:** Đa thức  $C = 3x^3 + 2x^2 - 2x^3 + 1 - 3x^2 + x - x^3$  thu gọn ta được:  $C = -x^2 + x + 1.$

Vậy  $C$  có bậc là 2 (ta không nên vội kết luận đa thức  $C$  có bậc 3).

**Bài toán 10.** Tìm bậc của đa thức theo biến  $x; y$

a)  $P = 3x^3 + m^2x^2 - 2mx + m^5.$

b)  $Q = mx^3 + 2xy + m^2x^2 + y + 2. (m \neq 0).$

**Hướng dẫn:** a) Biến của đa thức  $P$  là  $x; m$  là hệ số của mỗi đơn thức.

### Lời giải

a) Hạng tử  $3x^3$  có bậc 3. Vậy  $P$  có bậc là 3.

b) Hạng tử  $mx^3$  có bậc của  $x$  là 3. Vậy bậc của  $Q$  là 3.

**Bài toán khác:** Tìm bậc của đa thức theo biến  $x$ .

1.  $P = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e. (a \neq 0)$

2.  $Q = mx^3 + x^3 + x^2 - 1. (m \neq 0)$

### Đáp số:

1. Bậc của  $P$  là 4.

2. Bậc của  $Q$  là 3.

**Bài toán 11.** Cho đa thức  $P = 5xy^2 - 2x^2y + 3x^3 - 2y^4 - 3x^2y^2$

a) Tìm bậc của đa thức  $P$ .

b) Tìm các hạng tử bậc 3 trong đa thức  $P$ .

### Lời giải

a) Ta có  $-2y^4$  và  $-3x^2y^2$  là hai hạng tử cũng có bậc 4. Vậy  $P$  có bậc là 4.

b) Các hạng tử có cùng bậc 3 là:  $5x^2; -2x^2y$  và  $3x^3$ .

## PHẦN C. BÀI TẬP

**Bài 1.16.** Tìm bậc của các đa thức sau:

a)  $A = 5x^2 + 6x^3 + 2x^3 - 4x^2 - 8x^3 + 2x;$

b)  $B = 5xy - 4x^2y - 6x^2 - 2xy^2 + 3x^2y + 5x^2 + 4xy - 8x^2y - 3y^2;$

c)  $C = 6x^4 - 3x^2 + 4x - 2x^4 + 3x^2 + x^3 - 4x^4 + 1.$





d)  $D = a^2 + 2ax^2 + x^2$ .

### Lời giải

- a)  $A = x^2 + 2x$ . Độ cao của  $A$  là 2
- b)  $B = 12xy - 9x^2y - x^2 - 2xy^2 - 3y^2$ . Độ cao của  $B$  là 3
- c)  $C = x^3 + 4x + 1$ . Độ cao của  $C$  là 3
- d) Độ cao của  $D$  là 3 (theo hai biến  $a$  và  $x$ )

**Bài 1.17.** Thu gọn các đa thức:

- a)  $A = 5xy - 3,5y^2 - 2xy + 1,3y^2 - xy$ ;
- b)  $B = \frac{1}{2}ab^2 - \frac{7}{8}ab^2 + \frac{3}{4}a^2b - \frac{3}{8}a^2b - \frac{1}{2}ab^2$ ;
- c)  $C = 3ab - 2bc + 4ac - ab + 3bc + 4ab$ ;
- d)  $P = -2x^3 + xy^2 + x^2y - 1 + x^2y - xy^2 + 3x^3$ ;
- e)  $Q = 26ax^2 + 13ax + 41x - 16x - 13ax + 4ax^2$ .

### Lời giải

- a)  $A = (5 - 2 - 1)xy + (1,3 - 3,5)y^2 = 2xy - 2,2y^2$
- b)  $B = \left(\frac{1}{2} - \frac{7}{8} - \frac{1}{2}\right)ab^2 + \left(\frac{3}{4} - \frac{3}{8}\right)a^2b = -\frac{7}{8}a^2b + \frac{3}{8}ab^2$
- c)  $C = (3 - 1 + 4)ab + (-2 + 3)bc + 4ac = 6ab + bc + 4ac$
- d)  $P = x^3 + 2x^2y - 1$  là 3
- e)  $Q = 30ax^2 + 25x$

**Bài 1.18.** Tính giá trị của đa thức:

- a)  $A = 3x^2 + 2xy - 4y^2 + 3x^2y - x^3 - 2xy + 4y^2$ , tại  $x = \frac{1}{2}; y = -1$ ;
- b)  $B = 2a^2 + 3ab - 5b^2 + ab + a^2 - b^2$ , tại  $a = -3; b = -2$ ;
- c)  $P = 3x^2y^2 - x^3 - 2xy + 6x^2 + 3x^2y - 2xy$  – tại  $x = -2; y = -1$ ;
- d)  $Q = 8a^2 - 10ab - b^2 - 6a^2 + 2ab - b^2 - a^2 + 6y^2$ , tại  $x = -2; y = -2$ .

### Lời giải

a)  $A = 3x^2 + 3x^2y - x^3$

Thay  $x = \frac{1}{2}; y = -1$  vào biểu thức  $A$  ta được:

$$A = 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot (-1) - \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{3}{4} - \frac{3}{4} - \frac{1}{8} = -\frac{1}{8}$$





b)  $B = 3a^2 + 4ab - 6b^2$

Thay  $a = -3; b = -2$  vào biểu thức  $B$ , ta được

$$B = 3(-3)^2 + 4(-3)(-2) - 6(-2)^2 = 27 + 24 - 24 = 27$$

c) Đáp số  $C = 8$  khi  $x = -2; y = -1$

(Rút gọn  $C$ , ta được  $C = -6xy^2 + x^3 - x^2y$ )

d) Đáp số  $P = 68$

e) Đáp số  $Q = 17$

**Bài 1.19.** Chứng minh rằng:  $M = 3x^2y^4 - 5xy^3 - \frac{3}{2}x^2y^4 + 3xy^3 + 2xy^3 + 1$  luôn dương với mọi  $x; y$ .

### Lời giải

Ta có  $M = \frac{3}{2}x^2y^4 + 1$

Vì  $x^2 \geq 0$  và  $y^4 \geq 0$  nên  $M \geq 0$  với mọi giá trị  $x; y$ .

**Bài 1.20.** Cho đa thức:  $Q = 2x^2 + 6x + x^2 - 6x - 12$ . Tìm  $x$  để  $Q$  nhận giá trị 0.

### Lời giải

$$Q = 3x^2 - 12; Q = 0 \Rightarrow 3x^2 - 12 = 0 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x^2 = (\pm 2)^2 \Rightarrow x = \pm 2$$

☞ HẾT ☞





## HKBài 3. PHÉP CỘNG VÀ PHÉP TRỪ ĐA THỨC

### PHẦN A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

Cộng (hay trừ) hai đa thức là thu gọn đa thức nhận được sau khi nối hai đa thức đã cho bởi dấu "+" (hay dấu "-").

#### Chú ý:

- Phép cộng đa thức cũng có các tính chất giao hoán và kết hợp tương tự như phép cộng các số.
- Với  $A, B, C$  là những đa thức tùy ý, ta có:

$$A + B + C = (A + B) + C = A + (B + C);$$

- Nếu  $A - B = C$  thì  $A = B + C$ ; ngược lại, nếu  $A = B + C$  thì  $A - B = C$ .

### PHẦN B. PHÂN LOẠI CÁC BÀI TẬP

#### I. Cộng, trừ đa thức

**Bài toán 1.** Tính tổng của hai đa thức:

- $P = 3ab + a^2 - 2b^2; Q = 2a^2 - 3ab;$
- $A = 3x^2 + 2xy - 4y^2; B = 4y^2 - 2xy + 3x^2y^2 - x^3;$
- $M = x^2y + x^3 - xy^2 + 3; K = x^3 + xy^2 - xy - 6.$

**Hướng dẫn:** Nhóm các hạng tử đồng dạng và rút gọn.

**Bài toán 2.** Tính tổng của hai đa thức:

- $M = x^2y + 0,5xy^3 - 7,5x^3y^2 + x^2$  và  $N = 3xy^3 - x^2y + 5,5x^3y^2$
- $P = x^5 + xy + 0,3y^2 - x^2y^3 - 2$  và  $Q = x^2y^3 + 5 - 1,3y^2$
- $A = x^2y + xy^2 - 5x^2y^2 + x^3$  và  $B = 3xy^2 - x^2y + x^2y^2$
- $C = x^3 + xy + y^2 - x^2y^2 - 2$  và  $D = x^2y^2 + 5 - y^2$

**Bài toán 3.** Cho hai đa thức:  $M = x^2 - 2xy + y^2; N = y^2 + 2xy + x^2 + 1$

- Tính  $M + N$
- Tính  $M - N$

**Hướng dẫn:** Tính  $M - N$ , ta thực hiện quy tắc bỏ dấu ngoặc, sau đó làm như phép cộng hai đa thức.

**Bài toán 4.** Cho hai đa thức:  $M = 3xyz - 3x^2 + 5xy - 1; N = 5x^2 + xyz - 5xy + 3 - y$ .

Tính  $M + N; M - N; N - M$ .

**Bài toán 5.** Tính tổng:

- $A = (-2x^3 + xy^2) + (x^2y - 1) + (x^2y - xy^2 + 3x^3)$
- $B = (3x^2 + 5xy + 7x^2y) - (5xy + 3x^2) - (7x^2y - 3x^2)$





c)  $C = (8a^2 - 10ab - b^2) + (-6a^2 + 2ab - b^2) - (a^2 - 8ab + 4b^2)$

d)  $D = (4a^2 - 2ab - b^2) - (-a^2 + b^2 - 2ab) + (3a^2 + b^2 - ab)$

**Hướng dẫn:** Trong tổng của ba đa thức vừa có phép cộng và phép trừ, ta làm thứ tự từ trái qua phải và thực hiện bỏ dấu ngoặc.

**Bài toán 6.** Cho  $A = 2a^2 - 3ab + 4b^2$ ;  $B = 3a^2 + 4ab - b^2$ ;  $C = a^2 + 2ab + 3b^2$ . Tính  $A - B + C$ .

**Bài toán khác:** Cho  $A = a^2 - b^2 + ab$ ;  $B = 2a^2 + 3ab - 5b^2$ ;  $C = -4a^2 + 2ab - 3b^2$ . Tính  $A - B - C$ .

**Đáp số:**  $3a^2 - 4ab + 7b^2$ .

## II. Tìm một đa thức chưa biết

**Bài toán 7.** Tìm đa thức  $M$ , biết

a)  $M + (x^2 + y^2) = 5x^2 + 3y^2 - xy$

b)  $M - (xy + x^2 - y^2) = x^2 + y^2$

**Hướng dẫn:**  $A + B = C \Rightarrow A = C - B$

**Bài toán khác:**

1. Tìm đa thức  $P$ , biết  $P + (x^2 - 2y^2) = x^2 + 3y^2 - 1$ .

$$(P = x^2 + 3y^2 - 1 - (x^2 - 2y^2) = 5y^2 - 1)$$

2. Tìm đa thức  $Q$ , biết  $Q - (5x^2 - xyz) = xy + 2x^2 - 3xyz + 5$ .

$$(Q = xy + 2x^2 - 3xyz + 5 + (5x^2 - xyz) = xy + 7x^2 - 4xyz + 5)$$

**Bài toán 8.** Cho các đa thức:  $A = x^2 - 2y + xy + 1$ ;  $B = x^2 + y - x^2y^2 - 1$ .

Tìm đa thức  $C$  sao cho:

a)  $C = A + B$

b)  $C + A = B$ .

**Hướng dẫn:** b)  $C + A = B \Rightarrow C = B - A$

## III. Bài toán số học:

**Bài toán 9.**

a) Chứng minh tổng của năm số tự nhiên liên tiếp thì chia hết cho 5.

b) Chứng minh tổng của bốn số tự nhiên lẻ liên tiếp thì chia hết cho 8.

**Hướng dẫn:**

a) Năm số tự nhiên liên tiếp:  $n; n+1; n+2; n+3; n+4$ .

b) Bốn số tự nhiên lẻ liên tiếp:  $2k+1; 2k+3; 2k+5; 2k+7$ .

**Bài toán khác:** Chứng tỏ tổng của bốn số tự nhiên liên tiếp thì không chia hết cho 4.

**Hướng dẫn:** Bốn số tự nhiên liên tiếp  $n; n+1; n+2; n+3$ .

Xét tổng:  $n + (n+1) + (n+2) + (n+3)$ .

**Bài toán 10.** Viết dưới dạng một đa thức:





a)  $\overline{abc} - \overline{cba}$  b)  $\overline{ab} + 2a - 3b$  c)  $\overline{ab} + \overline{ba}$

**Hướng dẫn:**  $\overline{ab} = 10a + b; 0 < a \leq 9; a, b \in \mathbb{N}; \overline{abc} = 100a + 10b + c$

**Bài toán mới:**

1. Chứng tỏ rằng  $\overline{ab} - \overline{ba}$  chia hết cho 9

2. Viết dưới dạng một đa thức

$$\overline{abcd} - \overline{abc}$$

$$\overline{abc} + \overline{bca} + \overline{cab}$$

$$\overline{abc} - \overline{bc} + a$$

3. Chứng minh rằng  $\overline{abc} + \overline{bca} + \overline{cab}$  chia hết cho 3 và 37.

4. Chứng minh rằng  $\overline{aaa}$  chia hết cho 37.

#### IV. Tìm giá trị của biểu thức

**Bài toán 11.** Tìm giá trị của biểu thức:

a)  $P = (8a^2 - 10ab - b^2) + (-6a^2 + 2ab - b^2) - (a^2 - 8ab + 4b^2)$  tại  $a = -1; b = 2$ .

b)  $Q = 11ac + 13bc + 17b^2 - (10ac + 10bc - 3b^2)$  tại  $a = -1; b = -2; c = 2$ .

**Bài toán 12.** Cho hai đa thức:  $P = 3x^2 + 4xy - 2y^2$  và  $Q = -x^2 - 4xy + 3y^2$ . Chứng tỏ  $P + Q$  luôn nhận các giá trị không âm với mọi  $x, y$ .

#### PHẦN C. BÀI TẬP

**Bài 1.21.** Thu gọn:

a)  $A = (7m^2 - 4mn - n^2) - (2m^2 - mn + n^2)$

b)  $B = (5a^2 - 11ab + 8b^2) + (-2b^2 - 7a^2 + 5ab)$

c)  $C = 11ac + 13bc + 17b^2 - (10ac + 10bc - 3b^2)$

d)  $D = 41m + 13am + 26am^2 - (16m + 13am - 4am^2)$

**Bài 1.22.** Tìm tổng và hiệu của  $M; N$ :

a)  $M = 5a^2 + b; N = -4a^2 - b$

b)  $M = 2p^2 - 3q^3; N = 2p^2 - 4q^3$

**Bài 1.23.** Tính tổng

a)  $M = 3x^2 + 5xy + 7x^2y - [(5xy + 3x^2) - (7x^2y - 3x^2)]$

b)  $N = 5x^2 + 6x^2 + (x^3 - x^2) - (-2x^3 + 4x^2)$

c)  $P = 2a^2 - (b^2 - 3a^2) - [(5a^2 - 11ab + 8b^2) - (-2b^2 - 7a^2 + 5ab)]$





**Bài 1.24.** a) Chứng tỏ rằng  $\overline{aab\bar{b}}$  chia hết cho 11

b) Tính tổng  $\overline{abc} + \overline{bca} + \overline{cab}$ , chứng tỏ tổng này chia hết cho 111

**Bài 1.25.** Tìm đa thức  $M$ , biết:

a)  $M + (2x^2 + xy) = 4x^2 + 5xy - 2y^2$

b)  $M - (2xy - 2y^2) = 3x^3 - 5xy + 6y^2$

c)  $(25x^2y - 13xy^2 + y^3) - M = 11x^2y - 2y^3$

d)  $M + (12x^4 - 15x^2 + 6) = 0$

**Bài 1.26.** Tìm đa thức  $M$  sao cho tổng của  $M$  với đa thức  $x^2 - 2xy + y^2 - 2xz + z^2$  không chứa biến  $x$ .

**Bài 1.27.** Viết đa thức  $x^2 - 5x + 6$  dưới dạng hiệu của hai đa thức.

**Bài 1.28.** Chứng tỏ rằng giá trị của hiệu hai đa thức sau không phụ thuộc vào biến  $x, y$ :

$$M = 5x - 5y; N = -5y + 5x - 2$$

**Bài 1.29.** Tìm hiệu của hai đa thức  $P$  và  $Q$ :

a)  $P = (x + y - z - 2x) + y - z - (z - x - y)$

$$Q = x - [x - (y - z) - x]$$

b)  $P = 2a^2 + ab - b^2 - (-a^2 + b^2 - ab)$

$$Q = 3a^2 + b^2 - (ab - a^2).$$

∞ HẾT ∞



**ĐÁP ÁN THAM KHẢO****Bài 3. PHÉP CỘNG VÀ PHÉP TRỪ ĐA THỨC****PHẦN B. PHÂN LOẠI CÁC BÀI TẬP****I. Cộng, trừ đa thức****Bài toán 1.** Tính tổng của hai đa thức:

- a)  $P = 3ab + a^2 - 2b^2$ ;  $Q = 2a^2 - 3ab$ ;
- b)  $A = 3x^2 + 2xy - 4y^2$ ;  $B = 4y^2 - 2xy + 3x^2y^2 - x^3$ ;
- c)  $M = x^2y + x^3 - xy^2 + 3$ ;  $K = x^3 + xy^2 - xy - 6$ .

**Hướng dẫn:** Nhóm các hạng tử đồng dạng và rút gọn.**Lời giải**

a)  $P + Q = (3ab + a^2 - 2b^2) + (2a^2 - 3ab) = (3ab - 3ab) + (a^2 + 2a^2) - 2b^2 = 3a^2 - 2b^2$ .

b)  $A + B = (3x^2 + 2xy - 4y^2) + (4y^2 - 2xy + 3x^2y^2 - x^3)$   
 $= 3x^2 + (2xy - 2xy) + (-4y^2 + 4y^2) + 3x^2y^2 - x^3$   
 $= 3x^2 + 3x^2y^2 - x^3$

c)  $M + K = (x^2y + x^3 - xy^2 + 3) + (x^3 + xy^2 - xy - 6)$   
 $= x^2y + (x^3 + x^3) + (-xy^2 + xy^2) - xy + 3 - 6 = x^2y + 2x^3 - xy - 3$

**Bài toán 2.** Tính tổng của hai đa thức:

- a)  $M = x^2y + 0,5xy^3 - 7,5x^3y^2 + x^2$  và  $N = 3xy^3 - x^2y + 5,5x^3y^2$
- b)  $P = x^5 + xy + 0,3y^2 - x^2y^3 - 2$  và  $Q = x^2y^3 + 5 - 1,3y^2$
- c)  $A = x^2y + xy^2 - 5x^2y^2 + x^3$  và  $B = 3xy^2 - x^2y + x^2y^2$
- d)  $C = x^3 + xy + y^2 - x^2y^2 - 2$  và  $D = x^2y^2 + 5 - y^2$

**Lời giải**

a)  $M + N = (x^2y + 0,5xy^3 - 7,5x^3y^2 + x^2) + (3xy^3 - x^2y + 5,5x^3y^2)$   
 $= (x^2y - x^2y) + (0,5xy^3 + 3xy^3) + (-7,5x^3y^2 + 5,5x^3y^2) + x^3$   
 $= 3,5xy^3 - 2x^3y^2 + x^3$

b)  $P + Q = (x^5 + xy + 0,3y^2 - x^2y^3 - 2) + (x^2y^3 + 5 - 1,3y^2)$   
 $= x^5 + xy + (0,3y^2 - 1,3y^2) + (-x^2y^3 + x^2y^3) + (-2 + 5)$   
 $= x^5 + xy + -y^2 + 3$

c)  $A + B = (x^2y + xy^2 - 5x^2y^2 + x^3) + (3xy^2 - x^2y + x^2y^2)$





$$\begin{aligned}
 &= (x^2y - x^2y) + (xy^2 + 3xy^2) + (-5x^2y^2 + x^2y^2) + x^3 \\
 &= 4xy^2 - 4x^2y^2 + x^3
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{d)} \quad C + D &= (x^3 + xy + y^2 - x^2y^2 - 2) + (x^2y^2 + 5 - y^2) \\
 &= x^3 + xy + (y^2 - y^2) + (-x^2y^2 + x^2y^2) + (-2 + 5) \\
 &= x^3 + xy + 3
 \end{aligned}$$

**Bài toán 3.** Cho hai đa thức:  $M = x^2 - 2xy + y^2$ ;  $N = y^2 + 2xy + x^2 + 1$

- a) Tính  $M + N$       b) Tính  $M - N$

**Hướng dẫn:** Tính  $M - N$ , ta thực hiện quy tắc bỏ dấu ngoặc, sau đó làm như phép cộng hai đa thức.

#### Lời giải

$$\begin{aligned}
 \text{a)} \quad M + N &= (x^2 - 2xy + y^2) + (y^2 + 2xy + x^2 + 1) \\
 &= x^2 + x^2 + (-2xy + 2xy) + (y^2 + y^2) + 1 \\
 &= 2x^2 + 2y^2 + 1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{b)} \quad M - N &= (x^2 - 2xy + y^2) - (y^2 + 2xy + x^2 + 1) \\
 &= x^2 - 2xy + y^2 - y^2 - 2xy - x^2 - 1 \\
 &= (x^2 - x^2) + (-2xy - 2xy) + (y^2 - y^2) - 1 \\
 &= -4xy - 1
 \end{aligned}$$

**Chú ý:** Ta luôn viết mỗi đa thức trong dấu ngoặc (kể cả phép cộng và phép trừ). Chú ý quy tắc bỏ dấu ngoặc.

**Bài toán 4.** Cho hai đa thức:  $M = 3xyz - 3x^2 + 5xy - 1$ ;  $N = 5x^2 + xyz - 5xy + 3 - y$ .

Tính  $M + N$ ;  $M - N$ ;  $N - M$ .

#### Lời giải

$$\begin{aligned}
 \text{a)} \quad M + N &= (3xyz - 3x^2 + 5xy - 1) + (5x^2 + xyz - 5xy + 3 - y) \\
 &= 4xyz + 2x^2 - y + 2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{b)} \quad M - N &= (3xyz - 3x^2 + 5xy - 1) - (5x^2 + xyz - 5xy + 3 - y) \\
 &= 3xyz - 3x^2 + 5xy - 1 - 5x^2 - xyz + 5xy - 3 + y \\
 &= (3xyz - xyz) + (-3x^2 - 5x^2) + (5xy + 5xy) + y + (-1 - 3) \\
 &= 2xyz - 8x^2 + 10xy + y - 4
 \end{aligned}$$

$$\text{c)} \quad N - M = (5x^2 + xyz - 5xy + 3 - y) - (3xyz - 3x^2 + 5xy - 1)$$





$$= 5x^2 + xyz - 5xy + 3 - y - 3xyz + 3x^2 - 5xy + 1$$

$$= 8x^2 - 2xyz - 10xy - y + 4$$

**Bài toán 5.** Tính tổng:

a)  $A = (-2x^3 + xy^2) + (x^2y - 1) + (x^2y - xy^2 + 3x^3)$

b)  $B = (3x^2 + 5xy + 7x^2y) - (5xy + 3x^2) - (7x^2y - 3x^2)$

c)  $C = (8a^2 - 10ab - b^2) + (-6a^2 + 2ab - b^2) - (a^2 - 8ab + 4b^2)$

d)  $D = (4a^2 - 2ab - b^2) - (-a^2 + b^2 - 2ab) + (3a^2 + b^2 - ab)$

**Hướng dẫn:** Trong tổng của ba đa thức vừa có phép cộng và phép trừ, ta làm thứ tự từ trái qua phải và thực hiện bỏ dấu ngoặc.

### Lời giải

a)  $A = (-2x^3 + 3x^3) + (xy^2 - xy^2) + (x^2y + x^2y) - 1 = x^3 + 2x^2y - 1$

b)  $B = 3x^2 + 5xy + 7x^2y - 5xy - 3x^2 - 7x^2y + 3x^2 = 3x^2$

c)  $C = 8a^2 - 10ab - b^2 - 6a^2 + 2ab - b^2 - a^2 + 8ab - 4b^2 = a^2 - 6b^2$

d)  $D = 4a^2 - 2ab - b^2 + a^2 - b^2 + 2ab + 3a^2 + b^2 - ab = 8a^2 - ab - b^2$

**Bài toán 6.** Cho  $A = 2a^2 - 3ab + 4b^2$ ;  $B = 3a^2 + 4ab - b^2$ ;  $C = a^2 + 2ab + 3b^2$ . Tính  $A - B + C$ .

### Lời giải

Ta có:  $A - B + C = (2a^2 - 3ab + 4b^2) - (3a^2 + 4ab - b^2) + (a^2 + 2ab + 3b^2)$

$$= 2a^2 - 3ab + 4b^2 - 3a^2 - 4ab + b^2 + a^2 + 2ab + 3b^2$$

$$= 8b^2 - 5ab$$

**Bài toán khác:** Cho  $A = a^2 - b^2 + ab$ ;  $B = 2a^2 + 3ab - 5b^2$ ;  $C = -4a^2 + 2ab - 3b^2$ . Tính  $A - B - C$ .

**Đáp số:**  $3a^2 - 4ab + 7b^2$ .

## II. Tìm một đa thức chưa biết

**Bài toán 7.** Tìm đa thức  $M$ , biết

a)  $M + (x^2 + y^2) = 5x^2 + 3y^2 - xy$

b)  $M - (xy + x^2 - y^2) = x^2 + y^2$

**Hướng dẫn:**  $A + B = C \Rightarrow A = C - B$

### Lời giải

a) Ta có:  $M = 5x^2 + 3y^2 - xy - (x^2 + y^2) = 4x^2 + 2y^2 - xy$

b) Ta có:  $M = x^2 + y^2 + (xy + x^2 - y^2) = 2x^2 + xy$

**Bài toán khác:**

1. Tìm đa thức  $P$ , biết  $P + (x^2 - 2y^2) = x^2 + 3y^2 - 1$ .







**Bài toán 10.** Viết dưới dạng một đa thức:

a)  $\overline{abc} - \overline{cba}$  b)  $\overline{ab} + 2a - 3b$  c)  $\overline{ab} + \overline{ba}$

**Hướng dẫn:**  $\overline{ab} = 10a + b; 0 < a \leq 9; a, b \in \mathbb{N}; \overline{abc} = 100a + 10b + c$

### Lời giải

a) Ta có:  $\overline{abc} - \overline{cba} = (100a + 10b + c) - (100c + 10b + a)$   
 $= 99a - 99c; 0 \leq a; b; c \leq 9; a, b, c \in \mathbb{N}; a \neq 0; c \neq 0.$

**Nhận xét:**  $99a - 99c = 99(a - c) : 99 \Rightarrow (\overline{abc} - \overline{cba}) : 99$

**Cách khác:**  $99a : 99, 99c : 99 \Rightarrow (99a - 99c) : 99$

b) Ta có:  $\overline{ab} + 2a - 3b = 10a + b + 2a - 3b = 12a - 2b$

c) Ta có:  $\overline{ab} + \overline{ba} = (10a + b) + (10b + a) = 11a + 11b$

**Nhận xét:**  $11a : 11, 11b : 11 \Rightarrow (11a + 11b) : 11 \Rightarrow (\overline{ab} + \overline{ba}) : 11$

**Bài toán mới:**

1. Chứng tỏ rằng  $\overline{ab} - \overline{ba}$  chia hết cho 9

2. Viết dưới dạng một đa thức

$$\overline{abcd} - \overline{abc}$$

$$\overline{abc} + \overline{bca} + \overline{cab}$$

$$\overline{abc} - \overline{bc} + a$$

3. Chứng minh rằng  $\overline{abc} + \overline{bca} + \overline{cab}$  chia hết cho 3 và 37.

4. Chứng minh rằng  $\overline{aaa}$  chia hết cho 37.

## IV. Tìm giá trị của biểu thức

**Bài toán 11.** Tìm giá trị của biểu thức:

a)  $P = (8a^2 - 10ab - b^2) + (-6a^2 + 2ab - b^2) - (a^2 - 8ab + 4b^2)$  tại  $a = -1; b = 2$ .

b)  $Q = 11ac + 13bc + 17b^2 - (10ac + 10bc - 3b^2)$  tại  $a = -1; b = -2; c = 2$ .

### Lời giải

a) Ta có:  $P = (8a^2 - 10ab - b^2) + (-6a^2 + 2ab - b^2) - (a^2 - 8ab + 4b^2) = a^2 - 6b^2$

Thay  $a = -1; b = 2$  vào biểu thức  $P$ , ta được  $P = (-1)^2 - 6 \cdot (-2)^2 = -23$

b) Ta có:  $Q = 11ac + 13bc + 17b^2 - (10ac + 10bc - 3b^2) = ac + 3bc + 20b^2$

Thay  $a = -1; b = -2; c = 2$  vào biểu thức  $Q$ , ta được  $Q = 55$





**Bài toán 12.** Cho hai đa thức:  $P = 3x^2 + 4xy - 2y^2$  và  $Q = -x^2 - 4xy + 3y^2$ . Chứng tỏ  $P + Q$  luôn nhận các giá trị không âm với mọi  $x, y$ .

### Lời giải

$$\text{Ta có: } P + Q = (3x^2 + 4xy - 2y^2) + (-x^2 - 4xy + 3y^2)$$

$$= 3x^2 + 4xy - 2y^2 - x^2 - 4xy + 3y^2 = 2x^2 + y^2$$

Mà  $2x^2 + y^2 \geq 0$  với mọi  $x, y$

## PHẦN C. BÀI TẬP

**Bài 1.21.** Thu gọn:

a)  $A = (7m^2 - 4mn - n^2) - (2m^2 - mn + n^2)$

b)  $B = (5a^2 - 11ab + 8b^2) + (-2b^2 - 7a^2 + 5ab)$

c)  $C = 11ac + 13bc + 17b^2 - (10ac + 10bc - 3b^2)$

d)  $D = 41m + 13am + 26am^2 - (16m + 13am - 4am^2)$

### Lời giải

a)  $A = 7m^2 - 4mn - n^2 - 2m^2 + mn - n^2 = 5m^2 - 3mn - 2n^2$

b)  $B = -2a^2 - 6ab + 6b^2$

c)  $C = 11ac + 13bc + 17b^2 - 10ac - 10bc + 3b^2 = ac + 3bc + 20b^2$

d)  $D = 25m + 30am^2$

**Bài 1.22.** Tìm tổng và hiệu của  $M; N$ :

a)  $M = 5a^2 + b; N = -4a^2 - b$

b)  $M = 2p^2 - 3q^3; N = 2p^2 - 4q^3$

### Lời giải

a)  $M + N = (5a^2 + b) + (-4a^2 - b) = a^2$

$$M - N = (5a^2 + b) - (-4a^2 - b) = 5a^2 + b + 4a^2 + b = 9a^2 + 2b$$

b)  $M + N = (2p^2 - 3q^3) + (2p^2 - 4q^3) = 4p^2 - 7q^3$

$$M - N = (2p^2 - 3q^3) - (2p^2 - 4q^3) = 2p^2 - 3q^3 - 2p^2 + 4q^3 = q^3$$

**Bài 1.23.** Tính tổng

a)  $M = 3x^2 + 5xy + 7x^2y - [(5xy + 3x^2) - (7x^2y - 3x^2)]$

b)  $N = 5x^2 + 6x^2 + (x^3 - x^2) - (-2x^3 + 4x^2)$

c)  $P = 2a^2 - (b^2 - 3a^2) - [(5a^2 - 11ab + 8b^2) - (-2b^2 - 7a^2 + 5ab)]$

### Lời giải





$$\begin{aligned} \text{a) } M &= 3x^2 + 5xy + 7x^2y - (5xy + 3x^2 - 7x^2y + 3x^2) \\ &= 3x^2 + 5xy + 7x^2y - 5xy - 3x^2 + 7x^2y - 3x^2 = -3x^2 + 14x^2y \end{aligned}$$

$$\text{b) } N = 5x^2 + 6x^3 + x^3 - x^2 + 2x^3 - 4x^2 = 9x^3$$

$$\begin{aligned} \text{c) } P &= 2a^2 - b^2 + 3a^2 - (5a^2 - 11ab + 8b^2 + 2b^2 + 7a^2 - 5ab) \\ &= 2a^2 - b^2 + 3a^2 - 5a^2 + 11ab - 8b^2 - 2b^2 - 7a^2 + 5ab \\ &= -7a^2 + 16ab - 11b^2 \end{aligned}$$

**Bài 1.24.** a) Chứng tỏ rằng  $\overline{aab}\overline{b}$  chia hết cho 11

b) Tính tổng  $\overline{abc} + \overline{bca} + \overline{cab}$ , chứng tỏ tổng này chia hết cho 111

### Lời giải

$$\text{a) } \overline{aab}\overline{b} = 1000a + 100a + 10b + b = 1100a + 11b$$

$$1100 : 11 \Rightarrow 1100a : 11; \quad 11b : 11$$

$$\Rightarrow \overline{aab}\overline{b} : 11$$

$$\text{b) } \overline{abc} + \overline{bca} + \overline{cab}$$

$$= 100a + 10a + c + 100b + 10c + a + 100c + 10a + b$$

$$= 111a + 111b + 111c = 111(a + b + c)$$

Nhận xét:  $111 = 3 \cdot 37$

Vậy  $\overline{abc} + \overline{bca} + \overline{cab}$  chia hết cho 3 và 37.

**Bài 1.25.** Tìm đa thức  $M$ , biết:

$$\text{a) } M + (2x^2 + xy) = 4x^2 + 5xy - 2y^2 \quad \text{b) } M - (2xy - 2y^2) = 3x^3 - 5xy + 6y^2$$

$$\text{c) } (25x^2y - 13xy^2 + y^3) - M = 11x^2y - 2y^3 \quad \text{d) } M + (12x^4 - 15x^2 + 6) = 0$$

### Lời giải

$$\text{a) } M = (4x^2 + 5xy - 2y^2) - (2x^2 + xy) = 2x^2 + 4xy - 2y^2$$

$$\text{b) } M = (2xy - 2y^2) + (3x^2 - 5xy + 6y^2) = -3xy + 3x^2 + 4y^2$$

$$\text{c) } M = (25x^2y - 13xy^2 + y^3) - (11x^2y - 2y^3) = 14x^2y - 13xy^2 + 3y^3$$

$$\text{d) } M = -12x^4 + 15x^2 - 6$$

**Bài 1.26.** Tìm đa thức  $M$  sao cho tổng của  $M$  với đa thức  $x^2 - 2xy + y^2 - 2xz + z^2$  không chứa biến  $x$ .

### Lời giải

Ta có:  $(x^2 - 2xy + y^2 - 2xz + z^2) + (-x^2 + 2xy + 2xz) = y^2 + z^2$  (không chứa biến  $x$ )

Vậy  $M = -x^2 + 2xy + 2xz$





**Nhận xét:** Có vô số đa thức  $M$  thỏa mãn yêu cầu đặt ra, chẳng hạn

$M = x^2 - 2xy + 2xz + 3yz - y^2 + z^2$ ; v.v.. (ta cộng hoặc trừ đi một vài số hạng theo biến  $y$ ;  $z$  vào đa thức  $-x^2 + 2xy + 2xz$ ).

**Bài 1.27.** Viết đa thức  $x^2 - 5x + 6$  dưới dạng hiệu của hai đa thức.

### Lời giải

$$x^2 - 5x + 6 = (2x^2 - 2x + 3) - (x^2 + 3x - 3)$$

**Nhận xét:** Ta có thể bằng nhiều cách, hãy viết ra ba kết quả khác.

**Bài 1.28.** Chứng tỏ rằng giá trị của hiệu hai đa thức sau không phụ thuộc vào biến  $x, y$ :

$$M = 5x - 5y; N = -5y + 5x - 2$$

### Lời giải

$$M - N = (5x - 5y) - (-5y + 5x - 2) = 5x - 5y + 5y - 5x + 2 = 2$$

Vậy  $M - N$  luôn nhận giá trị không đổi bằng 2 hay giá trị  $M - N$  không phụ thuộc  $x, y$ .

**Bài 1.29.** Tìm hiệu của hai đa thức  $P$  và  $Q$ :

a)  $P = (x + y - z - 2x) + y - z - (z - x - y); Q = x - [x - (y - z) - x]$

b)  $P = 2a^2 + ab - b^2 - (-a^2 + b^2 - ab); Q = 3a^2 + b^2 - (ab - a^2)$ .

### Lời giải

a)  $P - Q = (-x + y - z + y - z + x + y) - (x - x + y - z + x)$

$$= (3y - 3z) - (x + y - z) = 3y - 3z - x - y + z = 2y - 2z - x$$

b)  $P - Q = (2a^2 + ab - b^2 + a^2 - b^2 + ab) - (3a^2 + b^2 - ab + a^2)$

$$= (3a^2 + 2ab - 2b^2) - (4a^2 + b^2 - ab)$$

$$= 3a^2 + 2ab - 2b^2 - 4a^2 - b^2 + ab$$

$$= -a^2 + 3ab - 3b^2$$

☞ HẾT ☞



## BÀI 4. PHÉP NHÂN ĐA THỨC

### A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

Muôn nhân hai đơn đa thức, ta nhân hai hệ số với nhau và nhân hai phần biến với nhau.

Muôn nhân một đa thức với một đa thức, ta nhân mỗi hạng tử của đa thức này với từng hạng tử của đa thức kia rồi cộng các tích với nhau.

#### Chú ý:

Phép nhân đa thức cũng có các tính chất tương tự phép nhân các số như:

$$A \cdot B = B \cdot A \text{ (giao hoán); } (A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C) \text{ (kết hợp);}$$

$$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C \text{ (phân phối với phép cộng).}$$

### B. PHÂN LOẠI CÁC BÀI TẬP

#### I. Nhân đơn thức:

**Bài toán 1.** Nhân các đơn thức:

a) $(2a) \cdot (3b)$	b) $b^3 \cdot (-3b^3)$	c) $\left(-\frac{1}{2}b^3\right) \cdot (8b^2)$
d) $(4a^2) \cdot (-6a^3)$	e) $(8ab^2) \cdot \left(\frac{1}{4}ac^2\right)$	f) $\left(-\frac{3}{2}a^3xy^3\right) \cdot \left(\frac{1}{4}ac^2\right)$

**Hướng dẫn:** Nhân các hệ số với nhau; nhân các phần biến (theo từng biến)

**Bài toán 2.** Thực hiện phép tính và cho biết phần hệ số, phần biến của kết quả.

$$a) A = (3a^2b^5c) \cdot (6a^3bc^2) \quad b) B = (-4x^3y) \cdot (-7xy^2)$$

$$c) C = (-2,5n^4m^5k^2) \cdot (3nm^2k^5) \quad d) D = \left(-1\frac{1}{3}m^2\right) \cdot (24n) \cdot (4mn) \quad e) E = (-a)^3 \cdot (2a)$$

#### \* Bài toán khác:

$$(-2a)^3 = (-2)^3 \cdot a^3 = -8a^3$$

$$(-ab^2c)^3 = (-1)^3 \cdot a^3 \cdot (b^2)^3 \cdot c^3 = -a^3 \cdot b^6 \cdot c^3$$

$$(-2a)^2 = (-2)^2 \cdot a^2 = 4a^2$$

**Bài toán 3.** Thực hiện phép tính

$$a) A = -\frac{2}{3}xy^2z \cdot (-3x^2y)^2 \quad b) B = \frac{1}{4} \cdot (x^2y^3)^2 \cdot (-2xy)$$

$$c) C = x^2yz \cdot (-2xy)^2 z \quad d) D = (-0,02bc^2)^2 \cdot (20cx^2)$$

$$e) E = (0,1ab^2c)^2 \cdot (100by^2)$$

**Bài toán 4.** Thu gọn và cho biết bậc của đơn thức trong kết quả.

$$a) A = \left(-1\frac{3}{5}x^2y^2\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}c^2x^2\right)^3 \quad b) B = \left(2\frac{1}{4}x^3y\right) \cdot \left(-\frac{2}{3}xy^2\right)^2$$

$$c) C = (-3bc^2)^3 \cdot (2ab^2)^2 \quad d) D = (-2a^2b)^2 \cdot (-a^2b^3)^3$$

**Bài toán 5.** Viết dưới dạng bình phương của một đơn thức:

$$a) A = 9a^2 \quad b) B = 16x^4 \quad c) C = 81x^6y^2 \quad d) D = 36x^{10}y^4$$

**Hướng dẫn:** a)  $9 = 3^2$  hoặc  $9 = (-3)^2$     b)  $x^4 = (x^2)^2$

**Bài toán 6.** Viết dưới dạng lập phương của một đơn thức:

$$a) A = 27a^3 \quad b) B = 8b^6 \quad c) C = 8a^9b^6 \quad d) D = \frac{1}{125}x^9y^{12}$$

e)  $E = -0,027x^3y^{15}$

**Hướng dẫn:** Phân tích  $27; 8; 125$  ra thừa số nguyên tố:  $27 = 3^3; 8 = 2^3; 125 = 5^3$

**Bài toán 7.** Nhân đơn thức và tính giá trị của biểu thức

a)  $A = \left(\frac{1}{3}a^2\right) \cdot (3a^2b)$ , tại  $a = -2; b = \frac{5}{7}$

b)  $B = (4a)\left(\frac{1}{16}a^2b^2c\right)$ , tại  $a = 4; b = \frac{1}{4}; c = 3$

c)  $C = \left(\frac{2}{5}a^2\right) \cdot (10ab)$ , tại  $a = \frac{4}{5}; b = -4$

## II. Nhân đơn thức với đa thức

**Bài toán 8.** Làm tính nhân:

a)  $x^2(3x^2 - 2x - 1)$

b)  $(x^2 - 3xy + y^2)xy^2$

c)  $(-4xy)(2xy^2 - 3x^2y)$

d)  $(-5x)(3x^3 + 7x^2 - x)$

**Hướng dẫn:** Áp dụng quy tắc  $A(B+C) = AB + AC$  hoặc  $(B+C)A = BA + CA$

**Bài toán 9.** Thực hiện phép tính:

a)  $(-3x^n)\left(x^{n-1} + \frac{1}{3}x\right)$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$

b)  $3x^n y^n (13x^2 y - 5xy^2 + 6x^2 y^2)$

c)  $(x^{n-1} - xy^n + x^2 y^{n-1})(-2x^3)$

**Hướng dẫn:** Áp dụng quy tắc  $A(B+C) = AB + AC$  hoặc  $(B+C)A = BA + CA$

**Bài toán 10.** Thực hiện phép tính:

a)  $(-3mn + 2m^2 - 4n^2)\left(-\frac{1}{2}mn\right)$

b)  $(-2ax^6)(a^3x^3 - 2a^2x^3 - ax^4)$

c)  $(-2b^4y^5)(-2b^6y + 2b^3y^2 - by^5)$

**Hướng dẫn:** Ta có thể viết ngay các kết quả của phép nhân các hệ số của các đơn thức và các biến, không cần ghi thêm các dấu ngoặc.

## III. Rút gọn biểu thức

**Bài toán 11.**

a)  $A = 6(2a - 3b) - 3(3a - 3b)$

b)  $-2(3x - 2y) - 5(2y - 3x)$

c)  $C = (4a^2 - 3b)2b - (3a^2 - 4b)3b$

d)  $D = 3x(x^2 - 1) - 2x(x^2 - 2)$

**Hướng dẫn:** Nhân đơn thức với đa thức và thực hiện quy tắc bỏ dấu ngoặc và rút gọn

a)  $A = 6(2a - 3b) - 3(3a - 3b)$

b)  $-2(3x - 2y) - 5(2y - 3x)$

c)  $C = (4a^2 - 3b)2b - (3a^2 - 4b)3b$

d)  $D = 3x(x^2 - 1) - 2x(x^2 - 2)$

**Bài toán 12.** Chứng tỏ rằng giá trị các biểu thức sau không phụ thuộc vào giá trị của biến.

a)  $A = x(x^2 + x + 1) - x^2(x + 1) - x + 5$

b)  $B = 3x(x - 5y) + (y - 5x)(-3y) - 3(x^2 - y^2) - 1$

**Hướng dẫn:** Rút gọn biểu thức, ta có kết quả là một số không đổi (hằng số).

**Bài toán 13.** Tìm hệ số của  $x^3$  trong đa thức sau:

a)  $P(x) = (x^3 - 3x^2 + 2x + 1)(-x^2) - x(2x^2 - 3x + 1)$ .

b)  $Q(x) = [5x^2 - a(x+a)] - [3(a^2 - x^2) + 2ax] + [2ax - 4(a + 2ax^2)]$ .

**Hướng dẫn:** Rút gọn  $P(x), Q(x)$  sau đó tìm số hạng chứa  $x^3$ .

**Bài toán 14.** Rút gọn và tính giá trị của biểu thức:

a)  $A = 4a^2(5a - 3b) - 5a^2(4a + b)$ , với  $a = -2; b = -3$ .

b)  $B = 3xy(4x^2 - y^2) + 4xy(y^2 - 3x^2)$ , với  $x = 10; y = -5$ .

c)  $C = a(a^2 - b) - a^2(a + b) + b(a^2 - a)$ , với  $a = 1; b = -10$ .

**Hướng dẫn:** Rút gọn các biểu thức  $A, B, C$ . Sau đó thay các giá trị của các biến bằng số đã cho.

**Bài toán 15.** Tìm  $m$  biết:

a)  $(x^2 - x + 1)x - (x + 1)x^2 + m = -2x^2 + x + 5$ .

b)  $-x^2(x^2 + x + 1) + 2 = -x^4 - x^3 - x^2 + m$ .

**Hướng dẫn:** Rút gọn các vế trái.

**Bài toán 16.** Cho  $S = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4$ .

a) Tính  $xS$ .

b) Chứng minh rằng  $xS - S = x^5 - 1$ .

**Hướng dẫn:**  $xS = x(1 + x + x^2 + x^3 + x^4)$ .

#### IV. Nhân đa thức với đa thức

**Bài toán 17.** Làm tính nhân

a)  $(x^2 + 2x + 1)(x + 3)$ .

b)  $(3a + 2b)(9a^2 - 6ab + 4b^2)$ .

c)  $(5x^2 - 6y^2)(6x^2 - 5y^2)$ .

**Hướng dẫn:** Áp dụng quy tắc nhân đa thức với đa thức và rút gọn nếu được.

**Bài toán 18.** Làm tính nhân

a)  $(x - y)(x^2 + xy + y^2)$ .

b)  $(x^2 - 2xy + y^2)(x - y)$ .

c)  $(5x^2y - 2xy^2 + y^3)(-x^3 - 2x^2y + 5xy^2)$ .

d)  $(2x - y)(4x^2 + 2xy + y^2)(8x^3 + y^3)$ .

**Hướng dẫn:** Xem **Lời giải** Bài toán 1.

**Bài toán 19.** Làm tính nhân

a)  $(x - 1)(x + 1)(x^2 - x + 3)$

b)  $\frac{1}{2}x^2y^2(2x + y)(2x - y)$

c)  $(a - x)(a + x)(a^2 + x^2)$

d)  $\left[ (x - 1)(x^2 + x + 1) \right] \left[ (x + 1)(x^2 - x + 1) \right]$

**Bài toán 20.** Rút gọn biểu thức sau

a)  $A = (a - 4)(a - 2) - (a - 1)(a - 3)$

b)  $B = (x^2 - 5)(x + 3) + (x + 4)(x - x^2)$

c)  $C = (x^2y + y^3)(x^2 + y^2) - y(x^4 + y^4)$

**Hướng dẫn:** Thực hiện phép nhân hai đa thức và quy tắc cộng, trừ đa thức.

**Bài toán 21.** Chứng minh rằng biểu thức sau đây không phụ thuộc vào biến  $x$ .

a)  $A = (3x - 5)(2x + 11) - (2x + 3)(3x + 7)$

b)  $B = (x+2)(2x^2 - 3x + 4) - (x^2 - 1)(2x + 1)$

c)  $C = 3x^2(x^2 + 2) + 4x(x^2 - 1) - (x^2 + 2x + 3)(3x^2 - 2x + 1)$

**Hướng dẫn:** Rút gọn các biểu thức, ta được kết quả là một số không đổi (hằng số).

**Bài toán 22.** Chứng minh rằng:

a)  $(x-y)(x^4 + x^3y + x^2y^2 + xy^3 + y^4) = x^5 - y^5$ .

b)  $(x-1)(x^3 + x^2 + x + 1) = x^4 - 1$ .

**Hướng dẫn:** Nhân hai đa thức ở vế trái và rút gọn.

**Bài toán 23.** Tính giá trị của biểu thức:

a)  $A = (x-5)(x-1) - (x+2)(x-3)$  với  $x = -\frac{13}{5}$

b)  $B = (x^2y + y^3)(x^2 + y^2) - y(x^4 + y^4)$  với  $x = 1; y = -2$

**Hướng dẫn:** Thực hiện phép tính và rút gọn.

Sau cùng sẽ thay giá trị của biến vào biểu thức đã thu gọn.

**Bài toán 24.** Tìm  $a, b$  biết rằng:  $x^4 - 3x + 2 = (x-1)(x^3 + ax^2 + bx - 2)$

**Hướng dẫn:** Thực hiện phép nhân đa thức và rút gọn. So sánh các hệ số của  $x^4, x^3, x^2, x$  ta tìm được  $a$  và  $b$ .

**Bài toán 25.** Chứng minh rằng:  $(2n-3)n - 2n(n+2)$  luôn chia hết cho 7 với mọi số nguyên  $n$ .

**Hướng dẫn:** Rút gọn biểu thức của  $n$ .

**Bài toán 26.** Tìm  $x$ , biết:

a)  $(3x+2)(x-1) - 3(x+1)(x-2) = 4$

b)  $6x^2 - (2x+5)(3x-2) = 7$

c)  $x(x-5)(x+5) - (x+2)(x^2 - 2x + 4) = 17$

**Hướng dẫn:** Rút gọn vế trái.

**Bài toán 27.** Cho ba số tự nhiên liên tiếp. Tích của hai số đầu nhỏ hơn tích của hai số sau là 50. Tìm ba số đó.

**Hướng dẫn:** Gọi ba số tự nhiên liên tiếp là:  $n; n+1; n+2; n \in \mathbb{N}$ .

## C. BÀI TẬP

**1.30.** Thực hiện phép nhân:

a)  $(-3x^4y^3) \cdot (-4x^2)$

b)  $(xy)^2 \cdot \left(-\frac{1}{2}xy^3\right)$

c)  $(4x^3) \cdot (-6x^3y)$

d)  $(-2y) \cdot (-5xy^2)$

e)  $(-2a)^3 \cdot (2ab)^2$

**1.31.** Làm tính nhân:

a)  $(-4mn)(2mn^2 - 3nm^2)$

b)  $(3a^2 - 4ab + 5c^2)(-5bc)$

c)  $4pq(3p^2 - q + 2)$

d)  $8xy^2 \left(-2x^3 - \frac{1}{4}y - 4yz\right)$

**1.32.** Rút gọn biểu thức:

a)  $A = 3x^{n-2}(x^{n+2} - y^{n+2}) + y^{n+2}(3x^{n-2} - y^{n-2})$

b)  $B = x^{n-1}(x+y) - y(x^{n-1} + y^{n-1})$

**1.33.** Rút gọn biểu thức:

a)  $A = 3x(x-2) - 5x(1-x) - 8(x^2 - 3)$

b)  $B = (4a^2 - 3b)2b - (3a^2 - 4b)3b$

c)  $C = 3y^2[(2y-1)+y+1] - y(1-y-y^2) + y$

d)  $D = 3a[a+2b-(c+a)]$

1.34.

- a) Tìm hệ số của  $x^2$  trong đa thức:  $P(x) = 5x(3x^2 - x + 2) - 2x^2(x - 2) + 15(x - 1)$   
 b) Tìm hệ số của  $x^3$  trong đa thức:  $Q(x) = x(x^2 + 3x + 2) - x^2(1 - 3x + 4x^2 + x^3)$

1.35.

Rút gọn và tính giá trị của biểu thức

- a)  $A = a(2b - 1) - b(2a - 1)$  với  $a = 10; b = -5$   
 b)  $B = mx(x - y) + y^3(x + y)$  với  $x = -1; y = 1$   
 c)  $C = 3x(x - 4y) - \frac{12}{5}y(y - 5x)$  với  $x = 4; y = -5$

1.36.

Chứng tỏ giá trị của biểu thức sau không phụ thuộc vào giá trị của biến

- a)  $A = x(5x - 3) - x^2(x - 1) + x(x^2 - 6x) + 3x - 10$   
 b)  $B = (2x + 1)x - x^2(x + 2) + x^3 - x + 3$   
 c)  $C = 5x(x^2 - 7x + 2) - x^2(5x - 8) + 27x^2 - 10x + 2$

1.37.

Tìm  $x$ , biết:

- a)  $5x(12x + 7) - 3x(20x - 5) = -100$   
 b)  $(x^2 - 1)3x - (3x^2 - 2)x + 2x = 2$   
 c)  $10(3x - 2) - 3(5x + 2) + 5(11 - 4x) = 25$

1.38.

Cho  $P = 1 + x + x^2 + \dots + x^9 + x^{10}$ . Chứng minh rằng  $xP - P = x^{11} - 1$ .

1.39.

Tính giá trị của biểu thức:  $P = x^{10} - 10x^9 + 10x^8 - 10x^7 + \dots - 10x + 10$  với  $x = 9$ .

1.40.

Chứng minh:  $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{12} + 2^{13} + 2^{14}$  chia hết cho 31.

1.41.

Làm tính nhân

- a)  $(2a - b)(4a^2 + 2ab + b^2)$   
 b)  $(2x - 1)(3x + 2)(3 - x)$   
 c)  $(1 - x)(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5)$

1.42.

Rút gọn và tính giá trị của biểu thức

- a)  $A = (x - 4)(x - 2) - (x - 1)(x - 3)$  với  $x = \frac{7}{4}$   
 b)  $B = (a + 3)(9a - 8) - (9a - 1)(2 + a)$ , với  $a = -\frac{7}{2}$   
 c)  $C = (x + 1)(x^2 - x + 1) + x - (x - 1)(x^2 + x + 1) + 2014$ , với  $x = -2014$ .

1.43.

Chứng minh biểu thức sau không phụ thuộc vào giá trị của biến.

- a)  $A = (x - 5)(2x + 3) - 2x(x - 3) + x + 2$   
 b)  $B = (2x + 3)(4x^2 - 6x + 9) - 2(4x^3 - 1)$   
 c)  $C = (2x - 3)(x^2 + x + 1) - x(2x^2 - x - 1)$

1.44.

- a) Chứng minh rằng biểu thức  $n(2n - 3) - 2n(n + 1)$  luôn chia hết cho 5 với mọi số nguyên  $n$ .  
 b) Chứng minh  $n(n + 5) - (n - 3)(n + 2)$  luôn chia hết cho 6.

1.45.

- a) Tìm  $m$  sao cho  $2x^3 - 3x^2 + x + m = (x + 2)(2x^2 - 7x + 15)$

b) Tìm  $a$ ,  $b$  biết:  $(x-3)(2x^2 + ax + b) = 2x^3 - 8x^2 + 9x - 9$

**1.46.** Tìm  $x$ , biết:

a)  $(3x-5)(7-5x) - (5x+2)(2-3x) = 4$

b)  $(x+2)(x^2 - 2x + 4) - (x^3 + 3)x = 14$

c)  $(x^2 - x + 1)(x + 1) - x^3 - 3x = 2$ .

**1.47.** Tìm ba số chẵn liên tiếp, biết tích của hai số sau lớn hơn tích của hai số đầu là 192.

**ĐÁP ÁN THAM KHẢO**  
**BÀI 4. PHÉP NHÂN ĐA THỨC**

**A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ**

Muôn nhân hai đơn thức, ta nhân hai hệ số với nhau và nhân hai phần biến với nhau.

Muôn nhân một đa thức với một đa thức, ta nhân mỗi hạng tử của đa thức này với từng hạng tử của đa thức kia rồi cộng các tích với nhau.

**Chú ý:**

Phép nhân đa thức cũng có các tính chất tương tự phép nhân các số như:

$$A \cdot B = B \cdot A \text{ (giao hoán); } (A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C) \text{ (kết hợp);}$$

$$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C \text{ (phân phôi với phép cộng).}$$

**B. PHÂN LOẠI CÁC BÀI TẬP**

**I. Nhân đơn thức:**

**Bài toán 1.** Nhân các đơn thức:

a) $(2a) \cdot (3b)$	b) $b^3 \cdot (-3b^3)$	c) $\left(-\frac{1}{2}b^3\right) \cdot (8b^2)$
d) $(4a^2) \cdot (-6a^3)$	e) $(8ab^2) \cdot \left(\frac{1}{4}ac^2\right)$	f) $\left(-\frac{3}{2}a^3xy^3\right) \cdot \left(\frac{1}{4}ac^2\right)$

**Hướng dẫn:** Nhân các hệ số với nhau; nhân các phần biến (theo từng biến)

**Lời giải**

$$\text{a)} (2a) \cdot (3b) = (2 \cdot 3) \cdot ab = 6ab$$

$$\text{b)} b^3 \cdot (-3b^3) = -3b^{3+3} = -3b^6$$

$$\text{c)} \left(-\frac{1}{2}b^3\right) \cdot (8b^2) = \left[\left(-\frac{1}{2}\right) \cdot 8\right] b^{3+2} = -4b^5$$

$$\text{d)} (4a^2) \cdot (-6a^3) = [4 \cdot (-6)] a^{2+3} = -24a^5$$

$$\text{e)} (8ab^2) \cdot \left(\frac{1}{4}ac^2\right) = \left(8 \cdot \frac{1}{4}\right) ab^2 ac^2 = 2a^2 b^2 c^2$$

$$\text{f)} \left(-\frac{3}{2}a^3xy^3\right) \cdot \left(\frac{1}{4}ac^2\right) = \left[\left(-\frac{3}{2}\right) \cdot \frac{1}{4}\right] a^{3+1} x^{1+2} y^{3+1} = -\frac{9}{8}a^4 x^3 y^4$$

**Bài toán 2.** Thực hiện phép tính và cho biết phần hệ số, phần biến của kết quả.

$$\text{a)} A = (3a^2b^5c) \cdot (6a^3bc^2) \quad \text{b)} B = (-4x^3y) \cdot (-7xy^2)$$

$$\text{c)} C = (-2,5n^4m^5k^2) \cdot (3nm^2k^5) \quad \text{d)} D = \left(-1\frac{1}{3}m^2\right) \cdot (24n) \cdot (4mn) \quad \text{e)} E = (-a)^3 \cdot (2a)$$

**Lời giải**

$$\text{a)} A = (3a^2b^5c) \cdot (6a^3bc^2) = (3 \cdot 6) a^{2+3} b^{5+1} c^{1+2} = 18a^5 \cdot b^6 \cdot c^3$$

Phần hệ số: 18      Phần biến:  $a^5 \cdot b^6 \cdot c^3$

Nhận xét: Bậc của đơn thức:  $5 + 6 + 3 = 14$

$$\text{b)} B = [(-4) \cdot (-7)] x^{3+1} \cdot y^{1+2} = 28x^4 \cdot y^3$$

Phần hệ số: 28      Phần biến:  $x^4 y^3$       Nhận xét: Bậc của đơn thức:  $4 + 3 = 7$

$$\text{c)} C = [(-2,5) \cdot 3] n^{4+1} m^{5+2} k^{2+5} = -7,5n^5 m^7 k^7$$

d)  $D = \left[ \left( -1 \frac{1}{3} \right) \cdot 24 \cdot 4 \right] m^{2+1} n^{1+1} = -128m^3n^2$

Phần hệ số:  $-128$ ; phần biến:  $m^3n^2$

e)  $E = (-a^3) \cdot (2a) = [(-1)2]a^{3+1} = -2a^4$ . Phần hệ số:  $-2$ ; phần biến:  $a^4$

\* Chú ý:  $(-a)^3 = (-a)(-a)(-a) = -a^3 = (-1)a^3$

**\* Bài toán khác:**

$$(-2a)^3 = (-2)^3 \cdot a^3 = -8a^3$$

$$(-ab^2c)^3 = (-1)^3 \cdot a^3 (b^2)^3 \cdot c^3 = -a^3 \cdot b^6 \cdot c^3$$

$$(-2a)^2 = (-2)^2 \cdot a^2 = 4a^2$$

**Bài toán 3.** Thực hiện phép tính

a)  $A = -\frac{2}{3}xy^2z \cdot (-3x^2y)^2$

b)  $B = \frac{1}{4} \cdot (x^2y^3)^2 \cdot (-2xy)$

c)  $C = x^2yz \cdot (-2xy)^2 z$

d)  $D = (-0,02bc^2)^2 \cdot (20cx^2)$

e)  $E = (0,1ab^2c)^2 \cdot (100by^2)$

*Lời giải*

a)  $A = -\frac{2}{3}xy^2z(-3)^2(x^2)^2y^2 = -\frac{18}{3}x^5y^4z = -6x^5y^4z$

b)  $B = \frac{1}{4}(x^4y^6)(-2xy) = -\frac{1}{2}x^5y^7$

c)  $C = x^2yz(-2)^2x^2y^2z = 4x^4y^3z^2$

d)  $D = [(-0,02)^2 b^2c^4] \cdot (20cx^2) = \frac{1}{125}b^2c^5x^2$

e)  $E = (0,01a^2b^4c^2)(100by^2) = a^2b^5y^2$

**Bài toán 4.** Thu gọn và cho biết bậc của đơn thức trong kết quả.

a)  $A = \left( -1 \frac{3}{5}x^2y^2 \right) \cdot \left( -\frac{1}{2}c^2x^2 \right)^3$

b)  $B = \left( 2 \frac{1}{4}x^3y \right) \cdot \left( -\frac{2}{3}xy^2 \right)^2$

c)  $C = (-3bc^2)^3 \cdot (2ab^2)^2$

d)  $D = (-2a^2b)^2 \cdot (-a^2b^3)^3$

*Lời giải*

a)  $A = \left( -1 \frac{3}{5}x^2y^2 \right) \cdot \left( -\frac{1}{2}c^2x^2 \right)^3 = \left( -\frac{8}{5}x^2y^2 \right) \cdot \left( -\frac{1}{8}c^6x^6 \right) = \frac{1}{5}x^8y^2c^6$

Bậc của đơn thức:  $8 + 2 + 6 = 16$

b)  $B = \left( 2 \frac{1}{4}x^3y \right) \cdot \left( -\frac{2}{3}xy^2 \right)^2 = \left( \frac{9}{4}x^3y \right) \cdot \left( \frac{4}{9}x^2y^4 \right) = x^5y^5$

Bậc của đơn thức:  $5 + 5 = 10$

c)  $C = (-3bc^2)^3 \cdot (2ab^2)^2 = (-27b^3c^6) \cdot (4a^2b^4) = -108a^2b^7c^6$

Bậc của đơn thức:  $2 + 7 + 6 = 15$

d)  $D = (-2a^2b)^2 \cdot (-a^2b^3)^3 = (4a^4b^2) \cdot (-a^6b^9) = -4a^{10}b^{11}$

Bậc của đơn thức:  $10 + 11 = 21$

**Bài toán 5.** Viết dưới dạng bình phương của một đơn thức:

a)  $A = 9a^2$       b)  $B = 16x^4$       c)  $C = 81x^6y^2$       d)  $D = 36x^{10}y^4$

**Hướng dẫn:** a)  $9 = 3^2$  hoặc  $9 = (-3)^2$       b)  $x^4 = (x^2)^2$

*Lời giải*

a)  $A = 9a^2 = (\pm 3a)^2 = (3a)^2$  hoặc  $(-3a)^2$   
 b)  $B = 16x^4 = (\pm 4x^2)^2 = (4x^2)^2$  hoặc  $(-4x^2)^2$   
 c)  $C = 81x^6y^2 = (\pm 9x^3y)^2 = (9x^3y)^2$  hoặc  $(-9x^3y)^2$   
 d)  $D = 36x^{10}y^4 = (\pm 6x^5y^2)^2 = (6x^5y^2)^2$  hoặc  $(-6x^5y^2)^2$

**Bài toán 6.** Viết dưới dạng lập phương của một đơn thức:

a)  $A = 27a^3$       b)  $B = 8b^6$       c)  $C = 8a^9b^6$       d)  $D = \frac{1}{125}x^9y^{12}$   
 e)  $E = -0,027x^3y^{15}$

**Hướng dẫn:** Phân tích  $27; 8; 125$  ra thừa số nguyên tố:  $27 = 3^3; 8 = 2^3; 125 = 5^3$

*Lời giải*

a)  $A = 27a^3 = 3^3a^3 = (3a)^3$   
 b)  $B = 8b^6 = 2^3(b^2)^3 = (2b^2)^3$   
 c)  $C = 8a^9b^6 = 2^3(a^3)^3(b^2)^3 = (2a^3b^2)^3$   
 d)  $D = \frac{1}{125}x^9y^{12} = \left(\frac{1}{5}\right)^3 \cdot (x^3)^3 \cdot (y^4)^3 = \left(\frac{1}{5}x^3y^4\right)^3$   
 e)  $E = -0,027x^3y^{15} = \left(-\frac{3}{10}\right)^3 x^3(y^5)^3 = \left(-\frac{3}{10}xy^5\right)^3$

**Bài toán 7.** Nhân đơn thức và tính giá trị của biểu thức

a)  $A = \left(\frac{1}{3}a^2\right) \cdot (3a^2b)$ , tại  $a = -2; b = \frac{5}{7}$   
 b)  $B = (4a)\left(\frac{1}{16}a^2b^2c\right)$ , tại  $a = 4; b = \frac{1}{4}; c = 3$   
 c)  $C = \left(\frac{2}{5}a^2\right) \cdot (10ab)$ , tại  $a = \frac{4}{5}; b = -4$

*Lời giải*

a)  $A = a^4b$

Thay  $a = \frac{4}{5}; b = -4$  vào đơn thức, ta được:  $A = (-2)^4 \cdot \frac{5}{7} = \frac{80}{7}$

b)  $B = \frac{1}{4}a^3b^2c$

Thay  $a = 4; b = \frac{1}{4}; c = 3$  vào đơn thức  $B$ , ta được:  $B = \frac{1}{4} \cdot 4^3 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 \cdot 3 = 3$

c)  $C = 4a^3b$

Thay  $a = \frac{4}{5}; b = -4$  vào đơn thức  $C$ , ta được:  $C = 4 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^3 \cdot (-4) = \frac{1024}{125}$

## II. Nhân đơn thức với đa thức

**Bài toán 8.** Làm tính nhân:

- a)  $x^2(3x^2 - 2x - 1)$       b)  $(x^2 - 3xy + y^2)xy^2$   
 c)  $(-4xy)(2xy^2 - 3x^2y)$       d)  $(-5x)(3x^3 + 7x^2 - x)$

**Hướng dẫn:** Áp dụng quy tắc  $A(B+C) = AB + AC$  hoặc  $(B+C)A = BA + CA$

*Lời giải*

- a) Ta có:  $x^2(3x^2 - 2x - 1) = x^2 \cdot 3x^2 + x^2 \cdot (-2x) + x^2 \cdot (-1) = 3x^4 - 2x^3 - x^2$   
 b)  $(x^2 - 3xy + y^2)xy^2 = x^2 \cdot xy^2 + (-3xy)xy^2 + y^2 \cdot xy = x^3y^2 - 3x^2y^3 + xy^4$   
 c)  $(-4xy)(2xy^2 - 3x^2y) = (-4xy)(2xy^2) + (-4xy)(-3x^2y) = -8x^2y^3 + 12x^3y^2$   
 d)  $(-5x)(3x^3 + 7x^2 - x) = (-5x)(3x^3) + (-5x)(7x^2) + (-5x)(-x) = -15x^4 - 35x^3 + 5x^2$

**Chú ý:** Ta luôn để dấu "+" trước các tích, còn các dấu của đơn thức và các hạng tử được giữ nguyên, nhân các hệ số với nhau trước rồi đến thứ tự từng biến.

**Bài toán 9.** Thực hiện phép tính:

- a)  $(-3x^n)\left(x^{n-1} + \frac{1}{3}x\right)$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$   
 b)  $3x^n y^n (13x^2 y - 5xy^2 + 6x^2 y^2)$   
 c)  $(x^{n-1} - xy^n + x^2 y^{n-1})(-2x^3)$

**Hướng dẫn:** Áp dụng quy tắc  $A(B+C) = AB + AC$  hoặc  $(B+C)A = BA + CA$

*Lời giải*

- a)  $(-3x^n)\left(x^{n-1} + \frac{1}{3}x\right) = (-3x^n)x^{n-1} + (-3x^n)\left(\frac{1}{3}x\right) = -3x^{n+n-1} - x^{n+1} = -3^{2n-1} - x^{n+1}$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$   
 b)  $3x^n y^n (13x^2 y - 5xy^2 + 6x^2 y^2) = (3x^n y^n)(13x^2 y) + (3x^n y^n)(-5xy^2) + (3x^n y^n)(6x^2 y^2)$   
 $= 39x^{n+2} y^{n+1} - 15x^{n+1} y^{n+2} + 18x^{n+2} y^{n+2}$   
 c)  $(x^{n-1} - xy^n + x^2 y^{n-1})(-2x^3)$   
 $= x^{n-1}(-2x^3) + (-xy^n)(-2x^3) + (x^2 y^{n-1})(-2x^3) = -2x^{n+2} + 2x^4 y^n - 2x^5 y^{n-1}$

**Bài toán 10.** Thực hiện phép tính:

- a)  $(-3mn + 2m^2 - 4n^2)\left(-\frac{1}{2}mn\right)$   
 b)  $(-2ax^6)(a^3x^3 - 2a^2x^3 - ax^4)$   
 c)  $(-2b^4y^5)(-2b^6y + 2b^3y^2 - by^5)$

**Hướng dẫn:** Ta có thể viết ngay các kết quả của phép nhân các hệ số của các đơn thức và các biến, không cần ghi thêm các dấu ngoặc.

*Lời giải*

- a)  $(-3mn + 2m^2 - 4n^2)\left(-\frac{1}{2}mn\right) = \frac{3}{2}m^2n^2 - m^3n + 2mn^3$   
 b)  $(-2ax^6)(a^3x^3 - 2a^2x^3 - ax^4) = 2a^4x^9 + 4a^3x^9 + 2a^2x^{10}$   
 c)  $(-2b^4y^5)(-2b^6y + 2b^3y^2 - by^5) = 4b^{10}y^6 - 4b^7y^7 + 2b^5y^{10}$

### III. Rút gọn biểu thức

**Bài toán 11.**

- a)  $A = 6(2a - 3b) - 3(3a - 3b)$       b)  $-2(3x - 2y) - 5(2y - 3x)$

c)  $C = (4a^2 - 3b)2b - (3a^2 - 4b)3b$       d)  $D = 3x(x^2 - 1) - 2x(x^2 - 2)$

**Hướng dẫn:** Nhân đơn thức với đa thức và thực hiện quy tắc bỏ dấu ngoặc và rút gọn

a)  $A = 6(2a - 3b) - 3(3a - 3b)$       b)  $-2(3x - 2y) - 5(2y - 3x)$

c)  $C = (4a^2 - 3b)2b - (3a^2 - 4b)3b$       d)  $D = 3x(x^2 - 1) - 2x(x^2 - 2)$

*Lời giải*

a) Ta có: a)  $A = 6(2a - 3b) - 3(3a - 3b) = 12a - 18b - 9a + 9b = 3a - 9b$

b) Ta có:  $B = -2(3x - 2y) - 5(2y - 3x) = -6x + 4y - 10y + 15x = 9x - 6y$

c) Ta có:  $C = (4a^2 - 3b)2b - (3a^2 - 4b)3b = 8a^2b - 6b^2 - 9a^2b + 12b^2 = -a^2b + 6b^2$

**Chú ý:** Ta có thể viết lại:  $C = 2b(4a^2 - 3b) - 3b(3a^2 - 4b)$  và làm như câu a) và câu b)

d) Ta có:  $D = 3x(x^2 - 1) - 2x(x^2 - 2) = 3x^3 - 3x - 2x^3 + 4x = x^3 + x$

**Bài toán 12.** Chứng tỏ rằng giá trị các biểu thức sau không phụ thuộc vào giá trị của biến.

a)  $A = x(x^2 + x + 1) - x^2(x + 1) - x + 5$

b)  $B = 3x(x - 5y) + (y - 5x)(-3y) - 3(x^2 - y^2) - 1$

**Hướng dẫn:** Rút gọn biểu thức, ta có kết quả là một số không đổi (hằng số).

*Lời giải*

a) Ta có  $A = x^3 + x^2 + x - x^3 - x^2 - x + 5 = 5$  (không đổi).

Vậy chứng tỏ  $A$  không phụ thuộc  $x$ .

b) Ta có:  $B = 3x^2 - 15xy - 3y^2 + 15xy - 3x^2 + 3y^2 - 1 = -1$  (không đổi).

Vậy chứng tỏ  $B$  không phụ thuộc vào  $x, y$ .

**Bài toán 13.** Tìm hệ số của  $x^3$  trong đa thức sau:

a)  $P(x) = (x^3 - 3x^2 + 2x + 1)(-x^2) - x(2x^2 - 3x + 1)$ .

b)  $Q(x) = [5x^2 - a(x + a)] - [3(a^2 - x^2) + 2ax] + [2ax - 4(a + 2ax^2)]$ .

**Hướng dẫn:** Rút gọn  $P(x), Q(x)$  sau đó tìm số hạng chứa  $x^3$ .

*Lời giải*

a) Ta có:  $P(x) = -x^5 + 3x^4 - 2x^3 - x^2 - 2x^3 + 3x^2 - x = -x^5 + 3x^4 - 4x^3 + 2x^2 - x$

Vậy hệ số của  $x^3$  bằng  $-4$ .

b) Ta có:  $Q(x) = 5x^2 - ax - a^2 - 3a^2 + 3x^2 - 2ax + 2ax - 4a - 8ax^2 = (8 - 8a)x^2 - ax - 4a^2 - 4a$

Vậy hệ số của  $x^2 = 8 - 8a$ .

**Chú ý:**  $8x^2 - 8ax^2 = (8 - 8a)x^2$  hoặc  $x^2(8 - 8a)$  là kết quả của phép nhân đơn thức  $x^2$  với đa thức  $8 - 8a$

**Bài toán 14.** Rút gọn và tính giá trị của biểu thức:

a)  $A = 4a^2(5a - 3b) - 5a^2(4a + b)$ , với  $a = -2; b = -3$ .

b)  $B = 3xy(4x^2 - y^2) + 4xy(y^2 - 3x^2)$ , với  $x = 10; y = -5$ .

c)  $C = a(a^2 - b) - a^2(a + b) + b(a^2 - a)$ , với  $a = 1; b = -10$ .

**Hướng dẫn:** Rút gọn các biểu thức  $A, B, C$ . Sau đó thay các giá trị của các biến bằng số đã cho.

*Lời giải*

a) Ta có:  $A = 20a^3 - 12a^2b - 20a^3 - 5a^2b = -17a^2b$ .

Thay  $a = -2; b = -3$  và biểu thức  $A$ , ta có:  $A = -17 \cdot (-2)^2 \cdot (-3) = 204$ .

b) Ta có:  $B = 12x^3y - 3xy^3 + 4xy^3 - 12x^3y = xy^3$ .

Thay  $x = 10; y = -5$  vào biểu thức  $B$  ta có:  $B = 10 \cdot (-5)^3 = -1250$ .

c) Ta có:  $C = a^3 - ab - a^3 - a^2b + ba^2 - ab = -2ab$ .

Thay  $a = 1; b = -10$  vào biểu thức  $C$ , ta có:  $C = (-2) \cdot 1 \cdot (-10) = 20$ .

**Bài toán 15.** Tìm  $m$  biết:

a)  $(x^2 - x + 1)x - (x + 1)x^2 + m = -2x^2 + x + 5$ .

b)  $-x^2(x^2 + x + 1) + 2 = -x^4 - x^3 - x^2 + m$ .

**Hướng dẫn:** Rút gọn các vế trái.

*Lời giải*

a) Ta có:  $(x^2 - x + 1)x - (x + 1)x^2 + m = x^3 - x^2 + x - x^3 - x^2 + m = -2x^2 + x + m$

Vậy  $-2x^2 + x + m = -2x^2 + x + 5 \Rightarrow m = 5$ .

b) Ta có:  $-x^2(x^2 + x + 1) + 2 = -x^4 - x^3 - x^2 + 2$

Vậy  $-x^4 - x^3 - x^2 + 2 = -x^4 - x^3 - x^2 + m \Rightarrow m = 2$ .

**Bài toán 16.** Cho  $S = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4$ .

a) Tính  $xS$ .

b) Chứng minh rằng  $xS - S = x^5 - 1$ .

**Hướng dẫn:**  $xS = x(1 + x + x^2 + x^3 + x^4)$ .

*Lời giải*

a) Ta có  $xS = x(1 + x + x^2 + x^3 + x^4) = x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5$ .

b) Ta có:  $xS - S = (x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5) - (1 + x + x^2 + x^3 + x^4)$ .

$= x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 - 1 - x - x^2 - x^3 - x^4 = x^5 - 1$  (điều phải chứng minh).

#### IV. Nhân đa thức với đa thức

**Bài toán 17.** Làm tính nhân

a)  $(x^2 + 2x + 1)(x + 3)$ .

b)  $(3a + 2b)(9a^2 - 6ab + 4b^2)$ .

c)  $(5x^2 - 6y^2)(6x^2 - 5y^2)$ .

**Hướng dẫn:** Áp dụng quy tắc nhân đa thức với đa thức và rút gọn nếu được.

*Lời giải*

a) Ta có:  $(x^2 + 2x + 1)(x + 3) = (x^2).x + (x^2).3 + (2x).x + (2x).3 + 1.x + 1.3$

$= x^3 + 3x^2 + 2x^2 + 6x + x + 3$

$= x^3 + 5x^2 + 7x + 3$

b) Ta có:  $(3a + 2b)(9a^2 - 6ab + 4b^2)$

$= (3a)(9a^2) + (3a)(-6ab) + (3a)(4b^2) + (2b)(9a^2) + (2b)(-6ab) + (2b)(4b^2)$

$= 27a^3 - 18a^2b + 12ab^2 + 18a^2b - 12ab^2 + 8b^3$

$= 27a^3 + 8b^3$

**Chú ý:**

- Nếu dấu của mỗi hạng tử là dấu “-”, ta cần nhân các hệ số với nhau trước và nhân các biến sau.

- Ta có thể làm nhanh như bài c) dưới đây.

c) Ta có:  $(5x^2 - 6y^2)(6x^2 - 5y^2) = 30x^4 - 25x^2y^2 - 36x^2y^2 + 30y^4 = 30x^4 - 61x^2y^2 + 30y^4$ .

**Bài toán 18.** Làm tính nhân

a)  $(x-y)(x^2+xy+y^2)$ .

b)  $(x^2-2xy+y^2)(x-y)$ .

c)  $(5x^2y-2xy^2+y^2)(-x^3-2x^2y+5xy^2)$ .

d)  $(2x-y)(4x^2+2xy+y^2)(8x^3+y^3)$ .

**Hướng dẫn:** Xem **Lời giải** Bài toán 1.

**Lời giải**

a) Ta có:  $(x-y)(x^2+xy+y^2) = x^3 + x^2y + xy^2 - x^2y - xy^2 - y^3 = x^3 - y^3$ .

b) Ta có:  $(x^2-2xy+y^2)(x-y) = x^3 - x^2y - 2x^2y + 2xy^2 + xy^2 - y^3 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$ .

c) Ta có  $(5x^2y-2xy^2+y^2)(-x^3-2x^2y+5xy^2)$

$$= -5x^5y - 10x^4y^2 + 25x^3y^3 + 2x^4y^2 + 4x^3y^3 - 10x^2y^4 - x^3y^2 - 2x^2y^3 + 5xy^4$$

$$= -5x^5y - 8x^4y^2 + 29x^3y^3 - 10x^2y^4 + 5xy^4 - x^3y^2 - 2x^2y^3.$$

d) Ta có:  $(2x-y)(4x^2+2xy+y^2)(8x^3+y^3)$

$$= [(2x-y)(4x^2+2xy+y^2)](8x^3+y^3)$$

$$= (8x^3+4x^2y+2xy^2-4x^2y-2xy^2-y^3)(8x^3+y^3)$$

$$= (8x^3-y^3)(8x^3+y^3) = 64x^6+8x^3y^3-8y^3x^3-y^6 = 64x^6-y^6.$$

**Chú ý:** Phép nhân ba đa thức, ta thực hiện phép nhân hai đa thức với nhau, rút gọn kết quả rồi nhân với đa thức thứ ba:  $A \cdot B \cdot C = (A \cdot B) \cdot C$ .

**Bài toán 19.** Làm tính nhân

a)  $(x-1)(x+1)(x^2-x+3)$

b)  $\frac{1}{2}x^2y^2(2x+y)(2x-y)$

c)  $(a-x)(a+x)(a^2+x^2)$

d)  $[(x-1)(x^2+x+1)][(x+1)(x^2-x+1)]$

**Lời giải**

a) Ta có:  $(x-1)(x+1)(x^2-x+3)$

$$= [(x-1)(x+1)](x^2-x+3)$$

$$= (x^2+x-x-1)(x^2-x+3) = (x^2-1)(x^2-x+3)$$

$$= x^4 - x^3 + 3x^2 - x^2 + x - 3$$

$$= x^4 - x^3 + 2x^2 + x - 3.$$

b) Ta có:  $\frac{1}{2}x^2y^2(2x+y)(2x-y)$

$$= \frac{1}{2}x^2y^2[(2x+y)(2x-y)] = \frac{1}{2}x^2y^2(4x^2-2xy+2xy-y^2)$$

$$= \frac{1}{2}x^2y^2(4x^2-y^2) = 2x^4y^2 - \frac{1}{2}x^2y^4.$$

c) Ta có:  $(a-x)(a+x)(a^2+x^2)$

$$= [(a-x)(a+x)](a^2+x^2) = (a^2+ax-ax-x^2)(a^2+x^2)$$

$$= (a^2-x^2)(a^2+x^2)$$

$$= a^4 + a^2x^2 - a^2x^2 - x^4 = a^4 - x^4.$$

$$\begin{aligned} \text{d)} \text{ Ta có: } & \left[ (x-1)(x^2+x+1) \right] \left[ (x+1)(x^2-x+1) \right] \\ & = (x^3 + x^2 + x - x^2 - x - 1)(x^3 - x^2 + x + x^2 - x + 1) \\ & = (x^3 - 1)(x^3 + 1) = x^6 + x^3 - x^3 - 1 = x^6 - 1. \end{aligned}$$

**Bài toán 20.** Rút gọn biểu thức sau

$$\begin{aligned} \text{a)} \ A &= (a-4)(a-2) - (a-1)(a-3) \\ \text{b)} \ B &= (x^2 - 5)(x+3) + (x+4)(x-x^2) \\ \text{c)} \ C &= (x^2y + y^3)(x^2 + y^2) - y(x^4 + y^4) \end{aligned}$$

**Hướng dẫn:** Thực hiện phép nhân hai đa thức và quy tắc cộng, trừ đa thức.

*Lời giải*

$$\begin{aligned} \text{a)} \text{ Ta có: } & A = (a^2 - 2a - 4a + 8) - (a^2 - 3a - a + 3) \\ & = (a^2 - 6a + 8) - (a^2 - 4a + 3) \\ & = a^2 - 6a + 8 - a^2 + 4a - 3 \\ & = -2a + 5. \end{aligned}$$

**Chú ý:** Trước dấu ngoặc có dấu “–”, khi bỏ ngoặc ta phải đổi dấu tất cả các hạng tử.

$$\begin{aligned} \text{b)} \text{ Ta có: } & B = (x^3 + 3x^2 - 5x - 15) + (x^2 - x^3 + 4x - 4x^2) \\ & = x^3 + 3x^2 - 5x - 15 + x^2 - x^3 + 4x - 4x^2 \\ & = -x - 15. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c)} \text{ Ta có: } & C = (x^4y + x^2y^3 + x^2y^3 + y^5) - (x^4y + y^5) \\ & = x^4y + 2x^2y^3 + y^5 - x^4y - y^5 \\ & = 2x^2y^3. \end{aligned}$$

**Bài toán 21.** Chứng minh rằng biểu thức sau đây không phụ thuộc vào biến  $x$ .

$$\begin{aligned} \text{a)} \ A &= (3x-5)(2x+11) - (2x+3)(3x+7) \\ \text{b)} \ B &= (x+2)(2x^2 - 3x + 4) - (x^2 - 1)(2x+1) \\ \text{c)} \ C &= 3x^2(x^2 + 2) + 4x(x^2 - 1) - (x^2 + 2x + 3)(3x^2 - 2x + 1) \end{aligned}$$

**Hướng dẫn:** Rút gọn các biểu thức, ta được kết quả là một số không đổi (hằng số).

*Lời giải*

$$\begin{aligned} \text{a)} \text{ Ta có: } & A = (6x^2 + 33x - 10x - 55) - (6x^2 + 14x + 9x + 21) \\ & = 6x^2 + 23x - 55 - 6x^2 - 23x - 21 = -76 \text{ (không đổi).} \end{aligned}$$

Vậy  $A$  không phụ thuộc vào  $x$ .

$$\begin{aligned} \text{b)} \text{ Ta có: } & B = (2x^3 - 3x^2 + 4x + 4x^2 - 6x + 8) - (2x^3 + x^2 - 2x - 1) \\ & = 2x^3 + x^2 - 2x + 8 - 2x^3 - x^2 + 2x + 1 = 9 \text{ (không đổi).} \end{aligned}$$

Vậy  $B$  không phụ thuộc vào  $x$ .

$$\begin{aligned} \text{c)} \text{ Ta có: } & C = 3x^4 + 6x^2 + 4x^3 - 4x - (3x^4 - 2x^3 + x^2 + 6x^3 - 4x^2 + 2x + 9x^2 - 6x + 3) \\ & = 3x^4 + 6x^2 + 4x^3 - 4x - 3x^4 - 4x^3 - 6x^2 + 4x - 3 = -3 \text{ (không đổi).} \end{aligned}$$

Vậy  $C$  không phụ thuộc vào  $x$ .

**Bài toán 22.** Chứng minh rằng:

$$\begin{aligned} \text{a)} \ (x-y)(x^4 + x^3y + x^2y^2 + xy^3 + y^4) &= x^5 - y^5. \\ \text{b)} \ (x-1)(x^3 + x^2 + x + 1) &= x^4 - 1. \end{aligned}$$

**Hướng dẫn:** Nhân hai đa thức ở vé trái và rút gọn.

*Lời giải*

$$\begin{aligned} \text{a) Ta có: } & (x-y)(x^4 + x^3y + x^2y^2 + xy^3 + y^4) \\ &= x^5 + x^4y + x^3y^2 + x^2y^3 + xy^4 - x^4y - x^3y^2 - x^2y^3 - xy^4 - y^5 \\ &= x^5 - y^5 (\text{dp cm}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) Ta có: } & (x-1)(x^3 + x^2 + x + 1) \\ &= x^4 + x^3 + x^2 + x - x^3 - x^2 - x - 1 \\ &= x^4 - 1 (\text{dp cm}) \end{aligned}$$

**Bài toán 23.** Tính giá trị của biểu thức:

$$\text{a) } A = (x-5)(x-1) - (x+2)(x-3) \text{ với } x = -\frac{13}{5}$$

$$\text{b) } B = (x^2y + y^3)(x^2 + y^2) - y(x^4 + y^4) \text{ với } x = 1; y = -2$$

**Hướng dẫn:** Thực hiện phép tính và rút gọn.

Sau cùng sẽ thay giá trị của biến vào biểu thức đã thu gọn.

*Lời giải*

$$\begin{aligned} \text{a) Ta có: } & A = (x-5)(x-1) - (x+2)(x-3) \\ &= x^2 - 6x + 5 - x^2 + x + 6 \\ &= -5x + 11 \end{aligned}$$

$$\text{Thay } x = -\frac{13}{5} \text{ vào biểu thức A, ta được: } A = (-5) \cdot \frac{-13}{5} + 11 = 13 + 11 = 24$$

$$\begin{aligned} \text{b) Ta có: } & B = (x^2y + y^3)(x^2 + y^2) - y(x^4 + y^4) \\ &= x^4y + x^2y^3 + x^2y^3 + y^5 - x^4y - y^5 \\ &= 2x^2y^3 \end{aligned}$$

$$\text{Thay } x = 1; y = -2 \text{ vào biểu thức B, ta được: } B = 2 \cdot 1^2 \cdot (-2)^3 = -16$$

**Bài toán 24.** Tìm  $a, b$  biết rằng:  $x^4 - 3x + 2 = (x-1)(x^3 + ax^2 + bx - 2)$

**Hướng dẫn:** Thực hiện phép nhân đa thức và rút gọn. So sánh các hệ số của  $x^4, x^3, x^2, x$  ta tìm được  $a$  và  $b$ .

*Lời giải*

$$\begin{aligned} x^4 - 3x + 2 &= x^4 + ax^3 + bx^2 - 2x - x^3 - ax^2 - bx + 2 \\ \Rightarrow x^4 - 3x &= x^4 + (a-1)x^3 + (b-a)x^2 + (-2-b)x \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } a-1=0; b-a=0; -2-b=-3 \Rightarrow a=1; b=1$$

*Chú ý:* Ta có  $ax^3 - x^3 = (a-1)x^3$  là kết quả của phép nhân  $a-1$  với  $x^3$ .

**Bài toán 25.** Chứng minh rằng:  $(2n-3)n - 2n(n+2)$  luôn chia hết cho 7 với mọi số nguyên  $n$ .

**Hướng dẫn:** Rút gọn biểu thức của  $n$ .

*Lời giải*

$$\text{Ta có: } (2n-3)n - 2n(n+2) = 2n^2 - 3n - 2n^2 - 4n = -7n; \forall n \in \mathbb{Z}$$

Vậy:  $(2n-3)n - 2n(n+2)$  luôn chia hết cho 7 với mọi số nguyên  $n$ .

**Bài toán 26.** Tìm  $x$ , biết:

$$\text{a) } (3x+2)(x-1) - 3(x+1)(x-2) = 4$$

$$\text{b) } 6x^2 - (2x+5)(3x-2) = 7$$

c)  $x(x-5)(x+5)-(x+2)(x^2-2x+4)=17$

**Hướng dẫn:** Rút gọn vế trái.

**Lời giải**

a) Ta có:  $(3x+2)(x-1)-3(x+1)(x-2)=4$

$$\Rightarrow (3x^2 - 3x + 2x - 2) - 3(x^2 - 2x + x - 2) = 4$$

$$\Rightarrow 3x^2 - x - 2 - 3x^2 + 3x + 6 = 4$$

$$\Rightarrow 2x + 4 = 4$$

$$\Rightarrow 2x = 0 \Rightarrow x = 0$$

b) Ta có:  $6x^2 - (2x+5)(3x-2)=7$

$$\Rightarrow 6x^2 - (6x^2 - 4x + 15x - 10) = 7$$

$$\Rightarrow 6x^2 - 6x^2 - 11x + 10 = 7$$

$$\Rightarrow -11x = -3 \Rightarrow x = \frac{3}{11}$$

c) Ta có:  $x(x-5)(x+5)-(x+2)(x^2-2x+4)=17$

$$\Rightarrow x(x^2 + 5x - 5x - 25) - (x^3 - 2x^2 + 4x + 2x^2 - 4x + 8) = 17$$

$$\Rightarrow x^3 + 5x^2 - 5x^2 - 25x - x^3 + 2x^2 - 4x - 2x^2 + 4x - 8 = 17$$

$$\Rightarrow x^3 - 25x - x^3 - 8 = 17$$

$$\Rightarrow -25x = 25$$

$$\Rightarrow x = -1$$

**Bài toán 27.** Cho ba số tự nhiên liên tiếp. Tích của hai số đầu nhỏ hơn tích của hai số sau là 50. Tìm ba số đó.

**Hướng dẫn:** Gọi ba số tự nhiên liên tiếp là:  $n; n+1; n+2; n \in \mathbb{N}$ .

**Lời giải**

Gọi ba số tự nhiên liên tiếp là:  $n; n+1; n+2; n \in \mathbb{N}$ .

Ta có:  $(n+2)(n+1) - n(n+1) = 50$

$$\Rightarrow (n^2 + n + 2n + 2) - n^2 - n = 50$$

$$\Rightarrow 2n + 2 = 50$$

$$\Rightarrow 2n = 48$$

$$\Rightarrow n = 24$$

Vậy ba số tự nhiên liên tiếp là: 24; 25; 26

**Cách khác:** Có thể đặt  $x-1; x; x+1$  là ba số tự nhiên liên tiếp;  $x \in \mathbb{N}^*$ .

## C. BÀI TẬP

**1.30.** Thực hiện phép nhân:

a)  $(-3x^4y^3) \cdot (-4x^2)$

b)  $(xy)^2 \cdot \left(-\frac{1}{2}xy^3\right)$

c)  $(4x^3) \cdot (-6x^3y)$

d)  $(-2y) \cdot (-5xy^2)$

e)  $(-2a)^3 \cdot (2ab)^2$

**Lời giải**

a)  $(-3x^4y^3) \cdot (4x^2) = (-3)(-4)x^4 \cdot x^2 y^3 = 12x^6y^3$

b)  $(xy)^2 \cdot \left(-\frac{1}{2}xy^3\right) = -\frac{1}{2}(x^2y^2) \cdot (xy^3) = -\frac{1}{2}x^3y^5$

c)  $(xy)^2 \cdot \left(-\frac{1}{2}xy^3\right) = -\frac{1}{2}(x^2y^2) \cdot (xy^3) = -\frac{1}{2}x^3y^5$

d)  $(-2y) \cdot (-5xy^2) = 10xy^3$

e)  $(-2a)^3 \cdot (2ab)^2 = (-8a^3)(4a^2b^2) = 32a^5b^2$

1.31. Làm tính nhân:

a)  $(-4mn)(2mn^2 - 3nm^2)$

b)  $(3a^2 - 4ab + 5c^2)(-5bc)$

c)  $4pq(3p^2 - q + 2)$

d)  $8xy^2 \left(-2x^3 - \frac{1}{4}y - 4yz\right)$

*Lời giải*

a)  $(-4mn)(2mn^2 - 3nm^2) = -8m^2n^3 + 12m^3n^2$

b)  $(3a^2 - 4ab + 5c^2)(-5bc) = -15a^2bc + 20ab^2c - 25bc^3$

c)  $(3a^2 - 4ab + 5c^2)(-5bc) = -15a^2bc + 20ab^2c - 25bc^3$

d)  $8xy^2 \left(-2x^3 - \frac{1}{4}y - 4yz\right) = -16x^4y^2 - 2xy^3 - 32xy^3z$

1.32. Rút gọn biểu thức:

a)  $A = 3x^{n-2}(x^{n+2} - y^{n+2}) + y^{n+2}(3x^{n-2} - y^{n-2})$

b)  $B = x^{n-1}(x + y) - y(x^{n-2} + y^{n-2})$

*Lời giải*

a)  $A = 3x^{n-2}(x^{n+2} - y^{n+2}) + y^{n+2}(3x^{n-2} - y^{n-2})$

$= 3x^{n-2} \cdot x^{n+2} - 3x^{n-2} \cdot y^{n+2} + y^{n+2} \cdot 3x^{n-2} - y^{n+2} \cdot y^{n-2}$

$= 3x^{2n} - y^{2n}$

b)  $B = x^{n-1}(x + y) - y(x^{n-2} + y^{n-2})$

$= x^{n-1} \cdot x + x^{n-1} \cdot y - y \cdot x^{n-2} - y \cdot y^{n-2}$

$= x^n - y^n$

1.33. Rút gọn biểu thức:

a)  $A = 3x(x-2) - 5x(1-x) - 8(x^2 - 3)$

b)  $B = (4a^2 - 3b)2b - (3a^2 - 4b)3b$

c)  $C = 3y^2[(2y-1)+y+1] - y(1-y-y^2) + y$

d)  $D = 3a[a+2b-(c+a)]$

*Lời giải*

a)  $A = 3x(x-2) - 5x(1-x) - 8(x^2 - 3) = 3x^2 - 6x - 5x + 5x^2 - 8x^2 + 24 = -11x + 24$

b)  $B = (4a^2 - 3b)2b - (3a^2 - 4b)3b = (8a^2b - 6b^2) - (9a^2b - 12b^2)$

$= 8a^2b - 6b^2 - 9a^2b + 12b^2 = 6b^2 - a^2b$

c)  $C = 3y[(2y-1)+y+1] - y(1-y-y^2) + y = 9y^3 - y + y^2 + y^3 + y = 10y^3 + y^2$

d)  $D = 3a[a+2b-(c+a)] = 3a(2b-c) = 6ab - 3ac$

1.34.

a) Tìm hệ số của  $x^2$  trong đa thức:  $P(x) = 5x(3x^2 - x + 2) - 2x^2(x-2) + 15(x-1)$

b) Tìm hệ số của  $x^3$  trong đa thức:  $Q(x) = x(x^2 + 3x + 2) - x^2(1-3x+4x^2+x^3)$

*Lời giải*

a)  $P(x) = 5x(3x^2 - x + 2) - 2x^2(x-2) + 15(x-1)$

$$= 15x^3 - 5x^2 + 10x - 2x^3 + 4x^2 + 15x - 15$$

$$= 13x^3 - x^2 + 25x - 15$$

Vậy hệ số của  $x^2$  là  $-1$ .

$$\text{b) } Q(x) = x(x^2 + 3x + 2) - x^4(1 - 3x + 4x^2 + x^3)$$

$$= x^3 + 3x^2 + 2x - x^2 + 3x^3 - 4x^4 - x^5$$

$$= -x^5 - 4x^4 + 4x^3 + 2x^2 + 2x$$

Vậy hệ số của  $x^3$  là  $4$ .

**1.35.** Rút gọn và tính giá trị của biểu thức

$$\text{a) } A = a(2b-1) - b(2a-1) \text{ với } a=10; b=-5$$

$$\text{b) } B = mx(x-y) + y^3(x+y) \text{ với } x=-1; y=1$$

$$\text{c) } C = 3x(x-4y) - \frac{12}{5}y(y-5x) \text{ với } x=4; y=-5$$

### *Lời giải*

$$\text{a) } A = a(2b-1) - b(2a-1)$$

$$= 2ab - a - 2ab + b = -a + b$$

Thay  $a=10; b=-5$  vào biểu thức  $A$ , ta có:

$$A = -10 - 5 = -15$$

$$\text{b) } B = mx(x-y) + y^3(x+y)$$

$$= mx^2 - mxy + xy^3 + y^4$$

Thay  $x=-1; y=1$  vào biểu thức  $B$ , ta có:

$$B = m(-1)^2 - m(-1).1 + (-1).1^3 + 1^4$$

$$= m + m - 1 + 1 = 2m$$

$$\text{c) } C = 3x(x-4y) - \frac{12}{5}y(y-5x)$$

$$= 3x^2 - 12xy - \frac{12}{5}y^2 + 12xy$$

$$= 3x^2 - \frac{12}{5}y^2$$

Thay  $x=4; y=-5$  vào biểu thức  $C$ , ta có:

$$C = 3.4^2 - \frac{12}{5}(-5)^2 = -12$$

**1.36.** Chứng tỏ giá trị của biểu thức sau không phụ thuộc vào giá trị của biến

$$\text{a) } A = x(5x-3) - x^2(x-1) + x(x^2 - 6x) + 3x - 10$$

$$\text{b) } B = (2x+1)x - x^2(x+2) + x^3 - x + 3$$

$$\text{c) } C = 5x(x^2 - 7x + 2) - x^2(5x-8) + 27x^2 - 10x + 2$$

### *Lời giải*

$$\text{a) } A = x(5x-3) - x^2(x-1) + x(x^2 - 6x) + 3x - 10$$

$$= 5x^2 - 3x - x^3 + x^2 + x^3 - 6x^2 + 3x - 10 = -10$$

$$\text{b) } B = (2x+1)x - x^2(x+2) + x^3 - x + 3$$

$$= 2x^2 + x - x^3 - 2x^2 + x^3 - x + 3 = 3$$

$$\text{c) } C = 5x(x^2 - 7x + 2) - x^2(5x-8) + 27x^2 - 10x + 2$$

$$= 5x^3 - 35x^2 + 10x - 5x^3 + 8x^2 + 27x^2 - 10x + 2 = 2$$

1.37. Tìm  $x$ , biết:

a)  $5x(12x+7) - 3x(20x-5) = -100$

b)  $(x^2 - 1)3x - (3x^2 - 2)x + 2x = 2$

c)  $10(3x-2) - 3(5x+2) + 5(11-4x) = 25$

*Lời giải*

Ta có:  $5x(12x+7) - 3x(20x-5) = -100$

$$\Rightarrow 60x^2 + 35x - 60x^2 + 15x = -100$$

$$\Rightarrow 50x = -100 \Rightarrow x = -2$$

b) Ta có:  $(x^2 - 1)3x - (3x^2 - 2)x + 2x = 2$

$$\Rightarrow 3x^3 - 3x - 3x^3 + 2x + 2x = 2 \Rightarrow x = 2$$

c) Ta có:  $10(3x-2) - 3(5x+2) + 5(11-4x) = 25$

$$\Rightarrow 30x - 20 - 15x - 6 + 55 - 20x = 25$$

$$\Rightarrow -5x = -4 \Rightarrow x = \frac{4}{5}$$

1.38. Cho  $P = 1 + x + x^2 + \dots + x^9 + x^{10}$ . Chứng minh rằng  $xP - P = x^{11} - 1$ .

*Lời giải*

$$P = 1 + x + x^2 + \dots + x^9 + x^{10}$$

$$\Rightarrow xP = x + x^2 + x^3 + \dots + x^{10} + x^{11}$$

$$\Rightarrow xP - P = (x + x^2 + x^3 + \dots + x^{10} + x^{11}) - (1 + x^2 + \dots + x^9 + x^{10}) = x^{11} - 1$$

1.39. Tính giá trị của biểu thức:  $P = x^{10} - 10x^9 + 10x^8 - 10x^7 + \dots - 10x + 10$  với  $x = 9$ .

*Lời giải*

$$x = 9 \Rightarrow x + 1 = 10, \text{ ta viết}$$

$$P = x^{10} - (x+1)x^9 + (x+1)x^8 - (x+1)x^7 + \dots - (x+1)x + (x+1)$$

$$= x^{10} - x^{10} - x^9 + x^9 - x^8 + x^8 + \dots - x^2 - x + x + 1 = 1$$

1.40. Chứng minh:  $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{12} + 2^{13} + 2^{14}$  chia hết cho 31.

*Lời giải*

$$\text{Đặt } S = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{13} + 2^{14}$$

$$\Rightarrow 2S = 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \dots + 2^{13} + 2^{14} + 2^{15}$$

$$\Rightarrow 2S - S = 2^{15} - 1 \Rightarrow S = 2^{15} - 1 = 32767 = 31 \cdot 1057$$

$$\Rightarrow S \vdots 31 \text{ (xem cách giải bài toán 8)}$$

1.41. Làm tính nhân

a)  $(2a-b)(4a^2 + 2ab + b^2)$

b)  $(2x-1)(3x+2)(3-x)$

c)  $(1-x)(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5)$

*Lời giải*

a)  $(2a-b)(4a^2 + 2ab + b^2) = 8a^3 + 4a^2b + 2ab^2 - 4a^2b - 2ab^2 - b^3 = 8a^3 - b^3$

b)  $(2x-1)(3x+2)(3-x) = (6x^2 + 4x - 3x - 2)(3-x)$

$$= (6x^2 + x - 2)(3-x) = 18x^2 - 6x^3 + 3x - x^2 - 6 + 2x = -6x^3 + 17x^2 + 5x - 6$$

c)  $(1-x)(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 - x - x^2 - x^3 - x^4 - x^5 - x^6 = 1 - x^6$

Tương tự:  $(1-x)(1+x+x^2+\dots+x^{10})=1-x^{11}$

$$(1-x)(1+x+x^2+\dots+x^{100})=1-x^{101}$$

**1.42.** Rút gọn và tính giá trị của biểu thức

a)  $A=(x-4)(x-2)-(x-1)(x-3)$  với  $x=\frac{7}{4}$

b)  $B=(a+3)(9a-8)-(9a-1)(2+a)$ , với  $a=-\frac{7}{2}$

c)  $C=(x+1)(x^2-x+1)+x-(x-1)(x^2+x+1)+2014$ , với  $x=-2014$ .

*Lời giải*

a)  $A=(x-4)(x-2)-(x-1)(x-3)=x^2-6x+8-x^2+4x-3=-2x+5$

Thay  $x=\frac{7}{4}$  vào biểu thức  $A$ , ta có:  $A=(-2)\cdot\frac{7}{4}+5=-\frac{7}{2}+\frac{10}{2}=\frac{3}{2}$

b)  $B=(a+3)(9a-8)-(9a-1)(2+a)=(9a^2-8a+27a-24)-(18a+9a^2-2-a)$   
 $=9a^2+19a-24-17a-9a^2+2=2a-22$

Thay  $a=-\frac{7}{2}$  vào biểu thức  $B$ , ta có:  $B=2\cdot\left(-\frac{7}{2}\right)-22=-29$

c)  $C=(x+1)(x^2-x+1)+x-(x-1)(x^2+x+1)+2014$   
 $=(x^3-x^2+x+x^2-x+1)+x-(x^3+x^2+x-x^2-x-1)+2014$   
 $=x^3+1+x-x^3+1+2014=x+2016$

Thay  $x=-2014$  vào biểu thức  $C$ , ta có:  $C=-2014+2016=2$

**1.43.** Chứng minh biểu thức sau không phụ thuộc vào giá trị của biến.

a)  $A=(x-5)(2x+3)-2x(x-3)+x+2$

b)  $B=(2x+3)(4x^2-6x+9)-2(4x^3-1)$

c)  $C=(2x-3)(x^2+x+1)-x(2x^2-x-1)$

*Lời giải*

a)  $A=(x-5)(2x+3)-2x(x-3)+x+7$

$$=2x^2+3x-10x-15-2x^2+6x+x+7=-8$$

b)  $B=(2x+3)(4x^2-6x+9)-2(4x^3-1)$

$$=8x^3-12x^2+18x+12x^2-18x+27-8x^3+2=29$$

c)  $C=(2x-3)(x^2+x+1)-x(2x^2-x-1)$

$$=2x^3+2x^2+2x-3x^2-3x-3-2x^3+x^2+x=-3$$

**1.44.**

a) Chứng minh rằng biểu thức  $n(2n-3)-2n(n+1)$  luôn chia hết cho 5 với mọi số nguyên  $n$ .

b) Chứng minh  $n(n+5)-(n-3)(n+2)$  luôn chia hết cho 6.

*Lời giải*

a)  $n(2n-3)-2n(n+1)=2n^2-3n-2n^2-2n=-5n$

$-5n$  chia hết cho 5 với mọi giá trị nguyên của  $n$

b)  $n(n+5)-(n-3)(n+2)=(n^2+5n)-(n^2+2n-3n-6)$

$$=n^2+5n-n^2+n+6=6n+6$$

Vì  $6n:6; 6:6; n \in \mathbb{Z}$  nên  $6n+6$  chia hết cho 6

**1.45.**

a) Tìm  $m$  sao cho  $2x^3 - 3x^2 + x + m = (x+2)(2x^2 - 7x + 15)$

b) Tìm  $a, b$  biết:  $(x-3)(2x^2 + ax + b) = 2x^3 - 8x^2 + 9x - 9$

*Lời giải*

a) Ta có:  $2x^3 - 3x^2 + x + m = 2x^3 - 7x^2 + 15x + 4x^2 - 14x + 30$

$$\Rightarrow 2x^3 - 3x^2 + x + m = 2x^3 - 3x^2 + x + 30$$

$$\Rightarrow m = 30$$

b) Ta có:  $(x-3)(2x^2 + ax + b) = 2x^3 - 8x^2 + 9x - 9$

$$\Rightarrow 2x^3 + ax^2 + bx - 6x^2 - 3ax - 3b = 2x^3 - 8x^2 + 9x - 9$$

$$\Rightarrow 2x^3 + (a-6)x^2 + (b-3a)x - 3b = 2x^3 - 8x^2 + 9x - 9$$

$$\Rightarrow a-6 = -8; b-3a = 9; -3b = -9$$

$$\Rightarrow a = -2; b = 3$$

**1.46.**

Tìm  $x$ , biết:

a)  $(3x-5)(7-5x) - (5x+2)(2-3x) = 4$

b)  $(x+2)(x^2 - 2x + 4) - (x^3 + 3)x = 14$

c)  $(x^2 - x + 1)(x+1) - x^3 - 3x = 2$ .

*Lời giải*

a) Ta có:  $(3x-5)(7-5x) - (5x+2)(2-3x) = 4$

$$\Rightarrow (21x - 15x^2 - 35 + 25x) - (10x - 15x^2 + 4 - 6x) = 4$$

$$\Rightarrow 46x - 15x^2 - 35 - 4x + 15x^2 - 4 = 4$$

$$\Rightarrow 42x = 43 \Rightarrow x = \frac{43}{42}$$

b) Ta có:  $(x+2)(x^2 - 2x + 4) - (x^2 + 3)x = 14$

$$\Rightarrow (x^3 - 2x^2 + 4x + 2x^2 - 4x + 8) - (x^3 + 3x) = 14$$

$$\Rightarrow x^3 + 8 - x^3 - 3x = 14$$

$$\Rightarrow -3x = 6 \Rightarrow x = -2$$

c) Ta có:  $(x^2 - x + 1)(x+1) - x^3 - 3x = 2$

$$\Rightarrow x^3 + x^2 - x^2 - x + x + 1 - x^3 - 3x = 2$$

$$\Rightarrow -3x = 1 \Rightarrow x = -\frac{1}{3}$$

**1.47.**

Tìm ba số chẵn liên tiếp, biết tích của hai số sau lớn hơn tích của hai số đầu là 192.

*Lời giải*

Gọi ba số chẵn liên tiếp là  $2n; 2n+2; 2n+4$  với  $n \in \mathbb{N}$

Ta có:  $(2n+2)(2n+4) - (2n+2)2n = 192$

$$\Rightarrow 4n^2 + 8n + 4n + 8 - 4n^2 - 4n = 192$$

$$\Rightarrow 8n = 184 \Rightarrow n = 23$$

Vậy ba số chẵn là 46; 48; 50.

## Bài 5. PHÉP CHIA ĐA THÚC CHO ĐƠN THÚC

### A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

#### 1. Chia đơn thức cho đơn thức

- a) Đơn thức  $A$  chia hết cho đơn thức  $B$  ( $B \neq 0$ ) khi mỗi biến của  $B$  đều là biến của  $A$  với số mũ không lớn hơn số mũ của nó trong  $A$ .
- b) Muốn chia đơn thức  $A$  cho đơn thức  $B$  (trường hợp chia hết), ta làm như sau:
  - Chia hệ số của đơn thức  $A$  cho hệ số của đơn thức  $B$ ;
  - Chia lũy thừa của từng biến trong  $A$  cho lũy thừa của từng biến đó trong  $B$ ;
  - Nhân các kết quả tìm được với nhau.

#### 2. Chia đa thức cho đơn thức

Dưới đây là quy tắc chia một đa thức cho một đơn thức trong trường hợp mọi hạng tử của đa thức đều chia hết cho đơn thức:

- Đa thức  $A$  chia hết cho đơn thức  $B$  nếu mọi hạng tử của  $A$  đều chia hết cho  $B$ .
- Muốn chia đa thức  $A$  cho đơn thức  $B$  (trường hợp chia hết), ta chia từng hạng tử của  $A$  cho  $B$  rồi cộng các kết quả với nhau.

### B. PHÂN LOẠI BÀI TẬP

#### I. CHIA ĐƠN THỨC CHO ĐƠN THỨC

##### Bài toán 1. Làm tính chia

$$\begin{array}{ll} a) (9a^2b^2c^2):(3ab^2c^2) & b) (-6a^3b^2c):(-2a^2bc) \\ c) 20m^4n^3:(-5m^2n^3) & d) \left(-\frac{3}{2}a^4b^3c^2\right):\left(-\frac{2}{3}a^3bc^2\right) \end{array}$$

##### Hướng dẫn:

- + Áp dụng quy tắc chia đơn thức cho đơn thức.
- +  $a^m : a^n = a^{m-n}$  ( $a \neq 0; m, n \in N; m \geq n$ ).

##### Bài toán 2. Làm tính chia

$$\begin{array}{ll} a) (4a^3b^2)^3:(2a^2b)^2 & c) (9x^2y)^3:(3xy)^2 \\ b) (-x^2y^3z)^4:(xyz) & d) (-abc^2)^5:(-a^2bc^3)^2 \end{array}$$

##### Hướng dẫn:

- + Áp dụng quy tắc chia đơn thức cho đơn thức.
- +  $a^m : a^n = a^{m-n}$  ( $a \neq 0; m, n \in N; m \geq n$ ).

##### Bài toán 3. Rút gọn biểu thức:

$$\begin{array}{l} a) A = (3x^3 : x) - (2x)^2 + x^4 : (2x^2) \\ b) B = 6x^4 : x - 5x^5 : x^2 + (2x)^3 \\ c) C = 12x^3 : 4x - 8x : 4x - 4x \left(3x + \frac{1}{4}\right). \end{array}$$

##### Hướng dẫn:

Chia đơn thức cho đơn thức và cộng các kết quả với nhau.

##### Bài toán 4. Rút gọn biểu thức:

$$\begin{array}{l} a) A = (3x^3y^2 : x^2y^2) - 5x^2y^3 : xy^2 + 4x^3y^3 : 2x^2y^3 \\ b) B = a^4b^4 : (-a^3b^2) + 2a^4b^3 : a^2b^2 - 3a^3b^2 : ab^2 \\ c) C = \left(-\frac{2}{3}x^5y^2\right) : (-6x^2y^2) + \frac{3}{4}x^4y^3 : (-6x^3y^2) - \frac{4}{5}x^3y^4 : 6xy^3. \end{array}$$

##### Hướng dẫn:

Xem cách giải bài toán 3.

##### Bài toán 5. Tính giá trị của biểu thức

a)  $A = 15x^4y^3z^2 : 5xy^2z^2$ , với  $x = 2; y = -10; z = 2014$ .

b)  $B = -\frac{3}{4}a^5b^3c^2 : \left(-\frac{3}{2}a^2b^2c\right)$ , với  $a = -2, b = 3, c = \frac{1}{2}$ .

**Hướng dẫn:** Thực hiện phép chia, sau đó thay các giá trị bằng số của các biến vào kết quả của phép chia.

**Bài toán 6.** Tìm điều kiện của  $n$  để phép chia sau đây là phép chia hết:

a)  $5x^4 : 6x^n$

b)  $3x^n : 4x^2$

c)  $4x^n y^{n+1} : 3x^4 y^6$ .

**Hướng dẫn:**  $a^m : a^n = a^{m-n}, m, n \in N, m \geq n$ .

**Bài toán 7.** Làm tính chia:

a)  $(x+y)^2 : (x+y)$

b)  $(x-y)^7 : (y-x)^2$

c)  $(a-b+c)^6 : (a-b+c)^2$ .

**Bài toán 8.** Làm tính chia

a)  $(-xy)^7 : (xy)^2$

b)  $(xy^2)^6 : (-xy^2)^2$

c)  $(x^2 + 3x + 5)^5 : (x^2 + 3x + 5)^3$

d)  $3(x^2 + 2)^3 : \frac{2}{3}(x^2 + 2)$ .

**Hướng dẫn:**  $(-a)^2 = a^2; (-a)^3 = -a^3$ .

## II. Chia đa thức cho đơn thức

**Bài toán 9.** Làm tính chia

a)  $(-2x^5 + 3x^3 - 4x^2) : 2x^2$

b)  $(x^3 - 2x^2y + 3xy^2) : \left(-\frac{1}{2}x\right)$

c)  $(3x^2y^2 + 6x^2y^3 - 12xy) : 3xy$

d)  $(20x^4y - 25x^3y^2 - 3x^2y) : 5x^2y$

**Hướng dẫn:** Áp dụng quy tắc chia đa thức cho đơn thức.

**Bài toán 10.** Làm tính chia

a)  $(9a^3b^2 - 3a^2b^3 + a^2b^2) : (3a^2b^2)$

b)  $(a^4b^4 + 2a^4b^3 - 3a^3b^2) : (-a^3b^2)$

c)  $\left(\frac{2}{3}x^5y^2 + \frac{3}{4}x^4y^3 - \frac{4}{5}x^3y^4\right) : (-6x^2y^2)$

**Bài toán 11:** Rút gọn biểu thức:

a)  $A = (6a^3 - 3a^2) : a^2 + (12a^2 + 9a) : 3a$

b)  $B = (8x^3 - 4x^2) : (2x^2) - (4x^2 - 3x) : x$

c)  $C = (3x^3 - 2x^2y) : x^2 - (2xy^2 + x^2y) : \frac{1}{3}xy$

d)  $D = (a^2b - 3ab^2) : \left(\frac{1}{2}ab\right) + (6a^3 - 5ab^2) : b^2$

**Hướng dẫn:** Thực hiện phép chia đa thức cho đơn thức và cộng các kết quả. Khi làm phép chia đơn thức cho đơn thức ta có thể viết ngay kết quả.

**Bài toán 12.** Làm tính chia.

a)  $\left[3(x-y)^4 + 2(x-y)^3 - 5(x-y)^2\right] : (y-x)^2$

b)  $5(x-2y)^3 : (5x-10y)$

c)  $\left[5(x-y)^3 + 2(x-y)^2\right] : (y-x)^2$

d)  $(x^3 + 8y^3) : (x+2y)$

*Hướng dẫn:* a) Đổi biến  $u = x - y$  và chú ý  $\left[ (x-y)^2 = (y-x)^2 \right]$ .

**Bài tập tương tự:**

- 1)  $(a^3 + 27b^3):(a+3b) = a^2 - 3ab + 9b^2$ .
- 2)  $(125a^3 - 8b^3):(5a-2b) = 25a^2 + 10ab + 4b^2$ .
- 3)  $(x^3 - y^3):(x^2 + xy + y^2) = x - y$ .

**Bài toán 13.** Tìm  $n$  để phép chí sau đây là phép chia hết.

$$\text{a)} (x^3 - 5x^2 + 3x):4x^n \quad \text{b)} (18x^4 - 27x^3):54x^n$$

*Hướng dẫn:* Kết quả của phép chia đơn thức cho đơn thức có các hệ số nguyên hoặc phân số, với các biến ta áp dụng quy tắc:

$$a^m : a^n = a^{m-n} \text{ với } m, n \in \mathbb{N}, m \geq n.$$

**Bài toán 14.**

- a) Đa thức  $P(x) = x^4 - 3x^3 + x^2$  có thể chia hết cho đơn thức  $Q(x) = 2x^3$  không?
- b) Tương tự  $P(x) = 5x^4 - 4x^3 + 6x^2y$  và  $Q(x) = 2x^2$ .

*Hướng dẫn:* Xem kết quả bài toán 13.

**Bài toán 15.** Tính giá trị của biểu thức sau.

- a)  $A = \left( \frac{1}{3}a^3b + \frac{1}{3}a^2b^2 - \frac{1}{4}ab^3 \right):(5ab)$  với  $a = -3; b = 6$ .
- b)  $B = (2xy^2 - 5y^3):y^2 + (12xy + 6x^2):(3x)$  với  $x = -3; y = -12$ .
- c)  $C = (3x^2 + 4x^2y):x^2 - (10xy + 15y^2):(5y)$  với  $x = 2; y = -5$ .

**III. Tìm giá trị của biến.**

**Bài toán 16.** Tìm  $x$ , biết:

- a)  $(5x^3 - 3x^2):x^2 = 7$  (1).
- b)  $8x^4 : x - 5x^5 : (3x^4) - (2x)^3 = 1$  (2).
- c)  $(8x^3 - 4x^2):(2x^2) - (4x^2 - 3x):x + 2x = -1$  (3).

*Hướng dẫn:* Thực hiện phép chia đa thức cho đơn thức.

**C. BÀI TẬP.**

**1.48.** Làm tính chia.

- a)  $(3a^2b - 4ab^3):(5ab)$ .
- b)  $(3x^3y^2 - 5x^2y^3 + 4x^3y^3):(x^2y^2)$ .
- c)  $(x^4y^4 + 2x^4y^3 - 3x^3y^2):(-x^3y^2)$ .

**1.49.** Rút gọn các biểu thức sau:

- a)  $B = (a^2b - 3ab^2):\left(\frac{1}{2}ab\right) + (6a^3 - 5ab^2):b^2$ .
- b)  $A = (6x^3 - 4x^2):x^2 + (12x^2 + 9x):3x$ .
- c)  $C = (12x^3 - 8x):4x\left(3x + \frac{1}{4}\right)$ .
- d)  $D = (18a^4 - 27a^3):(9a^2) - 10a^3$ .
- e)  $E = (3x^3 - x^2y):x^2 - (xy^2 + x^2y):(xy) + 2x(x-1)$ .

**1.50.** Làm tính chia.

a)  $(8x^3 - 1) : (2x - 1)$ ;

b)  $(64x^3 + 1) : (4x + 1)$

c)  $(x^3 - 27) : (x - 3)$ ;

d)  $(8x^3 + 27y^3) : (2x + 3y)$

**1.51.** Tìm  $x$ , biết:

a)  $(12x^3 - 8x) : x - 4x(3x - 1) = 0$ .

b)  $(6x^3 - 3x^2) : (x^2) + (12x^2 + 9x) : 3x - 5 = 0$ .

**1.52.** Tìm giá trị của biểu thức sau:

a)  $(18a^4 - 27a^3) : (9a^2) - 10a^3 : (5a)$  với  $a = -8$ .

b)  $(12x^3 - 8x) : 4x - 4x\left(3x + \frac{1}{4}\right)$  với  $x = -3$ .

**1.53.** Làm tính chia.

a)  $A = \left[ (x^2 - 1)^4 + 2(1-x)^3 + 3(x-1)^2 \right] : \left[ -2(x-1)^2 \right]$ .

b)  $B = 2(x+2y)^3 : (2x+4y)$ .

c)  $C = \left[ 3(y-x)^5 - 2(x-y)^3 + 3(x-y)^2 \right] : \left[ 6(y-x)^2 \right]$ .

## DÁP ÁN THAM KHẢO

### Bài 5. PHÉP CHIA ĐA THỨC CHO ĐƠN THỨC

#### B. PHÂN LOẠI BÀI TẬP

#### I. CHIA ĐƠN THỨC CHO ĐƠN THỨC

**Bài toán 1.** Làm tính chia

$$\begin{array}{ll} \text{a)} (9a^2b^2c^2):(3ab^2c^2) & \text{b)} (-6a^3b^2c):(-2a^2bc) \\ \text{c)} 20m^4n^3:(-5m^2n^3) & \text{d)} \left(-\frac{3}{2}a^4b^3c^2\right):\left(-\frac{2}{3}a^3bc^2\right) \end{array}$$

**Hướng dẫn:**

+ Áp dụng quy tắc chia đơn thức cho đơn thức.

+  $a^m : a^n = a^{m-n}$  ( $a \neq 0; m, n \in N; m \geq n$ ) .

**Lời giải**

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \text{Ta có: } (9a^2b^2c^2):(3ab^2c^2) = (9:3) \cdot (a^2:a)(b^2:b^2)(c^2:c^2) = 3a \\ \text{b)} \text{Ta có: } (-6a^3b^2c):(-2a^2bc) = [(-6):(-2)](a^3:a^2)(b^2:b)(c:c) = 3ab \\ \text{c)} \text{Ta có: } 20m^4n^3:(-5m^2n^3) = [20:(-5)] \cdot (m^4:m^2) \cdot (n^3:n^3) = -4m^2 \\ \text{d)} \text{Ta có: } \left(-\frac{3}{2}a^4b^3c^2\right):\left(-\frac{2}{3}a^3bc^2\right) = \left[\left(-\frac{3}{2}\right):\left(-\frac{2}{3}\right)\right] \cdot (a^4:a^3) \cdot (b^3:b) \cdot (c^2:c^2) = \frac{9}{4}ab^2. \end{array}$$

**Bài toán 2.** Làm tính chia

$$\begin{array}{ll} \text{a)} (4a^3b^2)^3:(2a^2b)^2 & \text{c)} (9x^2y)^3:(3xy)^2 \\ \text{b)} (-x^2y^3z)^4:(xyz) & \text{d)} (-abc^2)^5:(-a^2bc^3)^2 \end{array}$$

**Hướng dẫn:**

+ Áp dụng quy tắc chia đơn thức cho đơn thức.

+  $a^m : a^n = a^{m-n}$  ( $a \neq 0; m, n \in N; m \geq n$ ) .

**Lời giải**

$$\begin{array}{l} \text{a)} \text{Ta có: } (4a^3b^2)^3:(2a^2b)^2 = (64a^9b^6):(4a^4b^2) = (64:4) \cdot (a^9:a^4) \cdot (b^6:b^2) = 16a^5b^4. \\ \text{b)} \text{Ta có: } (-x^2y^3z)^4:(xyz) = (x^8y^{12}z^4):(xyz) = (x^8:x)(y^{12}:y)(z^4:z) = x^7y^{11}z^3 \\ \text{c)} \text{Ta có: } (9x^2y)^3:(3xy)^2 = (729x^6y^3):(9x^2y^2) \cdot z = (729:9) \cdot (x^6:x^2) \cdot (y^3:y^2) = 81x^4y. \\ \text{d)} \text{Ta có: } (-abc^2)^5:(-a^2bc^3)^2 \\ = (-a^5b^5c^{10}):(a^4b^2c^6) = [(-1):1](a^5:a^4)(b^5:b^2)(c^{10}:c^6) = -ab^3c^4. \end{array}$$

**Bài toán 3.** Rút gọn biểu thức:

$$\begin{array}{l} \text{a)} A = (3x^3:x) - (2x)^2 + x^4:(2x^2) \\ \text{b)} B = 6x^4:x - 5x^5:x^2 + (2x)^3 \\ \text{c)} C = 12x^3:4x - 8x:4x - 4x\left(3x + \frac{1}{4}\right). \end{array}$$

**Hướng dẫn:** Chia đơn thức cho đơn thức và cộng các kết quả với nhau.

**Lời giải**

$$\text{a)} \text{Ta có: } (3x^3:x) - (2x)^2 + x^4:(2x^2) = 3x^2 - 4x^2 + \frac{1}{2}x^2 = -\frac{1}{2}x^2.$$

(Ta viết  $3x^3:x = (3:1)(x^3:x) = 3 \cdot x^2$  để đơn giản, ta ghi kết quả là  $3x^3:x = 3x^2$  ) tương tự:

$$x^4 : (2x^2) = (1:2)(x^4 : x^2) = \frac{1}{2}x^2, \text{ ta viết: } x^4 : (2x^2) = \frac{1}{2}x^2.$$

$$\text{b)} B = 6x^4 : x - 5x^5 : x^2 + (2x)^3 = 6x^3 - 5x^3 + 8x^3 = 9x^3.$$

$$\text{c)} \text{Ta có: } C = 12x^3 : 4x - 8x : 4x - 4x\left(3x + \frac{1}{4}\right) = 3x^2 - 2 - 12x^2 - x = -9x^2 - x - 2.$$

**Chú ý:** Bạn cần nhớ thứ tự thực hiện các phép toán: nhân chia trước, cộng trừ sau chứ không phải làm “lần lượt”.

**Bài toán 4.** Rút gọn biểu thức:

$$\text{a)} A = (3x^3y^2 : x^2y^2) - 5x^2y^3 : xy^2 + 4x^3y^3 : 2x^2y^3$$

$$\text{b)} B = a^4b^4 : (-a^3b^2) + 2a^4b^3 : a^2b^2 - 3a^3b^2 : ab^2$$

$$\text{c)} C = \left(-\frac{2}{3}x^5y^2\right) : (-6x^2y^2) + \frac{3}{4}x^4y^3 : (-6x^3y^2) - \frac{4}{5}x^3y^4 : 6xy^3.$$

**Hướng dẫn:** Xem cách giải bài toán 3.

#### Lời giải

$$\text{a)} \text{Ta có: } A = (3x^3y^2 : x^2y^2) - 5x^2y^3 : xy^2 + 4x^3y^3 : 2x^2y^3 = 3x - 5xy + 2x = 5x - 5xy.$$

b) Ta có:

$$B = a^4b^4 : (-a^3b^2) + 2a^4b^3 : a^2b^2 - 3a^3b^2 : ab^2 = -ab^2 + 2a^2b - 3a^2$$

$$\text{c)} \text{Ta có: } C = \left(-\frac{2}{3}x^5y^2\right) : (-6x^2y^2) + \frac{3}{4}x^4y^3 : (-6x^3y^2) - \frac{4}{5}x^3y^4 : 6xy^3 = \frac{1}{9}x^3 - \frac{1}{8}xy - \frac{2}{15}x^2y.$$

**Bài toán 5.** Tính giá trị của biểu thức

$$\text{a)} A = 15x^4y^3z^2 : 5xy^2z^2, \text{ với } x = 2; y = -10; z = 2014.$$

$$\text{b)} B = -\frac{3}{4}a^5b^3c^2 : \left(-\frac{3}{2}a^2b^2c\right), \text{ với } a = -2, b = 3, c = \frac{1}{2}.$$

**Hướng dẫn:** Thực hiện phép chia, sau đó thay các giá trị bằng số của các biến vào kết quả của phép chia.

#### Lời giải

$$\text{a)} \text{Ta có: } A = 15x^4y^3z^2 : 5xy^2z^2 = 3x^3y$$

Thay  $x = 2; y = -10$  vào đơn thức  $3x^2y$  ta được:  $A = 3 \cdot 2^3 \cdot (-10) = -240$

**Chú ý:** Trong kết quả  $A = 3x^3y$  không có biến  $z$  ta nói rằng  $A$  không phụ thuộc  $z$ .

$$\text{b)} \text{Ta có: } B = -\frac{3}{4}a^5b^3c^2 : \left(-\frac{3}{2}a^2b^2c\right) = \frac{1}{2}a^3bc$$

Thay  $a = -2, b = 3, c = \frac{1}{2}$  vào biểu thức trên, ta được:  $B = \frac{1}{2}(-2)^3 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} = -6$ .

**Bài toán 6.** Tìm điều kiện của  $n$  để phép chia sau đây là phép chia hết:

$$\text{a)} 5x^4 : 6x^n$$

$$\text{b)} 3x^n : 4x^2$$

$$\text{c)} 4x^n y^{n+1} : 3x^4 y^6.$$

**Hướng dẫn:**  $a^m : a^n = a^{m-n}, m, n \in N, m \geq n$ .

#### Lời giải

$$\text{a)} \text{Ta có: } 5x^4 : 6x^n = \frac{5}{6}x^{4-n}$$

Vậy điều kiện của  $n$  là  $4 - n \geq 0, n \in \mathbb{N} \Rightarrow n \leq 4, n \in \mathbb{N} \Rightarrow n = 0; 1; 2; 3; 4$ .

$$\text{b)} \text{Ta có: } 3x^n : 4x^2 = \frac{3}{4}x^{n-2}$$

Điều kiện:  $n - 2 \geq 0; n \in \mathbb{N} \Rightarrow n \geq 2; n \in \mathbb{N}$ .

c) Ta có:  $4x^n y^{n+1} : 3x^4 y^6 = \frac{3}{4} x^{n-4} y^{n-5}$ .

Vậy điều kiện của  $n$  là:  $n \in \mathbb{N}; n-4 \geq 0$  và  $n-5 \geq 0 \Rightarrow n \geq 4; n \geq 5$  và  $n \in \mathbb{N} \Rightarrow n \geq 5$  và  $n \in \mathbb{N}$ .

**Bài toán 7.** Làm tính chia:

a)  $(x+y)^2 : (x+y)$       b)  $(x-y)^7 : (y-x)^2$       c)  $(a-b+c)^6 : (a-b+c)^2$ .

*Lời giải*

a) Ta có:  $(x+y)^2 : (x+y) = (x+y)^{2-1} = x+y$ .

b) Ta có:  $(x-y)^7 : (y-x)^2 = (x-y)^7 : (x-y)^2 = (x-y)^{7-2} = (x-y)^5$ .

c) Ta có  $(a-b+c)^6 : (a-b+c)^2 = (a-b+c)^{6-2} = (a-b+c)^4$ .

**Cách khác:** (Dùng phép đổi biến)

a) Đặt  $a = x + y$ , ta có  $a^2 : a = a^{2-1} = a = x + y$ .

b) Đặt  $x-y=t$ , ta có  $t^7 : (-t)^2 = t^7 : t^2 = t^5 = (x-y)^5$ .

c) Đặt  $x=a-b+c$  ta có:  $x^6 : x^2 = x^{6-2} = x^4 = (a-b+c)^4$ .

**Bài toán 8.** Làm tính chia

a)  $(-xy)^7 : (xy)^2$       b)  $(xy^2)^6 : (-xy^2)^2$   
 c)  $(x^2 + 3x + 5)^5 : (x^2 + 3x + 5)^3$       d)  $3(x^2 + 2)^3 : \frac{2}{3}(x^2 + 2)$ .

**Hướng dẫn:**  $(-a)^2 = a^2; (-a)^3 = -\left(a^3\right)$ .

*Lời giải*

a)  $(-xy)^7 : (xy)^2 = (-xy)^7 : (-xy)^2 = (-xy)^{7-2} = (-xy)^6$ .

b)  $(xy^2)^6 : (-xy^2)^2 = (xy^2)^6 : (xy^2)^2 = (xy^2)^{6-2} = (xy^2)^4 = x^4 y^8$ .

c)  $(x^2 + 3x + 5)^5 : (x^2 + 3x + 5)^3 = (x^2 + 3x + 5)^{5-3} = (x^2 + 3x + 5)^2$ .

d)  $3(x^2 + 2)^3 : \frac{2}{3}(x^2 + 2) = \frac{9}{2}(x^2 + 2)^{3-1} = \frac{9}{2}(x^2 + 2)^2$ .

**II. Chia đa thức cho đơn thức**

**Bài toán 9.** Làm tính chia

a)  $(-2x^5 + 3x^3 - 4x^2) : 2x^2$       b)  $(x^3 - 2x^2 y + 3xy^2) : \left(-\frac{1}{2}x\right)$   
 c)  $(3x^2 y^2 + 6x^2 y^3 - 12xy) : 3xy$       d)  $(20x^4 y - 25x^3 y^2 - 3x^2 y) : 5x^2 y$

**Hướng dẫn:** Áp dụng quy tắc chia đa thức cho đơn thức.

*Lời giải*

a) Ta có:

$$\begin{aligned} & (-2x^5 + 3x^3 - 4x^2) : 2x^2 \\ &= \left[ (-2x^5) : (2x^2) \right] + \left[ (3x^3) : (2x^2) \right] + \left[ (-4x^2) : (2x^2) \right] \\ &= -x^3 + \frac{3}{2}x - 2 \end{aligned}$$

b) Ta có:

$$\begin{aligned} & (x^3 - 2x^2 y + 3xy^2) : \left(-\frac{1}{2}x\right) \\ &= x^3 : \left(-\frac{1}{2}x\right) + \left[ (-2x^2 y) : \left(-\frac{1}{2}x\right) \right] + \left[ (3xy^2) : \left(-\frac{1}{2}x\right) \right] \end{aligned}$$

$$= -2x^2 + 4xy - 6y^2$$

c) Ta có:  $(3x^2y^2 + 6x^2y^3 - 12xy) : 3xy = xy + 2xy^2 - 4$

d) Ta có:

$$\begin{aligned} & (20x^4y - 25x^3y^2 - 3x^2y) : 5x^2y \\ &= 20x^4y : 5x^2y + (-25x^3y^2) : (5x^2y) + (-3x^2y) : (5x^2y) \\ &= 4x^2 - 5y - \frac{3}{5} \end{aligned}$$

**Chú ý:** Các phép chia đơn thức cho đơn thức ta để dấu “+” hay “-“ theo dấu của hạng tử, sau cùng cộng các kết quả với nhau.

**Bài toán 10.** Làm tính chia

a)  $(9a^3b^2 - 3a^2b^3 + a^2b^2) : (3a^2b^2)$

b)  $(a^4b^4 + 2a^4b^3 - 3a^3b^2) : (-a^3b^2)$

c)  $\left(\frac{2}{3}x^5y^2 + \frac{3}{4}x^4y^3 - \frac{4}{5}x^3y^4\right) : (-6x^2y^2)$

### Lời giải

a) Ta có:

$$\begin{aligned} & (9a^3b^2 - 3a^2b^3 + a^2b^2) : (3a^2b^2) \\ &= (9a^3b^2) : (3a^2b^2) + (-3a^2b^3) : (3a^2b^2) + (a^2b^2) : (3a^2b^2) \\ &= 3a - b + \frac{1}{3} \end{aligned}$$

b) Ta có:

$$\begin{aligned} & (a^4b^4 + 2a^4b^3 - 3a^3b^2) : (-a^3b^2) \\ &= (a^4b^4) : (-a^3b^2) + (2a^4b^3) : (-a^3b^2) - (3a^3b^2) : (-a^3b^2) \\ &= -ab^2 - ab + 3. \end{aligned}$$

c) Ta có:

$$\begin{aligned} & \left(-\frac{2}{3}x^5y^2 + \frac{3}{4}x^4y^3 - \left(\frac{4}{5}x^3y^4\right)\right) : (-6x^2y^2) \\ &= \left(-\frac{2}{3}x^5y^2\right) : (-6x^2y^2) + \left(\frac{3}{4}x^4y^3\right) : (-6x^2y^2) - \left(\frac{4}{5}x^3y^4\right) : (-6x^2y^2) \\ &= \frac{1}{9}x^3 - \frac{1}{8}x^2y + \frac{2}{15}xy^2. \end{aligned}$$

**Bài toán 11:** Rút gọn biểu thức:

a)  $A = (6a^3 - 3a^2) : a^2 + (12a^2 + 9a) : 3a$

b)  $B = (8x^3 - 4x^2) : (2x^2) - (4x^2 - 3x) : x$

c)  $C = (3x^3 - 2x^2y) : x^2 - (2xy^2 + x^2y) : \frac{1}{3}xy$

d)  $D = (a^2b - 3ab^2) : \left(\frac{1}{2}ab\right) + (6a^3 - 5ab^2) : b^2$

**Hướng dẫn:** Thực hiện phép chia đa thức cho đơn thức và cộng các kết quả. Khi làm phép chia đơn thức cho đơn thức ta có thể viết ngay kết quả.

### Lời giải

- a) Ta có:  $A = (6a^3 - 3a^2) : a^2 + (12a^2 + 9a) : 3a = (6a - 3) + (4a + 3) = 10a$ .
- b) Ta có:  $B = (8x^3 - 4x^2) : (2x^2) - (4x^2 - 3x) : x = (4x - 2) - (4x - 3) = 1$ .
- c) Ta có:  $C = (3x^3 - 2x^2y) : x^2 - (2xy^2 + x^2y) : \frac{1}{3}xy = (3x - 2y) - (6y + 3x) = -8y$ .
- d) Ta có:  $D = (a^2b - 3ab^2) : \left(\frac{1}{2}ab\right) + (6b^3 - 5ab^2) : b^2 = (2a - 6b) + (6b - 5a) = -3a$ .

**Bài toán 12.** Làm tính chia.

- a)  $\left[ 3(x-y)^4 + 2(x-y)^3 - 5(x-y)^2 \right] : (y-x)^2$
- b)  $5(x-2y)^3 : (5x-10y)$
- c)  $\left[ 5(x-y)^3 + 2(x-y)^2 \right] : (y-x)^2$
- d)  $(x^3 + 8y^3) : (x+2y)$

*Hướng dẫn:* a) Đổi biến  $u = x - y$  và chú ý  $(x-y)^2 = (y-x)^2$ .

#### *Lời giải*

a) Đặt  $u = x - y$  ta có:

$$\begin{aligned} & (3u^4 + 2u^3 - 5u^2) : u^2 \quad (\text{vì } (x-y)^2 = (y-x)^2) \\ &= 3u^2 + 2u - 5 = 3(x-y)^2 + 2(x-y) - 5. \end{aligned}$$

b) Ta có:  $5x-10y = 5(x-2y)$

Đặt  $u = x - 2y$ , ta được:  $5u^3 : 5u = u^2 = (x-2y)^2$

c) Đặt  $u = x - y \Rightarrow (x-y)^2 = (y-x)^2 = u^2$

Ta có:  $(5u^3 + 2u^2) : u^2 = 5u + 2 = 5(x-y) + 2$

d) Ta có:  $(x^3 + 8y^3) = (x+2y)(x^2 - 2xy + 4y^2)$

$$(x^3 + 8y^3) : (x+2y) = (x+2y)(x^2 - 2xy + 4y^2) : (x+2y) = x^2 - 2xy + 4y^2.$$

**Bài tập tương tự:**

- 1)  $(a^3 + 27b^3) : (a+3b) = a^2 - 3ab + 9b^2$ .
- 2)  $(125a^3 - 8b^3) : (5a-2b) = 25a^2 + 10ab + 4b^2$ .
- 3)  $(x^3 - y^3) : (x^2 + xy + y^2) = x - y$ .

**Bài toán 13.** Tìm  $n$  để phép chia sau đây là phép chia hết.

$$a) (x^3 - 5x^2 + 3x) : 4x^n \qquad b) (18x^4 - 27x^3) : 54x^n$$

*Hướng dẫn:* Kết quả của phép chia đơn thức cho đơn thức có các hệ số nguyên hoặc phân số, với các biến ta áp dụng quy tắc:

$$a^m : a^n = a^{m-n} \quad \text{với } m, n \in \mathbb{N}, m \geq n.$$

#### *Lời giải*

a) Điều kiện  $3 \geq n; 2 \geq n; 1 \geq n, n \in \mathbb{N}$ .

$$\Rightarrow n \leq 1, n \in \mathbb{N} \Rightarrow n = 0 \text{ hoặc } n = 1.$$

b) Điều kiện  $4 \geq n; 3 \geq n; n \in \mathbb{N}$ .

$$\Rightarrow n \leq 3, n \in \mathbb{N} \Rightarrow n = 0; n = 1; n = 2 \text{ hoặc } n = 3.$$

**Bài toán 14.**

a) Đa thức  $P(x) = x^4 - 3x^3 + x^2$  có thể chia hết cho đơn thức  $Q(x) = 2x^3$  không?

b) Tương tự  $P(x) = 5x^4 - 4x^3 + 6x^2y$  và  $Q(x) = 2x^2$ .

*Hướng dẫn:* Xem kết quả bài toán 13.

*Lời giải*

a) Hạng tử  $x^2$  của  $P(x)$  có số mũ của  $x$  là 2 ; trong khi đó số mũ của  $x$  trong  $Q(x)$  là 3  $P(x)$  không chia hết cho  $Q(x)$ .

b) Tất cả các hạng tử của  $P(x)$  đều có số mũ của biến  $x$  lớn hơn hoặc bằng 2 (2 là số mũ của biến  $x$  trong  $Q(x)$ ). Vậy  $P(x)$  chia hết cho  $Q(x)$ .

**Bài toán 15.** Tính giá trị của biểu thức sau.

a)  $A = \left( \frac{1}{3}a^3b + \frac{1}{3}a^2b^2 - \frac{1}{4}ab^3 \right) : (5ab)$  với  $a = -3; b = 6$ .

b)  $B = (2xy^2 - 5y^3) : y^2 + (12xy + 6x^2) : (3x)$  với  $x = -3; y = -12$ .

c)  $C = (3x^2 + 4x^2y) : x^2 - (10xy + 15y^2) : (5y)$  với  $x = 2; y = -5$ .

*Lời giải*

a) Ta có:  $A = \left( \frac{1}{3}a^3b + \frac{1}{3}a^2b^2 - \frac{1}{4}ab^3 \right) : (5ab) = \frac{1}{15}a^2 + \frac{1}{15}ab - \frac{1}{20}b^2$ .

Thay  $a = -3; b = 6$  vào ta có:  $A = \frac{1}{15} \cdot (-3)^2 + \frac{1}{15} \cdot (-3) \cdot (6) - \frac{1}{20} \cdot 6^2 = -\frac{12}{5}$ .

b) Ta có:  $B = (2xy^2 - 5y^3) : y^2 + (12xy + 6x^2) : (3x) (2x - 5y) + (4y + 2x) = 4x - y$ .

Thay  $x = -3; y = -12$  vào biểu thức ta được:

$$B = 4 \cdot (-3) - 12 \cdot (-12) = 0.$$

c) Ta có:  $C = (3x^2 + 4x^2y) : x^2 - (10xy + 15y^2) : (5y) = (3 + 4y) - (2x + 3y) = 3 + y - 2x$ .

Thay  $x = 2; y = -5$  vào biểu thức ta được:  $C = 3 + (-5) - 2 \cdot 2 = -6$ .

### III. Tìm giá trị của biến.

**Bài toán 16.** Tìm  $x$ , biết:

a)  $(5x^3 - 3x^2) : x^2 = 7$  (1).

b)  $8x^4 : x - 5x^5 : (3x^4) - (2x)^3 = 1$  (2).

c)  $(8x^3 - 4x^2) : (2x^2) - (4x^2 - 3x) : x + 2x = -1$  (3).

*Hướng dẫn:* Thực hiện phép chia đa thức cho đơn thức.

*Lời giải*

a) Ta có: (1)  $\Rightarrow 5x - 3 = 7 \Rightarrow 5x = 10 \Rightarrow x = 2$ .

b) Ta có: (2)  $\Rightarrow 8x^3 - \frac{5}{3}x - 8x^3 = 1 \Rightarrow -\frac{5}{3}x = 1 \Rightarrow x = -\frac{3}{5}$ .

c) Ta có: (3)  $\Rightarrow (4x - 2) - (4x - 3) + 2x = -1 \Rightarrow 2x - 2 + 3 = -1 \Rightarrow 2x = -2 \Rightarrow x = -1$ .

## C. BÀI TẬP.

**1.48.** Làm tính chia.

a)  $(3a^2b - 4ab^3) : (5ab)$ .

b)  $(3x^3y^2 - 5x^2y^3 + 4x^3y^3) : (x^2y^2)$ .

c)  $(x^4y^4 + 2x^4y^3 - 3x^3y^2) : (-x^3y^2)$ .

*Lời giải*

a)  $(3a^2b - 4ab^3) : 5ab = (3a^2b : 5ab) + (-4ab^3 : 5ab) = \frac{3}{5}a - \frac{4}{5}b^2$

b)  $(3x^3y^2 - 5x^2y^3 + 4x^3y^3) : (x^2y^2)$   
 $= (3x^3y^2 : x^2y^2) + (-5x^2y^3 : x^2y^2) + (4x^3y^3 : x^2y^2)$   
 $= 3x - 5y + 4xy$   
c)  $(x^4y^4 + 2x^4y^3 - 3x^3y^2) : (-x^3y^2) = -xy^2 - 2xy + 3$

**1.49.** Rút gọn các biểu thức sau:

a)  $B = (a^2b - 3ab^2) : \left(\frac{1}{2}ab\right) + (6a^3 - 5ab^2) : b^2$ .

b)  $A = (6x^3 - 4x^2) : x^2 + (12x^2 + 9x) : 3x$ .

c)  $C = (12x^3 - 8x) : 4x \left(3x + \frac{1}{4}\right)$ .

d)  $D = (18a^4 - 27a^3) : (9a^2) - 10a^3$ .

e)  $E = (3x^3 - x^2y) : x^2 - (xy^2 + x^2y) : (xy) + 2x(x - 1)$ .

*Lời giải*

a)  $A = (6x^3 - 4x^2) : x^2 + (12x^2 + 9x) : 3x$

$= (6x - 4) + (4x + 3) = 10x - 1$

b)  $B = (a^2b - 3ab^2) : \left(\frac{1}{2}ab\right) + (6b^3 - 5ab^2) : b^2$

$= (2a - 6b) + (6b - 5a) = -3a$

c)  $C = (x^3 - 27) : (x - 3) = x^2 + 3x + 9$

d)  $D = (18a^4 - 27a^3) : (9a^2) - 10a^3 = (2a^2 - 3a) - 10a^3 = -10a^3 + 2a^2 - 3a$

e)  $E = (3x^3 - x^2y) : x^2 - (xy^2 + x^2y) : (xy) + 2x(x - 1)$

$= (3x - y) - (y + x) + 2x^2 - 2x = 2x^2 - 2y$

**1.50.** Làm tính chia.

a)  $(8x^3 - 1) : (2x - 1)$ ;

b)  $(64x^3 + 1) : (4x + 1)$

c)  $(x^3 - 27) : (x - 3)$ ;

d)  $(8x^3 + 27y^3) : (2x + 3y)$ .

*Lời giải*

a) Vì  $8x^3 - 1 = (2x - 1)(4x^2 + 2x + 1)$

$\Rightarrow (8x^3 - 1) : (2x - 1) = 4x^2 + 2x + 1$

b)  $(64x^3 + 1) : (4x + 1) = 16x^2 - 4x + 1$  (áp dụng HĐT  $A^3 + B^3 = (A + B)(A^2 - AB + B^2)$ )

c)  $(x^3 - 27) : (x - 3) = x^2 + 3x + 9$

d)  $(8x^3 + 27y^3) : (2x + 3y) = 4x^2 - 6xy + 9y^2$

**1.51.** Tìm  $x$ , biết:

a)  $(12x^3 - 8x) : x - 4x(3x - 1) = 0$ .

b)  $(6x^3 - 3x^2) : (x^2) + (12x^2 + 9x) : 3x - 5 = 0.$

*Lời giải*

a)  $(12x^3 - 8x) : x - 4x(3x - 1) = 0$

$$\Rightarrow 12x^2 - 8 - 12x^2 + 4x = 0$$

$$\Rightarrow 4x = 8 \Rightarrow x = 2$$

b)  $(6x^3 - 3x^2) : x^2 + (12x^2 + 9x) : 3x - 5 = 0$

$$\Rightarrow 6x - 3 + 4x + 3 - 5 = 0$$

$$\Rightarrow 10x = 5 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

1.52. Tìm giá trị của biểu thức sau:

a)  $(18a^4 - 27a^3) : (9a^2) - 10a^3 : (5a)$  với  $a = -8$ .

b)  $(12x^3 - 8x) : 4x - 4x\left(3x + \frac{1}{4}\right)$  với  $x = -3$ .

*Lời giải*

a)  $A = (18a^4 - 27a^3) : (9a^2) - 10a^3 : (5a) = 2a^2 - 3a - 2a^2 = -3a$

Thay  $a = -8$  vào biểu thức  $A$ , ta được  $A = 56$

b)  $B = (12x^3 - 8x) : 4x - 4x\left(3x + \frac{1}{4}\right)$

$$= 3x^2 - 2 - 12x^2 - x = -9x^2 - x - 2$$

Thay  $x = -3$  vào biểu thức  $B$ , ta được:  $B = -81 - (-3) - 2 = -80$

1.53. Làm tính chia.

a)  $A = \left[ (x^2 - 1)^4 + 2(1-x)^3 + 3(x-1)^2 \right] : \left[ -2(x-1)^2 \right].$

b)  $B = 2(x+2y)^3 : (2x+4y).$

c)  $C = \left[ 3(y-x)^5 - 2(x-y)^3 + 3(x-y)^2 \right] : \left[ 6(y-x)^2 \right].$

*Lời giải*

a)  $\left[ (x^2 - 1)^4 + 2(1-x)^3 + 3(x-1)^2 \right] : \left[ -2(x-1)^2 \right]$

$$= \left[ (x-1)^2 (x+1)^2 - 2(x-1)^3 + 3(x-1)^2 \right] : \left[ -2(x-1)^2 \right]$$

$$= -\frac{(x+1)^2}{2} + (x-1) - \frac{3}{2}$$

b)  $2(x+2y)^3 : (2x+4y) = \left[ 2(x+2y)^3 \right] : \left[ 2(x+2y) \right] = (x+2y)^2$

c) Đặt  $u = y - x$ . Ta có:  $x - y = -u$

Khi đó:  $\left[ 3u^5 + 2u^3 + 3u^2 \right] : 6u^2 = \frac{1}{2}u^3 + \frac{1}{3}u + \frac{1}{2}$

Vậy  $\left[ 3(y-x)^5 - 2(x-y)^3 + 3(x-y)^2 \right] : 6(y-x)^2 = \frac{1}{2}(x-y)^3 + \frac{1}{3}(y-x) + \frac{1}{2}.$

## BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG

### A. TRẮC NGHIỆM.

*Chọn phương án đúng trong mỗi câu sau:*

1. Đơn thức  $-2^3 x^2 y z^3$  có
 

<b>A.</b> Hệ số $-2$ , bậc $8$ .	<b>B.</b> Hệ số $-2^3$ , bậc $5$ .
<b>C.</b> Hệ số $-1$ , bậc $9$ .	<b>D.</b> Hệ số $-2^3$ , bậc $6$ .
2. Gọi  $T$  là tổng,  $H$  là hiệu của đa thức  $3x^2y - 2xy + xy$  và  $-2x^2y + 3xy^2 + 1$ , khi đó:
 

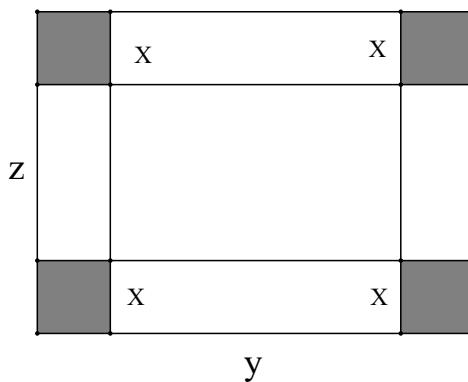
<b>A.</b> $T = x^2y - xy^2 + xy + 1$ và $H = 5x^2y - 5xy^2 + xy + 1$ .	<b>B.</b> $T = x^2y + xy^2 + xy + 1$ và $H = 5x^2y - 5xy^2 + xy - 1$ .
<b>C.</b> $T = x^2y + xy^2 + xy + 1$ và $H = 5x^2y - 5xy^2 - xy - 1$	<b>D.</b> $T = x^2y + xy^2 + xy - 1$ và $H = 5x^2y + 5xy^2 + xy - 1$ .
3. Tích của hai đơn thức  $6x^2yz$  và  $-2y^2z^2$  là đơn thức
 

<b>A.</b> $4x^2y^3z^3$ .	<b>B.</b> $-12x^2y^3z^3$ .	<b>C.</b> $-12x^3y^3z^3$ .	<b>D.</b> $4x^3y^3z^3$ .
--------------------------	----------------------------	----------------------------	--------------------------
4. Khi chia đa thức  $8x^3y^2 - 6x^2y^3$  cho đơn thức  $-2xy$ , ta được kết quả là:
 

<b>A.</b> $-4x^2y + 3xy^2$ .	<b>B.</b> $-4x^2y + 3x^2y$ .
<b>C.</b> $-10x^2y + 4xy^2$ .	<b>D.</b> $-10x^2y + 4x^2y$ .

### B. TỰ LUẬN.

1. Cho biểu thức  $3x^3(x^5 - y^5) + y^5(3x^3 - y^3)$ .
  - a) Rút gọn biểu thức đã cho.
  - b) Tính giá trị của biểu thức đã cho nếu biết  $y^4 = x^4\sqrt{3}$ .
2. Rút gọn biểu thức:  $\frac{1}{4}(2x^2 + y)(x - 2y^2) + \frac{1}{4}(2x^2 - y)(x^2 + 2y^2)$
3. Bạn Thành dung một miếng bìa hình chữ nhật để làm một chiếc hộp (không nắp). Bằng cách cắt bốn hình vuông cạnh  $x$  cm ở bốn góc rồi gấp lại. Biết rằng miếng bìa có chiều dài là  $y$  cm, chiều rộng là  $z$  cm. Tìm đa thức (ba biến  $x, y, z$ ) biểu thị thể tích của chiếc hộp. Xác định bậc của đa thức đó.



4. Biết rằng  $D$  là một đơn thức sao cho  $-2x^3y^4 : D = xy^2$ . Hãy tìm thương của phép chia:  $(10x^5y^2 - 6x^3y^4 + 8x^2y^3) : D$ .
5. Làm phép chia theo hướng dẫn: Đặt  $y = 2x - 5$

$$[8x^3(2x-5)^2 - 6x^2(2x-5)^3 + 10x(2x-5)^2] : 2x(2x-5)^2.$$

**ĐÁP ÁN THAM KHẢO  
BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG**

**A. TRẮC NGHIỆM.**

**Chọn phương án đúng trong mỗi câu sau:**

1. Đơn thức  $-2^3 x^2 yz^3$  có
- A.** Hỗn số  $-2$ , bậc  $8$ .      **B.** Hỗn số  $-2^3$ , bậc  $5$ .
- C.** Hỗn số  $-1$ , bậc  $9$ .      **D.** Hỗn số  $-2^3$ , bậc  $6$ .

*Lời giải*

Chọn **D**.

Ta có  $-2^3 x^2 yz^3$  có hỗn số  $-2^3$ ; bậc của đơn thức là tổng các số mũ của các biến  $x, y, z$  là:  
 $2+1+3=6$  Đơn thức có bậc là  $6$ .

2. Gọi  $T$  là tổng,  $H$  là hiệu của đa thức  $3x^2y - 2xy + xy$  và  $-2x^2y + 3xy^2 + 1$ , khi đó:
- A.**  $T = x^2y - xy^2 + xy + 1$  và  $H = 5x^2y - 5xy^2 + xy + 1$ .
- B.**  $T = x^2y + xy^2 + xy + 1$  và  $H = 5x^2y - 5xy^2 + xy - 1$ .
- C.**  $T = x^2y + xy^2 + xy + 1$  và  $H = 5x^2y - 5xy^2 - xy - 1$
- D.**  $T = x^2y + xy^2 + xy - 1$  và  $H = 5x^2y + 5xy^2 + xy - 1$ .

*Lời giải*

Chọn **B**.

$$T = (3x^2y - 2xy + xy) + (-2x^2y + 3xy^2 + 1) = x^2y + xy^2 + xy + 1.$$

$$H = (3x^2y - 2xy + xy) - (-2x^2y + 3xy^2 + 1) = 5x^2y - 5xy^2 + xy - 1.$$

3. Tích của hai đơn thức  $6x^2yz$  và  $-2y^2z^2$  là đơn thức

- A.**  $4x^2y^3z^3$  .      **B.**  $-12x^2y^3z^3$  .      **C.**  $-12x^3y^3z^3$  .      **D.**  $4x^3y^3z^3$  .

*Lời giải*

Chọn **B**.

4. Khi chia đa thức  $8x^3y^2 - 6x^2y^3$  cho đơn thức  $-2xy$ , ta được kết quả là:

- A.**  $-4x^2y + 3xy^2$  .      **B.**  $-4x^2y + 3x^2y$  .
- C.**  $-10x^2y + 4xy^2$  .      **D.**  $-10x^2y + 4x^2y$  .

*Lời giải*

Chọn **A**.

**B. TỰ LUẬN.**

1. Cho biểu thức  $3x^3(x^5 - y^5) + y^5(3x^3 - y^3)$  .

- a) Rút gọn biểu thức đã cho.  
 b) Tính giá trị của biểu thức đã cho nếu biết  $y^4 = x^4\sqrt{3}$  .

*Lời giải*

a)  $3x^3(x^5 - y^5) + y^5(3x^3 - y^3) = 3x^8 - 3x^3y^5 + 3x^3y^5 - y^8 = 3x^8 - y^8$ .

b) Thay  $y^4 = x^4\sqrt{3}$  vào biểu thức đã rút gọn ở trên, ta có:

$$3x^8 - y^8 = 3x^8 - (y^4)^2$$

$$\Rightarrow 3x^8 - \left(x^4\sqrt{3}\right)^2 = 3x^8 - 3x^8 = 0$$

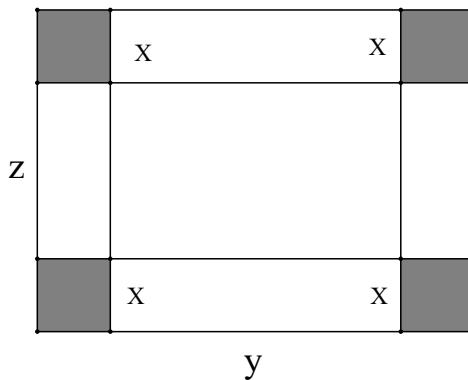
2. Rút gọn biểu thức:  $\frac{1}{4}(2x^2 + y)(x - 2y^2) + \frac{1}{4}(2x^2 - y)(x^2 + 2y^2)$ .

**Lời giải**

Ta có:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4}(2x^2 + y)(x - 2y^2) + \frac{1}{4}(2x^2 - y)(x^2 + 2y^2) \\ &= \frac{1}{4}(2x^3 - 4x^2y^2 + xy - 2y^3) + \frac{1}{4}(2x^3 + 4x^2y^2 - xy - 2y^3) \\ &= \frac{1}{2}x^3 - x^2y^2 + \frac{1}{4}xy - \frac{1}{2}y^3 + \frac{1}{2}x^3 + x^2y^2 - \frac{1}{4}xy - \frac{1}{2}y^3 \\ &= x^3 - y^3. \end{aligned}$$

3. Bạn Thành dung một miếng bìa hình chữ nhật để làm một chiếc hộp (không nắp). Bằng cách cắt bốn hình vuông cạnh  $x$  cm ở bốn góc rồi gấp lại. Biết rằng miếng bìa có chiều dài là  $y$  cm, chiều rộng là  $z$  cm. Tìm đa thức (ba biến  $x, y, z$ ) biểu thị thể tích của chiếc hộp. Xác định bậc của đa thức đó.



**Lời giải**

Chiều dài của đáy hộp:  $y - 2x$ ;

Chiều rộng của đáy hộp:  $z - 2x$ ;

Thể tích của chiếc hộp:  $V = x(y - 2x)(z - 2x)$  ( $\text{cm}^3$ )

Đa thức bậc 3.

4. Biết rằng  $D$  là một đơn thức sao cho  $-2x^3y^4 : D = xy^2$ . Hãy tìm thương của phép chia:  
 $(10x^5y^2 - 6x^3y^4 + 8x^2y^3) : D$ .

**Lời giải**

Ta có:  $-2x^3y^4 : D = xy^2 \Rightarrow D = -2x^2y^2$

Vậy  $(10x^5y^2 - 6x^3y^4 + 8x^2y^3) : (-2x^2y^2) = -5x^3 + 3xy^2 - 4y$ .

5. Làm phép chia theo hướng dẫn: Đặt  $y = 2x - 5$

$$[8x^3(2x - 5)^2 - 6x^2(2x - 5)^3 + 10x(2x - 5)^2] : 2x(2x - 5)^2.$$

**Lời giải**

Đặt  $y = 2x - 5$ , ta có:  $(8x^3y^2 - 6x^2y^3 + 10xy^2) : 2xy^2 = 4x^2 - 3xy + 5$

Vậy kết quả của phép chia là:  $4x^2 - 3x(2x - 5) + 5 = 4x^2 - 6x^2 + 15x + 5 = -2x^2 + 15x + 5$ .

## CHƯƠNG II. HẰNG ĐẲNG THỨC ĐÁNG NHỚ VÀ ỨNG DỤNG

### BÀI 6. HIỆU HAI BÌNH PHƯƠNG.

#### BÌNH PHƯƠNG CỦA MỘT TỔNG HAY MỘT HIỆU

##### PHẦN A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ.

###### 1. Hằng đẳng thức

Hằng đẳng thức là đẳng thức mà hai vế luôn cùng nhận một giá trị khi thay đổi các chữ trong đẳng thức bằng các số tùy ý.

###### 2. Hiệu hai bình phương

Với  $A, B$  là hai biểu thức tùy ý, ta có:  $A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$

###### 3. Bình phương của một tổng

Với  $A, B$  là hai biểu thức tùy ý, ta có:  $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$

###### 4. Bình phương của một hiệu

Với  $A, B$  là hai biểu thức tùy ý, ta có:  $(A - B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$

##### PHẦN B. PHÂN LOẠI CÁC BÀI TẬP

###### I. Hằng đẳng thức hiệu hai bình phương.

**Bài toán 1.** Áp dụng hằng đẳng thức hiệu hai bình phương, thực hiện phép nhân:

- a)  $(a - x)(a + x)$
- b)  $(x - y)(x + y)$
- c)  $(a + b)(a - b)$
- d)  $(2 - x)(-2 - x)$
- e)  $(x - 1)(1 + x)$
- f)  $(1 + x)(1 - x)$

**Hướng dẫn:** Áp dụng hằng đẳng thức  $A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$

###### Lời giải

- a)  $(a - x)(a + x) = a^2 - x^2$
- b)  $(x - y)(x + y) = x^2 - y^2$
- c)  $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$
- d)  $(2 - x)(-2 - x) = -(2 - x)(2 + x) = 2(2^2 - x^2) = x^2 - 4$
- e)  $(x - 1)(1 + x) = (x - 1)(x + 1) = x^2 - 1^2 = x^2 - 1$
- f)  $(1 + x)(1 - x) = 1^2 - x^2 = 1 - x^2$

**Bài toán 2.** Thực hiện phép nhân:

- a)  $(3 - x)(3 + x)(x^2 + 9)$
- b)  $(4a^2 + b^2)(2a + b)(2a - b)$
- c)  $(3x - 2y)(3x + 2y)(9x^2 + 4y^2)$
- d)  $(x^4 + 1)(x^2 + 1)(x - 1)(x + 1)$

###### Lời giải

a)  $(3-x)(3+x)(x^2+9)$   
 $= [(3-x)(3+x)](x^2+9) = (9-x^2)(x^2+9) = (9-x^2)(9+x^2) = 9^2 - (x^2)^2 = 81 - x^4$

b)  $(4a^2+b^2)(2a+b)(2a-b)$   
 $= (4a^2+b^2)[(2a+b)(2a-b)] = (4a^2+b^2)(4a^2-b^2) = (4a^2)^2 - (b^2)^2 = 16a^4 - b^4$

c)  $(3x-2y)(3x+2y)(9x^2+4y^2)$   
 $= [(3x-2y)(3x+2y)][(9x^2+4y^2)] = (9x^2-4y^2)(9x^2+4y^2) = 81x^4 - 16y^4$

d)  $(x^4+1)(x^2+1)(x-1)(x+1) = (x^4+1)(x^2+1)(x^2-1) = (x^4+1)(x^4-1) = x^8 - 1$

**Bài toán 3.** Triển khai thành đa thức:

a)  $(1+a)(1-a)(1+a^2)(1+a^4)$       b)  $(a+1)(a+2)(a-1)(a-2)(a^2+1)(a^2+4)$

#### Lời giải

a)  $(1+a)(1-a)(1+a^2)(1+a^4) = [(1-a^2)(1+a^2)][(1+a^4)] = (1-a^4)(1+a^4) = 1 - a^8$

b)  $(a+1)(a+2)(a-1)(a-2)(a^2+1)(a^2+4)$   
 $= (a^2-1)(a^2+1)(a^2-4)(a^2+4) = (a^4-1)(a^4-16) = a^8 - 17a^4 + 16$

## II. Hằng đẳng thức $(A+B)^2$ ; $(A-B)^2$

**Bài toán 4.** Viết các bình phương của một tổng, một hiệu thành đa thức:

a)  $(x+1)^2$       b)  $(x-3)^2$       c)  $(x^2+y^2)^2$   
d)  $(2x^3+3y^2)^2$       e)  $(10x^2-3xy^2)^2$

**Hướng dẫn:** Ta gọi là khai triển bình phương một nhị thức thành đa thức:  $(A \pm B)^2 = A^2 \pm 2AB + B^2$

#### Lời giải

a)  $(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1.$

b)  $(x-3)^2 = x^2 - 2 \cdot x \cdot 3 + 3^2 = x^2 - 6x + 9.$

c)  $(x^2+y^2)^2 = x^4 + 2x^2y^2 + y^4.$

d)  $(2x^3+3y^2)^2 = (2x^3)^2 + 2 \cdot 2x^3 \cdot 3y^2 + (3y^2)^2 = 4x^6 + 12x^3y^2 + 9y^4.$

e)  $(10x^2-3xy^2)^2 = (10x^2)^2 - 2 \cdot 10x^2 \cdot 3xy^2 + (3xy^2)^2 = 100x^4 - 60x^3y^2 + 9x^2y^4.$

**Chú ý:** Bạn hãy xét bài toán sau:

Viết đa thức dưới dạng bình phương của một tổng hoặc một hiệu:

- $x^2 + 2x + 1$ .
- $9x^2 + 6xy + y^2$ .
- $x^4 + 2x^2 + 1$ .

**Bài toán 5.** Khai triển thành đa thức:

$$\text{a) } (x - 2y)^2. \quad \text{b) } \left(2x^2y + \frac{1}{3}xy^2\right)^2. \quad \text{c) } (-8a^3 + 5a^2)^2. \quad \text{d) } \left(4xy + \frac{1}{2}y^2\right)^2.$$

### Lời giải

$$\text{a) } (x - 2y)^2 = x^2 - 2 \cdot x \cdot 2y + (2y)^2 = x^2 - 4xy + 4y^2.$$

$$\text{b) } \left(2x^2y + \frac{1}{3}xy^2\right)^2 = 4x^4y^2 + \frac{4}{3}x^3y^3 + \frac{1}{9}x^2y^4.$$

$$\text{c) } (-8a^3 + 5a^2)^2 = (5a^2 - 8a^3)^2 = 25a^4 - 80a^5 + 64a^6.$$

$$\text{d) } \left(4xy + \frac{1}{2}y^2\right)^2 = 16x^2y^2 + 4xy^3 + \frac{1}{4}y^4.$$

**Bài toán 6.** Rút gọn biểu thức:

$$\text{a) } A = (x - y)^2 + (x + y)^2. \quad \text{b) } B = (2a + b)^2 - (2a - b)^2.$$

$$\text{c) } C = (x + y)^2 - (x - y)^2. \quad \text{d) } D = (2x - 1)^2 - 2(2x - 3)^2 + 4.$$

**Hướng dẫn:** Khai triển thành các đa thức.

$$\text{a) } A = x^2 - 2xy + y^2 + x^2 + 2xy + y^2 = 2x^2 + 2y^2.$$

$$\text{b) } B = (4a^2 + 4ab + b^2) - (4a^2 - 4ab + b^2)$$

$$= 4a^2 + 4ab + b^2 - 4a^2 + 4ab - b^2 = 8ab.$$

$$\text{Cách khác: } B = [(2a + b) + (2a - b)][(2a + b) - (2a - b)]$$

$$= 4a \cdot 2b = 8ab$$

$$\text{c) } C = (x + y)^2 - (x - y)^2 = (x^2 + 2xy + y^2) - (x^2 - 2xy + y^2) = 4xy$$

$$\text{Cách khác: } C = [(x + y) + (x - y)][(x + y) - (x - y)] = 2x \cdot 2y = 4xy$$

$$\text{d) } D = (2x - 1)^2 - 2(2x - 3)^2 + 4$$

$$= (4x^2 - 4x + 1) - 2(4x^2 - 12x + 9) + 4$$

$$= 4x^2 - 4x + 1 - 8x^2 + 24x - 18 + 4$$

$$= -4x^2 + 20x - 13$$

**Bài toán 7:** Rút gọn biểu thức

$$\text{a) } A = (3x + 2)^2 - 2(x - 1)^2 - 7x^2$$

$$\text{b)} B = 2(x-y)(x+y) + (x+y)^2 + (x-y)^2$$

$$\text{c)} C = (4x^2 + y^2)(2x+y)(2x-y)$$

$$\text{d)} D = (a+2)^2 - (a+2)(a-2)$$

$$\text{e)} E = (3x+4)^2 - (x-4)(x+4) - 10x$$

### Lời giải

$$\text{a)} A = (3x+2)^2 - 2(x-1)^2 - 7x^2$$

$$= 9x^2 + 12x + 4 - 2(x^2 - 2x + 1) - 7x^2$$

$$= 9x^2 + 12x + 4 - 2x^2 + 4x - 2 - 7x^2$$

$$= 16x + 2$$

$$\text{b)} B = 2(x-y)(x+y) + (x+y)^2 + (x-y)^2$$

$$= (x+y)^2 + 2(x-y)(x+y) + (x-y)^2$$

$$= (x+y+x-y)^2 = (2x)^2 = 4x^2$$

$$\text{c)} C = (4x^2 + y^2)(2x+y)(2x-y)$$

$$= (4x^2 + y^2)(4x^2 - y^2)$$

$$= 16x^4 - y^4$$

$$\text{d)} D = (a+2)^2 - (a+2)(a-2)$$

$$= a^2 + 4a + 4 - a^2 + 4$$

$$= 4a + 8$$

$$\text{e)} E = (3x+4)^2 - (x-4)(x+4) - 10x$$

$$= 9x^2 + 24x + 16 - x^2 + 16 - 10x$$

$$= 8x^2 + 14x + 32$$

**Bài toán 8.** Rút gọn biểu thức

$$\text{a)} A = (x-2)(x+2) + (x-3)(x+3) - x(2x+1) - 4$$

$$\text{b)} B = (5a-b+1)(5a+b-1) - 24(a+1)^2 + b^2 - 1$$

$$\text{c)} C = (a+b+c)(a+b-c) + (a+c+b)(a+c-b) + (a+b+c)(a+c-b)$$

### Lời giải

$$\text{a)} A = (x-2)(x+2) + (x-3)(x+3) - x(2x+1) - 4$$

$$= x^2 - 4 + x^2 - 9 - 2x^2 - x - 4$$

$$= -x - 17$$

$$\begin{aligned}
b) \quad B &= (5a-b+1)(5a+b-1) - 24(a+1)^2 + b^2 - 1 \\
&= [5a-(b-1)][5a+(b-1)] - 24(a+1)^2 + b^2 - 1 \\
&= 25a^2 - (b-1)^2 - 24(a^2 + 2a + 1) + b^2 - 1 \\
&= 25a^2 - b^2 + 2b + 1 - 24a^2 - 48a - 24 + b^2 - 1 \\
&= a^2 - 48a + 2b - 26
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c) \quad C &= (a+b+c)(a+b-c) + (a+c+b)(a+c-b) + (a+b+c)(a+c-b) \\
&= [(a+b)^2 - c^2] + [(a+c)^2 - b^2] + [(a+c)^2 - b^2] \\
&= a^2 + 2ab + b^2 - c^2 + a^2 + 2ac + c^2 - b^2 + a^2 + 2ac + c^2 - b^2 \\
&= 3a^2 + 2ab + 4ac + c^2 - b^2
\end{aligned}$$

**Bài toán 9.** Rút gọn và tính giá trị biểu thức

a)  $A = (x+3)^2 + (x-3)(x+3) - 2(x+2)(x-4)$  với  $x = -\frac{1}{2}$

b)  $B = (3x+4)^2 - (x-4)(x+4) - 10x$  với  $x = -\frac{1}{10}$

### Lời giải

$$\begin{aligned}
a) \quad A &= (x+3)^2 + (x-3)(x+3) - 2(x+2)(x-4) \\
&= x^2 + 6x + 9 + x^2 - 9 - 2(x^2 - 4x + 2x - 8) \\
&= x^2 + 6x + 9 + x^2 - 9 - 2x^2 + 8x - 4x + 16 \\
&= 10x + 16
\end{aligned}$$

Thay  $x = -\frac{1}{2}$  vào biểu thức  $A$ , ta được:

$$A = 10 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 16 = 11$$

$$\begin{aligned}
b) \quad B &= (3x+4)^2 - (x-4)(x+4) - 10x \\
&= 9x^2 + 24x + 16 - x^2 + 16 - 10x \\
&= 8x^2 + 14x + 32
\end{aligned}$$

Thay  $x = -\frac{1}{10}$  vào biểu thức  $B$ , ta được:

$$B = 8 \cdot \left(-\frac{1}{10}\right)^2 + 14 \cdot \left(-\frac{1}{10}\right) + 32 = 30,68$$

**Bài toán 10.**

a) Chứng minh rằng  $(7n-2)^2 - (2n-7)^2$  luôn chia hết cho 9 với mọi giá trị nguyên của  $n$

b) Chứng minh rằng hiệu các bình phương của hai số nguyên liên tiếp là một số lẻ.

### Lời giải

a) Ta có:

$$\begin{aligned}(7n-2)^2 - (2n-7)^2 &= (49n^2 - 28n + 4) - (4n^2 - 28n + 49) \\&= 49n^2 - 28n + 4 - 4n^2 + 28n - 49 \\&= 45n^2 - 45. Vì 45 \mid 9 \\&\Rightarrow 45n^2 \mid 9 \text{ và } -45 \mid 9 \\&\Rightarrow (45n^2 - 45) \mid 9 (\forall n \in \mathbb{Z})\end{aligned}$$

b) Hai số nguyên liên tiếp có dạng  $n$  và  $n+1$ ,  $n \in \mathbb{Z}$

$$\text{Vậy } n^2 - (n+1)^2 = n^2 - n^2 - 2n - 1 = -2n - 1$$

Với  $n \in \mathbb{Z} \Rightarrow -2n - 1$  là số lẻ.

**Bài toán 11.** Chứng minh rằng biểu thức sau không phụ thuộc vào giá trị của biến:

- a)  $A = (2x-5)^2 - (2x+5)^2 + 40x - 1$
- b)  $B = (3x-2y)^2 + (3x+2y)^2 - 18x^2 - 8y^2 + 1$
- c)  $C = (2+x)^2 - (2-x)^2 - 8x + 3$

**Hướng dẫn:** Rút gọn biểu thức, ta được kết quả là một hằng số.

### Lời giải

a) Ta có:  $A = (2x-5)^2 - (2x+5)^2 + 40x - 1$

$$= 4x^2 - 20x + 25 - 4x^2 - 20x - 25 + 40x - 1 = -1 \text{ (không đổi)}$$

Vậy  $A$  không phụ thuộc vào biến

b)  $B = (3x-2y)^2 + (3x+2y)^2 - 18x^2 - 8y^2 + 1$

$$= 9x^2 - 12xy + 4y^2 + 9x^2 + 12xy + 4y^2 - 18x^2 - 8y^2 + 1$$
$$= 1 \text{ (không đổi)}$$

Vậy  $B$  không phụ thuộc vào biến

c)  $C = (2+x)^2 - (2-x)^2 - 8x + 3$

$$= (4+4x+x^2) - (4-4x+x^2) - 8x + 3$$
$$= 8x - 8x + 3 = 3 \text{ (không đổi)}$$

Vậy  $C$  không phụ thuộc vào biến  $x$ .

**Bài toán 12.** Chứng minh rằng: Nếu  $(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) = (ax + by)^2$  thì  $ay - bx = 0$

**Hướng dẫn:** Khai triển thành đa thức cả hai vế và rút gọn.

### Lời giải

$$\begin{aligned}
& \text{Ta có } (a^2 + b^2)(x^2 + y^2) = (ax + by)^2 \\
& \Rightarrow a^2x^2 + a^2y^2 + b^2x^2 + b^2y^2 = a^2x^2 + 2abxy + b^2y^2 \\
& \Rightarrow a^2y^2 - 2abxy + b^2x^2 = 0 \\
& \Rightarrow (ay - bx)^2 = 0 \quad (\text{đpcm})
\end{aligned}$$

### III. Tìm giá trị của biến

**Bài toán 13.** Tìm  $x$ , biết:

- a)  $16x^2 - (4x - 5)^2 = 15$
- b)  $(2x + 3)^2 - 4(x - 1)(x + 1) = 49$
- c)  $(2x + 1)(1 - 2x) + (1 - 2x)^2 = 18$ .

**Hướng dẫn:** Khai triển và rút gọn.

#### Lời giải

$$\begin{aligned}
& \text{a) Ta có: } 16x^2 - (4x - 5)^2 = 15 \\
& \Rightarrow 16x^2 - (16x^2 - 40x + 25) = 15 \\
& \Rightarrow 16x^2 - 16x^2 + 40x - 25 = 15 \\
& \Rightarrow 40x = 15 + 25 \\
& \Rightarrow 40x = 40 \\
& \Rightarrow x = 1 \\
& \text{b) Ta có: } (2x + 3)^2 - 4(x - 1)(x + 1) = 49 \\
& \Rightarrow 4x^2 + 12x + 9 - 4(x^2 - 1) = 49 \\
& \Rightarrow 4x^2 + 12x + 9 - 4x^2 + 4 = 49 \\
& \Rightarrow 12x = 36 \\
& \Rightarrow x = 3 \\
& \text{c) Ta có: } (2x + 1)(1 - 2x) + (1 - 2x)^2 = 18 \\
& \Rightarrow (1 - 4x^2) + (1 - 4x + 4x^2) = 18 \\
& \Rightarrow 1 - 4x^2 + 1 - 4x + 4x^2 = 18 \\
& \Rightarrow -4x = 18 - 2 \\
& \Rightarrow -4x = 16 \\
& \Rightarrow x = -4
\end{aligned}$$

**Bài toán 14.** Tìm  $x, y$  biết:

$$\text{a) } (3x - 1)^2 - (3x - 2)^2 = 0 \qquad \text{b) } x^2 + y^2 - 2x + 4y + 5 = 0$$

## Hướng dẫn:

a) Khai triển và rút gọn

b) Đưa về dạng  $A^2 + B^2 = 0$

### Lời giải

a) Ta có:  $(3x-1)^2 - (3x-2)^2 = 0$

$$\Rightarrow (9x^2 - 6x + 1) - (9x^2 - 12x + 4) = 0$$

$$\Rightarrow 9x^2 - 6x + 1 - 9x^2 + 12x - 4 = 0$$

$$\Rightarrow 6x - 3 = 0$$

$$\Rightarrow 6x = 3$$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

b) Ta có:  $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 5 = 0$

$$\Rightarrow (x^2 - 2x + 1) + (y^2 + 4y + 4) = 0$$

$$\Rightarrow (x-1)^2 + (y+2)^2 = 0$$

Vì  $(x-1)^2 \geq 0$  với mọi x;  $(y+2)^2 \geq 0$  với mọi y

$$\Rightarrow (x-1)^2 + (y+2)^2 \geq 0$$

Dấu “=” xảy ra khi  $x-1=0$  và  $y+2=0$

Suy ra  $x=1$  và  $y=-2$

Chú ý: Bạn cần nhớ hai bài toán trên có dạng  $A^2 - B^2 = 0$ ;  $A^2 + B^2 = 0$  hoặc  $(A^2 = 0)$  ta xét bài toán tương tự sau:

1. Tìm x, biết:  $x^2 + 2x + 1 = 0$

2. Tìm x, biết:  $4x^2 + 4x + 1 = 0$

3. Tìm x, y biết:  $x^2 + 4y^2 - 2x + 4y + 2 = 0$

4. Tìm x, biết:  $(2x+1)^2 - (1-2x)^2 = 0$ .

### Lời giải

1. Ta có  $x^2 + 2x + 1 = 0$

$$\Rightarrow (x+1)^2 = 0$$

$$\Rightarrow x+1=0$$

$$\Rightarrow x = -1$$

2. Ta có  $4x^2 + 4x + 1 = 0$

$$\Rightarrow (2x+1)^2 = 0$$

$$\Rightarrow 2x+1=0$$

$$\Rightarrow x = -\frac{1}{2}$$

3. Ta có  $x^2 + 4y^2 - 2x + 4y + 2 = 0$

$$\Rightarrow (x-1)^2 + (2y+1)^2 = 0$$

Vì  $(x-1)^2 \geq 0$  với mọi x;  $(2y+1)^2 \geq 0$  với mọi y

$$\Rightarrow (x-1)^2 + (2y+1)^2 \geq 0$$

Dấu “=” xảy ra khi  $x-1=0$  và  $2y+1=0$

$$\text{Suy ra } x=1 \text{ và } y=-\frac{1}{2}$$

4. Ta có  $(2x+1)^2 - (1-2x)^2 = 0$ .

$$\Rightarrow (2x+1-1+2x)(2x+1+1-2x) = 0$$

$$\Rightarrow 8x = 0$$

$$\Rightarrow x = 0$$

## VI. Chứng minh biểu thức luôn dương; âm hoặc không âm

**Bài toán 15.** Chứng minh rằng biểu thức  $A = x^2 - 6x + 10$  luôn nhận giá trị dương, với mọi giá trị của x.

**Hướng dẫn:** Biến đổi A về dạng  $(x-3)^2 + 1$ .

### Lời giải

Ta có:  $A = x^2 - 6x + 9 + 1 = (x-3)^2 + 1$

Vì  $(x-3)^2 \geq 0$  với mọi x  $\Rightarrow (x-3)^2 + 1 > 0$ , với mọi x

Vậy  $A > 0$ , với mọi x.

Từ kết quả trên, ta còn có bài toán

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$A = x^2 - 6x + 10$$

Hướng dẫn:  $A = (x-3)^2 + 1 \geq 1$

Dấu “=” xảy ra khi  $(x-3)^2 = 0 \Rightarrow x-3=0 \Rightarrow x=3$

Vậy giá trị nhỏ nhất của A bằng 1 khi x=3.

**Bài toán 16.** Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

a)  $P = x^2 - 2x + 3$

b)  $Q = x^2 - 4x + 5$

### Lời giải

a) Ta có:  $P = x^2 - 2x + 1 + 2 = (x-1)^2 + 2 \geq 2$  với mọi x

Vì  $(x-1)^2 \geq 0$ , với mọi x.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng 2.

Dấu " $=$ " xảy ra khi  $(x-1)^2 = 0 \Rightarrow x=1$

b) Ta có:  $Q = x^2 - 4x + 4 + 1 = (x-2)^2 + 1 \geq 1$

Vậy giá trị nhỏ nhất của  $Q$  bằng 1.

Dấu " $=$ " xảy ra khi  $(x-2)^2 = 0 \Rightarrow x=2$ .

**Bài toán 17.** Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:  $M = -x^2 + 6x + 1$

**Hướng dẫn:** Biến đổi  $M$  về dạng  $- (x^2 - 6x + 9) + 9 + 1 = 10 - (x-3)^2$

### Lời giải

Ta có:  $M = -x^2 + 6x + 1$

$$= 10 - (x^2 - 6x + 9) = 10 - (x-3)^2$$

Vì  $(x-3)^2 \geq 0 \Rightarrow -(x-3)^2 \leq 0$ , với mọi  $x$ .

$$\Rightarrow M = 10 - (x-3)^2 \leq 10$$

Vậy giá trị lớn nhất của  $M$  bằng 10.

Dấu " $=$ " xảy ra khi  $(x-3)^2 = 0 \Rightarrow x-3=0 \Rightarrow x=3$ .

**Bài toán khác:**

1. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

a)  $P = -x^2 + 4x + 3$       b)  $Q = -x^2 + x$       c)  $T = -2x^2 + 2x + 5$

**Hướng dẫn:**

a)  $P = -x^2 + 4x - 4 + 4 + 3 = 7 - (x-2)^2$

b)  $Q = -x^2 + x = -x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{4} - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2$

c)  $T = -2x^2 + 2x + 5 = -2\left(x^2 - 2 \cdot x \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{2} + 5 = \frac{11}{2} - 2\left(x - \frac{1}{2}\right)^2$

2. Chứng tỏ  $T = -x^2 + 2x - 5 < 0$ , với mọi  $x$ .

**Hướng dẫn:**  $T = -x^2 + 2x - 1 - 4 = -4 - (x-1)^2 < -4 < 0$

**Bài toán 18.** Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:  $P = x^2 + y^2 - 4x + 2y + 5$

**Hướng dẫn:** Biến đổi về dạng:  $P = (x-2)^2 + (y+1)^2$ .

### Lời giải

Ta có:  $P = x^2 + y^2 - 4x + 2y + 5 = (x^2 - 4x + 4) + (y^2 + 2y + 1) = (x-2)^2 + (y+1)^2$

Vì  $(x-2)^2 \geq 0$ , với mọi  $x$ ;  $(y+1)^2 \geq 0$  với mọi  $y$ .

$\Rightarrow P \geq 0$ , với mọi  $x, y$ .

Vậy giá trị nhỏ nhất của  $P$  bằng 0.

Dấu " $=$ " xảy ra khi  $x-2=0$  và  $y+1=0$

$$\Rightarrow x=2 \text{ và } y=-1.$$

### Bài toán khác:

1. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:  $A = x^2 + 4y^2 - 2x + 4y + 5$

**Hướng dẫn:**  $A = (x-1)^2 + (2y+1)^2 + 3 \geq 3$

2. Cho  $x^2 + y^2 + z^2 = xy + yz + zx$ . Chứng minh  $x = y = z$ .

### Hướng dẫn:

$$x^2 + y^2 + z^2 = xy + yz + zx$$

$$\Rightarrow 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 = 2xy - 2yz - 2zx = 0$$

$$\Rightarrow (x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2 = 0$$

$$\Rightarrow x-y=0; y-z=0 \text{ và } z-x=0$$

$$\Rightarrow x=y=z.$$

## PHẦN C. BÀI TẬP

**Bài 2.1.** Rút gọn biểu thức:

a)  $A = (x+1)^2 - (x+1)(x-1)$

b)  $B = (x-y)^2 - (x+y)^2 + 4xy$

c)  $C = (2x+3)(2x-3) - (2x-3)^2$

**Bài 2.2.** Rút gọn và tính giá trị của biểu thức:

a)  $P = (x+1)^2 - (2x-1)^2 + 3(x-2)(x+2)$ , với  $x=1$ .

b)  $Q = (x-3)(x+3) + (x-2)^2 - 2x(x-4)$ , với  $x=-1$ .

**Bài 2.3.** Tìm  $x$ , biết:

a)  $2(x+1)^2 - (x-3)(x+3) - (x-4)^2 = 0$ .

b)  $(x-5)^2 - x(x-4) = 9$ .

c)  $(x-5)^2 + (x-4)(1-x) = 0$ .

**Bài 2.4.** Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

a)  $A = x^2 - 4x + \frac{9}{2}$

b)  $B = 2x^2 + 8x + 10$

c)  $C = x^2 + y^2 - 2xy + 1$

d)  $D = x^2 + y^2 - 2x - 4y + 6$ .

**Bài 2.5.** Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$\text{a) } P = -x^2 + 4x + 3. \quad \text{b) } Q = -x^2 + x - 1. \quad \text{c) } T = -x^2 - y^2 + 4x + 2y - 6.$$

**Bài 2.6.** Tính:

$$\text{a) } T = (2+1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)(2^{16}+1).$$

$$\text{b) } U = 100^2 - 99^2 + 98^2 - 97^2 + \dots + 4^2 - 3^2 + 2^2 - 1^2.$$

**Bài 2.7.** Chứng minh rằng:

$$\text{a) } (a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + bc.$$

$$\text{b) Nếu } (x+y+z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 \text{ thì } xy + yz + zx = 0$$

☞ HẾT ☞

## HƯỚNG DẪN GIẢI BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA

### Bài 2.1.

a)  $A = (x + 1)^2 - (x + 1)(x - 1) = (x^2 + 2x + 1) - (x^2 - 1)$   
 $= x^2 + 2x + 1 - x^2 + 1 = 2x + 2$

b)  $B = (x - y)^2 - (x + y)^2 + 4xy$   
 $= x^2 - 2xy + y^2 - x^2 - 2xy - y^2 + 4xy = 0$

a)  $C = (2x + 3)(2x - 3) - (2x - 3)^2 = (4x^2 - 12x + 9)$   
 $= 4x^2 - 9 - 4x^2 + 12x - 9 = 12x - 18.$

### Bài 2.2.

a)  $P = (x + 1)^2 - (2x - 1)^2 + 3(x - 2)(x + 2)$   
 $= x^2 + 2x + 1 - 4x^2 + 4x - 1 + 3x^2 - 12$   
 $= 6x - 12$

Thay  $x = 1$  vào biểu thức  $P$ , ta có:

$$P = 6 \cdot 1 - 12 = -6.$$

b)  $Q = (x - 3)(x + 3) + (x - 2)^2 - 2x(x - 4)$   
 $= x^2 - 9 + x^2 - 4x + 4 - 2x^2 + 8x$   
 $= 4x - 5$

Thay  $x = -1$  vào biểu thức  $Q$ , ta có:

$$Q = 4(-1) - 5 = -9$$

### Bài 2.3.

a) Ta có:  $2(x + 1)^2 - (x - 3)(x + 3) - (x - 4)^2 = 0$   
 $\Rightarrow 2x^2 + 4x + 2 - x^2 + 9 - x^2 + 8x - 16 = 0$   
 $\Rightarrow 12x = 5 \Rightarrow x = \frac{5}{12}$

b) Ta có:  $(x - 5)^2 - x(x - 4) = 9$   
 $\Rightarrow x^2 - 10x + 25 - x^2 + 4x = 9$   
 $\Rightarrow -6x = -16 \Rightarrow x = \frac{8}{3}.$

c) Ta có:  $(x - 5)^2 + (x - 4)(1 - x) = 0$   
 $\Rightarrow x^2 - 10x + 25 + x - x^2 - 4 + 4x = 0$   
 $\Rightarrow -5x = -21 \Rightarrow x = \frac{21}{5}$

### Bài 2.4.

a)  $A = x^2 - 4x + \frac{9}{2} = x^2 - 4x + 4 + \frac{9}{2} - 4$   
 $= (x - 2)^2 + \frac{1}{2} \geq \frac{1}{2}.$  Vì  $(x - 2)^2 \geq 0$  với mọi  $x.$

Vậy giá trị nhỏ nhất của  $A$  bằng  $\frac{1}{2}$ .

Dấu “=” xảy ra khi  $x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$ .

$$\begin{aligned} b) B &= 2x^2 + 8x + 10 = 2(x^2 + 4x + 4) - 8 + 10 \\ &= 2(x+2)^2 + 2 \geq 2. \text{ Vì } (x+2)^2 \geq 0 \text{ với mọi } x. \end{aligned}$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của  $B$  bằng 2. Dấu “=” xảy ra khi  $x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2$ .

$$\begin{aligned} c) C &= x^2 + y^2 - 2xy + 1 \\ &= (x-y)^2 + 1 \geq 1, \text{ vì } (x-y)^2 \geq 0 \text{ với mọi } x, y. \end{aligned}$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của  $C$  bằng 1

Dấu “=” xảy ra khi  $x - y = 0 \Rightarrow x = y$ .

$$\begin{aligned} d) D &= x^2 + y^2 - 2x - 4y + 6 \\ &= (x^2 - 2x + 1) + (y^2 - 4y + 4) + 1 \\ &= (x-1)^2 + (y-2)^2 + 1 \geq 1, \text{ vì } (x-1)^2 \geq 0 \text{ và } (y-2)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của  $D$  bằng 1

Dấu “=” xảy ra khi  $x - 1 = 0$  và  $y - 2 = 0 \Rightarrow x = 1$  và  $y = 2$ .

### Bài 2.5.

$$\begin{aligned} a) P &= x^2 + 4x + 3 = -(x^2 - 4x) + 3 = -(x^2 - 4x + 4 - 4) + 3 \\ &= 7 - (x-2)^2 \leq 7; \text{ vì } (x-2)^2 \geq 0, \text{ với mọi } x. \end{aligned}$$

Vậy giá trị lớn nhất của  $P$  bằng 7.

Dấu “=” xảy ra khi  $x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$

$$\begin{aligned} b) Q &= x^2 + x - 1 = -(x^2 - x) - 1 = -\left(x^2 - 2.x.\frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\right) - 1 \\ &= -\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} - 1 = \left(-\frac{3}{4}\right) - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \leq -\frac{3}{4} \end{aligned}$$

Vậy giá trị lớn nhất của  $Q$  bằng  $-\frac{3}{4}$ .

$$\begin{aligned} c) T &= -x^2 - y^2 + 4x + 2y - 6 = -x^2 + 4x - 4 - y^2 + 2y - 1 - 1. \\ &= -(x-2)^2 - (y-1)^2 - 1 \leq -1 \end{aligned}$$

Vậy giá trị lớn nhất của  $T$  bằng -1.

Dấu “=” xảy ra khi  $x - 2 = 0$  và  $y - 1 = 0 \Rightarrow x = 2$  và  $y = 1$ .

### Bài 2.6.

$$\begin{aligned}
a) T &= (2+1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)(2^{16}+1) \\
&= (2-1)(2+1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)(2^{16}+1) \\
&= (2^2-1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)(2^{16}+1) \\
&= (2^4-1)(2^4+1)(2^8+1)(2^{16}+1) \\
&= (2^8-1)(2^8+1)(2^{16}+1) \\
&= (2^{16}-1)(2^{16}+1) = 2^{32}-1
\end{aligned}$$

Tương tự tính  $(3+1)(3^2+1)(3^4+1)(3^8+1)$

$$\begin{aligned}
b) U &= 100^2 - 99^2 + 98^2 - 97^2 + \dots + 4^2 - 3^2 + 2^2 - 1^2 \\
&= (100^2 - 99^2) + (98^2 - 97^2) + \dots + (4^2 - 3^2) + (2^2 - 1^2) \\
&= (100+99) + (98+97) + \dots + (4+3) + (2+1) \\
&= \frac{(100+1)100}{2} = 5050.
\end{aligned}$$

### Bài 2.7.

$$\begin{aligned}
a) \text{Ta có: } (a+b+c)^2 &= [(a+b)+c]^2 \\
&= (a+b)^2 + 2(a+b)c + c^2 \\
&= a^2 + 2ab + b^2 + 2ac + 2bc + c^2 \\
&= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc \text{ (đpcm).}
\end{aligned}$$

*Quy tắc:* Bình phương một đa thức bằng tổng các bình phương của mỗi số hạng cộng hai lần các tích của mỗi số hạng với từng số hạng đứng sau nó.

$$\begin{aligned}
\text{Chẳng hạn: } (a-b+c)^2 &= a^2 + (-b)^2 + c^2 + 2a(-b) + 2ac + 2(-b)c \\
&= a^2 + b^2 + c^2 - 2ab + 2ac - 2bc, \text{ v.v..}
\end{aligned}$$

b) Áp dụng hằng đẳng thức trên:

$$\begin{aligned}
(a+b+c)^2 &= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac \\
\Rightarrow (x+y+z)^2 &= x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + zx)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Vì } (x+y+z)^2 &= x^2 + y^2 + z^2 \\
\Rightarrow (x+y+z)^2 &= x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + zx) \\
\Rightarrow xy + yz + zx &= 0
\end{aligned}$$

$$c) (a+b+c)^2 + (a-b-c)^2 + (2c-b)^2$$

$$\begin{aligned}
&= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca + a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2ac + 2bc + 4c^2 - 4bc + b^2 \\
&= 2a^2 + 3b^2 + 6c^2 \text{ (dpcm).}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\text{d) N\'{e}u } (x^2 + y^2 + z^2)(a^2 + b^2 + c^2) = (ax + by + cx)^2 \\
&\Rightarrow a^2x^2 + a^2y^2 + a^2z^2 + b^2x^2 + b^2y^2 + b^2z^2 + c^2x^2 + c^2y^2 + c^2z^2 \\
&= a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2 + 2axby + 2bycz + 2axcz \\
&\Rightarrow a^2y^2 + a^2z^2 + b^2x^2 + b^2y^2 + b^2z^2 + c^2x^2 + c^2y^2 - 2axby - 2axcz - 2bycz = 0 \\
&\Rightarrow (a^2y^2 - 2axby + b^2x^2) + (b^2y^2 + a^2z^2 - 2axcz + c^2x^2) + (b^2z^2 - 2bycz + c^2y^2) = 0 \\
&\Rightarrow (ay - bx)^2 + (az - cx)^2 + (bz - cy)^2 = 0 \\
&\Rightarrow ay - bx = az - cx = bz - cy = 0 \\
&\Rightarrow \frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z} \text{ (dpcm)}
\end{aligned}$$

**↔ HET ↔**

## BÀI 7. LẬP PHƯƠNG CỦA MỘT TỔNG HAY MỘT HIỆU

### A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

#### 1. Lập phương của một tổng

Với  $A, B$  là hai biểu thức tùy ý, ta có:  $(A + B)^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3$

#### 2. Lập phương của một hiệu

Với  $A, B$  là hai biểu thức tùy ý, ta có:  $(A - B)^3 = A^3 - 3A^2B + 3AB^2 - B^3$

### B. PHÂN LOẠI CÁC BÀI TẬP

#### I. Khai triển thành đa thức

**Bài toán 1.** Viết dưới dạng một đa thức:

- a)  $(x+1)^3$       b)  $(2x-y)^3$       c)  $(2x^2+3y)^3$   
d)  $(x-3y)^3$

**Hướng dẫn:** Áp dụng các hằng đẳng thức nêu trên.

#### Lời giải

a) Ta có:  $(x+1)^3 = x^3 + 3.x^2.1 + 3.x.1^2 + 1^3$

$$= x^3 + 3x^2 + 3x + 1$$

b) Ta có:  $(2x-y)^3 = (2x)^3 - 3.(2x)^2.y + 3.2x.y^2 - y^3$   
 $= 8x^3 - 12x^2y + 6xy^2 - y^3$

c) Ta có:  $(2x^2+3y)^3 = (2x^2)^3 + 3.(2x^2)^2.3y + 3.2x^2.(3y)^2 + (3y)^3$   
 $= 8x^6 + 36x^4y + 54x^2y^2 + 27y^3$

d) Ta có:  $(x-3y)^3 = x^3 - 3.x^2.3y + 3.x.(3y)^2 - (3y)^3$   
 $= x^3 - 9x^2y + 27xy^2 - 27y^3$

**Bài toán 2.** Khai triển thành đa thức:

- a)  $(x^4 - y^2)^3$       b)  $(3p^2 - 2q^3)^3$       c)  $(2x^5 - 3y^3)^3$

**Hướng dẫn:** Áp dụng các hằng đẳng thức trên.

#### Lời giải

a) Ta có:  $(x^4 - y^2)^3 = (x^4)^3 - 3(x^4)^2 y^2 + 3x^4 (y^2)^2 - (y^2)^3$   
 $= x^{12} - 3x^8y^2 + 3x^4y^4 - y^6$ .

b) Ta có:  $(3p^2 - 2q^3)^3 = (3p^2)^3 - 3(3p^2)^2(2q^3) + 3(3p^2)(2q^3)^2 - (2q^3)^3$   
 $= 27p^6 - 54p^4q^3 + 36p^2q^6 - 8q^9$ .

c) Ta có:  $(2x^5 - 3y^3)^3 = (2x^5)^3 - 3 \cdot (2x^5)^2 (3y^3) + 3(2x^5)(3y^3)^2 - (3y^3)^3$   
 $= 8x^{15} - 36x^{10}y^3 + 54x^5y^6 - 27y^9$

**Bài toán 3.** Viết đa thức sau thành lập phương của một nhị thức:

- a)  $A = 8x^3 - 12x^2 + 6x - 1$       b)  $B = x^3 + 9x^2 + 27x + 27$   
 c)  $C = x^{12} - 3x^8y^2 + 3x^4y^4 - y^6$       d)  $D = 27p^3 + 27p^2q + 9pq^2 + q^3$   
 e)  $E = 8x^3 - 60x^2y + 150xy^2 - 125y^3$

**Hướng dẫn:**  $a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3 = (a \pm b)^3$ .

### Lời giải

a) Ta có:  $A = 8x^3 - 12x^2 + 6x - 1$

$$= (2x)^3 - 3(2x)^2 \cdot 1 + 3 \cdot (2x) \cdot 1^2 - (1)^3$$
 $= (2x - 1)^3$

b) Ta có:  $B = x^3 + 9x^2 + 27x + 27$

$= (x + 3)^3$

c) Ta có:  $C = x^{12} - 3x^8y^2 + 3x^4y^4 - y^6$

$$= (x^4)^3 - 3(x^4)^2(y^2) + 3(x^4)(y^2)^2 - (y^2)^3$$
 $= (x^4 - y^2)^3$

d) Ta có:  $D = 27p^3 + 27p^2q + 9pq^2 + q^3 = (3p + q)^3$

e) Ta có:  $E = 8x^3 - 60x^2y + 150xy^2 - 125y^3 = (2x - 5y)^3$

### III. Rút gọn biểu thức

**Bài toán 4.** Rút gọn biểu thức.

a)  $A = (x - 3)^3 - (x + 3)^3$

b)  $B = (x + 2)^3 - (x - 2)^3 - 12x^2$

c)  $C = (x + 2)^3 - (x + 6)(x^2 + 12) + 64$

**Hướng dẫn:** Khai triển thành đa thức và rút gọn

a) Ta có:  $A = (x - 3)^3 - (x + 3)^3$

$$= (x^3 - 9x^2 + 27x - 27) - (x^3 + 9x^2 + 27x + 27)$$
 $= x^3 - 9x^2 + 27x - 27 - x^3 - 9x^2 - 27x - 27$ 
 $= -18x^2 - 54$

b) Ta có:  $B = (x+2)^3 - (x-2)^3 - 12x^2$

$$\begin{aligned} &= (x^3 + 6x^2 + 12x + 8) - (x^3 - 6x^2 + 12x - 8) - 12x^2 \\ &= x^3 + 6x^2 + 12x + 8 - x^3 + 6x^2 - 12x + 8 - 12x^2 \\ &= 16 \end{aligned}$$

c) Ta có:  $C = (x+2)^3 - (x+6)(x^2 + 12) + 64$

$$\begin{aligned} &= (x^3 + 6x^2 + 12x + 8) - (x^3 + 12x + 6x^2 + 72) + 64 \\ &= x^3 + 6x^2 + 12x + 8 - x^3 - 12x - 6x^2 - 72 + 64 = 0 \end{aligned}$$

**Bài toán 5.** Chứng minh rằng biểu thức sau không phụ thuộc vào  $x$ .

$$(4x-1)^3 - (4x-3)(16x^2 + 3)$$

**Hướng dẫn:** Rút gọn biểu thức ta được kết quả là một số không đổi

### Lời giải

Ta có:  $(4x-1)^3 - (4x-3)(16x^2 + 3)$

$$\begin{aligned} &= (64x^3 - 48x^2 + 12x - 1) - (64x^2 + 12x - 48x^2 - 9) \\ &= 64x^3 - 48x^2 + 12x - 1 - 64x^2 - 12x + 48x^2 + 9 \\ &= 8 \end{aligned}$$

Bài toán tương tự với biểu thức

a)  $A = (x-1)^3 - x^3 + 3x^2 - 3x - 1$

b)  $B = (-x-3)^3 + (x+9)(x^2 + 27)$  ta có:  $(-x-3)^2 = -(x+3)^3$

$$C = (x-1)^3 - (x+1)^3 + 6(x+1)(x-1)$$

## IV. Chứng minh một đẳng thức

**Bài toán 6.** Chứng minh rằng:  $(a+b)^3 - 3ab(a+b) = a^3 + b^3$

**Áp dụng:** Tính  $x^3 + y^3$  biết  $x+y=3$ ;  $xy=2$ .

### Lời giải

- Ta có:  $(a+b)^3 - 3ab(a+b) = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 - 3a^2b - 3ab^2$   
 $= a^3 + b^3$

Từ đẳng thức trên ta có  $x^3 + y^3 = (x+y)^3 - 3xy(x+y)$

Thay  $x+y=3$ ;  $xy=2$  ta được:

$$3^3 - 3 \cdot 2 \cdot 3 = x^3 + y^3 \Rightarrow x^3 + y^3 = 9$$

Bài toán tương tự:  $(a-b)^3 + 3ab(a-b) = a^3 - b^3$

**Bài toán 7.** Cho  $x+y=1$ . Chứng minh rằng  $x^3+y^3=1-3xy$

*Hướng dẫn:* Từ  $x+y=1 \Rightarrow y=1-x$ .

Thay  $y$  vào hai vế và rút gọn

### Lời giải

Ta có:  $x+y=1 \Rightarrow y=1-x$

Thay vào biểu thức  $x^3+y^3$  ta được

$$x^3+(1-x)^3=x^3+1-3x+3x^2-x^3=1-3x+3x^2$$

Lại thay  $y=1-x$  vào vế phải ta được

$$1-3xy=1-3x(1-x)=1-3x+3x^2$$

Từ hai kết quả trên ta có  $x^3+y^3=1-3xy$

Bạn hãy giải thích bài toán sau:

1. Cho  $x+y=1$ . Tính  $x^3+y^3+3xy$

2. Cho  $x-y=1$ . Chứng minh rằng  $x^3-y^3=1+3xy$  (hay có thể viết  $x^3-y^3-3xy=1$ )

**Bài toán 8.** Cho  $a+b+c=0$ . Chứng minh rằng  $a^3+b^3+c^3=3abc$

*Hướng dẫn:* Từ giả thiết  $a+b+c=0 \Rightarrow c=-a-b$ . Thay  $c$  vào cả hai vế của đẳng thức cần chứng minh và rút gọn, ta được hai kết quả như nhau.

### Lời giải

Ta có  $a+b+c=0 \Rightarrow c=-a-b$

Thay  $c$  vào vế trái ta có:

$$\begin{aligned} a^3+b^3+(-a-b)^3 &= a^3+b^3-(a+b)^3 \\ &= a^3+b^3-(a^3+3a^2b+3ab^2+b^3) \\ &= a^3+b^3-a^3-3a^2b-3ab^2-b^3 \\ &= -3a^2b-3ab^2 \end{aligned}$$

Thay  $c$  vào vế phải ta có

$$3abc=3ab(-a-b)$$

$$= -3a^2b-3ab^2$$

Từ hai kết quả trên ta có  $a^3+b^3+c^3=3abc$  (dpcm)

**Nhận xét:** Cho  $c=1$  hoặc  $c=-1$  ta có kết quả như bài 8 (hoặc thay  $a,b,c$  bởi các chữ số khác).

## V. Tính giá trị của biến

**Bài toán 9:** Tìm  $x$  biết:

- a)  $x^3 - 6x^2 + 12x - 8 = 0$
- b)  $8x^3 - 12x^2 + 6x - 1 = 0$
- c)  $x^3 + 9x^2 + 27x + 27 = 0$

*Hướng dẫn:* Viết các đa thức ở vế trái thành  $(a \pm b)^3$

**Lời giải**

a) Ta có  $x^3 - 6x^2 + 12x - 8 = (x - 2)^3 = 0$

$$\Rightarrow x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$$

b) Ta có  $8x^3 - 12x^2 + 6x - 1 = (2x - 1)^3 = 0$

$$\Rightarrow 2x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

d) Ta có  $x^3 + 9x^2 + 27x + 27 = (x + 3)^3 = 0$

$$\Rightarrow x + 3 = 0 \Rightarrow x = -3$$

**Bài toán 10:** Tìm  $x$  biết

a)  $(x - 2)^3 + 6(x + 1)^2 - x^3 + 12 = 0$

b)  $(x - 1)^3 + 3x(x - 4) + 2 = x^3$

**Lời giải**

a) Ta có  $(x - 2)^3 + 6(x + 1)^2 - x^3 + 12 = 0$

$$\Rightarrow x^3 - 6x^2 + 12x - 8 + 6(x^2 + 2x + 1) - x^3 + 12 = 0$$

$$\Rightarrow x^3 - 6x^2 + 12x - 8 + 6x^2 + 12x + 6 - x^3 + 12 = 0$$

$$\Rightarrow 24x + 10 = 0$$

$$\Rightarrow x = -\frac{10}{24} \Rightarrow x = -\frac{5}{12}$$

b) Ta có:  $(x - 1)^3 + 3x(x - 4) + 2 = x^3$

$$\Rightarrow x^3 - 3x^2 + 3x - 1 + 3x^2 - 12x + 2 = x^3$$

$$\Rightarrow -9x + 1 = 0$$

$$\Rightarrow -9x = -1 \Rightarrow x = \frac{1}{9}$$

**Bổ sung**

**NHỊ THỨC NEWTON**  $(a \pm b)^n$

Với  $n = 2: (a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$

Với  $n = 3: (a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$

Với  $n=4$ :  $(a \pm b)^4 = a^4 \pm 4a^3b + 6a^2b^2 \pm 4ab^3 + b^4$

Với  $n=5$ :  $(a+b)^5 = a^5 \pm 5a^4b + 10a^3b^2 \pm 10a^2b^3 + 5ab^4 \pm b^5$

Các hệ số của các hạng tử được viết trong tam giác Pascal sau đây

$n=0$  1

$n=1$  1 1

$n=2$  1 2 1

$n=3$  1 3 3 1

$n=4$  1 4 6 4 1

$n=5$  1 5 10 10 5 1

.....

- Số mũ của a giảm dần, của b tăng dần
- Nếu khai triển  $(a-b)^n$  thì dấu của các hạng tử “ dấu + hoặc – “ đan xen với nhau.
- Mỗi số ở dòng dưới được suy ra từ dòng trên (từ hai số trên hai cạnh bên). Ví dụ  $4+6=10$

Chẳng hạn:  $(a-1)^5 = a^5 - 5a^4 + 10a^3 - 10a^2 + 5a - 1$

$$(1-b)^6 = 1 - 6b + 15b^2 - 20b^3 + 15b^4 - 6b^5 + b^6$$

## C. BÀI TẬP

2.9. Tính giá trị của biểu thức

a)  $A = (x-2)(x+2)(x+3) - (x+1)^3$  với  $x=2$

b)  $B = (x+2)^3 - (x-2)^3 - 12x^2 - x$  với  $x=-2$

c)  $C = 8x^3 - 12x^2 + 6x - 1$  với  $x = \frac{1}{2}$

d)  $D = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$  với  $x = 99$

e)  $E = x^3 - 3x^2 + 3x + 5$  với  $x = \frac{-11}{5}$

2.10. Tìm  $x$ , biết:

a)  $x^3 + 6x^2 + 12x + 8 = 0$ . b)  $x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = 0$ . c)  $(x-2)^3 - x^3 + 6x^2 = 5$ .

2.11. Chứng minh rằng giá trị của biểu thức sau không phụ thuộc vào biến

a)  $A = (x^2 + 27)(x+9) - (x+3)^2$ ;

b)  $B = (x-1)^3 - (x+1)^3 + 6(x+1)(x-1) - 3$ ;

c)  $C = (x+y)^3 - (x-y)^3 - 2y(3x^2 + y^2)$

2.12.

a) Cho  $x = a - 1$ .

Chứng minh rằng:  $x^3 + 3ax - a^3 + 1 = 0$ .

b) Cho  $x + y = -1$ .

Tính giá trị của biểu thức  $x^3 + y^3 - 3xy$

2.13. Cho  $a + b = 3$  và  $a^2 + b^2 = 17$ .

Tính  $a^3 + b^3$ .

## 2.8.

$$1. x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy = 1 - 2m$$

$$2. \text{a)} (x + y)^2 = x^2 + y^2 - 2xy = x^2 + y^2 = (x - y)^2 + 2xy = a^2 + 2b$$

$$\text{b)} (x + y)^2 + (x - y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 + x^2 - 2xy + y^2 = 2(x^2 + y^2)$$

$$\Rightarrow (x + y)^2 + a^2 = 2(a^2 + 2b) \text{ (theo a)}$$

$$\Rightarrow (x + y)^2 = a^2 + 4b$$

## 2.9.

$$\text{a)} A = (x - 2)(x + 2)(x + 3) - (x + 1)^3$$

$$= (x^2 - 4)(x + 3) - (x + 1)^3$$

$$= x^3 + 3x^2 - 4x - 12 - x^3 - 3x^2 - 3x - 1$$

$$= -7x - 13$$

Thay  $x = 2$  vào biểu thức trên, ta được:

$$A = (-7).2 - 13 = -27$$

$$\text{b)} B = (x + 2)^3 - (x - 2)^3 - 12x^2 - x$$

$$= (x^3 + 6x^2 + 12x + 8) - (x^3 - 6x^2 + 12x - 8) - 12x^2 - x$$

$$= x^3 + 6x^2 + 12x + 8 - x^3 + 6x^2 - 12x + 8 - 12x^2 - x$$

$$= 16 - x$$

Thay  $x = -2$  vào biểu thức trên ta có:

$$B = 16 - (-2) = 18.$$

$$\text{c)} C = 8x^3 - 12x^2 + 6x - 1 = (2x - 1)^3$$

Thay  $x = \frac{1}{2}$  vào biểu thức trên ta được:

$$C = 0$$

$$\text{d)} D = x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = (x + 1)^3$$

Thay  $x = 99$  vào biểu thức trên ta được

$$D = (99 + 1) = 100^3 = 1000000$$

$$\text{e)} E = x^3 - 3x^2 + 3x + 5 = x^3 - 3x^2 + 3x - 1 + 6 = (x - 1)^3 + 6$$

Thay  $x = -\frac{11}{5}$  vào biểu thức trên ta có:

$$E = \left( \frac{-11}{5} - 1 \right)^3 + 6 = \left( \frac{-16}{5} \right)^3 + 6 = \frac{3346}{125}$$

### 2.10.

a) Ta có:  $x^3 + 6x^2 + 12x + 8 = 0$

$$\Rightarrow (x+2)^3 = 0 \Rightarrow x+2=0 \Rightarrow x=-2$$

b) Ta có:  $x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = 0$

$$\Rightarrow (x-1)^3 = 0 \Rightarrow x-1=0 \Rightarrow x=1$$

c) Ta có:  $(x-2)^3 - x^2 + 6x^2 = 5$

$$\Rightarrow x^3 - 6x^2 + 12x - 8 - x^3 + 6x^2 = 5$$

$$\Rightarrow 12x = 13 \Rightarrow x = \frac{13}{12}$$

### 2.11.

a)  $A = (x^2 + 27)(x+9) - (x+3)^3$

$$= x^3 + 9x^2 + 27x + 243 - (x^3 + 9x^2 + 27x + 27)$$

$$= x^3 + 9x^2 + 27x + 243 - x^3 - 9x^2 - 27x - 27$$

$$= 216 \text{ (không đổi).}$$

Vậy  $A$  không phụ thuộc  $x$ .

b)  $B = (x-1)^3 - (x+1)^3 + 6(x+1)(x-1) - 3$

$$= x^3 - 3x^2 + 3x - 1 - x^3 - 3x^2 - 3x - 1 + 6x^2 - 6 - 3 = -11 \text{ (không đổi)}$$

Vậy  $B$  không phụ thuộc  $x$ .

c)  $C = (x+y)^3 - (x-y)^3 - 2y(3x^2 + y^2)$

$$= x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 - x^3 + 3x^2y - 3xy^2 + y^3 - 6x^2y - 2y^3$$

$$= 0 \text{ (không đổi)}$$

Vậy  $C$  không phụ thuộc  $x, y$ .

### 2.12.

a) Thay  $x = a-1$  vào biểu thức  $x^3 + 3ax - a^3 + 1$  ta được:

$$(a-1)^3 + 3a(a-1) - a^3 + 1$$

$$= a^3 - 3a^2 + 3a - 1 + 3a^2 - 3a - a^2 + 1$$

$$= 0 \text{ (đpcm)}$$

b) Từ giả thiết  $x+y = -1 \Rightarrow y = -x-1$

Thay  $y$  vào biểu thức đã cho ta có:

$$x^3 + y^3 - 3xy = x^3 + (-x-1)^3 - 3x(-x-1)$$

$$= x^3 - x^3 - 3x^2 - 3x - 1 + 3x^2 + 3x = -1$$

2.13.

Ta có  $a+b=3 \Rightarrow (a+b)^2=9$  hay  $a^2 + b^2 + 2ab = 9$ , vì  $a^2 + b^2 = 17$

$$\Rightarrow 17 + 2ab = 9 \Rightarrow ab = -4$$

Mặt khác:  $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$

$$\Rightarrow a^3 + b^3 = 3 \cdot [17 - (-4)] = 3 \cdot 21 = 63.$$

☞ HẾT ☞

## BÀI 8. TỔNG VÀ HIỆU HAI LẬP PHƯƠNG

### PHẦN A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ.

#### 1. TỔNG HAI LẬP PHƯƠNG

Với  $A$  và  $B$  là hai biểu thức tùy ý, ta có:  $A^3 + B^3 = (A+B)(A^2 - AB + B^2)$ .

#### 2. HIỆU HAI LẬP PHƯƠNG.

Với  $A$  và  $B$  là hai biểu thức tùy ý, ta có:  $A^3 - B^3 = (A-B)(A^2 + AB + B^2)$ .

### PHẦN B. PHÂN LOẠI CÁC BÀI TẬP.

#### 1. RÚT GỌN BIỂU THỨC:

**Bài toán 1:** Rút gọn biểu thức:

- $A = (x-y)(x^2 + xy + y^2) - (x+y)(x^2 - xy + y^2);$
- $B = (a^2b^2 - 5a)(a^4b^4 + 5a^3b^2 + 25b^2);$
- $C = (2x+3y)(4x^2 - 6xy + 9y^2);$
- $D = (y+2)(y^2 - 4y + 4);$
- $E = (10a^2 - 1)(100a^4 + 10a^2 + 1).$

**Hướng dẫn:**

$$(A-B)(A^2 + AB + B^2) = A^3 - B^3 ; (A+B)(A^2 - AB + B^2) = A^3 + B^3$$

**Lời giải:**

a) Ta có:  $A = (x-y)(x^2 + xy + y^2) - (x+y)(x^2 - xy + y^2)$

$$= (x^3 - y^3) - (x^3 + y^3)$$

$$= x^3 - y^3 - x^3 - y^3 = -2y^3;$$

b) Ta có:  $B = (a^2b^2 - 5a)(a^4b^4 + 5a^3b^2 + 25b^2)$

$$= (a^2b^2)^3 - (5a)^3 = a^6b^6 - 125a^3;$$

c) Ta có :  $C = (2x+3y)(4x^2 - 6xy + 9y^2)$

$$= (2x)^3 + (3y)^3 = 8x^3 + 27y^3;$$

d) Ta có:  $D = (y+2)(y^2 - 4y + 4)$

$$= y^3 + 2^3 = y^3 + 8;$$

e) Ta có:  $E = (10a^2 - 1)(100a^4 + 10a^2 + 1)$

$$(10a^2)^3 - 1^3 = 1000a^6 - 1.$$

**Bài toán 2.** Chứng tỏ biểu thức không phụ thuộc vào  $x$ .

a)  $A = (x+1)(x^2 - x + 1) - (x-1)(x^2 + x + 1);$

b)  $B = (2x+6)(4x^2 - 12x + 36) - 8x^3 + 10;$

c)  $C = (x-1)^3 - (x-3)(x^2 + 6x + 9) - 3x(1-x)$

d)  $D = (2x-1)(4x^2 + 2x + 1) - 8(x^3 + 1).$

**Hướng dẫn:** Không nhân đa thức ma áp dụng hằng đẳng thức đã học.

**Lời giải:**

a) Ta có:  $A = (x+1)(x^2 - x + 1) - (x-1)(x^2 + x + 1)$

$$= (x^3 + 1^3) - (x^3 - 1^3)$$

$$= x^3 + 1^3 - x^3 + 1^3 = 2 \text{ (không đổi)}$$

Vậy  $A$  không phụ thuộc vào  $x$ .

b) Ta có:  $B = (2x+6)(4x^2 - 12x + 36) - 8x^3 + 10$

$$= (2x)^3 + 6^3 - 8x^3 + 10$$

$$= 8x^3 + 21 - 8x^3 + 10 = 226 \text{ (không đổi)}$$

Vậy  $B$  không phụ thuộc vào  $x$ .

c) Ta có:  $C = (x-1)^3 - (x-3)(x^2 + 6x + 9) - 3x(1-x)$

$$= x^3 - 3x^2 + 3x - 1 - (x^3 - 3^3) - 3x + 3x^2$$

$$= x^3 - 3x^2 + 3x - 1 - x^3 + 27 - 3x + 3x^2$$

$$= 26. \text{(không đổi)}.$$

Vậy  $C$  không phụ thuộc vào  $x$ .

d) Ta có  $D = (2x-1)(4x^2 + 2x + 1) - 8(x^3 + 1)$

$$= (2x)^3 - 1^3 - 8x^3 - 8$$

$$= 8x^3 - 1 - 8x^3 - 8$$

$$= -9 \text{ (không đổi)}.$$

Vậy  $D$  không phụ thuộc vào  $x$ .

**Bài toán 3.** Rút gọn biểu thức:

a)  $A = (a-1)(a+1)(a^2 + a + 1)(a^2 - a + 1);$

b)  $B = (2+a)(2-a)(4+2a+a^2)(a^2 - 2a + 4);$

c)  $C = (a-1)(a-2)(1+a+a^2)(4+2a+a^2);$

d)  $C = (2x-y)(4x^2 + 2xy + y^2)(8x^3 + y^3);$

$$e) E = (2+x)(x^2 - 2x + 4)(8 - x^3)$$

**Hướng dẫn:** Không nên thực hiện phép nhân đa thức. Áp dụng hằng đẳng thức đã học.

**Lời giải:**

$$a) Ta có: A = (a-1)(a+1)(a^2 + a + 1)(a^2 - a + 1)$$

$$= [(a-1)(a^2 + a + 1)][(a+1)(a^2 - a + 1)] = (a^3 - 1)(a^3 + 1) = a^6 - 1$$

$$b) Ta có: B = (2+a)(2-a)(4+2a+a^2)(a^2 - 2a + 4)$$

$$= [(2+a)(a^2 - 2a + 4)][(2-a)(4+2a+a^2)]$$

$$= (a^3 + 8)(8 - a^3)$$

$$= 64 - a^6.$$

$$c) Ta có: C = (a-1)(a-2)(1+a+a^2)(4+2a+a^2)$$

$$= [(a-1)(a^2 + a + 1)][(a-2)(a^2 + 2a + 4)]$$

$$= (a^3 - 1)(a^3 - 8)$$

$$= a^6 - 8a^3 - a^3 + 8$$

$$= a^6 - 9a^3 + 8$$

$$d) Ta có: C = (2x-y)(4x^2 + 2xy + y^2)(8x^3 + y^3)$$

$$= (8x^3 - y^3)(8x^3 + y^3)$$

$$= 64x^6 - y^6$$

$$e) Ta có: E = (2+x)(x^2 - 2x + 4)(8 - x^3)$$

$$= (8 + x^3)(8 - x^3)$$

$$= 64 - x^6.$$

**Bài toán 4:** Tính giá trị của biểu thức:

$$a) A = (x+2)(x^2 - 2x + 4) - x(x-3)(x+3), \text{ với } x = 2.$$

$$b) B = (2x-1)(4x^2 + 2x + 1) - 4x(2x^2 - 3), \text{ với } x = \frac{1}{2}.$$

$$c) C = x(x-2)(x+2) - (x-3)(x^2 + 3x + 9), \text{ với } x = \frac{1}{4}.$$

$$d) D = (4x+1)(1-4x+16x^2) - 16x(4x^2 - 5), \text{ với } x = \frac{1}{5}.$$

**Lời giải:**

$$a) Ta có: A = (x-2)(x^2 + 2x + 4) - x(x-3)(x+3)$$

$$= x^3 + 8 - x(x^2 - 9)$$

$$= x^3 + 8 - x^3 + 9x$$

$$= 9x + 8$$

Thay  $x = 2$  vào biểu thức trên ta được  $A = 9 \cdot 2 + 8 = 18 + 8 = 26$ .

b) Ta có:  $B = (2x - 1)(4x^2 + 2x + 1) - 4x(2x^2 - 3)$

$$= 8x^3 - 1 - 8x^3 + 12x$$

$$= 12x - 1$$

Thay  $x = \frac{1}{2}$  vào biểu thức trên ta được  $B = 12 \cdot \frac{1}{2} - 1 = 6 - 1 = 5$ ;

c) Ta có:  $C = x(x - 2)(x + 2) - (x - 3)(x^2 + 3x + 9)$

$$= x(x^2 - 4) - (x^3 - 27)$$

$$= x^3 - 4x - x^3 + 27$$

$$= -4x + 27$$

Thay  $x = \frac{1}{4}$  vào biểu thức trên ta được  $C = -4 \cdot \frac{1}{4} + 27 = 26$ ;

d) Ta có:  $D = (4x + 1)(1 - 4x + 16x^2) - 16x(4x^2 - 5)$

$$= 1 + 64x^3 - 64x^3 + 80x$$

$$= 80x + 1$$

Thay  $x = \frac{1}{5}$  vào biểu thức trên ta được  $D = 80 \cdot \frac{1}{5} + 1 = 17$ .

## II. TÌM GIÁ TRỊ CỦA BIỂU THỨC

**Bài toán 5.** Tìm  $x$  biết:

a)  $(x + 2)(x^2 - 2x + 4) - x(x + 3)(x - 3) = 26$  (1)

b)  $(x - 3)(x^2 + 3x + 9) - x(x - 4)(x + 4) = 21$  (2)

c)  $(2x - 1)(4x^2 + 2x + 1) - 4x(2x^2 - 3) = 23$  (3)

d)  $(4x + 1)(1 - 4x + 16x^2) - 16x(4x^2 - 5) = 17$  (4)

**Hướng dẫn:** Tút gọn vế trái. Không nên nhân đa thức.

**Lời giải:**

a) Ta có: (1)  $\Rightarrow x^3 + 8 - x(x^2 - 9) = 26$

$$\Rightarrow x^3 + 8 - x^3 + 9x + 26$$

$$\Rightarrow 9x = 18$$

$$\Rightarrow x = 2$$

b) Ta có (2)  $\Rightarrow x^3 - 27 - x(x^2 - 16) = 21$

$$\Rightarrow x^3 - 27 - x^3 + 16x = 21$$

$$\Rightarrow 16x = 48$$

$$\Rightarrow x = 3$$

c) Ta có (3)  $\Rightarrow 8x^3 - 1 - 8x^3 + 12x = 23$

$$\Rightarrow 12x = 24$$

$$\Rightarrow x = 2$$

d) Ta có (4)  $\Rightarrow 64x^3 + 1 - 64x^3 + 80x = 17$

$$\Rightarrow 80x = 16$$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{5}$$

### III. CHỨNG MINH ĐẲNG THỨC:

#### Bài toán 6:

a) Cho  $a + b = 1$ . Chứng minh rằng  $a^3 + b^3 + 3ab = 1$ .

b) Cho  $x + y = 1$ . Chứng minh rằng:  $2(x^3 + y^3) - 3(x^2 + y^2) = -1$ .

#### Hướng dẫn:

$$A^3 + B^3 = (A + B)(A^2 - AB + B^2); A^2 + B^2 = (A + B)^2 - 2AB$$

#### Lời giải:

a) Cách 1: Ta có  $a^3 + b^3 + 3ab$

$$= (a + b)(a^2 - ab + b^2) + 3ab \quad (\text{Thay } a + b = 1)$$

$$= a^2 - ab + b^2 + 3ab$$

$$= a^2 + 2ab + b^2$$

$$= (a + b)^2 \quad (\text{Thay } a + b = 1)$$

$$= 1 \quad (\text{đpcm}).$$

Cách 2: Ta có  $a^3 + b^3 + 3ab$

$$= (a + b)(a^2 - ab + b^2) + 3ab$$

$$= (a + b)[(a + b)^2 - 3ab] + 3ab$$

$$\text{Thay } a + b = 1 \Rightarrow a^3 + b^3 + 3ab = 1 \cdot 1 \cdot (1 - 3ab) + 3ab = 1 - 3ab + 3ab = 1 \quad (\text{đpcm}).$$

Chú ý: Ta cần nhớ kết quả sau:  $a^3 + b^3 = (a + b)[(a + b)^2 - 3ab]$ ;  $a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab$ .

b) Ta có:  $2(x^3 + y^3) - 3(x^2 + y^2)$

$$= 2(x + y)(x^2 - xy + y^2) - 3x^2 - 3y^2$$

$$= 2x^2 - 2xy + 2y^2 - 3x^2 - 3y^2$$

$$= -\left(x^2 + 2xy + y^2\right) = -\left(x + y\right)^2 = -1 \text{ (đpcm).}$$

**Bài toán tương tự:** Cho  $x - y = 1$ . Chứng minh rằng  $2(x^3 + y^3) - 3(x^2 + y^2) = -1$ .

**Bài toán 7:**

a) Cho  $x - y = 1$  và  $xy = -1$ . Chứng minh rằng:  $x^3 + y^3 = 4$ .

b) Cho  $x - y = 1$  và  $xy = 6$ . Chứng minh rằng:  $x^3 - y^3 = 19$ .

**Bài toán tương tự:** Cho  $x - y = 1$ . Chứng minh rằng:  $2(x^3 - y^3) - 3(x^2 + y^2) = -1$

**Bài toán 7.**

a) Cho  $x + y = 1$  và  $xy = -1$ . Chứng minh rằng:  $x^3 + y^3 = 4$ .

b) Cho  $x - y = 1$  và  $xy = 6$ . Chứng minh rằng:  $x^3 - y^3 = 19$ .

**Hướng dẫn:** Áp dụng hằng đẳng thức  $x^3 \pm y^3$  hoặc kết quả:  $x^3 + y^3 = (x + y)^3 - 3xy(x + y)$ . Cách giải sau theo hướng thứ nhất.

### Lời giải

$$\text{a) Ta có: } x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2) = (x + y)[(x + y)^2 - 3xy]$$

Thay  $x + y = 1$  và  $xy = -1$ , ta có:  $x^3 + y^3 = 1[1 - 3(-1)] = 4$  (điều phải chứng minh)

$$\text{b) Ta có: } x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2) = (x - y)[(x - y)^2 + 3xy]$$

Thay  $x - y = 1$  và  $xy = 6$ , ta có:  $x^3 - y^3 = 1(1 + 3 \cdot 6) = 19$  (điều phải chứng minh)

**Bài toán tương tự:** Cho  $x + y = 1$ . Tính  $x^3 + y^3 + 3xy$ .

**Bài toán 8.** Cho  $x + y = 3$  và  $x^2 + y^2 = 5$ . Tính  $x^3 + y^3$

**Hướng dẫn:** Xem bài toán 6:  $x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy$

### Lời giải

Ta có:  $x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy$ ; thay  $x^2 + y^2 = 5$  và  $x + y = 3$

$$\Rightarrow 5 = 9 - 2xy \Rightarrow 2xy = 9 - 5 \Rightarrow xy = 2.$$

$$\text{Vậy } x^3 + y^3 = (x + y)[(x^2 - xy + y^2)] = 3.(5 - 2) = 9.$$

**Bài toán tương tự:**

1. Cho  $x - y = 2$  và  $x^2 + y^2 = 10$ . Tính  $x^3 - y^3$  (Đáp số:  $x^3 - y^3 = 26$ )

2. Cho  $x + y = 4$  và  $x - 4 = 2$ . Tính  $xy$  và  $x^3 - y^3$  (Đáp số:  $xy = 3; x^3 - y^3 = 26$ ).

## ĐỒ SUNG CÁC HẰNG ĐẲNG THỨC

1.

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$a^4 - b^4 = (a - b)(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3)$$

$$a^5 - b^5 = (a - b)(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4)$$

2.

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$a^5 + b^5 = (a + b)(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4)$$

$$a^7 + b^7 = (a + b)(a^6 - a^5b + a^4b^2 - a^3b^3 + a^2b^4 - ab^5 + b^6)$$

Áp dụng: Tính  $S = 1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{10}$

$$\text{Ta có: } 2^{11} - 1 = (2 - 1)(2^{10} + 2^9 + 2^8 + \dots + 2^2 + 2 + 1)$$

$$\Rightarrow 1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^9 + 2^{10} = 2^{11} - 1 = 2047$$

Chú ý:  $\check{\text{O}}\text{ ph}\ddot{\text{a}}\text{n } 1: a^n - b^n (n \in \mathbb{N}^*)$

$\check{\text{O}}\text{ ph}\ddot{\text{a}}\text{n } 2: a^n + b^n (n \in \mathbb{N}^* \text{ và } n \text{ là số lẻ})$

## PHẦN C. BÀI TẬP

**Bài 2.14.** Rút gọn biểu thức

a)  $A = (4a - 5b)(25b^2 + 20ab + 16a^2)$

b)  $B = \left(\frac{1}{5}x - y\right)\left(\frac{1}{25}x^2 + \frac{1}{5}xy + y^2\right)$

c)  $C = \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{3}y\right)\left(\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{6}xy + \frac{1}{9}y^2\right)$

**Bài 2.15.** Chứng minh biểu thức sau không phụ thuộc vào biến

a)  $A = (x - 5)(x^2 + 5x + 25) - x^3 + 2$

b)  $B = (2x + 3)(4x^2 - 6x + 9) - 8x(x^2 + 2) + 16x + 5$

c)  $C = (2x + y)(4x^2 - 2xy + y^2) - 8x^3y^3 - 1$

**Bài 2.16.** Tính giá trị của biểu thức

a)  $A = (2x - 3y)(4x^2 + 6xy + 9y^2)$ , với  $x = \frac{1}{2}; y = -\frac{1}{3}$

b)  $B = \left(4x - \frac{1}{2}\right)\left(16x^2 + 2x + \frac{1}{4}\right)$ ; với  $x = \frac{1}{2}$ .

**Bài 2.17.** a) Cho  $x + y = 1$ . Chứng minh rằng  $x^3 + y^3 = 1 - 3xy$ .

b) Cho  $x - y = 1$ . Chứng minh rằng  $x^3 - y^3 = 1 + 3xy$ .

**Bài 2.18.** a) Cho  $x + y = 1$  và  $xy = -6$ . Tính  $x^2 + y^2; x^3 + y^3; x^5 + y^5$ .

b) Cho  $x - y = 1$  và  $xy = 6$ . Tính  $x^2 + y^2; x^3 - y^3; x^5 - y^5$ .

**Bài 2.19.** a) Tìm  $x$ , biết:  $(x-3)^3 - (x-3)(x^2 + 3x + 9) + 9(x+1)^2 = 15$ .

b) Tìm  $x$ , biết:  $x(x-5)(x+5) - (x-2)(x^2 + 2x + 4) = -17$ .

↔ HẾT ↔

## HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

**Bài 2.14.** a)  $A = (4a - 5b)(25b^2 + 20ab + 16a^2) = (4a)^3 - (5b)^3 = 64a^3 - 125b^3$

b)  $B = \left(\frac{1}{5}x - y\right)\left(\frac{1}{25}x^2 + \frac{1}{5}xy + y^2\right) = \left(\frac{1}{5}x\right)^3 - y^3 = \frac{1}{125}x^3 - y^3$

c)  $C = \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{3}y\right)\left(\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{6}xy + \frac{1}{9}y^2\right) = \left(\frac{1}{2}x\right)^3 - \left(\frac{1}{3}y\right)^3 = \frac{1}{8}x^3 - \frac{1}{27}y^3$

**Bài 2.15.** a)  $A = (x - 5)(x^2 + 5x + 25) - x^3 + 2 = x^3 - 125 - x^3 + 2 = -123$

b)  $B = (2x + 3)(4x^2 - 6x + 9) - 8x(x^2 + 2) + 16x + 5$

$$= 8x^3 + 27 - 8x^3 - 16x + 16x + 5 = 32$$

c)  $C = (2x + y)(4x^2 - 2xy + y^2) - 8x^3 - y^3 - 1.$

$$= (2x)^3 + y^3 - 8x^3 - y^3 - 1.$$

$$= 8x^3 + y^3 - 8x^3 - y^3 - 1.$$

$$= -1.$$

**Bài 2.16.** a)  $A = (2x - 3y)(4x^2 + 6xy + 9y^2) = 8x^3 - 9y^3$

Thay  $x = \frac{1}{2}; y = -\frac{1}{3}$  vào biểu thức trên ta được:  $A = 8\left(\frac{1}{2}\right)^3 - 9\left(-\frac{1}{3}\right)^3 = 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$

b)  $B = \left(4x - \frac{1}{2}\right)\left(16x^2 + 2x + \frac{1}{4}\right) = 64x^3 - \frac{1}{8}$

Thay  $x = \frac{1}{2}$  vào biểu thức trên ta được:  $B = 64\left(\frac{1}{2}\right)^3 - \frac{1}{8} = 8 - \frac{1}{8} = \frac{63}{8}$

**Bài 2.17.** a)  $x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2) = (x + y)[(x + y)^2 - 3xy]$

Thay  $x + y = 1$ , ta được  $x^2 + y^2 = 1 - 3xy$  (đpcm)

Cách khác: Từ  $x + y = 1 \Rightarrow y = 1 - x$

Thay  $y$  vào biểu thức  $x^3 + y^3$  và  $1 - 3xy$  và so sánh hai kết quả.

b)  $x^3 + y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2) = (x - y)[(x - y)^2 + 3xy]$

Thay  $x - y = 1$ , ta được:  $x^3 - y^3 = 1 + 3xy$  (dpcm)

**Bài 2.18.** a)  $x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy = 1 - 2(-6) = 13$

$\bullet x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2) = (x + y)[(x + y)^2 - 3xy] = 1 - 3(-6) = 19$

$\bullet x^5 + y^5 = (x^2 + y^2)(x^3 + y^3) - x^2y^3 - x^3y^2$

$$= (x^2 + y^2)(x^3 + y^3) - x^2 y^2 (x + y)$$

$$= 13.19 - (-6)^2 = 211.$$

Tương tự ta tìm  $x^4 + y^4; x^6 + y^6; x^7 + y^7$

$$\text{b)} \bullet x^2 + y^2 = (x - y)^2 + 2xy = 1 + 2.6 = 13$$

$$\bullet x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2) = (x - y)[(x - y)^2 + 3xy] = 1(1 + 3.6) = 19$$

$$x^5 - y^5 = (x^2 + y^2)(x^3 - y^3) + x^2 y^3 - x^3 y^2$$

$$= (x^2 + y^2)(x^3 - y^2) - x^2 y^2 (x - y)$$

$$= 13.19 - 6^2 = 211.$$

$$\text{Bài 2.19. a)} (x - 3)^3 - (x - 3)(x^2 + 3x + 9) + 9(x + 1)^2 = 15$$

$$\Rightarrow (x^3 - 9x^2 + 27x - 27) - (x^3 - 27) + 9(x^2 + 2x + 1) = 15$$

$$\Rightarrow x^3 - 9x^2 + 27x - 27 - x^3 + 27 + 9x^2 + 18x + 9 = 15$$

$$\Rightarrow 45x = 6 \Rightarrow x = \frac{2}{15}.$$

$$\text{b)} x(x - 5)(x + 5) - (x - 2)(x^2 + 2x + 4) = -17$$

$$\Rightarrow x(x^2 - 25) - (x^3 - 8) = -17$$

$$\Rightarrow x(x^2 - 25) - (x^3 - 8) = -17$$

$$\Rightarrow -25x = -25 \Rightarrow x = 1.$$

**⇒ HẾT**

## BÀI 9. PHÂN TÍCH ĐA THỨC THÀNH NHÂN TỬ

### PHẦN A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Phân tích đa thức thành nhân tử bằng cách đặt nhân tử chung

- Phân tích đa thức thành nhân tử (hay thừa số) là biến đổi đa thức đó thành một tích của những đa thức.

- Nếu tất cả các số hạng của đa thức có một nhân tử chung (số hoặc chữ) thì có thể đưa nhân tử chung đó ra ngoài dấu ngoặc.

2. Phân tích đa thức thành nhân tử bằng cách nhóm các hạng tử

Vận dụng các tính chất giao hoán, kết hợp và phân phối của phép nhân, phép cộng để nhóm một số hạng tử có nhân tử chung.

### BÀY HÀNG ĐẲNG THỨC ĐÁNG NHỚ

$$A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$$

$$(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$$

$$(A - B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$$

$$(A + B)^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3$$

$$(A - B)^3 = A^3 - 3A^2B + 3AB^2 - B^3$$

$$A^3 + B^3 = (A + B)(A^2 - AB + B^2)$$

$$A^3 - B^3 = (A - B)(A^2 - AB - B^2)$$

### PHẦN B. PHÂN LOẠI CÁC BÀI TẬP

#### I. PHƯƠNG PHÁP ĐẶT NHÂN TỬ CHUNG

**Bài toán 1.** Phân tích thành nhân tử

a)  $A = 6ab - 12bc + 3b$       b)  $B = 4a^2b^3 - 6a^3b^2$

c)  $C = 21x^2b^3 - 14x^3b^2$       d)  $D = xy - x^2 + xz$

e)  $E = 6a^2 + 12ab - 3a$

**Hướng dẫn:** Tìm UCLN của các hệ số ra các biến có số mũ nhỏ nhất trong các hạng tử.

Đưa ra ngoài dấu ngoặc ta được nhân tử chung

#### Lời giải

a) Ta có:  $A = 6ab - 12bc + 3b = 3b(2a - 4c + 1)$

**Chú ý:**  $\text{UCLN}(6; 12; 3) = 3$

$$\Rightarrow 6ab = 3b \cdot 2a; 12bc = 3b \cdot 4c; 3b = 3b \cdot 1$$

Dấu "+" hay "-" là dấu của mỗi hạng tử.

b) Ta có:  $B = 4a^2b^3 - 6a^3b^2 = 2a^2b^2(2b - 3a)$

c) Ta có:  $C = 21x^2b^3 - 14x^3b^2 = 7x^2b^2(3b - 2x)$

d) Ta có:  $D = xy - x^2 + xz = x(y - x + z)$

e) Ta có:  $E = 6a^2 + 12ab - 3a = 3a(2a + 4b - 1)$ .

**Bài toán 2.** Phân tích thành nhân tử

a)  $A = a^4 + 2a^2$

b)  $B = a^4 - 3a^2$

c)  $C = a^4b^2 + ab^3$

d)  $D = x^2y^3 - x^3y^2$

e)  $E = 6x^4 + 24x^2$

f)  $F = 15a^5 + 5a^3$

#### Lời giải

- a) Ta có:  $A = a^4 + 2a^2 = a^2(a^2 + 2)$   
 b) Ta có:  $B = a^4 - 3a^2 = a^2(a^2 - 3)$   
 c) Ta có:  $C = a^4b^2 + abb^3 = abb^2(a^3 + b)$   
 d) Ta có:  $D = x^2y^3 - x^3y^2 = x^2y^2(y - x)$   
 e) Ta có:  $E = 6x^4 + 24x^2 = 6x^2(x^2 + 4)$   
 f) Ta có:  $F = 15a^5 + 5a^3 = 5a^3(a^2 + 1)$

**Bài toán 3.** Phân tích thành nhân tử

- a)  $A = 4a^2b^2 + 36a^2b^3 + 6ab^4$   
 b)  $B = 2a^2y^4 + 12x^4y^2 + 6x^3y^3$   
 c)  $C = 20a^4b - 5a^3b^2 + 15a^5b$ .

#### Lời giải

- a) Ta có:  $A = 4a^2b^2 + 36a^2b^3 + 6ab^4 = 2ab^2(2a + 18ab + 3b^2)$   
 b) Ta có:  $B = 2a^2y^4 + 12x^4y^2 + 6x^3y^3 = 2x^2y^2(y^2 + 6x^2 + 3xy)$   
 c) Ta có:  $C = 20a^4b - 5a^3b^2 + 15a^5b = 5a^3b(4a - b + 3a^2)$ .

**Bài toán 4.** Phân tích thành nhân tử

- |                                      |                                  |
|--------------------------------------|----------------------------------|
| a) $A = a(x + y) + b(x + y)$         | b) $B = x(a + 3) - y(a + 3)$     |
| c) $C = 5a(x + y) - 4b(x + y)$       | d) $D = a^2(x + y) - b^3(x + y)$ |
| e) $E = a(x^2 + y^2) - b(x^2 + y^2)$ |                                  |

**Hướng dẫn:** Nhân tử chung của các hạng tử là một nhị thức. Ta không nên thực hiện phép nhân.

#### Lời giải

- a) Ta có:  $A = a(x + y) + b(x + y) = (x + y)(a + b)$   
 Chú ý nhân tử chung là  $(x + y)$   
 b)  $B = x(a + 3) - y(a + 3) = (a + 3)(x - y)$   
 c)  $C = 5a(x + y) - 4b(x + y) = (x + y)(5a - 4b)$   
 d)  $D = a^2(x + y) - b^3(x + y) = (x + y)(a^2 - b^3)$   
 e)  $E = a(x^2 + y^2) - b(x^2 + y^2) = (x^2 + y^2)(a - b)$

**Bài toán 5.** Phân tích thành nhân tử

- a)  $A = a(x^2 + 1) + b(x^2 + 1) - c(x^2 + 1)$   
 b)  $B = 5x(a + b - c) - 4y(a + b - c) - (a + b - c)$   
 c)  $C = 2a(x - y + z) - b(x - y + z) + (x - y + z)$

#### Lời giải

- a) Ta có:  $A = a(x^2 + 1) + b(x^2 + 1) - c(x^2 + 1) = (x^2 + 1)(a + b - c)$   
 b) Ta có:  $B = 5x(a + b - c) - 4y(a + b - c) - (a + b - c) = (a + b - c)(5x - 4y - 1)$   
 c) Ta có:  $C = 2a(x - y + z) - b(x - y + z) + (x - y + z) = (x - y + z)(2a - b + 1)$

**Bài toán 6.** Phân tích thành nhân tử

- a)  $A = x(y - z) + (z - y)$       b)  $B = a(b - c) - c(c - b)$

$$c) C = a^2(m-1)+b(1-m)$$

$$d) D = x(a-2)+y(2-a)+(2-a)$$

**Hướng dẫn:** a)  $z-y=-\cancel{(y-z)}$

**Lời giải**

$$a) A = x(y-z)+(z-y)=x(y-z)-(y-z)=(y-z)(x-1)$$

$$b) B=a(b-c)-c(c-b)=a(b-c)+c(b-c)=(b-c)(a-c)$$

$$c) C = a^2(m-1)+b(1-m) = a^2(m-1)-b(m-1)=(m-1)(a^2-1)$$

$$d) D = x(a-2)+y(2-a)+(2-a)=x(a-2)-y(a-2)-(a-2) \\ = (a-2)(x+y+1)$$

**Bài toán 7.** Phân tích thành nhân tử

$$a) A = (a+b)+(a+b)^2$$

$$b) B = 4(x-y)+3(x-y)^2$$

$$c) C = (a-b)+c(b-a)^2$$

$$d) D = 2(a-b)^2-(b-a)$$

$$e) E = a(a-b)^2-(b-a)^3$$

$$f) F = (y+x)(12x^2+6x)+(y-z)(12x^2+6x)$$

**Hướng dẫn:**  $(a-b)^2=(b-a)^2$ ;  $(a-b)^3=-\cancel{(b-a)^3}$

**Lời giải**

$$a) A = (a+b)+(a+b)^2 = (a+b)(1+a+b)$$

$$b) B = 4(x-y)+3(x-y)^2 = (x-y)(4+3x-3y)$$

$$c) C = (a-b)+c(b-a)^2 = (a-b)+c(a-b)^2 = (a-b)(1+a-b)$$

$$d) D = 2(a-b)^2-(b-a) = 2(b-a)^2-(b-a) = (b-a)(2b-2a-1)$$

$$e) E = a(a-b)^2-(b-a)^3 = a(b-a)^2-(b-a)^3 = (b-a)^2(2a-b)$$

$$f) F = (y+x)(12x^2+6x)+(y-z)(12x^2+6x)$$

$$= (12x^2+6x)(x+y+y-z)$$

$$= 2y \cdot 6x(2x+1) = 12xy(2x+1)$$

**Bài toán 8.** Phân tích thành nhân tử

$$a) A = (6x^2+3)+7x(6x^2+3)-4y(6x^2+3)$$

$$b) B = 8x(x+y)+ax+ay$$

$$c) = 15a^2b(x^2-y)-20ab^2(x^2-y)+25ab(y-x^2)$$

**Lời giải**

$$a) Ta có: A = (6x^2+3)+7x(6x^2+3)-4y(6x^2+3)$$

$$= (6x^2+3)(1+7x-4y)$$

$$b) B = 8x(x+y)+ax+ay$$

$$= 8x(x+y)+a(x+y) = (x+y)(8a+a)$$

$$c) = 15a^2b(x^2-y)-20ab^2(x^2-y)+25ab(y-x^2)$$

$$= 15a^2b(x^2-y)-20ab^2(x^2-y)+25ab(y-x^2)$$

$$\begin{aligned}
&= (x^2 - y)(15a^2b - 20ab^2 - 25ab) \\
&= (x^2 - y)5ab(3a - 4b - 5) \\
&= 5ab(x^2 - y)(3a - 4b - 5)
\end{aligned}$$

**Bài toán 9.** Tìm  $x$ , biết:

- |                       |                           |
|-----------------------|---------------------------|
| a) $x(x-1)=0$ (1)     | b) $3x^2 - 9x = 0$ (2)    |
| c) $(x-5)(x+3)=0$ (3) | d) $x(x+6)+10(x-6)=0$ (4) |

**Hướng dẫn:**

$$-A \cdot B = 0 \Rightarrow A = 0 \text{ hoặc } B = 0$$

– Phân tích về trái thành nhân tử và đưa về dạng  $A \cdot B = 0$

**Lời giải**

- a) Ta có: (1)  $\Rightarrow x=0$  hoặc  $(x-1)=0 \Rightarrow x=0$  hoặc  $x=1$
- b) Ta có: (2)  $\Rightarrow 3x(x-3)=0 \Rightarrow x(x-3)=0$   
 $\Rightarrow x=0$  hoặc  $x-3=0 \Rightarrow x=0$  hoặc  $x=3$
- c) Ta có: (4)  $\Rightarrow 3x(x-3)=0 \Rightarrow x(x-3)=0$
- d) Ta có: (5)  $\Rightarrow (x-6)(x+10)=0 \Rightarrow x-6=0$  hoặc  $x+10=0$   
 $\Rightarrow x=6$  hoặc  $x=-10$

**Bài toán 10.** Tìm  $x$ , biết:

- a)  $x(x-4)+x-4=0$  (1)
- b)  $x(x-4)=2x-8$  (2)
- c)  $(2x+3)(x-1)+(2x+3)(1-x)=0$  (3)
- d)  $(x+1)(6x^2+2x)+(x-1)(6x^2+2x)=0$  (4)

**Hướng dẫn:** Phân tích về trái thành nhân tử và đưa về dạng  $A \cdot B = 0$

**Lời giải**

- a) Ta có: (1)  $\Rightarrow x(x-4)+(x-4)=0$   
 $\Rightarrow (x-4)(x+1)=0 \Rightarrow x-4=0$  hoặc  $x+1=0$   
 $\Rightarrow x=4$  hoặc  $x=-1$

Ta có thể xét bài toán:

$$\text{Tìm } x, \text{ biết: } x(4-x)+(x-4)=0$$

$$\begin{aligned}
\text{Gọi ý: } &x(4-x)+(x-4)=0 \Rightarrow -x(x-4)+(x-4)=0 \\
&\Rightarrow -(x-4)(-x+1)=0 \Rightarrow x-4=0 \text{ hoặc } -x+1=0 \\
&\Rightarrow x=4 \text{ hoặc } x=-1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{b) Ta có: (2) } &x(x-4)=2(x-4) \\
&\Rightarrow (x-4)(x-2)=0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow x-4=0 \text{ hoặc } x-2=0 \\
&\Rightarrow x=4 \text{ hoặc } x=2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{c) Ta có: (3) } &(2x+3)(x-1)-(2x+3)(x-1)=0 \\
&\Rightarrow 6(x-1)=0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow x-1=0 \\
&\Rightarrow x=1 \\
\text{d)} \quad &\text{Ta có: } (4) \Rightarrow (6x^2+2x)[(x+1)+(x-1)] = 0 \\
&\Rightarrow 2x(3x+1).2x = 0 \\
&\Rightarrow 4x^2(3x+1) = 0 \Rightarrow x^2 = 0 \text{ hoặc } 3x+1 = 0 \\
&\Rightarrow x=0 \text{ hoặc } 3x+1=0 \\
&\Rightarrow x=0 \text{ hoặc } x=-\frac{1}{3}
\end{aligned}$$

**Bài toán 11.** Tìm giá trị của biểu thức

- a)  $A = x(2y-z) - 2y(z-2y)$ , với  $x=2; y=\frac{1}{2}; z=-1$ .
- b)  $B = x(y-x) + y(x-y)$ , với  $x=13; y=3$ .
- c)  $C = x(x+y) - 5x - 5y$ , với  $x=\frac{33}{5}; y=\frac{12}{5}$ .

**Hướng dẫn:** Phân tích về trái thành nhân tử.

#### Lời giải

- a)  $A = x(2y-z) - 2y(z-2y) = x(2y-z) + 2y(2y-z) = (2y-z)(x+2y)$
- Thay  $x=2; y=\frac{1}{2}; z=-1$  vào biểu thức trên ta có:  $A = \left(2 \cdot \frac{1}{2} + 1\right) \left[2 + 2\left(\frac{1}{2}\right)\right] = 2 \cdot 3 = 6$ .
- b)  $B = x(y-x) + y(x-y) = x(y-x) - y(y-x) = (y-x)(x-y)$
- Thay  $x=13; y=3$ . vào biểu thức trên ta có:  $B = (3-13)(13-3) = (-10) \cdot 10 = -100$ .
- c)  $C = x(x+y) - 5x - 5y = x(x+y) - 5(x+y) = (x+y)(x-5)$
- Thay  $x=\frac{33}{5}; y=\frac{12}{5}$ . vào biểu thức trên ta có:  $A = \left(\frac{33}{5} + \frac{12}{5}\right) \left(\frac{33}{5} - 5\right) = 9 \cdot \frac{8}{5} = \frac{72}{5}$

**Bài toán 12.**

- a) Chứng minh rằng:  $n^2(n+1) + 2n(n+1)$  luôn chia hết cho 6 với mọi số nguyên n.
- b) Chứng minh rằng  $24^{n+1} - 24^n$  chia hết cho 23 với n là số tự nhiên.

**Hướng dẫn:** Phân tích thành nhân tử.

#### Lời giải

- a) Ta có:  $n^2(n+1) + 2n(n+1) = (n+1)(n^2 + 2n) = (n+1)n(n+2)$

Đây là tích của ba số nguyên liên tiếp.

Trong ba số nguyên liên tiếp sẽ tồn tại một số chia hết cho 3, đồng thời cũng có ít nhất một số chia hết cho 2 mà 2 và 3 là hai số nguyên tố cùng nhau nên số đã cho phải chia hết cho  $2 \cdot 3 = 6$  (đpcm). (Bạn có thể chứng minh số  $(n+1)n(n+2) : 3$  bằng cách xét  $n=3k$  hoặc  $n=3k+1$  hoặc  $n=3k+2; n \in \mathbb{Z}$  và thay vào biểu thức  $(n+1)n(n+2)$ ; để chứng minh  $(n+1)n(n+2)$  chia hết cho 2, ta xét n chẵn hoặc n lẻ).

- b) Ta có:  $24^{n+1} - 24^n = 24^n(24-1) = 23 \cdot 24^n : 23$  (đpcm)

**Bài toán 13.**

- a) Chứng minh rằng:  $(2n-1)^3 - 2n + 1$  chia hết cho 8 với n là số nguyên.

b) Chứng minh rằng:  $n^2(n-1)-2n(n-1)$  luôn chia hết cho 6 với  $n$  là số nguyên.

**Hướng dẫn:** Phân tích thành nhân tử.

### Lời giải

$$\begin{aligned} \text{a) Ta có: } & (2n-1)^3 - 2n + 1 = (2n-1)^3 - (2n-1) \\ &= (2n-1) \left[ (2n-1)^2 - 1 \right] \\ &= (2n-1)(4n^2 - 4n + 1 - 1) \\ &= (2n-1)(4n^2 - 4n) = 4n(n-1)(2n-1) \end{aligned}$$

Vì  $n$  và  $(n-1)$  là hai số nguyên liên tiếp tồn tại một số chẵn là  $n(n-1)$  chia hết cho 2. Vậy  $4n(n-1)(2n-1)$  chia hết cho 8. (đpcm)

$$\begin{aligned} \text{b) Ta có: } & n^2(n-1) - 2n(n-1) = (n-1)(n^2 - 2n) \\ &= (n-1)n(n-2) \end{aligned}$$

Đây là tích ba số nguyên liên tiếp nên nó chia hết cho 6 (xem bài toán 12).

## II. PHƯƠNG PHÁP NHÓM CÁC HẠNG TỬ

**Bài toán 14.** Phân tích đa thức thành nhân tử

- |  |                                  |
|--|----------------------------------|
| a) $A = x^2 - xy + x - y$              | b) $B = 3x^2 - 3xy - 5x + 5y$    |
| c) $C = 5a^2 - 5ax - 7a + 7x$          | d) $D = a^3 + a^2b - a^2c - abc$ |
| e) $E = a^3 + b^3 + a^2c + b^2c - abc$ |                                  |

**Hướng dẫn:** Nhóm các hạng tử cùng bậc (đẳng cấp)

### Lời giải

$$\begin{aligned} \text{a) Ta có: } & A = x^2 - xy + x - y = (x^2 - xy) + (x - y) \\ &= x(x - y) + 1(x - y) = (x - y)(x + 1) \end{aligned}$$

Nhận xét: Hai số hạng đầu đều là bậc hai, hai số hạng sau là bậc nhất.

$$\begin{aligned} \text{b) Ta có: } & B = 3x^2 - 3xy - 5x + 5y = (3x^2 - 3xy) - (5x - 5y) \\ &= 3x(x - y) - 5(x - y) = (x - y)(3x - 5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) Ta có: } & C = 5a^2 - 5ax - 7a + 7x = (5a^2 - 5ax) - (7a - 7x) \\ &= 5a(a - x) - 7(a - x) = (a - x)(5a - 7) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d) Ta có: } & D = a^3 + a^2b - a^2c - abc = (a^3 + a^2b) - (a^2c + abc) \\ &= a^2(a + b) - ac(a + b) = (a + b)(a^2 - ac) = a(a + b)(a - c) \end{aligned}$$

Nhận xét: Các hạng tử đều cùng bậc, ta cần để ý đến các biến: hai hạng tử cuối có chung biến  $c$ .

$$\begin{aligned} \text{e) Ta có: } & E = a^3 + b^3 + a^2c + b^2c - abc = (a^3 + b^3) + (a^2c + b^2c - abc) \\ &= (a + b)(a^2 - ab + b^2) + c(a^2 + b^2 - ab) \\ &= (a^2 - ab + b^2)(a + b + c) \end{aligned}$$

**Bài toán 15.** Phân tích đa thức thành nhân tử

- |                                      |                                   |
|--------------------------------------|-----------------------------------|
| a) $A = x^2 - (a + b)x + ab$         | b) $A = 3x^2 + 6ax + 3a^2 - 3b^2$ |
| c) $C = a^2 + 2ab - c^2 + a + b + c$ |                                   |

**Hướng dẫn:** Để ý đến các hạng tử cùng bậc, ta cần xét đến các biến.

### Lời giải

a) Ta có:  $A = x^2 - (a+b)x + ab = x^2 - ax - bx + ab$   
 $= (x^2 - ax) - (bx - ab) = x(x-a) - b(x-a) = (x-a)(x-b)$

Bạn có thể giải bài toán sau: Phân tích thành nhân tử

$$x^2 - 5x + 6 = x^2 - (3+2)x + 3 \cdot 2 = (x-3)(x-2)$$

$$x^2 - 9x + 14 = x^2 - (2+7)x + 2 \cdot 7 = (x-7)(x-2)$$

$$x^2 + 6x + 5 = x^2 - (-1-5)x + (-5)(-1) = (x+5)(x+1)$$

b) Ta có  $B = 3x^2 + 6ax + 3a^2 - 3b^2$

$$= 3(x^2 + 2ax + a^2 - b^2)$$

$$= 3[(x^2 + 2ax + a^2) - b^2]$$

$$= 3[(a+x)^2 - b^2]$$

$$= 3(a+x+b)(a+x-b)$$

c) Ta có  $C = a^2 + 2ab + b^2 - c^2 + a + b + c$

$$= [(a+b)^2 - c^2] + (a+b+c)$$

$$= (a+b+c)(a+b-c) + (a+b+c)$$

$$= (a+b+c)(a+b-c+1).$$

**Nhận xét:** Ta nhóm các hạng tử bậc hai như bài toán b ở trên, các hạng tử bậc nhất còn lại sẽ là nhân tử chung.

**Bài toán 16.** Phân tích đa thức thành nhân tử

a)  $A = 40bc + 9cx - 24bx - 15c^2$

b)  $B = a(b^2 + c^2 - a^2) + b(c^2 + a^2 - b^2)$

c)  $C = x^2(y-z) + y^2(z-x) + z^2(x-y)$

**Hướng dẫn:**

a) Sắp xếp theo biến  $x$ .

b) Sắp xếp theo biến  $c$ .

c) Sắp xếp theo biến  $x$ .

### Lời giải

a)  $A = 40bc + 9cx - 24bx - 15c^2 = (9cx - 24bx) + 40bc - 15c^2$   
 $= -3x(8b - 3c) + 5c(8b - 3c)$   
 $= (8b - 3c)(5c - 3x)$

b)  $B = a(b^2 + c^2 - a^2) + b(c^2 + a^2 - b^2)$   
 $= ab^2 + ac^2 - a^3 + bc^2 + a^2b - b^3$   
 $= (ac^2 + bc^2) + ab^2 + a^2b - a^3 - b^3$   
 $= (a+b)c^2 + ab(b+a) - (a+b)(a^2 - ab + b^2)$   
 $= (a+b)(c^2 + ab - a^2 + ab - b^2)$   
 $= (a+b)[c^2 - (a-b)^2]$   
 $= (a+b)(c+a-b)(c-a+b)$

**Nhận xét:** Vai trò của  $a, b$  là như nhau, nên ta sắp xếp đa thức theo biến  $c$ . Sau khi có nhân tử chung  $a+b$ , còn lại rất đơn giản.

$$\begin{aligned}
 c) C &= x^2(y-z) + y^2(z-x) + z^2(x-y) \\
 &= (y-z)x^2 + y^2z - y^2x + z^2x - z^2y \quad (1) \\
 &= (y-z)x^2 - (y^2 - z^2)x + y^2z - yz^2 \\
 &= (y-z)(x^2 - xy - xz + yz) \\
 &= (y-z)[(yz - xz) + (x^2 - xy)] \quad (2) \\
 &= (y-z)[(y-x)z - (y-x)x] \\
 &= (y-z)(y-x)(z-x)
 \end{aligned}$$

**Nhận xét:** Biến đổi biểu thức (1): Ta sắp xếp theo biến  $x$ , biến đổi đến (2); sau đó sắp xếp biểu thức trong ngoặc vuông theo biến  $z$ . (Cũng có thể sắp xếp theo biến  $y$  vì vai trò của  $y$  và  $z$  là như nhau; cũng có thể là như bài toán 2, a).

Bạn hãy tự làm lại theo những cách đó để nắm vững về cách sắp xếp các biến và vai trò của chúng trong đa thức; ở bài toán này  $x, y, z$  có vai trò như nhau nên có thể sắp xếp theo biến nào cũng được. (bài này rất nhiều cách giải).

**Bài toán 17.** Phân tích đa thức thành nhân tử

$$\begin{aligned}
 a) A &= x(y^2 - z^2) + y(z^2 - x^2) + z(x^2 - y^2) \\
 b) B &= (a+b)^3 + (c-a)^3 - (b+c)^3
 \end{aligned}$$

**Hướng dẫn:**

- a) Sắp xếp theo biến  $x$  và áp dụng bài toán 2; a cho nhanh.
- b) Khai triển và rút gọn, tiếp tụ sắp xếp theo biến.

#### Lời giải

$$\begin{aligned}
 a) \text{Ta có: } A &= x(y^2 - z^2) + y(z^2 - x^2) + z(x^2 - y^2) \\
 &= (-yx^2 + zx^2) + x(y^2 - z^2) + yz^2 - zy^2 \\
 &= -x^2(y-z) + x(y^2 - z^2) - yz(y-z) \\
 &= -(y-z)[x^2 - (y+z)x + yz] \\
 &= -(y-z)(x-y)(x-z) = (x-y)(y-z)(z-x) \\
 b) \text{Ta có: } B &= (a+b)^3 + (c-a)^3 - (b+c)^3 \\
 &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 + c^3 - 3c^2a + 3ca^2 - a^3 - b^3 - 3b^2c - 3bc^2 - c^3 \\
 &= 3(a^2b + ab^2 - c^2a + ca^2 - b^2c - bc^2) \\
 &= 3[a^2(b+c) + a(b^2 - c^2) - bc(b+c)] \quad (*) \\
 &= 3(b+c)[a^2 + (b-c)a - bc] \quad (**) \\
 &= 3(b+c)(a-c)(a+b).
 \end{aligned}$$

**Nhận xét:** Khai triển và rút gọn ta đi đến (\*) và sắp xếp theo biến  $a$ , biểu thức (\*\*) ta áp dụng bài toán 2; a. (Nếu chưa rõ bạn tự sắp xếp lại theo biến  $b$  hoặc  $c$  )

Bài này có thể áp dụng hằng đẳng thức: Lập phương của tổng hoặc hiệu với từng hai hạng tử.

**Bài toán 18.** Phân tích đa thức thành nhân tử

$$a) A = (a-b)^3 + (b-c)^3 + (c-a)^3 \qquad b) B = a^3(c-b) + b^3(a-c) + c^3(b-a)$$

**Hướng dẫn:**

a) Khai triển và rút gọn, tiếp tục sắp xếp theo biến  $a$ .

b) Tương tự a).

### Lời giải

$$\begin{aligned} \text{a) Ta có: } A &= (a-b)^3 + (b-c)^3 + (c-a)^3 \\ &= a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 + b^3 - 3b^2c + 3bc^2 - c^3 + c^3 - 3c^2a + 3ca^2 - a^3 \\ &= 3(-a^2b + ab^2 - b^2c + bc^2 - c^2a + ca^2) \\ &= 3[-(b-c)a^2 + (b^2 - c^2)a - bc(b-c)] \quad (*) \\ &= -3(b-c)[a^2 - (b+c)a + bc] \quad (***) \\ &= -3(b-c)(a-b)(a-c) = 3(a-b)(b-c)(c-a). \end{aligned}$$

**Chú ý:** Biểu thức (\*) được sắp xếp theo biến  $a$ . Biểu thức (\*\*\*\*) đưa về bài toán 2; a). Nếu không, bạn hãy tự làm cách khác.

**Cách khác:**

Ta có:

$$\begin{aligned} A &= (a-b+b-c)[(a-b)^2 - (a-b)(b-c) + (b-c)^2] + (c-a)^3 \\ &= (a-c)[(a-b)^2 - (a-b)(b-c) + (b-c)^2 - (a-c)^2] \\ &= (a-c)(a^2 - 2ab + b^2 - ab + ac + b^2 - bc + b^2 - 2bc + c^2 - a^2 + 2ac - c^2) \\ &= 3(a-c)(b^2 - ab + ac - bc) \\ &= 3(a-c)[b^2 - (a+c)b + ac] \quad (*) \\ &= 3(a-c)(b-a)(b-c) = 3(a-b)(b-c)(c-a). \end{aligned}$$

**Nhận xét:** Biểu thức (\*), ta sắp xếp theo biến  $b$  và áp dụng bài toán 2, a)

Nếu đặt  $x = a-b; y = b-c; z = c-a$

Ta có  $x+y+z = 0 \Rightarrow x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$ .

(cách giải thứ hai là theo ý tưởng này)

$$\begin{aligned} \text{b) Ta có: } B &= a^3(c-b) + b^3(a-c) + c^3(b-a) \\ &= (c-b)a^3 - (c^3 - b^3)a + c^3b - b^3c \\ &= (c-b)[a^3 - (c^2 + bc + b^2)a + bc(c+b)] \\ &= (c-b)[a^3 - ac^2 - abc - ab^2 + bc^2 + b^2c] \\ &= (c-b)(c-a)[b^2 + bc - a(c+a)] \\ &= (c-b)(c-a)[(b-a)c + (b^2 - a^2)] \quad (**) \\ &= (c-b)(c-a)(b-a)(c+b+a) \\ &= (a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c) \end{aligned}$$

**Chú ý:** Biểu thức (\*) ta sắp theo biến  $b$ , biểu thức (\*\*) ta sắp theo biến  $c$ .

### III. TÌM GIÁ TRỊ CỦA BIẾN

**Bài toán 19.** Tìm  $x$ , biết

a)  $2(x+3) - x^2 - 3x = 0 \quad (1)$

b)  $x^3 + x^2 + x + 1 = 0 \quad (2)$

c)  $2x(3x-5) = 10 - 6x \quad (3)$

**Hướng dẫn:** Phân tích đa thức của biến  $x$  thành nhân tử.

### Lời giải

a) Ta có: (1)  $\Rightarrow 2(x+3) - (x^2 + 3x) = 0$   
 $\Rightarrow 2(x+3) - x(x+3) = 0 \Rightarrow (x+3)(2-x) = 0$   
 $\Rightarrow x+3=0$  hoặc  $2-x=0 \Rightarrow x=-3$  hoặc  $x=2$ .

Cách khác: Ta có: (1)  $\Rightarrow -x^2 - x + 6 = 0$   
 $\Rightarrow x^2 + x - 6 = 0 \Rightarrow x^2 - (2-3)x + 2(-3) = 0 \quad (*)$   
 $\Rightarrow (x-2)(x+3) = 0 \Rightarrow x=2$  hoặc  $x=-3$ .

(Vé trái của (\*) được viết dưới dạng:  $x^2 - (b+c)x + bc = 0$  và áp dụng kết quả bài toán 2; a)

b) Ta có: (2)  $\Rightarrow (x^3 + x^2) + (x+1) = 0$ .  
 $\Rightarrow x^2(x+1) + (x+1) = 0 \Rightarrow (x+1)(x^2 + 1) = 0$   
 $\Rightarrow x+1=0$  hoặc  $x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x=-1$  (vì  $x^2 + 1 > 0 \Rightarrow$  không tồn tại  $x$  để  $x^2 + 1 = 0$ )

c) Ta có: (3)  $\Rightarrow 2x(3x-5) + (6x-10) = 0$   
 $\Rightarrow 2x(3x-5) + 2(3x-5) = 0$   
 $\Rightarrow (3x-5)(2x+2) = 0$   
 $\Rightarrow 3x-5=0$  hoặc  $2x+2=0$   
 $\Rightarrow x=\frac{5}{3}$  hoặc  $x=-1$ .

**Bài toán 20.** Tìm  $x$ , biết:

- a)  $x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$  (1)  
b)  $x^4 + x^3 - x^2 - x = 0$  (2)  
c)  $(x^3 - x^2) - 4x^2 + 8x - 4 = 0$  (3)

**Hướng dẫn:** Phân tích đa thức thành nhân tử.

### Lời giải

a) Ta có: (1)  $\Rightarrow (x^5 + x^4 + x^3) + (x^2 + x + 1) = 0$   
 $\Rightarrow x^3(x^2 + x + 1) + (x^2 + x + 1) = 0$   
 $\Rightarrow (x^2 + x + 1)(x^3 + 1) = 0$   
 $\Rightarrow (x^2 + x + 1)(x+1)(x^2 - x + 1) = 0$   
 $\Rightarrow x^2 + x + 1 = 0$  hoặc  $x+1=0$  hoặc  $x^2 - x + 1 = 0$   
 $\Rightarrow x+1=0 \Rightarrow x=-1$

$(x^2 + x + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0; x^2 - x + 1 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0 \text{ nên không tồn tại } x \text{ để } x^2 \pm x + 1 = 0)$

b) Ta có: (2)  $\Rightarrow (x^4 + x^3) - (x^2 + x) = 0$   
 $\Rightarrow x^2(x^2 + x) - (x^2 + x) = 0$   
 $\Rightarrow (x^2 + x)(x^2 - 1) = 0$   
 $\Rightarrow x(x+1)^2(x-1) = 0$   
 $\Rightarrow x=0$  hoặc  $x+1=0$  hoặc  $x-1=0$   
 $\Rightarrow x=0$  hoặc  $x=-1$  hoặc  $x=1$ .  
c) Ta có: (3)  $\Rightarrow (x^3 - x^2) - 4(x^2 - 2x + 1) = 0$   
 $\Rightarrow x^2(x-1) - 4(x-1)^2 = 0 \Rightarrow (x-1)(x^2 - 4x + 4) = 0$

$$\Rightarrow (x-1)(x-2)^2 = 0 \Rightarrow x-1=0 \text{ hoặc } (x-2)^2 = 0$$

$$\Rightarrow x=1 \text{ hoặc } x=2.$$

#### IV. PHƯƠNG PHÁP SỬ DỤNG HẰNG ĐẲNG THỨC

**Bài toán 21.** Phân tích thành nhân tử

- a)  $A = x^2 - 1$       b)  $B = x^3 - 1$       c)  $C = x^3 + 8$       d)  $D = 4x^2 - 9$   
e)  $E = 4a^2 - 9b^2$

**Hướng dẫn:** Áp dụng hằng đẳng thức  $a^2 - b^2; a^3 \pm b^3$ .

#### Lời giải

- a) Ta có:  $A = x^2 - 1^2 = (x-1)(x+1)$   
b) Ta có:  $B = x^3 - 1^3 = (x-1)(x^2 + x + 1)$   
c) Ta có:  $C = x^3 + 2^3 = (x+2)(x^2 - 2x + 4)$   
d) Ta có:  $D = (2x)^2 - 3^2 = (2x-3)(2x+3)$   
e) Ta có:  $E = (2a)^2 - (3b)^2 = (2a-3b)(2a+3b)$

**Bài toán 22.** Phân tích thành nhân tử

- a)  $A = (a-b)^2 - c^2$       b)  $B = (m+n)^2 - (m-n)^2$   
c)  $C = a^4b^2 - x^8$       d)  $D = (2a+b)^2 - (2b+a)^2$   
e)  $E = (a+b)^2 - (b+c)^2$

#### Lời giải

- a) Ta có:  $A = (a-b)^2 - c^2 = (a-b+c)(a-b-c)$   
b) Ta có:  $B = (m+n)^2 - (m-n)^2$   
 $= (m+n+m-n)(m+n-m+n)$   
 $= 2m \cdot 2n = 4mn$   
c) Ta có:  $C = a^4b^2 - x^8 = (a^2b)^2 - (x^4)^2 = (a^2b+x^4)(a^2b-x^4)$   
d) Ta có:  $D = (2a+b)^2 - (2b+a)^2$   
 $= (2a+b+2b+a)(2a+b-2b-a)$   
 $= (3a+3b)(a-b) = 3(a+b)(a-b)$   
e) Ta có:  $E = (a+b)^2 - (b+c)^2 = (a+b+b+c)(a+b-b-c)$   
 $= (a+2b+c)(a-c)$

**Bài toán 23.** Phân tích thành nhân tử

- a)  $A = x^3 - y^3$       b)  $B = x^3 + 27$       c)  $C = a^3 - 27$   
d)  $D = 125 - b^3$       e)  $E = m^3 - 64$

#### Lời giải

- a) Ta có:  $A = x^3 - y^3 = (x-y)(x^2 + xy + y^2)$   
b) Ta có:  $B = x^3 + 27 = x^3 + 3^3 = (x+3)(x^2 - 3x + 9)$   
c) Ta có:  $C = a^3 - 27 = a^3 - 3^3 = (a-3)(a^2 + 3a + 9)$   
d) Ta có:  $D = 125 - b^3 = 5^3 - b^3 = (5-b)(25+5b+b^2)$   
e) Ta có:  $E = m^3 - 64 = m^3 - 4^3 = (m-4)(m^2 + 4m + 16)$

**Bài toán 24.** Phân tích thành nhân tử

- a)  $A = 27a^3 - 8$       b)  $B = (8a^3 - 27b^3) - 2a(4a^2 - 9b^2)$

$$c) C = (a^3 - b^3) + (a - b)^2$$

$$d) D = (a^3 + b^3) + (a + b)^2$$

### Lời giải

$$\begin{aligned}a) \text{Ta có: } A &= 27a^3 - 8 = (3a)^3 - 2^3 \\&= (3a - 2)(9a^2 + 6a + 4)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}b) \text{Ta có: } B &= (8a^3 - 27b^3) - 2a(4a^2 - 9b^2) \\&= [(2a)^3 - (3b)^3] - 2a[(2a)^2 - (3b)^2] \\&= (2a - 3b)(4a^2 + 6ab + 9b^2) - 2a(2a - 3b)(2a + 3b) \\&= (2a - 3b)(4a^2 + 6ab + 9b^2 - 4a^2 - 6ab) \\&= 9(2a - 3b)b^2.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}c) \text{Ta có: } C &= (a^3 - b^3) + (a - b)^2 \\&= (a - b)(a^2 + ab + b^2) + (a - b)^2 \\&= (a - b)(a^2 + ab + b^2 + a - b)\end{aligned}$$

*Em hãy giải bài toán sau:*

Phân tích thành nhân tử:

$$M_1 = (a^3 - b^3) + (a^2 - b^2)$$

$$M_2 = (a^3 - b^3) + (b - a)^2$$

$$\begin{aligned}d) \text{Ta có: } D &= (a^3 + b^3) + (a + b)^2 \\&= (a + b)(a^2 - ab + b^2) + (a + b)^2 \\&= (a + b)(a^2 - ab + b^2 + a + b)\end{aligned}$$

**Bài toán 25.** Phân tích thành nhân tử

$$a) A = (a^2 + 1)^2 - 4a^2$$

$$b) B = (x^2 + 4)^2 - 16x^2$$

$$c) C = (a^2 + 2ab + b^2) - c^2$$

$$d) D = 1 - (x^2 - 2xy + y^2)$$

$$e) E = 2x^2 + 2y^2 - 4xy.$$

### Lời giải

$$\begin{aligned}a) \text{Ta có: } A &= (a^2 + 1)^2 - 4a^2 = (a^2 + 1)^2 - (2a)^2 \\&= (a^2 + 1 + 2a)(a^2 + 1 - 2a) \\&= (a + 1)^2(a - 1)^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}b) \text{Ta có: } B &= (x^2 + 4)^2 - 16x^2 = (x^2 + 4)^2 - (4x)^2 \\&= (x^2 + 4 + 4x)(x^2 + 4 - 4x) \\&= (x + 2)^2(x - 2)^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}c) \text{Ta có: } C &= (a^2 + 2ab + b^2) - c^2 = (a + b)^2 - c^2 \\&= (a + b - c)(a + b + c)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}d) \text{Ta có: } D &= 1 - (x^2 - 2xy + y^2) = 1 - (x - y)^2 \\&= (1 + x - y)(1 - x + y)\end{aligned}$$

$$e) \text{Ta có: } E = 2x^2 + 2y^2 - 4xy = 2(x^2 - 2xy + y^2) = 2(x - y)^2.$$

**Bài toán 26.** Phân tích thành nhân tử

$$a) A = x^2 - 3$$

$$b) B = (a + b)^3 - (a - b)^3$$

$$c) C = 8x^3 + 12x^2y + 6xy^2 + y^3$$

$$d) D = 27 - 27x + 9x^2 - x^3$$

$$e) E = (x + y)^2 + 2(x + y) + 1$$

a) Ta có:  $A = x^2 - 3 = x^2 - (\sqrt{3})^2 = (x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})$

### Bài tập tương tự:

- $x^2 - 2 = x^2 - (\sqrt{2})^2 = (x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})$

- $x^2 - 5 = x^2 - (\sqrt{5})^2 = (x - \sqrt{5})(x + \sqrt{5})$

b) Ta có:  $B = (a+b)^3 - (a-b)^3$

$$= [(a+b) - (a-b)][(a+b)^2 + (a+b)(a-b) + (a-b)^2]$$

$$= 2b(a^2 + 2ab + b^2 + a^2 - b^2 + a^2 - 2ab + b^2)$$

$$= 2b(3a^2 + b^2)$$

Cách khác:  $B = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 - a^3 + 3a^2b - 3ab^2 + b^3$

$$= 2b^3 + 6a^2b = 2b(b^2 + 3a^2)$$

c) Ta có:  $C = 8x^3 + 12x^2y + 6xy^2 + y^3$

$$= (2x)^3 + 3(2x)^2y + 3(2x)y^2 + y^3$$

$$= (2x+y)^3$$

(Tương tự:  $M = -8x^3 + 12x^2y - 6xy^2 + y^3$

$$M = -(8x^3 - 12x^2y + 6xy^2 - y^3) = -(2x-y)^3 = (y-2x)^3$$

Hoặc  $M = y^3 - 6xy^2 + 12x^2y - 8x^3 = (y-2x)^3$

d) Ta có:  $D = 27 - 27x + 9x^2 - x^3 = (3-x)^3$

e) Ta có:  $E = (x+y)^2 + 2(x+y) + 1 = (x+y+1)^2$

### Bài toán tương tự:

Phân tích thành nhân tử:

$$P = x^2 + y^2 + 1 + 2x + 2y + 2 \quad (P = (x+y+1)^2)$$

$$Q = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz \quad (Q = (x+y+z)^2)$$

$$T = x + y^2 + z^2 - 2xy - 2yz + 2xz \quad (T = (x-y+z)^2)$$

### Bài toán 27. Tìm $x$ , biết:

a)  $x^2 - 36 = 0$  (1)

b)  $4x^2 + 4x + 1 = 0$  (2)

c)  $25 - 10x + x^2 = 0$  (3)

d)  $x^3 + 8 = 0$  (4)

**Hướng dẫn:** Phân tích về trái thành nhân tử.

### Lời giải

a) Ta có: (1)  $\Rightarrow x^2 - 6^2 = 0 \Rightarrow (x-6)(x+6) = 0$

$$\Rightarrow x-6=0 \text{ hoặc } x+6=0 \Rightarrow x=6 \text{ hoặc } x=-6.$$

b) Ta có: (2)  $\Rightarrow (2x+1)^2 = 0 \Rightarrow 2x+1=0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$

c) Ta có: (3)  $\Rightarrow (5-x)^2 = 0 \Rightarrow 5-x=0 \Rightarrow x=5.$

d) Ta có: (4)  $\Rightarrow (x+2)(x^2 - 2x + 4) = 0$

$$\Rightarrow x+2=0 \text{ hoặc } x^2 - 2x + 4 = 0 \Rightarrow x = -2$$

( $x^2 - 2x + 4 = 0$  hay  $(x-1)^2 + 3 > 0$ , nên không tồn tại  $x$ )

### Bài toán 28. Tìm $x$ , biết:

a)  $x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = 0$  (1)

b)  $4x^3 - 36x = 0$  (2)

c)  $x^6 - 1 = 0$  (3)

d)  $x^3 - 6x^2 + 12x - 8 = 0$  (4)

### Lời giải

- a) Ta có:  $(1) \Rightarrow (x-1)^3 = 0 \Rightarrow x-1=0 \Rightarrow x=1$
- b) Ta có:  $(2) \Rightarrow 4x(x^2 - 9) = 0 \Rightarrow 4x(x-3)(x+3) = 0$   
 $\Rightarrow x=0; x-3=0$  hoặc  $x+3=0$   
 $\Rightarrow x=0; x=3$  hoặc  $x=-3$ .
- c) Ta có:  $(3) \Rightarrow (x^2)^3 - 1^3 = 0 \Rightarrow (x^2 - 1)(x^4 + x^2 + 1) = 0$   
 $\Rightarrow x^2 - 1 = 0$  hoặc  $x^4 + x^2 + 1 = 0$   
 $\Rightarrow (x-1)(x+1) = 0$   
 $(x^4 + x^2 + 1 > 0, \text{ với mọi } x \text{ vì } x^2 \geq 0; x^4 \geq 0)$   
 $\Rightarrow x-1=0$  hoặc  $x+1=0 \Rightarrow x=1$  hoặc  $x=-1$ .
- d) Ta có:  $(4) \Rightarrow (x-2)^3 = 0 \Rightarrow x-2=0 \Rightarrow x=2$ .

**Bài toán 29.** Tìm  $x$ , biết:

- a)  $9x^2 - 16(x-1)^2 = 0 \quad (1)$       b)  $(5x-4)^2 - 49x^2 = 0 \quad (2)$   
c)  $(x^3 + 9) - (x+2)(x-4) \quad (3)$

#### Lời giải

- a) Ta có:  $(1) \Rightarrow (3x)^2 - [4(x-1)]^2 = 0$   
 $\Rightarrow (3x+4x-4)(3x-4x+4) = 0$   
 $\Rightarrow (7x-4)(4-x) = 0 \Rightarrow 7x-4=0$  hoặc  $4-x=0$   
 $\Rightarrow x = \frac{4}{7}$  hoặc  $x=4$ .
- b) Ta có:  $(2) \Rightarrow (5x-4+7x)(5x-4-7x) = 0$   
 $\Rightarrow (12x-4)(-2x-4) = 0$   
 $\Rightarrow 12x-4=0$  hoặc  $-2x-4=0$   
 $\Rightarrow x = \frac{1}{3}$  hoặc  $x=-2$
- c) Ta có:  $(3) \Rightarrow (x+2)(x^2 - 2x + 4) - (x+2)(x-4) = 0$   
 $\Rightarrow (x+2)(x^2 - 2x + 4 - x + 4) = 0$   
 $\Rightarrow (x+2)(x^2 - 3x + 8) = 0$   
 $\Rightarrow x+2=0$  hoặc  $x^2 - 3x + 8 = 0$   
 $\Rightarrow x = -2. (x^2 - 3x + 8 = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{23}{4} > 0)$

**Bài toán 30.**

- a) Chứng minh rằng hiệu hai bình phương của hai số lẻ luôn chia hết cho 8.  
b) Chứng minh rằng  $(7n-2)^2 - (2n-7)^2$  chia hết cho 9 với mọi giá trị nguyên của  $n$ .

#### Lời giải

- a) Gọi  $2n+1$  và  $2n+3$  là hai số nguyên lẻ liên tiếp;  $n \in \mathbb{Z}$   
Ta có:  $(2n+3)^2 - (2n+1)^2 = (2n+3+2n+1)(2n+3-2n-1)$   
 $= 2(4n+4)$   
 $= 8(n+1) : 8$  (đpcm)
- b) Ta có:  $(7n-2)^2 - (2n-7)^2 = (7n-2+2n-7)(7n-2-2n+7)$   
 $= (9n-9)(5n+5)$   
 $= 9(n-1)(5n+5) : 9$  (đpcm)

**Chú ý:** Theo kết quả trên, ta còn có:  $(7n-2)^2 - (2n-7)^2 = 45(n-1)(n+1) \vdots 45$

**Bài toán tương tự:**  $(4n-3)^2 - (3n-4)^2$  chia hết cho 7,  $n \in \mathbb{Z}$ .

**Bài toán 31.**

a) Chứng minh  $n^3 - n$  chia hết cho 6,  $n \in \mathbb{Z}$

b) Chứng minh  $n^5 - n$  chia hết cho 10,  $n \in \mathbb{Z}$

**Lời giải**

a) Ta có  $n^3 - n = n(n^2 - 1) = n(n-1)(n+1)$

Tích của ba số nguyên liên tiếp chia hết cho 6.

(xem bài toán 13, 5.)

b) Ta có  $n^5 - n = n(n^4 - 1) = n[(n^2)^2 - 1^2]$   
 $= n(n^2 - 1)(n^2 + 1) = n(n-1)(n+1)(n^2 - 4 + 5)$   
 $= n(n-1)(n+1)(n^2 - 4) + 5n(n-1)(n+1)$   
 $= n(n-1)(n+1)(n-2)(n+2) + 5n(n-1)(n+1)$

Ta thấy số hạng thứ nhất chia hết cho 2 và 5 nên nó chia hết cho 10, số hạng thứ hai chia hết cho 5 và 2 nên nó cũng chia hết cho 10.

Vậy  $n^5 - n$  chia hết cho 10

Nhận xét: Ta còn thấy  $n^5 - n$  chia hết cho 6 và 5 nên nó chia hết cho 30, với mọi  $n \in \mathbb{Z}$ .

(Tích của 5 số nguyên liên tiếp chia hết cho 5 và trong 5 số sẽ có một số chia hết cho 5).

**Bài toán 32.** Phân tích đa thức thành nhân tử

a)  $A = x^3 + 2x^2y + xy^2 - 4x.$

b)  $B = a^3 + a^2b - a^2c - abc.$

c)  $C = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 - x - y.$

d)  $D = 8a^3 + 4a^2b - 2ab^2 - b^3.$

**Hướng dẫn:** Đặt nhân tử chung, nhóm các hạng tử.

**Lời giải**

a) Ta có:  $A = x^3 + 2x^2y + xy^2 - 4x = x(x^2 + 2xy + y^2 - 4)$   
 $= x[(x+y)^2 - 2^2] = x(x+y+2)(x+y-2)$

b) Ta có:  $B = a^3 + a^2b - a^2c - abc = a(a^2 + ab - ac - bc)$   
 $= a[(a^2 + ab) - (ac + bc)] = a[a(a+b) - c(a+b)]$   
 $= a(a+b)(a-c)$

c) Ta có:  $C = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 - x - y = (x+y)^3 - (x+y)$   
 $= (x+y)[(x+y)^2 - 1] = (x+y)(x+y+1)(x+y-1)$

d) Ta có:  $D = 8a^3 + 4a^2b - 2ab^2 - b^3 = (8a^3 - b^3) + (4a^2b - 2ab^2)$   
 $= [(2a)^3 - b^3] + 2ab(2a-b)$   
 $= (2a-b)[(4a^2 + 2ab + b^2) + 2ab]$   
 $= (2a-b)(4a^2 + 4ab + b^2) = (2a-b)(2a+b)^2$

**Bài toán 33.** Phân tích thành nhân tử

a)  $A = x^2 - 6x + 8.$       b)  $B = x^2 - 4x + 3.$       c)  $C = a^2 - 5a - 14.$

**Hướng dẫn:** Xem bài toán 15,  $x^2 - (b+c)x + bc = (x-b)(x-c)$ , nhưng ta nên làm trực tiếp như sau.

**Lời giải**

a) Ta có:  $A = x^2 - 6x + 8 = x^2 - 6x + 9 - 1 = (x-3)^2 - 1^2$   
 $= (x-3+1)(x-3-1) = (x-2)(x-4)$

b) Ta có:  $B = x^2 - 4x + 3 = x^2 - (3+1)x + 3 \cdot 1$

$$= x^2 - 3x - x + 3 = x(x-3) - (x-3)$$

$$= (x-3)(x-1)$$

b) Đặt  $u = x^2 + x$ , ta có:

Ta có:  $B = u^2 + 3u + 2 = u^2 + 2u + u + 2 = u(u+2) + (u+2)$

$$= (u+2)(u+1) = (x^2 + x + 2)(x^2 + x + 1)$$

Nhận xét:  $x^2 + x + 2 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4} > 0$ ;  $x^2 + x + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$  nên không thể phân tích được nữa.

c) Đặt  $u = x^2 + x + 1$ , ta có:

Ta có:  $C = u(u+1) - 12 = u^2 + u - 12$

$$= u^2 + 4u - 3u - 12 = u(u+4) - 3(u+4)$$

$$= (u+4)(u-3) = (x^2 + x + 1 + 4)(x^2 + x + 1 - 3)$$

$$= (x^2 + x + 5)(x^2 + x - 2)$$

$$= (x^2 + x + 5)[(x^2 + 2x) - x - 2]$$

$$= (x^2 + x + 5)[(x^2 + 2x) - (x + 2)]$$

$$= (x^2 + x + 5)(x + 2)(x - 1)$$

Nhận xét:  $x^2 + x + 5 > 0$  với mọi  $x$ , nên không phân tích được nữa.

d)

Đặt  $u = x^2 + 5x + 4 \Rightarrow x^2 + 5x + 6 = u + 2$

Ta có:  $D = u(u+2) - 24 = [u^2 + 2u + 1] - 25$

$$= (u+1)^2 - 5^2 = (u+1+5)(u+1-5)$$

$$= (x^2 + x + 10)(x^2 + x)$$

$$= (x^2 + x + 10)(x + 1)x.$$

**Bài toán 35.** Phân tích thành nhân tử

a)  $A = (x+1)(x+2)(x+3)(x+4) - 24$

b)  $B = (x+1)(x+3)(x+5)(x+7) + 15$

**Hướng dẫn:** a) Nhận xét về các nhân tử, ta kết hợp như sau:

$$[(x+1)(x+4)][(x+2)(x+3)] = (x^2 + 5x + 4)(x^2 + 5x + 6)$$

Đổi biến:  $u = x^2 + 5x + 4$

### Lời giải

a) Ta có  $A = (x+1)(x+2)(x+3)(x+4) - 24 = (x^2 + 5x + 4)(x^2 + 5x + 6) - 24$

- Nếu  $n = 3k + 1, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow n - 1 = 3k + 1 - 1 = 3k : 3$

$$\Rightarrow n(n-1)(2n-1) : 3$$

- Nếu  $n = 3k + 2, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow 2n - 1 = 2(3k + 2) - 1 = 6k + 4 - 1 = 6k + 3 = 3(2k + 1) : 3$

Vậy với mọi  $n \in \mathbb{Z}$ , ta luôn có  $n(n-1)(2n-1) \vdots 3$  vì 2 và 3 nguyên tố cùng nhau nên  $n(n-1)(2n-1)$  chia hết cho 6, với mọi  $n \in \mathbb{Z}$ .

b) Ta có:  $n^3 + 11n = n^3 - n + 12n = n(n-1)(n+1) + 12n$

Vì  $n(n-1)(n+1)$  là tích của ba số nguyên liên tiếp nên nó chia hết cho cả 2 và 3  
 $\Rightarrow n(n-1)(n+1) \vdots 6$ ; hiển nhiên  $12n \vdots 6$ .

Vậy  $n^3 + 11n$  chia hết cho 6.

$$n^4 + 2n^3 + 3n^2 + 2n = n(n^3 + 2n^2 + 3n + 2)$$

$$= n[(n^3 + 1) + (2n^2 + 2n) + (n+1)]$$

$$= n[(n+1) + (n^2 - n + 1) + 2n(n+1) + (n+1)]$$

$$= n(n+1)(n^2 + n + 2)$$

$$= n(n+1)[(n^2 + n - 2) + 4]$$

$$= n(n+1)(n-1)(n+2) + 4n(n+1)$$

Hạng tử thứ nhất là tích của 4 số nguyên liên tiếp nên chia hết cho 8;

$$n(n-1)(n+1) \vdots 2 \Rightarrow 4n(n+1) \vdots 8, \text{ với } n \in \mathbb{Z} \text{ từ đó ta có đpcm}$$

d) Ta có:  $2n^3 + 3n^2 + 7n = 2n^3 + 3n^2 + n + 6n$

$$= n[2n^2 + 3n + 1] + 6n$$

$$= n[(2n^2 + 2n) + (n+1)] + 6n$$

$$= n[2n(n+1) + (n+1)] + 6n$$

$$= n(n+1)(2n+1) + 6n$$

Ta có:  $n(n+1)(2n+1) \vdots 6$

(chứng minh tương tự bài toán a);  $6n \vdots 6$

Vậy  $2n^3 + 3n^2 + 7n$  chia hết cho 6, với  $n \in \mathbb{Z}$

## PHẦN C. BÀI TẬP

**Bài 2.20.** Phân tích thành nhân tử

a)  $A = (a-2)^2 - (2-a)$

b)  $B = 8x(x-y) - 6y(y-x)$

c)  $C = x(x-y) - 2x + 5y$

d)  $D = 16x^2(x-y) - 10x(y-x)$

**Bài 2.21.** Phân tích thành nhân tử

a)  $A = a(b-3) - b(3-b) + 3 - b$

b)  $B = (x+y)^3 - x(x+y)^2$

c)  $C = a(a-b)^2 - (b-a)^2$

d)  $D = 2x(8x-4y) - 3y(8x-4y) + 4y - 8x$

**Bài 2.22.** Tìm  $x$  biết:

a)  $2x(x-3) + 5x - 15 = 0$

b)  $(x+1)^2 = x+1$

c)  $x^3 + x = 0$

d)  $x(x+7) = 4x + 28$

e)  $3x(x-2) - x + 2 = 0$

**Bài 2.23.** a) Chứng minh rằng:  $13^{n+1} - 13^n$  chia hết cho 12, với mọi số tự nhiên  $n$ .

b) Chứng minh rằng:  $n^3 - n$  chia hết cho 6, với mọi giá trị  $n$  nguyên.

**Bài 2.24.** Tìm giá trị của biểu thức

a)  $A = x^2 + xy + x$ , với  $x = 1; y = -49$ .

b)  $B = 5x^2(x-y) + 15x(2y-x)$ , với  $x = 11; y = 6$ .

**Bài 2.25.** Phân tích thành nhân tử

a)  $A = a^6 - b^6$

b)  $B = 4(2x-3)^2 - 9(4x^2 - 9)^2$

**Bài 2.26.** Phân tích thành nhân tử

a)  $A = (x^2 + x)2 + 2(x^2 + x) + 1$

b)  $B = (x-a)^4 - (x+a)$

c)  $C = (x^2 - 10x + 25) - 4y^2$

d)  $D = x^6 + 27$ .

**Bài 2.27.** Tìm  $x$ , biết:

a)  $x^3 - 16x = 0$

b)  $9x^2 - 4 - (3x-2)^2 = 0$

c)  $(x+2)(x^2 - 2x + 4) + (x+2)^2 = 0$

**Bài 2.28.** a) Chứng minh rằng:  $n^3 + 11$  chia hết cho 6;  $n \in \mathbb{Z}$ .

b) Chứng minh rằng:  $n^6 - n^2$  chia hết cho 60;  $n \in \mathbb{Z}$ .

**Bài 2.29.** Tìm giá trị của đa thức:

a)  $A = (x^2 - 2xy + y^2) - 4z^2$ ; với  $x = 6; y = 2; z = 25$ .

b)  $B = (x^2 + y^2 + 5)^2 - 4(xy - 2)^2$ ; với  $x = 2014; y = 2015$ .

**Bài 2.30.** Phân tích thành nhân tử

a)  $A = x^2 + (2x+y)y - z^2$

b)  $B = x(y^2 - z^2) + y(z^2 - x^2) + z(x^2 - y^2)$

c)  $C = xy(x-y) + yz(y-z) + zx(z-x)$

**Bài 2.31.** Phân tích thành nhân tử

a)  $A = a(b^2 + c^2 - a^2) + b(c^2 + a^2 - b^2)$

b)  $B = a(b^2 + c^2) + b(a^2 + c^2) + c(a^2 + b^2) + 2abc$

c)  $C = (x+y)^5 - x^5 - y^5$

**Bài 2.32.** Tìm  $x$ , biết:

a)  $2x^3 + x^2 - 8x - 4 = 0$

b)  $2x^3 + 3x^2 + 2x + 3 = 0$

**Bài 2.33.** Chứng minh rằng:

a)  $n^4 + 3n^3 - n^2 - 3n$  chia hết cho 6; với  $n$  nguyên.

b)  $(2n-1)^3 - 2n+1$  chia hết cho 24; với  $n$  nguyên.

**Bài 2.34.** Phân tích thành nhân tử

a)  $A = 2x^2 + 10x + 8$       b)  $B = x^2 - 7xy + 10y^2$     c)  $C = 5x^2 + 6xy + y^2$

**Bài 2.35.** Phân tích thành nhân tử

a)  $A = x^3 + 8$                   b)  $B = x^4 + 64$                   c)  $C = x^6 + 27$                   d)  $D = x^4 - 2x^3 + 2x - 1$

**Bài 2.36.** Phân tích thành nhân tử

a)  $A = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$     b)  $B = x^4 + 5x^2 + 6$       c)  $C = x^4 - 2x^3 + 2x - 1$

**Bài 2.37.** Cho  $x^3 + 4x^2 + 5x + 2 = (x+1)(x^2 + ax + b)$

a) Tìm  $a, b$ .

b) Phân tích đa thức  $x^3 + 4x^2 + 5x + 2$  thành nhân tử.

**Bài 2.38.** a) Chứng minh rằng:  $n^4 - 2n^3 - n^2 + 2n$  chia hết cho 24; với mọi giá trị nguyên của  $n$ .

b) Chứng minh rằng:  $n^4 + 6n^3 + 11n^2 + 6n$  chia hết cho 24; với mọi giá trị nguyên của  $n$ .

### HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

**Bài 2.20.** a)  $A = (a-2)^2 - (2-a) = (a-2)[(a-2)+1] = (a-2)(a-1)$

b)  $B = 8x(x-y) - 6y(y-x) = (x-y)(8x+6y) = 2(x-y)(4x+3y)$

c)  $C = x(x-y) - 5x + 5y = x(x-y) - 5(x-y) = (x-y)(x-5)$

d)  $D = 16x^2(x-y) - 10x(y-x) = (x-y)(16x^2 + 10x) = 2x(x-y)(8x+5)$

**Bài 2.21.** a)  $A = a(b-3) + b(3-b) + 3 - b = a(b-3) - b(b-3) - (b-3) = (b-3)(a-b-1)$

b)  $B = (x+y)^2 + x(x+y)^2 = (x+y)^2(x+y+x) = (x+y)^2(2x+y)$

c)  $C = a(a-b)^2 - (b-a)^3 = (a-b)^2 \cdot (a-b+a) = (a-b)^2 \cdot (2a-b)$

d)  $D = 2x(8x-4y) - 3y(8x-4y) - (8x-4y) = (8x-4y)(2x-3y-1) = 4.(2x-y)(2x-3y-1)$

$$\text{Bài 2.22. a) } 2x(x-3) + 5x - 15 = 0$$

$$\Rightarrow 2x(x-3) + 5(x-3) = 0$$

$$\Rightarrow (x-3)(2x+5) = 0$$

$$\Rightarrow x-3=0 \text{ hoặc } 2x+5=0$$

$$\Rightarrow x=3 \text{ hoặc } x=\frac{-5}{2}$$

$$\text{b) } (x+1)^2 = x+1$$

$$\Rightarrow (x+1)^2 - (x+1) = 0$$

$$\Rightarrow (x+1)(x+1-1) = 0$$

$$\Rightarrow x+1=0 \text{ hoặc } x=0$$

$$\Rightarrow x=-1 \text{ hoặc } x=0$$

$$\text{c) } x^3 + x = 0$$

$$\Rightarrow x(x^2 + 1) = 0$$

$$\Rightarrow x=0 \text{ hoặc } x^2 + 1 = 0$$

$\Rightarrow x=0$  (  $x^2 + 1 > 0$ , với mọi  $x$  nên không tồn tại  $x$  để  $x^2 + 1 = 0$  )

$$\text{d) } x(x+7) = 4x + 28$$

$$\Rightarrow x(x+7) = 4(x+7)$$

$$\Rightarrow x(x+7) - 4(x+7) = 0$$

$$\Rightarrow (x-4)(x+7) = 0$$

$$\Rightarrow x-4=0 \text{ hoặc } x+7=0$$

$$\Rightarrow x=4 \text{ hoặc } x=-7$$

$$\text{e) } 3x(x-2) - x + 2 = 0$$

$$\Rightarrow 3x(x-2) - (x-2) = 0$$

$$\Rightarrow (x-2)(3x-1) = 0$$

$$\Rightarrow x-2=0 \text{ hoặc } 3x-1=0$$

$$\Rightarrow x=2 \text{ hoặc } x=\frac{1}{3}$$

$$\text{Bài 2.23. a) } 13^{n+1} - 13^n = 13^n(13-1) = 12 \cdot 13^n : 12$$

$$\text{b) } n^3 - n = n(n^2 - 1) = n(n-1)(n+1)$$

Tích ba số nguyên liên tiếp chia hết cho 2 và 3 mà 2 và 3 nguyên tố cùng nhau nên  $n^3 - n$  chia hết cho 6

$$\text{Bài 2.24. a) Thay } x=51; y=-49 \text{ vào biểu thức A, ta có:}$$

$$A = 51(51-49+1) = 51 \cdot 3 = 153$$

$$\text{b) } B = 5x^2(x-2y) + 15x(2y-x) = (x-2y)(5x^2 - 15x) = 5x(x-2y)(x-3)$$

Thay  $x=11; y=6$  vào biểu thức B, ta có:

$$B = 5 \cdot 11(11-2 \cdot 6)(11-3) = 55(-1) \cdot 8 = -440$$

$$\text{Bài 2.25. a) } A = a^6 - b^6 = (a^2)^3 - (b^2)^3 = (a^2 - b^2)(a^4 + a^2b^2 + b^4)$$

$$\begin{aligned}
&= (a-b)(a+b) \left[ (a^4 + 2a^2b^2 + b^4) - a^2b^2 \right] \\
&= (a-b)(a+b) \left[ (a^2 + b^2)^2 - (ab)^2 \right] \\
&= (a-b)(a+b)(a^2 + b^2 + ab)(a^2 + b^2 - ab)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{b)} \quad B &= 4(2x-3)^2 - 9(4x^2-9)^2 \\
&= 4(2x-3)^2 - 9(2x-3)^2 \cdot (2x+3)^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (2x-3)^2 \left[ 4 - 9(2x+3)^2 \right] \\
&= (2x-3)^2 \left[ 2^2 - 3^2 (2x+3)^2 \right] \\
&= (2x-3)^2 [2+3(2x+3)][2-3(2x+3)] \\
&= (2x-3)^2 (6x+11)(-6x-7) \\
&= -(2x-3)^2 (6x+11)(6x+7)
\end{aligned}$$

**Bài 2.26.** a) Đặt  $u = x^2 + x$ , ta có:  $A = u^2 + 2u + 1 = (u+1)^2$

$$\Rightarrow A = (x^2 + x + 1)^2$$

$$\begin{aligned}
\text{b)} \quad B &= (x-a)^4 - (x+a)^4 = \left[ (x-a)^2 \right]^2 - \left[ (x+a)^2 \right]^2 \\
&= \left[ (x-a)^2 - (x+a)^2 \right] \left[ (x-a)^2 + (x+a)^2 \right] \\
&= \left[ (x-a) - (x+a) \right] \left[ (x-a) + (x+a) \right] (x^2 - 2ax + a^2 + x^2 + 2ax + a^2) \\
&= 2x(-2a)(2x^2 + 2a^2) = -8ax(x^2 + a^2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{c)} \quad C &= (x^2 - 10x + 25) - 4y^2 = (x-5)^2 - (2y)^2 \\
&= (x-5+2y)(x-5-2y) \\
&= (x+2y-5)(x-2y-5)
\end{aligned}$$

$$\text{d)} \quad D = x^6 + 27 = (x^2)^3 + 3^3 = (x^2 + 3)(x^4 - 3x^2 + 9)$$

**Bài 2.27.** a)  $x^3 - 16x = 0$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow x(x^2 - 16) = 0 \\
&\Rightarrow x(x-4)(x+4) = 0 \\
&\Rightarrow x = 0 \text{ hoac } x-4 = 0 \text{ hoac } x+4 = 0 \\
&\Rightarrow x = 0 \text{ hoac } x = 4 \text{ hoac } x = -4
\end{aligned}$$

$$\text{b)} \quad 9x^2 - 4 - (3x-2)^2 = 0$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow (3x-2)(3x+2) - (3x-2)^2 = 0 \\
&\Rightarrow (3x-2)[(3x+2) - (3x-2)] = 0 \\
&\Rightarrow 4(3x-2) = 0
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow 3x-2 = 0 \Rightarrow x = \frac{2}{3}$$

$$\text{c)} \quad (x+2)(x^2 - 2x + 4) + (x+2)^2 = 0$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow (x+2)[(x^2 - 2x + 4) + (x+2)] = 0 \\
&\Rightarrow (x+2)(x^2 - x + 6) = 0 \\
&\Rightarrow x+2=0 \text{ hoặc } x^2 - x + 6 = 0 \Rightarrow x = -2 \\
&x^2 - x + 6 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{21}{4} \geq 0 \text{ nên không tồn tại } x \text{ để } x^2 - x + 6 = 0
\end{aligned}$$

**Chú ý:** Nếu dùng hằng đẳng thức:  $(x+2)(x^2 - 2x + 4) = x^3 + 8$

$$\begin{aligned}
&(x+2)^2 = x^2 + 2x + 4, \text{ ta có} \\
&x^3 + 8 + x^2 + 4x + 4 = 0 \Rightarrow x^3 + x^2 + 4x + 12 = 0
\end{aligned}$$

Tìm  $x$  sẽ khó khăn hơn.

**Bài 2.28.** a)  $n^3 + 11n = (n^3 - n) + 12n$

$n^3 - n$  chia hết cho 6 (xem bài toán 11);  $12 \vdots 6$

$\Rightarrow n^3 + 11n$  chia hết cho 6;  $n \in \mathbb{Z}$

b)  $n^6 - n^2 = n^2(n^2 - 1)(n^2 + 1) = n^2(n+1)(n-1)(n^2 + 1)$

$(n-1)n(n+1) \vdots 3; n(n-1) \vdots 2; n(n+1) \vdots 2$

Vậy  $n^6 - n^2$  chia hết cho 4; 3 và 5 nên nó chia hết cho 60 ( $= 3.4.5$ )

**Bài 2.29.** a)  $A = (x^2 - 2xy + y^2) - 4z^2$

$$= (x-y)^2 - (2z)^2 = (x-y+2z)(x-y-2z)$$

Thay  $x = 6; y = 2; z = 25$  vào biểu thức  $A$ , ta có:

$$A = (6-2+50)(6+2-50) = 54.(-2) = -2268$$

b)  $B = (x^2 + y^2 - 5)^2 - 4(xy - 2)^2$

$$= (x^2 + y^2 - 5)^2 - [2(xy - 2)]^2$$

$$= (x^2 + y^2 - 5 + 2xy - 4)(x^2 + y^2 - 5 - 2xy + 4)$$

$$= [(x+y)^2 - 9][(x-y)^2 - 1]$$

$$= (x+y+3)(x+y-3)(x-y+1)(x-y-1)$$

Thay  $x = 2014; y = 2015$  vào biểu thức  $B$ , ta có:

$$B = (2014 + 2015 + 3)(2014 + 2015 - 3)(2014 - 2015 + 1)(2014 - 2015 - 1) = 0$$

(vì  $2014 - 2015 + 1 = 0$ )

**Bài 2.30.** a)  $A = x^2 + (2x+y)y - z^2 = (x+y)^2 - z^2 = (x+y+z)(x+y-z)$

b)  $B = x(y^2 - z^2) + y(z^2 - x^2) + z(x^2 - y^2)$

$$= x^2(z-y) - x(z^2 - y^2) + yz^2 - y^2z$$

$$= (z-y)(x^2 - xz - xy + yz)$$

$$= (z-y)[(z-x)y - (xz - x^2)]$$

$$= (z-y)(z-x)(y-x)$$

$$= (x-y)(y-z)(z-x)$$

**Nhận xét:** Đầu tiên ta sắp theo biến  $x$  rồi sau đó sắp theo biến  $y$ .

c)  $C = xy(x-y) + yz(y-z) + zx(z-x)$

$$\begin{aligned}
&= x^2y - xy^2 + y^2z - yz^2 + xz^2 - zx^2 \\
&= x^2(y - z) - x(y^2 - z^2) + (y^2z - yz^2) \\
&= (y - z)[x^2 - x(y + z) + yz] \\
&= (y - z)[y(z - x) + x^2 - xz] \\
&= (y - z)[y(z - x) + x(x - z)] \\
&= (y - z)(y - x)(z - x)
\end{aligned}$$

**Bài 2.31.** a)  $A = a(b^2 + c^2 - a^2) + b(c^2 + a^2 - b^2)$

$$\begin{aligned}
&= ab^2 + ac^2 - a^3 + bc^2 + a^2 - b^3 \\
&= -(a^3 + b^3) + (ab^2 + a^2b) + ac^2 + bc^2 \\
&= (a + b)[-a^2 + ab - b^2 + ab + c^2] \\
&= (a + b)[c^2 - (a - b)^2] \\
&= (a + b)(c + a - b)(c - a + b)
\end{aligned}$$

Nhận xét: Vai trò của  $a, b$  giống nhau, ta sắp theo biến  $c$  sẽ thấy xuất hiện nhân tử chung  $a + b$

b)  $B = a(b^2 + c^2) + b(a^2 + c^2) + c(a^2 + b^2) + 2abc$

$$\begin{aligned}
&= ab^2 + ac^2 + ab + bc^2 + a^2c + b^2c + 2abc \\
&= (a^2b + a^2c) + (ab^2 + ac^2 + 2abc) + b^2c + bc^2 \\
&= a^2(b + c) + a(b^2 + 2bc + c^2) + bc(b + c) \\
&= (b + c)[a^2 + a(b + c) + bc] \\
&= (b + c)[(a + b)(a + c)]
\end{aligned}$$

**Nhận xét:** Sắp theo biến  $a$ , có nhân tử chung  $b + c$ . Biểu thức trong ngoặc vuông được làm tương tự khi sắp theo biến  $b$ . (có thể làm như bài toán 2 trong bài học này).

c)  $C = (x + y)^5 - x^5 - y^5$

$$\begin{aligned}
&= x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + y^5 - x^5 - y^5 \\
&= 5xy(x^3 + 2x^2y + 2xy^2 + y^3) \\
&= 5xy[(x^3 + y^3) + (2x^2 + 2xy^2)] \\
&= 5xy(x + y)(x^2 - xy + y^2 + 2xy) \\
&= 5xy(x + y)(x^2 + xy + y^2)
\end{aligned}$$

**Nhận xét:** Áp dụng  $(a + b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$

**Bài 2.32.** a)  $2x^3 + x^2 - 8x - 4 = 0$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow x^2(2x + 1) - 4(2x + 1) = 0 \\
&\Rightarrow (2x + 1)(x^2 - 4) = 0 \\
&\Rightarrow (2x + 1)(x - 2)(x + 2) = 0 \\
&\Rightarrow x = -\frac{1}{2}; x = -2 \text{ hoặc } x = 2
\end{aligned}$$

b)  $2x^3 + 3x^2 + 2x + 3 = 0$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow x^2(2x + 3) + (2x + 3) = 0 \\
&\Rightarrow (2x + 3)(x^2 + 1) = 0 \\
&\Rightarrow 2x + 3 = 0 \text{ hoặc } x^2 + 1 = 0
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow x = -\frac{3}{2}$$

$(x^2 + 1 > 0, \text{ với mọi } x \text{ nên không tồn tại } x \text{ để } x^2 + 1 = 0)$

**Bài 2.33.** a)  $n^4 + 3n^3 - n^2 - 3n = n^3(n+3) - n(n+3) = (n+3)(n^3 - n) = n(n+3)(n-1)(n+1) : 6$   
vì  $n(n-1)(n+2)$  là tích của ba số liên tiếp.

$$\begin{aligned} b) (2n-1)^3 - 2n+1 &= (2n-1)^3 - (2n-1) \\ &= (2n-1)[(2n-1)^2 - 1] = (2n-1)(2n-1+1)(2n-1-1) \\ &= (2n-1)2n(2n-2) = 4(2n-1)n(n-1) \end{aligned}$$

Chứng minh  $(2n-1)n(n-1) : 6 \Rightarrow 4(2n-1)n(n-1) : 24$

**Bài 2.34.**

$$\begin{aligned} a) A &= 2x^2 + 10x + 8 = 2x^2 + 2x + 8x + 8 = 2x(x+1) + 8(x+1) \\ &= (x+1)(2x+8) = 2(x+1)(x+4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b) B &= x^2 - 7xy + 10y^2 = x^2 - 2xy - 5xy + 10y^2 \\ &= x(x-2y) - 5y(x-2y) \\ &= (x-2y)(x-5y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c) C &= 5x^2 + 6xy + y^2 = 5x^2 + 5xy + xy + y^2 \\ &= 5x(x+y) + y(x+y) \\ &= (x+y)(5x+y) \end{aligned}$$

**Bài 2.35.**

$$\begin{aligned} a) A &= x^3 + 8 = x^3 + 2^3 = (x+2)(x^2 - 2x + 4) \\ b) B &= x^4 + 64 = x^4 + 16x^2 + 64 - 16x^2 \\ &= (x^2 + 8)^2 - (4x)^2 \\ &= (x^2 + 8 + 4x)(x^2 + 8 - 4x) \\ &= (x^2 + 4x + 8)(x^2 - 4x + 8) \\ c) C &= x^6 + 27 = (x^2)^3 + 3^3 = (x^2 + 3)(x^4 - 3x^2 + 9) \\ &= (x^2 + 3)[(x^4 + 6x^2 + 9) - 9x^2] \\ &= (x^2 + 3)[(x^2 + 3) - (3x)^2] \\ &= (x^2 + 3)(x^2 + 3 + 3x)(x + 3 - 3x)^2 \\ &= (x^2 + 3)(x^2 + 3x + 3)(x - 3x + 3)^2 \\ d) D &= x^4 - 2x^3 + 2x - 1 = (x^4 - 2x^3 + x^2) - (x^2 - 2x + 1) \\ &= (x^2 - x)^2 - (x-1)^2 \\ &= (x^2 - x + x - 1)(x^2 - x - x + 1) \\ &= (x-1)(x+1)(x-1)^2 = (x-1)^3(x+1) \end{aligned}$$

Ta có bài toán: Tìm x, biết  $x^4 - 2x^3 + 2x - 1 = 0$   
(Đáp số:  $x = \pm 1$ )

**Bài 2.36.**

$$\begin{aligned}
a) A &= x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = x^3 - 2x^2 + x - 6x + 6 \\
&= x(x-1)^2 - 6(x-1) = (x-1)(x^2 - x - 6) \\
&= (x-1)[(x^2 + 2x) - (3x + 6)] = (x-1)(x+2)(x-3)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b) B &= x^4 + 5x + 6 = x^4 + 2x^2 + 3x^2 + 6 \\
&= x^2(x^2 + 2) + 3(x^2 + 2) \\
&= (x^2 + 2)(x^2 + 3)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c) C &= x^4 - 2x^3 + 2x - 1 = x^4 - 2x^3 + x^2 - x^2 + 2x - 1 \\
&= x^2(x-1)^2 - (x-1)^2 \\
&= (x-1)^2(x^2 - 1) = (x-1)^3(x+1)
\end{aligned}$$

**Bài 2.37.**

a) Ta có  $x^3 + 4x^2 + 5x + 2 = x^3 + (a+1)x^2 + (a+b)x + b$

So sánh các hệ số của  $x^2, x$  và số hạng tự do, ta có:

$$a+1=4; a+b=5; b=2 \Rightarrow a=3 \text{ và } b=2$$

$$\begin{aligned}
b) \text{Ta có: } x^3 + 4x^2 + 5x + 2 &= (x+1)(x^2 + 3x + 2) \\
&= (x+1)[x^2 + x + 2x + 2] \\
&= (x+1)[x(x+1) + 2(x+1)] \\
&= (x+1)^2(x+2)
\end{aligned}$$

**Bài 2.38.**

$$\begin{aligned}
a) n^4 - 2n^3 - n^2 + 2n &= n(n^3 - 2n^2 - n + 2) \\
&= n[n^2(n-2) - (n-2)] \\
&= n(n-2)(n-1)(n+1)
\end{aligned}$$

Là tích của 4 số nguyên liên tiếp nên chứa 2 số chẵn liên tiếp nên chia hết cho 8; đồng thời chia hết cho 3.

$$\begin{aligned}
b) n^4 + 6n^3 + 11n^2 + 6n &= n(n^3 + 6n^2 + 11n + 6) \\
&= n[(n^3 - n) + 6n^2 + 12n + 6] \\
&= n[n(n^2 - 1) + 6(n+1)^2] \\
&= n(n+1)[n(n-1) + 6(n+1)] \\
&= n(n+1)(n^2 + 5n + 6) \\
&= n(n+1)(n+2)(n+3) : 24
\end{aligned}$$

## BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG II

### PHẦN A. TRẮC NGHIỆM. Chọn phương án đúng trong mỗi câu sau:

- Câu 1.** Đa thức  $x^2 - 9x + 8$  được phân tích thành tích của hai đa thức  
**A.**  $x-1$  và  $x+8$ .      **B.**  $x-1$  và  $x-8$ .      **C.**  $x-2$  và  $x-4$ .      **D.**  $x-2$  và  $x+4$ .
- Câu 2.** Khẳng định nào sau đây **đúng**?  
**A.**  $(A-B)(A+B) = A^2 + 2AB + B^2$ .      **B.**  $(A+B)(A-B) = A^2 - 2AB + B^2$ .  
**C.**  $(A-B)(A+B) = A^2 + B^2$ .      **D.**  $(A-B)(A+B) = A^2 - B^2$ .
- Câu 3.** Biểu thức  $25x^2 + 20xy + 4y^2$  viết dưới dạng bình phương của một tổng là:  
**A.**  $[5x + (-2y)]^2$ .      **B.**  $[2x + (-5y)]^2$ .      **C.**  $(2x + 5y)^2$ .      **D.**  $(5x + 2y)^2$ .
- Câu 4.** Rút gọn biểu thức  $A = (2x+1)^3 - 6(2x+1)$  ta được:  
**A.**  $x^3 + 8$ .      **B.**  $x^3 + 1$ .      **C.**  $8x^3 + 1$ .      **D.**  $8x^3 - 1$ .

### ĐÁP ÁN

**Câu 1.** **Chọn B**

$$x^2 - 9x + 8 = x^2 - x - 8x + 8 = x(x-1) - x(x-1) = (x-1)(x-8)$$

**Câu 2.** **Chọn D**

**Câu 3.** **Chọn D**

$$25x^2 + 20xy + 4y^2 = (5x)^2 + 2 \cdot 5x \cdot 2y + (2y)^2 = (5x + 2y)^2$$

**Câu 4.** **Chọn C**

$$A = 8x^3 + 12x^2 + 6x + 1 - 12x^2 - 6x$$

$$A = 8x^3 + 1$$

### PHẦN B. TỰ LUẬN.

**Bài 1.** Tính nhanh giá trị của các biểu thức:  $x^2 - 4x + 4$  tại  $x = 102$ . b)  $x^3 + 3x^2 + 3x + 1$  tại  $x = 999$ .

**Bài 2.** Rút gọn biểu thức:

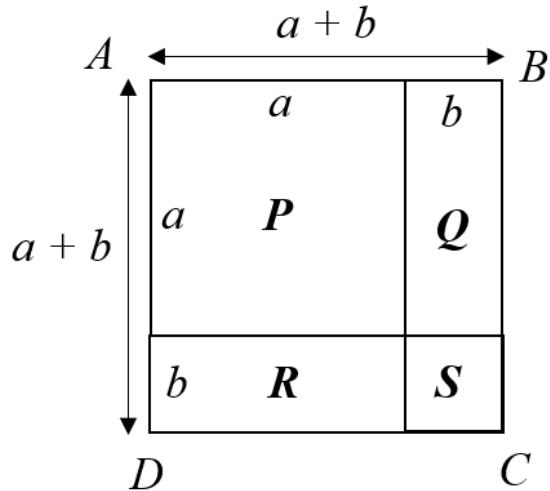
a)  $(2x-5y)(2x+5y) + (2x+5y)^2$ ;

b)  $(x+2y)(x^2 - 2xy + 4y^2) + (2x-y)(4x^2 + 2xy + y^2)$ ;

**Bài 3.** Phân tích các đa thức thành nhân tử:

a)  $6x^2 - 24y^2$ ;      b)  $64x^3 - 27y^3$ ;      c)  $x^4 - 2x^3 + x^2$ ;      d)  $(x-y)^3 + 8y^3$ .

**Bài 4.** Sử dụng hình bên, bằng cách tính diện tích hình vuông  $ABCD$  theo hai cách, hãy giải thích bằng hằng đẳng thức  $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ .



### Hướng dẫn

**Bài 1.** a)  $x^2 - 4x + 4 = (x - 2)^2$

Thay  $x = 102$  vào biểu thức trên, ta có:  $(102 - 2)^2 = 100^2 = 10000$

b)  $x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = (x + 1)^3$

Thay  $x = 999$  vào biểu thức trên, ta có:  $(999 + 1)^3 = 1000^3 = 1000000000$

**Bài tập tương tự:** Tính nhanh giá trị biểu thức:  $x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$ , tại  $x = 88$  và  $y = -12$ .

**Hướng dẫn:**  $x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3 = (x - y)^3$ .

**Bài 2.** a)  $(2x - 5y)(2x + 5y) + (2x + 5y)^2$

$$= (2x + 5y)[(2x - 5y) + (2x + 5y)]$$

$$= (2x + 5y)(2x - 5y + 2x + 5y)$$

$$= 4x(2x + 5y)$$

$$= 8x^2 + 20xy.$$

b)  $(x + 2y)(x^2 - 2xy + 4y^2) + (2x - y)(4x^2 + 2xy + y^2)$

$$= [x^3 + (2x)^3] + [(2x)^3 - y^3] = 9x^3 + 7y^3.$$

**Bài 3.** a)  $6x^2 - 24y^2 = 6(x^2 - 4y^2) = 6[x^2 - (2y)^2] = 6(x - 2y)(x + 2y).$

b)  $64x^3 - 27y^3 = (4x)^3 - (3y)^3 = (4x - 3y)(16x^2 + 12xy + 9y^2).$

c)  $x^4 - 2x^3 + x^2 = x^2(x^2 - 2x + 1) = x^2(x - 1)^2.$

d)  $(x - y)^3 + 8y^3 = (x - y + 2y)[(x - y)^2 - 2(x - y)(y + 2y^2)]$

$$= (x - y + 2y)(x^2 - 4xy - 3y^2).$$

**Bài 4.** Diện tích các hình:  $P = a^2; Q = ab; R = ba; S = b^2$

Diện tích hình vuông  $ABCD : (a+b)^2$

Ta có:  $(a+b)^2 = P+Q+R+S$

Suy ra  $(a+b)^2 = a^2 + ab + ba + b^2$

Hay  $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

☞ HẾT ↴

## BÀI 10: TỨ GIÁC

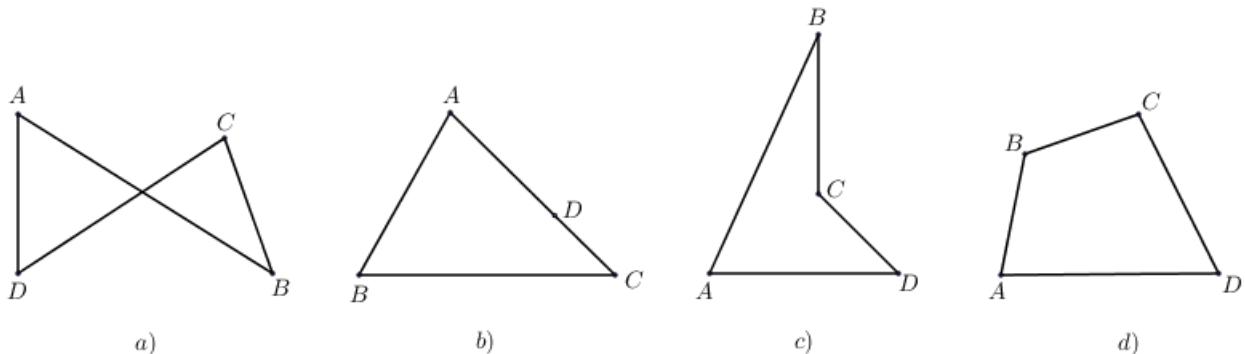
### A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ.

- Tứ giác  $ABCD$  là hình gồm bốn đoạn thẳng  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$ ,  $DA$ , trong đó bất kì hai đoạn thẳng nào cũng không cùng nằm trên một đường thẳng.
- Tứ giác lồi là tứ giác luôn nằm trong một nửa mặt phẳng có bờ là đường thẳng chứa bất kì cạnh nào của tứ giác.
- Tổng các góc của một tứ giác bằng  $360^\circ$ .

### B. PHÂN LOẠI CÁC BÀI TẬP.

#### I. Nhận biết tứ giác – Tứ giác lồi – Các yếu tố trong tứ giác.

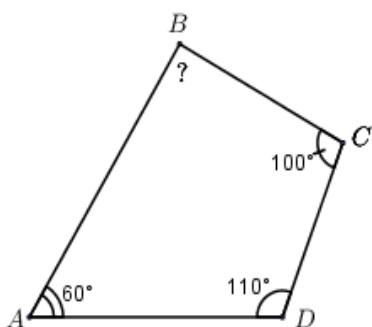
**Bài toán 1.** Cho các hình vẽ  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$  sau đây.



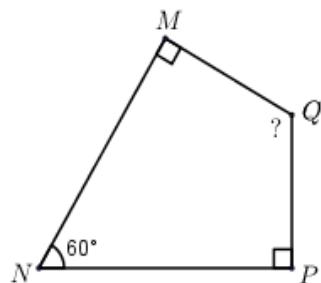
- Hình nào là tứ giác, tứ giác lồi (vì sao?)
- Hãy kể tên các góc, các đỉnh, các cạnh.
- Các góc đối, các đỉnh đối, các cạnh đối, đường chéo của tứ giác lồi kể trên.

### II. Tính toán.

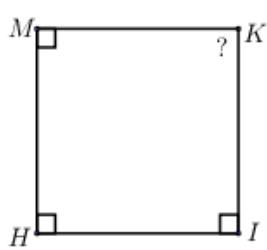
**Bài toán 2.** Hãy tính góc chưa biết của các tứ giác trong các hình vẽ  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$  sau:



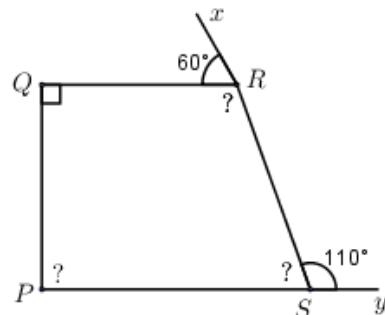
a) Tính góc  $\hat{B}$



b) Tính góc  $\hat{Q}$



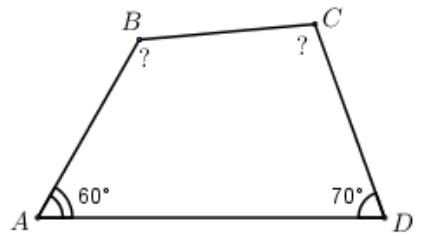
c) Tính góc  $\hat{K}$



d) Tính các góc  $\hat{P}$ ;  $\widehat{PSR}$  và  $\widehat{SRQ}$

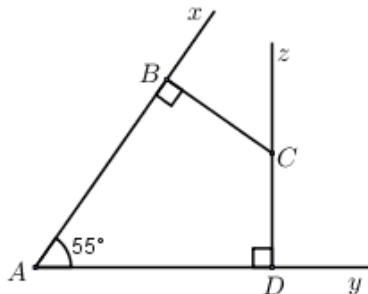
**Bài toán 3.** Tính các góc chưa biết của tứ giác trong hình bên.

Biết rằng  $\hat{B} = \hat{C} + 20^\circ$ .



**Bài toán 4.** Cho  $\widehat{xAy} = 55^\circ$ . Từ điểm  $C$  nằm trong góc đó vẽ  $CB \perp Ax$  ( $B \in Ax$ ),  $CD \perp Ay$  ( $D \in Ay$ ).

- Tính số đo  $\widehat{BCD}$ .
- Tính các góc ngoài của tứ giác tại đỉnh  $B$  và đỉnh  $C$ .



**Bài toán 5.** Tứ giác  $ABCD$  có  $\hat{A} = 100^\circ$ , góc ngoài tại đỉnh  $B$  bằng  $110^\circ$ ;  $\hat{C} = 75^\circ$ . Tính số đo góc  $D$ .

**Bài toán 6.** Tứ giác  $ABCD$  có số đo  $\hat{A} = x$ ,  $\hat{B} = 2x$ ,  $\hat{C} = 3x$ ,  $\hat{D} = 4x$ . Tính số đo các góc của tứ giác đó.

**Bài toán 7.** Tính các góc của tứ giác  $ABCD$  biết  $\hat{A} : \hat{B} : \hat{C} : \hat{D} = 1:2:3:4$ . Từ đó hãy chứng minh rằng: Tổng các góc ngoài của tứ giác bằng  $360^\circ$ .

**Bài toán 8.** Tứ giác  $ABCD$  có  $\hat{A} = 150^\circ$ ,  $\hat{D} = 70^\circ$ .

- Chứng minh  $AB \parallel CD$ .

- Tính số đo góc  $B$ , góc  $C$  biết tỉ số giữa 2 góc là  $\frac{7}{3}$ .

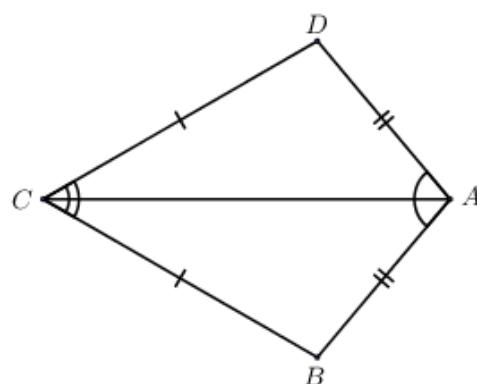
**Bài toán 9:** Tứ giác  $ABCD$  có  $\hat{A} = \hat{B} = 90^\circ$  và  $\hat{C} = 2\hat{D}$ .

- Tính  $\widehat{CDA}$  và  $\widehat{BCD}$ .

- Cho  $AC = 2BC$ . Chứng tỏ tam giác  $ACD$  đều.

**Bài toán 10:** Tính các cạnh của tứ giác biết độ dài các cạnh tỉ lệ với  $2; 3; 5; 8$  và chu vi là  $180\text{ cm}$ .

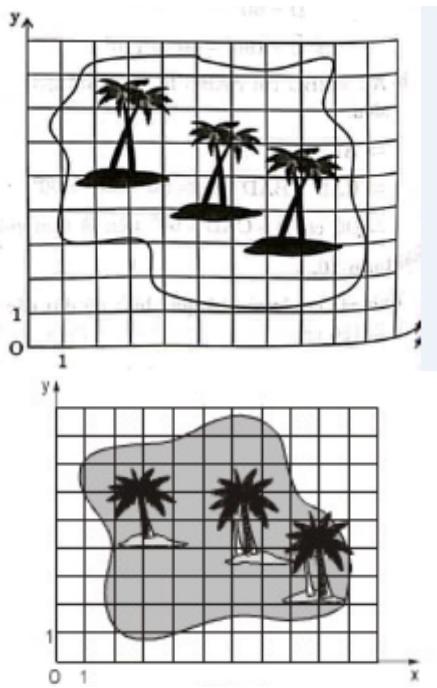
**Bài toán 11:** Tứ giác  $ABCD$  trong hình vẽ có  $AB = AD$ ,  $CB = CD$  được gọi là hình “cái diều”.



- Chứng minh rằng  $AC$  là đường trung trực của đoạn thẳng  $BD$ .

- Tính các góc  $B$ ,  $D$  biết rằng  $\hat{A} = 100^\circ$ ,  $\hat{C} = 60^\circ$ .

**Bài toán 12: Đố.** Đố em tìm thấy vị trí của “kho báu” trên hình, biết rằng kho báu nằm tại giao điểm các đường chéo của tứ giác  $ABCD$ , trong đó các đỉnh của tứ giác có toạ độ như sau:  $A(3; 2)$ ,  $B(2; 7)$ ,  $C(6; 8)$ ,  $D(8; 5)$ .



### III. Chứng minh.

**Bài toán 13.** Các đường phân giác trong của tứ giác  $ABCD$  tạo thành một tứ giác. Chứng minh rằng tứ giác đó có các góc đối bù nhau.

**Bài toán 14.** Cho tứ giác  $ABCD$ , các tia  $DA$  và  $CB$  cắt nhau tại  $E$ , các tia  $AB$  và  $DC$  cắt nhau tại  $F$ , các góc đối bù nhau, các đường phân giác của các góc  $CED$  và  $AFD$  cắt nhau tại  $M$ . Chứng minh rằng  $FM \perp EM$

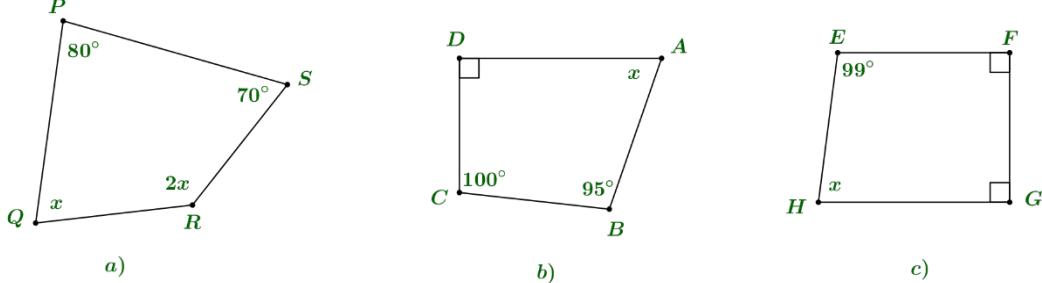
**Bài toán 15.** Chứng minh rằng trong một tứ giác tổng các đường chéo lớn hơn nửa chu vi và nhỏ hơn chu vi của tứ giác đó.

### C. BÀI TẬP.

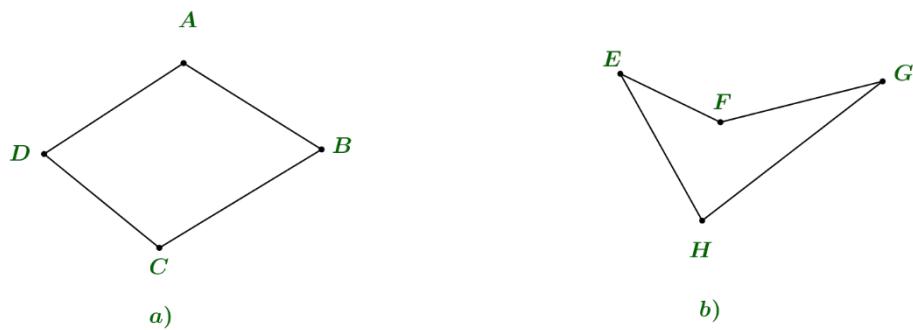
#### 3.1.

- a) Tứ giác  $ABCD$  có  $\hat{A} + \hat{C} = 180^\circ$  thì  $\hat{B} + \hat{D}$  bằng bao nhiêu độ?
- b) Có hay không một tứ giác có 2 góc tù và 2 góc vuông?
- c) Có hay không một tứ giác có cả 4 góc đều là góc nhọn?

**3.2.** Tìm  $x$  trong mỗi hình tứ giác sau:



**3.3.** Tìm tứ giác lồi trong các hình sau:

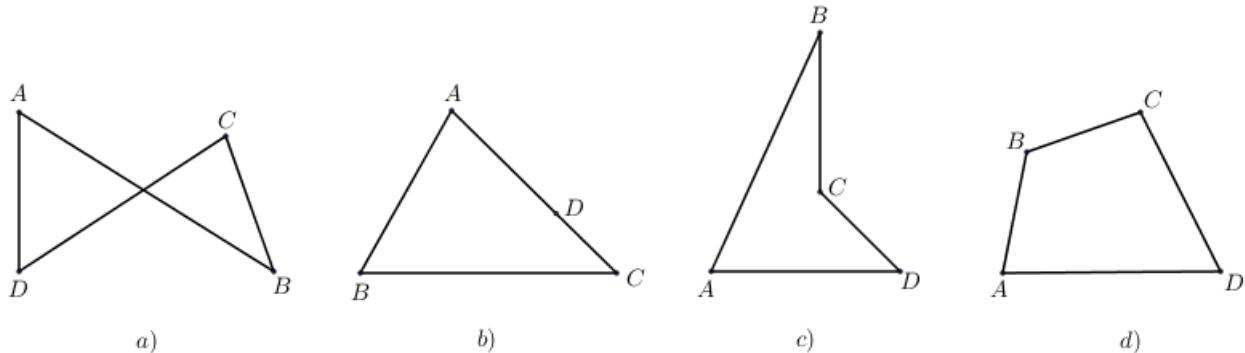


- 3.4.** Cho tứ giác  $ABCD$ , phân giác của góc  $A$  và góc  $B$  cắt nhau tại  $E$ , phân giác ngoài của  $A$  và góc  $B$  cắt nhau tại  $F$ . Chứng minh rằng:  $\widehat{AEB} = \frac{\widehat{C} + \widehat{D}}{2}$  và  $\widehat{AFB} = \frac{\widehat{A} + \widehat{B}}{2}$ .

- 3.5.** Cho tứ giác  $ABCD$  có  $\widehat{A} - \widehat{B} = 30^\circ$ , các tia phân giác của các góc  $C$  và  $D$  cắt nhau tại  $I$ , biết  $\widehat{CID} = 105^\circ$ . Tính số đo các góc  $A$  và  $B$ .

### ĐÁP ÁN THAM KHẢO

- Bài toán 1.** Cho các hình vẽ  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$  sau đây.



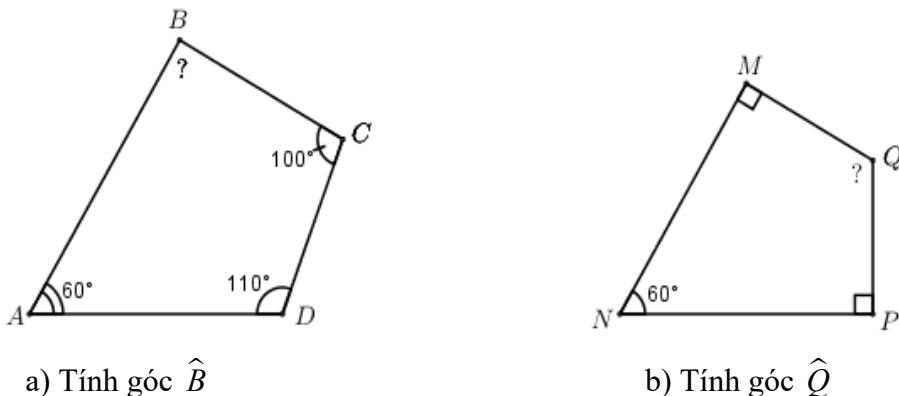
- a) Hình nào là tứ giác, tứ giác lồi (vì sao?)  
 b) Hãy kể tên các góc, các đỉnh, các cạnh.  
 c) Các góc đối, các đỉnh đối, các cạnh đối, đường chéo của tứ giác lồi kể trên.

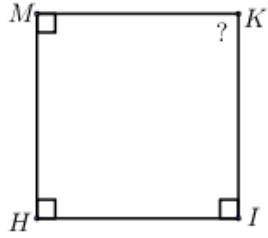
#### *Lời giải*

- a) Các hình  $a$ ,  $c$ ,  $d$  là tứ giác, hình  $b$  không phải là tứ giác (vì có hai đoạn thẳng  $AD$  và  $DC$  cùng nằm trên một đường thẳng).  
 Hình  $d$  là tứ giác lồi (vì hai đỉnh thuộc một cạnh bất kì. Chẳng hạn  $B$  và  $C$  luôn nằm về một phía của đường thẳng đi qua hai đỉnh còn lại  $A$  và  $D$ ).  
 b) Các góc của tứ giác  $ABC$ ,  $BCD$ ,  $CDA$  và  $DAB$  hay  $\widehat{B}$ ,  $\widehat{C}$ ,  $\widehat{D}$ ,  $\widehat{A}$ . Các đỉnh  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$ . Các cạnh  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$  và  $DA$ .  
 c) Các góc đối  $\widehat{A}$  và  $\widehat{C}$ ,  $\widehat{B}$  và  $\widehat{D}$ . Các đỉnh đối  $A$  và  $C$ ,  $B$  và  $D$ . Đường chéo  $AC$  và  $BD$ .

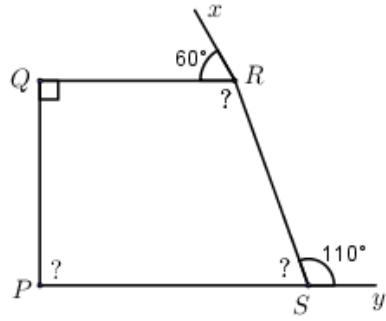
### II. Tính toán.

- Bài toán 2.** Hãy tính góc chưa biết của các tứ giác trong các hình vẽ  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$  sau:





c) Tính góc  $\hat{K}$



d) Tính các góc  $\hat{P}$ ;  $\widehat{PSR}$  và  $\widehat{SRQ}$

### Lời giải

Hình a) Theo định lí về tổng các góc của một tứ giác, ta có:

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D} = 360^\circ \Rightarrow \hat{B} = 360^\circ - (\hat{A} + \hat{C} + \hat{D}) = 360^\circ - (60^\circ + 100^\circ + 110^\circ) = 90^\circ.$$

Vậy  $\hat{B} = 90^\circ$ .

Hình b) Theo định lí về tổng các góc của một tứ giác, ta có:

$$\hat{M} + \hat{N} + \hat{P} + \hat{Q} = 360^\circ \Rightarrow \hat{Q} = 360^\circ - (\hat{M} + \hat{N} + \hat{P}) = 360^\circ - (90^\circ + 60^\circ + 90^\circ) = 120^\circ.$$

Vậy  $\hat{Q} = 120^\circ$ .

Hình c) Theo định lí về tổng các góc của một tứ giác, ta có:

$$\hat{L} + \hat{H} + \hat{I} + \hat{K} = 360^\circ \Rightarrow \hat{K} = 360^\circ - (\hat{L} + \hat{H} + \hat{I}) = 360^\circ - (90^\circ + 90^\circ + 90^\circ) = 90^\circ.$$

Vậy  $\hat{K} = 90^\circ$ .

Hình d) Ta có:  $\widehat{QRS} + \widehat{QRx} = 180^\circ$  (kè bù) hay  $\widehat{QRS} + 60^\circ = 180^\circ \Rightarrow \widehat{QRS} = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$ .

Tương tự:  $\widehat{PSR} + \widehat{RSy} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{PSR} = 180^\circ - 110^\circ = 70^\circ$ .

Theo định lí về tổng các góc của một tứ giác, ta có:

$$\hat{Q} + \hat{P} + \widehat{PSR} + \widehat{QRS} = 360^\circ \Rightarrow \hat{P} = 360^\circ - (90^\circ + 70^\circ + 120^\circ) = 80^\circ.$$

**Bài toán 3.** Tính các góc chưa biết của tứ giác trong hình bên.

Biết rằng  $\hat{B} = \hat{C} + 20^\circ$ .

### Lời giải

Theo định lí về tổng các góc của một tứ giác, ta có:

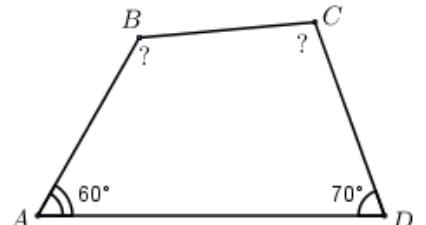
$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D} = 360^\circ \Rightarrow \hat{B} + \hat{C} = 360^\circ - (\hat{A} + \hat{D}) = 360^\circ - (60^\circ + 70^\circ)$$

$$\Rightarrow \hat{B} + \hat{C} = 230^\circ \quad (1)$$

$$\text{Lại có: } \hat{B} = \hat{C} + 20^\circ \quad (2)$$

Thay (2) vào (1), ta được:  $\hat{C} + 20^\circ + \hat{C} = 230^\circ \Rightarrow 2\hat{C} + 20^\circ = 230^\circ \Rightarrow 2\hat{C} = 230^\circ - 20^\circ = 210^\circ \Rightarrow \hat{C} = 105^\circ$

Do đó:  $\hat{B} = 105^\circ + 20^\circ = 125^\circ$ .



**Bài toán 4.** Cho  $\widehat{xAy} = 55^\circ$ . Từ điểm  $C$  nằm trong góc đó vẽ

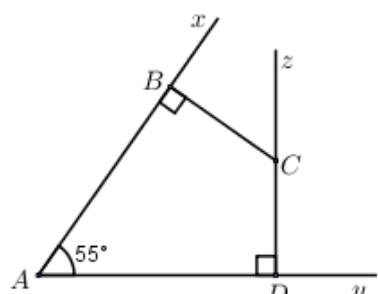
$CB \perp Ax$  ( $B \in Ax$ ),  $CD \perp Ay$  ( $D \in Ay$ ).

a) Tính số đo  $\widehat{BCD}$ .

b) Tính các góc ngoài của tứ giác tại đỉnh  $B$  và đỉnh  $C$ .

### Lời giải

a) Ta có:  $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D} = 360^\circ$  (Tổng các góc của tứ giác)



$$\Rightarrow \hat{C} = 360^\circ - (\hat{A} + \hat{B} + \hat{D}) = 360^\circ - (55^\circ + 90^\circ + 90^\circ) = 125^\circ.$$

b) Ta có:  $\widehat{xBC} = 180^\circ - \widehat{ABC} = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$

$$\widehat{zCB} = 180^\circ - \widehat{BCD} = 180^\circ - 125^\circ = 55^\circ.$$

**Bài toán 5.** Tứ giác  $ABCD$  có  $\hat{A} = 100^\circ$ , góc ngoài tại đỉnh  $B$  bằng  $110^\circ$ ;  $\hat{C} = 75^\circ$ . Tính số đo góc  $D$ .

*Lời giải*

Ta có:  $\widehat{ABx} + \widehat{ABC} = 180^\circ$  (kề bù)

$$\Rightarrow \widehat{ABC} = 180^\circ - \widehat{ABx} = 180^\circ - 110^\circ = 70^\circ$$

Theo định lí về tổng các góc của một tứ giác, ta có:

$$\hat{A} + \widehat{ABC} + \hat{C} + \hat{D} = 360^\circ$$

$$\Rightarrow \hat{D} = 360^\circ - (\hat{A} + \widehat{ABC} + \hat{C}) = 360^\circ - (100^\circ + 70^\circ + 75^\circ) = 115^\circ$$

**Bài toán 6.** Tứ giác  $ABCD$  có số đo  $\hat{A} = x$ ,  $\hat{B} = 2x$ ,  $\hat{C} = 3x$ ,  $\hat{D} = 4x$ . Tính số đo các góc của tứ giác đó.

*Lời giải*

Theo định lí về tổng các góc của một tứ giác, ta có:

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D} = 360^\circ \text{ hay } x + 2x + 3x + 4x = 360^\circ$$

$$\Rightarrow 10x = 360^\circ$$

$$\Rightarrow x = 36^\circ$$

Vậy:  $\hat{A} = x = 36^\circ$ ;  $\hat{B} = 2x = 2.36^\circ = 72^\circ$ ;  $\hat{C} = 3x = 3.36^\circ = 108^\circ$ ;  $\hat{D} = 4x = 4.36^\circ = 144^\circ$ .

**Bài toán 7.** Tính các góc của tứ giác  $ABCD$  biết  $\hat{A} : \hat{B} : \hat{C} : \hat{D} = 1:2:3:4$ . Từ đó hãy chứng minh rằng:  
Tổng các góc ngoài của tứ giác bằng  $360^\circ$ .

*Lời giải*

Theo tính chất của dãy tỉ số bằng nhau, ta có:  $\frac{\hat{A}}{1} = \frac{\hat{B}}{2} = \frac{\hat{C}}{3} = \frac{\hat{D}}{4} = \frac{\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D}}{1+2+3+4} = \frac{360^\circ}{10} = 36^\circ$

$$\Rightarrow \hat{A} = 36^\circ; \hat{B} = 2.36^\circ = 72^\circ; \hat{C} = 3.36^\circ = 108^\circ; \hat{D} = 4.36^\circ = 144^\circ$$

Có tổng một góc trong và góc ngoài là  $180^\circ$ .

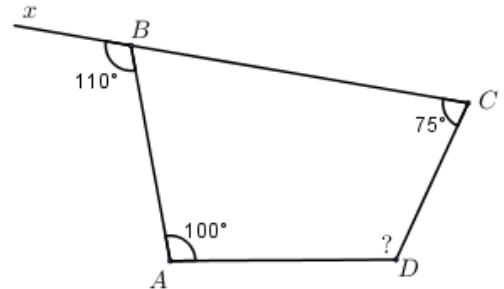
$$\Rightarrow \text{Tổng 4 góc ngoài là: } 4.180^\circ - (\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D}) = 720^\circ - 360^\circ = 360^\circ.$$

**Bài toán 8.** Tứ giác  $ABCD$  có  $\hat{A} = 150^\circ$ ,  $\hat{D} = 70^\circ$ .

a) Chứng minh  $AB // CD$ .

b) Tính số đo góc  $B$ , góc  $C$  biết tỉ số giữa 2 góc là  $\frac{7}{3}$ .

*Lời giải*



a) Ta có:  $\hat{A} + \hat{D} = 110^\circ + 70^\circ = 180^\circ \Rightarrow AB \parallel CD$  (cặp góc trong cùng phia bù nhau).

b) Ta có:  $\frac{\hat{B}}{\hat{C}} = \frac{7}{3} \Rightarrow \frac{\hat{B}}{7} = \frac{\hat{C}}{3}$

Theo tính chất của dãy tỉ số bằng nhau:

$$\frac{\hat{B}}{7} = \frac{\hat{C}}{3} = \frac{\hat{B} + \hat{C}}{7+3} = \frac{180^\circ}{10} = 18^\circ \text{ (vì } \hat{B} + \hat{C} = 360^\circ - (\hat{A} + \hat{D})\text{)}$$

$$\Rightarrow \hat{B} = 18^\circ \cdot 7 = 126^\circ$$

$$\hat{C} = 18^\circ \cdot 3 = 54^\circ.$$

**Bài toán 9:** Tứ giác  $ABCD$  có  $\hat{A} = \hat{B} = 90^\circ$  và  $\hat{C} = 2\hat{D}$ .

a) Tính  $\widehat{CDA}$  và  $\widehat{BCD}$ .

b) Cho  $AC = 2BC$ . Chứng tỏ tam giác  $ACD$  đều.

*Lời giải*

a) Ta có:  $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D} = 360^\circ \Rightarrow \hat{C} + \hat{D} = 360^\circ - (90^\circ + 90^\circ) = 180^\circ$

lại có:  $\hat{C} = 2\hat{D} \Rightarrow 2\hat{D} + \hat{D} = 180^\circ$

$$3\hat{D} = 180^\circ$$

$$\hat{D} = 60^\circ$$

$$\Rightarrow \hat{C} = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ.$$

b)  $AC = 2BC$  thì  $\Delta ABC$  là nửa tam giác đều.

$$\Rightarrow \hat{A}_1 = 30^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{CAD} = \widehat{BAD} - \hat{A}_1 = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ.$$

$\Delta ADC$  có  $\hat{D} = \widehat{CAD} = 60^\circ$  nên là tam giác đều.

**Bài toán 10:** Tính các cạnh của tứ giác biết độ dài các cạnh tỉ lệ với  $2; 3; 5; 8$  và chu vi là  $180\text{ cm}$ .

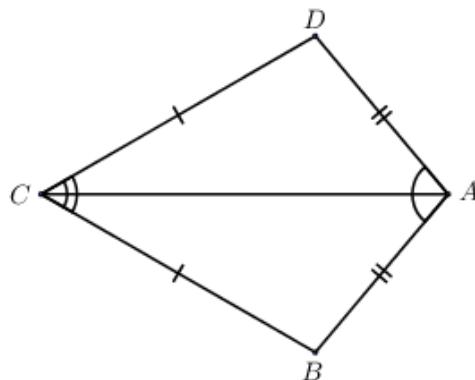
*Lời giải*

Gọi độ dài các cạnh của tứ giác là  $a, b, c, d$  ta có:

$$\frac{a}{2} = \frac{b}{3} = \frac{c}{5} = \frac{d}{8} = \frac{a+b+c+d}{2+3+5+8} = \frac{180}{18} = 10$$

$$\Rightarrow a = 10 \cdot 2 = 20\text{ cm}; b = 10 \cdot 3 = 30\text{ cm}; c = 10 \cdot 5 = 50\text{ cm}; d = 10 \cdot 8 = 80\text{ cm}.$$

**Bài toán 11:** Tứ giác  $ABCD$  trong hình vẽ có  $AB = AD, CB = CD$ , được gọi là hình “cái diều”.

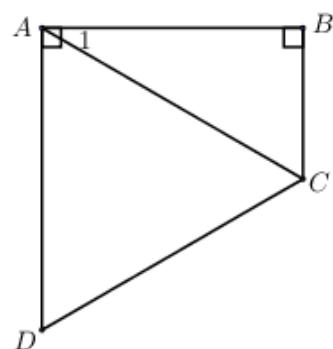
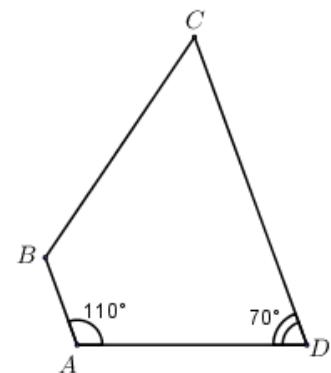


a) Chứng minh rằng  $AC$  là đường trung trực của đoạn thẳng  $BD$ .

b) Tính các góc  $B, D$  biết rằng  $\hat{A} = 100^\circ, \hat{C} = 60^\circ$ .

*Lời giải*

a) Ta có:  $AB = AD$  (gt)



$$CB = CD \text{ (gt)}$$

$\Rightarrow AC$  là đường trung trực của đoạn thẳng  $BD$ .

b) Để thấy  $\Delta ABC = \Delta ADC$  (c.c.c)  $\Rightarrow \widehat{D} = \widehat{B}$ .

Đặt  $\widehat{D} = \widehat{B} = x$ .

Xét tứ giác  $ABCD$ . Theo định lí về tổng các góc của một tứ giác, ta có:

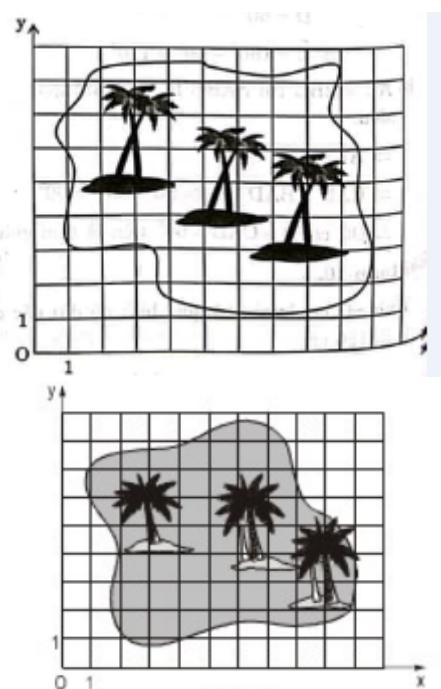
$$\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} + \widehat{D} = 360^\circ \text{ hay } \widehat{A} + \widehat{C} + 2x = 360^\circ$$

$$\Rightarrow 2x = 360^\circ - (\widehat{A} + \widehat{C}) = 360^\circ - (100^\circ + 60^\circ) = 200^\circ$$

$$\Rightarrow x = 100^\circ$$

Vậy  $\widehat{D} = \widehat{B} = 100^\circ$ .

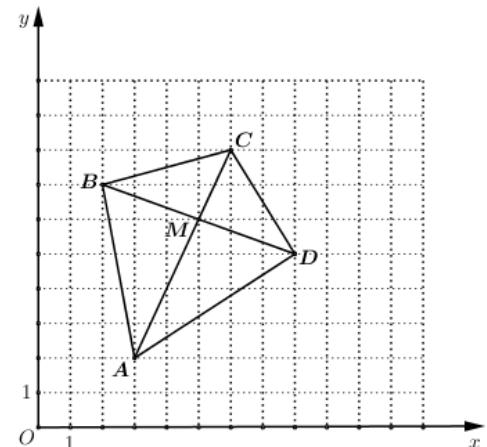
**Bài toán 12: Đố.** Đố em tìm thấy vị trí của “kho báu” trên hình, biết rằng kho báu nằm tại giao điểm các đường chéo của tứ giác  $ABCD$ , trong đó các đỉnh của tứ giác có toạ độ như sau:  $A(3; 2)$ ,  $B(2; 7)$ ,  $C(6; 8)$ ,  $D(8; 5)$ .



### Hướng dẫn

- Từ toạ độ các điểm  $A, B, C, D$  đã cho ta xác định vị trí các điểm đó trên hình vẽ.
- Nối  $A$  với  $C$ ,  $B$  với  $D$ . Gọi giao điểm của hai đường chéo  $AC$  và  $BD$  của tứ giác là  $M$ .

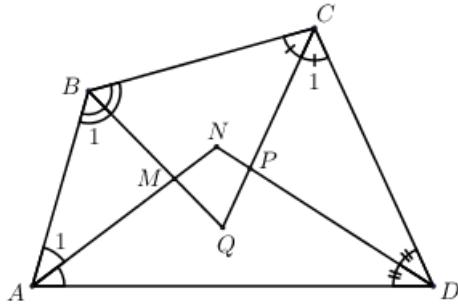
Ta có  $M(5; 6)$ .  $M$  chính là vị trí “kho báu”.



### III. Chứng minh.

**Bài toán 13.** Các đường phân giác trong của tứ giác  $ABCD$  tạo thành một tứ giác. Chứng minh rằng tứ giác đó có các góc đối bù nhau.

### Lời giải



Gọi  $MNPQ$  là tứ giác được tạo thành ta có:

$$\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} + \widehat{D} = 360^\circ$$

$$\Rightarrow \frac{\widehat{A}}{2} + \frac{\widehat{B}}{2} + \frac{\widehat{C}}{2} + \frac{\widehat{D}}{2} = 180^\circ$$

Xét  $\Delta AMB$  có  $\widehat{A}_1 + \widehat{AMB} + \widehat{B}_1 = 180^\circ$

$$\text{Hay } \frac{\widehat{A}}{2} + \widehat{AMB} + \frac{\widehat{B}}{2} = 180^\circ$$

$$\text{Tương tự với } \Delta CPD: \frac{\widehat{C}}{2} + \widehat{CPD} + \frac{\widehat{D}}{2} = 180^\circ$$

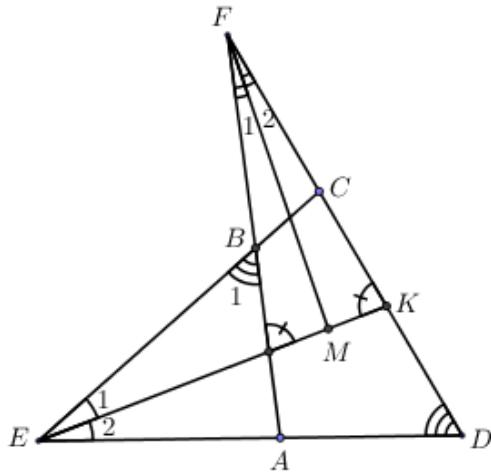
$$\Rightarrow \widehat{AMB} + \widehat{CPD} = 180^\circ$$

$$\text{Từ đó } \widehat{MNP} + \widehat{MQP} = 360^\circ - (\widehat{AMB} + \widehat{CPD}) = 360^\circ - 180^\circ = 180^\circ$$

Vậy tứ giác  $MNPQ$  có các góc đối bù nhau.

**Bài toán 14.** Cho tứ giác  $ABCD$ , các tia  $DA$  và  $CB$  cắt nhau tại  $E$ , các tia  $AB$  và  $DC$  cắt nhau tại  $F$ , các góc đối bù nhau, các đường phân giác của các góc  $CED$  và  $AFD$  cắt nhau tại  $M$ . Chứng minh rằng  $FM \perp EM$ .

#### Lời giải



Gọi  $I, K$  lần lượt là giao điểm của  $EM$  với  $AB$  và  $DC$ .

Ta có  $\widehat{FIK} = \widehat{E}_1 + \widehat{B}_1$  (góc ngoài của  $\Delta EIB$ )

$\widehat{FKI} = \widehat{E}_2 + \widehat{D}$  (góc ngoài của  $\Delta EKD$ )

Mà  $\widehat{E}_1 = \widehat{E}_2$  (giả thiết)

$\widehat{B}_1 = \widehat{D}$  (cùng bù với  $\widehat{ABC}$ )

$\Rightarrow \widehat{FIK} = \widehat{FKI}$  hay  $\Delta FIK$  cân tại  $F$ .

Trong tam giác cân  $FIK$  có  $FM$  là phân giác nên  $FM$  cũng là đường cao  $\Rightarrow FM \perp IK$  hay  $FM \perp EM$ .

**Bài toán 15.** Chứng minh rằng trong một tứ giác tổng các đường chéo lớn hơn nửa chu vi và nhỏ hơn chu vi của tứ giác đó.

### Lời giải

Gọi  $I$  là giao điểm của hai đường chéo  $AC$  và  $BD$ .

Xét  $\Delta ABI$  có  $IA + IB > AB$  (bất đẳng thức tam giác tương tự với  $\Delta CDI$  có  $IC + ID > CD$ )

$$\Rightarrow IA + IC + IB + ID > AB + CD$$

Hay  $AC + BD > AB + CD$

Tương tự  $AC + BD > BC + AD$

$$\Rightarrow 2(AC + BD) > AB + BC + CD + AD$$

$$\Rightarrow AC + BD > \frac{AB + BC + CD + AD}{2} \quad (1)$$

\* Xét  $\Delta ABC$  có  $AB + BC > AC$

$\Delta ACD$  có  $CD + AD > AC$

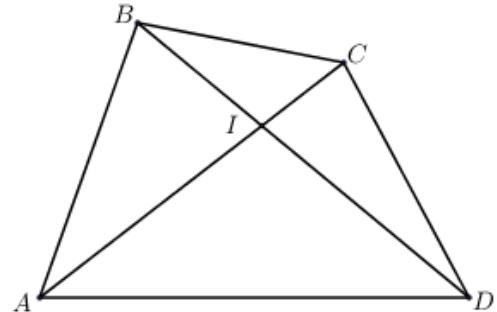
$$\Rightarrow AB + BC + CD + AD > 2AC.$$

Tương tự  $AB + BC + CD + AD > 2BD$ .

$$\Rightarrow 2AB + 2BC + 2CD + 2AD > 2(AC + BD)$$

$$\Rightarrow AB + BC + CD + DA > AC + BD \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có:  $\frac{AB + BC + CD + AD}{2} < AC + BD < AB + BC + CD + DA$ .



## C. BÀI TẬP.

### 3.1.

a) Tứ giác  $ABCD$  có  $\hat{A} + \hat{C} = 180^\circ$  thì  $\hat{B} + \hat{D}$  bằng bao nhiêu độ?

b) Có hay không một tứ giác có 2 góc tù và 2 góc vuông?

c) Có hay không một tứ giác có cả 4 góc đều là góc nhọn?

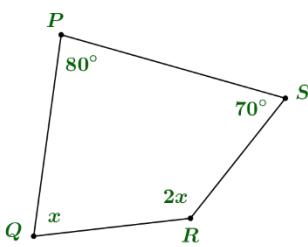
### Lời giải

a) Tổng các góc của một tứ giác bằng  $360^\circ$  mà  $\hat{A} + \hat{C} = 180^\circ \Rightarrow \hat{B} + \hat{D} = 180^\circ$ .

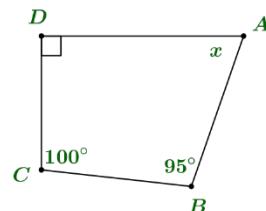
b) Không có vì 2 góc tù thì tổng hai góc đó lớn hơn  $180^\circ$  và có hai góc vuông thì tổng hai góc này bằng  $180^\circ$ . Vậy tổng cả bốn góc lớn hơn  $360^\circ$  (trái với định lí).

c) Không.

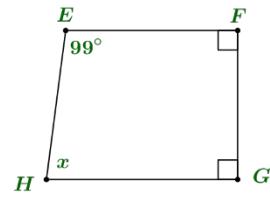
**3.2.** Tìm  $x$  trong mỗi hình tứ giác sau:



a)



b)



c)

### Lời giải

Hình a) Theo định lí: Tổng các góc của một tứ giác, ta có:  $\hat{Q} + \hat{P} + \hat{S} + \hat{R} = 360^\circ$

$$\text{Hay } x + 80^\circ + 70^\circ + 2x = 360^\circ \Rightarrow 3x + 150^\circ = 360^\circ \Rightarrow 3x = 360^\circ - 150^\circ = 210^\circ \Rightarrow x = 210^\circ : 3 \Rightarrow x = 70^\circ.$$

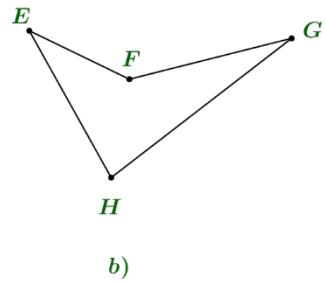
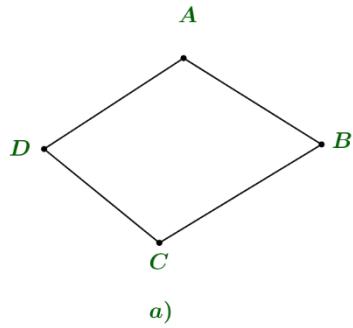
Hình b) Theo định lí: Tổng các góc của một tứ giác, ta có:  $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D} = 360^\circ$

$$\text{Hay } x + 95^\circ + 100^\circ + 90^\circ = 360^\circ \Rightarrow x + 285^\circ = 360^\circ \Rightarrow x = 360^\circ - 285^\circ = 75^\circ.$$

Hình c) Theo định lí: Tổng các góc của một tứ giác, ta có:  $\hat{E} + \hat{F} + \hat{G} + \hat{H} = 360^\circ$

$$\text{Hay } 99^\circ + 90^\circ + 90^\circ + x = 360^\circ \Leftrightarrow x + 279^\circ = 360^\circ \Rightarrow x = 360^\circ - 279^\circ = 81^\circ.$$

**3.3.** Tìm tứ giác lồi trong các hình sau:

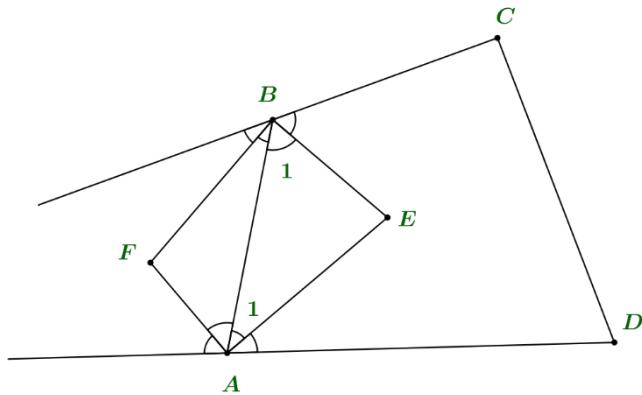


*Lời giải*

Kẻ các đường thẳng chứa các cạnh của một tứ giác như trong hình vẽ ta thấy  $ABCD$  là tứ giác lồi, còn  $EFDH$  không phải là tứ giác lồi.

**3.4.** Cho tứ giác  $ABCD$ , phân giác của góc  $A$  và góc  $B$  cắt nhau tại  $E$ , phân giác ngoài của  $A$  và góc  $B$  cắt nhau tại  $F$ . Chứng minh rằng:  $\widehat{AEB} = \frac{\widehat{C} + \widehat{D}}{2}$  và  $\widehat{AFB} = \frac{\widehat{A} + \widehat{B}}{2}$ .

*Lời giải*



Xét  $\triangle ABE$  có

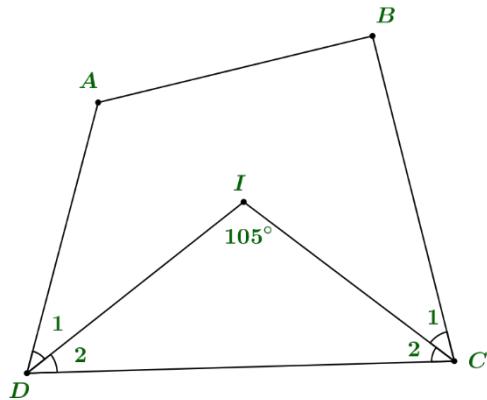
$$\widehat{AEB} = 180^\circ - (\widehat{A}_1 + \widehat{B}_1) = 180^\circ - \left( \frac{\widehat{A}}{2} + \frac{\widehat{B}}{2} \right) = \frac{360^\circ - (\widehat{A} + \widehat{B})}{2}.$$

$$\text{Mà } \widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} + \widehat{D} = 360^\circ \Rightarrow \widehat{AEB} = \frac{\widehat{C} + \widehat{D}}{2}.$$

$$\text{Chứng minh tương tự ta có: } \widehat{AFB} = \frac{\widehat{A} + \widehat{B}}{2}.$$

**3.5.** Cho tứ giác  $ABCD$  có  $\widehat{A} - \widehat{B} = 30^\circ$ , các tia phân giác của các góc  $C$  và  $D$  cắt nhau tại  $I$ , biết  $\widehat{CID} = 105^\circ$ . Tính số đo các góc  $A$  và  $B$ .

*Lời giải*



Xét  $\triangle CID$  có  $\widehat{CID} = 105^\circ$  (gt)  $\Rightarrow \hat{D}_2 + \hat{C}_2 = 180^\circ - 105^\circ = 75^\circ$ .

mà  $DI$  và  $CI$  là phân giác của góc  $D$  và  $C$   $\Rightarrow \hat{D} + \hat{C} = 150^\circ$ .

Xét tứ giác  $ABCD$  có  $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D} = 360^\circ$

$$\Rightarrow \hat{A} + \hat{B} = 360^\circ - (\hat{C} + \hat{D}) = 360^\circ - 150^\circ = 210^\circ$$

mà  $\hat{A} - \hat{B} = 30^\circ$  (gt)  $\Rightarrow 2\hat{A} = 240^\circ \Rightarrow \hat{A} = 120^\circ \Rightarrow \hat{B} = 120^\circ - 30^\circ = 90^\circ$ .

**☞ HẾT ☞**

## BÀI 11: HÌNH THANG CÂN

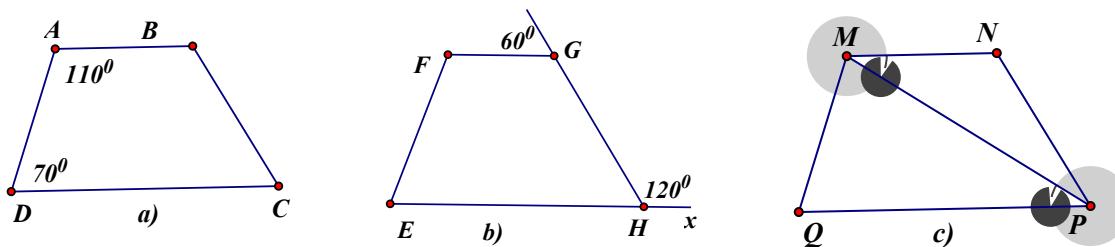
### A. KIẾN THỨC CÀN NHÓ

- Hình thang là tứ giác có hai cạnh đối song song.
  - Hình thang có một góc vuông là hình thang vuông.
  - Hình thang cân là **hình thang** có hai góc kề một đáy bằng nhau.
- Trong hình thang cân, hai cạnh bên bằng nhau.
- Trong hình thang cân, hai cạnh bên bằng nhau.
- Nếu một hình thang có hai đường chéo bằng nhau thì hình thang đó là hình thang cân.

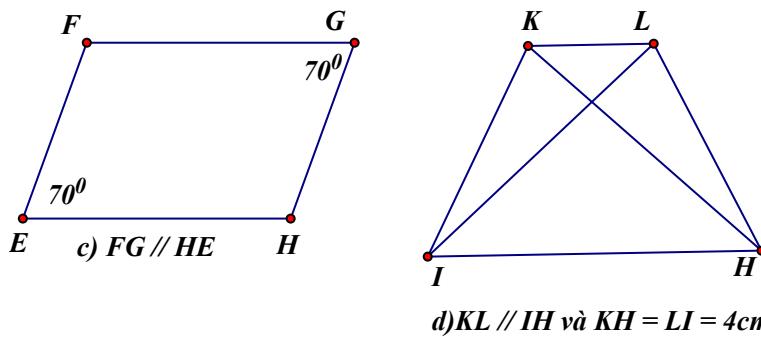
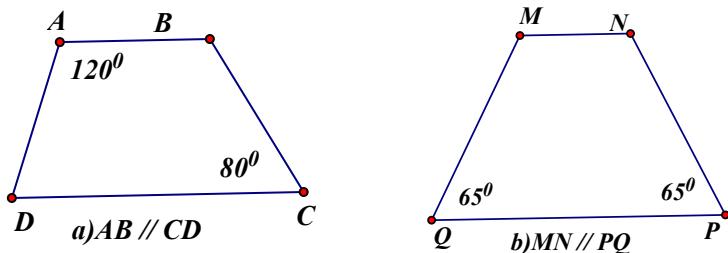
### B. PHÂN LOẠI CÁC BÀI TẬP

#### I. Nhận biết hình thang – Hình thang cân:

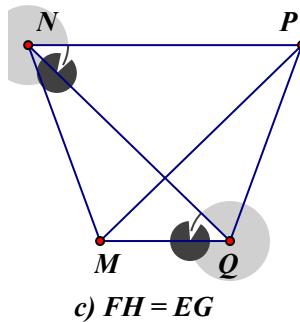
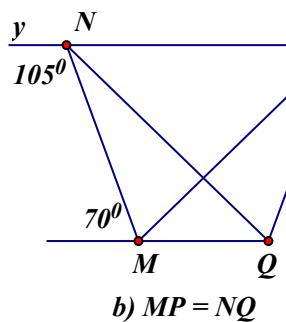
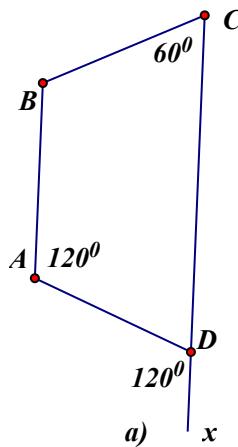
**Bài toán 1:** Các tứ giác  $ABCD$ ,  $EFGH$ ,  $MNPQ$  trong các hình vẽ sau có phải là hình thang không? Vì sao?



**Bài toán 2:** Hình thang trong các hình vẽ sau có là hình thang cân không? Vì sao?

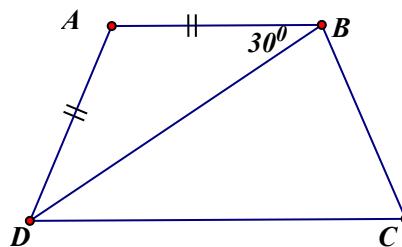


**Bài toán 3:** Các tứ giác trong các hình vẽ sau có phải là hình thang cân không? Vì sao?

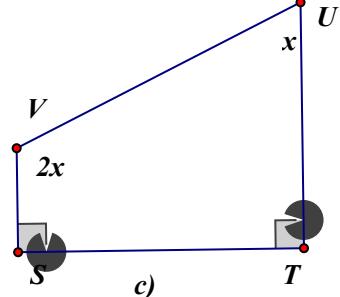
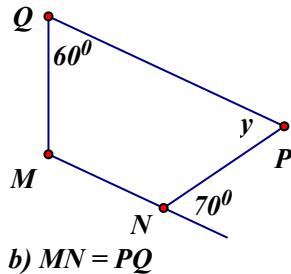
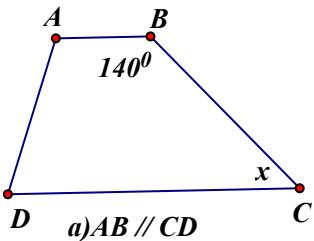


## II. Tính toán:

**Bài toán 4:** Cho hình thang cân  $ABCD$  ( $AB \parallel CD$ ) có  $AB = CD$ ,  $\widehat{ABD} = 30^\circ$ . Tính số đo các góc của hình thang đó.



**Bài toán 5:** Tìm  $x$  và  $y$  ở các hình vẽ sau.



**Bài toán 6:** Cho hình thang vuông  $ABCD$  có  $\widehat{A} = \widehat{D} = 90^\circ$ ,  $AB = AD = 3\text{cm}$ ,  $CD = 6\text{cm}$ . Tính các góc còn lại của hình thang.

**Bài toán 7:** Cho hình thang  $ABCD$  ( $AB \parallel CD$ ) và  $\widehat{D} = 60^\circ$ .

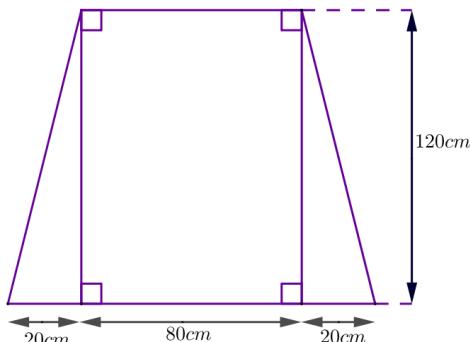
a) Tính góc  $\widehat{A}$ .

b) Tính góc  $\widehat{B}$  và  $\widehat{C}$  biết tỉ số giữa hai góc là  $\frac{5}{4}$ .

**Bài toán 8:** Cho hình thang cân  $ABCD$  ( $AB \parallel CD$ ) có  $AB = AD$  và  $BD = CD$ . Tính các góc của hình thang cân.

**Bài toán 9:** Cho hình thang cân  $ABCD$  ( $AB \parallel CD$ ) có  $\widehat{D} = 60^\circ$ ,  $BD$  là tia phân giác của  $\widehat{D}$ . Biết chu vi hình thang bằng 20cm. Tính độ dài các cạnh của hình thang.

**Bài toán 10:** Một ô cửa sổ có dạng hình chữ nhật với chiều dài là 120cm và chiều rộng là 80cm. Người ta mở rộng ô cửa đó bằng cách tăng độ dài cạnh dưới về hai bên, mỗi bên 20cm (mô tả ở hình vẽ). Sau khi mở rộng thì ô cửa đó có dạng là hình gì? Tính diện tích của ô cửa sau khi mở rộng?



### III. Chứng minh:

**Bài toán 11:** Cho tam giác  $ABC$ , trên tia  $AC$  lấy  $B'$  sao cho  $AB' = AB$ , trên tia  $AB$  lấy  $C'$  sao cho  $AC' = AC$ . Chứng minh  $BB'CC'$  là hình thang.

**Nhận xét:** Nếu ta lấy  $B'$ ,  $C'$  lần lượt trên tia đối của các tia  $AB$ ,  $AC$  sao cho  $AB' = AC$ ,  $AC' = AB$ . Ta sẽ có tứ giác  $BCB'C'$  là hình thang vì có cặp góc so le trong bằng nhau. Chứng minh dựa vào hai tam giác cân  $\Delta AB'C$  và  $\Delta ABC'$  chung đỉnh  $A$ .

**Bài toán 12:** Cho tứ giác  $ABCD$  có  $CB = CD$ , đường chéo  $BD$  là tia phân giác của góc  $\widehat{ADC}$ . Chứng minh rằng  $ABCD$  là hình thang.

**Bài toán 13:** Cho tam giác nhọn  $ABC$  có  $AH$  là đường cao. Tia phân giác của góc  $B$  cắt  $AC$  tại  $M$ .

Từ  $M$  kẻ đường thẳng vuông góc với  $AH$  cắt  $AB$  tại  $N$ . Chứng minh rằng:

- a) Tứ giác  $BCMN$  là hình thang.
- b)  $BN = MN$ .

**Bài toán 14:** Cho tứ giác  $ABCD$  có  $AB < CD$ , hai đường chéo  $AC$  và  $BD$  bằng nhau,  $\widehat{BAC} = \widehat{ACD}$ . Chứng minh tứ giác  $ABCD$  là hình thang cân.

**Bài toán 15:** Cho tam giác  $\Delta ABC$  cân tại  $A$ , trên các cạnh  $AB$ ,  $AC$  lần lượt lấy các điểm  $D$  và  $E$  sao cho  $AD = AE$ .

a) Chứng minh tứ giác  $BDEC$  là hình thang cân.

b) Tính các góc của hình thang đó biết  $\hat{A} = 70^\circ$ .

**Nhận xét:** Trường hợp đặc biệt khi  $D$ ,  $E$  là trung điểm của hai cạnh  $AB$ ,  $AC$  hay  $BE$ ,  $CD$  là hai đường trung tuyến của tam giác cân  $ABC$  ta có bài toán sau:

**Bài toán 16:** Cho tam giác  $\Delta ABC$  cân tại  $A$ , hai đường trung tuyến  $BE$  và  $DC$ . Chứng minh tứ giác  $BDEC$  là hình thang cân.

**Nhận xét:** Trường hợp hai đường trung tuyến  $BE$  và  $DC$  trở thành hai đường phân giác ta có bài toán sau:

**Bài toán 17:** Cho tam giác  $\Delta ABC$  cân tại  $A$ , hai đường phân giác  $BE$  và  $DC$ . Chứng minh rằng:

a)  $BDEC$  là hình thang cân.

b)  $DE = DB$  (đây nhỏ  $DE$ , cạnh bên  $DB$ ).

**Nhận xét:** Cả ba bài toán trên ta đều sử dụng tính chất của hai tam giác cân chung đỉnh  $A$ . Nếu trường hợp  $BE$  và  $DC$  là các đường cao của tam giác cân  $\Delta ABC$  ta có bài toán sau:

**Bài toán 18:** Cho tam giác  $\Delta ABC$  cân tại  $A$ , hai đường cao  $BE$  và  $DC$ . Chứng minh rằng  $BDEC$  là hình thang cân.

**Nhận xét:** Nếu kẻ trung tuyến  $AM$ , trên  $AM$  lấy  $N$  bất kì kẻ  $BN$  và  $CK$  cắt hai cạnh  $AB$ ,  $AC$ , ta cũng có hình thang cân song phần chứng minh hơi phức tạp hơn một chút.

**Bài toán 19.** Cho tam giác  $ABC$  cân tại  $A$ , trung tuyến  $AM$ . Trên tia  $AM$  lấy điểm  $N$ ,  $BN$  cắt  $AC$  ở  $D$ ,  $CN$  cắt  $AB$  ở  $E$ . Chứng minh  $BEDC$  là hình thang cân.

**Bài toán 20.** Tam giác  $ABC$  cân tại  $A$ ,  $M$  là điểm bất kì nằm giữa hai điểm  $A$  và  $B$ . Trên tia đối của tia  $CA$  lấy điểm  $N$  sao cho  $CN = BM$ . Vẽ  $ME$  và  $NF$  lần lượt vuông góc với đường thẳng  $BC$ . Gọi  $I$  là giao điểm của  $MN$  và  $BC$ .

- a) Chứng minh:  $IE = IF$ .
- b) Trên cạnh  $AC$  lấy  $D$  sao cho  $CD = CN$ . Chứng minh  $BMDC$  là hình thang cân.
- Bài toán 21.** Cho hình thang cân  $ABCD$  có đáy nhỏ  $AB$  bằng cạnh bên  $AD$ . Chứng minh rằng  $CA$  là tia phân giác của góc  $BCD$ .
- Bài toán 22.** Cho hình chữ nhật  $ABCD$ . Trên cạnh  $AB$  lấy hai điểm  $M, N$  sao cho  $AM = NB < \frac{1}{2}AB$ .
- Chứng minh  $MNCD$  là hình thang cân.
- Bài toán 23.** Cho hình thang  $ABCD$  ( $AB // CD$ ). Kẻ đường thẳng vuông góc với  $AC$  tại  $C$  và đường thẳng vuông góc với  $BD$  tại  $D$ , hai đường thẳng này cắt nhau tại  $E$ . Chứng minh rằng nếu  $EC = ED$  thì hình thang  $ABCD$  là hình thang cân.
- Bài toán 24.** Hai tia phân giác của góc  $A, B$  của hình thang cân  $ABCD$  ( $AB // CD$ ) cắt nhau tại điểm  $E$  trên cạnh đáy  $CD$ . Chứng minh rằng  $EC = ED$ .
- Bài toán 25.** Cho hình thang  $ABCD$  ( $AB // CD, AB < CD$ ), các tia phân giác của các góc  $A$  và  $D$  cắt nhau tại  $I$ , các tia phân giác của góc  $B$  và  $C$  cắt nhau tại  $J$ .
- a) Chứng minh  $AI \perp DI$  và  $BJ \perp CJ$ .
- b) Gọi  $E$  là giao điểm của  $AI$  và  $BJ$ , giả sử  $E$  thuộc cạnh  $CD$ . Chứng minh  $CD = AD + BC$ .
- Bài toán 26.** Cho hình thang  $ABCD$  ( $AB // CD$ ) trong đó hai đường phân giác của các góc  $A$  và  $B$  cắt nhau tại  $K$  thuộc đáy  $CD$ . Chứng minh rằng tổng hai cạnh bên bằng đáy  $CD$  của hình thang.
- Bài toán 27.** Hình thang cân  $ABCD$  ( $AB // CD$ ) có các đường thẳng  $AD, BC$  cắt nhau tại  $I$ , các đường thẳng  $AC, BD$  cắt nhau tại  $J$ . Chứng minh rằng đường thẳng  $IJ$  là đường trung trực của đoạn thẳng  $AB$ .
- Bài toán 28.** Cho  $M$  là một điểm nằm trong tam giác  $ABC$ . Qua  $M$  kẻ các đường thẳng song song với  $BC, CA, AB$  lần lượt cắt  $AB, BC, CA$  tại các điểm  $P, Q, R$ .
- a) Chứng minh tứ giác  $APMR$  là hình thang cân.
- b) Chứng minh chu vi tam giác  $PQR$  bằng tổng độ dài  $MA + MB + MC$ .
- c) Hỏi với vị trí nào của  $M$  thì tam giác  $PQR$  là tam giác đều?
- C. BÀI TẬP**
- Bài 3.6.**
- a) Tứ giác  $ABCD$  trong Hình vẽ a) có phải là hình thang vuông không? Vì sao?
- b) Hình thang trong Hình vẽ b) có phải là hình thang cân không? Vì sao?
- 
- Bài 3.7.** Cho hình thang  $ABCD$  ( $AB // CD$ ),  $E$  là trung điểm của  $BC$  và  $\widehat{AED} = 90^\circ$ . Gọi  $K$  là giao điểm của  $AE$  và  $DC$ . Chứng minh rằng:
- a)  $\Delta ABE = \Delta KCE$ .
- b)  $DE$  là tia phân giác của góc  $D$ .
- Bài 3.8.** Cho hình thang cân  $ABCD$  có  $\hat{A} = 60^\circ$  và  $BC // AD$ . Đường chéo  $AC$  là tia phân giác của góc  $A$ .
- a) Chứng minh  $\Delta ABC$  cân.
- b) Chứng minh  $CD \perp CA$ .

**Bài 3.9.** Cho  $\Delta ABC$  cân tại  $A$ , có  $I$  là trung điểm của cạnh đáy  $BC$ . Gọi  $M$  là một điểm bất kì thuộc  $AI$ ,  $BM$  và  $CM$  lần lượt cắt  $AC$  và  $AB$  tại  $E$  và  $D$ .

a) Chứng tỏ rằng: Tứ giác  $BDEC$  là hình thang cân.

b) Xác định vị trí của điểm  $M$  trên  $AI$  để  $BD = DE = EC$ .

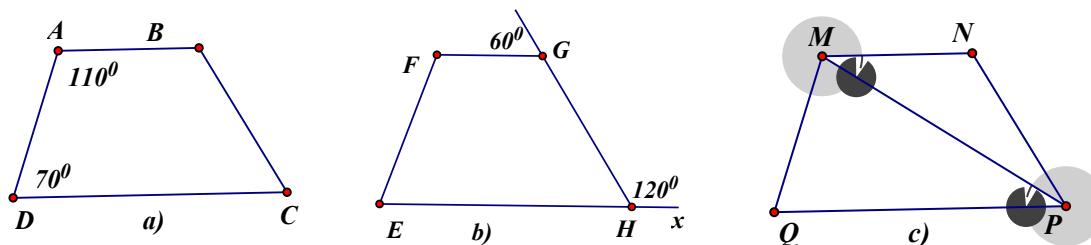
**Bài 3.10.** Cho tam giác đều  $ABC$ . Vẽ đường vuông góc với  $BC$  tại  $C$  cắt  $AB$  tại  $E$ . Vẽ đường vuông góc với  $AB$  tại  $A$  cắt  $BC$  tại  $F$ . Chứng minh  $ACFE$  là hình thang cân.

## DÁP ÁN THAM KHẢO

### B. PHÂN LOẠI CÁC BÀI TẬP

#### I.Nhận biết hình thang – Hình thang cân:

**Bài toán 1:** Các tứ giác  $ABCD$ ,  $EFGH$ ,  $MNPQ$  trong các hình vẽ sau có phải là hình thang không? Vì sao?



#### Lời giải

Hình a) Ta có  $\widehat{A} = 110^\circ$ ,  $\widehat{D} = 70^\circ$  là hai góc trong cùng phía.

Mà  $\widehat{A} + \widehat{D} = 110^\circ + 70^\circ = 180^\circ \Rightarrow AB \parallel CD$ . Do đó tứ giác là hình thang (tứ giác có hai cạnh đối song song).

Hình b) Ta có  $\widehat{E} + \widehat{H} = 180^\circ$  (kề bù)

$$\Rightarrow \widehat{E} = 180^\circ - \widehat{H} = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ.$$

Khi đó  $\widehat{G}$  và  $\widehat{F}$  là hai góc đồng vị, mà  $\widehat{G} = \widehat{E} = 60^\circ \Rightarrow FG \parallel EH$ .

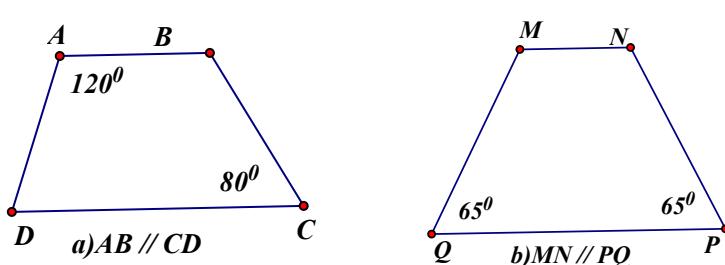
Chứng tỏ tứ giác  $EFGH$  là hình thang (tứ giác có hai cạnh đối song song)

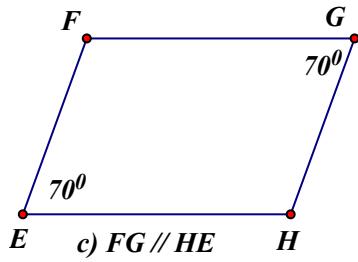
Hình c) Ta có  $\widehat{M} + \widehat{P} = 180^\circ$  (kề bù)

$$\Rightarrow \widehat{M} = 180^\circ - \widehat{P} = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ.$$

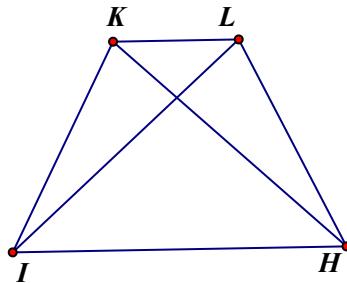
Chứng tỏ tứ giác  $MNPQ$  là hình thang (tứ giác có hai cạnh đối song song)

**Bài toán 2:** Hình thang trong các hình vẽ sau có là hình thang cân không? Vì sao?





c)  $FG \parallel HE$



d)  $KL \parallel IH$  và  $KH = LI = 4\text{cm}$

### Lời giải

Hình a)  $ABCD$  là hình thang có  $(AB \parallel CD) \Rightarrow \widehat{D} + \widehat{A} = 180^\circ$  (cặp góc trong cùng phía)

$$\Rightarrow \widehat{D} = 180^\circ - \widehat{A} = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$$

Hình thang  $ABCD$  có  $\widehat{D} = 60^\circ$ ,  $\widehat{C} = 80^\circ$  do đó không phải là hình thang cân (Hai góc kề một đáy không bằng nhau).

Hình b)  $MNPQ$  là hình thang có  $(MN \parallel PQ)$  có  $\widehat{Q} + \widehat{P} = 65^\circ$  nên  $MNPQ$  hình thang cân (Hai góc kề một đáy bằng nhau).

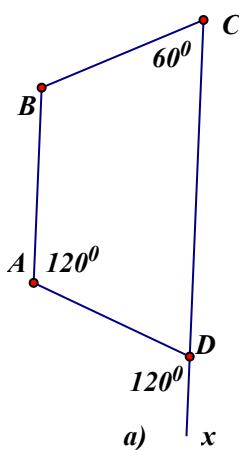
Hình c)  $EFGH$  là hình thang có  $(FG \parallel EH)$  có  $\widehat{E} + \widehat{F} = 180^\circ$  (cặp góc trong cùng phía)

$$70^\circ + \widehat{F} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{F} = 180^\circ - 70^\circ = 110^\circ$$

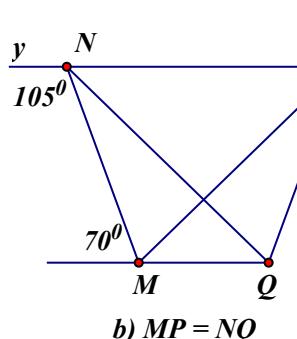
Hình thang  $EFGH$  có  $\widehat{F} = 110^\circ$ ,  $\widehat{G} = 70^\circ$  do đó không phải là hình thang cân.

Hình d) Hình thang  $IKLH$  có  $(KL \parallel IH)$  và  $KH = LI = 4\text{cm}$  là hình thang cân (Hình thang có hai đường chéo bằng nhau).

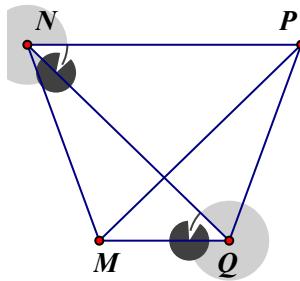
**Bài toán 3:** Các tứ giác trong các hình vẽ sau có phải là hình thang cân không? Vì sao?



a)



b)  $MP = NQ$



c)  $FH = EG$

### Lời giải

Hình a) Ta có  $\widehat{A}$  và  $\widehat{ADx}$  là hai góc so le trong, mà  $\widehat{A} = \widehat{ADx} = 120^\circ \Rightarrow AB \parallel CD$ .

nên tứ giác  $ABCD$  là hình thang (tứ giác có hai cạnh đối song song).

Lại có  $\widehat{ADC} + \widehat{ADx} = 180^\circ$  (kề bù) hay  $\widehat{ADC} = 180^\circ - \widehat{ADx} = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$

Khi đó  $\widehat{ADC} = \widehat{C} = 60^\circ$ .

Do đó hình thang  $ABCD$  là hình thang cân (Hai góc kề một đáy bằng nhau).

Hình b) Ta có  $\widehat{NMx}$  và  $\widehat{MNy}$  là hai góc trong cùng phía.

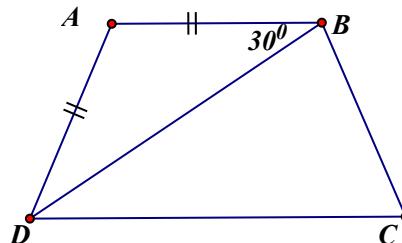
mà  $\widehat{NMx} + \widehat{MNy} = 75^\circ + 105^\circ = 180^\circ$  nên  $NP \parallel MQ$  hay tứ giác  $MNPQ$  là hình thang có  $NQ = MP$ .

Do đó  $MNPQ$  là hình thang cân (Hình thang có hai đường chéo bằng nhau).

**Hình c)** Ta có  $\widehat{GFH}$  và  $\widehat{FHE}$  là hai góc so le trong mà  $\widehat{GFH} = \widehat{FHE}$   
 $\Rightarrow FG // EH$  nên  $EFGH$  là hình thang (tứ giác có hai cạnh đối song song). Lại có  $FH = EQ$ .  
 Do đó  $EFGH$  là hình thang cân (Hình thang có hai đường chéo bằng nhau).

## II. Tính toán:

**Bài toán 4:** Cho hình thang cân  $ABCD$  ( $AB // CD$ ) có  $AB = CD$ ,  $\widehat{ABD} = 30^\circ$ . Tính số đo các góc của hình thang đó.



### Lời giải

Ta có  $AB = AD$  (gt) nên  $\Delta ABD$  cân tại  $A \Rightarrow \widehat{ABD} = \widehat{B} = 30^\circ$

Lại có  $AB // CD$  (gt)  $\Rightarrow \widehat{BDC} = \widehat{ABD} = 30^\circ$

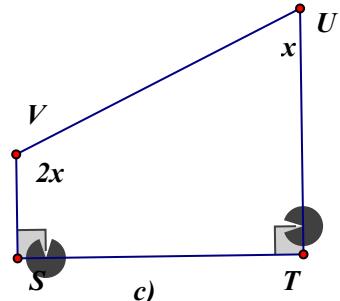
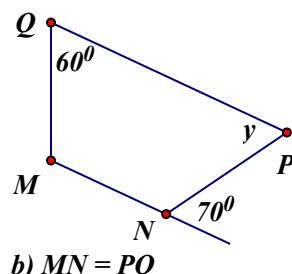
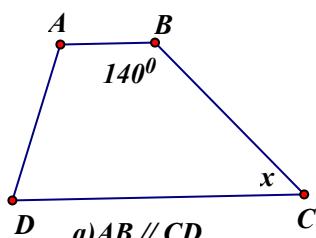
$$\Rightarrow \widehat{ADC} = \widehat{ABD} + \widehat{BDC} = 30^\circ + 30^\circ = 60^\circ$$

Vì  $ABCD$  là hình thang cân ( $AB // CD$ ) nên  $\widehat{C} = \widehat{ADC} = 60^\circ$ .

$\widehat{ADC}$  và  $\widehat{A}$  là hai góc trong cùng phía, ta có  $\widehat{A} + \widehat{ADC} = 180^\circ$ .

$$\Rightarrow \widehat{A} = 180^\circ - \widehat{ADC} = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ \Rightarrow \widehat{ABC} = \widehat{A} = 120^\circ.$$

**Bài toán 5:** Tìm  $x$  và  $y$  ở các hình vẽ sau.



### Lời giải

**Hình a)** Ta có  $\widehat{C}$  và  $\widehat{B}$  là hai góc trong cùng phía, mà  $AB // CD$

$$\Rightarrow \widehat{C} + \widehat{B} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{C} = 180^\circ - \widehat{B} = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$$

Vậy  $x = 40^\circ$ .

**Hình b)** Ta có  $\widehat{M}$  và  $\widehat{Q}$  là hai góc trong cùng phía mà  $NM // PQ$  (gt)

$$\Rightarrow \widehat{M} + \widehat{Q} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{M} = 180^\circ - \widehat{Q} = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$$

Có  $\widehat{N}$  và  $\widehat{P}$  là hai góc so le trong, mà  $NM // PQ$  (gt)  $\Rightarrow \widehat{P} = \widehat{N} = 70^\circ$

Vậy  $y = 70^\circ$ .

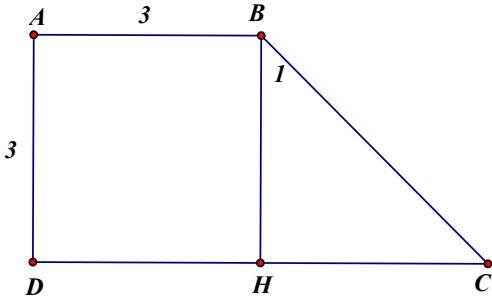
**Hình c)** Ta có  $SV // TU (\perp ST)$  nên  $SVUT$  là hình thang vuông.

$\widehat{V}$  và  $\widehat{U}$  là hai góc trong cùng phía  $\widehat{V} + \widehat{U} = 180^\circ$

$$\text{Hay } 2x + x = 180^\circ \Rightarrow 3x = 180^\circ \Rightarrow x = 60^\circ.$$

**Bài toán 6:** Cho hình thang vuông  $ABCD$  có  $\hat{A} = \hat{D} = 90^\circ$ ,  $AB = AD = 3\text{cm}$ ,  $CD = 6\text{cm}$ . Tính các góc còn lại của hình thang.

*Lời giải*



Kẻ đường cao  $BH$  ta có  $ABHD$  là hình thang có hai cạnh bên song song.

$$\Rightarrow DH = AB = 3\text{cm}$$

Và  $BH = AD = 3\text{cm}$ .

$$\Rightarrow HC = CD - DH = 6 - 3 = 3\text{cm}$$

Do đó  $\Delta BHC$  vuông cân tại  $H$

$$\Rightarrow \hat{B}_1 = \hat{C} = 45^\circ$$

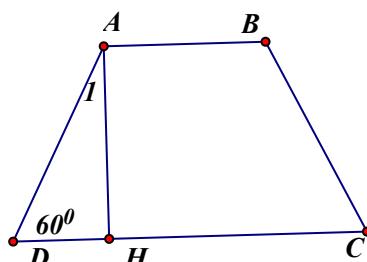
$$\Rightarrow \widehat{ABC} = \widehat{ABH} + \hat{B}_1 = 90^\circ + 45^\circ = 135^\circ.$$

**Bài toán 7:** Cho hình thang  $ABCD$  ( $AB // CD$ ) và  $\hat{D} = 60^\circ$ .

a) Tính góc  $\hat{A}$ .

b) Tính góc  $B$  và  $\hat{C}$  biết tỉ số giữa hai góc là  $\frac{5}{4}$ .

*Lời giải*



a) Kẻ đường cao  $AH$  xét tam giác vuông  $AHD$  có  $\hat{A}_1 = 30^\circ$  (vì  $\hat{D} = 60^\circ$ )

$$\Rightarrow \widehat{DAB} = \hat{A}_1 + \widehat{HAB} = 30^\circ + 90^\circ = 120^\circ$$

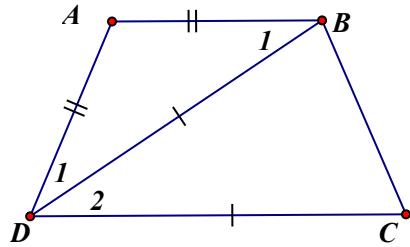
b) Ta có  $\frac{\hat{B}}{\hat{C}} = \frac{5}{4}$  và  $\hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$  (trong cùng phía)

Theo tính chất dãy tỉ số bằng nhau:  $\frac{\hat{B}}{5} = \frac{\hat{C}}{4} = \frac{\hat{B} + \hat{C}}{5+4} = \frac{180^\circ}{9} = 20^\circ$

$$\Rightarrow \hat{B} = 20^\circ \cdot 5 = 100^\circ; \hat{C} = 20^\circ \cdot 4 = 80^\circ.$$

**Bài toán 8:** Cho hình thang cân  $ABCD$  ( $AB // CD$ ) có  $AB = AD$  và  $BD = CD$ . Tính các góc của hình thang cân.

*Lời giải*



Ta có:  $AB = AD$  (gt) nên  $\Delta ABD$  cân  $\Rightarrow \widehat{B_1} = \widehat{D_1}$ .

Lại có  $AB \parallel CD$  (gt)  $\Rightarrow \widehat{B_1} = \widehat{D_2}$  (so le trong)  $\Rightarrow \widehat{D_1} = \widehat{D_2}$  hay  $BD$  là phân giác của  $\widehat{ADC}$ .

$$\Delta BCD \text{ cân (gt)} \Rightarrow \widehat{BCD} = \widehat{CBD} = \frac{180^\circ - \widehat{D}_2}{2}$$

$$\Rightarrow 2\widehat{BCD} = 180^\circ - \widehat{D}_2$$

$$\Rightarrow 2\widehat{ADC} = 180^\circ - \widehat{D}_2 (\widehat{ADC} = \widehat{BCD})$$

$$\Rightarrow 2.2\widehat{D}_2 = 180^\circ - \widehat{D}_2 (\widehat{ADC} = 2\widehat{D}_2)$$

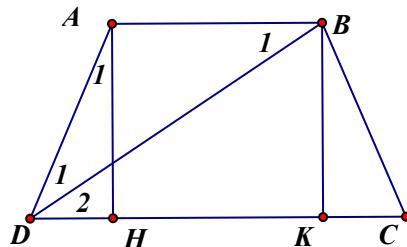
$$5\widehat{D}_2 = 180^\circ \Rightarrow \widehat{D}_2 = 36^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{ADC} = 2\widehat{D}_2 = 72^\circ \text{ và } \widehat{BCD} = 72^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{BAD} = \widehat{ABC} = 180^\circ - 72^\circ = 108^\circ$$

**Bài toán 9:** Cho hình thang cân  $ABCD$  ( $AB \parallel CD$ ) có  $\widehat{D} = 60^\circ$ ,  $BD$  là tia phân giác của  $\widehat{D}$ . Biết chu vi hình thang bằng 20cm. Tính độ dài các cạnh của hình thang.

*Lời giải*



Ta có  $\widehat{D}_1 = \widehat{D}_2$  ( $BD$  là tia phân giác của  $\widehat{D}$ )

$\widehat{B}_1 = \widehat{D}_2$  (so le trong do  $AB \parallel CD$ )

$\Rightarrow \widehat{D}_1 = \widehat{B}_1$  hay  $\Delta ABD$  cân tại  $A$ .

$\Rightarrow AB = AD = BC$  (1) (Vì  $ABCD$  là hình thang cân).

Kẻ  $AH$ ,  $BK$  cùng vuông góc với  $DC$ . Ta có  $ABKH$  là hình thang có hai cạnh bên song song nên  $HK = AB$  (2).

Xét tam giác vuông  $AHD$  có  $\widehat{D} = 60^\circ$  (gt)

$$\Rightarrow \widehat{A}_1 = 30^\circ \Rightarrow DH = \frac{AD}{2}$$

$$\Rightarrow KC = DH = \frac{AD}{2} \Rightarrow DH + KC = AD \quad (3)$$

Gọi chu vi hình thang là  $P$  ta có

$$P = AB + BC + KC + KH + DH + AD$$

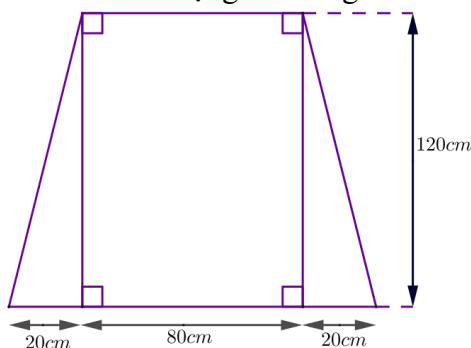
$$P = AB + BC + (DH + KC) + AB + AD$$

Từ (1),(2),(3)  $\Rightarrow P = 5AB$

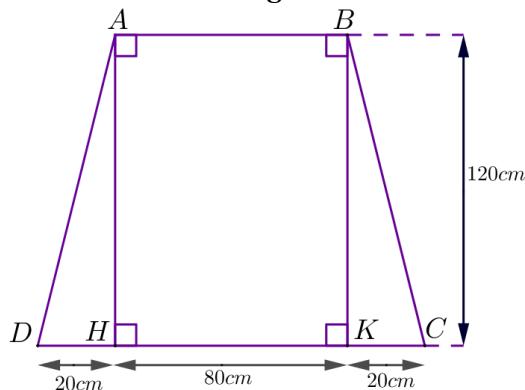
$$5AB = 20 \Rightarrow AB = 4(\text{cm})$$

Do đó  $AD = BC = AB = 4\text{cm}$  và  $DC = 2AB = 8\text{cm}$ .

**Bài toán 10:** Một ô cửa sổ có dạng hình chữ nhật với chiều dài là 120cm và chiều rộng là 80cm . Người ta mở rộng ô cửa đó bằng cách tăng độ dài cạnh dưới về hai bên, mỗi bên 20cm ( mô tả ở hình vẽ). Sau khi mở rộng thì ô cửa đó có dạng là hình gì? Tính diện tích của ô cửa sau khi mở rộng?



**Lời giải**



Sau khi mở rộng thì ô cửa đó có dạng hình thang cân (xem hình vẽ, có đáy nhỏ  $AB = 80(\text{cm})$ , đáy lớn

$$CD = 80 + 2.20 = 120(\text{cm}) \text{ và chiều cao } BK = 120(\text{cm})$$

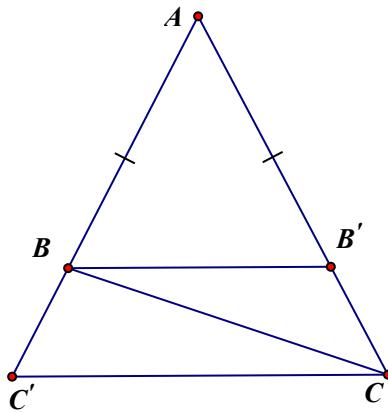
Do đó diện tích của ô cửa sổ đó sau khi mở rộng là:

$$S_{ABCD} = \frac{(CD + AB) \cdot BK}{2} = \frac{(120 + 80) \cdot 120}{2} = 12000(\text{cm}^2)$$

### III. Chứng minh:

**Bài toán 11:** Cho tam giác  $ABC$  , trên tia  $AC$  lấy  $B'$  sao cho  $AB' = AB$  , trên tia  $AB$  lấy  $C'$  sao cho  $AC' = AC$  . Chứng minh  $BB'CC'$  là hình thang.

**Lời giải**



Ta có  $AB' = AB$  (gt) nên  $\Delta ABB'$  cân tại  $A$ .

$$\Rightarrow \widehat{ABB'} = \widehat{AB'B} = \frac{180^\circ - \widehat{A}}{2} \quad (1)$$

$$\text{Tương tự với } \Delta ACC' \text{ ta có } \Rightarrow \widehat{ACC'} = \widehat{AC'C} = \frac{180^\circ - \widehat{A}}{2} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2)} \Rightarrow \widehat{ABB'} = \widehat{AC'C} = \frac{180^\circ - \widehat{A}}{2}$$

$\Rightarrow BB' \parallel CC'$  (cặp góc đồng vị bằng nhau)

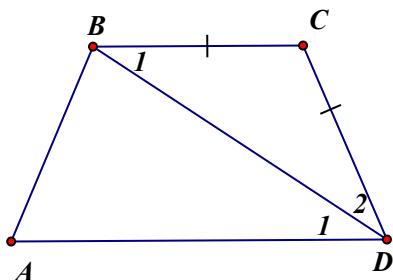
$\Rightarrow BB'CC'$  là hình thang.

**Nhận xét:** Nếu ta lấy  $B'$ ,  $C'$  lần lượt trên tia đối của các tia  $AB$ ,  $AC$  sao cho  $AB' = AC$ ,  $AC' = AB$ .

Ta sẽ có tứ giác  $BCB'C'$  là hình thang vì có cặp góc so le trong bằng nhau. Chứng minh dựa vào hai tam giác cân  $\Delta AB'C$  và  $\Delta ABC'$  chung đỉnh  $A$ .

**Bài toán 12:** Cho tứ giác  $ABCD$  có  $CB = CD$ , đường chéo  $BD$  là tia phân giác của góc  $\widehat{ADC}$ . Chứng minh rằng  $ABCD$  là hình thang.

*Lời giải*



$\Delta BDC$  cân tại  $C$  ( $CB = CD$ )  $\Rightarrow \widehat{B_1} = \widehat{D_2}$  mà  $\widehat{D_1} = \widehat{D_2}$  (gt)  $\Rightarrow \widehat{B_1} = \widehat{D_1}$ .

Mà  $\widehat{B_1}$  và  $\widehat{D_1}$  ở vị trí so le trong  $\Rightarrow BC \parallel AD$

Vậy  $ABCD$  là hình thang.

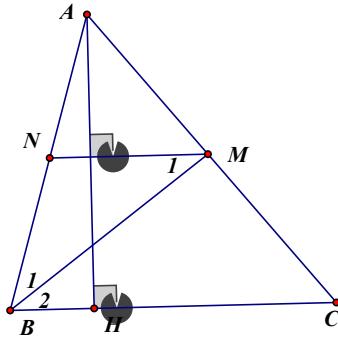
**Bài toán 13:** Cho tam giác nhọn  $ABC$  có  $AH$  là đường cao. Tia phân giác của góc  $B$  cắt  $AC$  tại  $M$ .

Từ  $M$  kẻ đường thẳng vuông góc với  $AH$  cắt  $AB$  tại  $N$ . Chứng minh rằng:

a) Tứ giác  $BCMN$  là hình thang.

b)  $BN = MN$ .

*Lời giải*



a) Ta có  $BC \perp AH$  (gt);  $MN \perp AH$  (gt)  $\Rightarrow BC \parallel MN$

$\Rightarrow$  Tứ giác  $BCMN$  là hình thang (tứ giác có hai cạnh đối song song)

b) Ta có  $BC \parallel MN$  (cmt)  $\Rightarrow \widehat{M}_1 = \widehat{B}_2$  (cặp góc so le trong)

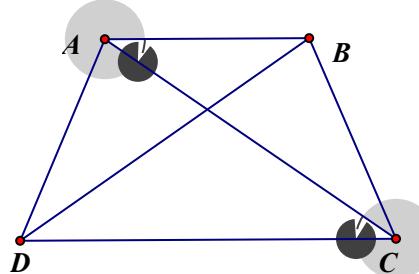
Mà  $\widehat{B}_1 = \widehat{B}_2$  (gt)  $\Rightarrow \widehat{M}_1 = \widehat{B}_1$  hay  $\Delta BMN$  cân tại  $N$ .

$\Rightarrow NB = NM$  (đpcm)

**Bài toán 14:** Cho tứ giác  $ABCD$  có  $AB < CD$ , hai đường chéo  $AC$  và  $BD$  bằng nhau,  $\widehat{BAC} = \widehat{ACD}$ .

Chứng minh tứ giác  $ABCD$  là hình thang cân.

*Lời giải*



Ta có  $\widehat{BAC}$  và  $\widehat{ACD}$  là hai góc so le trong mà  $\widehat{BAC} = \widehat{ACD}$  (gt)  $\Rightarrow AB \parallel CD$

Do đó tứ giác  $ABCD$  là hình thang cân (tứ giác có hai cạnh đối song song) (1)

Lại có  $AC$  và  $BD$  là hai đường chéo  $AC = BD$  (gt) (2)

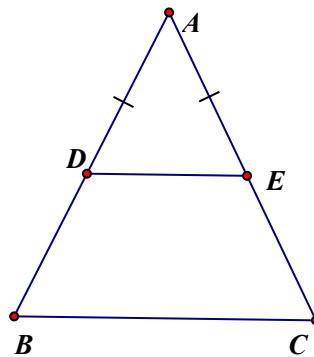
Từ (1) và (2)  $\Rightarrow$  tứ giác  $ABCD$  là hình thang cân (hình thang có hai đường chéo bằng nhau)

**Bài toán 15:** Cho tam giác  $\Delta ABC$  cân tại  $A$ , trên các cạnh  $AB$ ,  $AC$  lần lượt lấy các điểm  $D$  và  $E$  sao cho  $AD = AE$ .

a) Chứng minh tứ giác  $BDEC$  là hình thang cân.

b) Tính các góc của hình thang đó biết  $\widehat{A} = 70^\circ$ .

*Lời giải*



Ta có  $AD = AE$  (gt)  $\Rightarrow \Delta ADE$  cân tại  $A \Rightarrow \widehat{ADE} = \widehat{AED} = \frac{180^\circ - \hat{A}}{2}$  (1)

Lại có  $\Delta ABC$  cân tại  $A$  (gt)  $\Rightarrow \widehat{B} = \widehat{C} = \frac{180^\circ - \hat{A}}{2}$  (2)

Từ (1) và (2)  $\Rightarrow \widehat{ADE} = \widehat{B} = \frac{180^\circ - \hat{A}}{2}$

Do đó  $DE // BC$  (cặp góc đồng vị bằng nhau)

Vậy  $BDEC$  là hình thang có  $\widehat{B} = \widehat{C}$  (gt)

Nên  $BDEC$  là hình thang cân.

b)  $\hat{A} = 70^\circ \Rightarrow \widehat{B} = \widehat{C} = \frac{180^\circ - 70^\circ}{2} = 55^\circ \Rightarrow \widehat{BDE} = \widehat{CED} = 125^\circ$ .

**Nhận xét:** Trường hợp đặc biệt khi  $D, E$  là trung điểm của hai cạnh  $AB, AC$  hay  $BE, CD$  là hai đường trung tuyến của tam giác cân  $ABC$  ta có bài toán sau:

**Bài toán 16:** Cho tam giác  $\Delta ABC$  cân tại  $A$ , hai đường trung tuyến  $BE$  và  $DC$ . Chứng minh tứ giác  $BDEC$  là hình thang cân.

**Hướng dẫn:** Ta cũng có hai tam giác cân  $ADE$  và  $ABC$  chung đỉnh  $A$  nên bốn góc ở đáy bằng nhau và bằng  $\frac{180^\circ - \hat{A}}{2}$ .

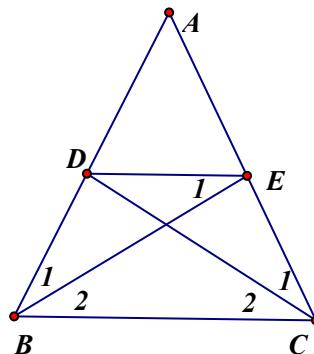
**Nhận xét:** Trường hợp hai đường trung tuyến  $BE$  và  $DC$  trở thành hai đường phân giác ta có bài toán sau:

**Bài toán 17:** Cho tam giác  $\Delta ABC$  cân tại  $A$ , hai đường phân giác  $BE$  và  $DC$ . Chứng minh rằng:

a)  $BDEC$  là hình thang cân.

b)  $DE = DB$  (đáy nhỏ  $DE$ , cạnh bên  $DB$ ).

### Lời giải



Ta có  $BE$  và  $DC$  là phân giác của góc  $B$  và  $C$  (gt)

$\Rightarrow \widehat{B}_1 = \widehat{B}_2 = \frac{\widehat{B}}{2}$  và  $\Rightarrow \widehat{C}_1 = \widehat{C}_2 = \frac{\widehat{C}}{2}$  mà  $\widehat{B} = \widehat{C}$  (gt) nên  $\widehat{B}_1 = \widehat{B}_2 = \widehat{C}_1 = \widehat{C}_2$ .

Xét  $\Delta ABE$  và  $\Delta ADC$  có  $\widehat{A}$  chung  $AB = AC$  (gt);  $\widehat{B}_1 = \widehat{C}_1$  (cmt)

$\Rightarrow \Delta ABE = \Delta ACD$  (g.c.g)

$\Rightarrow AE = AD$  nên  $\Delta AED$  cân tại  $A$

$\Rightarrow \widehat{ADE} = \widehat{AED} = \frac{180^\circ - \widehat{A}}{2}$  (1)

Lại có  $\Delta ABC$  cân tại  $A$  (gt)  $\Rightarrow \widehat{ABC} = \widehat{ACB} = \frac{180^\circ - \widehat{A}}{2}$  (2)

Từ (1) và (2)  $\Rightarrow DE \parallel BC$  hay  $BDEC$  là hình thang có  $BE = CD$  (gt)

Do đó  $BDEC$  là hình thang cân.

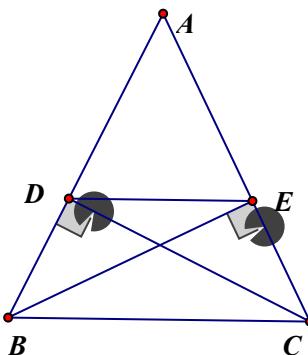
Mặt khác vì  $DE \parallel BC \Rightarrow \widehat{E}_1 = \widehat{B}_2$  (so le trong)

mà  $\widehat{B}_1 = \widehat{B}_2$  (gt)  $\Rightarrow \widehat{B}_1 = \widehat{E}_1$  hay  $\Delta BDE$  cân tại  $D \Rightarrow DE = DB$ .

**Nhận xét:** Cả ba bài toán trên ta đều sử dụng tính chất của hai tam giác cân chung đỉnh  $A$ . Nếu trường hợp  $BE$  và  $DC$  là các đường cao của tam giác cân  $\Delta ABC$  ta có bài toán sau:

**Bài toán 18:** Cho tam giác  $\Delta ABC$  cân tại  $A$ , hai đường cao  $BE$  và  $DC$ . Chứng minh rằng  $BDEC$  là hình thang cân.

### Lời giải



Xét  $\Delta BEC$  và  $\Delta CDB$  có  $\widehat{BEC} = \widehat{CDB} = 90^\circ$  (gt);  $BC$  cạnh chung;  $\widehat{B} = \widehat{C}$  (gt).

Do đó  $\Delta BEC = \Delta CDB$  (cạnh huyền - góc nhọn)  $\Rightarrow EC = BD$

mà  $AC = AB$  (gt)  $\Rightarrow AC - EC = AB - BD$  hay  $AD = AE$ .

Do đó  $\Delta ADE$  cân tại  $A \Rightarrow \widehat{ADE} = \widehat{AED} = \frac{180^\circ - \widehat{A}}{2}$  (1)

$\Delta ABC$  cân tại  $A$  (gt)  $\Rightarrow \widehat{B} = \widehat{C} = \frac{180^\circ - \widehat{A}}{2}$  (2)

Từ (1) và (2)  $\Rightarrow \widehat{ADE} = \widehat{B}$ .

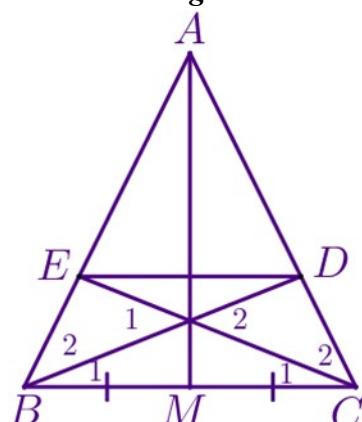
Do đó  $DE \parallel BC$  (cặp góc đồng vị bằng nhau).

Vậy  $BDEC$  là hình thang có  $\widehat{B} = \widehat{C}$  (gt) do đó  $BDEC$  là hình thang cân.

**Nhận xét:** Nếu kẻ trung tuyến  $AM$ , trên  $AM$  lấy  $N$  bất kì kẻ  $BN$  và  $CK$  cắt hai cạnh  $AB$ ,  $AC$ , ta cũng có hình thang cân song song chứng minh hơi phức tạp hơn một chút.

**Bài toán 19.** Cho tam giác  $ABC$  cân tại  $A$ , trung tuyến  $AM$ . Trên tia  $AM$  lấy điểm  $N$ ,  $BN$  cắt  $AC$  ở  $D$ ,  $CN$  cắt  $AB$  ở  $E$ . Chứng minh  $BEDC$  là hình thang cân.

### Lời giải



$AM$  là đường trung tuyến của  $\Delta ABC$  cân tại  $A$  (gt).

Nên đồng thời là đường cao  $\widehat{AMB} = \widehat{AMC} = 90^\circ$ .

Xét  $\Delta NMB$  và  $\Delta NMC$  có  $NM$  cạnh chung  $\widehat{NMB} = \widehat{NMC} = 90^\circ$  (cmt).

$MB = MC$  (gt)

$\Rightarrow \Delta NMB = \Delta NMC$  (c.g.c)

Suy ra  $NB = NC$  và  $\widehat{B}_1 = \widehat{C}_1$  lại có  $\widehat{B} = \widehat{C}$  (gt)

$\Rightarrow \widehat{B} - \widehat{B}_1 = \widehat{C} - \widehat{C}_1$  hay  $\widehat{B}_2 = \widehat{C}_2$

Xét  $\Delta BNE$  và  $\Delta CND$  có:

$\widehat{B}_2 = \widehat{C}_2$  (cmt);  $BN = CN$  (cmt) và  $\widehat{N}_1 = \widehat{N}_2$  (đối đỉnh)

$\Rightarrow \Delta BNE = \Delta CND$  (g.c.g)

$\Rightarrow BE = CD$  mà  $AB = AC$  (gt)

$\Rightarrow AB - EB = AC - DC$  hay  $AE = AD$  nên  $\Delta AED$  cân tại  $A$ .

$\Rightarrow \widehat{AED} = \widehat{ADE} = \frac{180^\circ - \widehat{A}}{2}$  (1)

Mặt khác:  $\Delta ABC$  cân tại  $A$  (gt)

$\Rightarrow \widehat{ABC} = \widehat{ACB} = \frac{180^\circ - \widehat{A}}{2}$  (2)

Từ (1) và (2), suy ra  $\widehat{AED} = \widehat{ABC}$ .

Do đó  $ED \parallel BC$  (cặp góc đồng vị bằng nhau)

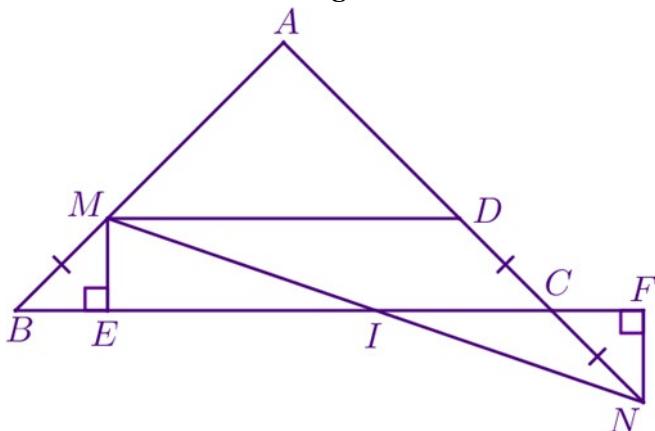
Chứng tỏ  $BEDC$  là hình thang có  $\widehat{B} = \widehat{C}$  nên  $BEDC$  là hình thang cân.

**Bài toán 20.** Tam giác  $ABC$  cân tại  $A$ ,  $M$  là điểm bất kì nằm giữa hai điểm  $A$  và  $B$ . Trên tia đối của tia  $CA$  lấy điểm  $N$  sao cho  $CN = BM$ . Vẽ  $ME$  và  $NF$  lần lượt vuông góc với đường thẳng  $BC$ . Gọi  $I$  là giao điểm của  $MN$  và  $BC$ .

a) Chứng minh:  $IE = IF$ .

b) Trên cạnh  $AC$  lấy  $D$  sao cho  $CD = CN$ . Chứng minh  $BMDC$  là hình thang cân.

*Lời giải*



a)  $\widehat{B} = \widehat{C}$  (gt) mà  $\widehat{C} = \widehat{NCF}$  (đối đỉnh)

$\Rightarrow \widehat{B} = \widehat{NCF}$ , lại có  $BM = CN$  (gt)

Do đó  $\Delta MEB \cong \Delta NFC$  (ch - gn)  $\Rightarrow ME = NF$

$ME \parallel NF$  (cùng vuông góc với  $BC$ )

$\Rightarrow \widehat{EMI} = \widehat{FNI}$  (so le trong)

$\Delta IME \cong \Delta INF \Rightarrow IE = IF$

b)  $CD = CN$  mà  $CN = BM$  (gt)

$\Rightarrow BM = CD$  mà  $AB = AC$

$\Rightarrow AB - BM = AC - CD$  hay  $AM = AD$

$\Rightarrow \Delta AMD$  cân tại  $A$  nên:  $\widehat{AMD} = \widehat{ADM} = \frac{180^\circ - \widehat{A}}{2}$

Mặt khác:  $\Delta ABC$  cân tại  $A$   $\Rightarrow \widehat{ABC} = \widehat{ACB} = \frac{180^\circ - \widehat{A}}{2}$

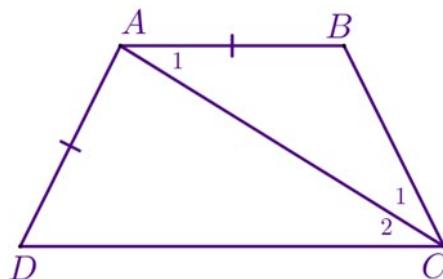
Do đó  $\widehat{AMD} = \widehat{ABC} \Rightarrow MD \parallel BC$  hay  $BMDC$  là hình thang có  $\widehat{B} = \widehat{C}$

Vậy  $BMDC$  là hình thang cân.

Nhận xét: Trở lại bài toán 17, ta có bài toán ngược sau đây:

**Bài toán 21.** Cho hình thang cân  $ABCD$  có đáy nhỏ  $AB$  bằng cạnh bên  $AD$ . Chứng minh rằng  $CA$  là tia phân giác của góc  $BCD$ .

*Lời giải*



Ta có:  $AB = AD$  (gt)  $AD = BC$  (hai cạnh bên của hình thang cân)

$\Rightarrow AB = BC$  hay  $\Delta ABC$  cân tại  $B$

$\Rightarrow \widehat{A}_1 = \widehat{C}_1$

Mà  $AB \parallel CD$  (gt)

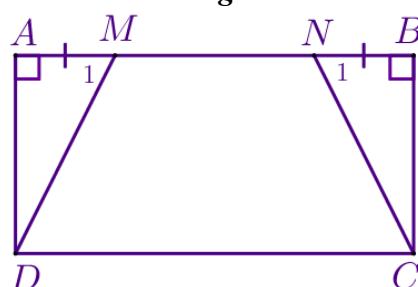
$\Rightarrow \widehat{A}_1 = \widehat{C}_2$  (so le trong)

Do đó  $\widehat{C}_1 = \widehat{C}_2$  hay  $CA$  là tia phân giác của góc  $BCD$ .

**Bài toán 22.** Cho hình chữ nhật  $ABCD$ . Trên cạnh  $AB$  lấy hai điểm  $M, N$  sao cho  $AM = NB < \frac{1}{2}AB$ .

Chứng minh  $MNCD$  là hình thang cân.

*Lời giải*



Ta có:  $ABCD$  là hình chữ nhật (gt)

$\Rightarrow AB \parallel CD$  hay  $MN \parallel CD$  nên tứ giác  $MNCD$  là hình thang (tứ giác có hai cạnh đối song song) (1)

Xét tam giác  $DAM$  vuông tại  $A$  và tam giác  $CBN$  vuông tại  $B$  có:

$AD = BC$  (gt)

$AM = BN$  (gt)

$\Rightarrow \Delta DAM = \Delta CBN$  (hai cạnh góc vuông bằng nhau)

$\Rightarrow \widehat{M}_1 = \widehat{N}_1$  (góc tương ứng) mà  $\widehat{M}_1 + \widehat{DMN} = 180^\circ$  (kè bù)

Tương tự  $\widehat{N}_1 + \widehat{CNM} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{DMN} = \widehat{CNM}$  (2)

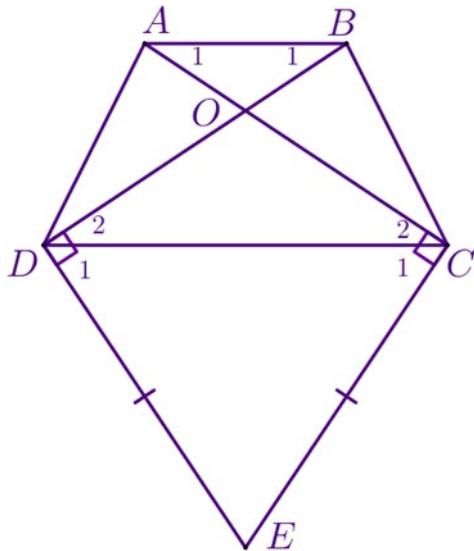
Từ (1) và (2), suy ra tứ giác  $MNCD$  là hình thang cân (hình thang có hai góc kề một đáy bằng nhau)

Cách khác:

Ta sẽ chứng minh hình thang  $MNCD$  có hai đường chéo  $MC = ND$ . Từ việc xét hai tam giác vuông  $DNA$  và  $CMB$  bằng nhau cũng theo trường hợp hai cạnh góc vuông bằng nhau.

**Bài toán 23.** Cho hình thang  $ABCD$  ( $AB \parallel CD$ ). Kẻ đường thẳng vuông góc với  $AC$  tại  $C$  và đường thẳng vuông góc với  $BD$  tại  $D$ , hai đường thẳng này cắt nhau tại  $E$ . Chứng minh rằng nếu  $EC = ED$  thì hình thang  $ABCD$  là hình thang cân.

*Lời giải*



Gọi  $O$  là giao điểm của hai đường chéo  $AC$  và  $BD$  của hình thang  $ABCD$ .

Giả sử  $EC = ED \Rightarrow \triangle DEC$  cân tại  $E$ .

$$\Rightarrow \widehat{C}_1 = \widehat{D}_1 \text{ mà } \widehat{C}_1 + \widehat{C}_2 = 90^\circ$$

$$\text{Tương tự } \widehat{D}_1 + \widehat{D}_2 = 90^\circ \Rightarrow \widehat{C}_2 = \widehat{D}_2$$

Hay  $\triangle DOC$  cân tại  $O \Rightarrow OC = OD$  (1)

Mặt khác  $ABCD$  là hình thang (gt)

$$\text{Có } AB \parallel CD \Rightarrow \widehat{B}_1 = \widehat{D}_2 \text{ (cặp góc so le trong)}$$

$$\text{Tương tự } \widehat{A}_1 = \widehat{C}_2 \text{ mà } \widehat{C}_2 = \widehat{D}_2 \text{ (cmt)}$$

$$\Rightarrow \widehat{A}_1 = \widehat{B}_1$$

Hay  $\triangle AOB$  cân tại  $O \Rightarrow OA = OB$  (2)

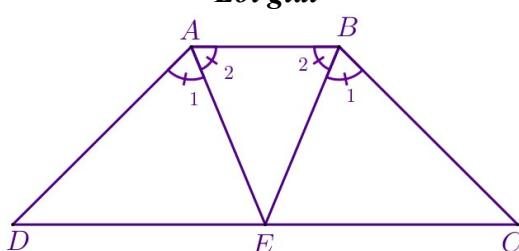
Cộng (1) và (2) ta có:  $OA + OC = OB + OD$  hay  $AC = BD$

Hình thang  $ABCD$  có  $AC = BD$  nên là hình thang cân (Hình thang có hai đường chéo bằng nhau)

**Bài toán 24.** Hai tia phân giác của góc  $A$ ,  $B$  của hình thang cân  $ABCD$  ( $AB \parallel CD$ ) cắt nhau tại điểm  $E$

trên cạnh đáy  $CD$ . Chứng minh rằng  $EC = ED$ .

*Lời giải*



$AE$  là phân giác của góc  $A$ ,

$$\text{Ta có: } \widehat{A}_1 = \widehat{A}_2 = \frac{\widehat{BAD}}{2}$$

Tương tự  $BE$  là phân giác của  $\widehat{ABC}$ ,

$$\text{Ta có: } \widehat{B}_1 = \widehat{B}_2 = \frac{\widehat{ABC}}{2}$$

Mà  $\widehat{BAD} = \widehat{ABC}$  (hai góc kề một đáy của hình thang cân)

$$\Rightarrow \widehat{A}_1 = \widehat{A}_2 = \widehat{B}_1 = \widehat{B}_2$$

Xét  $\Delta AEB$   $\widehat{A}_2 = \widehat{B}_2$  (cmt)  $\Rightarrow \Delta AEB$  cân tại  $E \Rightarrow AE = BE$

Xét  $\Delta ADE$  và  $\Delta BCE$  có  $AD = BC$  (gt),  $\widehat{A}_1 = \widehat{B}_1$  (cmt),  $AE = BE$  (cmt)

$$\Rightarrow \Delta ADE = \Delta BCE \text{ (c.g.c)}$$

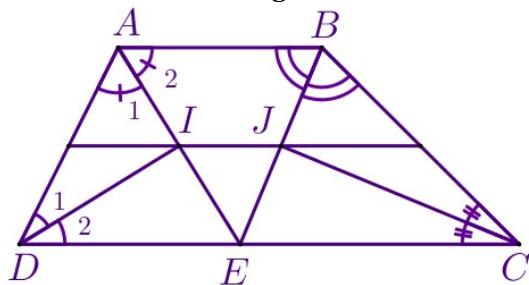
$$\Rightarrow EC = ED \text{ (cạnh tương ứng)}$$

**Bài toán 25.** Cho hình thang  $ABCD$  ( $AB \parallel CD$ ,  $AB < CD$ ), các tia phân giác của các góc  $A$  và  $D$  cắt nhau tại  $I$ , các tia phân giác của góc  $B$  và  $C$  cắt nhau tại  $J$ .

a) Chứng minh  $AI \perp DI$  và  $BJ \perp CJ$ .

b) Gọi  $E$  là giao điểm của  $AI$  và  $BJ$ , giả sử  $E$  thuộc cạnh  $CD$ . Chứng minh  $CD = AD + BC$ .

*Lời giải*



$$\text{a)} \widehat{A}_1 = \widehat{A}_2 \text{ (gt)}$$

$$\widehat{D}_1 = \widehat{D}_2 \text{ (gt) mà } \widehat{A} + \widehat{D} = 180^\circ$$

$$\Rightarrow \frac{\widehat{A}}{2} + \frac{\widehat{D}}{2} = 90^\circ$$

$$\text{Hay } \widehat{A}_1 + \widehat{D}_1 = 90^\circ$$

Trong  $\Delta AID \Rightarrow \widehat{AID} = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$

Hay  $AI \perp DI$ . Tương tự ta chứng minh được  $BJ \perp CJ$ .

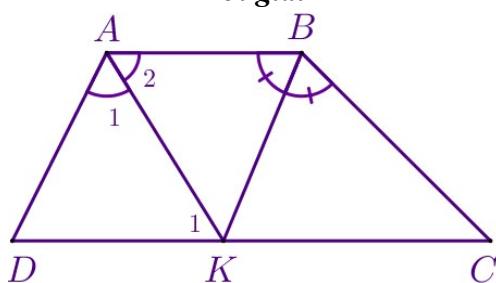
b) Xét  $\Delta ADE$  có phân giác  $DI$  đồng thời là đường cao (cmt)

$$\Rightarrow \Delta ADE$$
 cân tại  $D \Rightarrow AD = DE$ . Tương tự ta có  $BC = EC$

$$\text{Mà } DC = DE + EC \Rightarrow DC = AD + BC \text{ (đpcm)}$$

**Bài toán 26.** Cho hình thang  $ABCD$  ( $AB \parallel CD$ ) trong đó hai đường phân giác của các góc  $A$  và  $B$  cắt nhau tại  $K$  thuộc đáy  $CD$ . Chứng minh rằng tổng hai cạnh bên bằng đáy  $CD$  của hình thang.

*Lời giải*



$AB \parallel CD$  (gt)

$$\Rightarrow \widehat{A_1} = \widehat{A_2}$$
 (gt)

$\Rightarrow \widehat{A_1} = \widehat{K_1}$  nên  $\Delta ADK$  cân tại  $D \Rightarrow DA = DK$

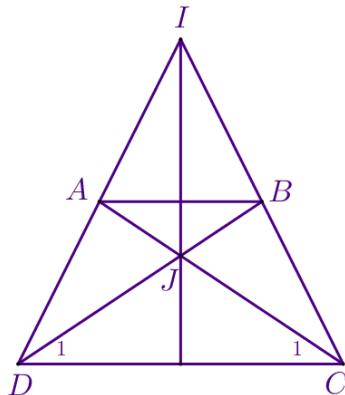
Tương tự  $\Delta BCK$  cân tại  $C$

$$\Rightarrow CB = CK$$
 mà  $DK + CK = CD$

$$\Rightarrow DA + CB = CD.$$

**Bài toán 27.** Hình thang cân  $ABCD$  ( $AB \parallel CD$ ) có các đường thẳng  $AD$ ,  $BC$  cắt nhau tại  $I$ , các đường thẳng  $AC$ ,  $BD$  cắt nhau tại  $J$ . Chứng minh rằng đường thẳng  $IJ$  là đường trung trực của đoạn thẳng  $AB$ .

*Lời giải*



Ta có:  $\widehat{DAB} + \widehat{IAB} = 180^\circ$  (kè bù)

Tương tự  $\widehat{CBA} + \widehat{IBA} = 180^\circ$

Mà  $\widehat{DAB} = \widehat{CBA}$  (tính chất hai góc cùng một đáy của hình thang cân)

$$\Rightarrow \widehat{IAB} = \widehat{IBA}$$
 hay  $\Delta IBA$  cân tại  $I \Rightarrow IA = IB$  (1)

Xét  $\Delta ADC$  và  $\Delta BCD$  có:

$DC$  là cạnh chung;

$\widehat{ADC} = \widehat{BCD}$  (hai góc kè đáy của hình thang cân)

$AD = BC$  (hai cạnh bên hình thang cân)

$$\Rightarrow \Delta ADC = \Delta BCD$$
 (c.g.c)

$$\Rightarrow \widehat{C_1} = \widehat{D_1}$$
 (hai góc tương ứng)

Hay  $\Delta JDC$  cân tại  $J$ , mà  $AC = BD$  (tính chất hai đường chéo của hình thang cân)

$$\Rightarrow AC - JC = BD - JD$$
 hay  $\Delta AJB$  cân tại  $J \Rightarrow JA = JB$  (2)

Từ (1) và (2), suy ra  $IJ$  là đường trung trực của đoạn thẳng  $AB$

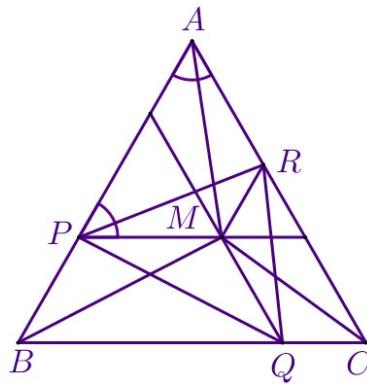
**Bài toán 28.** Cho  $M$  là một điểm nằm trong tam giác  $ABC$ . Qua  $M$  kẻ các đường thẳng song song với  $BC, CA, AB$  lần lượt cắt  $AB, BC, CA$  tại các điểm.

a) Chứng minh tứ giác  $APMR$  là hình thang cân.

b) Chứng minh chu vi tam giác  $PQR$  bằng tổng độ dài  $MA + MB + MC$ .

c) Hỏi với vị trí nào của  $M$  thì tam giác  $PQR$  là tam giác đều?

*Lời giải*



a) Ta có:  $MR \parallel AP$  (gt)  $\Rightarrow APMR$  là hình thang (1) (tứ giác có hai cạnh đối song song)

Lại có  $PM \parallel BC$  (gt)  $\Rightarrow \widehat{APM} = \widehat{B} = 60^\circ$

$\Delta ABC$  đều (gt)  $\Rightarrow \widehat{A} = \widehat{B} = 60^\circ$

$\Rightarrow \widehat{APM} = \widehat{A}$  (2)

Từ (1) và (2), suy ra  $APMR$  là hình thang cân (hình thang có hai góc kề một cạnh đáy bằng nhau)

Chứng minh tương tự ta có:  $BQMP$ ,  $CRMQ$  cũng là hình thang cân.

Xét hình thang cân  $APMR$  ta có:  $PR = AM$  (tính chất hai đường chéo của hình thang cân)

Tương tự với các hình thang cân  $BQMP$  và  $CRMQ$  ta có  $PQ = MB$ ,  $QR = MC$ .

b) Gọi  $C_{PQR}$  là chu vi của tam giác  $PQR$ , ta có  $C_{PQR} = PR + RQ + PQ$

mà  $PR = AM$ ,  $RQ = MC$  và  $PQ = MB$  (cmt)

$\Rightarrow C_{PQR} = AM + MB + MC$

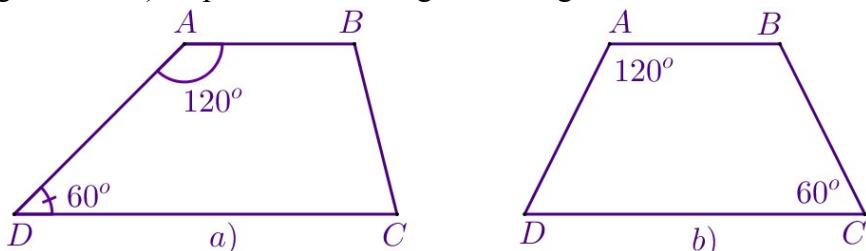
c) Tam giác  $PQR$  là tam giác đều khi  $M$  trùng với trọng tâm của tam giác đều  $ABC$ .

### BÀI TẬP

#### Bài 3.6.

a) Tứ giác  $ABCD$  trong Hình vẽ a) có phải là hình thang vuông không? Vì sao?

b) Hình thang trong Hình vẽ b) có phải là hình thang cân không? Vì sao?



*Lời giải*

a) Tứ giác  $ABCD$  trong Hình vẽ a) có  $\widehat{A}$  và  $\widehat{D}$  là hai góc trong cùng phía, mà  $\widehat{A} + \widehat{D} = 120^\circ + 60^\circ = 180^\circ$  nên  $AB \parallel CD$ .

Do đó  $ABCD$  là hình thang (tứ giác có hai cạnh đối song song)

b) Trong Hình vẽ b) ta có  $ABCD$  là hình thang

$\Rightarrow AB \parallel CD$  mà  $\widehat{A}$ ,  $\widehat{D}$  là hai góc trong cùng phía

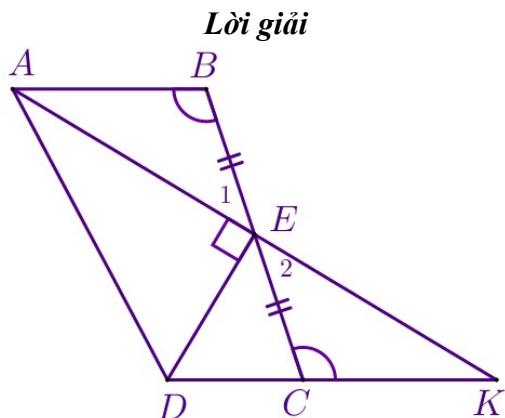
$\Rightarrow \widehat{A} + \widehat{D} = 180^\circ$  hay  $120^\circ + \widehat{D} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{D} = 60^\circ$

Hình thang  $ABCD$  có  $\widehat{D}$  và  $\widehat{C}$  là hai góc kề một cạnh đáy

Mà  $\widehat{D} = \widehat{C} = 60^\circ$  nên  $ABCD$  là hình thang cân.

**Bài 3.7.** Cho hình thang  $ABCD$  ( $AB \parallel CD$ ),  $E$  là trung điểm của  $BC$  và  $\widehat{AED} = 90^\circ$ . Gọi  $K$  là giao điểm của  $AE$  và  $DC$ . Chứng minh rằng:

- a)  $\Delta ABE = \Delta KCE$ .  
 b)  $DE$  là tia phân giác của góc  $D$ .



a) Ta có  $AB \parallel CD$  (cạnh đối của hình thang)

$$\Rightarrow \widehat{ABE} = \widehat{KCE} \text{ (so le trong)}$$

Xét  $\Delta ABE$  và  $\Delta KCE$  có:

$$\widehat{E}_1 = \widehat{E}_2 \text{ (đối đỉnh)}$$

$$BE = CE \text{ (gt)}$$

$$\widehat{ABE} = \widehat{KCE} \text{ (cmt)}$$

Do đó  $\Delta ABE = \Delta KCE$  (g.g)

b) Do  $\Delta ABE = \Delta KCE$  (cmt)  $\Rightarrow AE = KE$

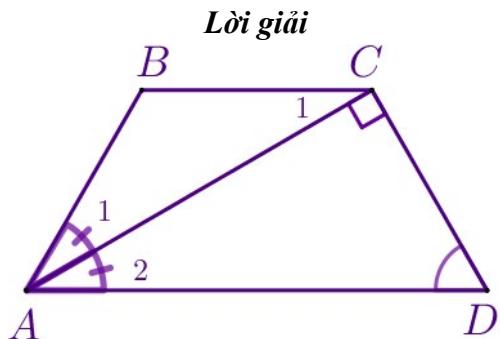
Xét  $\Delta ADK$  có đường cao  $DE$  đồng thời là đường trung tuyến nên cân tại  $D$ .

$\Rightarrow DE$  cũng là phân giác của góc  $D$ .

**Bài 3.8.** Cho hình thang cân  $ABCD$  có  $\widehat{A} = 60^\circ$  và  $BC \parallel AD$ . Đường chéo  $AC$  là tia phân giác của góc  $A$ .

a) Chứng minh  $\Delta ABC$  cân.

b) Chứng minh  $CD \perp CA$ .



a) Ta có:  $BC \parallel AD$  (cạnh đáy của hình thang)

$$\Rightarrow \widehat{C}_1 = \widehat{A}_2 \text{ (so le trong) mà } \widehat{A}_1 = \widehat{A}_2 \text{ (gt)}$$

$$\Rightarrow \widehat{C}_1 = \widehat{A}_1 \text{ hay } \Delta ABC \text{ cân tại } B$$

b)  $AC$  là phân giác của  $\widehat{A} = 60^\circ$

$$\text{Nên } \widehat{A}_1 = \widehat{A}_2 = \frac{\widehat{A}}{2} = \frac{60^\circ}{2} = 30^\circ$$

Xét  $\Delta ACD$  có  $\widehat{A}_2 = 30^\circ$ ;  $\widehat{D} = \widehat{A} = 60^\circ$  (hai góc kề có một đáy của hình thang cân)

$$\Rightarrow \widehat{ACD} = 180^\circ - (\widehat{A}_2 + \widehat{D}) = 180^\circ - (30^\circ + 60^\circ) = 90^\circ$$

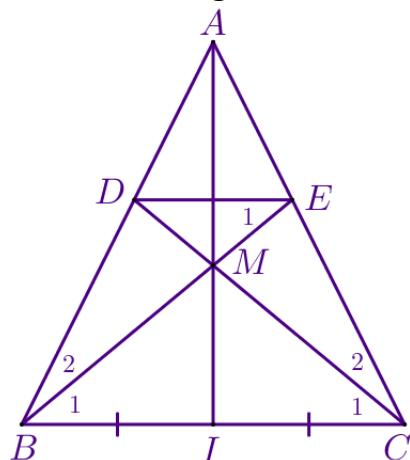
Chứng tỏ  $CD \perp CA$ .

**Bài 3.9.** Cho  $\Delta ABC$  cân tại  $A$ , có  $I$  là trung điểm của cạnh đáy  $BC$ . Gọi  $M$  là một điểm bất kì thuộc  $AI$ ,  $BM$  và  $CM$  lần lượt cắt  $AC$  và  $AB$  tại  $E$  và  $D$ .

a) Chứng tỏ rằng: Tứ giác  $BDEC$  là hình thang cân.

b) Xác định vị trí của điểm  $M$  trên  $AI$  để  $BD = DE = EC$ .

*Lời giải*



$\Delta ABC$  cân tại  $A$  (gt)

Nên trung tuyến  $AI$  đồng thời là đường trung trực của  $BC$

$$\Rightarrow MB = MC$$

Do đó  $\Delta BMC$  cân tại  $M$

$$\Rightarrow \hat{B}_1 = \hat{C}_1 \text{ mà } \hat{B} = \hat{C} \text{ (gt)}$$

$$\Rightarrow \hat{B} - \hat{B}_1 = \hat{C} - \hat{C}_1 \text{ hay } \hat{B}_2 = \hat{C}_2$$

Xét  $\Delta ACD$  và  $\Delta ADC$  có:

$$\hat{A} \text{ là góc chung; } AB = AC \text{ (gt); } \hat{B}_2 = \hat{C}_2 \text{ (cmt)}$$

Do đó  $\Delta AEB = \Delta ADC$  (g.c.g)

$$\Rightarrow AE = AD \text{ hay } \Delta ADE \text{ cân tại } A$$

$$\Rightarrow \widehat{ADE} = \widehat{AED} = \frac{180^\circ - \hat{A}}{2} \quad (1)$$

Lại có  $\Delta ABC$  cân tại  $A$  (gt)

$$\Rightarrow \hat{B} = \hat{C} = \frac{180^\circ - \hat{A}}{2} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2), suy ra } \widehat{ADE} = \hat{B} = \frac{180^\circ - \hat{A}}{2}$$

$$\Rightarrow DE \parallel BC \text{ (cặp góc đồng vị bằng nhau)}$$

Vậy  $BDEC$  là hình thang có  $\hat{B} = \hat{C}$

Nên  $BDEC$  là hình thang cân

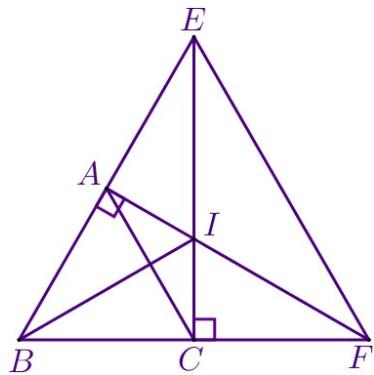
b) Ta có:  $BE = DE \Leftrightarrow \Delta BDE$  cân tại  $D$ .

$$\Leftrightarrow \hat{B}_2 = \hat{E}_1 \text{ mà } \hat{E}_1 = \hat{B}_1 \text{ (so le trong)} \Leftrightarrow \hat{B}_1 = \hat{B}_2$$

Vậy để  $BD = DE = EC$  thì  $M$  phải là giao điểm của trung tuyến  $AI$  với tia phân giác của góc  $B$

**Bài 3.10.** Cho tam giác đều  $ABC$ . Vẽ đường vuông góc với  $BC$  tại  $C$  cắt  $AB$  tại  $E$ . Vẽ đường vuông góc với  $AB$  tại  $A$  cắt  $BC$  tại  $F$ . Chứng minh  $ACFE$  là hình thang cân.

*Lời giải*



Gọi  $I$  là giao điểm của  $AF$  và  $CE$ .

Ta có hai tam giác vuông  $BAI$  và  $BCI$  bằng nhau (ch - cvg)  $\Rightarrow IA = IC$

Xét hai tam giác vuông  $AIE$  và  $CIF$ , ta có:

$$IA = IC \text{ (cmt)}; \widehat{AIE} = \widehat{CIF} \text{ (đối đỉnh)}; \widehat{IAE} = \widehat{ICF} = 90^\circ \text{ (gt)}$$

Suy ra  $\Delta AIE = \Delta CIF$  (g.c.g)

$$\Rightarrow AE = CF \text{ mà } BA = BC \text{ (gt)}$$

$$\Rightarrow AE + BA = CF + BC \text{ hay } BE = CF$$

Do đó  $\Delta EBF$  cân có  $\hat{B} = 60^\circ$  (gt) nên đều  $\Rightarrow \hat{E} = \hat{F} = 60^\circ$

$$\Rightarrow \hat{E} = \widehat{BAC} \Rightarrow AC \parallel EF \text{ (cặp góc đồng vị bằng nhau)}$$

Hay  $ACFE$  là hình thang cân.

**⇒ HẾT**

## BÀI 12: HÌNH BÌNH HÀNH

### A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

\* Hình bình hành là tứ giác có các cạnh đối song song.

\* Tính chất:

Trong hình bình hành

- Các cạnh đối bằng nhau.

- Các góc đối bằng nhau.

- Hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm mỗi đường.

\* Dấu hiệu nhận biết

- Tứ giác có các cạnh đối bằng nhau là hình bình hành.

- Tứ giác có một cặp cạnh được đối song song và bằng nhau là hình bình hành.

- Tứ giác có các góc đối bằng nhau là hình bình hành.

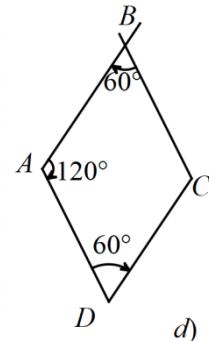
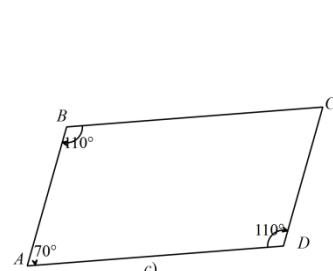
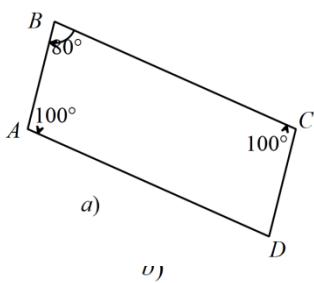
- Tứ giác có hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường là hình bình hành.

- Tứ giác có các cạnh đối song song là hình bình hành.

### B. PHÂN LOẠI CÁC BÀI TẬP

#### I. Nhận biết hình bình hành.

**Bài toán 1:** Trong mỗi trường hợp sau đây tứ giác nào là hình bình hành, tứ giác nào không phải là hình bình hành? Vì sao?



#### Lời giải

Hình a) Theo định lí tổng các góc của tứ giác ,ta có:

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D} = 360^\circ$$

$\Rightarrow \hat{D} = 360^\circ - (\hat{A} + \hat{B} + \hat{C}) = 360^\circ - (100^\circ + 80^\circ + 100^\circ) = 80^\circ$ . Do đó tứ giác  $ABCD$  trong hình vẽ (a) là hình bình hành.( Tứ giác có các góc đối bằng nhau).

Hình b) Theo định lí tổng các góc của tứ giác ,ta có:

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D} = 360^\circ \Rightarrow \hat{B} = 360^\circ - (\hat{A} + \hat{C} + \hat{D}) = 360^\circ - (75^\circ + 75^\circ + 90^\circ) = 120^\circ$$

Do đó tứ giác  $ABCD$  trong hình vẽ (b) không là hình bình hành( vì  $\hat{B}$  và  $\hat{D}$  không bằng nhau).

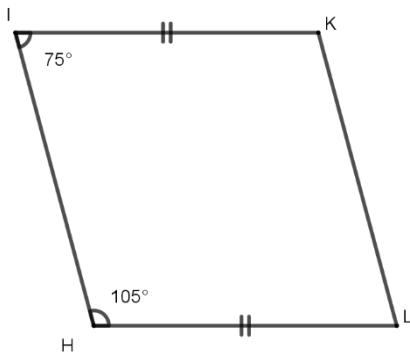
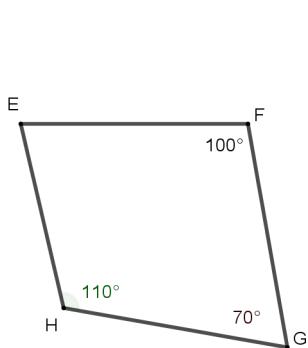
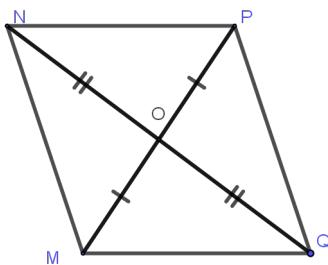
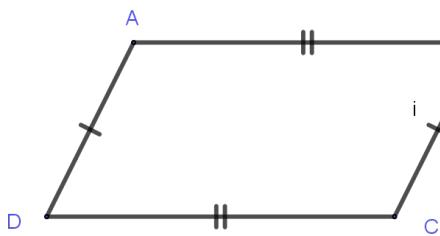
Hình c) Theo định lí tổng các góc của tứ giác ,ta có:

$$\Rightarrow \hat{C} = 360^\circ - (\hat{A} + \hat{B} + \hat{D}) = 360^\circ - (70^\circ + 110^\circ + 110^\circ) = 70^\circ$$

Do đó tứ giác  $ABCD$  trong hình vẽ (c) là hình bình hành.(Tứ giác có các góc đối bằng nhau).

Hình d) Tương tự như hình a,b,c. tứ giác  $ABCD$  ở hình (d) cũng là hình bình hành vì tứ giác có các góc đối bằng nhau.  $\hat{A} = \hat{C} = 120^\circ$ ,  $\hat{B} = \hat{D} = 60^\circ$ .

**Bài toán 2.** Trong các tứ giác dưới đây, tứ giác nào là hình bình hành, tứ giác nào không phải là hình bình hành? Vì sao?



### Lời giải

Hình a) Tứ giác  $ABCD$  có  $AB=CD$ ;  $BC=AD$  nên  $ABCD$  là hình bình hành( Tứ giác có các góc đối bằng nhau).

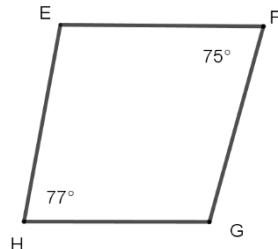
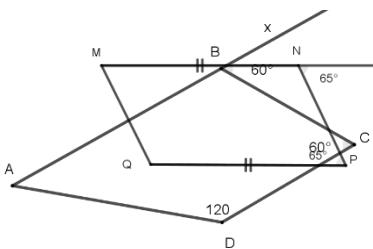
Hình b) Tứ giác  $MNPQ$  có  $O$  là giao điểm của hai đường chéo  $MP$  và  $NQ$  và  $OM = OP; ON = OQ$  nên  $MNPQ$  là hình bình hành( Tứ giác có hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường).

Hình c) Nhận thấy hai góc đối  $\hat{D}$  và  $\hat{F}$  không bằng nhau( $110^\circ \neq 100^\circ$ ). Do đó tứ giác  $DEFG$  không phải là hình bình hành.

Hình d) Xét tứ giác  $HIKL$  có  $\hat{I} = 75^\circ$  và  $\hat{H} = 105^\circ$  mà  $\hat{I} + \hat{H} = 75^\circ + 105^\circ = 180^\circ \Rightarrow IK \parallel HL$

Lại có  $IK = HL$  nên tứ giác  $HIKL$  là hình bình hành( Tứ giác có hai cạnh đối vừa song song vừa bằng nhau).

**Bài toán 3.** Trong các hình vẽ dưới đây, tứ giác nào là hình bình hành? Vì sao



### Lời giải

Hình a) Ta có  $\widehat{B}$  và  $\widehat{C}$  là hai góc so le trong, mà  $\widehat{B} + \widehat{C} = 60^\circ$

$$\Rightarrow AB \parallel CD \quad (1)$$

Lại có  $\widehat{C}$  và  $\widehat{D}$  là hai góc trong cùng phía, mà  $\widehat{C} + \widehat{D} = 60^\circ + 120^\circ = 180^\circ$

$$\Rightarrow AD \parallel BC \quad (2)$$

Từ (1) và (2)  $\Rightarrow$  Tứ giác  $ABCD$  ở Hình a) là hình bình hành (các cặp cạnh đối song song).

### Cách khác:

Bạn có thể tính được  $\widehat{ABC} = 120^\circ$  và  $\widehat{A} = 60^\circ$  nên tứ giác  $ABCD$  là hình bình hành (các góc đối bằng nhau).

Hình b) Ta có  $\widehat{N}$  và  $\widehat{P}$  là hai góc so le trong,

$$\text{mà } \widehat{N} = \widehat{P} = 65^\circ \Rightarrow MN \parallel QP$$

Lại có  $MN = QP$ , do đó tứ giác  $MNPQ$  là hình bình hành (hai cạnh đối vừa song song vừa bằng nhau).

Hình c) Ta thấy  $\widehat{H}$  và  $\widehat{F}$  là hai góc đối, mà  $\widehat{H}$  và  $\widehat{F}$  không bằng nhau ( $\widehat{H} = 77^\circ$  và  $\widehat{F} = 75^\circ$ ).

Do đó tứ giác  $EFGH$  không phải là hình bình hành.

## II. Chứng minh

**Bài toán 4.** Trong hình bình hành  $ABCD$ , từ  $A$  và  $C$  kẻ  $AH, CK$  cùng vuông góc với  $BD$ .

a) Chứng minh tứ giác  $AHCK$  là hình bình hành.

b) Gọi  $I$  là trung điểm của  $HK$ . Chứng minh  $IB = ID$ .

### Lời giải

a) Ta có  $AH$  và  $CK$  cùng vuông góc với  $BD$  nên  $\Delta AHD$  và  $\Delta CKB$  là các tam giác vuông.

Xét  $\Delta AHD$  và  $\Delta CKB$  có  $\widehat{D}_1 = \widehat{B}_1$  (cặp đồng so le  
trong do  $AD \parallel BC$  (gt))

$AD = BC$  (cạnh đối của hình bình hành)

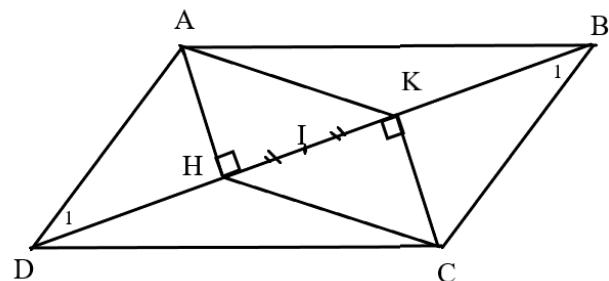
$\Rightarrow \Delta AHD = \Delta CKB$  (cạnh huyền – góc nhọn)

$\Rightarrow AH = CK$  (cạnh tương ứng), lại có  $AH \parallel CK$   
( $\perp BD$ )

$\Rightarrow$  Tứ giác  $AHCK$  là hình bình hành (hai cạnh đối  
vừa song song vừa bằng nhau).

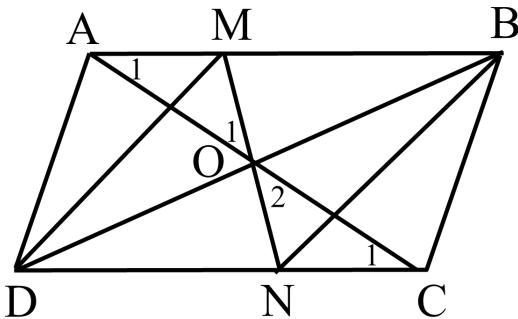
b) Ta có  $AHCK$  là hình bình hành (cmt), mà  $I$  là trung điểm của đường chéo  $HK$  (gt) nên  $I$  đồng thời  
cũng là trung điểm của đường chéo thứ hai  $AC$  (tính chất hai đường chéo của hình bình hành thì cắt  
nhau tại trung điểm của mỗi đường).

Mặt khác tứ giác  $AHCK$  là hình bình hành (gt), mà  $I$  là điểm của đường chéo  $AC$  (cmt) nên  $I$  cũng  
là trung điểm của đường chéo  $BD$  hay  $IB = ID$ .



**Bài toán 5.** Gọi  $O$  là giao điểm của hai ai đường chéo của hình bình hành  $ABCD$ . Một đường thẳng đi  
qua  $O$  lần lượt cắt nhau tại các cạnh  $AB, CD$  của hình bình hành tại hai điểm  $M, N$ . Chứng minh  
 $\triangle OAM = \triangle OCN$ . Từ đó suy ra tứ giác  $MBND$  là hình bình hành.

### Lời giải:



Tứ giác ABCD là hình bình hành (gt).

$$\Rightarrow AB \parallel CD \Rightarrow \widehat{A}_1 = \widehat{C}_1 \text{ (cặp góc so le trong)}$$

Và  $OA = OC$  (tính chất đường chéo của hình bình hành)

$$\text{Xét } \triangle OAM = \triangle OCN \text{ có: } \widehat{A}_1 = \widehat{C}_1; OA = OC; \widehat{O}_1 = \widehat{O}_2 \text{ (đối đỉnh)}$$

Do đó  $\triangle OAM = \triangle OCN$  (g.c.g)

$$\Rightarrow AM = CN \text{ (cạnh tương ứng)}$$

lại có  $AB = CD$  (gt)

$$\Rightarrow AB - AM = CD - CN$$

hay  $MB = ND$  và  $MB \parallel ND$  (do  $AB \parallel CD$ )

$\Rightarrow$  Tứ giác MBND là hình bình hành (Hai cạnh đối vừa song song vừa bằng nhau).

**Bài toán 6.** Cho hình bình hành ABCD. Trên tia đối của tia BC lấy điểm E sao cho  $BE = BC$ , trên tia đối của tia BC lấy điểm F sao cho  $DF = CD$ .

Chứng minh rằng:

a) Tứ giác EADB là hình bình hành.

b) A là trung điểm của EF.

c) AC, DE, BF đồng quy.

### Lời giải

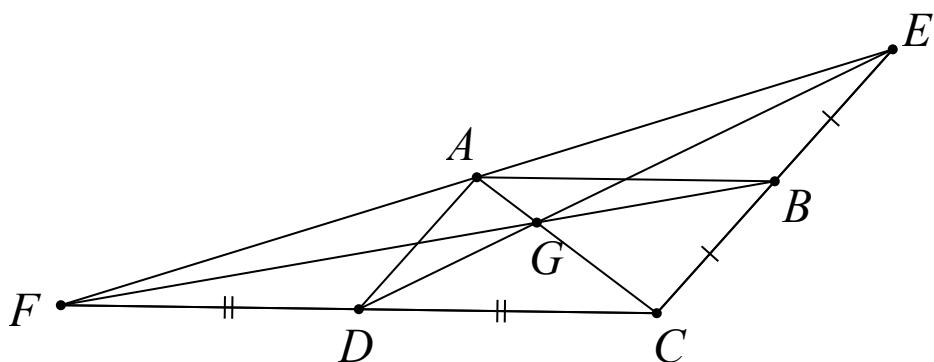
a) Ta có ABCD là hình bình hành (gt)

$$\Rightarrow AD \parallel BC \text{ mà } E \text{ thuộc } BC \text{ và } BE = BC = AD \text{ (gt).}$$

$$\Rightarrow AD \parallel EB \text{ và } AD = BE.$$

Do đó tứ giác EADB là hình bình hành (hai cạnh đối vừa song song vừa bằng nhau)

b)



Tứ giác EADB là hình bình hành (cmt) do đó  $AF \parallel BD$  (1)

Chứng minh tương tự ta có tứ giác EADB là hình bình hành do đó  $AE \parallel BD$  (2)

Từ (1) và (2) suy ra  $AE$  và  $AF$  phải trùng nhau (Tiên đề Euclid) hay ba điểm  $A, E, F$  thẳng hàng.

Ta lại có  $AE=AF (=BD)$  do đó A là trung điểm của EF.

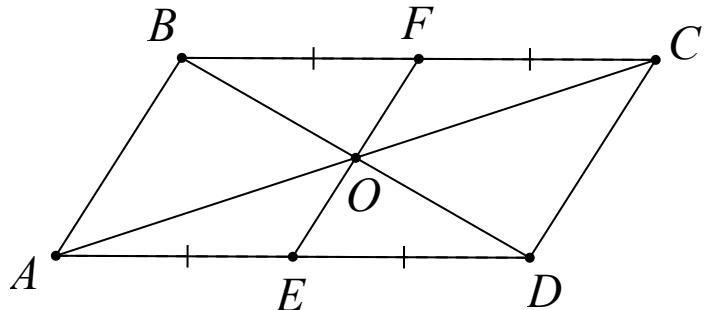
b) Để thấy AC,DE,BF là ba đường trung tuyến của  $\Delta CEF$  nên chúng đồng quy tại trọng tâm G.

**Bài toán 7.** Cho hình bình hành ABCD, gọi E là trung điểm của AD, F là trung điểm của BC.

a) Chứng minh rằng tứ giác EBFD là hình bình hành.

b) Gọi O là giao điểm của hai đường chéo hình bình hành ABCD. Chứng minh rằng ba điểm E,O,F thẳng hàng.

### Lời giải



a) Ta có A là trung điểm của AD suy ra  $EA = ED = \frac{AD}{2}$ . Tương tự ta có  $FB = FC = \frac{BC}{2}$

mà ABCD là hình bình hành nên ta có  $AD \parallel BC$  và  $AD = BC \Rightarrow ED \parallel BF$  và  $ED = BF$ .

Do đó tứ giác EBFD là hình bình hành (hai cạnh góc đối vừa song song vừa bằng nhau).

b) Ta có O là giao điểm của hai đường chéo hình bình hành nên O là trung điểm của BD.

Lại có EBFD là hình bình hành (cmt) nên O là trung điểm của đường chéo thứ hai EF hay ba điểm E,O,F thẳng hàng.

**Bài toán 8.** Cho hình bình hành ABCD. Gọi E,F lần lượt là trung điểm của các cạnh AD,CD. Chứng minh rằng hai tứ giác AEFD, AECF là những hình bình hành.

### Lời giải

Ta có E là trung điểm của AB

$$\Rightarrow EA = EB = \frac{AB}{2}$$

$$\text{Tương tự } FB = FC = \frac{DC}{2}$$

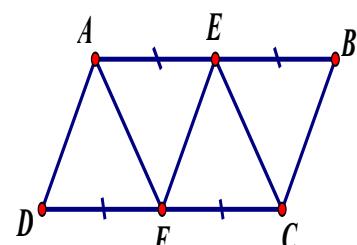
mà  $AB \parallel DC$  và  $AB = DC$  ( $ABCD$  là hình bình hành)

$$\Rightarrow AE \parallel DF \text{ và } AE = DF$$

Do đó AEFD là hình bình hành (tứ giác có hai cạnh góc đối vừa song song vừa bằng nhau).

b) Chứng minh tương tự như câu a) Bài toán 7.

Ta có  $AE \parallel CF$  và  $AE = CF$  hay tứ giác AECF là hình bình hành.



**Bài toán 9.** Cho hình bình hành  $ABCD$ . Lấy điểm  $E$  sao cho  $B$  là trung điểm của  $AE$ , lấy điểm  $F$  sao cho  $C$  là trung điểm của  $DF$ . Chứng minh rằng

- a) Hai tứ giác  $AEDF$ ,  $ABFD$  là những hình bình hành.
- b) Các trung điểm của ba đoạn thẳng  $AF$ ;  $DE$ ;  $BC$  trùng nhau.

### Lời giải

a) Ta có  $B$  là trung điểm của  $AE$  (gt)

$$\Rightarrow AB = BE$$

Tương tự  $C$  là trung điểm của  $DF$

$$\Rightarrow DC = CF$$

mà  $ABCD$  là hình bình hành (gt)

$$\Rightarrow AB = CD \text{ và } AB \parallel CD \Rightarrow AE = DF \text{ và } AE \parallel DF$$

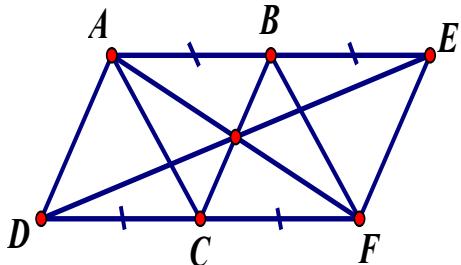
Do đó  $AEDF$  là hình bình hành (Hai cạnh đối vừa song song và bằng nhau).

Để thấy  $AB \parallel CF$  và  $AB = CF$ . Do đó  $ABFC$  là hình bình hành.

b) Gọi  $O$  là giao điểm của hai đoạn thẳng  $AF$  và  $DE$  vì  $AF$  và  $DE$  là hai đường chéo của hình bình hành  $AEDF$  (cmt) nên  $AF$  và  $DE$  có trung điểm  $O$  (1)

Gọi  $O'$  là giao điểm của hai đoạn thẳng  $AF$  và  $BC$  vì  $ABFC$  là hình bình hành (cmt)  $\Rightarrow O'$  cũng là trung điểm của của đoạn thẳng  $AF$  (2).

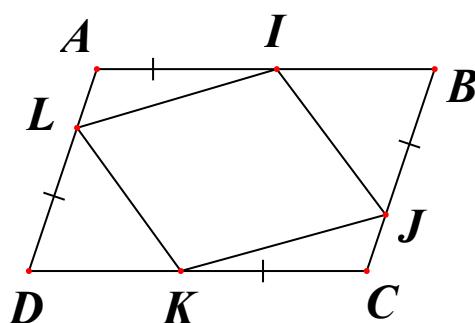
Từ (1) và (2)  $\Rightarrow O$  và  $O'$  trùng nhau hay trung điểm của ba đoạn thẳng  $AF$ ,  $DE$ ,  $BC$  trùng nhau.



### Bài toán 10.

Cho hình bình hành  $ABCD$ . Trên các cạnh  $AB, BC, CD, DA$  lần lượt lấy các điểm  $I, J, K, L$  sao cho  $AI = BJ = CK = DL$ . Chứng minh rằng tứ giác  $IJKL$  là hình bình hành.

### Lời giải



Ta có  $AD = BC$  (gt),  $BJ = DL$  (gt)  $\Rightarrow AD = DL = BC - BJ$  hay  $AL = CJ$ .

Xét  $\triangle ALI$  và  $\triangle CKJ$  có

$$AL = CJ \text{ (cmt)}$$

$\hat{A} = \hat{C}$  (góc đối của hình bình hành)

$$AI = CK(gt)$$

Do đó  $\Delta ALI = \Delta CJK(c.g.c)$

$\Rightarrow LI = JK$  (hai cạnh tương ứng)

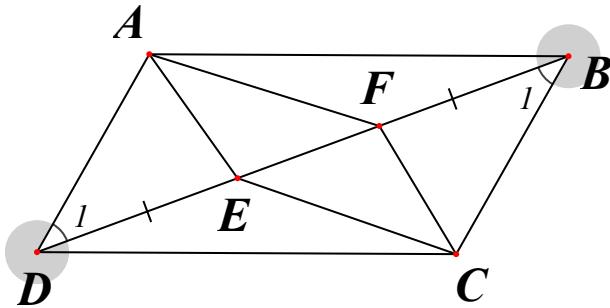
Chứng minh tương tự ta có  $IJ = KL$ .

$\Rightarrow$  Tứ giác  $IJKL$  là hình bình hành (Các cạnh đối bằng nhau).

### Bài toán 11:

Cho hình bình hành  $ABCD$ , trên đường chéo  $BD$  lấy hai điểm  $E$  và  $F$  sao cho  $DE = BF$ . Chứng minh tứ giác  $AECF$  là hình bình hành.

Lời giải



Xét  $\Delta ADE$  và  $\Delta CBF$  có

$$AD = BC(gt)$$

$$\widehat{D}_1 = \widehat{B}_1 \text{ (so le trong)}$$

$$DE = BF(gt)$$

Do đó  $\Delta ADE = \Delta CBF(c.g.c)$

$$\Rightarrow AE = CF \quad (1)$$

Chứng minh tương tự ta có  $\Delta AFB = \Delta CED(c.g.c)$

$$\Rightarrow AF = CE \quad (2)$$

Từ (1) và (2)  $\Rightarrow$  Tứ giác  $AECF$  là hình bình hành (các cạnh đối bằng nhau).

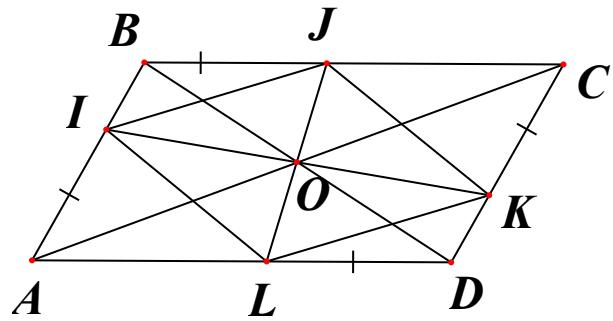
### Bài toán 12:

Cho hình bình hành  $ABCD$ . Trên các cạnh  $AB, BC, CD, DA$  lần lượt lấy các điểm  $I, J, K, L$  sao cho  $AI = BJ = CK = DL$ . Chứng minh rằng:

a) Tứ giác  $IJKL$  là hình bình hành.

b) Bốn đường thẳng  $AC, BD, IK, JL$  đồng quy.

Lời giải



- a) Ta có  $\Delta IBJ = \Delta KDL$  (c.g.c) và  $\Delta JCK = \Delta LAI$   
 $\Rightarrow IJ = KL$  và  $JK = IL$   
Vậy tứ giác  $IJKL$  là hình bình hành (các cạnh đối bằng nhau).

b) Gọi  $O$  là giao điểm hai đường chéo  $AC$  và  $BD$  của hình bình hành  $ABCD$  ta có  $O$  là trung điểm của  $AC$ .

Lại có tứ giác  $AICK$  là hình bình hành ( $AI \parallel CK$  và  $AI = CK$ ).

$\Rightarrow$  Đường chéo  $IK$  đi qua trung điểm  $O$  của  $AC$ , tứ giác  $IJKL$  là hình bình hành (cmt).

$\Rightarrow$  Đường chéo  $JL$  đi qua trung điểm  $O$  của đường chéo  $IK$ .

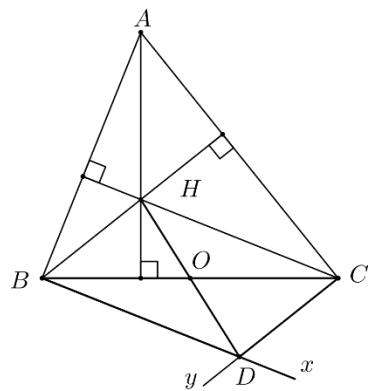
Vậy bốn đường thẳng  $AC$ ,  $BD$ ,  $IK$ ,  $JL$  đồng quy.

**Bài toán 13.** Cho tam giác  $ABC$  có trực tâm  $H$ , kẻ  $Bx \perp AB$ ,  $Cy \perp AC$ . Gọi  $D$  là giao điểm của  $Bx$  và  $Cy$ .

a) Chứng minh:  $BHCD$  là hình bình hành.

b) Gọi  $O$  là trung điểm của  $BC$ . Chứng minh  $H, O, D$  thẳng hàng.

### Lời giải



a) Ta có:  $Bx \parallel CH$  ( $\perp AB$ ).

Tương tự:  $Cy \parallel BH$  ( $\perp AC$ ).

hay  $BD \parallel CH$  và  $CD \parallel BH$ .

Vậy tứ giác  $BHCD$  là hình bình hành.

b)  $O$  là trung điểm của  $BC \Rightarrow$  Đường chéo thứ hai  $HD$  phải qua  $O$ .

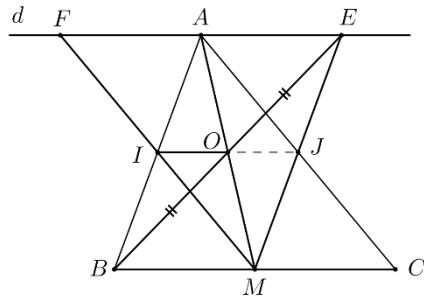
Hay ba điểm  $H, O, D$  thẳng hàng.

**Bài toán 14.** Cho tam giác  $ABC$ , một đường thẳng  $d$  qua  $A$  và  $d$  song song với  $BC$ . Trên cạnh  $BC$  lấy một điểm  $M$ . Từ  $M$  lần lượt vẽ các đường thẳng song song với  $AB, AC$  cắt  $d$  tại các điểm tương ứng  $E$  và  $F$ . Gọi  $I$  là giao điểm  $AB$  và  $MF$ ,  $J$  là giao điểm của  $AC$  và  $ME$ .

a) Chứng minh: Tứ giác  $AEMB$ ,  $AFMC$  là các hình bình hành.

b) Gọi  $O$  là trung điểm của  $BE$ . Chứng minh ba điểm  $I, O, J$  thẳng hàng.

### Lời giải



a) Ta có  $ME \parallel AB$  (gt),  $AE \parallel BM$  (gt)  $\Rightarrow$  Tứ giác  $AEMB$  là hình bình hành (các cạnh đối song song).

Chứng minh tương tự ta có  $AFMC$  là hình bình hành.

b) Vì  $AEMB$  là bình hành (cmt) mà  $O$  là trung điểm của  $BE$

**Bài toán 15:** Cho hình bình hành  $ABCD$ , trên đường chéo  $BD$  lấy hai điểm  $M$  và  $N$  sao cho  $BM = MN = ND$ .

a) Chứng minh tứ giác  $AMCN$  là hình bình hành.

b) Gọi  $I$  là giao điểm của  $AN$  và  $DC$ ,  $K$  là giao điểm của  $CM$  và  $AB$  và  $O$  là giao điểm của  $AC$  và  $BD$ . Chứng minh ba điểm  $I, O, K$  thẳng hàng.

### Hướng dẫn giải:

a) Xét  $\Delta AND$  và  $\Delta CMB$  có  $DN = BM$  (gt):

$$\widehat{D_1} = \widehat{B_1} \text{ (so le trong do } AD \parallel BC \text{)}$$

$$AD = BC \text{ (cạnh đối của hình bình hành)}$$

$$\text{Do đó } \Delta AND = \Delta CMB (c-g-c) \Rightarrow AN = CM \quad (1)$$

Chứng minh tương tự với hai tam giác  $AMB$  và  $CND$  ta có  $AM = CN \quad (2)$

Từ (1) và (2)  $\Rightarrow AMCN$  là hình bình hành (các cạnh đối bằng nhau)

b)  $K \in CM, I \in CN \Rightarrow CK \parallel AI$  và  $AK \parallel CI$  ( $Vì AB \parallel CD$ )

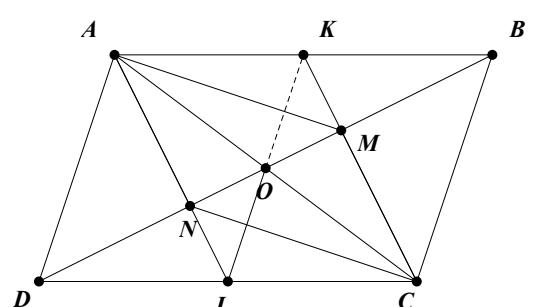
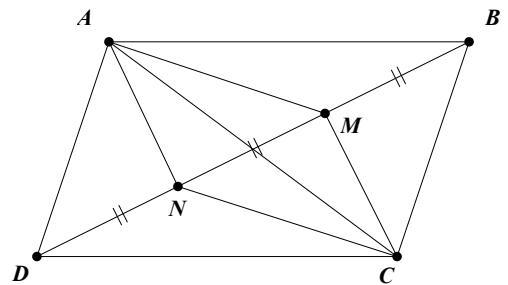
Do đó  $AKCI$  là hình bình hành (các cạnh đối song song)

$O$  là giao điểm của hai đường chéo của hình bình hành  $ABCD$

$\Rightarrow O$  là trung điểm của  $AC$

Mặt khác  $AKCI$  là hình bình hành (cmt)

Nên đường chéo thứ hai  $KI$  phải qua  $O$  hay  $I, O, K$  thẳng hàng.



**Bài toán 16:** Cho hình bình hành  $ABCD$  ( $AB > BC$ ), phân giác của  $\widehat{D}$  cắt cạnh  $AB$  tại  $M$ , phân giác của  $\widehat{B}$  cắt cạnh  $CD$  tại  $N$

a) Chứng minh tứ giác  $BMDN$  là hình bình hành.

b) Chứng minh rằng  $AC, BD, MN$  đồng quy

### Hướng dẫn giải:

a) Ta có  $DM$  là phân giác của  $\widehat{D}$

$$\Rightarrow \widehat{D}_1 = \widehat{MDC} \text{ tương tự } BN \text{ là phân giác của } \widehat{B}$$

Ta có  $\widehat{ABN} = \widehat{B}_2$  mà  $\widehat{ADC} = \widehat{ABC}$  (góc đối của hình bình hành)

$$\Rightarrow \widehat{D}_1 = \widehat{MDC} = \widehat{ABN} = \widehat{B}_2$$

Xét  $\Delta ADM$  và  $\Delta CBN$  có:

$$\widehat{D}_1 = \widehat{B}_2 \text{ (cmt)}$$

$$AD = BC \text{ và } \widehat{A} = \widehat{C} \text{ (gt)}$$

$$\Rightarrow \Delta ADM = \Delta CBN (c-g-c)$$

$$\Rightarrow \widehat{M}_1 = \widehat{N}_1 \text{ mà } \widehat{M}_1 + \widehat{DMB} = 180^\circ \text{ (kè bù)}$$

$$\text{Tương tự } \widehat{N}_1 + \widehat{BND} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{DMB} = \widehat{BND} \quad (1)$$

$$\text{Lại có: } \widehat{ABN} = \widehat{MDC} \text{ (cmt)} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) Tứ giác  $BMDN$  là hình bình hành (các góc đối bằng nhau)

b) Gọi  $O$  là giao điểm của hai đường chéo  $AC$  và  $BD$

Ta có  $O$  là trung điểm của  $AC$  và  $BD$ . Lại có  $BMDN$  là hình bình hành nên đường chéo  $MN$  phải đi qua trung điểm của đường chéo  $BD$  hay ba đường  $AC, BD$  và  $MN$  đồng quy

**Bài toán 17:** Cho hình bình hành  $ABCD$ , các điểm  $E, F$  thuộc đường chéo  $AC$  sao cho  $AE = EF = FC$ . Gọi  $M$  là giao điểm của  $BF$  và  $CD$ ,  $N$  là giao điểm của  $DE$  và  $AB$ . Chứng minh rằng:

a)  $M, N$  là trung điểm của  $CD$  và  $AB$ .

b) Tứ giác  $EMFN$  là hình bình hành.

### Hướng dẫn giải:

Gọi  $O$  là giao điểm của hai đường chéo  $AC$  và  $BD$

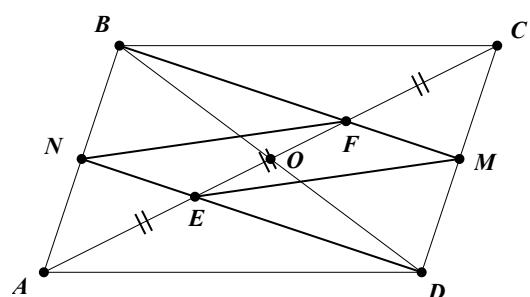
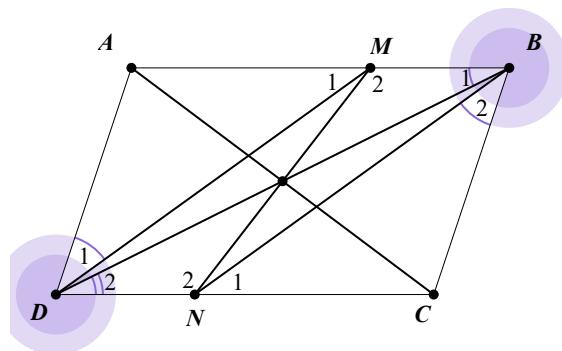
Ta có  $OA = OC = \frac{AC}{2}$  và  $OB = OD = \frac{BD}{2}$  (tính chất đường chéo của hình bình hành)

Lại có  $AE = EF = FC = \frac{AC}{3}$  (gt)

$$\Rightarrow \frac{AE}{OA} = \frac{\frac{AC}{3}}{\frac{AC}{2}} = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow AE = \frac{2}{3}OA \text{ và } OA \text{ là trung tuyến } (OB = OD)$$

Chứng tỏ  $E$  là trọng tâm  $\Delta ABD \Rightarrow DN$  qua  $E$



Vậy là trung điểm của

Chứng minh tương tự ta có là trung điểm của

b) Xét  $\Delta ABD$  có  $N, O$  lần lượt là trung điểm của  $AB$  và  $BD$ .

$\Rightarrow NO$  là đường trung bình của  $\Delta ABD$

$\Rightarrow NO = \frac{AD}{2}$ . Chứng minh tương tự ta có  $MO = \frac{BC}{2}$  mà  $AD = BC$  (cạnh đối của hình bình hành).

$\Rightarrow ON = OM$  lại có  $OE = OF$  (cmt)

Do đó tứ giác  $EMFN$  là hình bình hành (hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm mỗi đường).

**Bài toán 18:** Cho tam giác  $ABC$ , kéo dài trung tuyến  $BD$  trên tia  $BD$  lấy điểm  $F$  sao cho  $DF = DB$ . Kéo dài trung tuyến  $CE$  trên tia  $CE$  lấy điểm  $G$  sao cho  $EG = EC$ . Chứng minh rằng:

a) Các tứ giác  $ABCF, ACBG$  là các hình bình hành.

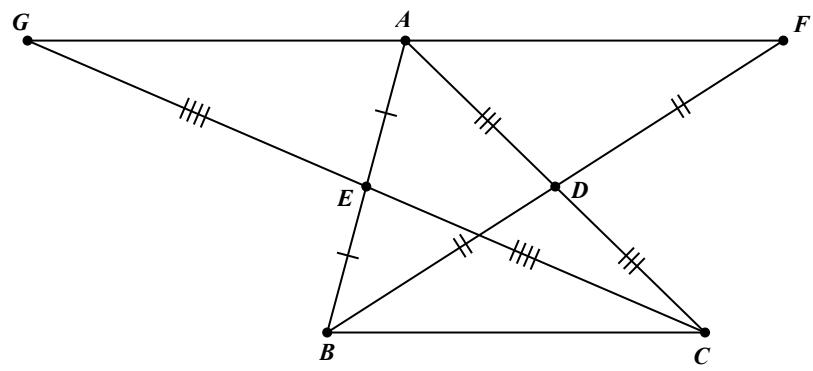
b) Ba điểm  $G, A, F$  thẳng hàng.

**Hướng dẫn giải:**

a) Ta có  $DA = DC$  (tính chất đường trung tuyến của tam giác)

$DB = DF$  (gt)  $\Rightarrow$  Tứ giác  $ABCF$  là hình bình hành (hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm mỗi đường)

Chứng minh tương tự ta có tứ giác  $ACBG$  là hình bình hành.



b) Tứ giác  $ABCF$  và tứ giác  $ACBG$  là hình bình hành (cmt)

$\Rightarrow AF \parallel BC$  và  $AG \parallel BC$

Theo tiên đề Euclid  $AF$  và  $AG$  phải trùng nhau hay ba điểm  $G, A, F$  thẳng hàng.

**Bài toán 19:** Cho hình bình hành  $ABCD$ . Gọi  $E, F$  lần lượt là trung điểm của các cạnh  $AB, CD$ . Chứng minh  $BF = DE$ .

**Hướng dẫn giải:**

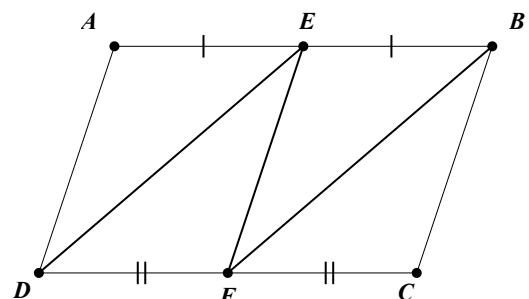
$E$  là trung điểm của đoạn  $AB$  (gt)  $\Rightarrow EA = EB = \frac{AB}{2}$

Tương tự  $F$  là trung điểm của đoạn  $CD$   $\Rightarrow FC = FD = \frac{CD}{2}$

Vì  $ABCD$  là hình bình hành nên  $AB \parallel CD$  và  $AB = CD$

$\Rightarrow EB \parallel DF$  và  $EB = DF$

Do đó tứ giác  $EBFD$  là hình bình hành (hai cạnh đối vừa song song vừa bằng nhau)  $\Rightarrow BF = DE$



**Bài toán 20:** Cho hình bình hành  $ABCD$ . Lấy điểm  $M$  thuộc cạnh  $AB$  và điểm  $N$  thuộc cạnh  $CD$  sao cho  $AM = CN$ . Chứng minh rằng:

a)  $AN = CM$ .

b)  $\widehat{AMC} = \widehat{ANC}$ .

**Hướng dẫn giải:**

Tứ giác  $ABCD$  là hình bình hành nên  $AB \parallel CD$  và  $AB = CD$

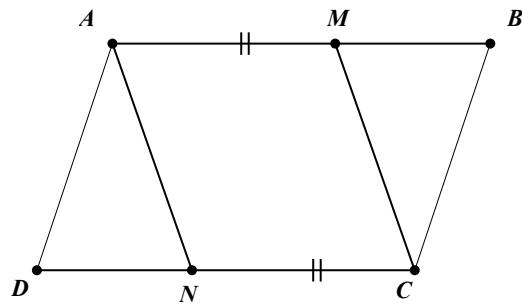
$$AM = CN \text{ (gt)} \text{ và } AM \parallel CN$$

$\Rightarrow$  Tứ giác  $AMCN$  là hình bình hành.

$\Rightarrow AN = CM$  (các cạnh đối của hình bình hành)

b) Tứ giác  $AMCN$  là hình bình hành (cmt)

$$\Rightarrow \widehat{AMC} = \widehat{ANC} \text{ (các cạnh đối của hình bình hành)}$$



## II. Tính toán

**Bài toán 21:** Tính các góc còn lại của bình hành  $ABCD$  trong hình vẽ bên.

**Hướng dẫn giải:**

Tứ giác  $ABCD$  là hình bình hành nên  $\widehat{C} = \widehat{A} = 100^\circ$  (các góc đối của hình bình hành)

Ta có  $AB \parallel CD$  (tính chất cạnh đối của hình bình hành)

Khi đó  $\widehat{A}$  và  $\widehat{D}$  là hai góc trong cùng phía.

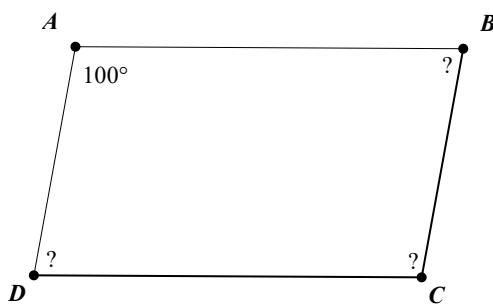
$$\Rightarrow \widehat{A} + \widehat{D} = 180^\circ$$

$$100^\circ + \widehat{D} = 180^\circ$$

$$\widehat{D} = 180^\circ - 100^\circ$$

$$\widehat{D} = 80^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{B} = \widehat{D} = 80^\circ \text{ (góc đối của hình bình hành)}$$



**Bài toán 22:** Cho hình bình hành  $ABCD$  có  $AB = 3cm$ ,  $AD = 5cm$

a) Hỏi tia phân giác của  $\widehat{A}$  cắt cạnh  $CD$  hay cạnh  $BC$ ?

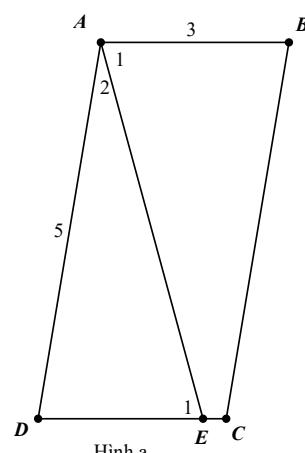
b) Tính khoảng cách từ giao điểm từ điểm đó đến điểm  $C$ .

**Hướng dẫn giải:**

a) Giả sử tia phân giác của  $\widehat{A}$  cắt cạnh  $DC$  tại điểm  $E$

Tứ giác  $ABCD$  là hình bình hành nên  $AB \parallel CD$

$$\Rightarrow \widehat{A}_1 = \widehat{E}_1 \text{ (cặp góc so le trong) mà } \widehat{A}_1 = \widehat{A}_2 \text{ (gt)} \Rightarrow \widehat{E}_1 = \widehat{A}_2$$



hay  $\Delta ADE$  cân tại  $D$  hay  $DA = DE$  vô lí

vì  $DA = 5\text{ cm}, DE < DC = 3\text{ cm}$

Do đó tia phân giác của  $\widehat{A}$  không thể nào cắt cạnh  $BC$  (Hình a)

b) Gọi  $M$  là giao điểm của tia phân giác của  $\widehat{A}$  với cạnh  $BC$ .

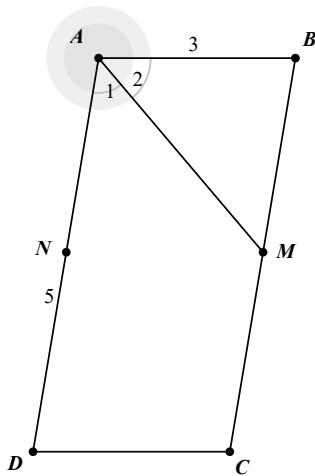
Lấy  $N$  thuộc cạnh  $AD$  sao cho  $AN = 3\text{ cm}$

Khi đó  $\Delta AMN = \Delta AMB (c - g - c)$

$$\Rightarrow BM = 3\text{ cm}$$

$$\Rightarrow MC = BC - MB = 5 - 3 = 2\text{ cm}.$$

Vậy khoảng cách từ giao điểm đó đến điểm  $C$  là  $2\text{ cm}$ .



**Bài toán 23:** Mặt trước của một công trình xây dựng được làm bằng kính có dạng hình bình hành  $EFGH$  với  $M$  là giao điểm của hai đường chéo (hình). Cho  $EF = 40\text{ m}, EM = 36\text{ m}, HM = 16\text{ m}$  biết. Tính độ dài cạnh  $HG$  và độ dài hai đường chéo.

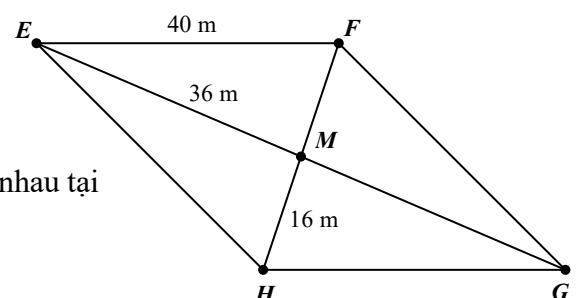
#### Hướng dẫn giải:

Ta có  $EFGH$  là hình bình hành

$$\Rightarrow HG = EF = 40\text{ m} \text{ (cạnh đối của hình bình hành)}$$

Đường chéo  $EG = 2EM = 2.36 = 72\text{ m}$  (hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường)

$$\text{Tương tự } HF = 2HM = 2.16 = 32\text{ m}$$



#### IV. Vẽ hình bình hành

**Bài toán 24:** Cho ba điểm không thẳng hàng.

a) Tìm một điểm sao cho nó cùng với ba điểm đã cho là bốn đỉnh của một hình bình hành. Hãy vẽ hình và mô tả cách tìm.

b) Hỏi tìm được bao nhiêu điểm như vậy?

#### Hướng dẫn giải:

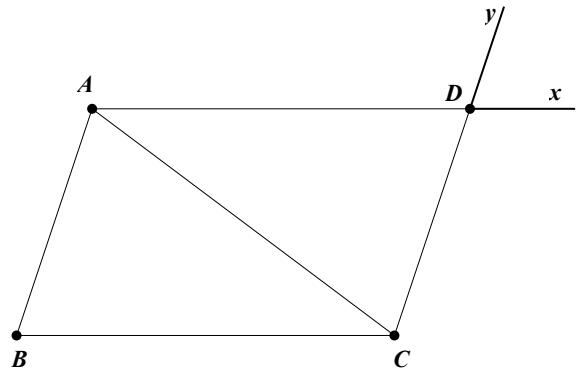
a) Từ  $A$  kẻ tia  $Ax \parallel BC$  tương tự kẻ tia  $Cy \parallel AB$

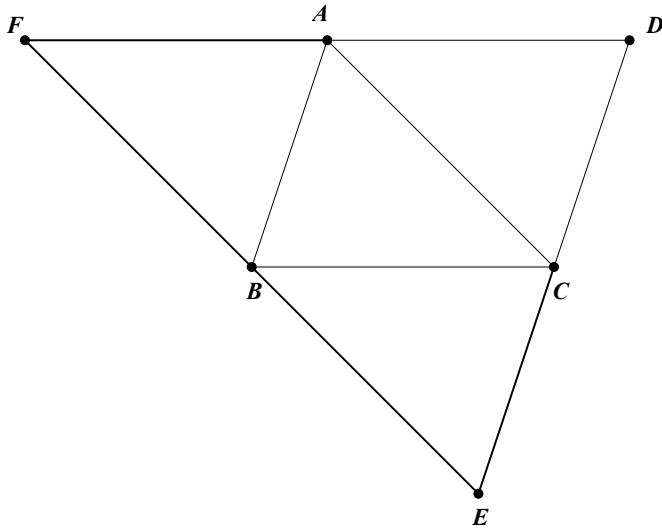
Lấy  $D$  là giao điểm của hai tia  $Ax$  và  $Cy$  ta được hình bình hành  $ABCD$  cần dựng

Thật vậy  $ABCD$  là hình bình hành (các cạnh đối song song)

b) Ta tìm được ba điểm  $D, E, F$

(Mời bạn xem hình vẽ dưới).





## BÀI TẬP

**Bài 3.11.** Cho hình thang vuông  $ABCD$ , có  $\widehat{A} = \widehat{B} = 90^\circ$  và  $AD = 2BC$ . Kẻ  $AH$  vuông góc với  $BD$  ( $H$  thuộc  $BD$ ). Gọi  $I$  là trung điểm của  $HD$ . Chứng minh rằng:  $CI \perp AI$ .

**Hướng dẫn giải:**

Gọi  $E, F$  lần lượt là trung điểm của  $AD, AH$

Xét  $\Delta AHD$  có:

$F$  là trung điểm của  $AH$

$I$  là trung điểm của  $HD$

$\Rightarrow IF$  là đường trung bình của  $\Delta AHD$

$$\Rightarrow IF \parallel AD \Rightarrow IF \parallel AE \quad (1) \Rightarrow IF = \frac{1}{2}AD = AE$$

Xét  $\Delta AHD$  có:

$E$  là trung điểm của  $AD$

$I$  là trung điểm của  $HD$

$\Rightarrow IE$  là đường trung bình của  $\Delta AHD$

$$\Rightarrow IE \parallel AH \Rightarrow IE \parallel FA \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta suy ra:  $AFIE$  là hình bình hành

Mà  $AD = 2BC$

$$\Rightarrow AE = BC$$

$$\Rightarrow IF = AE = BC$$

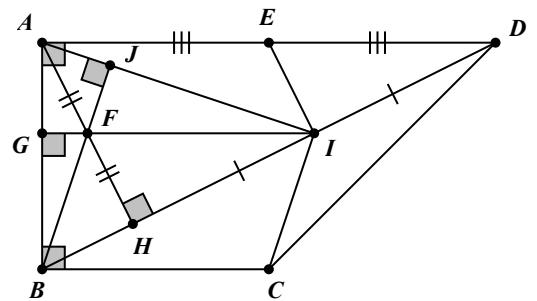
Ta có:  $IF \parallel AE; AE \parallel BC (AD \parallel BC)$

$\Rightarrow BCIF$  là hình bình hành

$$\Rightarrow BF \parallel CI$$

$$\Rightarrow BC \parallel FI$$

Ta lại có:  $AH \perp BI, IF \perp AB$  tại  $G (\widehat{ABC} = 90^\circ \text{ và } IF \parallel BC)$



Mà  $AH$  và  $IF$  cắt nhau tại  $F$

$\Rightarrow F$  là trực tâm của  $\Delta ABI$

$\Rightarrow BF \perp AI$  tại  $J$

Mà  $BF \parallel CI \Rightarrow \widehat{AJB} = \widehat{AIC}$  (2 góc đồng vị)

Mà  $\widehat{AJB} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{AIC} = 90^\circ \Rightarrow AI \perp CI$  (dpcm)

**Bài 3.12.** Cho hai cạnh  $AB, AC$  của  $\Delta ABC$  ( $\widehat{BAC} \neq 60^\circ$ ) dựng các tam giác đều  $ABD$  và  $ACE$  ra phía ngoài của góc  $A$ . Lấy  $AD, AE$  làm hai cạnh dựng hình bình hành  $ADFE$ . Chứng minh rằng  $\Delta FBC$  đều.

**Hướng dẫn giải:**

Xét  $\Delta BDF$  và  $\Delta FEC$  có :

$$BD = EF (= AD) \quad (1)$$

$$DF = EC (= AE) \quad (2)$$

$$\widehat{BDF} = \widehat{D}_1 + 60^\circ$$

$$\widehat{FEC} = \widehat{E}_1 + 60^\circ$$

mà  $\widehat{D}_1 = \widehat{E}_1$  (góc đối của hình bình hành)

$$\Rightarrow \widehat{BDF} = \widehat{FEC} \quad (3)$$

Từ (1); (2); (3)  $\Rightarrow \Delta BDF = \Delta FEC$  ( $c-g-c$ )

$$\Rightarrow FB = FC$$

Vậy  $\Delta BFC$  cân (4)

Mặt khác  $ADEF$  là hình bình hành nên  $\widehat{DFE} + \widehat{FEA} = 180^\circ$

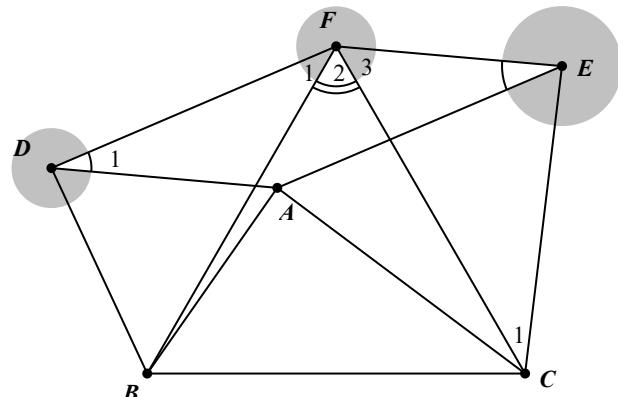
$$\text{hay } \widehat{F}_1 + \widehat{F}_2 + \widehat{F}_3 + \widehat{E}_1 = 180^\circ$$

Trong  $\Delta FEC$  có  $\widehat{F}_3 + \widehat{E}_1 + 60^\circ + \widehat{C}_1 = 180^\circ$

$$\Rightarrow \widehat{F}_1 + \widehat{F}_2 + \widehat{F}_3 + \widehat{E}_1 = \widehat{F}_3 + \widehat{E}_1 + 60^\circ + \widehat{C}_1$$

$$\text{Mà } \widehat{C}_1 = \widehat{F}_1 \text{ (cmt)} \Rightarrow \widehat{F}_2 = 60^\circ \quad (5)$$

Từ (4) và (5) ta có  $\Delta FBC$  đều



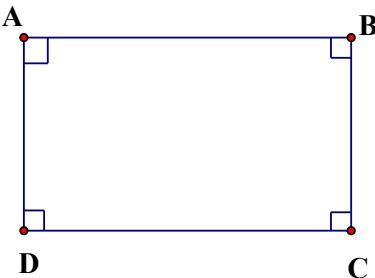
↔ HẾT ↔

## BÀI 13: HÌNH CHỮ NHẬT

### A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

#### 1. Định nghĩa

Hình chữ nhật là tứ giác có bốn góc vuông.



#### 2. Tính chất

Hình chữ nhật có tất cả các tính chất của hình bình hành, hình thang cân.

Ngoài ra ta còn có tính chất sau đây về đường chéo hình chữ nhật.

*Định lí 1:* Trong hình chữ nhật hai đường chéo bằng nhau và cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường.

Nhận xét: Trong tam giác vuông, đường trung tuyến ứng với cạnh huyền bằng nửa cạnh huyền và ngược lại.

*Định lí 2:*

- Hình bình hành có một góc vuông là hình chữ nhật.
- Hình bình hành có hai đường chéo bằng nhau là hình chữ nhật.

#### 3. Đấu hiệu nhận biết

- Tứ giác có ba góc vuông là hình chữ nhật.
- Hình thang cân có một góc vuông là hình chữ nhật.
- Hình bình hành có một góc vuông là hình chữ nhật.
- Hình bình hành có hai đường chéo bằng nhau là hình chữ nhật.

### B. PHÂN LOẠI CÁC BÀI TẬP

#### I. Chứng minh tứ giác là hình chữ nhật - Áp dụng dấu hiệu nhận biết tìm điều kiện để một hình đã cho là hình chữ nhật

**Bài toán 1.** Cho tam giác  $ABC$ , đường cao  $AH$ . Gọi  $M$  là trung điểm của  $AC$ ,  $N$  là điểm sao cho  $M$  là trung điểm của  $HN$ . Chứng minh tứ giác  $AHCN$  là hình chữ nhật.

**Bài toán 2.** Cho tam giác  $ABC$ , trung tuyến  $AD$  thỏa mãn  $AD = \frac{BC}{2}$ . Trên tia đối của tia  $DA$  lấy điểm  $E$  sao cho  $ED = AD$ . Chứng minh rằng tứ giác  $ABEC$  là hình chữ nhật.

**Bài toán 3.** Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$  ( $AB < AC$ ). Gọi  $D$  là trung điểm của  $BC$ . Vẽ  $DE \parallel AB$ ,  $DF \parallel AC$  ( $E \in AC$ ,  $F \in AB$ ). Chứng minh rằng tứ giác  $AEDF$  là hình chữ nhật.

**Bài toán 4.** Cho hình bình hành  $ABCD$ , các tia phân giác của các góc  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  cắt nhau tại các điểm  $M$ ,  $N$ ,  $P$ ,  $Q$ . Chứng minh rằng tứ giác  $MNPQ$  là hình chữ nhật.

**Bài toán 5.** Cho hình chữ nhật  $ABCD$ . Hai đường chéo  $AC$ ,  $BD$  cắt nhau tại  $O$ . Kẻ  $OH \perp DC$ . Chứng minh rằng  $H$  là trung điểm của  $DC$ .

**Bài toán 6.** Cho tam giác  $ABC$ . Từ điểm  $D$  bất kì trên cạnh  $BC$  vẽ  $DE$ ,  $DF$  lần lượt song song với  $AB$  và  $AC$  ( $E \in AC$ ,  $F \in AB$ ). Chứng minh rằng:

- Tứ giác  $AEDF$  là hình bình hành.
- Tìm điều kiện của tam giác  $ABC$  để tứ giác  $AEDF$  là hình chữ nhật.

**Bài toán 7.** Cho tam giác  $ABC$  có  $D$ ,  $E$ ,  $F$  theo thứ tự là trung điểm của  $AB$ ,  $AC$  và  $BC$ . Gọi  $G$  là trọng tâm. Trên tia đối của  $EG$  lấy  $H$  sao cho  $EH = EG$ . Trên tia đối  $DG$  lấy  $K$  sao cho  $DK = DG$ .

- Chứng minh tứ giác  $BKHC$  là hình bình hành.

b) Tam giác ABC có thêm điều kiện gì để tứ giác BKHC là hình chữ nhật

**Bài toán 8.** Xét một điểm M trên cạnh huyền của tam giác ABC vuông cân tại A. Gọi N và P lần lượt là hình chiếu vuông góc của M trên các cạnh AB và AC.

a) Hỏi tứ giác MPAN là hình gì?

b) Hỏi M ở vị trí nào thì đoạn thẳng NP có độ dài ngắn nhất? Vì sao?

### C. BÀI TẬP

**9.13.** Cho hình thang cân ABCD có  $AB//CD, \hat{A} = 90^\circ$ . Chứng minh ABCD là hình chữ nhật.

**9.14.** Cho tam giác ABC, đường cao AH. Gọi I là trung điểm của AC, E là trung điểm sao cho I là trung điểm của HE. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của HC, CE. Các đường thẳng AM, AN cắt HE tại G và K

a) Chứng minh tứ giác AHCE là hình chữ nhật.

b) Chứng minh  $HG = GK = KE$ .

**9.15.** Cho hình chữ nhật ABCD, trên tia đối của các tia CB và DA lần lượt lấy các điểm E và F sao cho  $CE = DF = CD$ . Trên tia đối của tia CD lấy điểm I sao cho  $CI \neq BC$ . Nối A với E, F với I. Chứng minh rằng AE vuông góc với FI.

**9.16.** Cho hình chữ nhật ABCD, E thuộc cạnh AB. Lấy F thuộc tia đối của tia CB sao cho  $\widehat{EDF} = 90^\circ$ . Vẽ hình chữ nhật EDFK. Tính số đo góc DBK.

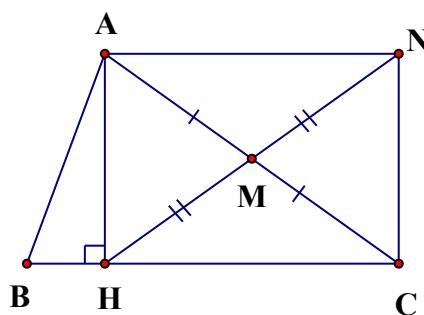
## ĐÁP ÁN THAM KHẢO BÀI 13: HÌNH CHỮ NHẬT

### B. PHÂN LOẠI CÁC BÀI TOÁN

#### I. Lập tỉ lệ thức

**Bài toán 1.** Cho tam giác ABC, đường cao AH. Gọi M là trung điểm của AC, N là điểm sao cho M là trung điểm củaHN. Chứng minh tứ giác AHCN là hình chữ nhật.

#### Lời giải



Ta có  $AH \perp BC$  (gt) nên  $\Delta AHC$  vuông tại H, có HM là đường trung tuyến (M là trung điểm của AC).

$$\Rightarrow MH = \frac{AC}{2} \text{ hay } MH = MA = MC$$

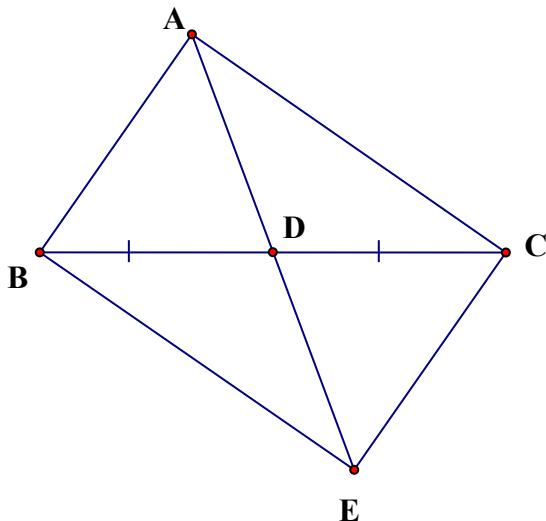
Theo giả thiết M là trung điểm của AC

$\Rightarrow MH = MN = MA = MC$  Do đó AHCN là hình bình hành (hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm mỗi đường), lại có  $\widehat{AHC} = 90^\circ$ (gt)

Vậy tứ giác AHCN là hình chữ nhật.

**Bài toán 2.** Cho tam giác  $ABC$ , trung tuyến  $AD$  thỏa mãn  $AD = \frac{BC}{2}$ . Trên tia đối của tia  $DA$  lấy điểm  $E$  sao cho  $ED = AD$ . Chứng minh rằng tứ giác  $ABEC$  là hình chữ nhật.

### Lời giải



Ta có  $DB = DC$  (tính chất trung tuyến trong tam giác)

$$ED = AD \text{ (gt)}$$

Do đó tứ giác  $ABEC$  là hình bình hành (hai đường chéo  $AE$  và  $BC$  cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường)

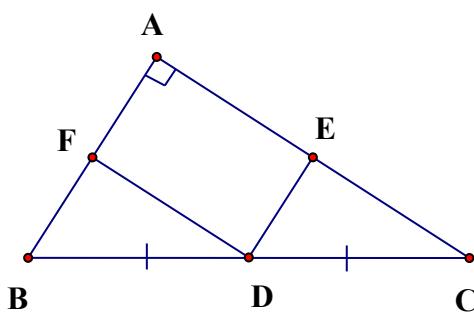
$$\text{Lại có } AD = \frac{BC}{2} \Rightarrow BC = 2AD$$

$$\text{Tương tự } AD = \frac{AE}{2} \Rightarrow AE = 2AD \Rightarrow BC = AE$$

Hình bình hành  $ABEC$  có hai đường chéo  $AE = BC$  (cmt) nên  $ABEC$  là hình chữ nhật.

**Bài toán 3.** Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$  ( $AB < AC$ ). Gọi  $D$  là trung điểm của  $BC$ . Vẽ  $DE \parallel AB, DF \parallel AC$  ( $E \in AC, F \in AB$ ). Chứng minh rằng tứ giác  $AEDF$  là hình chữ nhật.

### Lời giải



Ta có  $DE \parallel AB$  hay  $DE \parallel AF$

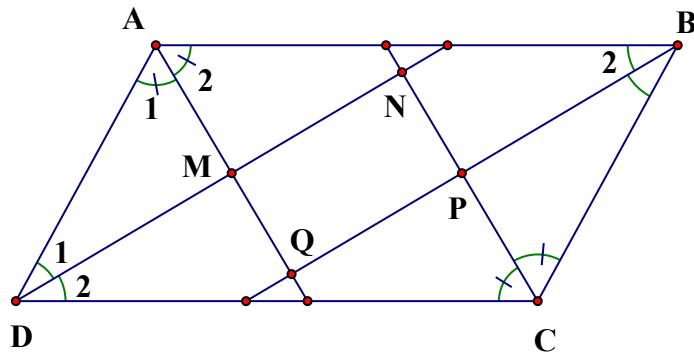
$DF \parallel AC$  hay  $DF \parallel AE$

$\Rightarrow AEDF$  là hình bình hành (các cạnh đối song song), lại có  $\hat{A} = 90^\circ$  (gt)

Do đó tứ giác  $AEDF$  là hình chữ nhật (hình bình hành có một góc vuông).

**Bài toán 4.** Cho hình bình hành ABCD, các tia phân giác của các góc A, B, C, D cắt nhau tại các điểm M, N, P, Q. Chứng minh rằng tứ giác MNPQ là hình chữ nhật.

### Lời giải



$$\text{Ta có } \widehat{A}_1 = \widehat{A}_2 = \frac{\widehat{A}}{2} (\text{gt})$$

$$\widehat{D}_1 = \widehat{D}_2 = \frac{\widehat{D}}{2} (\text{gt})$$

$$\text{mà } \widehat{A} + \widehat{D} = 180^\circ \text{ (trong cùng phía)} \Rightarrow \widehat{A}_1 + \widehat{D}_1 = 90^\circ.$$

$$\text{Trong } \triangle AMD \text{ có } \widehat{A}_1 + \widehat{D}_1 = 90^\circ (\text{cmt}) \Rightarrow \widehat{AMD} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{NMQ} = 90^\circ$$

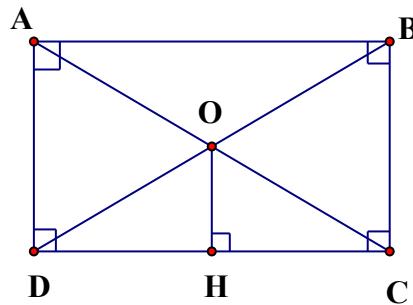
$$\text{Chứng minh tương tự ta có } \widehat{NPQ} = 90^\circ.$$

$$\text{Lại có } \widehat{A}_2 + \widehat{B}_2 = 90^\circ \Rightarrow \widehat{AQB} = 90^\circ.$$

Do đó MNPQ là hình chữ nhật (có ba góc vuông).

**Bài toán 5.** Cho hình chữ nhật ABCD. Hai đường chéo AC, BD cắt nhau tại O. Kẻ OH  $\perp$  DC. Chứng minh rằng H là trung điểm của DC.

### Lời giải



AC và BD là hai đường chéo của hình chữ nhật ABCD mà AC và BD cắt nhau tại O

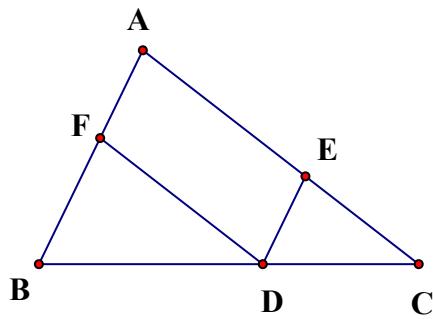
$\Rightarrow OA = OB = OC = OD$  (tính chất hai đường chéo của hình chữ nhật: Hai đường chéo bằng nhau và cắt nhau tại trung điểm mỗi đường) hay  $\triangle COD$  cân tại O có OH là đường cao (gt)  
 $\Rightarrow OH$  đồng thời là đường trung tuyến hay H là trung điểm của BC.

**Bài toán 6.** Cho tam giác ABC. Từ điểm D bất kì trên cạnh BC vẽ DE, DF lần lượt song song với AB và AC ( $E \in AC, F \in AB$ ). Chứng minh rằng:

a) Tứ giác AEDF là hình bình hành.

b) Tìm điều kiện của tam giác ABC để tứ giác AEDF là hình chữ nhật.

### Lời giải

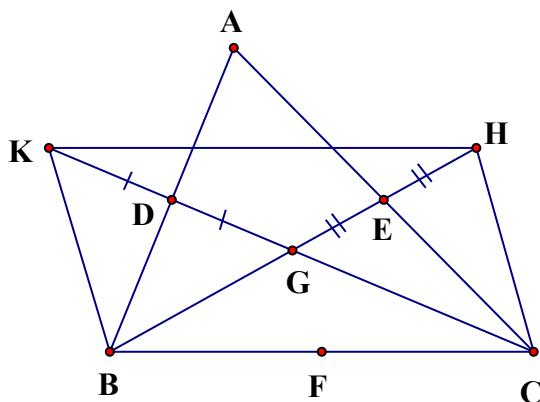


- a) Ta có  $DE \parallel AB, BF \parallel AC$  (gt) nên  $AEDF$  là hình bình hành (các cạnh đối song song).
- b) Hình bình hành  $AEDF$  là hình chữ nhật  $\Leftrightarrow \widehat{FAE} = 90^\circ$   
 $\Leftrightarrow \Delta ABC$  vuông tại  $A$ .

**Bài toán 7.** Cho tam giác  $ABC$  có  $D, E, F$  theo thứ tự là trung điểm của  $AB, AC$  và  $BC$ . Gọi  $G$  là trọng tâm. Trên tia đối của  $EG$  lấy  $H$  sao cho  $EH = EG$ . Trên tia đối  $DG$  lấy  $K$  sao cho  $DK = DG$ .

- a) Chứng minh tứ giác  $BKHC$  là hình bình hành.
- b) Tam giác  $ABC$  có thêm điều kiện gì để tứ giác  $BKHC$  là hình chữ nhật.

### Lời giải



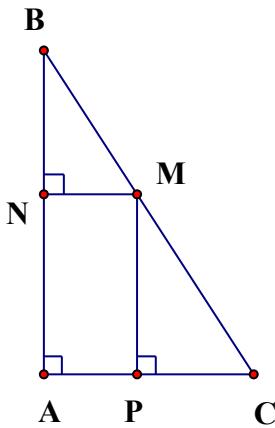
- a)  $G$  là trọng tâm  $\Delta ABC$  nên  $GB = 2GE$  (tính chất trọng tâm)  
 $GE = HE$  (gt)  $\Rightarrow GB = GH$ . Chứng minh tương tự ta có  $GC = GK$ .  
Do đó  $BKHC$  là hình bình hành (hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm mỗi đường).
- b) Hình bình hành  $BKHC$  là hình chữ nhật  $\Leftrightarrow BH = CK$   
 $\Leftrightarrow BE = CD \Leftrightarrow \Delta BEA = \Delta CDA \Leftrightarrow AB = AC \Leftrightarrow \Delta ABC$  cân tại  $A$ .

**Bài toán 8.** Xét một điểm  $M$  trên cạnh huyền của tam giác  $ABC$  vuông cân tại  $A$ . Gọi  $N$  và  $P$  lần lượt là hình chiếu vuông góc của  $M$  trên các cạnh  $AB$  và  $AC$ .

a) Hỏi tứ giác  $MPAN$  là hình gì?

b) Hỏi  $M$  ở vị trí nào thì đoạn thẳng  $NP$  có độ dài ngắn nhất? Vì sao?

### Lời giải



a) Dễ thấy tứ giác  $MPAN$  có ba góc vuông nên  $MPAN$  là hình chữ nhật.

b) Vì  $MPAN$  là hình chữ nhật (cmt)  $\Rightarrow AM = NP$

$NP$  có độ dài ngắn nhất khi  $AM$  ngắn nhất  $\Leftrightarrow M$  là chân đường vuông góc kề từ  $A$  xuống  $BC$ .

### C. BÀI TẬP

**3.13.** Cho hình thang cân  $ABCD$  có  $AB//CD$ ,  $\hat{A} = 90^\circ$ . Chứng minh  $ABCD$  là hình chữ nhật.

#### Lời giải

$ABCD$  là hình thang,  $AB//CD$ , mà  $\hat{A}$  và  $\hat{D}$  là hai góc trong cùng phía

$$\Rightarrow \hat{A} + \hat{D} = 180^\circ \text{ hay } 90^\circ + \hat{D} = 180^\circ \Rightarrow \hat{D} = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$$

$ABCD$  là hình thang cân  $\Rightarrow \hat{B} = \hat{A} = 90^\circ$  (hai góc kề một đáy bằng nhau)

Tương tự  $\hat{C} = \hat{D} = 90^\circ$

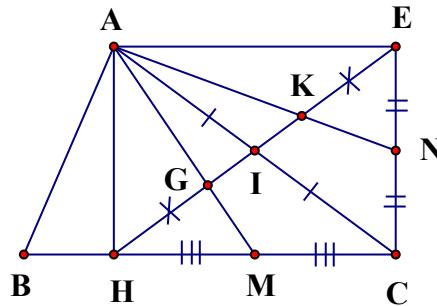
Vậy hình thang cân  $ABCD$  là hình chữ nhật.

**3.14.** Cho tam giác  $ABC$ , đường cao  $AH$ . Gọi  $I$  là trung điểm của  $AC$ ,  $E$  là trung điểm sao cho  $I$  là trung điểm của  $HE$ . Gọi  $M, N$  lần lượt là trung điểm của  $HC, CE$ . Các đường thẳng  $AM, AN$  cắt  $HE$  tại  $G$  và  $K$

a) Chứng minh tứ giác  $AHCE$  là hình chữ nhật.

b) Chứng minh  $HG = GK = KE$ .

#### Lời giải



a) Ta có  $I$  là trung điểm của  $AC$  (gt)  $I$  cũng là trung điểm của  $HE$  (gt)  $\Rightarrow AHCE$  là hình bình hành (Tứ giác có hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm mỗi đường).

Hình bình hành AHCE có  $\widehat{AHC} = 90^\circ$  (gt) nên AHCE là hình chữ nhật (Hình bình hành có một góc vuông).

b) Xét  $\Delta AHC$  có AM và HI là hai đường trung tuyến mà AH và HI cắt nhau tại G  $\Rightarrow G$  là trọng tâm  $\Rightarrow IG = \frac{1}{2} HG = \frac{1}{3} HI$ .

Chứng minh tương tự với  $\Delta AEC$

Ta có K là trọng tâm  $\Rightarrow IK = \frac{1}{2} KE = \frac{1}{3} EI$ ,

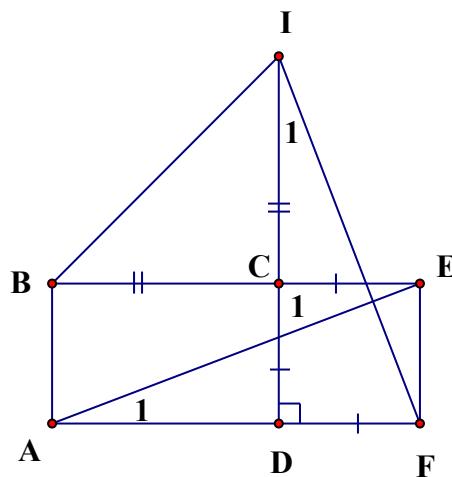
mà HI = EC (tính chất đường chéo hình chữ nhật)

$$\Rightarrow HG = IG + IK = KE$$

hay HG = GK = KE

**3.15.** Cho hình chữ nhật ABCD, trên tia đối của các tia CB và DA lần lượt lấy các điểm E và F sao cho  $CE = DF = CD$ . Trên tia đối của tia CD lấy điểm I sao cho  $CI \neq BC$ . Nối A với E, F với I. Chứng minh rằng AE vuông góc với FI.

### Lời giải



Ta có  $CE//DF$  và  $CE = DF$  nên CEFD là hình bình hành (có hai cạnh đối song song và bằng nhau).

Lại có  $\widehat{CDF} = 90^\circ$  (gt)

Nên CEFD là hình chữ nhật.

$$\Rightarrow EF//CD \text{ và } EF = CD = DF$$

Mặt khác: Vì ABCD là hình chữ nhật (gt)

$$\Rightarrow BC = AD \text{ mà } BC = CI(\text{gt})$$

$$\Rightarrow AD = CI.$$

Lại có  $DF = CD(\text{gt})$

$$\Rightarrow AD + DF = CI + CD \text{ hay } AF = ID$$

Xét  $\Delta AFE$  và  $\Delta IDF$  có

$$AF = ID(\text{cmt})$$

$$\widehat{AFE} = \widehat{IDF} = 90^\circ$$

$$EF = DF(\text{cmt})$$

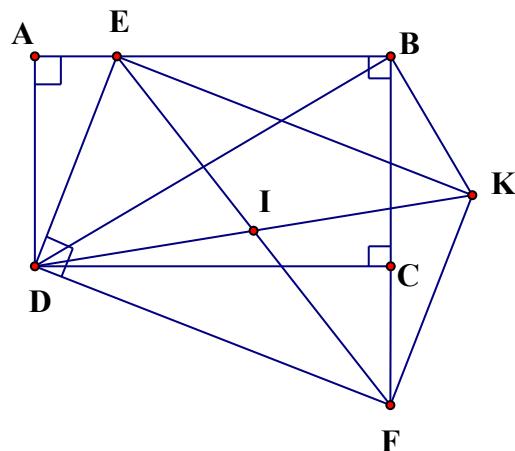
$$\Rightarrow \Delta AFE = \Delta IDF (\text{c.g.c})$$

$$\Rightarrow \hat{A}_1 = \hat{I}_1 \text{ mà } \hat{I}_1 + \widehat{IFD} = 90^\circ \left( \widehat{ADF} = 90^\circ \right) \Rightarrow \hat{A}_1 + \widehat{IFD} = 90^\circ$$

Trong  $\Delta AHF \Rightarrow \widehat{AHF} = 90^\circ$  hay  $AE \perp IF$ .

**3.16.** Cho hình chữ nhật ABCD, E thuộc cạnh AB. Lấy F thuộc tia đối của tia CB sao cho  $\widehat{EDF} = 90^\circ$ . Vẽ hình chữ nhật EDFK. Tính số đo góc DBK.

### Lời giải



Gọi I là giao điểm của hai đường chéo của hình chữ nhật DEKF.

$$\text{Ta có } IE = IF = ID = IK \quad (1)$$

$\Delta EBI$  vuông tại B có BI là trung tuyến.

$$\Rightarrow IB = IE = IF = \frac{EF}{2} \quad (2)$$

Từ (1), (2)  $\Rightarrow ID = IK = IB$ .

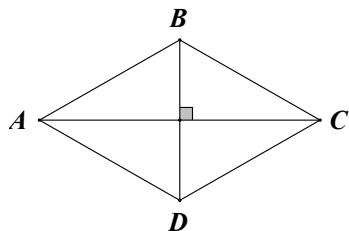
$$\Rightarrow \Delta DBK \text{ vuông tại B hay } \widehat{DBK} = 90^\circ.$$

↔ HẾT ↔

## Bài 14. HÌNH THOI VÀ HÌNH VUÔNG

### A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

#### I. Hình thoi



- **Định nghĩa**

Hình thoi là tứ giác có bốn cạnh bằng nhau.

- **Tính chất**

- Hình thoi có tất cả các tính chất của hình bình hành.

- Trong hình thoi:

- + Hai đường chéo vuông góc với nhau.

- + Hai đường chéo là các đường phân giác của các góc hình thoi.

- **Dấu hiệu nhận biết**

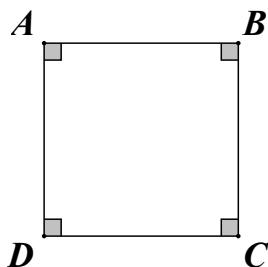
- Tứ giác có bốn cạnh bằng nhau là hình thoi.

- Hình bình hành có hai cạnh kề bằng nhau là hình thoi.

- Hình bình hành có hai đường chéo vuông góc là hình thoi.

- Hình bình hành có một đường chéo là đường phân giác của một góc là hình thoi.

#### II. Hình vuông



- **Định nghĩa**

Hình vuông là tứ giác có bốn góc vuông và có bốn cạnh bằng nhau.

- **Tính chất**

- Hình vuông có tất cả các tính chất của hình chữ nhật và hình thoi.

- Trong một hình vuông, hai đường chéo bằng nhau, vuông góc với nhau, cắt nhau tại trung điểm mỗi đường và là các đường phân giác của các góc của hình vuông.

- **Dấu hiệu nhận biết**

- Hình chữ nhật có hai cạnh kề bằng nhau là hình vuông.

- Hình chữ nhật có hai đường chéo vuông góc với nhau là hình vuông.

- Hình chữ nhật có một đường chéo là đường phân giác của một góc là hình vuông.

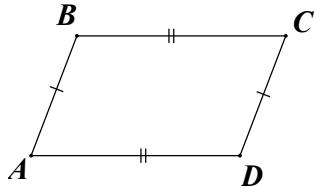
- Hình thoi có một góc vuông là hình vuông.

- Hình thoi có hai đường chéo bằng nhau là hình vuông.

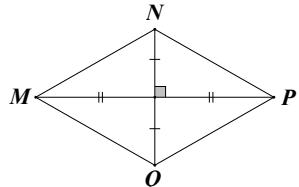
## B. PHÂN LOẠI CÁC BÀI TẬP

### I. Nhận biết hình thoi - Hình vuông

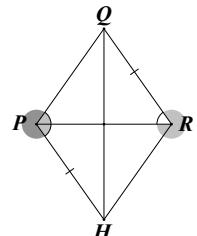
**Bài toán 1.** Các hình sau đây, tứ giác nào là hình thoi? Vì sao?



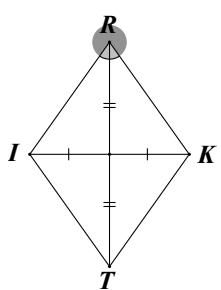
a)



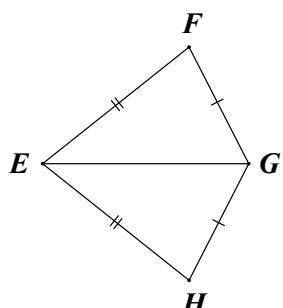
b)



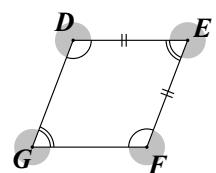
c)



d)



e)

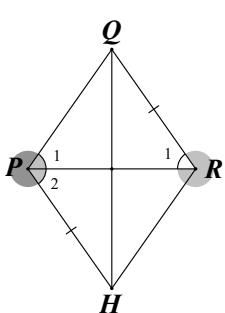


f)

Hình a) Tứ giác  $ABCD$  không phải là hình thoi, vì hai cạnh kề  $AB$  và  $BC$  không bằng nhau.

Hình b) Tứ giác  $MNPQ$  là hình thoi, vì:  $MNPQ$  là hình bình hành (hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm mỗi đường).

Hình c) (Xem hình vẽ)



Tứ giác  $PQRH$  là hình thoi, vì:

$PQRS$  là hình bình hành (hai cạnh đối vừa song song vừa bằng nhau).

Thật vậy. Ta có  $\hat{P}_2$  và  $\hat{R}_1$  là hai góc so le trong, mà  $\hat{P}_2 = \hat{R}_1 \Rightarrow QR//PH$ , lại có  $QR = PH$

Hình bình hành  $PQRH$  có đường chéo  $PR$  là phân giác:  $\hat{P}_1 = \hat{P}_2$ .

Hình d) Tứ giác  $IKHT$  là hình thoi, vì:  $IKHT$  là hình bình hành (hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm mỗi đường).

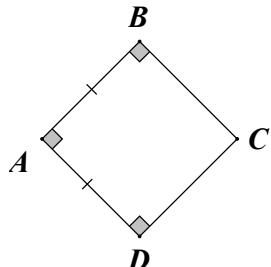
Hình bình hành  $IKHT$  có đường chéo  $KT$  là phân giác

Hình e) Tứ giác  $EFGH$  không phải là hình thoi, vì: hai cạnh kề  $EF$  và  $FG$  không bằng nhau.

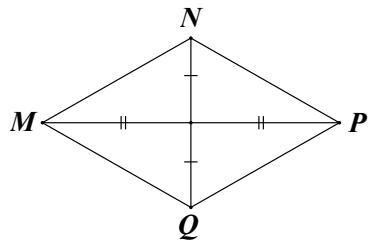
Hình f) Tứ giác  $DEFG$  là hình thoi, vì:  $DEFG$  là hình bình hành (các góc đối bằng nhau).

Hình bình hành  $DEFG$  có hai cạnh kề  $DE = EF$ .

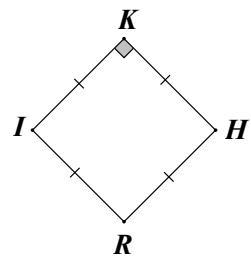
**Bài toán 2.** Các hình sau đây, tứ giác nào là hình vuông? Vì sao?



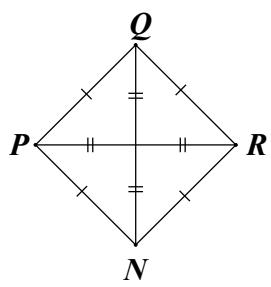
a)



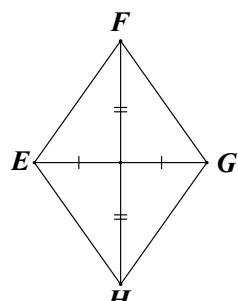
b)



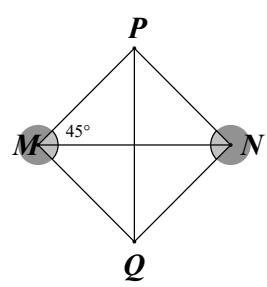
c)



d)



e)



f)

### Lời giải

Hình a) Tứ giác  $ABCD$  là hình vuông, vì:

$ABCD$  có ba góc vuông  $\hat{A} = \hat{B} = \hat{D}$  nên  $ABCD$  là hình chữ nhật.

Hình chữ nhật  $ABCD$  có hai cạnh kề bằng nhau  $AB = AD$ .

Hình b) Tứ giác  $MNPQ$  không phải là hình vuông, vì:  $MNPQ$  là hình bình hành (hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường).

Hình bình hành  $MNPQ$  có hai đường chéo  $NQ$  và  $MP$  không bằng nhau.

Hình c) Tứ giác  $IKHR$  là hình vuông, vì:  $IKHR$  là hình thoi (bốn cạnh bằng nhau) có một góc  $\hat{K} = 90^\circ$ .

Hình d) Tứ giác  $PQRN$  là hình vuông, vì:  $PQRN$  là hình bình hành (hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường).

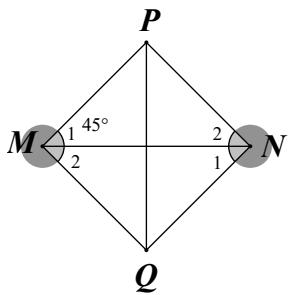
(Hình bình hành  $PQRN$  có hai đường chéo  $PR$  và  $QN$  bằng nhau nên  $PQRN$  là hình chữ nhật).

Hình chữ nhật  $PQRN$  có  $PQ = QR = RN = NP$  (hình chữ nhật có hai cạnh kề bằng nhau).

Hình e) Tứ giác  $EFGH$  không phải là hình vuông, vì:  $EFGH$  là hình bình hành (hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường).

Hình bình hành  $EFGH$  có hai đường chéo  $EG$  và  $FH$  bằng nhau.

Hình f ) (Xem hình vẽ)



Ta có  $\widehat{M}_1$  và  $\widehat{N}_1$  là hai góc so le trong

mà  $\widehat{M}_1 = \widehat{N}_1 = 45^\circ$  nên  $MP // NQ$  (1)

Chứng minh tương tự có  $\widehat{M}_2 = \widehat{N}_2 \Rightarrow PN // MQ$  (2)

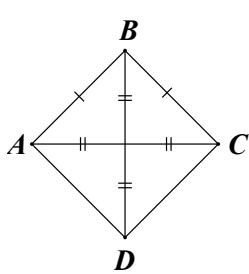
Từ (1) và (2)  $\Rightarrow MPNQ$  là hình bình hành (các cạnh đối song song)

Lại có  $\widehat{M}_1 = \widehat{M}_2 \Rightarrow \widehat{M}_1 + \widehat{M}_2 = 90^\circ$  và  $\widehat{N}_1 + \widehat{N}_2 = 90^\circ$

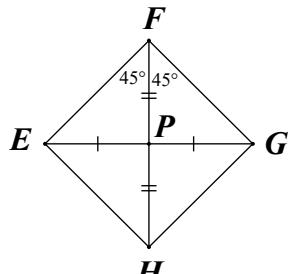
nên  $MPNQ$  là hình chữ nhật (tứ giác có ba góc vuông)

Đường chéo  $MN$  là phân giác của  $\widehat{PMQ}$  (hình chữ nhật có đường chéo là phân giác).

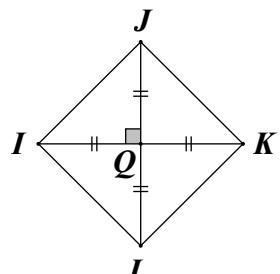
**Bài toán 3.** Với mỗi hình dưới đây, ta dùng dấu hiệu nhận biết nào để khẳng định đó là hình vuông



a)



b)



c)

### Lời giải

Hình a) Tứ giác  $ABCD$  là hình bình hành (hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm mỗi đường).

Hình bình hành  $ABCD$  có hai đường chéo  $AC = BD$  nên là hình chữ nhật.

Hình chữ nhật  $ABCD$  có hai cạnh kề  $AB = BC$  nên  $ABCD$  là hình vuông.

Hình b) Tứ giác  $EFGH$  là hình bình hành (hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm mỗi đường).

Nhưng hai đường chéo  $EG$  và  $FH$  không bằng nhau nên  $EFGH$  không phải là hình vuông.

Hình c) Tứ giác  $IJKL$  là hình bình hành (hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm mỗi đường).

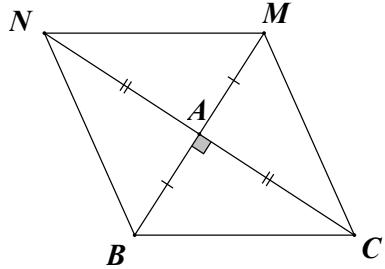
Hình bình hành  $IJKL$  có hai đường chéo bằng nhau  $IK = JL$  nên là hình chữ nhật.

Hình chữ nhật  $IJKL$  có hai đường chéo vuông góc nên tứ giác  $IJKL$  là hình vuông.

## II. Chứng minh tứ giác là Hình thoi - Hình vuông

**Bài toán 4.** Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$ . Các điểm  $M, N$  lần lượt thuộc tia đối của tia  $AB, AC$  sao cho  $AM = AB, AN = AC$ . Chứng minh tứ giác  $BNMC$  là hình thoi.

### Lời giải



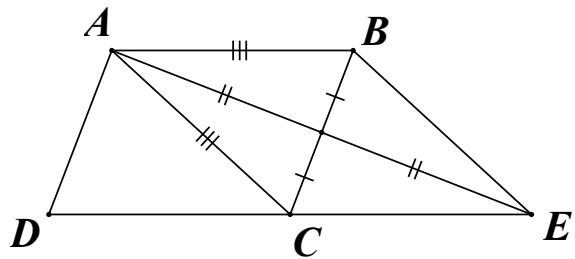
Tứ giác  $BNMC$  là hình bình hành (hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm mỗi đường).

Hình bình hành  $BNMC$  có  $BN \perp NC$  (gt) nên  $BNMC$  là hình thoi.

**Bài toán 5.** Cho hình bình hành  $ABCD$  có  $AB = AC$ . Kéo dài trung tuyén,  $AM$  của  $\Delta ABC$  lấy  $ME = MA$

- a) Chứng minh tứ giác  $ABEC$  là hình thoi.
- b) Chứng minh  $C$  là trung điểm của  $DE$ .

#### Lời giải



a) Ta có  $MB = MC, MA = ME$  (gt) nên  $ABEC$  là hình bình hành (1)

Mặt khác  $\Delta ABC$  cân có trung tuyén  $AM$ .

$\Rightarrow AM$  đồng thời là đường cao hay  $AE \perp BC$  (2)

Từ (1) và (2)  $\Rightarrow ABEC$  là hình thoi (hình bình hành có hai đường chéo vuông góc).

b) Ta có  $CD//AB$  (gt),  $CE//AB$  (cmt)

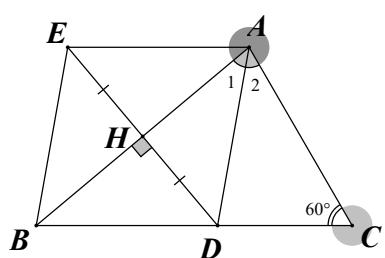
$\Rightarrow CD$  và  $CE$  phải trùng nhau (tiên đề Eculid).

Vậy  $D, C, E$  thẳng hàng và  $CD = CE$  hay  $C$  là trung điểm của  $DE$ .

**Bài toán 6.** Cho tam giác  $ABC$  có  $\hat{A} = 80^\circ; \hat{C} = 60^\circ$  phân giác  $AD$ .

- a) Chứng minh rằng  $\Delta ABD$  cân.
- b) Kẻ đường cao  $DH$  của tam giác  $ABD$ . Lấy  $E$  trên tia đối của tia  $HD$  sao cho  $HE = HD$ . Chứng minh  $ADBE$  là hình thoi.

#### Lời giải



a) Ta có  $\hat{B} = 180^\circ - (\hat{A} + \hat{C})$

$$= 180^\circ - (80^\circ + 60^\circ)$$

$$= 40^\circ$$

$AD$  là phân giác của góc  $A$ .

$$\Rightarrow \hat{A}_1 = \hat{A}_2 = \frac{\widehat{BAC}}{2} = \frac{80^\circ}{2} = 40^\circ$$

Ta có  $\hat{B} = \hat{A}_1 = 40^\circ$  nên  $\Delta ABD$  cân tại  $D$ .

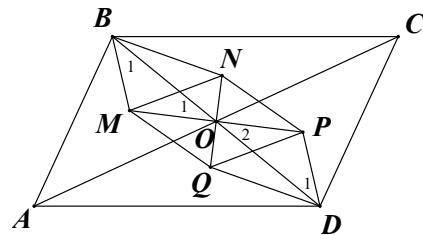
b)  $\Delta ABD$  cân có  $DH$  là đường cao nên đồng thời là đường trung tuyến.

$\Rightarrow H$  là trung điểm của  $AB$  lại có  $H$  là trung điểm của  $DE$  (gt)

$\Rightarrow ADBE$  là hình bình hành lại có  $AB \perp ED$  nên  $ADBE$  là hình thoi (hình bình hành có hai đường chéo vuông góc).

**Bài toán 7.** Gọi  $O$  là giao điểm các đường chéo của hình bình hành  $ABCD$ . Chứng minh rằng giao điểm các đường phân giác trong của các tam giác  $AOB; BOC; COD$  và  $DOA$  là đỉnh của một hình thoi.

### Lời giải



Gọi  $M, N, P, Q$  lần lượt là giao điểm các phân giác trong của các tam giác  $AOB, BOC, COD$  và  $DOA$ .

Do  $O$  là giao điểm hai đường chéo  $AC$  và  $BD$  của hình bình hành  $ABCD$  nên  $OA = OC$  và  $OB = OD$ .

Lại có:  $\hat{B}_1 = \hat{D}_1; \hat{O}_1 = \hat{O}_2$  ( $M$  là giao điểm của các đường phân giác)

$$\Rightarrow \Delta BMO = \Delta DPO \text{ (g.c.g)}$$

$$\Rightarrow OM = OP.$$

Mặt khác ta có các điểm  $B, O, D$  thẳng hàng mà  $\hat{O}_1 = \hat{O}_2$  nên các điểm  $M, O, P$  cùng thẳng hàng.

Tương tự ta có  $\Delta BON = \Delta DOQ$ .

$$\Rightarrow ON = OQ \text{ và } N, O, Q \text{ cũng thẳng hàng.}$$

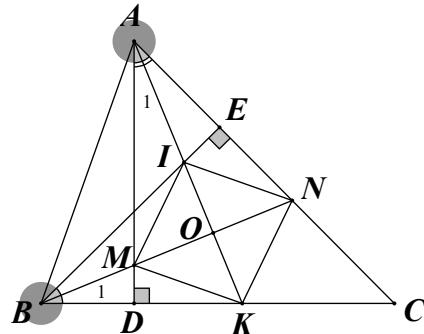
$\Rightarrow MNPQ$  là hình bình hành (các đường chéo cắt nhau tại trung điểm mỗi đường).

Mặt khác  $OM, ON$  là hai phân giác của hai góc kề bù nên  $OM \perp ON$ .

Vậy  $MNPQ$  là hình thoi.

**Bài toán 8.** Cho tam giác  $ABC$  có ba góc nhọn, các đường cao  $AD, BE$ . Tia phân giác của góc  $DAC$  cắt  $BE, BC$  theo thứ tự tại  $I$  và  $K$ . Tia phân giác của góc  $EBC$  cắt  $AB, AC$  tại  $M$  và  $N$ . Chứng minh tứ giác  $MINK$  là hình thoi.

### Lời giải



Ta có  $\widehat{EBC} = \widehat{DAC}$  (cùng phụ với  $\widehat{C}$ )

$$\widehat{AMN} = \widehat{BMD} \text{ (đ?i d?nh)} \Rightarrow \widehat{A}_1 = \widehat{B}_1$$

Gọi  $O$  là giao điểm của  $AK$  và  $BN$  ta có:

$$\begin{aligned} & \widehat{OAB} + \widehat{ABO} \\ &= \widehat{A}_1 + \widehat{BAD} + \widehat{ABO} \\ &= \widehat{A}_1 + \widehat{BAD} + (\widehat{ABD} - \widehat{B}_1) \\ &= \widehat{A}_1 + \widehat{BAD} + \widehat{ABD} - \widehat{B}_1 \\ &= \widehat{BAD} + \widehat{ABD} \text{ (vì } \widehat{A}_1 = \widehat{B}_1 \text{ cmt)} \\ &= 90^\circ \text{ (vì } \widehat{ADB} = 90^\circ \text{)} \end{aligned}$$

$$\text{Xét } \Delta AOB \Rightarrow \widehat{AOB} = 180^\circ - (\widehat{OAB} + \widehat{ABO}) = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$$

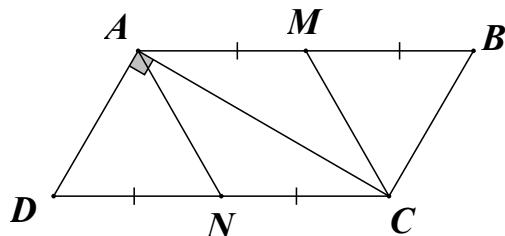
Chứng minh tớ  $AK \perp BM$  hay  $IK \perp MN$  (1)

$\Delta MAN$  có  $AO$  là đường cao (cmt) đồng thời là phân giác (gt)  $\Rightarrow OM = ON$ . Tương tự với  $\Delta BIK$  ta có  $OI = OK$ .

Vậy tứ giác  $MINK$  là hình bình hành, kết hợp với (1) ta có  $MINK$  là hình thoi (hình bình hành có hai đường chéo vuông góc).

**Bài toán 9.** Cho hình bình hành  $ABCD$  có  $\widehat{DAC} = 90^\circ$ . Gọi  $M, N$  là trung điểm của  $AB$  và  $CD$ . Chứng minh rằng  $AMCN$  là hình thoi.

### Lời giải



Ta có  $M$  là trung điểm của  $AB$  (gt)  $\Rightarrow AM = BM = \frac{AB}{2}$ .

$N$  là trung điểm của  $CD$  (gt)  $\Rightarrow DN = CM = \frac{CD}{2}$

mà  $AB = CD$  và  $AB \parallel CD$ .

$\Rightarrow AM \parallel CN$  và  $AM = CN$ .

Do đó  $AMCN$  là hình bình hành.

lại có  $\Delta DAC$  vuông tại  $A$  (gt)

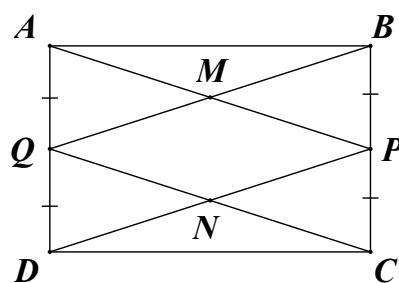
có  $AN$  là đường trung tuyê̄n

$$\text{nên } AN = NC = \frac{CD}{2}.$$

Vậy  $AMCM$  là hình thoi (hình bình hành có hai cạnh kề bằng nhau).

**Bài toán 10.** Cho hình chữ nhật  $ABCD; P, Q$  lần lượt là trung điểm của  $BC$  và  $AD$ . Gọi  $M$  là giao điểm của  $AP$  và  $BQ$  và  $N$  là giao điểm của  $CQ$  và  $DP$ . Chứng minh: Tứ giác  $MPNQ$  là hình thoi.

### Lời giải



Ta có  $Q, P$  lần lượt là trung điểm của  $AD$  và  $BC$

$$\text{nên } AQ = QD = BP = PC$$

và  $AQ \parallel CP, DQ \parallel BP$

Do đó các tứ giác sau là các hình bình hành  $APCQ, BPDQ$

$\Rightarrow AP \parallel CQ$  và  $BQ \parallel DP$

$\Rightarrow MPNQ$  là hình bình hành.

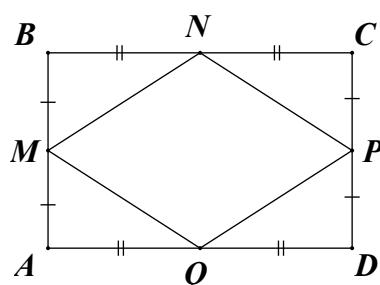
Mặt khác tứ giác  $ABPQ$  là hình chữ nhật ( $AQ \parallel BP$  và  $AQ = BP$ ).

$\Rightarrow MQ = MP$  (tính chất hai đường chéo hình chữ nhật).

Vậy  $MPNQ$  là hình thoi (hình bình hành có hai cạnh kề bằng nhau).

**Bài toán 11.** Chứng minh rằng các trung điểm của bốn cạnh trong một hình chữ nhật là các đỉnh của một hình thoi.

### Lời giải



Ta có  $M$  là trung điểm của  $AB$  (gt), tương tự  $P$  là trung điểm của  $CD$  mà  $AB = CD$  (cạnh đối của hình chữ nhật)

$$\Rightarrow MA = MB = PC = PD$$

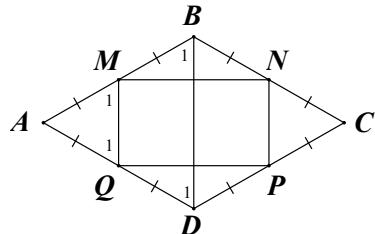
$$\Rightarrow \Delta AMQ = \Delta BMN = \Delta CPN = \Delta DPQ \text{ (c.g.c)}$$

$$\Rightarrow MQ = MN = PN = PQ$$

Do đó tứ giác  $MNPQ$  là hình thoi (Tứ giác có bốn cạnh bằng nhau).

**Bài toán 12.** Chứng minh rằng các trung điểm của bốn cạnh trong một hình thoi là các đỉnh của một hình chữ nhật.

### Lời giải



Gọi  $M, N, P, Q$  lần lượt là trung điểm của các cạnh  $AB, BC, CD$  và  $DA$ .

Ké các đường chéo  $AC$  và  $BD$

$M$  là trung điểm của  $AB$ ,

$$\text{ta có } MA = MB = \frac{AB}{2}.$$

$$\text{Tương tự } Q \text{ là trung điểm của } AD, \text{ ta có } QA = QD = \frac{AD}{2}$$

mà  $AB = AD$  (cạnh của hình thoi)

$$\Rightarrow MA = QA = MB = QD \text{ hay } \Delta AMQ \text{ cân tại } A$$

$$\Rightarrow \hat{M}_1 = \hat{Q}_1 = \frac{180^\circ - \hat{A}}{2}$$

$$\text{Ta có } \Delta ABD \text{ cân tại } A \Rightarrow \hat{B}_1 = \hat{D}_1 = \frac{180^\circ - \hat{A}}{2}$$

Từ (1) và (2)  $\Rightarrow MQ \parallel BD$  (cặp góc đồng vị bằng nhau)

Chứng minh tương tự, ta có  $NP \parallel BD \Rightarrow MQ \parallel NP$

Chứng minh như trên, ta có  $MN \parallel QP$ .

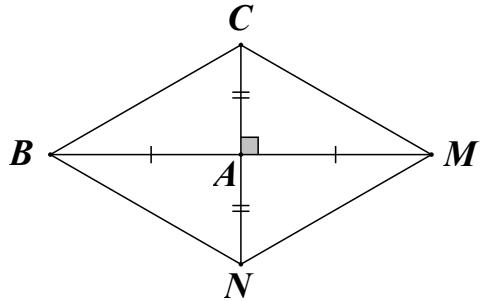
Do đó tứ giác  $MNPQ$  là hình bình hành (các cạnh đối song song)

Lại có  $AC \perp BD$  (tính chất đường chéo của hình thoi)  $\Rightarrow MN \perp MQ$ .

Vậy  $MNPQ$  là hình chữ nhật (Hình bình hành có một góc vuông).

**Bài toán 13.** Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$ . Các điểm  $M, N$  lần lượt thuộc tia đối của tia  $AB, AC$  sao cho  $AM = AB, AN = AC$ . Chứng minh tứ giác  $BCMN$  là hình thoi.

### Lời giải



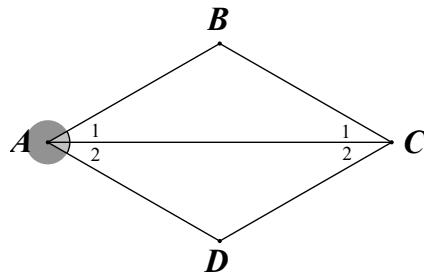
Ta có  $AM = AB(gt)$ , tương tự  $AN = AC$  nên  $BCMN$  là hình bình hành (Tứ giác có hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường)

Lại có  $\hat{A} = 90^\circ(gt)$  hay  $BM \perp CN$  tại  $A$ .

Do đó tứ giác  $BCMN$  là hình thoi (Hình bình hành có hai đường chéo vuông góc).

**Bài toán 14.** Cho hình bình hành  $ABCD$  có tia  $AC$  là tia phân giác của góc  $DAB$ . Chứng minh  $ABCD$  là hình thoi.

#### Lời giải



$ABCD$  là hình bình hành ( $gt$ )  $\Rightarrow BC \parallel AD$

$$\Rightarrow \hat{A}_2 = \hat{C}_1 \text{ mà } \hat{A}_1 = \hat{A}_2(gt)$$

$$\Rightarrow \hat{A}_1 = \hat{C}_1 \text{ hay } \Delta ABC \text{ cân tại } B$$

$$\Rightarrow AB = BC$$

Chứng minh tương tự, ta có  $AD = CD$ .

Dễ thấy  $\Delta ABC = \Delta ADC$  (g.c.g)

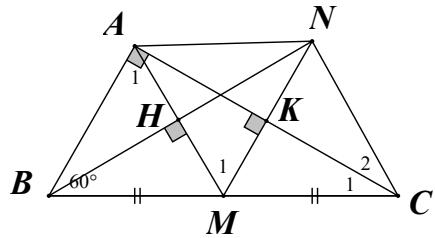
$$\Rightarrow AB = BC = CD = AD$$

nên  $ABCD$  là hình thoi (tứ giác có bốn cạnh bằng nhau).

**Bài toán 15.** Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$  có  $\hat{B} = 60^\circ$ , trung tuyến  $AM$ . Vẽ  $MK \perp AC, BH \perp AM$ . Hai đường thẳng  $BH$  và  $MK$  cát nhau tại  $N$ . Chứng minh rằng:

- a)  $\Delta ABM$  đều.
- b) Tứ giác  $AMCN$  là hình thoi.
- c)  $AC = BN$ .

#### Lời giải



a)  $\Delta ABC$  vuông tại  $A$  có  $AM$

là trung tuyến (gt)

$$\Rightarrow AM = BM = CM = \frac{BC}{2}$$

hay  $\Delta ABM$  cân tại  $M$  có  $\hat{B} = 60^\circ$  (gt)

Do đó  $\Delta ABM$  đều.

b)  $\Delta ABM$  đều (cmt) nên đường cao  $BH$  đồng thời là đường trung tuyến,  $HA = HM$ .

Xét  $\Delta AHB$  và  $\Delta MHN$  có

$\widehat{A}_1 = \widehat{M}_1$  (so le trong do  $AB // MK$  (cùng vuông góc với  $AC$ ),

$HA = HM$  (cmt),

$\widehat{AHB} = \widehat{MHN} = 90^\circ$  (gt)

Do đó  $\Delta AHB = \Delta MHN$  (g.c.g).

$\Rightarrow AB = MN$  lại có  $AB // MN$  nên  $ANMB$  là hình bình hành.

$\Rightarrow AN // BM$  và  $AN = BM$  lại có  $MC = BM$  (gt)

$\Rightarrow AN // MC$  và  $AN = MC$

$\Rightarrow AMCN$  là hình bình hành có  $MN \perp AC$  tại  $K$  (gt)

$\Rightarrow AMCN$  là hình thoi.

c)  $\Delta ABC$  vuông tại  $A$  có  $\hat{B} = 60^\circ$  (gt)

$\Rightarrow \widehat{C}_1 = 30^\circ$  mà  $ANCM$  là hình thoi.

$\Rightarrow \widehat{C}_1 = \widehat{C}_2 = 30^\circ$

$\Rightarrow \widehat{BCN} = 60^\circ$  vì  $AN // BC$  (cmt) và  $\widehat{BCN} = \widehat{ABC} = 60^\circ$

$\Rightarrow ANC$  là hình thang cân  $\Rightarrow AC = BN$  (tính chát đường chéo hình thang cân).

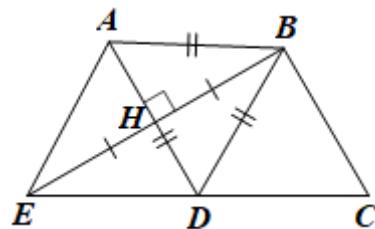
**Bài toán 16.** Cho hình thoi  $ABCD$  có  $AB = BD$ , kẻ  $BH \perp AD$ , kéo dài  $BH$  lấy  $HE = HB$ .

a) Tứ giác  $ABDE$  là hình gì?

b) Chứng minh  $D$  là trung điểm của  $CE$ .

c) Chứng minh  $AC = BE$ .

### Lời giải



a)  $AB = DB$  (gt)  $\Rightarrow \Delta ADB$  cân có  $BH$  là đường cao nên đồng thời là trung tuyế̄n.

$$\Rightarrow HA = HB \text{ lại có } HE = HB \text{ (gt)}$$

Do đó  $ABDE$  là hình bình hành (hai đường chéo cát nhau tại trung điểm mỗi đường).

Lại có  $BE \perp AD$  nên  $ABDE$  là hình thoi.

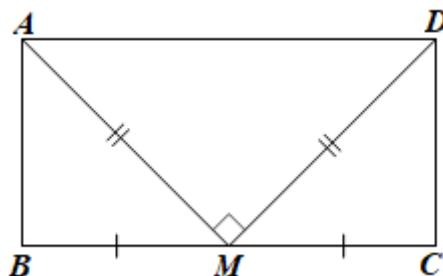
b)  $ABCD$  là hình thoi (gt)  $\Rightarrow AB \parallel CD, ABDE$  là hình thoi (cmt)  $\Rightarrow AB \parallel ED$ .

Do đó  $CD$  và  $ED$  phải trùng nhau (tiên đề Euclid) hay 3 điểm  $E, D, C$  thẳng hàng.

Mặt khác  $DC = ED (= AB)$  nên  $D$  là trung điểm của  $CE$ .

c) Chứng minh tương tự câu c bài 15 (Bạn tự chứng minh).

**Bài toán 17.** Cho hình chữ nhật  $ABCD$  có chu vi bằng 36 cm. Gọi  $M$  là trung điểm của cạnh  $BC$ . Biết rằng  $MA \perp MD$ . Tính độ dài các cạnh của hình chữ nhật  $ABCD$  (xem hình vẽ dưới đây).



### Lời giải

Theo bài ra ta có chu vi của hình chữ nhật  $ABCD$  bằng 36 cm nên nửa chu vi bằng 18 cm.

Đặt  $x = BM = CM$ , khi đó:

$$AD = BC = 2x \quad (0 < x < 18) \text{ và } AB = 18 - 2x$$

Xét  $\Delta ABM$  và  $\Delta DCM$  có

$AB = CD$  (cạnh đối của hình chữ nhật)

$$\widehat{ABM} = \widehat{DCM} = 90^\circ \text{ (gt)},$$

$$BM = CM \text{ (gt)}$$

$$\Rightarrow \Delta ABM = \Delta DCM \text{ (c.g.c)}$$

$\Rightarrow AM = DM$  (cạnh tương ứng) nên  $\Delta AMD$  vuông cân tại  $M$ .

Theo bài tập 2.11, trang 32 Toán 7 – Tập 1, ta có:

$$AD^2 = AM^2 + DM^2 \text{ mà } AM = DM \text{ (cmt)} \Rightarrow AD^2 = 2AM^2$$

Tương tự với hai tam giác vuông  $ABM$  và  $DCM$ , ta cũng có:

$$AM^2 = AB^2 + MB^2 \quad (2)$$

$$\text{Thay (2) vào (1), ta có: } AD^2 = 2(AB^2 + MB^2)$$

$$\text{Hay } (2x)^2 = 2[(18 - 2x)^2 + x^2]$$

$$\Leftrightarrow 4x^2 = 2[(24 - 72x + 4x^2) + x^2]$$

$$\Leftrightarrow 4x^2 = 648 - 144x + 10x^2$$

$$\Leftrightarrow 6x^2 - 144x + 648 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 24x + 108 = 0$$

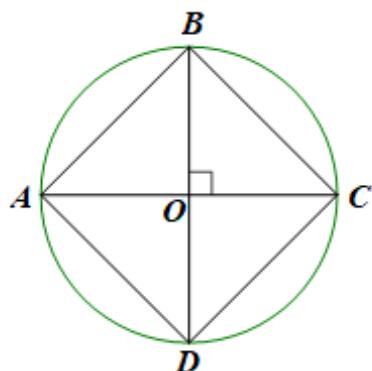
$$\Leftrightarrow x^2 - 18x - 6x + 108 = 0 \Leftrightarrow x(x - 18) - 6(x - 18) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 18)(x - 6) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 18 \text{ (loai)} \\ x = 6 \text{ (nhan)} \end{cases}$$

Vậy  $AD = 2x = 2.5 = 12$  cm,  $AB = 18 - 12 = 6$  cm.

**Bài toán 18.** Cho đường tròn tâm  $O$ , bán kính  $R$ . Hai đường kính  $AC$  và  $BD$  vuông góc với nhau. Chứng minh rằng  $ABCD$  là hình vuông.

### Lời giải



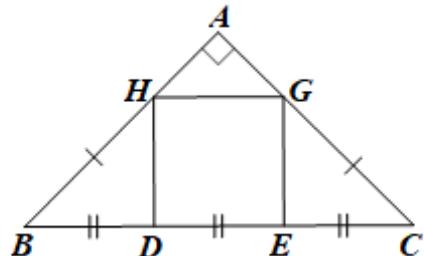
Ta có  $OA = OC = OB = OD (= R)$  nên tứ giác  $ABCD$  là hình bình hành (hai đường chéo cát nhau tại trung điểm mỗi đường).

Hình bình hành  $ABCD$  có  $AC = BD = 2R$  nên  $ABCD$  là hình chữ nhật (hình bình hành có hai đường chéo bằng nhau).

Hình chữ nhật  $ABCD$  có  $AC \perp BD$  (gt) nên  $ABCD$  là hình vuông (hình chữ nhật có hai đường chéo vuông góc).

**Bài toán 19.** Cho tam giác  $ABC$  vuông cân tại  $A$ . Trên cạnh  $BC$  lấy các điểm  $D, E$  sao cho  $BD = DE = EC$ . Qua  $D$  và  $E$  kẻ đường thẳng vuông góc với  $BC$ , chúng cắt  $AB$  và  $AC$  lần lượt tại  $H$  và  $G$ . Chứng minh tứ giác  $DEGH$  là hình vuông.

### Lời giải



$$\Delta ABC \text{ vuông cân tại } A \text{ (gt)} \Rightarrow \widehat{B} = \widehat{C} = 45^\circ$$

Xét  $\Delta HDB$  và  $\Delta GEC$  có:

$$\widehat{B} = \widehat{C} = 45^\circ \text{ (cmt)}$$

$$BD = EC \text{ (gt)}$$

$$\widehat{HDB} = \widehat{GEC} = 90^\circ \text{ (gt)}$$

$$\text{Do đó } \Delta HDB = \Delta GEC \text{ (g.c.g)} \Rightarrow HD = GE$$

$$\text{Lại có } HD \parallel GE \text{ (}\perp BC\text{)}$$

$\Rightarrow$  Tứ giác  $DEGH$  là hình bình hành (hai cạnh đối vừa song song vừa bằng nhau).

Hình bình hành  $DEGH$  có  $\widehat{HDE} = 90^\circ$  (gt) nên  $DEGH$  là hình chữ nhật (Hình bình hành có một góc vuông).

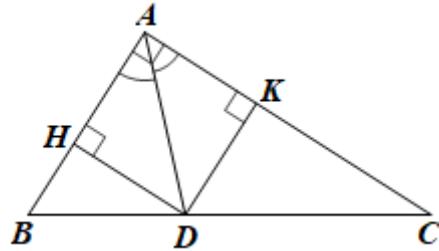
$\Delta HDB$  vuông tại  $D$ , có  $\widehat{B} = 45^\circ$  (gt)  $\Rightarrow \Delta HDB$  vuông cân

$$\Rightarrow HD = BD, \text{ mà } BD = DE \text{ (gt)} \Rightarrow HD = DE$$

Hình chữ nhật  $DEGH$  có  $HD = DE \Rightarrow DEGH$  là hình vuông (Hình chữ nhật có hai cạnh kề bằng nhau).

**Bài toán 20.** Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$ , phân giác  $AD$ . Gọi  $H, K$  lần lượt là hình chiếu của  $D$  trên  $AB, AC$ . Chứng minh tứ giác  $AHDK$  là hình vuông.

### Lời giải

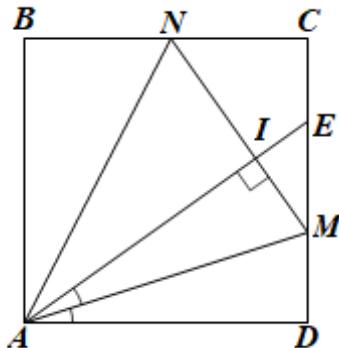


Ta có  $AHDK$  là hình chữ nhật (Tứ giác có ba góc vuông).

Hình chữ nhật  $AHDK$  có đường chéo  $AD$  là phân giác (gt) nên  $AHDK$  là hình vuông.

**Bài toán 21.** Cho hình vuông  $ABCD$ . Lấy một điểm  $E$  trên cạnh  $CD$ . Thị phân giác của góc  $DAE$  cát cạnh  $DC$  tại  $M$ . Đường thẳng qua  $M$  vuông góc với  $AE$  cát  $BC$  tại  $N$ . Chứng minh  $DM + BN = MN$ .

### Lời giải



Gọi  $I$  là giao điểm của  $AE$  và  $MN$ .

Xét  $\Delta AIM$  và  $\Delta ADM$ , có:  $\widehat{AIM} = \widehat{ADM} = 90^\circ$  (gt)

$AM$  : cạnh chung

$$\widehat{A}_1 = \widehat{A}_2 \text{ (gt)}$$

$\Rightarrow \Delta AIM = \Delta ADM$  (cạnh huyền – góc nhọn)

$\Rightarrow MI = DM$  (cạnh tương ứng) và  $AI = AD$

Xét  $\Delta ABN$  và  $\Delta AIN$ , có:  $\widehat{ABN} = \widehat{AIN} = 90^\circ$  (gt)

$AN$  : cạnh chung

$$AB = AI (= AD)$$

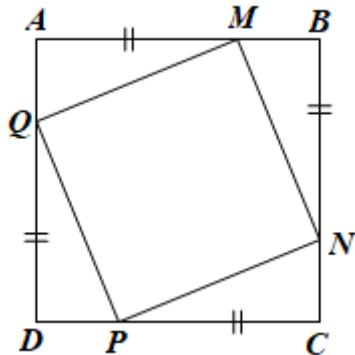
Do đó  $\Delta ABN = \Delta AIN$  (cạnh huyền – cạnh góc vuông)

$\Rightarrow BN = IN$  mà  $MI = DM$

$\Rightarrow MD + BN = MN$  (đpcm).

**Bài toán 22.** Cho hình vuông  $ABCD$ , trên các cạnh  $AB, BC, CD$  và  $DA$  lần lượt lấy các điểm  $M, N, P, Q$  sao cho  $AM = BN = CP = DQ$ . Chứng minh rằng tứ giác  $MNPQ$  là hình vuông.

**Lời giải**



Ta có

$$AB = BC \text{ (gt)}$$

$$AM = BN \text{ (gt)}$$

$$\Rightarrow AB - AM = BC - BN \text{ hay } MB = NC$$

Chứng minh tương tự ta có

$$MB = NC = PD = QA$$

Do đó  $\Delta QAM = \Delta MBN$  (c.g.c)  $\Rightarrow QM = MN$ .

Chứng minh tương tự ta có:  $QM = MN = NP = PQ$ .

Do đó  $MNPQ$  là hình thoi (Tứ giác có 4 cạnh bằng nhau)

Mặt khác  $\Delta QAM = \Delta MBN$  ( $cm$ )

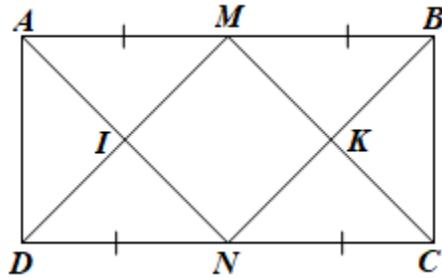
$$\Rightarrow \widehat{Q_1} = \widehat{M_1} \text{ mà } \widehat{Q_1} + \widehat{M_2} = 90^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{M_1} + \widehat{M_2} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{QMN} = 90^\circ$$

Từ (1) và (2)  $\Rightarrow MNPQ$  là hình vuông.

**Bài toán 23.** Cho hình chữ nhật  $ABCD$  có  $AB = 2AD$ . Gọi  $M, N$  lần lượt là trung điểm của  $AB$  và  $CD$ . Gọi  $I$  là giao điểm của  $AN$  và  $DM$ .  $K$  là giao điểm của  $MC$  và  $BN$ . Chứng minh rằng  $MKNI$  là hình vuông.

**Lời giải**



$M$  là trung điểm của  $AB$  (gt)

$N$  là trung điểm của  $CD$  (gt)

Mà  $AB = CD$  và  $AB // CD$

$\Rightarrow AM = NC$  và  $AM // NC$ .

Do đó tứ giác  $AMCN$  là hình bình hành (hai cạnh đối vừa song song vừa bằng nhau).

$\Rightarrow AN // CM$

Chứng minh tương tự ta có  $BMDN$  cũng là hình bình hành.

$\Rightarrow DM // BN$

Từ (1), (2)  $\Rightarrow MKNI$  là hình bình hành (3) (các cạnh đối song song)

Lại có  $AMND$  là hình bình hành ( $AM // DN$  và  $AM = DN$ ).

hình bình hành  $AMND$  có  $\widehat{A} = 90^\circ$  nên  $AMND$  là hình chữ nhật.

Mặt khác vì  $AB = 2AD$  (gt) và  $M$  là trung điểm của  $AB \Rightarrow AM = AD$ .

Do đó  $AMND$  là hình vuông (hình chữ nhật có hai cạnh kề bằng nhau).  $\Rightarrow AN \perp DM$  (4)

Từ (3) và (4)  $\Rightarrow MKNI$  là hình chữ nhật (hình bình hành có 1 góc vuông là hình chữ nhật).

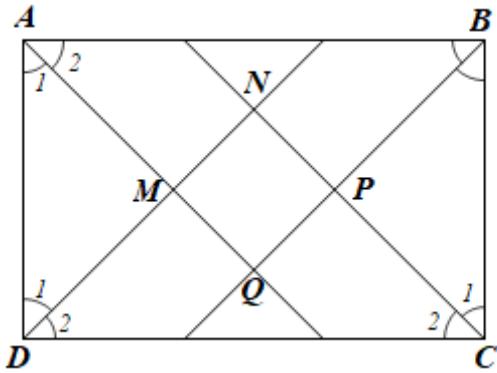
Lại có  $IN = IM$ .

Do đó hình chữ nhật  $MKNI$  là hình vuông (hình chữ nhật có hai cạnh kề bằng nhau).

**Nhận xét:** Trường hợp không có điều kiện  $AB = 2AD$ , thay vào đó ta có bốn tia phân giác của 4 góc của hình chữ nhật tạo thành một hình vuông, ta có bài toán sau.

**Bài toán 24.** Cho hình chữ nhật  $ABCD$  (có hai cạnh kề không bằng nhau). Chứng minh rằng các tia phân giác của các góc của hình chữ nhật đó cắt nhau tạo thành một hình vuông.

**Lời giải**



Gọi các giao điểm của các tia phân giác là  $M, N, P, Q$ .

Ta có  $\widehat{A}_1 = \widehat{A}_2 = \widehat{D}_1 = \widehat{D}_2 = \widehat{B}_1 = \widehat{B}_2 = \widehat{C}_1 = \widehat{C}_2 = 45^\circ$

$$\Rightarrow \widehat{A}_1 + \widehat{D}_1 = 90^\circ$$

Xét  $\Delta AMD$  có  $\widehat{AMD} = 180^\circ - (\widehat{A}_1 + \widehat{D}_1) = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$

$$\Rightarrow \widehat{NMQ} = 90^\circ \text{ (kết bù)}$$

Chứng minh tương tự ta có  $\widehat{MNP} = \widehat{NPQ} = 90^\circ$  nên  $MNPQ$  là hình chữ nhật (1) (có ba góc vuông).

Dễ thấy  $\Delta AMD = \Delta BPC$  (g.c.g).

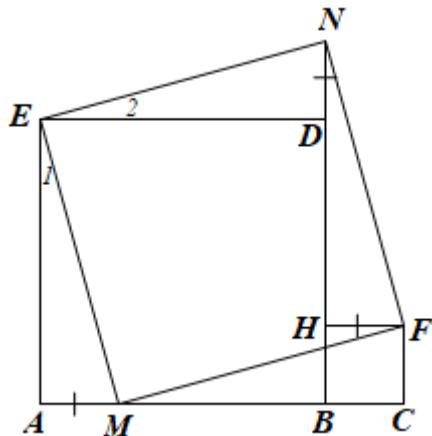
$\Rightarrow DM = CP$  mà  $\Delta DNC$  có  $\widehat{D}_2 = \widehat{C}_2 = 45^\circ$  (cmt) nên cân tại  $N$ .

$$\Rightarrow ND = NC \Rightarrow ND - DM = NC - CP \text{ hay } MN = NP(2)$$

Từ (1) và (2)  $\Rightarrow MNPQ$  là hình vuông (hình chữ nhật có hai cạnh kề bằng nhau).

**Bài toán 25.** Cho ba điểm  $A, B, C$  thẳng hàng theo thứ tự đó. Trên cùng nửa mặt phẳng bờ  $AC$  dựng các hình vuông  $ABDE$  và  $BCFH$ . Trên tia  $AB$  lấy điểm  $M$ . Trên tia đối của tia  $DB$  lấy điểm  $N$  sao cho  $AM = DN = FH$ . Chứng minh rằng  $EMFN$  là hình vuông.

### Lời giải



Xét các tam giác vuông  $\Delta EDN$  và  $\Delta EAM$  có

$$EA = ED \text{ (gt)}, MA = ND \text{ (gt)}$$

$$\Rightarrow \Delta EDN = \Delta EAN \text{ (c.g.c)}$$

$$\Rightarrow EM = EN \text{ và } \widehat{E}_1 = \widehat{E}_2.$$

Chứng minh tương tự ta có  $EM = MF = NF$  nên  $EMFN$  là hình thoi.

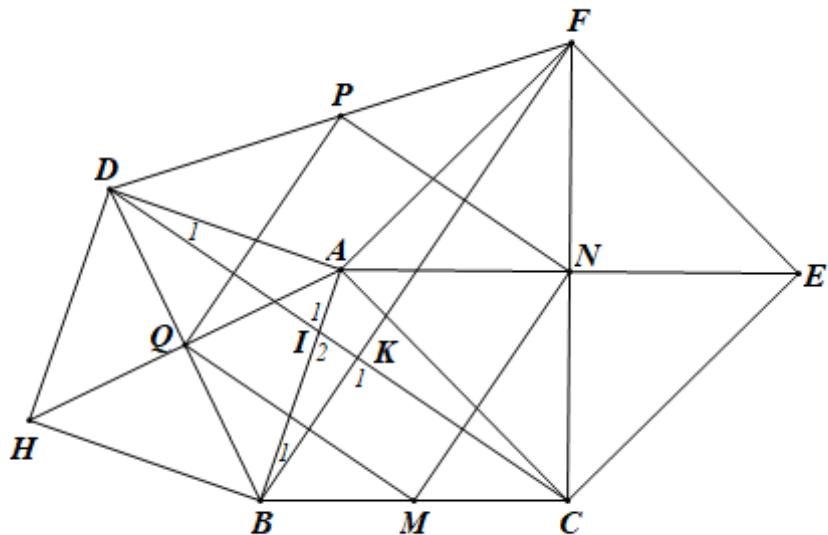
$$\text{Mặt khác } \widehat{E}_1 + \widehat{MED} = 90^\circ \text{ (gt)}$$

$$\text{Mà } \widehat{E}_1 = \widehat{E}_2 \text{ (cmt)} \Rightarrow \widehat{E}_2 + \widehat{MED} = 90^\circ$$

Vậy hình thoi  $EMFN$  là hình vuông.

**Bài toán 26.** Cho tam giác  $ABC$ . Dựng ra phía ngoài tam giác các hình vuông  $ABHD$  và  $ACEF$ . Gọi  $Q, N$  lần lượt là giao điểm các đường chéo của  $ABHD$  và  $ACEF$ ;  $M, P$  lần lượt là trung điểm  $BC$  và  $DF$ . Chứng minh rằng tứ giác  $MNPQ$  là hình vuông.

### Lời giải



Nối  $B$  với  $F; C$  với  $D$ .

$\Delta CBD$  có  $MQ \parallel CD$  và  $MQ = \frac{CD}{2}$  (vì  $M$  và  $Q$  là trung điểm của  $BC$  và  $BD$  nên  $MQ$  là đường trung bình).

Tương tự  $PN \parallel CD$  và  $PN = \frac{CD}{2}$  (vì  $PB$  là đường trung bình của  $\Delta CFD$ ).

$$\Rightarrow MQ \parallel PN \text{ và } MQ = PN = \frac{CD}{2}$$

$\Rightarrow MNPQ$  là hình bình hành  $\Rightarrow PQ = MN$ .

Xét hai tam giác  $ACD$  và  $AFB$  có:  $AC = AF$  (cạnh hỉnh vuông  $ACDF$ ).

$\widehat{CAD} = \widehat{A} + 90^\circ = \widehat{FAB}$  và  $AD = AB$  (cạnh hỉnh vuông  $ABCD$ ).

$\Rightarrow \Delta ACD = \Delta AFB$  (c.g.c)

$\Rightarrow CD = BF$  (2) và  $\widehat{D}_1 = \widehat{B}_1$ .

Chứng minh tương tự như trên ta có  $PQ = MN \left( = \frac{BF}{2} \right)$  (3)

Từ (1), (2), (3)  $\Rightarrow$  Tứ giác  $MNPQ$  là hình thoi.

Gọi  $I$  là giao điểm của  $CD$  và  $AB$ ;  $K$  là giao điểm của  $CD$  và  $BF$ .

Trong tam giác vuông DAI có:

$\widehat{D}_1 + \widehat{I}_1 = 90^\circ$  (Do  $\widehat{DAI} = 90^\circ$ ) mà  $\widehat{I}_1 = \widehat{I}_2$  (đối đỉnh)

$\Rightarrow \widehat{B}_1 + \widehat{I}_2 = 90^\circ$

$\Rightarrow \widehat{BKI} = 90^\circ$  hay  $CD \perp BF$ .

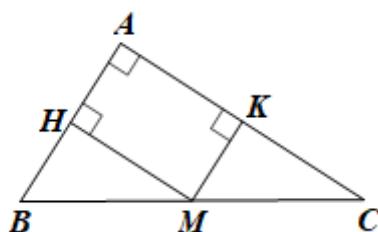
$\Rightarrow QP \perp QM$  hay tứ giác  $MNPQ$  là hình vuông.

**Bài toán 27.** Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A, M$  thuộc cạnh  $BC$  kẻ  $MH \perp AB, MK \perp AC$ .

a) Tứ giác  $AHMK$  là hình gì?

b) Tìm vị trí của  $M$  trên  $BC$  để  $AHMK$  là hình vuông.

### Lời giải



a) Ta có  $\widehat{A} = \widehat{AHM} = \widehat{AKM} = 90^\circ$  (gt) nên tứ giác  $AHMK$  là hình chữ nhật (có ba góc vuông)

b) Hình chữ nhật  $AHMK$  là hình vuông  $\Leftrightarrow AM$  là tia phân giác của góc  $A$ .

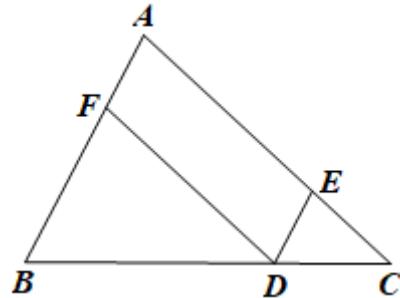
$\Leftrightarrow M$  là giao điểm của tia phân giác của góc  $A$  và cạnh  $BC$ .

**Bài toán 28.** Cho tam giác  $ABC, D$  là một điểm nằm giữa  $B$  và  $C$ . Qua  $D$  kẻ các đường thẳng song song với  $AB, AC$ , chúng cắt các cạnh  $AC, AB$  lần lượt tại  $E, F$ .

a) Tứ giác  $AEDF$  là hình gì? Vì sao?

- b) Nếu tam giác  $ABC$  cân tại  $A$  thì điểm  $D$  ở vị trí nào trên cạnh  $BC$  để tứ giác  $AEDF$  là hình thoi?
- c) Nếu tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$  thì tứ giác  $AEDF$  là hình gì?
- d) Nếu tam giác  $ABC$  vuông cân tại  $A$  thì điểm  $D$  ở vị trí nào trên cạnh  $BC$  để tứ giác  $AEDF$  là hình vuông?

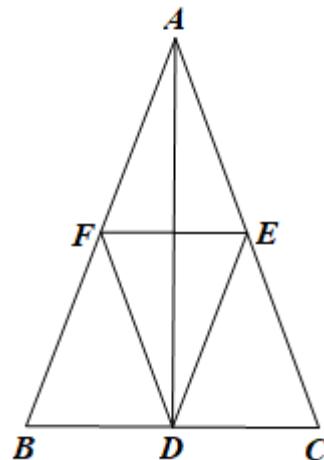
### Lời giải



a) Ta có  $DE \parallel AB, DF \parallel AC$  (gt)

$\Rightarrow$  Tứ giác  $AEDF$  là hình bình hành (các cạnh đối song song).

b)



Chứng minh tương tự như câu a), ta có tứ giác  $AEDF$  là hình bình hành.

Hình bình hành  $AEDF$  là hình thoi khi  $AE = AF$  hay  $\Delta AEF$  cân tại  $A$

$$\Rightarrow \widehat{F_1} = \widehat{E_1} = \frac{180^\circ - \widehat{A}}{2}$$

$$\Delta ABC \text{ cân tại } A (\text{gt}) \Rightarrow \widehat{B} = \widehat{C} = \frac{180^\circ - \widehat{A}}{2}$$

Từ (1) và (2)  $\Rightarrow \widehat{F_1} = \widehat{B}$

$\Rightarrow EF \parallel BC$  (cặp góc đồng vị bằng nhau)

Mặt khác  $AD \perp EF \Rightarrow AD \perp BC$

$\Rightarrow AD$  là đường cao nên đồng thời cũng là đường trung tuyến của tam giác cân  $ABC$ .

Do đó  $D$  là trung điểm của cạnh  $BC$ .

c) Tứ giác  $AEDF$  là hình bình hành, có  $\widehat{EAF} = 90^\circ$  (gt) nên  $AEDF$  là hình chữ nhật.

d) Chứng minh tương tự như câu c), ta có  $AEDF$  là hình chữ nhật (hình bình hành có một góc vuông).

Hình chữ nhật  $AEDF$  là hình vuông khi đường chéo  $AD$  là phân giác của góc  $A$ .

Vì  $\Delta ABC$  vuông cân tại  $A$  nên đường phân giác  $AD$  đồng thời là đường trung tuyến hay  $D$  là trung điểm cạnh  $BC$ .

**Nhận xét:** Ngoài cách chứng minh trên, dựa vào dấu hiệu nhận biết của hình chúng ta có thể trình bày theo các cách khác nữa (Xin bạn tự làm).

### C. BÀI TẬP

**3.17.** Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$ , trung tuyến có  $AM$ . Gọi  $I$  là trung điểm của  $AC$  vẽ  $Ax$  song song với  $BC$ ,  $MI$  cắt  $Ax$  tại  $D$ .

a) Chứng minh  $ADCM$  là hình thoi.

b) Gọi  $J$  là trung điểm của  $AM$ . Chứng minh  $B, J, D$  thẳng hàng.

#### Lời giải.

a) Xét  $\Delta AID$  và  $\Delta BIM$  có

$$IA = IC \text{ (gt)}$$

$$\widehat{AID} = \widehat{CIM} \text{ (đối đỉnh)}$$

$$\widehat{A_1} = \widehat{C_1} \text{ (so le trong do } Ax \parallel BC\text{)}$$

Do đó  $\Delta AID = \Delta CIM$  (g.c.g).

$$\Rightarrow AD = CM \text{ và } AD \parallel CM.$$

$\Rightarrow ADCM$  là hình bình hành (1) (hai cạnh đối vừa song song vừa bằng nhau)

Lại có  $MA = MB = MC = \frac{BC}{2}$  (2) (Tính chất trung tuyến của tam giác vuông)

Từ (1) và (2)  $\Rightarrow ADCM$  là hình thoi (hình bình hành có hai cạnh kề bằng nhau).

b)  $ADCM$  là hình thoi (cmt)

$$\Rightarrow AD \parallel MC \text{ và } AD = MC, MC = MB \text{ (cmt)}$$

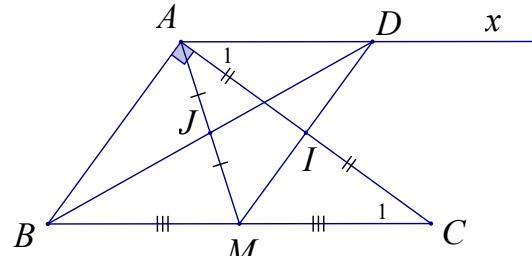
$$\Rightarrow AD \parallel MB \text{ và } AD = MB$$

Do đó  $ADBM$  là hình bình hành mà  $J$  là trung điểm của đường chéo  $AM$  nên đường chéo thứ hai  $BD$  phải qua  $J$  hay ba điểm  $B, J, D$  thẳng hàng.

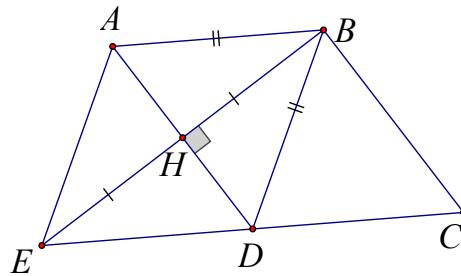
**3.18.** Cho hình thoi  $ABCD$  có  $AB = BD$ , kẻ  $BH \perp AD$  kéo dài  $BH$  lấy  $HE = HB$ .

a) Chứng minh  $ABDE$  là hình thoi.

b)  $D$  là trung điểm của  $CE$ .



### Lời giải



a)  $\Delta ABC$  có  $AB = AD$  (tính chất cạnh hìn thoi) và  $AB = BD$  (gt)

$\Rightarrow \Delta ABC$  đều nên đường cao  $BH$  đồng thời là đường trung tuyén.

$\Rightarrow H$  là trung điểm của  $AD$ ,  $H$  là trung điểm của  $BE$  (gt)

$\Rightarrow ABDE$  là hình bình hành (hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm mỗi đường).

Lại có  $AB = BD$  (gt)

Do đó  $ABDE$  là hình thoi (hình bình hành có hai cạnh kề bằng nhau).

b) Ta có  $AB // ED$  ( $ABDE$  là hình thoi (cmt))

lại có  $AB // DC$  ( $ABCD$  là hình thoi (gt))

$\Rightarrow ED$  và  $DC$  phải trùng nhau (tiên đề Euclid) hay  $D$  là trung điểm của  $EC$ .

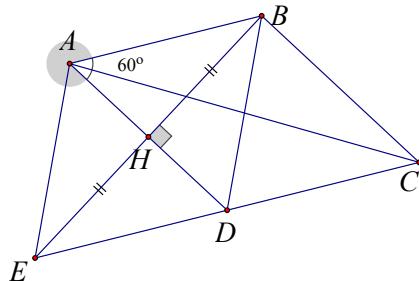
**3.19.** Cho hình thoi  $ABCD$  có  $\widehat{A} = 60^\circ$ . Vẽ  $BH$  vuông góc với cạnh  $AD$  rồi kéo dài một đoạn  $HE = BH$ . Nối  $E$  với  $A, E$  với  $D$ .

a) Chứng minh rằng  $ABDE$  là hình thoi.

b) Ba điểm  $E, D, C$  thẳng hàng.

c)  $EB = AC$ .

### Lời giải:



a) Tam giác  $ABD$  cân (tính chất cạnh hìn thoi) có  $\widehat{A} = 60^\circ$

$\Rightarrow ABD$  đều

$\Rightarrow$  Đường cao  $BH$  đồng thời là trung tuyén  $\Rightarrow AH = DH$ .

Theo giả thiết:  $BH = HE \Rightarrow ABCD$  là hình bình hành.

Lại có  $BH \perp AD$  (giả thiết)

$\Rightarrow ABDE$  là hình thoi.

b)  $ABCD$  là hình thoi nên  $AB // CD$  (gt).

Theo chứng minh a) ta có  $ABDE$  là hình thoi nên  $AB // ED$

$\Rightarrow C, D, E$  thẳng hàng (theo tiên đề Euclid).

c) Để thấy  $ABCE$  là hình thang cân vì có:  $AB // CE$  và  $AE = BC (= AB)$

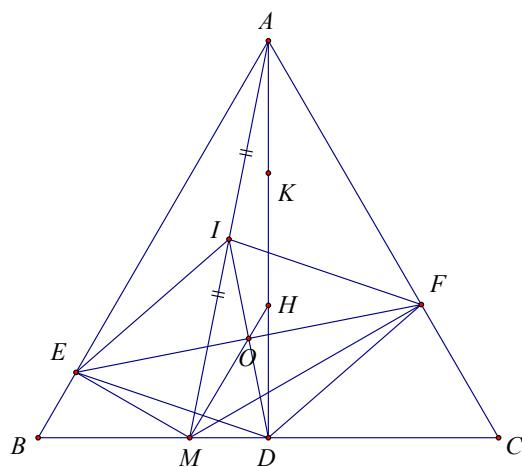
$\Rightarrow$  Các đường chéo  $AC$  và  $BE$  bằng nhau.

**3.20.** Cho tam giác đều  $ABC$  có  $H$  là trực tâm, đường cao  $AD$  lấy điểm  $M$  bất kì thuộc cạnh  $BC$ , gọi  $E$  và  $F$  thứ tự là hình chiếu của  $M$  trên  $AB$ ,  $AC$ , gọi  $I$  là trung điểm của  $AM$ .

a) Xác định dạng của tứ giác  $EIF$ .

b) Chứng minh rằng  $MH, ID, EF$  đồng quy.

### Lời giải



a) Ta có  $EI = \frac{AM}{2}$  ( $EI$  là trung tuyến của  $\Delta AEM$  vuông).

Tương tự  $DI = \frac{AM}{2}$  ( $DI$  là trung tuyến của  $\Delta ADM$  vuông)

$\Rightarrow EI = DI \Rightarrow \Delta DIE$  cân tại  $I$

Mặt khác  $\Delta AIE$  cân  $\left( EI = AI = \frac{AM}{2} \right)$

$\Rightarrow \widehat{EIM} = 2\widehat{EAM}$  (góc ngoài của tam giác).

Tương tự  $\widehat{MID} = 2\widehat{MAD}$  ( $\widehat{MID}$  là góc ngoài của  $\Delta AID$  cân)

$\Rightarrow \widehat{EIM} + \widehat{MID} = 2(\widehat{EAM} + \widehat{MAD})$

$\Rightarrow \widehat{EID} = 2\widehat{EAD} = 2 \cdot 30^\circ \Rightarrow \widehat{EID} = 60^\circ$

Từ (1) và (2)  $\Rightarrow \Delta DEI$  đều.

Chứng minh tương tự ta có  $\Delta DFI$  đều  $\Rightarrow DEIF$  là hình thoi.

b) Gọi  $O$  là giao điểm của hai đường chéo  $ID$  và  $EF$  của hình thoi ta phải chứng minh  $MH$  đi qua  $O$  hay  $M, O, H$  thẳng hàng.

Gọi  $K$  là trung điểm  $AH$  ta có  $IK \parallel MH$  (3) ( $IK$  là đường trung bình của  $\Delta AMH$ )

Mặt khác  $\Delta ABC$  đều nên trực tâm  $H$  cũng là trọng tâm của tam giác.

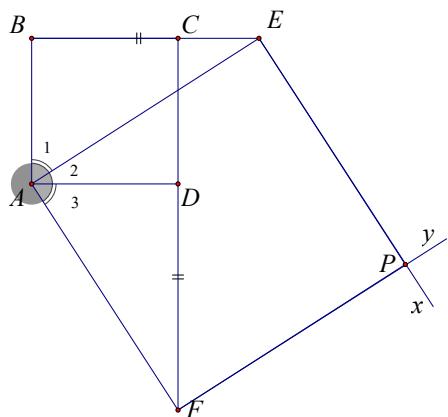
$$\Rightarrow HD = HK, \text{ do } DEIF \text{ là hình thoi nên } OD = OI$$

$$\Rightarrow OH \parallel IK \quad (4) \quad (OH \text{ là đường trung bình của } \Delta DIN)$$

Từ (3) và (4)  $\Rightarrow M, O, H$  thẳng hàng (theo tiên đề Euclid) hay ba đường thẳng  $MH, ID, EF$  đồng quy.

**3.21.** Cho hình vuông  $ABCD$ . Trên tia đối của tia  $CB$  lấy điểm  $E$ . Trên tia đối của tia  $DC$  lấy điểm  $F$  sao cho  $DF = BE$ . Qua  $E$  kẻ  $Ex$  song song với  $AF$ , qua  $F$  kẻ  $Fy$  song song với  $AE$ . Gọi  $P$  là giao điểm của  $Ex$  và  $Fy$ . Chứng minh rằng  $AEPF$  là hình vuông.

### Lời giải



Dễ thấy hai tam giác vuông  $ABE$  và  $ADF$  có:

$$AB = AD \text{ (gt)}; BE = DF \text{ (gt)}$$

$$\Rightarrow \Delta ABE = \Delta ADF \text{ (c.g.c)}$$

$$\Rightarrow \hat{A}_1 = \hat{A}_3 \text{ và } AE = AF$$

$$\text{Lại có } \hat{A}_1 + \hat{A}_2 = 90^\circ \Rightarrow \hat{A}_3 + \hat{A}_2 = 90^\circ$$

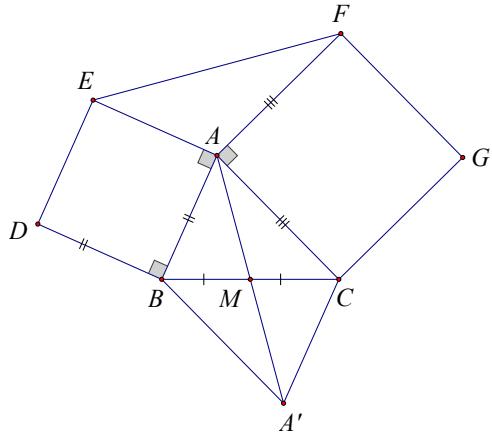
Mặt khác do  $EP \parallel AF; FP \parallel AE$

$$\Rightarrow AEPF \text{ là hình bình hành}$$

Từ (1), (2) và (3)  $\Rightarrow AEPF$  là hình vuông.

**3.22.** Cho tam giác  $ABC$ , dựng ra phía ngoài tam giác các hình vuông  $ABDE$  và  $ACGF$ . Gọi  $M$  là trung điểm của  $BC$ . Chứng minh rằng  $EF = 2AM$ .

### Lời giải:



Kéo dài trung tuyến  $AM$  một đoạn  $MA' = AM$ .

Dễ thấy tứ giác  $ABA'C$  là hình bình hành

(vì hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm mỗi đường:  $MB = MC$  và  $MA = MA' \Rightarrow AB = CA'$ ).

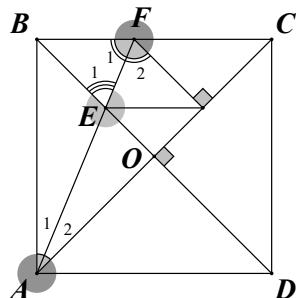
Xét  $\Delta ACA'$  và  $\Delta FAE$  có:  $AC = AF$  (cạnh của hình vuông  $ACGF$ );  $CA' = AE (= AB)$ .

Lại có  $\widehat{EAF} + \widehat{BAC} = 2v$  (vì  $\widehat{EAF} + \widehat{BAC} = 4v - \left( \underbrace{\widehat{BAE} + \widehat{CAF}}_{2v} \right)$ )

$\widehat{ACA'} + \widehat{BAC} = 2v$  (góc kề của hình bình hành  $ABA'C$ )

$\Rightarrow \Delta EAF = \Delta ACA'$  (c.g.c)  $\Rightarrow EF = AA' = 2AM$ .

**3.23.** Cho hình vuông  $ABCD$ . Gọi  $O$  là giao điểm hai đường chéo  $AC$  và  $BD$ , Vẽ tia phân giác của  $\widehat{CAB}$  cát đường chéo  $BD$  tại  $E$  và cạnh  $BC$  tại  $F$ . Vẽ  $FM \perp AC$  ( $M$  thuộc  $AC$ ). Chứng minh rằng:  $MEBF$  là hình thoi.



Xét  $\Delta ABF$  và  $\Delta AMF$  có  $\widehat{ABF} = \widehat{AMD} = 90^\circ$  (gt)

$AF$ : cạnh chung;  $\widehat{A}_1 = \widehat{A}_2$  (gt)

Do đó  $\Delta ABF = \Delta AMF$  (cạnh huyền - góc nhọn)

$\Rightarrow FB = FM$  và  $\widehat{F}_1 = \widehat{F}_2$

lại có  $FM \parallel BD$  ( $\perp OC$ )

$\Rightarrow \widehat{F}_2 = \widehat{E}_1$  (so le trong)

Từ (1) và (2)  $\Rightarrow \widehat{F}_1 = \widehat{E}_1$

Do đó  $\Delta BEF$  cân tại  $B \Rightarrow FB = EB = FM$ .

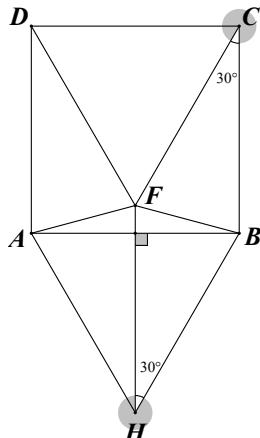
mà  $FM \parallel BE$  (cmt)

$\Rightarrow BFME$  là hình bình hành (hai cạnh đối vừa song song vừa bằng nhau)

lại có  $BF = MF$  nên  $BFME$  là hình thoi (hình bình hành có hai cạnh kề bằng nhau).

- 3.24.** Trên cạnh  $AB$  và bờ phia trong hình vuông  $ABCD$ . Dựng tam giác cân  $AFB$ , đỉnh  $F$  có góc ở đáy  $15^\circ$ . Chứng minh  $\Delta CFD$  đều.

Lời giải



Ở phía ngoài hình vuông, dựng  $\Delta AHB$  đều.

$$\text{Ta có } \widehat{HBF} = 60^\circ + 15^\circ = 75^\circ = \widehat{FBC}$$

$$\Rightarrow \Delta FBC = \Delta FBH \text{ (c.g.c)}$$

$$\Rightarrow \widehat{FCB} = \widehat{FHB}$$

Ta có  $HF$  là trung trực của  $AB$ .

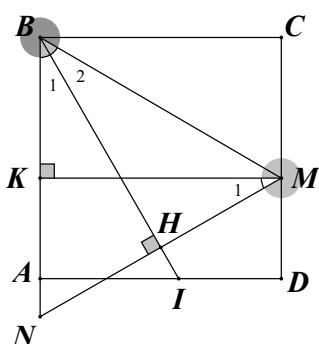
$$\Rightarrow \widehat{FHB} = 30^\circ \Rightarrow \widehat{FCB} = 30^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{CFD} = 60^\circ \Rightarrow CF = CD = DF.$$

Vậy  $\Delta DFC$  đều.

- 3.25.** Cho hình vuông  $ABCD$ . Trên  $CD$  lấy  $M$ . Tia phân giác của  $\widehat{ABM}$  cắt  $AD$  ở  $I$ . Chứng minh rằng  $BI \leq 2MI$ .

Lời giải



Kẻ  $MH \perp BI$  và  $MH$  cắt  $AB$  tại  $N$  ta có  $\Delta BMN$  có  $BH$  là phân giác lại là đường cao.

$$\Rightarrow \Delta BMN \text{ cân}$$

$\Rightarrow BH$  cũng là trung tuyến:

$$MH = NH \text{ hay } MN = 2MH$$

$\Delta MHI$  vuông tại  $H$  có  $MI$  là cạnh huyền nên  $MH \leq MI$

$$\Rightarrow 2MH \leq 2MI \text{ hay } MN \leq 2MI$$

Hạ  $MK \perp AB$ .

Xét hai tam giác  $MKN$  và  $BAI$  có

$$\widehat{B_1} = \widehat{M_1} \text{ (cùng phụ với } \widehat{BNH} \text{ ); } MK = BA.$$

$$\Rightarrow \Delta MKN = \Delta BAI \text{ (g.c.g)}$$

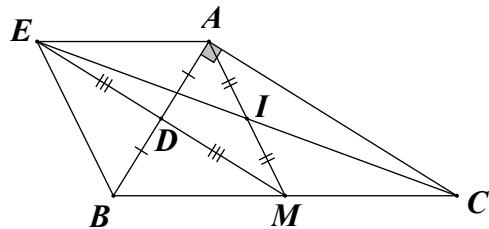
$$\Rightarrow MN = BI$$

Từ (1) và (2)  $\Rightarrow BI \leq 2MI$ .

**3.26.** Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$  có đường trung tuyến  $AM$ . Gọi  $D$  là trung điểm của  $AB, E$  là điểm đối xứng với  $M$  qua  $D$ .

- a) Chứng minh tứ giác  $AEBM$  là hình thoi.
- b) Gọi  $I$  là trung điểm  $AM$ . Chứng minh  $E, I, C$  thẳng hàng.
- c)  $\Delta ABC$  có thêm điều kiện gì thì  $AEBM$  là hình vuông.

*Lời giải*



a) Ta có  $DA = DB, DE = DM$  (tính chất đối xứng)

$\Rightarrow AEBM$  là hình bình hành.

Lại có  $MA = MB$  (trung tuyến tam giác vuông bằng nửa cạnh huyền).

Vậy  $AEBM$  là hình thoi.

b) Ta có  $AE // BM$  và  $AE = BM$  (vì  $AEBM$  là hình thoi) mà  $MC = BM$ .

$\Rightarrow AE // MC$  và  $AE = MC$ .

Do đó tứ giác  $AEMC$  là hình bình hành,  $I$  là trung điểm của đường chéo  $AM$  nên đường chéo thứ hai  $EC$  phải qua  $I$  hay ba điểm  $E, I, C$  thẳng hàng.

c) Hình thoi  $\Delta EEM$  là hình vuông

$\Leftrightarrow AB = EM$  mà  $EM = AC$

$\Leftrightarrow AB = AC$

$\Leftrightarrow \Delta ABC$  vuông cân.

↔ HẾT ↔

### BÀI TẬP ÔN CUỐI CHƯƠNG III

#### A. TRẮC NGHIỆM

1. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng, khẳng định nào sai?
  - A. Không có tứ giác nào mà không có góc tù.
  - B. Nếu tứ giác có ba góc nhọn thì góc còn lại là góc tù.
  - C. Nếu tứ giác có hai góc tù thì hai góc còn lại sẽ nhọn.
  - D. Không có tứ giác nào có ba góc tù.
2. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng, khẳng định nào sai?
  - A. Tứ giác có hai đường chéo bằng nhau là hình bình hành.
  - B. Tứ giác có hai cặp cạnh bằng nhau là hình bình hành.
  - C. Tứ giác có ba góc vuông là hình chữ nhật.
  - D. Tứ giác có ba cạnh bằng nhau là hình thoi.
3. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng, khẳng định nào sai?
  - A. Tứ giác có hai đường chéo bằng nhau và hai cạnh đối nào cũng bằng nhau là hình chữ nhật.
  - B. Tứ giác có hai cạnh đối nào cũng bằng nhau là hình bình hành.
  - C. Tứ giác có hai cạnh song song và hai đường chéo bằng nhau là hình thang cân.
  - D. Tứ giác có hai cạnh song song và hai cạnh còn lại bằng nhau là hình bình hành.

#### ĐÁP ÁN

#### A. TRẮC NGHIỆM

1. Khẳng định đúng: B, C .

Khẳng định sai: A , vì hình chữ nhật và hình vuông không có góc tù,  
D vì tứ giác chỉ có tối đa 2 góc tù.

2. Khẳng định đúng: C .

Khẳng định sai: A,B,D .

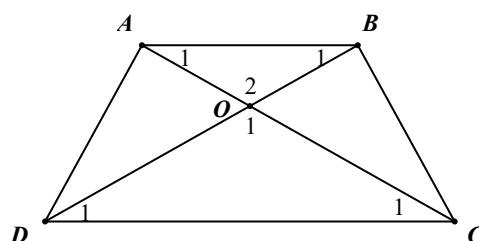
3. Khẳng định đúng: A,B,C .

Khẳng định sai: D .

#### B. TỰ LUẬN

1. Chứng minh rằng nếu tứ giác có hai đường chéo bằng nhau và một cạnh đối bằng nhau thì tứ giác đó là một hình thang cân.

#### Lời giải



Gọi  $O$  là giao điểm của hai đường chéo  $AC$  và  $BD$ .

Xét  $\Delta ADC$  và  $\Delta BCD$  có:

$CD$  là cạnh chung

$AD = BC$  (giả thiết)

$AC = BD$  (giả thiết)

Do đó  $\Delta ADC = \Delta BCD$  (c.c.c)

$\Rightarrow \widehat{C_1} = \widehat{D_1}$  hay  $\Delta COD$  cân tại  $O$

$\Rightarrow OC = OD$

Lại có  $AC = BD$  (gt)  $\Rightarrow AC - OC = BD - OD$

hay  $OA = OB$  nên  $\Delta AOB$  cân tại  $O$

$$\Rightarrow \widehat{A_1} = \widehat{B_1} \text{ mà } \widehat{O_1} = \widehat{O_2} \text{ (đối đỉnh)}$$

$$\Rightarrow \widehat{A_1} = \widehat{C_1} = \widehat{B_1} = \widehat{D_1} \Rightarrow AB \parallel CD \text{ (cặp góc so le trong bằng nhau)}$$

$\Rightarrow ABCD$  là hình thang (tứ giác có hai cạnh đối song song)

Lại có  $AC = BD$  (gt)

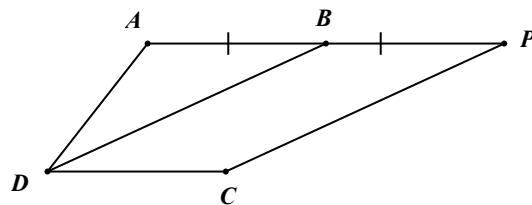
Do đó  $ABCD$  là hình thang cân (hình thang có hai đường chéo bằng nhau).

2. Cho hình bình hành  $ABCD$ . Lấy điểm  $P$  trên tia  $AB$  sao cho  $AP = 2AB$ .

a) Tứ giác  $BPCD$  có phải là hình bình hành không? Tại sao?

b) Khi tam giác  $ABD$  vuông cân tại  $A$ , hãy tính số đo các góc của tứ giác  $BPCD$ .

### Lời giải



a) Ta có  $AP = 2AB$  (gt)

$$\Rightarrow B \text{ là trung điểm của } AP$$

$$\Rightarrow AB = BP$$

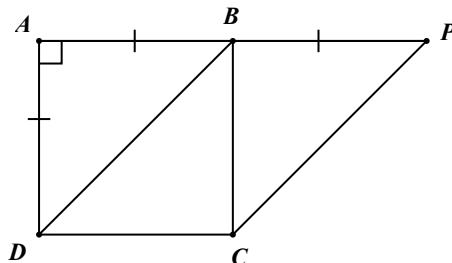
$ABCD$  là hình bình hành (gt)

$$\Rightarrow AB \parallel CD \text{ và } AB = CD.$$

$$\Rightarrow BP \parallel CD \text{ và } BP = CD$$

Do đó  $BPCD$  là hình bình hành (hai cạnh đối vừa song song vừa bằng nhau).

b) Khi tam giác  $ABD$  vuông cân tại  $A$ , hình bình hành  $ABCD$  trở thành hình vuông.



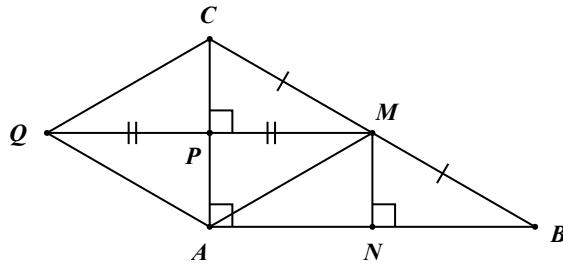
Thật vậy: Hình bình hành  $ABCD$  có  $\widehat{A} = 90^\circ$  nên  $ABCD$  là hình chữ nhật.

Hình chữ nhật có  $AB = AD$  nên  $ABCD$  là hình vuông.

Khi đó  $BD$  là phân giác của góc  $ADC$  và  $\widehat{D_2} = \widehat{D_1} = 45^\circ \Rightarrow \widehat{P} = 45^\circ$

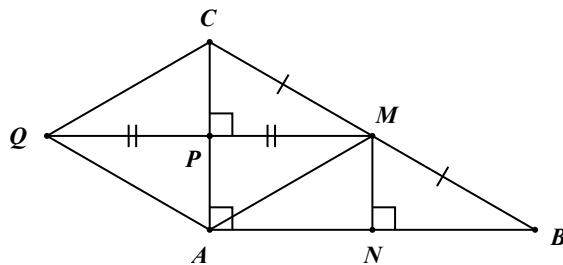
$$\Rightarrow \widehat{DBP} = \widehat{DCP} = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ.$$

3. Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$ . Gọi  $M$  là trung điểm của  $BC$  còn  $P, N$  lần lượt là chân đường vuông góc hạ từ  $M$  xuống  $CA, AB$  (hình vẽ bên).



- a) Chứng minh hai tam giác vuông  $CMP$  và  $MBN$  bằng nhau.
- b) Chứng minh tứ giác  $APMN$  là một hình chữ nhật. Từ đó suy ra  $N$  là trung điểm của  $AB$ ,  $P$  là trung điểm của  $AC$ .
- c) Lấy điểm  $Q$  sao cho  $P$  là trung điểm của  $MQ$ , chứng minh rằng tứ giác  $AMCQ$  là một hình thoi.
- d) Nếu  $AB = AC$ , tức là tam giác  $ABC$  vuông cân tại  $A$  thì tứ giác  $AMCQ$  có là hình vuông không? Tại sao?

### Lời giải



a) Ta có  $AB \parallel MP (\perp AC)$

$$\Rightarrow \widehat{B} = \widehat{M}_1 \text{ (cặp góc đồng vị)}$$

Dễ thấy  $\Delta CMP = \Delta MBN$  (cạnh huyền - góc nhọn).

b) Tứ giác  $APMN$  là hình chữ nhật (có ba góc vuông)

$$\Delta ABC \text{ vuông tại } A \text{ có } AM \text{ là trung tuyến} \Rightarrow AM = MB = MC$$

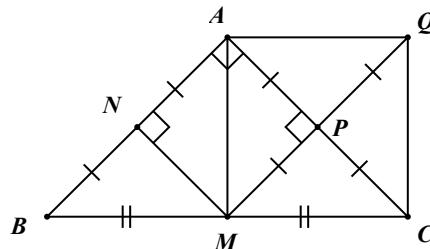
hay  $\Delta AMB$  cân tại  $M$  có  $MN$  là đường cao đồng thời cũng là đường trung tuyến hay  $N$  là trung điểm của  $AB$ .

Chứng minh tương tự ta có  $P$  là trung điểm của  $AC$ .

c)  $P$  là trung điểm của  $AC$ ,  $P$  cũng là trung điểm của  $MQ$  (gt)

$$\Rightarrow AMCQ \text{ là hình bình hành (Tứ giác có hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm mỗi đường).}$$

Hình bình hành  $AMCQ$  có  $MQ \perp AC$  nên  $AMCQ$  là hình thoi (Hình bình hành có hai đường chéo vuông góc).



d)  $\Delta ABC$  vuông cân (gt) nên trung tuyến  $AM$  đồng thời cũng là đường cao hay  $\widehat{AMC} = 90^\circ$ . Tứ giác  $AMCQ$  là hình bình hành (hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường).

Có  $\widehat{AMC} = 90^\circ$  (cmt) nên  $AMCP$  là hình chữ nhật (Hình bình hành có một góc vuông).

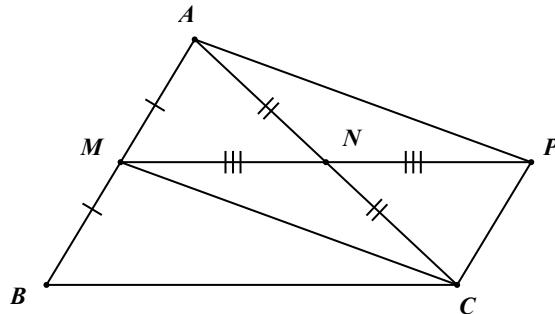
Hình chữ nhật  $AMCP$  có hai đường chéo  $AC \perp MP$  (gt) nên  $AMCP$  là hình vuông.

4. Cho tam giác  $ABC; M, N$  lần lượt là trung điểm của hai cạnh  $AB$  và  $AC$ . Lấy điểm  $P$  sao cho  $N$  là trung điểm của đoạn thẳng  $MP$ .

a) Hỏi tứ giác  $AMCP$  là hình gì? Vì sao?

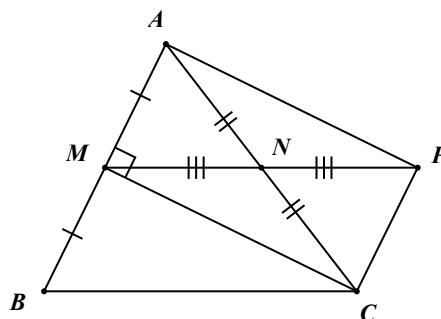
b) Với điều kiện nào của tam giác  $ABC$  thì tứ giác  $AMCP$  là hình chữ nhật, hình thoi, hình vuông?

### Lời giải



a) Ta có tứ giác  $AMCP$  là hình bình hành (hai đường chéo  $AC$  và  $MP$  cát nhau tại trung điểm của mỗi đường).

b) \* Tứ giác  $AMCP$  là hình chữ nhật (hình vẽ a).



### Hình a

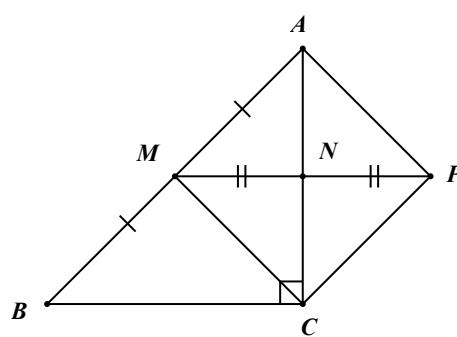
Để thấy  $AMCP$  là hình bình hành.

Hình bình hành  $AMCP$  là hình chữ nhật  $\Rightarrow \widehat{AMC} = 90^\circ$

$\Rightarrow$  Đường trung tuyến  $CM$  của  $\triangle ABC$  đồng thời phải là đường cao

$\Rightarrow \triangle ABC$  cân tại  $C$ .

Tứ giác  $AMCP$  là hình thoi (hình vẽ b)



### Hình b

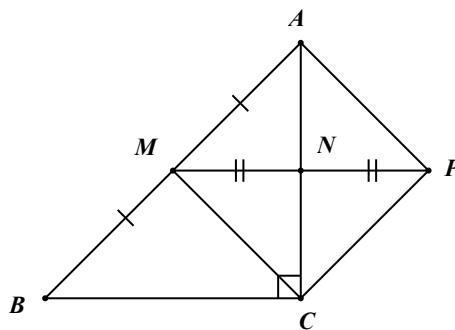
$AMCP$  là hình bình hành (cmt)

Hình bình hành  $AMCP$  là hình thoi  $\Rightarrow MA = MC$

$\Rightarrow \Delta ABC$  có trung tuyến  $CM$  bằng nửa cạnh đối diện.

$\Rightarrow \Delta ABC$  vuông tại  $C$ .

\*Tứ giác  $AMCP$  là hình vuông (hình vẽ c)



Hình c

Kết hợp hai điều kiện trên,  $AMCP$  là hình vuông

$\Rightarrow \Delta ABC$  vuông cân.

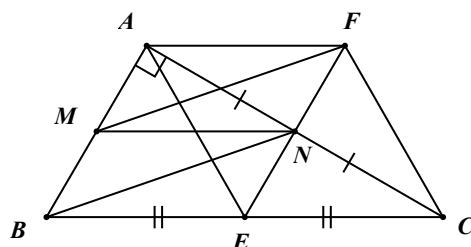
5. Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$  ( $AB < AC$ ). Gọi  $M, N, E$  lần lượt là trung điểm của  $AB, AC, BC$ .

a) Chứng minh rằng tứ giác  $ANEBC$  là hình thang vuông.

b) Chứng minh rằng tứ giác  $ANEM$  là hình chữ nhật.

c) Qua  $M$  kẻ đường thẳng song song với  $BN$  cắt tia  $EN$  tại  $F$ . Chứng minh rằng tứ giác  $AFCE$  là hình thoi.

### Lời giải



a) Ta có  $\Delta ABC$  vuông tại  $A$  và  $AE$  là đường trung tuyến (gt)

$\Rightarrow AE = EC = EB \left(= \frac{1}{2} BC\right)$  (Trong tam giác vuông, đường trung tuyến bằng nửa cạnh huyền).

hay  $\Delta AEC$  cân tại  $E$  nên trung tuyến  $EN$  đồng thời là đường cao:

$$\left. \begin{array}{l} EN \perp AC \\ AB \perp AC \text{ (gt)} \end{array} \right\} \Rightarrow EN \parallel AB$$

Do đó  $ANEBC$  là hình thang vuông.

b) Chứng minh tương tự  $\Delta AEB$  cân tại  $E$  nên trung tuyến  $EM$  đồng thời là đường cao hay  $EM \perp AB$ .

Tứ giác  $ANEM$  có ba góc vuông nên là hình chữ nhật.

c) Ta có  $MF \parallel BN$  (gt),  $MB \parallel NF$  (vì  $EN \parallel AB$ )

nên  $MFNE$  là hình bình hành (các cạnh đối song song)

$\Rightarrow MB = NF$ .

Lại có  $MA = NE$  (cạnh đối của hình chữ nhật  $ANEM$ )

$$MA = MB \text{ (gt)} \Rightarrow NF = NE$$

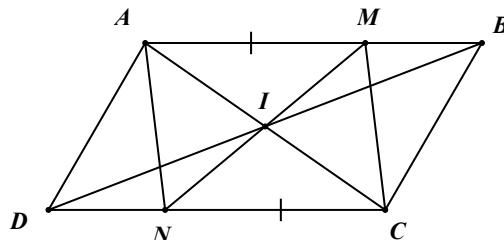
nên  $N$  là trung điểm của  $EF$ ,  $N$  là trung điểm của  $AC$  (gt)

Do đó tứ giác  $AFCE$  là hình bình hành (hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm mỗi đường).

Hình bình hành  $AFCE$  có  $AE = EC$  (cmt) nên  $AFCE$  là hình thoi (Hình bình hành có hai cạnh kề bằng nhau).

6. Cho hình bình hành  $ABCD$ . Gọi  $M$  là điểm nằm giữa  $A$  và  $B$ ,  $N$  là điểm nằm giữa  $C$  và  $D$  sao cho  $AM = CN$ . Gọi  $I$  là giao điểm của  $MN$  và  $AC$ . Chứng minh:
- $\Delta IAM = \Delta ICN$ ;
  - Tứ giác  $AMCN$  là hình bình hành;
  - Ba điểm  $B, I, D$  thẳng hàng.

**Lời giải**



a) Ta có  $\widehat{A}_1 = \widehat{C}_1$  (so le trong)

tương tự  $\widehat{M}_1 = \widehat{N}_1$

$AM = CN$  (gt)

Do đó  $\Delta IAM = \Delta ICN$  (g.c.g)

b)  $\Delta IAM = \Delta ICN$  (cmt)

$\Rightarrow IA = IC$  (cạnh tương ứng) và  $IM = IN$

Do đó tứ giác  $AMCN$  là hình bình hành (hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm mỗi đường)

c)  $AMCN$  là hình bình hành và  $I$  là trung điểm của đường chéo  $AC$

Lại có  $ABCD$  là hình bình hành (gt)

$\Rightarrow$  Đường chéo  $BD$  phải đi qua trung điểm  $I$  hay  $B, I, D$  thẳng hàng.

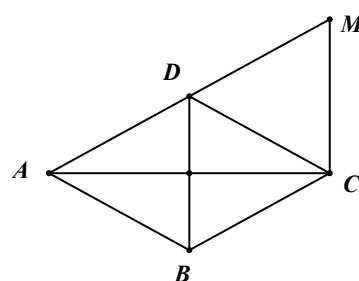
7. Cho hình thoi  $ABCD$  và hình bình hành  $BCMD$ . Gọi  $O$  là giao điểm của  $AC$  và  $BD$ . Chứng minh:

a)  $OD = \frac{1}{2}CM$  và tam giác  $ACM$  là tam giác vuông;

b) Ba điểm  $A, D, M$  thẳng hàng;

c) Tam giác  $DCM$  là tam giác cân.

**Lời giải**



a)  $ABCD$  là hình thoi (gt)

$$\Rightarrow OB = OD = \frac{1}{2}BD \quad (1)$$

$BCMD$  là hình bình hành (gt)

$$\Rightarrow BD = CM \quad (2)$$

Từ (1) và (2)  $\Rightarrow OD = \frac{1}{2}CM$

Ta có  $AC \perp BD$  (tính chất hai đường chéo của hình thoi)

Mà  $CM \parallel BD$  (do  $BCMD$  là hình bình hành)

$\Rightarrow AC \perp CM$  (một đường thẳng cùng vuông góc với hai đường song song thì nó vuông góc với đường còn lại) hay  $\triangle ACM$  vuông.

b) Ta có  $AD \parallel BC$  (hai cạnh đối của hình thoi  $ABCD$ )

$BC \parallel DM$  (hai cạnh đối của hình bình hành  $BCMD$ )

$\Rightarrow AD$  và  $DM$  trùng nhau (Tiên đề Euclid)

$\Rightarrow$  ba điểm  $A, D, M$  thẳng hàng.

c) Ta có  $DC = AB$  (cạnh hinh thoi)

$DM = BC$  (cạnh đối của hình bình hành)

Mà  $AB = BC$  (cạnh hinh thoi)

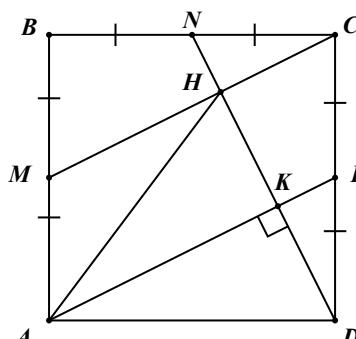
$\Rightarrow DC = DM \Rightarrow \triangle DCM$  cân.

8. Cho hình vuông  $ABCD$ . Gọi  $M, N$  lần lượt là trung điểm của  $AB$  và  $BC$ .

a) Chứng minh  $DN = CM$  và  $DN \perp CM$ .

b) Gọi  $H$  là giao điểm của  $DN$  và  $CM$ ,  $I$  là trung điểm của  $CD$  và  $AK$  là đường cao của tam giác  $AHD$ . Chứng minh rằng ba điểm  $A, K, I$  thẳng hàng.

### Lời giải



a) Để thấy  $\triangle CBM = \triangle DCN$  (c.g.c)

$$\Rightarrow CM = DN \text{ và } \widehat{M}_1 = \widehat{N}_1$$

mà  $\widehat{C}_1 + \widehat{M}_1 = 90^\circ$  (do  $\widehat{MBC} = 90^\circ$ )

$$\Rightarrow \widehat{C}_1 + \widehat{N}_1 = 90^\circ \Rightarrow \widehat{CHN} = 90^\circ$$

Chứng tỏ  $DN \perp CM$ .

b) Ta có  $I$  là trung điểm của  $CD$  (gt),

$M$  là trung điểm của  $AB$  (gt)

mà  $AB = CD$  và  $AB \parallel CD$

$\Rightarrow AM \parallel CI$  và  $AM = CI$  hay  $AMCI$  là hình bình hành.

$\Rightarrow AI \parallel CM$ .

Lại có  $AK \parallel CM (\perp DN)$

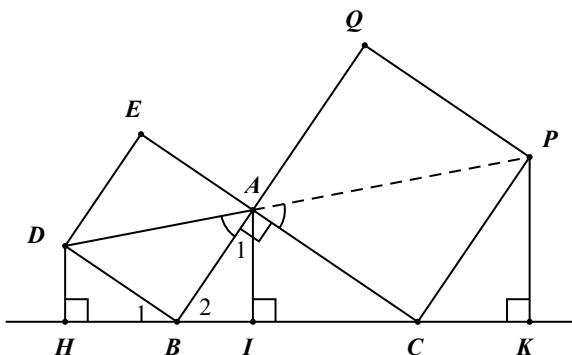
$\Rightarrow AK$  và  $AI$  trùng nhau (tiên đề Euclid)

$\Rightarrow$  ba điểm  $A, K, I$  thẳng hàng.

9. Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$ . Dựng ra phía ngoài tam giác các hình vuông  $ABDE$  và  $ACPQ$ .

- a) Chứng minh rằng ba điểm  $D, A, P$  thẳng hàng.  
 b) Gọi  $H, K$  lần lượt là chân các đường vuông góc kẻ từ  $D$  và  $P$  xuống đường thẳng  $BC$  và  $AI$  là đường cao của tam giác  $ABC$ . Chứng minh rằng  $BC = DH + PK$ .

**Lời giải**



a) Ta có  $AD$  là đường chéo của hình vuông  $ABDE$  nên  $\widehat{DAB} = 45^\circ$

Tương tự ta có  $\widehat{CAP} = 45^\circ$

$$\Rightarrow \widehat{DAB} + \widehat{BAC} + \widehat{CAP} = 45^\circ + 90^\circ + 45^\circ = 180^\circ$$

Do đó ba điểm  $D, A, P$  thẳng hàng.

b) Xét  $\Delta DHB$  và  $\Delta BIA$  có  $\widehat{B}_1 = \widehat{A}_1$  (cùng phụ với  $\widehat{B}_2$ )

và  $BD = AB$  (cạnh hìn vuông  $ABDE$ ).

Do đó  $\Delta DHB = \Delta BIA$  (cạnh huyền - góc nhọn)

$$\Rightarrow DH = IB. \text{ Chứng minh tương tự ta có } PK = IC \\ \text{mà } BC = BI + CI \Rightarrow BC = DH + PK \text{ (dpcm).}$$

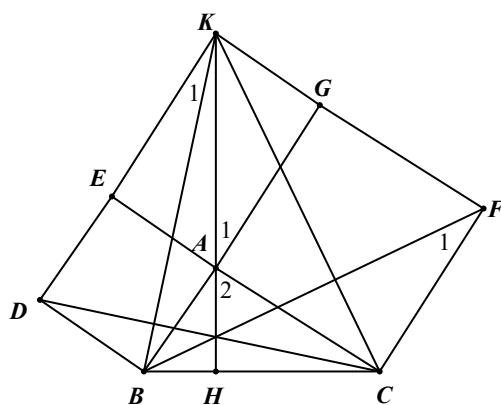
10. Vẽ ra phía ngoài của tam giác  $ABC$  các hình vuông  $ABDE$  và  $ACFG$ . Vẽ hình bình hành  $EAGK$ .

Chứng minh rằng:

- a)  $AK = BC$ ;  
 b)  $AH \perp BC$ ;  
 c) Các đường thẳng  $KA, BF, CD$  đồng quy.

**ĐỀ BÀI CHO THIẾU ĐIỂM H**

**Lời giải**



a) Xét hai tam giác  $AEK$  và  $BAC$  có:  $EA = AB; EK = AC (= AG)$ ;

$$\widehat{AEK} = \widehat{BAC} \text{ (vì cùng bù với } \widehat{EAG} \text{ )}$$

$$\Rightarrow \Delta AEK = \Delta BAC \text{ (c.g.c)}$$

$$\Rightarrow AK = BC$$

b) Gọi  $H$  là giao điểm của  $AK$  và  $BC$ .

Ta có  $\widehat{EKA} = \widehat{A}_1$  (so le trong do  $AGKE$  là hình bình hành)

Mặt khác:  $\widehat{A}_1 + \widehat{A}_2 = 90^\circ \Rightarrow \widehat{A}_2 + \widehat{ACH} = 90^\circ$

Trong  $\Delta AHC$  ta có:  $\widehat{AHC} = 180^\circ - (\widehat{A}_2 + \widehat{ACH}) = 90^\circ$  hay  $AH \perp BC$ .

c)  $\Delta AKC = \Delta CBF$  (c.g.c)

$\Rightarrow \widehat{ACK} = \widehat{F}_1$  mà  $\widehat{ACK} + \widehat{KCF} = 90^\circ$

$\Rightarrow \widehat{F}_1 + \widehat{KCF} = 90^\circ$

Gọi  $I$  là giao điểm của  $CK$  và  $BF$

Trong  $\Delta ICF \Rightarrow \widehat{CIF} = 90^\circ$  hay  $BF \perp KC$ .

Tương tự chứng minh được  $CD \perp KB$ .

Vậy  $KA, BF, CD$  là 3 đường thẳng chéo nhau của  $\Delta BKC$  nên 3 đường thẳng đó đồng quy.

**11.** Cho hình vuông  $ABCD$ . Lấy  $E$  thuộc đường chéo  $AC$ . Kẻ  $EH, EK$  lần lượt vuông góc với  $AD$  và  $CD$ .

a) Chứng minh rằng  $BE = HK$  và  $BE \perp HK$ .

b) Chứng minh rằng: các đường thẳng  $BE, AK, CH$  đồng quy.

### Lời giải

a) Gọi  $I$  là giao điểm của  $HE$  và  $BC$  ta có  $HI \perp BC$ .

Do đó tứ giác  $EICK$  là hình chữ nhật (có 3 góc vuông).

Lại có  $CE$  là phân giác của góc  $C$  (tính chất đường chéo của hình vuông  $ABCD$ ) nên  $EICK$  là hình vuông.

$\Rightarrow EI = EK = CK = IC$  mà  $BC = CD$  (cạnh hinh vuong)

$\Rightarrow BC - IC = CD - CK$  hay  $BI = DK$ , mà  $EKDH$  là hình chữ nhật

$\Rightarrow DK = EH \Rightarrow BI = DK = EH$ .

Xét  $\Delta BIE$  và  $\Delta HEK$  có  $BI = EH$  (cmt)

$\Rightarrow \widehat{BIE} = \widehat{HEK} = 90^\circ$  (cmt)

$IE = EK$  (cmt)

Do đó  $\Delta BIE = \Delta HEK$  (c.g.c)  $\Rightarrow BE = HK$ .

Gọi  $P$  là giao điểm của  $BE$  và  $HK$ .

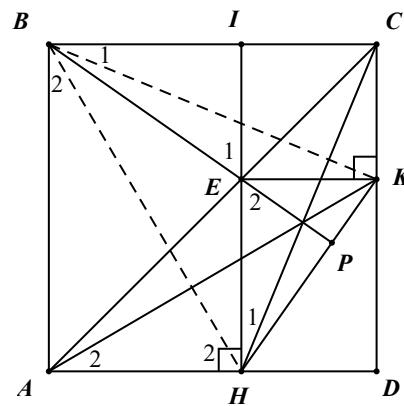
Ta có  $\widehat{E}_1 = \widehat{E}_2$  (đôi đỉnh)

$\widehat{B}_1 = \widehat{H}_1$

mà  $\widehat{B}_1 + \widehat{E}_1 = 90^\circ$  (do  $\widehat{BIE} = 90^\circ$ )

$\Rightarrow \widehat{H}_1 + \widehat{E}_2 = 90^\circ$

Trong  $\Delta EPH \Rightarrow \widehat{EPH} = 90^\circ$  hay  $BE \perp HK$ .



b) Để thấy  $\Delta BAH = \Delta ADK$  (c.g.c)

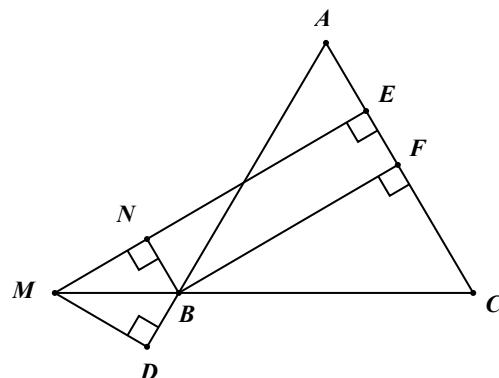
$$\Rightarrow \widehat{B_2} = \widehat{A_2} \text{ mà } \widehat{B_2} + \widehat{H_2} = 90^\circ$$

Vì:  $\widehat{BAH} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{A_2} + \widehat{H_2} = 90^\circ$  hay  $AK \perp BH$

Chứng minh tương tự ta có  $CH \perp BK$ .

Vậy  $BE, AK, CH$  là ba đường cao của  $\Delta BHK$  nên chúng đồng quy.

- 12.** Cho tam giác  $ABC$  cân tại  $A; M$  là một điểm thuộc đường thẳng  $BC, B$  ở giữa  $M$  và  $C$ . Gọi  $E$  và  $K$  lần lượt là chân đường vuông góc hạ từ  $M$  và từ  $B$  xuống  $AC$ , còn  $N$  là chân đường vuông góc hạ từ  $B$  xuống  $ME$  (hình vẽ).



Chứng minh rằng:

a) Tứ giác  $BKEN$  là hình chữ nhật.

b)  $BK$  và  $NE$  cùng bằng hiệu khoảng cách từ  $M$  đến  $AC$  và  $AB$  (dù  $M$  thay đổi trên đường thẳng  $BC$  miễn là  $B$  nằm giữa  $M$  và  $C$  ).

### Lời giải

a) Để thấy tứ giác  $BKEN$  là hình chữ nhật (có ba góc vuông).

b) Khoảng cách từ  $M$  đến  $AC$  là  $ME$  và khoảng cách từ  $M$  đến  $AB$  là  $MD$ . Ta phải chứng minh:  $BK = NE = ME - MD$

Thật vậy: Xét  $\Delta MEC$  vuông tại  $E \Rightarrow \widehat{M}_1 + \widehat{C} = 90^\circ$

$$\Delta MNB \text{ vuông tại } N \Rightarrow \widehat{M}_1 + \widehat{MBN} = 90^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{C} = \widehat{MBN}$$

Lại có  $\widehat{MBD} = \widehat{ABC}$  (đối đỉnh)

$$\widehat{ABC} = \widehat{C} \text{ (Vì } \Delta ABC \text{ cân tại } A\text{)}$$

$$\Rightarrow \widehat{MBN} = \widehat{MBD}$$

Xét  $\Delta MBN$  và  $\Delta MBD$  có  $\widehat{MNB} = \widehat{MDB} = 90^\circ$  (gt)

$MB$  là cạnh chung;

$$\widehat{MBN} = \widehat{MBD}.$$

Do đó  $\Delta MBN = \Delta MBD$  (cạnh huyền - góc nhọn)

$\Rightarrow MN = MD$  (cạnh tương ứng)

Vì  $BK = NE$  (cạnh đối của hình chữ nhật)

Mà  $NE = ME - MN \Rightarrow BK = NE = ME - MD$ .

☞ **HẾT** ☞

## CHƯƠNG IV. ĐỊNH LÍ THALÈS

### BÀI 15. ĐỊNH LÍ THALÈS TRONG TAM GIÁC

#### A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

##### 1. Tỉ số của hai đoạn thẳng

Tỉ số của hai đoạn thẳng là tỉ số độ dài của chúng theo cùng một đơn vị đo.

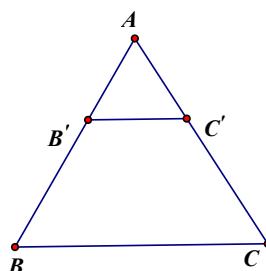
##### 2. Đoạn thẳng tỉ lệ

Hai đoạn thẳng  $AB$  và  $CD$  gọi là tỉ lệ với hai đoạn thẳng  $A'B'$  và  $C'D'$  nếu có tỉ lệ thức:

$$\frac{AB}{CD} = \frac{A'B'}{C'D'} \text{ hay } \frac{AB}{A'B'} = \frac{CD}{C'D'}$$

##### 3. Định lí Thalès trong tam giác

Nếu một đường thẳng song song với một cạnh của tam giác và cắt hai cạnh còn lại thì nó định ra trên hai cạnh đó những đoạn thẳng tương ứng tỉ lệ.



GT	$\Delta ABC : B'C' \parallel BC$ $(B' \in AB, C' \in AC)$
KL	$\frac{AB'}{AB} = \frac{AC'}{AC}; \frac{AB'}{B'B} = \frac{AC'}{C'C}; \frac{B'B}{AB} = \frac{C'C}{AC}$

##### 4. Định lí Thalès đảo

Nếu một đường thẳng cắt hai cạnh của một tam giác và định ra trên hai cạnh này những đoạn thẳng tương ứng tỉ lệ thì đường thẳng đó song song với cạnh còn lại của tam giác.

GT	$\Delta ABC; B' \in AB, C' \in AC; \frac{AB'}{AB} = \frac{AC'}{AC}$
KL	$B'C' \parallel BC$

#### B. PHÂN LOẠI CÁC BÀI TẬP

##### I. Nhận biết tứ giác – Tứ giác lồi – Các yếu tố trong tứ giác

**Bài toán 1:** Tính tỉ số của hai đoạn thẳng  $AB$  và  $CD$  trong các trường hợp sau:

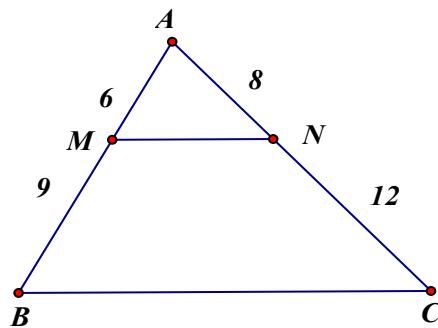
- |   |  |
|---|--|
| a) $AB = 6\text{cm}, CD = 12\text{cm};$ | b) $AB = 150\text{cm}, CD = 2\text{m};$  |
| c) $AB = 6\text{cm}, CD = 8\text{cm};$  | d) $AB = 1,2\text{m}, CD = 42\text{cm}.$ |

*Hướng dẫn:*

- Để tính tỉ số của hai đoạn thẳng, phải đưa chúng về một đơn vị đo.
- Tỉ số của hai đoạn thẳng không phụ thuộc vào đơn vị đo độ dài đoạn thẳng.

**Bài toán 2:** Trong hình vẽ, hai đoạn thẳng  $AM$  và  $MB$  có tỉ lệ với đoạn thẳng  $AN$  và  $CN$  hay không?

Vì sao?



**Bài toán 3:** Cho đoạn thẳng  $AB$ ,  $M$  là điểm nằm trên đoạn thẳng  $AB$  sao cho  $\frac{MA}{MB} = \frac{7}{4}$ . Tính các tỉ số

$$\frac{MA}{AB} \text{ và } \frac{AB}{MB}.$$

**Bài toán 4:** Cho đoạn thẳng  $AB = 10\text{cm}$ ,  $M$  là điểm nằm trên đoạn thẳng  $AB$  sao cho  $\frac{MA}{MB} = \frac{2}{3}$ . Tính độ dài  $AM$  và  $MB$

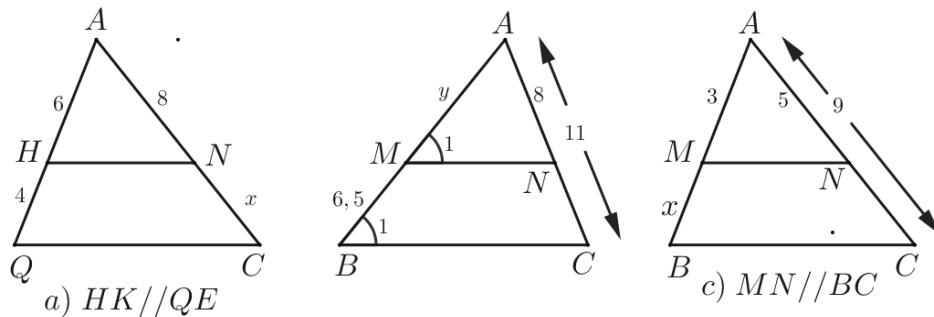
**Bài toán 5:** Cho đoạn thẳng  $AB = 6\text{cm}$ . Một điểm  $C$  ở trong đoạn  $AB$  mà  $CA = 3,6\text{cm}$ . Trên đường thẳng  $AB$  vẽ phía  $B$  một điểm  $D$  sao cho  $\frac{DA}{DB} = \frac{CA}{CB}$ . Tính độ dài đoạn thẳng  $DB$ ?

**Bài toán 6:** Cho bốn điểm  $A, N, B, M$  theo thứ tự đó cùng nằm trên một đường thẳng sao

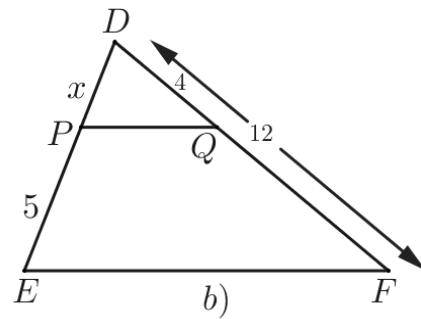
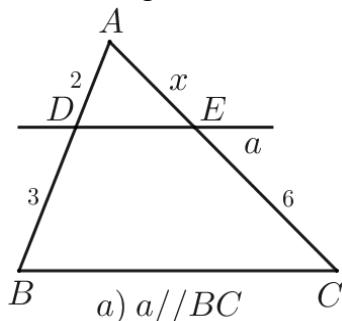
cho  $\frac{MA}{MB} = \frac{NA}{NB} = \frac{3}{2}$ . Tính  $NA, NB, MA, MB$  biết rằng  $AB = 6\text{cm}$ .

**Bài toán 7:** Cho ba đoạn thẳng  $AB; CD; FE$  sao cho  $\frac{AB}{CD} = \frac{2}{3}$  và  $\frac{CD}{EF} = \frac{4}{5}$ . Hãy tính độ dài  $AB; CD; FE$  biết rằng:  $AB + CD + EF = 70\text{cm}$ .

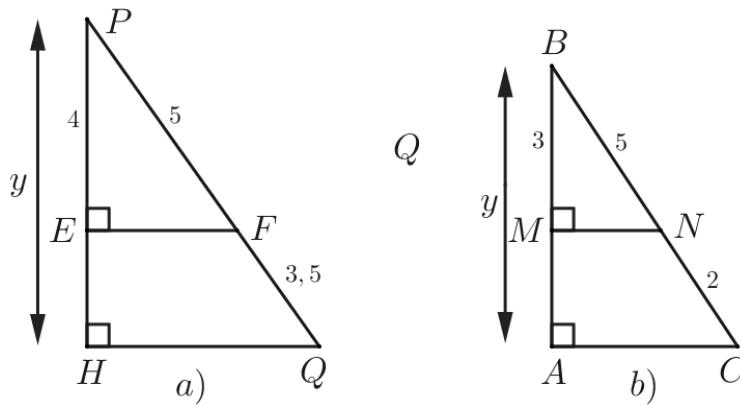
**Bài toán 8.** Tìm độ dài  $x, y$  trong các hình vẽ sau (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ nhất)



**Bài toán 9.** Tính các độ dài  $x$  trong Hình a, Hình b sau; biết:

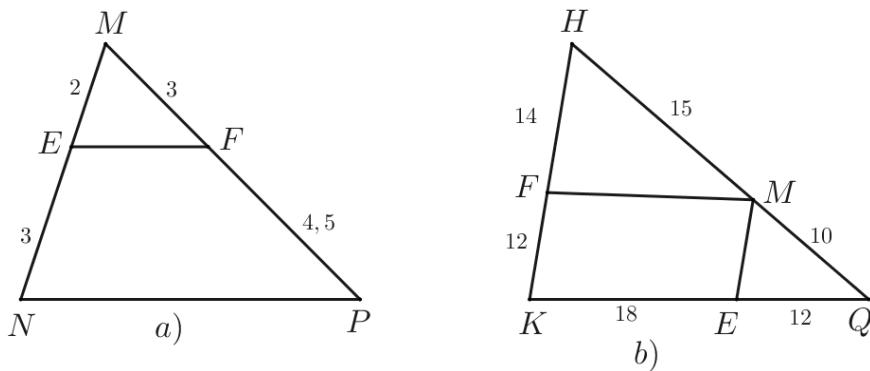


**Bài toán 10.** Tính độ dài  $y$  trong các Hình a, b sau:



**Bài toán 11.** Cho tam giác  $ABC$ , một đường thẳng  $d$  song song với cạnh  $BC$  cắt  $AB$ ,  $AC$  lần lượt tại  $D$  và  $E$  biết  $AB = 6cm$ ,  $AC = 10cm$ . Hãy xác định vị trí điểm  $D$  trên  $AB$  sao cho  $AD = CE$ .

**Bài toán 12.** Tìm các cặp đường thẳng song song trong hình sau và giải thích vì sao chúng song song với nhau.



## II. Chứng minh

**Bài toán 13.** Cho tam giác  $ABC$  một đường thẳng song song với cạnh  $BC$  cắt  $AB$  tại  $D$  và  $AC$  tại  $E$ . Trên tia đối của tia  $CA$  lấy điểm  $F$  sao cho  $CF = BD$ . Gọi  $M$  là giao điểm của  $DF$  và  $BC$ .

Chứng minh rằng  $\frac{MD}{MF} = \frac{AC}{AB}$ .

**Bài toán 14.** Cho tam giác  $ABC$ , một đường thẳng song song với  $BC$  cắt cạnh  $AB, AC$  lần lượt tại  $M$  và  $N$ . Qua  $C$  kẻ đường thẳng song song với  $BN$  cắt đường thẳng  $AB$  tại  $P$ . Chứng minh  $AB^2 = AM \cdot AP$

**Bài toán 15:** Cho hình thang  $ABCD$  ( $AB \parallel CD$ ), một đường thẳng song song với đáy cắt cạnh bên  $AD$ ,  $BC$  lần lượt tại  $E, F$ . Chứng minh rằng  $\frac{ED}{AD} = \frac{FC}{BC}$ .

**Bài toán 16.** Cho  $\Delta ABC$ , từ điểm  $D$  trên cạnh  $BC$ , kẻ đường thẳng song song với  $AB$  cắt  $AC$  tại  $F$  và kẻ đường thẳng song song với  $AC$  cắt  $AB$  tại  $E$ . Chứng minh rằng  $\frac{AE}{AB} + \frac{AF}{AC} = 1$ .

**Bài toán 17.** Cho hình thang  $ABCD$  ( $AB \parallel CD$ ) và  $AB < CD$ . Các cạnh bên  $AD$  và  $BC$  cắt nhau tại  $E$

a) Tính  $BC$  biết  $AE = 3; AD = 2; CE = 6$ .

b) Từ điểm  $M$  bất kì trên đáy  $CD$ , kẻ  $MC' \parallel DE$  và  $MD' \parallel CE$ .

Chứng minh rằng  $\frac{DE'}{ED} + \frac{EC'}{EC} = 1$ .

**Bài toán 18.** Cho hình thang  $ABCD$  ( $AB \parallel CD$ ) và  $AB < CD$ . Đường thẳng  $d$  song song với hai đáy và cắt hai cạnh bên  $AD, BC$  của hình thang đó lần lượt tại  $M, N$ ; cắt đường chéo  $AC$  tại  $P$ .

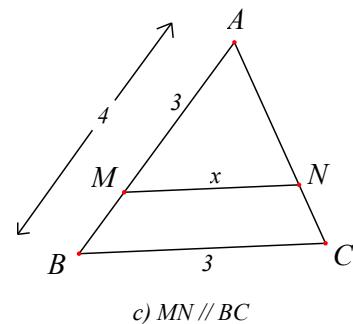
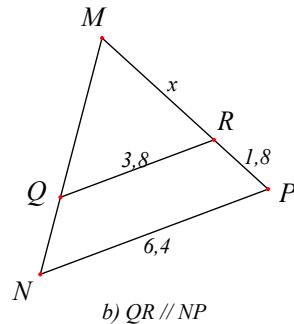
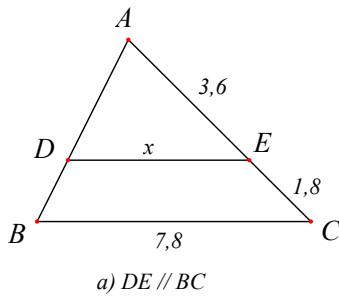
$$\text{Chứng minh rằng } \frac{AM}{MD} = \frac{BN}{NC}.$$

**Bài toán 19:** Cho  $\Delta ABC$  có trọng tâm  $G$ . Vẽ đường thẳng  $d$  đi qua  $G$  và song song với  $AB$ ,  $d$  cắt  $BC$  tại điểm  $M$ . Chứng minh rằng  $BM = \frac{1}{3}BC$ .

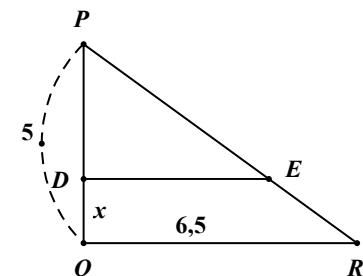
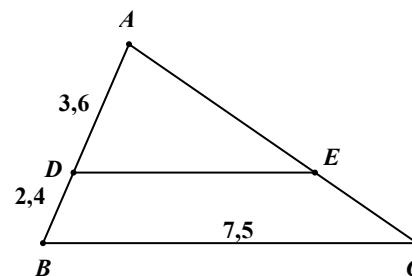
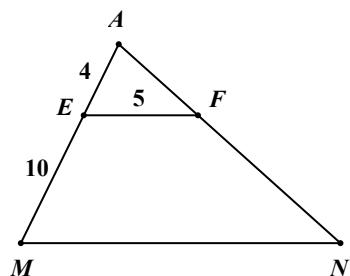
**Bài toán 20:** Chứng minh rằng: Một đường thẳng cắt hai cạnh của một tam giác và song song với cạnh thứ ba thì tạo ra một tam giác mới có ba cạnh tương ứng tỉ lệ với ba cạnh của tam giác đã cho.

\*Sử dụng kết quả của Bài toán 20 để tính độ dài các đoạn thẳng

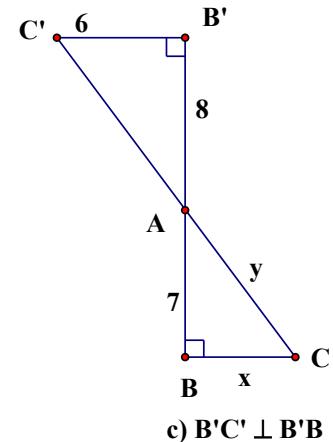
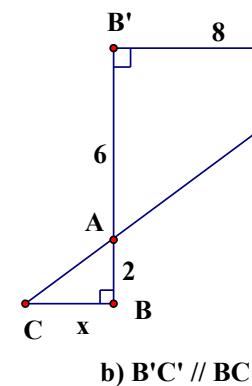
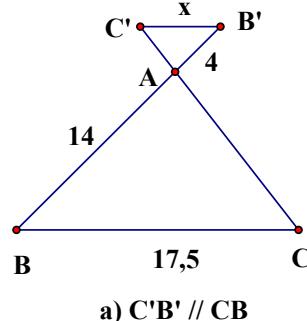
**20.1:** Tìm độ dài  $x$  trong các hình dưới đây



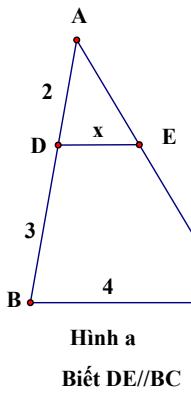
**20.2.** Tìm độ dài  $x$  trong các hình dưới đây.



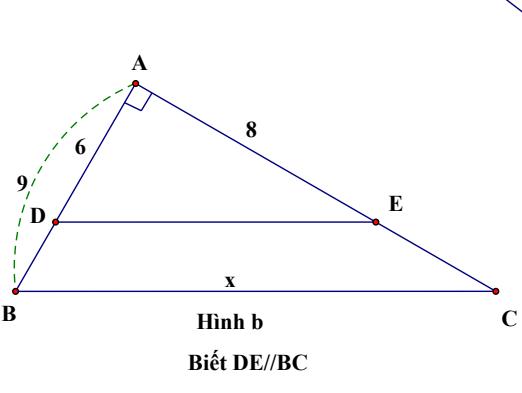
**20.3.** Tìm độ dài  $x, y$  trong các hình dưới đây. (Kết quả làm tròn đến phần thập phân thứ nhất).



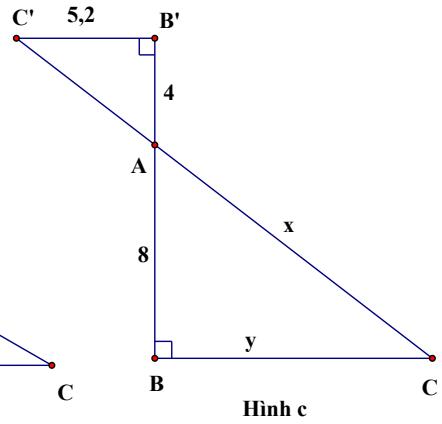
**20.4.** Tìm độ dài  $x, y$  trong các hình dưới đây.



Hình a  
Biết  $DE \parallel BC$



Hình b  
Biết  $DE \parallel BC$



Hình c

- 20.5.** Cho tam giác  $ABC$ , đường cao  $AH$ . Trên  $AH$  lấy các điểm  $I, K$  sao cho  $AI = IK = KH$ . Qua  $I$  và  $K$  vẽ các đường thẳng song song với  $BC$  cắt  $AB$ ,  $AC$  lần lượt tại  $D, E$  và  $F, G$ . Tính độ dài các đoạn thẳng  $DE$  và  $FG$  biết  $BC = 15\text{cm}$ . Tính diện tích tứ giác  $DEGF$  biết diện tích của tam giác  $ABC$  là  $270\text{cm}^2$ .
- 20.6.** Cho hình thang  $ABCD$  ( $AB \parallel CD$ ) gọi  $I$  là giao điểm của hai đường chéo  $AC$  và  $BD$ . Một điểm  $M$  trên đáy  $AB$  và  $MA = 2\text{cm}, MB = 6\text{cm}$ . Cạnh đáy  $CD = 12\text{cm}$ . Đường thẳng  $IM$  cắt đáy  $CD$  tại  $N$ .
- Tính tỉ số  $\frac{NC}{ND}$ .
  - Tính độ dài đoạn thẳng  $NC$  và  $ND$ .
- 20.7.** Cho hình thang  $ABCD$  ( $AB \parallel CD$ ) có  $AB = 6\text{cm}; CD = 9\text{cm}$ . Gọi  $I$  là giao điểm của  $AC$  và  $BD$ .
- Tính các tỉ số  $\frac{IA}{IC}; \frac{IB}{ID}$  và  $\frac{AI}{AC}; \frac{BI}{BD}$ .
  - Từ  $I$  vẽ đường thẳng song song với cạnh  $AB$ , lần lượt cắt  $AD$  và  $BC$  tại  $M$  và  $N$ . Chứng minh rằng:  $MI = NI$ .
- Bài toán 21.** Cho hình thang  $ABCD$ , đường thẳng  $d$  song song với đáy cắt cạnh bên  $AD$  ở  $I$ . Cắt đường chéo  $BD$  và  $AC$  lần lượt ở  $K$  và  $L$ , cắt cạnh bên  $BC$  ở  $M$ . Chứng minh rằng  $IK = LM$ .
- Bài toán 22.** Cho hình thang  $ABCD$  ( $AB \parallel CD$ ).  $M$  là trung điểm của  $CD$ . Gọi  $I$  là giao điểm của  $AM$  và  $BD$  và  $K$  là giao điểm của  $BM$  và  $AC$ .
- Chứng minh rằng  $IK \parallel AB$ .
  - Đường thẳng  $IK$  cắt  $AD$  và  $BC$  theo thứ tự tại  $E$  và  $F$ . Chứng minh  $EI = IK = KF$ .
- Bài toán 23.** Cho tam giác  $ABC$ , một đường thẳng song song với  $BC$  cắt các cạnh  $AB$  và  $AC$  lần lượt tại  $D$  và  $E$ . Vẽ đường thẳng  $a$  qua  $A$  và song song với  $BC$ , đường thẳng  $a$  cắt các đường thẳng  $BE$  và  $CD$  lần lượt tại  $G$  và  $K$ . Chứng minh rằng:  $A$  là trung điểm của  $KG$ .
- Bài toán 24.** Trên các cạnh  $AB, AC$  của tam giác  $ABC$  lần lượt lấy hai điểm  $M, N$  sao cho  $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$ . Gọi  $I$  là trung điểm cạnh  $BC$  và  $K$  là giao điểm của đường thẳng  $AI$  với đường thẳng  $MN$ . Chứng minh rằng  $K$  là trung điểm của đoạn thẳng  $MN$ .
- Bài toán 25.** Cho hình thang  $ABCD$  đáy lớn là  $CD$ , đường thẳng kẽ từ  $A$  song song với  $BC$  cắt  $BD$  tại  $E$ , đường thẳng kẽ từ  $B$  song song với  $AD$  cắt  $AC$  tại  $F$ . Chứng minh rằng  $EF \parallel AB$ .

**Bài toán 26.** Cho hình thang  $ABCD$ ,  $CD$  là đáy lớn, đường thẳng dựng từ  $B$  song song với  $AD$  cắt  $CD$  tại  $E$ , đường thẳng dựng từ  $A$  song song với  $BC$  cắt  $BD$  tại  $F$ . Qua  $E$  dựng đường thẳng song song với  $BD$  cắt  $BC$  tại  $G$ . Chứng minh rằng  $FG \parallel CD$ .

**Bài toán 27.** Cho hình thang  $ABCD$  đáy lớn là  $AB$ , đường thẳng kẽ từ  $C$  song song với  $AD$  cắt  $BD$  tại  $M$ , cắt  $AB$  tại  $F$ , đường thẳng kẽ từ  $D$  song song với  $BC$  cắt  $AB$  tại  $E$ ,  $AC$  tại  $N$  các đường thẳng kẽ qua  $E$  và  $F$  lần lượt song song với  $BD$  và  $AC$  cắt  $AD$  và  $BC$  tại  $P$  và  $Q$ . Chứng minh rằng:  $M, N, P, Q$  thẳng hàng.

**Bài toán 28.** Cho hình thang  $ABCD(AB \parallel CD)$  hai đường chéo  $AC$  và  $BD$  cắt nhau tại  $I$ . Đường thẳng qua  $I$  và song song với hai đáy cắt hai cạnh bên  $AD$  và  $BC$  theo thứ tự tại  $M$  và  $N$ . Chứng minh:  $\frac{1}{IM} = \frac{1}{AB} + \frac{1}{CD}$ .

**Bài toán 29.** Cho tam giác  $ABC$ , lấy  $D$  thuộc cạnh  $BC$ , kẻ tia  $Bx$  song song với  $AD$  và  $Bx$  cắt đường thẳng  $CA$  kéo dài tại  $I$ , kẻ tia  $Cy$  song song với  $AD$  và  $Cy$  cắt đường thẳng  $BA$  kéo dài tại  $F$ . Chứng minh rằng:  $\frac{1}{BE} + \frac{1}{CF} = \frac{1}{AD}$ .

**Bài toán 30.** Cho hình bình hành  $ABCD$ , một đường thẳng  $d$  đi qua  $A$  cắt các đường thẳng  $BD, BC$  và  $DC$  lần lượt tại  $M, E, F$ . Chứng minh:

a)  $MA^2 = ME \cdot MF$ .

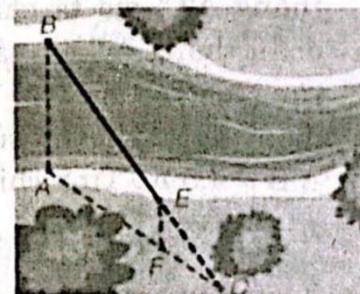
b)  $BE \cdot DF$  không đổi.

c)  $\frac{1}{AM} = \frac{1}{AE} + \frac{1}{AF}$

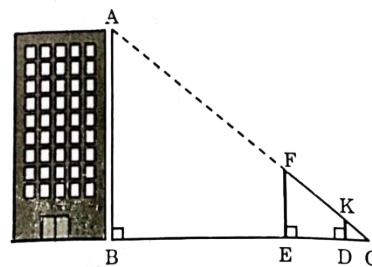
**Bài toán 31.** Cho tam giác  $ABC$ , trên các cạnh  $BC, CA$  và  $AB$  (hoặc phần kéo dài của chúng) lấy các điểm  $A_1, B_1$  và  $C_1$ . Chứng minh rằng các điểm  $A_1, B_1$  và  $C_1$  thẳng hàng khi và chỉ khi  $\frac{BA_1}{CA_1} \cdot \frac{CB_1}{AB_1} \cdot \frac{AC_1}{BC_1} = 1$  (định lí Mênêlai)

### III. Áp dụng vào thực tế

**Bài toán 32.** Để đo khoảng cách giữa hai vị trí  $B$  và  $E$  ở hai bên bờ sông, bác An chọn ba vị trí  $A, F, C$  cùng nằm ở một bên bờ sông sao cho ba điểm  $C, E, B$  thẳng hàng, ba điểm  $C, F, A$  thẳng hàng và  $AB \parallel EF$  (hình vẽ). Sau đó bác An đo được  $AF = 40m$ ,  $FC = 20m$ ,  $EC = 30m$ . Hỏi khoảng cách giữa hai vị trí  $B$  và  $E$  bằng bao nhiêu?



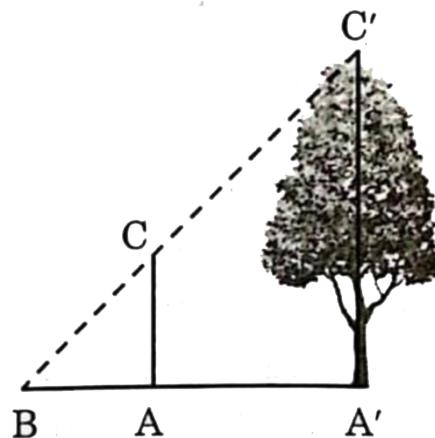
**Bài toán 33.** Đo chiều cao  $AB$  của một tòa nhà bằng hai cây cọc  $FE, DK$ , một sợi dây và một thước cuộn như sau:



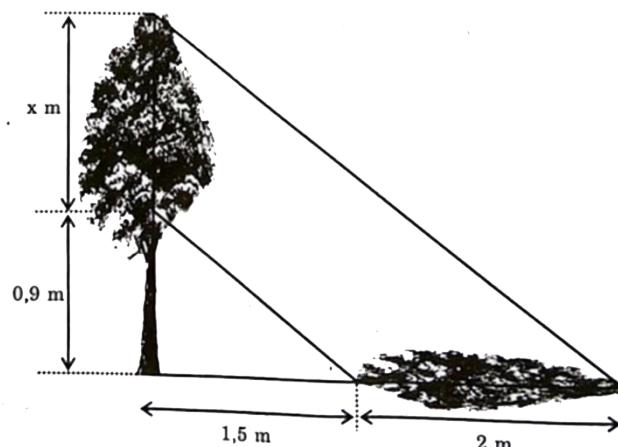
- Đặt cọc  $FE$  cố định, di chuyển cọc  $DK$  sao cho nhìn thấy  $K, F, A$  thẳng hàng.
- Căng thẳng dây  $FC$  đi qua  $K$  và cắt mặt đất tại  $C$ .
- Đo khoảng cách  $BC$  và  $DC$  trên mặt đất.

Cho biết  $DK = 1m$ ,  $BC = 24m$ ,  $DC = 1,2m$ . Tính chiều cao  $AB$  của tòa nhà.

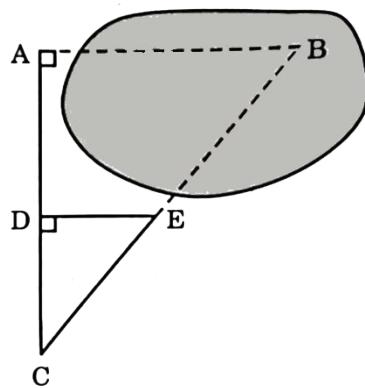
**Bài toán 34.** Cho hình vẽ sau, biết độ dài đoạn thẳng  $A'C'$  mô tả chiều cao của một cái cây, đoạn thẳng  $AC$  mô tả một cái cọc (cây và cọc cùng vuông góc với đường thẳng đi qua ba điểm  $A', A, B$ ). Giả sử  $AC = 2m$ ,  $AB = 1,5m$ ,  $A'B = 4,5m$ . Tính chiều cao của cây.



**Bài toán 35.** Người ta đo bóng của một cái cây và được các số đo ở hình dưới đây. Giả sử rằng các tia nắng song song với nhau, hãy tính độ cao của cây.



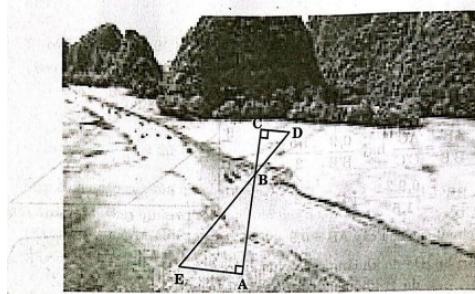
**Bài toán 36.** Để đo khoảng cách giữa vị trí  $A$  và  $B$  trong đó  $B$  không tới được, người ta tiến hành chọn các vị trí  $C, D, E$  như ở hình và đo được  $AC = 50m$ ,  $CD = 20m$ ,  $DE = 18m$ . Hỏi khoảng cách giữa hai vị trí  $A$  và  $B$  là bao nhiêu?



**Bài toán 37.** Anh Thiện và chị Lương đứng ở hai phía bờ sông và muốn ước lượng khoảng cách giữa hai vị trí  $A, B$  ở hai bên bờ sông (hình vẽ dưới đây).

- Anh Thiện chọn vị trí  $C$  ở trên bờ sông sao cho  $A, B, C$  thẳng hàng và đo được  $BC = 4m$ .
- Tiếp theo, anh Thiện xác định vị trí  $D$ , chị Lương xác định vị trí  $E$  sao cho  $D, B, E$  thẳng hàng, đồng thời  $\widehat{BAE} = \widehat{BCD} = 90^\circ$ ;
- Anh Thiện đo được  $CD = 2m$ , chị Lương đo được  $AE = 12m$ .

Hãy tính khoảng cách giữa hai vị trí  $A$  và  $B$ .



(Ảnh: Vietnam Stock Images)

### C. BÀI TẬP

- 4.1. Cho tam giác  $ABC$ , trên  $AC$  lấy điểm  $M$  sao cho  $AM = \frac{2}{5}AC$ , trên  $BC$  lấy điểm  $K$  sao cho  $BK = \frac{1}{3}BC$ . Đoạn thẳng  $BM$  chia đoạn thẳng  $AK$  theo tỉ số nào?
  - 4.2. Qua điểm  $P$  tùy ý trên cạnh  $AC$  của tam giác  $ABC$ , dựng các đường thẳng song song với các trung tuyến  $AK$  và  $CL$ , cắt các cạnh  $BC$  và  $AB$  tương ứng tại các điểm  $E$  và  $F$ . Chứng minh rằng các trung tuyến  $AK$  và  $CL$  chia đoạn thẳng  $EF$  thành ba phần bằng nhau.
  - 4.3. Cho hình thang cân  $ABCD$  ( $AB \parallel CD$ ). Gọi  $O$  là giao điểm hai đường chéo  $AC$  và  $BD$  và  $M, N$  theo thứ tự là trung điểm của  $BD$  và  $AC$ . Biết  $MD = 3MO$  và đáy lớn  $CD = 6cm$ . Tính độ dài đoạn thẳng  $MN$  và đáy nhỏ  $AB$ .
  - 4.4. Cho hình chữ nhật  $ABCD$ ,  $M, N$  lần lượt là trung điểm của  $AD$  và  $BC$ . Trên tia đối  $DC$  lấy một điểm  $P$ . Gọi  $Q$  là giao điểm của  $PM$  với đường chéo  $AC$ . Chứng minh rằng:
- $\widehat{QNM} = \widehat{MNP}$ .

## DÁP ÁN THAM KHẢO

### B. PHÂN LOẠI CÁC BÀI TẬP

#### I. Nhận biết tứ giác – Tứ giác lồi – Các yếu tố trong tứ giác

**Bài toán 1:** Tính tỉ số của hai đoạn thẳng  $AB$  và  $CD$  trong các trường hợp sau:

a)  $AB = 6\text{cm}, CD = 12\text{cm};$

b)  $AB = 150\text{cm}, CD = 2\text{m};$

c)  $AB = 6\text{cm}, CD = 8\text{cm};$

d)  $AB = 1,2\text{m}, CD = 42\text{cm}.$

*Hướng dẫn:*

– Để tính tỉ số của hai đoạn thẳng, phải đưa chúng về một đơn vị đo.

– Tỉ số của hai đoạn thẳng không phụ thuộc vào đơn vị đo độ dài đoạn thẳng.

#### Lời giải

a) Ta có:  $\frac{AB}{CD} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$

b) Ta có  $CD = 2\text{m} = 200\text{cm}$  nên  $\frac{AB}{CD} = \frac{150}{200} = \frac{3}{4}$ .

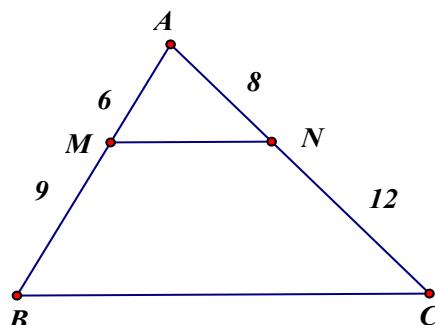
c) Ta có  $\frac{AB}{CD} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$

d) Ta có  $AB = 1,2\text{m} = 120\text{cm}$  nên  $\frac{AB}{CD} = \frac{120}{42} = \frac{20}{7}$ .

**Bài toán 2:** Trong hình vẽ, hai đoạn thẳng  $AM$  và  $MB$  có tỉ lệ với đoạn thẳng  $AN$  và  $CN$  hay không?

Vì sao?

#### Lời giải



Ta có  $\frac{AM}{MB} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$ ;  $\frac{AN}{NC} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$

suy ra  $\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC}$  (bc)

Vậy hai đoạn thẳng  $AM$  và  $MB$  tỉ lệ với đoạn thẳng  $AN$  và  $CN$ .

**Bài toán 3:** Cho đoạn thẳng  $AB$ ,  $M$  là điểm nằm trên đoạn thẳng  $AB$  sao cho  $\frac{MA}{MB} = \frac{7}{4}$ . Tính các tỉ số

$$\frac{MA}{AB} \text{ và } \frac{AB}{MB}.$$

#### Lời giải



Ta có  $\frac{MA}{MB} = \frac{7}{4} \Rightarrow \frac{MA}{7} = \frac{MB}{4} = \frac{MA+MB}{7+4} = \frac{AB}{11}$

$$\Rightarrow \frac{MA}{AB} = \frac{7}{11} \Rightarrow \frac{AB}{MB} = \frac{11}{4}$$

Cách khác:  $\frac{MA}{MB} = \frac{7}{4} \Rightarrow \frac{MA}{MA+MB} = \frac{7}{7+4} \Rightarrow \frac{MA}{AB} = \frac{7}{11}$

$$*\frac{MA}{MB} = \frac{7}{4} \Rightarrow \frac{MA}{7} = \frac{MB}{4} \Rightarrow \frac{MA+MB}{7+4} = \frac{AB}{11} \Rightarrow \frac{AB}{MB} = \frac{11}{4}$$

**Bài toán 4:** Cho đoạn thẳng  $AB = 10\text{cm}$ ,  $M$  là điểm nằm trên đoạn thẳng  $AB$  sao cho  $\frac{MA}{MB} = \frac{2}{3}$ . Tính độ dài  $AM$  và  $MB$

### Lời giải



$$\text{Ta có: } \frac{MA}{MB} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{MA}{2} = \frac{MB}{3} = \frac{MA+MB}{2+3} = \frac{AB}{5} = 2$$

$$\Rightarrow MA = 4\text{cm}; MB = 6\text{cm}$$

$$\text{Cách khác: } \frac{MA}{MB} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{MA+MB}{MB} = \frac{2+3}{3} = \frac{5}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{AB}{MB} = \frac{5}{3}$$

$$\Rightarrow MB = \frac{AB \cdot 3}{5} = 6\text{cm}$$

$$\Rightarrow MA = 10 - 6 = 4\text{cm}$$

**Bài toán 5:** Cho đoạn thẳng  $AB = 6\text{cm}$ . Một điểm  $C$  ở trong đoạn  $AB$  mà  $CA = 3,6\text{cm}$ . Trên đường

$AB$  thẳng vẽ phía  $B$  một điểm  $D$  sao cho  $\frac{DA}{DB} = \frac{CA}{CB}$ . Tính độ dài đoạn thẳng  $DB$ ?

### Lời giải



$$\text{Ta có: } CB = AB - AC = 6 - 3,6 = 2,4\text{cm}$$

$$DA = AB + BD = 6 + DB$$

$$\text{Từ giả thiết: } \frac{DA}{DB} = \frac{CA}{CB} = \frac{3,6}{2,4} = \frac{3}{2}$$

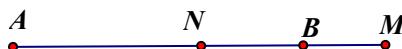
$$\text{Thay } DA = 6 + DB \text{ ta có } \frac{6+DB}{DB} = \frac{3}{2} \Rightarrow 2(6+DB) = 3BD$$

$$\Rightarrow 12 + 2DB = 3DB \Rightarrow DB = 12\text{cm}$$

**Bài toán 6:** Cho bốn điểm  $A, N, B, M$  theo thứ tự đó cùng nằm trên một đường thẳng sao

cho  $\frac{MA}{MB} = \frac{NA}{NB} = \frac{3}{2}$ . Tính  $NA, NB, MA, MB$  biết rằng  $AB = 6\text{cm}$ .

### Lời giải



$$\text{Ta có } \frac{NA}{NB} = \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{NA}{3} = \frac{NB}{2} = \frac{NA+NB}{3+2} = \frac{AB}{5} = \frac{6}{5}$$

$$\Rightarrow NA = \frac{3 \cdot 6}{5} = \frac{18}{5}\text{cm}; NB = \frac{2 \cdot 6}{5} = \frac{12}{5}\text{cm}.$$

$$\text{Lại có } \frac{MA}{MB} = \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{MA}{3} = \frac{MB}{2} = \frac{MA-MB}{3-2} = \frac{AB}{1} = 6$$

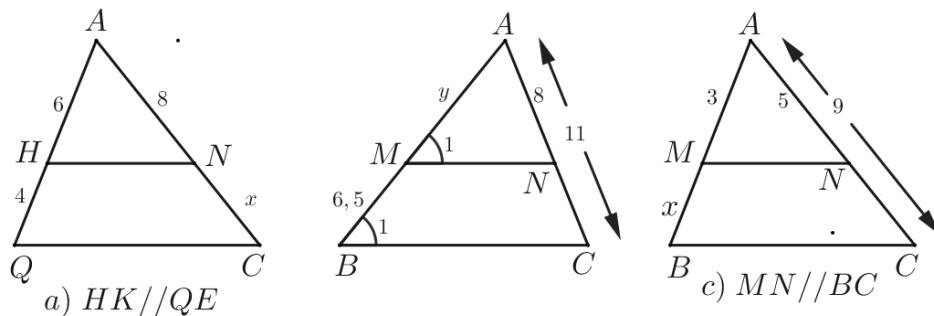
$$\Rightarrow MA = 6 \cdot 3 = 18\text{cm}; MB = 6 \cdot 2 = 12\text{cm}.$$

**Bài toán 7:** Cho ba đoạn thẳng  $AB; CD; EF$  sao cho  $\frac{AB}{CD} = \frac{2}{3}$  và  $\frac{CD}{EF} = \frac{4}{5}$ . Hãy tính độ dài  $AB; CD; EF$  biết rằng:  $AB + CD + EF = 70\text{cm}$ .

**Lời giải**

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \frac{AB}{CD} = \frac{2}{3} &\Rightarrow \frac{AB}{2} = \frac{CD}{3} \text{ và } \frac{CD}{EF} = \frac{4}{5} \Rightarrow \frac{CD}{4} = \frac{EF}{5} \\ \Rightarrow \frac{AB}{8} = \frac{CD}{12} = \frac{EF}{15} &= \frac{AB+CD+EF}{8+12+15} = \frac{70}{35} = 2 \\ \Rightarrow \begin{cases} AB = 2.8 = 16\text{cm} \\ CD = 2.12 = 24\text{cm} \\ EF = 2.15 = 30\text{cm} \end{cases} \end{aligned}$$

**Bài toán 8.** Tìm độ dài  $x, y$  trong các hình vẽ sau (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ nhất)



**Lời giải**

a) Ta có:  $HK // QE$  (gt). Theo định lí Thales, ta có:

$$\frac{PH}{HQ} = \frac{PK}{KE} \text{ hay } \frac{6}{4} = \frac{8}{x} \Rightarrow x = \frac{8 \cdot 4}{6} \approx 5,3$$

b) Có  $\widehat{M_1} = \widehat{B_1} \Rightarrow MN // BC$  (cặp góc đồng vị bằng nhau).

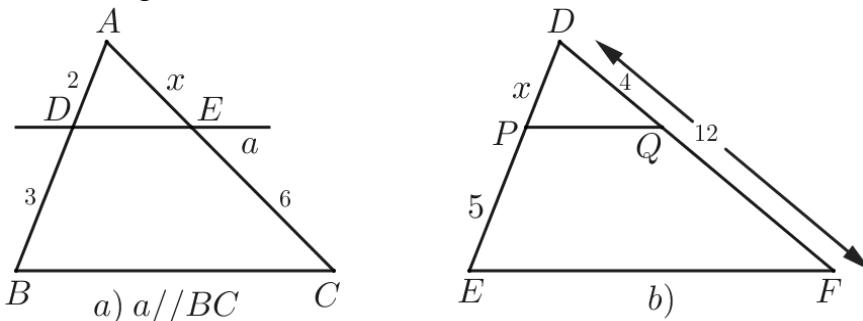
$$\text{Theo định lí Thales, ta có: } \frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC} \text{ hay } \frac{y}{6,5} = \frac{8}{NC}$$

$$\text{Ta có } NC = AC - AN = 11 - 8 = 3 \Rightarrow \frac{y}{6,5} = \frac{8}{3} \Rightarrow y = \frac{8 \cdot 6,5}{3} \approx 17,3$$

$$\text{c) Ta có } MN // BC \text{ (gt). Theo định lí Thales, ta có: } \frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC} \text{ hay } \frac{3}{x} = \frac{5}{NC}$$

$$\text{Mà } NC = AC - AN = 9 - 5 = 4 \Rightarrow \frac{3}{x} = \frac{5}{4} \Rightarrow x = \frac{3 \cdot 4}{5} \approx 2,4$$

**Bài toán 9.** Tính các độ dài  $x$  trong Hình a, Hình b sau; biết:



**Lời giải**

Với Hình a, ta có:  $a // BC$

$$\Rightarrow \frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC} \text{ (theo định lí Thales)}$$

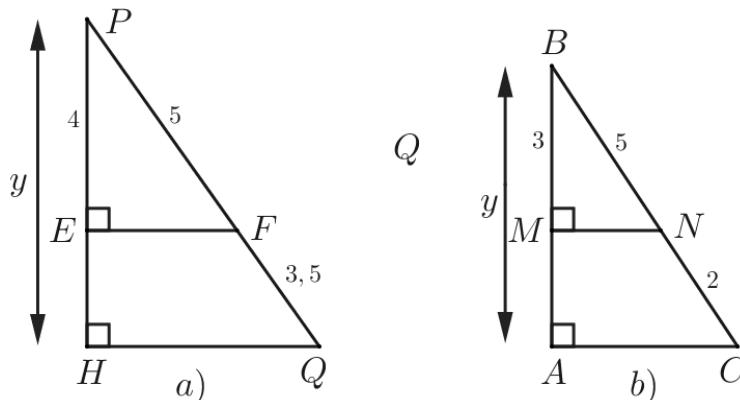
$$\text{Hay } \frac{2}{3} = \frac{x}{6} \Rightarrow x = \frac{2.6}{4} = 4$$

Với Hình b, ta có:  $QF = DF - DQ = 12 - 4 = 8$

$PQ \parallel EF$  (gt)

$$\text{Theo định lí Thales: } \frac{x}{5} = \frac{4}{8} \Rightarrow x = \frac{4.5}{8} = 2,5$$

**Bài toán 10.** Tính độ dài  $y$  trong các Hình a, b sau:



### Lời giải

a) Ta có:  $EF \perp BH$  (gt),  $HQ \perp BH$  (gt)  $\Rightarrow EF \parallel HQ$

$$\text{Theo định lí Thales: } \frac{PE}{PH} = \frac{PF}{PQ} \text{ mà } PQ = PF + FQ = 5 + 3,5 = 8,5$$

$$\Rightarrow \frac{4}{y} = \frac{5}{8,5} \Rightarrow y = \frac{4.8,5}{5} \approx 6,8$$

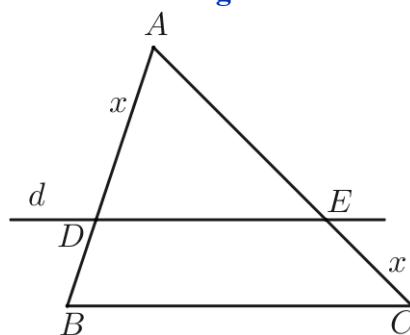
b) Ta có:  $MN \perp AB$  (gt);  $AC \perp AB$  (gt)  $\Rightarrow MN \parallel AC$

$$\frac{BM}{BA} = \frac{BN}{BC} \text{ (theo định lí Thales)}$$

$$BC = BN + NC = 5 + 2 = 7 \text{ hay } \frac{3}{y} = \frac{5}{7} \Rightarrow y = \frac{3.7}{5} = \frac{21}{5} = 4,2$$

**Bài toán 11.** Cho tam giác  $ABC$ , một đường thẳng  $d$  song song với cạnh  $BC$  cắt  $AB$ ,  $AC$  lần lượt tại  $D$  và  $E$  biết  $AB = 6cm$ ,  $AC = 10cm$ . Hãy xác định vị trí điểm  $D$  trên  $AB$  sao cho  $AD = CE$ .

### Lời giải



Đặt  $AD = CE = x$

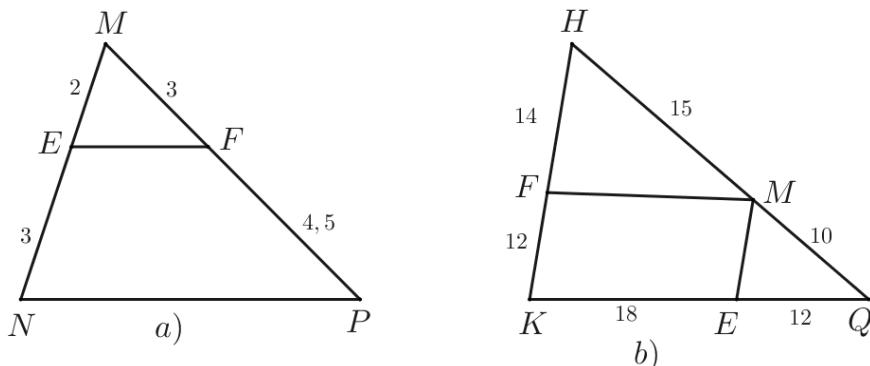
Ta có  $AE = 10 - x$

Vì  $d \parallel BC$  (gt)

$$\text{Theo định lí Thales: } \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$$

$$\begin{aligned} \text{Hay } \frac{x}{6} &= \frac{10-x}{10} \Rightarrow 10x = 6(10-x) \\ \Rightarrow 10x &= 60 - 6x \\ \Rightarrow 16x &= 60 \\ \Rightarrow x &= \frac{60}{16} = 3,75 \text{ (cm)} \end{aligned}$$

**Bài toán 12.** Tìm các cặp đường thẳng song song trong hình sau và giải thích vì sao chúng song song với nhau.



### Lời giải

Với Hình a.

$$\text{Ta có: } \frac{ME}{EN} = \frac{2}{3}; \frac{MF}{FP} = \frac{3}{4,5} \text{ mà } \frac{2}{3} = \frac{3}{4,5} \text{ hay } \frac{ME}{EN} = \frac{MF}{FP}$$

Theo định lí Thales đảo  $\Rightarrow EF // NP$

Với Hình b.

$$* \text{ Xét } \frac{HF}{FK} = \frac{14}{12} = \frac{7}{6}; \frac{HM}{MQ} = \frac{15}{10} = \frac{3}{2} \text{ vì } \frac{7}{6} \neq \frac{3}{2}$$

$\Rightarrow \frac{HF}{FK} \neq \frac{HM}{MQ}$  nên  $FM$  không song song với  $KQ$

$$* \text{ Xét } \frac{QM}{MH} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}; \frac{EQ}{EK} = \frac{12}{18} = \frac{2}{3} \text{ vì } \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{QM}{MH} = \frac{EQ}{EK}$$

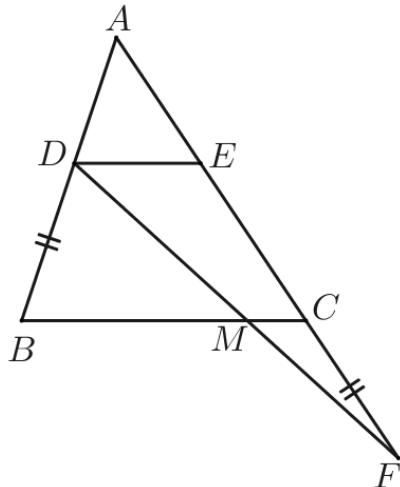
Theo định lí Thales đảo  $\Rightarrow ME // HK$

## II. Chứng minh

**Bài toán 13.** Cho tam giác  $ABC$  một đường thẳng song song với cạnh  $BC$  cắt  $AB$  tại  $D$  và  $AC$  tại  $E$ . Trên tia đối của tia  $CA$  lấy điểm  $F$  sao cho  $CF = BD$ . Gọi  $M$  là giao điểm của  $DF$  và  $BC$ .

Chứng minh rằng  $\frac{MD}{MF} = \frac{AC}{AB}$ .

### Lời giải



Ta có:  $DE \parallel BC$  (gt)

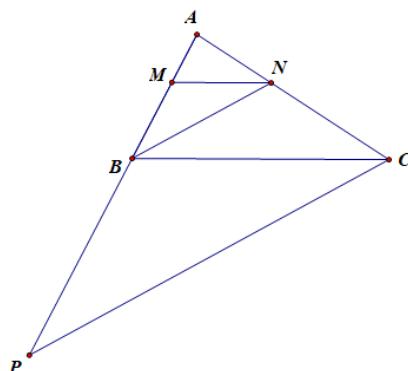
$$\text{Theo định lí Thales: } \frac{AC}{EC} = \frac{AB}{DB} \Rightarrow \frac{AC}{AB} = \frac{EC}{DB}$$

$$\text{Lại có: } \frac{MD}{MF} = \frac{EC}{CF} = \frac{EC}{DB} \text{ (vì } CF = BD \text{ )}$$

$$\Rightarrow \frac{MD}{MF} = \frac{AC}{AB} \text{ (đpcm)}$$

**Bài toán 14.** Cho tam giác  $ABC$ , một đường thẳng song song với  $BC$  cắt cạnh  $AB, AC$  lần lượt tại  $M$  và  $N$ . Qua  $C$  kẻ đường thẳng song song với  $BN$  cắt đường thẳng  $AB$  tại  $P$ . Chứng minh  $AB^2 = AM \cdot AP$

### Lời giải



Ta có  $MN \parallel BC$  (gt)

$$\text{Theo định lí Talet: } \frac{AB}{AM} = \frac{AC}{AN} \quad (1)$$

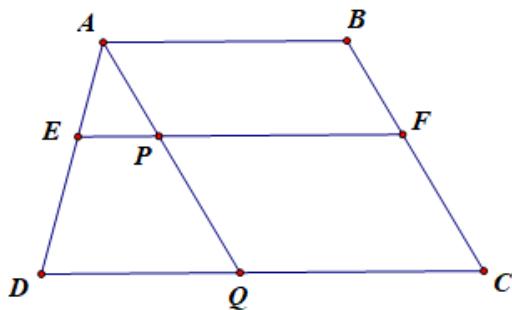
$$\text{Lại có } CP \parallel BN \text{ nên } \frac{AC}{AN} = \frac{AP}{AB} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2)} \Rightarrow \frac{AB}{AM} = \frac{AP}{AB}$$

$$\Rightarrow AB^2 = AM \cdot AP.$$

**Bài toán 15:** Cho hình thang  $ABCD$  ( $AB \parallel CD$ ), một đường thẳng song song với đáy cắt cạnh bên  $AD$ ,  $BC$  lần lượt tại  $E, F$ . Chứng minh rằng  $\frac{ED}{AD} = \frac{FC}{BC}$ .

### Lời giải



Qua  $A$  kẻ đường thẳng song song với  $BC$  cắt  $CD$  tại  $Q$ .

$P$  là giao của  $AQ$  và  $EF$ . Ta có  $EP \parallel DQ$

Xét  $\Delta DAQ$  theo định lí Talet  $\frac{ED}{AD} = \frac{PQ}{AQ}$

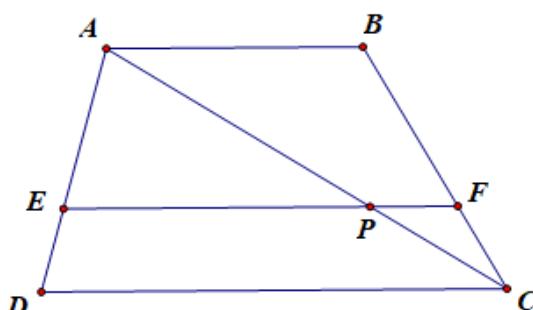
Dễ thấy các tứ giác  $ABCQ$ ,  $PQCF$  là các hình bình hành nên

$AQ = BC$  và  $PQ = CF$ .

$$\Rightarrow \frac{ED}{AD} = \frac{PQ}{AQ} = \frac{CF}{BC} \text{ (đpcm).}$$

**Cách khác:** Nối  $A$  với  $C$ .

Gọi  $P$  là giao điểm của  $AC$  với  $EF$ .



Xét  $\Delta ADC$  có  $EP \parallel DQ$  (gt)

Theo định lí Talet ta có  $\frac{ED}{AD} = \frac{PC}{AC}$ .

Tương tự với  $\Delta ABC$  có  $PF \parallel AB$ .

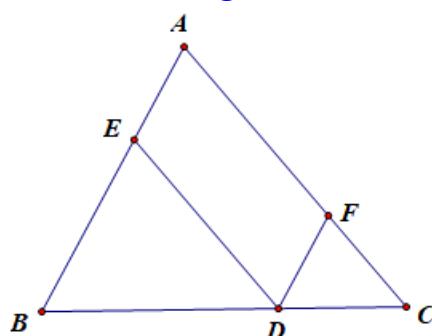
Ta có:  $\frac{PC}{AC} = \frac{CF}{BC}$ .

Do đó  $\frac{ED}{AD} = \frac{CF}{BC}$  (đpcm).

**Bài toán 16.** Cho  $\Delta ABC$ , từ điểm  $D$  trên cạnh  $BC$ , kẻ đường thẳng song song với  $AB$  cắt  $AC$  tại  $F$

và kẻ đường thẳng song song với  $AC$  cắt  $AB$  tại  $E$ . Chứng minh rằng  $\frac{AE}{AB} + \frac{AF}{AC} = 1$ .

### Lời giải



Ta có  $DE \parallel AC$  (gt). Theo định lí Talet:  $\frac{AE}{AB} = \frac{DC}{BC}$  (1)

Tương tự  $DF \parallel AB$ , ta có  $\frac{AF}{AC} = \frac{BD}{BC}$  (2)

Cộng (1) và (2) ta được:  $\frac{AE}{AB} + \frac{AF}{AC} = \frac{DC}{BC} + \frac{BD}{BC} = \frac{DC+BD}{BC} = \frac{BC}{BC} = 1$ .

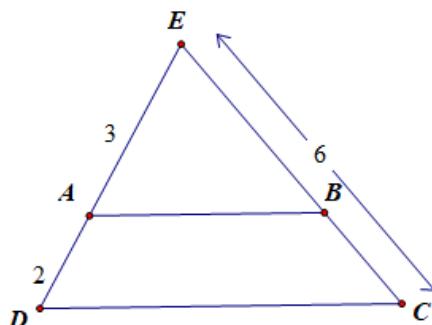
**Bài toán 17.** Cho hình thang  $ABCD$  ( $AB \parallel CD$ ) và  $AB < CD$ . Các cạnh bên  $AD$  và  $BC$  cắt nhau tại  $E$

a) Tính  $BC$  biết  $AE = 3$ ;  $AD = 2$ ;  $CE = 6$ .

b) Từ điểm  $M$  bát kì trên đáy  $CD$ , kẻ  $MC' \parallel DE$  và  $MD' \parallel CE$ .

Chứng minh rằng  $\frac{DE'}{ED} + \frac{EC'}{EC} = 1$ .

### Lời giải

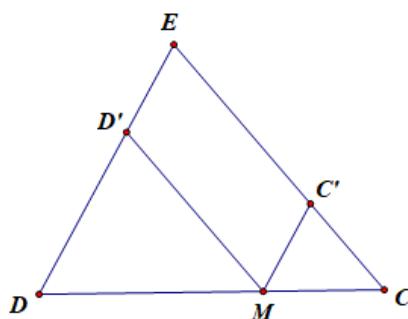


a) Ta có  $ABCD$  là hình thang (gt) và  $AB \parallel CD$

Theo định lí Talet  $\frac{AD}{ED} = \frac{BC}{EC}$  hay  $\frac{2}{5} = \frac{BC}{6}$

$$\Rightarrow BC = \frac{2 \cdot 6}{5} = 3,6.$$

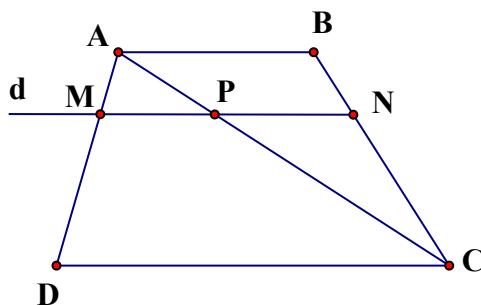
b) Chứng minh như bài toán 16.



**Bài toán 18.** Cho hình thang  $ABCD$  ( $AB \parallel CD$ ) và  $AB < CD$ . Đường thẳng d song song với hai đáy và cắt hai cạnh bên  $AD, BC$  của hình thang đó lần lượt tại  $M, N$ ; cắt đường chéo  $AC$  tại  $P$ .

Chứng minh rằng  $\frac{AM}{MD} = \frac{BN}{NC}$ .

### Lời giải



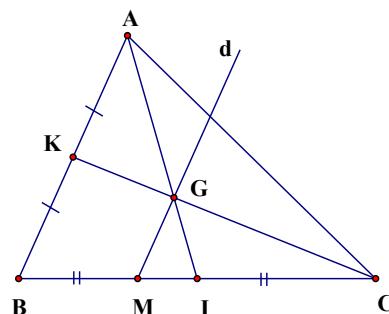
Xét  $\Delta ADC$  có  $MP \parallel DC$  (gt). Theo định lý Talet ta có:  $\frac{AM}{MD} = \frac{AP}{PC}$  (1)

Tương tự với  $\Delta ABC$  có  $PN \parallel AB$ . Theo định lý Talet ta có:  $\frac{AP}{PC} = \frac{BN}{NC}$  (2)

$$\text{Từ (1) và (2)} \Rightarrow \frac{AM}{MD} = \frac{BN}{NC}.$$

**Bài toán 19:** Cho  $\Delta ABC$  có trọng tâm  $G$ . Vẽ đường thẳng  $d$  đi qua  $G$  và song song với  $AB$ ,  $d$  cắt  $BC$  tại điểm  $M$ . Chứng minh rằng  $BM = \frac{1}{3}BC$ .

#### Lời giải



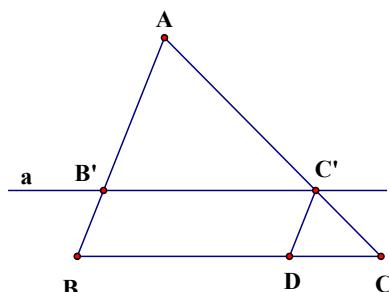
Gọi  $I$  là trung điểm của  $BC$ ,  $K$  là trung điểm của  $AB$  và  $G$  là giao điểm của  $AI$  và  $CK$ . Xét  $\Delta KBC$  có  $GM \parallel KB$  (gt).

Theo định lý Talet ta có:  $\frac{BM}{BC} = \frac{GK}{CK} = \frac{1}{3}$  (tính chất trọng tâm của tam giác)

$$\Rightarrow BM = \frac{1}{3}BC.$$

**Bài toán 20:** Chứng minh rằng: Một đường thẳng cắt hai cạnh của một tam giác và song song với cạnh thứ ba thì tạo ra một tam giác mới có ba cạnh tương ứng tỉ lệ với ba cạnh của tam giác đã cho.

#### Lời giải



Qua  $C$  kẻ đường thẳng song song với  $AB$  cắt  $BC$  tại  $D$ .

Dễ thấy tứ giác  $BB'C'D$  là hình bình hành (các cạnh đối song song)  $\Rightarrow BB' \parallel BD$

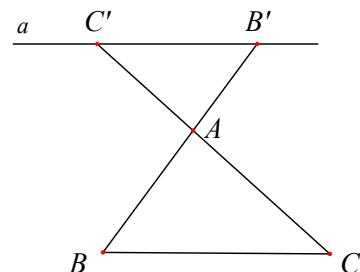
Ta có  $B'C' \parallel BC$  (gt). Theo định lý Talet ta có:  $\frac{AB'}{AB} = \frac{AC'}{AC}$

Lại có  $C'D \parallel AB$  (cách vẽ). Theo định lý Talet ta có  $\frac{A'C}{AC} = \frac{BD}{BC}$

Mà  $BD = BB'$  (cmt)  $\Rightarrow \frac{AB'}{AB} = \frac{AC'}{AC} = \frac{B'C'}{BC}$ .

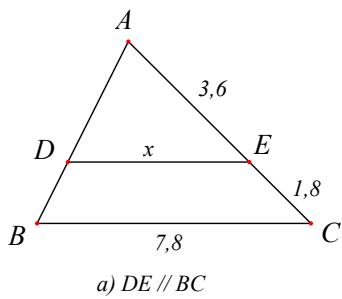
**Chú ý:** Kết luận của bài toán trên vẫn đúng trong trường hợp đường thẳng  $a$  song song với một cạnh của tam giác và cắt phần kéo dài của hai cạnh còn lại (hình vẽ bên).

$$C'B' \parallel BC \Rightarrow \frac{AB'}{AB} = \frac{AC'}{AC} = \frac{B'C'}{BC}$$

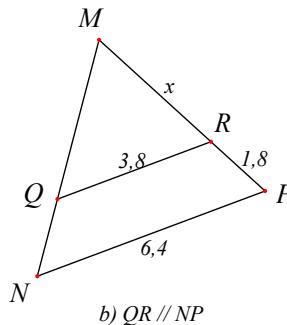


\*Sử dụng kết quả của Bài toán 20 để tính độ dài các đoạn thẳng

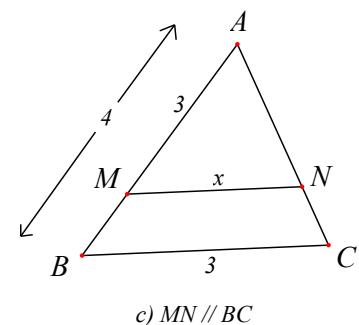
**20.1:** Tìm độ dài  $x$  trong các hình dưới đây



a)  $DE \parallel BC$



b)  $QR \parallel NP$



c)  $MN \parallel BC$

### Lời giải

**Hình a)**  $DE \parallel BC$  (gt). Theo định lý Talet ta có:  $\frac{DE}{BC} = \frac{AE}{AC}$

$$(AC = AE + EC = 3,6 + 1,8 = 5,4) \text{ hay } \frac{x}{7,8} = \frac{3,6}{5,4} \Rightarrow x = \frac{7,8 \cdot 3,6}{5,4} = 5,2$$

**Hình b)**  $QR \parallel NP$  (gt). Theo định lý Talet ta có:  $\frac{QR}{NP} = \frac{MR}{MP}$

$$(MB = MR + RP = x + 1,8) \text{ hay } \frac{3,8}{6,4} = \frac{x}{x + 1,8} \Leftrightarrow 3,8(x + 1,8) = 6,4x$$

$$\Leftrightarrow 3,8x + 6,84 = 6,4x$$

$$\Leftrightarrow 6,4x - 3,8x = 6,84$$

$$\Leftrightarrow 2,6x = 6,84$$

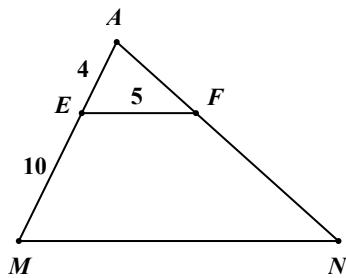
$$\Leftrightarrow x = 2,6.$$

**Hình c)**  $MN \parallel BC$ . Theo định lí Thalès, ta có:

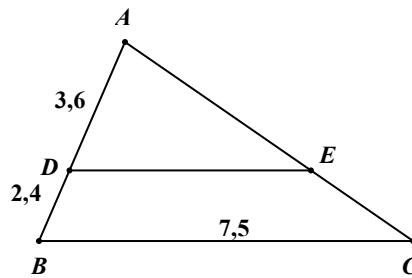
$$\frac{MN}{BC} = \frac{AM}{AB} \text{ hay } \frac{x}{3} = \frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow x = \frac{3 \cdot 3}{4} \Rightarrow x \approx 2,3.$$

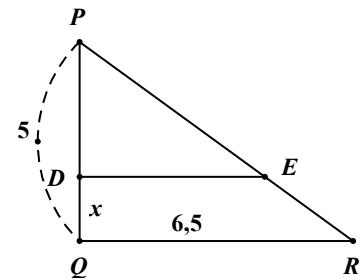
**20.2.** Tìm độ dài  $x$  trong các hình dưới đây.



a)  $MN \parallel EF$



b)  $DE \parallel BC$



c)  $DE \perp PQ$

### Lời giải

**Hình a)** Ta có  $MN \parallel EF$ . Theo định lí Thalès, ta có:  $\frac{MN}{EF} = \frac{DM}{DE}$

$$(DE = DM + ME = 4 + 10 = 14) \text{ hay } \frac{5}{x} = \frac{4}{14} \Rightarrow x = \frac{5 \cdot 14}{4} = 17,5$$

**Hình b)** Ta có  $DE \parallel BC$ . Theo định lí Thalès, ta có:  $\frac{DE}{BC} = \frac{AD}{AB}$

$$(AB = AD + BD = 3,6 + 2,4 = 6) \text{ hay } \frac{x}{7,5} = \frac{3,6}{6} \Rightarrow x = \frac{3,6 \cdot 7,5}{6} = 4,5$$

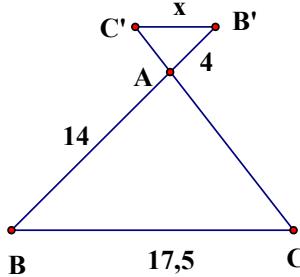
**Hình c)** Ta có:  $DE \perp PQ$ ;  $QR \perp PQ$

$\Rightarrow DE \parallel QR$  (hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với đường thứ ba thì chúng song song)

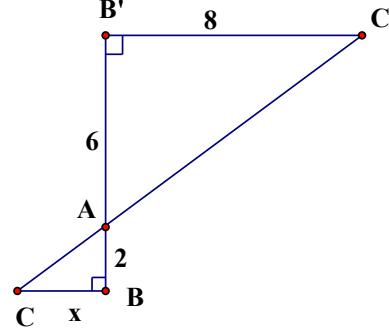
Theo định lí Thalès, ta có:  $\frac{PD}{PQ} = \frac{DE}{QR}$  hay  $\frac{PD}{5} = \frac{3,9}{6,5}$

$$\Rightarrow PD = \frac{5 \cdot 3,9}{6,5} = 3 \Rightarrow DQ = PQ - PD \text{ hay } x = 5 - 3 = 2.$$

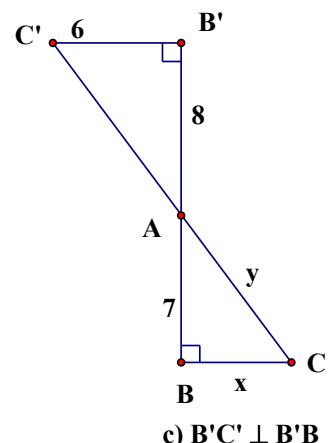
**20.3.** Tìm độ dài  $x, y$  trong các hình dưới đây. (Kết quả làm tròn đến phần thập phân thứ nhất).



a)  $C'B' \parallel CB$



b)  $B'C' \parallel BC$



c)  $B'C' \perp B'B$

### Lời giải

**Hình a)** Ta có  $C'B' \parallel CB$ . Theo định lí Thalès, ta có:  $\frac{C'B'}{CB} = \frac{AB'}{AB}$

$$\text{hay } \frac{x}{17,5} = \frac{4}{14} \Rightarrow x = \frac{4 \cdot 17,5}{14} = 5.$$

**Hình b)** Ta có  $B'C' \perp B'B$ ;  $BC \perp B'B$

$\Rightarrow B'C' \parallel BC$  (hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với đường thứ ba thì chúng song song)

Theo bài toán 20:  $\frac{B'C'}{BC} = \frac{AB'}{AB}$  hay  $\frac{8}{x} = \frac{6}{2} \Rightarrow x = \frac{8 \cdot 2}{6} \approx 2,7$ .

**Hình c)** Ta có  $B'C' \perp B'B$ ;  $BC \perp B'B$

$\Rightarrow C'B' \parallel BC$  (hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với đường thứ ba thì chúng song song)

Theo bài toán 20:  $\frac{B'C'}{BC} = \frac{AB'}{AB}$  hay  $\frac{6}{x} = \frac{8}{7} \Rightarrow x = \frac{6 \cdot 7}{8} \approx 5,25$ .

Xét  $\Delta AB'C$  vuông tại  $B'$  (gt).

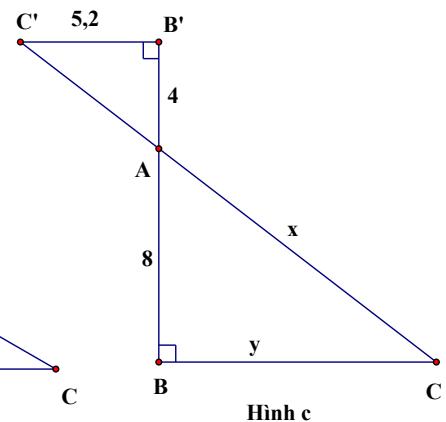
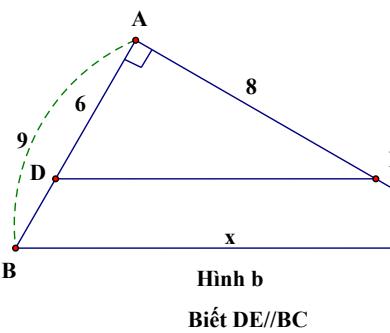
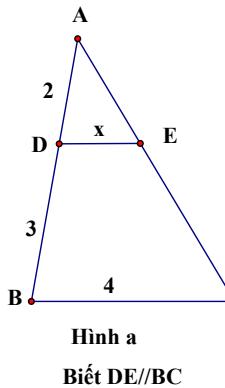
Theo bài tập 2.11. trang 32, Toán 7, tập một

Ta có  $AC'^2 = AB'^2 + B'C'^2 = 8^2 + 6^2 = 100 \Rightarrow AC = 10$

Theo bài toán 20:  $B'C' \parallel BC$ , ta có  $\frac{B'C'}{BC} = \frac{AB'}{AB}$  hay  $\frac{6}{5,25} = \frac{10}{y}$

$$\Rightarrow y = \frac{5,25 \cdot 10}{6} = 8,8.$$

**20.4.** Tìm độ dài  $x; y$  trong các hình dưới đây.



### Lời giải

**Hình a)** Ta có:  $DE \parallel BC$  (gt)

Theo định lí Thalès:  $\frac{DE}{BC} = \frac{AD}{AB}$

Mà:  $AB = AD + DB = 2 + 3 = 5$

Hay:  $\frac{x}{4} = \frac{2}{5}$

$$\Rightarrow x = \frac{4 \cdot 2}{5} = 1,6.$$

**Hình b)** Ta có:  $\Delta DAE$  vuông tại  $A$

Theo bài tập 2.11. trang 32, Toán 7, tập một

$$DE^2 = AD^2 + AE^2 = 6^2 + 8^2 = 100$$

$$\Rightarrow DE = 10$$

$DE \parallel BC$  (gt)

Theo định lí Thalès:

$$\frac{DE}{BC} = \frac{AD}{AB} \text{ hay } \frac{10}{x} = \frac{6}{9}$$

$$\Rightarrow x = \frac{10 \cdot 9}{6} = 15$$

**Hình c)** Đề thấy  $B'C' \parallel BC (\perp BB')$

Theo định lí Thalès

$$\frac{AB'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} \text{ hay } \frac{4}{8} = \frac{5,2}{y} \Rightarrow y = \frac{8 \cdot 5,2}{4} = 10,4.$$

Xét  $\Delta ABC$  vuông tại  $B$  (gt).

Theo bài tập 2.11. trang 32, Toán 7, tập một

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 \text{ hay } x^2 = 8^2 + (10,4)^2 = 172,16 \Rightarrow x \approx 13,1.$$

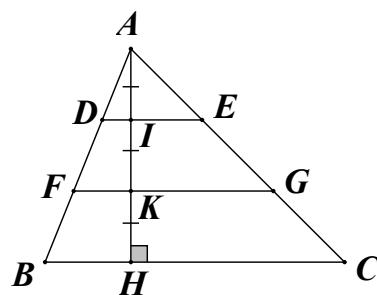
**20.5.**

Cho tam giác  $ABC$ , đường cao  $AH$ . Trên  $AH$  lấy các điểm  $I, K$  sao cho  $AI = IK = KH$ .

Qua  $I$  và  $K$  vẽ các đường thẳng song song với  $BC$  cắt  $AB$ ,  $AC$  lần lượt tại  $D, E$  và  $F, G$ .

Tính độ dài các đoạn thẳng  $DE$  và  $FG$  biết  $BC = 15\text{cm}$ . Tính diện tích tứ giác  $DEGF$  biết diện tích của tam giác  $ABC$  là  $270\text{cm}^2$ .

### Lời giải



Ta có:  $DE \parallel BC$

Theo định lí Thalès, ta có:  $\frac{DE}{BC} = \frac{AD}{AB}$

Lại có:  $DI \parallel BH$  nên  $\frac{AD}{AB} = \frac{AI}{AH} = \frac{1}{3}$

$$\Rightarrow \frac{DE}{BC} = \frac{1}{3} \text{ hay } DE = \frac{BC}{3} = \frac{15}{3} = 5(\text{cm})$$

Chứng minh tương tự:

$$\frac{FG}{BC} = \frac{AF}{AB} = \frac{AK}{AH} = \frac{2}{3} \Rightarrow FG = \frac{2BC}{3} = \frac{30}{3} = 10(\text{cm})$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}BC \cdot AH \Rightarrow AH = \frac{2S_{ABC}}{BC} = \frac{2 \cdot 270}{15} = 36(\text{cm})$$

$$\Rightarrow IK = \frac{1}{3}AH = \frac{1}{3} \cdot 36 = 12(\text{cm})$$

$$\text{Vậy } S_{DEGF} = \frac{(DE + GF) \cdot IK}{2} = \frac{(5+10)12}{2} = 90(\text{cm}^2).$$

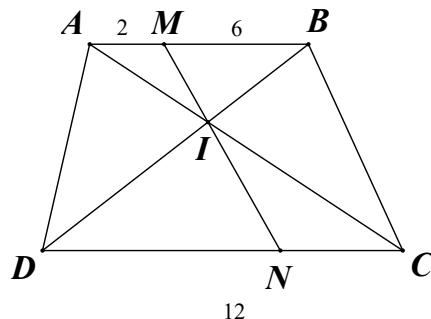
**20.6.**

Cho hình thang  $ABCD$  ( $AB \parallel CD$ ) gọi  $I$  là giao điểm của hai đường chéo  $AC$  và  $BD$ . Một điểm  $M$  trên đáy  $AB$  và  $MA = 2\text{cm}, MB = 6\text{cm}$ . Cạnh đáy  $CD = 12\text{cm}$ . Đường thẳng  $IM$  cắt đáy  $CD$  tại  $N$ .

a) Tính tỉ số  $\frac{NC}{ND}$ .

b) Tính độ dài đoạn thẳng  $NC$  và  $ND$ .

### Lời giải



a) Ta có:  $AB \parallel CD$  (gt)

$$\text{Theo định lí Thalès: } \frac{NC}{MA} = \frac{IN}{IM} = \frac{ND}{MB}$$

$$\Rightarrow \frac{NC}{ND} = \frac{MA}{MB} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

b) Ta có:  $\frac{NC}{ND} = \frac{1}{3}$ ,

$$\Rightarrow \frac{NC}{1} = \frac{ND}{3} = \frac{NC+ND}{1+3} = \frac{DC}{4} = \frac{12}{4} = 3$$

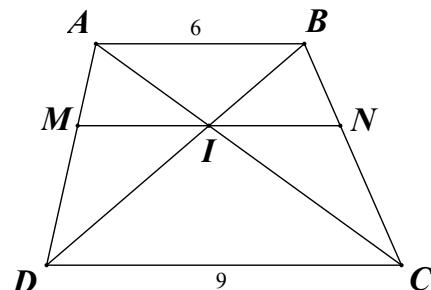
$$\Rightarrow NC = 3; ND = 9.$$

**20.7.** Cho hình thang  $ABCD$  ( $AB \parallel CD$ ) có  $AB = 6\text{cm}; CD = 9\text{cm}$ . Gọi  $I$  là giao điểm của  $AC$  và  $BD$ .

a) Tính các tỉ số  $\frac{IA}{IC}$ ;  $\frac{IB}{ID}$  và  $\frac{AI}{AC}$ ;  $\frac{BI}{BD}$ .

b) Từ  $I$  vẽ đường thẳng song song với cạnh  $AB$ , lần lượt cắt  $AD$  và  $BC$  tại  $M$  và  $N$ .  
Chứng minh rằng:  $MI = NI$ .

### Lời giải



a) Ta có:  $AB \parallel CD$  (gt)

$$\text{Theo định lí Thalès: } \frac{IA}{IC} = \frac{AB}{DC} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

Tương tự  $\frac{IB}{ID} = \frac{2}{3}$

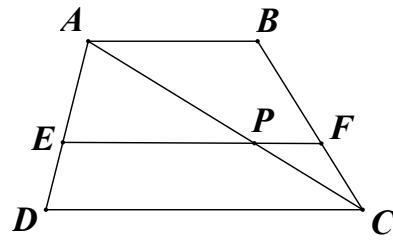
Từ  $\frac{IA}{IC} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{IA}{IA+IC} = \frac{2}{2+3} = \frac{2}{5}$  hay  $\frac{IA}{AC} = \frac{2}{5}$

Tương tự  $\frac{BI}{BD} = \frac{2}{5}$ .

Để chứng minh câu b), ta sẽ đưa đến bài toán phụ sau:

Cho hình thang  $ABCD$  ( $AB \parallel CD$ ), một đường thẳng song song với đáy cắt cạnh bên  $AD, BC$  lần lượt ở  $E$  và  $F$ . Chứng minh rằng  $\frac{ED}{AD} = \frac{FC}{BC}$ .

Lời giải bài toán phụ



Nối A với C.

Gọi P là giao điểm của AC với EF.

Xét  $\Delta ADC$  có:  $EP \parallel DC$  (gt)

Theo định lí Thalès:  $\frac{ED}{AD} = \frac{PC}{AC}$ .

Tương tự với  $\Delta ABC$  có:  $PF \parallel AB$ .

Ta có:  $\frac{PC}{AC} = \frac{CF}{BC}$ .

Do đó  $\frac{ED}{AD} = \frac{CF}{BC}$  (đpcm).

b) (Xem hình vẽ câu a)

Ta có  $MN \parallel AB$  và  $CD$

Xét  $\Delta ADC$ , theo định lí Thalès:  $\frac{MI}{DC} = \frac{AM}{AD}$  (1)

Theo bài toán phụ (trên), ta có:  $\frac{AM}{AD} = \frac{BN}{BC}$  (2)

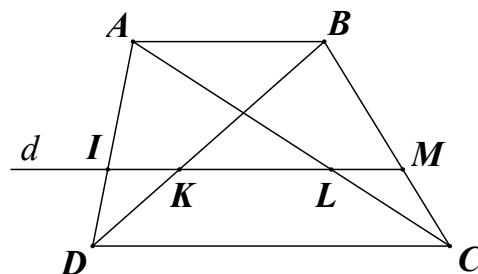
Xét  $\Delta BDC$  có  $IN \parallel CD$  (gt).

Theo bài toán 20,  $\frac{IN}{DC} = \frac{BN}{BC}$  (3)

Từ (1), (2), (3)  $\Rightarrow \frac{MI}{DC} = \frac{NI}{DC} \Rightarrow MI = NI$  (đpcm)

**Bài toán 21.** Cho hình thang ABCD, đường thẳng  $d$  song song với đáy cắt cạnh bên  $AD$  ở  $I$ . Cắt đường chéo  $BD$  và  $AC$  lần lượt ở  $K$  và  $L$ , cắt cạnh bên  $BC$  ở  $M$ . Chứng minh rằng  $IK = LM$ .

Lời giải



Xét  $\Delta ADB$  có  $IK \parallel AB$ .

Theo định lí Thalès:  $\frac{IK}{AB} = \frac{DI}{DA}$

Chứng minh tương tự với  $\Delta ACB$  ta cũng có:  $\frac{LM}{AB} = \frac{CM}{CB}$

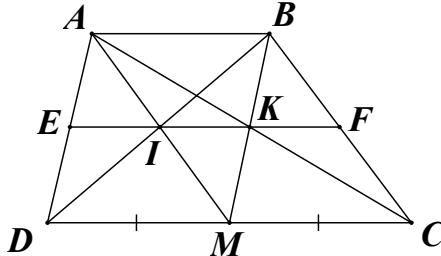
mà  $\frac{DI}{DA} = \frac{CM}{CB} \Rightarrow \frac{IK}{AB} = \frac{LM}{AB} \Rightarrow IK = LM$

**Nhận xét:** Trường hợp đường thẳng  $d$  đi qua giao điểm  $O$  của hai đường chéo  $AC$  và  $BD$ . Và cắt  $AD, BC$  tại  $MN$  tương ứng ta đã chứng minh được  $OM = ON$  (Bài toán 4 phần I) chúng ta đi đến bài toán khó hơn sau đây.

**Bài toán 22.** Cho hình thang  $ABCD$  ( $AB \parallel CD$ ).  $M$  là trung điểm của  $CD$ . Gọi  $I$  là giao điểm của  $AM$  và  $BD$  và  $K$  là giao điểm của  $BM$  và  $AC$ .

- Chứng minh rằng  $IK \parallel AB$ .
- Đường thẳng  $IK$  cắt  $AD$  và  $BC$  theo thứ tự tại  $E$  và  $F$ . Chứng minh  $EI = IK = KF$ .

**Lời giải**



a) Ta có:  $AB \parallel CD$  (gt)

$$\text{Theo định lí Thalès: } \frac{AM}{IA} = \frac{DM}{AB} \quad (1)$$

$$\text{Tương tự, } \frac{KM}{KB} = \frac{CM}{AB} \quad (2)$$

$$\text{mà } DM = CM \text{ (gt)} \Rightarrow \frac{IM}{IA} = \frac{KM}{KB}$$

Do đó theo định lí Thalès đảo:  $IK \parallel AB$ .

b) Theo bài toán 21 ta đã chứng minh được:  $EI = KF \quad (3)$

Khi  $IK \parallel AB$  (cmt) ta sẽ chứng minh:  $IK = KF$

Ta có:  $IK \parallel AB$  (cmt)

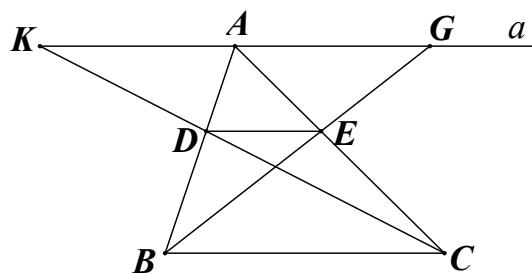
$$\text{Theo định lí Thalès: } \frac{IK}{DM} = \frac{BK}{BM} = \frac{KF}{MC}$$

$$\text{mà } MD = MC \text{ (gt)} \Rightarrow IK = KF \quad (4)$$

Từ (3), (4)  $\Rightarrow EI = IK = KF$ .

**Bài toán 23.** Cho tam giác  $ABC$ , một đường thẳng song song với  $BC$  cắt các cạnh  $AB$  và  $AC$  lần lượt tại  $D$  và  $E$ . Vẽ đường thẳng  $a$  qua  $A$  và song song với  $BC$ , đường thẳng  $a$  cắt các đường thẳng  $BE$  và  $CD$  lần lượt tại  $G$  và  $K$ . Chứng minh rằng:  $A$  là trung điểm của  $KG$ .

**Lời giải**



Ta có:  $a \parallel BC$  (gt)

$$\text{Theo định lí Thalès: } \frac{KA}{BC} = \frac{DA}{DB} \quad (1)$$

Lại có:  $DE \parallel BC$

Theo định lí Thalès:  $\frac{DA}{DB} = \frac{EA}{EC}$  (2)

Theo định lí Thalès:  $\frac{EA}{EC} = \frac{AG}{BC}$  (3)

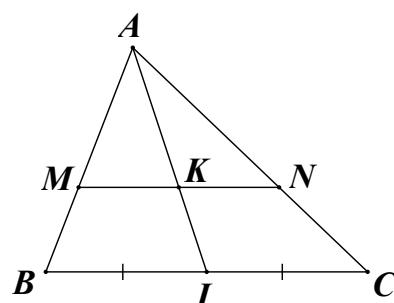
$$\text{Từ (1), (2), (3)} \Rightarrow \frac{KA}{BC} = \frac{AG}{BC}$$

$\Rightarrow KA = AG$  hay  $A$  là trung điểm của  $KG$ .

**Bài toán 24.** Trên các cạnh  $AB, AC$  của tam giác  $ABC$  lần lượt lấy hai điểm  $M, N$  sao cho  $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$ .

Gọi  $I$  là trung điểm cạnh  $BC$  và  $K$  là giao điểm của đường thẳng  $AI$  với đường thẳng  $MN$ .  
Chứng minh rằng  $K$  là trung điểm của đoạn thẳng  $MN$ .

### Lời giải



Ta có:  $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$  (gt)

$\Rightarrow MN \parallel BC$  (định lí Thalès đảo)

Xét  $\Delta ABI$  có:  $MK \parallel BI$  (cmt)

Theo định lí Thalès:  $\frac{MK}{BI} = \frac{AK}{AI}$  (1)

Tương tự với  $\Delta ACI$ :  $\frac{NK}{CI} = \frac{AK}{AI}$  (2)

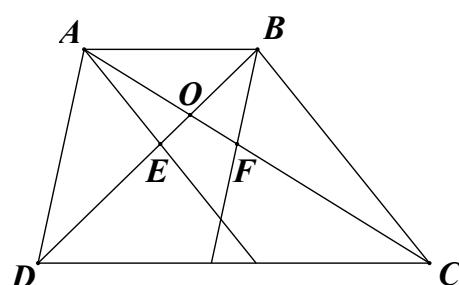
Từ (1) và (2)  $\Rightarrow \frac{MK}{BI} = \frac{NK}{CI}$

mà  $BI = CI$  (gt)

$\Rightarrow MK = NK$  hay  $K$  là trung điểm của đoạn thẳng  $MN$ .

**Bài toán 25.** Cho hình thang  $ABCD$  đáy lớn là  $CD$ , đường thẳng kẽ từ  $A$  song song với  $BC$  cắt  $BD$  tại  $E$ , đường thẳng kẽ từ  $B$  song song với  $AD$  cắt  $AC$  tại  $F$ . Chứng minh rằng  $EF \parallel AB$ .

### Lời giải



Gọi  $O$  là giao điểm của hai đường chéo  $AC$  và  $BD$  của hình thang.

Ta có:  $AE \parallel BC$  (gt)

Theo định lí Thalès:  $\frac{OE}{OB} = \frac{OA}{OC}$  (1)

Tương tự  $BF \parallel AD$  nên:  $\frac{OF}{OA} = \frac{OB}{OD}$  (2)

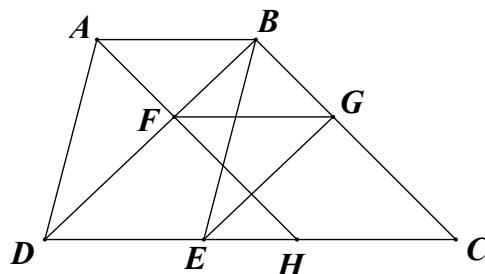
mà  $AB \parallel CD$  (gt)  $\Rightarrow \frac{OA}{OC} = \frac{OB}{OD}$  (3)

Từ (1), (2), (3)  $\Rightarrow \frac{CE}{OB} = \frac{OF}{OA}$ .

Theo định lí Thalès đảo ta có  $EF \parallel AB$ .

**Bài toán 26.** Cho hình thang  $ABCD$ ,  $CD$  là đáy lớn, đường thẳng dựng từ  $B$  song song với  $AD$  cắt  $CD$  tại  $E$ , đường thẳng dựng từ  $A$  song song với  $BC$  cắt  $BD$  tại  $F$ . Qua  $E$  dựng đường thẳng song song với  $BD$  cắt  $BC$  tại  $G$ . Chứng minh rằng  $FG \parallel CD$ .

### Lời giải



Gọi  $H$  là giao điểm của  $AF$  và  $CD$ .

Ta có:  $AB \parallel CD$  (gt).

Theo định lí Thalès:  $\frac{FB}{FD} = \frac{AB}{DH}$  (1)

Lại có:  $EG \parallel BD$

Ta có:  $\frac{GB}{GC} = \frac{ED}{EC}$

Ta lại có  $ABED, ABCH$  là các hình bình hành nên  $AB = DE = HC$

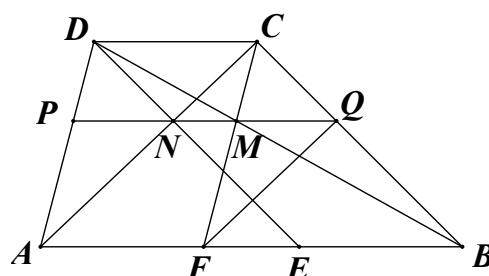
$\Rightarrow DH = EC \Rightarrow \frac{AB}{DH} = \frac{ED}{EC}$  (2)

Từ (1), (2), (3)  $\Rightarrow \frac{FB}{FD} = \frac{GB}{GC}$

Theo định lí Thalès đảo  $FG \parallel CD$ .

**Bài toán 27.** Cho hình thang  $ABCD$  đáy lớn là  $AB$ , đường thẳng kẽ từ  $C$  song song với  $AD$  cắt  $BD$  tại  $M$ , cắt  $AB$  tại  $F$ , đường thẳng kẽ từ  $D$  song song với  $BC$  cắt  $AB$  tại  $E$ ,  $AC$  tại  $N$  các đường thẳng kẽ qua  $E$  và  $F$  lần lượt song song với  $BD$  và  $AC$  cắt  $AD$  và  $BC$  tại  $P$  và  $Q$ . Chứng minh rằng:  $M, N, P, Q$  thẳng hàng.

### Lời giải



Ta có:  $AB \parallel CD$  (gt)

Theo định lí Thalès:  $\frac{AN}{NC} = \frac{AE}{DC}$

Lại có  $PE \parallel BD$  nên  $\frac{AP}{PD} = \frac{AE}{EB}$

mà  $BCDE$  là hình bình hành nên  $EB = DC$ .

Từ đó  $\frac{AN}{NC} = \frac{AP}{PD}$

Theo định lí Thalès đảo ta có  $CD \parallel PN$ .

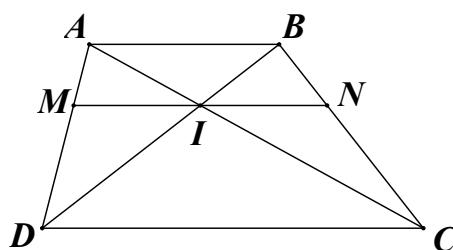
Chứng minh tương tự ta có  $MQ \parallel CD$  và  $MP \parallel AB$ .

Theo tiên đề Euclid  $M, N, P$  và  $Q$  thẳng hàng.

**Bài toán 28.** Cho hình thang  $ABCD (AB \parallel CD)$  hai đường chéo  $AC$  và  $BD$  cắt nhau tại  $I$ . Đường thẳng qua  $I$  và song song với hai đáy cắt hai cạnh bên  $AD$  và  $BC$  theo thứ tự tại  $M$  và  $N$ .

Chứng minh:  $\frac{1}{IM} = \frac{1}{AB} + \frac{1}{CD}$ .

### Lời giải



Xét  $\Delta ABD$ . Ta có  $IM \parallel AB$  (gt).

Theo định lí Thalès:  $\frac{IM}{AB} = \frac{DI}{DB}$  (1)

Tương tự với  $\Delta BCD$  có  $IN \parallel CD \Rightarrow \frac{IN}{CD} = \frac{BI}{BD}$  (2)

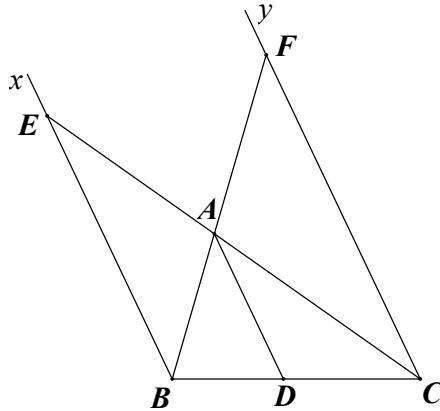
Cộng (1) và (2) vế với vế ta có:  $\frac{IM}{AB} + \frac{IN}{CD} = \frac{DI + BI}{BD} = \frac{BD}{BD} = 1$

Theo câu b) bài 20.7, ta có  $IM = IN$  nên  $\frac{IM}{AB} = \frac{IM}{CD}$

$$\Rightarrow IM \left( \frac{1}{AB} + \frac{1}{CD} \right) = 1 \Rightarrow \frac{1}{IM} = \frac{1}{AB} + \frac{1}{CD} \text{ (đpcm)}$$

**Bài toán 29.** Cho tam giác  $ABC$ , lấy  $D$  thuộc cạnh  $BC$ , kẻ tia  $Bx$  song song với  $AD$  và  $Bx$  cắt đường thẳng  $CA$  kéo dài tại  $I$ , kẻ tia  $Cy$  song song với  $AD$  và  $Cy$  cắt đường thẳng  $BA$  kéo dài tại  $F$ . Chứng minh rằng:  $\frac{1}{BE} + \frac{1}{CF} = \frac{1}{AD}$ .

### Lời giải



Ta có:  $AD \parallel Bx$  (gt)

$$\text{Theo định lí Thalès: } \frac{AD}{BE} = \frac{CD}{CB} \quad (1)$$

$$\text{Tương tự với } \triangle BFC \text{ có } Cy \parallel AD \Rightarrow \frac{AD}{CF} = \frac{BD}{CB} \quad (2)$$

Cộng (1) và (2) vế với vế ta có:

$$\begin{aligned} \frac{AD}{BE} + \frac{AD}{CF} &= \frac{CD+BD}{CB} = \frac{CB}{CB} = 1 \Rightarrow AD \left( \frac{1}{BE} + \frac{1}{CF} \right) = 1 \\ \Rightarrow \frac{1}{BE} + \frac{1}{CF} &= \frac{1}{AD} \text{ (đpcm)} \end{aligned}$$

**Bài toán 30.** Cho hình bình hành  $ABCD$ , một đường thẳng  $d$  đi qua  $A$  cắt các đường thẳng  $BD, BC$  và  $DC$  lần lượt tại  $M, E, F$ . Chứng minh:

a)  $MA^2 = ME \cdot MF$ .

b)  $BE \cdot DF$  không đổi.

c)  $\frac{1}{AM} = \frac{1}{AE} + \frac{1}{AF}$

### Lời giải

a) Ta có:  $AB \parallel CD$  (gt).

$$\text{Theo định lí Thalès: } \frac{MA}{MF} = \frac{MB}{MD} \quad (1)$$

$$\text{Lại có: } BC \parallel AD \Rightarrow \frac{MB}{MD} = \frac{ME}{MA}$$

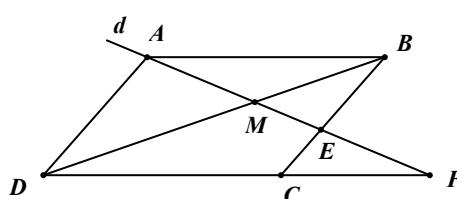
$$\text{Từ (1) và (2) } \Rightarrow \frac{MA}{MF} = \frac{ME}{MA}$$

$$\Rightarrow MA^2 = ME \cdot MF.$$

b) Theo định lí Thalès,

$$\text{ta có: } \frac{BE}{AD} = \frac{MB}{MD} \text{ (do } BC \parallel AD\text{)}$$

$$\text{Tương tự: } \frac{MB}{MD} = \frac{AB}{DF} \text{ (do } AB \parallel DF\text{ )}$$



$$\Rightarrow \frac{BE}{AD} = \frac{AB}{DF} \Rightarrow BE \cdot DF = AB \cdot AD \text{ (không đổi)}$$

c) Ta có  $AB // CD$ . Theo định lí Thalès:

$$\frac{AM}{MF} = \frac{BM}{MD} \Rightarrow \frac{AM}{AM + MF} = \frac{BM}{BM + MD}$$

$$\text{hay } \frac{AM}{AF} = \frac{BM}{BD}$$

$$\text{tương tự ta có: } \frac{AM}{AE} = \frac{DM}{BD}$$

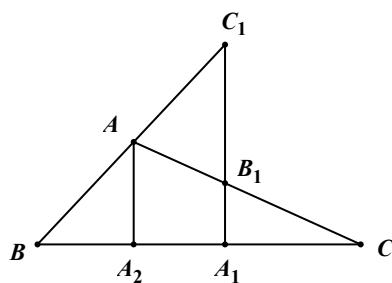
$$\text{Cộng (3) và (4) vế với vế ta có: } \frac{AM}{AF} + \frac{AM}{AE} = \frac{BM + DM}{BD} = \frac{BD}{BD} = 1$$

$$\Rightarrow AM \left( \frac{1}{AF} + \frac{1}{AE} \right) = 1 \Rightarrow \frac{1}{AM} = \frac{1}{AF} + \frac{1}{AE}$$

**Bài toán 31.** Cho tam giác  $ABC$ , trên các cạnh  $BC, CA$  và  $AB$  (hoặc phần kéo dài của chúng) lấy các điểm  $A_1, B_1$  và  $C_1$ . Chứng minh rằng các điểm  $A_1, B_1$  và  $C_1$  thẳng hàng khi và chỉ khi

$$\frac{BA_1}{CA_1} \cdot \frac{CB_1}{AB_1} \cdot \frac{AC_1}{BC_1} = 1 \text{ (định lí Ménêlai)}$$

### Lời giải



Giả sử  $A_1, B_1$  và  $C_1$  thẳng hàng.

Từ  $A$  kẻ cường thẳng song song với  $A_1 B_1$  cắt  $BC$  tại  $A_1$ .

Theo định lí Thalès ta có:

$$\frac{AC_1}{BC_1} = \frac{A_2 A_1}{BA_1} \text{ và } \frac{CB_1}{AB_1} = \frac{CA_1}{A_2 A_1}$$

$$\Rightarrow \frac{BA_1}{CA_1} \cdot \frac{CB_1}{AB_1} \cdot \frac{AC_1}{BC_1} = \frac{BA_1}{CA_1} \cdot \frac{CA_1}{A_2 A_1} \cdot \frac{A_2 A_1}{BA_1} = 1 \text{ (đpcm)}$$

Ngược lại: giả sử  $\frac{BA_1}{CA_1} \cdot \frac{CB_1}{AB_1} \cdot \frac{AC_1}{BC_1} = 1$  và  $A_1 B_1$  cắt  $AB$  tại  $C_1$ .

Theo phần trên ta có  $\frac{BA_1}{CA_1} \cdot \frac{CB_1}{AB_1} \cdot \frac{AC_2}{BC_2} = 1$

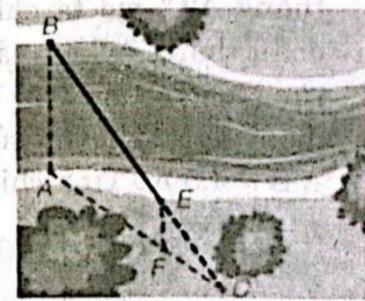
$$\text{Từ đó } \frac{AC_1}{BC_1} = \frac{AC_2}{BC_2}$$

Nếu  $A_1$  và  $B_1$  nằm trên cạnh  $BC$  và  $AC$  thì  $C_1$  và  $C_2$  ở trên phần kéo dài của cạnh  $AB$ . Khi đó  $C_1$  trùng với  $C_2$  hay  $A_1, B_1, C_1$  thẳng hàng.

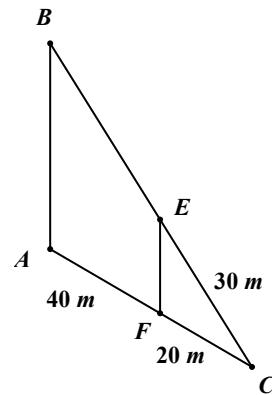
### III. Áp dụng vào thực tế

**Bài toán 32.** Để đo khoảng cách giữa hai vị trí  $B$  và  $E$  ở hai bên bờ sông, bác An chọn ba vị trí  $A, F, C$  cùng nằm ở một bên bờ sông sao cho ba điểm  $C, E, B$  thẳng hàng, ba điểm  $C, F, A$  thẳng hàng

và  $AB \parallel EF$  (hình vẽ). Sau đó bác An đo được  $AF = 40m$ ,  $FC = 20m$ ,  $EC = 30m$ . Hỏi khoảng cách giữa hai vị trí  $B$  và  $E$  bằng bao nhiêu?



**Lời giải**

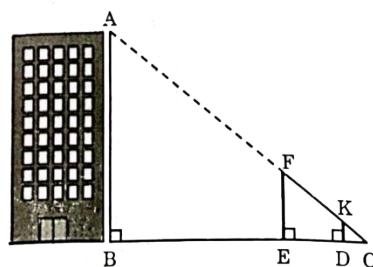


Xét  $\Delta ABC$  có  $AB \parallel EF$  (gt). Theo định lí Thalès,

$$\begin{aligned} \text{ta có: } \frac{CE}{EB} &= \frac{CF}{FA} \text{ hay } \frac{30}{EB} = \frac{20}{40} \\ \Rightarrow EB &= \frac{30 \cdot 40}{20} = 60 \end{aligned}$$

Khoảng cách giữa hai vị trí  $B$  và  $E$  bằng  $60m$ .

**Bài toán 33.** Đo chiều cao  $AB$  của một tòa nhà bằng hai cây cọc  $FE, DK$ , một sợi dây và một thước cuộn như sau:



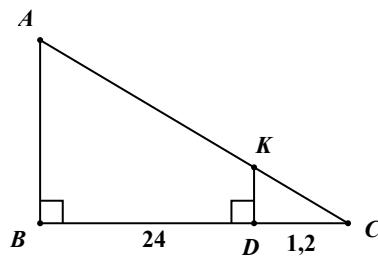
- Đặt cọc  $FE$  cố định, di chuyển cọc  $DK$  sao cho nhìn thấy  $K, F, A$  thẳng hàng.

- Căng thẳng dây  $FC$  đi qua  $K$  và cắt mặt đất tại  $C$ .

- Đo khoảng cách  $BC$  và  $DC$  trên mặt đất.

Cho biết  $DK = 1m$ ,  $BC = 24m$ ,  $DC = 1,2m$ . Tính chiều cao  $AB$  của tòa nhà.

**Lời giải**



Ta có  $DK \parallel BC (\perp BC)$ .

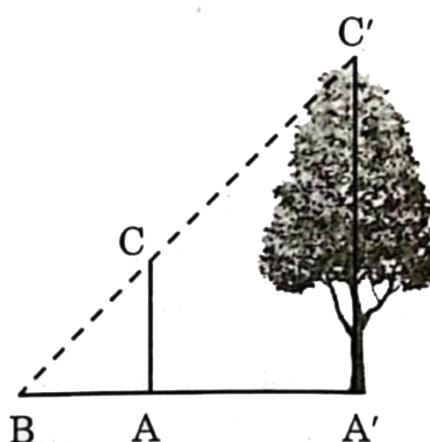
Theo định lí Thalès, ta có:  $\frac{AB}{KD} = \frac{BC}{DC}$  hay  $\frac{AB}{1} = \frac{24}{1,2}$

$$\Rightarrow AB = \frac{1.24}{1,2} = 20$$

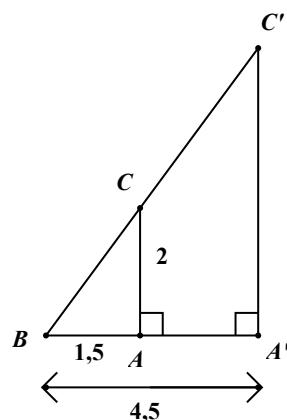
Vậy chiều cao của tòa nhà bằng  $20m$ .

**Bài toán 34.** Cho hình vẽ sau, biết độ dài đoạn thẳng  $A'C'$  mô tả chiều cao của một cái cây, đoạn thẳng  $AC$  mô tả một cái cọc (cây và cọc cùng vuông góc với đường thẳng đi qua ba điểm  $A', A, B$ ).

Giả sử  $AC = 2m$ ,  $AB = 1,5m$ ,  $A'B = 4,5m$ . Tính chiều cao của cây.



#### Lời giải

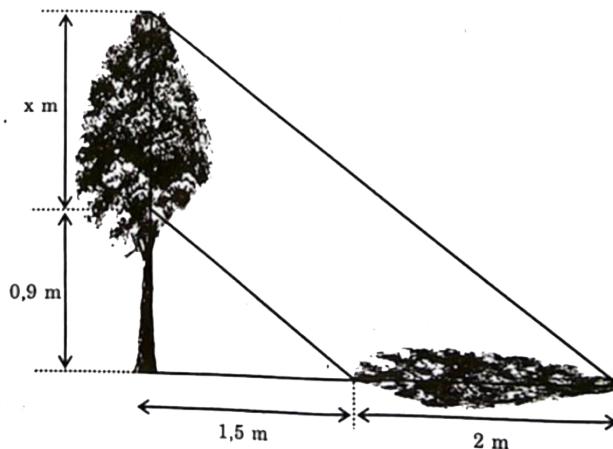


Ta có  $CA \parallel C'A' (\perp A'B)$ .

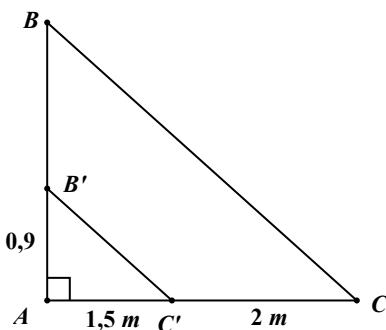
Theo định lí Thalès, ta có:  $\frac{A'C'}{AC} = \frac{A'B}{AB}$  hay  $\frac{A'C'}{2} = \frac{4,5}{1,5} \Rightarrow A'C' = \frac{2.4,5}{1,5} = 6$

Vậy chiều cao của cây là  $6m$ .

**Bài toán 35.** Người ta đo bóng của một cái cây và được các số đo ở hình dưới đây. Giả sử rằng các tia nắng song song với nhau, hãy tính độ cao của cây.



**Lời giải**



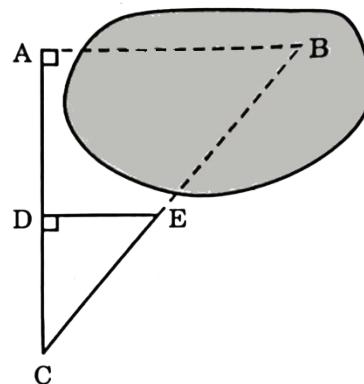
Chiều cao của cây là đoạn:  $AB = AB' + B'B$ .

$\Delta ABC$  có  $B'C' \parallel BC$  (gt).

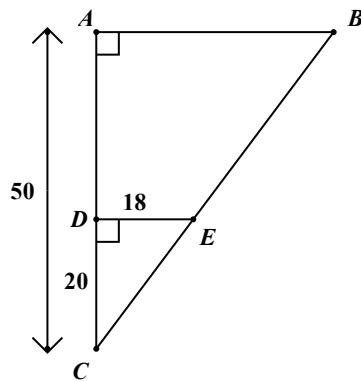
Theo định lí Thalès, ta có:  $\frac{AB'}{B'B} = \frac{AC'}{CC'}$  hay  $\frac{0,9}{B'B} = \frac{1,5}{2} \Rightarrow B'B = \frac{0,9 \cdot 2}{1,5} = 1,2$

Vậy chiều cao của cây  $AB = 0,9 + 1,2 = 2,1m$ .

**Bài toán 36.** Để đo khoảng cách giữa vị trí  $A$  và  $B$  trong đó  $B$  không tới được, người ta tiến hành chọn các vị trí  $C, D, E$  như ở hình và đo được  $AC = 50m, CD = 20m, DE = 18m$ . Hỏi khoảng cách giữa hai vị trí  $A$  và  $B$  là bao nhiêu?



**Lời giải**



Ta có  $DE \parallel AB (\perp AC)$ .

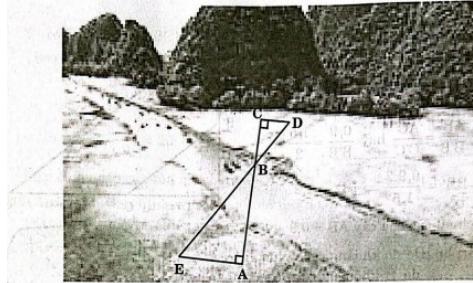
Theo định lí Thalès, ta có:  $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DC}$  hay  $\frac{AB}{18} = \frac{50}{20} \Rightarrow AB = \frac{18.50}{20} = 45$ .

Vậy khoảng cách giữa hai vị trí  $A$  và  $B$  là  $45m$ .

**Bài toán 37.** Anh Thiện và chị Lương đứng ở hai phía bờ sông và muốn ước lượng khoảng cách giữa hai vị trí  $A, B$  ở hai bên bờ sông (hình vẽ dưới đây).

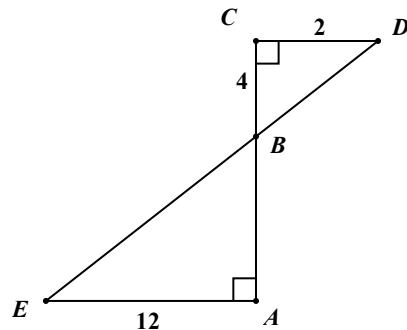
- Anh Thiện chọn vị trí  $C$  ở trên bờ sông sao cho  $A, B, C$  thẳng hàng và đo được  $BC = 4m$ .
- Tiếp theo, anh Thiện xác định vị trí  $D$ , chị Lương xác định vị trí  $E$  sao cho  $D, B, E$  thẳng hàng, đồng thời  $\widehat{BAE} = \widehat{BCD} = 90^\circ$ ;
- Anh Thiện đo được  $CD = 2m$ , chị Lương đo được  $AE = 12m$ .

Hãy tính khoảng cách giữa hai vị trí  $A$  và  $B$ .



(Ảnh: Vietnam Stock Images)

### Lời giải



Ta có  $CD \parallel AE (\perp AC)$ .

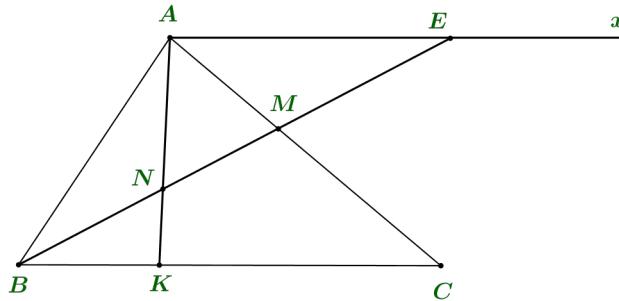
Theo định lí Thalès, ta có:  $\frac{AB}{BC} = \frac{AE}{CD}$  hay  $\frac{AB}{4} = \frac{12}{2} \Rightarrow AB = \frac{4.12}{2} = 24$

Vậy khoảng cách giữa hai vị trí  $A$  và  $B$  là  $24m$ .

## C. BÀI TẬP

- 4.1.** Cho tam giác  $ABC$ , trên  $AC$  lấy điểm  $M$  sao cho  $AM = \frac{2}{5}AC$ , trên  $BC$  lấy điểm  $K$  sao cho  $BK = \frac{1}{3}BC$ . Đoạn thẳng  $BM$  chia đoạn thẳng  $AK$  theo tỉ số nào?

**Lời giải**



Kẻ qua  $A$  tia  $Ax \parallel BC$ , tia  $Ax$  cắt đường thẳng  $MN$  tại  $E$ .

Theo định lí Thalès  $\frac{AE}{BC} = \frac{AM}{MC}$

Mà

$$AM = \frac{2}{3}AC \text{ (gt)} \Rightarrow \frac{AM}{AC} = \frac{2}{5} \Rightarrow \frac{AM}{2} = \frac{AC}{5} = \frac{AC - AM}{2-5} = \frac{MC}{3} \Rightarrow \frac{AM}{MC} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{AE}{BC} = \frac{AM}{MC} = \frac{2}{3}$$

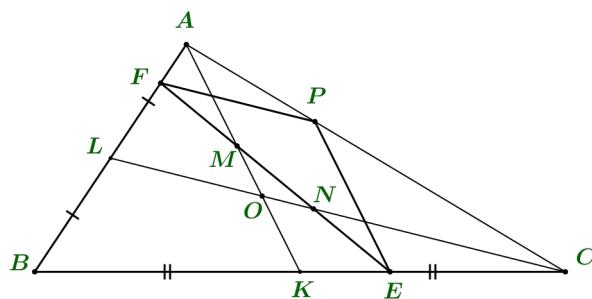
Lại có  $\frac{BK}{BC} = \frac{1}{3}$

Do đó  $\frac{AE}{BC} : \frac{BK}{BC} = \frac{2}{3} : \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{AE}{BK} = 2$

Áp dụng định lí Thalès, ta có  $\frac{AN}{NK} = \frac{AE}{BK} = 2$ .

- 4.2.** Qua điểm  $P$  tùy ý trên cạnh  $AC$  của tam giác  $ABC$ , dựng các đường thẳng song song với các trung tuyến  $AK$  và  $CL$ , cắt các cạnh  $BC$  và  $AB$  tương ứng tại các điểm  $E$  và  $F$ . Chứng minh rằng các trung tuyến  $AK$  và  $CL$  chia đoạn thẳng  $EF$  thành ba phần bằng nhau.

**Lời giải**



Gọi  $Q, M, N, R$  lần lượt là giao điểm của  $AK$  và  $PF$ ,  $AK$  và  $FE$ ,  $AK$  và  $CL$ ,  $PE$  và  $CL$ .

Ta có  $PE \parallel AK$  (gt)

Theo định lí Thalès  $\frac{FM}{FE} = \frac{FQ}{FP}$  (1)

Gọi  $O$  là giao điểm của hai đường trung tuyến  $AK$  và  $CL$ .

Vì  $PF \parallel CL$  (gt)

Theo định lí Thalès:  $\frac{FQ}{LO} = \frac{AF}{AL}, \frac{FP}{LC} = \frac{AF}{AL} \Rightarrow \frac{FQ}{LO} = \frac{FP}{LC} \Rightarrow \frac{FQ}{FP} = \frac{LO}{LC} = \frac{1}{3}$  (2) (vì  $O$  là trọng tâm  $\triangle ABC$ )

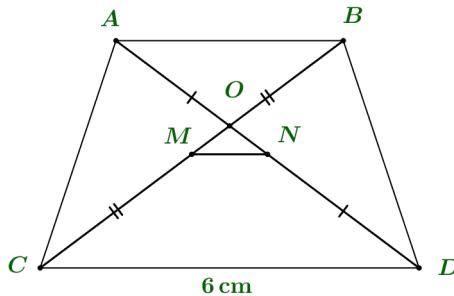
Từ (1) và (2)  $\Rightarrow FM = \frac{1}{3}EF$ .

Chứng minh tương tự ta có  $EN = \frac{1}{3}EF$ .

Vậy  $FM = MN = NE$ .

- 4.3.** Cho hình thang cân  $ABCD$  ( $AB // CD$ ). Gọi  $O$  là giao điểm hai đường chéo  $AC$  và  $BD$  và  $M, N$  theo thứ tự là trung điểm của  $BD$  và  $AC$ . Biết  $MD = 3MO$  và đáy lớn  $CD = 6\text{cm}$ . Tính độ dài đoạn thẳng  $MN$  và đáy nhỏ  $AB$ .

### Lời giải



Ta có  $AC = BD$  (gt)  $\Rightarrow OA = OB$  và  $OC = OD$ .

$MN // CD, MN // AB$

Lại có  $MD = 3MO$  (gt)  $\Rightarrow \frac{MO}{MD} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{MO}{1} = \frac{MD}{3} = \frac{MO + MD}{1+3} = \frac{OD}{4} \Rightarrow \frac{MO}{OD} = \frac{1}{4}$  (1)

Theo định lí Thalès, ta có:  $\frac{MN}{CD} = \frac{MO}{OD} = \frac{1}{4} \Rightarrow MN = \frac{1}{4}CD = \frac{1}{4} \cdot 6 = 1,5\text{ (cm)}$

Ta có:  $MD = 3MO$  (gt)  $\Rightarrow \frac{MO}{MD} = \frac{1}{3}$

Lại có:  $MB = MD$  (gt)  $\Rightarrow \frac{MO}{MB} = \frac{1}{3}$

Suy ra  $\frac{MO}{1} = \frac{MB}{3} = \frac{MO - MB}{3-1} = \frac{OB}{2} \Rightarrow \frac{OB}{MP} = 2$  (2)

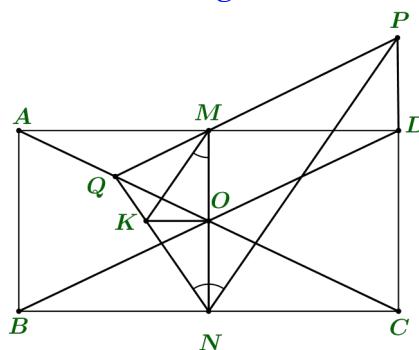
Từ (1) và (2) nhân vế với vế ta có:  $\frac{MO}{OD} \cdot \frac{OB}{MO} = \frac{1}{4} \cdot 2 \Rightarrow \frac{OB}{OD} = \frac{1}{2}$

$AB // CD$  (gt), theo định lí Thalès  $\frac{AB}{CD} = \frac{OB}{OD} = \frac{1}{2} \Rightarrow AB = \frac{1}{2}CD = \frac{1}{2} \cdot 6 = 3\text{ (cm)}$ .

- 4.4.** Cho hình chữ nhật  $ABCD$ ,  $M, N$  lần lượt là trung điểm của  $AD$  và  $BC$ . Trên tia đối  $DC$  lấy một điểm  $P$ . Gọi  $Q$  là giao điểm của  $PM$  với đường chéo  $AC$ . Chứng minh rằng:

$\widehat{QNM} = \widehat{MNP}$ .

### Lời giải



Gọi  $O$  là giao điểm của hai đường chéo  $AC$  và  $BD$  của hình chữ nhật  $ABCD$ , qua  $O$  kẻ đường thẳng song song với  $BC$  cắt  $QN$  tại  $K$ .

Dễ thấy  $MO \parallel PC$  nên theo định lí Thalès với  $\triangle PQC$ :  $\frac{MQ}{MP} = \frac{OQ}{OC}$  (1)

Tương tự  $OK \parallel BC$  nên trong  $\triangle NQC$  ta có:  $\frac{OQ}{OC} = \frac{KQ}{KN}$  (2)

Từ (1) và (2)  $\Rightarrow \frac{MQ}{MP} = \frac{KQ}{KN} \Rightarrow KM \parallel PN \Rightarrow \widehat{MNP} = \widehat{KMO}$  (so le trong)

Mặt khác do  $\triangle MKN$  cân tại  $K$  nên  $\widehat{MNP} = \widehat{QNM}$

Suy ra  $\widehat{KMO} = \widehat{QNM}$ .

## BÀI 16. ĐƯỜNG TRUNG BÌNH CỦA TAM GIÁC

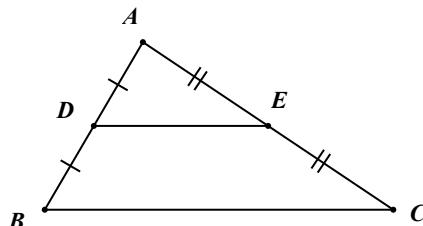
### A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

#### 1. Định nghĩa

Đường trung bình của tam giác là đoạn thẳng nối trung điểm hai cạnh của tam giác.

#### 2. Định lí

Đường trung bình của tam giác song song với cạnh thứ ba và bằng nửa cạnh đó.

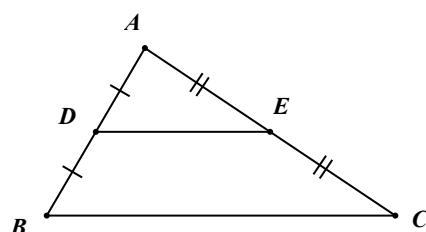


GT  $\Delta ABC, AD = BD, AE = EC, D \in AB, E \in AC$

KL  $DE \parallel BC; DE = \frac{1}{2}BC$

*Chú ý:*

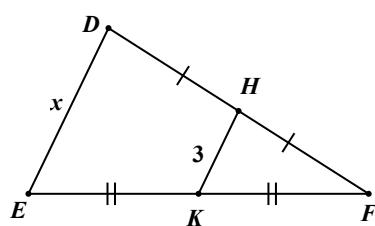
Trong một tam giác, nếu một đường thẳng đi qua trung điểm một cạnh và song song với cạnh thứ hai thì nó đi qua trung điểm của cạnh thứ ba.



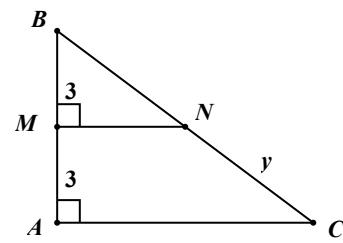
### B. PHÂN LOẠI CÁC BÀI TẬP

#### Tính độ dài các đoạn thẳng

**Bài toán 1.** Tính độ dài  $x, y$  trong các hình vẽ dưới đây.

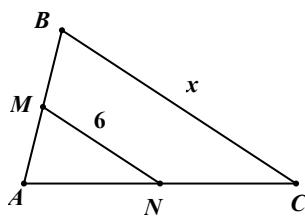


a)

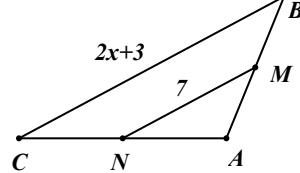


b)

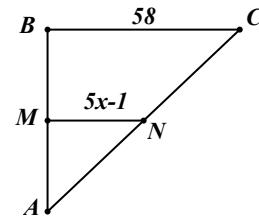
**Bài toán 2.** Cho  $MN$  là đường trung bình của mỗi tam giác  $ABC$  trong hình vẽ. Hãy tìm giá trị của  $x$  trong mỗi hình.



a)

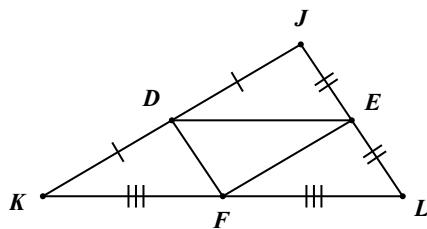


b)

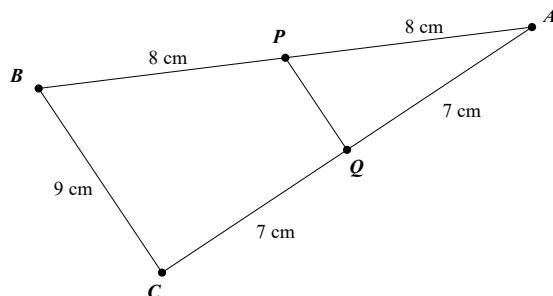


c)

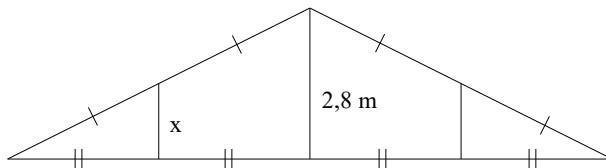
**Bài toán 3.** Cho hình vẽ bên. Biết  $JK = 10\text{ cm}$ ,  $DE = 6,5\text{ cm}$ ,  $EL = 3,7\text{ cm}$ . Tính  $DJ$ ,  $EF$ ,  $DF$ ,  $KL$ .



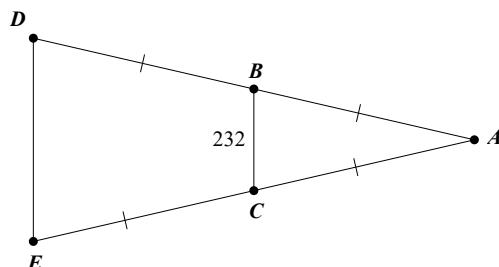
**Bài toán 4:** Tính độ dài đoạn  $PQ$ .



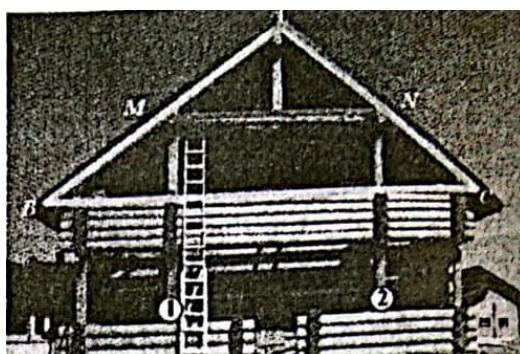
**Bài toán 5:** Một mái nhà được vẽ lại như hình vẽ bên. Tính độ dài  $x$ .



**Bài toán 6:** Ảnh chụp từ Google Maps của một trường học được cho trong hình vẽ dưới đây. Hãy tính chiều dài cạnh  $DE$ ,  $BC = 232\text{ m}$  và  $B,C$  lần lượt là trung điểm của  $AD$  và  $AE$ .



**Bài toán 7:** Hình vẽ dưới: ba cạnh màu vàng  $AB, BC, CA$  gọi nên hình ảnh tam giác  $ABC$  và đoạn thẳng màu xanh  $MN$  là một đường trung bình của tam giác đó. Bạn Duyên đứng ở phía đố khoảng cách giữa hai chân cột số 1 và số 2, từ đó ước lượng được độ dài đoạn thẳng  $MN$  khoảng  $4,5\text{ m}$ . Khoảng cách giữa hai mép dưới của mái được tính bằng độ dài đoạn thẳng  $BC$ . Hỏi khoảng cách đó khoảng bao nhiêu mét?



## II. Chứng minh

**Bài toán 8:** Cho tam giác  $ABC$ . Gọi  $M, N, P$  lần lượt là trung điểm của các cạnh  $AB, AC, BC$ .

- Chứng minh tứ giác  $BMNC$  là hình thang;

b) Tứ giác  $MNPB$  là hình gì? Vì sao?

**Bài toán 9:** Cho tam giác  $ABC$  có trung tuyến  $AM$ . Lấy hai điểm  $D$  và  $E$  trên cạnh  $AB$  sao cho  $AD = DE = EB$  và  $D$  nằm giữa hai điểm  $A, E$ .

a) Chứng minh  $DC \parallel EM$ ;

b)  $DC$  cắt  $AM$  tại  $I$ . Chứng minh  $I$  là trung điểm của  $AM$ ;

c) Chứng minh  $CD = 4DI$ .

**Bài toán 10:** Cho  $\Delta ABC$  cân tại  $A$ . Gọi  $M$  là trung điểm của đường cao  $AH$ .  $D$  là giao điểm của  $CM$  và  $AB$ .

a) Gọi  $N$  là trung điểm của  $BD$ . Chứng minh rằng  $HN \parallel DC$ .

b) Chứng minh  $AD = \frac{1}{3}AB$ .

**Bài toán 11:** Cho tam giác  $ABC$ . Gọi  $M, N, P$  lần lượt là trung điểm của ba cạnh  $AB$ ,  $AC$  và  $BC$ . Gọi  $I$  là giao điểm của  $AP$  và  $MN$ . Chứng minh  $IM = IN$ .

**Bài toán 12:** Cho hình thang  $ABCD$  ( $AB \parallel CD$ ) và  $AB = BC$ .

a) Chứng minh:  $CA$  là tia phân giác của  $\widehat{BCD}$

b) Gọi  $M, N, E, F$  lần lượt là trung điểm của  $AD, BC, AC, BD$ . Chứng minh rằng  $M, N, E, F$  thẳng hàng.

**Bài toán 13:** Cho tam giác  $ABC$  vuông cân tại  $A$ . Trên các cạnh góc vuông  $AB, AC$  lấy  $D$  và  $E$  sao cho  $AD = AE$ . Qua  $D$  vẽ đường thẳng vuông góc với  $BE$  cắt  $BC$  ở  $K$ . Qua  $A$  vẽ đường thẳng vuông góc với  $BE$  cắt  $BC$  ở  $H$ . Gọi  $M$  là giao điểm của  $DK$  và  $AC$ . Chứng minh rằng:

a)  $\Delta BAE = \Delta CAD$

b)  $\Delta MDC$  cân

c)  $HK = HC$

**Bài toán 14:** Cho  $\Delta ABC$  cân tại  $A$ , đường cao  $AD$ , kẻ  $DH \perp AC$ . Gọi  $I$  là trung điểm của  $DH, M$  là trung điểm của  $HC$ . Chứng minh.

a)  $IM \perp AD$

b)  $AI \perp DM$

**Bài toán 15:** Cho hình chữ nhật  $ABCD$  có  $AC$  cắt  $BD$  tại  $O$ . Gọi  $K, H$  lần lượt là trung điểm của  $AB, AD$ . Chứng minh rằng tứ giác  $AHOK$  là hình chữ nhật.

**Bài toán 16:** Cho tam giác  $ABC$  nhọn có  $H$  là trực tâm. Gọi  $M, N, P, Q$  là trung điểm của các đoạn thẳng  $AB, BH, HC, CA$ . Chứng minh tứ giác  $MNPQ$  là hình chữ nhật.

**Bài toán 17:** Cho tam giác  $ABC$  nhọn. Gọi  $M, N, P$  lần lượt là trung điểm của  $AB, AC, BC$ . Kẻ đường cao  $AH$ . Chứng minh rằng tứ giác  $MNPH$  là hình thang cân.

**Bài toán 18.** Cho hình thang  $ABCD$  ( $AB \parallel CD$ ) có  $E$  và  $F$  lần lượt là trung điểm hai cạnh bên  $AD$  và  $BC$ . Gọi  $K$  là giao điểm của  $AF$  và  $DC$  (hình vẽ bên).

a) Tam giác  $FBA$  và tam giác  $FCK$  có bằng nhau không? Vì sao?

b) Chứng minh  $EF \parallel CD \parallel AB$ .

c) Chứng minh  $EF = \frac{AB + CD}{2}$

**Bài toán 19.** Cho tứ giác  $ABCD$ . Gọi  $M$  và  $N$  lần lượt là trung điểm của hai cạnh  $AB$  và  $BC$ . Chứng tỏ rằng:  $MN \leq \frac{AB + CD}{2}$ .

**Bài toán 20.** Cho hình thang  $ABCD$  ( $AB \parallel CD$ ). Gọi  $E, F, K$  lần lượt là trung điểm của  $BD, AC, DC$ . Gọi  $H$  là giao điểm của đường thẳng qua  $E$  vuông góc với  $AD$  và đường thẳng qua  $F$  vuông

góc với  $BC$ . Chứng minh rằng:

- a)  $H$  là trực tâm của  $\Delta EFK$ .
- b)  $\Delta HCD$  cân.

**Bài toán 21.** Tứ giác  $ABCD$  có đường chéo  $AC$  và  $BD$  vuông góc với nhau. Gọi  $M, N, L$  lần lượt là trung điểm của  $AB, AD$  và đường chéo  $AC$ . Từ  $M$  kẻ đường thẳng vuông góc với  $CD$  cắt  $AC$  tại  $H$ . Chứng minh rằng:  $H$  là trực tâm của tam giác  $MNL$ .

**Bài toán 22.** Cho tứ giác  $ABCD$  có  $M, N, P, Q$  các cạnh  $AB, BC, CD, DA$ .

- a) Chứng minh tứ giác  $MNPQ$  là hình bình hành.
- b) Cho  $AC = BD$ . Chứng minh tứ giác  $MNPQ$  là hình thoi.
- c) Cho  $AC \perp BD$ . Chứng minh tứ giác  $MNPQ$  là hình chữ nhật

### C. BÀI TẬP

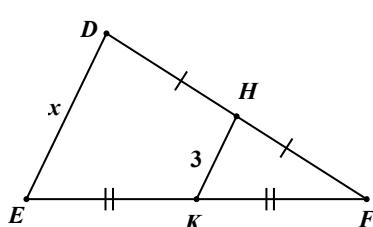
- 4.5. Cho tam giác  $ABC$ . Gọi  $M$  là trung điểm của  $BC$ ,  $I$  là trung điểm của  $AM$ . Gọi  $D$  là giao điểm của  $CI$  và  $AB$ . Chứng minh rằng:  $BD = 2AD$ .
- 4.6. Cho hình thang  $ABCD$  ( $AB // CD$  và  $AB < CD$ ). Gọi là  $O$  giao điểm của  $AC$  và  $BD$  và  $\Delta OCD$  đều.
  - a) Chứng minh:  $ABCD$  là hình thang cân.
  - b) Gọi  $P, Q, R$  lần lượt là trung điểm của  $OA, OD, BC$ . Chứng minh  $\Delta PQR$  đều.
- 4.7. Chứng minh rằng: “Nếu đoạn thẳng nối các trung điểm của cặp cạnh đối diện một tứ giác bằng nửa tổng hai cạnh kia thì tứ giác đó là hình thang”.
- 4.8. Cho tam giác  $ABC$  cân tại  $A$ , đường cao  $AH$ . Gọi  $M$  là trung điểm của  $AB$ .  $G$  là giao điểm của  $AH$  và  $CM$ ,  $BG$  cắt  $AC$  tại  $N$ .
  - a) Chứng minh rằng: Tứ giác  $BMNC$  là hình thang cân.
  - b) Đường thẳng qua  $N$  và song song với  $MC$  cắt đường thẳng  $BC$  tại  $P$ . Chứng minh rằng  $\Delta BNP$  cân.
  - c) Chứng minh rằng  $MN^2 = PB^2$ .

## DÁP ÁN THAM KHẢO

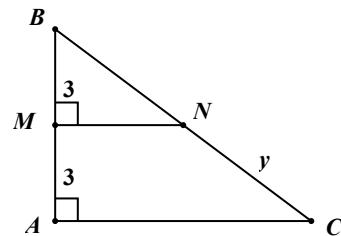
### B. PHÂN LOẠI CÁC BÀI TẬP

#### Tính độ dài các đoạn thẳng

**Bài toán 1.** Tính độ dài  $x, y$  trong các hình vẽ dưới đây.



a)



b)

#### Lời giải

**Hình a)** Ta có  $H$  là trung điểm của  $FD$  (gt)

$K$  là trung điểm của  $FE$  (gt)

$\Rightarrow HK$  là đường trung bình của  $\Delta FED$

$$\Rightarrow HK = \frac{1}{2} E.D \text{ hay } 3 = \frac{1}{2} x \Rightarrow x = 6$$

**Hình b)** Ta có  $MN \parallel AC (\perp AB)$  và  $MA = MB = 3$

nên  $M$  là trung điểm của  $AB, MN \parallel AC$  (theo chú ý)

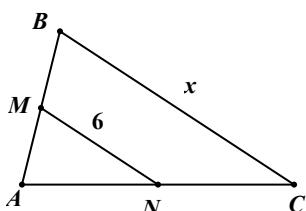
Ta có  $N$  là trung điểm của  $BC$

$$\Rightarrow NC = NB = 5 \text{ hay } y = 5.$$

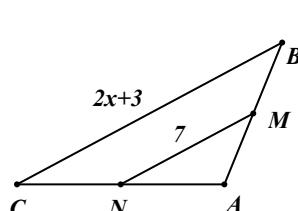
Cách khác:  $MN \parallel AC$ .

$$\text{Theo định lí Thalès, ta có: } \frac{BM}{MA} = \frac{BN}{NC} \text{ hay } \frac{3}{3} = \frac{5}{y} \Rightarrow y = \frac{3.5}{3} = 5$$

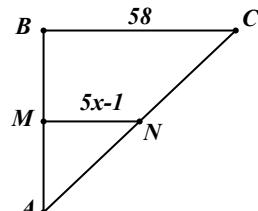
**Bài toán 2.** Cho  $MN$  là đường trung bình của mỗi tam giác  $ABC$  trong hình vẽ. Hãy tìm giá trị của  $x$  trong mỗi hình.



a)



b)



c)

#### Lời giải

**Hình a)** Do  $MN$  là đường trung bình của  $\Delta ABC$  nên

$$MN = \frac{1}{2} BC \text{ hay } 6 = \frac{1}{2} x \Rightarrow x = 12.$$

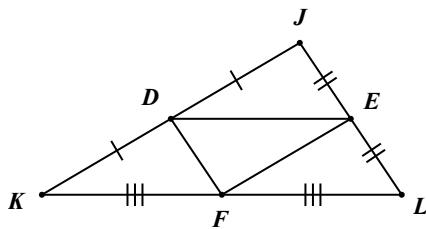
**Hình b)** Do  $MN$  là đường trung bình của  $\Delta ABC$  nên  $MN = \frac{1}{2} BC$

$$\text{Hay } 7 = \frac{1}{2}(2x+3) \Rightarrow 2x = 11 \Rightarrow x = 5,5$$

**Hình c)** Do  $MN$  là đường trung bình của  $\Delta ABC$  nên  $MN = \frac{1}{2} BC$ .

$$\text{Hay } 5x - 1 = \frac{1}{2} 58 \Rightarrow 58 = 2(5x - 1) \Rightarrow 58 = 10x - 2 \Rightarrow 10x = 60 \Rightarrow x = 6.$$

**Bài toán 3:** Cho hình vẽ bên. Biết  $JK = 10\text{ cm}$ ,  $DE = 6,5\text{ cm}$ ,  $EL = 3,7\text{ cm}$ . Tính  $DJ$ ,  $EF$ ,  $DF$ ,  $KL$ .



**Lời giải:**

Ta có  $D$  là trung điểm của  $JK$  (gt)  $\Rightarrow DJ = \frac{1}{2}JF = \frac{1}{2} \cdot 10 = 5\text{ cm}$ .

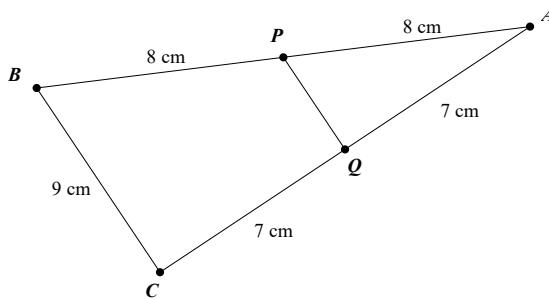
Ta có  $E$  là trung điểm của  $JL$  và  $F$  là trung điểm của  $KL$  (gt) nên  $EF$  là đường trung bình của  $\Delta JKL$   $\Rightarrow EF = \frac{1}{2}JK = \frac{1}{2} \cdot 10 = 5\text{ cm}$ .

Chứng minh tương tự, ta có  $DF$  là đường trung bình của  $\Delta JKL$

nên  $DF = \frac{1}{2}JL$ ,  $E$  là trung điểm của  $JL$  (gt), mà  $EL = 3,7\text{ cm} \Rightarrow DF = 3,7\text{ cm}$ .

Ta có  $DE$  là đường trung bình của  $\Delta JKL \Rightarrow DE = \frac{1}{2}KL$  hay  $6,5 = \frac{1}{2}KL \Rightarrow KL = 6,5 \cdot 2 = 13\text{ cm}$

**Bài toán 4:** Tính độ dài đoạn  $PQ$ .



**Lời giải:**

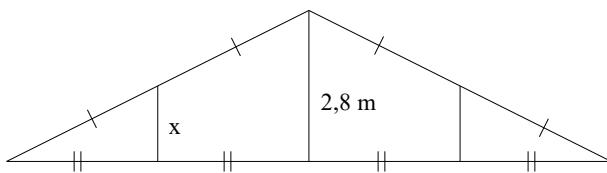
Ta có  $PA = PB = 8\text{ cm}$  nên  $P$  là trung điểm của  $AB$

Tương tự  $QA = QC = 7\text{ cm}$  nên  $Q$  là trung điểm của  $AC$

Do đó  $PQ$  là đường trung bình của  $\Delta ABC$

$$\Rightarrow PQ = \frac{1}{2}BC \text{ hay } PQ = \frac{1}{2} \cdot 9 = 4,5\text{ cm}.$$

**Bài toán 5:** Một mái nhà được vẽ lại như hình vẽ bên. Tính độ dài  $x$ .



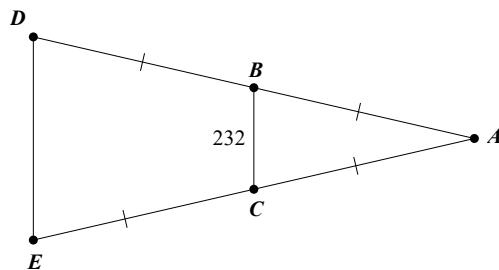
**Lời giải:**

Ta có  $I$  là trung điểm của  $AB$  và  $K$  là trung điểm của  $BH$  (gt)

nên  $IK$  là đường trung bình của  $\Delta AHB$

$$\Rightarrow IK = \frac{1}{2}AH \text{ hay } IK = \frac{1}{2} \cdot 2,8 = 1,4 \Rightarrow x = 1,4\text{ m}.$$

**Bài toán 6:** Ảnh chụp từ Google Maps của một trường học được cho trong hình vẽ dưới đây. Hãy tính chiều dài cạnh  $DE$ ,  $BC = 232\text{ m}$  và  $B, C$  lần lượt là trung điểm của  $AD$  và  $AE$ .

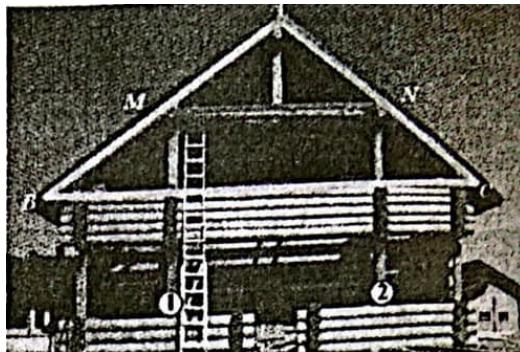


**Lời giải:**

Ta có  $B$  là trung điểm của  $AD$  và  $E$  là trung điểm của  $AE$  nên  $BC$  là đường trung bình của  $\Delta ADE$

$$BC = \frac{1}{2}DE \text{ hay } 232 = \frac{1}{2}DE \Rightarrow DE = 2 \cdot 232 = 464 \text{ m.}$$

**Bài toán 7:** Hình vẽ dưới: ba cạnh màu vàng  $AB, BC, CA$  gợi nêu hình ảnh tam giác  $ABC$  và đoạn thẳng màu xanh  $MN$  là một đường trung bình của tam giác đó. Bạn Duyên đứng ở phía đố khoảng cách giữa hai chân cột số 1 và số 2, từ đó ước lượng được độ dài đoạn thẳng  $MN$  khoảng  $4,5 \text{ m}$ . Khoảng cách giữa hai mép dưới của mái được tính bằng độ dài đoạn thẳng  $BC$ . Hỏi khoảng cách đó khoảng bao nhiêu mét?



**Lời giải:**

Ta có  $MN$  là đường trung bình của  $\Delta ABC$  (gt)

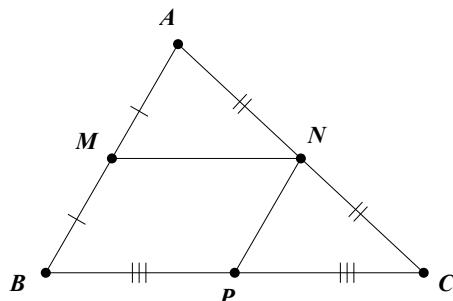
$$\Rightarrow MN = \frac{1}{2}BC \text{ hay } 4,5 = \frac{1}{2}BC \Rightarrow BC = 4,5 \cdot 2 = 9 \text{ m.}$$

## II. Chứng minh

**Bài toán 8:** Cho tam giác  $ABC$ . Gọi  $M, N, P$  lần lượt là trung điểm của các cạnh  $AB, AC, BC$ .

- a) Chứng minh tứ giác  $BMNC$  là hình thang
- b) Tứ giác  $MNPB$  là hình gì? Vì sao?

**Lời giải:**



a) Ta có  $M$  là trung điểm của  $AB$ ,  $N$  là trung điểm của  $AC$  (gt) nên

$MN$  là đường trung bình của  $\Delta ABC$

$\Rightarrow MN \parallel BC$  nên tứ giác  $BMNC$  là hình thang (tứ giác có hai cạnh đối song song)

b) Chứng minh tương tự.

$NP$  là đường trung bình của  $\Delta ABC$  nên  $MP \parallel AB$ , lại có  $MN \parallel BC$  (cmt)

Do đó tứ giác  $MNPB$  là hình bình hành (tứ giác có các cạnh đối song song)

**Cách khác:**

**Hướng dẫn:**

Sử dụng định lí “Đường trung bình của tam giác thì song song với cạnh thứ ba và bằng nửa cạnh ấy”.

Ta có  $MN, NP$  là đường trung bình của  $\Delta ABC$  nên  $MN \parallel BC$  và  $MN = \frac{1}{2}BC$  (1) (Vì  $P$  là

trung điểm của  $BC$  (gt)) nên  $PB = PC = \frac{1}{2}BC$  (2)

Từ (1) và (2)  $\Rightarrow MN = PB$ .

Lại có  $MN \parallel BC \Rightarrow$  Tứ giác  $MNPB$  là hình bình hành (hai cạnh đối vừa song song vừa bằng nhau).

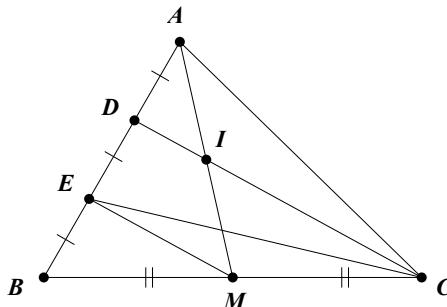
**Bài toán 9:** Cho tam giác  $ABC$  có trung tuyến  $AM$ . Lấy hai điểm  $D$  và  $E$  trên cạnh  $AB$  sao cho  $AD = DE = EB$  và  $D$  nằm giữa hai điểm  $A, E$ .

a) Chứng minh  $DC \parallel EM$ .

b)  $DC$  cắt  $AM$  tại  $I$ . Chứng minh  $I$  là trung điểm của  $AM$ .

c) Chứng minh  $CD = 4DI$ .

**Lời giải:**



a) Ta có  $M$  là trung điểm của  $BC$  (gt) và  $E$  là trung điểm của  $BD$  (gt)

$\Rightarrow EM$  là đường trung bình của  $\Delta BCD$

$\Rightarrow EM \parallel CD$  (đpcm)

b) Vì  $EM \parallel CD$  (cmt),  $DI \parallel CD$  mà  $D$  là trung điểm của  $AE$  (gt)

$\Rightarrow I$  là trung điểm của  $AM$  (Nếu một đường thẳng đi qua trung điểm một cạnh và song song với cạnh thứ hai thì nó đi qua trung điểm cạnh thứ ba).

c) Ta có  $D$  là trung điểm của  $AE$  (gt),  $I$  là trung điểm của  $AM$  (cmt)

$\Rightarrow DI$  là đường trung bình của  $\Delta AEM$

$$\Rightarrow DI = \frac{1}{2}EM \Rightarrow EM = 2DI \quad (1)$$

Lại có  $EM$  là đường trung bình của  $\Delta BCD$  (cmt)

$$\Rightarrow EM = \frac{1}{2}CD \Rightarrow CD = 2EM \quad (2)$$

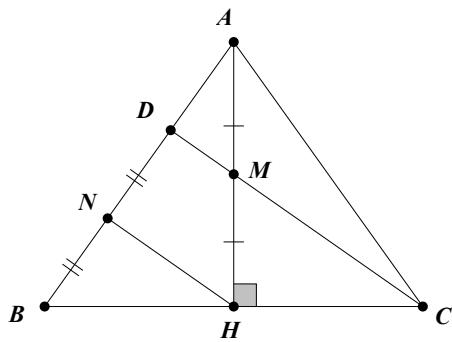
Thay (1) vào (2) ta có:  $CD = 2.2DI = 4DI$ .

**Bài toán 10:** Cho  $\Delta ABC$  cân tại  $A$ . Gọi  $M$  là trung điểm của đường cao  $AH$ .  $D$  là giao điểm của  $CM$  và  $AB$ .

a) Gọi  $N$  là trung điểm của  $BD$ . Chứng minh  $HN \parallel DC$ .

$$b) \text{Chứng minh } AD = \frac{1}{3}AB.$$

**Lời giải:**



a)  $\Delta ABC$  cân tại  $A$  nên đường cao  $AH$  đồng thời là đường trung tuyến hay  $H$  là trung điểm của  $BC$ .

$N$  là trung điểm của  $BD$  nên  $HN$  là đường trung bình của  $\Delta BDC \Rightarrow HN \parallel DC$ .

b) Ta có  $N$  là trung điểm của  $BD$  (vì  $HN$  là đường trung bình) hay  $NB = ND$  (1)

Mặt khác  $M$  là trung điểm của  $AH$  (*gt*),  $CD \parallel NH$  hay  $MD \parallel NH$ .

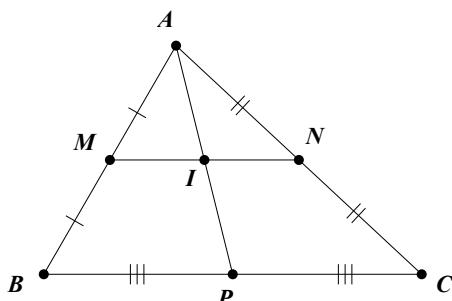
Do đó  $DM$  là đường trung bình của  $\Delta ANH \Rightarrow D$  là trung điểm của  $AN$

hay  $ND = AD$  (2)

Từ (1) và (2) suy ra  $AD = DN = NB$  hay  $AD = \frac{1}{3}AB$ .

**Bài toán 11:** Cho tam giác  $ABC$ . Gọi  $M, N, P$  lần lượt là trung điểm của ba cạnh  $AB, AC$  và  $BC$ . Gọi  $I$  là giao điểm của  $AP$  và  $MN$ . Chứng minh  $IM = IN$ .

**Lời giải:**



$MN$  là đường trung bình của  $\Delta ABC \Rightarrow MN \parallel BC$ .

$I$  là giao điểm của  $MN$  với  $AP$  nên  $MI \parallel BC$

Do đó  $MI$  là đường trung bình của  $\Delta ABP$ .

$\Rightarrow I$  là trung điểm của  $AP$  hay  $IA = IP$  và  $MI = \frac{1}{2}BP$ .

Tương tự  $NI$  cũng là đường trung bình của  $\Delta APC$ .

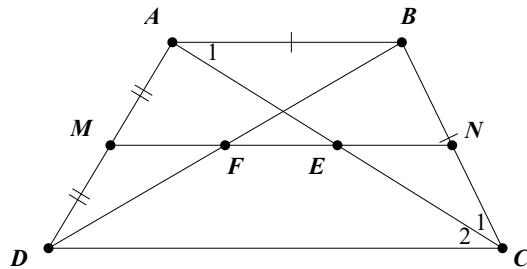
$\Rightarrow IN = \frac{1}{2}PC$  mà  $PB = PC$  (*gt*)  $\Rightarrow IM = IN$ .

**Bài toán 12:** Cho hình thang  $ABCD$  ( $AB \parallel CD$ ) và  $AB = BC$ .

a) Chứng minh:  $CA$  là tia phân giác của  $\widehat{BCD}$ ;

b) Gọi  $M, N, E, F$  lần lượt là trung điểm của  $AD, BC, AC, BD$ . Chứng minh rằng  $M, N, E, F$  thẳng hàng.

**Lời giải:**



a) Ta có:  $AB = BC$  nên  $\Delta ABC$  cân.

$$\Rightarrow \widehat{A}_1 = \widehat{C}_1, \text{ lại có } AB // CD (gt)$$

$$\Rightarrow \widehat{A}_1 = \widehat{C}_2 \text{ (2 góc so le trong)}$$

Do đó  $\widehat{C}_1 = \widehat{C}_2$  chứng tỏ  $CA$  là tia phân giác của  $\widehat{BCD}$ .

b)  $M, E$  lần lượt là trung điểm của  $AD$  và  $AC$

nên  $ME$  là đường trung bình của  $\Delta ADC \Rightarrow ME // DC \quad (1)$

Tương tự ta có  $NE$  là đường trung bình của  $\Delta ABC \Rightarrow NE // AB // DC \quad (2)$

Từ (1) và (2)  $\Rightarrow ME$  và  $NE$  phải trùng nhau (tiên đề Euclid) hay ba điểm  $M, E, N$  thẳng hàng.

Chứng minh tương tự ta có  $M, F, E$  thẳng hàng.

Vậy bốn điểm  $M, N, E, F$  thẳng hàng.

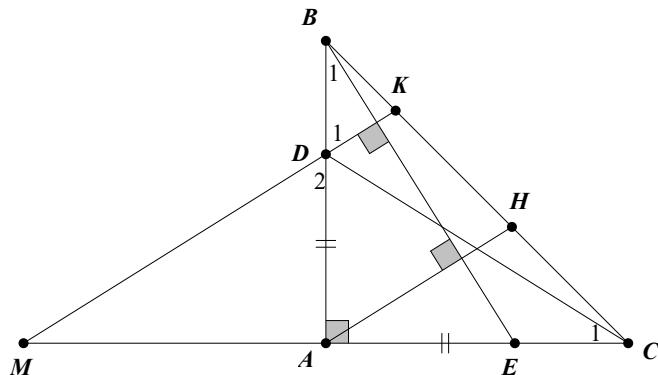
**Bài toán 13:** Cho tam giác  $ABC$  vuông cân tại  $A$ . Trên các cạnh góc vuông  $AB, AC$  lấy  $D$  và  $E$  sao cho  $AD = AE$ . Qua  $D$  vẽ đường thẳng vuông góc với  $BE$  cắt  $BC$  ở  $K$ . Qua  $A$  vẽ đường thẳng vuông góc với  $BE$  cắt  $BC$  ở  $H$ . Gọi  $M$  là giao điểm của  $DK$  và  $AC$ . Chứng minh rằng:

a)  $\Delta BAE = \Delta CAD$

b)  $\Delta MDC$  cân

c)  $HK = HC$

### Lời giải:



a) Ta có  $AB = AC, AE = AD (gt)$

Vậy  $\Delta BAE = \Delta CAD (c-g-c)$

b) Ta có  $\widehat{D}_1 = \widehat{D}_2$  (2 góc đối đỉnh)

$$\Rightarrow \widehat{B}_1 = \widehat{M} \text{ (cùng phụ với } \widehat{D}_1 \text{ và } \widehat{D}_2 \text{) mà } \widehat{B}_1 = \widehat{C}_1 \text{ (cmt)} \Rightarrow \widehat{M} = \widehat{C}_1 \text{ hay } \Delta MDC \text{ cân}$$

c)  $\Delta MDC$  cân tại  $D$  nên đường cao  $DA$  đồng thời là đường trung tuyến

hay  $A$  là trung điểm của  $MC$ .

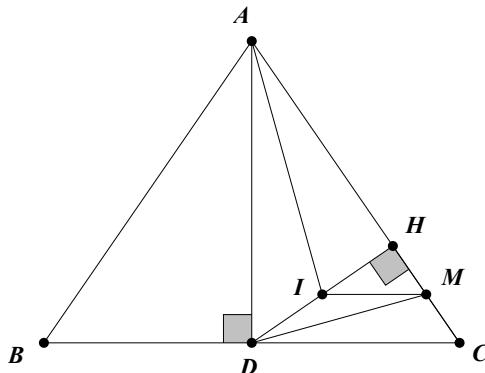
Lại có  $AH // MK \perp BC$ .

Do đó  $AH$  là đường trung bình của  $\Delta MCK \Rightarrow H$  là trung điểm của  $KC$  hay  $HK = HC$ .

**Bài toán 14:** Cho  $\Delta ABC$  cân tại  $A$ , đường cao  $AD$ , kẻ  $DH \perp AC$ . Gọi  $I$  là trung điểm của  $DH$ ,  $M$  là trung điểm của  $HC$ . Chứng minh.

- a)  $IM \perp AD$
- b)  $AI \perp DM$

Lời giải:

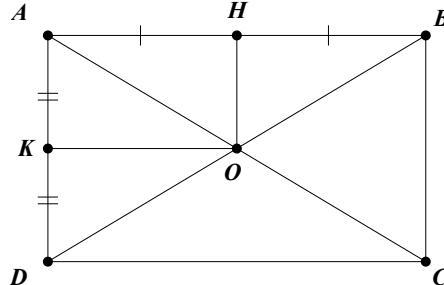


a) Ta có  $I, M$  lần lượt là trung điểm của  $HD$  và  $HC$  nên  $IM$  là đường trung bình của  $\Delta HDC$   $\Rightarrow IM \parallel DC$  mà  $AD \perp BC$  ( $gt$ )  $\Rightarrow IM \perp AD$ .

b) Ta có  $IM \perp AD$  ( $cmt$ ),  $DL \perp AC$  ( $gt$ )  
 $\Rightarrow I$  là trực tâm của  $\Delta ADC \Rightarrow AI \perp DC$  (đpcm)

**Bài toán 15:** Cho hình chữ nhật  $ABCD$  có  $AC$  cắt  $BD$  tại  $O$ . Gọi  $K, H$  lần lượt là trung điểm của  $AB, AD$ . Chứng minh rằng tứ giác  $AHOK$  là hình chữ nhật.

Lời giải:



Ta có  $O$  là giao điểm của hai đường chéo hình chữ nhật  $ABCD$  nên  $OA = OC = OB = OD$   
Xét  $\Delta ABD$  có  $O$  là trung điểm của  $BD$  ( $cmt$ ),  $H$  là trung điểm của  $AB$  ( $gt$ )

$\Rightarrow OH$  là đường trung bình của  $\Delta ABD \Rightarrow OH \parallel AD$  và  $OH = \frac{1}{2} AD$

Lại có  $K$  là trung điểm của  $AD$  ( $gt$ )  $\Rightarrow AK = DK = \frac{1}{2} AD$

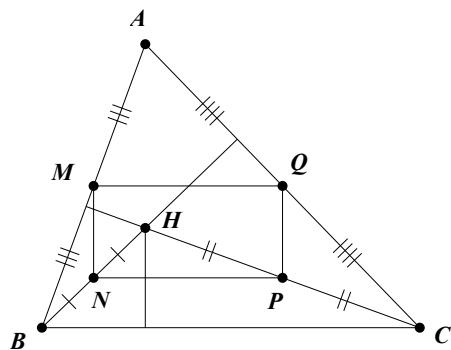
$\Rightarrow OH = AK \left( = \frac{1}{2} AD \right)$ ,  $OH \parallel AK$  ( $OH \parallel AD$ )

$\Rightarrow AHOK$  là hình bình hành (Hai cạnh đối song song và bằng nhau)

Hình bình hành  $AHOK$  có  $\widehat{HAK} = 90^\circ$  ( $gt$ ) nên tứ giác  $AHOK$  là hình chữ nhật.

**Bài toán 16:** Cho tam giác  $ABC$  nhọn có  $H$  là trực tâm. Gọi  $M, N, P, Q$  là trung điểm của các đoạn thẳng  $AB, BH, HC, CA$ . Chứng minh tứ giác  $MNPQ$  là hình chữ nhật.

Lời giải:



Ta có:  $M$  là trung điểm của  $AB$  (*gt*)

$N$  là trung điểm của  $BH$  (*gt*)

$\Rightarrow MN$  là đường trung bình của  $\Delta AHB$

$$\Rightarrow MN \parallel AH \text{ và } MN = \frac{1}{2} AH \quad (1)$$

Chứng minh tương tự với  $\Delta AHC$

Ta có  $QP$  là đường trung bình của  $\Delta AHC$

$$\Rightarrow QP \parallel HC \text{ và } QP = \frac{1}{2} AH \quad (2)$$

Từ (1) và (2)  $\Rightarrow QP \parallel MN$  và  $QP = MN \left( = \frac{1}{2} AH \right)$

Do đó tứ giác  $MNPQ$  là hình bình hành (\*). (hai cạnh đối vừa song song vừa bằng nhau)

(\*) Ta có  $MN \parallel AH$  (*cmt*);  $AH \perp BC$  (*gt*)

$\Rightarrow MN \perp BC$  (1) (Nếu một đường thẳng vuông góc với một trong hai đường thẳng song song thì nó vuông góc với đường còn lại).

$MQ$  là đường trung bình của  $\Delta ABC$  ( $M, N$  lần lượt là trung điểm của  $AB$  và  $AC$  (*gt*))

$$\Rightarrow MQ \parallel BC \quad (2)$$

Từ (1) và (2)  $\Rightarrow MN \perp MQ$  (\*\*)

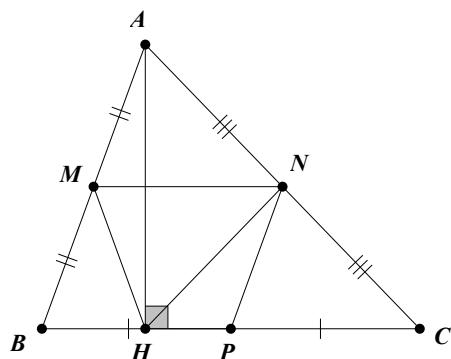
Từ (\*) và (\*\*)  $\Rightarrow MNPQ$  là hình chữ nhật (hình bình hành có một góc vuông).

*Chú ý:* Bài toán 16 chỉ là một câu trong bài toán “Vòng tròn Ole vòng tròn 9 điểm) mà chúng ta sẽ gặp được trong chương trình lớp 9.

Xin các bạn ghi nhớ để được gấp lại.

**Bài toán 17:** Cho tam giác  $ABC$  nhọn. Gọi  $M, N, P$  lần lượt là trung điểm của  $AB, AC, BC$ . Kẻ đường cao  $AH$ . Chứng minh rằng tứ giác  $MNPH$  là hình thang cân.

**Lời giải:**



Ta có:  $M$  là trung điểm của  $AB(gt)$

$N$  là trung điểm của  $AC(gt)$

$\Rightarrow MN$  là đường trung bình của  $\Delta ABC$

$\Rightarrow MN \parallel BC$  hay  $MN \parallel HP$

Do đó tứ giác  $MNPH$  là hình thang (\*) (Tứ giác có hai cạnh đối song song).

Lại có  $M, P$  lần lượt là trung điểm của  $AB$  và  $BC$

$\Rightarrow MP$  là đường trung bình của  $\Delta ABC$

$$\Rightarrow MP = \frac{1}{2} AC \quad (1)$$

$\Delta AHC$  có  $HN$  là trung tuyến ( $N$  là trung tuyến của  $AC$ )

$$\Rightarrow HN = \frac{1}{2} AC \quad (2)$$

Từ (1) và (2)  $\Rightarrow MP = HN$  (\*\*)

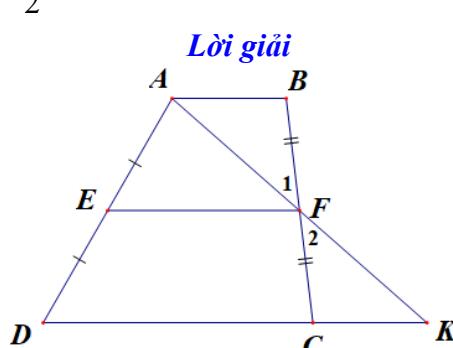
Từ (\*) và (\*\*)  $\Rightarrow MNPH$  là hình thang cân (hình thang có hai đường chéo bằng nhau)

**Bài toán 18.** Cho hình thang  $ABCD$  ( $AB \parallel CD$ ) có  $E$  và  $F$  lần lượt là trung điểm hai cạnh bên  $AD$  và  $BC$ . Gọi  $K$  là giao điểm của  $AF$  và  $DC$  (hình vẽ bên).

a) Tam giác  $FBA$  và tam giác  $FCK$  có bằng nhau không? Vì sao?

b) Chứng minh  $EF \parallel CD \parallel AB$ .

c) Chứng minh  $EF = \frac{AB + CD}{2}$



a) Ta có  $ABCD$  là hình thang có  $AB \parallel CD$  hay  $AB \parallel CK$

$$\Rightarrow \widehat{FBA} = \widehat{FCK} \text{ (cặp góc so le trong)}$$

Xét  $\Delta FBA$  và  $\Delta FCK$  có  $\widehat{F}_1 = \widehat{F}_2$  (đối đỉnh)

$$FB = FC \text{ (gt); } \widehat{ABF} = \widehat{KCF} \text{ (so le trong)} \Rightarrow \Delta FBA = \Delta FCK \text{ (g.c.g)}$$

b) Ta có  $FA = FK$  hay  $F$  là trung điểm của  $AK$  (cmt)

lại có  $E$  là trung điểm của  $AD$  (gt)

$\Rightarrow EF$  là đường trung bình của tam giác  $ADK \Rightarrow EF \parallel DK$

mà  $DK \parallel AB$  ( $ABCD$  là hình thang)  $\Rightarrow EF \parallel CD \parallel AB$

c)  $\Delta ADK$  có  $EF$  là đường trung bình  $\Rightarrow EF = \frac{DK}{2}$

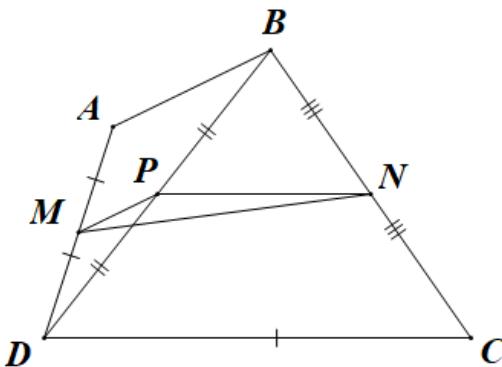
mà  $DK = CD + CK, CK = AB$  (cmt)

$$\text{Suy ra } EF = \frac{AB + CD}{2}$$

**Bài toán 19.** Cho tứ giác  $ABCD$ . Gọi  $M$  và  $N$  lần lượt là trung điểm của hai cạnh  $AB$  và  $BC$ . Chứng

$$\text{tỏ rằng: } MN \leq \frac{AB + CD}{2}$$

*Lời giải*



Gọi  $P$  là trung điểm của  $BD$  ta có  $MP$  là đường trung bình của  $\Delta ABD$ .

$$\Rightarrow MP = \frac{1}{2}AB$$

$$\text{Tương tự ta cũng có } NP = \frac{1}{2}CD$$

$$\text{Nếu } P \in [MN] \text{ ta có: } MN - MP + PN = \frac{AB + CD}{2}$$

$$\text{Nếu } P \notin [MN] \text{ ta có: } MN < MP + NP = \frac{AB + CD}{2}$$

$$\text{Vậy } MN \leq \frac{AB + CD}{2}.$$

Dấu " $=$ " xảy ra  $\Leftrightarrow M, N, P$  thẳng hàng mà  $MP \parallel AB, PN \parallel CB$ .

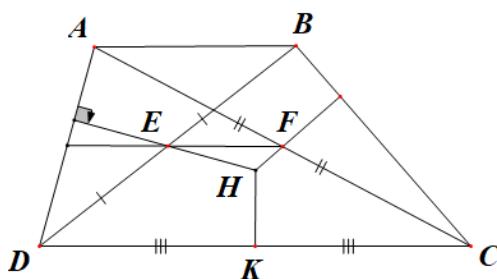
Do đó  $AB \parallel CD$  hay  $ABCD$  là hình thang.

**Bài toán 20.** Cho hình thang  $ABCD$  ( $AB \parallel CD$ ). Gọi  $E, F, K$  lần lượt là trung điểm của  $BD, AC, DC$ . Gọi  $H$  là giao điểm của đường thẳng qua  $E$  vuông góc với  $AD$  và đường thẳng qua  $F$  vuông góc với  $BC$ . Chứng minh rằng:

a)  $H$  là trực tâm của  $\Delta EFK$ .

b)  $\Delta HCD$  cân.

*Lời giải*



a) Ta có  $E, K$  lần lượt là trung điểm của  $BD$  và  $CD$  nên  $EK$  là đường trung bình của  $\Delta BCD$ .

$$\Rightarrow EK \parallel BC \text{ mà } HF \perp BC \text{ (gt)}$$

Chứng minh tương tự ta có  $EH \perp FK$ .

Do đó  $H$  là trực tâm của  $\Delta EFK$ .

b) Gọi  $I$  là trung điểm của  $AD$  ta có  $IE$  là đường trung bình của  $\Delta ABD$ .

$$\Rightarrow IE \parallel AB \parallel CD \quad (1) \text{ và } IF \text{ là đường trung bình của } \Delta ACD$$

$$\Rightarrow IF \parallel DC \quad (2)$$

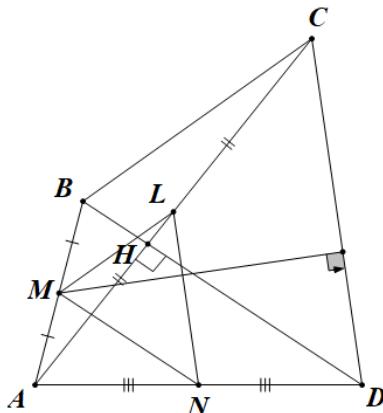
Từ (1) và (2)  $\Rightarrow IE$  và  $IF$  phải trùng nhau (tiên đề Euclid) hay ba điểm  $I, E, F$  thẳng hàng.

hay  $EF \parallel DC$  mà  $KH \perp EF$  ( $H$  là trực tâm  $\Delta EFK$ )  $\Rightarrow KH \perp DC$ .

Vì vậy xét  $AD \perp HC$  có đường trung tuyến  $HK$  đồng thời là đường cao nên  $\Delta DHC$  cân.

**Bài toán 21.** Tứ giác  $ABCD$  có đường chéo  $AC$  và  $BD$  vuông góc với nhau. Gọi  $M, N, L$  lần lượt là trung điểm của  $AB, AD$  và đường chéo  $AC$ . Từ  $M$  kẻ đường thẳng vuông góc với  $CD$  cắt  $AC$  tại  $H$ . Chứng minh rằng:  $H$  là trực tâm của tam giác  $MNL$ .

*Lời giải*



Ta có  $AC \perp BD$  (giả thiết) hay  $HL \perp BD$   
mà  $MN \parallel BD$  ( $MN$  là đi trung bình của  $\Delta ABD$ ).

$$\Rightarrow HL \perp MN \quad (1)$$

Lại có  $MH \perp CD$  (giả thiết)

$NL \parallel CD$  ( $NL$  là đường trung bình của  $\Delta ACD$ ).

$$\Rightarrow MH \perp NL \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có  $H$  là trực tâm của tam giác  $MNL$

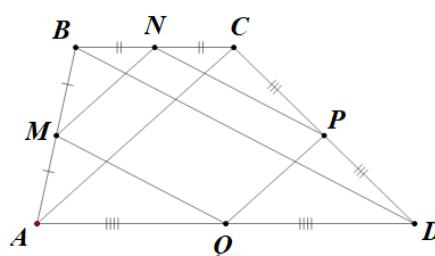
**Bài toán 22.** Cho tứ giác  $ABCD$  có  $M, N, P, Q$  các cạnh  $AB, BC, CD, DA$ .

a) Chứng minh tứ giác  $MNPQ$  là hình bình hành.

b) Cho  $AC = BD$ . Chứng minh tứ giác  $MNPQ$  là hình thoi.

c) Cho  $AC \perp BD$ . Chứng minh tứ giác  $MNPQ$  là hình chữ nhật

*Lời giải*



a) Ta có  $M$  là trung điểm của  $AB$  (gt);  $N$  là trung điểm của  $BC$  (gt)

$\Rightarrow MN$  là đường trung bình của  $\Delta ABC$

$$\Rightarrow MN \parallel AC \text{ và } MN = \frac{1}{2} AC \quad (1)$$

Chứng minh tương tự  $PQ$  là đường trung bình của  $\Delta ACD$

$$\Rightarrow PQ \parallel AC \text{ và } PQ = \frac{1}{2} AC \quad (2)$$

Từ (1) và (2)  $\Rightarrow MN \parallel PQ$  và  $MN = PQ$

Do đó tứ giác  $MNPQ$  là hình bình hành (hai cạnh đối vừa song song vừa bằng nhau).

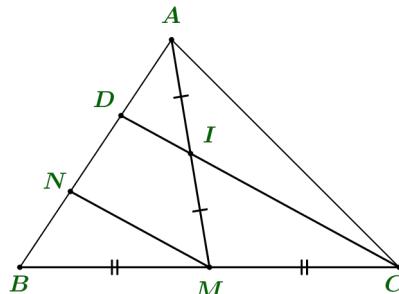
b) Cho  $AC = BD \Rightarrow MN = NP = PQ = QM$  nên tứ giác  $MNPQ$  là hình thoi (tứ giác có bốn cạnh bằng nhau).

c) Cho  $AC \perp BD \Rightarrow MN \perp NP$  hay  $MNPQ$  là hình chữ nhật.

### C. BÀI TẬP

- 4.5. Cho tam giác  $ABC$ . Gọi  $M$  là trung điểm của  $BC$ ,  $I$  là trung điểm của  $AM$ . Gọi  $D$  là giao điểm của  $CI$  và  $AB$ . Chứng minh rằng:  $BD = 2AD$ .

*Lời giải*



Kẻ qua  $M$  đường thẳng song song với  $CD$  cắt  $AB$  tại  $N$ .

Suy ra  $N$  là trung điểm của  $BD$ .

Xét tam giác  $ANM$  có  $I$  là trung điểm của  $AM$  (gt)

$ID \parallel MN$  (gt)  $\Rightarrow D$  là trung điểm của  $AN$ .

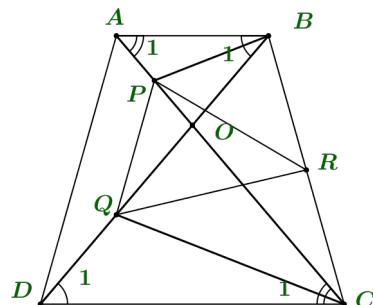
Do đó  $AD = DN = NB$  hay  $BD = 2AD$ .

- 4.6. Cho hình thang  $ABCD$  ( $AB \parallel CD$  và  $AB < CD$ ). Gọi  $O$  là giao điểm của  $AC$  và  $BD$  và  $\Delta OCD$  đều.

a) Chứng minh:  $ABCD$  là hình thang cân.

b) Gọi  $P, Q, R$  lần lượt là trung điểm của  $OA, OD, BC$ . Chứng minh  $\Delta PQR$  đều.

*Lời giải*



- a) Ta có  $AB \parallel CD$  và  $COD$  là tam giác đều (gt)  $\Rightarrow \begin{cases} \widehat{A_1} = \widehat{C_1} = 60^\circ \\ \widehat{B_1} = \widehat{D_1} = 60^\circ \end{cases}$  (so le trong).

Do đó tam giác  $OAB$  đều  $\Rightarrow OA = OB$

Mà  $OC = OD$  (tam giác  $OCD$  đều)

Suy ra  $OA + OC = OB + OD$  hay  $AC = BD$ .

Do đó  $ABCD$  là hình thang cân (hình thang có hai đường chéo bằng nhau).

- b)  $\triangle AOB$  đều (cmt) có  $P$  là trung điểm của  $AO$  (gt)

$\Rightarrow BP$  đồng thời cũng là đường cao hay  $\widehat{BPC} = 90^\circ$ .

Xét  $\triangle BPC$  có  $PR$  là đường trung tuyến ( $R$  là trung điểm  $BC$  (gt))

$$\Rightarrow PR = \frac{1}{2}BC.$$

Chứng minh tương tự ta có  $POB$  là tam giác vuông tại  $Q$  có  $QR = \frac{1}{2}BC$ .

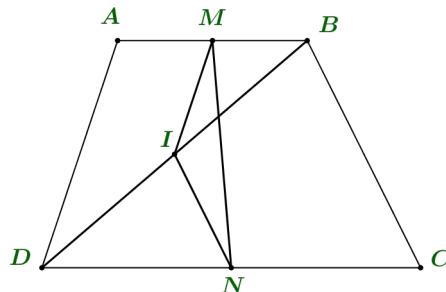
Mặt khác  $PQ$  là đường trung bình của  $\triangle AOB$ .

$\Rightarrow PQ = \frac{1}{2}AD$  mà  $AD = BC$  (cạnh bên hình thang cân)

$\Rightarrow PR = QR = PQ$  hay  $\triangle PQR$  đều.

- 4.7. Chứng minh rằng: “Nếu đoạn thẳng nối các trung điểm của cặp cạnh đối diện một tứ giác bằng nửa tổng hai cạnh kia thì tứ giác đó là hình thang”.

### Lời giải



Gọi  $M, N$  lần lượt là trung điểm của hai cạnh đối diện  $AB$  và  $CD$  và  $I$  là trung điểm của đường chéo  $BD$ .

Ta có  $MI$  là đường trung bình của  $\triangle ABD \Rightarrow MI = \frac{1}{2}AD$ .

Tương tự  $\triangle BCD$  có  $NI = \frac{1}{2}BC \Rightarrow MI + NI = \frac{AD + BC}{2}$ .

mà theo giả thiết  $MN = \frac{AD + BC}{2} \Rightarrow MN = MI + NI$ .

Chứng tỏ  $I \in MN$ .

Vậy  $MN \parallel AD$  hay  $MN \parallel BC$  hay  $ABCD$  là hình thang.

- 4.8. Cho tam giác  $ABC$  cân tại  $A$ , đường cao  $AH$ . Gọi  $M$  là trung điểm của  $AB$ .  $G$  là giao điểm của  $AH$  và  $CM$ ,  $BG$  cắt  $AC$  tại  $N$ .

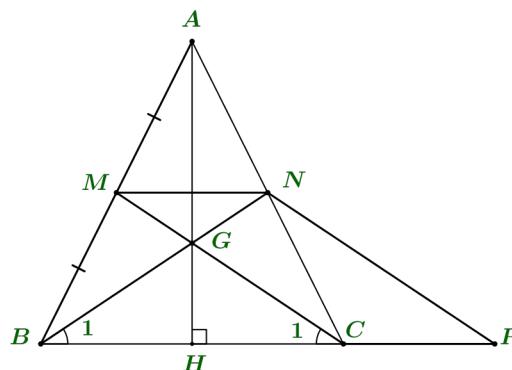
a) Chứng minh rằng: Tứ giác  $BMNC$  là hình thang cân.

b) Đường thẳng qua  $N$  và song song với  $MC$  cắt đường thẳng  $BC$  tại  $P$ .

Chứng minh rằng  $\triangle BNP$  cân.

c) Chứng minh rằng  $MN^2 = PB^2$ .

### Lời giải



a)  $\triangle ABC$  cân tại  $A$  nên đường cao  $AH$  đồng thời là đường trung tuyến.

$M$  là trung điểm của  $AB$  (gt)

$\Rightarrow CM$  là trung tuyến của  $\triangle ABC$ .

$G$  là giao điểm của  $AH$  và  $CM$  nên  $G$  là trọng tâm của  $\triangle ABC$ .

$\Rightarrow BG$  là trung tuyến thứ ba nên  $N$  là trung điểm của  $AC$ .

Ta có  $MA = MB = \frac{1}{2}AB, NA = NC = \frac{1}{2}AC$  mà  $AB = AC$  (gt)

$\Rightarrow MA = MB = NA = NC$  hay  $\triangle AMN$  cân tại  $A$ .

$$\Rightarrow \widehat{AMN} = \widehat{ANM} = \frac{180^\circ - \widehat{A}}{2}$$

$\triangle ABC$  cân tại  $A$  (gt)

$$\Rightarrow \widehat{ABC} = \widehat{ACB} = \frac{180^\circ - \widehat{A}}{2}$$

Từ (1) và (2)  $\Rightarrow \widehat{AMN} = \widehat{ABC}$

$\Rightarrow MN \parallel BC$  (cặp góc đồng vị bằng nhau)

Do đó  $BMNC$  là hình thang. Lại có  $\widehat{B} = \widehat{C}$  nên  $BMNC$  là hình thang cân.

**b)** Xét  $\triangle BGC$  có  $GH$  là đường cao đồng thời là trung tuyến (cmt) nên  $\triangle BGC$  cân tại  $G \Rightarrow \widehat{B}_1 = \widehat{C}_1$  mà  $NP \parallel MC$  (gt).

$$\Rightarrow \widehat{C}_1 = \widehat{P}$$
 (cặp góc đồng vị)

$\Rightarrow \widehat{B}_1 = \widehat{P}$  hay  $\triangle BNP$  cân tại  $N$ .

**c)** Ta có  $MNPC$  là hình thang có hai cạnh bên  $MC \parallel NP$  nên  $MN = CP$ .

Lại có  $MN = \frac{1}{2}BC$  ( $MN$  là đường trung bình của  $\triangle ABC$ )

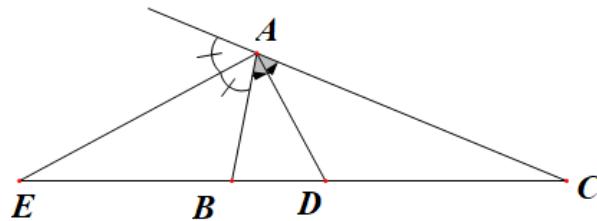
$$\Rightarrow MN = \frac{1}{3}BP \Rightarrow MN^2 = \frac{1}{9}BP^2 \Rightarrow 9MN^2 = BP^2.$$

## Bài 17. TÍNH CHẤT ĐƯỜNG PHÂN GIÁC CỦA TAM GIÁC

### A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

$\triangle ABC$  có  $AD, AE$  lần lượt là các phân giác trong và ngoài của góc  $A$ .

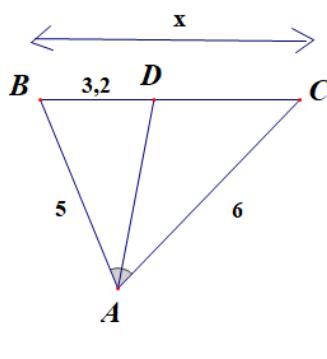
$$\Rightarrow \frac{DB}{DC} = \frac{EB}{EC} = \frac{AB}{AC}$$



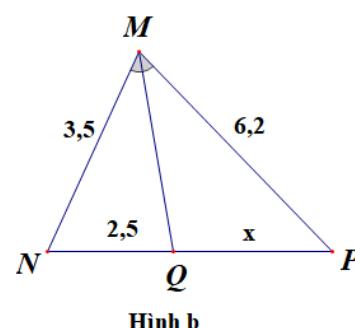
### B. PHÂN LOẠI CÁC BÀI TẬP

#### I. Tính các tỉ số và độ dài các đoạn thẳng

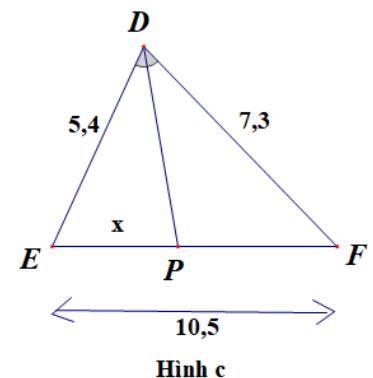
**Bài toán 1.** Tìm  $x$  trong các hình sau đây (làm trên kết quả đến chữ số thập phân thứ nhất),



Hình a

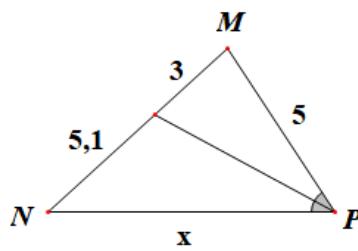


Hình b

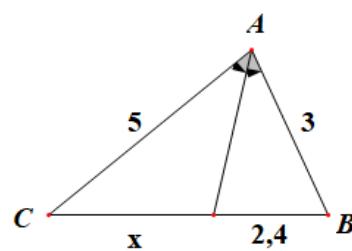


Hình c

**Bài toán 2.** Tính độ dài  $x$  trong các hình vẽ sau:

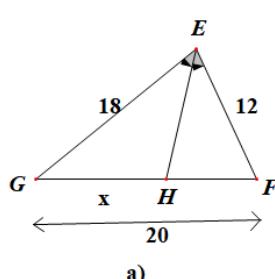


a)

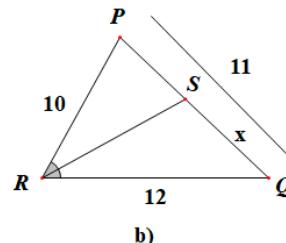


b)

**Bài toán 3.** Tính độ dài  $x$  trong các hình vẽ sau.



a)



b)

**Bài toán 4.** Cho tam giác  $ABC$ . Đường phân giác trong của góc  $A$  cắt  $BC$  tại  $D$ . Tính độ dài đoạn thẳng  $DC$  biết  $AB = 4,5m$ ;  $AC = 7,0m$  và  $CB = 3,5m$  (làm tròn kết quả đến hàng phần chục).

**Bài toán 5.** Cho hình vẽ bên, biết  $AI, AJ$  lần lượt là phân giác góc trong và ngoài của tam giác  $ABC$ .

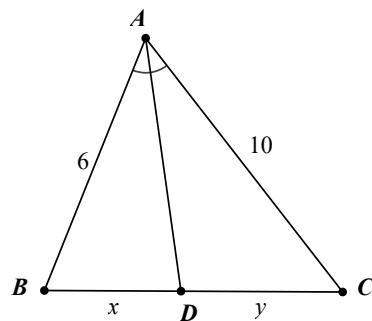
Hãy tính:

- a)  $IC$       b)  $JB$

**Bài toán 6.** Cho tam giác  $ABC$  có  $AB = 4$ ,  $BC = 6$ ,  $CA = 8$ ,  $AD$  là một đường phân giác và  $I$  là giao

điểm ba đường phân giác của tam giác đó. Tính  $BD$  và  $\frac{ID}{IA}$ .

**Bài toán 7.** Cho hình vẽ bên.



a) Tính  $\frac{x}{y}$ .

b) Tính  $x, y$  biết  $x + y = 9$ .

**Bài toán 8.** Cho tam giác  $\Delta ABC$  vuông tại  $A$ , biết  $AB = 8; AC = 6$  và  $BD$  là phân giác góc  $B$ . Tính  $BC, AD, DC$ .

**Bài toán 9.** Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$ , phân giác  $BD$  biết  $AD = 3cm; DC = 5cm$ . Tính độ dài  $AB$  và  $BC$ .

**Bài toán 10.** Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$ , biết  $AB = 21cm; AC = 28cm$ , phân giác  $AD$  ( $D \in BC$ ). Đường thẳng đi qua  $D$  song song với  $BA$  cắt  $CA$  tại  $E$ . Tính độ dài  $DB, DC, ED$ .

**Bài toán 11.** Cho tam giác  $ABC$  có  $AB = 10cm; AC = 25cm; BC = 30cm$ ; đường phân giác góc  $A$  cắt  $BC$  tại  $D$ . Qua  $D$  kẻ  $DE \parallel AB$  ( $E$  thuộc  $AC$ ).

a) Tính độ dài các đoạn thẳng  $DB, DC, DE$ .

b) Biết diện tích tam giác  $ABC$  bằng  $120cm^2$ . Hãy tính diện tích các tam giác  $ABD, AED$  và  $DEC$  (kết quả làm tròn đến chữ số thập phân thứ nhất).

**Bài toán 12.** Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$  có  $AB = 3; AC = 4; BC = 5cm$ ;  $AD$  là đường phân giác. Tính:

a) Độ dài các đoạn thẳng  $BC, DB, DC$ .

b) Khoảng cách từ điểm  $D$  đến đường thẳng  $AC$

c) Độ dài đường phân giác  $AD$ .

**Bài toán 13.** Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$  có  $AB = 3cm; AC = 4cm$ ; đường phân của góc  $A$  cắt  $BC$  tại  $D$ .

a) Tính độ dài các đoạn thẳng  $BC, DB, DC$ .

b) Vẽ đường cao  $AH$ . Tính  $AH, HD$  và  $AD$ .

c) Tính diện tích các tam giác  $ABC, ADB, ADC$ .

**Bài toán 14.** Cho tam giác  $ABC$  cân tại  $A$  có  $AB = 6cm; BC = 4cm$ ; đường phân của góc  $B$  cắt  $AC$  tại  $D$ .

a) Tính độ dài các đoạn thẳng  $AD, CD$ .

b) Đường vuông góc với  $BD$  tại  $D$  cắt đường thẳng  $AC$  tại  $E$ . Tính  $EC$ .

**Bài toán 15.** Cho hình bình hành  $ABCD$  có  $AB = 9cm; BC = 5cm$ ; đường phân của góc  $B$  cắt đường chéo  $AC$  tại  $E$ , phân của góc  $D$  cắt đường chéo  $AC$  tại  $F$ . Tính độ dài đường chéo  $AC$ .

**Bài toán 16.** Cho hình thang cân  $ABCD$  có đáy lớn  $CD$ ,  $\hat{D} = 60^\circ$ , phân giác góc  $D$  cắt đường chéo  $AC$  tại  $I$  chia đường chéo  $AC$  thành hai đoạn theo tỉ số  $\frac{4}{11}$  và cắt đáy  $AB$  tại  $M$ . Biết  $MA - MB = 6cm$ . Tính độ các cạnh đáy của hình thang.

## II. Chứng minh

**Bài toán 17.** Cho tam giác  $ABC$ , trung tuyến  $AD$ , tia phân giác của góc  $ADB$  cắt  $AB$  tại  $M$ , tia phân giác của góc  $ADC$  cắt  $AC$  tại  $N$ .

a) Chứng minh  $MN \parallel BC$ .

b) Gọi  $I$  là giao điểm của  $AD$  và  $MN$ . Chứng minh  $I$  là trung điểm của  $MN$ .

**Bài toán 18.** Cho tam giác  $ABC$ , phân giác  $AD$  ( $D \in BC$ ). Đường thẳng qua  $D$  song song với  $AB$  cắt  $AC$  tại  $E$ . Chứng minh rằng  $\frac{AC}{AB} = \frac{EC}{EA}$ .

**Bài toán 19.** Tam giác  $ABC$  có  $AB = 15\text{cm}$ ,  $AC = 20\text{cm}$ ,  $BC = 25\text{cm}$ . Đường phân giác của góc  $BAC$  cắt cạnh  $BC$  tại  $D$ .

a) Tính độ dài đoạn thẳng  $DB$  và  $DC$ .

b) Tính tỉ số diện tích của hai tam giác  $ABD$  và  $ACD$ .

**Bài toán 20.** Cho tam giác  $ABC$  có đường trung tuyến  $AM$ . Tia phân giác của góc  $ABC$  lần lượt cắt các đoạn thẳng  $AM, AC$  tại điểm  $D, E$ . Chứng minh  $\frac{EC}{EA} = 2 \cdot \frac{DM}{DA}$ .

**Bài toán 21.** Cho tam giác  $ABC$ , phân giác  $AD$ . Gọi  $M$  là điểm bất kì thuộc cạnh  $AC$  và  $E$  là giao điểm của  $AD$  và  $BM$ . Chứng minh rằng:  $\frac{DB}{DC} \cdot \frac{EB}{EM} = \frac{AM}{AC}$ .

**Bài toán 22.** Cho tam giác  $ABC$  cân tại  $A$  có  $\widehat{BAC} = 135^\circ$ . Dựng qua  $A$  tia  $Ax$  vuông góc với  $AC$  và tia  $Ay$  vuông góc với  $AB$ , các tia  $Ax, Ay$  lần lượt cắt cạnh  $BC$  tại  $D$  và  $E$  ( $D, E \in BC$ ).

Chứng minh:  $BD^2 = BC \cdot DE$ .

**Bài toán 23.** Cho hình bình hành  $ABCD$ , các tia phân giác của các góc  $A$  và  $D$  lần lượt cắt đường chéo  $BD$  và  $AC$  tại  $M$  và  $N$ . Chứng minh rằng:  $MN \parallel BC$ .

**Bài toán 24.** Cho tam giác  $ABC$  cân tại  $A$ , các phân giác của góc  $\hat{B}$  và  $\hat{C}$  lần lượt cắt  $AC$ ,  $AB$  tại  $D$  và  $E$ . Chứng minh rằng:

a)  $DE \parallel BC$ .

$$\text{b) } \frac{1}{BC} + \frac{1}{AC} = \frac{1}{DE}.$$

**Bài toán 25.** Cho hình thoi  $ABCD$ . Điểm  $M$  thuộc cạnh  $AB$  thỏa mãn  $AB = 3AM$ . Hai đoạn thẳng  $AC$  và  $AM$  cắt nhau tại  $N$ . Chứng minh  $ND = 3MN$ .

**Bài toán 26.** Cho tứ giác  $ABCD$  với các tia phân giác của góc  $CAD$  và  $CBD$  cùng đi qua điểm  $E$  thuộc cạnh  $CD$  (xem hình vẽ). Chứng minh  $AD \cdot BC = AC \cdot BD$ .

**Bài toán 27.** Cho tam giác  $ABC$ , có ba đường phân giác  $AD, BE$  và  $CF$ . Chứng minh rằng:

$$\frac{FA}{FB} \cdot \frac{DB}{DC} \cdot \frac{EC}{EA} = 1.$$

**Bài toán 28.** Cho tam giác. Trên các cạnh  $BC, CA, AB$  lấy các điểm tương ứng  $A_1, B_1, C_1$ . Chứng minh rằng các đường thẳng  $AA_1, BB_1, CC_1$  đồng quy khi và chỉ khi:  $\frac{AC_1}{BC_1} \cdot \frac{BA_1}{CA_1} \cdot \frac{CB_1}{AB_1} = 1$  (định lí Ceva).

## C. BÀI TẬP

- 4.9.** Cho tam giác  $ABC$  có ba đường phân giác  $AD, BE, CF$ . Biết  $AB = 4, BC = 5, CA = 6$ . Tính  $BD, CE, AF$ .
- 4.10.** Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$ , phân giác  $AD$ . Tính độ dài  $AB, AC$  biết  $BD = 3\text{cm}$  và  $DC = 4\text{cm}$ .

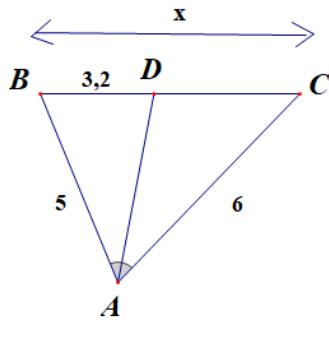
- 4.11.** Cho tam giác  $ABCD$  vuông tại  $A$ , đường cao  $AH$ . Gọi  $AD$ ,  $AE$  lần lượt là các tia phân giác của góc  $BAH$  và  $CAH$  ( $D, E$  thuộc  $BC$ ) biết  $AB=3\text{cm}$ ,  $AC=4\text{cm}$ .
- Tính độ dài  $AH$ .
  - Tính độ dài  $HD$ ,  $HE$ .
- 4.12.** Các cạnh của tam giác có tỉ lệ  $7:11:12$  đường phân giác của góc lớn nhất bằng  $3,5\text{cm}$ . Tính độ dài các đoạn thẳng do phân giác trong hai góc còn lại chia đường phân giác của góc lớn nhất đã nói trên.
- 4.13.** Cho tam giác  $ABC$ . Điểm  $D$  nằm trên cạnh  $BC$  thỏa mãn  $\frac{DB}{DC}=\frac{AB}{AC}\neq 1$ . Chứng minh rằng  $AD$  là tia phân giác của góc  $BAC$ .
- 4.14.** Cho tam giác  $ABC$ . Gọi  $M, N$  lần lượt là trung điểm của  $AB$  và  $AC$ . Trên  $MN$  lấy  $D$  sao cho  $\frac{DM}{DN}=\frac{AC}{AB}$ . Nối  $D$  với trung điểm  $P$  của  $BC$ . Chứng minh rằng  $PD$  là tia phân giác của góc  $MPN$ .
- 4.15.** Cho tam giác  $ABC$  điểm  $D$  thuộc cạnh  $BC$  sao cho  $\frac{BD}{DC}=\frac{AB}{AC}$ . Chứng minh  $AD$  là tia phân giác của góc  $BAC$ .

## DÁP ÁN THAM KHẢO

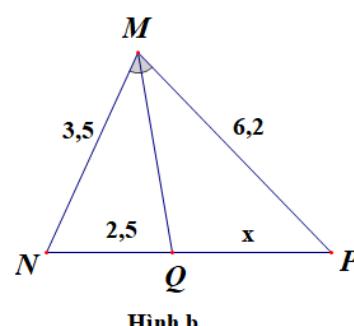
### B. PHÂN LOẠI CÁC BÀI TẬP

#### I. Tính các tỉ số và độ dài các đoạn thẳng

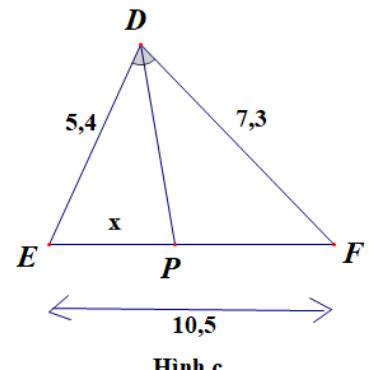
**Bài toán 1.** Tìm  $x$  trong các hình sau đây (làm trên kết quả đến chữ số thập phân thứ nhất),



Hình a



Hình b



Hình c

#### Lời giải

Hình a)  $AD$  là phân giác của  $\Delta ABC$  ta có:

$$\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC} = \frac{5}{6} \text{ hay } \frac{3,2}{DC} = \frac{5}{6}$$

$$\Rightarrow DC = \frac{3,2 \cdot 6}{5} = 3,8 \Rightarrow x = BD + DC = 3,2 + 3,8 = 7(cm)$$

Hình b)  $MQ$  là phân giác của  $\Delta MNP$  ta có  $\frac{QN}{QP} = \frac{MN}{MP} = \frac{3,5}{6,2}$

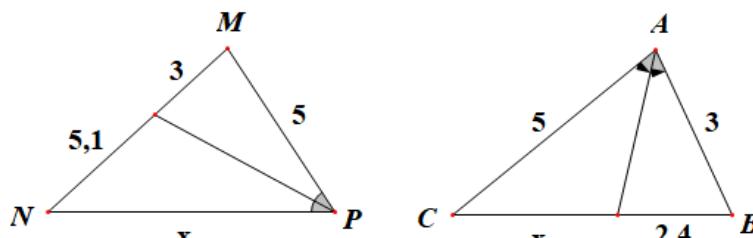
$$\Rightarrow QP = \frac{QN \cdot 6,2}{3,5} = \frac{2,5 \cdot 6,2}{3,5} \approx 4,4 \text{ hay } x \approx 4,4$$

\* Hình c)  $DP$  là phân giác của  $\Delta DEF$  ta có  $\frac{PE}{PF} = \frac{DE}{DF} = \frac{5,4}{7,3}$

$$\Rightarrow \frac{PE}{5,4} = \frac{PF}{7,3} = \frac{PE + PF}{5,4 + 7,3} = \frac{EF}{12,7} = \frac{10,5}{12,7}$$

$$\Rightarrow x = PE = \frac{5,4 \cdot 10,5}{12,7} \approx 4,5$$

**Bài toán 2.** Tính độ dài  $x$  trong các hình vẽ sau:



a)

b)

#### Lời giải

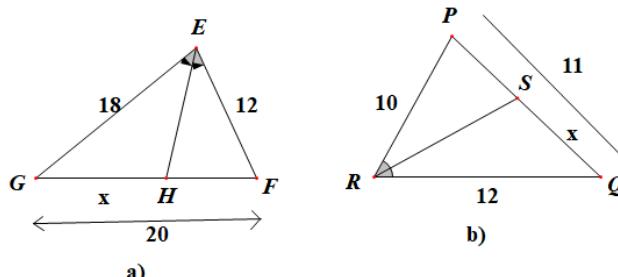
Hình a)  $\Delta MNP$  có  $PH$  là phân giác (gt), ta có:

$$\frac{HM}{HN} = \frac{PM}{PN} \text{ hay } \frac{3}{5,1} = \frac{5}{x} \Rightarrow x = \frac{5 \cdot 1,5}{3} = 8,5$$

Hình b)  $\Delta ABC$  có  $AD$  là phân giác (gt), ta có:

$$\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC} \text{ hay } \frac{2,4}{DC} = \frac{3}{5} \Rightarrow DC = \frac{2,4 \cdot 5}{3} = 4$$

**Bài toán 3.** Tính độ dài  $x$  trong các hình vẽ sau.



**Lời giải**

Hình a) Ta có  $EH$  là phân giác của  $\Delta EGF$

$$\frac{HG}{HF} = \frac{EG}{EF} \text{ hay } \frac{HG}{HF} = \frac{18}{12} = \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{HG}{HF} = \frac{1}{2} = \frac{HG+HF}{3+2} = \frac{HG+HF}{5} = \frac{GF}{5} = \frac{20}{5} = 4$$

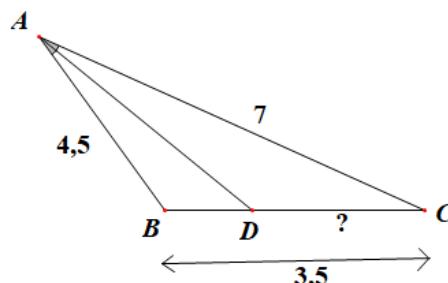
$$\Rightarrow HG = 12. \text{ Vậy } x = 12.$$

Hình b) Ta có  $RS$  là phân giác của  $\Delta PRQ$

$$\frac{SP}{SQ} = \frac{RP}{RQ} \text{ hay } \frac{SP}{SQ} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6} \Rightarrow \frac{SP}{SQ} = \frac{1}{6} = \frac{SP+SQ}{5+6} = \frac{11}{11} = 1$$

**Bài toán 4.** Cho tam giác  $ABC$ . Đường phân giác trong của góc  $A$  cắt  $BC$  tại  $D$ . Tính độ dài đoạn thẳng  $DC$  biết  $AB = 4,5m$ ;  $AC = 7,0m$  và  $CB = 3,5m$  (làm tròn kết quả đến hàng phần chục).

**Lời giải**



Ta có  $AD$  là phân giác của tam giác  $ABC$

$$\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC} = \frac{4,5}{7} \Rightarrow \frac{DB}{DC} = \frac{4,5}{7} = \frac{DB+DC}{4,5+7} = \frac{DB+DC}{11,5} = \frac{3,5}{11,5}$$

$$\Rightarrow DC = \frac{7 \cdot 3,5}{11,5} \Rightarrow DC \approx 2,1$$

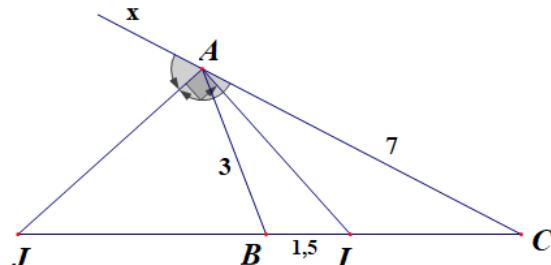
Vậy  $DC \approx 2,1 m$ .

**Bài toán 5.** Cho hình vẽ bên, biết  $AI$ ,  $AJ$  lần lượt là phân giác góc trong và ngoài của tam giác  $ABC$ .

Hãy tính:

- a)  $IC$       b)  $JB$

**Lời giải**



a)  $AI$  là phân giác của tam giác  $ABC$ , ta có:

$$\frac{IB}{IC} = \frac{AB}{AC} \text{ hay } \frac{1,5}{IC} = \frac{3}{7} \Rightarrow IC = \frac{1,5 \cdot 7}{3} = 3,5$$

và  $BC = IB + IC = 1,5 + 3,5 = 5$ .

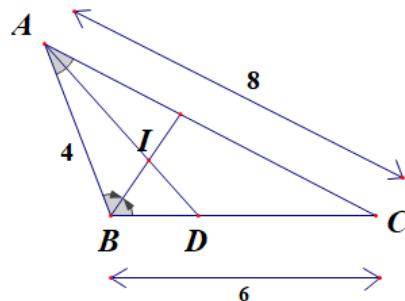
b)  $AJ$  là phân giác ngoài, ta có  $AJ = AI$

và  $\frac{JB}{JC} = \frac{AB}{AC}$  hay  $\frac{JB}{JB + BC} = \frac{3}{7}$  mà  $JB + BC = JB + 5$

$$\frac{JB}{JB + 5} = \frac{3}{7} \Rightarrow 7JB = 3(JB + 5) \Rightarrow 7JB = 3JB + 15 \Rightarrow 4JB = 15 \Rightarrow JB = \frac{15}{4} = 3,75$$

**Bài toán 6.** Cho tam giác  $ABC$  có  $AB = 4$ ,  $BC = 6$ ,  $CA = 8$ ,  $AD$  là một đường phân giác và  $I$  là giao điểm ba đường phân giác của tam giác đó. Tính  $BD$  và  $\frac{ID}{IA}$ .

*Lời giải*



$AD$  là phân giác của tam giác  $ABC$  ta có:

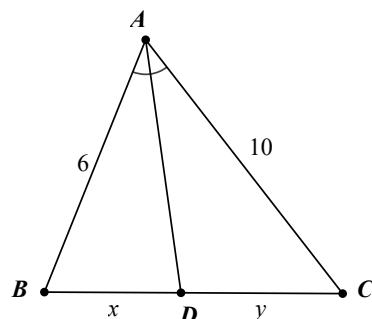
$$\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{BD}{1} = \frac{DC}{2} = \frac{BD + DC}{1+2} = \frac{BC}{3} = \frac{6}{3} = 2$$

Vậy  $BD = 2$

$$\Delta ABD \text{ có } IB \text{ là phân giác, ta có: } \frac{ID}{IA} = \frac{BD}{BA} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

**Bài toán 7.** Cho hình vẽ bên



a) Tính  $\frac{x}{y}$ .

b) Tính  $x, y$  biết  $x + y = 9$

*Lời giải*

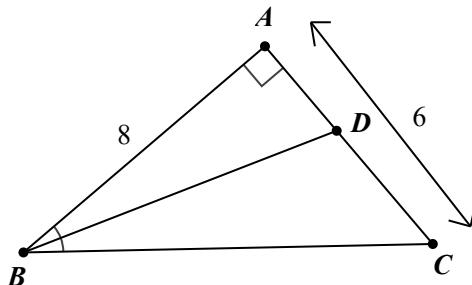
a)  $AD$  là phân giác của  $\Delta ABC$  (gt) nên ta có:  $\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$  hay  $\frac{x}{y} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$ .

b) Ta có  $\frac{x}{y} = \frac{3}{5}$  (cmt) nên  $\frac{x}{3} = \frac{y}{5} = \frac{x+y}{3+5} = \frac{9}{8}$ .

$$\Rightarrow x = \frac{3 \cdot 9}{8} = 3,375; y = \frac{5 \cdot 9}{8} = 5,625.$$

**Bài toán 8.** Cho tam giác  $\Delta ABC$  vuông tại  $A$ , biết  $AB = 8$ ;  $AC = 6$  và  $BD$  là phân giác góc  $B$ . Tính  $BC, AD, DC$ .

*Lời giải*



Tam giác  $\Delta ABC$  vuông tại  $A$  (gt)

theo bài tập 2.11, trang 32, toán 7 tập 1. Ta có:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2$$

$$BC^2 = 8^2 + 6^2$$

$$BC^2 = 100$$

$$BC = 10.$$

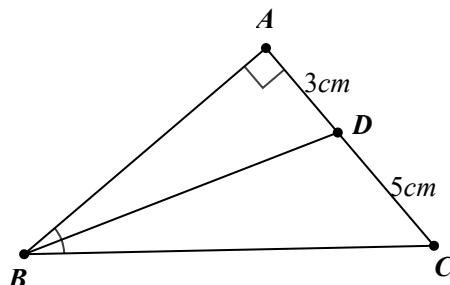
Do  $BD$  là phân giác góc  $B$

$$\text{Ta có: } \frac{DA}{DC} = \frac{AB}{BC} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5} \Rightarrow \frac{DA}{4} = \frac{DC}{5} = \frac{DA+DC}{4+5} = \frac{AC}{9} = \frac{6}{8} = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow DA = \frac{4 \cdot 2}{3} = \frac{8}{3} \approx 2,6 \text{ và } DC = \frac{5 \cdot 2}{3} = \frac{10}{3} \approx 3,4$$

**Bài toán 9.** Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$ , phân giác  $BD$  biết  $AD = 3\text{cm}; DC = 5\text{cm}$ . Tính độ dài  $AB$  và  $BC$ .

*Lời giải*



Ta có  $AC = AD + DC = 3 + 5 = 8\text{cm}$ .

Và  $BD$  là phân giác của  $\Delta ABC$ :

$$\frac{BA}{BC} = \frac{DA}{DC} = \frac{3}{5}$$

$$\Rightarrow \frac{BA}{3} = \frac{BC}{5}$$

$$\Rightarrow \frac{BA^2}{9} = \frac{BC^2}{25} = \frac{BC^2 - BA^2}{25 - 9} = \frac{AC^2}{16} = \frac{8^2}{16} = 4$$

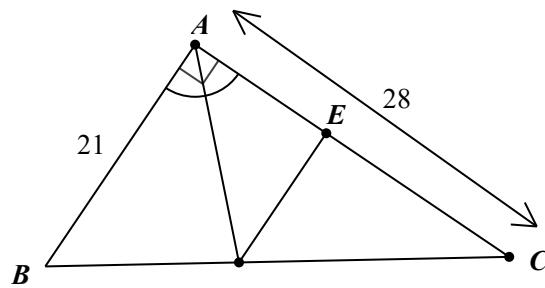
Theo bài 2.11 trang 32 toán 7 tập 1

Suy ra  $BA^2 = 4 \cdot 9 = 36 \Rightarrow BA = 6\text{cm}$ .

$$BC^2 = 4 \cdot 25 = 100 \Rightarrow BC = 10\text{cm}.$$

**Bài toán 10.** Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$ , biết  $AB = 21\text{cm}; AC = 28\text{cm}$ , phân giác  $AD$  ( $D \in BC$ ). Đường thẳng đi qua  $D$  song song với  $BA$  cắt  $CA$  tại  $E$ . Tính độ dài  $DB, DC, ED$ .

*Lời giải*



Vì tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$  nên Theo bài 2.11 trang 32 toán 7 tập 1 ta có:

$$BC^2 = BA^2 + AC^2$$

$$\Rightarrow BC = \sqrt{BA^2 + AC^2} = \sqrt{21^2 + 28^2} = 35\text{cm}$$

$AD$  là phân giác của  $\Delta ABC$  nên ta có:

$$\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC} = \frac{21}{28} = \frac{3}{4}.$$

$$\Rightarrow \frac{DB}{3} = \frac{DC}{4} = \frac{DB+DC}{3+4} = \frac{BC}{7} = \frac{35}{7} = 5.$$

$$\Rightarrow DB = 3.5 = 15\text{cm} \text{ và } DC = 4.5 = 20\text{cm}.$$

Do  $DE \parallel AB$  (gt) nên  $\Rightarrow \frac{DE}{AB} = \frac{DC}{BC}$  (hệ quả định lý talet).

$$DE = \frac{DC \cdot AB}{BC} = \frac{20 \cdot 21}{35} = 12\text{cm}.$$

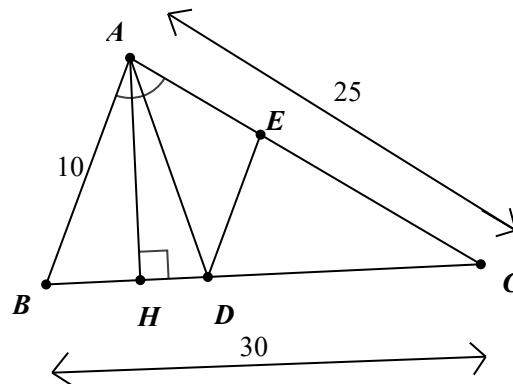
**Nhận xét:** Khi góc  $A$  của bài toán 2 chỉ là góc nhọn thì bài toán đơn giản hơn.

**Bài toán 11.** Cho tam giác  $ABC$  có  $AB = 10\text{cm}$ ;  $AC = 25\text{cm}$ ;  $BC = 30\text{cm}$ ; đường phân giác góc  $A$  cắt  $BC$  tại  $D$ . Qua  $D$  kẻ  $DE \parallel AB$  ( $E$  thuộc  $AC$ ).

a) Tính độ dài các đoạn thẳng  $DB, DC, DE$ .

b) Biết diện tích tam giác  $ABC$  bằng  $120\text{cm}^2$ . Hãy tính diện tích các tam giác  $ABD, AED$  và  $DEC$  (kết quả làm tròn đến chữ số thập phân thứ nhất).

*Lời giải*



a) Ta có  $AD$  là phân giác của  $\Delta ABC$  (gt) nên

$$\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC} = \frac{10}{25} = \frac{2}{5}. \Rightarrow \frac{DB}{2} = \frac{DC}{5} = \frac{DB+DC}{2+5} = \frac{BC}{7} = \frac{30}{7}.$$

$$\text{Suy ra } DB = \frac{2 \cdot 30}{7} \approx 8,57.$$

$$DC = BC - DB = 30 - 8,57 \approx 21,4(\text{cm}).$$

Ta có  $DE \parallel AB$  ( $E$  thuộc  $AC$ ) (gt) nên theo hệ quả định lý talets:

$$\frac{DE}{AB} = \frac{DC}{BC} \Rightarrow DE = \frac{AB \cdot DC}{BC} \approx \frac{10.21,4}{30} = 7,1 \text{ (cm)}.$$

b) Ta có  $\frac{S_{ABD}}{S_{ABC}} = \frac{\frac{1}{2} AH \cdot BD}{\frac{1}{2} AH \cdot BC} = \frac{BD}{BC} \approx \frac{8,57}{30}$  ( $AH$  là đường cao của tam giác).

$$\text{Hay } \frac{S_{ABD}}{120} \approx \frac{8,57}{30} \Rightarrow S_{ABD} = \frac{8,57 \cdot 120}{30} \approx 34,3 \text{ (cm}^2\text{)}.$$

$$\text{Tương tự có } S_{ADC} = \frac{21,4 \cdot 120}{30} \approx 85,6 \text{ (cm}^2\text{)}.$$

Mặt khác  $DE // AB$  (gt);  $\widehat{BAD} = \widehat{ADE}$  (so le trong).

Mà  $\widehat{BAD} = \widehat{CAD}$  ( $AD$  là phân giác).

Suy ra  $\widehat{ADE} = \widehat{CAD}$  hay tam giác  $AED$  cân tại  $E$ .

Suy ra:  $AE = ED$ .

$$\frac{S_{ADE}}{S_{ADC}} = \frac{AE}{AC} = \frac{ED}{AC} \approx \frac{7,1}{25} \text{ hay } \frac{S_{ADE}}{85,6} \approx \frac{7,1}{25}.$$

$$\Rightarrow S_{ADE} \approx \frac{7,1}{25} \cdot 85,6 \approx 24,3 \text{ (cm}^2\text{)}.$$

$$\text{Do đó } \Rightarrow S_{DCE} = S_{ADC} - S_{ADE} \approx 85,6 - 24,3 \approx 61,3 \text{ (cm}^2\text{)}.$$

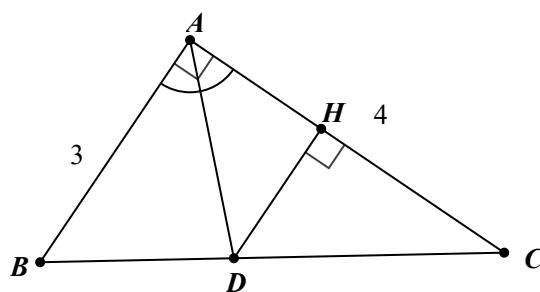
**Bài toán 12.** Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$  có  $AB = 3$ ;  $AC = 4$ ;  $BC = 5$  cm;  $AD$  là đường phân giác. Tính:

a) Độ dài các đoạn thẳng  $BC, DB, DC$ .

b) Khoảng cách từ điểm  $D$  đến đường thẳng  $AC$

c) Độ dài đường phân giác  $AD$ .

### Lời giải



a) Vì tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$  nên Theo bài 2.11 trang 32 toán 7 tập 1 ta có:

$$BC^2 = BA^2 + AC^2$$

$$\Rightarrow BC = \sqrt{BA^2 + AC^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$

$AD$  là phân giác của  $\Delta ABC$  nên ta có:

$$\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC} = \frac{3}{4}.$$

$$\Rightarrow \frac{DB}{3} = \frac{DC}{4} = \frac{DB+DC}{3+4} = \frac{BC}{7} = \frac{5}{7}$$

$$\Rightarrow DB = \frac{3 \cdot 5}{7} = \frac{15}{7} \text{ và } DC = \frac{4 \cdot 5}{7} = \frac{20}{7}.$$

b) Gọi  $DH$  là khoảng cách từ  $D$  đến đường thẳng  $AC$ .  
ta có  $DH \perp AC, AB \perp AC$  (gt).

$\Rightarrow DH \parallel AB$  (hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với đường thẳng thứ ba).

Theo định lý talets ta có:  $\frac{DB}{DC} = \frac{HA}{HC} \Rightarrow \frac{DB+DC}{DC} = \frac{HA+HC}{HC}$  hay  $\frac{BC}{DC} = \frac{AC}{HC}$ .

Thay số được:  $\frac{5}{20} = \frac{4}{HC} \Rightarrow HC = \frac{4 \cdot \frac{20}{5}}{7} = \frac{16}{7}$ .

Vì  $DH \parallel AB$ . Theo định lý talets ta có:  $\frac{DH}{AB} = \frac{HC}{AC}$  hay  $\frac{DH}{3} = \frac{16}{7} \Rightarrow HD = \frac{3 \cdot \frac{16}{7}}{4} = \frac{12}{7}$ .

c)  $\Delta AHD$  vuông tại  $H$ , có  $\widehat{DAH} = 45^\circ$  (Vì  $AD$  là phân giác) nên  $\Delta AHD$  vuông cân.

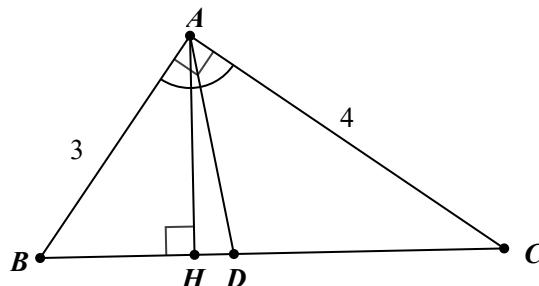
suy ra  $AH = HD = \frac{12}{7}$  Theo bài 2.11 trang 32 toán 7 tập 1 ta có:

$$AD^2 = AH^2 + HD^2 = \left(\frac{12}{7}\right)^2 + \left(\frac{12}{7}\right)^2 = \frac{144}{49} + \frac{144}{49} = \frac{288}{49} \Rightarrow AD = \frac{12\sqrt{2}}{7}.$$

**Bài toán 13.** Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$  có  $AB = 3cm$ ;  $AC = 4cm$ ; đường phân của góc  $A$  cắt  $BC$  tại  $D$ .

- a) Tính độ dài các đoạn thẳng  $BC, DB, DC$ .
- b) Vẽ đường cao  $AH$ . Tính  $AH, HD$  và  $AD$ .
- c) Tính diện tích các tam giác  $ABC, ADB, ADC$ .

### Lời giải



a) Vì tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$  nên Theo bài 2.11 trang 32 toán 7 tập 1 ta có:

$$BC^2 = BA^2 + AC^2$$

$$\Rightarrow BC = \sqrt{BA^2 + AC^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$

$AD$  là phân giác của  $\Delta ABC$  nên ta có:

$$\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC} = \frac{3}{4}.$$

$$\Rightarrow \frac{DB}{3} = \frac{DC}{4} = \frac{DB+DC}{3+4} = \frac{BC}{7} = \frac{5}{7}.$$

$$\Rightarrow DB = \frac{3.5}{7} = \frac{15}{7} \text{ và } DC = \frac{4.5}{7} = \frac{20}{7}$$

b) Ta giác  $ABC$  vuông tại  $A$ , đường cao  $AH$ . Gọi  $S_{ABC}$  là diện tích tam giác  $ABC$ , ta có:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} BC \cdot AH = \frac{1}{2} AB \cdot AC \Rightarrow BC \cdot AH = AB \cdot AC \text{ hay } 5 \cdot AH = 3 \cdot 4 \Rightarrow AH = \frac{3 \cdot 4}{5} = \frac{12}{5}.$$

$\Delta AHB$  vuông tại  $H$  nên Theo bài 2.11 trang 32 toán 7 tập 1 ta có:

$$AB^2 = AH^2 + HB^2.$$

$$\Rightarrow HB^2 = AB^2 - AC^2 = 3^2 - \left(\frac{12}{5}\right)^2 = \frac{81}{25} \Rightarrow HB = \frac{9}{5}.$$

$$\text{Vậy } HD = BD - HB = \frac{15}{7} - \frac{9}{5} = \frac{12}{35}.$$

Xét  $\Delta AHD$  vuông tại  $H$  (gt). Ta có:  $AD^2 = AH^2 + HD^2$  (Theo bài 2.11 trang 32 toán 7 tập 1)

$$= \left(\frac{12}{5}\right)^2 + \left(\frac{12}{35}\right)^2 = \frac{144}{25} + \frac{144}{1225} = \frac{288}{49}.$$

$$\text{Suy ra } AD = \frac{12\sqrt{2}}{7}.$$

c) Gọi  $S$  là diện tích tam giác  $ABC$ ,  $S_1$  là diện tích tam giác  $ABD$ ,  $S_2$  là diện tích tam giác  $ADC$ , ta có:

$$S = \frac{1}{2} AB \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 = 6 \text{ (đơn vị diện tích)}.$$

$$S_1 = \frac{1}{2} AH \cdot BD = \frac{1}{2} \cdot \frac{12}{5} \cdot \frac{15}{7} = \frac{18}{7} \text{ (đơn vị diện tích)}.$$

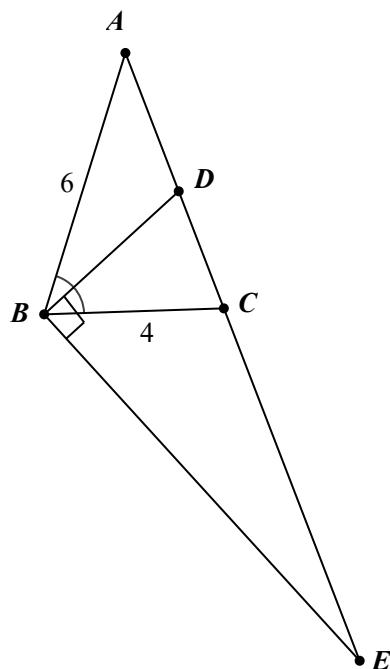
$$S_2 = \frac{1}{2} AH \cdot DC = \frac{1}{2} \cdot \frac{12}{5} \cdot \frac{20}{7} = \frac{24}{7} \text{ (đơn vị diện tích)}.$$

**Bài toán 14.** Cho tam giác  $ABC$  cân tại  $A$  có  $AB = 6cm$ ;  $BC = 4cm$ ; đường phân của góc  $B$  cắt  $AC$  tại  $D$ .

a) Tính độ dài các đoạn thẳng  $AD, CD$ .

b) Đường vuông góc với  $BD$  tại  $D$  cắt đường thẳng  $AC$  tại  $E$ . Tính  $EC$ .

### Lời giải



a) Ta có  $ABC$  cân tại  $A$  nên  $AB = AC = 6cm$ .

Do  $BD$  là phân giác góc  $B$  nên:

$$\begin{aligned} \frac{DA}{DC} &= \frac{BA}{BC} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{DA}{3} = \frac{DC}{2} = \frac{DA+DC}{3+2} = \frac{AC}{5} = \frac{6}{5} \\ \Rightarrow DA &= \frac{3 \cdot 6}{5} = 3,6(cm) \text{ và } BD = \frac{2 \cdot 6}{5} = 2,4(cm). \end{aligned}$$

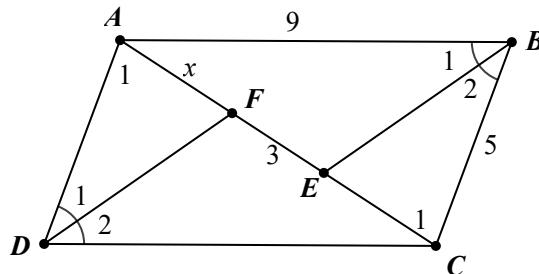
b) Do  $BD \perp BE$  nên  $BE$  là phân giác góc ngoài của  $\Delta ABC$  theo tính chất đường phân giác có:

$$\frac{EA}{EC} = \frac{BA}{BC} = \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{EA}{3} = \frac{EC}{2} = \frac{EA-EC}{3-2} = \frac{AC}{1} = 6$$

$$\Rightarrow EC = 6 \cdot 2 = 12 \text{ cm}$$

**Bài toán 15.** Cho hình bình hành  $ABCD$  có  $AB = 9 \text{ cm}$ ;  $BC = 5 \text{ cm}$ ; đường phân của góc  $B$  cắt đường chéo  $AC$  tại  $E$ , phân của góc  $D$  cắt đường chéo  $AC$  tại  $F$ . Tính độ dài đường chéo  $AC$ .

*Lời giải*



Xét  $\Delta ADF$  và  $\Delta CBE$  có:

$$\widehat{A_1} = \widehat{A_2} \text{ (so le trong của } AD \parallel BC \text{ (gt))}$$

$$AD = BC \text{ (gt)}$$

$$\widehat{D_1} = \widehat{D_2} \text{ (Vì } BE, DF \text{ là phân giác góc } \widehat{D}, \widehat{B} \text{ mà } \widehat{D} = \widehat{B} \text{)}$$

Suy ra  $\Delta ADF = \Delta CBE$  (g - c - g).

Suy ra  $AF = CE$ . Đặt  $AF = CE = x \Rightarrow EA = x + 3$

b) Vì  $BE$  là phân giác góc ngoài của  $\Delta ABC$  theo tính chất đường phân giác có:

$$\frac{EA}{EC} = \frac{BA}{BC} = \frac{9}{5} \Rightarrow \frac{x+3}{x} = \frac{9}{5}$$

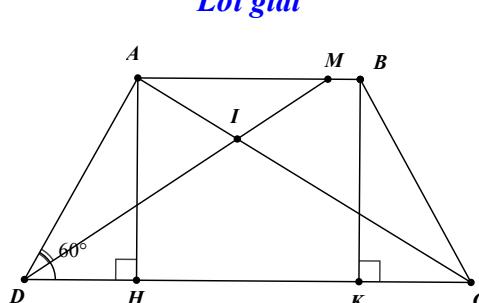
$$\Rightarrow 5(x+3) = 9x \Leftrightarrow 9x - 5x = 15 \Leftrightarrow 4x = 15 \Leftrightarrow x = \frac{15}{4} = 3,75 \text{ (cm)}.$$

Hay  $AF = EC = 3,75 \text{ (cm)}$ .

Do đó  $AC = AF + FE + CE = 2 \cdot 3,75 + 3 = 10,5 \text{ (cm)}$

**Bài toán 16.** Cho hình thang cân  $ABCD$  có đáy lớn  $CD$ ,  $\widehat{D} = 60^\circ$ , phân giác góc  $D$  cắt đường chéo  $AC$  tại  $I$  chia đường chéo  $AC$  thành hai đoạn theo tỉ số  $\frac{4}{11}$  và cắt đáy  $AB$  tại  $M$ . Biết  $MA - MB = 6 \text{ cm}$ . Tính độ dài các cạnh đáy của hình thang.

*Lời giải*



Kẻ đường cao  $AH$  và  $BK$

Xét  $\Delta ADH$  và  $\Delta BKC$  có:

$$\widehat{ADH} = \widehat{BKC} = 90^\circ \text{ (gt)}$$

$$AD = BC \text{ (gt)}$$

$$\widehat{D} = \widehat{C} = 60^\circ \text{ (hình thang cân } ABCD)$$

Suy ra  $\Delta ADH \sim \Delta BKC$  (cạnh huyền góc nhọn).

Suy ra  $HD = KC$  (hai cạnh tương ứng).

Xét tam giác vuông  $AHD$  có:  $\hat{D} = 60^\circ$  (gt) nên  $AH = 2DH$

Vì hình thang cân  $ABCD$  cân có  $\hat{D} = 60^\circ$  nên  $\widehat{DMA} = 120^\circ$  (trong cùng phía).

Xét  $\Delta ADM$  có  $\widehat{ADM} = \widehat{MDC} = \frac{\hat{D}}{2} = \frac{60^\circ}{2} = 30^\circ$  và  $\widehat{DAM} = 120^\circ$  (cmt)

$\Rightarrow \widehat{AMD} = 30^\circ$  hay  $\Delta DAM$  cân tại  $A$

$\Rightarrow AD = AM \quad (1)$

$DC = DH + HK + KC = 2DH + HK = AD + AB$  (vì  $HK = AB$ ) (2)

Xét  $\Delta DAC$  có  $DI$  là tia phân giác (gt)

$\Rightarrow \frac{DA}{DC} = \frac{IA}{IC} = \frac{4}{11} \quad (3)$

Từ (1), (2), (3) ta có:  $\frac{DA}{DC} = \frac{AM}{AD+AB} = \frac{AM}{AM+AB} = \frac{4}{11}$

$\Rightarrow 11AM = 4(AM + AB)$

$\Rightarrow 11AM - 4AM = 4AB$

$\Rightarrow 7AM = 4AB$

$\Rightarrow \frac{AB}{AM} = \frac{7}{4}$

$\Rightarrow \frac{AB}{7} = \frac{AM}{4} = \frac{AB - AM}{7-4} = \frac{MB}{3} = \frac{MA - MB}{4-3}$

$\Rightarrow MA = 6.4 = 24(\text{cm})$

$MB = 6.3 = 18(\text{cm})$

Do đó:  $AB = AM + MB = 24 + 18 = 42\text{cm}$

$\Rightarrow DC = 2DH + HK = DA + AB = AM + AB = 24 + 42 = 66(\text{cm})$

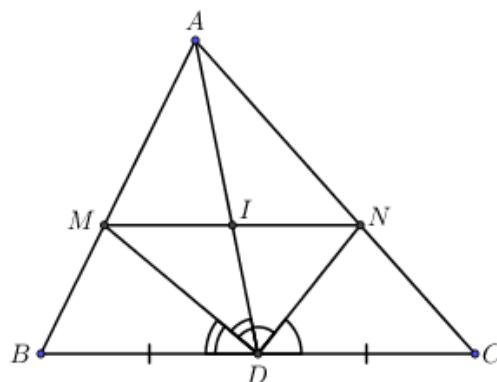
## II. Chứng minh

**Bài toán 17.** Cho tam giác  $ABC$ , trung tuyến  $AD$ , tia phân giác của góc  $ADB$  cắt  $AB$  tại  $M$ , tia phân giác của góc  $ADC$  cắt  $AC$  tại  $N$ .

a) Chứng minh  $MN // BC$ .

b) Gọi  $I$  là giao điểm của  $AD$  và  $MN$ . Chứng minh  $I$  là trung điểm của  $MN$ .

### Lời giải



a)  $DM$  là phân giác  $\Delta ADB$ , ta có:  $\frac{MB}{MA} = \frac{DB}{DA}$

tương tự với  $\Delta ADC$ :  $\frac{NC}{NA} = \frac{DC}{DA}$

theo định lí Thales đảo, ta có  $MN // BC$

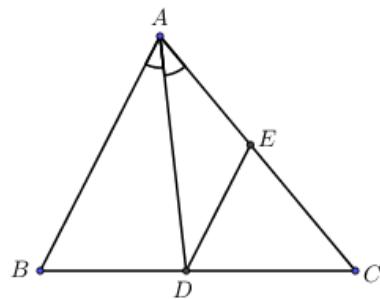
b) Áp dụng bài toán 20, bài 5, phần định lí Thales trong tam giác  $ADB$ , ta có:  $\frac{MI}{DB} = \frac{AI}{AD}$

tương tự với  $\Delta ADC$ :  $\frac{NI}{DC} = \frac{AI}{AD}, \frac{MI}{DB} = \frac{NI}{DC}$

mà  $DB = DC$  (gt)  $\Rightarrow MI = NI$  hay  $I$  là trung điểm của  $MN$ .

**Bài toán 18.** Cho tam giác  $ABC$ , phân giác  $AD$  ( $D \in BC$ ). Đường thẳng qua  $D$  song song với  $AB$  cắt  $AC$  tại  $E$ . Chứng minh rằng  $\frac{AC}{AB} = \frac{EC}{EA}$ .

### Lời giải



$$AD \text{ là phân giác } \Delta ABC, \text{ ta có: } \frac{AC}{AB} = \frac{DC}{DB} \quad (1)$$

$$\text{Vì } DE \parallel AB \text{ (gt), theo định lí Thales, ta có: } \frac{DC}{DB} = \frac{EC}{EA} \quad (2)$$

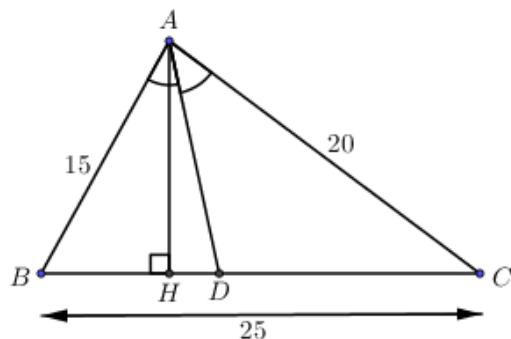
$$\text{Từ (1) và (2)} \Rightarrow \frac{AC}{AB} = \frac{EC}{EA} \text{ (đpcm)}$$

**Bài toán 19.** Tam giác  $ABC$  có  $AB = 15\text{cm}$ ,  $AC = 20\text{cm}$ ,  $BC = 25\text{cm}$ . Đường phân giác của góc  $BAC$  cắt cạnh  $BC$  tại  $D$ .

a) Tính độ dài đoạn thẳng  $DB$  và  $DC$ .

b) Tính tỉ số diện tích của hai tam giác  $ABD$  và  $ACD$ .

### Lời giải



$$\text{a) } AD \text{ là phân giác } \Delta ABC \text{ (gt)} \Rightarrow \frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC} = \frac{15}{20} = \frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{DB}{3} = \frac{DC}{4} = \frac{DB+DC}{3+4} = \frac{BC}{7} = \frac{25}{7}$$

$$\Rightarrow DB = \frac{3 \cdot 25}{7} = \frac{75}{7}$$

$$DC = \frac{4 \cdot 25}{7} = \frac{100}{7}$$

b) Kẻ đường cao  $AH$  của tam giác  $ABC$ , ta có:

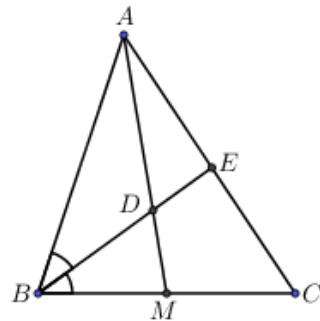
$$S_{ABD} = \frac{1}{2} BD \cdot AH$$

$$S_{ADC} = \frac{1}{2} DC \cdot AH$$

$$\Rightarrow \frac{S_{ABD}}{S_{ADC}} = \frac{\frac{1}{2} BD \cdot AH}{\frac{1}{2} DC \cdot AH} = \frac{BD}{DC} = \frac{\frac{75}{7}}{\frac{100}{7}} = \frac{3}{4}$$

**Bài toán 20.** Cho tam giác  $ABC$  có đường trung tuyến  $AM$ . Tia phân giác của góc  $ABC$  lần lượt cắt các đoạn thẳng  $AM, AC$  tại điểm  $D, E$ . Chứng minh  $\frac{EC}{EA} = 2 \cdot \frac{DM}{DA}$ .

### Lời giải



$BE$  là phân giác của  $\Delta ABC$ , ta có:  $\frac{EC}{EA} = \frac{BC}{BA}$

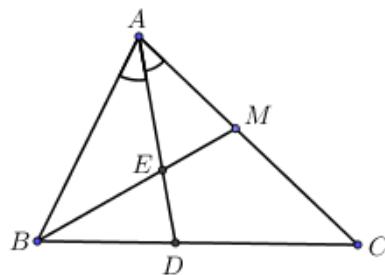
$$\text{Mà } BC = 2BM \text{ (gt)} \Rightarrow \frac{EC}{EA} = 2 \cdot \frac{BM}{BA} \quad (1)$$

$$\text{Lại có } BD \text{ là phân giác của } \Delta ABM : \frac{BM}{BA} = \frac{DM}{DA} \Rightarrow 2 \cdot \frac{BM}{BA} = 2 \cdot \frac{DM}{DA} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2)} \Rightarrow \frac{EC}{EA} = 2 \cdot \frac{DM}{DA} \text{ (đpcm)}$$

**Bài toán 21.** Cho tam giác  $ABC$ , phân giác  $AD$ . Gọi  $M$  là điểm bất kì thuộc cạnh  $AC$  và  $E$  là giao điểm của  $AD$  và  $BM$ . Chứng minh rằng:  $\frac{DB}{DC} : \frac{EB}{EM} = \frac{AM}{AC}$ .

### Lời giải



$$\text{Xét } \Delta ABC \text{ có } AE \text{ là phân giác, ta có: } \frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC} \quad (1)$$

$$\text{Với } \Delta ABM \text{ có } AE \text{ là phân giác, ta có: } \frac{EB}{EM} = \frac{AB}{AM} \quad (2)$$

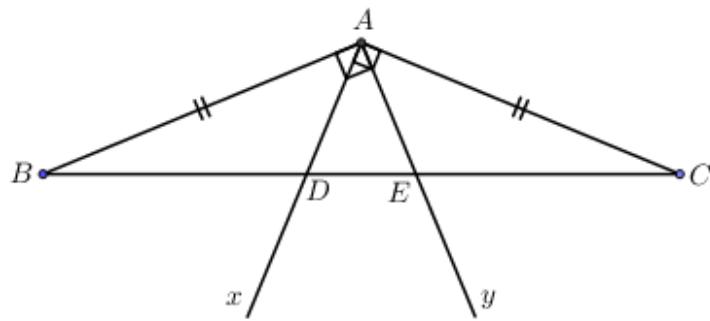
Lấy (1) : (2) vế với vế, ta có:

$$\frac{DB}{DC} : \frac{EB}{EM} = \frac{AB}{AC} : \frac{AB}{AM} = \frac{AB}{AC} \cdot \frac{AM}{AB} = \frac{AM}{AC}$$

**Bài toán 22.** Cho tam giác  $ABC$  cân tại  $A$  có  $\widehat{BAC} = 135^\circ$ . Dựng qua  $A$  tia  $Ax$  vuông góc với  $AC$  và tia  $Ay$  vuông góc với  $AB$ , các tia  $Ax, Ay$  lần lượt cắt cạnh  $BC$  tại  $D, E(D, E \in BC)$ .

Chứng minh:  $BD^2 = BC \cdot DE$ .

**Lời giải**



Ta có:  $Ax \perp AC$  (gt)  $\Rightarrow \widehat{DAC} = 90^\circ$

$$\Rightarrow \widehat{BAD} = 135^\circ - 90^\circ = 45^\circ$$

Tương tự ta có:  $\widehat{CAE} = \widehat{BAD} = 45^\circ$

Do đó  $AE$  và  $AB$  là phân giác trong và ngoài của  $\triangle ADC$ .

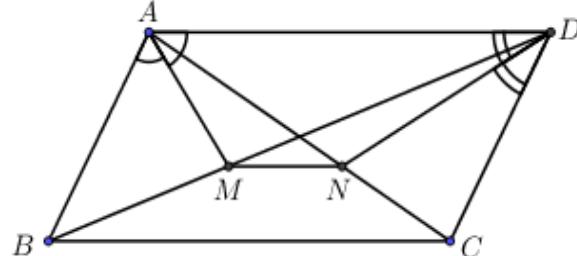
$$\text{Ta có: } \frac{ED}{EC} = \frac{AD}{AC} \text{ và } \frac{BD}{BC} = \frac{AD}{AC}$$

$$\Rightarrow \frac{ED}{EC} = \frac{BD}{BC} \Rightarrow EC \cdot BD = BC \cdot DE \quad (1)$$

Mặt khác  $\triangle BAD = \triangle CAE$  (g.c.g)  $\Rightarrow BD = EC$  thay vào (1) ta được:  $BD^2 = BC \cdot DE$  (đpcm)

**Bài toán 23.** Cho hình bình hành  $ABCD$ , các tia phân giác của các góc  $A$  và  $D$  lần lượt cắt đường chéo  $BD$  và  $AC$  tại  $M$  và  $N$ . Chứng minh rằng:  $MN \parallel BC$ .

**Lời giải**



$$\text{Ta có } AM \text{ là phân giác của } \triangle ABD \Rightarrow \frac{MD}{MB} = \frac{AD}{AB}$$

$$\text{Tương tự } DN \text{ là phân giác của } \triangle ADC \Rightarrow \frac{NA}{NC} = \frac{AD}{DC}$$

$$\text{Mà } AB = CD \text{ (gt)} \Rightarrow \frac{MD}{MB} = \frac{NA}{NC} \Rightarrow \frac{MD + MB}{MB} = \frac{NA + NC}{NC}$$

$$\text{Hay } \frac{BD}{MB} = \frac{CA}{NC}$$

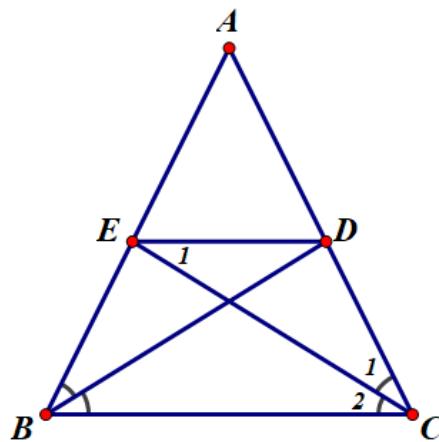
Theo định lí Thales đảo ta có  $MN \parallel BC$

**Bài toán 24.** Cho tam giác  $ABC$  cân tại  $A$ , các phân giác của góc  $\hat{B}$  và  $\hat{C}$  lần lượt cắt  $AC$ ,  $AB$  tại  $D$  và  $E$ . Chứng minh rằng:

a)  $DE \parallel BC$ .

$$\text{b) } \frac{1}{BC} + \frac{1}{AC} = \frac{1}{DE}.$$

**Lời giải**



a) Ta có  $BD$  là phân giác của  $\Delta ABC$  nên  $\frac{DA}{DC} = \frac{BA}{BC}$ .

Tương tự với đường phân giác  $CE$ , ta có:  $\frac{EA}{EB} = \frac{CA}{BC}$

$$\text{mà } BA = CA \text{ (gt)} \Rightarrow \frac{DA}{DC} = \frac{EA}{EB}$$

$\Rightarrow DE \parallel BC$  (định lí Thales đảo)

b) Ta có:  $DE \parallel BC$  (cmt)  $\Rightarrow \hat{E}_1 = \hat{C}_2$  (so le trong)

mà  $\hat{C}_2 = \hat{C}_1$  (gt)  $\Rightarrow \hat{E}_1 = \hat{C}_1$  hay  $\Delta DEC$  cân tại  $D \Rightarrow DE = DC$

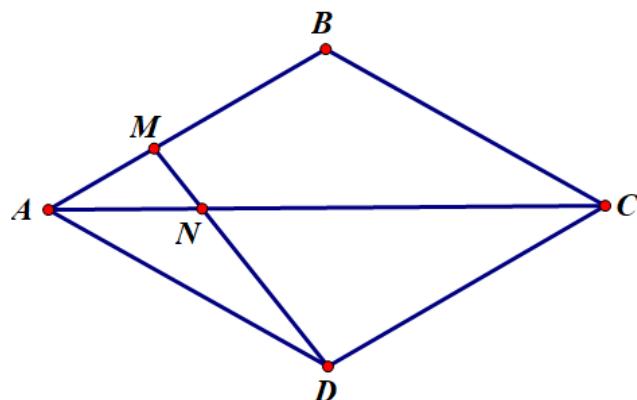
Mặt khác  $DE \parallel BC$  theo hệ quả định lí Thales:

$$\frac{DE}{BC} = \frac{AD}{AC} = \frac{AC - DC}{AC} = \frac{AC}{AC} - \frac{DC}{AC} = 1 - \frac{DC}{AC} \text{ (vì } DE = DC\text{)}$$

$$\Rightarrow \frac{DE}{BC} + \frac{DC}{AC} = 1 \Rightarrow \frac{1}{BC} + \frac{1}{AC} = \frac{1}{DE} \text{ (đpcm).}$$

**Bài toán 25.** Cho hình thoi  $ABCD$ . Điểm  $M$  thuộc cạnh  $AB$  thỏa mãn  $AB = 3AM$ . Hai đoạn thẳng  $AC$  và  $AM$  cắt nhau tại  $N$ . Chứng minh  $ND = 3MN$ .

### Lời giải



$ABCD$  là hình thoi (gt) nên đường chéo  $AC$  là phân giác của góc  $BAD$

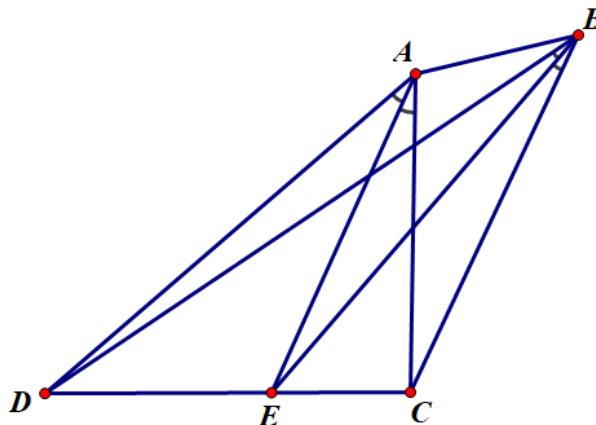
Ta có:  $\frac{ND}{MN} = \frac{AD}{AM}$  mà  $AD = AB$  (cạnh hình thoi)

Nên  $\frac{ND}{MN} = \frac{AB}{AM}$  mà  $AB = 3AM$  (gt)

$$\Rightarrow \frac{ND}{MN} = \frac{3AM}{AM} = 3 \Rightarrow ND = 3MN \text{ (đpcm).}$$

**Bài toán 26.** Cho tứ giác  $ABCD$  với các tia phân giác của góc  $CAD$  và  $CBD$  cùng đi qua điểm  $E$  thuộc cạnh  $CD$  (xem hình vẽ). Chứng minh  $AD \cdot BC = AC \cdot BD$ .

*Lời giải*



$$AE \text{ là phân giác của } \Delta CAD \text{ (gt), ta có: } \frac{ED}{EC} = \frac{AD}{AC} \quad (1)$$

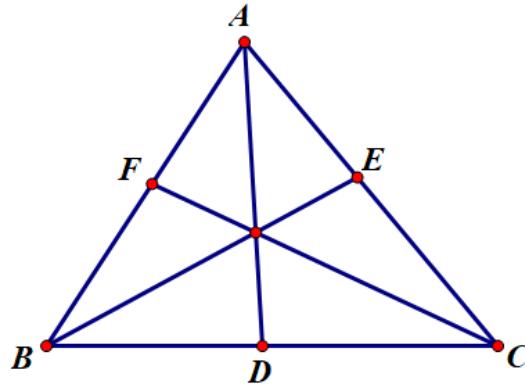
$$\text{Lại có } BE \text{ là phân giác của } \Delta BCD: \frac{ED}{EC} = \frac{BD}{BC} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2)} \Rightarrow \frac{AD}{AC} = \frac{BD}{BC} \Rightarrow AD \cdot BC = AC \cdot BD \text{ (đpcm).}$$

**Bài toán 27.** Cho tam giác  $ABC$ , có ba đường phân giác  $AD, BE$  và  $CF$ . Chứng minh rằng:

$$\frac{FA}{FB} \cdot \frac{DB}{DC} \cdot \frac{EC}{EA} = 1.$$

*Lời giải*



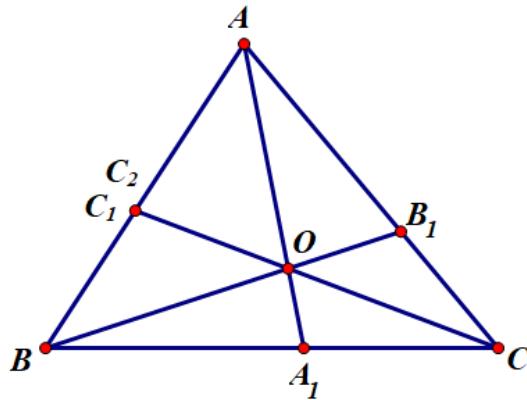
$$\text{Theo tính chất đường phân giác ta có: } \frac{FA}{FB} = \frac{CA}{CB}; \frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC}; \frac{EC}{EA} = \frac{BC}{BA}$$

$$\Rightarrow \frac{FA}{FB} \cdot \frac{DB}{DC} \cdot \frac{EC}{EA} = \frac{CA}{CB} \cdot \frac{AB}{AC} \cdot \frac{BC}{BA} = 1.$$

**Bài toán 28.** Cho tam giác  $ABC$ . Trên các cạnh  $BC, CA, AB$  lấy các điểm tương ứng  $A_1, B_1, C_1$ . Chứng minh

$$\text{rằng các đường thẳng } AA_1, BB_1, CC_1 \text{ đồng quy khi và chỉ khi: } \frac{AC_1}{BC_1} \cdot \frac{BA_1}{CA_1} \cdot \frac{CB_1}{AB_1} = 1 \text{ (định lí Ceva).}$$

*Lời giải*



Giả sử  $AA_1, BB_1, CC_1$  đồng quy tại  $O$ .

$$\text{Ta có: } \frac{AC_1}{BC_1} = \frac{S_{AC_1C}}{S_{BC_1C}} = \frac{S_{AC_1O}}{S_{BC_1O}} = \frac{(S_{AC_1C} - S_{AC_1O})}{(S_{BC_1C} - S_{BC_1O})} = \frac{S_{AOC}}{S_{BOC}}$$

$$\text{Chứng minh tương tự: } \frac{BA_1}{CA_1} = \frac{S_{AOB}}{S_{AOC}}, \quad \frac{CB_1}{AB_1} = \frac{S_{BOC}}{S_{AOB}}$$

$$\Rightarrow \frac{AC_1}{BC_1} \cdot \frac{BA_1}{CA_1} \cdot \frac{CB_1}{AB_1} = \frac{S_{AOC}}{S_{BOC}} \cdot \frac{S_{AOB}}{S_{AOC}} \cdot \frac{S_{BOC}}{S_{AOB}} = 1$$

Ngược lại giả sử  $AA_1$  và  $BB_1$  cắt nhau tại  $O$ . Nối  $CO$  cắt  $AB$  tại  $C_2$ .

$$\text{Theo trên ta có: } \frac{AC_1}{C_2B} \cdot \frac{BA_1}{CA_1} \cdot \frac{CB_1}{AB_1} = 1$$

$$\text{Kết hợp với giả thiết } \frac{AC_1}{BC_1} \cdot \frac{BA_1}{CA_1} \cdot \frac{CB_1}{AB_1} = 1, \text{ ta được: } \frac{AC_2}{BC_2} = \frac{AC_1}{BC_1}.$$

Nếu  $A_1, B_1$  thuộc cạnh  $BC$  và  $AC$  thì  $C_1$  và  $C_2$  thuộc cạnh  $AB$ . Nếu  $A_1$  thuộc cạnh  $BC$  (chẳng hạn) còn  $B_1$  thuộc phần kéo dài của cạnh  $AC$  thì  $C_1$  và  $C_2$  cũng ở phần kéo dài của cạnh  $AB$ . Do đó  $C_1$  trùng với  $C_2$  tức là  $CC_1$  cũng đi qua giao điểm của các đường thẳng  $AA_1$  và  $BB_1$ .

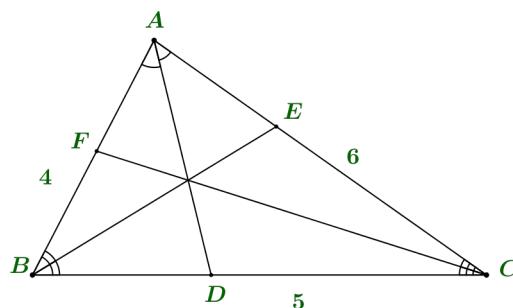
$$\text{Trường hợp } AA_1, BB_1, CC_1 \text{ đồng quy khi và chỉ khi } \frac{AC_1}{BC_1} \cdot \frac{BA_1}{CA_1} \cdot \frac{CB_1}{AB_1} = 1.$$

Chứng minh nhờ định lí Thales (dành cho bạn đọc).

### C. BÀI TẬP

- 4.9. Cho tam giác  $ABC$  có ba đường phân giác  $AD, BE, CF$ . Biết  $AB=4, BC=5, CA=6$ . Tính  $BD, CE, AF$ .

#### Lời giải



$AD$  là phân giác của  $\triangle ABC$ , ta có:

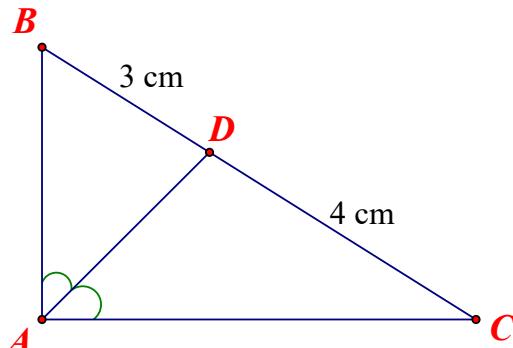
$$\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{BD}{2} = \frac{DC}{3} = \frac{BD+DC}{2+3} = \frac{BC}{5} = \frac{5}{5} = 1 \Rightarrow BD = 2$$

Chứng minh tương tự, ta có  $BE$  và  $CF$  cũng là hai đường phân giác của tam giác  $ABC$ , ta có:

$$CE = \frac{10}{3} \text{ và } AF = \frac{24}{11}.$$

- 4.10.** Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$ , phân giác  $AD$ . Tính độ dài  $AB$ ,  $AC$  biết  $BD=3\text{cm}$  và  $DC=4\text{cm}$ .

*Lời giải*



Ta có  $BC = BD + DC = 3 + 4 = 7\text{ cm}$ .

Và  $AD$  là phân giác của góc  $A$ .

$$\frac{AB}{AC} = \frac{DB}{DC} = \frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{AB}{3} = \frac{AC}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{AB^2}{9} = \frac{AC^2}{16} = \frac{AB^2 + AC^2}{9+16} = \frac{BC^2}{25} = \frac{7^2}{25} = \frac{49}{25}$$

$$\text{Suy ra } AB^2 = \frac{49}{25} \cdot 9 = \frac{49 \cdot 9}{25} \Rightarrow AB = \frac{21}{5} \text{ cm} = 4,2\text{cm}.$$

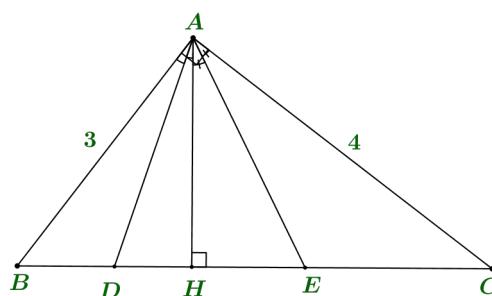
$$AC^2 = 16 \cdot \frac{49}{25} = \frac{16 \cdot 49}{25} \Rightarrow BC = \frac{28}{5} \text{ cm} = 5,6\text{cm}.$$

- 4.11.** Cho tam giác  $ABCD$  vuông tại  $A$ , đường cao  $AH$ . Gọi  $AD$ ,  $AE$  lần lượt là các tia phân giác của góc  $BAH$  và  $CAH$  ( $D, E$  thuộc  $BC$ ) biết  $AB=3\text{cm}$ ,  $AC=4\text{cm}$ .

a) Tính độ dài  $AH$ .

b) Tính độ dài  $HD$ ,  $HE$ .

*Lời giải*



a) Ta có:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 \text{ (Theo bài tập 2.11 trang 32, Toán 7, Tập một)}$$

$$BC^2 = 3^2 + 4^2 \Rightarrow BC^2 = 25 \Rightarrow BC = 5\text{ (cm)}$$

$$\text{Ta có } S_{ABC} = \frac{1}{2} AH \cdot BC = \frac{1}{2} AB \cdot AC$$

$$\Rightarrow AH \cdot BC = AB \cdot AC \Rightarrow AH = \frac{AB \cdot AC}{BC} = \frac{3 \cdot 4}{5} = 2,4 \text{ (cm)}$$

b) Xét tam giác vuông AHB ta có  $BH^2 = AB^2 - AH^2 = 3^2 - (2,4)^2$

$$\Rightarrow BH^2 = 3,24 \Rightarrow BH = 1,8 \text{ (cm)}$$

$$\Rightarrow CH = 5 - 1,8 = 3,2 \text{ (cm)}$$

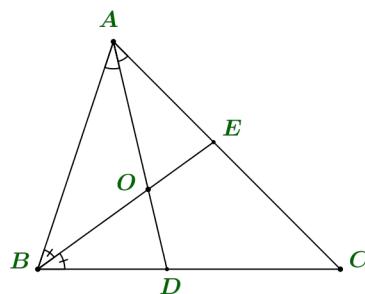
$$AD \text{ là phân giác của } \triangle AHB \text{ ta có } \frac{DB}{DH} = \frac{AB}{AH} = \frac{3}{2,4}$$

$$\Rightarrow \frac{DB}{3} = \frac{DH}{2,4} = \frac{DB + DH}{3 + 2,4} = \frac{BH}{5,4} = \frac{1,8}{5,4} \Rightarrow DH = \frac{2,4 \cdot 1,8}{5,4} = 0,8 \text{ (cm)}$$

Tương tự ta có  $HE = 1,2 \text{ (cm)}$ .

- 4.12.** Các cạnh của tam giác có tỉ lệ 7:11:12 đường phân giác của góc lớn nhất bằng 3,5 cm. Tính độ dài các đoạn thẳng do phân giác trong hai góc còn lại chia đường phân giác của góc lớn nhất đã nói trên.

### Lời giải



$$\text{Ta có: } \frac{AB}{7} = \frac{AC}{11} = \frac{BC}{12} \text{ (gt) và } AD = 3,5 \text{ (cm)}$$

Gọi  $O$  là giao điểm hai phân giác  $AD$  và  $BE$ .

$$\text{Ta có } \frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC} = \frac{7}{11} \Rightarrow \frac{DB}{7} = \frac{DC}{11} = \frac{DB + DC}{7 + 11} = \frac{BC}{18} \Rightarrow DB = \frac{7 \cdot BC}{18}$$

$$\text{Xét } \triangle ABD \text{ có } BO \text{ là phân giác: } \frac{OA}{OD} = \frac{BA}{BD}$$

$$\text{Từ giả thiết } \frac{AB}{7} = \frac{BC}{12} \Rightarrow AB = \frac{7BC}{12}$$

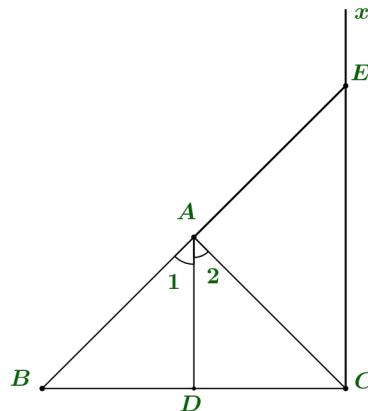
$$\text{Thay (1),(3) vào (2) ta có: } \frac{OA}{OD} = \frac{7BC}{12} : \frac{7BC}{18} = \frac{18}{12} = \frac{3}{2}.$$

$$\Rightarrow \frac{OA}{3} = \frac{OD}{2} = \frac{OA + OD}{3 + 2} = \frac{AD}{5} = \frac{3,5}{5} \Rightarrow OA = \frac{3 \cdot 3,5}{5} = 2,1 \text{ (cm)}$$

$$\Rightarrow OD = AD - OA = 3,5 - 2,1 = 1,4 \text{ (cm)}.$$

- 4.13.** Cho tam giác  $ABC$ . Điểm  $D$  nằm trên cạnh  $BC$  thỏa mãn  $\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC} \neq 1$ . Chứng minh rằng  $AD$  là tia phân giác của góc  $BAC$ .

### Lời giải



Kẻ  $Cx \parallel AD$  và  $Cx$  cắt đường thẳng  $BA$  tại  $E$ .

Theo định lí Ta lét:  $\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AE}$

Lại có  $\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC}$  (gt)  $\Rightarrow \frac{AB}{AE} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow AE = AC$

$$\Rightarrow \Delta ACE \text{ cân tại } A \Rightarrow \widehat{ACE} = \widehat{AEC}$$

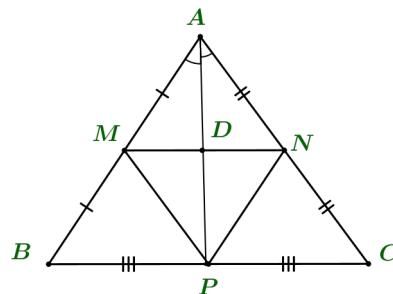
Mặt khác  $AD \parallel CE \Rightarrow \widehat{ACE} = \widehat{A}_2$  (so le trong) (2)

$$\widehat{AEC} = \widehat{A}_1 \text{ (đồng vị) (3)}$$

Từ (1),(2),(3)  $\Rightarrow \widehat{A}_1 = \widehat{A}_2$  hay  $AD$  là phân giác của góc  $BAC$ .

- 4.14.** Cho tam giác  $ABC$ . Gọi  $M, N$  lần lượt là trung điểm của  $AB$  và  $AC$ . Trên  $MN$  lấy  $D$  sao cho  $\frac{DM}{DN} = \frac{AC}{AB}$ . Nối  $D$  với trung điểm  $P$  của  $BC$ . Chứng minh rằng  $PD$  là tia phân giác của góc  $MPN$ .

### Lời giải



Ta có  $MP$  là đường trung bình của  $\triangle ABC \Rightarrow MP \parallel AC$

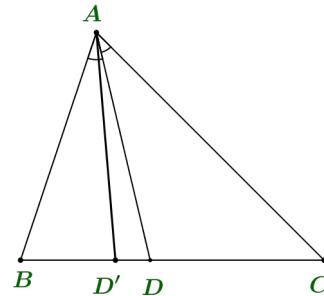
Theo hệ quả định lí Thalès:  $\frac{MP}{AC} = \frac{BP}{BC}$

Tương tự  $NP \parallel AB \Rightarrow \frac{NP}{AB} = \frac{CP}{CB}$  mà  $BP = CP$  (gt)  $\Rightarrow \frac{MP}{AC} = \frac{NP}{AB} \Rightarrow \frac{MP}{PN} = \frac{AC}{AB}$

mà  $\frac{DM}{DN} = \frac{AC}{AB}$  (gt)  $\Rightarrow \frac{DM}{DN} = \frac{PM}{PN}$  hay  $PD$  là phân giác của góc  $MPN$ .

- 4.15.** Cho tam giác  $ABC$  điểm  $D$  thuộc cạnh  $BC$  sao cho  $\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$ . Chứng minh  $AD$  là tia phân giác của góc  $BAC$ .

### Lời giải



Giả sử  $AD'$  là phân giác của góc  $BAC$  ( $D'$  thuộc cạnh  $BC$ ), ta có:  $\frac{D'B}{D'C} = \frac{AB}{AC}$ .

Lại có  $\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC}$  (gt) (2)

Từ (1) và (2)  $\Rightarrow \frac{D'B}{D'C} = \frac{DB}{DC}$  mà  $D'$  và  $D$  cùng thuộc cạnh  $BC$  (gt)

$\Rightarrow D'$  trùng với  $D$

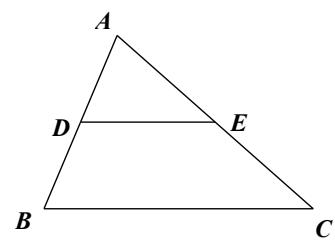
Vậy  $AD$  là phân giác của góc  $BAC$ .

## BÀI ÔN TẬP CUỐI CHƯƠNG IV

### A. TRẮC NGHIỆM

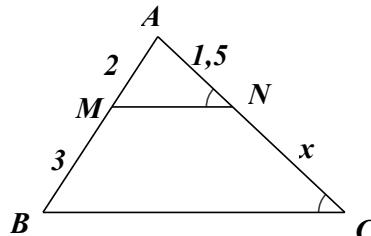
1. Cho tam giác ABC, biết  $DE // BC$  (Hình vẽ). Trong các khẳng định sau, khẳng định nào sai?

- A.**  $\frac{AD}{BD} = \frac{AE}{EC}$       **B.**  $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$   
**C.**  $\frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$       **D.**  $\frac{BD}{AB} = \frac{DE}{BC}$



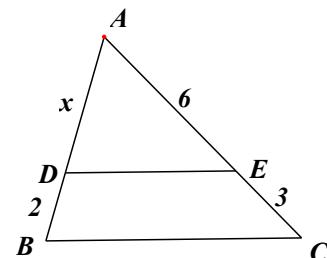
2. Độ dài  $x$  trong hình vẽ bằng:

- A.** 2,75  
**B.** 2  
**C.** 2,25  
**D.** 3,75

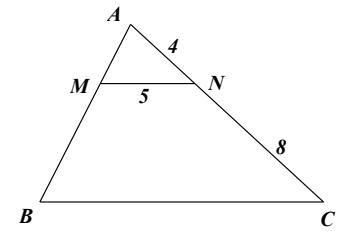


3. Cho tam giác ABC, biết  $DE // BC$  và  $AE = 6$  cm,  $EC = 3$  cm,  $DB = 2$  cm (Hình vẽ). Độ dài đoạn thẳng  $AD$  là:

- A.** 4 cm      **B.** 3 cm  
**C.** 5 cm      **D.** 3,5 cm

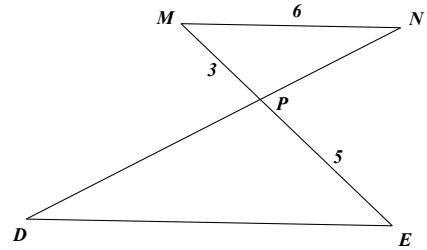


4. Cho hình vẽ, biết  $MN // BC$ ,  $AN = 4$  cm,  $NC = 8$  cm,  $MN = 5$  cm. Độ dài cạnh  $BC$  là:  
**A.** 10      **B.** 20  
**C.** 15      **D.** 16



5. Cho hình vẽ, biết  $MN // DE$ ,  $MN = 6$  cm,  $MP = 3$  cm,  $PE = 5$  cm. Độ dài đoạn thẳng  $DE$  là:

- A.** 6 cm  
**B.** 5 cm  
**C.** 8 cm  
**D.** 10 cm

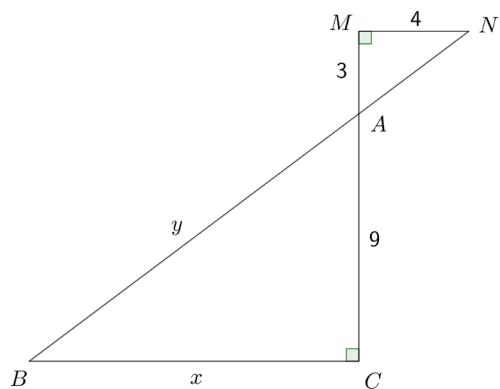


6. Cho hình vẽ, biết:

$AM = 3$  cm,  $MN = 4$  cm,  $AC = 9$  cm.

Giá trị biểu thức  $x - y$  là:

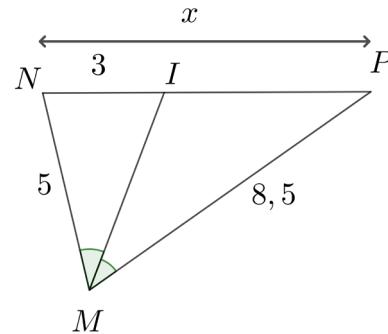
- A.** 4  
**B.** -3  
**C.** 3  
**D.** -4



7. Cho tam giác  $ABC$  có  $AB = 9$  cm,  $D$  là điểm thuộc cạnh  $AB$  sao cho  $AD = 6$  cm. Kẻ  $DE$  song song với  $BC$  ( $E$  thuộc  $AC$ ), kẻ  $EF$  song song với  $CD$  ( $F$  thuộc  $AB$ ). Độ dài  $AF$  bằng:  
**A.** 4 cm      **B.** 5 cm      **C.** 6 cm      **D.** 7 cm
8. Cho tam giác  $ABC$ . Gọi  $H, K$  lần lượt là trung điểm của  $AC, BC$ . Biết  $HK = 3,5$  cm. Độ dài  $AB$  bằng:  
**A.** 3,5 cm      **B.** 7 cm      **C.** 10 cm      **D.** 15 cm
9. Cho tam giác  $ABC$  có chu vi là 32 cm. Gọi  $M, N, P$  lần lượt là trung điểm của các cạnh  $AB, AC, BC$ . Chu vi của tam giác  $MNP$  là:  
**A.** 8 cm      **B.** 64 cm      **C.** 30 cm      **D.** 16 cm
10. Cho tam giác  $MNP$  có  $MD$  là tia phân giác của góc  $M$  ( $D \in NP$ ). Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?  
**A.**  $\frac{DN}{MN} = \frac{DP}{MP}$       **B.**  $\frac{DN}{MN} = \frac{MP}{DP}$       **C.**  $\frac{DN}{MN} = \frac{MP}{DP}$       **D.**  $\frac{MN}{MP} = \frac{DP}{DN}$

11. Tính độ dài  $x$  (Hình vẽ bên)

- A.** 7,5  
**B.** 8,5  
**C.** 8,1  
**D.** 7,8



12. Cho tam giác  $ABC$  cân tại  $A$  có  $AB = 15$  cm,  $BC = 10$  cm, đường phân giác trong của góc  $B$  cắt  $AC$  tại  $D$ . Khi đó, đoạn thẳng  $AD$  có độ dài là:  
**A.** 3 cm      **B.** 6 cm      **C.** 9 cm      **D.** 12 cm

### HƯỚNG DẪN VÀ ĐÁP ÁN

1. Khẳng định nào **sai**: Câu D.

2. Ta có  $\widehat{ANM} = \widehat{ACB}$  (gt)  $\Rightarrow MN // BC$  (cặp góc đồng vị bằng nhau)

Theo định lí Thalès, ta có:  $\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC}$  hay  $\frac{2}{3} = \frac{1,5}{x} \Rightarrow x = \frac{3 \cdot 1,5}{2} = 2,25$

**Chọn C.**

3. Ta có  $DE // BC$  (gt). Theo định lí Thalès, ta có:

$$\frac{AD}{BD} = \frac{AE}{EC} \text{ hay } \frac{x}{2} = \frac{6}{3} \Rightarrow x = \frac{2 \cdot 6}{3} = 4$$

**Chọn A.**

4. Ta có  $MN // BC$  (gt). Theo định lí Thalès, ta có:

$$\frac{MN}{BC} = \frac{AN}{AC} \text{ mà } AC = AN + NC = 4 + 8 = 12 \text{ hay } \frac{5}{BC} = \frac{4}{12} \Rightarrow BC = \frac{12 \cdot 5}{4} = 15.$$

**Chọn C.**

5. Ta có  $MN // DE$  (gt). Theo định lý Thalès, ta có:

$$\frac{DE}{MN} = \frac{PE}{MP} \text{ hay } \frac{DE}{6} = \frac{5}{3} \Rightarrow DE = \frac{5 \cdot 6}{3} = 10.$$

Chọn D.

6. Ta có  $MN \perp BC$  (gt)

$BC \perp MC$  (gt)

$\Rightarrow MN // BC$  (hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với đường thứ ba thì chúng song song).

Ta có  $\Delta AMN$  vuông tại  $M$  (Theo bài tập 2.11, trang 32, Toán 7, tập một)

$$AN^2 = MN^2 + MA^2$$

$$AN^2 = 4^2 + 3^2 = 25$$

$$\Rightarrow AN = 5$$

Ta có  $MN // BC$  (cmt). Theo định lí Thalès:

$$\frac{MN}{BC} = \frac{AB}{AN} = \frac{AC}{AM} \text{ hay } \frac{x}{4} = \frac{y}{5} = \frac{9}{3} \Rightarrow \frac{x-y}{-1} = \frac{9-3}{-1} \Rightarrow x-y = -3.$$

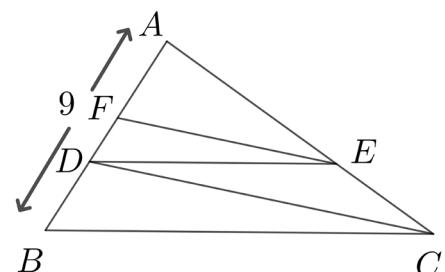
Chọn B.

7. Xét  $\Delta ADC$  có  $EF // CD$  (gt). Theo định lí Thalès, ta có:

$$\frac{AE}{AC} = \frac{AF}{AD} \quad (1)$$

Xét  $\Delta ABC$  có  $DE // BC$  (gt).

$$\text{Theo định lí Thalès, ta có: } \frac{AE}{AC} = \frac{AD}{AB} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3} \quad (2)$$



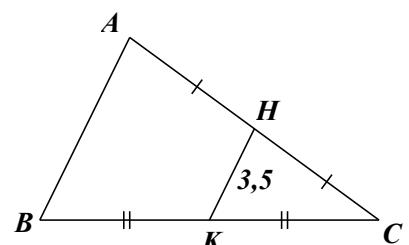
$$\text{Từ (1) và (2)} \Rightarrow \frac{AF}{AD} = \frac{2}{3} \text{ hay } \frac{AF}{6} = \frac{2}{3} \Rightarrow AF = \frac{6 \cdot 2}{3} = 4$$

Chọn A.

8.  $H, K$  lần lượt là trung điểm của  $AC, BC$  (gt)  $\Rightarrow H, K$  là đường trung bình của tam giác  $ABC$ , ta có:

$$HK = \frac{1}{2} AB \text{ (Tính chất đường trung bình của tam giác)}$$

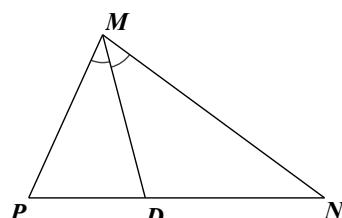
$$\Rightarrow AB = 2 \cdot HK = 2 \cdot 3,5 = 7 \text{ cm.}$$



Chọn B.

9. Chọn D.

10. Chọn A.



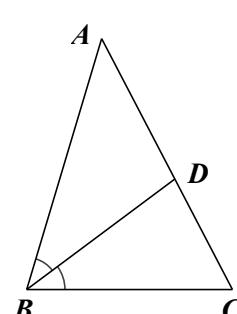
11.  $MI$  là tia phân giác của tam giác  $MNP$ , ta có:

$$\frac{IN}{IP} = \frac{MN}{MP} \text{ hay } \frac{3}{IP} = \frac{5}{8,5} \Rightarrow IP = \frac{3 \cdot 8,5}{5} = 5,1$$

$$\text{Vậy } x = IN + IP = 3 + 5,1 = 8,1.$$

Chọn C.

12.  $DB$  là phân giác của tam giác  $ABC$ , ta có:



$$\frac{DA}{DC} = \frac{AB}{BC} = \frac{15}{10} = \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{DA}{3} = \frac{DC}{2} = \frac{DA+DC}{3+2} = \frac{AC}{5} = \frac{15}{5} = 3$$

( $\triangle ABC$  cân tại  $A \Rightarrow AC = AB = 15$ )

$$\Rightarrow AD = 3 \cdot 3 = 9 \text{ cm.}$$

Chọn C.

## B. TỰ LUẬN

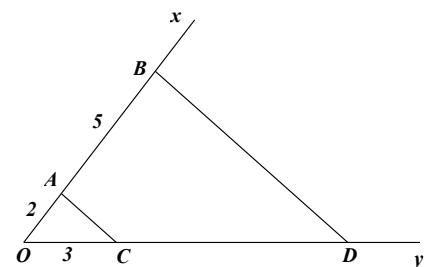
1. Cho góc  $xOy$ . Trên tia  $Ox$ , lấy hai điểm  $A$  và  $B$  sao cho  $OA = 2$  cm,  $OB = 5$  cm. Trên tia  $Oy$ , lấy hai điểm  $C$  sao cho  $OC = 3$  cm. Từ điểm  $B$  kẻ đường thẳng song song với  $AC$  cắt  $Oy$  tại  $D$ . Tính độ dài đoạn thẳng  $CD$ .

### Lời giải

Ta có  $BC // AC$  (gt), theo định lý Thales, ta có:

$$\frac{CD}{OC} = \frac{AB}{OA} \text{ mà } (AB = OB - OA = 5 - 2 = 3) \Rightarrow \frac{CD}{3} = \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow CD = \frac{3 \cdot 3}{2} = 4,5.$$



2. Cho tam giác  $ABC$  và điểm  $D$  trên cạnh  $AB$  sao cho  $AD = 13,5$  cm,  $DB = 4,5$  cm. Tính tỉ số các khoảng cách từ các điểm  $D$  và  $B$  đến cạnh  $AC$ .

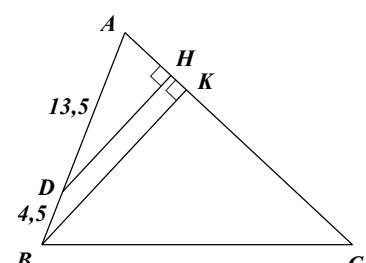
### Lời giải

Gọi khoảng cách từ  $D$  và  $B$  đến cạnh  $AC$  lần lượt là  $DH$  và  $BK$ . Ta có:

$$DH // BK (\perp AC), \text{ theo định lí Thales, ta có: } \frac{DH}{BK} = \frac{AD}{AB}$$

$$\text{mà } (AB = AD + BD = 13,5 + 4,5 = 18)$$

$$\Rightarrow \frac{DH}{BK} = \frac{13,5}{18} = \frac{3}{4}.$$



3. Độ cao  $AN$  và chiều dài bóng nắng của đoạn thẳng  $AN$ ,  $BN$  trên mặt đất được ghi lại trong Hình vẽ. Tìm chiều cao  $AB$  của cái cây.

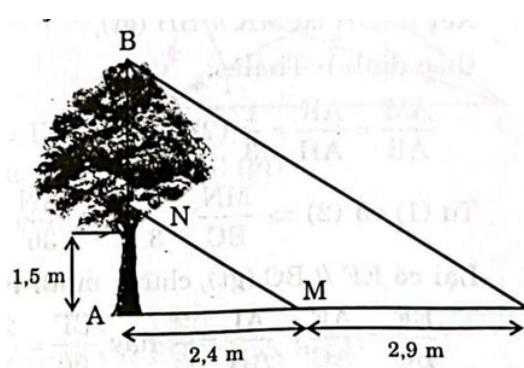
### Lời giải

Các tia nắng  $MN$  và  $BC$  song song với nhau. Theo định lí Thales, ta có:

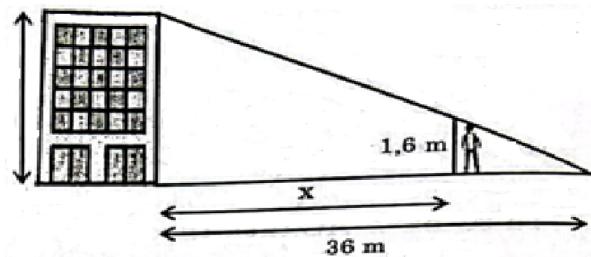
$$MN // BC \Rightarrow \frac{AN}{NB} = \frac{AM}{MC} \text{ hay } \frac{1,5}{NB} = \frac{2,4}{2,9}$$

$$\Rightarrow NB = \frac{1,5 \cdot 2,9}{2,4} = \frac{29}{16}$$

Do đó chiều cao  $AB$  của cây là  $AB = 1,5 + \frac{29}{16} \approx 3,3$  (m).



4. Một tòa nhà cao 24 m, độ bóng nắng dài 36 m trên đường như Hình vẽ. Một người cao 1,6 m muốn đứng trong bóng râm của tòa nhà. Hỏi người đó có thể đứng cách tòa nhà bao nhiêu mét?



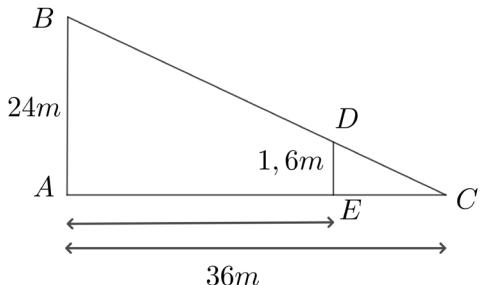
**Lời giải**

a) Ta có  $AB // DE (\perp AC)$ , theo định lí Thalès, ta có:

$$\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{CE} \text{ hay } \frac{24}{1,6} = \frac{36}{CE}$$

$$\Rightarrow CE = \frac{1,6 \cdot 36}{24} = 2,4$$

$$x = AE = AC - EC \\ = 36 - 2,4 = 33,6.$$



5. Cho tam giác  $ABC$  có  $BC = 30$  cm. Trên đường cao  $AH$  lấy các điểm  $K, I$  sao cho  $AK = KI = IH$ . Qua  $I$  và  $K$  vẽ các đường  $EF // BC$ ,  $MN // BC$  ( $E, M \in AB$ ;  $F, N \in AC$ )
- a) Tính độ dài các đoạn thẳng  $MN$  và  $EF$ .
- b) Tính diện tích tứ giác  $MNEF$  biết rằng diện tích tam giác  $ABC$  là  $10,8 \text{ dm}^2$ .

**Lời giải**

a) Ta có  $MN // BC$  (gt), theo định lí Thalès, ta có:

$$\frac{MN}{BC} = \frac{AM}{AB} \quad (1)$$

Xét  $\Delta ABH$  có  $MK // BH$  (gt), theo định lí Thalès:

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AK}{AH} = \frac{1}{3} \quad (2) \text{ (vì } AK = KI = IH \text{ )}$$

$$\text{Từ (1) và (2)} \Rightarrow \frac{MN}{BC} = \frac{1}{3} \text{ hay}$$

$$\frac{MN}{30} = \frac{1}{3} \Rightarrow MN = \frac{30}{3} = 10 \Rightarrow MN = 10$$

Lại có  $EF // BC$  (gt), chứng minh tương tự ta có:

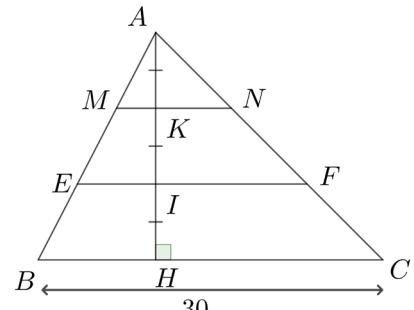
$$\frac{EF}{BC} = \frac{AF}{AC} = \frac{AI}{AH} = \frac{2}{3} \text{ hay } \frac{EF}{30} = \frac{2}{3} \Rightarrow EF = \frac{2 \cdot 30}{3} = 20$$

b) Gọi  $S_{ABCD}$  là diện tích tam giác  $ABC$  và  $S_{MNEF}$  là diện tích tứ giác  $MNEF$ .

$$\text{Ta có } S_{ABCD} = \frac{1}{2} BC \cdot AH \Rightarrow 10,8 = \frac{1}{2} \cdot 30 \cdot AH$$

$$\Rightarrow AH = \frac{2 \cdot 10,8}{30} = 0,72 \text{ dm} \Rightarrow AK = KI = IH = \frac{1}{3} AH = \frac{1}{3} \cdot 0,72 = 0,24 \text{ dm.}$$

Để thấy tứ giác  $MNEF$  là hình thang (tứ giác có hai cạnh đối song song)



$$S_{MNEF} = \frac{(MN + FE) \cdot KI}{2} = \frac{(10 + 20) \cdot 0,24}{2} = 3,6 \text{ dm}^2.$$

6. Bác Mén muốn tính khoảng cách giữa hai vị trí  $P$ ,  $Q$  ở hai bên bờ ao cá. Để làm điều đó, bác Mén chọn ba vị trí  $A$ ,  $B$ ,  $C$  thực hiện đo đạc và vẽ mô phỏng như hình vẽ. Em hãy giúp bác Mén tính khoảng cách giữa hai điểm  $P$  và  $Q$ .

**Lời giải**

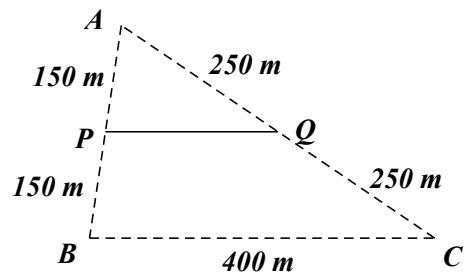
Ta có  $PA = BP = 150$  m hay  $P$  là trung điểm của  $AB$ .

Tương tự  $QA = QC = 250$  m  $\Rightarrow Q$  là trung điểm của  $AC$ .

Do đó  $PQ$  là đường trung bình của tam giác  $ABC$

$$\Rightarrow PQ = \frac{1}{2}BC \text{ hay } \Rightarrow PQ = \frac{1}{2} \cdot 400 = 200 \text{ m.}$$

$$= 0,72 \text{ dm} \Rightarrow AK = KI = 4AH = 4 \cdot 0,72 = 0,24 \text{ dm.}$$



7. Cho tam giác  $ABC$ , các đường trung tuyến  $BD$  và  $CE$  cắt nhau tại  $G$ . Gọi  $I$ ,  $K$  lần lượt là trung điểm của  $GB$ ,  $GC$ . Chứng minh tứ giác  $EDKI$  là hình bình hành.

**Lời giải**

Ta có  $E$ ,  $D$  lần lượt là trung điểm của  $AB$  và  $AC$  (gt) nên  $ED$  là đường trung bình của tam giác  $ABC$   $\Rightarrow ED // BC$  và

$$ED = \frac{1}{2}BC \quad (1)$$

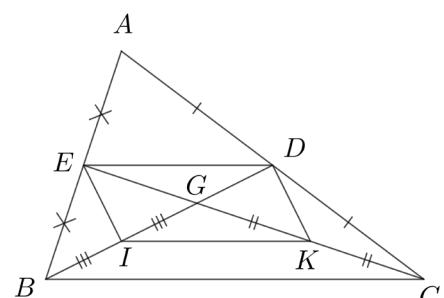
Tương tự  $I$ ,  $K$  lần lượt là trung điểm của  $GB$  và  $GC$  (gt)

$\Rightarrow IK$  là đường trung bình của tam giác  $BGC$

$$\Rightarrow IK // BC \text{ và } IK = \frac{1}{2}BC \quad (2)$$

Từ (1) và (2)  $\Rightarrow IK // ED$  (cùng song song với  $BC$ ) và  $IK = ED$

Do đó tứ giác  $EDKI$  là hình bình hành (Tứ giác có hai cạnh đối vừa song song vừa bằng nhau).



## CHƯƠNG V: DỮ LIỆU VÀ BIỂU ĐỒ

### BÀI 18: THU THẬP VÀ PHÂN LOẠI DỮ LIỆU

#### A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

##### 1. Thu thập dữ liệu

Thu thập dữ liệu có thể là trực tiếp hoặc gián tiếp

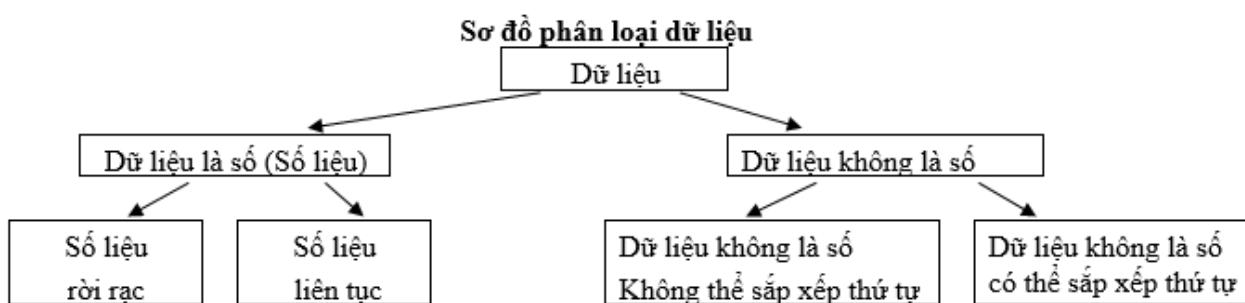
- Thu thập dữ liệu trực tiếp là việc thu thập dữ liệu thông qua quan sát, làm thí nghiệm, lập bảng hỏi, phỏng vấn...

- Thu thập dữ liệu gián tiếp là việc thu thập dữ liệu từ những nguồn có sẵn như sách báo mạng internet...

Đề có thể đưa ra các kết luận hợp lý, dữ liệu thu thập được phải đảm bảo tính đại diện cho toàn bộ đối tượng đang quan tâm.

##### 2. Phân loại dữ liệu

Số liệu có thể nhận giá trị tùy ý trong một khoảng nào đó được gọi là số liệu liên tục. Số liệu không phải là số liệu liên tục được gọi là số liệu rời rạc.



#### B. PHÂN LOẠI CÁC BÀI TẬP

##### I. Phương pháp thu thập dữ liệu

**Bài toán 1.** Các bạn học sinh lớp 8A muốn thu thập thông tin về số lượng huy chương đạt được của Đoàn thể thao Việt Nam tại SEA Game 31. Theo em, các bạn lớp 8A có thể thu thập những thông tin đó bằng cách nào?

**Hướng dẫn:** Có hai phương pháp thu thập dữ liệu: trực tiếp hoặc gián tiếp.

**Bài toán 2.** Lớp trưởng lớp 8C muốn thu thập thông tin về các môn thể thao được ưa thích của các bạn trong lớp. Theo em, các bạn lớp trưởng có thể thu thập những thông tin đó bằng cách nào?

**Bài toán 3.** Em hãy cho biết phương pháp thu thập dữ liệu trong mỗi trường hợp sau là trực tiếp hay gián tiếp.

a) Nam vào website của Tổng cục thống kê và ghi lại số quận/huyện của các tỉnh/thành phố thuộc đồng bằng Bắc Bộ.

b) Thầy giáo dạy Giáo dục thể chất đã đo và ghi lại thời gian chạy cự li 1000 mét của các bạn học sinh khối 8.

**Bài toán 4.** Chọn phương pháp có thể sử dụng

Dữ liệu	Phương pháp có thể sử dụng
Địa lý, lịch sử	
Thực tiễn (môi trường, tài chính, y tế, giá cả thị trường)	
Mức độ hài lòng của công dân	

##### II. Phân loại dữ liệu

**Bài toán 5.** Với mỗi câu hỏi sau, An đã hỏi 5 bạn và ghi lại câu trả lời.

a) Bạn nặng bao nhiêu kilôgam? Kết quả: 48; 51; 46; 145; 48.

b) Tên bạn có bao nhiêu chữ cái? Kết quả: 4; 5; 6; 3; 5.

Mỗi dãy dữ liệu trên thuộc loại nào? Chỉ ra giá trị không hợp lý nếu có.

**Bài toán 6.** Ghép cặp cho phù hợp và ghi kết quả vào vở.

a. Số liệu rời rạc	A. Kết quả đánh giá của 5 bạn về đề kiểm tra học kì môn toán: Khó, rất khó, trung bình, dễ, khó.
b. Số liệu liên tục	B. Nhiệt độ ( $^{\circ}\text{C}$ ) tại Nha Trang trong 5 ngày đầu tháng 6 là: 23, 2; 25, 7; 31, 4; 27, 3; 28, 6.
c. Dữ liệu không là số, không thể sắp thứ tự	C. Số hoạt động hè mà các bạn trong tổ tham gia: 2; 1; 3; 0; 4.
D. Dữ liệu không là số, có thể sắp thứ tự	D. Tên các môn thể thao mà các bạn yêu thích nhất: Bóng đá, Cầu lông, Cờ vua, Võ thuật, Bóng bàn.

**Bài toán 7.** Cho các loại dữ liệu sau đây:

- Môn thể thao yêu thích của một số bạn học sinh lớp 8C: bóng đá, cầu lông, bóng chuyền, ...
  - Chiều cao (tính theo cm) của một số bạn học sinh lớp 8C: 152, 7; 148, 5; 160, 2; ...
  - Xếp loại học tập của một số bạn học sinh lớp 8C: tốt, chua đạt, đạt, khá, ...
  - Điểm kiểm tra môn toán của một số bạn học sinh lớp 8C: 5; 10; 8; 4, ...
  - Trình độ tay nghề của các công nhân trong phân xưởng A gồm các bậc: 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7.
- a) Tìm dữ liệu là số và dữ liệu không là số trong các dữ liệu trên.  
 b) Trong số các dữ liệu là số tìm được, dữ liệu nào có thể sắp thứ tự?  
 c) Trong số các dữ liệu tìm được, dữ liệu nào là rời rạc?

**C. BÀI TẬP**

- 5.1.** Dữ liệu thu được trong mỗi câu hỏi sau thuộc loại nào?
- Bạn cao bao nhiêu?
  - Mạng điện thoại của bạn đang dùng là gì?
  - Gia đình bạn có bao nhiêu người dưới 18 tuổi?
- 5.2.** Nên sử dụng phương pháp thu thập nào để thu được mỗi dữ liệu sau?
- Tên của 10 quốc gia có diện tích lớn nhất.
  - Ý kiến của các bạn về địa điểm đi tham quan tuần tới.
  - Chiều cao của các cây cau giống sau 6 tháng trồng.
- 5.3.** Bạn Ngân thu thập thông tin từ *Niên giám Thống kê 2020* (NXB Thống kê, 2021) về số lượng các tỉnh/ thành phố thuộc các vùng kinh tế - xã hội của nước ta năm 2020 như sau:
- Sáu vùng kinh tế - xã hội là: Đồng bằng sông Hồng, trung du và miền núi phía Bắc, Bắc Trung Bộ và duyên hải miền Trung, Tây Nguyên, Đông Nam Bộ, Đồng bằng sông Cửu Long;
  - Số lượng các tỉnh/ thành phố thuộc các vùng kinh tế - xã hội đó lần lượt là: 11; 14; 14; 5; 6; 13.
- Hãy chỉ ra dữ liệu là số liệu, dữ liệu không là số.

## ĐÁP ÁN THAM KHẢO

### BÀI 18: THU THẬP VÀ PHÂN LOẠI DỮ LIỆU

#### B. PHÂN LOẠI CÁC BÀI TẬP

##### I. Phương pháp thu thập dữ liệu

**Bài toán 1.** Các bạn học sinh lớp 8A muốn thu thập thông tin về số lượng huy chương đạt được của Đoàn thể thao Việt Nam tại SEA Game 31. Theo em, các bạn lớp 8A có thể thu thập những thông tin đó bằng cách nào?

**Hướng dẫn:** Có hai phương pháp thu thập dữ liệu: trực tiếp hoặc gián tiếp.

##### *Lời giải*

Các bạn học sinh lớp 8A có thể thu thập từ trang web: <https://seagames2021.com/>

Các loại huy chương vàng, bạc, đồng.

Số lượng huy chương mỗi loại.

**Bài toán 2.** Lớp trưởng lớp 8C muốn thu thập thông tin về các môn thể thao được ưa thích của các bạn trong lớp. Theo em, các bạn lớp trưởng có thể thu thập những thông tin đó bằng cách nào?

##### *Lời giải*

Lớp trưởng thu thập dữ liệu trực tiếp bằng cách lập bảng hỏi.

Môn thể thao	Ưa thích
Bóng đá	
Cầu lông	
Bóng rổ	
Bóng bàn	
Cờ vua	

**Bài toán 3.** Em hãy cho biết phương pháp thu thập dữ liệu trong mỗi trường hợp sau là trực tiếp hay gián tiếp.

a) Nam vào website của Tổng cục thống kê và ghi lại số quận/huyện của các tỉnh/thành phố thuộc đồng bằng Bắc Bộ.

b) Thầy giáo dạy Giáo dục thể chất đã đo và ghi lại thời gian chạy cự li 1000 mét của các bạn học sinh khối 8.

##### *Lời giải*

a) Phương pháp gián tiếp

b) Phương pháp trực tiếp

**Bài toán 4.** Chọn phương pháp có thể sử dụng

Dữ liệu	Phương pháp có thể sử dụng
Địa lý, lịch sử	
Thực tiễn (môi trường, tài chính, y tế, giá cả thị trường)	
Mức độ hài lòng của công dân	

##### *Lời giải*

Dữ liệu	Phương pháp có thể sử dụng
Địa lý, lịch sử	Thu thập từ nguồn có sẵn
Thực tiễn (môi trường, tài chính, y tế, giá cả thị trường)	Phỏng vấn, lập phiếu hỏi, thu thập từ nguồn có sẵn, internet
Mức độ hài lòng của công dân	Quan sát, phỏng vấn, lập phiếu khảo sát

#### II. Phân loại dữ liệu

**Bài toán 5.** Với mỗi câu hỏi sau, An đã hỏi 5 bạn và ghi lại câu trả lời.

a) Bạn nặng bao nhiêu kilogram? Kết quả: 48; 51; 46; 145; 48.

b) Tên bạn có bao nhiêu chữ cái? Kết quả: 4; 5; 6; 3; 5.

Mỗi dãy dữ liệu trên thuộc loại nào? Chỉ ra giá trị không hợp lý nếu có.

*Lời giải*

- a) Giá trị 145 không hợp lý.
- b) Dữ liệu thu được là số liệu liên tục.

**Bài toán 6.** Ghép cặp cho phù hợp và ghi kết quả vào vỏ.

a. Số liệu rời rạc	A. Kết quả đánh giá của 5 bạn về đề kiểm tra học kì môn toán: Khó, rất khó, trung bình, dễ, khó.
b. Số liệu liên tục	B. Nhiệt độ ( $^{\circ}\text{C}$ ) tại Nha Trang trong 5 ngày đầu tháng 6 là: 23, 2; 25, 7; 31, 4; 27, 3; 28, 6.
c. Dữ liệu không là số, không thể sắp thứ tự	C. Số hoạt động hè mà các bạn trong tổ tham gia: 2; 1; 3; 0; 4.
D. Dữ liệu không là số, có thể sắp thứ tự	D. Tên các môn thể thao mà các bạn yêu thích nhất: Bóng đá, Cầu lông, Cờ vua, Võ thuật, Bóng bàn.

*Lời giải*

a.	C
b.	B
c.	D
d.	A

**Bài toán 7.** Cho các loại dữ liệu sau đây:

- Môn thể thao yêu thích của một số bạn học sinh lớp 8C: bóng đá, cầu lông, bóng chuyền,...
  - Chiều cao (tính theo cm) của một số bạn học sinh lớp 8C: 152, 7; 148, 5; 160, 2; ...
  - Xếp loại học tập của một số bạn học sinh lớp 8C: tốt, chua đạt, đạt, khá, ...
  - Điểm kiểm tra môn toán của một số bạn học sinh lớp 8C: 5; 10; 8; 4, ...
  - Trình độ tay nghề của các công nhân trong phân xưởng A gồm các bậc: 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7.
- a) Tìm dữ liệu là số và dữ liệu không là số trong các dữ liệu trên.  
 b) Trong số các dữ liệu là số tìm được, dữ liệu nào có thể sắp thứ tự?  
 c) Trong số các dữ liệu tìm được, dữ liệu nào là rời rạc?

*Lời giải*

- a) Môn thể thao yêu thích và xếp loại học tập: dữ liệu không là số.  
 Chiều cao, Điểm kiểm tra môn Toán và Trình độ tay nghề: số liệu.  
 b) Trình độ tay nghề  
 c) Điểm toán, chiều cao  
**Chú ý:** Số liệu rời rạc là dữ liệu chỉ nhận hữu hạn giá trị hoặc biểu thị số điểm.  
 Số liệu liên tục là dữ liệu là dữ liệu có thể nhận mọi giá trị trong một khoảng nào đó.

## C. BÀI TẬP

**5.1.** Dữ liệu thu được trong mỗi câu hỏi sau thuộc loại nào?

- a) Bạn cao bao nhiêu?
- b) Mạng điện thoại của bạn đang dùng là gì?
- c) Gia đình bạn có bao nhiêu người dưới 18 tuổi?

*Lời giải*

- a) Dữ liệu số.
- b) Dữ liệu không là số.
- c) Dữ liệu số.

**5.2.** Nên sử dụng phương pháp thu thập nào để thu được mỗi dữ liệu sau?

- a) Tên của 10 quốc gia có diện tích lớn nhất.
- b) Ý kiến của các bạn về địa điểm đi tham quan tuần tới.
- c) Chiều cao của các cây cau giống sau 6 tháng trồng.

*Lời giải*

- a) Thu thập gián tiếp từ nguồn có sẵn.
- b) Thu thập trực tiếp.
- c) Thu thập trực tiếp thông qua quan sát .

**5.3.**

Bạn Ngân thu thập thông tin từ *Niên giám Thống kê 2020*( NXB Thống kê, 2021) về số lượng các tỉnh/ thành phố thuộc các vùng kinh tế - xã hội của nước ta năm 2020 như sau:

- Sáu vùng kinh tế - xã hội là: Đồng bằng sông Hồng, trung du và miền núi phía Bắc, Bắc Trung Bộ và duyên hải miền Trung, Tây Nguyên, Đông Nam Bộ, Đồng bằng sông Cửu Long;
- Số lượng các tỉnh/ thành phố thuộc các vùng kinh tế - xã hội đó lần lượt là: 11;14;14;5;6;13 .

Hãy chỉ ra dữ liệu là số liệu, dữ liệu không là số.

**Lời giải**

- a) Dữ liệu không là số.
- b) Dữ liệu là số liệu là số lượng các tỉnh thuộc vùng kinh tế - xã hội.

## BÀI 19: BIỂU DIỄN DỮ LIỆU BẰNG BẢNG, BIỂU ĐỒ

### A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

#### 1. Lựa chọn biểu đồ tranh hay biểu đồ cột

Có thể dùng biểu đồ tranh, biểu đồ cột để biểu diễn số lượng các loại đối tượng khác nhau. Tuy nhiên, khi phải vẽ rất nhiều biểu tượng thì ta nên dùng biểu đồ cột.

#### 2. Lựa chọn biểu đồ cột hay biểu đồ đoạn thẳng

Nếu muốn biểu diễn sự thay đổi của một đại lượng theo thời gian ta dùng biểu đồ đoạn thẳng.

Khi số lượng thời điểm quan sát ít ta cũng có thể biểu diễn bằng biểu đồ cột.

#### 3. Lựa chọn biểu đồ cột kép hay biểu đồ hình quạt tròn

Khi muốn so sánh hai tập dữ liệu với nhau ta dùng biểu đồ cột kép. Khi muốn biểu diễn tỉ lệ các phần trong tổng thể ta dùng biểu đồ hình quạt tròn.

### B. PHÂN LOẠI CÁC BÀI TẬP

#### 1. Biểu diễn biểu đồ tranh hay biểu đồ cột

**Bài toán 1:** Bảng dưới cho biết số lượng các loài động vật tại Thảo Cầm Viên, Thành phố Hồ Chí Minh vào ngày 14-7-1869, thời điểm Thảo Cầm Viên chính thức mở cửa đón khách vào xem.

Loài động vật	Thú	Chim	Bò sát
Số lượng (con)	120	344	344

(Theo [cand.com.vn](http://cand.com.vn))

Theo em, những loại biểu đồ nào phù hợp để biểu diễn dữ liệu trong bảng trên.

**Bài toán 2:** Biểu diễn số lượng các bạn lớp 8A tham gia các câu lạc bộ.

Tiếng anh	☺	☺
Võ thuật	☺	☺
Nghệ thuật	☺	☺

( Mỗi ☺ tương ứng với 3 bạn)

a) Cho biết đây là biểu đồ gì? Mỗi biểu tượng ứng với bao nhiêu học sinh?

b) Lập bảng thống kê và vẽ biểu đồ cột biểu diễn dữ liệu này.

**Bài toán 3:** Bảng thống kê cho biết số lượng khách đánh giá chất lượng dịch vụ của một khách sạn.

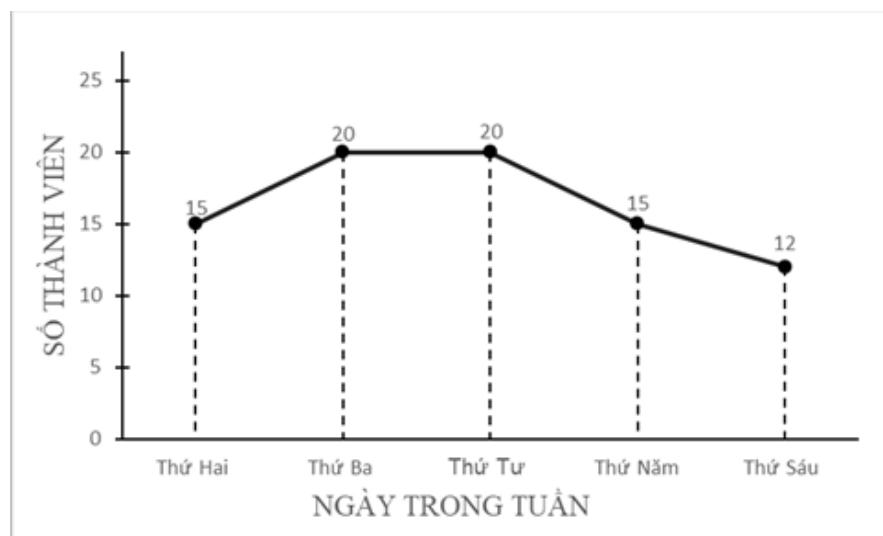
Đánh giá	Rất tốt	Tốt	Trung bình	Kém
Số lượng	5	20	10	5

a) Vẽ biểu đồ tranh, biểu đồ cột biểu diễn bảng thống kê trên.

b) Nếu muốn biểu diễn tỉ lệ khách hàng đánh giá theo các mức đánh giá trên, ta cần dùng biểu đồ nào để biểu diễn?

#### II. Lựa chọn biểu đồ cột hay biểu đồ đoạn thẳng

**Bài toán 4:** Người phụ trách một câu lạc bộ thống kê số lượng thành viên có mặt tại câu lạc bộ từ thứ Hai đến thứ Sáu lần lượt như sau: 15; 20; 20; 15; 12 (người). Hãy lựa chọn biểu đồ thích hợp để biểu diễn dữ liệu trên.



**Hướng dẫn:** Biểu diễn của đại lượng thay đổi theo thời gian ta dùng biểu đồ đoạn thẳng.

**Bài toán 5:** Tổng sản phẩm trong nước (GDP) của Việt Nam trong các năm 2016, 2017, 2018, 2019 thứ tự là: 205,3; 223,7; 245,2; 261,9 đơn vị : tỉ đô la Mỹ).

a) Lập bảng thống kê GDP của Việt Nam trong năm kể trên.

b) Vẽ biểu đồ đoạn thẳng biểu diễn GDP của Việt Nam trong các năm kể trên.

**Bài toán 6:** Số lượt khách đến một cửa hàng kinh doanh từ thứ Hai đến Chủ nhật của một tuần trong tháng lần lượt là: 161, 243, 270, 210, 185, 421, 615.

a) Lập bảng thống kê số lượt khách đến cửa hàng trong những ngày đó theo mẫu sau:

Ngày trong tuần	Thứ hai	Thứ ba	Thứ tư	Thứ năm	Thứ sáu	Thứ bảy	Chủ Nhật
Số lượt khách	?	?	?	?	?	?	?

b) Biểu đồ cột biểu diễn các dữ liệu thống kê số lượt khách đến cửa hàng trong những ngày đó.

**Bài toán 7:** Bảng dưới đây nêu thực trạng và dự báo về số người cao tuổi của Việt Nam đến năm 2069.

Năm	2009	2019	2029	2038	2049	2069
Số người cao tuổi (Triệu người)	7,45	11,41	17,28	22,29	28,61	31,69

(Nguồn: tổng cục thống kê)

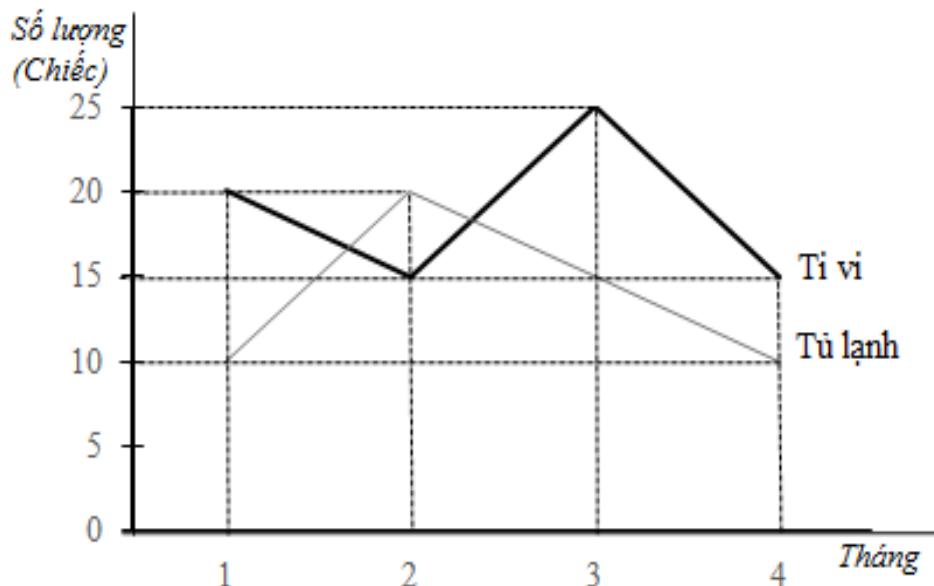
Vẽ biểu đồ cột biểu diễn các dữ liệu trên.

### III. Lựa chọn biểu đồ cột hay biểu đồ hình quạt tròn

**Bài toán 8.** Số lượng học sinh ở hai lớp 8A và 8B đăng ký tham gia: câu lạc bộ (CLB) bóng đá lần lượt là 26 và 22 (học sinh); CLB bóng rổ lần lượt là 14 và 18 (học sinh). Hãy lựa chọn biểu đồ thích hợp để biểu diễn dữ liệu trên và vẽ biểu đồ đó.

**Hướng dẫn:** So sánh hai tập dữ liệu với nhau, ta dùng biểu đồ cột kép.

**Bài toán 9.** Biểu đồ đoạn thẳng thống kê số lượng tivi và tủ lạnh bán được trong tháng 1, tháng 2, tháng 3, tháng 4 của một cửa hàng kinh doanh. Hãy vẽ biểu đồ cột kép để biểu diễn các số liệu từ biểu đồ đoạn thẳng.



**Bài toán 10.** Lựa chọn biểu đồ thích hợp để biểu diễn dữ liệu trong bảng thống kê tỉ lệ phần trăm số tiết học của nội dung môn Toán 8.

Phần	Số và Đại Số	Hình học và Đo lường	Một số yếu tố Thống kê và Xác suất	Hoạt động thực hành và trải nghiệm
Tỉ lệ phần trăm số tiết học	43%	36%	14%	7%

**Bài toán 11.** Lựa chọn biểu đồ về thống kê số tiết học các nội dung trong môn Toán của khối lớp 6 và khối lớp 8.

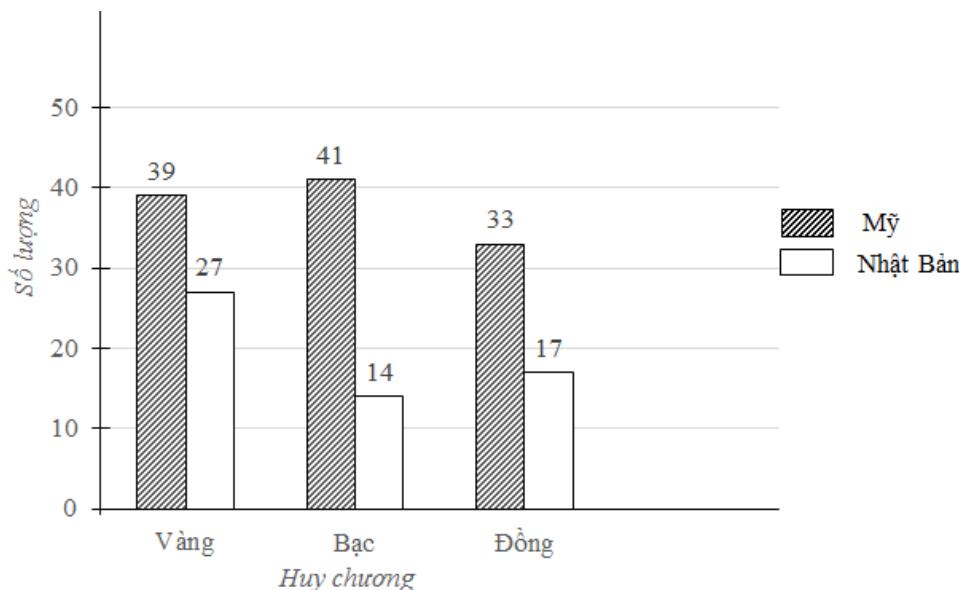
Phần	Số và Đại Số	Hình học và Đo lường	Một số yếu tố Thống kê và Xác suất	Hoạt động thực hành và trải nghiệm
Khối lớp 6	68	40	22	10
Khối lớp 8	60	50	20	10

**Bài toán 12.** Lựa chọn biểu đồ thích hợp để biểu diễn dữ liệu. Thống kê số huy chương bốn quốc gia dẫn đầu SEA Games 31 được cho trong bảng số liệu sau:

Quốc gia	Số huy chương vàng	Tổng số huy chương
Việt Nam	205	446
Thái Lan	92	332
Indonesia	69	241
Philippines	52	227

**Bài toán 13.** Cho biểu đồ. Hãy lập bảng thống kê biểu diễn số lượng huy chương các loại của đoàn thể thao Mỹ, Nhật Bản và vẽ biểu đồ cột biểu diễn bảng thống kê này.

*Số lượng huy chương các loại của đoàn thể thao Mỹ, Nhật Bản tại Olympic Tokyo 2020*



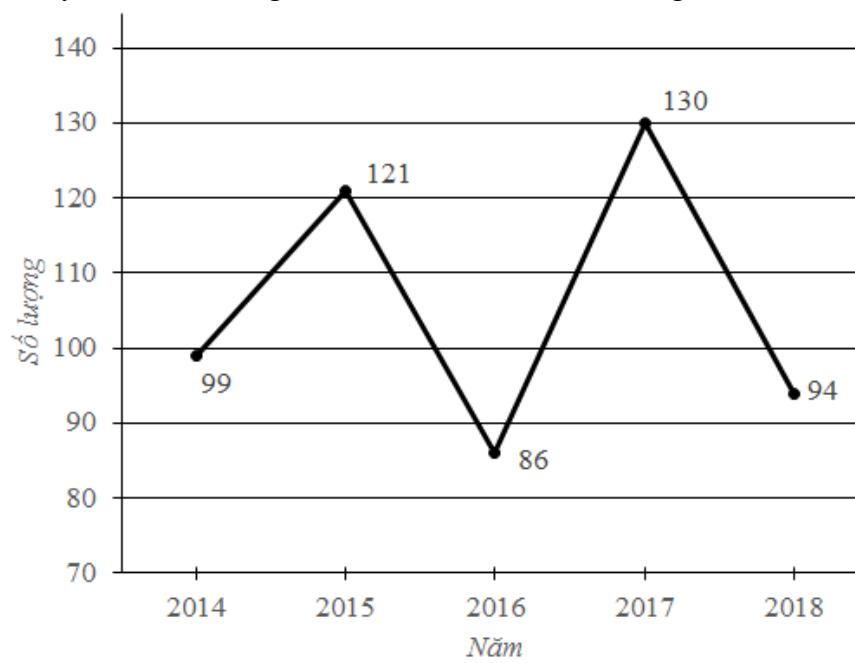
(Theo [olympics.com/tokyo-2020](https://olympics.com/tokyo-2020))

### C. BÀI TẬP

5.4. Cho biểu đồ đoạn thẳng.

a) Lập bảng thống kê cho dữ liệu trong biểu đồ.

b) Vẽ biểu đồ cột biểu diễn dữ liệu này. Nếu ta có dữ liệu về số con bão hằng năm trên toàn cầu từ năm đến nay thì có nên dùng biểu đồ cột để biểu diễn không?



(Theo [unicef.org](https://unicef.org))

5.5. Bảng sau cho biết khối lượng giấy vụn các lớp khối 8 đã thu gom được.

Lớp	8A	8B	8C	8D
Khối lượng (kg)	12,7	16,8	15,5	14,3

Lựa chọn biểu đồ phù hợp với bảng thống kê này. Vẽ biểu đồ đó.

5.6. Bảng thống kê sau biểu diễn số huy chương vàng trong hai kì SEA Games năm 2017 và 2019 của đoàn thể thao Việt Nam, Thái Lan.

	SEA Games 2019	SEA Games 2017
Việt Nam	98	58
Thái Lan	92	72

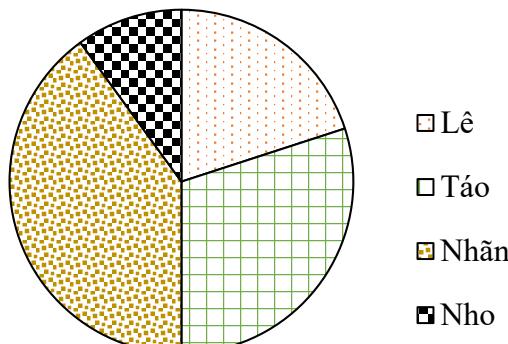
a) Vẽ biểu đồ so sánh số huy chương mỗi quốc gia đạt được qua hai kì SEA Games .

b) Vẽ biểu đồ so sánh số huy chương của Việt Nam và Thái Lan trong mỗi kì SEA Games .

5.7.

Biểu đồ hình quạt tròn cho biết tỉ lệ mỗi quả bán được của một cửa hàng. Giả sử cửa hàng đó bán được các loại quả. Lập bảng thống kê cho biết số lượng mỗi loại quả cửa hàng bán được. Vẽ biểu đồ cột biếu diễn bảng thống kê này.

**Tỉ lệ mỗi loại quả bán được**



5.8.

Kết quả học tập học kì 1 của học sinh lớp 8A và 8B được ghi lại trong bảng sau:

Xếp loại học tập	Tốt	Khá	Đạt	Chưa đạt
Lớp 8A	5%	45%	44%	6%
Lớp 8B	10%	50%	37%	3%

Lựa chọn dạng biểu đồ thích hợp để biếu diễn bảng thống kê trên và trả lời các câu hỏi sau:

- So sánh tỉ lệ học sinh xếp loại học tập Tốt và chưa đạt của hai lớp 8A và 8B.
- Tổng số học sinh xếp loại học tập Tốt và Chưa đạt của lớp 8A bằng bao nhiêu phần trăm tổng số học sinh xếp loại học tập Tốt và Chưa đạt của lớp 8B.

5.9.

Một giáo viên dạy Giáo dục thể chất đã thống kê thời gian chạy 100m (tính theo giây) của 20 học sinh nam và ghi lại trong bảng số liệu ban đầu như sau:

15	14	15	16	14	16	16	15	14	15
15	15	16	15	15	15	14	16	14	15

a) Chuyển dữ liệu từ bảng số liệu ban đầu ở trên sang dạng bảng thống kê sau đây:

Thời gian chạy (giây)	14	15	16
Số học sinh	?	?	?
Tỉ lệ phần trăm (%)	?	?	?

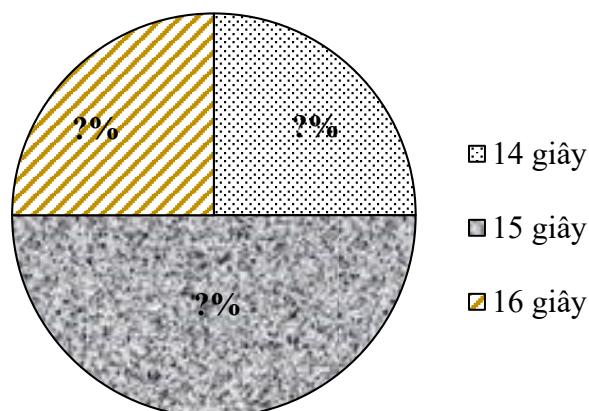
b) Hãy chuyển dữ liệu bảng thống kê ở câu a sang dạng biểu đồ cột và biểu đồ hình quạt tròn sau đây:

Biểu đồ cột:



Biểu đồ hình quạt tròn:

**Tỉ lệ phần trăm thời gian chạy 100 m của 20 học sinh**

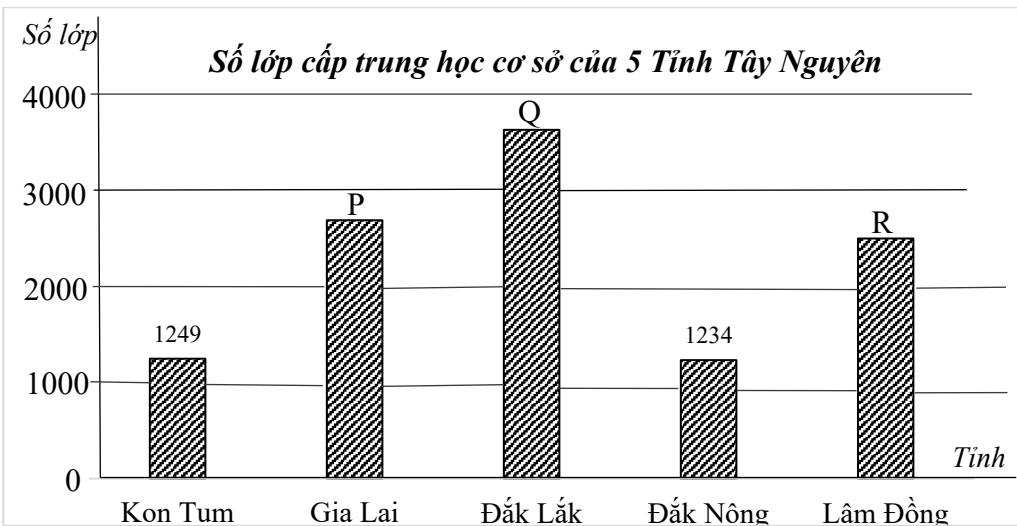


- 5.10.** Số liệu về số lớp học cấp trung học cơ sở của 5 tỉnh Tây Nguyên tính đến ngày 30/9/2021 được cho trong bảng thống kê sau:

Tỉnh	Số lớp học
Kon Tum	1249
Gia Lai	2692
Đăk Lăk	3633
Đăk Nông	1234
Lâm Đồng	2501

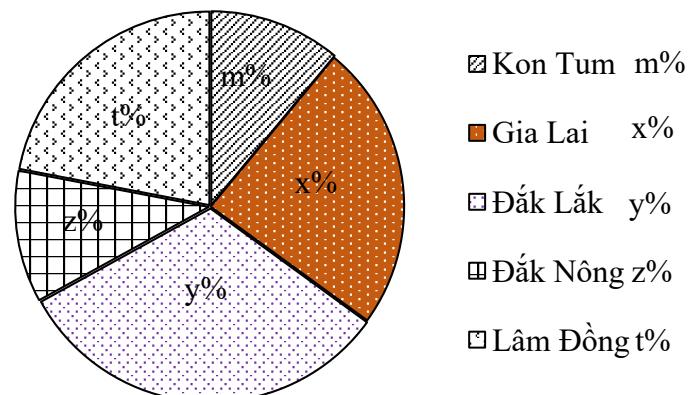
(Nguồn: *Tổng cục thống kê*)

- a) Số liệu từ bảng thống kê trên được biểu diễn vào biểu đồ cột như sau.  
Hãy tìm các giá trị của  $P, Q, R$  trong biểu đồ.



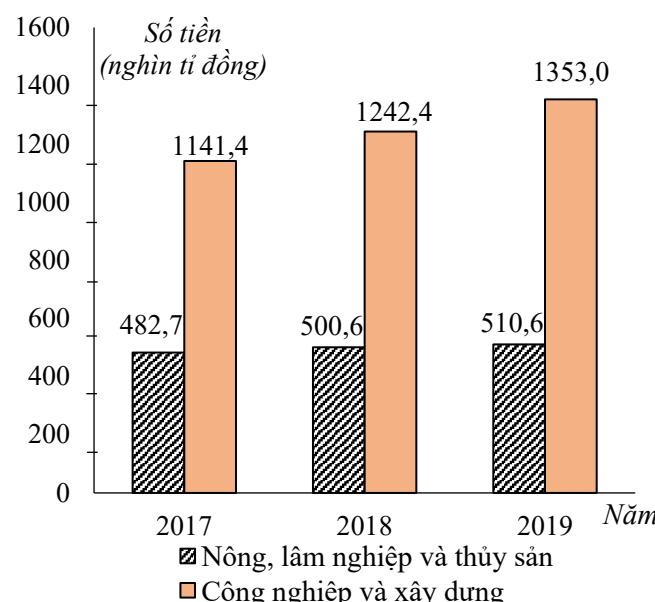
b) Biểu đồ ở câu a) được chuyển sang biểu đồ hình quạt tròn như dưới đây. Hãy tìm các giá trị của  $m, x, y, z, t$  trong biểu đồ.

*Số lớp học cấp trung học cơ sở của 5 tỉnh Tây Nguyên*



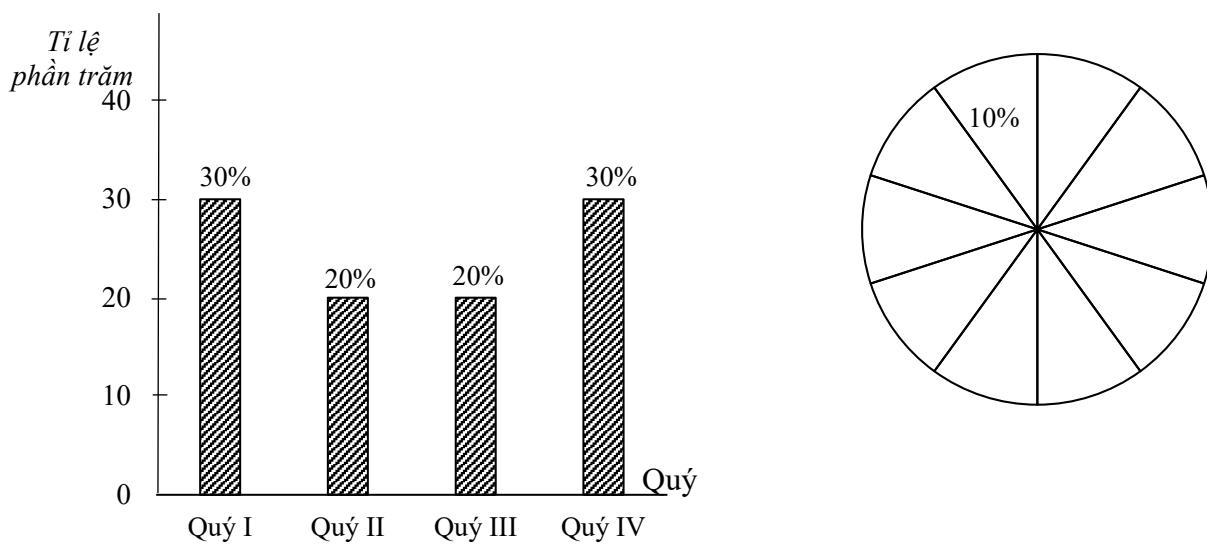
**5.11.** Biểu đồ cột kép biếu diễn tổng sản phẩm trong nước của lĩnh vực Nông, lâm nghiệp và thủy sản; Công nghiệp và xây dựng, trong các năm 2017, 2018, 2019. Lập bảng số liệu tổng sản phẩm trong nước của hai lĩnh vực trên trong các năm 2017, 2018, 2019 theo mẫu sau (đơn vị: nghìn tỉ đồng).

(Nguồn: *Nhiên giám thống kê 2020*  
*NXB thống kê 2021*)



Lĩnh vực	Năm	2017	2018	2019
Nông, lâm nghiệp và thủy sản.		?	?	?
Công nghiệp và xây dựng.		?	?	?

- 5.12. Biểu đồ cột biểu diễn tỉ lệ phần trăm sản phẩm bán được của một doanh nghiệp trong bốn quý của năm 2021. Hãy hoàn thiện biểu đồ hình quạt tròn biểu diễn các dữ liệu thống kê trên. Biết rằng hình quạt tròn biểu diễn dữ liệu đã được chia sẵn thành các hình quạt, mỗi hình quạt ứng với 10% .

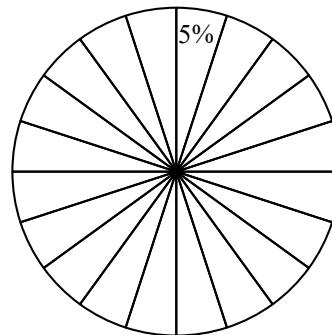


- 5.13. Ban tổ chức của giải thi đấu thể thao bán vé theo bốn mức  $A, B, C, D$  các vé ở bốn mức . Tỉ lệ phân chia  $A, B, C, D$  lần lượt là 35%, 45%, 15%, 5%.

a) Lập bảng thống kê tỉ lệ phân chia vé ở bốn mức trên theo mẫu sau:

Mức vé	$A$	$B$	$C$	$D$
Tỉ lệ vé (%)	?	?	?	?

b) Hoàn thiện biểu đồ để nhận được biểu đồ hình quạt tròn biểu diễn các dữ liệu thống kê trên. Biết rằng hình tròn được chia sẵn thành các hình quạt, mỗi hình quạt mỗi hình quạt ứng với 5%



**ĐÁP ÁN THAM KHẢO****BÀI 19: BIỂU DIỄN DỮ LIỆU BẰNG BẢNG, BIỂU ĐỒ****B. PHÂN LOẠI CÁC BÀI TẬP****1. Biểu diễn biểu đồ tranh hay biểu đồ cột**

**Bài toán 1.** Bảng dưới cho biết số lượng các loài động vật tại Thảo Cầm Viên, Thành phố Hồ Chí Minh vào ngày 14-7-1869, thời điểm Thảo Cầm Viên chính thức mở cửa đón khách vào xem.

Loài động vật	Thú	Chim	Bò sát
Số lượng (con)	120	344	344

(Theo cand.com.vn)

Theo em, những loại biểu đồ nào phù hợp để biểu diễn dữ liệu trong bảng trên.

**Lời giải**

Ta có thể dùng đồ cột, vì nếu dùng biểu đồ tranh phải vẽ rất nhiều biểu tượng.

**Bài toán 2:** Biểu diễn số lượng các bạn lớp 8A tham gia các câu lạc bộ.

Tiếng anh	(☺)	(☺)
Võ thuật	(☺)	(☺)
Nghệ thuật	(☺)	(☺)

( Mỗi ☺ tương ứng với 3 bạn)

- a) Cho biết đây là biểu đồ gì? Mỗi biểu tượng ứng với bao nhiêu học sinh?  
b) Lập bảng thống kê và vẽ biểu đồ cột biểu diễn dữ liệu này.

**Lời giải**

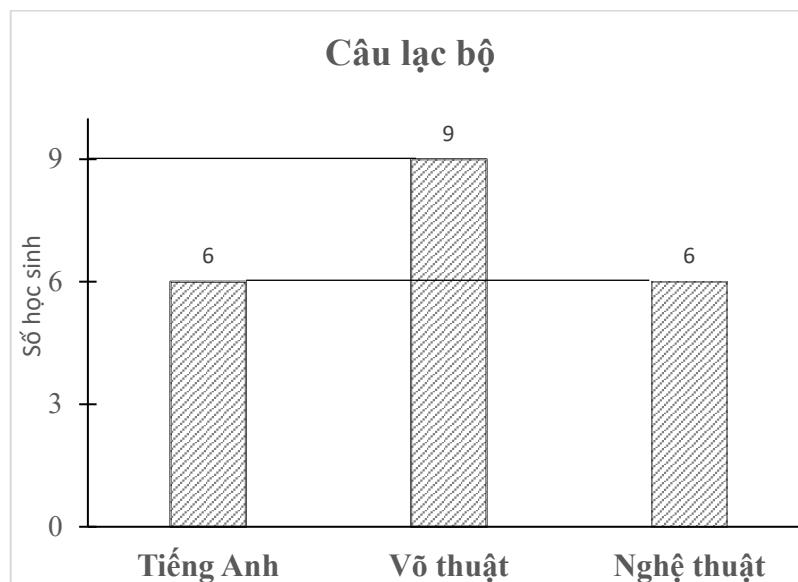
a) Đây là biểu đồ tranh.

Mỗi biểu tượng ứng với 3 học sinh.

b) Bảng thống kê biểu diễn về số lượng học sinh lớp 8A tham gia các câu lạc bộ

Câu lạc bộ	Tiếng Anh	Võ thuật	Nghệ thuật
Số lượng	6	9	6

Biểu đồ cột



**Bài toán 3:** Bảng thống kê cho biết số lượng khách đánh giá chất lượng dịch vụ của một khách sạn.

Dánh giá	Rất tốt	Tốt	Trung bình	Kém
Số lượng	5	20	10	5

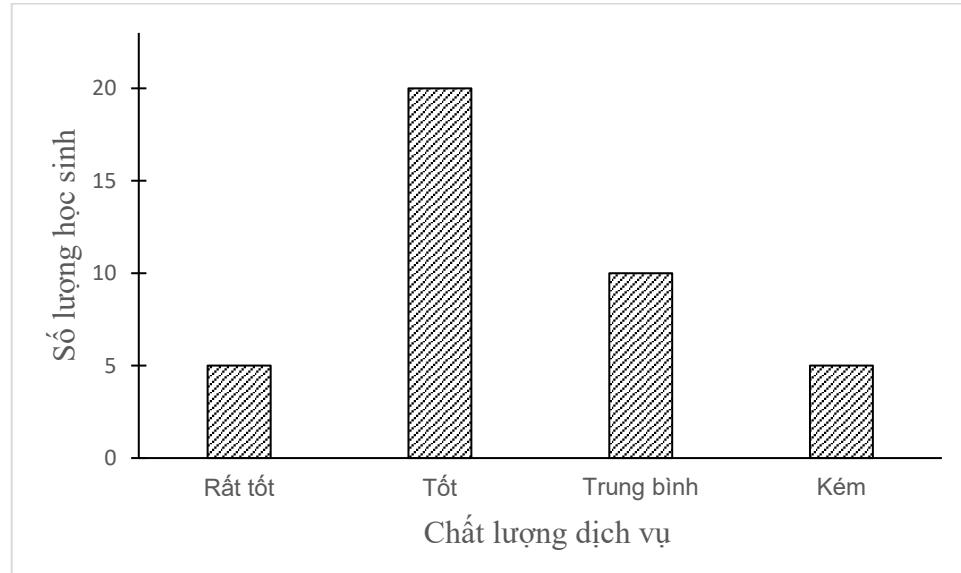
- a) Vẽ biểu đồ tranh, biểu đồ cột biểu diễn bảng thống kê trên.  
b) Nếu muốn biểu diễn tỉ lệ khách hàng đánh giá theo các mức đánh giá trên, ta cần dùng biểu đồ nào để biểu diễn?

**Lời giải**

a) Biểu đồ tranh

Rất tốt	
Tốt	 
Trung bình	 
Kém	

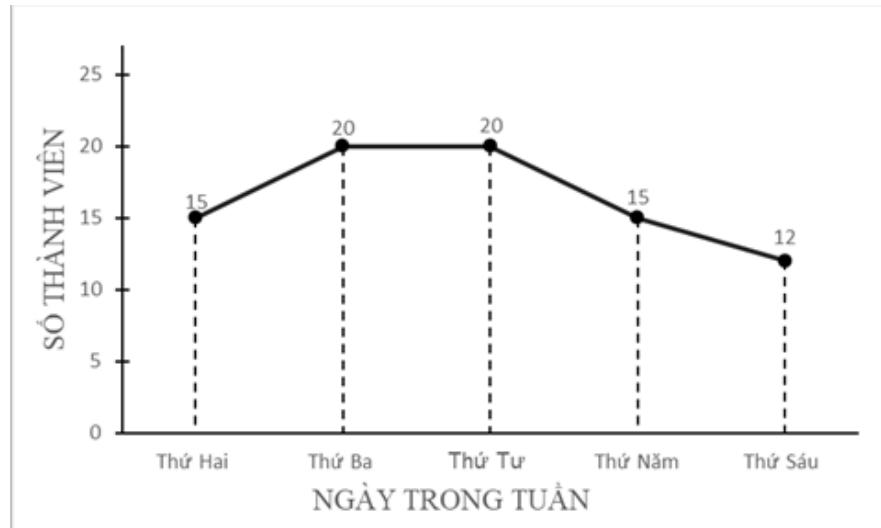
## Biểu đồ cột



b) Ta dùng biểu đồ cột

## **II. Lựa chọn biểu đồ cột hay biểu đồ đoạn thẳng**

**Bài toán 4:** Người phụ trách một câu lạc bộ thống kê số lượng thành viên có mặt tại câu lạc bộ từ thứ Hai đến thứ Sáu lần lượt như sau: 15; 20; 20; 15; 12 (người). Hãy lựa chọn biểu đồ thích hợp để biểu diễn dữ liệu trên.



**Hướng dẫn:** Biểu diễn của đại lượng thay đổi theo thời gian ta dùng biểu đồ đoạn thẳng.

## *Lời giải*

## Biểu đồ đoạn thẳng

**Nhận xét:** Ta cũng có thể dùng biểu đồ cột để biểu diễn dữ liệu trên.

**Bài toán 5:** Tổng sản phẩm trong nước (GDP) của Việt Nam trong các năm 2016, 2017, 2018, 2019 thứ tự là: 205,3; 223,7; 245,2; 261,9 đơn vị : tỉ đô la Mỹ).

- a) Lập bảng thống kê GDP của Việt Nam trong năm kể trên.
  - b) Vẽ biểu đồ đoạn thẳng biểu diễn GDP của Việt Nam trong các năm kể trên.

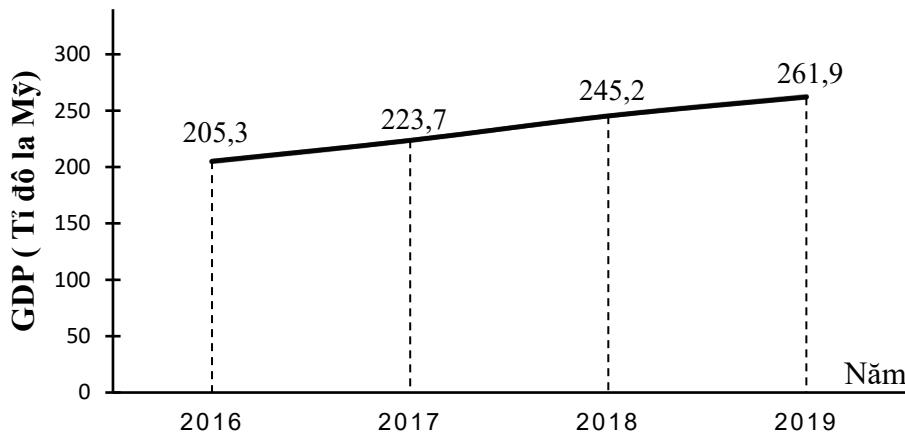
### *Lời giải*

- a) Bảng thống kê GDP của Việt Nam trong các năm 2016, 2017, 2018, 2019

Nám	2016	2017	2018	2019
GDP	205,3	223,7	245,2	261,9

(tỷ đô la Mỹ)				
---------------	--	--	--	--

b) Biểu đồ đoạn thẳng



**Bài toán 6:** Số lượt khách đến một cửa hàng kinh doanh từ thứ Hai đến Chủ nhật của một tuần trong tháng là: 161, 243, 270, 210, 185, 421, 615.

a) Lập bảng thống kê số lượt khách đến cửa hàng trong những ngày đó theo mẫu sau:

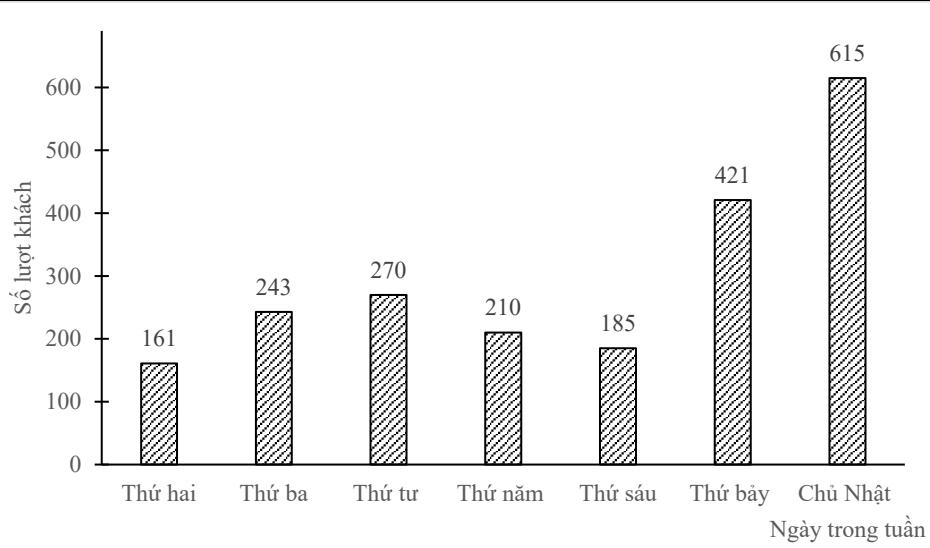
Ngày trong tuần	Thứ hai	Thứ ba	Thứ tư	Thứ năm	Thứ sáu	Thứ bảy	Chủ Nhật
Số lượt khách	?	?	?	?	?	?	?

b) Biểu đồ cột biểu diễn các dữ liệu thống kê số lượt khách đến cửa hàng trong những ngày đó.

*Lời giải*

a) Biểu đồ tranh

Ngày trong tuần	Thứ hai	Thứ ba	Thứ tư	Thứ năm	Thứ sáu	Thứ bảy	Chủ Nhật
Số lượt khách	161	243	270	210	185	421	615



**Nhận xét:** Ta có thể dùng biểu đồ đoạn thẳng để biểu diễn các dữ liệu thống kê số lượt khách trong tuần. (Em hãy tự vẽ)

**Bài toán 7:** Bảng dưới đây nêu thực trạng và dự báo về số người cao tuổi của Việt Nam đến năm 2069.

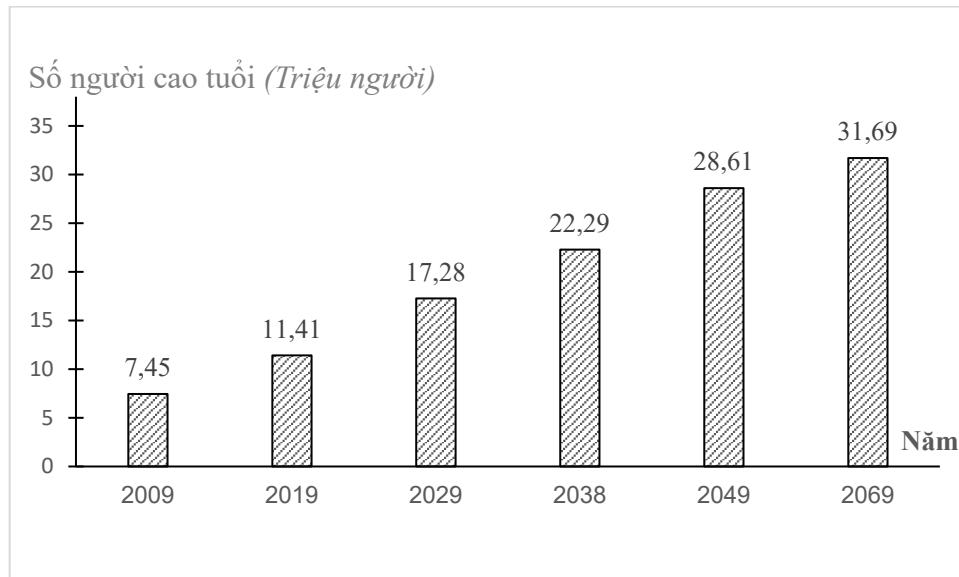
Năm	2009	2019	2029	2038	2049	2069
Số người cao tuổi (Triệu người)	7,45	11,41	17,28	22,29	28,61	31,69

(Nguồn: tổng cục thống kê)

Vẽ biểu đồ cột biểu diễn các dữ liệu trên.

*Lời giải*

Vẽ biểu đồ



### III. Lựa chọn biểu đồ cột hay biểu đồ hình quạt tròn

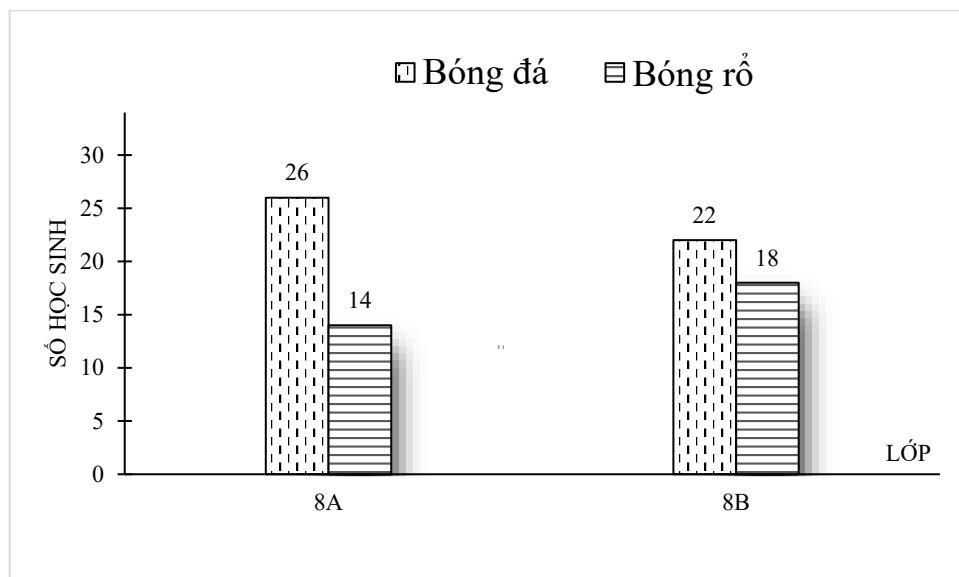
**Bài toán 8.** Số lượng học sinh ở hai lớp 8A và 8B đăng ký tham gia: câu lạc bộ (CLB) bóng đá lần lượt là 26 và 22 (học sinh); CLB bóng rổ lần lượt là 14 và 18 (học sinh). Hãy lựa chọn biểu đồ thích hợp để biểu diễn dữ liệu trên và vẽ biểu đồ đó.

**Hướng dẫn:** So sánh hai tập dữ liệu với nhau, ta dùng biểu đồ cột kép.

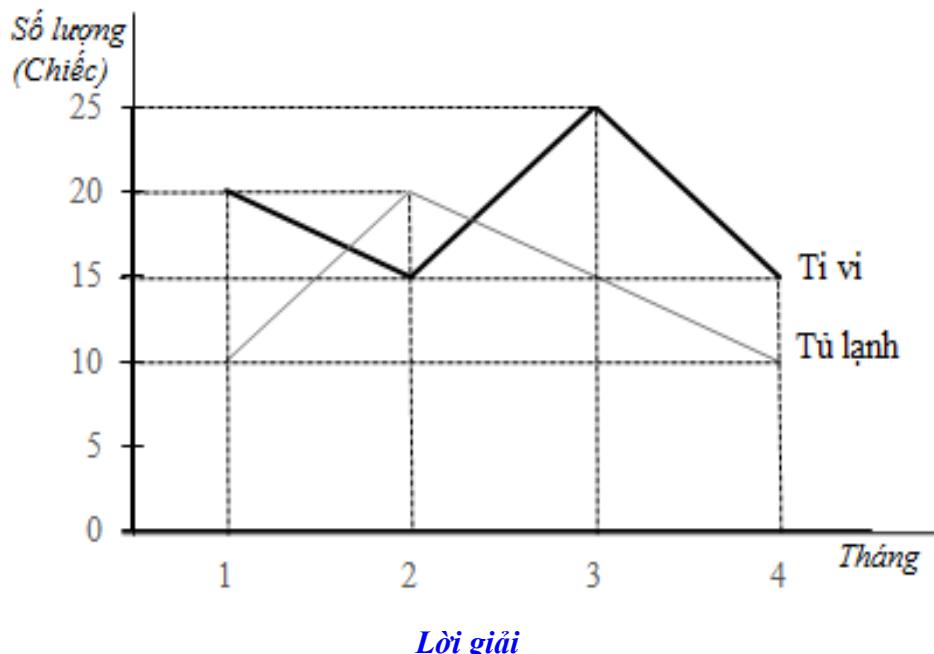
*Lời giải*

Ta chọn biểu đồ cột kép để biểu diễn số liệu trên.

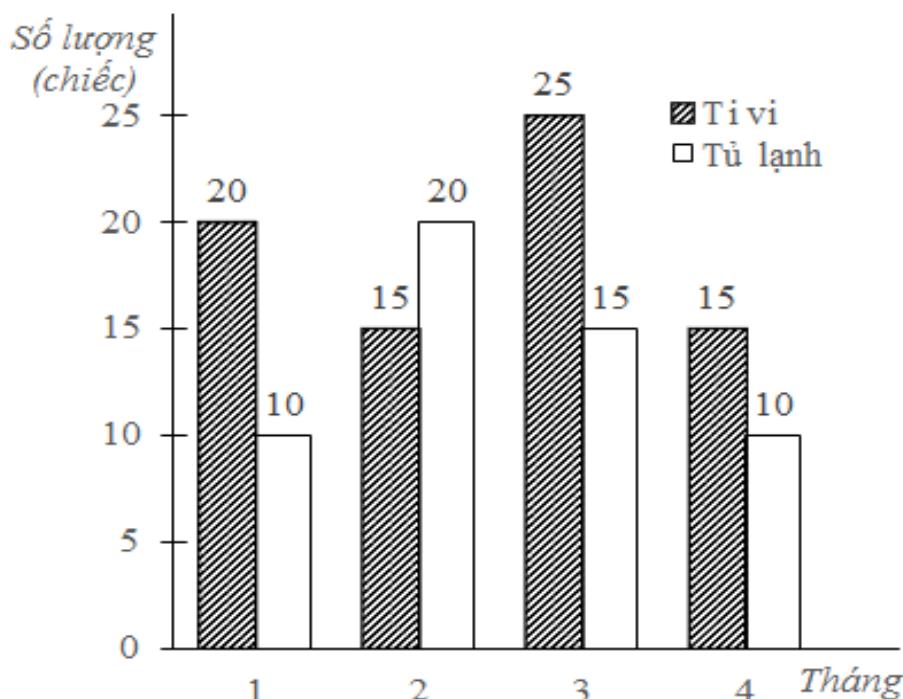
Hình vẽ



**Bài toán 9.** Biểu đồ đoạn thẳng thống kê số lượng tivi và tủ lạnh bán được trong tháng 1, tháng 2, tháng 3, tháng 4 của một cửa hàng kinh doanh. Hãy vẽ biểu đồ cột kép để biểu diễn các số liệu từ biểu đồ đoạn thẳng.



Vẽ biểu đồ

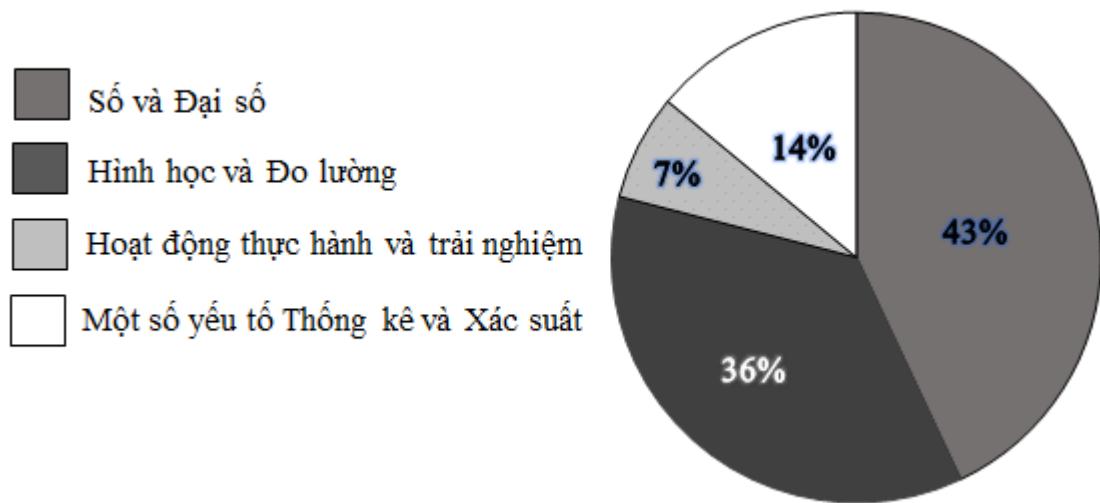


**Bài toán 10.** Lựa chọn biểu đồ thích hợp để biểu diễn dữ liệu trong bảng thống kê tỉ lệ phần trăm số tiết học của nội dung môn Toán 8.

Phần	Số và Đại Số	Hình học và Đo lường	Một số yếu tố Thống kê và Xác suất	Hoạt động thực hành và trải nghiệm
Tỉ lệ phần trăm số tiết học	43%	36%	14%	7%

Lời giải

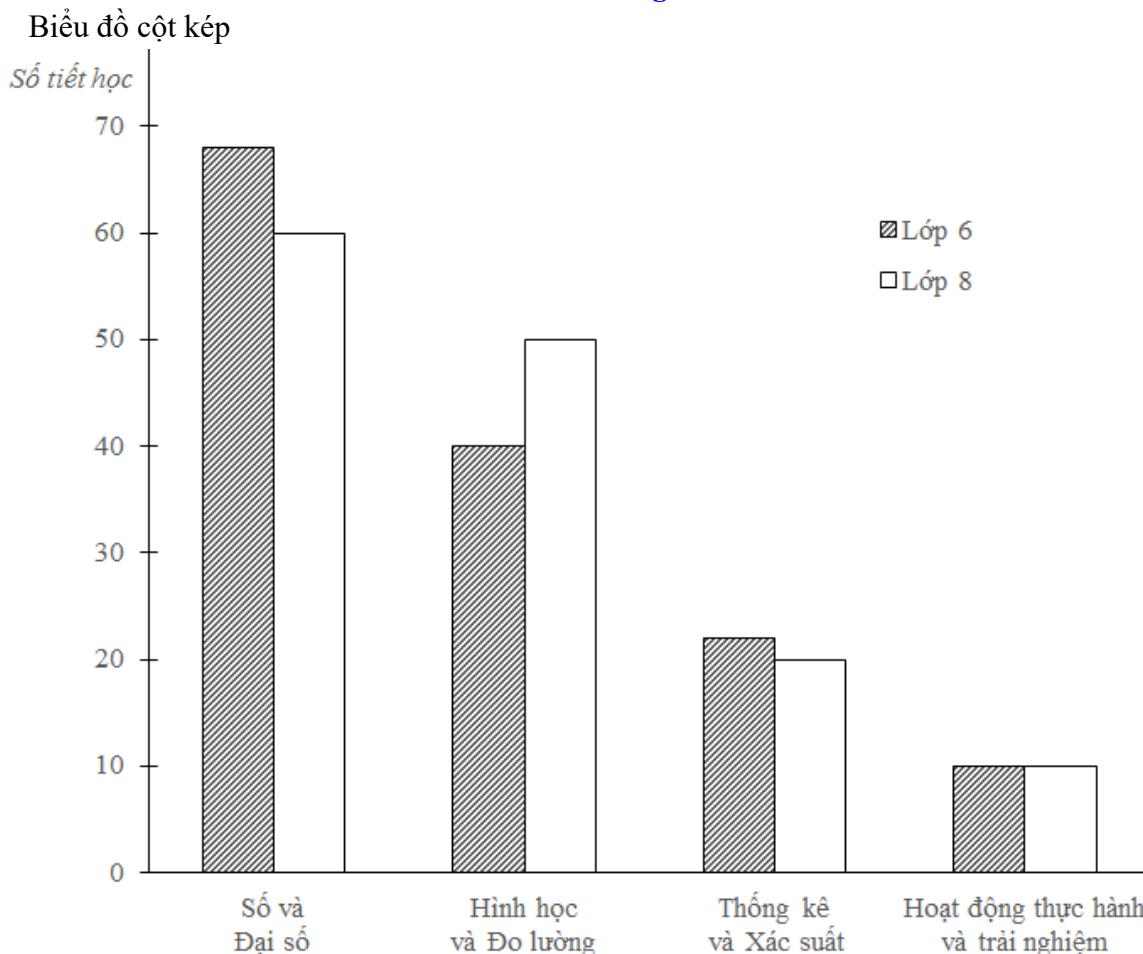
Biểu đồ hình quạt tròn.



**Bài toán 11.** Lựa chọn biểu đồ về thống kê số tiết học các nội dung trong môn Toán của khối lớp 6 và khối lớp 8.

Phần	Số và Đại Số	Hình học và Đo lường	Một số yếu tố Thống kê và Xác suất	Hoạt động thực hành và trải nghiệm
<b>Khối lớp 6</b>	68	40	22	10
<b>Khối lớp 8</b>	60	50	20	10

*Lời giải*



**Bài toán 12.** Lựa chọn biểu đồ thích hợp để biểu diễn dữ liệu. Thống kê số huy chương bốn quốc gia dẫn đầu SEA Games 31 được cho trong bảng số liệu sau:

Quốc gia	Số huy chương vàng	Tổng số huy chương
Việt Nam	205	446

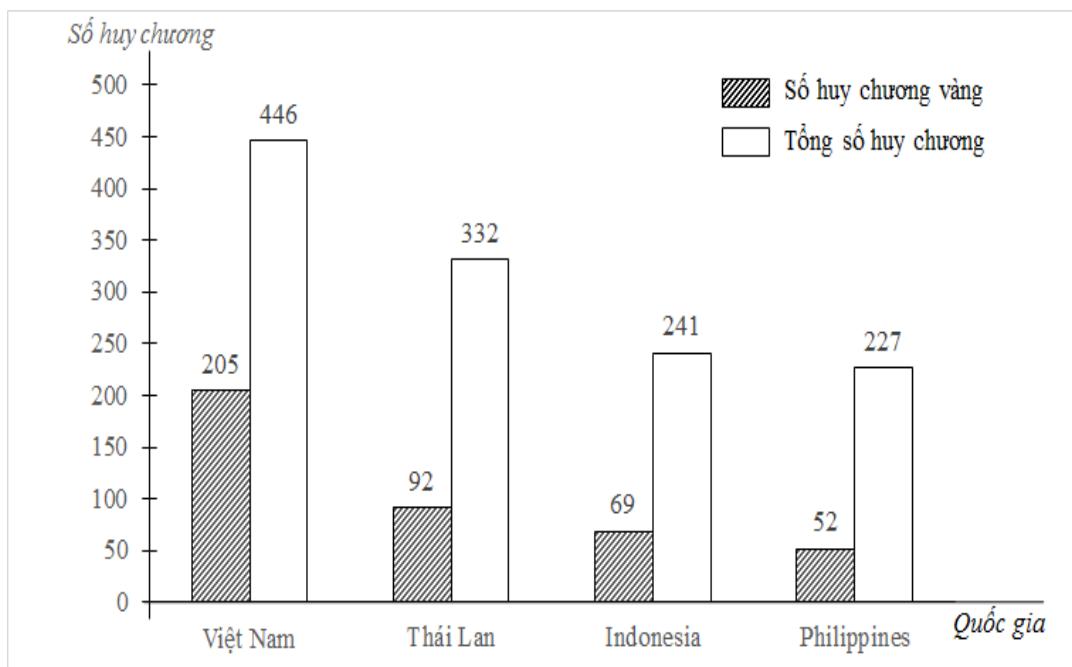
## Dạy cho ngày mai – Học cho tương lai

Thái Lan	92	332
Indonesia	69	241
Philippines	52	227

*Lời giải*

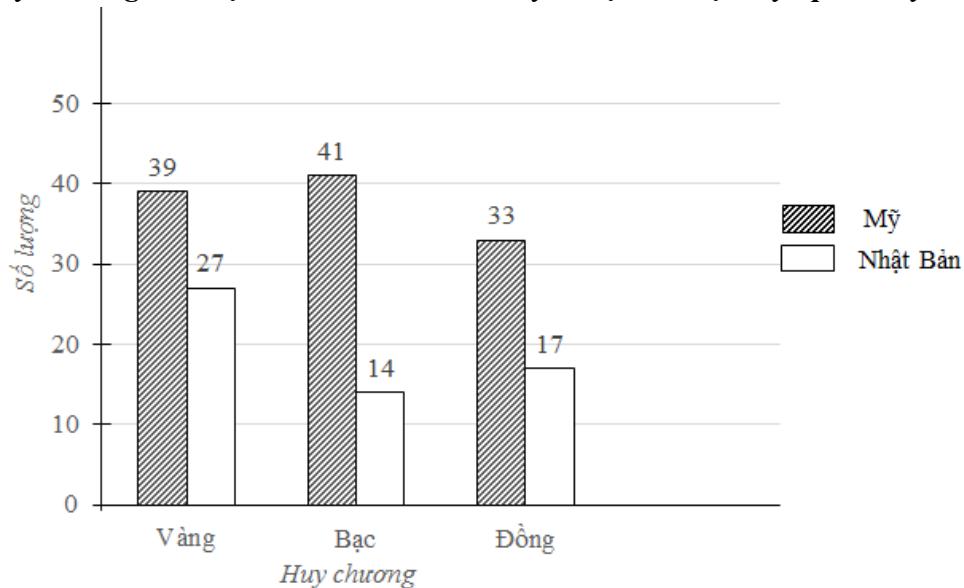
Biểu đồ cột kép

### **Số huy chương bốn quốc gia dẫn đầu SEA Games 31**



**Bài toán 13.** Cho biểu đồ. Hãy lập bảng thống kê biểu diễn số lượng huy chương các loại của đoàn thể thao Mỹ, Nhật Bản và vẽ biểu đồ cột biểu diễn bảng thống kê này.

### **Số lượng huy chương các loại của đoàn thể thao Mỹ, Nhật Bản tại Olympic Tokyo 2020**

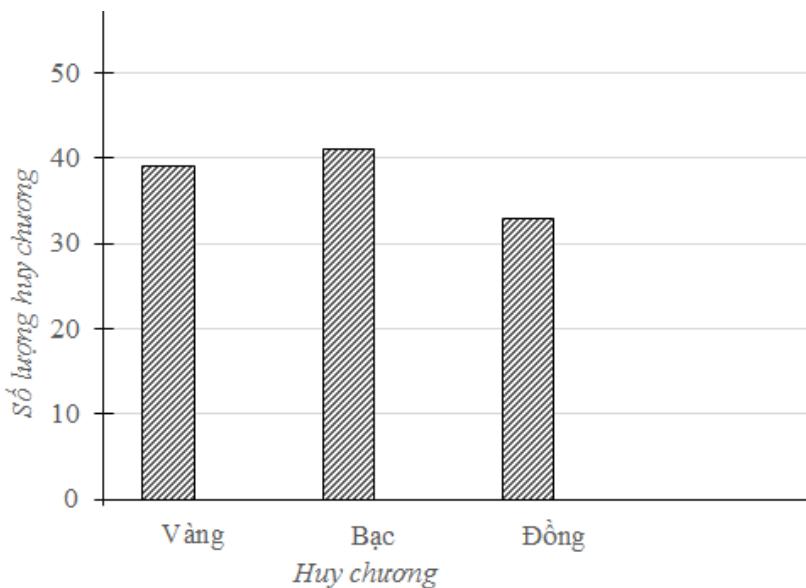


(Theo olymoics.com/tokyo- 2020)

*Lời giải*

Loại huy chương	Vàng	Bạc	Đồng
Số lượng	39	41	33

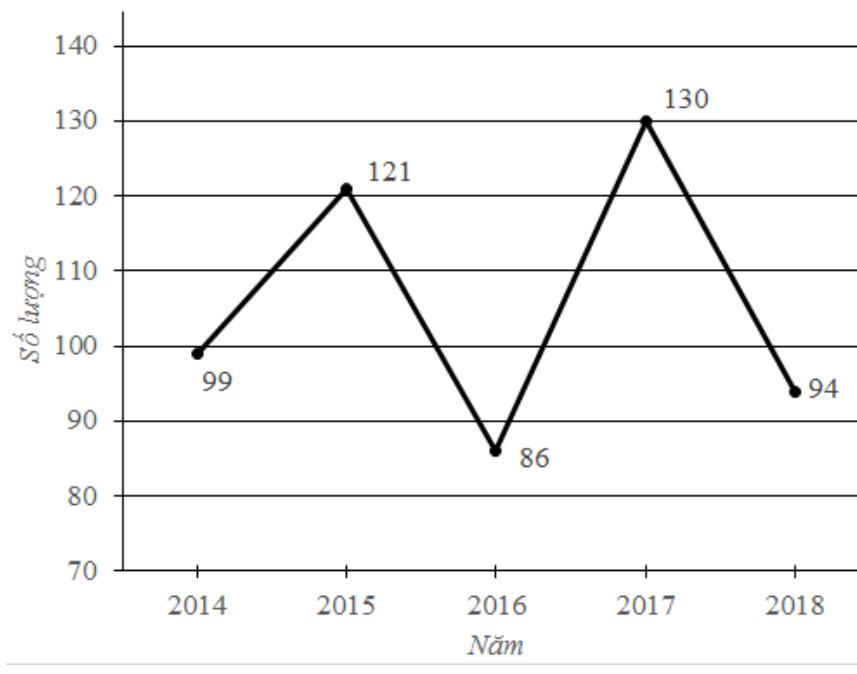
Biểu đồ cột



### C. BÀI TẬP

5.4. Cho biểu đồ đoạn thẳng.

- Lập bảng thống kê cho dữ liệu trong biểu đồ.
- Vẽ biểu đồ cột biếu diễn dữ liệu này. Nếu ta có dữ liệu về số con bão hàng năm trên toàn cầu từ năm đến nay thì có nên dùng biểu đồ cột để biếu diễn không?



#### *Lời giải*

a) Bảng thống kê: Số con bão trên toàn cầu.

Năm	2014	2015	2016	2017	2018
Số lượng	99	121	86	130	94

b) Vẽ biểu đồ cột (em tự vẽ hình).

Nếu ta có dữ liệu về số con bão hàng năm trên toàn cầu từ năm 1970 đến nay thì không nên dùng biểu đồ cột để biếu diễn.

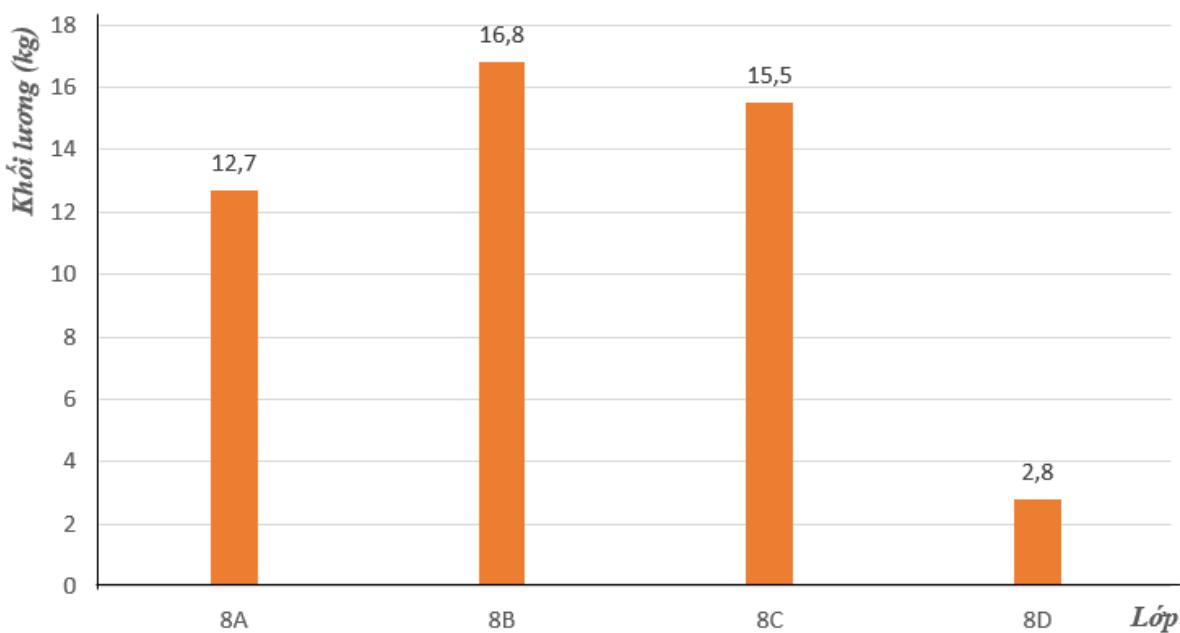
5.5. Bảng sau cho biết khối lượng giấy vụn các lớp khối 8 đã thu gom được.

Lớp	8A	8B	8C	8D
Khối lượng (kg)	12,7	16,8	15,5	14,3

Lựa chọn biểu đồ phù hợp với bảng thống kê này. Vẽ biểu đồ đó.

#### *Lời giải*

Ta dùng biểu đồ cột.



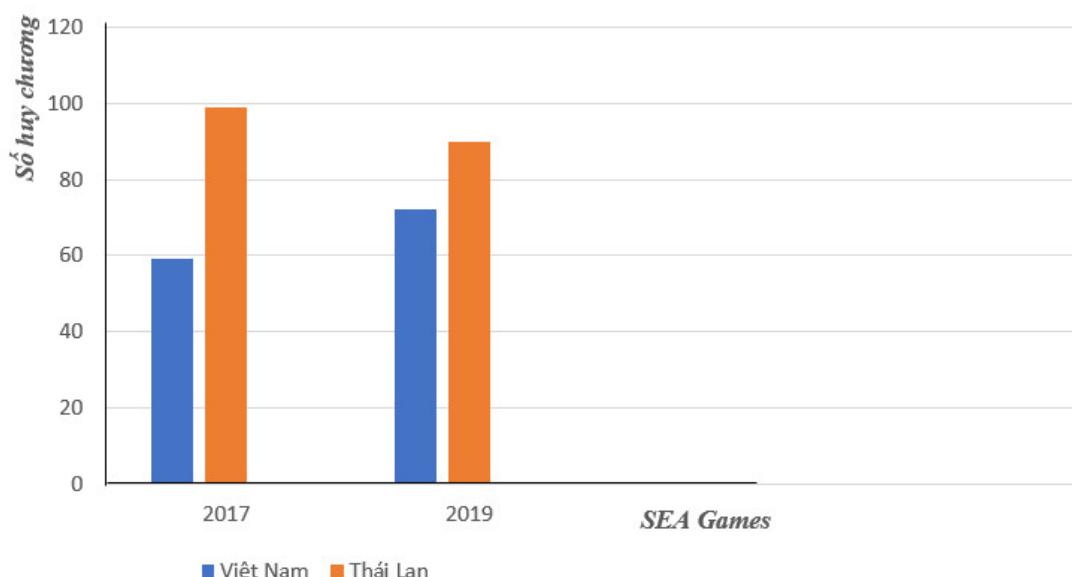
- 5.6.** Bảng thống kê sau biểu diễn số huy chương vàng trong hai kì SEA Games năm 2017 và 2019 của đoàn thể thao Việt Nam, Thái Lan.

	SEA Games 2019	SEA Games 2017
<b>Việt Nam</b>	98	58
<b>Thái Lan</b>	92	72

- a) Vẽ biểu đồ so sánh số huy chương mỗi quốc gia đạt được qua hai kì SEA Games .  
 b) Vẽ biểu đồ so sánh số huy chương của Việt Nam và Thái Lan trong mỗi kì SEA Games .

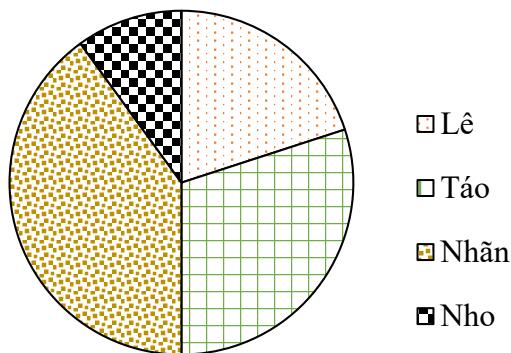
*Lời giải*

- a) Biểu đồ cột kép:  
 b) Em tự vẽ hình



- 5.7.** Biểu đồ hình quạt tròn cho biết tỉ lệ mỗi quả bán được của một cửa hàng. Giả sử cửa hàng đó bán được các loại quả. Lập bảng thống kê cho biết số lượng mỗi loại quả cửa hàng bán được. Vẽ biểu đồ cột biểu diễn bảng thống kê này.

### Tỉ lệ mỗi loại quả bán được

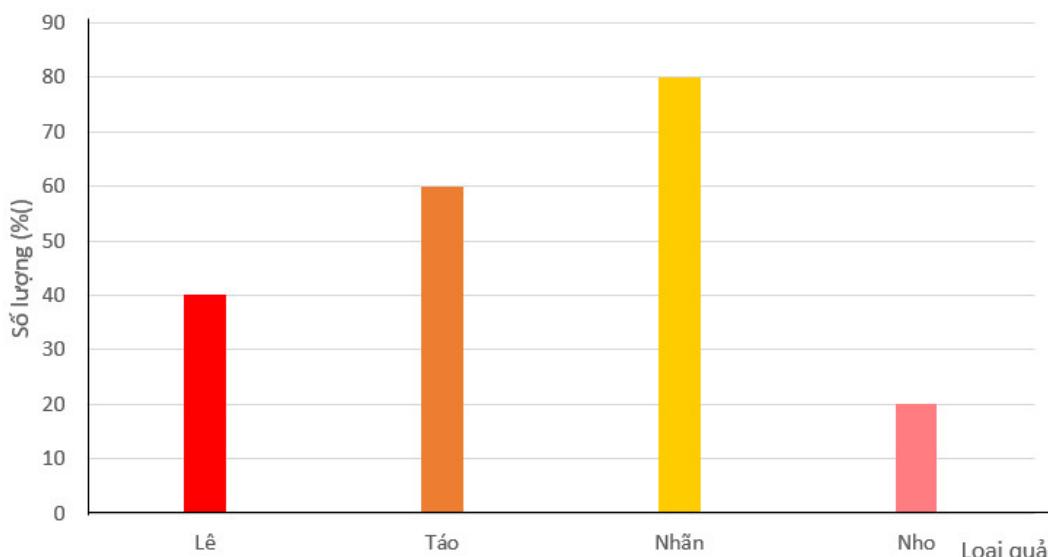


### Lời giải

Bảng thống kê

Loại quả	Lê	Táo	Nhãn	Nho
Số lượng	40	60	80	20

Biểu đồ cột



### 5.8.

Kết quả học tập học kì 1 của học sinh lớp 8A và 8B được ghi lại trong bảng sau:

Xếp loại học tập	Tốt	Khá	Đạt	Chưa đạt
Lớp 8A	5%	45%	44%	6%
Lớp 8B	10%	50%	37%	3%

Lựa chọn dạng biểu đồ thích hợp để biểu diễn bảng thống kê trên và trả lời các câu hỏi sau:

- So sánh tỉ lệ học sinh xếp loại học tập Tốt và chưa đạt của hai lớp 8A và 8B.
- Tổng số học sinh xếp loại học tập Tốt và Chưa đạt của lớp 8A bằng bao nhiêu phần trăm tổng số học sinh xếp loại học tập Tốt và Chưa đạt của lớp 8B.

### Lời giải

- Biểu đồ cột kép:
- Biểu đồ hình quạt tròn.

### 5.9.

Một giáo viên dạy Giáo dục thể chất đã thống kê thời gian chạy 100m (tính theo giây) của 20 học sinh nam và ghi lại trong bảng số liệu ban đầu như sau:

15	14	15	16	14	16	16	15	14	15
----	----	----	----	----	----	----	----	----	----

## Dạy cho ngày mai – Học cho tương lai

15	15	16	15	15	15	14	16	14	15
----	----	----	----	----	----	----	----	----	----

a) Chuyển dữ liệu từ bảng số liệu ban đầu ở trên sang dạng bảng thống kê sau đây:

Thời gian chạy (giây)	14	15	16
Số học sinh	?	?	?
Tỉ lệ phần trăm (%)	?	?	?

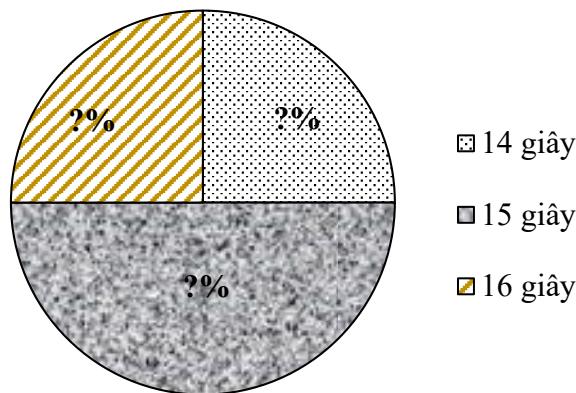
b) Hãy chuyển dữ liệu bảng thống kê ở câu a sang dạng biểu đồ cột và biểu đồ hình quạt tròn sau đây:

Biểu đồ cột:



Biểu đồ hình quạt tròn:

*Tỉ lệ phần trăm thời gian chạy 100 m của 20 học sinh*



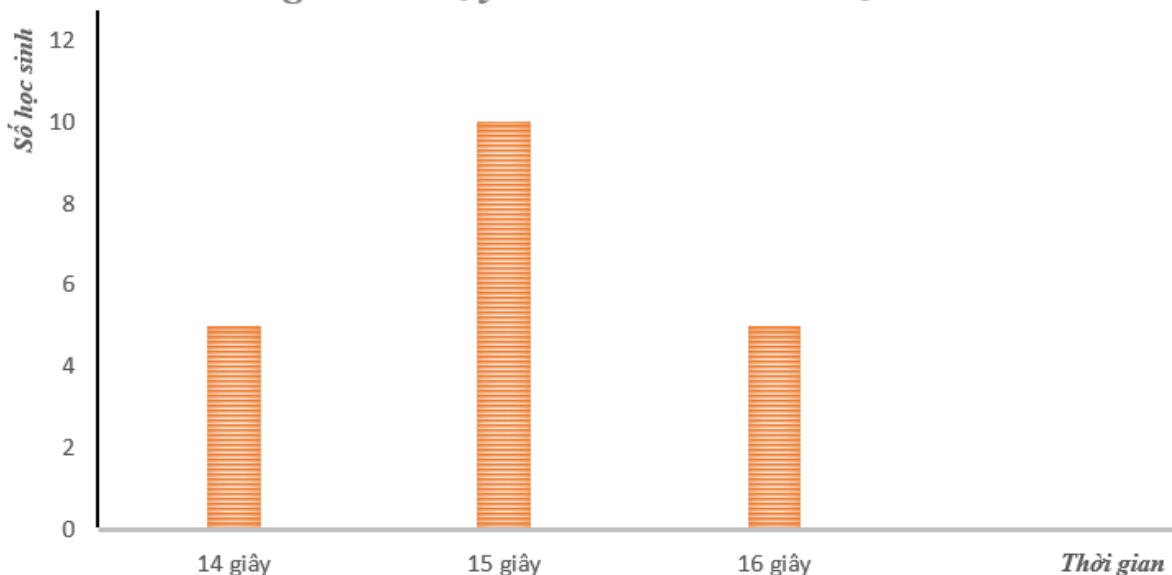
### Lời giải

a) Bảng thống kê.

Thời gian chạy	14	15	16
Số học sinh	5	10	5
Tỉ lệ phần trăm (%)	25	50	25

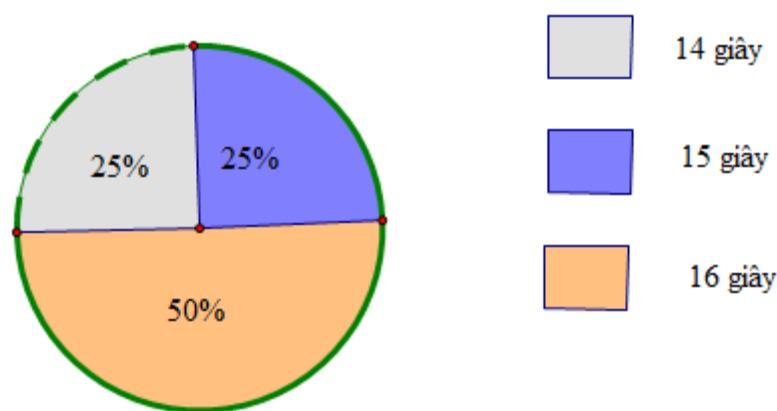
b) Biểu đồ cột

### Thời gian chạy 100m của 20 học sinh



Thời gian chạy 100m của 20 học sinh

Biểu đồ hình quạt tròn

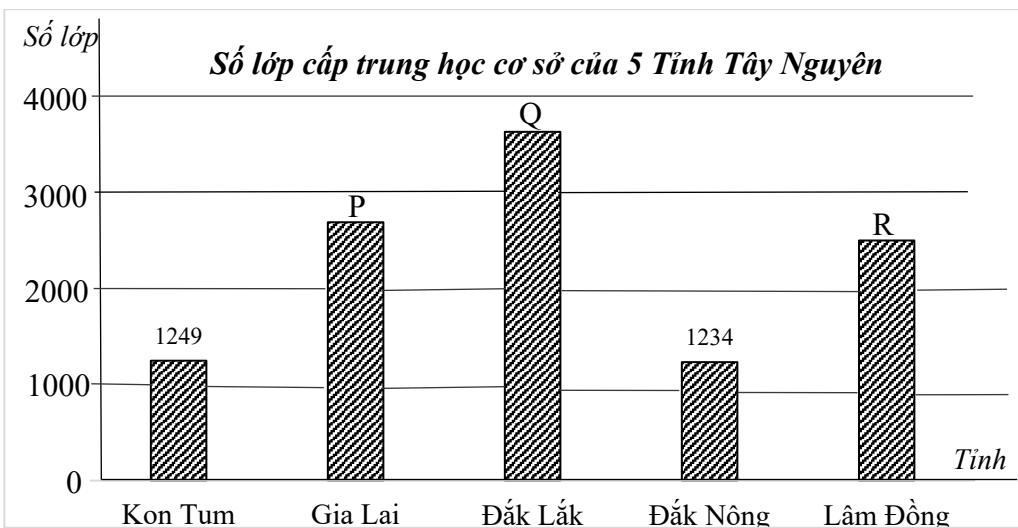


- 5.10.** Số liệu về số lớp học cấp trung học cơ sở của 5 tỉnh Tây Nguyên tính đến ngày 30/9/2021 được cho trong bảng thống kê sau:

Tỉnh	Số lớp học
Kon Tum	1249
Gia Lai	2692
Đắk Lăk	3633
Đắk Nông	1234
Lâm Đồng	2501

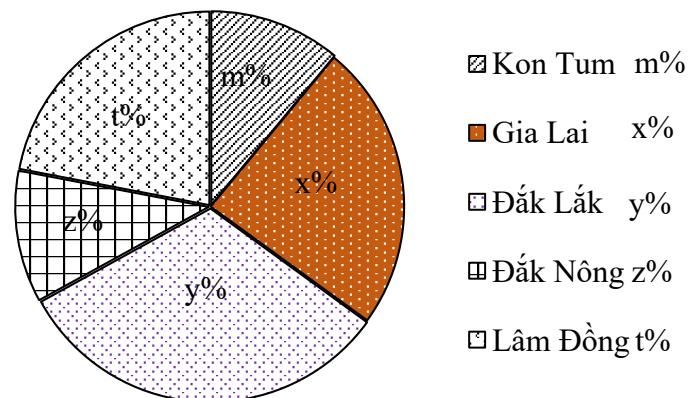
(Nguồn: Tổng cục thống kê)

- a) Số liệu từ bảng thống kê trên được biểu diễn vào biểu đồ cột như sau.  
Hãy tìm các giá trị của  $P, Q, R$  trong biểu đồ.



b) Biểu đồ ở câu a) được chuyển sang biểu đồ hình quạt tròn như dưới đây. Hãy tìm các giá trị của  $m, x, y, z, t$  trong biểu đồ.

*Số lớp học cấp trung học cơ sở của 5 tỉnh Tây Nguyên*



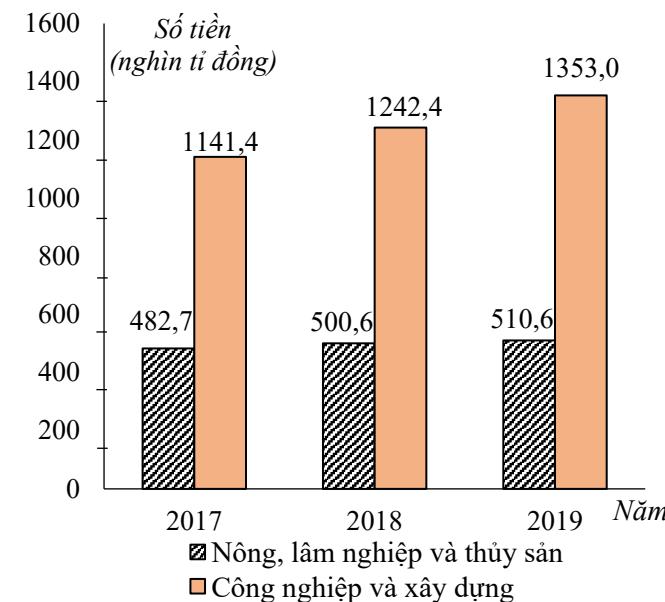
### Lời giải

a)  $P = 2692 ; Q = 3633 ; R = 2501 .$

b)  $m = 11,04\% ; x = 23,81\% ; y = 32,12\% ; z = 10,91\% ; t = 22,12\% .$

**5.11.** Biểu đồ cột kép biếu diễn tổng sản phẩm trong nước của lĩnh vực Nông, lâm nghiệp và thủy sản; Công nghiệp và xây dựng, trong các năm 2017, 2018, 2019. Lập bảng số liệu tổng sản phẩm trong nước của hai lĩnh vực trên trong các năm 2017, 2018, 2019 theo mẫu sau (đơn vị: nghìn tỉ đồng).

(*Nguồn: Niên giám thống kê 2020  
NXB thống kê 2021*)



Lĩnh vực	Năm	2017	2018	2019

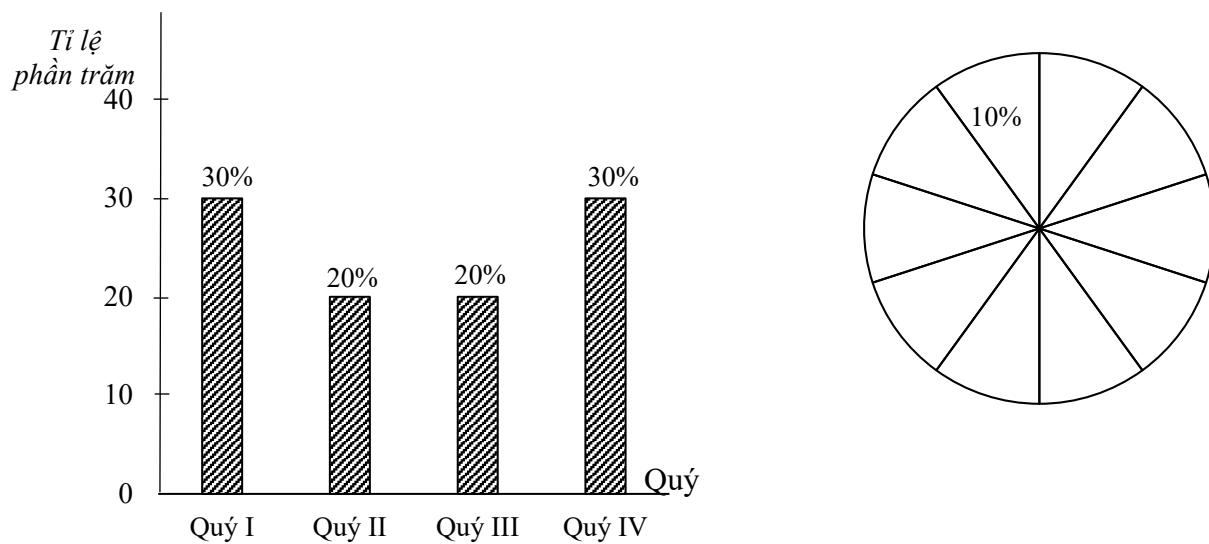
Nông, lâm nghiệp và thủy sản.	?	?	?
Công nghiệp và xây dựng.	?	?	?

*Lời giải*

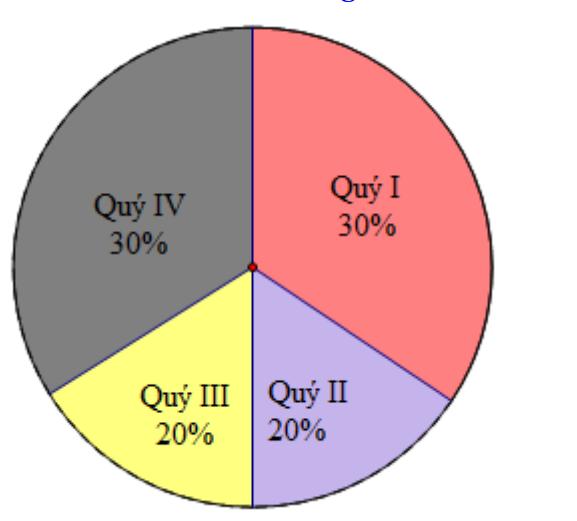
Bảng số liệu thống kê tổng sản phẩm trong nước của hai lĩnh vực trên trong năm 2017, 2018, 2019 như sau (đơn vị: nghìn tỉ đồng)

Lĩnh vực	Năm		
	2017	2018	2019
Nông, lâm nghiệp và thủy sản	482,4	500,6	510,6
Công nghiệp và xây dựng	1141,4	1242,4	1353,0

- 5.12. Biểu đồ cột biểu diễn tỉ lệ phần trăm sản phẩm bán được của một doanh nghiệp trong bốn quý của năm 2021. Hãy hoàn thiện biểu đồ hình quạt tròn biểu diễn các dữ liệu thống kê trên. Biết rằng hình quạt tròn biểu diễn dữ liệu đã được chia sẵn thành các hình quạt, mỗi hình quạt ứng với 10% .



*Lời giải*



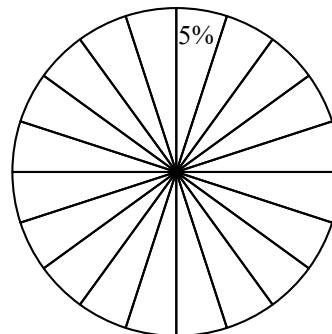
- 5.13. Ban tổ chức của giải thi đấu thể thao bán vé theo bốn mức  $A, B, C, D$  các vé ở bốn mức. Tỉ lệ phân chia  $A, B, C, D$  lần lượt là 35%, 45%, 15%, 5%.

a) Lập bảng thống kê tỉ lệ phân chia vé ở bốn mức trên theo mẫu sau:

Mức vé	$A$	$B$	$C$	$D$
Tỉ lệ vé (%)	?	?	?	?

## *Dạy cho ngày mai – Học cho tương lai*

b) Hoàn thiện biểu đồ để nhận được biểu đồ hình quạt tròn biểu diễn các dữ liệu thống kê trên. Biết rằng hình tròn được chia sẵn thành các hình quạt, mỗi hình quạt mỗi hình quạt ứng với 5%

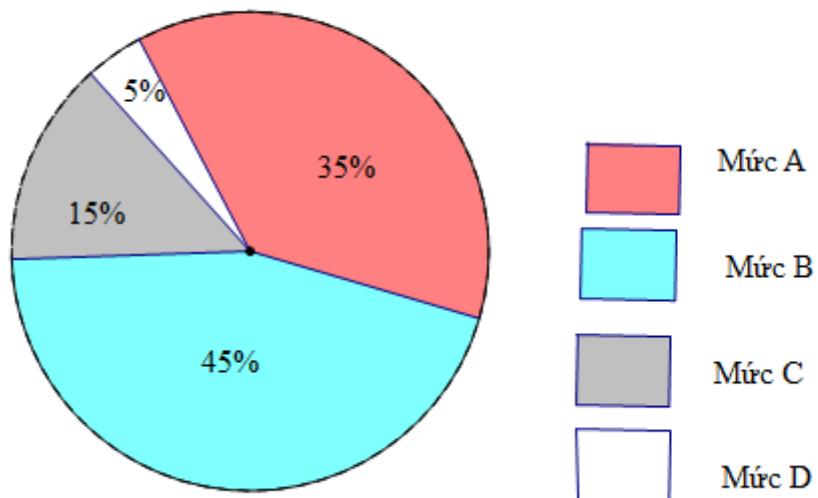


### *Lời giải*

a)

Mức vé	A	B	C	D
Tỉ lệ vé (%)	35	45	15	5

b)



## BÀI 20. PHÂN TÍCH SỐ LIỆU THỐNG KÊ VÀ BIỂU ĐỒ

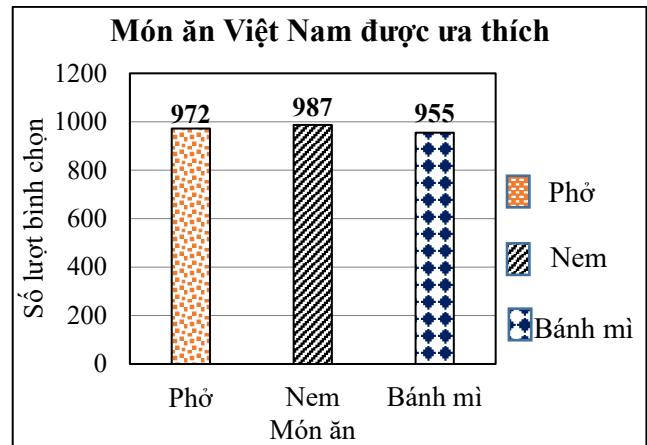
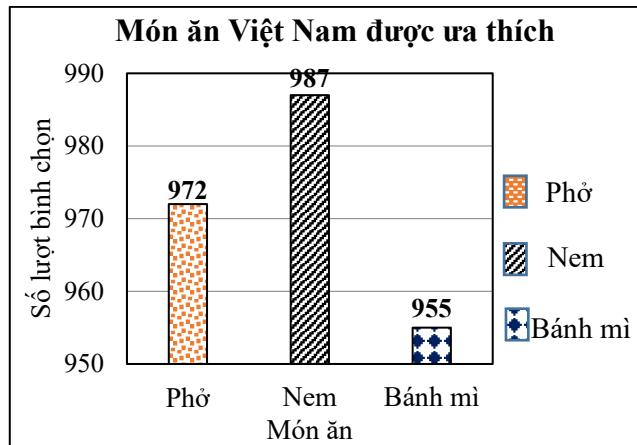
### A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ.

1. Đọc và diễn giải biểu đồ.
2. Đọc và phân tích số liệu biểu đồ.

### B. PHÂN LOẠI CÁC BÀI TẬP.

#### I. ĐỌC VÀ DIỄN GIẢI BIỂU ĐỒ.

**Bài toán 1:** Dựa trên dữ liệu khảo sát về món ăn Việt Nam được ưa thích, một công ty du lịch đã vẽ hai biểu đồ sau:

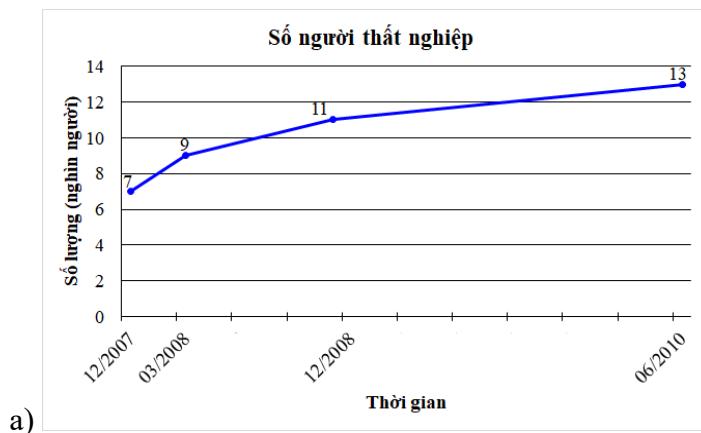


a)

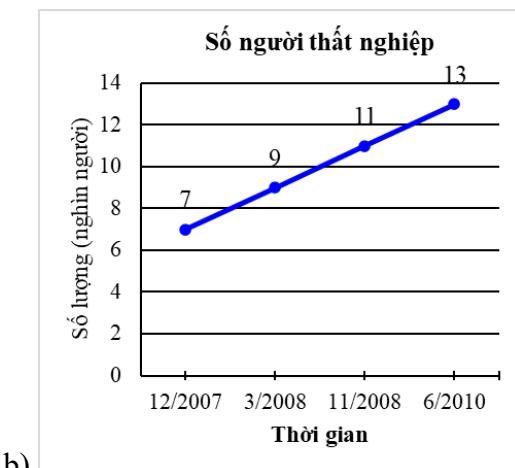
b)

- a) Hai biểu đồ này có biểu diễn cùng một số liệu không? Lập bảng thống kê về dữ liệu đó.
- b) Trong biểu đồ a), tỉ lệ chiều cao giữa cột thứ hai và cột thứ ba có bằng tỉ lệ hai số mà chúng biểu diễn không? Giải thích tại sao?

**Bài toán 2.** Cho hai biểu đồ sau biểu diễn số lượng người thất nghiệp tại một thành phố trong giai đoạn từ 12/2007 đến 6/2010.



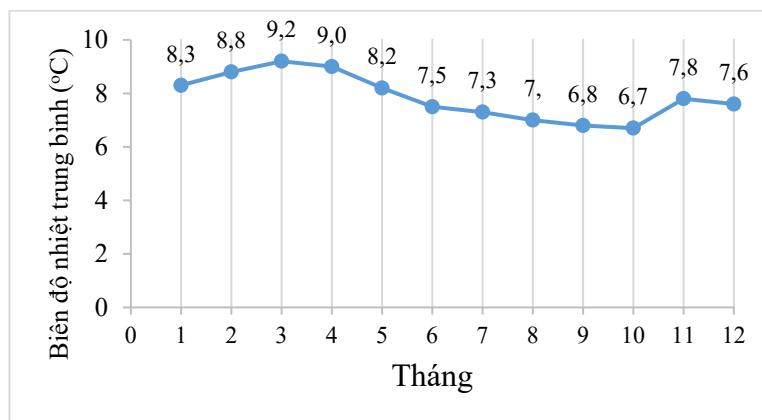
a)



b)

Hãy giải thích tại sao xu thế của hai biểu đồ lại khác nhau. Để thấy được xu thế của số lượng người thất nghiệp, ta nên dùng biểu đồ nào?

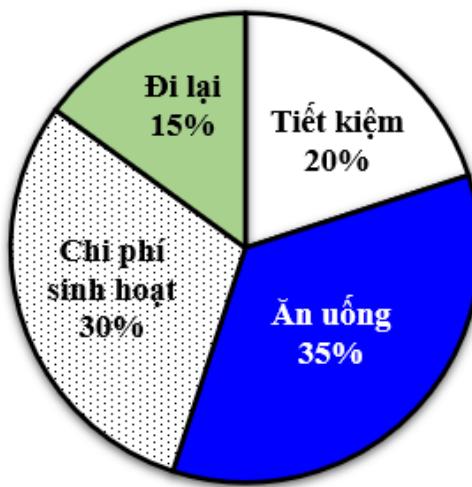
**Bài toán 3.** Chênh lệch giữ nhiệt độ cao nhất và nhiệt độ thấp nhất trong ngày được gọi là biên độ nhiệt của ngày đó. Biên độ nhiệt trung bình tháng là số trung bình cộng của biên độ nhiệt các ngày trong tháng đó. Biểu đồ đoạn thẳng biểu diễn biên độ nhiệt trung bình tháng của Đồng bằng sông Cửu Long.



- a) Biên độ nhiệt trung bình tháng nào là cao nhất? Thấp nhất?
- b) Hãy nhận xét về sự thay đổi biên độ nhiệt trung bình tháng trong các khoảng thời gian: tháng 1 - tháng 3; tháng 3 - tháng 10; tháng 10 - tháng 11; tháng 11 - tháng 12.

## II. ĐỌC VÀ PHÂN TÍCH SỐ LIỆU TỪ BIỂU ĐỒ

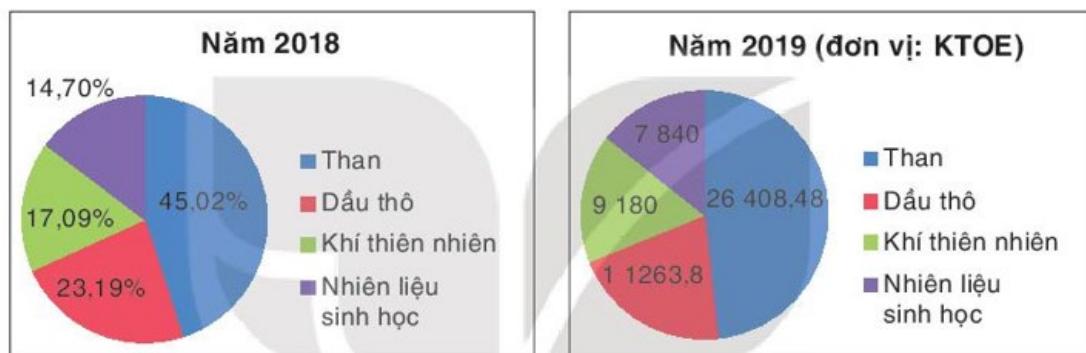
**Bài toán 4.** Biểu đồ hình quạt tròn biểu diễn kết quả thống kê (tính theo tỉ số phần trăm) kế hoạch chi tiêu hàng tháng của gia đình bác Huy.



- a) Khoảng chi tiêu nào của gia đình bác Huy là lớn nhất?
- b) Số tiền chi tiêu hàng tháng của gia đình bác Huy dành cho ăn uống gấp bao nhiêu lần số tiền dành cho tiết kiệm?
- c) Tính số tiền gia đình bác Huy tiết kiệm hàng tháng theo kế hoạch, biết tổng thu nhập hàng tháng của gia đình bác Huy là 25 triệu đồng.

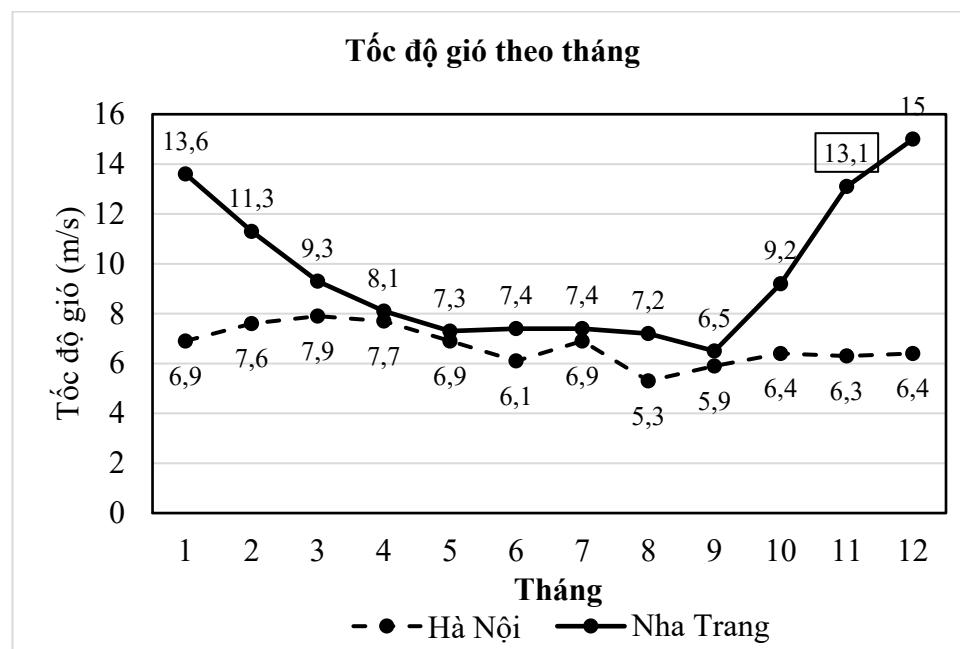
**Bài toán 5.** Các biểu đồ sau cho biết cơ cấu năng lượng được khai thác, sản xuất trong nước các năm 2018 và 2019.

- a) Lập bảng thống kê cho biết cơ cấu năng lượng được khai thác, sản xuất trong nước (theo tỉ lệ %) năm 2019.
- b) Nhận xét về sự thay đổi cơ cấu năng lượng được khai thác, sản xuất trong nước năm 2019 so với năm 2018.



(Theo Tổng cục Thống kê (1 KTOE tương đương 1000 tấn dầu))

**Bài toán 6.** Cho biểu đồ sau:

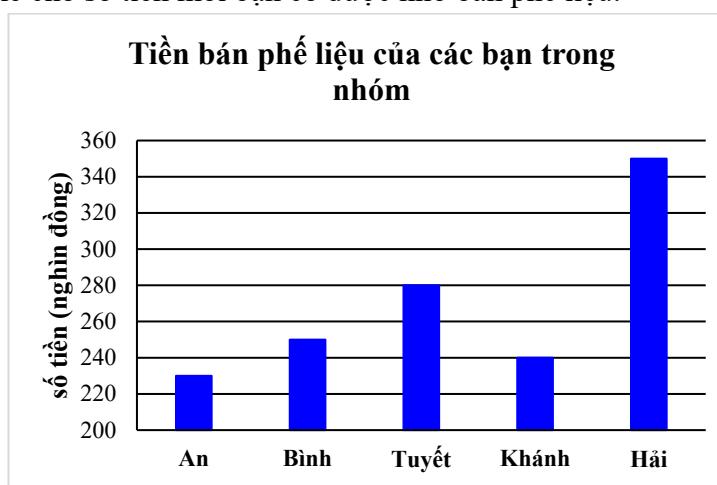


(Theo weatherspark.com (tốc độ gió đo ở độ cao 10m trên mặt đất))

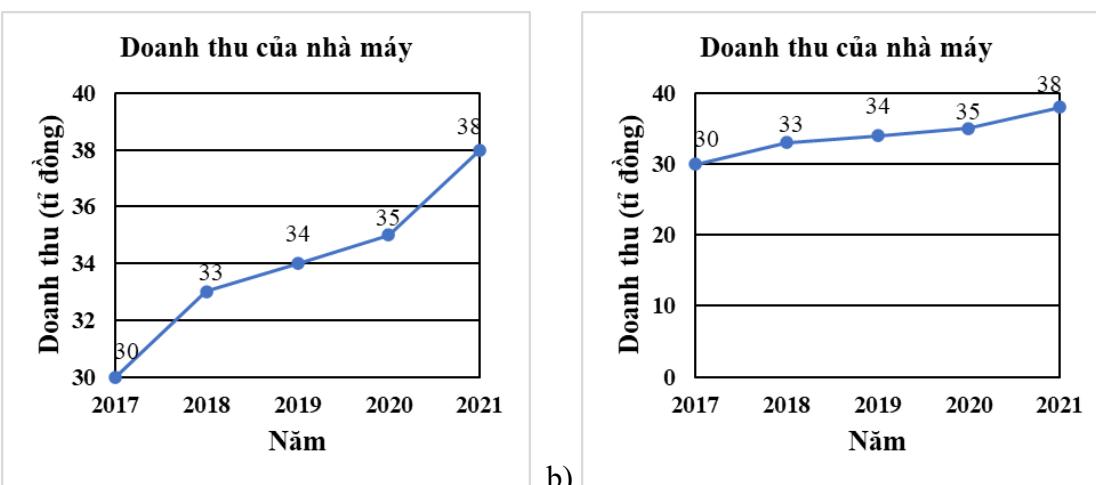
- So sánh tốc độ gió trong các tháng tại hai thành phố này. Giải thích sự khác nhau đó.
- Ở Nha Trang, 6 tháng gió thổi mạnh nhất là những tháng nào?

### C. BÀI TẬP

- 5.14.** Biểu đồ cột biểu diễn số tiền mỗi người trong nhóm học sinh có được nhờ bán phé liệu.  
 a) Số tiền của Tuyết có gấp đôi số tiền của Khánh không? Giải thích tại sao.  
 b) Lập bảng thống kê cho số tiền mỗi bạn có được nhờ bán phé liệu.



- 5.15.** Cho hai biểu đồ.

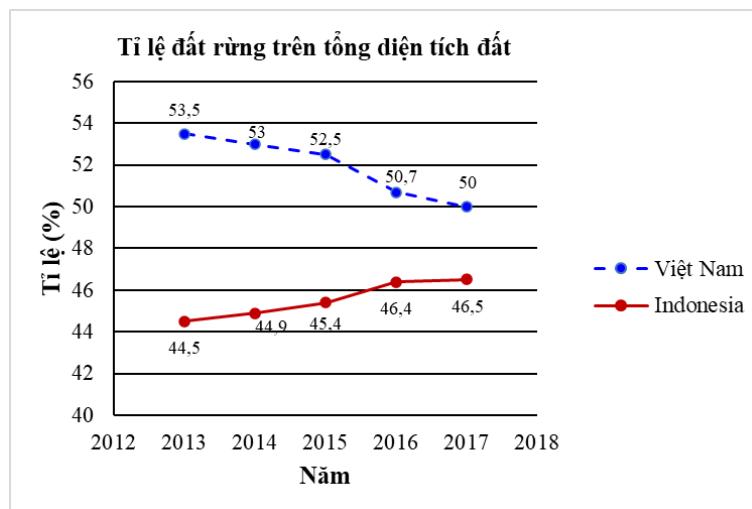


a) b)

- a) Doanh thu của nhà máy trong biểu đồ (a) có tăng nhanh hơn doanh thu của nhà máy trong biểu đồ (b) hay không?  
 b) Hai biểu đồ này có cùng biểu diễn một dãy số liệu không?  
 c) Giải thích tại sao hai đường gấp khúc trên hai biểu đồ có độ dốc khác nhau.

5.16.

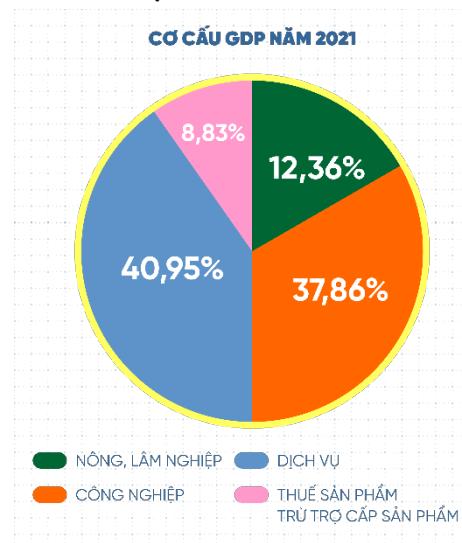
Cho biểu đồ.



- a) So sánh tỉ lệ diện tích đất rừng trên tổng diện tích đất của hai nước.  
 b) Cho biết xu thế tăng, giảm của tỉ lệ diện tích đất rừng trên tổng diện tích đất của mỗi nước.  
 c) Lập bảng thống kê về tỉ lệ diện tích đất rừng của Việt Nam trên tổng diện tích đất qua các năm.  
 d) Tổng diện tích đất của Việt Nam, Indonesia tương ứng là  $331690 \text{ km}^2$ ,  $1826440 \text{ km}^2$ . Tính diện tích đất rừng của Việt Nam, Indonesia năm 2017.

5.17.

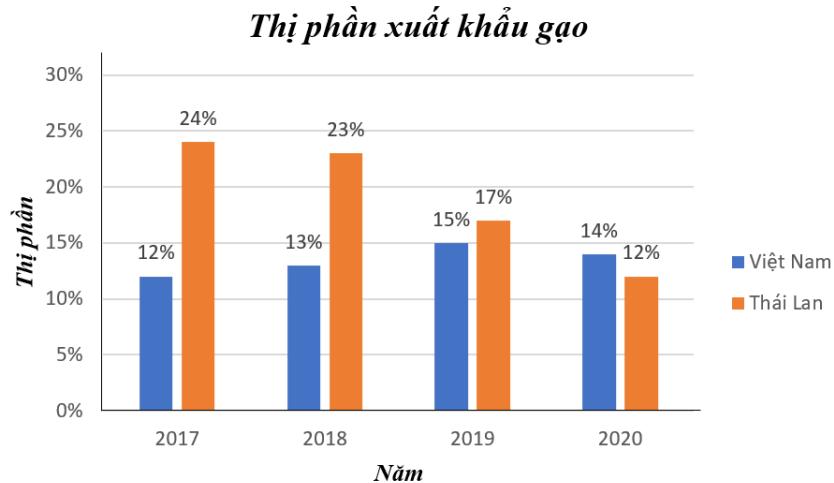
Biểu đồ cho biết cơ cấu GDP của Việt Nam năm 2021.



## Dạy cho ngày mai – Học cho tương lai

(Theo Tổng cục Thống kê)

- a) Lĩnh vực nào đóng góp nhiều nhất vào GDP, với bao nhiêu phần trăm?
- b) GDP Việt Nam năm 2021 là 0,4 nghìn tỉ đô la Mỹ. Lĩnh vực dịch vụ đóng góp bao nhiêu tỉ đô la Mỹ?
- 5.18. Cho biểu đồ.



(Theo app.ffc.org.tw/)

- a) Nhận xét về xu thế của thị phần xuất khẩu gạo của Thái Lan trong các năm 2017 đến 2020.
- b) Lập bảng thống kê thị phần xuất khẩu gạo của Việt Nam trong giai đoạn này.

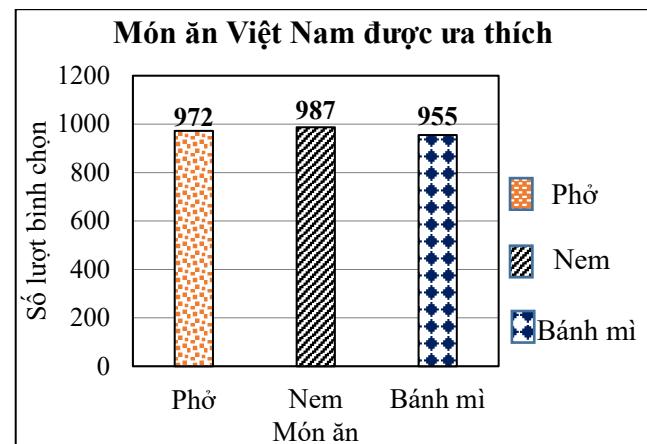
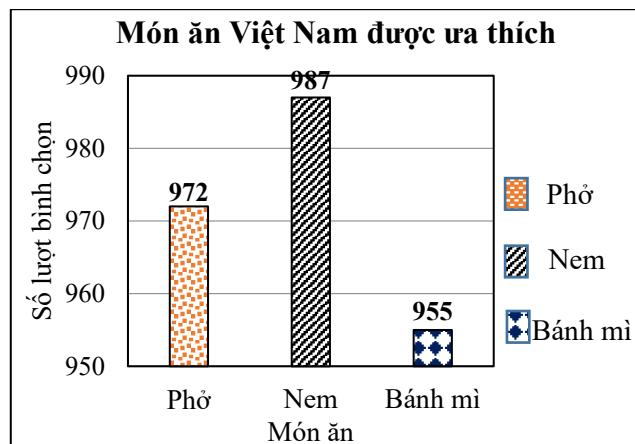
### ĐÁP ÁN THAM KHẢO

## BÀI 20. PHÂN TÍCH SỐ LIỆU THỐNG KÊ VÀ BIỂU ĐỒ

### B. PHÂN LOẠI CÁC BÀI TẬP.

#### I. ĐỌC VÀ DIỄN GIẢI BIỂU ĐỒ.

**Bài toán 1:** Dựa trên dữ liệu khảo sát về món ăn Việt Nam được ưa thích, một công ty du lịch đã vẽ hai biểu đồ sau:



a)

b)

- a) Hai biểu đồ này có biểu diễn cùng một số liệu không? Lập bảng thống kê về dữ liệu đó.  
b) Trong biểu đồ a), tỉ lệ chiều cao giữa cột thứ hai và cột thứ ba có bằng tỉ lệ hai số mà chúng biểu diễn không? Giải thích tại sao?

#### *Lời giải*

- a) Hai biểu đồ biểu diễn cùng một dữ liệu.

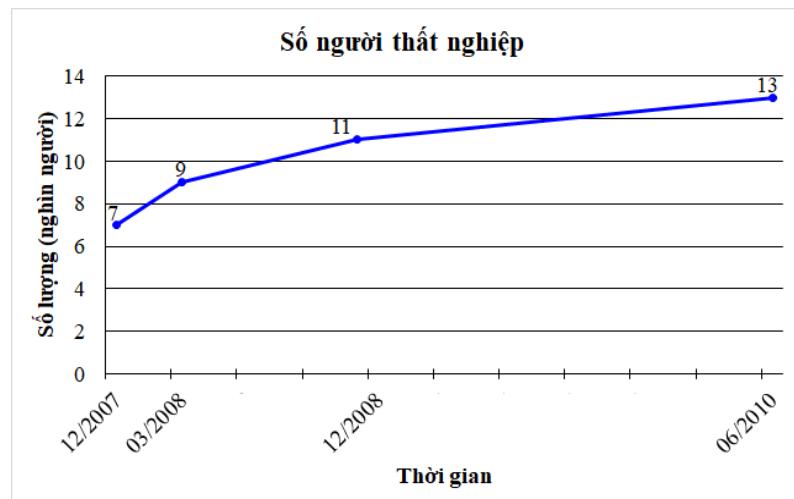
Bảng thống kê:

Món ăn	Phở	Nem	Bánh mì
Số lượt bình chọn	972	987	955

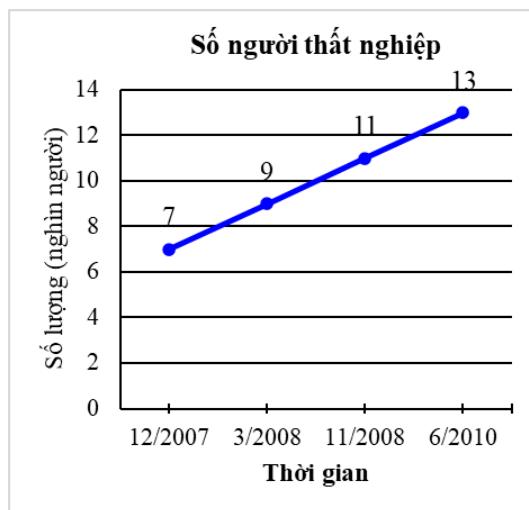
- b) Tỉ lệ chiều cao giữa cột thứ hai và cột thứ ba (Nem và bánh mì) ở biểu đồ a) không tỉ lệ với hai số mà chúng biểu diễn do góc của trực đứng không phải là 0 .

**Nhận xét:** Trong biểu đồ, khi góc của trực đứng khác 0 thì tỉ lệ chiều cao của các cột không bằng tỉ lệ số liệu mà chúng biểu diễn.

**Bài toán 2.** Cho hai biểu đồ sau biểu diễn số lượng người thất nghiệp tại một thành phố trong giai đoạn từ 12/2007 đến 6/2010.



a)



b)

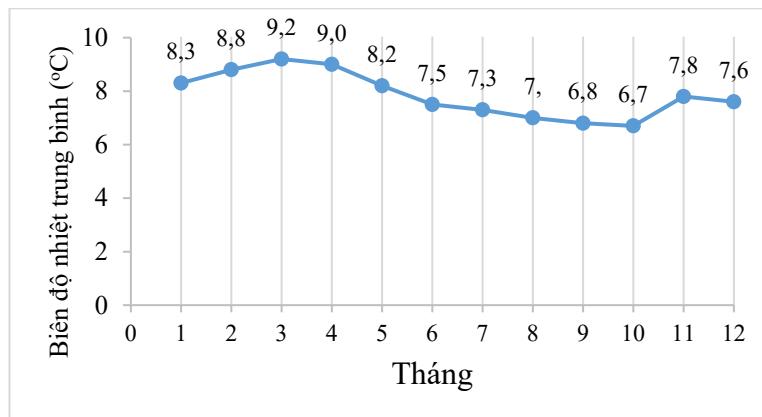
Hãy giải thích tại sao xu thế của hai biểu đồ lại khác nhau. Để thấy được xu thế của số lượng người thất nghiệp, ta nên dùng biểu đồ nào?

#### *Lời giải*

Các điểm quan sát trên trục ngang đều nhau nên xu thế của hai biểu đồ khác nhau.

Để thấy được xu thế của số lượng người thất nghiệp, ta nên dùng biểu đồ a ).

**Bài toán 3.** Chênh lệch giữ nhiệt độ cao nhất và nhiệt độ thấp nhất trong ngày được gọi là biên độ nhiệt của ngày đó. Biên độ nhiệt trung bình tháng là số trung bình cộng của biên độ nhiệt các ngày trong tháng đó. Biểu đồ đoạn thẳng biểu diễn biên độ nhiệt trung bình tháng của Đồng bằng sông Cửu Long.



a) Biên độ nhiệt trung bình tháng nào là cao nhất? Thấp nhất?

b) Hãy nhận xét về sự thay đổi biên độ nhiệt trung bình tháng trong các khoảng thời gian: tháng 1 - tháng 3; tháng 3 - tháng 10; tháng 10 - tháng 11; tháng 11 - tháng 12.

#### *Lời giải*

a) Từ biểu đồ đoạn thẳng, ta thấy biên độ nhiệt trung bình của tháng 3 là cao nhất và biên độ nhiệt trung bình của tháng 10 là thấp nhất.

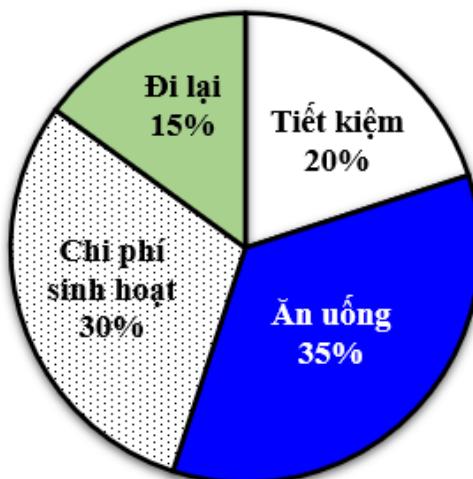
b) Ta có các nhận xét sau:

- Biên độ nhiệt trung bình tháng tăng trong các khoảng thời gian: tháng 1 - tháng 3; tháng 10 - tháng 11.

- Biên độ nhiệt trung bình tháng giảm trong các khoảng thời gian: tháng 3 - tháng 10; tháng 11 - tháng 12.

## **II. ĐỌC VÀ PHÂN TÍCH SỐ LIỆU TỪ BIỂU ĐỒ**

**Bài toán 4.** Biểu đồ hình quạt tròn biểu diễn kết quả thống kê (tính theo tỉ số phần trăm) kế hoạch chi tiêu hàng tháng của gia đình bác Huy.



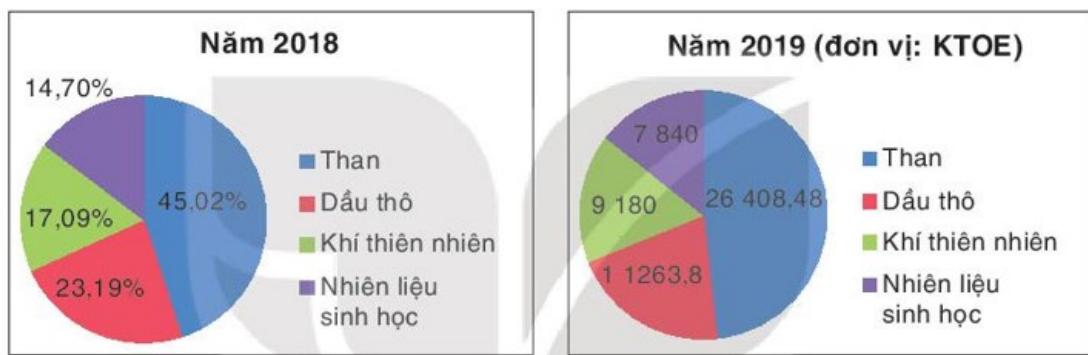
- Khoảng chi tiêu nào của gia đình bác Huy là lớn nhất?
- Số tiền chi tiêu hàng tháng của gia đình bác Huy dành cho ăn uống gấp bao nhiêu lần số tiền dành cho tiết kiệm?
- Tính số tiền gia đình bác Huy tiết kiệm hàng tháng theo kế hoạch, biết tổng thu nhập hàng tháng của gia đình bác Huy là 25 triệu đồng.

*Lời giải*

- Khoảng chi tiêu dành cho ăn uống của gia đình bác Huy là lớn nhất.
- Do  $35 : 20 = 1,75$  nên số tiền chi tiêu hàng tháng của gia đình bác Huy dành cho ăn uống gấp 1,75 lần số tiền dành cho tiết kiệm.
- Số tiền gia đình bác Huy tiết kiệm hàng tháng theo kế hoạch là:  $25.20\% = 5$  (triệu đồng)

**Bài toán 5.** Các biểu đồ sau cho biết cơ cấu năng lượng được khai thác, sản xuất trong nước các năm 2018 và 2019.

- Lập bảng thống kê cho biết cơ cấu năng lượng được khai thác, sản xuất trong nước (theo tỉ lệ %) năm 2019.
- Nhận xét về sự thay đổi cơ cấu năng lượng được khai thác, sản xuất trong nước năm 2019 so với năm 2018.



(Theo Tổng cục Thống kê (1 KTOE tương đương 1000 tấn dầu))

*Lời giải*

- Tổng số năng lượng được khai thác, sản xuất trong nước năm 2019  

$$7840 + 9180 + 11263,8 + 26408,48 = 54692,28 \text{ (KTOE)}$$

Than:  $\frac{26408,48}{54692,28} \% = 48,29\%$ .

Dầu thô:  $\frac{11263,8}{54692,28} \% = 20,60\%$ .

Khí thiên nhiên:  $\frac{9180}{54692,28} \% = 16,78\%$ .

Nhiên liệu sinh học:  $\frac{7840}{54692,28} \% = 14,33\%$ .

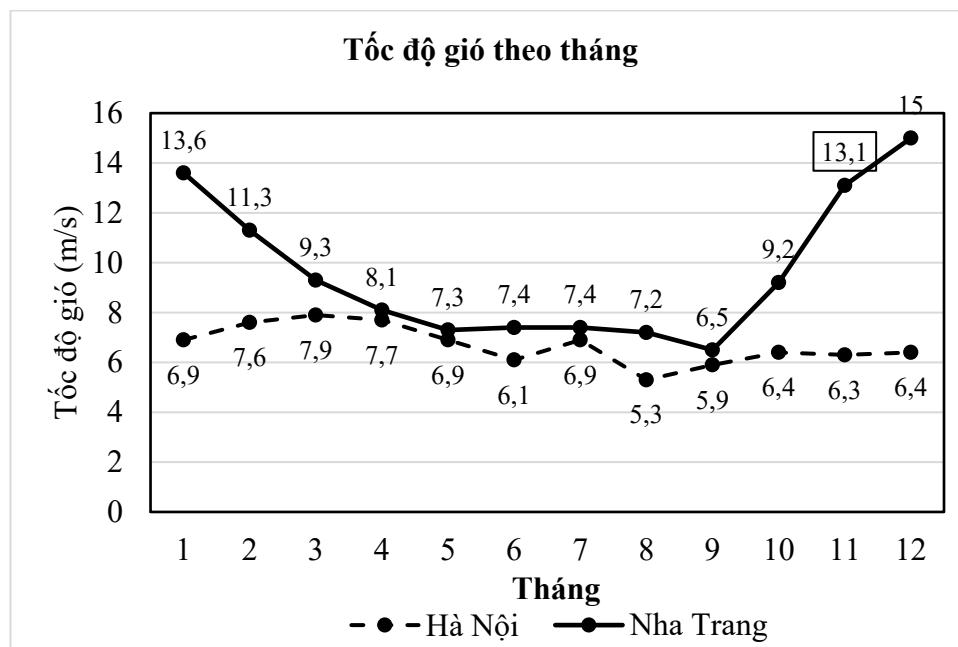
Bảng thống kê:

Loại năng lượng	Than	Dầu thô	Khí thiên nhiên	Nhiên liệu sinh học
Tỉ lệ %	48,29	20,60	16,78	14,33

b) Tỉ lệ cơ cấu khai thác trong năm 2019 tăng so với năm 2018.

Tỉ lệ cơ cấu khai thác dầu thô trong năm 2019 giảm so với năm 2018.

**Bài toán 6.** Cho biểu đồ sau:



(Theo weatherspark.com (tốc độ gió đo ở độ cao 10m trên mặt đất))

- a) So sánh tốc độ gió trong các tháng tại hai thành phố này. Giải thích sự khác nhau đó.  
b) Ở Nha Trang, 6 tháng gió thổi mạnh nhất là những tháng nào?

#### *Lời giải*

a)

- Tốc độ gió ở Nha Trang thay đổi vào mùa Xuân và mùa Đông; ở Hà Nội ổn định hơn trong bốn mùa.
- Nha Trang là thành phố ven biển, chịu ảnh hưởng nhiều của gió mùa Đông Bắc.
- Hà Nội nằm trong vùng đồng bằng Bắc Bộ nên tốc độ gió ít thay đổi.

b)

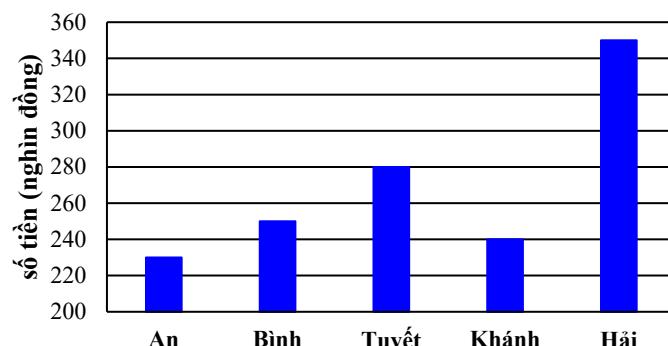
Nha Trang, gió thổi mạnh nhất vào các tháng 1, tháng 2, tháng 3, tháng 10, tháng 11, tháng 12.

### C. BÀI TẬP

**5.14.** Biểu đồ cột biểu diễn số tiền mỗi người trong nhóm học sinh có được nhờ bán phé liệu.

- a) Số tiền của Tuyết có gấp đôi số tiền của Khánh không? Giải thích tại sao.  
b) Lập bảng thống kê cho số tiền mỗi bạn có được nhờ bán phé liệu.

**Tiền bán phế liệu của các bạn trong nhóm**

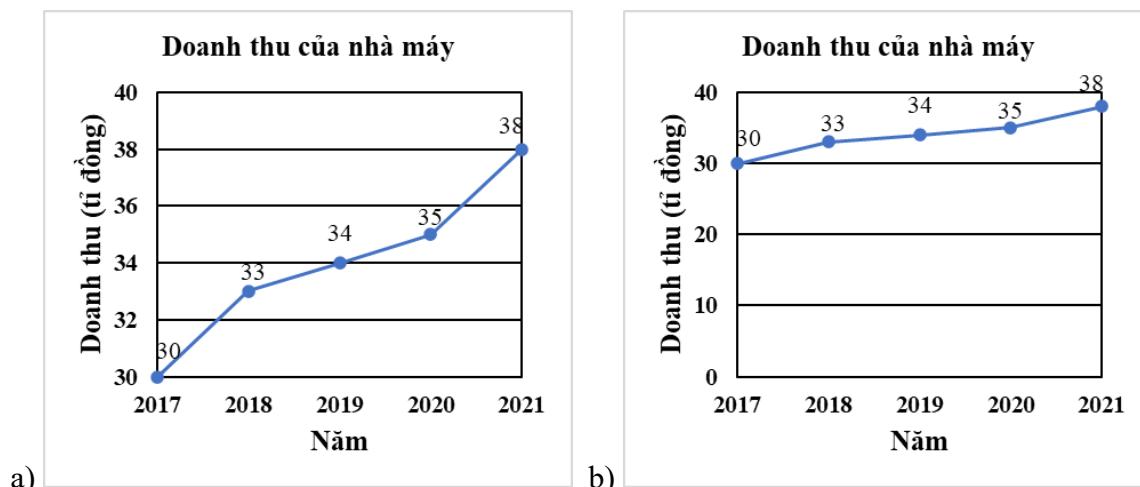


*Lời giải*

- a) Số tiền của Tuyết không gấp đôi số tiền của Khánh vì gốc trực đứng không bắt đầu từ 0 .  
b) Bảng thống kê.

Tên người	An	Bình	Tuyết	Khánh	Hải
Số tiền (nghìn đồng)	230	250	280	240	350

**5.15.** Cho hai biểu đồ.

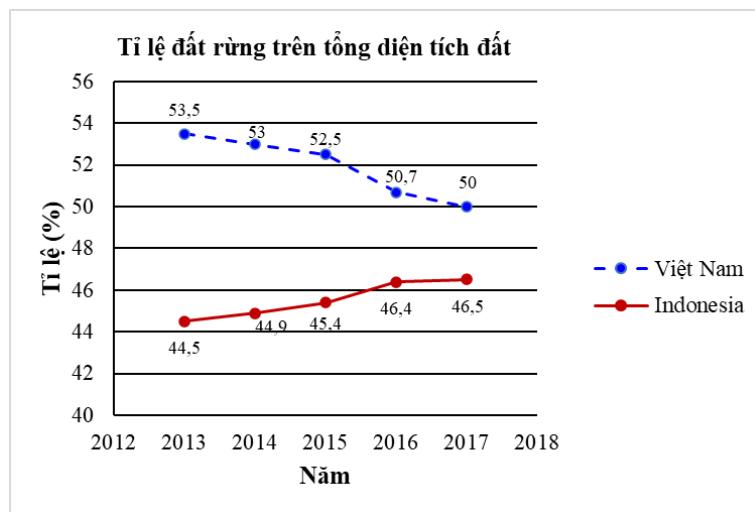


- a) Doanh thu của nhà máy trong biểu đồ (a) có tăng nhanh hơn doanh thu của nhà máy trong biểu đồ (b) hay không?  
b) Hai biểu đồ này có cùng biểu diễn một dãy số liệu không?  
c) Giải thích tại sao hai đường gấp khúc trên hai biểu đồ có độ dốc khác nhau.

*Lời giải*

- a) Không.  
b) Có.  
c) Biểu đồ a) có gốc trực đứng không bắt đầu từ 0 .

**5.16.** Cho biểu đồ.



- a) So sánh tỉ lệ diện tích đất rừng trên tổng diện tích đất của hai nước.
- b) Cho biết xu thế tăng, giảm của tỉ lệ diện tích đất rừng trên tổng diện tích đất của mỗi nước.
- c) Lập bảng thống kê về tỉ lệ diện tích đất rừng của Việt Nam trên tổng diện tích đất qua các năm.
- d) Tổng diện tích đất của Việt Nam, Indonesia tương ứng là  $331690 \text{ km}^2$ ,  $1826440 \text{ km}^2$ . Tính diện tích đất rừng của Việt Nam, Indonesia năm 2017.

#### *Lời giải*

- a) Tỉ lệ diện tích đất rừng của Indonesia lớn hơn Việt Nam.
- b) Tỉ lệ diện tích đất rừng của Indonesia giảm.
- c) Bảng thống kê về tỉ lệ diện tích đất rừng của Việt Nam .

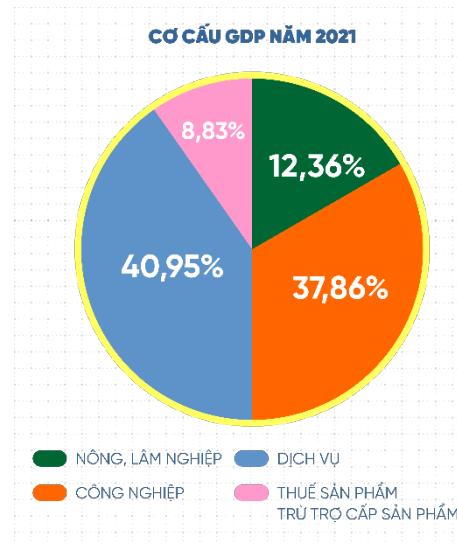
Năm	2013	2014	2015	2016	2017
Tỉ lệ (%)	44,5	44,9	45,4	46,4	46,5

d) Diện tích đất rừng của Việt Nam năm 2017:

$$331690 \cdot 46,5\% = 154236 (\text{km}^2)$$

Diện tích đất rừng của Indonesia năm 2017:  $1826440 \cdot 50\% = 913220 (\text{km}^2)$ .

**5.17.** Biểu đồ cho biết cơ cấu GDP của Việt Nam năm 2021.



(Theo Tổng cục Thống kê)

- a) Lĩnh vực nào đóng góp nhiều nhất vào GDP, với bao nhiêu phần trăm?
- b) GDP Việt Nam năm 2021 là 0,4 nghìn tỉ đô la Mỹ. Lĩnh vực dịch vụ đóng góp bao nhiêu tỉ đô la Mỹ?

#### *Lời giải*

## *Dạy cho ngày mai – Học cho tương lai*

a) Lĩnh vực dịch vụ đóng góp nhiều nhất vào GDP, với 40,95%.

b) Lĩnh vực dịch vụ đóng góp số tiền (tỷ đô la Mỹ).

$0,4 \cdot 10,95\% = 0,1638$  (nghìn tỷ đô la Mỹ).

**5.18.** Cho biểu đồ.



(Theo app.ffc.org.tw/)

- a) Nhận xét về xu thế của thị phần xuất khẩu gạo của Thái Lan trong các năm 2017 đến 2020.  
b) Lập bảng thống kê thị phần xuất khẩu gạo của Việt Nam trong giai đoạn này.

### *Lời giải*

a) Nhận xét:

Thị phần xuất khẩu gạo của Thái Lan từ 2017 đến năm 2020 giảm.

b) Bảng thống kê thị phần xuất khẩu gạo của Việt Nam.

Năm	2017	2018	2019	2020
Thị phần	12%	13%	15%	14%

## BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG V

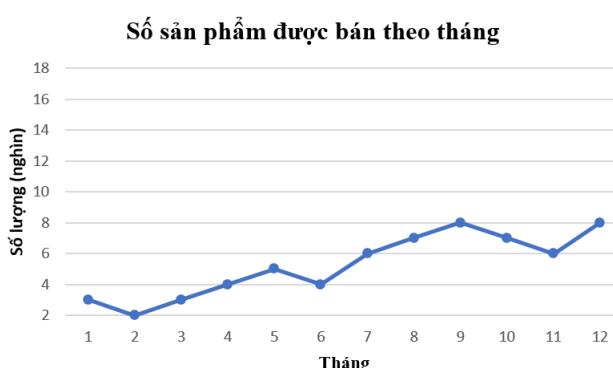
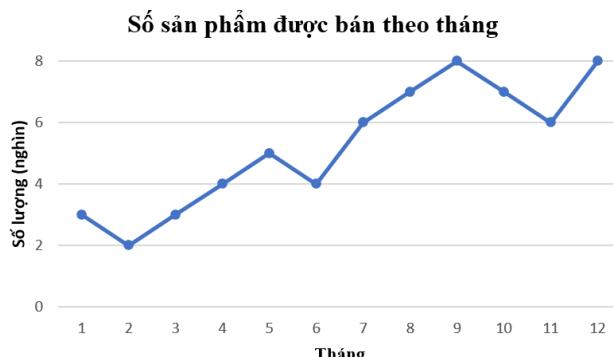
### A. TRẮC NGHIỆM

*Chọn phương án đúng trong mỗi câu hỏi sau:*

1. Dữ liệu nào sau đây là số liệu liên tục?  
 A. Dữ liệu về tên các vận động viên Việt Nam tham dự SEA Games 31 .  
 B. Dữ liệu về kết quả đánh giá hiệu quả của chương trình dạy học trên truyền hình.  
 C. Dữ liệu về cân nặng của 200 con cá chép sau 6 tháng nuôi.  
 D. Dữ liệu về số người bị mắc Covid-19 trong gia đình của các bạn trong lớp.
2. An đứng từ xa và ghi lại xem bạn nào đi sang đường sử dụng cầu vượt khi tan trường. Phương pháp An thu thập dữ liệu là:  
 A. Từ nguồn có sẵn.      B. Quan sát.      C. Lập bảng hỏi.      D. Phỏng vấn.
3. Trong biểu đồ cột với gốc trực đứng không bắt đầu từ 0, khẳng định nào sau đây không đúng?  
 A. Cột cao hơn biểu diễn số liệu lớn hơn.  
 B. Hai cột cao bằng nhau biểu diễn số liệu bằng nhau.  
 C. Cột thấp hơn biểu diễn số liệu bé hơn.  
 D. Tỉ lệ chiều cao của hai cột bằng tỉ lệ hai số liệu được biểu diễn.
4. Để biểu diễn tỉ lệ của các phần trong tổng thể ta dùng biểu đồ nào sau đây?  
 A. Biểu đồ tranh.      B. Biểu đồ cột.  
 C. Biểu đồ đoạn thẳng.      D. Biểu đồ hình quạt tròn.
5. Để biểu diễn sự thay đổi của một đại lượng theo thời gian ta dùng biểu đồ nào sau đây?  
 A. Biểu đồ cột kép.      B. Biểu đồ tranh.  
 C. Biểu đồ đoạn thẳng.      D. Biểu đồ hình quạt tròn.

### B. TỰ LUẬN

1. Cho hai biểu đồ



## Dạy cho ngày mai – Học cho tương lai

- a) Lập bảng thống kê cho dữ liệu được biểu diễn trong mỗi biểu đồ.
- b) Dữ liệu biểu diễn trên hai biểu đồ có như nhau không? Giải thích tại sao hình dạng hai đường gấp khúc trên hai biểu đồ lại khác nhau.
2. Khối 8 tổ chức giải bóng đá với 5 đội tham dự là các đội bóng của các lớp  $A, B, C, D, E$ . Trước khi giải đấu diễn ra, Bình muốn thực hiện khảo sát dự đoán của các bạn về đội bóng vô địch giải đấu.
- a) Theo em Bình có thể thực hiện khảo sát theo những cách nào?
- b) Dữ liệu Bình thu được thuộc loại nào?
3. Bạn Bình tiến hành khảo sát dự đoán trong bài 2. Giả sử Bình thu được kết quả như sau:  $A, B, A, A, A, A, A, B, D, B, A, A, B, D, D, A, A, B, D$ . Lập bảng thống kê về số lượng dự đoán vô địch cho mỗi đội.
- a) Có thể dùng biểu đồ nào để biểu diễn dữ liệu trong bảng thống kê thu được.
- b) Nếu muốn biểu diễn tỉ lệ các bạn được hỏi dự đoán mỗi đội vô địch thì nên dùng biểu đồ nào?
4. Bảng thống kê sau cho biết số lượng học sinh của các lớp khối 8 tham gia các câu lạc bộ Thể thao và Nghệ thuật của trường.

Câu lạc bộ \ Lớp	8A	8B	8C	8D
Thể thao	8	12	10	5
Nghệ thuật	16	4	8	8

- a) Lựa chọn và vẽ biểu đồ để so sánh số lượng học sinh tham gia hai câu lạc bộ này ở từng lớp.
- b) Lựa chọn và vẽ biểu đồ biểu diễn tỉ lệ học sinh các lớp tham gia hai câu lạc bộ trong số các học sinh khối 8 tham gia hai câu lạc bộ này.

**DÁP ÁN THAM KHẢO**  
**BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG V**

**A. TRẮC NGHIỆM**

Chọn phương án đúng trong mỗi câu hỏi sau:

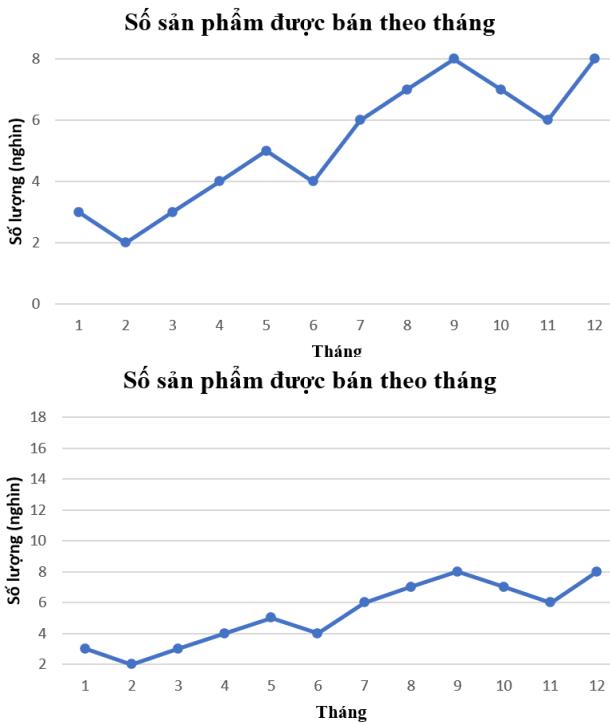
1. Dữ liệu nào sau đây là số liệu liên tục?
  - A. Dữ liệu về tên các vận động viên Việt Nam tham dự SEA Games 31 .
  - B. Dữ liệu về kết quả đánh giá hiệu quả của chương trình dạy học trên truyền hình.
  - C. Dữ liệu về cân nặng của 200 con cá chép sau 6 tháng nuôi.
  - D. Dữ liệu về số người bị mắc Covid-19 trong gia đình của các bạn trong lớp.
2. An đứng từ xa và ghi lại xem bạn nào đi sang đường sử dụng cầu vượt khi tan trường. Phương pháp An thu thập dữ liệu là:
  - A. Từ nguồn có sẵn.
  - B. Quan sát.
  - C. Lập bảng hỏi.
  - D. Phỏng vấn.
3. Trong biểu đồ cột với gốc trực đứng không bắt đầu từ 0, khẳng định nào sau đây không đúng?
  - A. Cột cao hơn biểu diễn số liệu lớn hơn.
  - B. Hai cột cao bằng nhau biểu diễn số liệu bằng nhau.
  - C. Cột thấp hơn biểu diễn số liệu bé hơn.
  - D. Tỉ lệ chiều cao của hai cột bằng tỉ lệ hai số liệu được biểu diễn.
4. Để biểu diễn tỉ lệ của các phần trong tổng thể ta dùng biểu đồ nào sau đây?
  - A. Biểu đồ tranh.
  - B. Biểu đồ cột.
  - C. Biểu đồ đoạn thẳng.
  - D. Biểu đồ hình quạt tròn.
5. Để biểu diễn sự thay đổi của một đại lượng theo thời gian ta dùng biểu đồ nào sau đây?
  - A. Biểu đồ cột kép.
  - B. Biểu đồ tranh.
  - C. Biểu đồ đoạn thẳng.
  - D. Biểu đồ hình quạt tròn.

**DÁP ÁN**

1. Chọn C.
2. Chọn B.
3. Chọn D.
4. Chọn D.
5. Chọn C.

**B. TỰ LUẬN**

1. Cho hai biểu đồ



- a) Lập bảng thống kê cho dữ liệu được biểu diễn trong mỗi biểu đồ.  
 b) Dữ liệu biểu diễn trên hai biểu đồ có như nhau không? Giải thích tại sao hình dạng hai đường gấp khúc trên hai biểu đồ lại khác nhau.

*Lời giải*

- a) Bảng thống kê (dữ liệu biểu diễn trong biểu đồ a)

Tháng	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Số lượng	3	2	3	4	5	4	6	7	8	7	6	8

- Bảng thống kê (dữ liệu biểu diễn trong biểu đồ b)

Tháng	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Số lượng	3	2	3	4	5	4	6	7	8	7	6	8

- b) Giống nhau. Khác gốc.

2. Khởi 8 tổ chức giải bóng đá với 5 đội tham dự là các đội bóng của các lớp  $A, B, C, D, E$ . Trước khi giải đấu diễn ra, Bình muốn thực hiện khảo sát dự đoán của các bạn về đội bóng vô địch giải đấu.

- a) Theo em Bình có thể thực hiện khảo sát theo những cách nào?  
 b) Dữ liệu Bình thu được thuộc loại nào?

*Lời giải*

- a) Phỏng vấn, lập phiếu hỏi.  
 b) Dữ liệu Bình thu được thuộc dữ liệu rời rạc.

3. Bạn Bình tiến hành khảo sát dự đoán trong bài 2. Giả sử Bình thu được kết quả như sau:  $A, B, A, A, A, A, B, D, B, A, A, B, D, D, A, A, B, D$ . Lập bảng thống kê về số lượng dự đoán vô địch cho mỗi đội.

- a) Có thể dùng biểu đồ nào để biểu diễn dữ liệu trong bảng thống kê thu được.  
 b) Nếu muốn biểu diễn tỉ lệ các bạn được hỏi dự đoán mỗi đội vô địch thì nên dùng biểu đồ nào?

*Lời giải*

a) Có thể dùng biểu đồ cột.

b) Dùng biểu đồ hình quạt tròn.

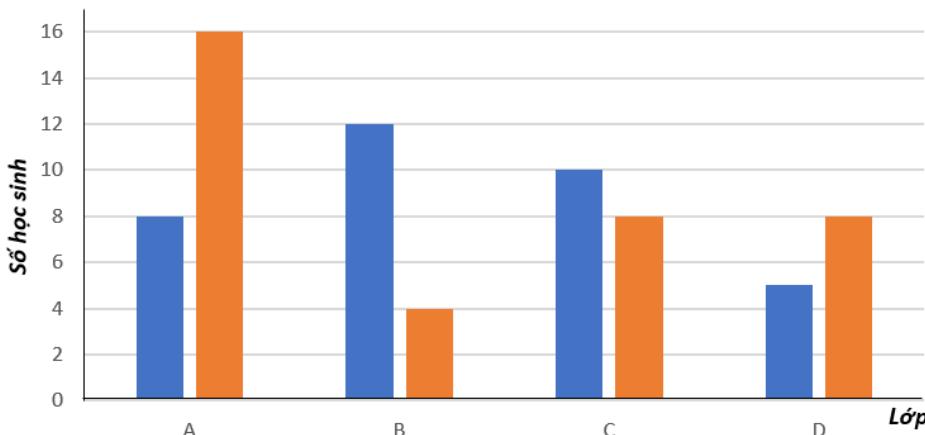
4. Bảng thống kê sau cho biết số lượng học sinh của các lớp khối 8 tham gia các câu lạc bộ Thể thao và Nghệ thuật của trường.

Câu lạc bộ \ Lớp	8A	8B	8C	8D
Thể thao	8	12	10	5
Nghệ thuật	16	4	8	8

- a) Lựa chọn và vẽ biểu đồ để so sánh số lượng học sinh tham gia hai câu lạc bộ này ở từng lớp.  
 b) Lựa chọn và vẽ biểu đồ biếu diễn tỉ lệ học sinh các lớp tham gia hai câu lạc bộ trong số các học sinh khối 8 tham gia hai câu lạc bộ này.

### *Lời giải*

a) Ta chọn biểu đồ cột kép.



b) Ta chọn biểu đồ hình quạt tròn

Câu lạc bộ Thể thao có số học sinh tham gia:  $8 + 12 + 10 + 5 = 35$

Tỉ lệ phần trăm của mỗi lớp:

$$\text{Lớp 8A: } \frac{8}{35} \% = 22,8\%$$

$$\text{Lớp 8B: } \frac{12}{35} \% = 34,3\%$$

$$\text{Lớp 8C: } \frac{10}{35} \% = 28,6\%$$

$$\text{Lớp 8D: } \frac{5}{35} \% = 14,3\%$$

Câu lạc bộ Nghệ thuật có số học sinh tham gia:  $16 + 4 + 8 + 8 = 36$

Tỉ lệ phần trăm của mỗi lớp:

$$\text{Lớp 8A: } \frac{16}{36} \% = 44,44\%$$

$$\text{Lớp 8B: } \frac{4}{36} \% = 11,11\%$$

$$\text{Lớp 8C: } \frac{8}{36} \% = 22,22\%$$

$$\text{Lớp 8D: } \frac{8}{36} \% = 22,22\%$$

(Học sinh tự vẽ hình).