

CHƯƠNG VI. PHÂN THỨC ĐẠI SỐ

BÀI 21. PHÂN THỨC ĐẠI SỐ

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Phân thức đại số

- Một phân thức đại số (hay nói là phân thức) là một biểu thức có dạng $\frac{A}{B}$, trong đó A, B là hai đa thức và B khác đa thức 0.
- A được gọi là tử thức (hoặc tử) và B được gọi là mẫu thức (hoặc mẫu).

Nhận xét. Mỗi đa thức cũng được coi là một phân thức với mẫu thức bằng 1. Đặc biệt, số 0 và số 1 cũng là những phân thức đại số.

2. Hai phân thức bằng nhau

- Hai phân thức $\frac{A}{B}$ và $\frac{C}{D}$ gọi là bằng nhau nếu $AD = BC$.
- $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$ nếu $AD = BC$

3. Điều kiện xác định và giá trị của phân thức tại một giá trị đã cho của biến

Giá trị của phân thức tại một giá trị đã cho của biến

- Khi thay các biến trong một phân thức đại số bằng các số, ta được một biểu thức số (nếu mẫu số nhận được là số khác 0). Giá trị của biểu thức số đó gọi là giá trị của phân thức tại các giá trị đã cho của biến.
- Điều kiện xác định của phân thức $\frac{A}{B}$ và $\frac{C}{D}$ là điều kiện của biến để giá trị của mẫu thức $B \neq 0$.

B. PHÂN LOẠI CÁC BÀI TẬP

I. Chứng minh hai phân thức bằng nhau

Bài toán 1. Chứng tỏ

$$a) \frac{x+1}{x+3} = \frac{x^2 + 4x + 3}{x^2 + 6x + 9}$$

$$b) \frac{4-9x^2}{4-6x} = \frac{3x+2}{2}$$

$$c) \frac{5-2x}{4x^2 - 20x + 25} = \frac{-1}{2x-5}$$

Hướng dẫn: $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$ nếu $AD = BC$.

Lời giải

$$a) Ta có: (x+1)(x^2 + 6x + 9) = x^3 + 6x^2 + 9x + x^2 + 6x + 9$$

$$= x^3 + 7x^2 + 15x + 9 \quad (1)$$

$$(x+3)(x^2 + 4x + 3) = x^3 + 4x^2 + 3x + 3x^2 + 12x + 9$$

$$= x^3 + 7x^2 + 15x + 9 \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2)} \Rightarrow \frac{x+1}{x+3} = \frac{x^2 + 4x + 3}{x^2 + 6x + 9}$$

$$\text{b) Ta có: } (4 - 9x^2)2 = 8 - 18x^2 \quad (1)$$

$$(4 - 6x)(3x + 2) = 12x + 8 - 18x^2 - 12x = 8 - 18x^2 \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2)} \Rightarrow \frac{4 - 9x^2}{4 - 6x} = \frac{3x + 2}{2}$$

$$\text{c) Ta có: } (5 - 2x)(2x - 5) = 10x - 25 - 4x^2 + 10x = 20x - 25 - 4x^2 \quad (1)$$

$$-(4x^2 - 20x + 25) = -4x^2 + 20x - 25 \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2)} \Rightarrow \frac{5 - 2x}{4x^2 - 20x + 25} = \frac{-1}{2x - 5}$$

Bài toán 2. Chứng minh rằng:

$$\text{a) } \frac{x^3 - 1}{x - 1} = x^2 + x + 1$$

$$\text{b) } \frac{a + 3b}{c} = \frac{ac + 3bc}{c^2}$$

$$\text{c) } \frac{4x^2 - 4xy + y^2}{y^2 - 4x^2} = \frac{y - 2x}{2x + y}$$

Hướng dẫn: $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$ nếu $AD = BC$.

Lời giải

$$\text{a) Ta có: } (x^3 - 1)1 = (x - 1)(x^2 + x + 1) \text{ (hằng đẳng thức } a^3 - b^3 \text{)}$$

$$\Rightarrow \frac{x^3 - 1}{x - 1} = \frac{x^2 + x + 1}{1} \Rightarrow \frac{x^3 - 1}{x - 1} = x^2 + x + 1$$

Bài toán tương tự:

$$1. \frac{x^3 + 1}{x + 1} = x^2 - x + 1$$

$$2. \frac{x^4 - 1}{x - 1} = x^3 + x^2 + x + 1$$

$$3. \frac{x^5 - 1}{x - 1} = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$$

$$\text{Hoặc } \frac{x^5 - 1}{x - 1} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4$$

$$4. \frac{x^5 + 1}{x + 1} = x^4 - x^3 + x^2 - x + 1; \text{ v.v...}$$

$$\text{b) Ta có } (a + 3b)c^2 = ac^2 + 3bc^2$$

$$c(ac + 3bc) = ac^2 + 3bc^2$$

$$\Rightarrow \frac{a+3b}{c} = \frac{ac+3bc}{c^2}$$

Cách khác: Ta có $c(ac + 3bc) = c^2(a + 3b)$

$$\Rightarrow \frac{a+3b}{c} = \frac{ac+3bc}{c^2}$$

$$\text{Ta cũng có } \frac{a+3b}{ac+3bc} = \frac{c}{c^2}$$

$$\text{Vì nếu } AD = BC \Rightarrow \frac{A}{B} = \frac{C}{D}; \frac{A}{C} = \frac{B}{D}$$

$$\text{c) Ta có: } (4x^2 - 4xy + y^2)(2x + y) = (2x - y)^2(2x + y) \quad (1)$$

$$\text{Lại có } (y^2 - 4x^2)(y - 2x) = (y + 2x)(y - 2x)(y - 2x)$$

$$= (2x + y)(y - 2x)^2 = (2x + y)(2x - y)^2 \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2)} \Rightarrow \frac{4x^2 - 4xy + y^2}{y^2 - 4x^2} = \frac{y - 2x}{2x + y}$$

Cách khác: Thực hiện các phép nhân đa thức và so sánh hai kết quả:

$$\text{Ta còn có: } \frac{4x^2 - 4xy + y^2}{y - 2x} = \frac{y^2 - 4x^2}{2x + y}$$

$$\frac{y - 2x}{4x^2 - 4xy + y^2} = \frac{2x + y}{y^2 - 4x^2}, \dots$$

Bài toán 3. Chứng tỏ rằng:

$$\text{a) } \frac{5x^3 + 5x}{x^4 - 1} = \frac{5x}{x^2 - 1}$$

$$\text{b) } \frac{x^2 + xy + y^2}{3x} = \frac{x^3 - y^3}{3x^2 - 3xy}$$

Lời giải

$$\text{a) Ta có: } (5x^3 + 5x)(x^2 - 1) = 5x(x^2 + 1)(x^2 - 1) = 5x(x^4 - 1)$$

$$\Rightarrow \frac{5x^3 + 5x}{x^4 - 1} = \frac{5x}{x^2 - 1}$$

Chú ý: Có thể thực hiện phép nhân đa thức.

$$\text{b) Ta có: } (x^2 + xy + y^2)(3x^2 - 3xy) = 3x(x^2 + xy + y^2)(x - y) = 3x(x^3 - y^3)$$

$$\Rightarrow \frac{x^2 + xy + y^2}{3x} = \frac{x^3 - y^3}{3x^2 - 3xy}$$

II. Tìm đa thức, phân thức thoả mãn điều kiện cho trước

Bài toán 4.

a) Tìm đa thức P , biết: $\frac{4x^2 - 3x - 7}{P} = \frac{4x - 7}{2x + 3}$

b) Tìm đa thức A , biết: $\frac{a+b}{a^3+b^3} = \frac{1}{A}$.

Hướng dẫn: $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$ nếu $AD = BC$.

Lời giải

a) Ta có: $\frac{4x^2 - 3x - 7}{P} = \frac{4x - 7}{2x + 3}$ nếu $(4x^2 - 3x - 7)(2x + 3) = (4x - 7)P$

Hay $(8x^3 + 6x^2 - 23x - 21) = (4x - 7)P$

Vậy $P = (8x^3 + 6x^2 - 23x - 21) : (4x - 7)$

Ta có:

$$\begin{array}{r} -8x^3 + 6x^2 - 23x - 21 \\ \quad\quad\quad 4x - 7 \\ \hline 2x^3 - 14x^2 - 5x + 3 \end{array}$$

$20x^2 - 23x - 21$

$20x^2 - 35x$

$12x - 21$

$12x - 21$

0

Vậy $P = 2x^2 - 5x + 3$.

b) Ta có: $\frac{a+b}{a^3+b^3} = \frac{1}{A}$, nên $(a+b)A = a^3 + b^3$;

vì $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2) \Rightarrow A = a^2 - ab + b^2$

Chú ý: Với các phân thức có nhiều biến, ta thường phân tích thành nhân tử.

Chẳng hạn bài toán sau:

Tìm đa thức P biết: $\frac{4a^2 - 12ab + 9b^2}{-2ac + 3bc} = \frac{P}{c}$

Xét $(4a^2 - 12ab + 9b^2)c = (-2ac + 3bc)P$

$\Rightarrow (2a - 3b)c = P(-2a + 3b)$

Ta có thể tìm một phân thức thoả mãn điều kiện cho trước như bài toán sau.

Bài toán 5. Tìm P , biết: $(x^2 + 1)P = 2x^2 + 3$

Hướng dẫn: Nếu $AD = BC \Rightarrow \frac{A}{B} = \frac{C}{D}$.

Lời giải

Ta có $(x^2 + 1)P = 2x^2 + 3$ hay $(x^2 + 1)P = (2x^2 + 3)1$

$$\Rightarrow \frac{P}{1} = \frac{2x^2 + 3}{x^2 + 1} \text{ hay } P = \frac{2x^2 + 3}{x^2 + 1}$$

Bài toán 6. Tìm P biết:

a) $x^3 - 1 = (x+1)P$

b) $x^4 - 1 = (x+1)P$

Lời giải

a) Ta có: $x^3 - 1 = (x+1)P \Rightarrow P = \frac{x^3 - 1}{x+1}$

Bài toán tương tự:

Tìm P , biết: $x^3 - 1 = (x-1)P$

$$\Rightarrow P = x^2 + x + 1 \text{ vì } (x-1)(x^2 + x + 1) = x^3 - 1$$

b) Ta có: $x^4 - 1 = (x+1)P \Rightarrow P = \frac{x^4 - 1}{x+1}$.

(Ta có bài toán nếu $x^4 - 1 = (x-1)P \Rightarrow P = x^3 + x^2 + x + 1$)

III. Hai phân thức không bằng nhau

Bài toán 7. Chứng tỏ hai phân thức $\frac{x^2 + 4x + 4}{2x^2 + 4x}$ và $\frac{x+2}{2}$ không bằng nhau.

Hướng dẫn: Nếu $AD \neq BC \Rightarrow \frac{A}{B} \neq \frac{C}{D}$.

Lời giải

Ta có: $(x^2 + 4x + 4)2 = 2(x+2)^2 \quad (1)$

$$(2x^2 + 4x)(x+2) = 2x(x+2)^2 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \frac{x^2 + 4x + 4}{2x^2 + 4x} \neq \frac{x+2}{2}$ không bằng nhau.

Ta có bài toán:

Tìm giá trị của x , biết: $\frac{x^2 + 4x + 4}{2x^2 + 4x} = \frac{x+2}{2}$

Mẫu thức $2x^2 + 4x \neq 0$ hay $2x(x+2) \neq 0 \Rightarrow x \neq 0$ và $x \neq -2$.

Tử giả thiết, ta có: $(x^2 + 4x + 4) \cdot 2 = (2x^2 + 4x)(x+2)$

$$\Rightarrow (x+2)^2 \cdot 2 = 2x(x+2)^2$$

$$\Rightarrow 2x(x+2)^2 - 2(x+2)^2 = 0$$

$$\Rightarrow 2(x+2)^2(x-1) = 0$$

$$x+2 \neq 0 \Rightarrow x-1=0 \Rightarrow x=1 \text{ nhận}$$

Bài toán 8. Hai phân thức sau có bằng nhau không?

$$\frac{x^2 - 2}{x^2 - 1} \text{ và } \frac{x+2}{x+1}$$

Hướng dẫn: Tích $(x^2 - 2)(x+1)$ và $(x^2 - 1)(x+2)$

Lời giải

$$\text{Ta có } (x^2 - 2)(x+1) = x^3 + x^2 - 2x - 2 \quad (1)$$

$$(x^2 - 1)(x+2) = x^3 + 2x^2 - x - 2 \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2)} \Rightarrow \frac{x^2 - 2}{x^2 - 1} \neq \frac{x+2}{x+1}$$

Ta có bài toán:

$$1. \text{ Tìm giá trị của } x, \text{ biết } \frac{x^2 - 2}{x^2 - 1} = \frac{x+2}{x+1} \quad (x \neq 1)$$

Lời giải

$$\text{Ta có: } \frac{x^2 - 2}{x^2 - 1} = \frac{x+2}{x+1}$$

$$\Rightarrow (x^2 - 2)(x+1) = (x^2 - 1)(x+2)$$

$$\Rightarrow x^3 + x^2 - 2x - 2 = x^3 + 2x^2 - x - 2$$

$$\Rightarrow x^2 + x = 0 \Rightarrow x(x+1) = 0 \Rightarrow x = 0 \quad (\text{vì } x \neq -1 \Rightarrow x+1 = 0)$$

2. Hai phân thức sau có bằng nhau không:

$$\frac{x^2 + 3}{x^2 + 6x + 9} = \frac{x+1}{x+3}$$

(Đáp số: Hai phân thức không bằng nhau)

$$3. \text{ Tìm } x \text{ để } \frac{x^2 + 3}{x^2 + 6x + 9} = \frac{x+1}{x+3}$$

(Đáp số: Không tồn tại giá trị nào của x).

C. BÀI TẬP

6.1. Viết tử thức và mẫu thức của phân thức $\frac{5x-2}{3}$.

6.2. Trong các phân thức sau, cặp phân thức nào có mẫu giống nhau?

a) $\frac{-20x}{3y^2}$ và $\frac{4x}{5y^2}$ b) $\frac{3x-1}{x^2+2}$ và $\frac{3x-1}{x+1}$ c) $\frac{x-1}{3x+6}$ và $\frac{x+1}{3(x+2)}$

6.3. Vì sao các kết luận sau đúng?

a) $\frac{-6}{-4y} = \frac{3y}{2y^2}$ b) $\frac{x+3}{5} = \frac{x^2+3}{5x}$ c) $\frac{3x(4x+1)}{16x^2-1} = \frac{-3x}{1-4x}$

6.4. Viết điều kiện xác định của phân thức $\frac{x^2+x-2}{x^3+2}$. Tính giá trị của phân thức trên lần lượt tại $x=0; x=1; x=2$.

6.5. Cho A là một đa thức khác 0 tùy ý. Hãy giải thích vì sao $\frac{0}{A} = 0$ và $\frac{A}{A} = 1$.

6.6. Một ô tô chạy với vận tốc trung bình là $x \text{ (km/h)}$.

a) Viết biểu thức biểu thị thời gian ô tô (tính bằng giờ) chạy hết quãng đường 120 km .

b) Tính thời gian ô tô đi được 120 km trong trường hợp vận tốc trung bình của ô tô là 60 km/h .

6.7. Các phân thức sau có bằng nhau không:

a) $\frac{2x^4 + 3x^3 + 2x + 3}{(x^2 - x + 1)(2x + 3)}$ và $\frac{2x + 1}{2}$

b) $\frac{x^2 - 36x}{x^3 + 12x^2 + 36x}$ và $\frac{6 - x}{6 + x}$

6.8. Tìm đa thức P , biết:

a) $\frac{x^2 + 5x + 6}{x^2 + 4x + 4} = \frac{P}{x + 2}$ b) $\frac{a+1}{a-1} = \frac{(a+1)^2}{P}$ c) $\frac{P}{2a-6} = \frac{a^2 + 3a + 9}{2}$

6.9. Tìm P , biết:

a) $a^3 + b^3 = (a - b)P$ b) $(x^2 + y^2) = (x + y)P$

6.10. Tìm giá trị x , biết: $\frac{x^3 - 36x}{x^3 + 12x^2 + 36x} = \frac{6 - x}{6 + x}$ ($x \neq -6$)

6.11. Tìm m , biết:

a) $\frac{x^3 - 2x^2 + x + 48}{x + 3} = \frac{x^2 - 5x + 16}{m}$

b) $\frac{x^3 - 3x^2 + 5x - 6}{x^2 - x + 6} = \frac{x - 2}{m}$

CƠ HẾT &

HƯỚNG DẪN GIẢI

6.1. Tử thức: $5x - 2$; mẫu thức là 3 .

6.2. Đáp số: c) Vì $3(x + 2) = 3x + 6$

6.3. a) Ta có $(-6).2y^2 = -12y^2$ và $(-4y).3y = -12y^2$

b) $5x(x + 3) = 5x^2 + 15x$

$5(x^2 + 3) = 5x^2 + 15$

c) $3x(4x + 1)(1 - 4x) = -3x(4x + 1)(4x - 1)$

$= -3x(16x^2 - 1)$ và $(16x^2 - 1).(-3x) = -3x(16x^2 - 1)$

6.4. Điều kiện xác định: $x^2 + 2 \neq 0$

* Với $x = 0$, ta có $\frac{0^3 + 0 - 2}{0^2 + 2} = -1$

* Với $x = 1$, ta có $\frac{1^3 + 1 - 2}{1^2 + 2} = 0$

* Với $x = 2$, ta có $2 \frac{2^3 + 2 - 2}{0^2 + 2} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$

6.5. Ta có $A \cdot 0 = 0$ và $A = A \cdot 1$

6.6. a) Biểu thức biểu thị thời gian $\frac{120}{x}$ (h)

b) Ta có $\frac{120}{60} = 2$ (h)

6.7. a) Ta có: $\frac{2x^4 + 3x^3 + 2x + 3}{(x^2 - x + 1)(2x + 3)} = \frac{2x + 1}{2}$

Vì $2(2x^4 + 3x^3 + 2x + 3) = 4x^4 + 6x^3 + 4x + 6$ (1)

Mặt khác $(x^2 - x + 1)(2x + 3)(2x + 1) = (x^2 - x + 1)(4x^2 + 10x + 3)$

$= 4x^4 + 6x^3 - 3x^2 + 13x + 3$ (2)

Từ (1) và (2) \Rightarrow hai phân thức đã cho không bằng nhau.

Cách khác: Cho $x = 1$ ta có

$$\frac{1-36}{1+12+36} = -\frac{5}{7}; \frac{6-1}{6+1} = \frac{5}{7} \text{ mà } -\frac{5}{7} \neq \frac{5}{7}$$

\Rightarrow hai phân thức không thể bằng nhau.

Chú ý: Ta nên làm theo cách thứ hai vì không cần thực hiện phép nhân đa thức, nên những bài toán về loại này, ta kiểm tra trước bằng một vài giá trị của x xem hai phân thức có giá trị bằng nhau hay không.

Ta xét bài toán sau:

Hai phân thức sau có bằng nhau không

1. $\frac{x+1}{x+3}$ và $\frac{x^2+3}{x^2+6x+3}$

Cho $x = 0 \Rightarrow \frac{0+1}{0+3} = \frac{1}{3}; \frac{0+3}{0+6.0+3} = 1$ mà $\frac{1}{3} \neq 1$ nên hai phân thức không thể bằng nhau.

2. $\frac{x^2-2}{x^2-1}$ và $\frac{x+2}{x+1}$

Cho $x = 2 \Rightarrow \frac{4-2}{4-1} = \frac{2}{3}; \frac{2+2}{2+1} = \frac{4}{3}$ và $\frac{2}{3} \neq \frac{4}{3}$

Vậy hai phân thức không bằng nhau

Nếu thay vào giá trị của x làm hai phân thức có giá trị bằng nhau thì ta phải chứng tỏ $A.D = B.C \Rightarrow \frac{A}{B} = \frac{C}{D}$

6.8. a) Ta có: $\frac{x^2 + 5x + 6}{x^2 + 4x + 4} = \frac{(x+2)(x+3)}{(x+2)^2} \Rightarrow \frac{(x+2)(x+3)}{(x+2)^2} = \frac{P}{x+2}$

$\Rightarrow P = x+3$

b) $P = a^2 - 1$

$$c) 2P = (2a - 6)(a^2 + 3a + 9)$$

$$\Rightarrow P = (a - 3)(a^2 + 3a + 9) \text{ hay } P = a^3 - 27$$

6.9. a) $P = \frac{a^3 + b^3}{a - b}$

b) $P = \frac{x^2 + y^2}{x + y}$

6.10. $\frac{x^3 - 36x}{x^3 + 12x^2 + 36x} = \frac{6 - x}{6 + x}$

$$\Rightarrow (6 + x)(x^3 - 3) = (6 - x)(x^3 + 12x^2 + 36x)$$

$$\Rightarrow x^4 + 6x^3 - 36x^2 - 216x = -x^4 - 6x^3 + 36x^2 + 216x$$

$$\Rightarrow 2x^4 + 12x^3 - 72x^2 - 432x = 0$$

$$\Rightarrow 2x(x^3 + 6x^2 - 36x - 216) = 0$$

$$\Rightarrow 2x(x - 6)(x + 6)^2 = 0$$

$$\Rightarrow x = 0; x = 6 \text{ hoặc } x = -6$$

Vì $x \neq -6$ nên ta lấy $x = 0$ hoặc $x = 6$.

6.11 a) $m = 1$

b) $m = 1$

☞ HẾT

BÀI 22. TÍNH CHẤT CƠ BẢN CỦA PHÂN THỨC ĐẠI SỐ

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Tính chất cơ bản của phân thức

- Nếu nhân cả tử và mẫu của một phân thức với cùng một đa thức khác đa thức 0 thì được một phân thức bằng phân thức đã cho:

$$\frac{A}{B} = \frac{A \cdot M}{B \cdot M} \quad (M \text{ là một đa thức khác } 0)$$

- Nếu tử và mẫu của một phân thức có nhân tử chung thì khi chia cả tử và mẫu cho nhân tử chung đó ta được một phân thức bằng phân thức đã cho:

$$\frac{A : N}{B : N} = \frac{A}{B} \quad (N \text{ là một nhân tử chung})$$

2. VẬN DỤNG

Cách rút gọn một phân thức

- Rút gọn một phân thức là biến đổi phân thức đó thành một phân thức mới bằng nó nhưng đơn giản hơn.
- Muốn rút gọn một phân thức đại số ta làm như sau:
 - Phân tích tử và mẫu thành nhân tử (nếu cần) để tìm nhân tử chung;
 - Chia cả tử và mẫu cho nhân tử chung đó.

Cách quy đồng mẫu thức nhiều phân thức

- Quy đồng mẫu thức nhiều phân thức là biến đổi phân thức đã cho thành những phân thức mới có cùng mẫu thức và lần lượt bằng các phân thức đã cho.
- Muốn quy đồng mẫu thức nhiều phân thức ta làm như sau:
 - Phân tích các mẫu thức thành nhân tử rồi tìm mẫu thức chung;
 - Tìm nhân tử phụ của mỗi mẫu thức bằng cách chia mẫu thức chung cho mẫu thức đó;
 - Nhân cả tử và mẫu của mỗi phân thức với nhân tử phụ tương ứng.

B. PHÂN LOẠI CÁC BÀI TẬP

I. Chứng minh hai phân thức bằng nhau

Bài toán 1. Chứng minh hai phân thức bằng nhau

$$a) \frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 + x}$$

$$b) \frac{x-3}{x} = \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - x}$$

Hướng dẫn: $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$, nếu $AD = BC$, có thể xét: $\frac{A}{B} = \frac{A \cdot M}{B \cdot M} = \frac{A : N}{B : N}$

Lời giải

$$a) Ta có: (x^2 + 2x + 1)x = (x+1)^2 x$$

$$(x^2 + x)(x+1) = x(x+1)(x+1) = (x+1)^2 \cdot x$$

$$\text{Từ (1) và (2)} \Rightarrow \frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 + x} = \frac{x+1}{x}$$

Cách khác: Ta có:

$$\frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 + x} = \frac{(x+1)^2}{x(x+1)} = \frac{(x+1)^2 : (x+1)}{[x(x+1)] : (x+1)} = \frac{x+1}{x} \text{ (đpcm)}$$

Chú ý: Theo cách thứ hai, ta phân tích tử và mẫu thức thành nhân tử.

$$\begin{aligned} \text{b) Ta có: } & \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - x} = \frac{x^2 - x - 3x + 3}{x(x-1)} = \frac{x(x-1) - 3(x-1)}{x(x-1)} \\ &= \frac{(x-1)(x-3)}{x(x-1)} = \frac{x-3}{x} \text{ (đpcm)} \end{aligned}$$

Bài toán 2. Hai phân thức sau có bằng nhau không:

$$\text{a) } \frac{x^3 - x^2}{x^3 - 2x^2 + x} \text{ và } \frac{x}{x-1} \quad \text{b) } \frac{x^2 + 2x + 1}{2x^2 - 2} \text{ và } \frac{x+1}{2x-2}$$

Hướng dẫn: Xem lời giải bài toán 1.

Lời giải

$$\text{a) Ta có } \frac{x^3 - x^2}{x^3 - 2x^2 + x} = \frac{x^2(x-1)}{x(x-1)^2} = \frac{x^2(x-1) : (x-1)}{x(x-1) : (x-1)} = \frac{x}{x-1}$$

Vậy hai phân thức bằng nhau.

$$\text{b) Ta có } \frac{x^2 + 2x + 1}{2x^2 - 2} = \frac{(x+1)^2}{2(x-1)(x+1)} = \frac{(x+1)^2 : (x+1)}{[2(x-1)(x+1)] : (x+1)} = \frac{x+1}{2(x-1)} = \frac{x+1}{2x-2}$$

Vậy hai phân thức bằng nhau.

Bài toán 3. Chứng tỏ hai phân thức sau bằng nhau.

$$\text{a) } \frac{m+1}{m-1} \text{ và } \frac{m^2 + 2m + 1}{m^2 - 1} \quad \text{b) } \frac{2a^4 + 3a^3 + 2a + 3}{(a^2 - a + 1)(4a + 6)} \text{ và } \frac{a+1}{2}$$

Lời giải

$$\text{a) Ta có } \frac{m+1}{m-1} = \frac{(m+1)(m+1)}{(m-1)(m+1)} = \frac{(m+1)^2}{m^2 - 1} = \frac{m^2 + 2m + 1}{m^2 - 1}$$

$$\text{Cách khác: } \frac{m^2 + 2m + 1}{m^2 - 1} = \frac{(m+1)^2 : (m+1)}{(m+1)(m-1) : (m+1)} = \frac{m+1}{m-1}$$

$$\text{b) } \frac{2a^4 + 3a^3 + 2a + 3}{(a^2 - a + 1)(4a + 6)} = \frac{a^3(2a+3) + (2a+3)}{2(a^2 - a + 1)(2a+3)}$$

$$= \frac{(2a+3)(a^3 + 1)}{2(a^2 - a + 1)(2a+3)}$$

$$= \frac{[(2a+3)(a+3)(a^2 - a + 1)] : [(2a+3)(a^2 - a + 1)]}{[2(a^2 - a + 1)(2a+3)] : [(a^2 - a + 1)(2a+3)]} = \frac{a+1}{2}$$

II. Tìm đa thức thỏa mãn điều kiện cho trước

Bài toán 4. Tìm P , biết:

$$\text{a) } \frac{x^2 + 2}{x-1} = \frac{3x^3 + 6x}{P} \quad \text{b) } \frac{P}{x-y} = \frac{2x^2 - 2xy}{2(y-x)^2}$$

$$Hướng dẫn: \frac{A \cdot M}{B \cdot M} = \frac{A}{B}; \frac{A : N}{B : N} = \frac{A}{B}.$$

Lời giải

a) Ta có: $\frac{x^2 + 2}{x-1} = \frac{3x(x^2 + 2)}{3x(x-1)}$

Theo giả thiết, ta có $\frac{x^2 + 2}{x-1} = \frac{3x^3 + 6x}{P}$

$$\Rightarrow P = 3x(x-1) \text{ hay } P = 3x^2 - 3x$$

b) Viết lại $\frac{P}{x-y} = \frac{2x^2 - 2xy}{2(y-x)^2}$ (1), lại có $\frac{2x^2 - 2xy}{2(x-y)^2} = \frac{2x(x-y) : 2(x-y)}{2(x-y)^2 : 2(x-y)} = \frac{x}{x-y}$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow P = x$.

Bài toán 5. Tìm đa thức P , biết: $\frac{(2-x)P}{(2+y)P} = \frac{2xy - x^2y}{2xy + xy^2}$

Lời giải

Ta có: $2xy - x^2y = xy(2-x)$

$$2xy + xy^2 = xy(2+y)$$

Vậy $\frac{2xy - x^2y}{2xy + xy^2} = \frac{xy(2-x)}{xy(2+y)} = \frac{(2-x)P}{(2+y)P}$

$$\Rightarrow P = xy$$

Bài toán 6. Điền vào chỗ trống:

a) $\frac{x - x^2}{5x^2 - 5} = \frac{x}{\dots}$

b) $\frac{-x^2 + 2xy - y^2}{x + y} = \frac{\dots}{y^2 - x^2}$

Hướng dẫn: Xem bài toán 4 và 5, áp dụng tính chất $\frac{A}{B} = \frac{A \cdot M}{B \cdot M}; \frac{A}{B} = \frac{A : N}{B : N}$

Lời giải

a) $\frac{x - x^2}{5x^2 - 5} = \frac{x(1-x)}{5(x^2 - 1)} = \frac{x(x-1)}{-5(x-1)(x+1)}$

$$= \frac{x(x-1):(x-1)}{[-5(x-1)(x+1)]:(x-1)} = \frac{x}{-5(x+1)}$$

Vậy ta phải đặt vào chỗ trống đa thức $-5(x+1)$.

b) $\frac{-x^2 + 2xy - y^2}{x + y} = \frac{-(x-y)^2(y-x)}{(x+y)(y-x)} = \frac{(x-y)^3}{y^2 - x^2}$

Vậy ta phải đặt vào chỗ trống đa thức $(x-y)^3 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$.

III. Rút gọn phân thức

Bài toán 7. Rút gọn phân thức:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \frac{1-a^2}{(a-1)^2} & \text{b)} \frac{4y^2-4y+1}{2-4y} \\ \text{c)} \frac{1-4y+4y^2}{4y^2-1} & \text{d)} \frac{5-2x}{4x^2-20x+25} \end{array}$$

Hướng dẫn: Xem tóm tắt ở trên.

Lời giải

$$\begin{array}{l} \text{a) Ta có: } \frac{1-a^2}{(a-1)^2} = \frac{(1-a)(1+a)}{(1-a)^2} = \frac{1+a}{1-a} \\ \text{b) Ta có: } \frac{4y^2-4y+1}{2-4y} = \frac{(2y-1)^2}{2(1-2y)} = \frac{(1-2y)^2}{2(1-2y)} = \frac{1-2y}{2} \\ \text{c) Ta có: } \frac{1-4y+4y^2}{4y^2-1} = \frac{(1-2y)^2}{(2y)^2-1} = \frac{(2y-1)^2}{(2y+1)(2y-1)} = \frac{2y-1}{2y+1} \\ \text{d) Ta có: } \frac{5-2x}{4x^2-20x+25} = \frac{5-2x}{(2x-5)^2} = \frac{5-2x}{(5-2x)^2} = \frac{1}{5-2x}. \end{array}$$

Bài toán 8. Rút gọn phân thức:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \frac{36a-a^2}{a^3+12a^2+36a} & \text{b)} \frac{25x-49x^3}{49x^3-70a^2+25x} \quad \text{c)} \frac{2x^5-128x^2}{(2x^2+8x+3^2)(x^4-4x^3)} \end{array}$$

Lời giải

$$\begin{array}{l} \text{a) Ta có: } \frac{36a-a^2}{a^3+12a^2+36a} = \frac{a(6-a)(6+a)}{a(a+6)^2} = \frac{6-a}{a+6} \\ \text{b) Ta có: } \frac{25x-49x^3}{49x^3-70a^2+25x} = \frac{x(5+7x)(5-7x)}{x(5-7x)^2} = \frac{5+7x}{5-7x} \\ \text{c) Ta có: } \frac{2x^5-128x^2}{(2x^2+8x+3^2)(x^4-4x^3)} = \frac{2x^2(x^3-64)}{2x^3(x^2+4x+16)(x-4)} = \frac{2x^2(x^3-64)}{2x^3(x^3-64)} = \frac{1}{x} \end{array}$$

Bài toán 9. Rút gọn phân thức ($m, n \in \mathbb{N}$)

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \frac{a^{2n}}{a^n} & \text{b)} \frac{a^n}{a^{n-2}} \quad (n > 2) \quad \text{c)} \frac{a^m b^{n+m}}{a^{n-m} b^m} \quad (m > n) \end{array}$$

Lời giải

$$\begin{array}{l} \text{a) Ta có: } \frac{a^{2n}}{a^n} = \frac{a^n \cdot a^n}{a^n} = a^n \\ \text{b) Ta có: } \frac{a^n}{a^{n-2}} = \frac{a^{n-2} \cdot a^2}{a^{n-2}} = a^2 \\ \text{c) Ta có: } \frac{a^m b^{n+m}}{a^{n-m} b^m} = \frac{a^m \cdot a^m b^n \cdot b^m}{a^{n-m} \cdot a^m \cdot b^m} = \frac{a^{2m} b^n}{a^{n-m+m}} = \frac{a^{2m} b^n}{a^n}. \end{array}$$

IV. Tìm phân thức thoả mãn điều kiện cho trước

Bài toán 10. Tìm P , biết:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} a^2 P + 3Pa + 9 = a^2 & \text{b)} abP - bP = ab - b^2 c \\ \text{c)} a^2 P + 2aP + a^2 = 4 & \end{array}$$

Lời giải

a) Ta có: $a^2P + 3Pa + 9 = a^2$

$$\Rightarrow (a^2 + 3a)P = a^2 - 9$$

$$\Rightarrow P = \frac{a^2 - 9}{a^2 + 3a} = \frac{(a+3)(a-3)}{a(a+3)} = \frac{a-3}{a}$$

b) Ta có: $abP - bP = ab - b^2c$

$$\Rightarrow (ab - b)P = ab - b^2c$$

$$\Rightarrow P = \frac{ab - b^2c}{ab - b} = \frac{b(a - bc)}{b(a - 1)} = \frac{a - bc}{a - 1}$$

c) Ta có: $a^2P + 2aP + a^2 = 4$

$$\Rightarrow (a^2 + 2a)P = 4 - a^2$$

$$\Rightarrow P = \frac{4 - a^2}{a^2 + 2a} = \frac{(2+a)(2-a)}{a(a+2)} = \frac{2-a}{a}$$

V. Chứng minh một đẳng thức

Bài toán 11. Chứng minh rằng:

a) $\frac{x^2 - 3x + 2}{x^3 - 1} = \frac{x-2}{x^2 + x + 1}$

b) $\frac{2x^2 + 6x}{x^3 + 7x^2 + 12x} = \frac{2}{x+4}$

c) $\frac{2x^2 + xy - y^2}{2x^2 - 3xy + y^2} = \frac{x+y}{x-y}$

Lời giải

a) Ta có: $\frac{x^2 - 3x + 2}{x^3 - 1} = \frac{x^2 - x - 2x + 2}{x^3 - 1}$

$$= \frac{x(x-1) - 2(x-1)}{(x-1)(x^2 + x + 1)}$$

$$= \frac{(x-1)(x-2)}{(x-1)(x^2 + x + 1)} = \frac{x-2}{x^2 + x + 1}$$

b) Ta có: $\frac{2x^2 + 6x}{x^3 + 7x^2 + 12x} = \frac{2x(x+3)}{x(x+3)(x+4)} = \frac{2}{x+4}$

c) Ta có $\frac{2x^2 + xy - y^2}{2x^2 - 3xy + y^2} = \frac{x(x+y) + (x+y)(x-y)}{2x(x-y) - y(x-y)}$

$$= \frac{(x+y)(2x-y)}{(x-y)(2x-y)} = \frac{x+y}{x-y} = VP$$

Cách khác: Ta chia tử và mẫu của phân thức ở vế trái cho $y^2 \neq 0$

($y=0$ đẳng thức luôn đúng: $\frac{2x^2}{2x^2} = \frac{x}{x} = 1$)

$$\frac{2x^2 + xy - y^2}{2x^2 - 3xy + y^2} = \frac{2\left(\frac{x}{y}\right)^2 + 3\left(\frac{x}{y}\right) - 1}{2\left(\frac{x}{y}\right)^2 - 3\left(\frac{x}{y}\right) + 1}$$

$$\text{Đặt } t = \frac{x}{y} \Rightarrow \frac{2t^2 + 3t - 1}{2t^2 - 3t + 1} = \frac{2t^2 + 2t - t - 1}{2t^2 - 2t - t + 1}$$

$$= \frac{2t(t+1) - (t+1)}{2t(t-1) - (t-1)} = \frac{(t+1)(2t-1)}{(t-1)(2t-1)}$$

$$= \frac{t+1}{t-1} = \frac{\frac{x}{y} + 1}{\frac{x}{y} - 1} = \frac{x+y}{x-y}$$

(Có thể phân tích về trái (VT) theo cách này mà không cần chia tử và mẫu cho y^2).

Bài toán 12. Cho $2x^2 + 2y^2 = 5xy$. Chứng minh rằng $\frac{x-y}{x+y} = \frac{1}{3}$ ($x > y > 0$)

Hướng dẫn: Xem cách giải thứ hai của bài toán 5.

Lời giải

$$\text{Ta có: } 2x^2 + 2y^2 = 5xy \Rightarrow 2\left(\frac{x}{y}\right)^2 + 2 = 5\left(\frac{x}{y}\right)$$

$$\text{Đặt } t = \frac{x}{y} \text{ ta được: } 2t^2 + 2 = 5t \Rightarrow 2t^2 + 2 - 5t = 0$$

$$\Rightarrow (2t^2 - 4t) - (t - 2) = 0 \Rightarrow (t-2)(2t-1) = 0$$

$$\Rightarrow t = 2 \text{ hoặc } t = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{y} = 2 \text{ hoặc } \frac{x}{y} = \frac{1}{2}$$

$$(\text{vì } x > y > 0 \Rightarrow \frac{x}{y} > 1 \text{ nên ta lấy } \frac{x}{y} = 2)$$

$$\text{Mặt khác: } \frac{x-y}{x+y} = \frac{(x-y):y}{(x+y):y} = \frac{\frac{x}{y} - 1}{\frac{x}{y} + 1}$$

$$\text{Thay } \frac{x}{y} = 2 \text{ vào biểu thức trên, ta có: } \frac{x-y}{x+y} = \frac{2-1}{2+1} = \frac{1}{3} \text{ (đpcm)}$$

$$\text{Cách khác: } 2x^2 + 2y^2 = 5xy \Rightarrow 2x^2 - 4xy - xy + 2y^2 = 0$$

$$\Rightarrow 2x(x-2y) - y(x-2y) = 0$$

$$\Rightarrow (x-2y)(2x-y) = 0$$

$$\Rightarrow x = 2y \text{ hoặc } 2x = y$$

Vì $x > y > 0 \Rightarrow \frac{x}{y} > 1$, ta lấy $x = 2y$

Thay $x = 2y$ vào phân thức $\frac{x-y}{x+y}$ ta được $\frac{x-y}{x+y} = \frac{1}{3}$

Ta có bài toán sau:

1. Cho $x^2 + y^2 = 6xy, x > y > 0$. Chứng minh rằng: $\frac{x+y}{x-y} = \sqrt{2}$

2. Cho $2x - y = 1$. Tính $\frac{3x-y}{x+y+12}$

Đáp số: $\frac{1}{3}$

VI. Tìm mẫu thức chung (MTC)

Bài toán 13. Tìm mẫu thức chung của các phân thức

a) $\frac{5}{4x-4}; \frac{4}{x^2-1}; \frac{1}{3x^2+3x}$

b) $\frac{a}{x^2-y^2}; \frac{b}{2x^2-4xy+2y^2}; \frac{c}{3x^2+6xy+3y^2}$.

Hướng dẫn: Xem phần A.

Lời giải

a) Phân tích các mẫu thức thành nhân tử:

$$4x-4 = 4(x-1)$$

$$x^2-1 = (x-1)(x+1)$$

$$3x^2+3x = 3x(x+1)$$

Vậy MTC: $12x(x-1)(x+1)$ hay $12x(x^2-1)$

b) Ta có: $x^2 - y^2 = (x+y)(x-y)$

$$2x^2 - 4xy + 2y^2 = 2(x-y)^2$$

$$3x^2 + 6xy + 3y^2 = 3(x+y)^2$$

$$\text{MTC: } 6(x-y)^2(x+y)^2$$

Bài toán 14. Tìm mẫu thức chung của các phân thức:

a) $\frac{x}{y^2-yz}; \frac{z}{y^2+yz}; \frac{y}{y^2-z^2}$

b) $\frac{1}{x^2-2x+1}; \frac{1}{x^2-3x+2}; \frac{1}{x^2-x-2}$

Lời giải

a) Ta có: $y^2 - yz = y(y-z)$

$$y^2 + yz = y(y+z)$$

$$y^2 - z^2 = (y+z)(y-z)$$

MTC: $y(y+z)(y-z)$ hay $y(y^2 - z^2)$

b) Ta có: $x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$

$$x^2 - 3x + 2 = x^2 - 2x - x + 2 = x(x-1) - 2(x-1) = (x-2)(x-1)$$

$$x^2 - x - 2 = x^2 - 2x + x - 2 = (x-2)(x+1)$$

MTC: $(x-2)(x-1)(x+1)$

VII. Quy đồng mẫu thức các phân thức

Bài toán 15. Quy đồng mẫu thức các phân thức

a) $\frac{1}{x^5 y}; \frac{7}{12x^3 y^4}$

b) $\frac{1}{x^2 - 5x}; \frac{-3}{10 - 2x}$

c) $\frac{2}{9x^2 - 1}; \frac{4x}{1 - 3x}$

Hướng dẫn: Tìm MTC và dùng tính chất cơ bản của phân thức $\frac{A}{B} = \frac{A \cdot M}{B \cdot M}$.

Lời giải

a) MTC: $12x^5 y^4$

$$\text{Ta có: } \frac{1}{x^5 y} = \frac{12y^3}{12x^5 y^4}; \frac{7}{12x^3 y^4} = \frac{7x^2}{12x^5 y^4}$$

b) $\frac{-3}{10 - 2x} = \frac{3}{2x - 10}$

$$\text{Ta có } x^2 - 5x = x(x-5)$$

$$2x - 10 = 2(x-5)$$

$$\text{MTC: } 2x(x-5)$$

$$\text{Vậy } \frac{1}{x^2 - 5x} = \frac{2}{2x(x-5)}$$

$$\frac{3}{10 - 2x} = \frac{3x}{2x(x-5)}$$

c) $\frac{4x}{1 - 3x} = \frac{-4x}{3x - 1}$

$$\text{MTC: } 9x^2 - 1 = (3x-1)(3x+1)$$

$$\text{Vậy } \frac{-4x}{3x-1} = \frac{-4x(3x+1)}{9x^2 - 1} = \frac{-12x^2 - 4x}{9x^2 - 1}.$$

Bài toán 16. Quy đồng mẫu thức các phân thức:

a) $\frac{3}{x^3 - 1}; \frac{2}{x^2 + x + 1}; \frac{x}{x-1}$

b) $\frac{x^2}{x^3 - 3x^2 y + 3xy^2 - y^3}; \frac{x}{y^2 - xy}$

Lời giải

a) MTC: $x^3 - 1 = (x-1)(x^2 + x + 1)$ (hàng đẳng thức $a^3 - b^3$)

$$\text{Vậy } \frac{2}{x^2 + x + 1} = \frac{2(x-1)}{(x-1)(x^2 + x + 1)} = \frac{2x-2}{x^3 - 1}$$

$$\frac{x}{x-1} = \frac{x(x^2 + x + 1)}{(x-1)(x^2 + x + 1)} = \frac{x^3 + x^2 + x}{x^3 - 1}$$

$$\text{b) } x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3 = (x-y)^3$$

$$\frac{x}{y^2 - xy} = \frac{-x}{xy - y^2} = \frac{-x}{y(x-y)}$$

Vậy MTC: $y(x-y)^3$

$$\text{Ta có: } \frac{-x}{y(x-y)} = \frac{-x(x-y)^2}{y(x-y)^3}$$

$$\frac{x^2}{(x-y)^3} = \frac{x^2y}{y(x-y)^3}$$

Bài toán 17. Quy đồng mẫu thức các phân thức

$$\text{a) } \frac{1}{x^2 + 3x - 10}; \frac{x}{x^2 + 7x + 10}$$

$$\text{b) } \frac{1}{x^2 - 3x + 2}; \frac{1}{x^2 - 2x + 1}; \frac{1}{x^2 - x - 2}$$

Lời giải

$$\text{a) Ta có: } x^2 + 3x - 10 = x^2 + 5x - 2x - 10 = x(x+5) - 2(x+5) = (x+5)(x-2)$$

$$x^2 + 7x + 10 = x^2 + 5x + 2x + 10 = x(x+5) + 2(x+5) = (x+5)(x+2).$$

$$\text{MTC: } (x+5)(x^2 - 4).$$

$$\text{Vậy } \frac{1}{x^2 + 3x - 10} = \frac{x+2}{(x+5)(x-2)(x+2)} = \frac{x+2}{(x+5)(x^2 - 4)}$$

$$\frac{1}{x^2 + 7x + 10} = \frac{x(x-2)}{(x+5)(x+2)(x-2)} = \frac{x^2 - 2x}{(x+5)(x^2 - 4)}$$

$$\text{b) Ta có } x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$$

$$x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$$

$$x^2 - x - 2 = (x-2)(x+1)$$

$$\text{MTC: } (x^2 - 1)(x-2)(x+1).$$

$$\text{Vậy } \frac{1}{x^2 - 3x + 2} = \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)^2(x-2)(x+1)} = \frac{x^2 - 1}{(x-1)^2(x-2)(x+1)}$$

$$\frac{1}{x^2 - 2x + 1} = \frac{(x-2)(x+1)}{(x-1)^2(x-2)(x+1)} = \frac{x^2 - x - 1}{(x-1)^2(x-2)(x+1)}$$

$$\frac{1}{x^2 - x - 2} = \frac{(x-1)^2}{(x-1)^2(x-2)(x+1)}$$

C. BÀI TẬP

6.12. Dùng tính chất cơ bản của phân thức, giải thích vì sao các kết luận đúng

a) $\frac{(x-2)^2}{x^2-2x} = \frac{(x-2)^2}{x}$

b) $\frac{1-x}{-5x+1} = \frac{x-1}{5x-1}$

6.13. Tìm đa thức thích hợp thay cho dấu "?"

$$\frac{y-x}{x-4} = \frac{?}{x-4}$$

6.14. Rút gọn các phân thức sau:

a) $\frac{5x+10}{25x^2+50}$

b) $\frac{45x(3-x)}{15x(x-3)^2}$

c) $\frac{(x^2-1)^2}{(x-1)(x^3+1)}$

6.15. Cho phân thức $P = \frac{x+1}{x^2-1}$

a) Rút gọn phân thức đã cho, kí hiệu Q là phân thức nhận được.

b) Tính giá trị của P và Q tại. So sánh hai kết quả đó.

6.16. Tìm a sao cho hai phân thức sau bằng nhau: $\frac{5x}{x+1}$ và $\frac{ax(x-1)}{(1-x)(x+1)}$

6.17. Quy đồng mẫu thức các phân thức sau:

a) $\frac{1}{x^3-8}$ và $\frac{3}{4-2x}$

b) $\frac{x}{x^2-1}$ và $\frac{1}{x^2+2x+1}$

6.18. Quy đồng mẫu thức các phân thức sau:

a) $\frac{1}{x+2}; \frac{x+1}{x^2-4x+4}$ và $\frac{5}{2-x}$

b) $\frac{1}{3x+3y}; \frac{2x}{x^2-y^2}$ và $\frac{x^2-xy+y^2}{x^2-2xy+y^2}$

6.19. Cho hai phân thức $\frac{9x^2+3x+1}{27x^3-1}$ và $\frac{x^2-4x}{16-x^2}$

a) Rút gọn phân thức đã cho.

b) Quy đồng mẫu thức hai phân thức nhận được ở câu a.

6.20. Tìm A biết: $\frac{A}{x^3+x^2-2x} = \frac{1}{x^2-1}$

6.21. Đưa về cùng mẫu thức:

a) $\frac{3x+2}{x^2-2x+1}$ và $\frac{1}{x^2-1}$

b) $\frac{x+1}{x-1}$ và $\frac{3x}{1-x^2}$

c) $\frac{1}{2x-3}; \frac{1}{3+2x}; \frac{1}{9-4x^2}$

d) $\frac{1}{5x^2-5}; \frac{1}{3x^2-6x+3}; \frac{1}{2x^2+4x+2}$

6.22. Chứng minh hai phân thức bằng nhau

a) $\frac{x^2+5x+6}{x^2+4x+4}$ và $\frac{x+3}{x+2}$

b) $\frac{x^2y+2xy^2+y^3}{2x^2+xy-y^2}$ và $\frac{y(x+y)}{2x-y}$

6.23. Điền vào chỗ trống:

a) $\frac{2x}{y} = \frac{8xy}{\dots}$

b) $\frac{2}{a-b} = \frac{\dots}{b-a}$

c) $\frac{m-3}{m-2} = \frac{3-m}{\dots}$

d) $\frac{4x^2 - 9y^2}{2x-3y} = \frac{2x+3y}{\dots}$

6.24. Rút gọn phân thức:

a) $A = \frac{x^2 - 2xy}{2y^2 - xy}$

b) $B = \frac{a^3 - 2a^2b}{2a^3b^2 - a^4b}$

c) $C = \frac{a^2 - 6a + 9}{3 - a}$

d) $D = \frac{1 - a^2}{a^2 - 2a + 1}$

6.25. Rút gọn phân thức:

a) $A = \frac{a+b}{a^3 + b^3}$

b) $B = \frac{4a^2 + 2a + 1}{8a^3 - 1}$

c) $C = \frac{2ab - b}{8a^3 - 1}$

6.26. Rút gọn phân thức:

a) $A = \frac{a^2 + b^2 - c^2 + 2ab}{a^2 - b^2 + c^2 + 2ac}$

b) $B = \frac{x^3 + x^2y + xy^2}{x^3 - y^3}$

c) $C = \frac{2x^3 + 11x^2 + 12x - 9}{2x^3 + 5x^2 - 3x}$

6.27. Rút gọn phân thức:

a) $A = \frac{x^2 - 5x + 4}{x^3 - 1}$

b) $B = \frac{x^2 + 3x + 2}{x^3 + 1}$

c) $C = \frac{x^2 + 4x + 3}{x^3 + 27}$

6.28. Cho $x - y = 5$. Chứng minh rằng $\frac{x-3y}{5-2y} = 1$

6.29. Tìm mẫu thức chung của các phân thức:

a) $\frac{1}{x-y}; \frac{1}{x^2-y^2}; \frac{1}{x^3-y^3}$

b) $\frac{1}{x+y}; \frac{1}{x^3+y^3}; \frac{1}{x(x^2-xy+y^2)}$

c) $\frac{1}{a^2-4}; \frac{1}{a^2-8}; \frac{1}{a+2}$

6.30. Quy đồng mẫu thức các phân thức:

a) $\frac{3a}{2a-3}; \frac{4a}{2a+3}; \frac{5b}{4a^2c-9c}$

b) $\frac{1}{x+2}; \frac{x+1}{x^3+8}; \frac{x+2}{x^2-2x+4}$

c) $\frac{4b}{b^2-2bc+c^2}; \frac{2a}{c-b}; \frac{1}{4ac+4ab}$

6.31. Quy đồng mẫu thức các phân thức:

a) $\frac{1}{4xy^2}$ và $\frac{5}{6x^2y}$

b) $\frac{9}{4x^2-36}$ và $\frac{1}{x^2+6x+9}$

6.32. Cho phân thức $P = \frac{x^2 - 4x}{(x+2)^2}$

- Viết điều kiện xác định của phân thức và tìm tất cả các giá trị của x thỏa mãn điều kiện này.
- Rút gọn phân thức P
- Tính giá trị của phân thức đã cho tại $x = 98$.

- 6.33.** Cho hai phân thức $\frac{x^2 + 5x}{(x-10)(x^2 + 10x + 25)}$ và $\frac{x^2 + 10x}{x^4 - 100x^2}$
- Rút gọn hai phân thức đã cho. Kí hiệu P và Q là hai phân thức nhận được.
 - Quy đồng mẫu thức hai phân thức P và Q .
- 6.34.** Lúc 6 giờ sáng, bác Vinh lái ôtô xuất phát từ Hà Nội đi huyện Tĩnh Gia (Thanh Hóa). Khi đến Phủ Lý (Hà Nam), cách Hà Nội khoảng 60km , bác Vinh dừng lại ăn sáng trong 20 phút. Sau đó, bác Vinh tiếp tục đi về Tĩnh Gia và phải tăng vận tốc thêm 10km/h để đến nơi đúng giờ dự định.
- Gọi $x(\text{km/h})$ là vận tốc ôtô đi trên đường Hà Nội – Phủ Lý. Hãy viết các phân thức biểu thị thời gian bác Vinh chạy xe trên các đường Hà Nội – Phủ Lý và Phủ Lý – Tĩnh Gia, biết rằng quãng đường Hà Nội – Tĩnh Gia có chiều dài khoảng 200km
 - Nếu vận tốc ôtô đi trên quãng đường Hà Nội – Phủ Lý là 60km/h thì bác Vinh đến Tĩnh Gia lúc mấy giờ?
- 6.35.** Để loại bỏ x (tính theo %) chất gây ô nhiễm không khí từ khí thải của một nhà máy, ước tính cần chi phí là $\frac{1,7x}{100-x}$ (tỉ đồng)
- Nếu muốn loại bỏ 90% chất gây ô nhiễm từ khí thải của một nhà máy thì cần chi phí là bao nhiêu?
 - Viết điều kiện xác định của phân thức $\frac{1,7x}{100-x}$. Hỏi có thể loại bỏ được 100% chất thải ô nhiễm từ khí thải nhà máy không?

↔ HẾT ↔

HƯỚNG DẪN GIẢI

6.12. a) Ta có $\frac{(x-2)^3}{x^2-2x} = \frac{(x-2)^3}{x(x-2)} = \frac{(x-2)^2}{x}$

b) $\frac{1-x}{-5x+1} = \frac{-(x-1)}{-(5x-1)} = \frac{x-1}{5x-1}$

6.13. ? $= \frac{(y-x)(x-4)}{4-x} = \frac{-(x-y)(x-4)}{-(x-4)} = x-y$

6.14. a) $\frac{5x+10}{25x^2+50} = \frac{5(x+2)}{25(x^2+2)} = \frac{x+2}{5(x^2+2)}$

b) $\frac{45x(3-x)}{15x(x-3)^3} = \frac{-45x(x-3)}{15x(x-3)^3} = \frac{3}{(x-3)^2}$

c) $\frac{(x^2-1)^2}{(x-1)(x^3+1)} = \frac{(x-1)^2(x+1)^2}{(x+1)^2(x^2-x+1)} = \frac{(x-1)^2}{x^2-x+1}$

6.15. a) $P = \frac{x+1}{(x-1)(x+1)} = \frac{1}{x-1}$

Ta có $Q = \frac{1}{x-1}$

b) Với $x=11 \Rightarrow P = \frac{11+1}{11^2-1} = \frac{12}{120} = \frac{1}{10}$

$Q = \frac{1}{11-1} = \frac{1}{10}$

Vậy, tại $x=11$, giá trị của phân thức P và Q bằng nhau và bằng $\frac{1}{10}$

6.16. Hai phân thức sau bằng nhau khi:

$$\begin{aligned} 5x(1-x)(1+x) &= ax(x-1)(x+1) \\ \Rightarrow -5x(x-1)(x+1) &= ax(x-1)(x+1) \\ \Rightarrow a &= -5 \end{aligned}$$

6.17. a) $x^3 - 8 = -2(x-2)$

MTC: $-2(x^3 - 8)$

Ta có: $\frac{1}{x^3-8} = \frac{-2}{-2(x^3-8)}$; $\frac{3}{4-2x} = \frac{3(x^2+2x+4)}{-2(x^3-8)}$

b) $x^2 - 1 = (x-1)(x+1);$

$x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2$

MTC: $(x-1)(x+1)^2$

Ta có: $\frac{x}{x^2-1} = \frac{x(x+1)}{(x-1)(x+1)^2}; \frac{1}{x^2+2x+1} = \frac{x-1}{(x-1)(x+1)^2}.$

6.18. a) $x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2$

MTC: $(x+2)(x-2)^2$

Ta có: $\frac{1}{x+2} = \frac{(x+1)(x+2)}{(x+2)(x-2)^2};$

$$\frac{x+1}{x^2-4x+4} = \frac{(x+1)(x+2)}{(x+2)(x-2)^2};$$

$$\frac{5}{2-x} = \frac{-5}{(x-2)} = \frac{-5(x+12)(x-2)}{(x+2)(x-2)^2}$$

b) $3x+3y = 3(x+y);$

$$x^2 - y^2 = (x-y)(x+y)$$

$$x^2 - 2xy + y^2 = (x-y)^2$$

Em hãy viết ba phân thức sau khi quy đồng mẫu thức.

6.19. a) $\frac{9x^2+3x+1}{27x^3-1} = \frac{9x^2+3x+1}{(3x-1)(9x^2+3x+1)} = \frac{1}{3x-1};$

$$\frac{x^2-4x}{16-x^2} = \frac{x(x-4)}{-(x^2-16)} = \frac{x(x-4)}{-(x-4)(x+4)} = \frac{-x}{x+4}$$

b) Xét $\frac{1}{3x-1}$ và $\frac{-x}{x+4}$

MTC: $(3x-1)(x+4)$

Vậy $\frac{1}{3x-1} = \frac{x+4}{(3x-1)(x+4)};$

$$\frac{-x}{x+4} = \frac{-x(3x-1)}{(3x-1)(x+4)}$$

6.20. $x^3 + x^2 - 2x = x(x-1)(x+2)$

$$\Rightarrow \frac{1}{x+2} = \frac{x(x-1)}{x(x-1)(x+2)} = \frac{x^2-x}{x^3+x^2-2x}$$

Theo giả thiết ta có: $\frac{A}{x^3+x^2-2x} = \frac{x^2-x}{x^3+x^2-2x}$

$$\Rightarrow P = x^2 - x$$

6.21. a) MTC $(x+1)(x-1)^2$

$$\frac{3x+2}{x^2-2x+1} = \frac{(3x+2)(x+1)}{(x+1)(x-1)^2} = \frac{3x^2+5x+2}{(x+1)(x-1)^2}$$

$$\frac{1}{x^2 - 1} = \frac{x-1}{(x+1)(x-1)^2}$$

b) MTC: $1-x^2$ là mẫu thức của phân thức $\frac{3x}{1-x^2}$

$$\frac{x+1}{x-1} = \frac{-(x+1)}{1-x} = \frac{-(x+1)^2}{1-x^2}$$

c) MTC: $9-4x^2$ là mẫu thức của phân thức $\frac{1}{9-4x^2}$

$$\frac{1}{2x-3} = \frac{-1}{3-2x} = \frac{-(3+2x)}{9-4x^2}$$

$$\frac{1}{3+2x} = \frac{3-2x}{9-4x^2}$$

d) Ta có $5x^2 - 5 = 5(x^2 - 1)$;

$$3x^2 - 6x + 3 = 2(x-1)^2$$

$$2x^2 + 4x + 2 = 2(x^2 + 2x + 1) = 2(x+1)^2$$

MTC: $30(x^2 - 1)^2$

$$\text{Vậy } \frac{1}{5x^2 - 5} = \frac{6(x^2 - 1)}{30(x^2 - 1)^2}$$

$$\frac{1}{3x^2 - 6x + 3} = \frac{10(x+1)^2}{30(x^2 - 1)^2}$$

$$\frac{1}{2x^2 + 4x + 2} = \frac{15(x-1)^2}{30(x^2 - 1)^2}$$

6.22. a) Ta có $\frac{x^2 + 5x + 6}{x^2 + 4x + 4} = \frac{(x+3)(x+2)}{(x+2)^2} = \frac{x+3}{x+2}$

b) Ta có $\frac{x^2y + 2xy^2 + y^3}{2x^2 + xy - y^2} = \frac{y(x^2 + 2xy + y^2)}{x^2 + xy + x^2 - y^2} = \frac{y(x+y)^2}{(x+y)(x-y)} = \frac{y(x+y)}{2x-y}$

6.23. a) $\frac{2x}{y} = \frac{2x \cdot 4y}{y \cdot 4y} = \frac{8xy}{4y^2}$. Vậy chỗ “...” là " $4y^2$ "

b) $\frac{2}{a-b} = \frac{-2}{-(a-b)} = \frac{-2}{b-a}$. Vậy chỗ “...” là " -2 "

c) $\frac{m-3}{m-2} = \frac{-(m-3)}{-(m-2)} = \frac{3-m}{2-m}$ Vậy chỗ “...” là " $2-m$ "

d) Đáp số: "1"

6.24. a) $A = \frac{x^2 - 2xy}{2y^2 - xy} = \frac{x(x-2y)}{-y(x-2y)} = -\frac{x}{y}$

$$\text{b)} B = \frac{a^3 - 2a^2b}{2a^3b^2 - a^4b} = \frac{a^2(a - 2b)}{a^3b(2b - a)} = \frac{-a^2(2b - a)}{a^3b(2b - a)} = -\frac{1}{ab}$$

$$\text{c)} C = \frac{a^2 - 6a + 9}{3 - a} = \frac{(a - 3)^2}{3 - a} = 3 - a$$

$$\text{6.25. a)} A = \frac{a + b}{a^3 + b^3} = \frac{a + b}{(a + b)(a^2 - ab + b^2)} = \frac{1}{a^2 - ab + b^2}$$

$$\text{b)} B = \frac{4a^2 + 2a + 1}{8a^3 - 1} = \frac{4a^2 + 2a + 1}{(2a - 1)(4a^2 + 2a + 1)} = \frac{1}{2a - 1}$$

$$\text{c)} C = \frac{2ab - b}{8a^3 - 1} = \frac{b(2a - 1)}{(2a - 1)(4a^2 + 2a + 1)} = \frac{b}{4a^2 + 2a + 1}$$

$$\text{6.26. a)} A = \frac{a^2 + b^2 - c^2 + 2ab}{a^2 - b^2 + c^2 + 2ab} = \frac{(a - b)^2 - c^2}{(a + c)^2 - b^2}$$

$$= \frac{(a - b + c)(a - b - c)}{(a + b + c)(a + c - b)} = \frac{a - b - c}{a + b + c}$$

$$\text{b)} B = \frac{x^3 + x^2y + xy^2}{x^3 - y^3} = \frac{x(x^2 + xy + y^2)}{(x - y)(x^2 + xy + y^2)} = \frac{x}{x - y}$$

$$\text{c)} C = \frac{2x^3 + 11x^2 + 12x - 9}{x^3 - y^3} = \frac{(2x - 1)(x + 3)^2}{x(x - 1)(x + 3)} = \frac{x + 3}{x}$$

$$\text{6.27. a)} A = \frac{x^2 - 5x + 4}{x^3 - 1} = \frac{(x - 1)(x - 4)}{(x - 1)(x^2 + x + 1)} = \frac{x - 4}{x^2 + x + 1}$$

$$\text{b)} B = \frac{x^2 + 3x + 2}{x^3 + 1} = \frac{(x + 1)(x + 2)}{(x + 1)(x^2 - x + 1)} = \frac{x + 2}{x^2 - x + 1}$$

$$\text{c)} C = \frac{x^2 + 4x + 3}{x^3 + 27} = \frac{(x + 1)(x + 3)}{(x + 3)(x^2 + 3x + 9)} = \frac{x + 1}{x^2 + 3x + 9}$$

6.28. Ta có $x - y = 5 \Rightarrow x = 5 + y$

$$(1) \Rightarrow \frac{x - 3y}{5 - 2y} = \frac{y + 5 - 3y}{5 - 2y} = \frac{5 - 2y}{5 - 2y} = 1 (\text{đpcm})$$

6.29.

$$\text{a) Ta có: } x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$$

$$x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$$

$$\text{Vậy MTC: } (x^2 - y^2)(x^2 + xy + y^2)$$

$$\text{b) Ta có } x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$$

$$\text{Vậy MTC: } x(x + y)(x^2 - xy + y^2)$$

c) Ta có $a^2 - 4 = (a-2)(a+2)$

$$a^3 - 8 = (a-2)(a^2 + 2a + 4)$$

Vậy MTC: $(a+2)(a^3 - 8)$

6.30. a) MTC: $c(4a^2 - 9)$ (là mẫu của phân thức $\frac{5b}{4a^2c - 9c}$)

$$* \frac{3a}{2a-3} = \frac{3ac(2a+3)}{c(4a^2-9)}$$

$$* \frac{4a}{2a+3} = \frac{4ac(2a-3)}{c(4a^2-9)}$$

b) MTC: $x^3 + 8$ (là mẫu của phân thức $\frac{x+1}{x^3+8}$)

$$* \frac{1}{x+2} = \frac{x^2 - 2x + 4}{x^3 + 8}$$

$$* \frac{x+2}{x^2 - 2x + 4} = \frac{(x+2)^2}{x^3 + 8}$$

c) Ta có $b^2 - 2bc + c^2 = (b-c)^2 = (c-b)^2$

$$4ac + 4ab = 4a(c+b)$$

MTC: $4a(c-b)^2(c+b)$

$$\bullet \frac{4b}{b^2 - 2bc + c^2} = \frac{16ab(c+b)}{4a(c+b)(c-b)^2}$$

$$\bullet \frac{2a}{c-b} = \frac{8a^2(c+b)(c-b)}{4a(c+b)(c-b)^2}$$

$$\bullet \frac{1}{4ac + 4ab} = \frac{(c-b)^2}{4a(c+b)(c-b)^2}$$

6.31. a) MTC: $12x^2y^2$

$$\frac{1}{4xy^2} = \frac{3x}{12x^2y^2}; \frac{5}{6x^2y} = \frac{10y}{12x^2y^2}$$

b) $4x^2 - 36 = 4(x^2 - 9) = 4(x+3)(x-3);$

$$x^2 + 6x + 9 = (x+3)^2$$

MTC: $4(x-3)(x+3)^2$

$$\frac{9}{4x^2 - 36} = \frac{9(x+3)}{4(x-3)(x+3)^2}; \frac{1}{x^2 + 6x + 9} = \frac{4(x-3)}{4(x-3)(x+3)^2}$$

6.32. a) Điều kiện xác định: $(x+2)^2 \neq 0 \Rightarrow x+2 \neq 0 \Rightarrow x \neq -2$

$$\text{b)} P = \frac{x(x^2 - 4)}{(x+2)^2} = \frac{x(x-2)(x+2)}{(x+2)^2} = \frac{x(x-2)}{x+2} = \frac{x^2 - 2x}{x+2}$$

$$\text{c) Thay } x = 98 \text{ và biểu thức } P = \frac{x^2 - 2x}{x+2}, \text{ ta có: } P = \frac{98^2 - 2 \cdot 98}{98+2} = \frac{9408}{100} = 94,08$$

$$6.33. \quad \text{a)} \frac{x(x+5)}{(x-10)(x+5)^2} = \frac{x}{(x-10)(x+5)}$$

$$\frac{x(x+10)}{x^2(x-10)(x+10)} = \frac{1}{x(x-10)}$$

$$\text{Ta có: } P = \frac{x}{(x-10)(x+5)}; Q = \frac{1}{x(x-10)}$$

$$\text{MTC: } x(x-10)(x+5)$$

$$P = \frac{x^2}{x(x-10)(x+5)}; Q = \frac{x+5}{x(x-10)(x+5)}$$

6.34. a) Phân thức biểu thị thời gian bác Vinh chạy xe trên quãng đường Hà Nội – Phủ Lý:

$$\text{Ta có: } \frac{60}{x} \text{ (h)}$$

Quãng đường Phủ Lý – Tĩnh Gia : $200 - 600 = 140$ (km)

Vận tốc ô tô chạy trên quãng đường Phủ Lý – Tĩnh Gia : $x + 10$ (km/h)

Thời gian ô tô chạy trên quãng đường Phủ Lý – Tĩnh Gia : $\frac{140}{x+10}$ (h).

c) Thời gian bác Vinh đi từ Hà nội đến Tĩnh Gia:

$$\frac{60}{x} + \frac{1}{3} + \frac{140}{x+10} \text{ (20 phút} = \frac{1}{3} \text{ giờ)}$$

Thay $x = 60$ và biểu thức trên, ta có: $\frac{60}{60} + \frac{1}{3} + \frac{140}{70} = 1 + \frac{1}{3} + 2 = 3\frac{1}{3}$ (h)

$$3\frac{1}{3}(h) = 3h20 \text{ phút}$$

$$6.35. \quad \text{a) Thay } x = 90\% \text{ vào biểu thức } \frac{1,7x}{100-x}, \text{ ta có: } \frac{1,7 \cdot 90\%}{100 - 90\%} = 0,015439.$$

Vậy chi phí là 0,015439 tỉ đồng.

b) Điều kiện xác định của phân thức: $100 - x \neq 0 \Rightarrow x \neq 100$.

Khi $x = 100\%$, ta có: $100\% \neq 100$

Vậy có thể loại bỏ được 100% chất thải gây ô nhiễm từ khí thải nhà máy.

BÀI 23. PHÉP CỘNG VÀ PHÉP TRỪ PHÂN THỨC ĐẠI SỐ

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Cộng hai phân thức cùng mẫu

Quy tắc cộng hai phân thức cùng mẫu

Muốn cộng hai phân thức cùng mẫu, ta cộng các tử thức với nhau và giữ nguyên mẫu thức

$$\frac{A}{M} + \frac{B}{M} = \frac{A+B}{M}$$

Chú ý: Kết quả của phép cộng hai phân thức được gọi là tổng của hai phân thức đó.Ta thường viết tổng dưới dạng rút gọn.

2. Cộng hai phân thức khác mẫu

Quy tắc cộng hai phân thức khác mẫu

Muốn cộng hai phân thức có mẫu thức khác nhau, ta quy đồng mẫu thức rồi cộng các phân thức có cùng mẫu thức vừa tìm được.

3. Trừ hai phân thức

Quy tắc trừ hai phân thức mẫu

- Muốn trừ hai phân thức có cùng mẫu thức ta trừ các tử thức và giữ nguyên mẫu thức.
- Muốn trừ hai phân thức có mẫu thức khác nhau, ta quy đồng mẫu thức rồi trừ các phân thức cùng mẫu thức vừa tìm được.

Chú ý: Cũng như phép trừ phân số, ta có thể chuyển phép trừ phân thức thành phép cộng phân thức như sau: $\frac{A}{B} - \frac{C}{D} = \frac{A}{B} + \frac{-C}{D}$

4. Cộng trừ nhiều phân thức đại số

Cách cộng trừ nhiều phân thức

Vì trừ một phân thức cũng là cộng với phân thức đối của phân thức đó nên các biểu thức gồm các phép tính cộng, trừ phân thức cũng có thể xem là chỉ gồm các phép cộng phân thức.

Cũng như phép cộng phân số, phép cộng phân thức cũng có tính chất giao hoán,kết hợp. Vì vậy, khi làm tính với một biểu thức chỉ gồm các phép cộng phân thức tacó thể đổi chỗ, nhóm (kết hợp) các số hạng một cách hợp lý.

Rút gọn biểu thức có dấu ngoặc

Cũng như khi tính toán với phân số, khi rút gọn một biểu thức có dấu ngoặc, ta có thể bỏ các dấu ngoặc bằng cách sử dụng quy tắc dấu ngoặc sau:

- Nếu trước dấu ngoặc có dấu “+” thì bỏ dấu ngoặc và giữ nguyên các số hạng.
- Nếu trước dấu ngoặc có dấu “-“ thì bỏ dấu ngoặc và đổi dấu các số hạng trong dấu ngoặc.

B. PHÂN LOẠI CÁC BÀI TẬP

I. Cộng hai phân thức có cùng mẫu số:

Bài toán 1. Cộng hai phân thức:

$$a) \frac{5xy-4y}{2x^2y^3} + \frac{3xy+4y}{2x^2y^3} \quad b) \frac{x^2-x}{x-2} + \frac{4-3x}{x-2} \quad c) \frac{a+2b}{3a-b} + \frac{2a-5b}{b-3a}$$

Hướng dẫn: Cộng các tử thức và giữ nguyên mẫu thức.

Lời giải

$$a) \text{Ta có: } \frac{5xy-4y}{2x^2y^3} + \frac{3xy+4y}{2x^2y^3} = \frac{5xy-4y+3xy+4y}{2x^2y^3} = \frac{8xy}{2x^2y^3} = \frac{4}{xy^2}$$

Chú ý: Thực hiện phép cộng phân thức xong, ta cần phải rút gọn(nếu có)

$$b) \text{Ta có: } \frac{x^2-x}{x-2} + \frac{4-3x}{x-2} = \frac{x^2-x+4-3x}{x-2} = \frac{x^2-4x+4}{x-2} = \frac{(x-2)^2}{x-2} = x-2$$

$$c) \text{Ta có: } \frac{a+2b}{3a-b} + \frac{2a-5b}{b-3a} = \frac{a+2b}{3a-b} + \frac{5b-2a}{3a-b} = \frac{a+2b+5b-2a}{3a-b} = \frac{7b-a}{3a-b}$$

$$\text{Chú ý: } \frac{2a-5b}{b-3a} = \frac{-(2a-5b)}{-(b-3a)} = \frac{5b-2a}{3a-b}$$

Bài toán 2. Cộng các phân thức

$$a) \frac{ab}{2a-b} + \frac{a^2-b}{b-2a}$$

$$b) \frac{3x+1}{x^2-3x+1} + \frac{x^2-6x}{x^2-3x+1}$$

$$c) \frac{x^2-2}{x(x-1)^2} + \frac{2-x}{x(x-1)^2}$$

Lời giải

$$a) \text{Ta có } \frac{ab}{2a-b} + \frac{a^2-b}{b-2a} = \frac{ab}{2a-b} + \frac{-(a^2-b)}{-(b-2a)} = \frac{ab}{2a-b} + \frac{b-a^2}{2a-b} = \frac{ab+b-a^2}{2a-b}$$

$$b) \text{Ta có } \frac{3x+1}{x^2-3x+1} + \frac{x^2-6x}{x^2-3x+1} = \frac{3x+1+x^2-6x}{x^2-3x+1} = \frac{x^2-3x+1}{x^2-3x+1} = 1$$

$$c) \text{Ta có } \frac{x^2-2}{x(x-1)^2} + \frac{2-x}{x(x-1)^2} = \frac{x^2-2+2-x}{x(x-1)^2} = \frac{x^2-x}{x(x-1)^2} = \frac{x(x-1)}{x(x-1)^2} = \frac{1}{x-1}$$

II. Cộng hai phân thức khác mẫu thức**Bài toán 3.** Cộng các phân thức:

$$a) \frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} \quad b) \frac{3}{m^2} + \frac{4}{mn} \quad c) \frac{3c}{4a^3b} + \frac{5}{6ab^3} \quad d) \frac{b}{c} + \frac{b}{c^2d} + \frac{b}{cd^2}$$

Hướng dẫn giải: Tìm MTC của các phân thức và đưa về bài toán cộng các phân thức có cùng mẫu thức.

Lời giải

a) MTC: abc

$$\text{Vậy } \frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} = \frac{c}{abc} + \frac{a}{abc} = \frac{a+c}{abc}$$

b) MTC: m^2n

$$\text{Vậy } \frac{3}{m^2} + \frac{4}{mn} = \frac{3n}{m^2n} + \frac{4m}{m^2n} = \frac{3n+4m}{m^2n}$$

c) MTC: c^2d^2

$$\text{Vậy } \frac{b}{c} + \frac{b}{c^2d} + \frac{b}{cd^2} = \frac{bcd^2}{c^2d^2} + \frac{bd}{c^2d^2} + \frac{bc}{c^2d^2} = \frac{bcd^2 + bd + bc}{c^2d^2}$$

Bài toán 4. Cộng các phân thức

a) $\frac{1}{x^2 - x} + \frac{3}{x^2 - 1}$

b) $\frac{1}{a^2 + 4a + 4} + \frac{4}{a^3 + 2a^2}$

c) $\frac{1}{x(x-3)} + \frac{1}{x(x+3)}$

d) $\frac{a}{1-b^2} + \frac{4}{1+b}$

e) $\frac{2}{x^2 - 9} + \frac{1}{x+3}$

Lời giải

a) MTC: $x(x^2 - 1)$

$$\text{Vậy } \frac{1}{x^2 - x} + \frac{3}{x^2 - 1} = \frac{x+1}{x(x^2 - 1)} + \frac{3x}{x(x^2 - 1)} = \frac{x+1+3x}{x(x^2 - 1)} = \frac{4x+1}{x(x^2 - 1)}$$

b) $a^2 + 4a + 4 = (a+2)^2; a^3 + 2a^2 = a^2(a+2)$

MTC: $a^2(a+2)^2$

$$\text{Vậy } \frac{1}{a^2 + 4a + 4} + \frac{4}{a^3 + 2a^2} = \frac{a^2}{a^2(a+2)^2} + \frac{4(a+2)}{a^2(a+2)^2} = \frac{a^2 4a + 8}{a^2(a+2)^2}$$

c) MTC: $x(x^2 - 9)$

$$\text{Vậy } \frac{1}{x(x-3)} + \frac{1}{x(x+3)} = \frac{x+3}{x(x^2 - 9)} + \frac{x-3}{x(x^2 - 9)} = \frac{x+3+x-3}{x(x^2 - 9)} = \frac{2x}{x(x^2 - 9)} = \frac{2x}{x^2 - 9}$$

d) MTC: $1-b^2$

$$\text{Vậy } \frac{a}{1-b^2} + \frac{4}{1+b} = \frac{a}{1-b^2} + \frac{1-b}{1-b^2} = \frac{a+1-b}{1-b^2}$$

e) MTC: $x^2 - 9$

$$\text{Vậy } \frac{2}{x^2-9} + \frac{1}{x+3} = \frac{2}{x^2-9} + \frac{x-3}{x^2-9} = \frac{2+x-3}{x^2-9} = \frac{x-1}{x^2-9}$$

Bài toán 5. Cộng các phân thức:

$$\text{a)} \frac{4}{x+2} + \frac{2}{x-2} + \frac{5x-6}{4-x^2}$$

$$\text{b)} \frac{1-3x}{2x} + \frac{3x-2}{2x-1} + \frac{3x-2}{2x-4x^2}$$

$$\text{c)} \frac{1}{x^2+6x+9} + \frac{1}{6x-x^2-9} + \frac{x}{x^2-9}$$

$$\text{d)} \frac{x^2+2}{x^3-1} + \frac{2}{x^2+x+1} + \frac{1}{1-x}$$

$$\text{Hướng dẫn: } \frac{A}{B} = \frac{-A}{-B}$$

Lời giải

$$\text{a)} \frac{4}{x+2} + \frac{2}{x-2} + \frac{5x-6}{4-x^2}$$

$$= \frac{4}{x+2} + \frac{2}{x-2} + \frac{-(5x-6)}{-(4-x^2)}$$

$$= \frac{4(x-2) + 2(x+2) + 6 - 5x}{x^2 - 4}$$

$$= \frac{x+2}{x^2-4} = \frac{1}{x-2}$$

$$\text{b)} \frac{1-3x}{2x} + \frac{3x-2}{2x-1} + \frac{3x-2}{2x-4x^2}$$

$$= \frac{1-3x}{2x} + \frac{3x-2}{2x-1} + \frac{-(3x-2)}{-(2x-4x^2)}$$

$$= \frac{1-3x}{2x} + \frac{3x-2}{2x-1} + \frac{2-3x}{4x^2-2x}$$

$$= \frac{(1-3x)(2x-1) + (3x-2)2x + 2-3x}{2x(2x-1)}$$

$$= \frac{2x-1-6x^2+3x+6x^2-4x+2-3x}{2x(2x-1)}$$

$$= \frac{1-2x}{2x(2x-1)} = \frac{-(2x-1)}{2x(2x-1)} = -\frac{1}{2x}$$

$$\text{c)} \frac{1}{x^2+6x+9} + \frac{1}{6x-x^2-9} + \frac{x}{x^2-9}$$

$$= \frac{1}{x^2+6x+9} + \frac{-1}{x^2-6x+9} + \frac{x}{x^2-9}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{(x+3)^2} + \frac{-1}{(x-3)^2} + \frac{x}{x^2-9} \\
&= \frac{(x-3)^2 - (x+3)^2 + x(x^2-9)}{(x+3)^2(x-3)^2} \\
&= \frac{x^2 - 6x + 9 - x^2 - 6x - 9 + x^3 - 9x}{(x+3)^2(x-3)^2} \\
&= \frac{x^3 - 21x}{(x+3)^2(x-3)^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d) & \frac{x^2+2}{x^3-1} + \frac{2}{x^2+x+1} + \frac{1}{1-x} \\
&= \frac{x^2+2+2(x-1)+(-1)(x^2+x+1)}{x^3-1} \\
&= \frac{x^2+2+2x-2-x^2-x-1}{x^3-1} \\
&= \frac{x-1}{x^3-1} \\
&= \frac{1}{x^2+x+1}
\end{aligned}$$

Bài toán 6. Cộng các phân thức:

$$a) \frac{1}{(x+1)(x+2)} + \frac{2x}{x^2+4x+3} + \frac{1}{x^2+4x+6}$$

$$b) \frac{1}{x^2+5x+6} + \frac{1}{x^2+7x+10} + \frac{1}{x^2+3x+2}$$

Hướng dẫn: Phân tích các mẫu thức thành nhân tử và tìm MTC.

Lời giải

$$a) x^2+4x+3 = (x+1)(x+3)$$

$$x^2+5x+6 = (x+2)(x+3)$$

$$\text{Vậy } \frac{1}{x^2+5x+6} + \frac{1}{x^2+7x+10} + \frac{1}{x^2+3x+2}$$

$$= \frac{x+3+2x(x+2)+x+1}{(x+1)(x+2)(x+3)}$$

$$= \frac{2x^2 + 6x + 4}{(x+1)(x+2)(x+3)}$$

$$= \frac{2(x+1)(x+2)}{(x+1)(x+2)(x+3)} = \frac{2}{x+3}$$

b) $x^2 + 5x + 6 = (x+2)(x+3)$

$$x^2 + 7x + 10 = (x+2)(x+5)$$

$$x^2 + 3x + 2 = (x+1)(x+2)$$

MTC: $(x+1)(x+2)(x+3)(x+5)$

$$\frac{1}{x^2 + 5x + 6} + \frac{1}{x^2 + 7x + 10} + \frac{1}{x^2 + 3x + 2}$$

$$= \frac{(x+1)(x+5) + (x+1)(x+3) + (x+3)(x+5)}{(x+1)(x+2)(x+3)(x+5)}$$

$$= \frac{3x^2 + 18x + 23}{(x+1)(x+2)(x+3)(x+5)}$$

III. Chứng minh đẳng thức:

Bài toán 7. Chứng minh:

a) $\frac{1}{x} + \frac{1}{x+5} + \frac{x-5}{x(x+5)} = \frac{3}{x+5}$

b) $\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} + \frac{2}{1+x^2} + \frac{4}{1+x^4} + \frac{8}{1+x^8} = \frac{16}{1-x^{16}}$

Hướng dẫn: Thực hiện phép cộng các phân thức ở vế trái.

Lời giải

a) Biến đổi vế trái (VT) ta có

MTC: $x(x+5)$

VT: $\frac{(x+5)+x+x-5}{x(x+5)} = \frac{3x}{x(x+5)} = \frac{3}{x+5}$ (đpcm)

b) Ta có

$$VT = \left(\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} \right) + \frac{2}{1+x^2} + \frac{4}{1+x^4} + \frac{8}{1+x^8}$$

$$= \frac{1+x+1-x}{1-x^2} + \frac{2}{1+x^2} + \frac{4}{1+x^4} + \frac{8}{1+x^8}$$

$$\begin{aligned}
& : VT = \frac{8}{1-x^8} + \frac{8}{1+x^8} = \frac{8}{1-x^{16}} \\
& = \left(\frac{2}{1-x^2} + \frac{2}{1+x^2} \right) + \frac{4}{1+x^4} + \frac{8}{1+x^8} \\
& = \left(\frac{4}{1-x^4} + \frac{4}{1+x^4} \right) + \frac{8}{1+x^8} \\
& = \frac{8}{1-x^8} + \frac{8}{1+x^8} = \frac{8}{1-x^{16}} \text{ (đpcm)}
\end{aligned}$$

Bài toán 8. Chứng minh:

$$\begin{aligned}
a) \quad & \frac{b}{(a-b)(b-c)} + \frac{c}{(b-c)(c-a)} + \frac{a}{(c-b)(a-b)} = 0 \\
b) \quad & \frac{ab}{(a-c)(b-c)} + \frac{bc}{(b-a)(c-a)} + \frac{ca}{(c-b)(a-b)} = 1
\end{aligned}$$

Lời giải

a) MTC: $(a-b)(b-c)(c-a)$

$$\text{Ta có } \frac{b(c-a)+c(a-b)+a(b-c)}{(a-b)(b-c)(c-a)} = \frac{bc-ab+ca-bc+ab-ac}{(a-b)(b-c)(c-a)} = 0$$

b) Ta có

$$\begin{aligned}
& \frac{ab}{(a-c)(b-c)} + \frac{bc}{(b-a)(c-a)} + \frac{ca}{(c-b)(a-b)} \\
& = \frac{-ab(a-b)-bc(b-c)-ca(c-a)}{(a-b)(b-c)(c-a)} \\
& = \frac{-a^2b+ab^2-b^2c+bc^2-c^2a+a^2c}{(a-b)(b-c)(c-a)}
\end{aligned}$$

Phân tích tử thức thành nhân tử: Đặt tử thức là P . Sắp xếp theo biến a ta có

$$P = -a^2(b-c) + a(b^2 - c^2) - (b^2c - bc^2)$$

$$= (b-c)[-a^2 + a(b+c) - bc]$$

$$= (b-c)(-a^2 + ab + ac - bc)$$

$$= (b-c)(-b)(c-a) + a(c-a)$$

$$= (b-c)(c-a)(a-b)$$

Đây chính là, mẫu thức. Vậy phân thức ở vế trái luôn bằng 1

Bài toán 9. Cho $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{a+b+c}$. Chứng minh rằng $\frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3} = \frac{1}{a^3 + b^3 + c^3}$ (*)

Hướng dẫn: Biến đổi đẳng thức ở giả thiết, ta tìm được $a = -b$ hoặc $b = -c$ hoặc $c = -a$ và thế vào hai vế của đẳng thức cần chứng minh.

Lời giải

$$\text{Ta có } \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{a+b+c}$$

$$\Rightarrow \frac{bc + ac + ab}{abc} = \frac{1}{a+b+c}$$

$$\Rightarrow bc(a+b+c) + ac(a+b+c) + ab(a+b+c) = abc$$

$$\Rightarrow abc + b^2c + c^2a + a^2b + bc^2 + ab^2 = 0$$

$$\Rightarrow 2abc + b^2c + c^2a + a^2b + a^2c + bc^2 + ab^2 = 0$$

$$\Rightarrow a^2(b+c) + a(2bc + b^2 + c^2) + bc(b+c) = 0 \text{ (sắp theo biến } a \text{)}$$

$$\Rightarrow (b+c)(a^2 + ab + ca + bc) = 0$$

$$\Rightarrow (b+c)(c+a)(a+b) = 0$$

$$\Rightarrow a = -b \text{ hoặc } b = -c \text{ hoặc } c = -a$$

Trường hợp 1: $a = -b$. Thay a vào (*) ta có

$$\frac{1}{(-b)^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3} = \frac{1}{(-b)^3 + b^3 + c^3} \text{ hay } \frac{1}{c^3} = \frac{1}{c^3} \text{ luôn đúng}$$

Trường hợp 2;3: $b = -c$ hoặc $c = -a$ chứng minh tương tự.

Vậy đẳng thức (*) luôn đúng.

Tổng quát hơn, ta còn chứng minh được, chẳng hạn:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{a+b+c} \text{ thì } \frac{1}{a^5} + \frac{1}{b^5} + \frac{1}{c^5} = \frac{1}{a^5 + b^5 + c^5};$$

$$\frac{1}{a^{2013}} + \frac{1}{b^{2013}} + \frac{1}{c^{2013}} = \frac{1}{a^{2013} + b^{2013} + c^{2013}} \text{ v.v...}$$

(Với số mũ ở $a; b; c$ cũng là một số tự nhiên lẻ).

Bài toán 10. Tìm $a; b$ biết $\frac{1}{x(1-x)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{1-x}$.

Hướng dẫn: thực hiện phép cộng phân thức ở vế phải và so sánh hai vế.

Lời giải

$$\text{Ta có } \frac{1}{x(1-x)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{1-x}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x(1-x)} = \frac{a(1-x) + bx}{x(1-x)}$$

$$\Rightarrow 1 = a - ax + bx$$

$$\Rightarrow 1 = (b-a)x + a$$

$$\Rightarrow a = 1 \text{ và } b-a = 0 \Rightarrow a = 1 \text{ và } b = 1$$

Nhận xét: Ta còn có thể làm bài toán sau:

$$1. \text{ Tìm } a; b \text{ biết } \frac{1}{x(x-1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x-1}.$$

(Đáp số: $a = -1; b = 1$)

$$2. \text{ Tìm } a; b \text{ biết } \frac{1}{(x-1)(x-2)} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x-2}.$$

(Đáp số: $a = -1; b = 1$)

2. Từ kết quả trên ta tính tổng:

$$S = \frac{1}{x(x-1)} + \frac{1}{(x-1)(x-2)} + \frac{1}{(x-2)(x-3)} + \frac{1}{(x-3)(x-4)}$$

$$T = \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \dots + \frac{1}{(n+9)(n+10)}$$

$$(Đáp số: S = \frac{4}{(4-x)x}; T = \frac{10}{n(n+10)})$$

$$(Đặc biệt ở đẳng thức T cho n=1 ta có \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \dots + \frac{1}{10.11} = \frac{10}{11} \dots)$$

IV. Thực hiện phép tính trừ hai phân thức

Bài toán 11. Trừ các phân thức:

$$\text{a) } \frac{4x-1}{3x^2y} - \frac{7x-1}{3x^2y} \quad \text{b) } \frac{4x+5}{2x-1} - \frac{5-9x}{2x-1} \quad \text{c) } \frac{11x}{2x-3} - \frac{x-18}{3-2x} \quad \text{d) } \frac{xy}{x^2-y^2} - \frac{x^2}{y^2-x^2}$$

$$\text{Hướng dẫn: } \frac{A}{B} - \frac{C}{D} = \frac{A}{B} + \left(-\frac{C}{D} \right)$$

Lời giải

$$a) \frac{4x-1}{3x^2y} + \frac{-(7x-1)}{3x^2y} = \frac{4x-1-7x+1}{3x^2y} = \frac{-1}{xy} = -\frac{1}{xy}$$

$$b) \frac{4x+5}{2x-1} + \frac{-(5-9x)}{2x-1} = \frac{4x+5-5+9x}{2x-1} = \frac{13x}{2x-1}$$

$$c) \frac{11x}{2x-3} - \frac{x-18}{3-2x} = \frac{11x}{2x-3} - \frac{18-x}{2x-3}$$

$$= \frac{11x}{2x-3} + \frac{-(18-x)}{2x-3} = \frac{11x-18+x}{2x-3}$$

$$= \frac{12x-18}{2x-3} = \frac{6(2x-3)}{2x-3} = 6$$

$$d) \frac{xy}{x^2-y^2} - \frac{x^2}{y^2-x^2} = \frac{xy}{x^2-y^2} + \frac{x^2}{x^2-y^2}$$

$$= \frac{xy+x^2}{x^2-y^2} = \frac{x(x+y)}{(x+y)(x-y)} = \frac{x}{x-y}$$

Chú ý: Thực hiện phép trừ theo quy tắc, được kết quả ta phải rút gọn phân thức. Có khi ta phải dùng quy tắc đổi dấu để tìm mẫu thức chung.

Bài toán 12. Trừ các phân thức

$$a) \frac{3}{2x+6} - \frac{x-6}{2x^2+6x} \quad b) \frac{x+9}{x^2-9} - \frac{3}{x^2+3x} \quad c) \frac{a+1}{a^3-1} - \frac{1}{a^2+a+1} \quad d) \frac{a^2+4}{a^3+8} - \frac{1}{a+2}$$

Lời giải

$$a) \frac{3}{2x+6} - \frac{x-6}{2x^2+6x} = \frac{3}{2(x+3)} - \frac{x-6}{2x(x+3)} = \frac{3x-(x-6)}{2x(x+3)} = \frac{2x+6}{2x(x+3)} = \frac{2(x+3)}{2x(x+3)} = \frac{1}{x}$$

$$b) \frac{x+9}{x^2-9} - \frac{3}{x^2+3x} = \frac{x+9}{(x+3)(x-3)} - \frac{3}{x(x+3)} = \frac{x(x+9)-3(x-3)}{x(x+3)(x-3)} = \frac{x^2+9x-3x+9}{x(x+3)(x-3)}$$

$$= \frac{x^2+6x+9}{x(x+3)(x-3)} = \frac{(x+3)^2}{x(x+3)(x-3)} = \frac{x+3}{x(x-3)}$$

$$c) \frac{a+1}{a^3-1} - \frac{1}{a^2+a+1} = \frac{a+1-(a-1)}{(a-1)(a^2+a+1)} = \frac{a+1-a+1}{a^3-1} = \frac{2}{a^3-1}$$

$$d) \frac{a^2+4}{a^3+8} - \frac{1}{a+2} = \frac{a^2+4-1(a^2-2a+4)}{(a+2)(a^2-2a+4)} = \frac{2a}{a^3+8}$$

V. Rút gọn biểu thức

Bài toán 13. Rút gọn biểu thức

$$\text{a)} A = \frac{7}{a+b} + \frac{8}{a-b} - \frac{16b}{a^2 - b^2} \quad \text{b)} B = \frac{6x}{x^2 - y^2} - \frac{3}{x-y} - \frac{4}{x+y}$$

$$\text{c)} C = \frac{a+b}{a} - \frac{a}{a-b} - \frac{b^2}{a^2 - ab} \quad \text{d)} D = a + \frac{ab}{a+b} - \frac{a^3}{a^2 - b^2}$$

Hướng dẫn: Quy đồng mẫu thức và áp dụng tính chất kết hợp của phép cộng.

Lời giải

$$\text{a)} A = \frac{7}{a+b} + \frac{8}{a-b} - \frac{16b}{a^2 - b^2} = \frac{7(a-b) + 8(a+b) - 16b}{a^2 - b^2} = \frac{7a - 7b + 8a + 8b - 16b}{a^2 - b^2}$$

$$= \frac{15a - 15b}{a^2 - b^2} = \frac{15(a-b)}{(a-b)(a+b)} = \frac{15}{a+b}$$

$$\text{b)} B = \frac{6x}{x^2 - y^2} - \frac{3}{x-y} - \frac{4}{x+y} = \frac{6x - 3(x+y) - 4(x-y)}{x^2 - y^2} = \frac{6x - 3x - 3y - 4x + 4y}{x^2 - y^2} = \frac{-x + y}{x^2 - y^2}$$

$$= \frac{-(x-y)}{(x-y)(x+y)} = -\frac{1}{x+y}$$

$$\text{c)} C = \frac{a+b}{a} - \frac{a}{a-b} - \frac{b^2}{a^2 - ab}$$

$$= \frac{(a+b)(a-b) - a^2 - b^2}{a(a-b)} = \frac{-2b^2}{a(a-b)} = -\frac{2b^2}{a^2 - ab}$$

$$\text{d)} D = a + \frac{ab}{a+b} - \frac{a^3}{a^2 - b^2} = \frac{a(a^2 - b^2) - ab(a-b) - a^3}{a^2 - b^2} = \frac{a^3 - ab^2 - a^2b + ab^2 - a^3}{a^2 - b^2}$$

$$= -\frac{a^2b}{a^2 - b^2}$$

Bài toán 13. Rút gọn biểu thức

$$\text{a)} A = \frac{1}{3x-2} - \frac{1}{3x+2} - \frac{3x-6}{4-9x^2} \quad \text{b)} B = \frac{x+1}{x-3} - \frac{1-x}{x+3} - \frac{2x(1-x)}{9-x^2}$$

$$\text{c)} C = \frac{3x^2 - x + 3}{x^3 - 1} - \frac{x-1}{x^2 + x + 1} + \frac{2}{1-x}$$

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad \text{Ta} \quad \text{có} \quad A &= \frac{1}{3x-2} - \frac{1}{3x+2} - \frac{3x-6}{4-9x^2} &= \frac{1}{3x-2} - \frac{1}{3x+2} - \frac{3x-6}{9x^2-4} \\ &= \frac{(3x+2) - (3x-2) + (3x-6)}{9x^2-4} \end{aligned}$$

$$= \frac{3x-2}{(3x-2)(3x+2)} = \frac{1}{3x+2}$$

b) Ta có $B = \frac{x+1}{x-3} - \frac{1-x}{x+3} - \frac{2x(1-x)}{9-x^2} = \frac{x+1}{x-3} - \frac{1-x}{x+3} + \frac{2x(1-x)}{x^2-9}$

$$= \frac{(x+1)(x+3) - (1-x)(x-3) + 2x(1-x)}{x^2-9}$$

$$= \frac{x^2 + 4x + 3 - (4x - 3 - x^2) + 2x - 2x^2}{x^2 - 9}$$

$$= \frac{2x+6}{x^2-9} = \frac{2}{x-3}$$

c) Ta có $C = \frac{3x^2 - x + 3}{x^3 - 1} - \frac{x-1}{x^2 + x + 1} + \frac{2}{1-x} = \frac{3x^2 - x + 3 - (x-1)^2 - 2(x^2 + x + 1)}{x^3 - 1}$

$$= \frac{3x^2 - x + 3 - x^2 + 2x - 1 - 2x^2 - 2x - 2}{x^3 - 1} = \frac{-x}{x^3 - 1}$$

Nhận xét: Ta còn có bài toán: Tìm giá trị của biểu thức

$$C = \frac{3x^2 - x + 3}{x^3 - 1} - \frac{x-1}{x^2 + x + 1} + \frac{2}{1-x} \text{ với } x = 2$$

$$\text{Đáp số: } C = -\frac{2}{7}$$

(Các bài toán a, b ta rút gọn và có thể cho x một giá trị và tìm giá trị của biểu thức $A; B$)

VI. Chứng minh đẳng thức

Bài toán 15. Chứng minh rằng:

a) $\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} = \frac{1}{x(x+1)}$ b) $\frac{x^2}{(x-y)(x-z)} - \frac{y^2}{(x-y)(y-z)} - \frac{z^2}{(x-z)(y-z)} = 1$

Hướng dẫn: Biến đổi về trái (VT) và ta được kết quả ở về phải (VP)

Lời giải

a) Biến đổi về trái (VT)

$$VT = \frac{x+1-x}{x(x+1)} = \frac{1}{x(x+1)} = VP \text{ (đpcm)}$$

Nhận xét: Tính tổng:

$$S = \frac{1}{x(x+1)} + \frac{1}{(x+1)(x+2)} + \frac{1}{(x+2)(x+3)} + \frac{1}{(x+3)(x+4)} + \frac{1}{(x+4)(x+5)}$$

$$\text{Theo trên, ta có } \frac{1}{x(x+1)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \quad (1)$$

$$\text{Tương tự: } \frac{1}{(x+1)(x+2)} = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} \quad (2)$$

$$\frac{1}{(x+2)(x+3)} = \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+3} \quad (3)$$

$$\frac{1}{(x+3)(x+4)} = \frac{1}{x+3} - \frac{1}{x+4} \quad (4)$$

$$\frac{1}{(x+4)(x+5)} = \frac{1}{x+4} - \frac{1}{x+5} \quad (5)$$

Cộng vế với vế các đẳng thức (1);(2);...;(5) ta được

$$S = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+5} = \frac{5}{x(x+5)}$$

Ta lại có bài toán:

Rút gọn bài toán $S + \frac{1}{x+5}$; S là biểu thức ở trên

$$(\text{Ta có: } S + \frac{1}{x+5} = \frac{1}{x})$$

b) Biến đổi vế trái (VT) ta có:

$$VT = \frac{x^2(y-z) - y^2(x-z) + z^2(x-y)}{(x-y)(x-z)(y-z)}$$

$$= \frac{x^2y - x^2z - y^2x + y^2z + z^2x - z^2y}{(x-y)(x-z)(y-z)}$$

$$= \frac{(y-z)[x^2 - x(y+z) + yz]}{(x-y)(x-z)(y-z)}$$

$$= \frac{x^2(y-z) - x(y^2 - z^2) + y^2z - z^2y}{(x-y)(x-z)(y-z)}$$

$$= \frac{(y-z)[x^2 - xy - xz + yz]}{(x-y)(x-z)(y-z)}$$

$$= \frac{x(x-y) - z(x-y)}{(x-y)(x-z)}$$

$$= \frac{(x-y)(x-z)}{(x-y)(x-z)} = 1$$

Bài toán 16. Cho $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{a+b+c} - \frac{1}{c}$. Chứng tỏ rằng: $\frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3} = \frac{1}{a^3 + b^3 + c^3}$

Hướng dẫn: Biến đổi giả thiết, ta có $a = -b$ hoặc $b = -c$ hoặc $c = -a$ và thay vào đẳng thức cần chứng minh.

(Bài toán này là cách viết khác của giả thiết $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{a+b+c}$ và một Lời giải đã nêu ở §5.

Phép cộng phân thức, nhưng Lời giải đó không hay lắm vì ta áp dụng phép cộng phân thức).

Lời giải

$$\text{Ta có } \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{a+b+c} - \frac{1}{c}.$$

$$\Rightarrow \frac{a+b}{ab} = \frac{c-a-b-c}{c(a+b+c)}$$

$$\Rightarrow \frac{a+b}{ab} = \frac{-(a+b)}{c(a+b+c)}$$

$$\Rightarrow c(a+b)(a+b+c) = -ab(a+b)$$

$$\Rightarrow (a+b)(ac+bc+c^2+ab) = 0$$

$$\Rightarrow (a+b)[c(a+c)+b(a+c)] = 0$$

$$\Rightarrow (a+b)(a+c)(b+c) = 0$$

$$\Rightarrow a = -b \text{ hoặc } a = -c \text{ hoặc } b = -c$$

- Nếu $a = -b$. Thay $a = -b$ vào đẳng thức cần chứng minh ta được:

$$\frac{1}{-b^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3} = \frac{1}{-b^3 + b^3 + c^3} \text{ hay } \frac{1}{c^3} = \frac{1}{c^3} \text{ (luôn đúng)}$$

- Nếu $a = -c$ hoặc $b = -c$, chứng minh tương tự.

PHẦN C. BÀI TẬP

Bài 6.36. Làm phép cộng

$$\begin{array}{llll} \text{a)} \frac{2a^2}{3(a+1)} + \frac{5a^2}{4(a+1)} & \text{b)} \frac{3x}{2x-1} + \frac{5x}{2x-1} & \text{c)} \frac{12a-5}{a^2-49} + \frac{6}{7-a} & \text{d)} \frac{2x+8}{x^2-4x+4} + \frac{7}{2-x} \end{array}$$

Bài 6.37. Làm phép cộng

$$\text{a)} a + \frac{a}{a-1}$$

$$\text{b)} x+1 + \frac{x^2}{1-x}$$

$$\text{c)} \frac{1}{x^2+x+1} + x-1$$

Bài 6.38. Chứng minh rằng: nếu $10x^2 + 5xy - 3y^2 = 0$ thì $\frac{2x-y}{3x-y} + \frac{5y-x}{3x+y} = -3$

Bài 6.39. Tìm các giá trị nguyên của x sao cho: $\frac{1}{x} + \frac{1}{x+2} + \frac{x-2}{x^2+2x}$ nhận giá trị nguyên.

Bài 6.40. Tìm a, b biết:

$$a) \frac{1}{x(x+2)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+2}$$

$$b) \frac{1}{x^2-4} = \frac{9}{x-2} + \frac{b}{x+2}$$

$$c) \frac{1}{x^3+1} = \frac{a}{x+1} + \frac{bx+c}{x^2-x+1}$$

Bài 6.41. Chứng minh

$$a) \frac{3a^2+3}{a^3-1} - \frac{a-1}{a^2+a+1} - \frac{2}{a-1} = 0$$

$$b) \frac{a+c}{(a-b)(b-c)} - \frac{a+b}{(a-c)(b-c)} - \frac{b+c}{(a-b)(a-c)} = 0$$

$$c) \frac{a+1}{(a-b)(a-c)} - \frac{b+1}{(a-b)(b-c)} - \frac{c+1}{(a-c)(c-b)} = 0$$

Bài 6.42. Tính giá trị của biểu thức: $A = \frac{a+1}{a^2+a+1} - \frac{8a^2}{1-a^3}$, với $a = 2$.

Bài 6.43. Tính tổng: $S = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \dots + \frac{1}{99.100}$.

☞ HẾT ☞

HƯỚNG DẪN GIẢI

6.36. a) $\frac{2a^2}{3(a+1)} + \frac{5a^2}{4(a+1)} = \frac{8a^2 + 15a^2}{12(a+1)} = \frac{23a^2}{12(a+1)}$

b) $\frac{3x}{2x-1} + \frac{5x}{2x-1} = \frac{3x+5x}{2x-1} = \frac{8x}{2x-1}$

c) $\frac{12a-5}{a^2-49} + \frac{6}{7-a} = \frac{12a-5-6(a+7)}{a^2-49} = \frac{12a-5-6a-42}{a^2-49} = \frac{6a-47}{a^2-49}$

d) $\frac{2x+8}{x^2-4x+4} + \frac{7}{2-x} = \frac{2x+8+7(2-x)}{(2-x)^2} = \frac{2x+8+14-7x}{(2-x)^2} = \frac{22-5x}{(2-x)^2}$

(có thể viết $\frac{22-5x}{(x-2)^2}$)

6.37. a) $a + \frac{a}{a+1} = \frac{a(a+1) + a}{(a+1)} = \frac{a^2 + 2a}{a+1}$

b) $x+1 + \frac{x^2}{1-x} = \frac{(x+1)(1-x) + x^2}{1-x} = \frac{1-x^2+x^2}{1-x} = \frac{1}{1-x}$

c) $\frac{1}{x^2+x+1} + x-1 = \frac{1+(x-1)(x^2+x+1)}{x^2+x+1} = \frac{1+x^3-1}{x^2+x+1} = \frac{x^3}{x^2+x+1}$

6.38. Ta có: $\frac{2x-y}{3x-y} + \frac{5y-x}{3x+y} = \frac{(2x-y)(3x+y) + (5y-x)(3x-y)}{(3x+y)(3x-y)} = \frac{3x^2 + 15xy - 6y^2}{9x^2 - y^2} (*)$

Theo giả thiết ta có $10x^2 + 5xy - 3y^2 = 0$

$$\Rightarrow 5xy = 3y^2 - 10x^2$$

$$\Rightarrow 3.5xy = 3(3y^2 - 10x^2)$$

$$\Rightarrow 15xy = 9y^2 - 30x^2$$

Thay $15xy$ vào tử số của phân thức (*) ta có:

$$\frac{3x^2 + 9y^2 - 30x^2 - 6y^2}{9x^2 - y^2} = \frac{-27x^2 + 3y^2}{9x^2 - y^2} = \frac{-3(9x^2 - y^2)}{9x^2 - y^2} = -3$$

6.39. Ta có: $\frac{1}{x} + \frac{1}{x+2} + \frac{x-2}{x^2+2x} = \frac{x+2+x+x-2}{x^2+2x} = \frac{3x}{x(x+2)} = \frac{3}{x+2}$

Phân thức trên nhận giá trị nguyên khi $x \in Z$ và $x+2=1; x+2=-1; x+2=3$ hoặc $x+2=-3$

$$\Rightarrow x = -1; x = -3; x = 1 \text{ hoặc } x = -5$$

6.40. a) Ta có: $\frac{1}{x(x+2)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+2}$

$$\Rightarrow \frac{1}{x(x+2)} = \frac{a(x+2) + bx}{x(x+2)}$$

$$\Rightarrow a = (a+b)x + 2a \text{ hay } (a+b)x + 2a = 0x + 1$$

$$\Rightarrow 2a = 1 \text{ và } a+b = 0 \Rightarrow a = \frac{1}{2} \text{ và } b = -\frac{1}{2}$$

b) Tương tự: $a = \frac{1}{4}; b = -\frac{1}{4}$

c) Đáp số: $a = \frac{1}{3}; b = -\frac{1}{3}; c = \frac{2}{3}$

6.41. a) Ta có: $\frac{3a^2+3}{a^3-1} - \frac{a-1}{a^2+a+1} - \frac{2}{a-1}$

$$= \frac{3a^2+3 - (a-1)^2 - 2(a^2+a+1)}{a^3-1}$$

$$= \frac{3a^2+3 - a^2 + 2a - 1 - 2a^2 - 2a - 2}{a^3-1} = 0$$

b) Ta có: $\frac{a+c}{(a-b)(b-c)} - \frac{a+b}{(a-c)(b-c)} - \frac{b+c}{(a-b)(a-c)}$

$$= \frac{(a+c)(c-a) + (a+b)(a-b) + (b+c)(b-c)}{(a-b)(b-c)(c-a)}$$

$$= \frac{c^2 - a^2 + a^2 - b^2 + b^2 - c^2}{(a-b)(b-c)(c-a)} = 0$$

c) Ta có: $\frac{a+1}{(a-b)(a-c)} - \frac{b+1}{(a-b)(b-c)} - \frac{c+1}{(a-c)(c-b)}$

$$= \frac{-(a+1)(b-c) - (b+1)(c-a) - (c+1)(a-b)}{(a-b)(b-c)(c-a)}$$

$$= \frac{-ab + ac - b + c - bc + ab - c + a - ac + bc - a + b}{(a-b)(b-c)(c-a)} = 0$$

6.42. $A = \frac{a+1}{a^2+a+1} - \frac{8a^2}{1-a^3} = \frac{(a+1)(1-a)-8a^2}{1-a^3} = \frac{1-a^2-8a^2}{1-a^3} = \frac{1-9a^2}{1-a^3}$

Với $a = 2 \Rightarrow A = \frac{1-9.4}{1-8} = \frac{35}{7} = 5$

6.43. Ta có: $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ với $n \in N$

Vậy $S = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \dots + \frac{1}{99.100}$

$$= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \dots + \left(\frac{1}{98} - \frac{1}{99} \right) + \left(\frac{1}{99} - \frac{1}{100} \right)$$

$$= 1 - \frac{1}{100} = \frac{99}{100}$$

$$\text{Tương tự } \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{n(n+1)} = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1} \text{ với } n \in N$$

Bạn hãy tính:

$$\frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{4.5} + \dots + \frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

$$\text{Đáp số: } \frac{n}{2n+4}$$

Cho $n = 2015$

$$\text{Ta có: } \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{4.5} + \dots + \frac{1}{(2015+1)(2015+2)} = \frac{2015}{4034}$$

Bài toán tương tự:

Chứng minh rằng với mọi $n \in N^*$, ta có:

$$1. \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \dots + \frac{1}{n^2 + 3n + 2} = \frac{n}{2n+4}$$

$$2. \frac{1}{1.3} + \frac{1}{3.5} + \frac{1}{5.7} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n}{2n+1}$$

$$3. \frac{1}{1.5} + \frac{1}{5.9} + \frac{1}{9.13} + \dots + \frac{1}{(4n-3)(4n+1)} = \frac{n}{4n+1}$$

☞ HẾT ☞

BÀI 24. PHÉP NHÂN VÀ PHÉP CHIA PHÂN THỨC ĐẠI SỐ

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Nhân hai phân thức

Quy tắc nhân hai phân thức

Muốn nhân các phân thức, ta nhân các tử với nhau, các mẫu với nhau: $\frac{A}{B} \cdot \frac{C}{D} = \frac{AC}{BD}$

Chú ý: Kết quả của phép nhân hai phân thức được gọi là *tích*. Ta thường viết tích dưới dạng rút gọn. Cũng như phép nhân phân số, phép nhân phân thức có các tính chất sau:

- Giao hoán: $\frac{A}{B} \cdot \frac{C}{D} = \frac{C}{D} \cdot \frac{A}{B}$

- Kết hợp: $\left(\frac{A}{B} \cdot \frac{C}{D}\right) \cdot \frac{E}{F} = \frac{A}{B} \cdot \left(\frac{C}{D} \cdot \frac{E}{F}\right)$

- Phân phối đối với phép cộng: $\frac{A}{B} \cdot \left(\frac{C}{D} + \frac{E}{F}\right) = \frac{A}{B} \cdot \frac{C}{D} + \frac{A}{B} \cdot \frac{E}{F}$

2. Chia hai phân thức

Quy tắc chia hai phân thức

Muốn chia phân thức $\frac{A}{B}$ cho phân thức $\frac{C}{D}$ khác 0, ta nhân $\frac{A}{B}$ với phân thức $\frac{D}{C}$:

$$\frac{A}{B} \cdot \frac{C}{D} = \frac{A}{B} \cdot \frac{D}{C} \text{ với } \frac{C}{D} \neq 0$$

B. PHÂN LOẠI CÁC BÀI TẬP

I. Nhân các phân thức

Bài toán 1. Thực hiện phép nhân:

a) $\frac{a+b}{4a^2b^3} \cdot \frac{16a^5b}{(a+b)^2}$

b) $\frac{a-b}{a^3+b^3} \cdot \frac{a^2-ab+b^2}{a^2-b^2}$

c) $\frac{a^2-25}{a^2-3a} \cdot \frac{9-a^2}{a+5}$

Hướng dẫn: - Áp dụng quy tắc nhân phân thức

- Rút gọn phân thức

Lời giải

a) Ta có $\frac{a+b}{4a^2b^3} \cdot \frac{16a^5b}{(a+b)^2} = \frac{(a+b)}{4a^2b^3} \cdot \frac{16a^5b}{(a+b)^2} = \frac{4a^3}{b^2(a+b)}$

b) Ta có: $\frac{a-b}{a^3+b^3} \cdot \frac{a^2-ab+b^2}{a^2-b^2} = \frac{(a-b)(a^2-ab+b^2)}{(a+b)(a^2-ab+b^2)(a-b)(a+b)} = \frac{1}{(a+b)^2}$

c) Ta có $\frac{a^2-25}{a^2-3a} \cdot \frac{9-a^2}{a+5} = \frac{(a^2-25)(9-a^2)}{(a^2-3a)(a+5)} = \frac{-(a+5)(a-5)(a-3)(a+3)}{a(a-3)(a+5)}$
 $= \frac{-(a-5)(a+3)}{a} = \frac{(5-a)(a+3)}{a}$

Bài toán 2. Thực hiện phép nhân:

$$a) \frac{x^2 - 9y^2}{x^2 y} \cdot \frac{3xy}{xz - 3yz}$$

$$b) \frac{x + y}{x^2 - 2xy + y^2} \cdot \frac{2x - 2y}{x^2 + 2xy + y^2}$$

$$c) \frac{2x^3 - 2y^3}{3x + 3y} \cdot \frac{6x + 6y}{x^2 - 2xy + y^2}$$

Lời giải

$$a) \frac{x^2 - 9y^2}{x^2 y} \cdot \frac{3xy}{xz - 3yz} = \frac{(x^2 - 9y^2) \cdot 3xy}{x^2 y \cdot (xz - 3yz)} = \frac{(x+3y)(x-3y)}{x^2 y} \cdot \frac{3xy}{z(x-3y)} = \frac{3(x+3y)}{xz}$$

$$b) \frac{x + y}{x^2 - 2xy + y^2} \cdot \frac{2x - 2y}{x^2 + 2xy + y^2} = \frac{(x+y)(2x-2y)}{(x^2 - 2xy + y^2)(x^2 + 2xy + y^2)} = \frac{2(x+y)(x-y)}{(x-y)^2(x+y)^2}$$

$$= \frac{2}{(x-y)(x+y)}$$

$$c) \frac{2x^3 - 2y^3}{3x + 3y} \cdot \frac{6x + 6y}{x^2 - 2xy + y^2} = \frac{(2x^3 - 2y^3)(6x + 6y)}{(3x + 3y)(x^2 - 2xy + y^2)} = \frac{12(x^3 - y^3)(x+y)}{3(x+y)(x-y)^2}$$

$$= \frac{12(x-y)(x^2 + xy + y^2)(x+y)}{3(x+y)(x-y)^2} = \frac{4(x^2 + xy + y^2)}{x-y}$$

Bài toán 3. Thực hiện phép nhân:

$$a) \frac{64x^2 y^2 - 1}{x^2 - 4} \cdot \frac{(x+2)^2}{x^2 - 4} \cdot \frac{(x-2)^2}{8xy + 1}$$

$$b) \frac{x-6}{x^2 + 6x + 9} \cdot \frac{x^2 + 4x + 4}{(x^2 + 2)(x-2)} \cdot \frac{x^3 - 9x}{(x-6)(x+2)}$$

Lời giải

$$a) \text{Ta có } \frac{64x^2 y^2 - 1}{x^2 - 4} \cdot \frac{(x+2)^2}{x^2 - 4} \cdot \frac{(x-2)^2}{8xy + 1} = \frac{(64x^2 y^2 - 1) \cdot (x+2)^2 \cdot (x-2)^2}{(x^2 - 4) \cdot (x^2 - 4) \cdot (8xy + 1)}$$

$$= \frac{(8xy + 1)(8xy - 1) \cdot (x+2)^2 \cdot (x-2)^2}{(x-2)^2 \cdot (x+2)^2 \cdot (8xy + 1)} = 8xy - 1$$

$$b) \text{Ta có } \frac{x-6}{x^2 + 6x + 9} \cdot \frac{x^2 + 4x + 4}{(x^2 + 2)(x-2)} \cdot \frac{x^3 - 9x}{(x-6)(x+2)}$$

$$= \frac{(x-6) \cdot (x+2)^2 \cdot (x-3) \cdot (x+3)}{(x+3)^2 \cdot (x^2 + 2)(x-2) \cdot (x-6)(x+2)} = \frac{x(x+2)(x-3)}{(x-2)(x+3)(x^2 + 2)}$$

II. Rút gọn biểu thức

Bài toán 4. Rút gọn biểu thức

$$a) A = \left(1 - \frac{a-b}{a+b}\right) \cdot \left(2 + \frac{2b}{a-b}\right)$$

$$b) B = \frac{a^2 + ab}{a^2 + b^2} \cdot \left(\frac{a}{a-b} - \frac{b}{a+b}\right)$$

$$c) \frac{a}{b+2} - \frac{a^2 + 2a + 1}{b^2 - 4} \cdot \frac{b+2}{a+1}$$

Hướng dẫn: Thực hiện phép tính trong ngoặc trước, nhân chia trước, cộng trừ sau

Lời giải

$$a) Ta có: A = \left(1 - \frac{a-b}{a+b}\right) \cdot \left(2 + \frac{2b}{a-b}\right) = \left(\frac{a+b+a-b}{a+b}\right) \cdot \left(\frac{2a-2b+2b}{a-b}\right) = \frac{2a}{a+b} \cdot \frac{2a}{a-b} = \frac{4a^2}{a^2 - b^2}$$

$$b) Ta có: B = \frac{a^2 + ab}{a^2 + b^2} \cdot \left(\frac{a}{a-b} - \frac{b}{a+b}\right) = \frac{a(a+b)(a^2 + b^2)}{(a^2 + b^2)(a-b)(a+b)} = \frac{a}{a-b}$$

$$c) Ta có: C = \frac{a}{b+2} - \frac{a^2 + 2a + 1}{b^2 - 4} \cdot \frac{b+2}{a+1} = \frac{a}{b+2} - \frac{a+1}{b-2} = \frac{ab - 2a - ab - 2a - b - 2}{(b+2)(b-2)} = \frac{-4a - b - 2}{b^2 - 4}$$

Chú ý: Ta không được làm theo thứ tự: phép trừ trước rồi đến phép nhân.

Bài toán 5. Rút gọn biểu thức

$$a) A = (x^2 - 1) \cdot \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{1+x} + 1\right)$$

$$b) B = \left(1 + a - \frac{a^2 + 3}{a+1}\right) \cdot (1 - a^2)$$

$$c) C = \left(\frac{a^2 + 2a + 1}{a^2 - 1} - 1\right) \cdot \left(1 - \frac{a}{a+1}\right)$$

$$\text{Hướng dẫn: } \frac{A}{B} \left(\frac{C}{D} + \frac{E}{F} \right) = \frac{A}{B} \cdot \frac{C}{D} + \frac{A}{B} \cdot \frac{E}{F}$$

Lời giải

$$a) Ta có: A = \frac{x^2 - 1}{x-1} - \frac{x^2 - 1}{1+x} + x^2 - 1 = (x+1) - (x-1) + x^2 - 1 = x^2 + 1$$

$$b) Ta có: B = (1+a)(1-a^2) - \frac{a^2 + 3}{a+1} \cdot (1-a^2)$$

$$= (1+a)(1-a^2) - (a^2 + 3)(1-a)$$

$$= (1+a)(1-a^2) - \frac{a^2 + 3}{a+1} \cdot (1-a^2)$$

$$= (1-a)(1+2a+a^2 - a^2 - 3)$$

$$= (1-a)(2a-2) = -2(1-a)^2$$

$$\text{Cách khác: } B = \frac{a^2 + 2a + 1 - a^2 - 3}{a+1} = \frac{2a - 2}{a+1} (1-a)^2 = -2(1-a)^2$$

Nhận xét: Ta có thể thực hiện các phép toán trong dấu ngoặc trước và phép nhân phân thức sau. (Bài toán a có thể làm như thế)

Hai bài toán trên, ta đã làm phép toán nhân $\frac{A}{1} \cdot \frac{B}{C} = \frac{AB}{1 \cdot C} = \frac{AB}{C}$

$$c) Ta có: C = \left(\frac{a^2 + 2a + 1 - a^2 + 1}{a^2 - 1}\right) \cdot \left(\frac{a+1-a}{a+1}\right) = \frac{2}{a^2 - 1}$$

Bài toán 6: Rút gọn biểu thức:

$$a) A = \left(\frac{a}{a-b} - \frac{a^3 + a^2 b}{a^3 - b^3} \right) \cdot (a^2 + ab + b^2)$$

$$b) B = \left(\frac{a+1}{2a-2} - \frac{1}{2a^2-2} \right) \cdot \frac{2a+2}{a+2}$$

$$c) C = \left(\frac{b}{a^2 - ab} - \frac{a}{ab - b^2} \right) \cdot \left(\frac{a^2 b - ab^2}{a^2 - b^2} \right)$$

Lời giải

$$a) \text{Ta có } A = \frac{a(a^2 + ab + b^2) - (a^3 + a^2 b)}{a^3 - b^3} \cdot (a^2 + ab + b^2)$$

$$= \frac{a^3 + a^2 b + ab^2 - a^3 - a^2 b}{a^3 - b^3} \cdot (a^2 + ab + b^2) = \frac{ab^2}{a-b}$$

$$b) \text{Ta có } B = \frac{(a+1)^2 - 1}{2(a^2 - 1)} \cdot \frac{2(a+1)}{a+2} = \frac{a(a+2)}{2(a^2 - 1)} \cdot \frac{2(a+1)}{a+2} = \frac{a}{a-1}$$

$$c) \text{Ta có } C = \left[\frac{b}{a(a-b)} - \frac{a}{b(a-b)} \right] \left(\frac{ab(a-b)}{(a+b)(a-b)} \right)$$

$$= \frac{b^2 - a^2}{ab(a-b)} \cdot \frac{ab}{a+b} = \frac{(a+b)(b-a)}{ab(a-b)} \cdot \frac{ab}{a+b} = \frac{b-a}{a-b} = -1$$

Bài toán 7: Rút gọn biểu thức

$$a) A = \left(\frac{6a+1}{a^2 - 6a} + \frac{6a-1}{a^2 + 6a} \right) \cdot \frac{a^2 - 36}{a^2 + 1}$$

$$b) B = \left(a + \frac{4}{a+2} \right) \cdot \frac{a+2}{a^3 + 8} \cdot \frac{2}{2a - a^2}$$

$$c) C = \frac{a}{b-2} - \frac{a^2 + 2a + 1}{b^2 - 4} \cdot \frac{b+2}{a+1}$$

Lời giải

$$a) \text{Ta có } A = \left(\frac{6a+1}{a^2 - 6a} + \frac{6a-1}{a^2 + 6a} \right) \cdot \frac{a^2 - 36}{a^2 + 1} = \frac{(6a+1)(a+6) + (6a-1)(a-6)}{a(a^2 - 36)} \cdot \frac{a^2 - 36}{a^2 + 1}$$

$$= \frac{12a^2 + 12}{a(a^2 - 36)} \cdot \frac{a^2 - 36}{a^2 + 1} = \frac{12}{a}$$

$$b) B = \frac{a^2 + 2a + 4}{a+2} \cdot \frac{a+2}{(a+2)(a^2 + 2a + 4)} + \frac{2}{a(2-a)} = \frac{1}{a-2} + \frac{-2}{a(a-2)} = \frac{1}{a}$$

$$c) C = \frac{a}{b-2} - \frac{(a+1)^2}{(b-2)(b+2)} \cdot \frac{b+2}{a+1} = \frac{a}{b-2} - \frac{a+1}{b-2} = \frac{1}{2-b}$$

Chú ý: Thứ tự thực hiện các phép toán: “ nhân chia trước, cộng trừ sau”

III. Chứng minh đẳng thức

Bài toán 8: Cho $x + \frac{1}{x} = 2$. Chứng tỏ rằng $x^5 + \frac{1}{x^5} = 2$

Hướng dẫn: Có thể tìm x và thế vào biểu thức $x^5 + \frac{1}{x^5} = 2$

Lời giải

Ta có $x + \frac{1}{x} = 2 \Rightarrow \frac{x^2 + 1}{x} = 2 \Rightarrow x^2 + 1 = 2x$ ($x \neq 0$)

$$\Rightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Rightarrow (x-1)^2 = 0 \Rightarrow x-1=0 \Rightarrow x=1$$

Vậy $x^5 + \frac{1}{x^5} = 1 + \frac{1}{1} = 2$ (đpcm)

Nhận xét: Ta có thể tính $x^{2014} + \frac{1}{x^{2014}}$ (đáp số: 2)

Bài toán sau:

Cho $x + \frac{1}{x} = 3$. Tính $x^2 + \frac{1}{x^2}$

Ta có $x + \frac{1}{x} = 3 \Rightarrow \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = 9 \Rightarrow x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = 9 \Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = 7$

(Ta không nên tìm x trong trường hợp này)

Tương tự: Cho $x + \frac{1}{x} = 3$. Tính $x^3 + \frac{1}{x^3}$; $x^5 + \frac{1}{x^5}$

Xét $x^3 + \frac{1}{x^3} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 - 3\left(x + \frac{1}{x}\right)$ Từ đó tính $x^3 + \frac{1}{x^3}$.

Xét $\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) \cdot \left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right) = x^5 + \frac{1}{x^5} + x + \frac{1}{x}$ Từ đó tính $x^5 + \frac{1}{x^5}$.

Tổng quát, ta tìm $x^n + \frac{1}{x^n}$; $n \geq 2$, $n \in N$

Bạn có thể cho $x + \frac{1}{x}$, ta có nhiều bài toán hay

Bài toán 9. Cho $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ và $\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = 0$. Chứng minh $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$

Hướng dẫn: Bình phương hai vế của đẳng thức $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$

Lời giải

Ta có $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \Rightarrow \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c}\right)^2 = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} + 2\left(\frac{xy}{ab} + \frac{yz}{bc} + \frac{xz}{ac}\right) = 1$

Lại có $\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = 0 \Rightarrow \frac{c}{z} = -\left(\frac{a}{x} + \frac{b}{y}\right) \Rightarrow \frac{c}{z} = -\frac{ay+bx}{xy} \Rightarrow \frac{z}{c} = -\frac{xy}{ay+bx}$

Vậy $2\left(\frac{xy}{ab} + \frac{yz}{bc} + \frac{xz}{ac}\right) = 2\left[\frac{xy}{ab} + \frac{z}{c}\left(\frac{y}{b} + \frac{x}{a}\right)\right] = 2\left[\frac{xy}{ab} - \frac{xy}{ay+bx} \cdot \frac{bx+ay}{ab}\right] = 2\left[\frac{xy}{ab} - \frac{xy}{ab}\right] = 0$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \text{ (đpcm)}$$

IV. Chia hai phân thức

Bài toán 10. Chia các phân thức

$$a) \frac{m+n}{9m^2n^3} : \frac{m^2-n^2}{27mn^2}$$

$$b) \frac{a^4-b^4}{a^2+2ab} : \frac{a^2+b^2}{ab+2b^2}$$

$$c) \frac{a^2-8a+16}{a+3} : \frac{(a-4)^2}{a^2-9}$$

$$d) \frac{a^2-2ab+b^2}{a^2-ab+b^2} : \frac{8a-8b}{a^3+b^3}$$

Hướng dẫn: Áp dụng quy tắc $\frac{A}{B} : \frac{C}{D} = \frac{A}{B} \cdot \frac{D}{C}$

Lời giải

$$a) \text{Ta có } \frac{m+n}{9m^2n^3} : \frac{m^2-n^2}{27mn^2} = \frac{m+n}{9m^2n^3} \cdot \frac{27mn^2}{m^2-n^2} = \frac{3}{mn(m-n)}$$

$$b) \text{Ta có } \frac{a^4-b^4}{a^2+2ab} : \frac{a^2+b^2}{ab+2b^2} = \frac{a^4-b^4}{a^2+2ab} \cdot \frac{ab+2b^2}{a^2+b^2} = \frac{b(a^2-b^2)}{a}$$

$$c) \text{Ta có } \frac{a^2-8a+16}{a+3} : \frac{(a-4)^2}{a^2-9} = \frac{(a-4)^2}{a+3} \cdot \frac{(a-3)(a+3)}{(a-4)^2} = a-3$$

$$d) \text{Ta có } \frac{a^2-2ab+b^2}{a^2-ab+b^2} : \frac{8a-8b}{a^3+b^3} = \frac{(a-b)^2}{a^2-ab+b^2} \cdot \frac{a^3+b^3}{8(a-b)} = \frac{(a-b)(a+b)}{8} = \frac{a^2-b^2}{8}$$

Bài toán 11. Chia phân thức

$$a) \frac{ax^2-ay^2}{x^2+2xy+y^2} : \frac{ax^2-2axy+ay^2}{3x+3y}$$

$$b) \frac{ab-4b-2a+8}{2a+8-ab-4b} : \frac{2a-8-ab-4b}{ab+4b-2a-8}$$

$$c) \frac{(a+1)(a^2-2a+1)}{6a^2+6} : \frac{a^2-1}{4a^2-4a+4}$$

Lời giải

$$a) \text{Ta có } \frac{ax^2-ay^2}{x^2+2xy+y^2} : \frac{ax^2-2axy+ay^2}{3x+3y} = \frac{a(x^2-y^2)}{(x+y)^2} \cdot \frac{3(x+y)}{a(x-y)^2} = \frac{3}{x-y}$$

$$b) \text{Ta có } \frac{ab-4b-2a+8}{2a+8-ab-4b} : \frac{2a-8-ab-4b}{ab+4b-2a-8} = \frac{ab-4b-2a+8}{2a+8-ab-4b} \cdot \frac{ab+4b-2a-8}{2a-8-ab-4b} \\ = \frac{ab-4b-2a+8}{2a+8-ab-4b} \cdot \frac{-(ab-4b+2a+8)}{-(2a+8+ab+4b)} = 1$$

$$c) \text{Ta có } \frac{(a+1)(a^2-2a+1)}{6a^2+6} : \frac{a^2-1}{4a^2-4a+4} = \frac{(a+1)(a-1)^2}{6(a^3+1)} \cdot \frac{4(a^2-a+1)}{(a-1)(a+1)} \\ = \frac{4(a+1)(a^2-a+1)(a-1)^2}{6(a+1)(a^2-a+1)} = \frac{2(a-1)}{3(a+1)}$$

V. Rút gọn biểu thức

Bài toán 12. Rút gọn biểu thức

$$a) A = \left(\frac{x+6}{3x+9} - \frac{1}{x+3} \right) : \frac{x+2}{27x}$$

$$b) B = \frac{x-1}{x} : \left(\frac{x^2+1}{x^2+2x} - \frac{2}{x+2} \right)$$

$$c) C = \left(\frac{b}{a^2+ab} + \frac{2}{a+b} + \frac{a}{ab+b^2} \right) : \frac{a^2-b^2}{4ab} \quad d) D = \frac{c^2-ac}{a^2-b^2} \cdot \frac{a-b}{c^2-a^2} : \left(c - \frac{ac}{a+c} \right)$$

Hướng dẫn: Thực hiện các phép tính trong dấu ngoặc trước, sau đó chia phân thức.

Lời giải

$$a) \text{Ta có } A = \left(\frac{x+6}{3x+9} - \frac{1}{x+3} \right) : \frac{x+2}{27x} = \frac{x+6-3}{3(x+3)} \cdot \frac{27x}{x+2} = \frac{9x}{x+2}$$

$$b) \text{Ta có } B = \frac{x-1}{x} : \left(\frac{x^2+1}{x^2+2x} - \frac{2}{x+2} \right) = \frac{x-1}{x} : \frac{x^2+1-2x}{x(x+2)} = \frac{x-1}{x} \cdot \frac{x(x+2)}{(x-1)^2} = \frac{x+2}{x-1}$$

$$c) C = \left(\frac{b}{a^2+ab} + \frac{2}{a+b} + \frac{a}{ab+b^2} \right) : \frac{a^2-b^2}{4ab} = \frac{(a+b)^2}{ab(a+b)} \cdot \frac{4ab}{a^2-b^2} = \frac{4}{a-b}$$

$$d) D = \frac{c^2-ac}{a^2-b^2} \cdot \frac{a-b}{c^2-a^2} : \left(c - \frac{ac}{a+c} \right) = \frac{c(c-a)(a-b)}{(a-b)(a+b)(c-a)(c+a)} \cdot \frac{a+c}{c^2} = \frac{1}{c(a+b)}$$

Hướng dẫn: Thực hiện các phép tính trong dấu ngoặc trước, sau đó chia phân thức.

Lời giải

$$a) \text{Ta có } A = \left(\frac{x+6}{3x+9} - \frac{1}{x+3} \right) : \frac{x+2}{27x} = \frac{x+6-3}{3(x+3)} \cdot \frac{27x}{x+2} = \frac{9x}{x+2}$$

$$b) \text{Ta có } B = \frac{x-1}{x} : \left(\frac{x^2+1}{x^2+2x} - \frac{2}{x+2} \right) = \frac{x-1}{x} : \frac{x^2+1-2x}{x(x+2)} = \frac{x-1}{x} \cdot \frac{x(x+2)}{(x-1)^2} = \frac{x+2}{x-1}$$

$$c) C = \left(\frac{b}{a^2+ab} + \frac{2}{a+b} + \frac{a}{ab+b^2} \right) : \frac{a^2-b^2}{4ab} = \frac{(a+b)^2}{ab(a+b)} \cdot \frac{4ab}{a^2-b^2} = \frac{4}{a-b}$$

$$d) D = \frac{c^2-ac}{a^2-b^2} \cdot \frac{a-b}{c^2-a^2} : \left(c - \frac{ac}{a+c} \right) = \frac{c(c-a)(a-b)}{(a-b)(a+b)(c-a)(c+a)} \cdot \frac{a+c}{c^2} = \frac{1}{c(a+b)}$$

Bài toán 13: Rút gọn biểu thức

$$a) A = \frac{2a-b}{a+1} - \frac{a^2-2a+1}{b-2} : \frac{a^2-1}{b^2-4} \quad b) B = \left(\frac{a-b}{a^2+ab} - \frac{a}{b^2+ab} \right) : \left(\frac{b^2}{a^3-ab^2} + \frac{1}{a+b} \right)$$

$$c) C = \left(\frac{2x}{y+2x} - \frac{4x^2}{y^2+4xy+4x^2} \right) : \left(\frac{2x}{y^2-4x^2} + \frac{1}{2x-y} \right)$$

Lời giải

$$\begin{aligned} a) \text{Ta có } A &= \frac{2a-b}{a+1} - \frac{a^2-2a+1}{b-2} : \frac{a^2-1}{b^2-4} \\ &= \frac{2a-b}{a+1} - \frac{(a-1)^2}{b-2} \cdot \frac{b^2-4}{a^2-1} = \frac{2a-b}{a+1} - \frac{(a-1)(b+2)}{a+1} \\ &= \frac{2a-b-ab-2a+b+2}{a+1} = \frac{2-ab}{a+1} \end{aligned}$$

Chú ý: Ta phải làm phép chia phân thức trước, không phải “trừ” trước

$$b) \text{Ta có } B = \left(\frac{a-b}{a^2+ab} - \frac{a}{b^2+ab} \right) : \left(\frac{b^2}{a^3-ab^2} + \frac{1}{a+b} \right)$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{ab-b^2-a^2}{ab(a+b)} \cdot \frac{b^2+a(a-b)}{a(a^2-b^2)} = -\frac{ab-b^2-a^2}{ab(a+b)} \cdot \frac{a(a^2-b^2)}{b^2+a(a-b)} \\
&= -\frac{(a^2+b^2-ab) \cdot a \cdot (a^2-b^2)}{ab(a+b)(a^2+b^2-ab)} = \frac{b-a}{b}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c) \text{ Ta có } C &= \left(\frac{2x}{y+2x} - \frac{4x^2}{y^2+4xy+4x^2} \right) : \left(\frac{2x}{y^2-4x^2} + \frac{1}{2x-y} \right) \\
&= \left(\frac{2x}{y+2x} - \frac{4x^2}{y^2+4xy+4x^2} \right) : \left(\frac{2x-(y+2x)}{y^2-4x^2} \right) \\
&= \frac{2x(y+2x)-4x^2}{(y+2x)^2} \cdot \frac{y^2-4x^2}{(-y)} = \frac{2x(2x-y)}{2x+y}
\end{aligned}$$

VI. Tìm mmột phân thức thỏa mãn điều kiện cho trước

Bài toán 14. Tìm phân thức Q, biết:

$$a) \frac{x-y}{x^3+y^3} \cdot Q = \frac{x^2-2xy+y^2}{x^2-xy+y^2}$$

$$b) \frac{x+y}{x^3-y^3} \cdot Q = \frac{3x^2+3xy}{x^2+xy+y^2}$$

$$c) \frac{a^2-4b^2}{a^2-ab} : 2Q = \frac{a^2+2ab}{a-b}$$

$$\text{Hướng dẫn: } A \cdot Q = B \Rightarrow Q = \frac{B}{A}; \quad A : Q = B \Rightarrow Q = \frac{A}{B}$$

Lời giải

$$a) \text{ Ta có } Q = \frac{x^2-2xy+y^2}{x^2-xy+y^2} : \frac{x-y}{x^3+y^3} = \frac{(x-y)^2}{x^2-xy+y^2} \cdot \frac{(x+y)(x^2-xy+y^2)}{x-y} = x^2-y^2$$

$$b) \text{ Ta có } Q = \frac{3x^2+3xy}{x^2+xy+y^2} : \frac{x+y}{x^3-y^3} = \frac{3x(x+y)}{x^2+xy+y^2} \cdot \frac{(x-y)(x^2+xy+y^2)}{x+y} = 3x(x-y)$$

$$\begin{aligned}
c) \text{ Ta có } 2Q &= \frac{a^2-4b^2}{a^2-ab} : \frac{a^2+2ab}{a-b} = \frac{a^2-4b^2}{a(a-b)} \cdot \frac{a-b}{a(a+2b)} = \frac{a-2b}{a^2} \\
\Rightarrow Q &= \frac{a-2b}{2a^2}
\end{aligned}$$

C. BÀI TẬP

6.44. Rút gọn biểu thức

$$a) A = \left(1 + \frac{x}{y} + \frac{x^2}{y^2} \right) \left(1 - \frac{x}{y} \right) \cdot \frac{y^2}{x^3-y^3}$$

$$b) B = \frac{x}{xy-2y^2} - \frac{2}{x^2+x-2xy-2y} \cdot \left(1 + \frac{3x+x^2}{x+3} \right)$$

6.45. Rút gọn biểu thức

$$a) A = \frac{x}{x+1} \cdot \frac{x+1}{x+2} \cdot \frac{x+2}{x+3} \cdot \frac{x+3}{x+4} \cdot \frac{x+4}{x+5}$$

$$b) B = \frac{(x^2+x)}{(x^2+3x+2)} \cdot \frac{x^2+5x+6}{x^3+7x+12}$$

6.46. Cho $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0$. Chứng minh $\frac{bc}{a^2} + \frac{ca}{b^2} + \frac{ab}{c^2} = 3$

6.47. Cho $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} = 1$. Chứng minh rằng: $\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} = 0$

6.48. Tính tổng $S = \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{(n+1)(n+2)}$

6.49. Làm phép chia

a) $\frac{a^2 - b^2}{9b^2} : \frac{a+b}{3b}$

b) $a : \left(a + \frac{1}{a}\right)$

c) $\frac{a^2 - 25}{a^2 - 3a} : \frac{a+5}{9-a^2}$

6.50. Làm tính chia

a) $\frac{3x^3 + 3}{x-1} : (x^2 - x + 1)$

b) $(4x^2 - 16) : \frac{3x-6}{7x-2}$

c) $\frac{4x+6y}{x-1} : \frac{4x^2 + 12xy + 9y^2}{1-x^3}$

d) $\frac{4(x+3)}{3x^2 - x} : \frac{x^2 + 3x}{1-3x}$

6.51. Rút gọn biểu thức

a) $A = \frac{x^4 - xy^3}{2xy + y^2} : \frac{x^3 + x^2y + xy^2}{2x + y}$

b) $B = \frac{5x^2 - 10xy + 5y^2}{2x^2 - 2xy + 2y^2} : \frac{8x - 8y}{10x^3 - 10y^3}$

c) $C = \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 + 3x - 10} : \frac{x^2 + 7x + 12}{x^2 - 9x + 14}$

d) $D = \frac{x^5 - 5x + 6}{x^2 + 7x + 12} : \frac{x^2 - 4x + 4}{x^2 + 3x}$

6.52. Rút gọn biểu thức

a) $A = \left(\frac{a^2}{a+b} - \frac{a^3}{a^2 + b^2 + 2ab} \right) : \left(\frac{a}{a+b} - \frac{a^2}{a^2 - b^2} \right)$

b) $B = \left(\frac{a^2 + b^2}{a} + b \right) : \left[\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right) \cdot \frac{a^3 - b^3}{a^2 + b^2} \right]$

6.53. Tìm Q , biết:

a) $\frac{a+1}{a^2 - 1} \cdot Q = \frac{2a+2}{a^2 + a + 1}$

b) $\frac{a+b}{a-b} \cdot Q = \frac{a^2 + ab}{2a^2 - 2b^2}$

c) $\frac{a^2 - 2ab}{a^2 b} \cdot Q = \frac{a^2 b - 4b^3}{3ab^2}$

6.54. Làm tính nhân phân thức:

a) $\left(-\frac{3x}{5xy^2} \right) \cdot \left(-\frac{5y^2}{12xy} \right)$

b) $\frac{x^2 - x}{2x+1} \cdot \frac{4x^2 - 1}{x^3 - 1}$

6.55. Làm tính chia phân thức:

a) $\left(-\frac{3x}{5xy^2} \right) : \left(-\frac{5y^2}{12xy} \right)$

b) $\frac{4x^2 - 1}{8x^3 - 1} : \frac{4x^2 + 4x + 1}{4x^2 + 2x + 1}$

6.56. Tìm hai phân thức P và Q thỏa mãn:

a) $P \cdot \frac{x+1}{2x+1} = \frac{x^2 + x}{4x^2 - 1}$

b) $Q : \frac{x^2}{x^2 + 4x + 4} = \frac{(x+1)(x+2)}{x^2 - 2x}$

6.57. Cho hai phân thức $P = \frac{x^2 + 6x + 9}{x^2 + 3x}$ và $Q = \frac{x^2 + 3x}{x^2 - 9}$

a) Rút gọn P và Q .

b) Sử dụng kết quả của câu a, tính $P \cdot Q$ và $P : Q$.

6.58. Thực hiện phép tính:

a) $\frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx}$ b) $\frac{x}{2x-y} + \frac{y}{2x+y} + \frac{3xy}{y^2 - 4x^2}$

6.59. Thực hiện phép tính:

a) $\frac{4x-6}{5x^2-x} \cdot \frac{25x^2-10x+1}{27-8x^3}$

b) $\frac{2x+10}{(x-3)^2} : \frac{(x+5)}{x^2-9}$

6.60. Thực hiện phép tính:

b) $\frac{4x^2-1}{16x^2-1} \cdot \left(\frac{1}{2x+1} + \frac{1}{2x-1} + \frac{1}{1-4x^2} \right)$

b) $\left(\frac{x+y}{xy} - \frac{2}{x} \right) \cdot \frac{x^3y^3}{x^3-y^3}$

6.61. Cho biểu thức $P = \frac{x^2-6x+9}{9-x^2} + \frac{4x+8}{x+3}$

a) Rút gọn P .

b) Tính giá trị của P tại $x = 7$

c) Chứng tỏ $P = 3 + \frac{2}{x+3}$. Từ đó tìm tất cả các giá trị nguyên của x sao cho biểu thức đã cho nhận giá trị nguyên.

6.62. Một xưởng may lập kế hoạch may 80000 bộ quần áo trong x ngày. Nhờ cải tiến kĩ thuật, xưởng đã hoàn thành kế hoạch sớm 11 ngày và may vượt kế hoạch 100 bộ quần áo.

a) Hãy viết phân thức theo biến x biểu thị số bộ quần áo mỗi ngày xưởng may được theo kế hoạch.

b) Viết phân thức biểu thị số bộ quần áo thực tế xưởng may được mỗi ngày?

c) Viết biểu thức biểu thị số bộ quần áo mỗi ngày xưởng may được nhiều hơn so với kế hoạch.

d) Nếu theo kế hoạch, mỗi ngày xí nghiệp may 800 bộ quần áo thì nhờ cải tiến kĩ thuật, mỗi ngày xưởng may được nhiều hơn so với kế hoạch bao nhiêu bộ quần áo?

↔ HẾT ↔

HƯỚNG DẪN GIẢI

6.44. a) $A = \left(1 + \frac{x}{y} + \frac{x^2}{y^2}\right) \left(1 - \frac{x}{y}\right) \cdot \frac{y^2}{x^3 - y^3} = \frac{y^3 - x^3}{y^3} \cdot \frac{y^2}{x^3 - y^3} = -\frac{1}{y}$

b) $B = \frac{x}{xy - 2y^2} - \frac{2}{x^2 + x - 2xy - 2y} \cdot \frac{(x+1)(x+3)}{3+x} = \frac{x}{y(x-2y)} - \frac{2}{x-2y} = \frac{x-2y}{y(x-2y)} = \frac{1}{y}$

6.45. a) $A = \frac{x}{x+5}$

b) $B = \frac{x(x+1)(x+2)(x+3)}{(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)} = \frac{x}{x+4}.$

6.46. Nếu $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0$.

$$\frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3} = \frac{3}{abc}$$

Ta lại có: $\frac{bc}{a^2} + \frac{ca}{b^2} + \frac{ab}{c^2} = \frac{abc}{a^3} + \frac{abc}{b^3} + \frac{abc}{c^3} = abc \left(\frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3} \right) = abc \cdot \frac{3}{abc} = 3$ (đpcm)

6.47. Ta có: $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} = 1$

$$\Rightarrow (a+b+c) \left(\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \right) = a+b+c$$

$$\Rightarrow \frac{a^2}{b+c} + a + \frac{b^2}{c+a} + b + \frac{c^2}{a+b} + c = a+b+c$$

$$\Rightarrow \frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} = 0$$

6.48. Ta có: $\frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}$ với $n \in N$

Vậy: $\frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{n+2} = \frac{n}{2(n+2)} = \frac{n}{2n+4}$$

6.47. Ta có: $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} = 1$

$$\Rightarrow (a+b+c) \left(\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \right) = a+b+c$$

$$\Rightarrow \frac{a^2}{b+c} + a + \frac{b^2}{c+a} + b + \frac{c^2}{a+b} + c = a+b+c$$

$$\Rightarrow \frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} = 0$$

6.48. Ta có: $\frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}$ với $n \in N$

$$\begin{aligned} \text{Vậy: } & \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \\ & = \frac{1}{2} - \frac{1}{n+2} = \frac{n}{2(n+2)} = \frac{n}{2n+4} \end{aligned}$$

Bài toán tương tự: Chứng minh rằng với mọi $n \in N^*$, ta có:

$$1. \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \dots + \frac{1}{n^2 + 3n + 2} = \frac{n}{2n+4}$$

$$2. \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n}{2n+1}$$

$$3. \frac{1}{1.5} + \frac{1}{5.9} + \frac{1}{9.13} + \dots + \frac{1}{(4n-3)(4n+1)} = \frac{n}{4n+1}$$

6.49. a) $\frac{a^2 - b^2}{9b^2} : \frac{a+b}{3b} = \frac{a^2 - b^2}{9b^2} \cdot \frac{3b}{a+b} = \frac{a-b}{3b}$

b) $a : \left(a + \frac{1}{a}\right) = a \cdot \frac{a}{a^2 + 1} = \frac{a^2}{a^2 + 1}$

c) $\frac{a^2 - 25}{a^2 - 3a} : \frac{a+5}{9-a^2} = \frac{a^2 - 25}{a^2 - 3a} \cdot \frac{9-a^2}{a+5} = \frac{-(a-5)(a+3)}{a} = \frac{(5-a)(a+3)}{a}$

6.50. a) $\frac{3x^3 + 3}{x-1} : (x^2 - x + 1) = \frac{3(x^3 + 1)}{x-1} \cdot \frac{1}{x^2 - x + 1} = \frac{3(x+1)}{x-1}$

b) $\frac{3x^3 + 3}{x-1} : (4x^2 - 16) : \frac{3x-6}{7x-2} = \frac{4(x^2 - 4)(7x-2)}{3(x-2)} = \frac{4(x+2)(7x-2)}{3}$

c) $\frac{4x+6}{x-1} : \frac{4x^2 + 12xy + 9y^2}{1-x^2} = \frac{2(2x+3y)}{x-1} \cdot \frac{1-x^3}{(2x+3y)^2} = -\frac{2(1+x+x^2)}{2x+3y}$

d) $\frac{4(x+3)}{3x^2 - x} : \frac{x^2 + 3x}{1-3x} = \frac{4(x+3)}{x(3x-1)} \cdot \frac{1-3x}{x(x+3)} = -\frac{4}{x^2}$

6.51. a) $A = \frac{x^4 - xy^3}{2xy + y^2} : \frac{x^3 + x^2y + xy^2}{2x + y} = \frac{x(x^3 - y^3)}{y(2x+y)} \cdot \frac{2x+y}{x^3 + x^2y + xy^2} = \frac{x-y}{y}$

b) $B = \frac{5x^2 - 10xy + 5y^2}{2x^2 - 2xy + 2y^2} : \frac{8x - 8y}{10x^3 - 10y^3} = \frac{5(x-y)^2}{2(x-y)^2} : \frac{8(x-y)}{10(x^3 - y^3)} = \frac{5}{2} \cdot \frac{10(x^3 - y^3)}{8(x-y)}$

$$= \frac{25}{8}(x^2 + xy + y^2)$$

$$\text{c) } C = \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 + 3x - 10} : \frac{x^2 + 7x + 12}{x^2 - 9x + 14} = \frac{(x+1)(x-3)}{(x-2)(x+5)} \cdot \frac{(x-7)(x-2)}{(x+3)(x+4)} = \frac{(x+1)(x-3)(x-7)}{(x+3)(x+4)(x+5)}$$

$$\text{d) } D = \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 + 7x + 12} : \frac{x^2 - 4x + 4}{x^2 + 3x} = \frac{(x-2)(x-3)}{(x+3)(x+4)} \cdot \frac{x(x+3)}{(x-2)^2} = \frac{x(x-3)}{(x-2)(x+4)}$$

$$6.52. \quad \text{a) } A = \frac{a^2(a+b)-a^3}{(a+b)^2} : \frac{a(a-b)-a^2}{a^2-b^2} = \frac{a^2b}{(a+b)^2} \cdot \frac{a^2-b^2}{-ab} = \frac{-a(a-b)}{a+b} = \frac{ab-a^2}{a+b}$$

$$\text{b) } B = \frac{a^2 + b^2 + ab}{a} : \left[\frac{a^2 + b^2}{a^2 b^2} \cdot \frac{a^3 - b^3}{a^2 + b^2} \right] = \frac{a^2 + ab + b^2}{a} \cdot \frac{a^2 b^2}{a^3 - b^3} = \frac{ab^2}{a - b}$$

6.53. a) Ta có: $Q = \frac{2a+2}{a^2+a+1} : \frac{a+1}{a^2-1} = \frac{2(a+1)}{a^2+a+1} \cdot \frac{a^2-1}{a+1} = \frac{2(a^2-1)}{a^2+a+1}$

$$\text{b) Ta có } Q = \frac{a^2 + ab}{2a^2 - 2b^2} : \frac{a+b}{a-b} = \frac{a(a+b)}{2(a^2 - b^2)} \cdot \frac{a-b}{a+b} = \frac{a}{2(a+b)}$$

$$\text{c) Ta có } Q = \frac{a^2b - 4b^2}{3ab^2} : \frac{a^2 - 2ab}{a^2b} = \frac{b(a^2 - 4b^2)}{3a^2b} \cdot \frac{a^2b}{a(a - 2b)} = \frac{(a + 2b)b}{3a}$$

$$6.57. \quad a) P = \frac{x+3}{x}; Q = \frac{x}{x-3} \quad b) P \cdot Q = \frac{x+3}{x-3}; Q = \frac{x^2-9}{x^2}$$

6.58. a) $\frac{x+y+z}{xyz}$ b) $\frac{2x^2-y^2}{4x^2-y^2}$

6.60. a) Dáp sô: $\frac{1}{4x+1}$ b) Dáp sô: $\frac{x^2y^2}{x^2+xy+y^2}$

$$6.61. \quad a) P = \frac{(3-x)^2}{9-x^2} + \frac{4x+8}{x+3} = \frac{3-x}{x+3} + \frac{4x+8}{x+3} = \frac{3x+11}{x+3}$$

b) Thay $x = 7$ vào biểu thức $\frac{3x+11}{x+3}$, ta được $P = \frac{16}{5}$

$$\text{c) Ta có: } P = \frac{3x+11}{x+3} = \frac{3(x+3)+2}{x+3} = 3 + \frac{2}{x+3}$$

P nhận giá trị nguyên khi $x \in Z$ và $x+3$ là ước

P nhận giá trị nguyên khi $x \in \mathbb{Z}$ và $x+3$ là ước nguyên của 2.

Vậy $x + 3 = -2; x + 3 = 2; x + 3 = -1; x + 3 = 1$ ($x \in Z$)

Ta tìm được $x = -5; x = -1; x = -4; x = -2$.

6.62. a) $\frac{80000}{x}$

b) $\frac{80100}{x-11}$

c) $\frac{80100}{x-11} - \frac{80000}{x}$

d) Dáp số: 100 bộ quần áo

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG VI

A. TRẮC NGHIỆM.

Câu 1. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\frac{(x-1)^2}{x-2} = \frac{(1-x)^2}{2-x}$ **B.** $\frac{3x}{(x+2)^2} = \frac{3x}{(x-2)^2}$ **C.** $\frac{3x}{(x+2)^2} = \frac{-3x}{(x-2)^2}$ **D.** $\frac{3x}{(x+2)^2} = \frac{3x}{(-x-2)^2}$.

Câu 2. Khẳng định nào sau đây sai?

A. $\frac{-6x}{-4x^2(x+2)^2} = \frac{3}{2x(x+2)^2}$.	B. $\frac{-5}{-2} = \frac{10}{4x}$.
C. $\frac{x+1}{x-1} = \frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}$.	D. $\frac{-6x}{-4(-x)^2(x-2)^2} = \frac{3}{2x(-x+2)^2}$.

Câu 3. Trong đẳng thức $\frac{2x^2+1}{x-1} = \frac{8x^3+4x}{Q}$. Q là đa thức

A. $4x$. **B.** $4x^2$. **C.** 4 . **D.** $16x^2 - 4$.

Câu 4. Nếu $\frac{-5x+5}{2xy} = -\frac{9x-7}{2xy} = \frac{bx+c}{xy}$ thì $b+c$ bằng

A. -4 . **B.** 8 . **C.** 4 . **D.** -10 .

Câu 5. Một ngân hàng huy động vốn với mức lãi suất một năm (tính theo %) là x . Để sau một năm, người gửi được lãi a đồng thì người đó phải gửi vào ngân hàng số tiền là:

A. $\frac{100a}{x}$ (đồng). **B.** $\frac{a}{x+100}$ (đồng). **C.** $\frac{a}{x+1}$ (đồng). **D.** $\frac{100x}{x+100}$ (đồng).

Đáp án

Câu 1. Chọn **D**. Vì $(-x-2)^2 = (x+2)^2$.

Câu 2. Chọn **C**. Vì $(x+1)(x^2-x+1) = x^3+1$; $(x-1)(x^2+x+1) = x^3-1$.

Câu 3. Chọn **D**.

$$\text{Ta có } Q = \frac{(8x^3+4x)(4x-1)}{2x^2+1} = \frac{4x(2x^3+1)(4x-1)}{2x^2+1} = 4x(4x-1) = 16x^2 - 4x.$$

Câu 4. Ta có $\frac{-5x+5}{2xy} - \frac{-9x-7}{2xy} = \frac{-5x+5}{2xy} + \frac{9x+7}{2xy} = \frac{-5x+5+9x+7}{2xy} = \frac{4x+12}{2xy} = \frac{2x+6}{xy}$.

$$\text{Vậy } \frac{2x+6}{xy} = \frac{bx+c}{xy} \Rightarrow b=2; c=6 \Rightarrow b+c=8.$$

Chọn **B**.

Câu 5. Lãi suất một năm là $x\%$. Người đó gửi y đồng nên một năm số tiền lãi là: $\frac{4y}{100}$ (đồng)

$$\text{Vậy số tiền lãi là: } a = \frac{yx}{100} \Rightarrow y = \frac{100a}{x}.$$

Chọn A.

B. TỰ LUẬN.

Bài 1. Tìm đa thức P trong các đẳng thức sau:

a) $P + \frac{1}{x+2} = \frac{x}{x^2 - 2x + 4}$.

b) $P - \frac{4(x-2)}{x+2} = \frac{16}{x-2}$.

c) $P \cdot \frac{x-2}{x+3} = \frac{x^2 - 4x + 4x}{x^2 - 9}$.

d) $P : \frac{x^2 - 9}{2x+4} = \frac{x^2 - 4}{x^2 + 3x}$.

Lời giải

a) $P = \frac{x}{x^2 - 2x + 4} - \frac{1}{x+2}$.

$$\Rightarrow P = \frac{4x-4}{(x+2)(x^2 - 2x + 4)} \Rightarrow P = \frac{4x-4}{x^3 + 8}.$$

b) $P = \frac{16}{x-2} + \frac{4(x-2)}{x+2} \Rightarrow P = \frac{16(x+2) + 4(x-2)^2}{(x-2)(x+2)} \Rightarrow P = \frac{x^2 + 48}{x^2 - 4}$.

c) $P = \frac{x^2 - 4x + 4x}{x^2 - 9} \cdot \frac{x-2}{x+3} = \frac{(x-2)^2}{(x-3)(x+3)} \cdot \frac{x+3}{x-2} = \frac{x-2}{x-3}$.

d) $P = \frac{x^2 - 4}{x^2 + 3x} \cdot \frac{x^2 - 9}{2x+4} = \frac{(x-2)(x+2)}{x(x+3)} \cdot \frac{(x-3)(x+3)}{2(x+2)} = \frac{(x-2)(x-3)}{2x} = \frac{x^2 - 5x + 6}{2x}$.

Bài 2. Cho phân thức $P = \frac{2x+1}{x+1}$.

a) Viết điều kiện xác định của P .

b) Hãy viết P dưới dạng $P = a - \frac{b}{x+1}$, trong đó a, b là hai số nguyên dương.

c) Với giá trị nguyên nào của x thì P có giá trị là số nguyên?

Lời giải

a) Điều kiện xác định của P là $x+1 \neq 0 \Rightarrow x \neq -1$.

b) Ta có $P = \frac{2x+2-1}{x+1} \Rightarrow P = \frac{2(x+1)-1}{x+1} \Rightarrow P = 2 - \frac{1}{x+1}$.

Vậy $a = 2; b = 1$.

c) P có giá trị nguyên khi $\frac{1}{x+1}$ nhận giá trị nguyên ($x \in \mathbb{Z}$).

Khi $x+1$ là ước nguyên của 1.

$$\Rightarrow x+1=1 \text{ hoặc } x+1=-1 \Rightarrow x=0 \text{ hoặc } x=-2.$$

Bài 3. Một ô tô từ Hà Nội đến Vinh với vận tốc trung bình 60 km/h và dự kiến sẽ đến Vinh sau 5 giờ xe chạy. Tuy nhiên, sau $2\frac{2}{3}$ giờ chạy với vận tốc 60 km/h, xe dừng nghỉ, để đến Vinh đúng thời gian dự kiến, xe phải tăng vận tốc so với chặng đầu.

a) Tính độ dài quãng đường Hà Nội – Vinh.

b) Tính độ dài quãng đường còn lại sau khi dừng nghỉ.

c) Cho biết ở chặng thứ hai xe tăng vận tốc lên x (km/h). Hãy viết biểu thức P biểu thị thời gian (tính bằng giờ) thực tế xe chạy hết chặng đường Hà Nội – Vinh.

d) Tính giá trị của P lần lượt tại $x = 5$; $x = 10$; $x = 15$, từ đó cho biết ở chặng thứ hai (sau khi xe dừng nghỉ):

- Nếu tăng vận tốc thêm 5 km/h thì xe đến Vinh muộn hơn dự kiến bao nhiêu giờ?
- Nếu tăng vận tốc thêm 10 km/h thì xe đến Vinh đúng thời gian dự kiến bao nhiêu?
- Nếu tăng vận tốc thêm 15 km/h thì xe đến Vinh sớm hơn dự kiến bao nhiêu giờ?

Lời giải

a) Quãng đường Hà Nội – Vinh: $60 \cdot 5 = 300$ (km)

b) $2\frac{2}{3}$ giờ = $\frac{8}{3}$ giờ

Ta có: $60 \cdot \frac{8}{3} = 160$ (km)

Quãng đường còn lại: $300 - 160 = 140$ (km)

c) Ta có: 20 phút = $\frac{1}{3}$ giờ

Vậy $P = \frac{8}{3} + \frac{1}{3} + \frac{140}{x+60}$.

$$\Rightarrow P = 3 + \frac{140}{x+60} \Rightarrow P = \frac{3x+320}{x+60} \text{ (giờ)}$$

d) $x = 5 \Rightarrow P = \frac{65}{13}; .$

$x = 10 \Rightarrow P = 5; .$

$x = 15 \Rightarrow P = \frac{73}{15}; .$

Nếu tăng thêm 5 km/h thì xe đến Vinh đúng thời gian dự kiến là $\frac{65}{13} - 5 = \frac{2}{13}$ (giờ)

Nếu tăng thêm 10 km/h thì xe đến Vinh đúng thời gian dự kiến.

$\frac{73}{15} < 5$ nên xe đến Vinh sớm hơn thời gian dự kiến là $5 - \frac{73}{15} = \frac{2}{15}$ (giờ)

☞ HẾT ☞

CHƯƠNG VII: PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT

VÀ HÀM SỐ BẬC NHẤT

Bài 25: PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT MỘT ẨN

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Phương trình một ẩn

- Nhận biết phương trình một ẩn

Một phương trình với ẩn x có dạng $A(x) = B(x)$ trong đó vế trái $A(x)$ và vế phải $B(x)$ là hai biểu thức của cùng biến x .

- Nhận biết khái niệm nghiệm của phương trình

Số x_0 gọi là nghiệm của phương trình $A(x) = B(x)$ nếu giá trị của $A(x)$ và $B(x)$ tại x_0 bằng nhau.

Giải một phương trình là tìm tất cả các nghiệm của nó.

Chú ý: Tập hợp tất cả các nghiệm của một phương trình gọi là tập nghiệm của phương trình đó và thường được kí hiệu là S .

2. Phương trình bậc nhất một ẩn và cách giải

Khái niệm phương trình bậc nhất một ẩn

Phương trình một ẩn đơn giản nhất là phương trình có dạng sau:

Phương trình dạng $ax+b=0$, với a, b là hai số đã cho và $a \neq 0$, được gọi là phương trình bậc nhất một ẩn x .

Cách giải phương trình bậc nhất một ẩn

- Phương trình bậc nhất $ax+b=0$ ($a \neq 0$) được giải như sau:

$$ax + b = 0$$

$$a.x = -b$$

$$x = -\frac{b}{a}$$

Phương trình bậc nhất $ax+b=0$ ($a \neq 0$) luôn luôn có một nghiệm duy nhất: $x = -\frac{b}{a}$.

3. Phương trình đưa được về dạng $ax+b=0$

Phương trình đưa về dạng $ax+b=0$

Bằng cách chuyển vế và nhân cả hai vế của phương trình với một số khác 0, ta có thể đưa một phương trình ẩn x về dạng $ax+b=0$ và do đó có thể giải được chúng.

B. PHÂN LOẠI CÁC BÀI TẬP

1. Nghiệm của phương trình

Bài toán 1. Chứng tỏ $x = 2$ là nghiệm của phương trình:

a) $12 - 7x = 3x - 8$ (1)

b) $x^2 - 3x + 7 = 1 + 2x$ (2)

Hướng dẫn: Nghiệm của phương trình $A(x) = B(x)$ là một giá trị a của ẩn số x sao cho $A(a) = B(a)$ là đẳng thức đúng.

Lời giải

a) Thay $x = 2$ vào phương trình (1), ta có:

$$12 - 7 \cdot 2 = 3 \cdot 2 - 8 \text{ hay } -2 = -2 \text{ (luôn đúng)}$$

Vậy $x = 2$ là nghiệm của phương trình (1).

b) Thay $x = 2$ vào phương trình (2), ta có:

$$2^2 - 3 \cdot 2 + 7 = 1 + 2 \cdot 2 \text{ hay } 4 - 6 + 7 = 1 + 4$$

$$\text{hay } 5 = 5 \text{ (luôn đúng)}$$

Vậy $x = 2$ là nghiệm của phương trình (2).

Bài toán 2. Cho phương trình $x^2 - 3x - 4 = 0$ (*)

Trong các số: $-1; 1; 4; -4$ số nào là nghiệm của phương trình.

Hướng dẫn: Nếu $x = a$, ta có $A(a) \neq B(a)$ thì $x = a$ không phải là nghiệm của phương trình $A(x) = B(x)$.

Lời giải

• Thay $x = -1$ vào phương trình (*), ta có:

$$(-1)^2 - 3 \cdot (-1) - 4 = 0 \Leftrightarrow 1 + 3 - 4 = 0 \text{ (luôn đúng)}$$

Vậy $x = -1$ là nghiệm của phương trình (*).

• Thay $x = 1$ vào phương trình (*), ta có:

$$1^2 - 3 \cdot 1 - 4 = 0 \Leftrightarrow 1 - 7 = 0 \text{ (sai)}$$

Vậy $x = 1$ không là nghiệm của phương trình (*).

• Tương tự: $4^2 - 3 \cdot 4 - 4 = 0$ (đúng) nên $x = 4$ là nghiệm của (*).

$$(-4)^2 - 3 \cdot (-4) - 4 = 0 \text{ (sai) nên } x = -4 \text{ không là nghiệm của (*).}$$

Bài toán 3. Tìm m , biết $x = 1$ là nghiệm của phương trình:

$$4x - 3 = 2x + m$$

Hướng dẫn: $x = a$ là nghiệm của phương trình $A(x) = B(x)$ nếu $A(a) = B(a)$ là đẳng thức đúng.

Lời giải

Vì $x = 1$ là nghiệm của phương trình đã cho, nên ta có:

$$4 \cdot 1 - 3 = 2 \cdot 1 + m \Leftrightarrow 4 - 3 = 2 + m \Leftrightarrow m = 1 - 2 \Leftrightarrow m = -1$$

Bài toán 4. Tìm một vài phương trình ẩn x có nghiệm là 3.

Lời giải

Phương trình ẩn x có nghiệm là 3 $\Rightarrow x = 3$ hay $x - 3 = 0$

Ta có phương trình $x - 3 = 0$ nhận 3 là nghiệm.

- $(x - 3)^2 = 0$ hay $x^2 - 6x + 9 = 0$ nhận 3 là nghiệm.
- $x - 3 = 0 \Rightarrow 2(x - 3) = 0$ hay $2x - 6 = 0$ nhận 3 là nghiệm v.v...

Bài toán 5. Chứng tỏ phương trình $x^2 + 1 = 0$ vô nghiệm.

Lời giải

Vì $x^2 \geq 0$ với mọi $x \Rightarrow x^2 + 1 > 0$, với mọi x .

Vậy phương trình $x^2 + 1 = 0$ vô nghiệm.

Chú ý: ta viết $S = \emptyset$ là tập nghiệm của phương trình $x^2 + 1 = 0$.

Tương tự

- $2x + 5 = 2x - 3 \Leftrightarrow 2x - 2x = -5 - 3 \Leftrightarrow 0x = -8$
Vậy phương trình đã cho vô nghiệm.
- $|x - 1| = -2$
- Vì $|x - 1| \geq 0$ với mọi x , nên phương trình vô nghiệm.

Bài toán 6. Chứng tỏ phương trình sau có vô số nghiệm:

a) $3x - 8 = 2(x - 12) + x + 16 \quad (1)$

b) $x^2 - 4x + 4 = (x + 2)^2 - 8x \quad (2)$

c) $x^2 - 5x + 6 = (x - 3)(x - 2) \quad (3)$

Hướng dẫn: Phương trình $A(x) = B(x)$ có vô số nghiệm nếu $A(x) = B(x)$ nghiệm đúng với mọi giá trị của x .

Lời giải

a) $3x - 8 = 2x - 24 + x + 16, 3x - 8 = 3x - 8$

Vậy phương trình (1) nghiệm đúng với mọi giá trị của x hay phương trình (1) có vô số nghiệm.

b) $x^2 - 4x + 4 = x^2 + 4x + 4 - 8x$

$$x^2 - 4x + 4 = x^2 - 4x + 4 \quad (\text{luôn đúng với mọi } x)$$

Vậy phương trình (2) có vô số nghiệm.

c) $x^2 - 5x + 6 = x^2 - 2x - 3x + 6$

$$x^2 - 5x + 6 = x^2 - 5x + 6 \quad (\text{luôn đúng với mọi } x)$$

Vậy phương trình (3) có vô số nghiệm.

Bài toán 7. Chứng tỏ phương trình sau có vô số nghiệm:

a) $|x-1|=|1-x|$ (1)

b) $3(1-x)+2=5-3x$ (2)

Lời giải

a) Ta có (1) $|x-1|=|-(1-x)|$

$|x-1|=|-(1-x)|$ (luôn đúng)

Vậy (1) có vô số nghiệm.

b) Ta có (2): $3-3x+2=5-3x$ (luôn đúng)

Vậy (2) có vô số nghiệm.

II. Giải phương trình hệ bậc nhất một ẩn

Bài toán 8. Giải phương trình:

a) $25x-1=10$ (1)

b) $8x-(7x+8)=9$ (2)

c) $5x+3(3x+7)=35$ (3)

d) $5(x-3)-2(x-7)+7(2x+6)=7$ (4)

Hướng dẫn: Áp dụng các quy tắc nêu trên, biến đổi tương đương đưa phương trình về dạng $ax+b=0$ hoặc $ax=c$.

Lời giải

a) Ta có (1): $25x=1+10 \Leftrightarrow x=\frac{11}{25}$

Vậy tập nghiệm: $S=\left\{\frac{11}{25}\right\}$

b) Ta có (2): $8x-7x-8=9 \Leftrightarrow x=8+9 \Leftrightarrow x=17$

Vậy tập nghiệm: $S=\{17\}$

c) Ta có (3): $5x+9x+21=35 \Leftrightarrow 14x=35-21$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow 14x=14 \\ &\Leftrightarrow x=1 \end{aligned}$$

Vậy tập nghiệm: $S=\{1\}$

d) Ta có (4): $5x-15-2x+14+14x+42=7$

$$\Leftrightarrow 17x=-41+7$$

$$\Leftrightarrow 17x=-34 \Leftrightarrow x=-2$$

Vậy tập nghiệm: $S=\{-2\}$.

Bài toán 9. Giải phương trình:

a) $x(x-2)(x+2)-(x-3)(x^2+3x+9)=-1$ (1)

b) $(2x-1)(4x^2+2x+1)-4x(2x^2-3)=23$ (2)

c) $2x(x+2)^2-8x^2=2(x-2)(x^2+2x+4)$ (3)

d) $(x-1)(x^2+x+1)-2x=x(x-1)(x+1)$ (4)

Hướng dẫn: Rút gọn các biểu thức bằng cách áp dụng hằng đẳng thức đáng nhớ.

Lời giải

a) Ta có (1): $x(x^2-4)-(x^3-27)=-1$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow x^3 - 4x - x^3 + 27 = -1 \\ &\Leftrightarrow -4x = -28 \Leftrightarrow x = 7 \end{aligned}$$

Vậy tập nghiệm: $S = \{7\}$

b) Ta có (2): $(2x)^3 - 1^3 - 8x^3 + 12x = 23$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow 8x^3 - 1 - 8x^3 + 12x = 23 \\ &\Leftrightarrow 12x = 23 + 1 \Leftrightarrow x = 2 \end{aligned}$$

Vậy tập nghiệm: $S = \{2\}$

c) Ta có (3): $2x(x^2+4x+4)-8x^2=2(x^3-8)$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow 2x^3 + 8x^2 + 8x - 8x^2 = 2x^3 - 16 \\ &\Leftrightarrow 8x = -16 \Leftrightarrow x = -2 \end{aligned}$$

Vậy tập nghiệm: $S = \{-2\}$

d) Ta có (4): $x^3 - 1 - 2x = x(x^2 - 1)$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow x^3 - 1 - 2x = x^3 - x \\ &\Leftrightarrow -2x + x = 1 \Leftrightarrow -x = 1 \Leftrightarrow x = -1. \end{aligned}$$

Vậy phương trình có tập nghiệm là: $S = \{-1\}$.

Bài toán 10. Giải phương trình:

a) $\frac{x}{3} - \frac{2x+1}{6} = \frac{x}{6} - x$ (1)

b) $\frac{x+2}{5} - \frac{1}{2}x = \frac{1-2x}{4} + \frac{1}{4}$ (2)

c) $\frac{x-1}{2} + \frac{x-1}{4} = 1 - \frac{2(x-1)}{3}$ (3)

d) $\frac{x+1}{3} + \frac{3(2x+1)}{4} = \frac{2x+3(x+1)}{6} + \frac{12x+7}{12}$ (4)

Hướng dẫn: Quy đồng mẫu các phân thức ở hai vế và áp dụng tính chất: $\frac{A}{B} = \frac{C}{B} \Leftrightarrow A = C$ hoặc

$$\frac{A}{B} = \frac{C}{D} \Leftrightarrow A \cdot D = B \cdot C.$$

Lời giải

a) Ta có, (1): $\frac{x}{3} - \frac{2x+1}{6} = \frac{x-6x}{6} \Leftrightarrow 2x - 2x - 1 = -5x$

$$\Leftrightarrow 5x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{5}.$$

Vậy phương trình (1) có tập nghiệm: $S = \left\{ \frac{1}{5} \right\}$.

b) Ta có, (2): $\frac{2(x+2) - 5x}{10} = \frac{1 - 2x + 1}{4}$

$$\Leftrightarrow \frac{2x + 4 - 5x}{10} = \frac{1 - x}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x + 4 - 5x}{10} = \frac{5(1-x)}{10}$$

$$\Leftrightarrow -3x + 4 = 5 - 5x$$

$$\Leftrightarrow 5x - 3x = 5 - 4 \Leftrightarrow 2x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}.$$

Vậy phương trình (2) có tập nghiệm: $S = \left\{ \frac{1}{2} \right\}$.

c) Ta có, (3): $\frac{2x - 2 + x - 1}{4} = \frac{3 - 2x + 2}{3}$

$$\Leftrightarrow \frac{3x - 3}{4} = \frac{5 - 2x}{3}$$

$$\Leftrightarrow 3(3x - 3) = 4(5 - 2x)$$

$$\Leftrightarrow 9x - 9 = 20 - 8x$$

$$\Leftrightarrow 9x + 8x = 20 + 9$$

$$\Leftrightarrow 17x = 29 \Leftrightarrow x = \frac{29}{17}.$$

Vậy phương trình (3) có tập nghiệm: $S = \left\{ \frac{29}{17} \right\}$.

Chú ý: $\frac{A}{B} = \frac{C}{D} \Leftrightarrow A \cdot D = B \cdot C$

d) Ta có, (4): $4(x+1) + 9(2x+1) = 2[2x + 3(x+1)] + (12x+7)$

$$\Leftrightarrow 4x + 4 + 18x + 9 = 4x + 6x + 6 + 12x + 7$$

$$\Leftrightarrow 22x + 13 = 22x + 13 \text{ (luôn đúng với mọi } x \in R).$$

Vậy phương trình (4) có tập nghiệm: $S = R$.

III. Phương trình chứa tham số

Bài toán 11.

a) Tìm m để phương trình $3x + m = x - 4$ nhận $x = -2$ là nghiệm.

b) Tìm a để phương trình $(a - 1)x + 2 = a - 1$ có nghiệm $x = 2$.

Hướng dẫn: a) Thay $x = -2$ vào phương trình đã cho.

Lời giải

a) Vì $x = -2$ là nghiệm của phương trình đã cho, nên thay $x = -2$ vào phương trình, ta được:

$$\begin{aligned}3 \cdot (-2) + m &= -2 - 4 \Leftrightarrow -6 + m = -6 \\&\Leftrightarrow m = 6 - 6 \Leftrightarrow m = 0.\end{aligned}$$

b) Thay $x = 2$ vào phương trình đã cho, ta được:

$$\begin{aligned}(a - 1) \cdot 2 + 2 &= a - 1 \Leftrightarrow 2a - 2 + 2 = a - 1 \\&\Leftrightarrow 2a - a = -1 \Leftrightarrow a = -1.\end{aligned}$$

Bài toán 12.

a) Tìm m để phương trình $mx = 2 - x$ vô nghiệm.

b) Tìm m để phương trình $2mx - 3 = 4x$ có nghiệm.

Hướng dẫn: Biến đổi tương đương phương trình đã cho về dạng $ax + b = 0$.

Lời giải

a) Ta có: $mx = 2 - x \Leftrightarrow mx + x = 2$

$$\Leftrightarrow (m + 1)x = 2$$

Phương trình trên vô nghiệm: $\begin{cases} m + 1 = 0 \\ 2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = -1$.

Nhận xét:

Phương trình $(m + 1)x = 2$ có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow m + 1 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq -1$.

b) Ta có: $2mx - 3 = 4x$

$$\Leftrightarrow 2mx - 4x = 3 \Leftrightarrow (2m - 4)x = 3$$

Phương trình có nghiệm: $2m - 4 \neq 0$

$$\Leftrightarrow 2m \neq 4 \Leftrightarrow m \neq 2.$$

Nhận xét:

Phương trình $(2m - 4)x = 3$ vô nghiệm $2m - 4 = 0 \Leftrightarrow m = 2$.

c) Ta có: $(m + 1)x - x = m$

$$\Leftrightarrow mx + x - x = m \Leftrightarrow mx = m$$

Phương trình này có nghiệm duy nhất: $m \neq 0, x = 1$.

Nhận xét:

Khi $m = 0$ ta có $0x = 0$, luôn đúng với mọi $x \in R$.

Vậy $m = 0$, tập nghiệm của phương trình là $S = R$.

Bài toán 13. Giải và biện luận phương trình sau:

a) $3(m+1)x + 4 = 2x + 5(m+1)$ (1)

b) $m^2x = m(x+2) - 2$ (2)

c) $m^2x + 2 = 4x + m$ (3)

Hướng dẫn: Biến đổi tương đương phương trình đã cho về dạng $ax + b = 0$, xét trường hợp $a = 0$; $a \neq 0$.

Lời giải

a) Ta có, (1): $(3m+3)x + 4 = 2x + 5m + 5$

$$\Leftrightarrow (3m+3-2)x = 5m+5-4$$

$$\Leftrightarrow (3m+1)x = 5m+1 (*)$$

+ Nếu $3m+1 = 0 \Rightarrow m = -\frac{1}{3}$.

Phương trình (*): $0x = 5 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) + 1$ (vô nghiệm).

+ Nếu $3m+1 \neq 0 \Rightarrow m \neq -\frac{1}{3}$.

Ta có (*): $x = \frac{5m+1}{3m+1}$.

Dáp số:

• Nếu $m \neq -\frac{1}{3}$, phương trình (1) có tập nghiệm $S = \left\{ \frac{5m+1}{3m+1} \right\}$.

• Nếu $m = -\frac{1}{3}$, phương trình (1) có tập nghiệm $S = \emptyset$.

b) Ta có, (2): $m^2x = mx + 2m - 2$

$$\Leftrightarrow m^2x - mx = 2m - 2$$

$$\Leftrightarrow (m^2 - m)x = 2m - 2$$

$$\Leftrightarrow m(m-1)x = 2(m-1) (*)$$

+ Nếu $m = 0$, ta có (*): $0x = -2$ (Vô nghiệm).

+ Nếu $m-1 = 0$, ta có (*): $0x = 0$, phương trình có tập nghiệm: $S = R$.

+ Nếu $m \neq 0$ và $m \neq 1$, ta có (*): $x = \frac{2(m-1)}{m(m-1)} \Leftrightarrow x = \frac{2}{m}$

Dáp số:

- Nếu $m = 0$, phương trình (2) có tập nghiệm $S = \emptyset$.
- Nếu $m - 1 = 0$, phương trình (2) có tập nghiệm $S = R$.
- Nếu $m \neq 0$ và $m \neq 1$, phương trình (2) có tập nghiệm $S = \left\{ \frac{2}{m} \right\}$.

* **Chú ý:** Ta nói $m \neq 0$ và $m \neq 1$, chứ không phải $m \neq 0$ hoặc $m \neq 1$.

Bài toán 14. Giải và biện luận phương trình sau:

a) $(m+1)^2 x = (2x+1)m + 5x + 2 \quad (1)$

b) $a(2x-3) = x+b \quad (2)$

c) $(m+1)x - x - 2 = 0 \quad (3)$

d) $(m+1)^2 x + 1 - m = (7m-5)x \quad (4)$

Hướng dẫn: Biến đổi tương đương, đưa phương trình về dạng $ax + b = 0$ và xét $a = 0; a \neq 0$.

Lời giải

a) Ta có, (1): $(m^2 + 2m + 1)x = 2mx + m + 5x + 2$

$$\Leftrightarrow (m^2 + 2m + 1)x = 2mx + m + 5x + 2 \Leftrightarrow (m+2)(m-2)x = m + 2 \quad (*)$$

+ Nếu $m-2=0 \Rightarrow m=2$ ta có (*): $0x=4$ (vô nghiệm)

+ Nếu $m+2=0 \Rightarrow m=-2$ ta có (*): $0x=0$ (luôn đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$)

+ Nếu $m-2 \neq 0$ và $m+2 \neq 0 \Rightarrow m \neq 2$ và $m \neq -2$

$$\text{Ta có (*): } x = \frac{m+2}{(m-2)(m+2)}; x = \frac{1}{m-2}.$$

Dáp số: • Nếu $m=2$, tập nghiệm của phương trình (1) là $S=\emptyset$.

• Nếu $m=-2$, tập nghiệm: $S=\mathbb{R}$.

$$• \text{Nếu } m \neq 2 \text{ và } m \neq -2, \text{ tập nghiệm: } S = \left\{ \frac{1}{m-2} \right\}.$$

b) Ta có, (2): $2ax - 3a = x + b; (2a-1)x = 3a + b \quad (*)$

+ Nếu $2a-1 \neq 0 \Rightarrow a \neq \frac{1}{2}$ ta có (*): $x = \frac{3a+b}{2a-1}$

+ Nếu $2a-1=0 \Rightarrow a = \frac{1}{2}$ ta có (*): $0x = \frac{3}{2} + b$

+ Nếu $\frac{3}{2} + b = 0 \Rightarrow b = -\frac{3}{2}$ ta có (*): $0x = 0$ (luôn đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$)

+ Nếu $\frac{3}{2} + b \neq 0 \Rightarrow b \neq -\frac{3}{2}$ ta có phương trình (*) vô nghiệm

Đáp số: • Nếu $a \neq \frac{1}{2}$, phương trình (2) có tập nghiệm $S = \left\{ \frac{3a+b}{2a-1} \right\}$.

• Nếu $a = \frac{1}{2}$ và $b = -\frac{3}{2}$, phương trình (2) có tập nghiệm $S = \mathbb{R}$.

• Nếu $a = \frac{1}{2}$ và $b \neq -\frac{3}{2}$, phương trình (2) có tập nghiệm $S = \emptyset$.

c) Ta có, (3): $mx = 2$ (*)

+ Nếu $m = 0$, ta có (*): $0x = 2$ (vô nghiệm)

+ Nếu $m \neq 0$, ta có (*): $x = \frac{2}{m}$

Đáp số: • Nếu $m = 0$, phương trình (3) có tập nghiệm $S = \emptyset$.

• Nếu $m \neq 0$, phương trình (3) có tập nghiệm $S = \left\{ \frac{2}{m} \right\}$

d) Ta có, (4): $(m^2 + 2m + 1)x + 1 - m = 7mx - 5x$

$$(m^2 - 5m + 6)x = m - 1$$

$$(m^2 - 3m - 2m + 6)x = m - 1$$

$$(m-3)(m-2)x = m-1 (*)$$

+ Nếu $m = 3$ ta có (*): $0x = 2$ (vô nghiệm)

+ Nếu $m = 2$ ta có (*): $0x = 1$ (vô nghiệm)

+ Nếu $m \neq 3$ và $m \neq 2$, ta có (*): $x = \frac{m-1}{(m-3)(m-2)}$

Đáp số:

- Nếu $m = 3$ hoặc $m = 2$, phương trình (4) có tập nghiệm $S = \emptyset$
- Nếu $m \neq 3$ và $m \neq 2$, phương trình (4) có tập nghiệm:

$$S = \left\{ \frac{m-1}{(m-3)(m-2)} \right\}$$

Bài toán 15.

a) Tìm giá trị của a, b để phương trình $(a+1)x - x - 2 + b = 0$ vô nghiệm

b) Tìm giá trị của a, b để phương trình $a^2x + 3 = 4x + 2b$ vô nghiệm

Hướng dẫn: Biến đổi tương đương phương trình đã cho về dạng $Ax + B = 0$, phương trình vô nghiệm khi $A = 0$ và $B \neq 0$

Lời giải

a) Ta có $(a+1)x - x - 2 + b = 0 \Leftrightarrow ax = 2 - b$

Phương trình vô nghiệm : $a = 0$ và $b \neq 2$

Nhận xét:

+ Nếu $a \neq 0$, phương trình có nghiệm duy nhất: $x = \frac{2-b}{a}$

+ Nếu $a = 0$ và $b = 2$, ta có $0x = 0$ (luôn đúng với mọi $x \in R$)

b) Ta có : $a^2x + 3 = 4x + 2b$; $(a^2 - 4)x = 2b - 3$

$$(a-2)(a+2)x = 2b-3$$

Phương trình vô nghiệm : $(a-2)(a+2) = 0$ và $2b-3 \neq 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a-2=0 \\ a+2=0 \end{cases} \text{ và } b \neq \frac{3}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ a=-2 \end{cases} \text{ và } b \neq \frac{3}{2}$$

Đáp số: $a = 2$ và $b \neq \frac{3}{2}$ hoặc $a = -2$ và $b \neq \frac{3}{2}$.

Chú ý: Dấu mốc vuông đọc là “hoặc”.

Nhận xét:

+ Nếu $a \neq 2$ và $a \neq -2$, phương trình có nghiệm duy nhất: $x = \frac{2b+3}{a^2-4}$

+ Nếu $a = 2$ và $b = \frac{3}{2}$, phương trình có nghiệm duy nhất: $S = R$.

+ Nếu $a = -2$ và $b = \frac{3}{2}$, phương trình có nghiệm duy nhất: $S = R$.

IV. PHƯƠNG TRÌNH DẠNG: $A(x).B(x) = 0$

Bài toán 16. Giải phương trình:

a) $3x(x-1) - 2(1-x) = 0$ (1)

b) $x^2 - 4 - (x+5)(2-x) = 0$ (2)

c) $2x^3 + 4x^2 = x^2 + 2x$ (3)

Hướng dẫn: Biến đổi đưa về dạng: $A(x).B(x) = 0$. Khi $A(x) = 0$ hoặc $B(x) = 0$

Lời giải

a) Ta có

$$(1): 3x(x-1) - 2(x-1) = 0$$

$$(x-1)(3x-2) = 0$$

$$x-1=0 \text{ hoặc } 3x-2=0$$

$$x=1 \text{ hoặc } x=\frac{2}{3}$$

Phương trình (1) có tập nghiệm: $S = \left\{1; \frac{2}{3}\right\}$.

b) Ta có

$$(2): (x-2)(x+2) + (x+5)(x-2) = 0$$

$$(x-2)(x+2+x+5) = 0$$

$$(x-2)(2x+7) = 0$$

$x-2=0$ hoặc $2x+7=0$

$$x=2 \text{ hoặc } x=-\frac{7}{2}$$

Phương trình (2) có tập nghiệm: $S = \left\{ 2; -\frac{7}{2} \right\}$.

c) Ta có

$$(3): 2x(x+2) - (x^2 + 2x) = 0$$

$$2x^2(x+2) - x(x+2) = 0$$

$$(x+2)(2x^2 - x) = 0$$

$$x(x+2)(2x-1) = 0$$

$x=0$ hoặc $x+2=0$ hoặc $2x-1=0$

$$x=0 \text{ hoặc } x=-2 \text{ hoặc } x=\frac{1}{2}$$

Phương trình (3) có tập nghiệm: $S = \left\{ 0; -2; \frac{1}{2} \right\}$.

Bài toán 17. Giải phương trình:

a) $x^3 - 1 = x^2 - 1 \quad (1)$

b) $(2x-5)^2 - x^2 - 4x - 4 = 0 \quad (2)$

c) $(x-2)(x^2 + 3x - 3) - x^3 + 8 = 0 \quad (3)$

d) $(x-3)^2 - 9 = 0 \quad (4)$

Lời giải

a) Ta có (1): $(x-1)(x^2 + x + 1) - x(x-1) = 0$

$$(x-1)(x^2 + 1) = 0$$

$$x-1=0 \text{ hoặc } x^2 + 1 = 0$$

$$x=1 \text{ (}x^2 + 1 = 0 \text{ vô nghiệm vì } x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 + 1 > 0\text{)}$$

Phương trình (1) có tập nghiệm: $S = \{1\}$.

b) Ta có (2): $(2x-5)^2 - x^2 - 4x - 4 = 0$

$$(2x-5+x+2)(2x-5-x-2) = 0$$

$$(3x-3)(x-7) = 0$$

$$3x-3=0 \text{ hoặc } x-7=0$$

$$x=1 \text{ hoặc } x=7$$

Phương trình (2) có tập nghiệm: $S = \{1; 7\}$.

c) Ta có (3): $(x-2)(x^2 + 3x - 2) - (x-2)(x^2 + x + 4) = 0$

$$(x-2)(x^2 + 3x - 2 - x^2 - 2x - 4) = 0$$

$$(x-2)(x-6) = 0$$

$$x-2=0 \text{ hoặc } x-6=0$$

$$x = 2 \text{ hoặc } x = 6$$

Phương trình (3) có tập nghiệm: $S = \{2; 6\}$.

d) Ta có (4): $(x-3)^2 - 3^2 = 0$

$$(x-3+3)(x-3-3)=0$$

$$x(x-6)=0$$

$$x=0 \text{ hoặc } x-6=0$$

$$x=0 \text{ hoặc } x=6$$

Vậy phương trình (4) có tập nghiệm: $S = \{0; 6\}$

Bài toán 18. Giải phương trình:

a) $x^2 + x - 12 = 0$ (1)

b) $x^2 + 3x + 2 = 0$ (2)

c) $2x^3 + 3x^2 - 8x - 12 = 0$ (3)

d) $x^3 - 4x^2 - x + 4 = 0$ (4)

Hướng dẫn: Phân tích đa thức về trái thành nhân tử, ta đưa về phương trình tích.

Lời giải

a) Ta có (1): $x^2 + x - 12 = 0$

$$x(x-3) + 4(x-3) = 0$$

$$(x+4)(x-3) = 0$$

$$x+4=0 \text{ hoặc } x-3=0$$

$$x=-4 \text{ hoặc } x=3$$

Vậy phương trình có tập nghiệm $S = \{-4; 3\}$.

b) Ta có (2): $x^2 + 3x + 2 = 0$

$$x^2 + x + 2x + 2 = 0$$

$$x(x+1) + 2(x+1) = 0$$

$$(x+2)(x+1) = 0$$

$$x=-2 \text{ hoặc } x=-1$$

Vậy phương trình có tập nghiệm $S = \{-2; -1\}$.

c) Ta có (3): $2x^3 - 8x + 3x^2 - 12 = 0$

$$2x(x^2 - 4) + 3(x^2 - 4) = 0$$

$$(2x+3)(x^2 - 4) = 0$$

$$(2x+3)(x-2)(x+2) = 0$$

$$(2x+3) = 0 \text{ hoặc } (x-2) = 0 \text{ hoặc } (x+2) = 0$$

$$x = \frac{-3}{2} \text{ hoặc } x = 2 \text{ hoặc } x = -2.$$

Vậy phương trình có tập nghiệm $S = \left\{ 2; -2; \frac{-3}{2} \right\}$.

d) Ta có (4): $x^3 - 4x^2 - x + 4 = 0$

$$x^2(x-4) - (x-4) = 0$$

$$(x^2 - 1)(x-4) = 0$$

$$x = 1 \text{ hoặc } x = -1 \text{ hoặc } x = 4$$

Vậy phương trình có tập nghiệm $S = \{1; -1; 4\}$.

Bài toán 19. Giải phương trình:

a) $x^3 - x^2 - x - 2 = 0$ (1)

b) $x^4 - 3x^3 + 3x^2 - x = 0$ (2)

Hướng dẫn: Phân tích vế trái thành nhân tử.

Lời giải

a) Ta có (1): $x^3 - 2x^2 + x^2 - 2x + x - 2 = 0$

$$x^2(x-2) + x(x-2) + (x-2) = 0$$

$$(x^2 + x + 1)(x-2) = 0$$

$$(x-2) = 0 \text{ hoặc } (x^2 + x + 1) = 0$$

$x = 2$ hoặc $x^2 + x + 1 = 0$ (vô lý). Vì

$$\left(x + \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{3}{4} = 0 \text{ (vô lý)}$$

Vậy phương trình có tập nghiệm $S = \{2\}$

b) $x^4 - 3x^3 + 3x^2 - x = 0$ (2)

$$x(x^3 - 3x^2 + 3x - 1) = 0$$

$$x(x-1)^3 = 0$$

$$x = 0 \text{ hoặc } x-1 = 0$$

$$x = 0 \text{ hoặc } x = 1$$

Vậy phương trình có tập nghiệm $S = \{0; 1\}$

Bài toán 20: Giải các phương trình sau:

a) $x^4 + 2x^3 - 4x - 4 = 0$ (1)

b) $x^4 + 6x^2 + 8 = 0$ (2)

c) $x^3 + 6x^2 + 11x + 6 = 0$ (3)

Lời giải

a) Ta có (1): $(x^4 - 4) + (2x^3 - 4x) = 0$

$$(x^2 - 2)(x^2 + 2) + 2x(x^2 - 2) = 0$$

$$(x^2 - 2)(x^2 + 2x + 2) = 0$$

$$(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})(x^2 + 2x + 2) = 0$$

$$x - \sqrt{2} = 0 \text{ hoặc } x + \sqrt{2} = 0 \text{ hoặc } (x^2 + 2x + 2) = 0$$

$$x = \sqrt{2} \text{ hoặc } x = -\sqrt{2} \text{ hoặc } (x^2 + 2x + 2) = 0 \text{ (vô lý do } x^2 + 2x + 1 + 1 = (x+1)^2 + 1 > 0 \forall x)$$

Vậy phương trình có tập nghiệm $S = \{\sqrt{2}; -\sqrt{2}\}$.

b) Ta có (2): $x^4 + 2x^2 + 4x^2 + 8 = 0$

$$\begin{aligned}x^2(2+x^2) + 4(x^2+2) &= 0 \\(x^2+4)(2+x^2) &= 0 \\(x^2+4) &= 0 \text{ hoặc } (2+x^2) = 0\end{aligned}$$

Hai phương trình cuối đều vô nghiệm vì $x^2 > 0$.

Vậy phương trình (2) có tập nghiệm $S = \emptyset$

c) Ta có (3): $x^3 + x^2 + 5x^2 + 5x + 6x + 6 = 0$

$$\begin{aligned}x^2(x+1) + 5x(x+1) + 6(x+1) &= 0 \\(x^2 + 5x + 6)(x+1) &= 0 \\(x^2 + 2x + 3x + 6)(x+1) &= 0 \\(x+2)(x+3)(x+1) &= 0\end{aligned}$$

$$x+2=0 \text{ hoặc } x+3=0 \text{ hoặc } x+1=0.$$

$$x=-2 \text{ hoặc } x=-3 \text{ hoặc } x=-1.$$

Vậy phương trình (3) có tập nghiệm $S = \{-2; -3; -1\}$.

Bài toán 21. Giải các phương trình sau:

a) $(x^2 + 2x + 2)(x^2 + 2x + 3) = 0 \quad (1)$

b) $(2x^2 + 3x - 1)^2 - 5(2x^2 + 3x + 3) + 24 = 0 \quad (2)$

c) $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4) - 24 = 0 \quad (3)$

Hướng dẫn:

a) Nhận xét về các biểu thức $x^2 + 2x + 2$ và $x^2 + 2x + 3$

Ta đặt $t = x^2 + 2x + 2 \Rightarrow x^2 + 2x + 3 = t + 1$.

Ta gọi là phương pháp đặt ẩn phụ.

Lời giải

a) Ta đặt $t = x^2 + 2x + 2 \Rightarrow x^2 + 2x + 3 = t + 1$.

Ta có phương trình: $t(t+1) - 2 = 0$.

$$\begin{aligned}t^2 + 2t - t - 2 &= 0 \\(t+2)t - (t+2) &= 0 \\(t+2)(t-1) &= 0 \\t+2=0 \text{ hoặc } t-1=0 &\\t=-2 \text{ hoặc } t=1. &\end{aligned}$$

+) Với $t = -2$ ta có $x^2 + 2x + 2 = -2$

$$\begin{aligned}x^2 + 2x + 4 &= 0 \\(x+1)^2 + 3 &= 0 \text{ (vô lý).}\end{aligned}$$

+) Với $t = 1$ ta có $x^2 + 2x + 2 = 1$

$$x^2 + 2x + 1 = 0$$

$$(x+1)^2 = 0.$$

$$x = -1.$$

Vậy phương trình có tập nghiệm $S = \{-1\}$.

b) Đặt $t = 2x^2 + 3x - 1 \Rightarrow 2x^2 + 3x + 3 = t + 4$.

Ta có phương trình: $t^2 - 5(t + 4) + 24 = 0$

$$t^2 - 5t + 4 = 0$$

$$t^2 - 4t - t + 4 = 0$$

$$(t-4)t - (t-4) = 0$$

$$(t-4)(t-1) = 0$$

$$t-4 = 0 \text{ hoặc } t-1 = 0$$

$$t = 4 \text{ hoặc } t = 1.$$

+) Với $t = 4$ ta có $2x^2 + 3x - 1 = 4$

$$2x^2 + 3x - 5 = 0$$

$$2x^2 - 2x + 5x - 5 = 0$$

$$2x(x-1) + 5(x-1) = 0$$

$$(2x+5)(x-1) = 0$$

$$2x+5 = 0 \text{ hoặc } x-1 = 0$$

$$x = \frac{-5}{2} \text{ hoặc } x = 1.$$

+) Với $t = 1$ ta có $2x^2 + 3x - 1 = 1$

$$2x^2 + 3x - 2 = 0$$

$$2x^2 + 4x - x - 2 = 0$$

$$2x(x+2) - (x+2) = 0$$

$$(2x-1)(x+2) = 0$$

$$2x-1 = 0 \text{ hoặc } x+2 = 0$$

$$x = \frac{1}{2} \text{ hoặc } x = -2.$$

Vậy phương trình có tập nghiệm $S = \left\{1; -2; \frac{-5}{2}; \frac{1}{2}\right\}$.

c) Ta có (3): $[(x+1)(x+4)][(x+3)(x+2)] - 24 = 0$

$$[x^2 + 5x + 4][x^2 + 5x + 6] - 24 = 0$$

Đặt $t = x^2 + 5x + 4 \Rightarrow x^2 + 5x + 6 = t + 2$.

Ta có phương trình: $t(t+2) - 24 = 0$

$$t^2 + 2t - 24 = 0$$

$$(t+1)^2 - 25 = 0$$

$$\begin{aligned}(t+1-5)(t+1+5) &= 0 \\(t-4)(t+6) &= 0 \\t-4 = 0 \text{ hoặc } t+6 &= 0 \\t = 4 \text{ hoặc } t &= -6.\end{aligned}$$

+) Với $t = 4$ ta có $x^2 + 5x + 4 = 4$

$$\begin{aligned}x^2 + 5x &= 0 \\x(x+5) &= 0 \\x = 0 \text{ hoặc } x+5 &= 0 \\x = 0 \text{ hoặc } x &= -5\end{aligned}$$

+) Với $t = -6$ ta có $x^2 + 5x + 4 = -6$

$$\begin{aligned}x^2 + 5x + 10 &= 0 \\\left(x + \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{15}{4} &= 0 \text{ (PT này vô nghiệm vì vé trái luôn dương với mọi } x)\end{aligned}$$

Vậy phương trình có tập nghiệm $S = \{0; -5\}$.

Em hãy giải bài toán sau:

Giải phương trình: $(x+1)(x+2)(x+4)(x+5) - 40 = 0$

(Gợi ý: Ta có $(x+1)(x+5) = x^2 + 6x + 5$; $(x+2)(x+4) = x^2 + 6x + 8$)

Đặt $t = x^2 + 6x + 5 \Rightarrow x^2 + 6x + 6 = t + 1$

Bài toán 22. Cho phương trình: $x^3 + x^2 + mx - 4 = 0$.

- a) Tìm m biết phương trình có một nghiệm $x = -2$.
- b) Giải phương trình với m vừa tìm được ở câu a).

Lời giải

- a) Vì $x = -2$ là một nghiệm của phương trình nên thay $x = -2$ vào phương trình, ta có :

$$\begin{aligned}(-2)^3 + (-2)^2 + m \cdot (-2) - 4 &= 0 \\-8 + 4 - 2m - 4 &= 0 \\-2m &= 8 \\m &= -4\end{aligned}$$

- b) VỚI $m = -4$, ta có phương trình: $x^3 + x^2 - 4x - 4 = 0$

$$\begin{aligned}x^2(x+1) - 4(x+1) &= 0 \\(x^2 - 4)(x+1) &= 0 \\(x-2)(x+2)(x+1) &= 0 \\x-2 = 0 \text{ hoặc } x+2 = 0 \text{ hoặc } x+1 &= 0 \\x = 2 \text{ hoặc } x = -2 \text{ hoặc } x &= -1.\end{aligned}$$

Vậy pt có tập nghiệm $S = \{2; -2; -1\}$.

Bài toán 23. Cho phương trình: $4x^2 + 4mx + m^2 - 25 = 0$.

a) Tìm các giá trị của m biết phương trình có một nghiệm $x = -2$.

b) Giải phương trình với m vừa tìm được ở câu a).

Lời giải

a) Vì $x = -2$ là một nghiệm của phương trình nên thay $x = -2$ vào phương trình, ta có :

$$4.(-2)^2 + 4.m.(-2) + m^2 - 25 = 0$$

$$16 - 8m + m^2 - 25 = 0$$

$$m^2 - 8m - 9 = 0$$

$$m^2 - 9m + m - 9 = 0$$

$$m(m-9) + (m-9) = 0$$

$$(m+1)(m-9) = 0$$

$$m = -1 \text{ hoặc } m = 9$$

b) Với $m = -1$, ta có $4x^2 + 4.(-1)x + (-1)^2 - 25 = 0$

$$4x^2 - 4x - 24 = 0$$

$$x^2 - x - 6 = 0$$

$$x^2 - 2x + 3x - 6 = 0$$

$$x(x-2) + 3(x-2) = 0$$

$$(x+3)(x-2) = 0$$

$$x+3=0 \text{ hoặc } x-2=0.$$

$$x=-3 \text{ hoặc } x=2.$$

Vậy Với $m = -1$ thì phương trình có tập nghiệm $S = \{-3; 2\}$

c) Với $m = 9$, ta có: $4x^2 + 4.9x + (9)^2 - 25 = 0$

$$4x^2 + 36x + 56 = 0$$

$$x^2 + 9x + 14 = 0$$

$$x^2 + 2x + 7x + 14 = 0$$

$$x(x+2) + 7(x+2) = 0$$

$$(x+7)(x+2) = 0$$

$$x+7=0 \text{ hoặc } x+2=0.$$

$$x=-7 \text{ hoặc } x=-2.$$

Vậy Với $m = 9$ thì phương trình có tập nghiệm $S = \{-7; -2\}$

C. BÀI TẬP.

7.1. Cho phương trình: $2mx - 5 = -x + 6m - 2$

a) Tìm m để phương trình có một nghiệm $x = 1$.

b) Chứng tỏ $x = 3$ là nghiệm của phương trình.

7.2. Cho hai phương trình: $x^2 - 5x + 6 = 0$ và $x + (x-2)(2x+1) = 2$. Chứng tỏ hai phương trình có nghiệm chung là $x = 2$.

7.3. Chứng tỏ phương trình sau vô nghiệm:

a) $x^2 + 2x + 3 = 0$, b) $|x| + 1 = 0$.

7.4. Chứng tỏ hai phương trình sau có cùng tập nghiệm.

a) $(x+2)(x-1)^2 = 3(x-1)^2$ và $x+2=3$.

b) $x+1=x$ và $x^2+1=0$.

c) $(x+3)^2 - 6x = 0$ và $|x-1| + 2 = 0$.

7.5. Giải phương trình sau:

a) $x(x^2 + x + 1) - (x-1)(x+1)x = x^2 - 2$. (1)

b) $(x-1)(x^2 + x + 1) - 2x = x(x-1)(x+1) + 2x - 3$. (2)

c) $(3x-2)(3x+2) - (3x-4)^2 = 28$ (3)

d) $2(x+3)(x-4) = (2x-1)(x+2) - 27$ (4)

7.6. Giải các phương trình sau:

a) $\frac{2x+1}{3} - \frac{7x+5}{15} = \frac{x-2}{5}$ (1)

b) $2 - \frac{3x-7}{4} + \frac{x+17}{5} = 0$ (2)

c) $\frac{(2x+5)(x-3)}{2} - x(x+3) = \frac{-1}{2}$ (3)

7.7. Giải các phương trình sau:

a) $(x+1)^2 - (x-1)^2 = 6(x^2 + x + 1)$ (1)

b) $(x+2)(x+4) - (x-1)(x+3) = (2x+3)(x+1)$ (2)

c) $(x-2)^2 - (x+2)^2 = 8 - 12x(x-1)$ (3)

7.8. Giải các phương trình sau:

a) $m(mx-1) = x-1$ (1)

b) $m^2x+1=m+m$ (2)

c) $2mx-m=x+1$ (3).

7.9.

a) Tìm điều kiện của a và b để phương trình: $(a-1)x+b=0$ có nghiệm.

b) Tương tự câu a với phương trình: $(2a - b)x + b = 0$.

7.10.

a) Tìm điều kiện của $m; n$ sao cho phương trình: $(m - 3)x - n = -5x - 3$ vô nghiệm.

b) Tương tự câu a) với phương trình: $nx + n^3 = nx + m^3$.

7.11. Giải phương trình:

b) $\frac{x-a}{a} + \frac{x-1}{a-1} = 2$ (1) (Với $a \neq 0$ và $a \neq 1$)

c) $\frac{mx-1}{m+1} + \frac{m+x}{m-1} = \frac{m^2+1}{m^2-1}$ (2) (Với $m \neq \pm 1$)

7.12. Giải phương trình:

a) $(x-1)(2x+5)(x^2+2) = 0$ (1)

b) $(2x-1)(x-5)(x^2+3) = 0$ (2)

c) $(x-4)(2x+3) = (x-5)(4-x)$ (3)

d) $2(9x^2+6x+1) = (3x+1)(x-2)$ (4)

7.13. Giải phương trình:

a) $(x^2-4)(2x+1) = 0$ (1)

b) $x^2 - 9x + 18 - 2(x-3) = 0$ (2)

c) $3x^2 - 4x = 5(3x-4)$ (3)

7.14. Giải phương trình:

a) $x^2 - 7x + 6 = 0$ (1)

b) $x^2 - 5x + 4 = 0$ (2)

c) $x^3 - x^2 - x + 1 = 0$ (3)

d) $x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$ (4)

e) $2x^3 - 3x^2 + 3x - 2 = 0$ (5)

7.15. Giải phương trình:

a) $x^4 - 3x^2 + 2 = 0$ (1)

b) $x^4 - 2x^3 + x - 2 = 0$ (2)

c) $x^4 + 2x^3 - x - 2 = 0$ (3)

7.16. Giải phương trình:

a) $(x^2 + x)^2 - (x^2 + x) - 2 = 0$ (1)

b) $(x^2 + 3x)^2 + 4(x^2 + 3x) = 12$ (2)

c) $(x^2 + x - 2)(x^2 + x - 3) = 12$ (3)

7.17. Giải các phương trình sau:

a) $x(x+1)(x+2)(x+3)+1=0$ (1)

b) $x(x-1)(x+1)(x+2)-24=0$ (2)

c) $(x+2)^2(2x+1)(2x+3)=18$ (3)

7.18. Giải các phương trình sau:

a) $\frac{x+2}{x-3} - \frac{x-2}{x+2} = \frac{4}{x^2-4}$ (1)

b) $\frac{x+1}{x-1} - \frac{x+2}{x+3} + \frac{4}{x^2+2x-3} = 0$ (2)

c) $\frac{1}{x-5} - \frac{3}{x^2-6x+5} = \frac{5}{x-1}$ (3)

d) $\frac{x-1}{x} + \frac{1-2x}{x^2+x} = \frac{1}{x+1}$ (4)

7.19. Giải các phương trình sau:

a) $\frac{1}{x-1} + \frac{2x^2-5}{x^3-1} = \frac{4}{x^2+x+1}$ (1)

b) $\frac{x+1}{x-1} - \frac{x+2}{x+3} + \frac{4}{x^2+2x-3} = 0$ (2)

c) $\frac{-7x^2+4}{x^3+1} = \frac{5}{x^2-x+1} - \frac{1}{x+1}$ (3)

7.20. Giải các phương trình:

a) $\frac{x^2+2x}{x^2+1} - 2x = 0$ (1)

b) $\frac{2x^2+4}{x^2+1} - 3 = 0$ (2)

c) $\frac{x}{x-1} - \frac{2x}{x^2-1} = 0$ (3)

d) $\frac{x+5}{x^2-5x} - \frac{x-5}{2x^2+10x} = \frac{x+25}{2x^2-50}$ (4)

7.21. Giải các phương trình:

a) $\frac{x+3}{x-3} - \frac{x-3}{x+3} = \frac{12}{x^2-9}$ (1)

b) $1 + \frac{x}{25x^2-9} = \frac{5x}{5x+3} + \frac{2}{5x-3}$ (2)

c) $\frac{1}{2x-3} + \frac{1}{2x+3} = \frac{2x+4}{4x^2-9}$ (3)

7.22. Giải các phương trình:

a) $\frac{3}{x+1} - \frac{1}{x-2} = \frac{9}{x^2-x-2}$ (1)

b) $\frac{6}{x-5} + \frac{2}{x-8} = \frac{18}{x^2-13x+40} - 1$ (2)

$$c) \frac{x+6}{x-5} + \frac{x-5}{x+6} = \frac{2x^2 + 23x + 61}{x^2 + x - 30} \quad (3)$$

$$d) \frac{x+9}{x^2 - 3x - 10} - \frac{x+5}{x^2 - 25} = \frac{1}{x+2} \quad (4)$$

7.23. Ở một quốc gia, người ta dùng cả hai đơn vị đo nhiệt độ là Fahrenheit ($^{\circ}F$) và độ Celcius ($^{\circ}C$),

liên hệ với nhau bởi công thức $C = \frac{5}{9}(F - 32)$. Hãy tính độ Fahrenheit tương ứng với $10^{\circ}C$.

7.24. Hiện nay tuổi của bố bạn Nam gấp 3 lần của Nam. Sau 10 năm nữa thì tổng số tuổi của Nam và Bố là 76. Gọi x là tuổi hiện nay của Nam,

- a) Hãy biểu thị tuổi hiện nay của bố bạn Nam theo tuổi hiện tại của Nam.
- b) Viết phương trình biểu thị sự kiện sau 10 năm nữa thì tổng số tuổi của Nam và bố Nam là 76 tuổi.
- c) Giải phương trình nhận được ở câu b để tính tuổi của Nam và bố hiện nay.

7.25. Bạn Mai mua cả sách và vở hết 500 nghìn đồng. Biết rằng số tiền mua sách nhiều gấp ruồi số tiền mua vở, hãy tính số tiền bạn Mai dùng để mua mỗi loại.

BÀI 26. GIẢI BÀI TOÁN BẰNG CÁCH LẬP PHƯƠNG TRÌNH

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ.

Các bước giải một bài toán bằng cách lập phương trình:

Bước 1: Lập phương trình:

- Chọn ẩn và đặt điều kiện cho ẩn.
- Biểu diễn các đại lượng chưa biết theo ẩn và các đại lượng đã biết.
- Lập phương trình biểu thị mối quan hệ giữa các đại lượng.

Bước 2: Giải phương trình.

Bước 3: Trả lời: Kiểm tra xem trong các nghiệm của phương trình nghiệm nào thỏa mãn điều kiện của ẩn, nghiệm nào không, rồi kết luận.

B. PHÂN LOẠI BÀI TẬP

I. TÌM SỐ TỰ NHIÊN

Bài toán 1. Tìm số tự nhiên có hai chữ số, biết tổng của hai chữ số đó là 10 và nếu đổi chỗ hai chữ số ấy cho nhau thì được số mới lớn hơn số cũ là 36.

Hướng dẫn: Một số có hai chữ số kí hiệu là \overline{ab} . Trong đó $0 < a \leq 9; 0 \leq b \leq 9; a, b \in \mathbb{N}$, Ta có:
 $\overline{ab} = 10a + b$ (xem Toán 6, tập 1).

LỜI GIẢI

Gọi chữ số hàng chục là x , điều kiện $0 < x \leq 9; x \in \mathbb{N}$.

Vì tổng của hai chữ số đó là 10 nên chữ số hàng đơn vị là: $10 - x$.

Số có hai chữ số được viết dưới dạng: $10x + 10 - x$

Khi đổi chỗ hai chữ số ấy cho nhau thì được số mới: $(10 - x)10 + x$

Theo bài ra ta có phương trình:

$$[10.(10 - x) + x] - (10x + 10 - x) = 36.$$

$$\Leftrightarrow 100 - 10x + x - 10x - 10 + x = 36$$

$$\Leftrightarrow 18x = 54$$

$$\Leftrightarrow x = 3 \text{ (tmđk)}$$

Vậy số phải tìm là 37.

Nhận xét: Nếu gọi x là chữ số hàng đơn vị thì chữ số hàng chục là $10 - x$

Ta có phương trình: $10(10 - x) + x = 9x + 10 - 36$

Ta tìm được $x = 7$ và số phải tìm là 37.

Bài toán 2. Tìm một số có hai chữ số, biết rằng chữ số hàng đơn vị gấp đôi chữ số hàng chục.

Nếu đặt chữ số 2 xen vào giữa hai chữ số của số đã cho ta được một số lớn hơn số đã cho là 200.

Hướng dẫn: Xem lời giải bài toán 1.

LỜI GIẢI

Gọi chữ số hàng chục là x , điều kiện $0 < x \leq 9; x \in \mathbb{N}$.

Vì chữ số hàng đơn vị gấp đôi chữ số hàng chục nên chữ số hàng đơn vị là: $2x$ ($0 < 2x \leq 9 \Rightarrow 0 < x \leq 4; x \in \mathbb{N}$).

Số có hai chữ số được viết dưới dạng: $10x + 2x$

Khi đặt chữ số 2 xen vào giữa hai chữ số của số đã cho ta được một số mới:
 $\overline{x22x} = 100x + 20 + 2x$

Theo bài ra ta có phương trình:

$$\begin{aligned} 100x + 2.10 + 2x &= (10x + 2x) + 200. \\ \Leftrightarrow 102x - 12x &= 200 - 20 \\ \Leftrightarrow 90x &= 180 \\ \Leftrightarrow x &= 2 (\text{tmđk}) \end{aligned}$$

Vậy số phải tìm là 24.

Bài toán 3. Một số có hai chữ số. Nếu viết thêm số 5 vào bên trái số đó ta được số A . Nếu viết thêm số 5 vào bên phải số đó ta được số B . Tìm số đã cho, biết $A - B = 153$.

Hướng dẫn: Gọi x là số phải tìm thì số A có dạng: $\overline{5x} = 5.100 + x$.

Số B có dạng: $\overline{x5} = x.10 + 5$.

Lời giải

Gọi số phải tìm là x (x là số có hai chữ số, $x \in \mathbb{N}$).

Khi viết thêm số 5 vào bên trái số đó ta được số A là: $A = \overline{5x} = 5.100 + x$.

Khi viết thêm số 5 vào bên phải số đó ta được số B là: $B = \overline{x5} = x.10 + 5$

Theo bài ra ta có: $A - B = (5.100 + x) - (10x + 5) = 153$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow -9x &= -324 \\ \Leftrightarrow x &= 38 (\text{Nhận}). \end{aligned}$$

Vậy số phải tìm là 38.

Nhận xét: Ta không đặt số có hai chữ số là $\overline{ab} = 10a + b$ vì không tìm được mối quan hệ giữa a, b .

Bài toán 4. Tìm một số tự nhiên có hai chữ số, biết rằng nếu viết thêm một chữ số hai vào bên trái và một chữ số 2 vào bên phải thì ta được một số lớn gấp 153 lần số đã cho.

Hướng dẫn: Gọi x là số phải tìm thì số x là số có hai chữ số.

Số mới có dạng: $\overline{2x2}$ là số có 4 chữ số

$$\overline{2x2} = 2.1000 + 10.x + 2.$$

(Ta không cần đặt $\overline{ab} = 10a + b$ là x)

Lời giải

Gọi x là số có hai chữ số phải tìm ($x \in \mathbb{N}^*$).

Khi viết thêm vào bên trái và bên phải số x một chữ số 2, ta được số mới có dạng $\overline{2x2}$ là số có 4 chữ số nên

$$\overline{2x2} = 2.1000 + 10.x + 2 = 10x + 2002.$$

Theo bài ra ta có phương trình: $10x + 2002 = 153x$

$$\Leftrightarrow 143x = 2002$$

$$\Leftrightarrow x = 14 \text{ (Nhận).}$$

Vậy số phải tìm là 14.

II. Toán về đo độ dài, diện tích

Bài toán 5. Chu vi của một hình chữ nhật là $120m$, biết chiều dài hơn chiều rộng là $20m$. Tính diện tích hình chữ nhật.

Hướng dẫn : Chu vi hình chữ nhật bằng hai lần tổng chiều dài và chiều rộng. Diện tích hình chữ nhật bằng tích của chiều dài và chiều rộng.

Lời giải

Gọi x là chiều rộng hình chữ nhật (x tính bằng mét, $x > 0$).

Vì chiều dài hơn chiều rộng là $20m$ nên chiều dài là : $x + 20(m)$.

Chu vi hình chữ nhật là $120m$ nên ta có phương trình :

$$2[x + (x + 20)] = 120$$

$$\Leftrightarrow 2(2x + 20) = 120$$

$$\Leftrightarrow 4x + 40 = 120$$

$$\Leftrightarrow 4x = 80$$

$$\Leftrightarrow x = 20 \text{ (Nhận)}$$

Vậy chiều rộng là $20m$, chiều dài là $40m$.

Diện tích hình chữ nhật là : $20 \cdot 40 = 800m^2$.

Bài toán 6. Một hình chữ nhật có chu vi là $372m$, nếu tăng chiều dài thêm $21m$ và chiều rộng thêm $10m$ thì diện tích tăng thêm $2862m^2$. Tìm chiều dài và chiều rộng hình chữ nhật lúc đầu.

Hướng dẫn : Nửa chu vi hình chữ nhật bằng tổng chiều dài và chiều rộng.

Lời giải

Nửa chu vi hình chữ nhật là : $372 : 2 = 186(m)$.

Gọi x là chiều rộng hình chữ nhật (x tính bằng mét, $0 < x < \frac{186}{2}$).

Chiều dài là : $186 - x(m)$.

Diện tích ban đầu của hình chữ nhật là : $x(186 - x)(m^2)$.

Diện tích lúc sau là : $(186 - x + 21)(x + 10)(m^2)$.

Ta có phương trình :

$$(186 - x + 21)(x + 10) - x(186 - x) = 2862$$

$$\Leftrightarrow (207 - x)(x + 10) - x(186 - x) = 2862$$

$$\Leftrightarrow 207x + 2070 - x^2 - 10x - 186x + x^2 = 2862$$

$$\Leftrightarrow 11x = 792$$

$$\Leftrightarrow x = 72 \text{ (nhận)}$$

Vậy chiều rộng ban đầu là: $72(m)$.

chiều dài ban đầu là: $186 - 72 = 144(m)$.

Bài toán 7. Tính cạnh một hình vuông, biết rằng nếu chu vi tăng $12m$ thì diện tích tăng $135m^2$.

Hướng dẫn: Chu vi hình vuông bằng bốn lần độ dài một cạnh; Diện tích hình vuông bằng bình phương độ dài một cạnh.

Lời giải

Gọi x là độ dài cạnh hình vuông ban đầu ($x > 0$, x tính bằng mét)

Ta có: Chu vi hình vuông là $4x(m)$, diện tích hình vuông là $x(m^2)$

Chu vi mới là: $4x + 12(m)$ nên độ dài mỗi cạnh lúc này là: $(4x + 12) : 4 = x + 3(m)$

Diện tích mới là: $(x + 3)^2(m^2)$.

Theo đề ra ta có phương trình:

$$(x + 3)^2 - x^2 = 135$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 6x + 9 - x^2 = 135$$

$$\Leftrightarrow 6x = 135 - 9$$

$$\Leftrightarrow 6x = 126$$

$$\Leftrightarrow x = 21 \text{ (nhận).}$$

Vậy độ dài cạnh hình vuông ban đầu là $21(m)$.

III. Toán chuyển động.

Bài toán 8. Một người đi xe máy từ A đến B với vận tốc 25km/h ; lúc quay về người đó đi với vận tốc 30km/h nên thời gian về ít hơn thời gian lúc đi là 20 phút. Tính quãng đường AB .

Hướng dẫn: Ta có $S = vt$ (S là quãng đường, v là vận tốc, t là thời gian).

Lời giải

Gọi x là quãng đường AB ($x > 0$, và x tính bằng km)

Thời gian đi từ A đến B là: $\frac{x}{25}(\text{h})$

Thời gian đi từ B đến A là: $\frac{x}{30}(\text{h})$

Ta có 20 phút hay $\frac{1}{3}$ giờ

Theo bài ra ta có phương trình:

$$\begin{aligned}\frac{x}{30} + \frac{1}{3} &= \frac{x}{25} \\ \Leftrightarrow 5x + 50 &= 6x \\ \Leftrightarrow x &= 50 \text{ (nhận)}\end{aligned}$$

Vậy quãng đường AB là $50(\text{km})$.

Bài toán 9. Một canô xuôi dòng từ A đến B mất 3h ; và ngược dòng trở về mất 5h . Tính khoảng cách hai bên, biết vận tốc của dòng nước là $4(\text{km/h})$.

Hướng dẫn: Vận tốc thực tế của canô (lúc nước yên lặng) là $v(\text{km/h})$, thì khi xuôi dòng có vận tốc là $v+4(\text{km/h})$; ngược dòng có vận tốc là $v-4(\text{km/h})$.

Lời giải

Gọi x là vận tốc thực của canô ($\text{km/h}; x > 4$)

Vận tốc của canô khi xuôi dòng là $v+4(\text{km/h})$;

Lúc ngược dòng sẽ là $v-4(\text{km/h})$.

Theo đề ra, ta có phương trình (biểu thị khoảng cách giữa bên A và bên B):

$$3(x+4)=5(x-4)$$

$$\Leftrightarrow 3x+12=5x-20$$

$$\Leftrightarrow 2x=32$$

$$\Leftrightarrow x=16 \text{ (nhận)}$$

Vậy khoảng cách giữa hai bên A và B là $16(\text{km})$.

Bài toán 10. Hai ô tô khởi hành cùng một lúc từ A đến B , ô tô thứ nhất đi với vận tốc $40(\text{km/h})$; ô tô thứ hai đi với vận tốc $50(\text{km/h})$ nên ô tô thứ hai đến B sớm hơn ô tô thứ nhất 45 phút. Tính quãng đường AB .

Hướng dẫn: Ta có $S=vt$ (S là quãng đường, v là vận tốc, t là thời gian).

Lời giải

Gọi x là quãng đường AB ($x > 0$; x được tính bằng km)

Thời gian ô tô thứ nhất đi hết quãng đường AB là $\frac{x}{40}(\text{h})$.

Thời gian ô tô thứ nhất đi hết quãng đường AB là $\frac{x}{50}(\text{h})$.

Ta có 45 phút là $\frac{45}{60}=\frac{3}{4}$ (giờ).

Theo bài ra, ta có phương trình:

$$\begin{aligned}\frac{x}{40} &= \frac{x}{50} + \frac{3}{4} \\ \Leftrightarrow 5x &= 4x + 150 \\ \Leftrightarrow x &= 150 \text{ (nhận)}.\end{aligned}$$

Trả lời: Quãng đường AB dài $150(\text{km})$.

Bài toán 11. Lúc 7 giờ có một xe đi từ A đến B ; cùng lúc đó ô tô thứ hai đi từ B đến A với vận tốc bằng $\frac{2}{3}$ vận tốc của ô tô thứ nhất và chúng gặp nhau lúc 9 giờ. Tính vận tốc của mỗi ô to, biết rằng quãng đường AB dài 250km.

Hướng dẫn: Bài toán chuyển động ngược chiều ta cộng hai quãng đường mà mỗi ô tô đi được trong cùng một thời gian.

Lời giải

Gọi x là vận tốc của ô tô thứ nhất ($x > 0$; x tính bằng km).

Vận tốc của ô tô thứ hai là $\frac{2}{3}x$ (km/h).

Thời gian từ lúc xuất phát 7 giờ đến khi hai xe gặp nhau là 9 giờ nên thời gian mỗi ô tô đã đi là: $9 - 7 = 2$ (h).

Ta có phương trình:

$$2x + 2 \cdot \frac{2x}{3} = 250$$

$$\Leftrightarrow 6x + 4x = 750$$

$$\Leftrightarrow 10x = 750$$

$$\Leftrightarrow x = 75 \text{ (nhận)}$$

Trả lời: Vận tốc xe ô tô thứ nhất là 75 km.

Vậy vận tốc xe ô tô thứ nhất là $\frac{2}{3} \cdot 75 = 50$ km.

Nhận xét: Ta có thể giải một số bài toán sau đây có cách giải tương tự các bài toán dạng trên

Bài toán 12. Theo kế hoạch mỗi ngày một tổ sản xuất phải hoàn thành 120 sản phẩm. Khi thực hiện, mỗi ngày tổ đã làm ra được 130 sản phẩm, nên đã hoàn thành kế hoạch sớm hơn hai ngày. Hỏi theo kế hoạch tổ phải sản xuất bao nhiêu sản phẩm.

Lời giải

Gọi x là số sản phẩm phải sản xuất theo kế hoạch ($x \in \mathbb{N}^*$).

Thời gian thực tế là $\frac{x}{130}$ (ngày).

Ta có phương trình:

$$\begin{aligned} \frac{x}{120} &= \frac{x}{130} + 2 \\ \Leftrightarrow 130x &= 120x + 31200 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow x = 3120 \text{ (nhận)}$$

Trả lời: Số sản phẩm là 3120.

Bài toán 13. Một tổ dự định làm xong số sản phẩm trong 52 ngày, nhưng thực tế mỗi ngày làm thêm được 6 sản phẩm nên sau 48 ngày đã hoàn thành và vượt mức 160 sản phẩm. Hỏi số sản phẩm tổ dự định sản xuất là bao nhiêu?

Lời giải

Gọi x là số sản phẩm dự định phải làm ($x \in \mathbb{N}^*$).

Như vậy, một ngày sẽ làm được $\frac{x}{52}$ (sản phẩm).

Thực tế, một ngày sẽ làm được $\frac{x}{52} + 6$ (sản phẩm).

Trong 48 ngày tổ đã sản xuất được:

$$48\left(\frac{x}{52} + 6\right) = x + 160$$

$$\Leftrightarrow 48x + 48 \cdot 52 \cdot 6 = 52x + 160 \cdot 52$$

$$\Leftrightarrow 4x = 14976 - 8320$$

$$\Leftrightarrow x = 1664 \text{ (nhận).}$$

Trả lời: Vậy số sản phẩm dự định làm là 1664.

IV. Bài toán về công việc làm chung và làm riêng.

Bài toán 14. Hai người làm chung một công việc trong 12 ngày thì xong. Năng suất làm việc trong một ngày của người thứ hai chỉ bằng $\frac{2}{3}$ năng suất của người thứ nhất. Hỏi nếu làm riêng, người thứ nhất trong bao lâu sẽ xong công việc?

Hướng dẫn: Nếu người nào đó làm chặng hạn 6 ngày xong công việc, như vậy một ngày người đó chỉ làm được $\frac{1}{6}$ công việc. Năng suất làm việc coi là tương tự như vận tốc trong bài toán chuyển động đều.

Lời giải

Gọi x (ngày) là thời gian để người thứ nhất làm xong công việc, điều kiện: $x > 0$.

Như vậy một ngày người đó làm được $\frac{1}{x}$ công việc, người thứ hai một ngày chỉ làm được:

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{x} = \frac{2}{3x} \text{ (công việc).}$$

Hai người làm chung trong 12 ngày thì xong, nên một ngày hai người làm được $\frac{1}{12}$ (công việc).

Ta có phương trình: $\frac{1}{x} + \frac{2}{3x} = \frac{1}{12}$

$$\Leftrightarrow 12 + 8 = x$$

$$\Leftrightarrow x = 20 \text{ (nhận).}$$

Trả lời: Người thứ nhất làm xong trong 20 ngày.

Bài toán 15. Hai người làm chung một công việc trong 4 ngày thì xong; nhưng mới làm được 2 ngày đầu thì người thứ nhất chuyển đi làm việc khác, người thứ hai tiếp tục làm trong 6 ngày nữa mới xong. Hỏi mỗi người làm một mình thì bao lâu sẽ xong công việc?

Hướng dẫn: Chọn ẩn số x là thời gian để người thứ hai làm riêng xong công việc (Ta không gọi x là thời gian để người thứ nhất làm riêng xong).

Lời giải

Gọi x là thời gian để người thứ hai làm riêng xong công việc ($x > 0$, x tính bằng ngày).

Tổng một ngày người thứ hai làm được $\frac{1}{x}$ (công việc) nên 6 ngày người ấy làm được $\frac{6}{x}$ (công việc).

Hai người làm chung một công việc trong 4 ngày thì xong công việc nên trong hai ngày hai người làm được $\frac{1}{2}$ (công việc). Vậy còn $\frac{1}{2}$ công việc mà người thứ hai làm trong 6 ngày, ta có phương

$$\text{trình: } \frac{6}{x} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = 12 \text{ (nhận).}$$

Ta lại có 1 ngày cả hai người làm được $\frac{1}{4}$ công việc, nên 1 ngày người thứ nhất làm được

$$\frac{1}{4} - \frac{1}{12} = \frac{1}{6} \text{ công việc}$$

Vậy người thứ nhất làm riêng hết 6 ngày.

Trả lời: Người thứ nhất, người thứ hai làm riêng thứ tự 6 ngày, 12 ngày.

C. BÀI TẬP

7.26. Một số có hai chữ số, trong đó chữ số hàng chục gấp ba lần chữ số hàng đơn vị. Nếu đổi chỗ hai chữ số cho nhau thì được một số nhỏ hơn số đã cho là 18. Tìm số đó.

7.27. Hiện nay tuổi của anh gấp 3 lần tuổi của em. Sau 6 năm nữa thì tuổi của anh chỉ còn gấp đôi tuổi của em. Hỏi năm nay em bao nhiêu tuổi?

7.28. Một canô xuôi một khúc sông từ bến A đến bến B cách nhau 35 km, rồi ngược dòng từ bến B đến bến A . Thời gian lúc về nhiều hơn lúc đi là 1 giờ. Tính vận tốc thực của canô, biết vận tốc của dòng nước là 2km/h .

7.29. Một ô tô đi từ A đến B với vận tốc 60km/h ; lúc trở về với vận tốc tăng thêm 20km/h nên thời gian về sớm hơn thời gian lúc đi là 1 giờ. Tính quãng đường AB .

7.30. Một hình chữ nhật có chu vi 60 m, nếu tăng chiều rộng thêm 3m và giảm chiều dài 2m thì diện tích tăng thêm 24m^2 . Tính diện tích ban đầu của hình chữ nhật.

7.31. Hai người làm chung một công việc trong 12 ngày thì xong; nhưng mới làm được 8 ngày đầu thì người thứ nhất nghỉ, người thứ hai tiếp tục làm trong 5 ngày nữa mới xong. Hỏi nếu làm riêng, mỗi người trong bao lâu sẽ xong công việc?

7.32. Trong ba ngày làm việc, hai người làm được 930 sản phẩm, biết rằng người thứ nhất làm một ngày nhiều hơn người thứ hai là 10 sản phẩm. Hỏi mỗi người làm trong một ngày làm được bao nhiêu sản phẩm.

7.33. Chị Linh làm việc trong một ngân hàng và được thưởng tết bằng 2,5 tháng lương. Tổng thu nhập một năm của chị Linh bao gồm lương 12 tháng và thưởng Tết là 290 triệu đồng. Hỏi lương hàng tháng của chị Linh là bao nhiêu?

7.34. Bác Hưng đầu tư 300 triệu đồng vào hai khoản: mua trái phiếu doanh nghiệp và lãi suất 8% một năm và gửi tiết kiệm ngân hàng với lãi suất 6% một năm. Cuối năm bác Hưng nhận được 22 triệu đồng tiền lãi. Hỏi bác Hưng đã đầu tư vào mỗi khoản bao nhiêu tiền?

7.35. Nhân dịp khai trương, một siêu thị điện máy đã giảm giá nhiều mặt hàng để thu hút khách hàng. Tổng giá niêm yết của một chiếc tivi loại A và một chiếc tủ lạnh loại B là 36,8 triệu đồng. Trong dịp này, tivi loại A được giảm 30% và tủ lạnh loại B được giảm 25% nên bác Cường đã mua một chiếc tivi và một chiếc tủ lạnh nói trên với tổng tiền là 26,805 triệu đồng. Hỏi giá niêm yết của mỗi chiếc tivi loại A và mỗi chiếc tủ lạnh loại B là bao nhiêu?

7.36. Bạn Nam đi xe đạp rời nhà lúc 14 giờ với vận tốc 12 km/h. Khi Hùng đến nhà Nam vào lúc 14 giờ 10 phút thì mẹ Nam chỉ hướng đường đi của Nam cho Hùng và Hùng đi xe đạp đuổi theo với vận tốc 18 km/h. Hỏi đến lúc mấy giờ thì Hùng đuổi kịp Nam.

7.37. Hai công ty viễn thông đưa hai gói cước cho điện thoại cố định như sau:

	Cước thuê bao hàng tháng (đồng)	Giá cước mỗi phút gọi (đồng)
Công ty A	32 000	900
Công ty B	38 000	700

- a) Gọi x là số phút gọi trong tháng. Hãy biểu thị theo x , số tiền phải trả trong tháng (tính theo nghìn đồng) khi sử dụng mỗi gói cước nói trên.
- b) Hỏi với bao nhiêu phút gọi thì số tiền phải trả trong tháng khi sử dụng dịch vụ của hai công ty viễn thông này là như nhau?

BÀI 27. KHÁI NIỆM HÀM SỐ VÀ ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

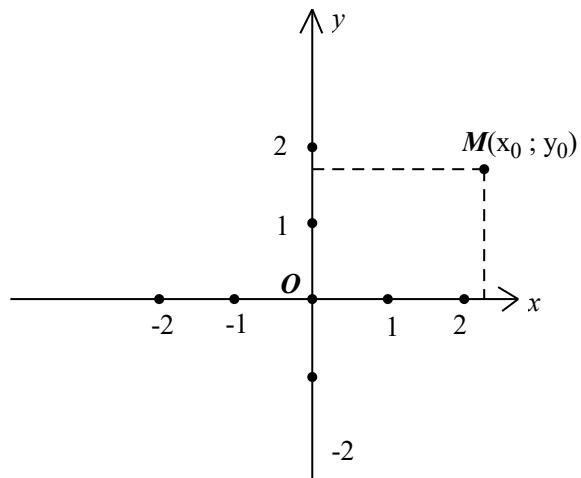
1. Khái niệm hàm số

Nếu đại lượng y phụ thuộc vào đại lượng thay đổi x sao cho với mỗi giá trị của x ta luôn xác định được chỉ một giá trị tương ứng của y thì y được gọi là hàm số của x và x gọi là biến số.

2. Mặt phẳng tọa độ.

Trong mặt phẳng tọa độ, mỗi điểm M xác định duy nhất một cặp số $(x_0; y_0)$ và mỗi cặp số $(x_0; y_0)$ xác định duy nhất một điểm M .

Cặp số $(x_0; y_0)$ gọi là tọa độ của điểm M và kí hiệu $M(x_0; y_0)$, trong đó x_0 là hoành độ và y_0 là tung độ của điểm M .



3. Đồ thị của hàm số.

Nhận biết khái niệm đồ thị của hàm số

Đồ thị của hàm số $y = f(x)$ là tập hợp tất cả các điểm biểu diễn các cặp giá trị tương ứng $(x; y)$ trên mặt phẳng tọa độ.

I. Bảng giá trị của hàm số

Bài toán 1. Điền các giá trị tương ứng của hàm số vào bảng sau, biết $y = f(x) = \frac{12}{x}$.

x	-6	-4	-3	2	5	6	12
$f(x) = \frac{12}{x}$							

Hướng dẫn: Với $x = -6$, ta có $f(-6) = \frac{12}{-6} = -2$.

Lời giải

x	-6	-4	-3	2	5	6	12
$f(x) = \frac{12}{x}$	-2	-3	-4	6	2,4	2	1

Giải thích: Với $x = -6$, ta có $f(-6) = \frac{12}{-6} = -2$; Với $x = -4$, ta có $f(-4) = \frac{12}{-4} = -3 \dots$

Bài toán 2. Cho hàm số $y = f(x) = x^2 - 2$. Hãy tính $f(2); f(1); f(0); f(-1); f(-2)$.

Hướng dẫn: $y = f(x) = x^2 - 2 \Rightarrow f(2) = 2^2 - 2 = 2$.

Tính các giá trị khác: tương tự.

Ta có thể lập bảng giá trị.

Lời giải

Ta có: $f(x) = 2^2 - 2 = 2$; $f(1) = 1^2 - 2 = -1$; $f(0) = 0^2 - 2 = -2$;

$$f(-1) = (-1)^2 - 2 = -1; f(-2) = (-2)^2 - 2 = 2.$$

x	2	1	0	-1	-2
$f(x) = x^2 - 2$	2	-1	-2	-1	2

Bài toán 3. Cho hàm số $y = \frac{2}{3}x$. Điền số thích hợp vào ô trống:

x	-0,5			4,5	9
y		-2	0		

Hướng dẫn: Thay $x = -0,5$ vào công thức $y = \frac{2}{3}x \Rightarrow y = \frac{2}{3} \cdot (-0,5) = \frac{-1}{3}$.

Thay $y = -2$ vào công thức $y = \frac{2}{3}x$, ta tìm được x .

Lời giải

x	-0,5	-3	0	4,5	9
y	$\frac{-1}{3}$	-2	0	3	6

Bài toán 4. Cho hàm số $y = 5x - 1$. Lập bảng các giá trị tương ứng của y khi $x = -5; -4; -3; -2; 0; \frac{1}{5}$.

Lời giải

x	-5	-4	-3	-2	0	$\frac{1}{5}$
$5x - 1$	-26	-21	-16	-11	-1	0

Bài toán 3. Cho hàm số $y = f(x) = |x + 1|$. Tính $f(-2)$; $f(2)$.

Lời giải

$$\text{Ta có: } f(-2) = |(-2) + 1| = 1 ; \quad f(2) = |2 + 1| = 3$$

Bài toán 6. Cho hàm số $y = -6x$. Tìm các giá trị của x sao cho

Lời giải

- a) y nhận giá trị dương nên $y > 0 \Rightarrow -6x > 0$, vì $-6 < 0 \Rightarrow x < 0$.

b) y nhận giá trị âm $y < 0 \Rightarrow -6x < 0$, vì $-6 < 0 \Rightarrow x > 0$.

II. Xác định một hàm số

Bài toán 7. Cho hình vuông có cạnh là x . Viết hàm số y liên hệ giữa chu vi hình vuông và cạnh.

Lời giải

Ta có: $y = 4x$

Bài toán tương tự: Hàm số $y = x^2$, biểu thị sự tương quan giữa diện tích và cạnh hìn vuông.

Bài toán 8. Cho đường tròn bán kính R . Viết công thức tính chu vi đường tròn.

Lời giải

Ta có: $y = 4\pi R$; trong đó y là hằng số; R là biến số; còn 2π là một số không đổi.

Chú ý: Để tránh nhầm lẫn, chu vi đường tròn ta kí hiệu là y ; bán kính kí hiệu là x , ta có $y = 4\pi x$ ($\pi = 3,1416$).

Bài toán 9. Một cạnh của hình chữ nhật là 5m, cạnh kia là $x(m)$. Biểu thị diện tích $y(m^2)$ theo x .

Lời giải

Ta có: $y = 5x$.

Bài toán tương tự: Biểu thị chu vi hình chữ nhật $y(m)$ theo x . Ta có: $y = 2(5+x) \Rightarrow y = 2x + 10$

Bài toán 10. Cho hàm số $y = f(x) = ax$. Tìm a biết $f\left(-\frac{1}{2}\right) = 3$.

Lời giải

Ta có: $f\left(-\frac{1}{2}\right) = a \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{-a}{2}$ suy ra $\frac{-a}{2} = 3 \Rightarrow a = -6$.

Bài toán khác:

1. Tìm m , biết $y = f(x) = 3x + m$ và $f(1) = -1$.

(Hướng dẫn: $f(1) = 3 \cdot 1 + m = m + 3 \Rightarrow m + 3 = -1 \Rightarrow m = -4$.)

2. Tìm a, b ; biết $y = f(x) = ax + b$; $f(0) = -3$ và $f(-1) = -5$.

(Hướng dẫn: $f(0) = -3 \Rightarrow a \cdot 0 + b = -3 \Rightarrow m + 3 = -1 \Rightarrow m = -4$.)

Vậy $f(x) = ax - 3$ lại có $f(-1) = -5 \Rightarrow a(-1) - 3 = -5 \Rightarrow a = 2$.

Đáp số: $a = 2$; $b = -3$.

Bài toán 11. Cho hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx + 5$ và $f(2) = 4$. Tính $f(-2)$.

(Hướng dẫn: $f(2) = 8a + 2b + 5$; $f(-2) = -8a - 2b + 5$.)

$f(2) = 4 \Rightarrow 8a + 2b + 5 = 4 \Rightarrow -8a - 2b = 1$. Từ đó tính được $f(-2)$.

Lời giải

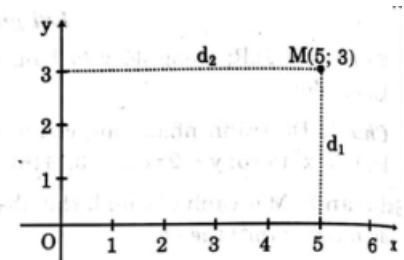
Ta có: $f(2) = 4 \Rightarrow a \cdot 2^3 + 2b + 5 = 4 \Rightarrow 8a + 2b + 5 = 4 \Rightarrow -8a - 2b = 1$.

Lại có: $f(-2) = -8a - 2b + 5$ thay $-8a - 2b = 1 \Rightarrow f(-2) = 1 + 5 = 6$.

III. MẶT PHẲNG TỌA ĐỘ

Bài toán 12. Cho điểm $M(5; 3)$. Đánh dấu vị trí của M trên hệ trục tọa độ Oxy.

Hướng dẫn: Từ điểm 5 trên trục Ox, kẻ đường thẳng d_1 vuông góc với Ox. Từ điểm 3 trên trục Oy, kẻ đường thẳng d_2 vuông góc với Oy. Giao điểm của d_1 và d_2 chính là điểm $M(5; 3)$.



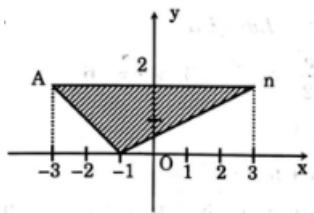
Lời giải

Điểm $M(5;3)$ được đánh dấu trên hình vẽ bên.

Bài toán 13. Trên hệ trục tọa độ Oxy, vẽ tam giác ABC, biết A(-3;2); B(3;2); C(-1;0)

Lời giải

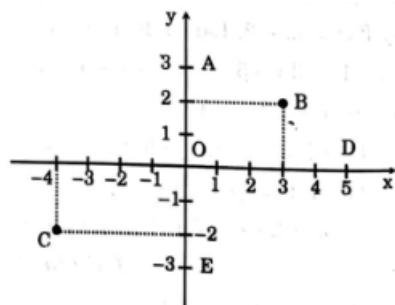
Xem hình vẽ.



Bài toán 14. Các điểm A,B,C,D , trên hình vẽ. Xác định tọa độ A,B,C,D

Lời giải

Ta có: A(0;3); B(3;2); C(-4;-2); D(5;0)



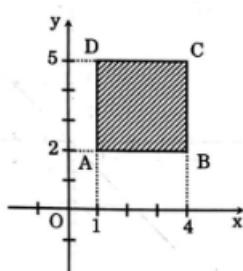
Chú ý: Những điểm trên trục Ox luôn có tung độ bằng 0 ; những điểm trên trục Oy luôn có hoành độ bằng 0 .

Bài toán 15. Cho hình vuông ABCD có A(1;2);B(4;2);C(4;5). Hãy vẽ hình vuông ABCD và cho biết tọa độ đỉnh D .

Lời giải

Xem hình vẽ.

Tọa độ của D:D(1;5)

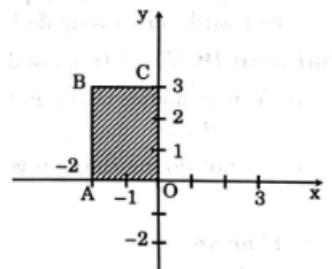


Bài toán 16. Đánh dấu vị trí các điểm $A(-2;0)$; $B(-2;3)$; $C(0;3)$ và dựng hình chữ nhật D có ba đỉnh liên tiếp là A, B, C . Tìm tọa độ đỉnh thứ tư.

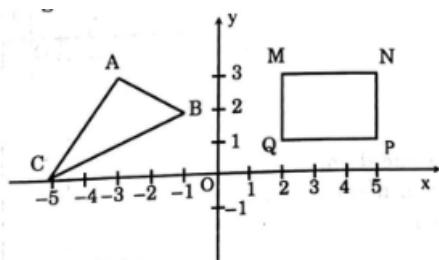
Lời giải

Xem hình vẽ

Đỉnh thứ tư chính là gốc tọa độ $O: O(0;0)$



Bài toán 17. Tìm tọa độ các đỉnh của hình chữ nhật $MNPQ$ và của tam giác ABC trong hình vẽ.



Lời giải

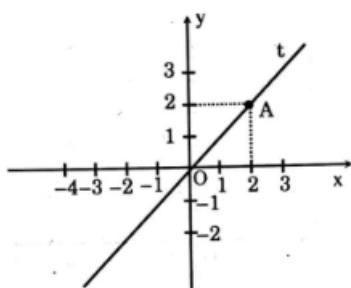
Ta có: $M(2;3); N(5;3); P(5;1); Q(2;1); A(-3;3); B(-1;2); C(-5;0)$

Bài toán 18. Vẽ trục tọa độ Oxy và đường phân giác của góc phần tư thứ I III. Đánh dấu điểm A nằm trên đường phân giác đó và có hoành độ là 2.

Lời giải

Ta có $A(2;2)$ (xem

hình vẽ).



Nhận xét:

- + Tất cả các điểm trên đường phân giác Ot đều có hoành độ và tung độ bằng nhau.
- + Tương tự: Trên đường phân giác của góc phần tư thứ II, IV các điểm có hoành độ và tung độ là hai số đối nhau.

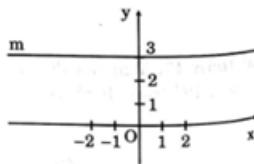
Bài toán 19. Vẽ hệ trục tọa độ.

a) Vẽ một đường thẳng m song song với trục hoành và cắt trục tung tại điểm $(0;3)$.

b) Vẽ một đường thẳng n vuông góc với trục hoành tại điểm $(2;0)$.

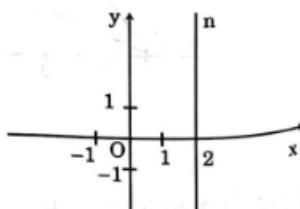
Lời giải

a) Hình vẽ



Nhận xét: Các điểm trên đường thẳng m đều có cùng tung độ là 3.

b) Hình vẽ

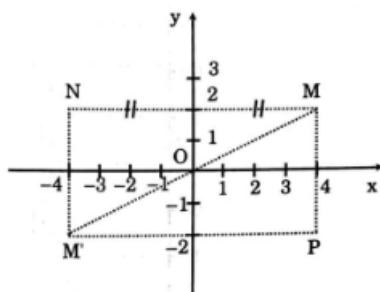


Nhận xét: Tất cả các điểm trên đường thẳng n đều có cùng hoành độ là 2

Bài toán 20. Vẽ một hệ trục tọa độ Oxy và đánh dấu điểm $M(4;2)$. Xác định tọa độ của điểm N sao cho trục tung là trung trực của đoạn thẳng MN .

Lời giải

Trên hình vẽ: $M(4;2)$ và $N(-4;2)$.



Tương tự:

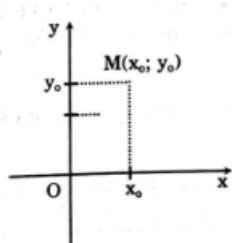
+ Điểm $P(4;-2)$ là điểm mà đoạn thẳng MP nhận trục hoành là đường trung trực.

+ Nối MO và kéo dài về phía O , lấy điểm M' sao cho $OM' = OM$, ta có $M'(-4;-2)$.

Bài toán 21. Xác định dấu của tọa độ điểm $M(x_0; y_0)$ khi M nằm trong góc phần tư thứ I.

Lời giải

Điểm $M(x_0; y_0)$ nằm trong góc phần tư thứ I sẽ có $x_0 > 0$ và $y_0 > 0$



Nhận xét:

- Điểm $M(x_0; y_0)$ nằm trong góc phần tư thứ II có $x_0 < 0$ và $y_0 > 0$
- Điểm $N(x_0; y_0)$ nằm trong góc phần tư thứ III có $x_0 < 0$ và $y_0 < 0$
- Điểm $M(x_0; y_0)$ nằm trong góc phần tư thứ IV có $x_0 > 0$ và $y_0 < 0$.

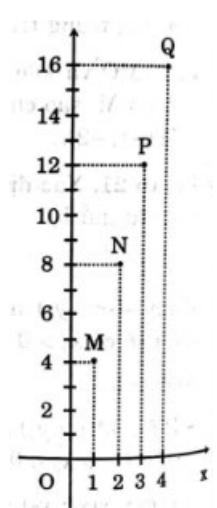
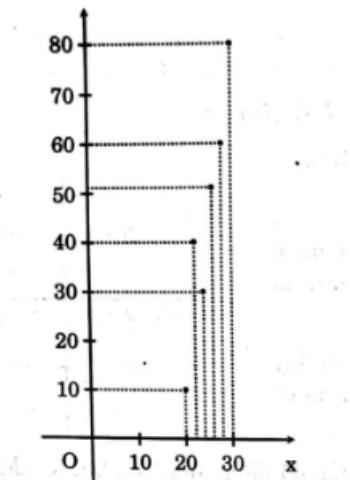
IV. Đồ thị của hàm số

Bài toán 22. Vẽ đồ thị của hàm số $y = f(x)$ cho bảng sau:

x	20	22	24	26	28	30
$y = f(x)$	10	40	30	52	60	80

Lời giải

Đồ thị hàm số là tập hợp các điểm có tọa độ $(20;10), (22;40), (24;30), (26;52), (28;60), (30;80)$ (hình vẽ).



Bài toán 23. Lập bảng giá trị của hàm số có đồ thị như hình vẽ dưới bên

Lời giải

Ta có bảng giá trị hàm số

x	1	2	3	4
y	4	8	12	16

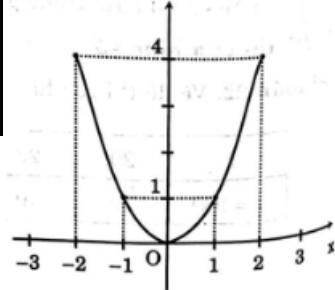
Bài toán 24. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Hãy hoàn thành bảng giá trị hàm số sau đây:

x	-2	-1	0	1	2
y	?	?	?	?	?

Lời giải

Bảng giá trị

x	-2	-1	0	1	2
y	4	1	0	1	4



Bài toán 25. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đồ thị của hàm số $y = x + 2$ (hình vẽ)

- a) Quan sát đồ thị của hàm số và cho biết trong ba điểm: $A(0;2), B(-2;0), C(2;3)$, điểm nào thuộc đồ thị của hàm số, điểm nào không thuộc đồ thị của hàm số.

- b) Điểm $M(2023;2024)$ có thuộc đồ thị hàm số hay không?

Lời giải

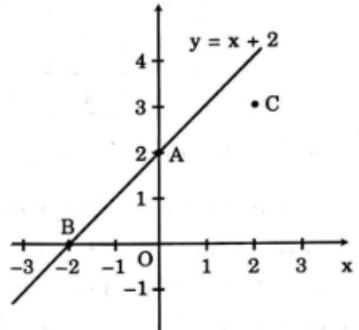
- a) Điểm $A(0;2)$ và $B(-2;0)$ thuộc đồ thị của hàm số.

Điểm $C(2;3)$ không thuộc đồ thị hàm số.

- b) Khi $x = 2023$, ta có:

$$y = 2023 + 2 = 2025 \neq 2024$$

Vậy điểm $M(2023;2024)$ không thuộc đồ thị của hàm số.



C. BÀI TẬP

7.38. Đại lượng y có phải là hàm số của đại lượng x không, nếu bảng giá trị tương ứng của chúng là:

a)

x	-3	2	-1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	2
---	----	---	----	---------------	---------------	---

y	-4	6	-12	36	24	6
-----	----	---	-----	----	----	---

b)

x	-2	-1	0	1	2
y	1	1	1	1	1

7.39. Cho hàm số $y = \frac{8}{x}$. Tìm các giá trị của y tương ứng với x lần lượt $2; 4; -1; -4$

7.40. Cho hàm số $y = f(x) = 5 - 2x$

a) Tính $f(-2); f(-1); f(0); f(3)$

b) Tính các giá trị của x ứng với $y = 5; 3; -1$

7.41. Cho hàm số $y = -6x$. Tìm các giá trị của x sao cho

a) y nhận giá trị dương

b) y nhận giá trị âm

7.42 Cho hàm số $y = f(x) = |x - 1|$. Tính $f(-2); f(2)$

7.43 Cho hàm số $y = f(x) = 1 - x^2$

a) Tính $f\left(\frac{1}{2}\right); f\left(-\frac{1}{2}\right); f(1); f(-1)$

b) Tìm x , biết $f(x) = -8$

7.44. Cho hàm số $y = f(x) = mx + n$. Tìm m, n biết $f(0) = -2$ và $f(1) = -1$

7.45. Cho hàm số được cho bởi bảng sau đây

x	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	2
y	4	2	1	-1	-2	-4

a) Tính $f(-1); f\left(\frac{1}{2}\right)$

b) Hàm số $y = f(x)$ được cho bởi công thức nào?

7.46. Cho hàm số $y = f(x) = |2 - 3x| - 1$

a) Tính $f(-1); f(2); f(3)$

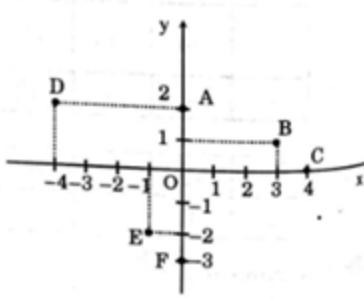
b) Tìm x , biết: $f(x) = 5; f(x) = 0$

7.47. Cho biết hoành độ, tung độ của các điểm sau và đánh dấu các điểm này trong hệ trục tọa độ Oxy.

a) $M(1; 0), N(4; 0), A(-3; 0); B(0; -2)$

b) $P(3; 4), Q(-2; 5), S(-3; -2); T\left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right)$

7.48. Tìm tọa độ các điểm A, B, C, D, E, F trên hình vẽ



7.49. Vẽ đường thẳng qua hai điểm:

a) $A(3; -2)$ và $B(-2; 2)$

b) $M(2; 0)$ và $N(0; -2)$

7.50. Vẽ đoạn thẳng đi qua hai điểm

a) $A(3; 4)$ và $B(-6; 5)$

b) $M(0; -5)$ và $N(4; 0)$

7.51. Vẽ tam giác biết tọa độ ba đỉnh

a) $M(3; 2); N(-1; 0); P(-2; 2)$

b) $A(0; -1); B(0; 5); C(4; 0)$

7.52. Cho ba đỉnh $A(1; 2); B(4; 2); C(4; 5)$ của hình vuông ABCD. Tìm tọa độ của D.

7.53. Vẽ đường thẳng qua hai điểm $A(0; 5)$ và $B(-2; 5)$. Nhận xét gì về tung độ của các điểm trên đường thẳng AB .

7.54. Cho các điểm $A(5; 4); B(1; 1); C(-3; 2); D(-4; -4)$. Tìm tọa độ của các điểm $A'; B'; C'; D'$ sao cho trục Ox là trung trực của $AA'; BB'; CC'; DD'$

7.55. Các giá trị tương ứng của hai đại lượng x và y cho bởi các bảng sau. Đại lượng y có phải là một hàm số không?

a)

x	-3	-1	0	2	4
y	1	1	1	1	1

b)

x	-2	1	0	1	2
y	-2	1	0	2	2

7.56. Cho hàm số $y = f(x) = \frac{4}{x}$.

a) Tính $f(-4); f(8)$.

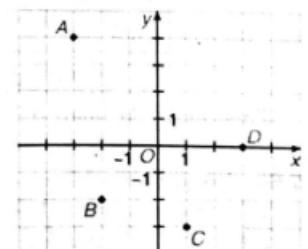
b) Hoàn thành bảng sau vào vở:

x	-2	?	2	3	?
$y = f(x)$?	-4	?	?	8

7.57.

a) Xác định tọa độ của các điểm $A; B; C; D$ trong hình vẽ.

b) Xác định các điểm $E(0; -2)$ và $F(2; -1)$ trong hình vẽ.

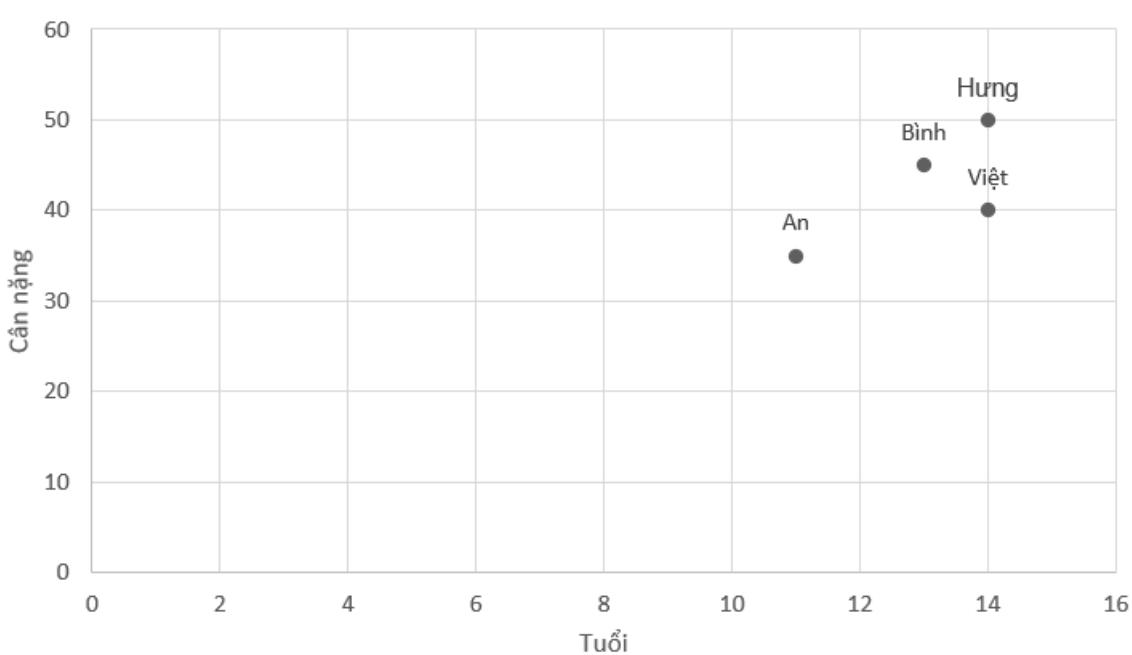


7.58. Hàm số $y = f(x)$ được cho bởi bảng sau:

x	-2	-1	0	1	2
$y = f(x)$	-5	-2,5	0	2,5	5

Vẽ đồ thị của hàm số $y = f(x)$.

7.59. Cân nặng và tuổi của bốn bạn An, Bình, Hưng, Việt được biểu diễn trên mặt phẳng tọa độ như hình vẽ.



(Do số liệu về tuổi và cân nặng rất chênh lệch nên trong hình vẽ, ta thấy một đơn vị dài trên trục tung bằng 5 lần đơn vị dài trên trục hoành).

Hãy cho biết:

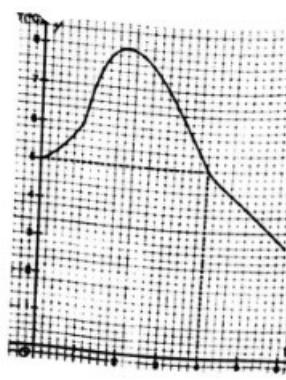
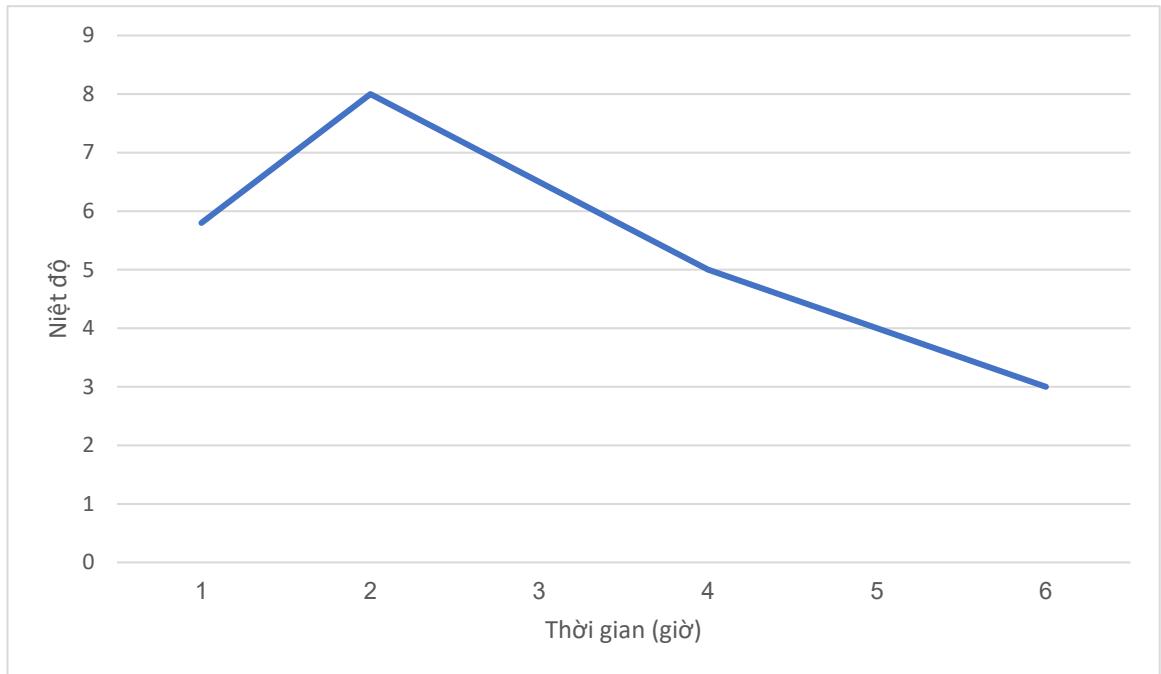
- a) Ai là người nặng nhất và nặng bao nhiêu?
- b) Ai là người ít tuổi nhất và bao nhiêu tuổi?
- c) Bình và Việt ai nặng hơn và ai nhiều tuổi hơn?
- d) Thay dấu "?" bằng số thích hợp để hoàn thành bảng sau vào vỏ:

Tên	An	Bình	Hưng	Việt
Tuổi	?	?	?	?
Cân nặng (kg)	?	?	?	?

Theo bảng đã hoàn thành, cân nặng có phải là hàm số của tuổi không? Vì sao?

7.60. Đồ thị của hàm số mô tả nhiệt độ $T(^{\circ}C)$ tại các thời điểm t (giờ) của một thành phố ở châu Âu từ giữa trưa đến 6 giờ tối. (Hình vẽ).

- a) Tìm $T(1), T(2), T(5)$ và giải thích ý nghĩa của các số này.
- b) Trong hai giá trị $T(1)$ và $T(4)$, giá trị nào lớn hơn?
- c) Tìm t sao cho $T(t) = 5$.
- d) Trong khoảng thời gian nào thì nhiệt độ cao hơn $5^{\circ}C$?



Bài 28. HÀM SỐ BẬC NHẤT VÀ ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ BẬC NHẤT

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Khái niệm hàm số bậc nhất

Hàm số bậc nhất là hàm số cho bởi công thức $y = ax + b$, trong đó a, b các số cho trước và $a \neq 0$.

2. Đồ thị của hàm số bậc nhất

Đồ thị của hàm số $y = ax + b$ ($a \neq 0$) là một đường thẳng.

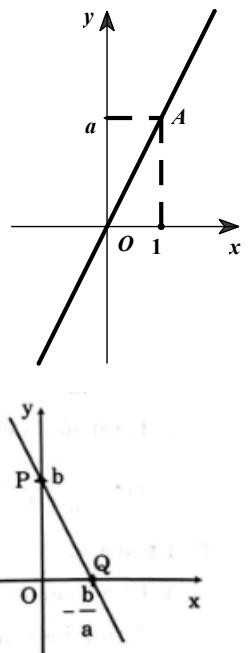
Chú ý: Đồ thị của hàm số $y = ax + b$ ($a \neq 0$) còn được gọi là đường thẳng $y = ax + b$.

3. Cách vẽ đồ thị của hàm số bậc nhất

Ta đã biết đồ thị của hàm số bậc nhất $y = ax + b$ ($a \neq 0$) là một đường thẳng. Do đó, để vẽ đồ thị này, chỉ cần xác định được hai điểm phân biệt nào đó thuộc đồ thị rồi vẽ đường thẳng đi qua hai điểm đó.

Ta xét hai trường hợp:

- Khi $b = 0$ thì $y = ax$. Đồ thị của hàm số $y = ax$ đường thẳng đi qua gốc tọa độ $O(0;0)$ và điểm $(1;a)$.
- Khi $b \neq 0$ ta thường xác định hai điểm đặc biệt trên đồ thị là giao của đồ thị với hai trục tọa độ như sau:
 - Cho $x = 0$ thì $y = b$, ta được điểm $P(0;b)$ thuộc rực tung Oy .
 - Cho $y = 0$ thì $x = -\frac{b}{a}$, ta được điểm $Q\left(-\frac{b}{a};0\right)$ huộc trục hoành Ox .
 - Vẽ đường thẳng đi qua hai điểm P, Q ta được đồ thị của hàm số $y = ax + b$.



B. PHÂN LOẠI CÁC BÀI TẬP

1. Xác định hàm số bậc nhất:

Bài toán 1. Hàm số nào trong các hàm số sau đây là hàm số bậc nhất.

- | | |
|------------------------|-----------------------------------|
| a) $y = -\frac{1}{2}x$ | b) $y = \sqrt{2}(x-1) + \sqrt{3}$ |
| c) $y = 2x^2 + 3$ | d) $y = 1 - 2x$ |

Hướng dẫn: Hàm số có dạng $y = ax + b$ ($a \neq 0$).

Lời giải

- a) $y = -\frac{1}{2}x$ là hàm số bậc nhất: $a = -\frac{1}{2}; b = 0$.
- b) $y = \sqrt{2}(x-1) + \sqrt{3} \Leftrightarrow y = \sqrt{2}x - \sqrt{2} + \sqrt{3}$ là hàm số bậc nhất: $a = \sqrt{2}; b = -\sqrt{2} + \sqrt{3}$.
- c) $y = 2x^2 + 3$ không phải là hàm số bậc nhất vì có biểu thức bậc hai của x .
- d) $y = 1 - 2x \Leftrightarrow y = -2x + 1$ là hàm số bậc nhất: $a = -2; b = 1$.

Bài toán 2. Tìm m để hàm số sau là hàm số bậc nhất:

- | | | |
|--------------------------|-------------------------------|-----------------------------|
| a) $y = \sqrt{1-m}(x-1)$ | b) $y = \frac{m-1}{m+1}x + 2$ | c) $y = \frac{1}{m+2}x - 3$ |
|--------------------------|-------------------------------|-----------------------------|

Lời giải

a) Ta có $y = (1-m)x - (1-m)$

Hàm số đã cho là hàm số bậc nhất

Khi $1-m \neq 0 \Rightarrow m \neq 1$.

b) Hàm số đã cho là hàm số bậc nhất

Khi $\frac{m-1}{m+1} \neq 0$ và $m+1 \neq 0 \Rightarrow m \neq \pm 1$

c) Hàm số đã cho là hàm số bậc nhất

Khi $\frac{1}{m+2} \neq 0 \Rightarrow m+2 \neq 0 \Rightarrow m \neq -2$.

Bài toán 3.

a) Cho hàm số $y = ax + 2$. Tìm a biết khi $x = 1$ thì $y = 3$.

b) Cho hàm số $y = 2x + b$. Tìm b biết khi $x = -2$ thì $y = 1$.

c) Cho hàm số $y = f(x) = ax + b$. Tìm a, b biết $f(0) = 2; f(1) = \sqrt{2}$.

Lời giải

a) Thay $x = 1$ và $y = 3$ vào phương trình $y = ax + 2$, ta có:

$$3 = a \cdot 1 + 2 \Rightarrow a = 3 - 2 \Rightarrow a = 1$$

b) Thay $x = -2$ và $y = 1$ vào phương trình $y = 2x + b$, ta có:

$$1 = 2 \cdot (-2) + b \Rightarrow b = 5.$$

c) Ta có: $f(0) = 2 \Leftrightarrow a \cdot 0 + b = 2 \Leftrightarrow b = 2$ khi đó, ta được $f(x) = ax + 2$.

Lại có: $f(1) = \sqrt{2} \Leftrightarrow a \cdot 1 + 2 = \sqrt{2} \Leftrightarrow a = \sqrt{2} - 2$

Vậy $f(x) = (\sqrt{2} - 2)x + 2$.

Bài toán 4. Cho hàm số $y = f(x) = (1 - \sqrt{3})x + 1$

a) Tìm x khi biết $y = \sqrt{3}$.

b) Tìm y khi biết $x = 1 + \sqrt{3}$.

Hướng dẫn:

a) Tìm x từ phương trình: $\sqrt{3} = (1 - \sqrt{3})x + 1$.

b) Tìm y từ phương trình: $y = (1 - \sqrt{3})(1 + \sqrt{3}) + 1$.

Lời giải

a) Thay $y = \sqrt{3}$ vào phương trình $y = (1 - \sqrt{3})x + 1$, ta được:

$$(1 - \sqrt{3})x + 1 = \sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow (1 - \sqrt{3})x = \sqrt{3} - 1$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{3} - 1}{1 - \sqrt{3}} \Leftrightarrow x = -1$$

b) Thay $x = 1 + \sqrt{3}$ vào phương trình $y = (1 - \sqrt{3})x + 1$, được:

$$y = (1 - \sqrt{3})(1 + \sqrt{3}) + 1$$

$$\Leftrightarrow y = 1 - 3 + 1 \Leftrightarrow y = -1.$$

II. Vẽ đồ thị của hàm số $y = ax + b$ ($a \neq 0$)

Bài toán 5. Vẽ đồ thị của hàm số $y = 3x + 2$.

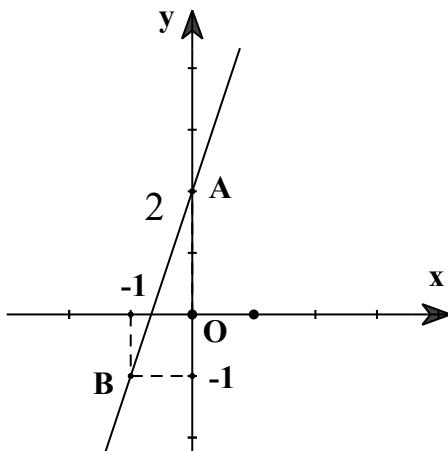
Hướng dẫn: Đồ thị của hàm số $y = ax + b$ ($a \neq 0$) là một đường thẳng nên ta chỉ cần tìm tọa độ hai điểm thuộc đường thẳng, nối hai điểm đó ta được đồ thị.

Lời giải

Bảng giá trị:

x	0	-1
$y = 3x + 2$	2	-1

Đồ thị của hàm số $y = 3x + 2$ là đường thẳng qua hai điểm $A(0; 2)$ và $B(-1; -1)$ (xem hình vẽ).



Bài toán 6. Cho hai hàm số $y = -x + 1$ và $y = x + 3$.

a) Vẽ đồ thị của hai hàm số trên cùng một hệ trục tọa độ.

b) Tìm tọa độ giao điểm của hai đồ thị.

Lời giải

a) Bảng giá trị

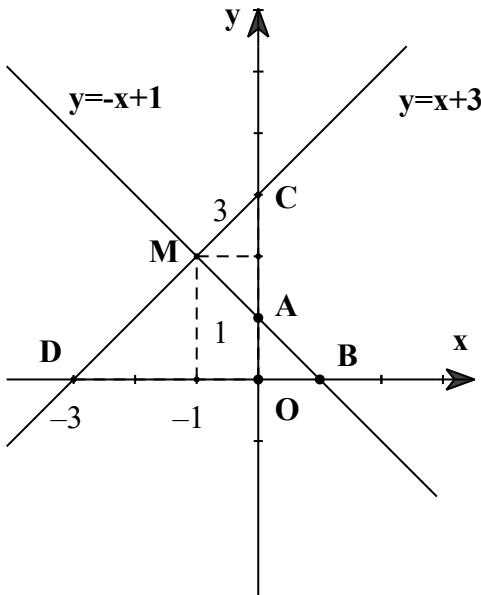
x	0	1
$y = -x + 1$	1	0

Đồ thị của hàm số $y = -x + 1$ là đường thẳng d_1 qua hai điểm $A(0; 1)$ và $B(1; 0)$.

Bảng giá trị

x	0	-3
$y = x + 3$	3	0

Đồ thị của hàm số $y = x + 3$ là đường thẳng d_2 qua hai điểm $C(0; 3)$ và $D(-3; 0)$.



b) Xét phương trình hoành độ giao điểm của d_1 và d_2 , ta có: $-x+1=x+3; 2x=-2 \Leftrightarrow x=-1$

Thay $x=-1$ vào phương trình $y=-x+1$.

Ta có: $y=-(-1)+1; y=2$

Vậy d_1 và d_2 cắt nhau tại điểm $M(-1; 2)$.

Bài toán 7. Viết phương trình của đường thẳng d qua hai điểm $A(0; -3)$ và $B(1; -1)$.

Hướng dẫn: Phương trình đường thẳng d có dạng $y=ax+b$ ($a \neq 0$). Thê tọa độ của A và B vào phương trình trên, ta tìm được b và a .

Lời giải

Phương trình đường thẳng d có dạng $y=ax+b$ ($a \neq 0$).

Vì $A \in d \Rightarrow -3=a.0+b \Rightarrow b=-3$.

Vậy phương trình của d lúc này trở thành $y=ax-3$.

Lại có $B \in d \Rightarrow -1=a.1-3 \Leftrightarrow a=2$.

Vậy phương trình của d là: $y=2x-3$.

Từ bài toán trên, ta còn có bài toán.

Chứng minh rằng ba điểm $A(0; -3); B(1; -1)$ và $C(-1; -5)$ thẳng hàng.

Hướng dẫn: Phương trình đường thẳng $AB: y=2x-3$ (xem bài toán 7). Thê tọa độ của điểm C vào phương trình trên, ta được: $-5=2.(-1)-3$ (luôn đúng).

Vậy $C \in d \Rightarrow A, B, C$ thẳng hàng.

Bài toán 8. Cho hai đường thẳng $(d_1): y=-2x+1$ và $(d_2): y=(2m-3)x+3-m$. Tìm m để đường thẳng (d_2) đi qua điểm A thuộc (d_1) và tung độ bằng 3.

Lời giải

Đặt $A(x_0; 3); A \in (d_1) \Rightarrow 3=-2x_0+1 \Rightarrow x_0=-1$. Vậy $A(-1; 3)$.

Lại có (d_2) đi qua $A \Rightarrow 3 = (2m - 3)(-1) + 3 - m \Leftrightarrow m = 1$.

Bài toán 9. Cho đường thẳng d có phương trình $y = (2m - 1)x - m$. Tìm m để đường thẳng d cắt trục hoành tại điểm có hoành độ bằng 1.

Lời giải

Gọi A là điểm trên trục hoành có hoành độ 1 $\Rightarrow A(1;0)$.

$$A \in d \Rightarrow 0 = (2m - 1) \cdot 1 - m \Leftrightarrow m = 1.$$

Bài toán 10. Chứng tỏ họ đường thẳng $d : y = mx + 2m + 1$ luôn luôn đi qua điểm $A(-2;1)$, khi m thay đổi.

Lời giải

Thay tọa độ $A : x = -2$ và $y = 1$ vào phương trình của đường thẳng d , ta có: $1 = m \cdot (-2) + 2m + 1$.
 $\Leftrightarrow 1 = 1$ (luôn đúng). Vậy $A \in d, \forall m$.

(Ta có thể nói: Khi m thay đổi, đường thẳng $(d) : y = mx + 2m + 1$ luôn đi qua một điểm cố định $A(-2;1)$)

Bài toán sau đây khó hơn:

Khi m thay đổi, chứng tỏ rằng đường thẳng $d : y = mx + 2m + 1$ luôn đi qua một điểm cố định.
Lời giải

Giả sử $A(x_0; y_0)$ là điểm cố định cần tìm, mà đường thẳng d luôn đi qua, khi m thay đổi, ta có:

$$y_0 = mx_0 + 2m + 1, \text{ với mọi } m.$$

$$\Leftrightarrow (x_0 + 2)m + 1 - y_0 = 0, \text{ với mọi } m.$$

Phương trình trên có vô số nghiệm

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0 + 2 = 0 \\ 1 - y_0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = -2 \\ y_0 = 1 \end{cases}$$

Vậy điểm $A(-2;1)$ là điểm cố định cần tìm.

(Ta có thể làm ở giấy nháp, để tìm ra điểm $A(-2;1)$ và chứng tỏ đường thẳng d đi qua A , như lời giải bài toán 8).

C. BÀI TẬP

7.61. Trong các hàm số sau, những hàm số nào là hàm số bậc nhất? Hãy xác định các hệ số a, b của chúng.

a) $y = 0 \cdot x - 5$ b) $y = 1 - 3x$; c) $y = -0,6x$;

d) $y = \sqrt{2}(x - 1) + 3$ e) $y = 2x^2 + 1$.

7.62. Cho hàm số bậc nhất $y = ax + 3$.

a) Tìm hệ số a , biết rằng khi $x = 1$ thì $y = 5$.

b) Với giá trị a tìm được, hãy hoàn thành bảng giá trị sau vào vở:

x	-2	-1	0	1	2
y	?	?	?	?	?

7.63. Vẽ đồ thị của các hàm số sau

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \ y = 2x - 6 & \text{b)} \ y = -3x + 5; & \text{c)} \ y = \frac{3}{2}x. \end{array}$$

7.64. Đồng euro (EUR) là đơn vị tiền tệ chính thức ở một số quốc gia thành viên của Liên minh châu Âu. Vào một ngày, tỉ giá hối đoái giữa đồng euro và đồng đô la Mỹ (USD) là $1\text{EUR} = 1,1052\text{USD}$.

- a) Viết công thức để chuyển đổi x euro sang y đô la Mỹ. Công thức tính y theo x này có phải là một hàm số bậc nhất của x không?
- b) Vào ngày đó, 200 euro có giá trị bằng bao nhiêu đô la Mỹ?
- c) Vào ngày đó, 500 đô la Mỹ có giá trị bằng bao nhiêu euro?

7.65. Giá cước điện thoại cố định của một hãng viễn thông bao gồm cước thuê bao là 22000 đồng/tháng và cước gọi là 800 đồng/phút.

- a) Lập công thức tính số tiền cước điện thoại y (đồng) phải trả trong tháng khi gọi x phút.
- b) Tính số tiền cước điện thoại phải trả khi gọi 750 phút.
- c) Nếu số tiền cước điện thoại phải trả là 94000 đồng thì trong tháng đó thuê bao đã gọi bao nhiêu phút?

7.66. Hàm chi phí đơn giản nhất là hàm chi phí bậc nhất $y = ax + b$, trong đó b biểu thị chi phí cố định của hoạt động kinh doanh và hệ số a biểu thị chi phí của mỗi mặt hàng được sản xuất. Giả sử rằng một xưởng sản xuất xe đạp có chi phí cố định hàng ngày là 36 triệu đồng và mỗi chiếc xe đạp có chi phí sản xuất là 1,8 triệu đồng.

- a) Viết công thức của hàm số bậc nhất biểu thị chi phí y (triệu đồng) để sản xuất x (xe đạp) trong một ngày.
- b) Vẽ đồ thị của hàm số thu được ở câu a.
- c) Chi phí để sản xuất 15 chiếc xe đạp trong một ngày là bao nhiêu?
- d) Có thể sản xuất bao nhiêu chiếc xe đạp trong một ngày, nếu chi phí trong ngày đó là 72 triệu đồng?

7.67.

Viết phương trình đường thẳng

- a) Qua hai điểm $A(0;1)$ và $B(0;\sqrt{2})$.
- b) Qua hai điểm $A(-\sqrt{2};0)$ và $B(0;\sqrt{2})$.
- c) Qua hai điểm $A(1;3)$ và $B(0;2)$.

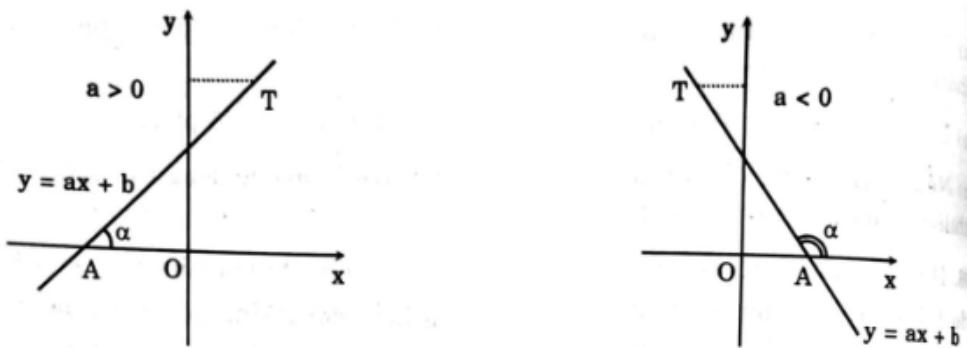
BÀI 29. HỆ SỐ GÓC CỦA ĐƯỜNG THẲNG

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Hệ số góc của đường thẳng

Trong mặt phẳng Oxy , góc α tạo bởi đường thẳng $y = ax + b$ ($a \neq 0$) và trục Ox là góc tạo bởi tia Ax và tia AT , trong đó A là giao điểm của đường thẳng $y = ax + b$ với trục Ox , T là một điểm nào đó thuộc đường thẳng $y = ax + b$ và có tung độ dương. Chú ý rằng $0^\circ < \alpha < 180^\circ$.

Ta gọi a là hệ số góc của đường thẳng $y = ax + b$ ($a \neq 0$).



Nhận xét

- Khi hệ số góc a dương, đường thẳng $y = ax + b$ đi lên từ trái sang phải. Góc tạo bởi đường thẳng này và trục Ox là góc nhọn.
- Khi hệ số góc a âm, đường thẳng $y = ax + b$ đi xuống từ trái sang phải. Góc tạo bởi đường thẳng này và trục Ox là góc tù.

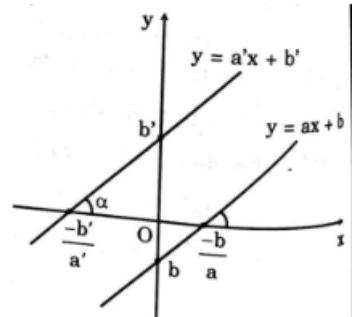
2. Đường thẳng song song và đường thẳng cắt nhau

Nhận biết hai đường thẳng song song

Hai đường thẳng $y = ax + b$ ($a \neq 0$) và $y = a'x + b'$ ($a' \neq 0$) song song với nhau khi $a = a', b \neq b'$ và ngược lại; trùng nhau khi $a = a', b = b'$ và ngược lại.

Nhận biết hai đường thẳng cắt nhau

Hai đường thẳng $y = ax + b$ ($a \neq 0$) và $y = a'x + b'$ ($a' \neq 0$) cắt nhau khi $a \neq a'$ và ngược lại.



B. PHÂN LOẠI CÁC BÀI TẬP

1. Tìm hệ số góc của đường thẳng

Bài toán 1. Tìm hệ số góc của đường thẳng (d): $y = ax + 3$, biết đường thẳng đi qua điểm $A(2;6)$.

Lời giải

Thay tọa độ $A(2;6)$ vào phương trình $y = ax + 3$, ta có $6 = a.2 + 3 \Leftrightarrow a = \frac{3}{2}$

Vậy hệ số góc của đường thẳng (d) là $a = \frac{3}{2}$.

Bài toán 2. Tìm hệ số góc của đường thẳng (d) qua gốc tọa độ O và điểm $M(3;2)$.

Lời giải

Phương trình đường thẳng (d) có dạng: $y = ax + b (a \neq 0)$

Ta có: $O \in (d) \Rightarrow 0 = a.0 + b \Rightarrow b = 0$.

Phương trình đường thẳng (d) có dạng: $y = ax$.

Lại có: $M \in (d) \Rightarrow 2 = a.3 \Rightarrow a = \frac{2}{3}$.

Vậy hệ số góc của đường thẳng (d) là $a = \frac{2}{3}$.

Bài toán 3. Tìm hệ số góc của đường thẳng (d), biết (d) qua hai điểm $A(2;0)$ và $B(1;2)$.

Lời giải

Phương trình đường thẳng (d) có dạng: $y = ax + b (a \neq 0)$

Ta có: $A \in (d) \Rightarrow 0 = a.2 + b \Rightarrow b = -2a \quad (1)$.

Lại có $B \in (d) \Rightarrow 2 = a.1 + b \Rightarrow b = 2 - a \quad (2)$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow -2a = 2 - a \quad (=b)$

$$\Rightarrow a = -2 \text{ (có thể tìm được } b = 4\text{)}$$

Vậy hệ số góc của đường thẳng (d) là $a = -2$.

Bài toán 4. Tìm hệ số góc của đường thẳng (d): $y = (m-1)x + 2$, biết rằng (d) qua $A(2;1)$.

Lời giải

Ta có: $A \in (d) \Rightarrow 1 = (m-1).2 + 2 \Rightarrow m = \frac{1}{2}$

Khi đó, phương trình đường thẳng (d) có dạng: $y = -\frac{1}{2}x + 2$.

Vậy hệ số góc của đường thẳng (d) là $a = -\frac{1}{2}$.

II. Viết phương trình đường thẳng song song với đường thẳng cho trước.

Bài toán 5. Cho điểm $M(-2;1)$ và đường thẳng (d): $y = -2x + 3$. Viết phương trình đường thẳng (d') song song với (d) và qua M .

Hướng dẫn: Hai đường thẳng (d): $y = ax + b$ (d) và (d'): $y = a'x + b'$ song song với nhau

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = a' \\ b \neq b' \end{cases}$$

Lời giải

Đường thẳng (d') // (d) \Rightarrow phương trình (d') có dạng:

$$y = -2x + b' \quad (b' \neq 3)$$

$$M \in (d') \Rightarrow 1 = (-2)(-2) + b' \Rightarrow b' = -3$$

Vậy phương trình (d') : $y = -2x - 3$

Bài toán 6. Tìm m để đồ thị hàm số $y = mx + 3$ song song với đường thẳng $y = -2x$.

Lời giải

Đồ thị hàm số $y = mx + 3$ song song với đường thẳng

$$y = -2x \Leftrightarrow \begin{cases} m = -2 \\ 3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = -2.$$

Bài toán 7. Cho hai đường thẳng (d) : $y = (m-3)x + 3$ và (d') : $y = -x + m$. Tìm m để (d) và (d') song song với nhau.

Lời giải

$$(d) // (d') \Leftrightarrow \begin{cases} m-3 = -1 \\ 3 \neq m \end{cases} \Leftrightarrow m = 2.$$

Bài toán 8. Viết phương trình đường thẳng (d) biết (d) cắt trục hoành tại điểm A có hành độ bằng 2 và (d) song song với (d') : $y = x$.

Lời giải

Vì $(d) // (d')$ nên phương trình (d) có dạng $y = x + b \quad (b \neq 0)$

Điểm $A \in Ox$ có trục hoành bằng 2 $\Rightarrow A(2;0)$

$$A \in (d) \Rightarrow 0 = 2 + b \Rightarrow b = -2$$

Vậy phương trình (d') : $y = x - 2$.

Bài toán 9. Cho đường thẳng (d_1) : $y = 2x$ và (d_2) : $y = -x + 3$ viết phương trình đường thẳng d_3 song song với d_1 và cắt d_2 tại điểm có hành độ bằng 2

Lời giải

Vì $d_3 // d_1$ nên phương trình d_3 có dạng $y = 2x + b \quad (b \neq 0)$

Gọi $A(x_A; y_A)$ là giao điểm của d_3 và $d_2 \Rightarrow A \in d_2$ và A có hoành độ $x_A = 2$

$$\Rightarrow y_A = -x_A + 3 = -2 + 3 = 1.$$

vậy $A(2;1)$

Lại có $A \in d_3 \Rightarrow 1 = 2 \cdot 2 + b \Rightarrow b = -3$

Phương trình đường thẳng $y = 2x - 3$.

III. Hai đường thẳng cắt nhau

Bài toán 10. Tìm tọa độ giao điểm của hai đường thẳng

$$(d_1): y = 2x + 3 \text{ và } (d_2): y = -x + 3$$

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm (nếu có) của (d_1) và (d_2) :

$$2x + 3 = -x + 3 \Leftrightarrow 3x = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

Thay $x = 0$ vào phương trình

$$y = 2x + 3 \Rightarrow y = 2 \cdot 0 + 3 \Rightarrow y = 3$$

Vậy tọa độ giao điểm của (d_1) và (d_2) là điểm $M(0;3)$

Bài toán 11. Cho ba đường thẳng :

$$d_1: y = 3x; d_2: y = x + 2; d_3: y = (m-3)x + 2m + 1$$

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm (nếu có) của (d_1) và (d_2) :

$$3x = x + 2 \Leftrightarrow 2x = 2 \Leftrightarrow x = 1$$

Thay $x = 1$ vào phương trình $y = 3x$, ta có: $y = 3 \cdot 1 \Rightarrow y = 3$

Vậy giao điểm của d_1 và d_2 là $A(1;3)$

$$d_1; d_2; d_3 \text{ đồng quy} \Leftrightarrow A(1;3) \in d_3$$

Thay tọa độ điểm A vào phương trình

$$y = (m-3)x + 2m + 1, \text{ ta được:}$$

$$3 = (m-3) \cdot 1 + 2m + 1 \Leftrightarrow 3m = 5 \Leftrightarrow m = \frac{3}{5}.$$

Bài toán 12. Tìn điều kiện của m để hai đường thẳng sau đây cắt nhau:

$$d_1: y = 2x + 3; d_2 = (2m+1)x - 3 \quad \left(m \neq -\frac{1}{2} \right)$$

Lời giải

$$d_1 \text{ cắt } d_2 \Leftrightarrow \begin{cases} 2 \neq 2m+1 \\ m \neq -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq \frac{1}{2} \\ m \neq -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Bài toán 13. Tìn m để hai đường thẳng sau đây cắt nhau tại một điểm trên trực tung

$$d_1: y = mx - m + 2; d_2 = (m-3)x + m$$

Lời giải

Điều kiện: $m \neq 0$ và $m-3 \neq 0 \Rightarrow m \neq 0$ và $m \neq 3$

d_1 có tung độ gốc là $-m+2$; d_2 có tung độ gốc là m

Theo giả thiết ta có $-m+2 = m \Leftrightarrow m = 1$.

Bài toán 14. Viết phương trình đường thẳng (d) đi qua điểm $M(2;0)$ và cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 3

Lời giải

Phương trình đường thẳng (d) có dạng: $y = ax + b (a \neq 0)$. Tung độ góc bằng 3 $\Rightarrow b = 3$

Phương trình đường thẳng (d) lúc này có dạng: $y = ax + 3$

$$\text{Lại có } M \in (d) \Rightarrow 0 = a \cdot 2 + 3 \Rightarrow a = -\frac{3}{2}$$

$$\text{Vậy phương trình đường thẳng } (d): y = -\frac{3}{2}x + 3$$

Bài toán 15. Chứng tỏ ba đường thẳng sau đồng quy khi m thay đổi

$$d_1: y = 2x + 1; d_2: y = -\frac{1}{2}x + 1; d_3: y = mx + 1$$

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm (nếu có) của d_1 và d_2 :

$$2x + 1 = -\frac{1}{2}x + 1 \Leftrightarrow x = 0$$

Ta tìm được giao điểm A của d_1 và d_2 là: $A(0;1)$

Thay tọa độ A vào phương trình của $d_3: 1 = m \cdot 0 + 1$ (luôn đúng)

Vậy d_3 luôn đi qua giao điểm A của d_1 và d_2 tức là ba đường thẳng sau đồng quy khi m thay đổi.

Cách khác: Ta có thể tìm được đường thẳng d_3 luôn đi qua điểm cố định $A(0;1)$. (Bạn hãy xem bài toán 11, §3)

Để dàng thử lại $A \in d_1$ và $A \in d_2$

Vậy d_1, d_2, d_3 đồng quy.

Bài toán 16. Cho hai đường thẳng $d_1: y = x + m; d_2: y = 2x - m$

Tìm tập hợp giao điểm A của d_1 và d_2

Lời giải

Phương trình $d_1: y = x + m$ có $a_1 = 1; (b_1 = m)$

Phương trình $d_2: y = 2x - m$ có $a_2 = 2; (b_2 = -m)$

Ta có $1 \neq 2 \Leftrightarrow a_1 \neq a_2$

Vậy d_1 luôn cắt d_2 tại điểm $M(x_0; y_0)$

Ta có $\begin{cases} y_0 = x_0 + m & (1) \\ y_0 = 2x_0 - m & (2) \end{cases}$

Cộng vế với vế (1) và (2) ta được: $2y_0 = 3x_0 \Rightarrow y_0 = \frac{3}{2}x_0$

Vậy tập hợp các điểm M là đường thẳng $y = \frac{3}{2}x$.

Ta có thể phát biểu bài toán dưới dạng khác như sau:

Chứng tỏ đường thẳng giao điểm của hai đường thẳng sau đây luôn nằm trên một đường thẳng khi m thay đổi

$$d_1 : y = x + m; d_2 : y = 2x - m$$

Bài toán 17. Cho hai đường thẳng $(d_1) : y = 2x - 6$ và $(d_2) : y = -x + 3$

a) Tìm tọa độ giao điểm A của d_1 và d_2

b) Hai đường thẳng (d_1) và (d_2) cắt trực tung lần lượt tại B và C . Tính diện tích tam giác ABC

Lời giải

a) Phương trình hoành độ giao điểm (nếu có) của (d_1) và (d_2) :

$$2x - 6 = -x + 3 \Leftrightarrow 3x = 9 \Leftrightarrow x = 3$$

Thay $x = 3$ vào phương trình $y = 2x - 6$, ta có: $y = 2.3 - 6 \Rightarrow y = 0$

Vậy $A(3; 0)$

b) $B \in Oy$ là giao điểm của (d_1) với $Oy \Rightarrow B(0; -6)$, tương tự $C(0; 3)$

$$\text{Ta có } S_{ABC} = \frac{1}{2}OA \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot |(-6) - 3| = \frac{27}{2} \text{ (đvdt).}$$

C. BÀI TẬP

7.68. Cho hai đường thẳng $(d_1) : y = 3x - 5$; $(d_2) : y = -2x$.

a) Tìm tọa độ giao điểm A của (d_1) và (d_2) .

b) Viết phương trình đường thẳng (d_1) qua A và song song với đường thẳng $(d_3) : y = x - 1$.

7.69. Tìm m để hai đường thẳng song song $(d_1) : y = (m+1)x + m$; $(d_2) : y = (\sqrt{2} + 1)x + 3$.

7.70. Cho hai đường thẳng $(d_1) : y = \frac{1}{2}x$; $(d_2) : y = 2x - 3$. Viết phương trình đường thẳng (d_3) song song với (d_2) và cắt (d_1) tại một điểm có hoành độ bằng -2 .

7.71. Cho hai đường thẳng $(d_1) : y = kx + m - 2$; $(d_2) : y = (5 - k)x + 4 - m$. Tìm k và m để (d_1) và (d_2) trùng nhau (với $k \neq 0$ và $k \neq 5$).

7.72. Chứng tỏ đường thẳng $y = mx + m + 1$ luôn luôn đi qua một điểm cố định khi m thay đổi.

7.73. Tìm m để ba đường thẳng sau đây đồng quy $(d_1): y = \frac{2}{3}x; (d_2): y = x + 1; (d_3): y = 2x + m$.

7.74. Chứng tỏ ba đường thẳng sau đây đồng quy $(d_1): y = 3x; (d_2): y = x + 2; (d_3): y = -2x + 5$.

7.75. Cho hai đường thẳng $(d_1): y = (2m+1)x - 1; (d_2): y = -3x + 2m - 1$.

a) Tìm m để (d_1) song song với (d_2) .

b) Tìm m để (d_1) và (d_2) cắt nhau tại một điểm thuộc trực tung.

c) Tìm m để (d_1) cắt trực hoành và trực tung lần lượt tại A, B sao cho tam giác OAB vuông cân.

7.76. Cho hai hàm số $y = 2x - 1$ và $y = -x + 2$

a) Trong cùng mặt phẳng tọa độ Oxy , vẽ đồ thị của hai hàm số đã cho.

b) Tìm tọa độ giao điểm của hai đồ thị trên

7.77. Cho hàm số bậc nhất: $y = (3-m)x + 2m + 1$

Tìm các giá trị của m để đồ thị của hàm số đã cho là:

a) Đường thẳng đi qua điểm $(1; 2)$

b) Đường thẳng cắt đường thẳng $y = x + 1$ tại một điểm nằm trên trực tung.

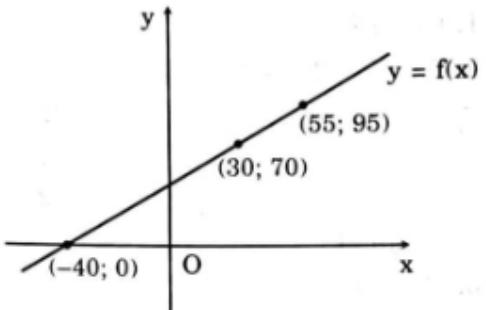
7.78. Cho đồ thị của hàm số bậc nhất $y = f(x)$ như hình

Hãy giải các phương trình sau:

a) $f(x) = 70$

b) $f(x) = 95$

c) $f(x) = 0$



7.79. Giá cước taxi của một hãng xe taxi khi quãng đường di chuyển x (km) trong khoảng từ trên

1 km đến 30 km được cho bởi công thức sau:

$$T(x) = 10000 + 13600(x - 1) \text{ (đồng)}$$

a) Tính số tiền phải trả khi xe tải di chuyển 20 km.

b) Nếu một hành khách phải trả 200400 đồng thì hành khách đó đã đi chuyến bao nhiêu Kilômét?

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG VII

A. TRẮC NGHIỆM

1. Phương trình nào sau đây là phương trình bậc nhất một ẩn?
A. $0x + 2 = 0$.
B. $2x + 1 = 2x + 2$.
C. $2x^2 + 1 = 0$.
D. $2x - 1 = 0$.
2. Tập nghiệm S của phương trình $3(x+1) - (x-2) = 7 - 2x$ là
A. $\{S\} = \emptyset$.
B. $\{S\} = \left\{\frac{1}{2}\right\}$.
C. $S = \emptyset$.
D. $S = R$.
3. Hàm số nào sau đây là hàm số bậc nhất?
A. $y = 0x + 3$.
B. $y = 3x^2 + 2$.
C. $y = 2x$.
D. $y = 0$.
4. Đường thẳng có hệ số góc bằng 2 và đi qua điểm $(-1; 2)$ là
A. $y = 2x + 2$.
B. $y = 2x - 1$.
C. $y = -x + 2$.
D. $y = 2x + 4$.
5. Tìm giá trị m để đường thẳng $y = (m+1)x + 2$ song song với đường thẳng $y = -2x$ là
A. $m = -3$.
B. $m = -2$.
C. $m = 2$.
D. $m = 1$.

Đáp án

A. TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Phương trình nào sau đây là phương trình bậc nhất một ẩn?

- A.** $0x + 2 = 0$
B. $2x + 1 = 2x + 2$
C. $2x^2 + 1 = 0$
D. $2x - 1 = 0$

Lời giải

Chọn D.

Câu 2. Tập nghiệm S của phương trình $3(x+1) - (x-2) = 7 - 2x$ là:

- A.** $\{S\} = \emptyset$
B. $\{S\} = \left\{\frac{1}{2}\right\}$
C. $S = \emptyset$
D. $S = R$

Lời giải

Chọn B

Ta có $3(x+1) - (x-2) = 7 - 2x$

$$4x = 2$$

$$x = \frac{1}{2}$$

Câu 3. Hàm số nào sau đây là hàm số bậc nhất?

- A.** $y = 0x + 3$
B. $y = 3x^2 + 2$
C. $y = 2x$
D. $y = 0$

Lời giải

Chọn C.

Câu 4. Đường thẳng có hệ số góc bằng 2 và đi qua điểm $(-1; 2)$ là:

- A. $y = 2x + 2$ B. $y = 2x - 1$
C. $y = -x + 2$ D. $y = 2x + 4$

Lời giải

Chọn D.

Thay $x = -1; y = 2$ vào phương trình $y = 2x + 4$

Ta có $2 = 2 \cdot (-1) + 4$ (đúng)

Câu 5. Tìm giá trị của m để đường thẳng $y = (m+1)x + 2$ song song với đường thẳng $y = -2x$ là

- A. $m = -3$ B. $m = -2$
C. $m = 2$ D. $m = 1$

Lời giải

Chọn A.

Hai đường thẳng song song khi

$$m+1 = -2 \Rightarrow m = -3$$

Tự luận:

Câu 1. Giải các phương trình sau:

a) $5(x-1) - (6-2x) = 8x - 3;$ b) $\frac{2x-1}{3} - \frac{5-3x}{2} = \frac{x+7}{4}$

Lời giải

a) $5(x-1) - (6-2x) = 8x - 3$

$$5x - 5 - 6 + 2x = 8x - 3$$

$$8x - 7x = -11 + 3$$

$$x = -8$$

b) $\frac{2x-1}{3} - \frac{5-3x}{2} = \frac{x+7}{4}$

$$4(2x-1) - 6(5-3x) = 3(x+7)$$

$$8x - 4 - 30 + 18x = 3x + 21$$

$$23x = 55$$

$$x = \frac{55}{23}$$

Câu 2. Số tiền thuế thu nhập cá nhân khi mức thu nhập chịu thuế trong năm trong khoảng từ trên 60 triệu đồng đến 120 triệu đồng được cho bởi công thức sau:

$$T(x) = 0,1x - 3 \text{ (triệu đồng)}$$

Trong đó $60 < x \leq 120$ (triệu đồng) là mức thu nhập chịu thuế của người đó trong năm.

- a) Tính số thuế thu nhập phải đóng khi mức thu nhập chịu thuế trong năm là 100 triệu đồng.
b) Nếu một người phải đóng 8 triệu đồng tiền thuế thu nhập cá nhân thì mức thu nhập chịu thuế của người đó trong năm là bao nhiêu, biết rằng người đó thu nhập chịu thuế trong khoảng từ trên 60 triệu đồng đến 120 triệu đồng?

Lời giải

a) $x = 100$ (triệu đồng) $\Rightarrow T(100) = 7$ (triệu đồng)

b) 110 (triệu đồng).

Câu 3. Cho hàm số bậc nhất $y = (m+2)x + 3$

a) Tìm m để đồ thị hàm số song song với đường thẳng $y = -x$.

b) Vẽ đồ thị hàm số với giá trị m tìm được ở câu a.

c) Tìm giao điểm A của đồ thị hàm số tìm được ở câu a và đồ thị hàm số $y = x + 1$. Tính diện tích của tam giác OAB , trong đó B là giao điểm của đồ thị hàm số $y = x + 1$ với trục Ox .

Lời giải

a) $m+2 = -1 \Rightarrow m = -3$

b) Ta có hàm số bậc nhất: $y = -x + 3$

HS tự vẽ hình.

c) Phương trình hoành độ giao điểm của phương trình hai đường thẳng:

$$y = -x + 3 \text{ và } y = x + 1.$$

$$-x + 3 = x + 1$$

$$2x = 2$$

$$x = 1$$

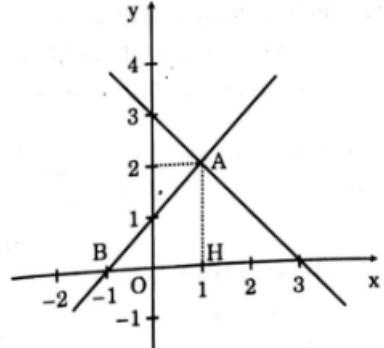
Tọa độ giao điểm $A(1; 2)$, tọa độ $B(-1; 0)$

Diện tích của tam giác OAB : $OB = 1$; đường cao $AH = 2$

(xem hình vẽ)

Vậy diện tích của tam giác OAB là:

$$\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 = 1 \text{ (đơn vị diện tích)}$$



4. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hai đường thẳng $y = x$ và $y = -x + 2$

a) Vẽ đường thẳng đã cho trên cùng mặt phẳng tọa độ.

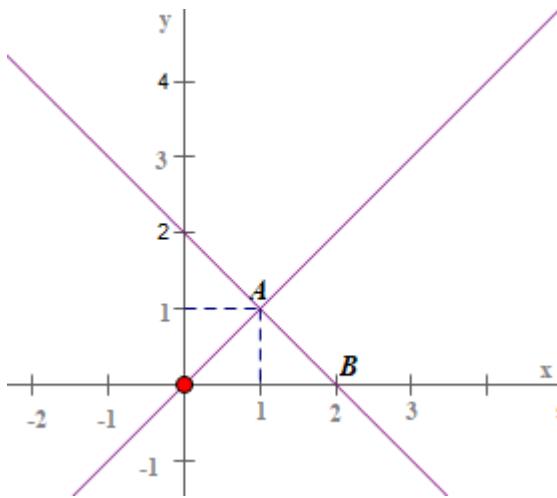
b) Tìm giao điểm A của hai đường thẳng đã cho

c) Gọi B là giao điểm của đường thẳng $y = -x + 2$ và trục Ox . Chứng minh tam giác OAB vuông tại A , tức là hai đường thẳng $y = x$ và $y = -x + 2$ vuông góc với nhau.

d) Có nhận xét gì về tích hai hệ số góc của hai đường thẳng đã cho?

Lời giải

a) Xem hình vẽ.



b) Phương trình hoành độ giao điểm của hai đường thẳng $y = x$ và $y = -x + 2$:

$$x = -x + 2$$

$$2x = 2$$

$$x = 1$$

Tọa độ điểm $A(1;1)$

c) Tọa độ điểm $B(2;0)$

Ta có: $OA = \sqrt{2}$; $AB = \sqrt{2}$; $OB = 2$

$$\Rightarrow OA^2 + AB^2 = (\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2 = 4 \text{ và } OB^2 = 4$$

$\Rightarrow OA^2 + AB^2 = OB^2 \Rightarrow$ Tam giác OAB vuông tại A (Định lí Pythagore)

\Rightarrow hai đường thẳng đã cho vuông góc với nhau

d) *Nhận xét:*

Hệ số góc của hai đường thẳng đã cho là $a_1 = 1$ và $a_2 = 1$. Ta có:

Hai đường thẳng vuông góc với nhau khi tích hai hệ số góc của chúng bằng -1

5.

Cho hai đường thẳng $y = x - 1$ (d_1) và $y = -x + 3$ (d_2)

a) Tìm tọa độ giao điểm M của (d_1) và (d_2)

b) Viết phương trình đường thẳng (d_3) song song với (d_1) và đi qua điểm $N(0;1)$

c) Chứng tỏ rằng đường thẳng $y = mx - 2m + 1$ luôn đi qua điểm M đã nói ở câu a), khi m thay đổi.

Lời giải

a) Phương trình hoành độ giao điểm của (d_1) và (d_2) :

$$x - 1 = -x + 3 \Leftrightarrow 2x = 4 \Leftrightarrow x = 2$$

thì $x = 2$ vào phương trình (d_1) $\Rightarrow y = 1$. Vậy $M(2;1)$

CHƯƠNG VIII. MỞ ĐẦU VỀ TÍNH XÁC SUẤT CỦA BIẾN CÓ.

BÀI 30: KẾT QUẢ CÓ THỂ VÀ KẾT QUẢ THUẬN LỢI.

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Kết quả có thể của hành động, thực nghiệm

Trong thực tế, ta thường gặp các hành động, thực nghiệm mà kết quả của chúng không thể biết trước khi thực hiện. Tuy nhiên, trong nhiều trường hợp ta có thể xác định được tất cả các kết quả có thể xảy ra (gọi tắt là các kết quả có thể) của hành động, thực nghiệm đó.

2. Kết quả thuận lợi cho một biến cố

Xét một biến cố E, mà E có xảy ra hay không xảy ra tùy thuộc vào kết quả của hành động, thực nghiệm T.

Một kết quả có thể của T để biến cố E xảy ra được gọi là kết quả thuận lợi cho biến cố E.

B. PHÂN LOẠI CÁC BÀI TẬP

I. Kết quả có thể của thực nghiệm

Bài toán 1. Tung đồng xu một lần.

Viết tập hợp A các kết quả có thể xảy ra đối với mặt xuất hiện của đồng xu

Hướng dẫn: Đồng xu có hai mặt, một mặt sấp và một mặt ngửa.

Lời giải

Ta có: $A = \{S; N\}$; Kí hiệu: S là mặt sấp; N là mặt ngửa.

Câu hỏi tương tự:

Tung hai đồng xu cùng một lúc.

Viết tập hợp M các kết quả có thể xảy ra đối với mặt xuất hiện đồng xu.

Hướng dẫn: $M = \{(S, S); (S, N); (N, S); (N, N)\}$

Bài toán 2. Có 5 quả cầu màu xanh ghi số 1; 2; 3; 4; 5 và 4 quả cầu màu đỏ ghi số 1; 2; 3; 4.

Lấy ngẫu nhiên 1 quả. Liệt kê các kết quả có thể xảy ra.

Hướng dẫn: Kí hiệu 5 quả cầu màu xanh: $X_1; X_2; X_3; X_4; X_5$ và 4 quả cầu màu đỏ $D_1; D_2; D_3; D_4$.

Lời giải

Đặt $X_1; X_2; X_3; X_4; X_5$ là 5 quả cầu màu xanh; $D_1; D_2; D_3; D_4$ là 4 quả cầu màu đỏ.

Các kết quả có thể xảy ra là $5 + 4 = 9$

Ta có thể viết tập hợp các phần tử này như sau:

$\{X_1; X_2; X_3; X_4; X_5; D_1; D_2; D_3; D_4\}$

Bài toán 3. Gieo một con xúc xắc. Liệt kê các kết quả có thể xảy ra và số chấm xuất hiện trên con xúc xắc.

Lời giải

Số chấm trên 6 mặt của con xúc xắc là: 1; 2; 3; 4; 5; 6

Vậy kết quả có thể xảy ra là: 1; 2; 3; 4; 5; 6.

Câu hỏi tương tự:

Khi gieo đồng thời hai con xúc xắc.

Hướng dẫn: Kí hiệu $(a;b)$ với a,b là số chấm xuất hiện ở hai con xúc xắc. Ta có tập hợp sau:

$\{(1;1);(1;2);...;(1;6);(2;1);(2;2);...;(2;6);...;(6;1);(6;2);...;(6;6)\}$. Tập hợp này có 36 phần tử.

Bài toán 4. Viết một số tự nhiên có hai chữ số. Tìm số phần tử của tập hợp M các kết quả có thể xảy ra.

Lời giải

Các số tự nhiên có hai chữ số: 10; 11; 12; ...; 97; 98; 99.

Ta có: $M = \{10; 11; 12; ...; 97; 98; 99\}$.

Tập hợp M có 90 phần tử

Bài toán tương tự:

1. Viết tập hợp các số tự nhiên có ba chữ số. Lấy ngẫu nhiên một số trong tập hợp trên. Có bao nhiêu kết quả có thể xảy ra.

Đáp số: 900.

Bài toán 5. Một hộp có 12 tấm thẻ, được ghi số 1; 2; ..; 11; 12. Rút ngẫu nhiên một thẻ. Liệt kê các kết quả có thể xảy ra.

Lời giải

Tập hợp các kết quả: $\{1; 2; ...; 11; 12\}$.

Có 12 khả năng.

Bài toán 6. Một túi đựng 12 viên bi có hình dạng giống nhau, chỉ khi màu, trong đó có 5 viên bi màu đỏ, 3 viên bi màu xanh, 4 viên bi vàng. Lấy ngẫu nhiên một viên bi trong túi.

Hỏi có tất cả bao nhiêu kết quả có thể xảy ra?

Lời giải

Kí hiệu các viên bi màu đỏ: $D_1; D_2; D_3; D_4; D_5$, các viên bi màu xanh $X_1; X_2; X_3$, các viên bi màu vàng $V_1; V_2; V_3; V_4$.

Tập hợp các kết quả có thể xảy ra:

$\{D_1; D_2; D_3; D_4; D_5; X_1; X_2; X_3; V_1; V_2; V_3; V_4\}$

Vậy có 12 kết quả có thể xảy ra.

II. Kết quả thuận lợi cho một biến cố

Bài toán 7. Gieo một con xúc xắc. Liệt kê các kết quả thuận lợi cho các biến cố sau:

A: “Số chấm xuất hiện trên con xúc xắc là số nguyên tố”.

B: “Số chấm xuất hiện trên con xúc xắc là số chẵn”.

Lời giải

Các kết quả thuận lợi cho biến cố A: $\{2; 3; 5\}$.

Các kết quả thuận lợi cho biến cố B: $\{2; 4; 6\}$.

Bài toán tương tự:

Gieo một con xúc xắc. Liệt kê các kết quả thuận lợi cho các biến cố sau

- a) “Số chấm xuất hiện trên con xúc xắc là hợp số”.
- b) “Số chấm xuất hiện trên con xúc xắc là số lẻ”.
- c) “Số chấm xuất hiện trên con xúc xắc không vượt quá 5”.

Hướng dẫn:

- a) $\{4; 6\}$.
- b) $\{1; 3; 5\}$
- c) $\{1; 2; 3; 4; 5\}$.

| **Bài toán 8.** Một hộp đựng 12 tấm thẻ, được ghi số 1; 2;...; 12. Bạn Nam rút ngẫu nhiên một tấm thẻ từ trong hộp.

- a) Liệt kê các kết quả có thể của hành động trên.
- b) Liệt kê các kết quả thuận lợi cho các biến cố sau:
- A: “Rút được tấm thẻ ghi số chẵn”;
 - B: “Rút được tấm thẻ ghi số nguyên tố”;
 - C: “Rút được tấm thẻ ghi số chính phương”.

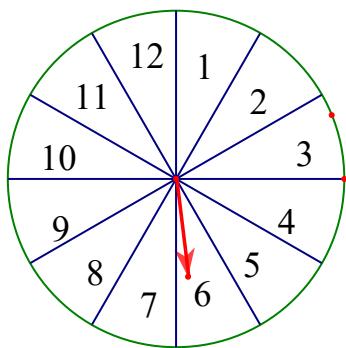
Lời giải

- a) Các kết quả có thể của hành động trên là: 1; 2; 3; ...; 11; 12.
- b) • Các kết quả thuận lợi cho các biến cố A là 2; 4; 6; 8; 10; 12.
- Các kết quả thuận lợi cho các biến cố B là 2; 3; 5; 7; 11.
- Các kết quả thuận lợi cho các biến cố C là 1; 4; 9.

Bài toán tương tự:

Một tấm bìa hình tròn được chia thành 12 hình quạt như nhau và đánh số 1; 2; 3; ...; 11; 12, được gắn vào trục quay có mũi tên cố định ở tâm. Quay tấm bìa xem mũi tên chỉ vào hình quạt nào khi tấm bìa dừng lại. Liệt kê các kết quả thuận lợi của các biến cố sau:

- a) A: “Mũi tên chỉ vào hình quạt ghi số nguyên tố”.
- b) B: “Mũi tên chỉ vào hình quạt ghi số chính phương”.



Bài toán 9. An có 16 cuốn sách, trong đó 4 cuốn sách tiêu thụyết, 5 cuốn sách Lịch sử, 3 cuốn sách Khoa học tự nhiên và 4 cuốn sách Toán. Các cuốn sách này được xếp tùy ý trong tủ sách. Bạn Bình đến chơi và lấy ngẫu nhiên một cuốn sách trong tủ sách của An.

- a) Liệt kê các kết quả có thể của hành động trên.

b) Liệt kê các kết quả thuận lợi cho các biến cód sau:

- * E: “Bình lấy được một cuốn sách tiếu thuyết”;
- * F: “Bình lấy được một cuốn sách Khoa học tự nhiên hoặc cuốn sách Toán”;
- * G: “Bình lấy được một cuốn sách không phải sách Lịch sử”;

Lời giải

a) Có 16 kết quả có thể của hành động trên.

Kí hiệu 4 cuốn tiếu thuyết: $A_1; A_2; A_3; A_4$

5 cuốn Lịch sử: $B_1; B_2; B_3; B_4; B_5$

3 cuốn Khoa học tự nhiên: $C_1; C_2; C_3$.

4 cuốn Toán: $D_1; D_2; D_3; D_4$.

Ta có: $A_1; A_2; A_3; A_4; B_1; B_2; B_3; B_4; B_5; C_1; C_2; C_3; D_1; D_2; D_3; D_4$.

b) • Các kết quả thuận lợi của biến cód E là: $A_1; A_2; A_3; A_4$.

• Các kết quả thuận lợi của biến cód F là: $C_1; C_2; C_3; D_1; D_2; D_3; D_4$

• Các kết quả thuận lợi của biến cód G là: $B_1; B_2; B_3; B_4; B_5$.

Bài toán tương tự:

Đội văn nghệ khối 8 của một trường trung học cơ sở có 14 bạn, trong đó có 4 bạn nam lớp 8A, 5 bạn nữ lớp 8B, 3 bạn nam lớp 8C và 2 bạn nữ lớp 8D. Chọn ngẫu nhiên một bạn trong đội văn nghệ khối 8 để tham gia tiết mục văn nghệ của trường.

a) Liệt kê tất cả các kết quả có thể của hành động trên. Có tất cả bao nhiêu kết quả có thể?

b) Liệt kê các kết quả thuận lợi cho các biến cód sau:

- E: “Chọn được một bạn lớp 8A”;
- F: “Chọn được một bạn nữ”;
- G: “Chọn được một bạn nam”;
- H: “Chọn được một bạn lớp 8C hoặc 8D”;

Hướng dẫn:

Kí hiệu 4 bạn nam lớp 8A: $A_1; A_2; A_3; A_4$, 5 bạn nữ lớp 8B: $B_1; B_2; B_3; B_4; B_5$;

3 bạn nam lớp 8C: $C_1; C_2; C_3$

2 bạn nữ lớp 8D: $D_1; D_2; D_3; D_4$.

Các kết quả thuận lợi của biến cód H là: $C_1; C_2; C_3; D_1; D_2; D_3; D_4$.

Bài toán 10. Một hộp chứa 10 tấm thẻ được ghi số tự nhiên từ 3 đến 12.

Chọn ra ngẫu nhiên một thẻ.

Liệt kê các kết quả thuận lợi của các biến cód sau:

A: “Số ghi trên thẻ chia hết cho 3”.

B: “Số ghi trên thẻ là số chẵn”.

Lời giải

Các kết quả thuận lợi cho biến cő A là: 3; 6; 9; 12 .

Các kết quả thuận lợi cho biến cő B là: 4; 6; 8; 10; 12 .

Câu hỏi tương tự:

Liệt kê các kết quả thuận lợi của các biến cő:

C: “Số ghi trên thẻ là số lẻ”.

D: “Số ghi trên thẻ là số chia hết cho 3”.

E: “Số ghi trên thẻ là số nguyên tố”.

C. BÀI TẬP

8.1. Gieo một con xúc xắc.

a) Liệt kê các kết quả có thể của thực nghiệm trên.

b) Liệt kê các kết quả thuận lợi cho các biến cő sau:

• A: “Số chấm xuất hiện trên con xúc xắc là hợp số”.

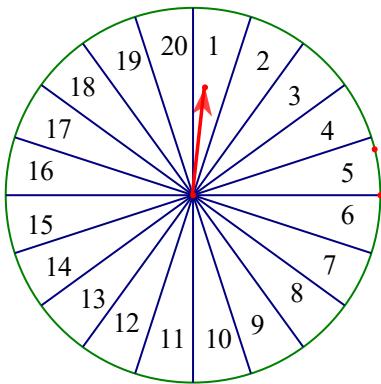
• B: “Số chấm xuất hiện trên con xúc xắc nhỏ hơn 5”.

• C: “Số chấm xuất hiện trên con xúc xắc là số lẻ”.

8. 2. Một hình tròn được chia thành 20 hình quạt như nhau, đánh số 1; 2; 3; ...; 20, được gắn vào trục quay có mũi tên cố định ở tâm. Quay tấm bìa và quan sát xem mũi tên chỉ vào hình quạt nào khi tấm bìa dừng lại. Liệt kê các kết quả thuận lợi của các biến cő sau:

A: “Mũi tên chỉ vào hình quạt ghi số chia hết cho 3”.

B: “Mũi tên chỉ vào hình quạt ghi số không phải là số nguyên tố”.



8. 3. Trong một chiếc hộp, có 15 tấm thẻ đánh số 10; 11; ...; 24 . Rút ngẫu nhiên một tấm thẻ. Liệt kê các kết quả thuận lợi của các biến cő:

* A: “Rút được tấm thẻ ghi số lẻ”;

* B: “Rút được tấm thẻ ghi số nguyên tố”.

8.4. Một hộp có 10 viên bi có kích thước và khối lượng như nhau. Bạn Ngân viết lên các viên bi đó tên 4 loài thực vật là: Lúa, Ngô, Hoa hồng, Hoa hướng dương và tên 6 loài động vật là: Trâu, Bò, Voi, Hổ, Báo, Sư tử, hai viên bi khác nhau thì viết hai tên khác nhau. Lấy ngẫu nhiên một viên bi trong hộp.

a) Viết tập hợp E gồm các kết quả có thể xảy ra đối với tên sinh vật được viết trên viên bi lấy ra.

b) Viết tập hợp gồm các kết quả thuận lợi của biến cő G: “Trên viên bi lấy ra viết tên một loài động vật”.

BÀI 31. CÁCH TÍNH XÁC SUẤT CỦA BIẾN CÓ BẰNG TỈ SỐ

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

Cách tính xác suất bằng tỉ số

Giả thiết rằng các kết quả có thể của một hành động hay thực nghiệm là đồng khả năng. Khi đó, xác suất của biến cố E, kí hiệu là $P(E)$, bằng tỉ số giữa số kết quả thuận lợi cho biến cố E và tổng số kết quả có thể.

$$P(E) = \frac{\text{Số kết quả thuận lợi cho } E}{\text{Tổng số kết quả có thể}}$$

Nhận xét: Việc tính xác suất của một biến cố E trong một hành động hay thực nghiệm đồng khả năng sẽ gồm các bước sau:

Bước 1. Đếm các kết quả có thể (thường bằng cách liệt kê);

Bước 2. Chỉ ra các kết quả có thể là đồng khả năng;

Bước 3. Đếm các kết quả thuận lợi cho biến cố E;

Bước 4. Lập tỉ số giữa số kết quả thuận lợi cho đến biến cố E và tổng số kết quả có thể.

B. PHÂN LOẠI CÁC BÀI TẬP

I. Tính xác suất của biến cố bằng tỉ số

Bài toán 1. Một hộp đựng 12 viên bi màu đỏ và 6 viên bi màu vàng. An lấy ngẫu nhiên một viên bi từ trong hộp. Tính xác xuất để An lấy được viên bi màu đỏ.

Lời giải

Ta có: $12 + 6 = 18$

Trong hộp có 18 viên bi.

An lấy ngẫu nhiên một viên bi từ trong hộp nên các kết quả có thể là 18 và các kết quả đó là đồng khả năng.

Kết quả thuận lợi của biến cố lấy được viên bi màu đỏ là 12.

Vậy xác xuất “để An lấy được viên bi màu đỏ”, kí hiệu là biến cố A.

$$\text{Ta có: } P(A) = \frac{12}{18} = \frac{2}{3}$$

Câu hỏi tương tự:

Tính xác xuất của biến cố B “An lấy được viên bi màu vàng”:

$$\text{Đáp số: } P(B) = \frac{6}{18} = \frac{1}{3}$$

Bài toán 2. Một túi đựng các viên kẹo giống hệt nhau, trong đó có 5 viên kẹo màu nâu, 3 viên kẹo màu đỏ, 7 viên kẹo màu trắng. Lấy ngẫu nhiên một viên kẹo trong túi. Tính xác suất của các biến cố sau:

- a) E: “Lấy được viên kẹo màu nâu”;
- b) F: “Lấy được viên kẹo màu nâu hoặc màu đỏ”;
- c) G: “Lấy được viên kẹo màu trắng”;
- d) H: “Không lấy được viên kẹo màu đỏ”.

Lời giải

a) Ta có: $5 + 3 + 7 = 15$, trong túi có 15 viên kẹo.

Lấy ngẫu nhiên một viên nên các kết quả có thể là 15 và các kết quả đó là đồng khả năng.

Kết quả thuận lợi của biến cố “Lấy được viên kẹo màu nâu” là 5.

Vậy xác suất của các biến cố E là:

$$P(E) = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$$

b) Số viên kẹo màu nâu hoặc màu đỏ là: $5 + 3 = 8$ (viên)

Kết quả thuận lợi của biến cố F là 8.

Vậy xác suất của các biến cố F là:

$$P(F) = \frac{8}{15}$$

c) Tương tự câu a), ta có:

$$P(G) = \frac{7}{15}$$

d) Ta có: $15 - 3 = 12$ (viên), là số viên kẹo không có màu đỏ.

$$\text{Vậy } P(H) = \frac{12}{15} = \frac{4}{5}$$

Bài toán 3. Trong một chiếc hộp đựng 15 tấm thẻ giống nhau được đánh số 10; 11; 12; ...; 24. Rút ngẫu nhiên một tấm thẻ từ trong hộp. Tính xác suất của các biến cố sau:

a) A: “Rút được tấm thẻ ghi số lẻ”;

b) B: “Rút được tấm thẻ ghi số nguyên tố”;

Lời giải

a) Các kết quả có thể được liệt kê trong tập hợp sau:

$$M = \{10; 11; 12; \dots; 24\}$$

Vậy có 15 kết quả có thể và các kết quả đó là đồng khả năng.

Kết quả thuận lợi của biến cố A là: 11; 13; 15; 17; 19; 21; 23. Số kết quả thuận lợi của biến cố A là 7.

$$\text{Vậy } P(A) = \frac{7}{15}$$

b) Kết quả thuận lợi của biến cố B là: 11; 13; 17; 19; 23.

$$\text{Tương tự câu a), ta có: } P(B) = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$$

Bài toán tương tự:

Một hộp có 52 chiếc thẻ cùng loại, mỗi thẻ được ghi một trong các số 1; 2; 3; ...; 52; hai thẻ khác nhau thì ghi hai số khác nhau.

Rút ngẫu nhiên một thẻ trong hộp. Tính xác suất của mỗi biến cố sau:

a) “Số xuất hiện trên thẻ được rút ra là số có chữ số tận cùng bằng 5.”

- b) “Số xuất hiện trên thẻ được rút ra là số có hai chữ số”.
- c) “Số xuất hiện trên thẻ được rút ra là số có hai chữ số với tích các chữ số bằng 6.”.

Hướng dẫn:

- a) Biến cõ A: “Số xuất hiện có chữ số tận cùng bằng 5”.

$$P(A) = \frac{5}{52}$$

- b) Biến cõ B: “Số xuất hiện là số có hai chữ số”.

$$P(B) = \frac{43}{52}$$

c) **Đáp số:** $\frac{3}{52}$

Bài toán 4. Viết ngẫu nhiên một số tự nhiên có hai chữ số. Tính xác suất của mỗi biến cõ A: “Số tự nhiên được viết ra là số có tận cùng 0”.

Lời giải

Tập hợp các số tự nhiên có hai chữ số: $\{10; 11; \dots; 99\}$.

Tập hợp này có 90 phần tử.

Vậy số kết quả có thể là 90 và các kết quả này là đồng khả năng

Kết quả thuận lợi của biến cõ A là: 10; 20; 30; 40; 50; 60; 70; 80; 90.

Vậy $P(A) = \frac{9}{90} = \frac{1}{10}$

Câu hỏi tương tự:

Tính xác suất của mỗi biến cõ B: “Số tự nhiên được viết ra là số chính phương”.

Hướng dẫn: Các số chính phương có hai chữ số là: 16; 25; 36; 49; 64; 81.

Kết quả thuận lợi của biến cõ B là 6.

$$P(B) = \frac{1}{15}$$

Bài toán 5. Gieo một con xúc xắc.

Biến cõ A: “Gieo được mặt có số chấm chia hết cho 2”. Tính $P(A)$.

Lời giải

Có 6 kết quả có thể xảy ra và các kết quả là đồng khả năng. Gieo được mặt có số chấm chia hết cho 2 đó là: 2; 4; 6.

Số kết quả thuận lợi của biến cõ A là 3.

Vậy $P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

Câu hỏi tương tự:

1. Biến cõ B: “Gieo được mặt có số chấm lẻ”. Tính $P(B)$.

$$\text{Đáp số: } P(B) = \frac{1}{2}$$

2. Biến cõ C: “Gieo được mặt có số chấm nhiều hơn 3”. Tính $P(C)$.

$$\text{Đáp số: } P(C) = \frac{1}{2}$$

Bài toán 6. Trong một câu lạc bộ có 10 thành viên nam và 15 thành viên nữ. Gọi biến cõ A là: “Gặp ngẫu nhiên một thành viên nữ”. Tính $P(A)$.

Lời giải

Ta có: $10 + 15 = 25$ (thành viên)

Gặp ngẫu nhiên một thành viên nên số kết quả có thể là 25 và các kết quả này là đồng khả năng.

Số kết quả thuận lợi của biến cõ A là 15.

$$\text{Vậy } P(A) = \frac{15}{25} = \frac{3}{5}$$

Câu hỏi tương tự:

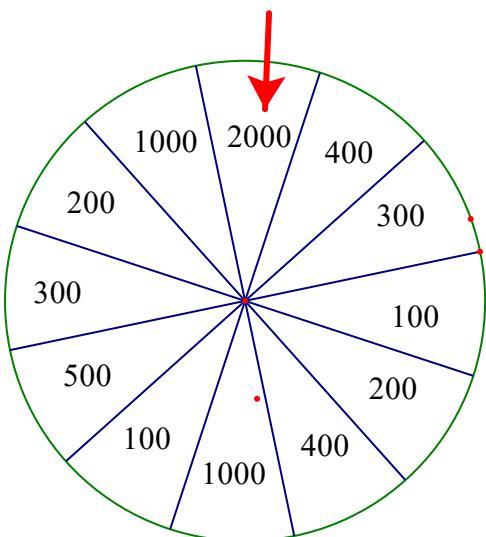
Với biến cõ B : “Gặp ngẫu nhiên một thành viên nam”. Tính $P(B)$.

Bài toán 7. Trò chơi vòng quay may mắn.

Một bánh xe hình tròn được chia thành 12 hình quạt như nhau, trong đó có 2 hình quạt ghi 100 điểm, 2 hình quạt ghi 200 điểm, 2 hình quạt ghi 300 điểm, 2 hình quạt ghi 400 điểm, 1 hình quạt ghi 500 điểm, 2 hình quạt ghi 1000 điểm, 1 hình quạt ghi 2000 điểm (xem hình). Ở mỗi lượt, người chơi quay bánh xe. Mũi tên cố định gắn trên vành bánh xe dừng ở hình quạt nào thì người chơi nhận được số điểm ghi trên hình quạt đó.

Bạn Lan chơi trò chơi này. Tính xác suất của các biến cõ sau:

- a) A: “Trong một lượt quay, Lan được 400 điểm”;
- b) B: “Trong một lượt quay, Lan được ít nhất 500 điểm”;



Lời giải

- a) Có 12 hình quạt tròn.

Vậy có 12 kết quả có thể và các kết quả này là đồng khả năng. Số kết quả thuận lợi của biến cố A là 2.

$$\text{Vậy } P(A) = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$$

b) Các kết quả thuận lợi của biến cố B là 100; 100; 200; 200; 300; 300; 400; 400; 500.

Số kết quả thuận lợi của biến cố B là 9.

$$\text{Vậy } P(B) = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$$

II. Ứng dụng của xác suất

Bài toán 8. Trên giá sách của thư viện có 15 cuốn sách, trong đó có một số cuốn tiêu thuyết. Người thuê đọc thêm 5 cuốn tiêu thuyết thư viện mới mua vào giá sách. Bạn Nam đến mượn sách, chọn ngẫu nhiên một cuốn sách trên giá. Biết rằng xác suất để chọn được cuốn tiêu thuyết là $\frac{3}{4}$

Hỏi lúc đầu trên giá sách có bao nhiêu cuốn tiêu thuyết.

Lời giải

Ta có: $15 + 5 = 20$.

Chọn ngẫu nhiên một cuốn sách có 20 kết quả có thể và các kết quả này là đồng khả năng.

Gọi số cuốn tiêu thuyết trên giá lúc đầu là $x (x \in N^*)$

Ta có số kết quả thuận lợi của biến cố “Chọn được cuốn tiêu thuyết” là $x + 5$

$$\text{Xác suất của biến cố này là } \frac{x+5}{20}$$

$$\text{Vậy } \frac{x+5}{20} = \frac{3}{4}$$

$$4(x+5) = 60$$

$$x = 10$$

Vậy lúc đầu trên giá sách có 10 cuốn tiêu thuyết.

Bài toán 9. Ở một trang trại nuôi gà, người ta nhận thấy xác suất một quả trứng gà có cân nặng trên 42g là 0,4. Hãy ước lượng xem trong một lô 2000 quả trứng gà của trang trại có khoảng bao nhiêu quả trứng có cân nặng trên 42g.

Lời giải

Gọi x là số quả trứng gà có cân nặng trên 42g trong lô 2000 quả trứng ($x \in N^*$)

Xác suất để một quả trứng có cân nặng trên 42g là: $\frac{x}{2000}$

Do số quả trứng trong lô là lớn nên $\frac{x}{2000} \approx 0,4$, tức là $x \approx 2000 \cdot 0,4 = 800$.

Vậy có khoảng 800 quả trứng gà trong lô trứng trên có cân nặng trên 42g.

C. BÀI TẬP

| 8.5. Một hộp đựng 35 tấm thẻ giống nhau được đánh số 1; 2; 3; ...; 35. Bạn Nam rút ngẫu nhiên một tấm thẻ trong hộp. Tính xác suất của các biến

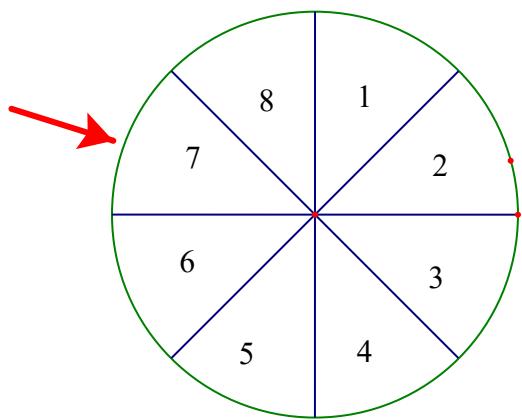
có sau:

- a) E: “Rút được tấm thẻ ghi số chia hết cho 4”;
- b) F: “Rút được tấm thẻ ghi số là bội số của 4 hoặc 6”;
- c) G: “Rút được tấm thẻ ghi số nguyên tố”;

| **8.6.** Trên bàn có một tấm bìa hình tròn được chia thành 8 hình quạt bằng nhau và được đánh số từ 1 đến 8 (như hình vẽ). Xoay tấm bìa quanh tâm hình tròn và xem khi tấm bìa dừng lại, mũi tên chỉ vào ô ghi số nào. Xét các biến cố sau:

- A: “Mũi tên chỉ vào ô ghi số chẵn”;
- B: “Mũi tên chỉ vào ô ghi số chia hết cho 4”;
- C: “Mũi tên chỉ vào ô ghi số nhỏ hơn 3”.

Tính $P(A); P(B); P(C)$.



8.7. Gieo một con xúc xắc.

Gọi A là biến cố “Gieo được số chẵn chia hết cho 3”. Tính $P(A)$.

8.8. Trong hộp có 5 quả bóng có kích thước và khối lượng giống nhau và được đánh số lần lượt là 5; 8; 10; 13; 16. Lấy ra ngẫu nhiên 1 quả bóng từ hộp. Tính xác suất của các biến cố:

- A: “Số ghi trên quả bóng là số lẻ”;
- B: “Số ghi trên quả bóng chia hết cho 3”;
- C: “Số ghi trên quả bóng lớn hơn 4”.

8.9. Một hộp chứa 3 viên bi xanh, 4 viên bi đỏ và 5 viên bi vàng có kích thước và khối lượng giống nhau. Lấy ra ngẫu nhiên 1 viên bi từ hộp. Tính xác suất của các biến cố:

- A: “Viên bi lấy ra có màu xanh”;
- B: “Viên bi lấy ra không có màu đỏ”.

8.10. Trong hộp có 10 tấm thẻ cùng loại, trên mỗi thẻ có ghi một số tự nhiên. Lấy ra ngẫu nhiên 1 thẻ từ hộp. Biết rằng xác suất lấy được ghi số chẵn gấp 4 lần xác suất lấy được thẻ ghi số lẻ. Hỏi trong hộp bao nhiêu thẻ ghi số lẻ?

BÀI 32. MỐI LIÊN HỆ GIỮA XÁC SUẤT THỰC NGHIỆM VỚI XÁC SUẤT VÀ ỨNG DỤNG

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Xác suất thực nghiệm của một biến cố

Giả sử trong n lần thực nghiệm hoặc n lần theo dõi (quan sát) một hiện tượng ta thấy biến cố E xảy ra k lần. Khi đó xác suất thực nghiệm của biến cố E bằng $\frac{k}{n}$, tức là bằng tỉ số giữa số lần xuất hiện biến cố E và số lần thực hiện thực nghiệm hoặc theo dõi hiện tượng đó.

2. Mối liên hệ giữa xác suất thực nghiệm với xác suất.

Người ta thấy rằng có thể ước lượng của một biến cố nhờ xác suất thực nghiệm.

Xác suất của biến cố E được ước lượng bằng xác suất thực nghiệm của E :

$$P(E) \approx \frac{k}{n}$$

trong đó n là số lần thực nghiệm hay theo dõi một hiện tượng, k là số lần biến cố E xảy ra.

3. Ứng dụng

Xác suất thực nghiệm có thể sử dụng để đưa ra dự báo số lần xảy ra một sự kiện, hiện tượng trong tương lai.

B. PHÂN LOẠI CÁC BÀI TẬP

1. Xác suất thực nghiệm của một biến cố:

Bài toán 1. Phuong gieo một con xúc xắc 120 lần và thống kê lại kết quả các lần gieo ở các bảng sau:

Mặt	1 chấm	2 chấm	3 chấm	4 chấm	5 chấm	6 chấm
Số lần xuất hiện	21	24	8	5	18	44

Hãy tính xác suất thực nghiệm của biến cố “Gieo được mặt có số chấm là số lẻ” sau 120 lần thử trên.

Lời giải

Số lần gieo được mặt có số chấm là số lẻ: $21 + 8 + 18 = 47$

Xác suất thực nghiệm của biến cố: $\frac{47}{120}$

Bài toán 2. Thảo tung hai đồng xu giống nhau 100 lần và ghi lại kết quả ở bảng sau:

Kết quả	Hai đồng sấp	Một đồng sấp, một đồng ngửa	Hai đồng ngửa
Số lần	14	46	40

Tính xác suất thực nghiệm của biến cố “Hai đồng xu đều xuất hiện mặt sấp” sau 100 lần tung.

Lời giải

Xác suất thực nghiệm của biến cố “Hai đồng xu đều xuất hiện mặt sấp”: $\frac{14}{100} = \frac{7}{50}$

Bài toán 3. Một cửa hàng thống kê số lượng các loại điện thoại bán được trong một năm vừa qua như sau:

Loại điện thoại	A	B	C
Số lượng bán được (chiếc)	712	1035	1085

Tính xác suất thực nghiệm của biến cố E : “Chiếc điện thoại loại A được bán ra trong năm của cửa hàng”.

Lời giải

Ta có: $712 + 1035 + 1085 = 2832$

Xác suất thực nghiệm của biến cō E : $\frac{712}{2832} = \frac{89}{354} \approx 25\%$.

Bài toán tương tự.

Kiểm tra ngẫu nhiên 500 chiếc ti vi do nhà máy X sản xuất có 5 chiếc không đạt chất lượng. Hãy ước lượng xác suất của biến cō E : “Một ti vi của nhà máy X sản xuất không đạt chất lượng”.

Đáp số: 1%.

Bài toán 4. Ông An theo dõi và thống kê số cuộc gọi điện thoại đến cho ông trong một ngày. Sau 59 ngày theo dõi, kết quả thu được như sau:

Số cuộc điện thoại gọi đến trong một ngày	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Số ngày	5	9	15	10	5	6	4	2	3

Gọi A là biến cō “Trong một ngày ông An nhận được nhiều hơn 6 cuộc gọi”. Tính xác suất thực nghiệm của biến cō A .

Lời giải

Ta có: $3 + 2 = 5$ (ngày)

Xác suất thực nghiệm của biến cō A : $\frac{5}{59} \approx 8,5\%$.

Câu hỏi tương tự.

- Tính xác suất thực nghiệm của biến cō B : “Trong một ngày ông An nhận được ít nhất 5 cuộc điện thoại”.

Đáp số: $\frac{15}{59} \approx 8,5\%$.

- Tính xác suất thực nghiệm của biến cō C : Trong một ngày ông An nhận được nhiều nhất 3 cuộc điện thoại”. Tính $P(C)$?

Đáp số: $\frac{39}{59} \approx 66\%$.

Bài toán 5. Trong 240000 trẻ sơ sinh chào đời người ta thấy có 123120 bé trai. Hãy ước lượng xác suất của biến cō “Trẻ sơ sinh là bé gái”.

Lời giải

Số trẻ sơ sinh là bé gái: $240000 - 123120 = 116880$

Xác suất thực nghiệm của biến cō “Trẻ sơ sinh là bé gái”: $\frac{116880}{240000} = \frac{487}{1000} \approx 48,7\%$

II. Ứng dụng:

Bài toán 6. Một cơ quan quản lý đã thống kê được số lượt khách đến tham quan di tích X trong năm qua như sau:

Tháng	1;2	3;4	5;6	7;8	9;10	11;12
Số lượt khách	137	181	148	117	116	111

- a) Tính xác suất thực nghiệm của biến cő E : “Khách đến tham quan di tích trong tháng 5 và tháng 6”.
- b) Tính xác suất thực nghiệm của biến cő F : “Khách đến tham quan di tích trong thời gian tháng 7 đến tháng 12”.
- c) Giả sử năm tới có 1196 lượt khách đến tham quan di tích. Hãy dự đoán xem:
- Có bao nhiêu lượt khách đến tham quan di tích trong tháng 7 và tháng 8.
 - Có bao nhiêu lượt khách đến tham quan di tích trong tháng 7 đến tháng 12.

Lời giải

a) Số lượt khách đến tham quan di tích trong năm qua là: $137 + 181 + 148 + 117 + 116 + 111 = 810$.

Có 148 lượt khách đến tham quan vào tháng 5 và tháng 6.

Vậy xác suất thực nghiệm của biến cő E là: $\frac{148}{810} \approx 0,183$

b) Số lượt khách đến tham quan di tích từ tháng 7 đến tháng 12 là: $17 + 116 + 111 = 344$

Xác suất thực nghiệm của biến cő F là: $\frac{344}{810} \approx 0,425$

c) • Ta có: $1169 \cdot \frac{177}{810} \approx 172,76$

Vậy dự đoán trong năm tới có khoảng 173 lượt khách đến tham quan di tích từ tháng 7 và tháng 8.

• Ta có: $1169 \cdot \frac{344}{810} \approx 507,93$

Vậy dự đoán trong năm tới có khoảng 508 lượt khách đến tham quan di tích trong khoảng thời gian từ tháng 7 đến tháng 12.

Bài toán 7. Thông kê điểm kiểm tra cuối năm môn Toán của một nhóm 100 học sinh lớp 8 được chọn ngẫu nhiên tại ba lớp của trường Trung học cơ sở X , thu được kết quả như bảng sau:

Số điểm	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Số học sinh	7	9	11	11	12	12	13	9	8	8

a) Chọn ngẫu nhiên một học sinh của trường X . Hãy tính xác suất thực nghiệm của các biến cő sau:

- A : “Học sinh đó có điểm nhỏ hơn hoặc bằng 5”;
- B : “Học sinh đó có điểm từ 4 đến 9”.

b) Hãy dự đoán trong nhóm 80 học sinh lớp 8 chọn ngẫu nhiên từ ba lớp của trường X :

- Có bao nhiêu học sinh có số điểm không vượt quá 5 điểm?
- Có bao nhiêu học sinh có số điểm từ 4 đến 9 điểm?

Lời giải

a) Số học sinh có số điểm nhỏ hơn hoặc bằng 5: $7 + 9 + 11 + 11 + 12 = 50$

Xác suất thực nghiệm của biến cő A là: $\frac{50}{100} = 50\%$

Số học sinh có số điểm từ 4 đến 9: $11 + 12 + 13 + 9 + 8 = 65$

Xác suất thực nghiệm của biến cố B là: $\frac{65}{100} = 65\%$

b) Ta có: $80.50\% = 40$.

Vậy có 40 học sinh có số điểm không vượt quá 5 điểm.

Ta có: $80.65\% = 52$.

Vậy có 52 học sinh có số điểm từ 4 đến 9 điểm.

Bài toán 8. Một hộp chứa một số quả bóng xanh và bóng đỏ. Linh lấy ra ngẫu nhiên 1 quả bóng từ hộp, xem màu rồi trả quả bóng lại hộp. Lặp lại phép thử đó 200 lần, Linh thấy có 62 lần lấy được bóng xanh và 138 lần lấy được bóng đỏ.

a) Tính xác suất thực nghiệm của biến cố “Lấy được bóng xanh” sau 200 lần thử.

b) Biến cố bóng xanh trong hộp là 20, hãy ước lượng số bóng đỏ trong hộp.

Lời giải

a) Xác suất thực nghiệm của biến cố “Lấy được bóng xanh” là: $\frac{62}{200} = 31\%$

b) Ước lượng số bóng trong hộp: $20 : 31\% = 64,52$

Vậy số bóng trong hộp ước lượng khoảng 65 quả.

C.BÀI TẬP

8.11. Tung một chiếc kẹp giấy 145 lần xuống sàn nhà lát gạch đá hoa hình vuông. Quan sát thấy có 113 lần chiếc kẹp nằm hoàn toàn bên trong hình vuông và 32 lần chiếc kẹp nằm trên cạnh hình vuông. Tính xác suất thực nghiệm của các biến cố sau:

a) E : “Chiếc kẹp giấy nằm hoàn toàn trong hình vuông”;

b) F : “Chiếc kẹp giấy nằm trên cạnh của hình vuông”.

8.12. Một nhân viên kiểm tra chất lượng sản phẩm tại một nhà máy trong 20 ngày rồi ghi lại số phé phẩm của nhà máy mỗi ngày và thu được kết quả như sau:

Số phé phẩm	0	1	2	3	≥ 4
Số ngày	14	3	1	1	1

Tính xác suất thực nghiệm của các biến cố sau:

a) M : “Trong một ngày nhà máy đó không có phé phẩm”;

b) N : “Trong một ngày nhà máy đó chỉ có 1 phé phẩm”;

c) K : “Trong một ngày nhà máy đó chỉ có ít nhất 2 phé phẩm”.

8.13. Thống kê thời gian của 78 chương trình quảng cáo trên Đài truyền hình tỉnh X cho kết quả như sau:

Thời gian quảng cáo trong khoảng	Số chương trình quảng cáo
Từ 0 đến 19 giây	
Từ 20 đến 39 giây	
Từ 40 đến 59 giây	
Trên 60 giây	

Tính xác suất thực nghiệm của các biến cố sau:

- a) E : “Chương trình quảng của Đài truyền hình tỉnh X kéo dài từ 20 đến 39 giây”;
 b) F : “Chương trình quảng của Đài truyền hình tỉnh X kéo dài trên 1 phút”;
 c) G : “Chương trình quảng của Đài truyền hình tỉnh X kéo dài trong khoảng từ 20 đến 59 giây”.

8.14. Thống kê số ca nhiễm bệnh và số ca tử vong của bệnh SARS và bệnh EBOLA được kết quả như sau:

Bệnh	Số người nhiễm	Số người tử vong
SARS (11–2002 đến 7–2003)	7437	813
EBOLA (2014–2016)	34453	15158

(Theo www.worldometers.info)

Căn cứ vào bảng thống kê trên, hãy ước lượng xác suất một người tử vong khi nhiễm bệnh SARS, bệnh EBOLA.

8.15. Một nhà máy sản xuất điều hòa tiến hành kiểm tra chất lượng của 600 chiếc điều hòa được sản xuất và thấy có 5 chiếc bị lỗi. Trong một lô hàng có 1500 chiếc điều hòa. Hãy dự đoán xem có khoảng bao nhiêu chiếc điều hòa không bị lỗi.

8.16. Hai bạn Mai và Việt lần lượt thực hiện việc gieo đồng thời hai con xúc xắc và ở mỗi lần gieo sẽ nhận được số điểm bằng tổng số chấm xuất hiện trên hai con xúc xắc. Mai được gieo 100 lần và Việt được gieo 120 lần. Mai gieo trước và ghi lại kết quả của mình như sau:

Số điểm	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Số lần	3	5	9	10	14	16	13	11	8	7	4

Trước khi Việt gieo, hãy dự đoán xem có bao nhiêu lần số điểm của Việt nhận được là:

- a) Một số chẵn;
 b) Một số nguyên tố;
 c) Một số lớn hơn 7.

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG VIII

A. TRẮC NGHIỆM

Sử dụng dữ liệu sau để trả lời bài 1 và 2.

Lớp 8A gồm 38 học sinh, trong đó có 18 bạn nữ. Có 6 bạn nữ tham gia câu lạc bộ thể thao và 8 bạn nam không tham gia câu lạc bộ thể thao. Chọn ngẫu nhiên một học sinh trong lớp.

1. Xác suất để học sinh đó là một bạn nam có tham gia câu lạc bộ thể thao là:

A. $\frac{17}{20}$.

B. $\frac{6}{19}$.

C. $\frac{8}{21}$.

D. $\frac{9}{23}$.

2. Xác suất để học sinh đó là một bạn **không** tham gia câu lạc bộ thể thao là:

A. $\frac{11}{20}$.

B. $\frac{12}{19}$.

C. $\frac{13}{21}$.

D. $\frac{10}{19}$.

Sử dụng dữ liệu sau để trả lời bài 3 và 4.

Một túi đựng các quả cầu giống hệt nhau, chỉ khác màu, trong đó có 26 quả màu đỏ, 62 quả màu tím, 8 quả màu vàng, 9 quả màu trắng và 12 quả màu đen. Lấy ngẫu nhiên một quả cầu trong túi.

3. Xác suất để lấy được quả cầu màu tím là:

A. $\frac{62}{117}$.

B. $\frac{60}{117}$.

C. $\frac{63}{118}$.

D. $\frac{65}{118}$.

4. Xác suất để lấy được quả cầu màu trắng là:

A. $\frac{11}{117}$.

B. $\frac{9}{117}$.

C. $\frac{13}{118}$.

D. $\frac{15}{118}$.

Đáp án

1. Số bạn nam: $38 - 18 = 20$.

Số bạn nam có tham gia câu lạc bộ thể thao là: $20 - 8 = 12$

Xác suất để học sinh đó là bạn nam có tham gia câu lạc bộ là: $\frac{12}{38} = \frac{6}{19}$

Chọn B.

2. Số bạn nữ không tham gia câu lạc bộ thể thao là: $18 - 6 = 12$

Số học sinh không tham gia câu lạc bộ thể thao là: $12 + 8 = 20$

Xác suất để học sinh đó là một bạn không tham gia câu lạc bộ thể thao là: $\frac{20}{38} = \frac{10}{19}$

Chọn D.

3. Số quả cầu: $26 + 62 + 8 + 9 + 12 = 117$

Xác suất để lấy được quả cầu màu tím là: $\frac{62}{117}$

Chọn A.

4. Chọn B.

B. TỰ LUẬN

1. Trong một hộp có 10 tấm thẻ giống nhau được đánh số 11;12;...;20 . Rút ngẫu nhiên một tấm thẻ từ trong hộp.

a) Liệt kê các kết quả có thể của hành động trên.

b) Liệt kê các kết quả thuận lợi cho các biến cő sau:

E : “Rút được tấm thẻ ghi số là bội của 3”;

F : “Rút được tấm thẻ ghi số nguyên tố”.

Hướng dẫn

a) Các kết quả có thể: 11;12;...;20

Số kết quả có thể là 10.

b) • Các kết quả thuận lợi cho biến cő E : 12;15;18 .

• Các kết quả thuận lợi cho biến cő F : 11;13;17;19 .

2. Một túi đựng các viên bi giống hệt nhau, chỉ khác màu, trong đó có 5 viên bi màu xanh, 3 viên bi màu đỏ và 7 viên bi màu trắng. Bạn Việt lấy ngẫu nhiên một viên bi trong túi. Tính xác suất của các biến cő sau:

a) E : “Việt lấy được viên bi màu xanh”;

b) F : “Việt lấy được viên bi màu đỏ”;

c) G : “Việt lấy được viên bi màu trắng”;

d) H : “Việt lấy được viên bi màu xanh hoặc màu đỏ”;

e) K : “Việt không lấy được viên bi màu đỏ”;

Hướng dẫn

Số bi trong túi: $5 + 3 + 7 = 15$

a) $P(E) = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$.

b) $P(E) = \frac{3}{15} = \frac{1}{5}$.

c) $P(E) = \frac{7}{15}$.

d) Số viên bi màu xanh và màu đỏ: $5 + 3 = 8$

$$P(E) = \frac{8}{15}.$$

e) Số viên bi không phải màu đỏ: $15 - 3 = 12$

$$P(E) = \frac{12}{15} = \frac{4}{5}$$

ĐÉN ĐÂY

3. Chọn ngẫu nhiên một số có hai chữ số. Tính xác suất của các biến cő sau:

a) A : “Số được chọn nhỏ hơn 20”;

b) B : “Số được chọn là số chính phương”.

Hướng dẫn- Đáp số

a) Các kết quả thuận lợi: 10;11;...;19

Số kết quả thuận lợi: 11.

Các số có hai chữ số: 90 .

$$P(A) = \frac{11}{90}$$

b) Đáp số: $\frac{1}{15}$

4. Trong một phòng có 15 học sinh lớp 8A gồm 9 bạn nam, 6 bạn nữ và 15 học sinh lớp 8B gồm 12 bạn nam, 3 bạn nữ. Chọn ngẫu nhiên một học sinh trong phòng.

Tính xác suất của các biến cő sau:

- a) E : “Chọn được một học sinh nam”;
- b) F : “Chọn được một học sinh nam lớp 8B”;
- c) G : “Chọn được một học sinh nữ lớp 8A”;

Đáp số a) $P(E) = \frac{7}{10}$.

b) $P(F) = \frac{2}{5}$.

c) $P(G) = \frac{1}{5}$.

5. Bảng sau đây thống kê kết quả khảo sát số người thích bộ phim mới tại 5 quận A, B, C, D, E của thành phố X .

Quận	Số người khảo sát		Số người thích bộ phim mới	
	Nam	Nữ	Nam	Nữ
A	45	51	10	11
B	36	42	9	6
C	52	49	13	13
D	28	33	9	10
E	40	39	7	14
Tổng số	201	214	48	44

Tổng số

- a) Chọn ngẫu nhiên một người ở quận C . Ước lượng xác suất của biến cő: A : “Người được chọn thích bộ phim đó”.
- b) Chọn ngẫu nhiên một người ở quận E . Ước lượng xác suất của biến cő: B : “Người được chọn không thích bộ phim đó”.
- c) Chọn ngẫu nhiên 600 người ở thành phố X . Ước lượng trong đó có bao nhiêu người thích bộ phim đó?
- d) Chọn ngẫu nhiên 500 người nữ ở thành phố X . Ước lượng trong đó có bao nhiêu người thích bộ phim đó?

Đáp số a) $P(A) = \frac{26}{415}$.

b) $P(B) = \frac{68}{415}$.

c) 133 người

d) 103.

HƯỚNG DẪN GIẢI BÀI TẬP CHƯƠNG VIII

8.1.

a) 1;2;3;4;5;6.

b) $A : 4; 6.$

$B : 1; 2; 3; 4.$

$C : 1; 3; 5.$

8. 2. $A : 3; 6; 9; 12; 15; 18.$

$B : 1; 4; 6; 8; 9; 10; 12; 14; 15; 16; 18; 20.$

8. 3. $A : 11; 13; 15; 17; 19; 21; 23.$

$B : 11; 13; 17; 19; 23.$

8. 4.

a) (Lúa; Ngô; Hoa hồng; Hoa hướng dương; Trâu, Bò, Voi, Hổ, Báo, Sư tử).

b) Tập hợp sau: {Trâu, Bò, Voi, Hổ, Báo, Sư tử}.

8. 5. a) $P(E) = \frac{1}{4}.$

b) $P(F) = \frac{1}{3}.$

c) $P(G) = \frac{11}{36}.$

8. 6. $P(A) = \frac{1}{2}; P(B) = \frac{1}{4}; P(C) = \frac{1}{4}.$

8.7. $P(A) = \frac{1}{3}.$

8.8. $P(A) = \frac{1}{5}; P(B) = 0; P(C) = 1.$

8.9. $P(A) = \frac{1}{4}; P(B) = \frac{2}{3}.$

8.10. Có 2 thẻ ghi số lẻ.

8.11.. a) $P(E) = \frac{113}{145}.$ b) $P(F) = \frac{32}{145}.$

8.12. a) $P(M) = \frac{7}{10}.$ b) $P(N) = \frac{3}{20}.$ c) $P(K) = \frac{3}{20}.$

8.13. a) $P(E) = 48,7\%.$ b) $P(F) = \frac{2}{30} \approx 5,1\%.$ c) $P(G) = \frac{19}{26} \approx 73,1\%.$

8.14.

Xác suất một người tử vong khi nhiễm bệnh SARS: $\frac{813}{8437} = 9,6\%$.

Xác suất một người tử vong khi nhiễm bệnh EBOLA: $\frac{15158}{34453} = 44\%$

8.15. Gọi x là số chiếc điều hòa bị lỗi trong số 1500 chiếc điều hòa.

Ta có: $\frac{x}{1500} = \frac{5}{600}$; $x = 13$.

Vậy có: $1500 - 13 = 1487$ chiếc điều hòa không bị lỗi.

8.16 a) Đáp số 61. b) Đáp số 49. c) Đáp số 52.

CHƯƠNG IX. TAM GIÁC ĐỒNG DẠNG

BÀI 33. HAI TAM GIÁC ĐỒNG DẠNG

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ.

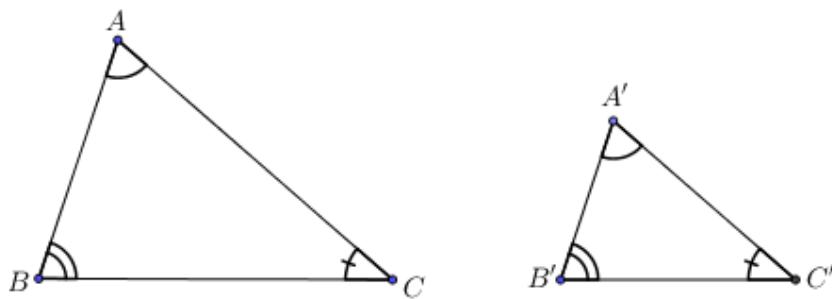
* **Định nghĩa:**

$\Delta A'B'C'$ gọi là đồng dạng với ΔABC nếu: $\widehat{A}' = \widehat{A}; \widehat{B}' = \widehat{B}; \widehat{C}' = \widehat{C}; \frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{C'A'}{CA}$

Kí hiệu: $\Delta A'B'C' \sim \Delta ABC$

Nhận xét:

- $\Delta A'B'C' \sim \Delta ABC$ với tỉ số đồng dạng k thì $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$ với tỉ số đồng dạng $\frac{1}{k}$
- Hai tam giác bằng nhau thì đồng dạng với nhau theo tỉ số đồng dạng $k=1$.
- Nếu $\Delta A''B''C'' \sim \Delta ABC$ với tỉ số đồng dạng k và $\Delta A'B'C' \sim \Delta ABC$ với tỉ số đồng dạng m thì $\Delta A''B''C'' \sim \Delta A'B'C'$ với tỉ số đồng dạng $k.m$



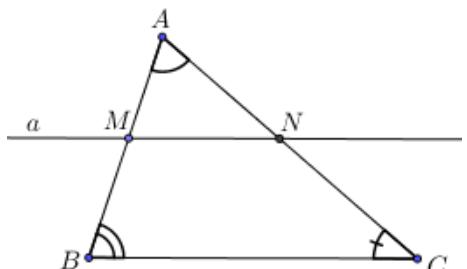
* **Tính chất:**

1. Mỗi hai tam giác với chính nó.
2. Nếu $\Delta A'B'C' \sim \Delta ABC$ thì $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$.
3. Nếu $\Delta A'B'C' \sim \Delta A''B''C''$ và $\Delta A''B''C'' \sim \Delta ABC$ thì $\Delta A'B'C' \sim \Delta ABC$

* **Định lí:**

Nếu một đường thẳng cắt hai cạnh của tam giác và song song với cạnh còn lại thì nó tạo thành tam giác mới đồng dạng với tam giác đã cho. ΔABC có $MN \parallel BC \Rightarrow \Delta AMN \sim \Delta ABC$.

Chú ý: Định lí cũng đúng cho trường hợp đường thẳng a cắt phần kéo dài hai cạnh của tam giác và song song với cạnh còn lại.



B. PHÂN LOẠI CÁC BÀI TẬP

I. Nhận biết khái niệm về tam giác đồng dạng.

Bài toán 1. Cho $\Delta ABC \sim \Delta MNP$, khẳng định nào sau đây không đúng?

- | | |
|-----------------------------------|-----------------------------------|
| a) $\Delta MNP \sim \Delta ABC$. | b) $\Delta BCA \sim \Delta MPN$. |
| c) $\Delta CAB \sim \Delta PMN$. | d) $\Delta ACB \sim \Delta MNP$. |

Lời giải

Khẳng định d) không đúng.

Bài toán 2. Khẳng định nào sau đây là đúng?

- Hai tam giác bằng nhau thì đồng dạng với nhau.
- Hai tam giác bất kì đồng dạng với nhau.
- Hai tam giác đều bất kì đồng dạng với nhau.
- Hai tam giác vuông bất kì đồng dạng với nhau.
- Hai tam giác đồng dạng thì bằng nhau.

Lời giải

- | | | | | |
|---------|--------|---------|--------|--------|
| a) Đúng | b) Sai | c) Đúng | d) Sai | e) Sai |
|---------|--------|---------|--------|--------|

Bài toán 3.

Hai tam giác ở hình vẽ bên có đồng dạng hay không? Vì sao?

Lời giải

Ta có: $\frac{AB}{MN} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$;

$$\frac{AC}{MP} = \frac{2\sqrt{3}}{3\sqrt{3}} = \frac{2}{3};$$

$$\frac{BC}{NP} = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{AB}{MN} = \frac{AC}{MP} = \frac{BC}{NP} = \frac{2}{3} \text{ và}$$

$$\hat{A} = \hat{M} = 30^\circ; \hat{B} = \hat{N} = 60^\circ; \hat{C} = \hat{P} = 90^\circ.$$

Do đó $\Delta ABC \sim \Delta MNP$.

Bài toán 4. Cho tam giác ABC , lấy P thuộc

cạnh AB , qua P kẻ $MN \parallel BC$ ($N \in AC$). Từ N kẻ $NM \parallel AB$ ($M \in BC$). Hãy sử dụng kí hiệu để viết các cặp tam giác đồng dạng.

Lời giải

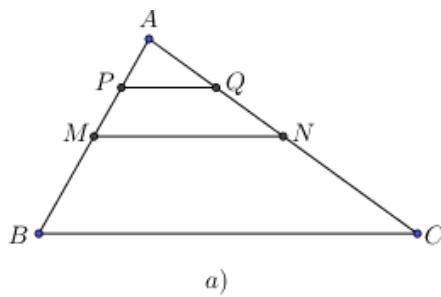
Ta có: $PN \parallel BC$ (gt) nên $\Delta APN \sim \Delta ABC$ (1)

(Nếu một đường thẳng cắt hai cạnh của một tam giác và song song với cạnh thứ ba thì nó tạo thành một tam giác mới đồng dạng với tam giác đã cho).

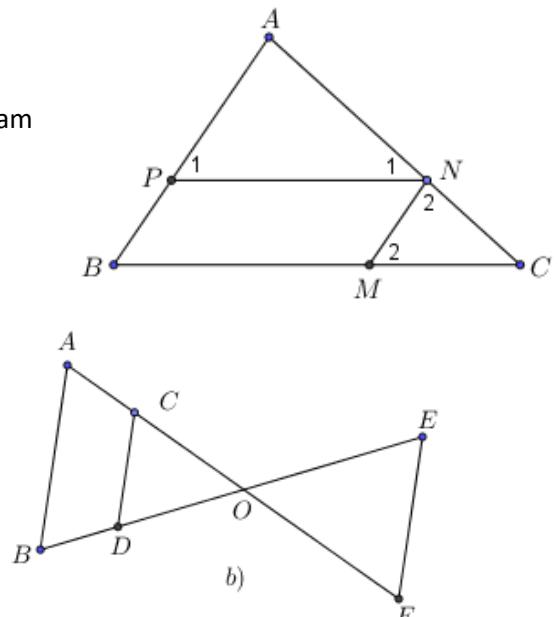
Lại có $MN \parallel AB$ (gt) nên $\Delta NMC \sim \Delta ABC$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \Delta APN \sim \Delta NMC$.

Bài toán 5.



a)



a) Xem hình vẽ a, biết M, N là trung điểm của AB và AC ; P, Q lần lượt là trung điểm của AM và AN .

Hãy liệt kê tất cả các cặp tam giác (phân biệt) đồng dạng.

b) Xem hình vẽ a, biết rằng các đường thẳng AB, CD, EF song song với nhau. Hãy liệt kê ba cặp tam giác (phân biệt) đồng dạng.

Lời giải

a) Ta có M là trung điểm của AB , N là trung điểm của AC (gt) nên MN là đường trung bình của tam giác $ABC \Rightarrow MN \parallel BC$ (1)

Theo định nghĩa cặp tam giác đồng dạng $\Delta AMN \sim \Delta ABC$.

Chứng minh tương tự PQ là đường trung bình của tam giác AMN

$\Rightarrow PQ \parallel MN$ (2) nên $\Delta APQ \sim \Delta AMN$.

Từ (1) và (2) $PQ \parallel BC$ nên $\Delta APQ \sim \Delta ABC$.

Vậy có tất cả ba cặp tam giác đồng dạng sau đây:

$\Delta AMN \sim \Delta ABC$; $\Delta APQ \sim \Delta AMN$; $\Delta APQ \sim \Delta ABC$.

b) Ta có $AB \parallel CD$ (gt) nên $\Delta OAB \sim \Delta OCD$, tương tự

$AB \parallel EF$ (gt) nên $\Delta OAB \sim \Delta OFE$

CD // EF (gt) nên $\Delta OCD \sim \Delta OFE$

Bài toán 6. Trong hình vẽ bên, ABC là tam giác không cân: M, N, P lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB. Hãy tìm trong hình năm tam giác khác nhau mà chúng đôi một đồng dạng với nhau. Giải thích vì sao chúng đồng dạng.

Lời giải

Ta có M, N lần lượt là trung điểm của BC và AC (gt) nên MN là đường trung bình của tam giác ABC $\Rightarrow MN \parallel AB$. Theo định lí trang 81, Toán 8, tập 2 ta có $\Delta APN \sim \Delta ABC$.

Tương tự ta có $MN \parallel AB$ nên $\Delta ANM \sim \Delta CAB$.

MP // AC nên $\Delta BPM \sim \Delta BAC$.

Dễ thấy tứ giác ANMP là hình bình hành (các cạnh đối song song).

Do đó $\Delta APN = \Delta MNP$ (g.c.g)

$\Rightarrow \Delta APN \sim \Delta MNP$ (Hai tam giác bằng nhau thì đồng dạng và tỉ số đồng dạng $k=1$)

Tương tự ta có $\Delta BPM \sim \Delta MNP$.

Bài toán 7. Cho tam giác ABC trên cạnh AB lấy I sao cho $\frac{AI}{IB} = \frac{1}{3}$. Qua I kẻ các đường thẳng song song với BC và AC chúng lần lượt cắt AC và BC tại D và E.

a) Hãy nêu tất cả các cặp tam giác đồng dạng.

b) Với mỗi cặp tam giác đồng dạng viết các cặp góc bằng nhau và tỉ số đồng dạng tương ứng.

Lời giải

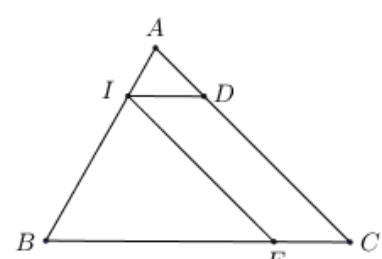
a) Ta có $ID \parallel BC$ (gt) $\Rightarrow \Delta AID \sim \Delta ABC$

Tương tự $IE \parallel AC$ $\Rightarrow \Delta IBE \sim \Delta ABC \Rightarrow \Delta AID \sim \Delta IBE$.

b) Ta có $\Delta AID \sim \Delta ABC \Rightarrow \widehat{AID} = \widehat{B}$ và $\widehat{AID} = \widehat{C}$, tỉ số đồng dạng $\frac{AI}{AB} = \frac{1}{3}$

$\Delta IBE \sim \Delta ABC \Rightarrow \widehat{IBE} = \widehat{A}$ và $\widehat{BEI} = \widehat{C}$, tỉ số đồng dạng $\frac{IB}{AB}$.

Ta có: $\frac{AI}{AB} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{AI}{AB - AI} = \frac{1}{3-1} = \frac{1}{2}$ hay $\frac{IB}{AB} = \frac{1}{2}$.



II. Tính.

Bài toán 8. Cho $\Delta ABC \sim \Delta MNP$ và $\widehat{A} = 45^\circ, \widehat{B} = 60^\circ$. Tính các góc C, M, N, P.

Lời giải

Theo định lí "Tổng các góc trong của một tam giác", ta có:

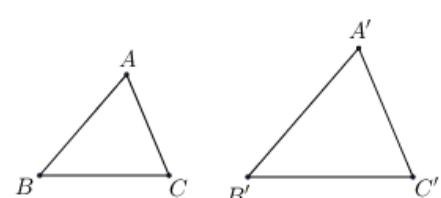
$$\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{C} = 180^\circ - (\widehat{A} + \widehat{B}) = 180^\circ - (45^\circ + 60^\circ) = 75^\circ$$

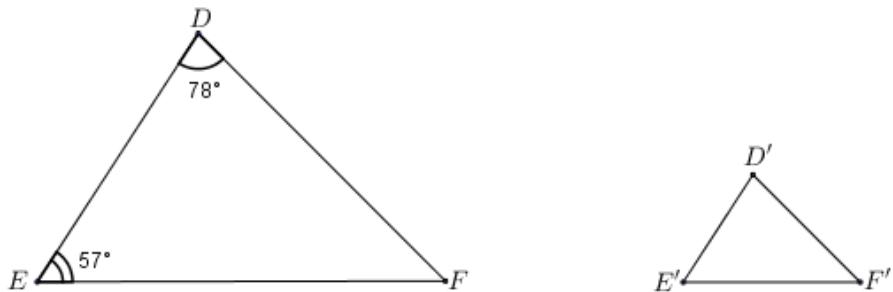
$$\Delta ABC \sim \Delta MNP \text{ (gt)} \Rightarrow \widehat{M} = \widehat{A} = 45^\circ; \widehat{N} = \widehat{B} = 60^\circ; \widehat{P} = \widehat{C} = 75^\circ.$$

Bài toán 9.

a) Trong hình vẽ bên, cho biết $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$. Viết tỉ số của các cạnh tương ứng và chỉ ra các cặp góc tương ứng.

b) Trong hình vẽ dưới đây, cho biết $\Delta DEF \sim \Delta D'E'F'$. Tính số đo \widehat{D}' và \widehat{F}' .





Lời giải

a) Tỉ số của các cạnh tương ứng: $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'}$

Các cặp góc tương ứng: $\widehat{A}' = \widehat{A}; \widehat{B}' = \widehat{B}; \widehat{C}' = \widehat{C}$.

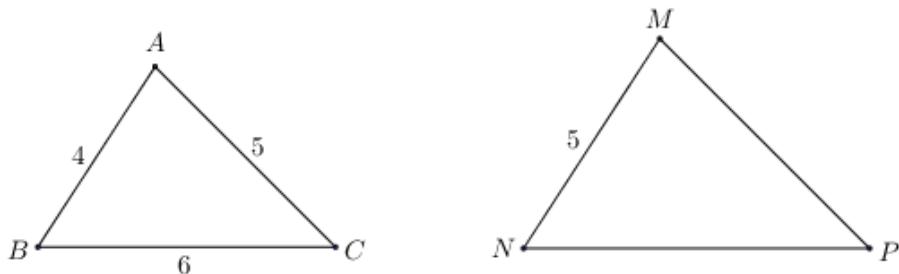
b) Theo định lí "Tổng các góc trong của một tam giác", ta có:

$$\widehat{D} + \widehat{E} + \widehat{F} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{F} = 180^\circ - (\widehat{D} + \widehat{E}) = 180^\circ - (78^\circ + 57^\circ) = 45^\circ$$

Do $\Delta DEF \sim \Delta D'E'F'$ (gt) $\Rightarrow \widehat{D}' = \widehat{D} = 78^\circ, \widehat{F}' = \widehat{F} = 45^\circ$.

Bài toán 10. Cho $\Delta ABC \sim \Delta MNP$ và $AB = 4; BC = 6; CA = 5; MN = 5$.

Tính độ dài NP và PM .



Lời giải

Ta có $\Delta ABC \sim \Delta MNP$ (gt)

$$\frac{NP}{BC} = \frac{MN}{AB} \text{ hay } \frac{NP}{6} = \frac{5}{4} \Rightarrow NP = \frac{6.5}{4} = \frac{30}{4} = 7,5$$

$$\text{Tương tự } \frac{MP}{AC} = \frac{MN}{AB} \text{ hay } \frac{MP}{5} = \frac{5}{4} \Rightarrow MP = \frac{5.5}{4} = \frac{25}{4} = 6,25.$$

Bài toán 11. Cho tam giác ABC có ba cạnh $AB = 3\text{cm}; AC = 4\text{cm}$ và $BC = 5\text{cm}$. Biết rằng $\Delta A'B'C' \sim \Delta ABC$

Lời giải

Ta có $\Delta A'B'C' \sim \Delta ABC \Rightarrow \frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{B'C'}{BC}$

$$\text{Hay } \frac{A'B'}{3} = \frac{A'C'}{4} = \frac{10}{5} = 2 \Rightarrow A'B' = 2.3 = 6 \text{ (cm)} \text{ và } A'C' = 8 \text{ cm.}$$

Bài toán 12. Cho tam giác ABC có $AB = 5\text{cm}; AC = 7\text{cm}$ và $BC = 9\text{cm}$. Hãy tính độ dài các cạnh tam giác $A'B'C'$ đồng dạng với tam giác đã cho, biết cạnh $A'B'$ tương ứng với cạnh AB và lớn hơn cạnh đó 3cm .

Lời giải

Ta có $A'B' = AB + 3 = 5 + 3 = 8\text{cm}$

$$\Delta A'B'C' \sim \Delta ABC \text{ (gt)} \Rightarrow \frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{B'C'}{BC} \text{ hay } \frac{8}{5} = \frac{A'C'}{7} \Rightarrow A'C' = \frac{8.7}{5} = 11,2(\text{cm})$$

$$\text{Tương tự } B'C' = \frac{8.9}{5} = 14,4(\text{cm})$$

Bài toán 13. Trong hình vẽ dưới đây cho biết $\Delta MNP \sim \Delta M'N'P'$. Tính độ dài các đoạn thẳng MN và $M'P'$.

Lời giải

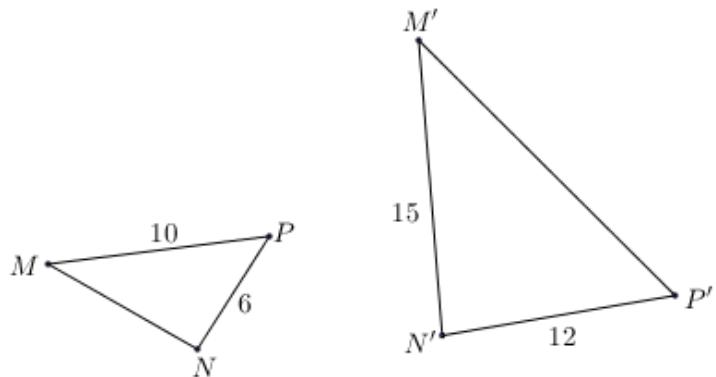
Ta có $\Delta MNP \sim \Delta M'N'P'$ (gt)

$$\Rightarrow \frac{MN}{M'N'} = \frac{NP}{N'P'}$$

$$\text{hay } \frac{MN}{15} = \frac{6}{12} \Rightarrow MN = \frac{15 \cdot 6}{12} = 7,5$$

$$\text{Tương tự } \frac{M'P'}{MP} = \frac{N'P'}{NP}$$

$$\text{hay } \frac{M'P'}{10} = \frac{12}{6} \Rightarrow M'P' = \frac{10 \cdot 12}{6} = 20.$$



Bài toán 14. Trong hình vẽ dưới đây, cho biết $AB // CD$.

a) Chứng minh rằng $\Delta AEB \sim \Delta DEC$.

b) Tìm x .

Lời giải

a) Ta có $AB // CD$ (gt).

Theo định lí Thalès, ta có:

$$\frac{EB}{EC} = \frac{EA}{ED} = \frac{AB}{CD}$$

Và $\widehat{AEB} = \widehat{DEC}$ (đối đỉnh)

$\widehat{A} = \widehat{D}$ (cặp góc so le trong)

tương tự $\widehat{B} = \widehat{C}$

theo dấu hiệu nhận biết ta có $\Delta AEB \sim \Delta DEC$.

$$b) \Delta AEB \sim \Delta DEC \text{ (cmt)} \Rightarrow \frac{AE}{DE} = \frac{AB}{DC} \text{ hay } \frac{AE}{10} = \frac{3}{5} \Rightarrow AE = \frac{3 \cdot 10}{5} = 6.$$

Ta có $AE = x - 2$ hay $x - 2 = 6 \Rightarrow x = 6 + 2 = 8$.

Bài toán 15. Chứng tỏ rằng tỉ số các chu vi của hai tam giác đồng dạng bằng tỉ số đồng dạng.

Lời giải

Gọi k là tỉ số đồng dạng của hai tam giác $A'B'C'$ và ABC và $P_{A'B'C'}, P_{ABC}$ lần lượt là các chu vi.

$$\text{Ta có } \Delta A'B'C' \sim \Delta ABC \Rightarrow \frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{B'C'}{BC} = k$$

Theo tính chất của dãy số bằng nhau ta có:

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{A'B' + A'C' + B'C'}{AB + AC + BC} = \frac{P_{A'B'C'}}{P_{ABC}} = k \text{ (đpcm)}$$

Nhận xét: Áp dụng kết quả của bài toán 1 ta sẽ giải được các bài toán sau đây.

Bài toán 16. Cho tam giác ABC và tam giác $A'B'C'$ đồng dạng theo tỉ số $k = \frac{2}{7}$. Biết rằng tổng chu vi của hai tam giác bằng 180m . Tính chu vi của mỗi tam giác.

Lời giải

$$\text{Do } \Delta ABC \sim \Delta A'B'C' \text{ is (gt)} \Rightarrow \frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{2}{7}$$

$$\Rightarrow \frac{P_{ABC}}{P_{A'B'C'}} = \frac{2}{7} \text{ (kết quả của bài toán 15)}$$

$$\Rightarrow \frac{P_{ABC}}{2} = \frac{P_{A'B'C'}}{7} = \frac{P_{ABC} + P_{A'B'C'}}{2+7} = \frac{180}{9} = 20$$

$$\Rightarrow P_{ABC} = 2.20 = 40(\text{m}); P_{A'B'C'} = 7.20 = 140(\text{m}).$$

Bài toán 17. Cho $\Delta ABC \sim \Delta DEF$ theo tỉ số đồng dạng $k = \frac{2}{5}$.

a) Tính tỉ số chu vi của hai tam giác đã cho.

b) Cho biết hiệu chu vi của hai tam giác trên là 36cm, tính chu vi của mỗi tam giác.

Lời giải

a) Theo bài toán 15 ta đã chứng minh được "Tỉ số các chu vi của hai tam giác đồng dạng bằng tỉ số đồng dạng".

Gọi P_{ABC} là chu vi của ΔABC và P_{DEF} là chu vi của ΔDEF , ta có:

$$\frac{P_{DEF}}{P_{ABC}} = \frac{2}{5} \quad (*)$$

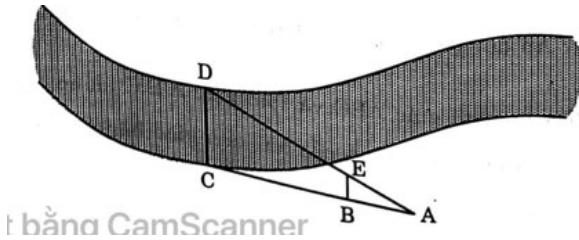
b) Ta có $P_{ABC} - P_{DEF} = 36$ (gt)

$$\text{và từ } (*) \Rightarrow \frac{P_{DEF}}{2} = \frac{P_{ABC}}{5} = \frac{P_{ABC} - P_{DEF}}{5-2} = \frac{36}{3} = 12$$

Vậy chu vi của ΔDEF là $2.12 = 24$ (đơn vị dài)

chu vi của ΔABC là $5.12 = 60$ (đơn vị dài)

Bài toán 18. Trong hình vẽ dưới đây độ rộng của khúc sông được tính bằng khoảng cách giữa hai vị trí C,D . Giá sử chọn được vị trí A,B,E sao cho $\Delta ABE \sim \Delta ACD$ và đo được $AB = 20\text{m}$, $AC = 50\text{m}$, $BE = 8\text{m}$. Tính độ rộng của khúc sông đó.



Lời giải

$$\text{Ta có } \Delta ABE \sim \Delta ACD \text{ (gt)} \Rightarrow \frac{CD}{BE} = \frac{AC}{AB} \text{ hay } \frac{CD}{8} = \frac{50}{20}$$

$$\Rightarrow CD = \frac{8.50}{20} = 20.$$

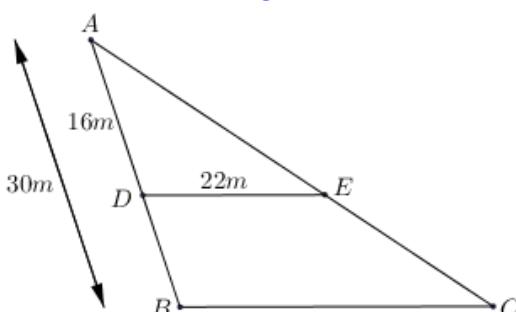
Độ rộng của khúc sông là 20m .

Bài toán 19. Người ta ứng dụng hai tam giác đồng dạng để đo khoảng cách BC ở hai địa điểm không thể đến được (hình vẽ dưới). Biết $DE // BC$.

a) Chứng minh rằng $\Delta ADE \sim \Delta ABC$.

b) Tính khoảng cách BC.

Lời giải



$$\text{a) Ta có } DE // BC, \text{ theo định lí Thales: } \frac{AD}{AB} = \frac{DE}{BC} = \frac{AE}{AC}$$

và $\widehat{ADE} = \widehat{ABC}$ (cặp góc đồng vị bằng nhau) tương tự $\widehat{AED} = \widehat{ACB}$

Do đó $\Delta ADE \sim \Delta ABC$.

b) $\Delta ADE \sim \Delta ABC$ (cmt) $\Rightarrow \frac{BC}{DE} = \frac{AB}{AD} = \frac{30}{16} = \frac{15}{8}$

hay $\frac{BC}{22} = \frac{15}{8} \Rightarrow BC = \frac{22 \cdot 15}{8} = 41,25$.

Vậy khoảng cách BC là 41,25 m.

Bài toán 20. Ba vị trí A, B, C trong thực tiễn lần lượt được mô tả bởi ba đỉnh của tam giác A'B'C' trên bản vẽ.

Biết tam giác A'B'C' đồng dạng với tam giác ABC theo tỉ số $\frac{1}{1000000}$ và

$A'B' = 4\text{ cm}, B'C' = 5\text{ cm}, C'A' = 6\text{ cm}$.

Tính khoảng cách giữa hai vị trí A và B, B và C, C và A trong thực tiễn (theo đơn vị kilômét).

Lời giải

a) Ta có $\Delta A'B'C' \sim \Delta ABC \Rightarrow \frac{A'B'}{AB} = k; k = \frac{1}{1000000}$

$\Rightarrow AB = A'B' \cdot 1000000 = 40000\text{ m}$

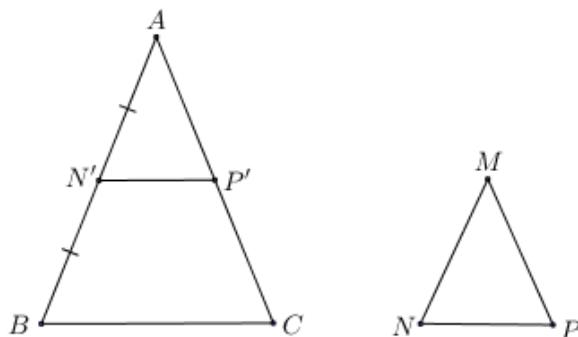
Do đó $AB = 40\text{ km}$, tương tự $BC = 50\text{ km}, AC = 60\text{ km}$.

III. Chứng minh.

Bài toán 21. Cho tam giác ABC cân tại đỉnh A và tam giác MNP cân tại đỉnh M. Biết rằng

$\widehat{BAC} = \widehat{PMN}, AB = 2MN$. Chứng minh $\Delta MNP \sim \Delta ABC$ và tìm tỉ số đồng dạng.

Lời giải



Gọi N' là trung điểm của đoạn thẳng AB, qua N' kẻ đường thẳng song song với BC cắt AC tại P' (P' thuộc AC).

Vì $AB = 2MN$ và $\widehat{BAC} = \widehat{PMN}$ (gt) nên $\Delta AN'P' \sim \Delta ANP$ (c.g.c).

Theo định lí về nhận biết tam giác đồng dạng (trang 81 sách giáo khoa Toán 8, tập 2) ta có $\Delta AN'P' \sim \Delta ABC$.

$\Rightarrow \widehat{AN'P'} = \widehat{B}, \widehat{AP'N'} = \widehat{C}$ và $\frac{AN'}{AB} = \frac{AP'}{AC} = \frac{NP'}{BC}$

Lại có $\Delta AN'P' \sim \Delta ANP$ (cmt) $\Rightarrow \frac{MN}{AB} = \frac{MP}{AC} = \frac{NP}{BC}$ (1)

và $\widehat{B} = \widehat{N}, \widehat{C} = \widehat{P} \Rightarrow \widehat{BAC} = \widehat{PMN}$ (2)

từ (1) và (2) $\Rightarrow \Delta MNP \sim \Delta ABC$ với tỉ số đồng dạng là $\frac{1}{2}$.

Bài toán 22. Cho hình bình hành ABCD. Một đường thẳng đi qua D lần lượt cắt đoạn thẳng BC và tia AB tại M và N sao cho điểm M nằm giữa hai điểm B và C. Chứng minh:

a) $\Delta NBM \sim \Delta NAD$;

b) $\Delta NBM \sim \Delta DCM$;

c) $\Delta NAD \sim \Delta DCM$

Lời giải

a) ABCD là hình bình hành (gt)

$\Rightarrow AD \parallel BC$ hay $AD \parallel BM$

$\Rightarrow \Delta NBM \sim \Delta NAD$ (1)

(định lí trang 81 sách giáo khoa Toán 8, tập 2).

b) Ta có $BN \parallel CD \Rightarrow \Delta NBM \sim \Delta DCM$ (2)

c) Từ (1) và (2) $\Rightarrow \Delta NAD \sim \Delta DCM$.

C. BÀI TẬP

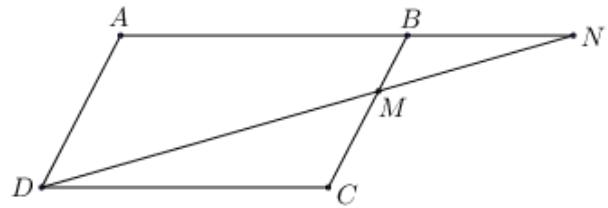
9.1. Cho tam giác $A'B'C'$ và tam giác ABC đồng dạng theo tỉ số $k = \frac{3}{5}$.

a) Tính tỉ số chu vi của hai tam giác đã cho.

b) Cho biết hiệu chu vi của hai tam giác trên là 40cm. Hãy tính chu vi của mỗi tam giác.

9.2. Cho tam giác với cạnh có độ dài 6cm, 8cm và 9cm. Tính độ dài các cạnh của tam giác đồng dạng với tam giác đã cho nếu cạnh nhỏ nhất của tam giác này bằng cạnh lớn nhất của tam giác đã cho.

9.3. Cho tam giác ABC đồng dạng trong đó $AB = 5\text{cm}$, $AC = 7\text{cm}$ và $BC = 9\text{cm}$. Hãy độ dài các cạnh của tam giác $A'B'C'$ đồng dạng với tam giác đã cho biết cạnh $A'B'$ tương ứng với cạnh AB và nhỏ hơn cạnh AN là 2cm.



↔ HẾT ↔

BÀI 34: BA TRƯỜNG HỢP ĐỒNG DẠNG CỦA HAI TAM GIÁC

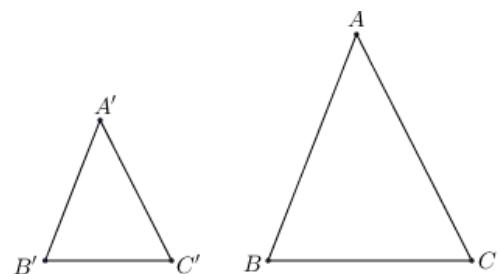
A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Trường hợp đồng dạng thứ nhất của tam giác.

Trường hợp đồng dạng cạnh - cạnh - cạnh.

Định lí: Nếu ba cạnh của tam giác này tỉ lệ với ba cạnh của tam giác kia thì hai tam giác đó đồng dạng với nhau.

GT	$\Delta ABC, \Delta A'B'C'$ $\frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{B'C'}{BC}$
KL	$\Delta A'B'C' \sim \Delta ABC$

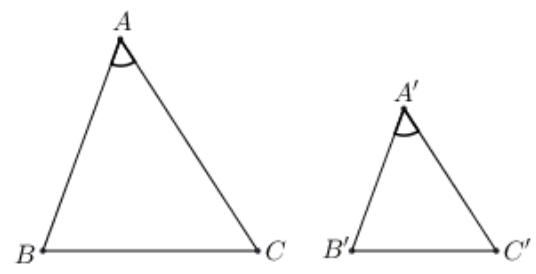


2. Trường hợp đồng dạng thứ hai của tam giác.

Trường hợp đồng dạng cạnh - góc - cạnh

Định lí: Nếu hai cạnh của tam giác này tỉ lệ với hai cạnh của tam giác kia và hai góc tạo bởi các cặp cạnh đó bằng nhau thì hai tam giác đó đồng dạng với nhau.

GT	$\Delta ABC, \Delta A'B'C'$ $\frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC}, \hat{A}' = \hat{A}$
KL	$\Delta A'B'C' \sim \Delta ABC$

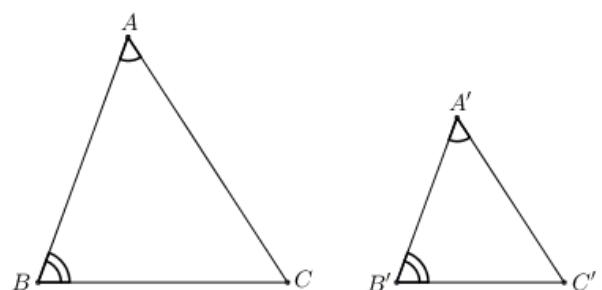


3. Trường hợp đồng dạng thứ ba của tam giác.

Trường hợp đồng dạng góc - góc.

Định lí: Nếu hai góc của tam giác này lần lượt bằng hai góc của tam giác kia thì hai tam giác đó đồng dạng với nhau.

GT	$\Delta ABC, \Delta A'B'C'$ $\hat{A}' = \hat{A}, \hat{B}' = \hat{B}$
KL	$\Delta A'B'C' \sim \Delta ABC$



B. PHÂN LOẠI CÁC BÀI TẬP

I. Nhận biết hai tam giác đồng dạng theo các trường hợp.

Bài toán 1. Khẳng định nào sau đây chứng tỏ rằng hai tam giác đồng dạng?

- a) Ba cạnh của tam giác này tỉ lệ với ba cạnh tam giác kia.
- b) Hai cạnh của tam giác này tỉ lệ với hai cạnh tam giác kia và có một cặp góc bằng nhau.
- c) Hai góc của tam giác này bằng hai góc của tam giác kia.

d) Hai cạnh của tam giác này bằng cạnh góc của tam giác kia.

Lời giải

Khẳng định a) và c).

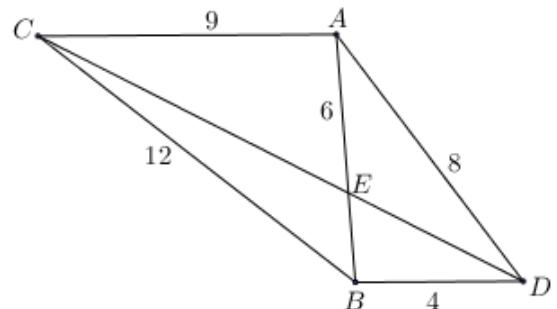
Bài toán 2. Cho hai tam giác đồng dạng. Tam giác thứ nhất có độ dài ba cạnh là 4cm, 8cm và 10cm. Tam giác thứ hai có chu vi là 33cm. Độ dài ba cạnh của tam giác thứ hai là bộ ba nào sau đây?

- a) 6cm, 12cm, 15cm
- b) 8cm, 16cm, 20cm
- c) 6cm, 9cm, 18cm
- d) 8cm, 10cm, 15cm

Lời giải

Chọn a). Vì $\frac{4}{6} = \frac{8}{12} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$.

Bài toán 3. Cho các điểm A, B, C, D, E như hình vẽ bên biết
rằng $AB = 6\text{ cm}, AC = 9\text{ cm}, AD = 8\text{ cm}, BC = 12\text{ cm}, BD = 4\text{ cm}$. Chứng minh rằng $\Delta ABC \sim \Delta BDA$ và $\Delta BDE \sim \Delta ACE$



Lời giải

Xét ΔABC và ΔBDA có:

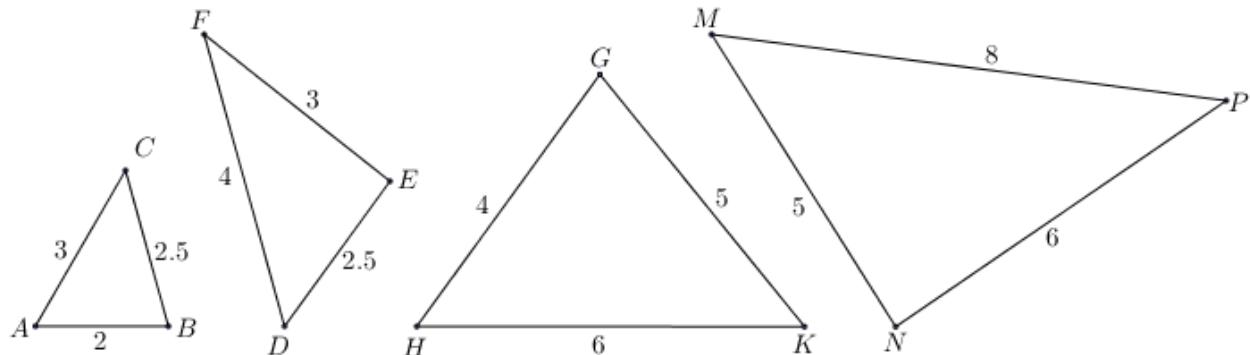
$$\frac{AB}{BD} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}; \frac{BC}{AD} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}; \frac{AC}{AB} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{AB}{BD} = \frac{BC}{AD} = \frac{AC}{AB} = \frac{3}{2}. \text{ Do đó. } \Delta ABC \sim \Delta BDA \text{ (c.c.c)}$$

$$\Rightarrow \widehat{CAB} = \widehat{ABD} \Rightarrow AC \parallel BD \text{ (cặp góc so le trong bằng nhau)}$$

$$\Rightarrow \Delta BDE \sim \Delta ACE.$$

Bài toán 4. Những cặp tam giác nào dưới đây (xem hình vẽ) là đồng dạng? (Các kích thước được tính theo đơn vị centimét). Viết đúng kí hiệu đồng dạng.



Lời giải

* Xét hai tam giác ABC và GHK, ta có:

$$\frac{AB}{HG} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}; \frac{AC}{HK} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}; \frac{BK}{GH} = \frac{2,5}{5} = \frac{1}{2}$$

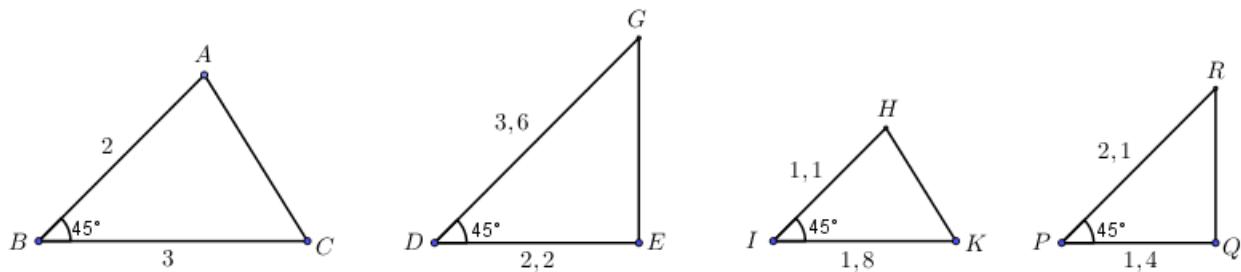
$$\Rightarrow \frac{AB}{HG} = \frac{AC}{HK} = \frac{BC}{GK}. \text{ Do đó } \Delta ABC \sim \Delta GHK \text{ (c.c.c)}$$

* Xét hai tam giác DEF và MNP , ta có:

$$\frac{DE}{MN} = \frac{2,5}{5} = \frac{1}{2}; \frac{EF}{NP} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}; \frac{DF}{MP} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{DE}{MN} = \frac{EF}{NP} = \frac{DF}{MP}. \text{ Do đó } \Delta DEF \sim \Delta MNP \text{ (c.c.c)}$$

Bài toán 5. Quan sát hình vẽ và chỉ ra hai cặp tam giác đồng dạng.



Lời giải

* Xét hai tam giác ABC và PRQ , ta có:

$$\frac{AB}{PQ} = \frac{2}{1,4} = \frac{10}{7}; \frac{AC}{PR} = \frac{3}{2,1} = \frac{10}{7}$$

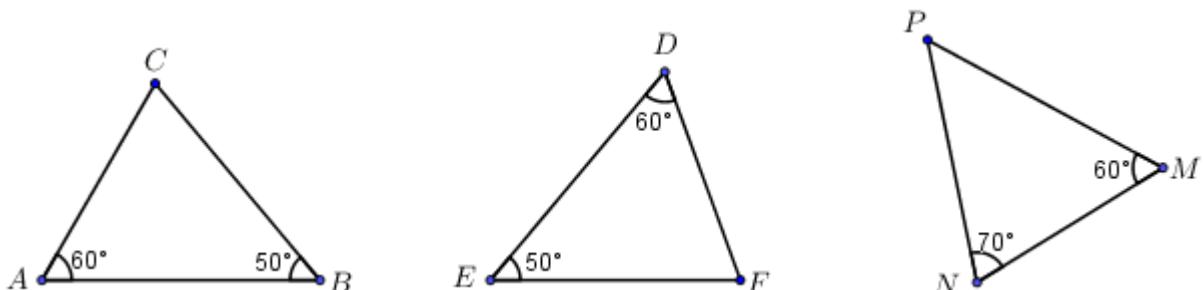
$$\Rightarrow \frac{AB}{PQ} = \frac{AC}{PR} \text{ và } \hat{A} = \hat{D} = 45^\circ. \text{ Do đó } \Delta ABC \sim \Delta PQR \text{ (c.g.c)}$$

* Xét hai tam giác DEG và HIK , ta có:

$$\frac{DE}{IH} = \frac{2,2}{1,1} = 2; \frac{GD}{IK} = \frac{3,6}{1,8} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{DE}{IH} = \frac{GD}{IK} \text{ và } \hat{D} = \hat{I} = 45^\circ. \text{ Do đó } \Delta DEG \sim \Delta IHK \text{ (c.g.c)}$$

Bài toán 6. Nhũng cặp tam giác nào trong hình vẽ là đồng dạng? Viết đúng kí hiệu đồng dạng.



Lời giải

* Xét ΔABC và ΔDEF , ta có: $\hat{A} = \hat{D} = 60^\circ$, $\hat{B} = \hat{E} = 50^\circ$.

Do đó $\Delta ABC \sim \Delta DEF$ (g.g)

Xét ΔABC theo định lí “Tổng các góc của tam giác”, ta có:

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ \Rightarrow \hat{C} = 180^\circ - (\hat{A} + \hat{B}) = 180^\circ - (60^\circ + 50^\circ) = 70^\circ.$$

* Xét ΔABC và ΔMNP , ta có: $\hat{A} = \hat{M} = 60^\circ$, $\hat{C} = \hat{N} = 70^\circ$.

Do đó $\Delta ABC \sim \Delta MNP$ (g.g)

Xét ΔABC theo định lí “Tổng các góc của tam giác”, ta có:

$$\hat{M} + \hat{N} + \hat{P} = 180^\circ \Rightarrow \hat{P} = 180^\circ - (\hat{M} + \hat{N}) = 180^\circ - (60^\circ + 70^\circ) = 50^\circ.$$

Do đó $\Delta MNP \sim \Delta DEF$ (g.g)

II. Chứng minh.

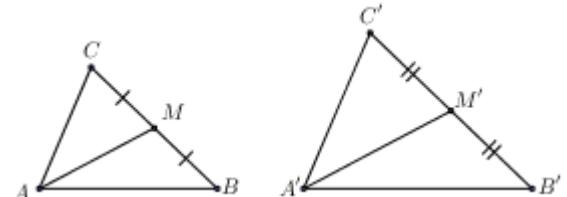
Bài toán 7. Cho $\Delta A'B'C' \sim \Delta ABC$ và M, M' lần lượt là trung điểm của các cạnh $BC, B'C'$. Chứng minh rằng $\Delta A'B'M' \sim \Delta ABM$.

Lời giải

Ta có $\Delta A'B'C' \sim \Delta ABC$ (gt)

$$\Rightarrow \frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{2B'M'}{2BM} \text{ (vì } M', M \text{ lần lượt là trung điểm của } B'C' \text{ và } BC\text{)}$$

hay $\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC}$ và $\hat{B}' = \hat{B}$. Do đó $\Delta A'B'M' \sim \Delta ABM$ (c.g.c)



Bài toán 8. Cho AM, BN, CP là các đường trung tuyến của tam giác ABC .

Cho $A'M', B'N', C'P'$ là các đường trung tuyến của tam giác $A'B'C'$. Biết rằng $\Delta A'B'C' \sim \Delta ABC$. Chứng minh rằng $\frac{A'M'}{AM} = \frac{B'N'}{BN} = \frac{C'P'}{CP}$.

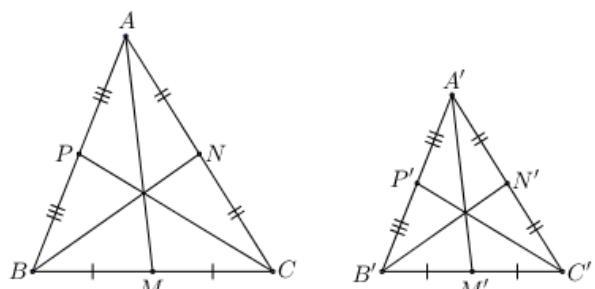
Lời giải

Ta có $\Delta A'B'C' \sim \Delta ABC$ (gt)

$$\Rightarrow \frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{2B'M'}{2BM} \text{ (vì } M \text{ là trung điểm của } BC\text{)}$$

$$\text{hay } \frac{A'B'}{AB} = \frac{B'M'}{BM} \quad (1)$$

Xét $\Delta A'B'M' \sim \Delta ABM$ (c.g.c) $\Rightarrow \frac{A'M'}{AM} = \frac{A'B'}{AB}$



Chứng minh tương tự, ta có: $\Delta B'C'N' \sim \Delta BNC$

$$\Rightarrow \frac{B'N'}{BN} = \frac{B'C'}{BC} \text{ và } \frac{C'P'}{CP} = \frac{A'C'}{AC}$$

$$\text{Mà } \Delta A'B'C' \sim \Delta ABC \Rightarrow \frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{A'C'}{AC}$$

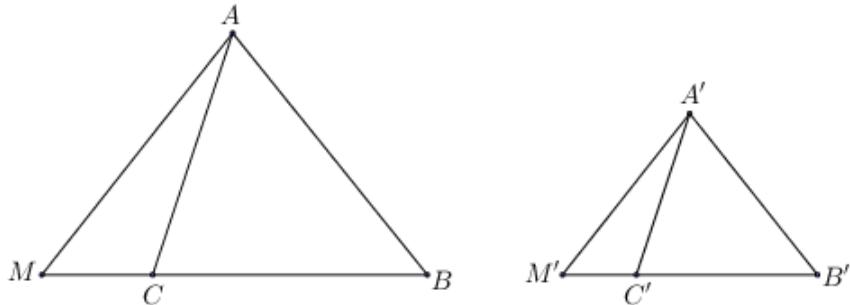
$$\Rightarrow \frac{A'M'}{AM} = \frac{B'N'}{BN} = \frac{C'P'}{CP} \text{ (đpcm).}$$

Bài toán 9. Cho $\Delta A'B'C' \sim \Delta ABC$. Trên tia đối của các tia $CB, C'B'$ lần lượt lấy các điểm M, M' sao cho

$$\frac{MC}{MB} = \frac{M'C'}{M'B'}$$

Chứng minh rằng $\Delta A'B'M' \sim \Delta ABM$.

Lời giải



$$\text{Ta có } \frac{MC}{MB} = \frac{M'C'}{M'B'} \Rightarrow \frac{MB - MC}{MC} = \frac{M'B' - M'C'}{M'C'}$$

$$\text{hay } \frac{BC}{MC} = \frac{BC}{M'C'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{MC}{M'C'} \quad (1)$$

$$\text{lại có } \Delta A'B'C' \sim \Delta ABC \text{ (gt)} \Rightarrow \frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2)} \Rightarrow \frac{MC}{M'C'} = \frac{AC}{A'C'} \quad (*), \widehat{ACB} = \widehat{ACM} = 180^\circ \text{ (kè bù)}$$

$$\text{Tương tự: } \widehat{A'C'B'} = \widehat{A'C'M'} = 180^\circ$$

$$\text{mà } \widehat{ACB} = \widehat{A'C'B'} \text{ (gt)} \Rightarrow \widehat{ACM} = \widehat{A'C'M'} \quad (**)$$

Từ (*) và (**) $\Rightarrow \Delta ABM \sim \Delta A'B'M'$ (c.g.c).

Bài toán 10. Cho $\Delta A'B'C' \sim \Delta ABC$ và $AM, A'M'$ lần lượt là các đường phân giác ABC và tam giác $A'B'C'$. Chứng minh rằng $\Delta A'B'M' \sim \Delta ABM$.

Lời giải

Ta có AM và $A'M'$ lần lượt là đường phân giác ABC

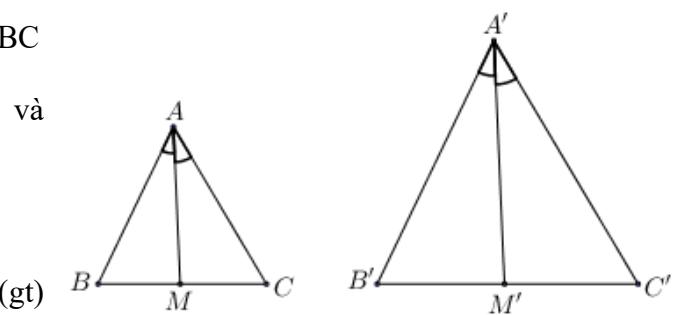
$$\text{và tam giác } A'B'C' \text{ nên } \widehat{BAM} = \widehat{CAM} = \frac{\widehat{BAC}}{2} \text{ và}$$

$$\widehat{B'A'M'} = \widehat{C'A'M'} = \frac{\widehat{B'A'C'}}{2}$$

Do $\Delta A'B'C' \sim \Delta ABC$

(gt)

$$\Rightarrow \widehat{B'A'C'} = \widehat{BAC} \Rightarrow \widehat{B'A'M'} = \widehat{BAM} \text{ và } \widehat{B'} = \widehat{B}$$



Vậy $\Delta A'B'M' \sim \Delta ABM$ (g.g)

Bài toán 11. Cho các điểm A, B, C, D như hình vẽ.

Biết rằng $\widehat{ABC} = \widehat{ADB}$. Hãy chứng minh rằng $\Delta ABC \sim \Delta ADB$ và $AB^2 = AD \cdot AC$.

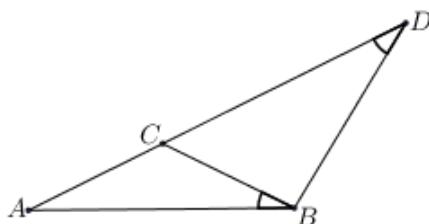
Lời giải

Xét tam giác ABC và tam giác ADB có:

\hat{A} chung, $\widehat{ABC} = \widehat{ADB}$ (gt)

Do đó $\Delta ABC \sim \Delta ADB$ (g.g)

$$\Rightarrow \frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AB} \Rightarrow AB^2 = AD \cdot AC \text{ (đpcm).}$$



Bài toán 12. Cho góc BAC và các điểm M, N lần lượt trên các đoạn thẳng AB, AC sao cho $\widehat{ABN} = \widehat{ACM}$

a) Chứng minh rằng $\Delta ABN \sim \Delta ACM$.

b) Gọi I là giao điểm của BN và CM. Chứng minh rằng $IB \cdot IN = IC \cdot IM$.

Lời giải

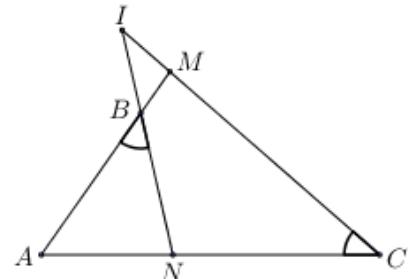
a) Xét tam giác ABN và tam giác ACM có:

\hat{A} chung, $\widehat{ABN} = \widehat{ACM}$ (gt)

Do đó $\Delta ABN \sim \Delta ACM$ (g.g).

b) Ta có: $\widehat{IBM} = \widehat{ABN}$ (đối đỉnh)

$$\widehat{ABN} = \widehat{ACM} \text{ (gt)} \Rightarrow \widehat{IBM} = \widehat{ACM}$$



Xét tam giác IBM và tam giác ICN có: \hat{I} chung, $\widehat{IBM} = \widehat{ACM}$ (cmt)

$$\text{Do đó } \Delta IBM \sim \Delta ICN \text{ (g.g)} \Rightarrow \frac{IB}{IC} = \frac{IM}{IN} \Rightarrow IB \cdot IN = IC \cdot IM \text{ (đpcm).}$$

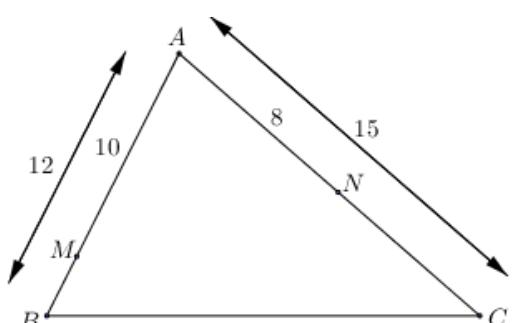
Bài toán 13. Cho tam giác ABC có $AB = 12\text{ cm}, AC = 15\text{ cm}$. Trên các tia AB, AC lần lượt lấy các điểm M, N sao cho $AM = 10\text{ cm}, AN = 8\text{ cm}$. Chứng minh rằng $\Delta ABC \sim \Delta ANM$.

Lời giải

$$\text{Ta có: } \frac{AB}{AN} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$$

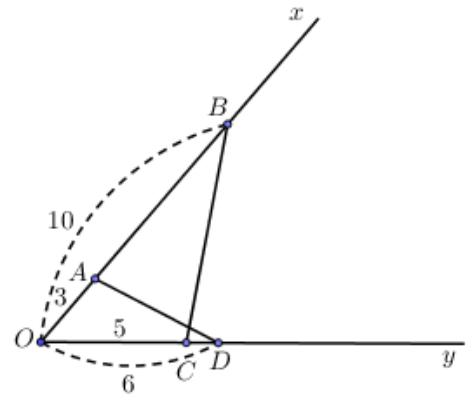
$$\frac{AC}{AM} = \frac{15}{10} = \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{AB}{AN} = \frac{AC}{AM} \left(= \frac{3}{2}\right) \quad (1)$$



Xét ΔABC và ΔANM có \hat{A} chung và (1) $\Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta ANM$ (c.g.c)

Bài toán 14. Cho góc nhọn xOy . Trên tia Ox lấy hai điểm A và B sao cho $OA = 3\text{cm}$, $OB = 10\text{cm}$, trên tia Oy lấy hai điểm C và D sao cho $OC = 5\text{cm}$, $OD = 6\text{cm}$. Chứng minh rằng $\Delta AOD \sim \Delta BOC$.



Lời giải

Xét ΔAOD và ΔBOC có: O chung,

$$\frac{OA}{OC} = \frac{3}{5}; \frac{OD}{OB} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5} \Rightarrow \frac{OA}{OC} = \frac{OD}{OB}$$

Do đó $\Delta AOD \sim \Delta BOC$ (c.g.c).

Bài toán 15. Cho các điểm A, B, C, D, E như hình vẽ.

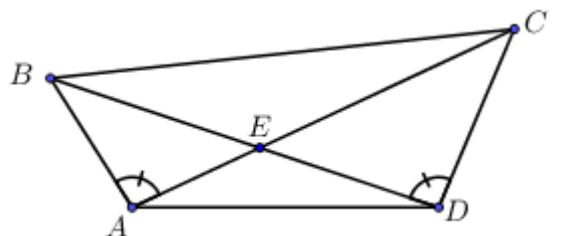
Biết rằng $\widehat{BAC} = \widehat{CDB}$. Chứng minh rằng $\Delta AED \sim \Delta BEC$.

Lời giải

Xét tam giác ABE và tam giác DCE có:

$$\widehat{BAC} = \widehat{CDB} \text{ (gt)}, \widehat{AEB} = \widehat{DEC} \text{ (đối đỉnh)}.$$

$$\text{Do đó } \Delta ABE \sim \Delta DCE \text{ (g.g)} \Rightarrow \frac{AE}{DE} = \frac{BE}{CE} \quad (1)$$



Xét tam giác AED và tam giác BEC có:

$$\widehat{AED} = \widehat{BEC} \text{ (đối đỉnh) và (1). Do đó } \Delta AED \sim \Delta BEC \text{ (c.g.c).}$$

Bài toán 16. Cho các điểm A, B, C, D, E, F như hình vẽ. Biết rằng $DE \parallel AB$, $EF \parallel BC$, $DE = 4\text{cm}$, $AB = 6\text{cm}$. Chứng minh rằng $\Delta AEF \sim \Delta ECD$ và tính tỉ số đồng dạng.

Lời giải

Ta có $DE \parallel AB$ (gt)

$$\Rightarrow \widehat{D}_1 = \widehat{B} \text{ (cặp góc đồng vị)}$$

$$\text{Tương tự } EF \parallel BC \text{ (gt)} \Rightarrow \widehat{B} = \widehat{F}_1$$

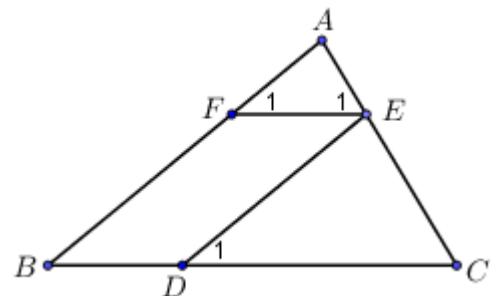
$$\Rightarrow \widehat{F}_1 = \widehat{D}_1 \quad (1) \text{ và } \widehat{E}_1 = \widehat{C} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \Delta AEF \sim \Delta ECD$ (g.g)

Dễ thấy BFED là hình bình hành (các cạnh đối song song)

$$\Rightarrow BF = DE = 4\text{cm} \Rightarrow AF = AB - BF = 6 - 4 = 2\text{cm}.$$

$$\text{Do đó tỉ số đồng dạng là } \frac{AF}{DE} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$



Bài toán 17. Cho hình thang ABCD ($AB \parallel CD$) có $AB = 1,5\text{cm}$, $AC = 3\text{cm}$

và $CD = 6\text{cm}$. Chứng minh rằng ΔABC và ΔACD đồng dạng.

Lời giải

Ta có $AB // CD$ (gt) $\Rightarrow \widehat{BAC} = \widehat{CAD}$ (so le trong)

$$\text{Và } \frac{AB}{AC} = \frac{AC}{CD} \left(\frac{1,5}{2} = \frac{3}{6} \left(= \frac{1}{2} \right) \right)$$

Vậy $\Delta ABC \sim \Delta ACD$ (c.g.c).

Nhận xét: Ta có thể giải được bài toán sau từ cách giải Bài toán 17.

Bài toán:

Cho hình thang ABCD ($AB // CD$) có $AC^2 = AB \cdot CD$. Chứng minh rằng ΔABC và ΔACD đồng dạng.

Hướng dẫn:

Từ $AC^2 = AB \cdot CD \Rightarrow \frac{AC}{CD} = \frac{AB}{AC}$ có thêm hai góc so le trong $\widehat{BAD} = \widehat{ACD}$.

Do đó $\Delta ABC \sim \Delta ACD$ (c.g.c).

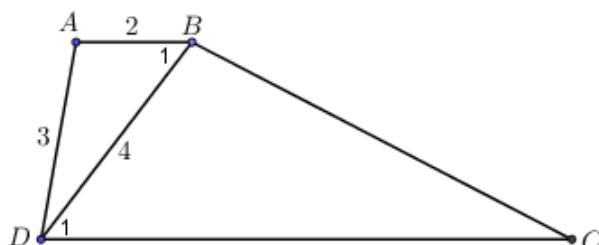
Bài toán 18. Cho hình thang ABCD ($AB // CD$) có $\widehat{DAB} = \widehat{DBC}$ (hình vẽ).

a) Chứng minh rằng $\Delta ADB \sim \Delta BDC$.

b) Giả sử $AB = 2\text{ cm}$, $AD = 3\text{ cm}$, $BD = 4\text{ cm}$. Tính độ dài các cạnh BC và DC.

Lời giải

a) Ta có $AB // CD$ (gt) $\Rightarrow \widehat{B_1} = \widehat{D_1}$ (cặp góc so le trong)



Xét ΔABD và ΔBDC có:

$$\widehat{DAB} = \widehat{DBC} \text{ (gt)}, \widehat{B_1} = \widehat{D_1} \text{ (cmt)}$$

Do đó $\Delta ABD \sim \Delta BDC$ (g.g.).

$$\text{b) Ta có } \frac{BC}{AD} = \frac{BD}{AB} \text{ hay } \frac{BC}{3} = \frac{4}{2} \Rightarrow BC = \frac{3 \cdot 4}{2} = 6(\text{cm})$$

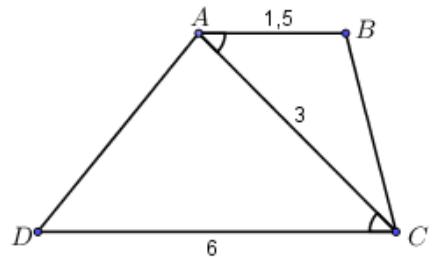
$$\text{và } \frac{DC}{BD} = \frac{BD}{AB} \text{ hay } \frac{DC}{4} = \frac{4}{2} \Rightarrow DC = \frac{4 \cdot 4}{2} = 8(\text{cm})$$

Bài toán 19. Cho tứ giác ABCD có $AB = 5\text{ cm}$, $BC = 14\text{ cm}$, $CD = 20\text{ cm}$ và

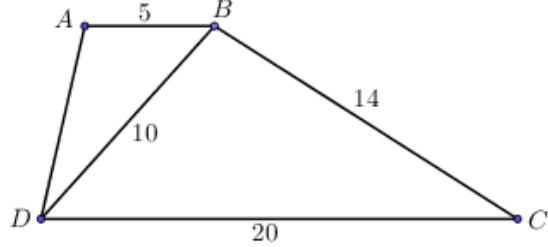
$AD = 7\text{ cm}$, đường chéo $BD = 10\text{ cm}$. Chứng minh rằng:

a) ΔABD và ΔBCD đồng dạng.

b) ABCD là hình thang.



Lời giải



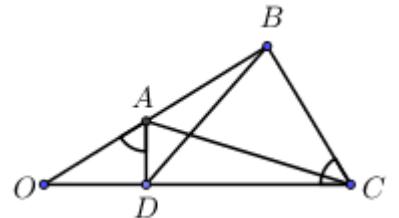
- a) Ta có $\frac{AB}{DB} = \frac{BD}{DC} = \frac{AD}{BC}$ (hay $\frac{5}{10} = \frac{10}{20} = \frac{7}{14} = 2$) $\Rightarrow \Delta ABD \sim \Delta BCD$ (c.c.c)
- b) $\Delta ABD \sim \Delta BCD \Rightarrow \widehat{ABD} = \widehat{BCD} \Rightarrow AB \parallel CD$ (cặp góc so le trong bằng nhau) hay ABCD là hình thang.

Bài toán 20. Cho hình vẽ bên với $\widehat{OAD} = \widehat{OCB}$. Chứng minh:

a) $\Delta AOD \sim \Delta OCB$.

b) $\frac{OA}{OD} = \frac{OC}{OB}$.

c) $\Delta AOC \sim \Delta ODB$.



Lời giải

a) Xét ΔAOD và ΔOCB có \hat{O} chung, $\widehat{OAD} = \widehat{OCB}$ (gt)

Do đó $\Delta AOD \sim \Delta OCB$ (g.g).

b) Từ $\Delta AOD \sim \Delta OCB$ (cmt) $\Rightarrow \frac{OA}{OC} = \frac{OD}{OB} \Rightarrow \frac{OA}{OD} = \frac{OC}{OB}$ (1)

c) Xét ΔOAC và ΔODB có \hat{O} chung và (1) $\Rightarrow \Delta OAC \sim \Delta ODB$ (g.c.g).

Bài toán 21. Cho tam giác ABC và G là trọng tâm, gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của AG, CG, BG. Chứng minh rằng ΔABC và ΔMNP đồng dạng. Hãy tìm tỉ số đồng dạng.

Lời giải

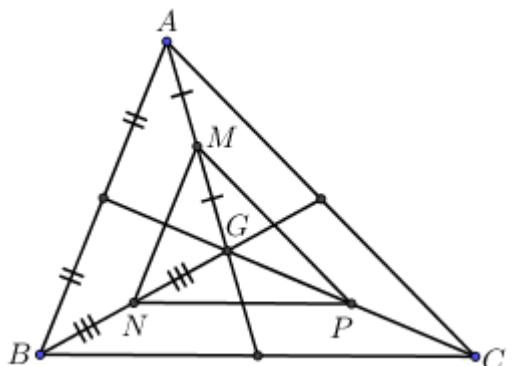
Ta có M, N lần lượt là trung điểm của AG, CG (gt)

nên MN là đường trung bình của $\Delta ABG \Rightarrow \frac{MN}{AB} = \frac{1}{2}$.

Tương tự, ta có: $\frac{NP}{BC} = \frac{1}{2}$ và $\frac{MP}{AC} = \frac{1}{2}$

$$\Rightarrow \frac{MN}{AB} = \frac{NP}{BC} = \frac{MP}{AC} = \frac{1}{2} \Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta MNP \text{ (c.c.c)}$$

Và tỉ số đồng dạng $k = \frac{1}{2}$.



Nhận xét: Cũng từ tính chất trọng tâm của tam giác ta hãy đi đến bài toán khó hơn sau đây.

Bài toán 22. Cho tam giác ABC và I là điểm nằm trong tam giác. Gọi G_1, G_2, G_3 lần lượt là trọng tâm của tam giác IBC, IAC, IBA và D, E, F theo thứ tự là trung điểm của ba cạnh AB, BC và CA . Chứng minh rằng $\Delta G_1G_2G_3 \sim \Delta ABC$.

Lời giải

Xét ΔBIC có G_1 là trọng tâm, ta có:

$$\frac{IG_1}{IE} = \frac{2}{3}.$$

Tương tự với ΔCIA : $\frac{IG_2}{IF} = \frac{2}{3}$

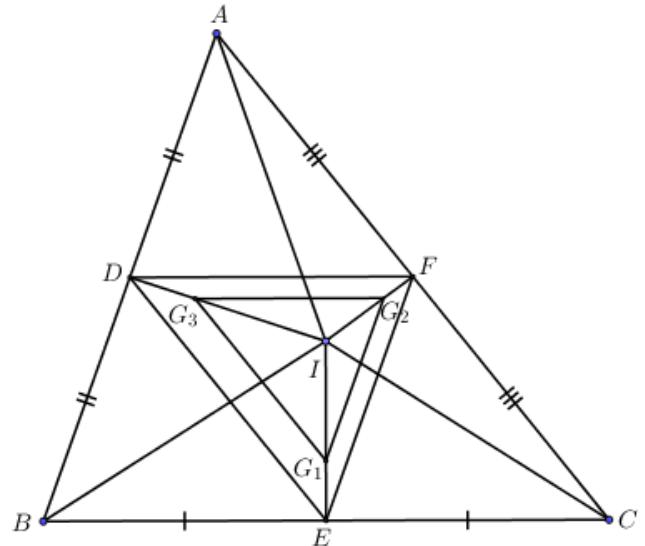
$$\frac{IG_1}{IE} = \frac{IG_2}{IF} = \frac{2}{3}.$$

Theo định lí Thalès $\Rightarrow G_1G_2 \parallel EF$.

Xét ΔIEF , theo bài toán 19. Bài 15, phản định lí Thalès

$$\frac{G_1G_2}{EF} = \frac{IG_2}{IF} = \frac{2}{3}$$

Chứng minh tương tự, ta có: $\frac{G_2G_3}{FD} = \frac{2}{3}$ và $\frac{G_1G_3}{DE} = \frac{2}{3}$



Do đó $\frac{G_1G_2}{EF} = \frac{G_2G_3}{FD} = \frac{G_3G_1}{DE} = \frac{2}{3} \Rightarrow \Delta G_1G_2G_3 \sim \Delta EFD$ (c.c.c) (1)

Mặt khác, ta lại có EF, FD, DE là các đường trung bình của ΔABC

Theo tính chất đường trung bình, ta có:

$$\frac{EF}{AB} = \frac{FD}{BC} = \frac{DE}{AC} = \frac{1}{2} \Rightarrow \Delta EFD \sim \Delta ABC$$
 (c.c.c) (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \Delta G_1G_2G_3 \sim \Delta ABC$.

Nhận xét: Để dàng ta tính được tỉ số đồng dạng của hai tam giác đồng dạng $G_1G_2G_3$ và ABC .

Ta có: $\Delta G_1G_2G_3 \sim \Delta EFD$ theo tỉ số $\frac{G_1G_2}{EF} = \frac{2}{3}$

và $\Delta EFD \sim \Delta ABC$ theo tỉ số $\frac{EF}{AB} = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \Delta G_1G_2G_3 \sim \Delta ABC$ theo tỉ số $\frac{G_1G_2}{AB} = \frac{1}{6}$.

Trong trường hợp thay G là trọng tâm ta cho H là trực tâm của ΔABC và các điểm M, N, P là trung điểm của các đoạn thẳng nối trực tâm tới ba đỉnh của tam giác, ta có bài toán tương tự.

Bài toán 23. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn trực tâm H . Gọi M, N, P theo thứ tự là trung điểm của các đoạn thẳng HA, HB và HC .

- a) Chứng minh rằng ΔMNP và ΔABC đồng dạng, tính tỉ số đồng dạng.
 b) Biết chu vi của ΔABC là 50cm . Tính chu vi của tam giác ΔMNP .

Lời giải

a) Ta có MN, NP, PM lần lượt là ba đường trung bình của các tam giác AHB, BHC và CHA nên:

$$\frac{MN}{AB} = \frac{NP}{BC} = \frac{PM}{AC} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \Delta MNP \sim \Delta ABC \text{ (c.c.c)}$$

$$\text{và tỉ số đồng dạng } k = \frac{1}{2}$$

b) Gọi P_{MNP} và P_{ABC} lần lượt là các chu vi của các tam giác MNP và ABC ta có:

$$\frac{P_{MNP}}{P_{ABC}} = \frac{1}{2} \Rightarrow P_{MNP} = \frac{P_{ABC}}{2} = 25(\text{cm}).$$

Bài toán 24. Cho hình bình hành $ABCD$ kẻ AH, AK lần lượt vuông góc với CD và BC . Chứng minh rằng ΔABC và ΔAHK đồng dạng.

Lời giải

Không mất tính tổng quát ta có thể giả thiết góc A tù.

Gọi S_{ABCD} là diện tích của hình bình hành $ABCD$ ta có:

$$S_{ABCD} = DC \cdot AH = BC \cdot AK \Rightarrow \frac{AH}{BC} = \frac{AK}{DC}$$

$$\text{mà } DC = AB \Rightarrow \frac{AH}{BC} = \frac{AK}{AB}$$

Mặt khác ta có $AH \perp DC$ mà $DC \parallel AB$

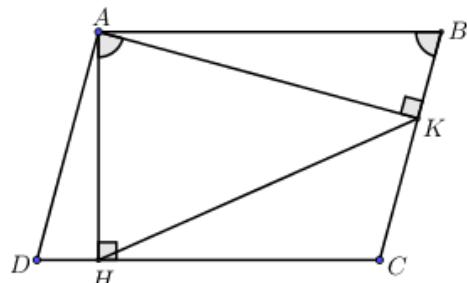
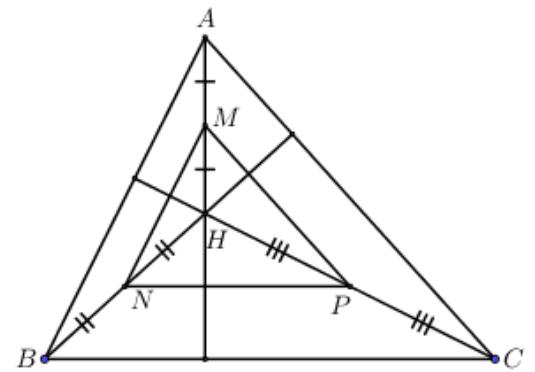
$$\Rightarrow AH \perp AB \text{ hay } \widehat{HAB} = 90^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{B} = \widehat{HAK} \text{ (cùng phụ với } \widehat{A_1})$$

Từ (1), (2) $\Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta KAH$ (c.g.c)

Bài toán 25. Cho tam giác ABC cân tại A . Trên đường phân giác ngoài của góc A lấy hai điểm M và N về hai phía của A (M thuộc nửa mặt phẳng bờ AC chứa B, N thuộc nửa mặt phẳng còn lại) sao cho $AM \cdot AN = AB^2$. Chứng minh rằng: $\Delta ANB \sim \Delta ACM$.

Lời giải



Kẻ đường cao AH của tam giác cân ABC ta có AH đồng thời là phân giác của $\widehat{BAC} \Rightarrow AH \perp AM$.

mà $AH \perp BC \Rightarrow MN \parallel BC$

Vì $\hat{A}_2 = \hat{A}_3$ (cmt) $\Rightarrow \hat{A}_1 = \hat{A}_4$

Do đó $\widehat{MAC} = \widehat{NAB}$ (1)

Mặt khác theo giả thiết ta có:

$$AM \cdot AN = AB^2 \Rightarrow \frac{AM}{AB} = \frac{AB}{AN} \text{ mà } AB = AC \text{ (gt)} \Rightarrow \frac{AM}{AC} = \frac{AB}{AM}$$

Từ (1) và (2), ta có: $\Delta ANB \sim \Delta ACM$ (c.g.c).

Bài toán 26. Chứng minh rằng: Nếu $\Delta A'B'C'$ đồng dạng với ΔABC theo tỉ số k, thì tỉ số của hai đường trung tuyến tương ứng của hai tam giác đó cũng bằng k.

Lời giải

Ta có $\Delta A'B'C' \sim \Delta ABC$ theo tỉ số k (gt)

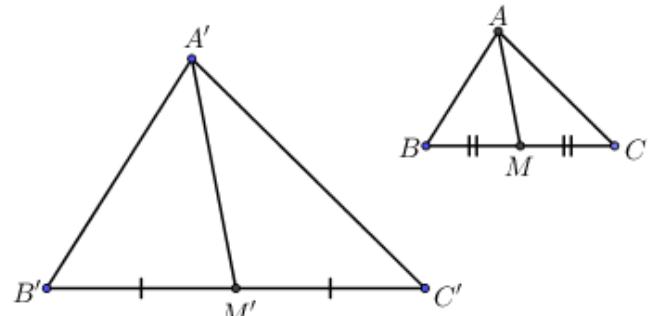
$$\Rightarrow \frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{AC} = \frac{2B'M'}{2BM} = \frac{B'M'}{BM} = k$$

Xét $\Delta ABM'$ và ΔABM có:

$\hat{B}' = \hat{B}$ (gt) và (1)

$\Rightarrow \Delta A'B'M' \sim \Delta ABM$ (c.g.c)

$$\Rightarrow \frac{A'M'}{AM} = \frac{A'B'}{AB} = k$$



Bài toán 27. Cho tam giác ABC, gọi D,E lần lượt là trung điểm của BC và AC các đường trung trực của BC và AC cắt nhau tại O. Gọi G là trọng tâm và H là trực tâm của tam giác ABC. Chứng minh rằng:

a) ΔABH và ΔDEO đồng dạng, ΔAHG và ΔDOG đồng dạng.

b) Ba điểm H,G,O thẳng hàng (đường thẳng O le).

Lời giải

* Ta có DE là đường trung bình của $\Delta ABC \Rightarrow DE \parallel BC$

$$\Rightarrow \widehat{EDC} = \widehat{ABC}$$
 (1) (đồng vị)

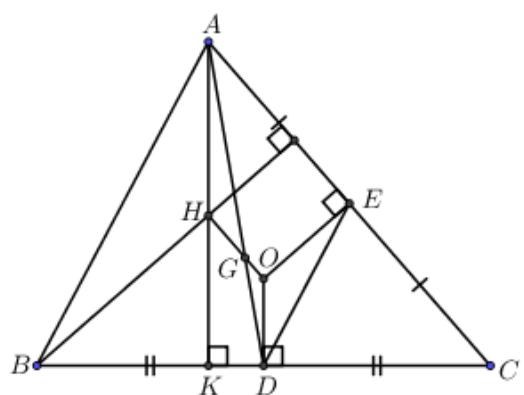
Gọi K là giao điểm của AH và BC ta có:

$$\Delta AKB \text{ vuông tại } K \Rightarrow \widehat{BAK} + \widehat{ABC} = 90^\circ$$
 (2)

Mặt khác OD là đường trung trực của BC

$$\Rightarrow OD \perp BC \text{ hay } \widehat{ODE} + \widehat{EDC} = \widehat{ODC} = 90^\circ$$
 (3)

Từ (1), (2), (3) $\Rightarrow \widehat{BAK} = \widehat{ODE}$.



Chứng minh tương tự ta cũng có $\widehat{ABH} = \widehat{ODE}$.

Do đó $\Delta AHB \sim \Delta DOE$ (g-g).

* Ta có $AH \parallel OD$ ($\perp BC$)

$$\Rightarrow \widehat{HAG} = \widehat{ODG} \text{ (so le trong)} \quad (4)$$

Lại có $\Delta AHB \sim \Delta DOE$ (cmt)

$$\Rightarrow \frac{AH}{OD} = \frac{AB}{DE} = 2 \quad (5) \text{ (tính chất đường trung bình của tam giác)}$$

Vì G là trọng tâm ΔABC ta có $\frac{AG}{DG} = 2$

$$\text{Từ (4), (5), (6) } \Rightarrow \Delta AHG \sim \Delta DOG \text{ (c.g.c)} \Rightarrow \widehat{AGH} = \widehat{DGO}$$

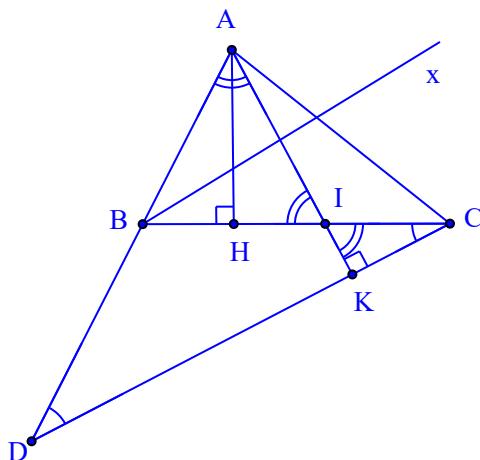
Nhận thấy A, G, D cùng nằm trên một đường thẳng mà GH, GO ở hai phía của AD nên H, G, O cũng phải nằm trên một đường thẳng hay H, G, O thẳng hàng.

Bài toán 28. Cho tam giác ABC có $\widehat{B} = 2\widehat{C}$. Trên tia đối của tia BA lấy điểm D sao cho $BD = BC$, kẻ đường cao AH của ΔABC , từ A hạ AK $\perp CD$. Gọi I là giao điểm của AK và BC. Chứng minh rằng:

a) ΔABI cân.

b) $AC^2 = AB(AB + BC)$.

Lời giải



a) Để thấy ΔCBD cân $\Rightarrow \widehat{C_1} = \widehat{D}$

Trong tam giác vuông AKD có $\widehat{D} + \widehat{BAI} = 90^\circ$

Trong tam giác vuông IKC có $\widehat{C_1} + \widehat{I_1} = 90^\circ$, $\widehat{BAI} = \widehat{I_1}$ mà $\widehat{I_1} = \widehat{I_2}$ (đối đỉnh) $\Rightarrow \widehat{BAI} = \widehat{I_2}$

Vậy ΔABI cân tại B.

b) Từ giả thiết $\widehat{B} = 2\widehat{C}$

Lại có $\widehat{B} = 2\widehat{C_1}$ (góc ngoài của ΔCBD cân) $\Rightarrow \widehat{C} = \widehat{C_1} \Rightarrow \widehat{C} + \widehat{C_1} = \widehat{B}$ hay $\widehat{ACD} = \widehat{B}$

Do đó $\triangle ABC \sim \triangle ACD$ (\hat{A} chung; $\hat{B} = \widehat{ACD}$) $\Rightarrow \frac{AC}{AD} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow AC^2 = AB \cdot AD$

Mà $AD = AB + BD$ và $BD = BC$ (giả thiết) $\Rightarrow AC^2 = AB(AB + BC)$

Cách giải khác của câu a:

Kẻ đường phân giác của góc B

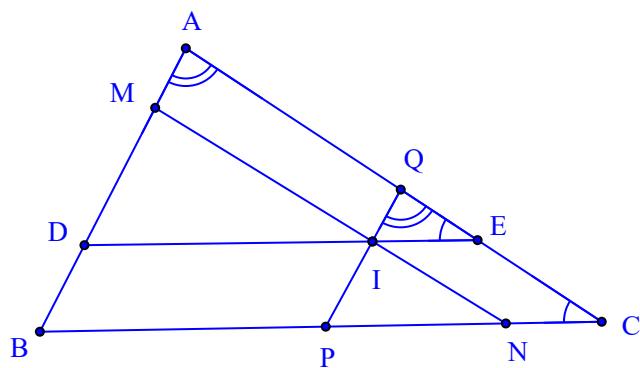
Dễ thấy $Bx \parallel CD \Rightarrow Bx \perp AK$.

$\triangle ABI$ có Bx vừa là phân giác lại là đường cao $\Rightarrow \triangle ABI$ cân tại B .

Bài toán 29. Qua điểm I nằm bên trong tam giác ABC , dựng ba đường thẳng song song với các cạnh của tam giác: $DE \parallel BC; MN \parallel CA; PQ \parallel AB$ (D, M thuộc AB, N, P thuộc $BC; E, Q, N$ thuộc AC).

Chứng minh rằng: $\frac{BD}{BA} + \frac{AQ}{AC} + \frac{CN}{CB} = 1$.

Lời giải



$DE \parallel BC$ (gt)

Theo định lí Talét: $\frac{BD}{BA} = \frac{CE}{AC}$

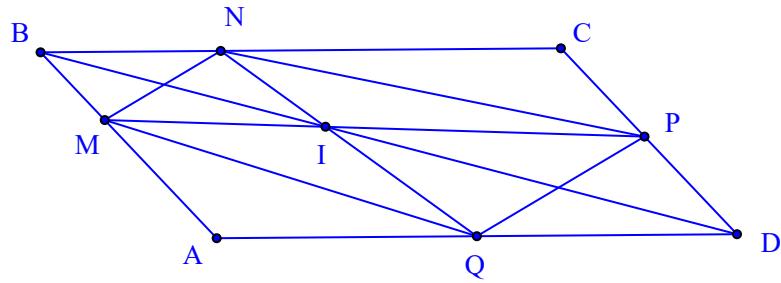
Lại có $\triangle QIE \sim \triangle ABC$ (vì $\hat{Q} = \hat{A}, \hat{E} = \hat{C}$) $\Rightarrow \frac{IE}{BC} = \frac{EQ}{AC}$

Mặt khác dễ thấy tứ giác $CNIE$ là hình bình hành nên $IE = CN$

Do đó: $\frac{CN}{BC} = \frac{EQ}{AC} \Rightarrow \frac{BD}{BA} + \frac{AQ}{AC} + \frac{CN}{CB} = \frac{CE}{AC} + \frac{AQ}{AC} + \frac{EQ}{AC} = 1$.

Bài toán 30. Cho hình thang $MNPQ$ nội tiếp hình bình hành $ABCD$ sao cho các đỉnh M, N, P, Q của hình thang lần lượt thuộc các cạnh AB, BC, CD và AD của hình bình hành. Gọi I là giao điểm hai đường chéo MP và NQ của hình thang. Chứng minh ba điểm B, I, D thẳng hàng.

Lời giải



$$\text{Đã thấy } \Delta MNI \sim \Delta PQI \text{ (g.g)} \Rightarrow \frac{IM}{IP} = \frac{MN}{PQ}$$

$$\text{Tương tự: } \Delta BMN \sim \Delta DPQ \Rightarrow \frac{BM}{DP} = \frac{MN}{PQ}$$

$$\text{Từ (1), (2)} \Rightarrow \frac{IM}{IP} = \frac{BM}{DP}$$

$$\text{Lại có: } \widehat{BIM} = \widehat{DIP} \text{ (so le trong)} \Rightarrow \Delta BIM \sim \Delta DIP \text{ (c.g.c)} \Rightarrow \widehat{BIM} = \widehat{DIP}$$

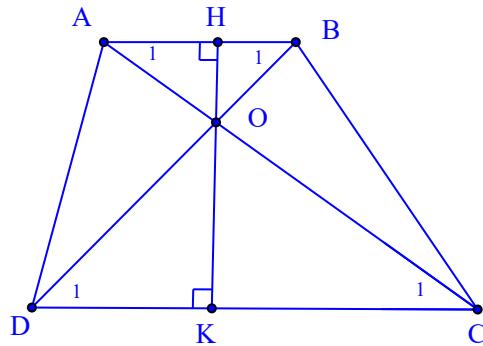
Mà M, I, P thẳng hàng $\Rightarrow B, I, D$ thẳng hàng.

Bài toán 31. Cho hình thang $ABCD$ ($AB//CD$) và O là giao điểm của hai đường chéo AC và BD .

a) Chứng minh $OA \cdot OD = OB \cdot OC$.

b) Đường thẳng qua O vuông góc với AB cắt AB và CD lần lượt tại H và K . Chứng minh $OH \cdot CD = OK \cdot AB$.

Lời giải



a) Ta có $AB//CD \Rightarrow \widehat{A}_1 = \widehat{C}_1$ và $\widehat{B}_1 = \widehat{D}_1$

$$\text{Do đó } \Delta AOB \sim \Delta COD \text{ (g.g)} \Rightarrow \frac{OA}{OC} = \frac{OB}{OD} \Rightarrow OA \cdot OD = OB \cdot OC$$

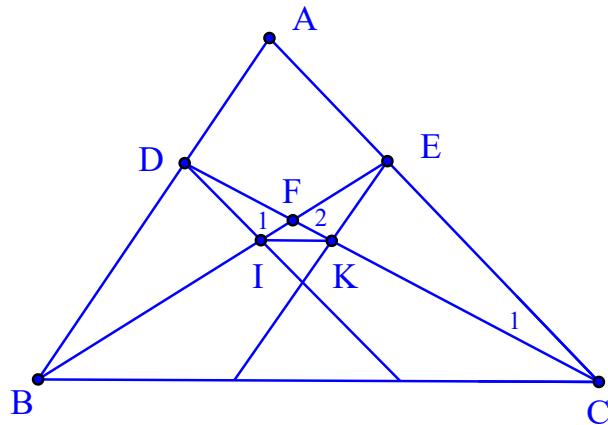
$$\text{b) Dễ thấy } \Delta AHO \sim \Delta CKO \text{ (g.g)} \Rightarrow \frac{OH}{OK} = \frac{AH}{CK}$$

$$\text{Tương tự } \Delta BHO \sim \Delta DKO \Rightarrow \frac{OH}{OK} = \frac{BH}{DK}$$

$$\text{Từ (1) và (2)} \Rightarrow \frac{OH}{OK} = \frac{AH}{CK} = \frac{BH}{DK} = \frac{AH + BH}{CK + DK} = \frac{AB}{CD} \Rightarrow OH \cdot CD = OK \cdot AB.$$

Bài toán 32. Cho tam giác ABC , trên cạnh AB và AC lấy các điểm tương ứng D và E . Đường thẳng song song với AC qua D cắt BE tại I , đường thẳng song song với AB qua E cắt CD tại K . Chứng minh rằng $IK//BC$.

Lời giải



Gọi F là giao điểm của BE và CD

Ta có $DI//AC(gt) \Rightarrow \widehat{IDC} = \widehat{C}_1$ (so le trong) và $\widehat{F}_1 = \widehat{F}_2$ (đối đỉnh)

Do đó $\Delta DFI \sim \Delta CFE$ (g.g)

$$\Rightarrow \frac{FI}{FD} = \frac{FE}{FC} \Rightarrow FC \cdot FI = FD \cdot FE$$

Tương tự ta có $\Delta DFB \sim \Delta KFE$

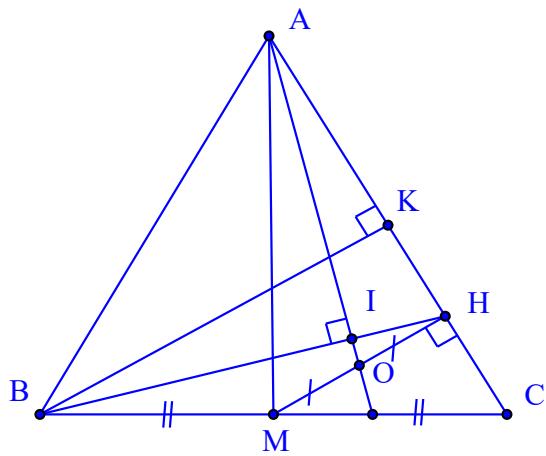
$$\Rightarrow \frac{FB}{FD} = \frac{FE}{FK} \Rightarrow FB \cdot FK = FD \cdot FE$$

$$\text{Từ (1), (2)} \Rightarrow FC \cdot FI = FB \cdot FK \Rightarrow \frac{FI}{FB} = \frac{FK}{FC}$$

Do đó theo Bài toán 19, bài 15 phần định lí Thalès, ta có $KI//BC$.

Bài toán 33. Cho tam giác cân ABC . Từ trung điểm M của đáy BC hạ đường vuông góc MH xuống AC . Gọi O là trung điểm của đoạn thẳng HM . Chứng minh rằng các đường thẳng BH và AO vuông góc với nhau.

Lời giải



Hạ $BK \perp AC$.

Ta có: $BK \parallel MH$ ($\perp AC$)

Lại có M là trung điểm của $BC \Rightarrow MH$ là đường trung bình của ΔBCK . Do đó $HK = HC$

Ta lại có: $\widehat{MAH} = \widehat{CBK} = 90^\circ - \widehat{C}$

$$\widehat{AHM} = \widehat{BKC} = 90^\circ \Rightarrow \Delta AHM \sim \Delta BKC \text{ (g.g)}$$

OA và BH là trung tuyén

$$\Delta AOH \sim \Delta BHK \Rightarrow \widehat{HAO} = \widehat{KBH}$$

Ta lại có: $\widehat{KBH} = \widehat{BHM}$ (so le trong)

$$\text{Do đó } \widehat{HAO} = \widehat{BHM}$$

$$\text{Rõ ràng: } \widehat{AHB} + \widehat{BHM} = 90^\circ$$

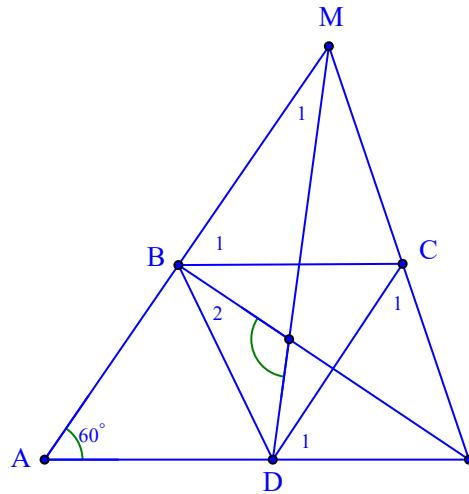
Vậy $\widehat{HAO} + \widehat{AHB} = 90^\circ$ hay $\widehat{AHI} = 90^\circ$ (I là giao điểm của BH và AO) $AO \perp BH$.

Bài toán 34. Cho hình thoi $ABCD$ có $\widehat{A} = 60^\circ$. Một đường thẳng bất kì qua C cắt tia đối của tia BA, DA lần lượt tại M và N .

a) Chứng minh $BM \cdot DN = BC \cdot DC$.

b) Gọi I là giao điểm của BN và DM . Tính \widehat{BID} .

Lời giải



a) Ta có $AB//CD$ (gt) $\Rightarrow \widehat{BMC} = \widehat{C}_1$ (đồng vị)

Tương tự $\widehat{D}_1 = \widehat{A} = \widehat{B}$

$$\text{Do đó } \Delta MBC \sim \Delta CDN \text{ (g.g)} \Rightarrow \frac{BM}{DC} = \frac{BC}{DN} \Rightarrow BM \cdot DN = BC \cdot DC \quad (1)$$

b) Hình thoi $ABCD$ có $\widehat{A} = 60^\circ \Rightarrow \Delta BCD$ đều $\Rightarrow BC = DC = BD$.

$$\text{Từ (1)} \Rightarrow BM \cdot DN = BD^2 \quad (2)$$

Xét ΔMBD và ΔBDN có: $\widehat{MBD} = \widehat{BDN} = 120^\circ$ và (2) $\Rightarrow \Delta MBD \sim \Delta BDN$ (c.g.c)

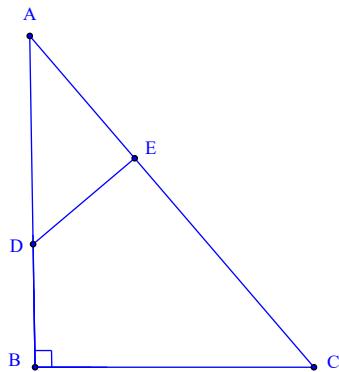
$$\Rightarrow \widehat{M}_1 = \widehat{B}_2$$

Dễ thấy $\Delta MBD \sim \Delta BID$ cs (g.c) $\Rightarrow \widehat{BID} = \widehat{MBD} = 120^\circ$.

III. Sử dụng tam giác đồng dạng để tính độ dài các đoạn thẳng các góc

Bài toán 35. Cho tam giác ABC có $AB = 8\text{cm}$, $AC = 10\text{cm}$ và $BC = 6\text{cm}$. Trên các cạnh AB , AC lần lượt lấy D và E sao cho $AD = 5\text{cm}$, $AE = 4\text{cm}$. Tính độ dài đoạn thẳng DE .

Lời giải



$$\text{Ta có: } \frac{AD}{AC} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$

Tương tự: $\frac{AE}{AB} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

$$\Rightarrow \frac{AD}{AC} = \frac{AE}{AB} \left(= \frac{1}{2}\right) \quad (1)$$

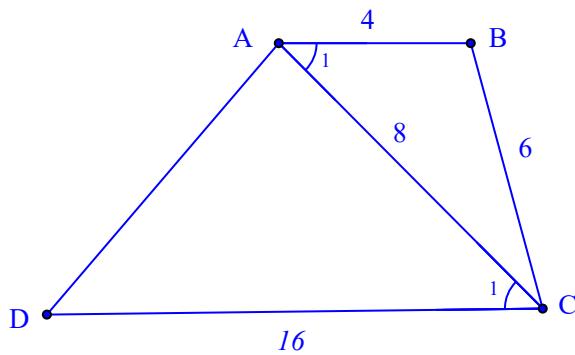
Xét ΔADE và ΔABC có \hat{A} chung và (1)

$\Rightarrow \Delta ADE \sim \Delta ACB$ (c.g.c)

$$\Rightarrow \frac{DE}{BC} = \frac{1}{2} \Rightarrow DE = 6 \cdot \frac{1}{2} = 3 \text{ cm}$$

Bài toán 36. Cho hình thang $ABCD$ ($AB//CD$) có $AB = 4 \text{ cm}$, $BC = 6 \text{ cm}$, $DC = 16 \text{ cm}$, đường chéo $AC = 8 \text{ cm}$. Tính chu vi hình thang.

Lời giải



Ta có $\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{DC} \quad \left(\frac{4}{8} = \frac{8}{16} \left(= \frac{1}{2}\right)\right) \quad (1)$

Xét ΔABC và ΔADC có: $\hat{A}_1 = \hat{C}_1$ (so le trong) và (1)

$$\text{Do đó } \Delta ABC \sim \Delta CAD \Rightarrow \frac{AD}{DC} = \frac{AC}{BC}$$

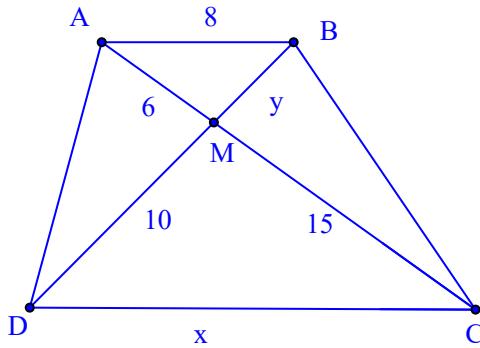
$$\Rightarrow AD = \frac{BC \cdot DC}{AC} = \frac{6 \cdot 16}{8} = 12 \text{ (cm)}$$

Gọi P_{ABCD} là chu vi của hình thang:

$$P_{ABCD} = AB + BC + CD + DA = 4 + 6 + 16 + 12 = 38 \text{ (cm)}$$

Bài toán 37. Cho $ABCD$ là hình thang ($AB//CD$) (hình vẽ bên). Chứng minh rằng $\Delta AMB \sim \Delta CMD$. Tìm x, y .

Lời giải



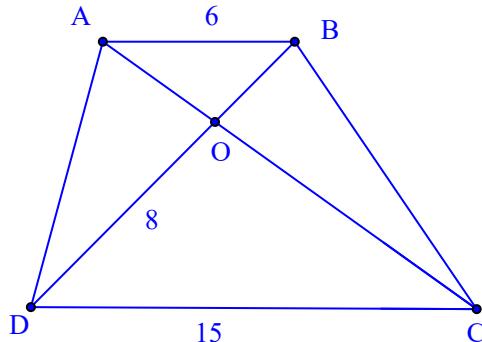
Ta có $AB//CD(gt) \Rightarrow \widehat{ABM} = \widehat{MCD}$ và $\widehat{ABM} = \widehat{MDC}$ (cặp góc so le trong).

$$\text{Do đó } \Delta AMB \sim \Delta CMD \text{ (g.g)} \Rightarrow \frac{MB}{MD} = \frac{MA}{MC} \text{ hay } \frac{y}{10} = \frac{6}{15} \Rightarrow y = \frac{6 \cdot 10}{15} = 4$$

$$\text{Tương tự } \frac{DC}{AB} = \frac{MC}{MA} \text{ hay } \frac{x}{8} = \frac{15}{6} \Rightarrow x = \frac{15 \cdot 8}{6} = 20.$$

Bài toán 38. Cho hình thang $ABCD(AB//CD)$ có $AB = 6m, CD = 15m, OD = 8m$ (hình vẽ bên). Tính độ dài đoạn thẳng OB .

Lời giải

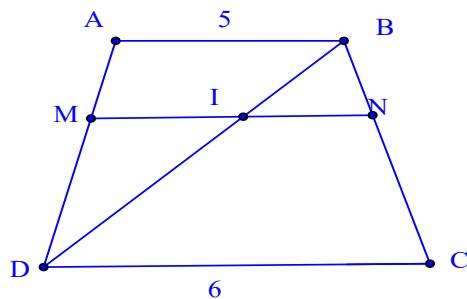


Ta có $AB//CD(gt) \Rightarrow \widehat{OAB} = \widehat{OCD}$ và $\widehat{ABO} = \widehat{ODC}$ (cặp góc so le trong).

$$\text{Do đó } \Delta AOB \sim \Delta COD \text{ (g.g)} \Rightarrow \frac{OB}{OD} = \frac{AB}{CD} \text{ hay } \frac{OB}{8} = \frac{6}{15} \Rightarrow OB = \frac{6 \cdot 8}{15} = 3,2m.$$

Bài toán 39. Cho hình thang $ABCD (AB//CD)$ và các điểm M, N lần lượt trên cạnh AD và BC sao cho $2AM = MD, 2BN = NC$. Biết $AB = 5cm, CD = 6cm$. Hãy tính độ dài đoạn thẳng MN .

Lời giải



Trên đoạn BD lấy điểm I sao cho $\frac{IB}{ID} = \frac{1}{2}$, lại có $2AM = MD(gt) \Rightarrow \frac{AM}{MD} = \frac{1}{2}$

Xét ΔABD có $\frac{AM}{MD} = \frac{IB}{ID} = \frac{1}{2} \Rightarrow MI \parallel AB$ (1) (định lí Thalès đảo)

Từ $\frac{AM}{MD} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{AM + MD}{MD} = \frac{1+2}{2} = \frac{3}{2}$ hay $\frac{AD}{MD} = \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{MD}{AD} = \frac{2}{3}$

Tương tự $\frac{ID}{BD} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{MD}{AD} = \frac{ID}{BD} = \frac{2}{3}$

Do đó $\Delta DMI \sim \Delta DAB$ (c.g.c) $\Rightarrow \frac{MI}{AB} = \frac{MD}{AD}$ hay $\frac{MI}{5} = \frac{2}{3} \Rightarrow MI = \frac{5.2}{3} = \frac{10}{3}(cm)$

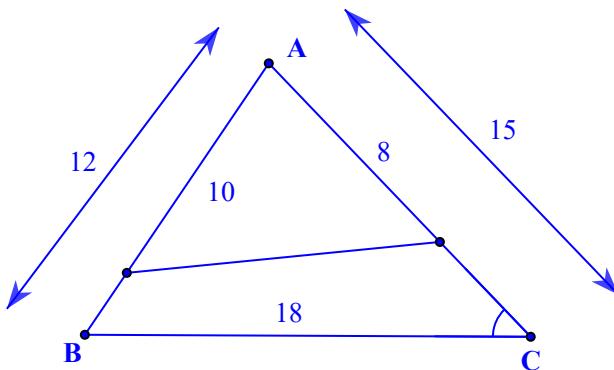
Chứng minh tương tự, ta có: $\frac{NI}{CD} = \frac{NB}{BC} = \frac{1}{3}$ hay $\frac{NI}{6} = \frac{1}{3} \Rightarrow NI = \frac{6}{3} = 2(m)$

Ta cũng có $NI \parallel CD$ (2) mà $AB \parallel CD(gt)$

Theo tiên đề Euclid MI và NI phải trùng nhau ha ba điểm M, N, I thẳng hàng $\Rightarrow MN = MI + NI = \frac{10}{3} + 2 = \frac{16}{3}(cm)$.

Bài toán 40. Cho tam giác ABC có $AB = 12cm, AC = 15cm, BC = 18cm$. Trên cạnh AB , lấy điểm E sao cho $AE = 10cm$. Trên cạnh AC , lấy điểm F sao cho $AF = 8cm$ (hình vẽ). Tính độ dài đoạn thẳng EF .

Lời giải



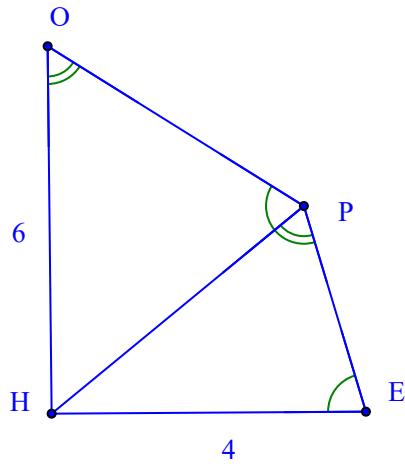
Ta có $\frac{AE}{AC} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}; \frac{AF}{AB} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{AE}{AC} = \frac{AF}{AB} = \frac{2}{3}$

Do đó $\Delta AEF \sim \Delta ACB$ (c.g.c) $\Rightarrow \frac{EF}{BC} = \frac{AF}{AB}$ hay $\frac{EF}{18} = \frac{8}{12}$

$$\Rightarrow EF = \frac{8.18}{12} = 12(cm)$$

Bài toán 41. Cho hình vẽ bên. Cho biết $\widehat{HOP} = \widehat{HPE}, \widehat{HPO} = \widehat{HEP}, OH = 6cm$ và $HE = 4cm$. Tính độ dài đoạn thẳng HP .

Lời giải

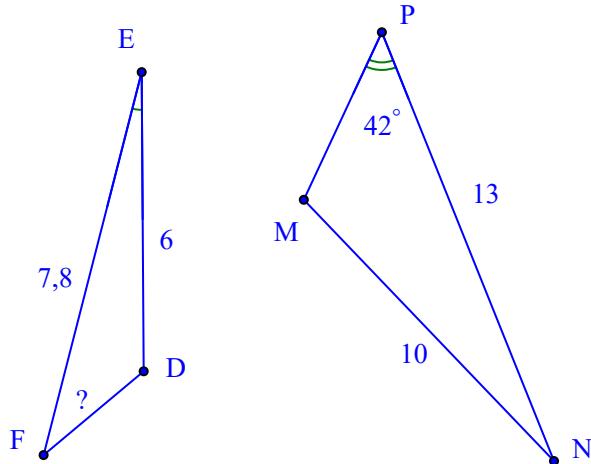


Ta có $\widehat{HOP} = \widehat{HPE}$ và $\widehat{HPO} = \widehat{HEP}(gt)$.

$$\begin{aligned} \text{Do đó } \Delta HOP &\sim \Delta HPE \text{ (g.g)} \Rightarrow \frac{HP}{HO} = \frac{HE}{HP} \Rightarrow HP^2 = HE \cdot HO \\ &\Rightarrow HP^2 = 4 \cdot 6 = 24 \Rightarrow HP = \sqrt{24}(\text{cm}). \end{aligned}$$

Bài toán 42. Cho hình vẽ bên. Cho biết $DE = 6\text{ cm}, EF = 7,8\text{ cm}, NP = 13\text{ cm}, NM = 10\text{ cm}, \widehat{E} = \widehat{N}$ và $\widehat{P} = 42^\circ$. Tính \widehat{F} .

Lời giải



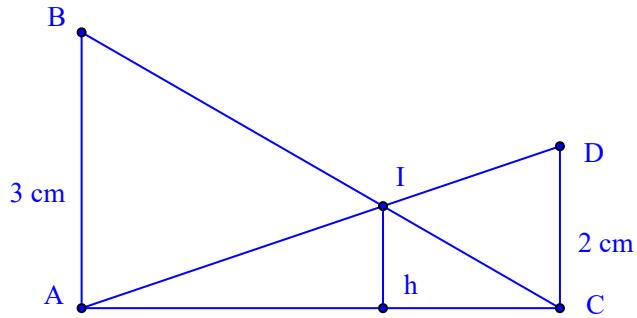
$$\text{Ta có } \frac{ED}{MN} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}; \frac{EF}{NP} = \frac{7,8}{13} = \frac{3}{5} \Rightarrow \frac{ED}{MN} = \frac{EF}{NP} = \frac{3}{5}$$

Xét ΔDEF và ΔMNP có $\widehat{E} = \widehat{N}$ (gt) và (1) $\Rightarrow \Delta DEF \sim \Delta MNP$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{F} = \widehat{P} = 42^\circ$.

IV. Toán thực tế

Bài toán 43. Có hai chiếc cột dựng thẳng đứng trên mặt đất với chiều cao lần lượt là 3 m và 2 m . Người ta nối hai sợi dây từ đỉnh cột này đến chân cột kia và hai sợi dây cắt nhau tại một điểm I (hình vẽ). Hãy tính độ cao h của điểm đó so với mặt đất.

Lời giải



Ta có: $AB \perp AC$ và $CD \perp AC \Rightarrow AB \parallel CD$.

Theo Bài toán 19, bài 15 phàn định lí Thalès, ta có: $\frac{IC}{IB} = \frac{DC}{AB} = \frac{2}{3}$

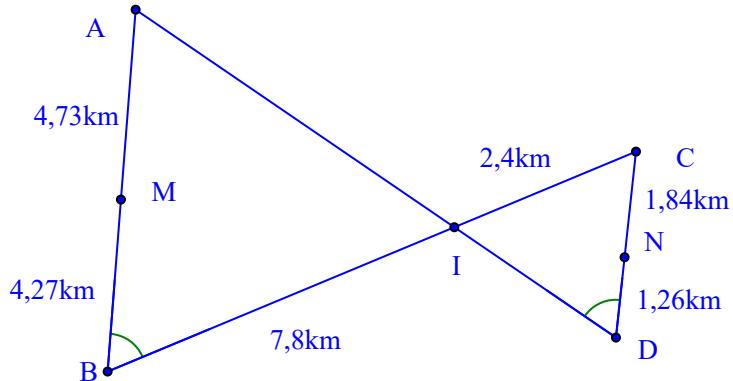
$$\Rightarrow \frac{IC}{IB+IC} = \frac{2}{3+2} = \frac{2}{5} \text{ hay } \frac{IC}{BC} = \frac{2}{5}.$$

Xét $\triangle ABC$, ta có $h \parallel AB$ ($\perp AC$) $\Rightarrow \frac{h}{AB} = \frac{IC}{IB}$ hay $\frac{h}{3} = \frac{2}{5}$

$$\Rightarrow h = \frac{2 \cdot 3}{5} = \frac{6}{5}(m)$$

Bài toán 44. Đường đi và khoảng cách từ nhà anh Thanh (điểm M) đến công ty (điểm N) được thể hiện trong hình vẽ. Hãy tìm con đường ngắn nhất để đi từ nhà của anh Thanh đến công ty.

Lời giải



$$AB = AM + MB = 4,73 + 4,72 = 9(km)$$

$$CD = CN + ND = 1,84 + 1,16 = 3(km)$$

Xét $\triangle AIB$ và $\triangle CID$ có $\widehat{AIB} = \widehat{CID}$ (đối đỉnh), $\widehat{B} = \widehat{D}$ (gt)

$$\text{Do đó } \triangle AIB \sim \triangle CID \text{ (g.g)} \Rightarrow \frac{AI}{CI} = \frac{AB}{CD} = \frac{9}{3} = 3$$

$$\text{hay } \frac{AI}{2,4} = 3 \Rightarrow AI = 2,4 \cdot 3 = 7,2 \text{ km.}$$

Tương tự $\frac{ID}{IB} = \frac{CD}{AB} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$ hay $\frac{ID}{7,8} = \frac{1}{3} \Rightarrow ID = \frac{7,8}{3} = 2,6(km)$.

Vậy anh Thanh có thể đi từ nhà đến công ty theo bốn cách sau:

- Cách thứ nhất: Từ M đến A đến I đến D đến N

Ta có: $MA + AI + ID + DN = 4,73 + 7,2 + 2,6 + 1,16 = 15,69(km)$

- Cách thứ hai: Từ M đến B đến I đến C đến N

Ta có: $MB + BI + IC + CN = 4,27 + 7,28 + 2,4 + 1,84 = 16,31(km)$

- Cách thứ ba: Từ M đến A đến I đến C đến N

Ta có: $MA + AI + IC + CN = 4,73 + 7,2 + 2,4 + 1,84 = 16,17(km)$

- Cách thứ tư: Từ M đến B đến I đến D đến N

Ta có: $MB + BI + ID + DN = 4,27 + 7,8 + 2,6 + 1,16 = 15,83(km)$

Con đường ngắn nhất để đi từ nhà anh Thanh đến công ty đi theo cách thứ nhất.

C. BÀI TẬP

- 9.4. Hai tam giác có các cạnh có độ dài như sau có đồng dạng không $6cm, 9cm, 12cm$ và $8cm, 12cm, 16cm$. Nếu có hãy tìm tỉ số chu vi của hai tam giác đó.
- 9.5. Cho tứ giác $ABCD$ có $AB = 1,5cm, BC = 2,5cm, CD = 6cm, DA = 5cm$ và đường chéo $AC = 3cm$. Chứng minh $ABCD$ là hình thang.
- 9.6. Cho hai tam giác đồng dạng có tỉ số chu vi là $\frac{2}{3}$ và hiệu độ dài hai cạnh tương ứng của chúng là $5cm$. Tính hai cạnh đó.
- 9.7. Cho tam giác ABC . Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC, CA . Trên BC lấy các điểm Q, R sao cho $BQ = QR = RC$. Gọi I là giao điểm của AQ và BP . K là giao điểm của AR và CM Chứng minh:
- M, I, N thẳng hàng.
 - $\Delta INK \sim \Delta CAB$
- 9.8. C ho tam giác cân ABC ($AB = BC$), gọi I là trung điểm của cạnh đáy AC . Một điểm M di động trên cạnh AB , lấy N trên cạnh BC sao cho: $IA^2 = CN \cdot AM$. Chứng minh rằng
- Các tam giác sau đây đồng dạng: $\Delta AIM; \Delta CNI; \Delta INM$.
 - Khoảng cách từ I đến MN không đổi khi M di động trên cạnh AB .
- 9.9. Cho hình bình hành $ABCD$ có $\hat{A} > 90^\circ$, các đường cao AH và AK (H thuộc CD , K thuộc BC). Chứng minh rằng $\widehat{AKH} = \widehat{ACH}$.
- 9.10. Cho tam giác ABC cân tại A, M là trung điểm của cạnh BC lấy D và E lần lượt thuộc cạnh AB và AC sao cho $\widehat{MDB} = \widehat{CME}$.
- Chứng minh rằng $\Delta BDM \sim \Delta CME$ suy ra $BM^2 = BD \cdot CE$.

- b) Chứng minh $\triangle MDE$ và $\triangle BDM$ đồng dạng.
- 9.11. Cho tam giác ABC cân tại A và $\hat{A} > 90^\circ$. Lấy điểm M nằm giữa hai điểm B và C . Trên nửa mặt phẳng chứa C bờ là AB , vẽ tia Bx sao cho $\widehat{ABx} = \widehat{AMB}$. Tia Bx cắt AM ở D .
- a) Chứng minh $\triangle AMB$ và $\triangle ADB$ đồng dạng.
- b) Chứng minh $MB \cdot MC = MA \cdot MD$.
- 9.12. Cho tứ giác $ABCD$, hai đường chéo AC và BD cắt nhau tại O và $\widehat{ABD} = \widehat{ACD}$. Gọi E là giao điểm của đường thẳng AD và BC . Chứng minh rằng:
- a) $OA \cdot OC = OB \cdot OD$.
- b) $\triangle AOD$ và $\triangle BOC$ đồng dạng và $EA \cdot ED = EB \cdot EC$.
- 9.13. Cho tam giác ABC có góc A lớn hơn góc C . Điểm D thuộc cạnh BC thỏa mãn $\widehat{BAD} = \widehat{BCA}$. Chứng minh $BA^2 = BC \cdot BD$.

⇒ HẾT

BÀI 35. ĐỊNH LÍ PYTHAGORE VÀ ÚNG DỤNG

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Định lý Pythagore

Trong một tam giác vuông bình phương của cạnh huyền bằng tổng các bình phương của hai cạnh góc vuông.

2. Định lý Pythagore đảo

Nếu tam giác có bình phương của một cạnh bằng tổng các bình phương của hai cạnh kia thì tam giác đó là tam giác vuông.

B. PHÂN LOẠI CÁC BÀI TẬP

I. Nhận biết tam giác vuông

Bài toán 1. Cho tam giác ABC vuông tại A . trong các khẳng định sau đây, khẳng định nào đúng, khẳng định nào sai?

- a) $AB^2 + BC^2 = AC^2$. b) $BC^2 - AC^2 = AB^2$.
c) $AC^2 + BC^2 = AB^2$. d) $BC^2 - AB^2 = AC^2$.

Lời giải

Khẳng định đúng b,d ; khẳng định sai a,c .

Bài toán 2. Những bộ ba số đo nào dưới đây là độ dài ba cạnh của một tam giác vuông?

- a) $1\text{cm}, 1\text{cm}, 2\text{cm}$. b) $2\text{cm}, 4\text{cm}, 20\text{cm}$.
c) $5\text{cm}, 4\text{cm}, 3\text{cm}$. d) $2\text{cm}, 2\text{cm}, 2\sqrt{2}\text{ cm}$.

Lời giải

- c) Ta có: $5^2 = 4^2 + 3^2$
d) $(2\sqrt{2})^2 = 2^2 + 2^2$.

Bài toán 3. Các tam giác được cho bằng độ dài 3 cạnh dưới đây, tam giác nào là tam giác vuông. Chứng minh nếu tam giác đã cho vuông thì vuông tại đỉnh nào?

- a) $AB = 8; AC = 15; BC = 17$ b) $AB = 25; AC = 15; BC = 20$
c) $DE = 2; EF = \sqrt{11}; FD = \sqrt{15}$ d) $MN = 5; NP = 6; MP = 7$

Lời giải

- a) Ta có $8^2 = 64; 15^2 = 225; 17^2 = 289$. Vì $289 = 64 + 225$ nên theo định lí Pythagore đảo ΔABC vuông tại A .
b) $25^2 = 625; 15^2 = 225; 20^2 = 400$ vì $625 = 225 + 400$ nên theo định lí Pythagore đảo ΔABC vuông tại C .
c) $2^2 = 4; (\sqrt{11})^2 = 11; (\sqrt{15})^2 = 15$ vì $15 = 4 + 11$

Do đó theo định lí Pythagore đảo ΔDEF vuông tại E .

d) $5^2 = 25; 6^2 = 36; 7^2 = 49$ vì $49 \neq 25 + 36$. Do đó theo định lí Pythagore đảo ΔMNP không phải là tam giác vuông.

Bài toán 3. Cho các số 5; 8; 9; 12; 13; 15; 17

Hãy chọn ra các bộ ba số có thể là độ dài ba cạnh của một tam giác vuông.

Lời giải

Ta có $5^2 = 25; 8^2 = 64; 9^2 = 81; 12^2 = 144; 13^2 = 169; 15^2 = 225; 17^2 = 289$

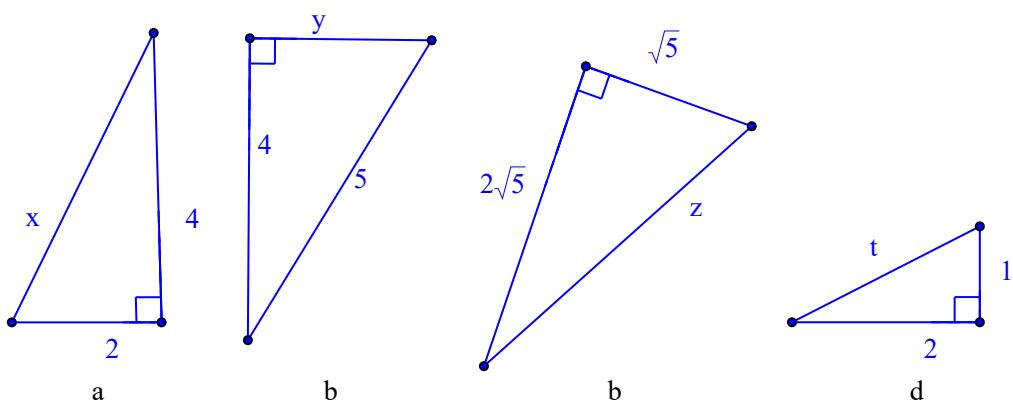
* Vì $25 + 144 = 169$ hay $5^2 + 12^2 = 13^2$ nên bộ ba số 5, 12, 13 là ba cạnh của một tam giác vuông.

* Vì $64 + 225 = 289$ hay $8^2 + 15^2 = 17^2$ nên bộ ba số 8, 15, 17 là ba cạnh của một tam giác vuông.

* Vì $81 + 144 = 225$ hay $9^2 + 12^2 = 15^2$ nên bộ ba số 9, 12, 15 là ba cạnh của một tam giác vuông.

II. Tính độ dài các đoạn thẳng

Bài toán 5. Tính các độ dài x, y, z, t trong hình vẽ dưới đây.



Lời giải

Ở hình a) Theo định lí Pythagore, ta có: $x^2 = 2^2 + 4^2 = 20$

$$\Rightarrow x = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}.$$

Ở hình b) Theo định lí Pythagore, ta có: $5^2 = 4^2 + y^2$

$$\Rightarrow y^2 = 5^2 - 4^2 = 9 \Rightarrow y = 3$$

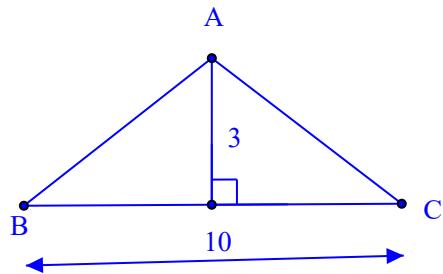
Ở hình c) Theo định lí Pythagore, ta có: $z^2 = (2\sqrt{5})^2 + (\sqrt{5})^2 = 25$

$$\Rightarrow z = \sqrt{25} = 5.$$

Ở hình d) Theo định lí Pythagore, ta có: $t^2 = 2^2 + 1^2 = 5 \Rightarrow t = \sqrt{5}$

Bài toán 6. Cho tam giác ABC cân tại đỉnh A , chiều cao $AH = 3\text{cm}$ và cạnh đáy $BC = 10\text{cm}$. Hãy tính độ dài các cạnh bên AB, AC .

Lời giải



Tam giác ABC cân tại A nên đường cao AH đồng thời là đường trung tuyé̄n hay H là trung điểm của BC .

$$\text{Ta có: } HB = HC = \frac{BC}{2} = \frac{10}{2} = 5(\text{cm})$$

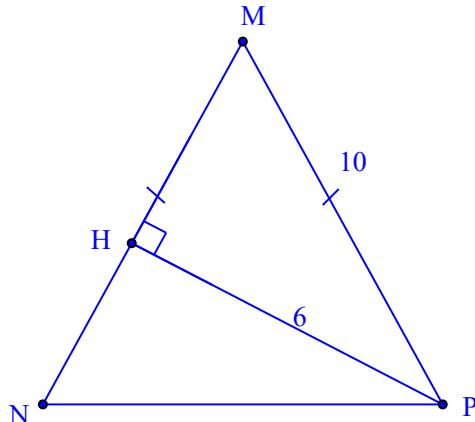
Xét tam giác AHB vuông tại H , theo định lí Pythagore, ta có:

$$AB^2 = AH^2 + HB^2 = 3^2 + 5^2 = 34 \Rightarrow AB = \sqrt{34}(\text{cm}); AC = AB = \sqrt{34}(\text{cm})$$

Bài toán 7. Tính cạnh đáy của tam giác MNP cân tại M biết:

- a) $MP = MN = 10\text{cm}$, đường vuông góc kẻ từ P đến MN là $PH = 6\text{cm}$.
- b) Đường vuông góc PH ($H \in MN$) chia MN thành hai đoạn $MH = 8\text{cm}, NH = 2\text{cm}$.

Lời giải



a) Xét $\triangle MHP$ vuông tại H . Theo định lí Pythagore

$$MP^2 = HM^2 + HP^2 \Leftrightarrow 10^2 = HM^2 + 6^2 \Leftrightarrow HM^2 = 10^2 - 6^2 \Leftrightarrow HM^2 = 64 \Rightarrow HM = 8\text{cm}$$

$$HN = MN - HM = 10 - 8 = 2\text{cm}$$

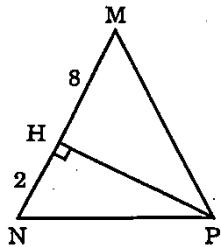
Xét $\triangle NHP$ vuông tại H . Theo định lí Pythagore $NP^2 = NH^2 + PH^2$

$$NP^2 = 2^2 + 6^2$$

$$NP^2 = 40$$

$$NP = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}\text{ cm}$$

b)



Ta có ΔMNP cân tại M

$$\Rightarrow MP = MN = MH + HN = 8 + 2 = 10 \text{ cm}.$$

Xét ΔMHP vuông tại H theo định lí Pythagore

$$MP^2 = MH^2 + PH^2$$

$$10^2 = 8^2 + PH^2$$

$$PH^2 = 10^2 - 8^2$$

$$PH^2 = 36$$

$$PH = 6$$

Xét ΔMHP vuông tại H . Theo định lí Pythagore: $NP^2 = NH^2 + PH^2$

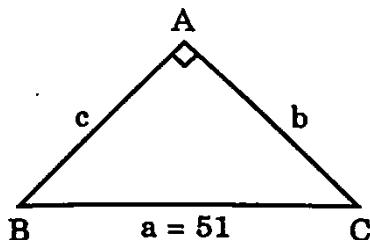
$$NP^2 = 2^2 + 6^2$$

$$NP^2 = 40$$

$$NP = \sqrt{40} = 2\sqrt{10} \text{ cm}$$

Bài toán 8. Cho tam giác ABC vuông ở A có các cạnh góc vuông tỉ lệ với $8:15$ và cạnh huyền là 51. Tính các cạnh góc vuông và diện tích tam giác ABC .

Lời giải



a) Gọi cạnh huyền là a , các cạnh vuông góc là b và c

$$\text{Theo giả thiết ta có } \frac{b}{c} = \frac{8}{15} \Rightarrow \frac{b}{8} = \frac{c}{15}$$

$$\Rightarrow \frac{b^2}{64} = \frac{c^2}{225} = \frac{b^2 + c^2}{64 + 225} = \frac{a^2}{289} = \frac{51^2}{289} = 9$$

$$\Rightarrow b^2 = 9 \cdot 64 = 576 \Rightarrow AC = 24 \text{ (cm)}$$

$$c^2 = 9 \cdot 225 = 2025 \Rightarrow AB = 45 \text{ (cm)}$$

$$\text{b) Gọi } S \text{ là diện tích } \Delta ABC \text{ ta có } S = \frac{1}{2} AB \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot 24 \cdot 45 = 540 \text{ (cm}^2\text{)}$$

Cách khác câu a) Đặt $\frac{b}{8} = \frac{c}{15} = k$ ($k > 0$) $\Rightarrow b = 8k; c = 15k$

Theo định lí Pythagore: $b^2 + c^2 = a^2$

$$(8k)^2 + (15k)^2 = 51^2$$

$$289k^2 = 2601$$

$$k^2 = 9$$

$$k = \pm 3$$

Do đó $b = 8 \cdot 3 = 24$ (cm) và $c = 15 \cdot 3 = 45$ (cm).

Bài toán 9. Cho tam giác ABC vuông tại A , biết tỉ số hai cạnh góc vuông là $3:4$ và chu vi của tam giác ABC là 18cm . Tính các cạnh còn lại.

Lời giải

Gọi hai cạnh góc vuông là b và c , cạnh huyền là a .

Ta có $\frac{b}{c} = \frac{3}{4}$ và $a + b + c = 18$

$$\text{Từ giải thiết } \frac{b}{c} = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{b}{3} = \frac{c}{4} \Rightarrow \frac{b^2}{9} = \frac{c^2}{16} = \frac{b^2 + c^2}{16+9} = \frac{a^2}{25}$$

$$\Rightarrow \frac{b}{3} = \frac{c}{4} = \frac{a}{5} = \frac{b+c+a}{3+4+5} = \frac{18}{12} = \frac{3}{2}$$

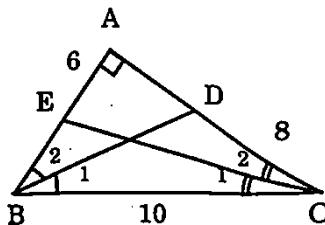
$$\Rightarrow b = \frac{3 \cdot 3}{2} = 4,5\text{ (cm)}; c = \frac{3 \cdot 4}{2} = 6\text{ (cm)}; a = \frac{3 \cdot 5}{2} = 7,5\text{ (cm)}.$$

Bài toán 10. Cho tam giác ABC có $AB = 6\text{cm}$; $AC = 8\text{cm}$ và $BC = 10\text{cm}$.

a) Chứng tỏ ΔABC là tam giác vuông.

b) Kẻ phân giác BD của góc B , và phân giác CE của góc C ($D \in AC, E \in AB$), BD và CE cắt nhau tại I . Tính số đo góc BIC .

Lời giải



$$\text{a) Ta có } AB^2 + AC^2 = BC^2 (6^2 + 8^2 = 10^2)$$

Do đó theo định lí Pythagore đảo ta có ΔABC vuông tại A

$$\text{b) Ta có } \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$$

$$\Rightarrow \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ - \hat{A} = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$$

$$\Rightarrow \frac{\widehat{B}}{2} + \frac{\widehat{C}}{2} = 45^\circ \text{ hay } \widehat{B}_1 + \widehat{C}_1 = 45^\circ$$

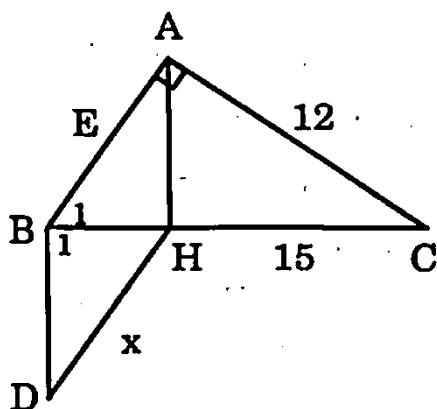
Xét ΔBIC có $\widehat{BIC} + \widehat{B}_1 + \widehat{C}_1 = 180^\circ$

$$\Rightarrow \widehat{BIC} = 180^\circ - (\widehat{B}_1 + \widehat{C}_1) = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ.$$

Bài toán 11. Cho tam giác ABC vuông tại A , kẻ AH vuông góc với BC (H thuộc BC). Trên nửa mặt phẳng bờ là đường thẳng BC không chứa điểm A vẽ tia Bx song song với AH . Trên Bx lấy D sao cho $BD = AH$.

- a) Chứng minh $\Delta AHB = \Delta DBH$.
- b) Nếu $AC = 12\text{cm}$; $BC = 15\text{cm}$. Tính độ dài DH .

Lời giải



a) Ta có: $AH \perp BC$; $BD \parallel AH$

$\Rightarrow BD \perp BC$ hay ΔDBH vuông tại B .

Lại có $BD \parallel AH$ (gt) $\Rightarrow \widehat{B}_1 = \widehat{H}_1$ (cặp góc so le trong)

Do đó $\Delta DBH = \Delta AHB$ (g.c.g)

b) $\triangle ABC$ vuông tại A (gt). Theo định lí Pythagore, ta có:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2$$

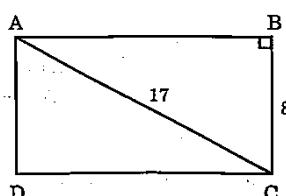
$$\Rightarrow AB^2 = BC^2 - AC^2 = 15^2 - 12^2 = 225 - 144 = 81$$

$$\Rightarrow AB = \sqrt{81} = 9\text{ (cm)}$$

Ta có $\Delta DBH = \Delta AHB$ (cmt) $\Rightarrow DH = AB = 9\text{ (cm)}$.

Bài toán 12. Hãy tính diện tích của một hình chữ nhật có chiều rộng 8 cm và đường chéo dài 17 cm.

Lời giải



Ta có $ABCD$ là hình chữ nhật nên tam giác ABC vuông tại B .

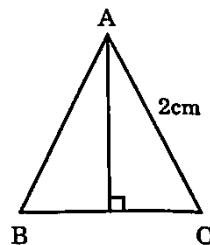
Theo định lí Pythagore, ta có:

$$\begin{aligned} AC^2 &= AB^2 + BC^2 \\ \Rightarrow AB^2 &= AC^2 - BC^2 = 17^2 - 8^2 = 225 \\ \Rightarrow AB &= 15(\text{cm}). \end{aligned}$$

Chiều dài hình chữ nhật là 15 cm.

Vậy diện tích hình chữ nhật là: $AB \cdot BC = 15 \cdot 8 = 120(\text{cm}^2)$

Bài toán 13. Hãy tính chiều cao theo đơn vị centimét của một tam giác đều cạnh 2cm (hình vẽ), (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ hai).



Lời giải

ΔABC đều nên đường cao AH đồng thời là đường trung tuyến hay H là trung điểm của BC :

$$HB = HC = \frac{BC}{2} = \frac{2}{2} = 1(\text{cm})$$

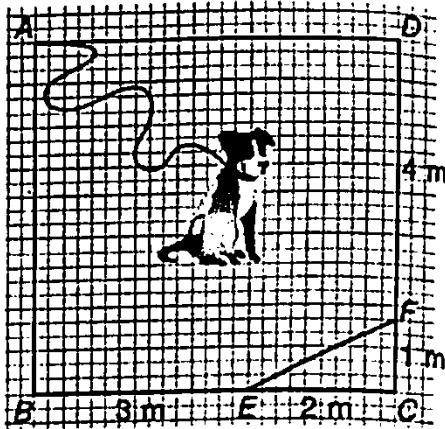
Xét tam giác AHB vuông tại H .

$$\begin{aligned} \text{Theo định lí Pythagore, ta có: } AC^2 &= AH^2 + HC^2 \\ \Rightarrow AH^2 &= AC^2 - HC^2 = 2^2 - 1^2 = 3 \\ \Rightarrow AH &= \sqrt{3} \approx 1,73(\text{cm}). \end{aligned}$$

III. Bài toán thực tế

Bài toán 14. Chú cún bị xích bờ một sợi dây dài 6m để cạnh một mảnh vườn giới hạn bởi các điểm A, B, E, F, D trong hình vuông $ABCD$. có cạnh 5m như hình vẽ. Đầu xích buộc cố định tại điểm A của mảnh vườn. Hỏi chú cún có thể chạy đến tất cả các điểm của mảnh vườn mình phải canh không?

Lời giải



Xét tam giác vuông ADF .

Theo định lí Pythagore, ta có:

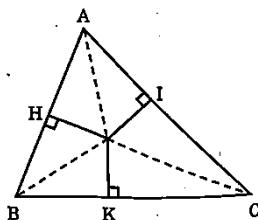
$$AF^2 = AD^2 + DF^2 = 5^2 + 4^2 = 41 \Rightarrow AF = \sqrt{41}$$

Vì $6 < \sqrt{41}$ nên chú cún không thể chạy đến điểm F .

IV. Chứng minh

Bài toán 14. Cho tam giác ABC , từ điểm M bất kì nằm trong tam giác; kẻ MH, MI, MK lần lượt vuông góc với AB, AC và BC . Chứng minh rằng $AH^2 + BK^2 + CI^2 = AI^2 + BH^2 + CK^2$.

Lời giải



Xét các tam giác vuông AHM và BHM .

Theo định lí Pythagore, ta có:

$$AM^2 = AH^2 + MH^2 \Rightarrow AH^2 = AM^2 - MH^2$$

$$\text{Tương tự } BH^2 = BM^2 - MH^2$$

$$\Rightarrow AH^2 - BH^2 = AM^2 - BM^2$$

Chứng minh tương tự, ta có: $BK^2 - CK^2 = BM^2 - CM^2$

$$CI^2 - AI^2 = CM^2 - AM^2 \quad (2)$$

Cộng (1), (2), (3) vế với vế, ta có:

$$AH^2 - BH^2 + BK^2 - CK^2 + CI^2 - AI^2 = AM^2 - BM^2 + BM^2 - CM^2 + CM^2 - AM^2$$

$$\Rightarrow AH^2 - BH^2 + BK^2 - CK^2 + CI^2 - AI^2 = 0$$

$$\Rightarrow AH^2 + BK^2 + CI^2 = AI^2 + BH^2 + CK^2$$

C. BÀI TẬP

- 9.14.** Tam giác ABC nhọn, kẻ AH vuông góc với BC . Tính chu vi tam giác ABC biết $AC = 20\text{cm}$, $AH = 12\text{cm}$, $BH = 5\text{cm}$.
- 9.15.** Cho tam giác ABC có $AB = 6\text{cm}$, $AC = 8\text{cm}$ và $BC = 10\text{cm}$.
- Chứng minh rằng tam giác ABC vuông tại A .
 - Kẻ đường cao $AH (H \in BC)$. Tính độ dài đường cao AH, BH và CH .
- 9.16.** Cạnh huyền của một tam giác vuông là 5cm , hai cạnh góc vuông tỉ lệ với $3:4$. Tính độ dài hai cạnh góc vuông.

☞ HẾT ☞

BÀI 36. CÁC TRƯỜNG HỢP ĐỒNG DẠNG CỦA HAI TAM GIÁC VUÔNG

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

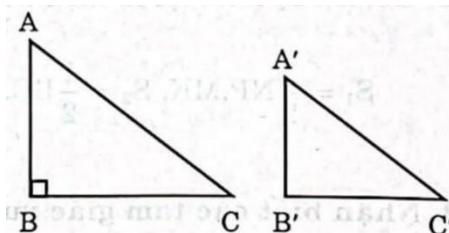
Định lí 1. Nếu một góc nhọn của tam giác vuông này bằng một góc nhọn của tam giác vuông kia thì hai tam giác vuông đó đồng dạng với nhau.

Định lí 2. Nếu hai cạnh góc vuông của tam giác vuông này tỉ lệ với hai cạnh góc vuông của tam giác vuông kia thì hai tam giác vuông đó đồng dạng với nhau.

$\Rightarrow \Delta ABC$ vuông tại A , $\Delta A'B'C'$ vuông tại A' .

- Nếu $\widehat{B'} = \widehat{B}$ thì $\Delta A'B'C' \sim \Delta ABC$.

- Nếu $\frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC}$ thì $\Delta A'B'C' \sim \Delta ABC$.



Định lí (trường hợp đồng dạng đặc biệt của hai tam giác vuông)

Nếu cạnh huyền và một cạnh góc vuông của tam giác vuông này tỉ lệ với cạnh huyền và một cạnh góc vuông của tam giác vuông kia thì hai tam giác vuông đó đồng dạng với nhau.

Chú ý:

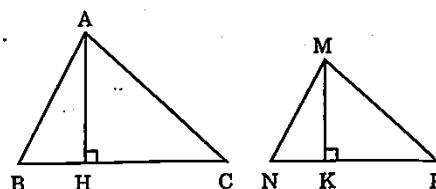
Tỉ số hai đường cao tương ứng của hai tam giác đồng dạng bằng tỉ số đồng dạng.

Tỉ số diện tích của hai tam giác đồng dạng bằng bình phương tỉ số đồng dạng.

(Xin bạn lưu ý: Chúng ta sẽ chứng minh "chú ý" này trong phần PHÂN LOẠI CÁC BÀI TẬP).

B. PHÂN LOẠI CÁC BÀI TẬP

Bài toán 1. Biết $\Delta MNP \sim \Delta ABC$ (xem hình vẽ) với tỉ số đồng dạng $k = \frac{MN}{AB}$. Hai đường cao tương ứng là MK và AH .



a) Chứng minh rằng: $\Delta MNK \sim \Delta ABC$ và $\frac{MK}{AH} = k$.

b) Gọi S_1 là diện tích tam giác MNP và S_2 là diện tích tam giác ABC .

Chứng minh rằng $\frac{S_1}{S_2} = k^2$.

Lời giải

a) Ta có MK và AH lần lượt là hai đường cao của tam giác MNP và tam giác ABC (gt)

Nên các tam giác MKN và AHB đều là tam giác vuông (1)

Lại có cs $\Delta MNP \sim \Delta ABC (gt) \Rightarrow \widehat{N} = \widehat{B} (2)$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \Delta MNK \sim \Delta ABH$ (hai tam giác vuông có một góc nhọn bằng nhau)

$$\Rightarrow \frac{MK}{AH} = \frac{MN}{AB} = k \text{ (đpcm)}$$

b) Gọi S_1, S_2 lần lượt là diện tích các tam giác MNP và ABC , ta có:

$$S_1 = \frac{1}{2} NP \cdot MK; S_2 = \frac{1}{2} BC \cdot AH$$

$$\Rightarrow \frac{S_1}{S_2} = \frac{\frac{1}{2} NP \cdot MK}{\frac{1}{2} BC \cdot AH} = k^2.$$

I. Nhận biết các tam giác vuông đồng dạng

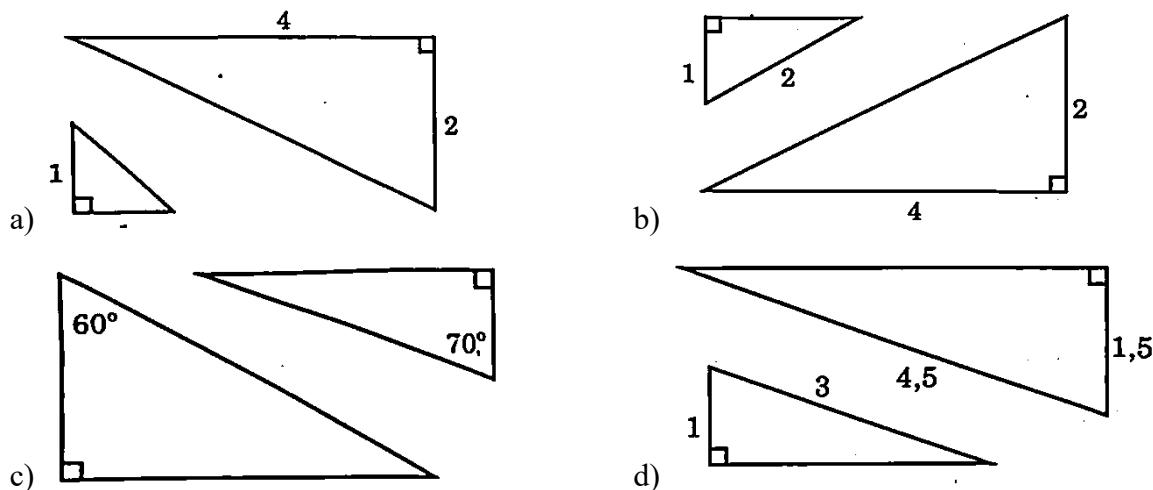
Bài toán 2. Điều kiện nào dưới đây chứng tỏ rằng hai tam giác vuông đồng dạng?

- a) Một góc nhọn của tam giác này bằng một góc nhọn của tam giác kia.
- b) Cạnh góc vuông và cạnh huyền của tam giác này tỉ lệ với cạnh góc vuông và cạnh huyền của tam giác kia.
- c) Một cạnh góc vuông của tam giác này bằng một cạnh góc vuông của tam giác kia.
- d) Hai cạnh góc vuông của tam giác này tỉ lệ với hai cạnh góc vuông của tam giác kia.

Lời giải

Chọn a), b) và d).

Bài toán 3. Cặp tam giác vuông nào đồng dạng với nhau trong hình a, b, c, d sau đây.



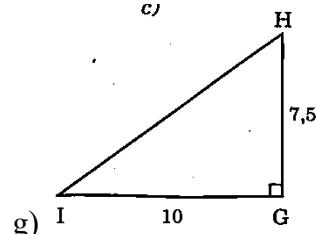
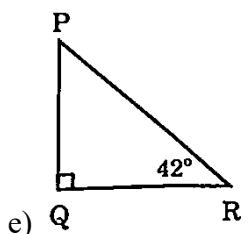
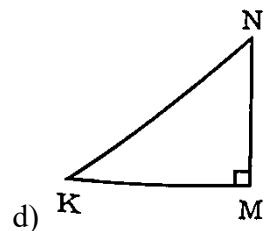
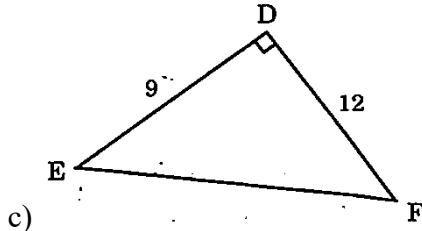
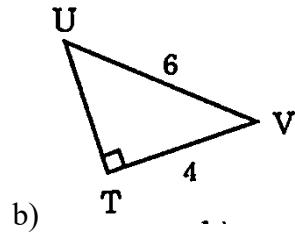
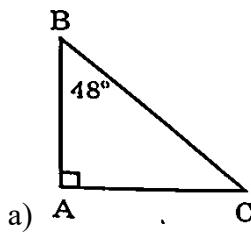
Lời giải

Cặp tam giác vuông trong hình d).

$$\text{Ta có } \frac{3}{4,5} = \frac{1}{1,5} = \frac{2}{3}.$$

Theo định lí "Cạnh huyền và cạnh góc vuông của tam giác vuông này tỉ lệ với cạnh huyền và cạnh góc vuông của tam giác vuông kia".

Bài toán 4. Hãy tìm cặp tam giác vuông đồng dạng trong hình a, b, c, d, e, g.



Lời giải

Cặp tam giác ở hình a) và e).

Ta có $\hat{B} + \hat{C} = 90^\circ$ hay $48^\circ + \hat{C} = 90^\circ$

$$\Rightarrow \hat{C} = 90^\circ - 48^\circ = 42^\circ$$

Tam giác ABC và QPR là hai tam giác vuông có $\hat{C} = \hat{R} = 42^\circ$

Do đó $\Delta ABC \sim \Delta QPR$

Cặp tam giác ở hình b) và d).

Ta có $\frac{TV}{MN} = \frac{UV}{KN}$ hay $\frac{4}{6} = \frac{6}{9} \left(= \frac{2}{3}\right)$

Tam giác UTV và tam giác KMN là hai tam giác vuông có (1)

Do đó $\Delta UTV \sim \Delta KMN$ (cạnh huyền và cạnh góc vuông tỉ lệ).

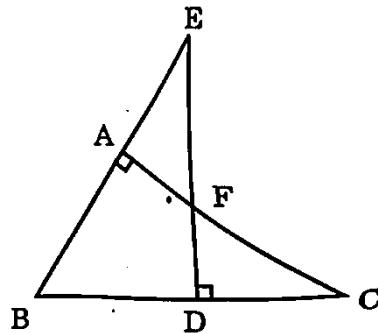
Cặp tam giác ở hình c) và g).

Ta có $\frac{DE}{GH} = \frac{DF}{GI}$ hay $\frac{9}{7,5} = \frac{12}{10} \left(= \frac{6}{5}\right)$

Tam giác DEF và tam giác IGH là hai tam giác vuông có (2)

Do đó $\Delta DEF \sim \Delta GHI$ (hai cạnh góc vuông tỉ lệ).

Bài toán 5. Cho hình vẽ bên hãy chỉ ra các cặp tam giác đồng dạng. Hãy viết các tam giác này theo thứ tự các đỉnh tương ứng và giải thích.



Lời giải

Ta có:

$\Delta ABC \sim \Delta DFC$ vì có: $\widehat{BAC} = \widehat{CDF} = 90^\circ$ và \widehat{C} chung

$\Delta ABC \sim \Delta AFE$ vì có: $\widehat{BAC} = \widehat{EAF} = 90^\circ$ và $\widehat{C} = \widehat{F}$ (cùng phụ với \widehat{B})

Tương tự: $\Delta ABC \sim \Delta DBE$; $\Delta DBE \sim \Delta AFE$; $\Delta DBE \sim \Delta DFC$

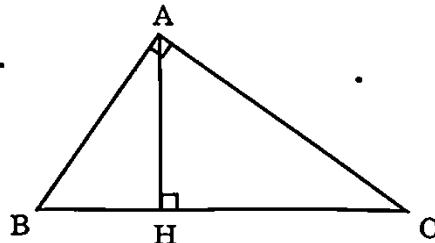
Lại có: $\Delta AEF \sim \Delta DCF$ vì có: $\widehat{EAF} = \widehat{CDF} = 90^\circ$; $\widehat{AFE} = \widehat{DFC}$

Vậy có tất cả 6 cặp tam giác vuông đồng dạng.

II. Chứng minh

Bài toán 6. Cho tam giác ABC vuông tại A , đường cao AH . Chứng minh rằng ΔAHB và ΔAHC đồng dạng.

Lời giải



Xét ΔAHB và ΔAHC có:

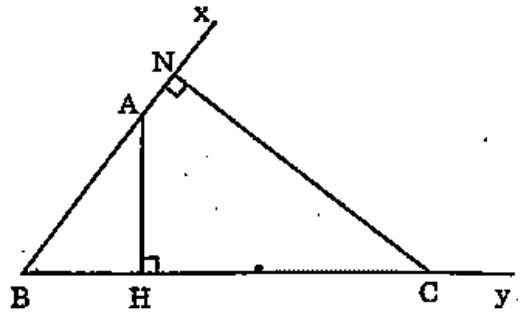
$\widehat{AHB} = \widehat{AHC} = 90^\circ$

$\widehat{BAH} = \widehat{C}$ (cùng phụ với \widehat{CAH})

Do đó $\Delta AHB \sim \Delta CHA$ (g.g).

Bài toán 7. Cho góc nhọn xOy , các điểm A, N nằm trên tia Ox , các điểm B, M nằm trên tia Oy sao cho AM, BN lần lượt vuông góc với Oy, Ox . Chứng minh rằng tam giác OAM đồng dạng với tam giác OBN .

Lời giải

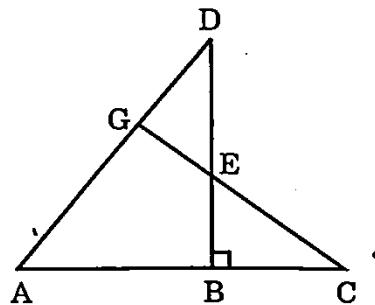


Ta có AM, BN lần lượt vuông góc với Oy, Ox nên các tam giác DAM và OBN là các tam giác vuông có O chung. Do đó $\Delta OAM \sim \Delta OBN$.

Bài toán 8. Cho bình vẽ dưới đây, biết $AB = 4$, $BC = 3$, $BE = 2$, $BD = 6$. Chứng minh:

- a) $\Delta ABD \sim \Delta EBC$;
- b) $\widehat{DAB} = \widehat{DEG}$;
- c) Tam giác DGE vuông.

Lời giải



a) Xét tam giác ABD và tam giác EBC có:

$$\widehat{ABD} = \widehat{EBC} = 90^\circ \text{ (gt);}$$

và $\widehat{D} = \widehat{C}$ (cùng phụ góc A).

Do đó $\Delta ABD \sim \Delta EBC$ (Hai tam giác vuông có một góc nhọn bằng nhau).

b) c) $\Delta ABD \sim \Delta EBC$ (cmt)

$$\Rightarrow \widehat{DAB} = \widehat{CEG}$$

Mà $\widehat{CEB} = \widehat{DEG}$ (đối đỉnh)

$$\Rightarrow \widehat{DAB} = \widehat{DEG}.$$

c) Xét tam giác EBC vuông tại B (gt)

$$\Rightarrow \widehat{C} + \widehat{CEB} = 90^\circ$$

Mà $\widehat{C} = \widehat{D}$ (cmt); $\widehat{CEB} = \widehat{DEG}$ (cmt).

$$\Rightarrow \widehat{D} + \widehat{DEG} = 90^\circ \text{ (1)}$$

Xét ΔDEG có (1)

$\Rightarrow \widehat{DEG} = 180^\circ - 90^\circ$ (Định lí tổng ba góc trong tam giác).

Hay tam giác DGE vuông.

Bài toán 9. Cho hình vẽ bên. Chứng minh:

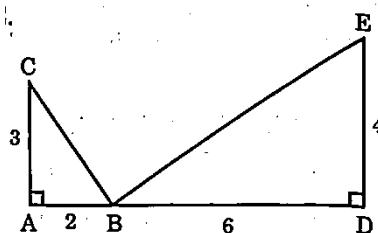
a) $\widehat{ABC} = \widehat{BED}$;

b) $BC \perp BE$.

Lời giải

a) Ta có tam giác ABC và tam giác BED là hai tam giác vuông (gt)

có $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DB}$ hay $\frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.



Do đó $\Delta ABC \sim \Delta DEB$ (Hai cạnh góc vuông tỉ lệ) $\Rightarrow \widehat{ABC} = \widehat{BED}$.

b) Tam giác BED vuông tại D (gt) $\Rightarrow \widehat{BED} + \widehat{EBD} = 90^\circ$.

Mà $\widehat{ABC} = \widehat{BED}$ (cmt)

$$\Rightarrow \widehat{ABC} + \widehat{EBD} = 90^\circ$$

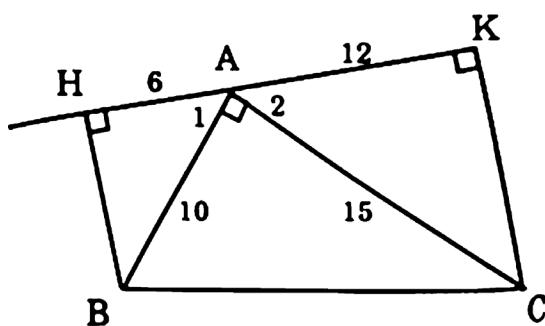
Ta có $\widehat{ABC} + \widehat{CBE} + \widehat{EBD} = 180^\circ$

$$\Rightarrow \widehat{CBE} = 180^\circ - (\widehat{ABC} + \widehat{EBD})$$

$$= 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$$

Chứng tỏ $BC \perp BE$.

Bài toán 10. Cho hình vẽ bên biết $AH = 6\text{ cm}$, $AK = 12\text{ cm}$, $AB = 10\text{ cm}$, $AC = 15\text{ cm}$. Chứng minh rằng ΔAHB và ΔAKC đồng dạng.



Lời giải

ΔAHB vuông tại H , theo định lí Pythagore:

$$HB^2 = AB^2 - AH^2 = 10^2 - 6^2 = 64 \Rightarrow HB = 8(\text{cm})$$

Xét ΔAHB và ΔAKC có:

$$\widehat{AHB} = \widehat{AKC} = 90^\circ (gt)$$

$$\frac{AB}{AC} = \frac{HB}{KA} \left(\frac{10}{15} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3} \right)$$

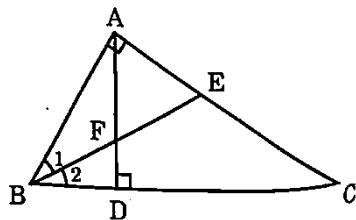
Do đó $\Delta AHB \sim \Delta CKA$ (cạnh huyền cạnh góc vuông tỉ lệ).

Bài toán 11. Cho tam giác ABC vuông tại A có $\hat{B} = 2\hat{C}$ và đường cao AD .

a) Chứng tỏ ΔADB và ΔABC đồng dạng.

b) Kẻ phân giác của góc ABC cắt AD tại F và AC tại E . Chứng tỏ: $AB^2 = AE \cdot AC$.

Lời giải



a) ΔADB và ΔABC là hai tam giác vuông (gt) \hat{B} chung nên $\Delta ADB \sim \Delta ABC$

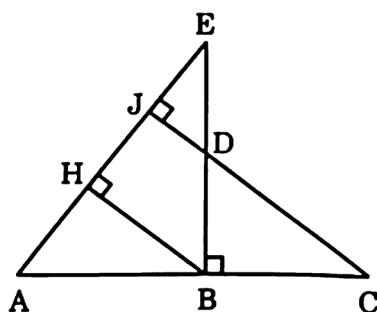
b) $\widehat{B} = 2\widehat{C}$ (gt) và BE là phân giác nên $\widehat{B}_1 = \widehat{B}_2 = \widehat{C}$.

Tam giác BAE và CAB có $\widehat{B_1} = \widehat{C}$ và $\widehat{CAB} = 90^\circ$ (gt)

Do đó $\triangle BAE \cong \triangle CAB$

$$\Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{AE}{AB} \Rightarrow AB^2 = AE \cdot AC.$$

Bài toán 12. Quan sát hình vẽ bên. Chứng minh rằng:



$$\text{a) } \Delta ABH \sim \Delta DCB;$$

$$\text{b) } \frac{BC}{BE} = \frac{BD}{BA}.$$

Lời giải

a) Ta có $BH \parallel CJ (\perp AE) \Rightarrow \widehat{ABH} = \widehat{ACJ}$ (cặp góc đồng vị)

Tam giác ABH và tam giác DCB là hai tam giác vuông (gt)

Có $\widehat{ABH} = \widehat{ACJ}$ (cmt). Do đó $\Delta ABH \sim \Delta DCB$.

b) Ta có ΔABE vuông tại B (gt) $\Rightarrow \hat{A} + \hat{E} = 90^\circ$

Tương tự ΔBCD vuông tại B (gt) $\Rightarrow \widehat{BDC} + \widehat{C} = 90^\circ$

mà $\widehat{E} = \widehat{C}$ (cùng phụ với \widehat{A}) $\Rightarrow \widehat{A} = \widehat{BDC}$

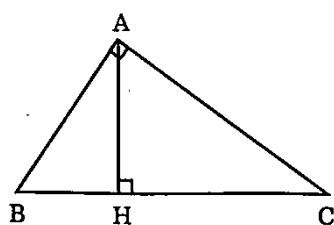
Tam giác ABE và tam giác DBC là hai tam giác vuông (gt) có (1)

$$\text{nên } \Delta ABE \sim \Delta DBC \Rightarrow \frac{BC}{BE} = \frac{BD}{BA} \text{ (đpcm)}$$

Bài toán 13. Quan sát hình vẽ bên. Biết $AH^2 = BH \cdot CH$. Chứng minh:

- a) $\Delta HAB \sim \Delta HCA$;
 b) Tam giác ABC vuông tại A .

Lời giải



$$a) \text{ Ta có } AH^2 = BH \cdot CH \Rightarrow \frac{AH}{CH} = \frac{BH}{AH} \quad (1)$$

Hai tam giác vuông HAB và HCA có (1)

Nên $\Delta HAB \sim \Delta HCA$ (hai cạnh góc vuông tỉ lệ).

Tam giác HAB vuông tại H , ta có: $\widehat{BAH} + \widehat{B} = 90^\circ$.

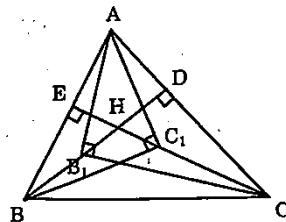
Tương tự tam giác HCA vuông tại H , ta có: $\widehat{CAH} + \widehat{B} = 90^\circ$.

$$\text{Mà } \Delta HAB \sim \Delta HCA(\text{cmt}) \Rightarrow \widehat{B} = \widehat{CAH} \Rightarrow \widehat{BAH} + \widehat{CAH} = 90^\circ.$$

Hay tam giác ABC vuông tại A .

Bài toán 14. Cho tam giác nhọn ABC với H là trực tâm. Trên các đoạn thẳng HB và HC lấy các điểm B_1 và C_1 sao cho $\widehat{AB_1C} = \widehat{AC_1B} = 90^\circ$. Chứng minh rằng: $AB_1 = AC_1$.

Lời giải



Kẻ các đường cao BD và CE .

Xét ΔAB_1C và ΔADB_1 có: $\widehat{AB_1C} = \widehat{ADB_1} = 90^\circ$; $\widehat{B_1AC}$

$\Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta ADB_1$ (hai tam giác vuông có góc nhọn chung)

$$\Rightarrow \frac{AB_1}{AD} = \frac{AC}{AB_1} \Rightarrow AB_1^2 = AC \cdot AD \quad (1)$$

Chứng minh tương tự ta có:

$$\Delta AC_1D \sim \Delta AEC_1 \Rightarrow AC_1^2 = AB \cdot AE \quad (2)$$

Lại có $\Delta ABD \sim \Delta ACE$ (\hat{A} chung)

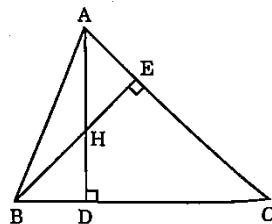
$$\Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{AD}{AE} \Rightarrow AB \cdot AE = AC \cdot AD \quad (3)$$

Từ (1), (2), (3) ta có: $AB_1 = AC_1$.

Bài toán 15. Cho tam giác nhọn ABC , hai đường cao AD và BE cắt nhau tại H . Chứng minh:

- a) $\Delta ACD \sim \Delta BCE$ và $CA \cdot CE = CB \cdot CD$;
- b) $\Delta ACD \sim \Delta AHE$ và $AC \cdot AE = AD \cdot AH$.

Lời giải



a) Tam giác ACD và tam giác BCE là hai tam giác vuông có \hat{C} chung.

$$\text{Do đó } \Delta ACD \sim \Delta BCE \Rightarrow \frac{CA}{CB} = \frac{CD}{CE} \Rightarrow CA \cdot CE = CB \cdot CD$$

b) Tương tự ta có ΔACD và ΔAHE cũng là hai tam giác vuông có \widehat{DAC} chung.

$$\text{Do đó } \Delta ACD \sim \Delta AHE \Rightarrow \frac{AC}{AH} = \frac{AD}{AE} \Rightarrow AC \cdot AE = AD \cdot AH.$$

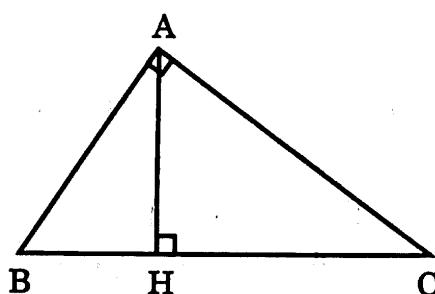
Bài toán 16. Cho tam giác ABC vuông tại A , đường cao AH (hình vẽ dưới đây). Chứng minh:

a) $\Delta ABC \sim \Delta HBA$ và $AB^2 = BC \cdot BH$;

b) $\Delta ABC \sim \Delta HAC$ và $AC^2 = BC \cdot CH$.

c) $\Delta ABH \sim \Delta CAH$ và $AH^2 = BH \cdot CH$.

d) $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2}$.



Lời giải

a) Tam giác ABC và HBA là hai tam giác vuông (gt) có \hat{B} chung.

$$\text{Do đó } \Delta ABC \sim \Delta HBE \Rightarrow \frac{AB}{BH} = \frac{BC}{AB} \Rightarrow AB^2 = BC \cdot BH .$$

b) Chứng minh tương tự như câu a).

Hai tam giác vuông ABC và HAC có \hat{C} chung.

$$\text{Do đó } \Delta ABC \sim \Delta HAC \Rightarrow \frac{AC}{HC} = \frac{BC}{AC} \Rightarrow AC^2 = BC \cdot CH .$$

c) Tam giác ABH và CAH vuông tại H có $\widehat{BAH} = \hat{C}$ (cùng phụ với \hat{B})

$$\Rightarrow \Delta ABH \sim \Delta CAH \Rightarrow \frac{AH}{CH} = \frac{BH}{AH} \Rightarrow AH^2 = BH \cdot CH .$$

d) Chứng minh $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2}$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{AH^2} = \frac{AB^2 + AC^2}{AB^2 \cdot AC^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{AH^2} = \frac{BC^2}{AB^2 \cdot AC^2} \text{ (theo định lí Pythagore } BC^2 = AB^2 + AC^2 \text{)}$$

$$\Leftrightarrow AB^2 \cdot AC^2 = BC^2 \cdot AH^2$$

$$\Leftrightarrow AB \cdot AC = BC \cdot AH \text{ (luôn đúng)}$$

(Vì $AB \cdot AC = BC \cdot AH = 2 \cdot S_{ABC}$).

Bài toán 17. Cho tam giác ABC vuông, có đường cao AH . Kẻ HM vuông góc với AB tại M .

a) Chứng minh rằng $\Delta AMH \sim \Delta AHB$;

b) Kẻ HN vuông góc với AC tại N . Chứng minh rằng $AM \cdot AB = AN \cdot AC$.

c) Chứng minh rằng $\Delta ANM \sim \Delta ABC$;

d) Cho biết $AB = 9\text{cm}, AC = 12\text{cm}$. Tính diện tích tam giác AMN .

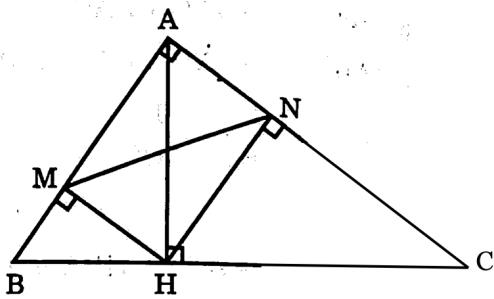
Lời giải

a) ΔAMH và ΔAHB là hai tam giác vuông (gt) có \widehat{BAH} chung.

Do đó $\Delta AMH \sim \Delta AHB$ (hai hai tam vuông có một góc nhọn chung).

b) Ta có $\Delta AMH \sim \Delta AHB$ (*cmt*)

$$\Rightarrow \frac{AM}{AH} = \frac{AH}{AB} \Rightarrow AH^2 = AM \cdot AB$$



$$\text{Chứng minh tương tự, ta có } \Delta ANH \sim \Delta AHC \Rightarrow \frac{AN}{AH} = \frac{AH}{AC}$$

$$\Rightarrow AH^2 = AN \cdot AC \quad (2)$$

$$\Rightarrow AM \cdot AB = AN \cdot AC \quad (3)$$

c) Tam giác AMN và tam giác ABC là hai tam giác vuông có (3) nên $\Delta ANM \sim \Delta ABC$ (hai cạnh góc vuông tỉ lệ).

d) Tam giác ABC vuông tại A (gt). Theo định lí Pythagore, ta có:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 = 9^2 + 12^2 = 225 \Rightarrow BC = 15 \text{ (cm)}$$

Tam giác ABC vuông tại A có đường cao AH .

$$\text{Gọi } S_{ABC} \text{ là diện tích tam giác } ABC, \text{ ta có: } S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC = \frac{1}{2} BC \cdot AH$$

$$\Rightarrow AB \cdot AC = BC \cdot AH \Rightarrow AH = \frac{AB \cdot AC}{BC} = \frac{9 \cdot 12}{15} = \frac{36}{5} \text{ (cm)}$$

Dễ thấy từ giác $AMHN$ là hình chữ nhật (có 3 góc vuông)

$$\Rightarrow MN = AH = \frac{36}{5} \text{ (cm)}$$

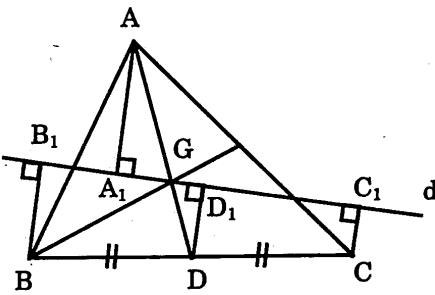
$$\text{Ta có } S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 12 = 54 \text{ (cm}^2\text{)}$$

$$\text{Vì } \Delta ANM \sim \Delta ABC \text{ (cmt)} \Rightarrow \frac{S_{ANM}}{S_{ABC}} = \left(\frac{MN}{BC} \right)^2 = \left(\frac{36}{5} \right)^2 = \left(\frac{36}{75} \right)^2$$

$$\text{hay } \frac{S_{ANM}}{54} = \left(\frac{36}{75} \right)^2 = \frac{144}{625} \Rightarrow S_{ANM} = \frac{54 \cdot 144}{625} \approx 12,4 \text{ (cm}^2\text{)}$$

Bài toán 18. Cho tam giác ABC, G là trọng tâm. Qua G dựng một đường thẳng d bất kì cắt hai cạnh AB và AC . Từ A, B, C hạ các đường vuông góc AA_1, BB_1, CC_1 xuống đường thẳng d . Chứng minh rằng: $AA_1 = BB_1 + CC_1$.

Lời giải



Gọi AD là đường trung tuyến của ΔABC .

Từ D dựng DD_1 vuông góc với d .

Đã thấy DD_1 là đường trung bình của hình thang BB_1CC_1 nên:

$$DD_1 = \frac{BB_1 + CC_1}{2}$$

$$\Rightarrow 2DD_1 = BB_1 + CC_1$$

Ta lại có hai tam giác vuông AGA_1 và DGD_1 đồng dạng (vì $\widehat{AGA_1} = \widehat{DGD_1}$)

$$\Rightarrow \frac{AA_1}{DD_1} = \frac{AG}{GD} = 2$$

$$\Rightarrow AA_1 = 2DD_1$$

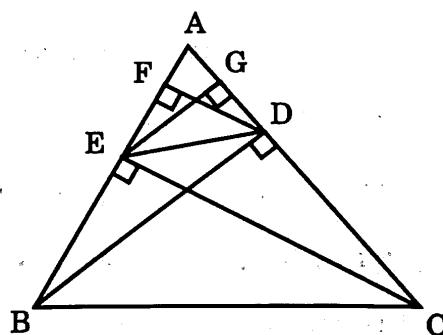
Từ (1) và (2) ta có: $AA_1 = BB_1 + CC_1$.

Bài toán 19. Kẻ đường cao BD và CE của tam giác ABC và các đường cao DF và EG của tam giác ADE .

a) Chứng minh $AD \cdot AE = AB \cdot AG = AC \cdot AF$.

b) Chứng minh: $FG \parallel BC$.

Lời giải



a) Xét ΔADB và ΔAGE có:

\hat{A} chung; $\widehat{ADB} = \widehat{AGE} = 90^\circ$ (gt)

nên $\Delta ADB \sim \Delta AGE$ (g.g)

$$\Rightarrow \frac{AD}{AB} = \frac{AG}{AE} \Rightarrow AD \cdot AE = AB \cdot AG \quad (1)$$

Tương tự $\Delta ADF \sim \Delta ACE$

$$\Rightarrow \frac{AD}{AC} = \frac{AF}{AE} \Rightarrow AD \cdot AE = AC \cdot AF \quad (2)$$

b) Từ (1) và (2) $\Rightarrow AB \cdot AC = AC \cdot AF$

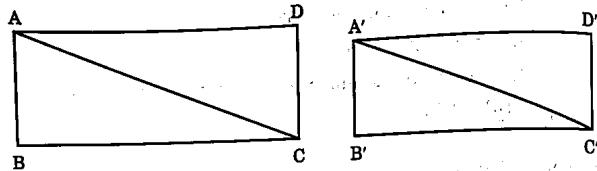
Theo định lí Thalès đảo $\Rightarrow FG // BC$.

Bài toán 20. Cho hai hình chữ nhật $ABCD$ và $A'B'C'D'$ thỏa mãn $AC = 3AB$, $B'D' = 3A'B'$.

a) Chứng minh rằng tam giác ABC đồng dạng với tam giác $A'B'C'$.

b) Nếu $A'B' = 2AB$ và diện tích hình chữ nhật $ABCD$ là $2m^2$ thì diện tích hình chữ nhật $A'B'C'D'$ là bao nhiêu?

Lời giải



$$a) Ta có: AC = 3AB \Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{1}{3} \quad (1)$$

$$\text{Tương tự } B'D' = 3A'B' \text{ mà } A'C' = B'D' \Rightarrow A'C' = 3A'B' \Rightarrow \frac{A'B'}{A'C'} = \frac{1}{3} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2)} \Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{A'B'}{A'C'} = \frac{1}{3}. \text{ Do đó } \Delta ABC \sim \Delta A'B'C' \text{ (c.g.c)}$$

b) Gọi S_{ABC} là diện tích tam giác ABC và $S_{A'B'C'}$ là diện tích tam giác $A'B'C'$, ta có:

$$\frac{S_{A'B'C'}}{S_{ABC}} = \frac{A'B'}{AB}.$$

$$\text{Theo (gt)} A'B' = 2AB \Rightarrow \frac{A'B'}{AB} = 2$$

$$\text{Do đó } \frac{S_{A'B'C'}}{S_{ABC}} = \left(\frac{A'B'}{AB} \right)^2 = 2^2 = 4.$$

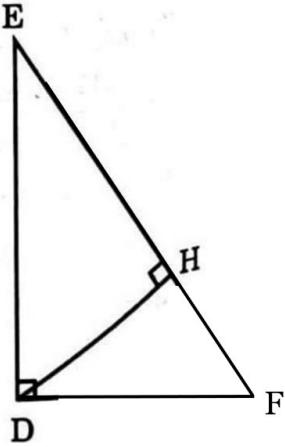
$$\text{Diện tích hình chữ nhật } ABCD \text{ là } 2m^2 \text{ (gt)} \Rightarrow S_{ABC} = 1m^2$$

$$\text{Do đó } \frac{S_{A'B'C'}}{1} = 4 \Rightarrow S_{A'B'C'} = 4m^2.$$

$$\text{Vậy diện tích hình chữ nhật } A'B'C'D' = 2 \cdot S_{A'B'C'} = 2 \cdot 4 = 8 m^2.$$

III. Tính độ dài - Diện tích

Bài toán 21. Quan sát hình vẽ bên.



- a) Chứng minh rằng $\Delta DEF \sim \Delta HDF$.
- b) Chứng minh rằng $DF^2 = FH \cdot FE$.
- c) Biết $EF = 15\text{cm}$, $FH = 5,4\text{cm}$. Tính độ dài đoạn thẳng DF .

Lời giải

a) ΔDEF và ΔHDF là hai tam giác vuông (gt) có \hat{F} chung

Do đó $\Delta DEF \sim \Delta HDF$.

b) Ta có $\Delta DEF \sim \Delta HDF$ (cmt) $\Rightarrow \frac{DF}{FH} = \frac{FE}{DF} \Rightarrow DF^2 = FH \cdot FE$.

c) Ta có $DF^2 = FH \cdot FE$ hay $DF^2 = 5,4 \cdot 15 = 81 \Rightarrow DF = 9(\text{cm})$

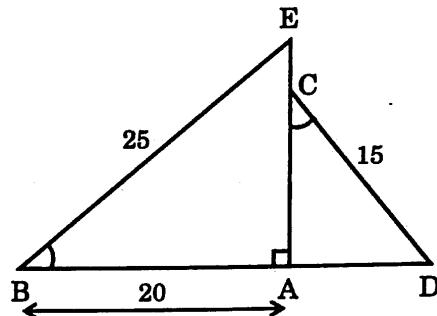
Bài toán 22. Trong hình vẽ dưới đây, cho biết $\hat{B} = \hat{C}$, $BE = 25\text{cm}$, $AB = 20\text{cm}$, $DC = 15\text{cm}$. Tính độ dài đoạn thẳng CE .

Lời giải

ΔABE và ΔACD là hai tam giác vuông có: $\hat{B} = \hat{C}$ (gt)

Do đó $\Delta ABE \sim \Delta ACD$ (g.g) $\Rightarrow \frac{BE}{CD} = \frac{AB}{AC}$

hay $\frac{25}{15} = \frac{20}{AC} \Rightarrow AC = \frac{20 \cdot 15}{25} = 12\text{cm}$.



Tam giác ABE vuông tại A (gt). Theo định lí Pythagore, ta có:

$$BE^2 = AB^2 + AE^2 \text{ hay } 25^2 = 20^2 + AE^2 \Rightarrow AE^2 = 25^2 - 20^2 = 225$$

$$\Rightarrow AE = 15 \text{ cm}.$$

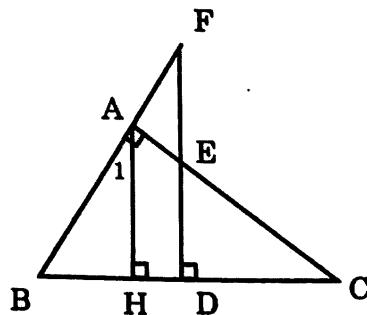
$$\text{Vậy độ dài đoạn thẳng } CE = AE - AC = 15 - 12 = 3 \text{ cm}.$$

Bài toán 23. Cho tam giác ABC vuông tại A và điểm D thuộc đoạn BC , một đường thẳng vuông góc với BC tại D cắt các đường thẳng AC và AB lần lượt tại E và F .

a) Chứng minh: $DB \cdot DC = DE \cdot DF$.

b) Gọi AH là đường cao của ΔABC , biết $HB = 3 \text{ cm}$, $HC = 12 \text{ cm}$. Tính đường cao AH .

Lời giải



a) Ta có $\hat{F} = \hat{C}$ (cùng phụ với \hat{B})

Do đó hai tam giác vuông $\Delta BDF \sim \Delta EDC$ (g.g)

$$\Rightarrow \frac{DB}{DE} = \frac{DF}{DC} \Rightarrow DB \cdot DC = DE \cdot DF.$$

b) Ta có $\hat{A}_l = \hat{C}$ (cùng phụ với \hat{B})

$$\text{Do đó } \Delta AHB \sim \Delta CHA \text{ (g.g)} \Rightarrow \frac{AH}{CH} = \frac{HB}{HA}$$

$$\Rightarrow AH^2 = CH \cdot BH = 12 \cdot 3 = 36$$

$$\Rightarrow AH = \sqrt{36} = 6 \text{ (cm)}.$$

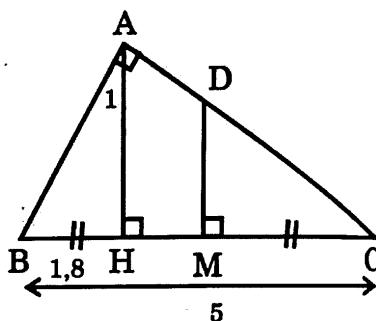
Bài toán 24. Cho tam giác ABC vuông tại A ($AB < AC$, đường cao AH , biết $BC = 5 \text{ cm}$, $BH = 1,8 \text{ cm}$).

Gọi M là trung điểm của BC , đường trung trực của BC cắt AC tại D .

a) Tính AB , AH .

b) Tính tỉ số diện tích của hai tam giác DMC và ABC .

Lời giải



a) Ta có hai tam giác vuông AHB và CHA có: $\hat{A}_l = \hat{C}$ (cùng phụ với \hat{B})

nên $\Delta AHB \sim \Delta CHA$ (g.g)

$$\Rightarrow \frac{AH}{CH} = \frac{BH}{AH}$$

$$\Rightarrow AH^2 = BH \cdot CH = 1,8.3,2 \text{ (vì } CH = BC - BH \text{)}$$

$$\Rightarrow AH = \sqrt{1,8.3,2} = 2,4 \text{ (cm)}$$

$$\text{Do đó: } AB = \sqrt{AH^2 + BH^2} = \sqrt{2,4^2 + 1,8^2} = 3 \text{ (cm)}$$

$$\Rightarrow AC = \sqrt{BC^2 - AB^2} \text{ (định lí Pythagore)}$$

$$AC = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4 \text{ (cm)}$$

b) Hai tam giác vuông DMC và BAC có \hat{C} chung

Do đó: $\Delta DMC \sim \Delta BAC$ (g.g)

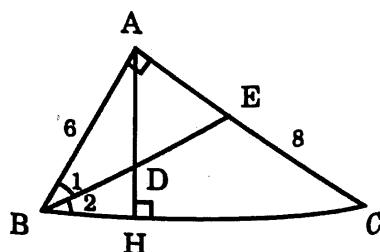
$$\Rightarrow \frac{S_{DMC}}{S_{BAC}} = \left(\frac{MC}{AC} \right)^2 = \left(\frac{\frac{5}{2}}{4} \right)^2 = \frac{25}{64}.$$

Bài toán 25. Cho tam giác ABC vuông tại A , đường cao AH . Tia phân giác của góc ABC cắt AH ở D và cắt AC ở E .

a) Chứng minh $AB \cdot HD = AE \cdot HB$.

b) Tính tỉ số diện tích của hai tam giác ABE và BHD biết $AB = 6\text{cm}$ và $AC = 8\text{cm}$.

Lời giải



a) Ta có BE là phân giác của \widehat{ABC} (gt)

$$\Rightarrow \hat{B}_1 = \hat{B}_2$$

Do đó hai tam giác vuông

$\Delta BAE \sim \Delta BHD$ (g.g)

$$\Rightarrow \frac{AB}{HB} = \frac{AE}{HD} \Rightarrow AB \cdot HD = AE \cdot HB.$$

b) Ta có: $BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10 \text{ (cm)}$ (định lí Pythagore)

Xét hai tam giác vuông AHB và CAB có B chung

nên $\Delta AHB \sim \Delta CAB$ cs (g.g)

$$\Rightarrow \frac{HB}{AB} = \frac{AB}{BC} \Rightarrow HB = \frac{AB^2}{BC} = \frac{6^2}{10} = 3,6 \text{ (cm)}$$

$\Delta BAE \sim \Delta HBD$

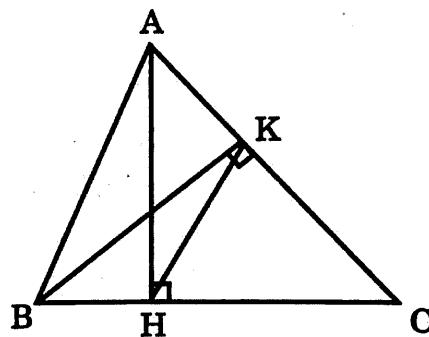
$$\Rightarrow \frac{S_{BAE}}{S_{BHD}} = \left(\frac{AB}{HB} \right)^2 = \left(\frac{6}{3,6} \right)^2 \approx 2,8.$$

Bài toán 26. Cho tam giác ABC nhọn và hai đường cao AH, BK .

a) Chứng minh: $\Delta CKH \sim \Delta CBA$.

b) Tính diện tích tam giác CKH biết: $HA = 18 \text{ cm}$, $BC = 44 \text{ cm}$ và $CK = 20 \text{ cm}$.

Lời giải



a) Dễ thấy $\Delta CHA \sim \Delta CKB$ (g.g) vì: $\widehat{CHA} = \widehat{CKB} = 90^\circ$ và \widehat{C} chung.

$$\Rightarrow \frac{CH}{CK} = \frac{CA}{CB}$$

Do đó $\Delta CKH \sim \Delta CBA$ (c.g.c).

$$\text{b) Ta có: } S_{ABC} = \frac{1}{2} AH \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot 18 \cdot 44 = 396 \text{ (cm}^2\text{)}$$

Mặt khác $\Delta CKH \sim \Delta CBA$ (cmt)

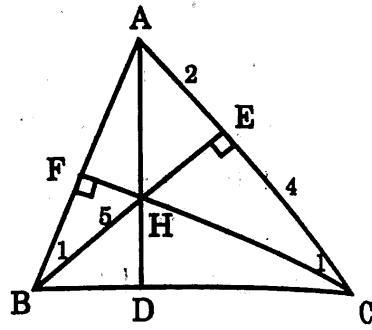
$$\Rightarrow \frac{S_{CKH}}{S_{CBA}} = \left(\frac{CK}{CB} \right)^2 = \left(\frac{20}{44} \right)^2 = \frac{25}{121}$$

$$\Rightarrow \frac{S_{CKH}}{396} = \frac{25}{121}$$

$$\Rightarrow S_{CKH} = \frac{396 \cdot 25}{121} = 81,8 \text{ cm}^2.$$

Bài toán 27. Cho tam giác ABC nhọn, ba đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H , biết $BE = 5 \text{ cm}$, $EC = 4 \text{ cm}$, $EA = 2 \text{ cm}$. Tính HC và HA .

Lời giải



Xét hai tam giác vuông AEB và AFC có:

$$\widehat{B_1} = \widehat{C_1} \text{ (cùng phụ với } \widehat{A})$$

Do đó: $\Delta AEB \sim \Delta HEC$ (g.g)

$$\Rightarrow \frac{BE}{CE} = \frac{AE}{HE}$$

$$\Rightarrow HE = \frac{CE \cdot AE}{BE} = \frac{4 \cdot 2}{5} = \frac{8}{5}$$

Ta có: $HC = \sqrt{HE^2 + CE^2}$ (định lí Pythagore)

$$= \sqrt{\left(\frac{8}{5}\right)^2 + 4^2} = 4,3 \text{ (cm)}$$

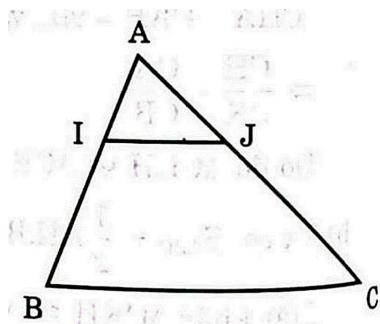
$$\text{Tương tự: } HA = \sqrt{AE^2 + HE^2} = \sqrt{2^2 + \left(\frac{8}{5}\right)^2} = 2,6 \text{ (cm).}$$

Bài toán 28. Cho tam giác ABC . Từ điểm I bất kì nằm giữa A và B , kẻ đường thẳng song song với BC cắt AC tại J .

a) Chứng minh: $\Delta AIJ \sim \Delta ABC$ đồng dạng.

b) Xác định vị trí của I trên cạnh AB sao cho $S_{AIJ} = \frac{1}{9} S_{ABC}$.

Lời giải



a) Ta có: $IJ \parallel BC$ (gt)

$\Rightarrow \Delta AIJ \sim \Delta ABC$ (g.g)

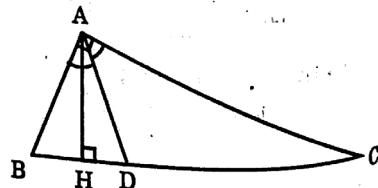
b) $S_{AIJ} = \frac{1}{9} S_{ABC} \Rightarrow \frac{S_{AIJ}}{S_{ABC}} = \frac{1}{9}$ mà $\frac{S_{AIJ}}{S_{ABC}} = \left(\frac{AI}{AB}\right)^2$

$$\text{Do đó: } \left(\frac{AI}{AB}\right)^2 = \frac{1}{9} \Rightarrow \frac{AI}{AB} = \frac{1}{3} \text{ (vì } k > 0\text{)}$$

$$\Rightarrow IA = \frac{1}{3} AB$$

Bài toán 29. Cho tam giác ABC vuông tại A , phân giác AD chia cạnh huyền thành hai đoạn có độ dài $1cm$ và $3cm$. Hỏi đường cao ứng với cạnh huyền chia cạnh đó theo tỉ số nào?

Lời giải



AD là phân giác của ΔABC ta có:

$$\frac{AB}{AC} = \frac{DB}{DC} = \frac{1}{3}$$

Lại có $\Delta AHB \sim \Delta CHA$ (g.g)

$$\Rightarrow \frac{S_{AHB}}{S_{CHA}} = \left(\frac{AB}{AC}\right)^2 = \frac{1}{9} \text{ hay } \frac{BH}{CH} = \frac{1}{9}$$

Vậy đường cao kẻ xuống cạnh huyền chia cạnh huyền thành hai dọc"

theo tỉ số $\frac{1}{9}$.

Bài toán 30. Cho tam giác ABC , qua D thuộc cạnh BC vẽ các đường thẳng song song với AC , AB lần lượt cắt AB , AC tại E và F . Biết rằng $S_{BDE} = 9cm^2$, $S_{CDF} = 4cm^2$. Tính S_{ABC} .

Lời giải

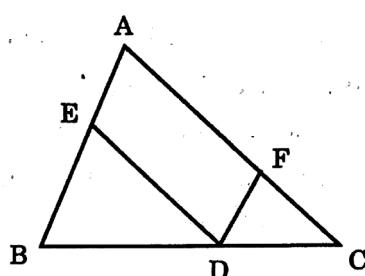
Ta có $ED \parallel AC$ (*gt*) $\Rightarrow \Delta EBD \sim \Delta ABC$ (1)

Tương tự $FD \parallel AB$ $\Rightarrow \Delta FDC \sim \Delta ABC$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \Delta EBD \sim \Delta FDC$.

$$\Rightarrow \frac{S_{EBD}}{S_{FDC}} = \left(\frac{BD}{DC}\right)^2 \text{ hay } \frac{9}{4} = \left(\frac{BD}{DC}\right)^2 \Rightarrow \frac{BD}{DC} = \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{BD}{3} = \frac{DC}{2} = \frac{BD+DC}{3+2} = \frac{BC^*}{5} \Rightarrow \frac{BD}{BC} = \frac{3}{5}$$



$$\Delta EBD \sim \Delta ABC \Rightarrow \frac{S_{EBD}}{S_{ABC}} = \left(\frac{BD}{BC} \right)^2 = \frac{9}{25}$$

$$\Rightarrow S_{ABC} = \frac{S_{EBD} \cdot 25}{9} = \frac{9 \cdot 25}{9} = 25 \text{ (cm}^2\text{)}$$

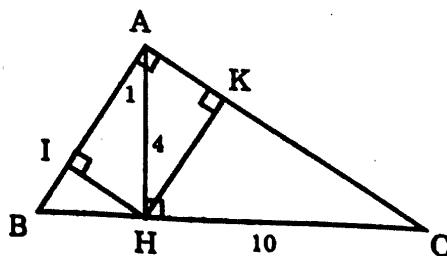
Nhận xét: Cũng từ bài toán 30 (giả thiết như trên) ta có thể tính được S_{AEDF} qua bài toán sau đây:

Bài toán 31. Cho tam giác ABC . Qua D thuộc cạnh BC vẽ các đường thẳng song song với AC , AB lần lượt cắt AB , AC tại E và F . Biết $S_{BDE} = 9 \text{ cm}^2$, $S_{CDF} = 4 \text{ cm}^2$. Tính S_{AEDF} .

Hướng dẫn: Ta có $S_{AEDF} = S_{ABC} - (S_{BDF} + S_{CDF})$.

Bài toán 32. Cho tam giác ABC vuông tại A , có $BC = 10 \text{ cm}$, đường cao $AH = 4 \text{ cm}$. Kẻ HI , HK lần lượt vuông góc với AB và AC . Tính diện tích tứ giác $AIHK$.

Lời giải



Ta có $\widehat{A}_1 = \widehat{C}$ (cùng phụ với \widehat{B})

Đó $\Delta AIH \sim \Delta CAB$ (g.g)

$$\Rightarrow \frac{S_{AIH}}{S_{CAB}} = \left(\frac{AH}{BC} \right)^2 = \left(\frac{4}{10} \right)^2 = \frac{4}{25}$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AH \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 10 = 20 \text{ cm}^2$$

$$\text{Ta có: } \frac{S_{AHH}}{20} = \frac{4}{25}$$

$$\Rightarrow S_{AIH} = \frac{20 \cdot 4}{25} = 3,2 \text{ (cm}^2\text{)}$$

Dễ thấy tứ giác $AIHK$ là hình chữ nhật (3 góc vuông)

$$\Rightarrow S_{AIHK} = 2S_{AIH} = 6,4 \text{ cm}^2.$$

Bài toán 33. Cho tam giác ABC có $AB = 2 \text{ cm}$, $AC = 4 \text{ cm}$. Qua B dựng đường thẳng cắt cạnh AC tại D sao cho $\widehat{ABD} = \widehat{ACB}$.

a) Chứng tỏ ΔABD và ΔACB đồng dạng, tính AD .

b) Gọi AH, AK lần lượt là các đường cao của ΔABC và ΔABD . Chứng tỏ: $S_{ABH} = 4S_{ADK}$.

Lời giải

a) Xét ΔABD và ΔACB có \hat{A} chung và $\widehat{ABD} = \widehat{ACB}$ (gt)

$$\Rightarrow \Delta ABD \sim \Delta ACB (g \cdot g) \Rightarrow \frac{AD}{AB} = \frac{AB}{AC}$$

$$\Rightarrow AD = \frac{AB^2}{AC} = \frac{2^2}{4} = 1$$

b) $\Delta ABD \sim \Delta ACB$ (cmt) cs

$$\Rightarrow \widehat{ADB} = \widehat{ABC}$$

Do đó $\Delta AHB \sim \Delta AKD$ (g.g)

$$\Rightarrow \frac{S_{AHB}}{S_{AKD}} = \left(\frac{AB}{AD} \right)^2 = \left(\frac{2}{1} \right)^2 = 4 \Rightarrow S_{AHB} = 4S_{AKD}$$

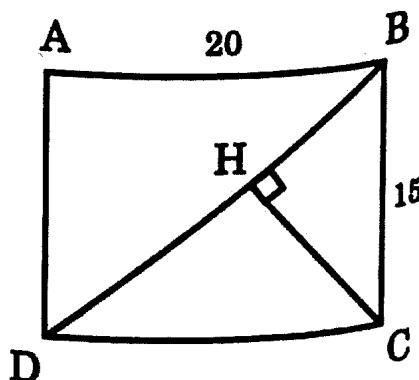
Bài toán 34. Cho hình chữ nhật ABCD có $AB = 20\text{cm}, BC = 15\text{cm}$, kẻ OH vuông góc với BD

a) Chứng minh $AD^2 = BH \cdot BD$.

b) Tính diện tích ΔBHC .

a) Xét ΔBCH và ΔBCD có:

Lời giải



$$\widehat{BHC} = \widehat{BCD} = 90^\circ \text{ (gt)}$$

\widehat{CBD} chung

$$\Rightarrow \Delta BHC \sim \Delta BCD (g \cdot g)$$

$$\Rightarrow \frac{BH}{BC} = \frac{BC}{BD}$$

$$\Rightarrow BC^2 = BH \cdot BD \text{ mà } BC = AD$$

$$\Rightarrow AD^2 = BH \cdot BD$$

b) Xét ΔBCD có:

$$BC = 15\text{cm};$$

$$DC = AB = 20\text{cm}$$

$$\Rightarrow BD^2 = BC^2 + DC^2 \text{ (Định lí Pythagore); } , BD^2 = 15^2 + 20^2 = 625$$

$$\Rightarrow BD = 25 \text{ (cm)}$$

Gọi S_{BCD} là diện tích tam giác BCD ta có:

$$S_{BCD} = \frac{1}{2} BC \cdot DC = \frac{15 \cdot 20}{2} = 150 \text{ (cm}^2\text{)}$$

Lại có $\Delta BHC \sim \Delta BCD$ (cmt)

$$\Rightarrow \frac{S_{BHC}}{S_{BCD}} = \left(\frac{BC}{BD} \right)^2 = \left(\frac{15}{25} \right)^2 = \frac{9}{25}$$

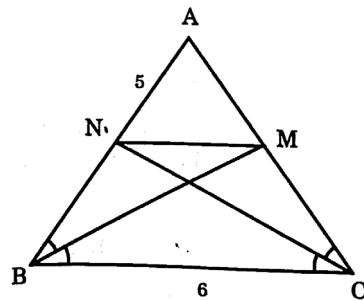
$$\Rightarrow S_{BHC} = \frac{9}{25} \cdot S_{BCD} = \frac{9}{25} \cdot 150 = 54 \text{ (cm}^2\text{).}$$

Bài toán 35. Tam giác ABC cân tại A có $AB = AC = 5 \text{ cm}$, $BC = 6 \text{ cm}$, phân giác của góc B cắt AC tại M , phân giác của góc C cắt AB tại N .

a) Tính AM, CM và MN .

b) Tính tỉ số diện tích của ΔAMN và ΔABC .

Giải



a) BM là phân giác của góc \hat{B} (gt)

$$\Rightarrow \frac{MA}{MC} = \frac{BA}{BC} = \frac{5}{6}$$

$$\Rightarrow \frac{MA}{5} = \frac{MC}{6} = \frac{MA+MC}{5+6} = \frac{5}{11}$$

$$\Rightarrow MA = \frac{25}{11} \approx 2,3 \text{ (cm)}$$

Do đó: $MC = AC - MA \approx 5 - 2,3 \approx 2,7 \text{ (cm)}$

Tương tự CN là phân giác của \hat{C} : $\frac{NA}{NB} = \frac{CA}{CB}$

$$\text{mà } CA = AB \text{ (gt)} \Rightarrow \frac{MA}{MC} = \frac{NA}{NB}$$

$$\text{Đó } \Delta AMN \text{ cs } \Delta ABC \text{ (c.g.c)} \Rightarrow \frac{MN}{BC} = \frac{MA}{AB}$$

$$\Rightarrow MN = \frac{BC \cdot MA}{AB} = \frac{6,2,3}{5} = 2,8 \text{ (cm)}$$

$$\text{b)} \triangle AMN \sim \triangle ABC \text{ (cmt)} \Rightarrow \frac{S_{AMN}}{S_{ABC}} = \left(\frac{AM}{AC} \right)^2 \approx \left(\frac{2,3}{5} \right)^2 \approx 0,2.$$

IV. Toán thực tế

Bài toán 36. Một người ở vị trí điểm A muốn đo khoảng cách đến điểm B ở bên kia sông mà không thể qua sông được. Sử dụng giác kê, người đó xác định được một điểm M trên bờ sông sao cho $AM = 2m$, AM vuông góc với AB và đo được số đo góc AMB . Tiếp theo, người đó vẽ trên giấy tam giác $A'M'B'$ vuông tại A' , có $A'M' = 1\text{cm}$, $\widehat{A'M'B'} = \widehat{AMB}$ và đo được $A'B' = 5\text{cm}$ (hình vẽ). Hỏi khoảng cách từ A đến B là bao nhiêu mét?



Lời giải

$\Delta A'B'M'$ và ΔABM là hai tam giác vuông, có $\widehat{M}' = \widehat{M}$ (gt)

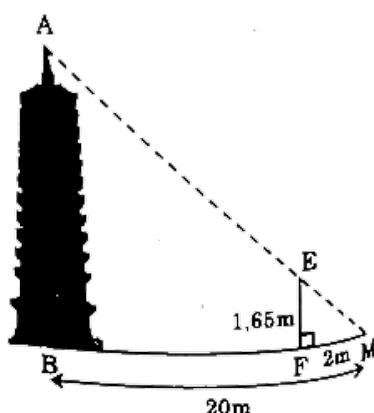
$$\text{Do đó } \Delta A'B'M' \text{ cs } \Delta ABM \text{ (g.g)} \Rightarrow \frac{AB}{A'B'} = \frac{AM}{A'M'},$$

(đổi: $5\text{cm} = 0,05\text{m}$; $1\text{cm} = 0,01\text{m}$)

$$\text{hay } \frac{AB}{0,05} = \frac{2}{0,01} \Rightarrow AB = \frac{2 \cdot 0,05}{0,01} = 10\text{m}$$

Vậy khoảng cách từ A đến B là 10m .

Bài toán 37. Trong hình vẽ, biết $MB = 20\text{m}$, $MF = 2\text{m}$, $EF = 1,65\text{m}$. Tính chiều cao AB của ngọn tháp.



Lời giải

ΔABM và ΔEFM là hai tam giác vuông, có \widehat{M} chung (gt)

Do đó ΔABM cs ΔEFM (g.g)

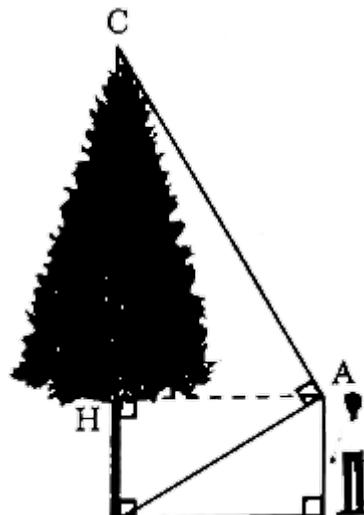
$$\Rightarrow \frac{AB}{EF} = \frac{BM}{FM} \text{ hay } \frac{AB}{1,65} = \frac{20}{2}$$

$$\Rightarrow AB = \frac{20 \cdot 1,65}{2} = 16,5(m)$$

Vậy chiều cao của ngọn tháp là $16,5m$.

Bài toán 38. Trong hình vẽ, bạn Minh dùng một dụng cụ để đo chiều cao của cây. Cho biết khoảng cách từ mắt bạn Minh đến cây và đến mặt đất lần lượt là $AH = 2,8m$ và $AK = 1,6m$. Em hãy tính chiều cao của cây.

Lời giải



Ta có tứ giác $AHBK$ là hình chữ nhật (3 góc vuông)

$$\Rightarrow HB = AK = 1,6m,$$

Lại có tam giác ΔAHB vuông tại H .

Theo định lí Pythagore, ta có: $AB^2 = AH^2 + HB^2 = (2,8)^2 + (1,6)^2 = \frac{260}{25}$.

ΔABC và ΔAHB là hai tam giác vuông,

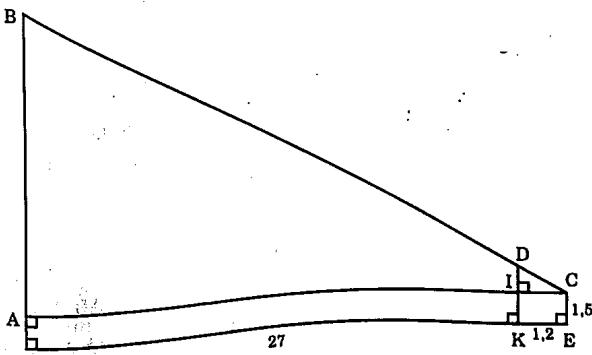
có \widehat{ABC} chung (gt)

$$\text{Do đó } \Delta ABC \sim \Delta HBA \quad (\text{g.g}) \Rightarrow \frac{BC}{AB} = \frac{AB}{HB} \Rightarrow AB^2 = BC \cdot HB$$

$$\text{hay } \frac{260}{25} = BC \cdot 1,6 \Rightarrow BC = \frac{260}{25} : 1,6 = 6,5m$$

Vậy chiều cao của cây là $6,5 m$.

Bài toán 39. Một người đo chiều cao của một tòa nhà nhờ một cọc chôn xuống đất, cọc cao $3 m$ và đặt cách xa tòa nhà $27m$. Sau khi người ấy lùi ra xa cách cọc $1,2m$ thì nhìn thấy đầu cọc và đỉnh tòa nhà cùng nằm trên một đường thẳng. Hỏi tòa nhà cao bao nhiêu mét, biết rằng khoảng cách từ chân đến mắt người ấy là $1,5m$.



Lời giải

Gọi chiều cao của tòa nhà là $BH = h + AH$

Ta có $ICEK$ là hình chữ nhật (có 3 góc vuông) $\Rightarrow IK = CE = 1,5m$ mà $DK = 3m$ (*gt*) $\Rightarrow DI = 1,5m$

Tương tự $AIKH$ là hình chữ nhật $\Rightarrow AI = HK = 27m$

Tam giác ABC vuông tại A , có $DI // AB (\perp AC)$.

Theo bài toán 19, Bài 15, phần định lí Thalès, ta có:

$$\frac{AB}{DI} = \frac{AC}{IC} \text{ mà } AC = AI + IC, \text{ ta có:}$$

$$\frac{h}{1,5} = \frac{27 + 1,2}{1,2} \Rightarrow h = \frac{1,5 \cdot 28,2}{1,2} \approx 35m$$

Vậy chiều cao của tòa nhà là $h + AH = 35 + 1,5 = 36,5m$.

C. BÀI TẬP

- 9.17.** Cho ΔABC vuông tại A , đường cao AH biết $HB = 4cm, HC = 9cm$.
- Tính AH, AB, AC .
 - Chứng minh rằng $AB^2 = HB \cdot BC$.
- 9.18.** Cho tam giác ABC vuông tại A , đường cao AH , trung tuyến AM . Tính diện tích ΔAHM biết $HB = 9cm$ và $HC = 16cm$.
- 9.19.** Cho tam giác ABC đều có độ dài cạnh là $30cm$ và ΔDEF đều, biết tỉ số diện tích của hai tam giác này là $\frac{S_{ABC}}{S_{DEF}} = \frac{1}{9}$. Tính chu vi ΔDEF .

☞ HẾT ☞

BÀI 37. HÌNH ĐỒNG DẠNG

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

Nhận biết hình đồng dạng - Hình đồng dạng phôi cảnh.

Vẽ hình đồng dạng phôi cảnh theo một tỉ số đồng dạng.

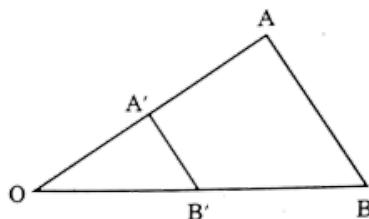
Nhận biết được vẻ đẹp trong tự nhiên, nghệ thuật, kiến trúc, công nghệ chế tạo. biểu diễn qua hình đồng dạng.

B. PHÂN LOẠI CÁC BÀI TẬP

I. Nhận biết hình đồng dạng phôi cảnh

Bài toán 1. Lấy một điểm O nằm ngoài một đoạn thẳng AB . Hãy vẽ hình đồng dạng phôi cảnh tâm O của đoạn thẳng AB theo tỉ số đồng dạng

Lời giải

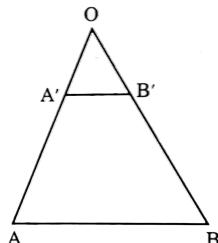


Trên đoạn thẳng OA, OB lần lượt lấy các điểm A', B' là trung điểm của đoạn thẳng OA và OB

Khi đó, đoạn thẳng $A'B'$ là hình đồng dạng phôi cảnh của đoạn thẳng AB , với điểm O là tâm đồng dạng phôi cảnh và tỉ số đồng dạng $k = \frac{1}{2}$.

Bài toán 2. Cho điểm O nằm ngoài đoạn thẳng AB . Hãy chỉ ra đoạn thẳng $A'B'$ sao cho hai đoạn thẳng $A'B'$, AB đồng dạng phôi cảnh, điểm O là tâm đồng dạng phôi cảnh và $\frac{A'B'}{AB} = 3$.

Lời giải



Trên các tia OA, OB lần lượt lấy các điểm A', B' sao cho $\frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB} = 3$.

Khi đó hai đoạn thẳng AB và $A'B'$ là đồng dạng phôi cảnh và điểm O là tâm đồng dạng phôi cảnh.

Theo **bài toán 19, Bài 15**, phần định lí Thalès, ta có $\frac{A'B'}{AB} = \frac{OA'}{OA} = 3$.

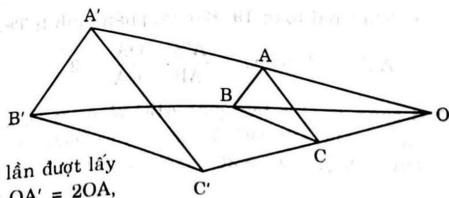
Nhận xét: Hình đồng dạng phôi cảnh tỉ số k của đoạn thẳng AB là một đoạn thẳng $A'B'$ (nằm trên đường thẳng song song với đường thẳng AB) sao cho $A'B' = k \cdot AB$.

Bài toán 3. Vẽ hình đồng dạng phôi cảnh của tam giác ABC với O là tâm đồng dạng phôi cảnh và tỉ số đồng dạng 2.

Hướng dẫn: Vẽ hình đồng dạng phôi cảnh từng đoạn thẳng của tam giác (như Bài toán 1).

Lời giải

Trên các tia OA, OB, OC lần lượt lấy



Các điểm A', B', C' sao cho $OA' = 2OA$,

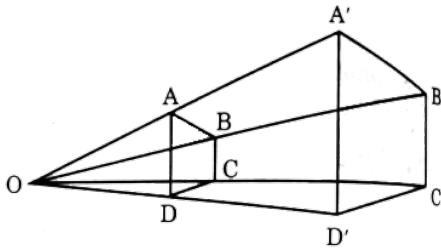
$OB' = 2OB, OC' = 2OC$.

Khi đó tam giác $A'B'C'$ là hình đồng dạng phôi cảnh của tam giác ABC với O là tâm đồng dạng phôi cảnh và tỉ số đồng dạng là $k = 2$.

Bài toán 4. Vẽ hình đồng dạng phôi cảnh của tứ giác $ABCD$ với tâm đồng dạng phôi cảnh là điểm O và tỉ số đồng dạng là 3.

Hướng dẫn: Ta cũng vẽ hình đồng dạng phôi cảnh của từng đoạn thẳng của tứ giác.

Lời giải



Trên các tia OA, OB, OC, OD lần lượt lấy các điểm A', B', C', D' sao cho $OA' = 3OA, OB' = 3OB, OC' = 3OC, OD' = 3OD$.

Khi đó tứ giác $A'B'C'D'$ là hình đồng dạng phôi cảnh của tứ giác $ABCD$ với O là tâm đồng dạng phôi cảnh và tỉ số đồng dạng là $k = 3$.

II. Áp dụng

Bài toán 5. Cho đoạn thẳng AB và điểm O , kẻ các tia OA, OB trên các tia OA, OB lần lượt lấy các điểm A' và B' sao cho $OA' = 3OA, OB' = 3OB$ (xem hình vẽ).

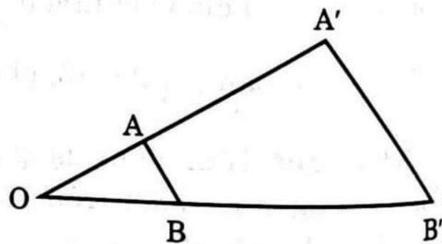
a) $A'B'$ có song song với AB không?

b) Tính tỉ số $\frac{A'B'}{AB}$.

Lời giải

a) Ta có $OA' = 3OA \Rightarrow \frac{OA'}{OA} = 3$

Tương tự $\frac{OB'}{OB} = 3 \Rightarrow \frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB} = 3$



Theo định lí Thalès, ta có $A'B' \parallel AB$.

b) Theo bài toán 19, Bài 15, phán định lí Thalès, ta có:

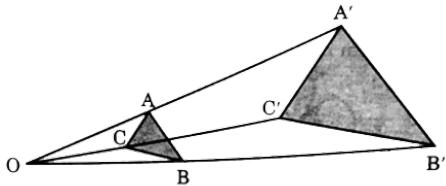
$$A'B' \parallel AB \text{ (cmt)} \Rightarrow \frac{A'B'}{AB} = \frac{OA'}{OA} = 3.$$

Bài toán 6. Cho tam giác ABC và điểm O , kẻ các tia OA, OB, OC . Trên các tia OA, OB, OC lần lượt lấy các điểm A', B' và C' sao cho $OA' = 3OA$, $OB' = 3OB$, $OC' = 3OC$ (xem hình vẽ).

a) Hãy tính và so sánh các tỉ số $\frac{A'B'}{AB}, \frac{A'C'}{AC}, \frac{B'C'}{BC}$.

b) Chứng minh tam giác $A'B'C'$ đồng dạng với tam giác ABC .

Lời giải



a) Ta có $OA' = 3OA \Rightarrow \frac{OA'}{OA} = 3$

Tương tự $\frac{OB'}{OB} = 3, \frac{OC'}{OC} = 3$

$$\Rightarrow \frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB} = \frac{OC'}{OC} = 3$$

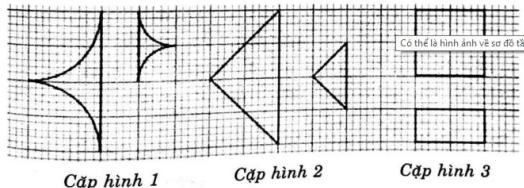
Theo định lí Thalès, ta có $A'B' \parallel AB$ và $B'C' \parallel BC$

$$\Rightarrow \frac{AB'}{AB} = \frac{OA'}{OA} = 3 \text{ (Theo bài toán 19, Bài 15, phần định lí Thalès)}$$

Tương tự $\frac{A'C'}{AC} = 3, \frac{B'C'}{BC} = 3 \Rightarrow \frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{B'C'}{BC} = 3$

b) Đẳng thức (1) chứng tỏ $\Delta A'B'C' \sim \Delta ABC$ cs (c.c.c) với tỉ số $k = 3$.

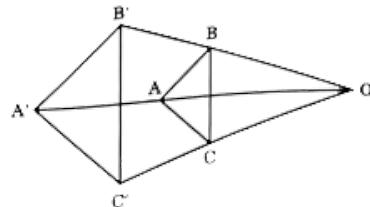
Bài toán 7. Trong những cặp hình dưới đây (hình vẽ) cặp hình nào là hai hình đồng dạng? Hãy chỉ ra một cặp hình đồng dạng phôi cảnh và vẽ cặp hình đó cùng tâm phôi cảnh vào vở.



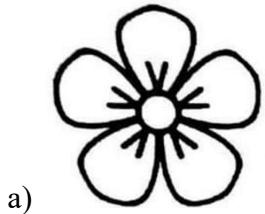
Lời giải

Cặp hình 1 là hai hình đồng dạng.

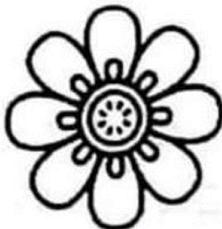
Cặp hình 2 là hai hình đồng dạng phối cảnh, với O là tâm đồng dạng hối cảnh.



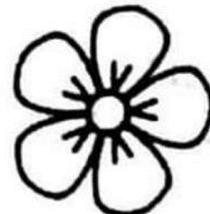
Bài toán 8. Biết rằng mỗi hình dưới đây đồng dạng với một hình khác hãy tìm các cặp hình đồng dạng đó.



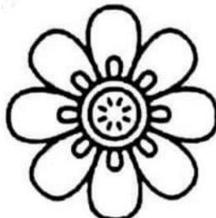
a)



b)



c)



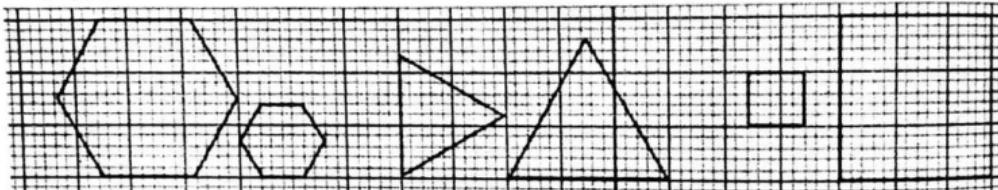
d)

Lời giải

Hình a và c là cặp hình đồng dạng.

Tương tự hình b và d là cặp hình đồng dạng.

Bài toán 9. Trong các cặp hình đồng dạng dưới đây, cặp hình nào là đồng dạng phối cảnh?



Cặp hình lục giác đều

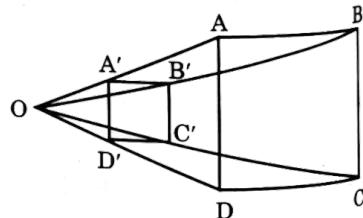
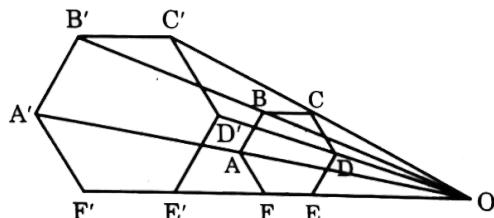
Cặp hình tam giác đều

Cặp hình vuông

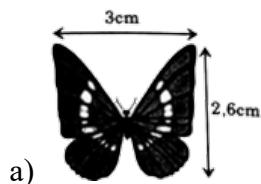
Lời giải

Cặp hình lục giác đều là cặp hình đồng dạng phối cảnh.

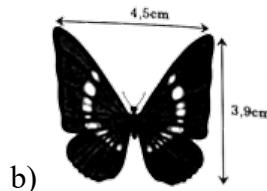
Cặp hình vuông là cặp hình đồng dạng phối cảnh.



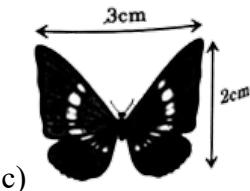
Bài toán 10. Trong các hình dưới đây, hai hình nào đồng dạng với nhau?



a)



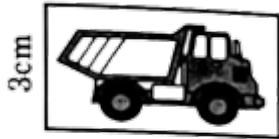
b)



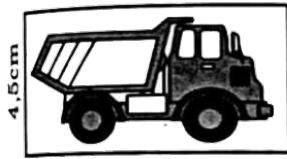
c)

Ta có: $\frac{3}{4,5} = \frac{2,6}{3,9} = \frac{2}{3}$ nên hai hình a và b đồng dạng với nhau.

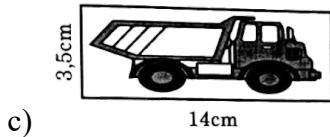
Bài toán 11. Trong các hình b,c,d , hình nào đồng dạng với hình a ? Giải thích.



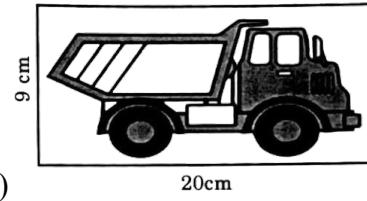
a)



b)



c)



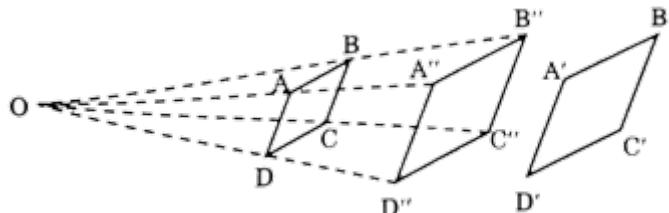
d)

Lời giải

Ta có: $\frac{3}{4,5} = \frac{7}{10,5} = \frac{2}{3}$ nên hình b đồng dạng với a.

Bài toán 12. Trong hình vẽ các điểm A, B, C, D lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng OA'', OB'', OC'' . Quan sát hình vẽ và cho biết:

- a) Hai hình thoi $A'B'C'D'$ và $A''B''C''D''$ có bằng nhau hay không?
- b) Hai hình thoi $A'B'C'D'$ và $ABCD$ có đồng dạng hay không?



Lời giải

a) Quan sát hình vẽ ta thấy hai hình thoi $A'B'C'D'$ và $A''B''C''D''$ bằng nhau vì có các cạnh bằng nhau $A'B' = A''B'', B'C' = B''C'', C'D' = C''D'', D'A' = D''A''$ và $\widehat{A}' = \widehat{A}'', \widehat{B}' = \widehat{B}'', \widehat{C}' = \widehat{C}'', \widehat{D}' = \widehat{D}''$.

b) A, B, C, D lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng OA'', OB'', OC''

Ta có: $\frac{OA''}{OA} = \frac{OB''}{OB} = \frac{OC''}{OC} = \frac{OD''}{OD} = 2$ nên hai hình $A''B''C''D''$ và $ABCD$ đồng dạng phôi cảnh với O là tâm đồng dạng phôi cảnh và tỉ số $k = 2$.

Vì hình thoi $A'B'C'D'$ và $A''B''C''D''$ bằng nhau (theo quan sát) mà $A''B''C''D''$ và $ABCD$ đồng dạng phôi cảnh (cmt) nên hình thoi $A'B'C'D'$ và $ABCD$ đồng dạng.

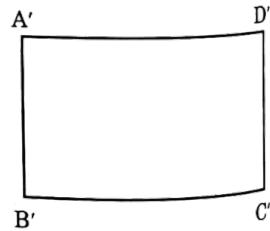
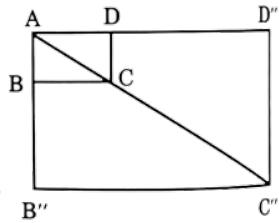
Bài toán 13. Cho hai hình chữ nhật $ABCD$ và $A'B'C'D'$ có $\frac{A'B'}{B'C'} = \frac{AB}{BC}$. Trên các tia AB, AC, AD ta lần lượt lấy các điểm B'', C'', D'' sao cho $\frac{AB''}{AB} = \frac{AC''}{AC} = \frac{AD''}{AD} = \frac{B'C'}{BC}$. Chứng minh:

a) Hình chữ nhật $AB''C''D''$ đồng dạng phôi cảnh với hình chữ nhật $ABCD$;

b) $AB'' = A'B', B''C'' = B'C'$.

c) Hai hình chữ nhật $ABCD$ và $A'B'C'D'$ là đồng dạng.

Lời giải



a) Ta có: $\frac{A'B'}{B'C'} = \frac{AB}{BC}$ (gt) $\Rightarrow \frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC}$

Đặt $k = \frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC}$

Lại có $\frac{AB''}{AB} = \frac{AC''}{AC} = \frac{AD''}{AD} = \frac{B'C'}{BC}$ mà $\frac{B'C'}{BC} = k$

$$\Rightarrow \frac{AB''}{AB} = \frac{AC''}{AC} = \frac{AD''}{AD} = k \quad (2)$$

Đẳng thức (2) chứng tỏ hình chữ nhật $AB''C''D''$ đồng dạng phôi cảnh với hình chữ nhật $ABCD$ với A là tâm đồng dạng phôi cảnh và tỉ số đồng dạng phôi cảnh là k .

b) Từ (1) và (2) $\Rightarrow \frac{A'B'}{AB} = \frac{AB''}{AB} = k \Rightarrow AB'' = A'B'$

Tương tự $\frac{B'C'}{BC} = \frac{AD''}{AD}$ hay $\frac{B'C'}{BC} = \frac{B''C''}{BC}$

$$\Rightarrow \frac{B'C'}{BC} = \frac{B''C''}{BC} = k \Rightarrow B''C'' = B'C'$$

c) Ta có: $AB'' = A'B'$; $B''C'' = B'C'$ (cmt)

Chứng tỏ hai hình chữ nhật $AB''C''D''$ và $A'B'C'D'$ bằng nhau mà $ABCD$ (cmt)

\Rightarrow Hai hình chữ nhật $ABCD$ và $A'B'C'D'$ đồng dạng.

C. BÀI TẬP

9.20. Trong các hình dưới đây, hãy chọn ra các cặp hình đồng dạng.



a)



b)



c)



d)



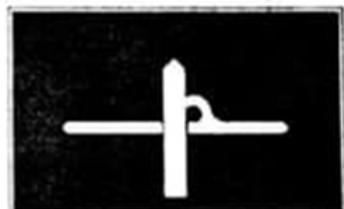
e)



g)

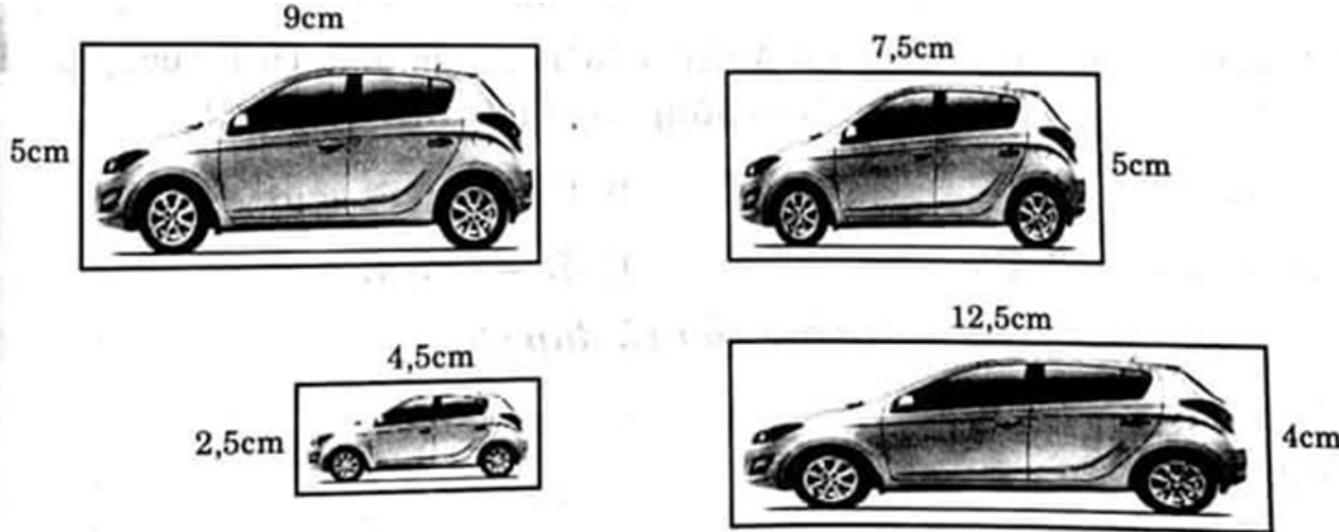


h)

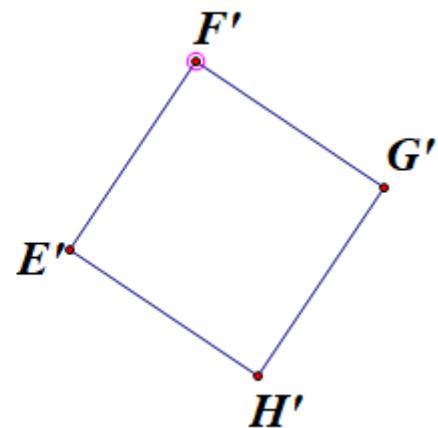
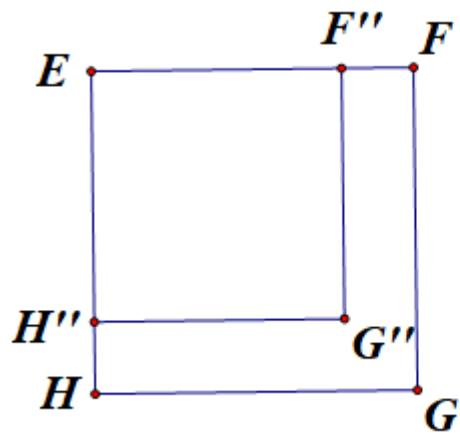


i)

9.21. Trong các hình b, c, d hình nào đồng dạng với hình a? Giải thích.



- 9.22.** Cho các hình vuông, $EFCH$, $E'F'G'H'$ lần lượt có độ dài các cạnh là $5cm$ và $4cm$. Hình vuông đó có đồng dạng hay không? Vì sao?



ÔN TẬP CUỐI CHƯƠNG IV

PHẦN A. TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Cho ABC là tam giác không cân. Biết $\Delta A'B'C' \sim \Delta ABC$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A.** $\Delta A'B'C' \sim \Delta ACB$. **B.** $\Delta B'C'A' \sim \Delta BAC$.
C. $\Delta B'A'C' \sim \Delta BCA$. **D.** $\Delta A'C'B' \sim \Delta ABC$.

Lời giải

Chọn A

Câu 2. Cho tam giác $\Delta A'B'C' \sim \Delta ABC$ với tỉ số đồng dạng bằng 2. Khẳng định nào sau đây là đúng.

- A.** $\frac{AB}{A'B'} = 2$. **B.** $\frac{AB}{AC} = 2$ **C.** $\frac{A'B'}{AB} = 2$. **D.** $\frac{A'B'}{AC} = 2$.

Chọn C

Câu 3. Trong các bộ ba số đo dưới đây, đâu là số đo ba cạnh của một tam giác vuông?

- A.** $3m, 5m, 6m$. **B.** $6m, 8m, 10m$. **C.** $1cm, 0,5cm, 1,25cm$. **D.** $9m, 16m, 25m$.

Lời giải

Chọn B

Câu 4. Cho tam giác ABC vuông tại A ($AB \neq AC$) và tam giác DEF vuông tại D ($DE \neq DF$). Điều nào dưới đây không suy ra $\Delta ABC \sim \Delta DEF$?

- A.** $\hat{B} = \hat{E}$. **B.** $\hat{C} = \hat{F}$. **C.** $\hat{B} + \hat{C} = \hat{E} + \hat{F}$ **D.** $\hat{B} - \hat{C} = \hat{E} - \hat{F}$.

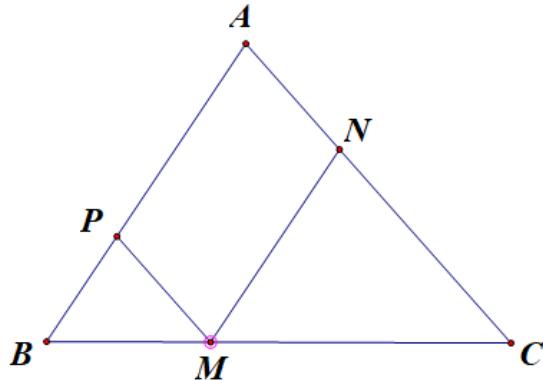
Lời giải

Chọn D

PHẦN B. TỰ LUẬN

Bài 1. Cho hình vẽ bên biết rằng $MN \parallel AB$, $MP \parallel AC$. Hãy liệt kê ba cặp hai tam giác khác nhau đồng dạng có trong hình.

Lời giải



Ta có $MN \parallel AB$ (gt) $\Rightarrow \widehat{CNM} = \hat{A}$ và

$\widehat{CMN} = \hat{B}$ (cặp góc đồng vị)

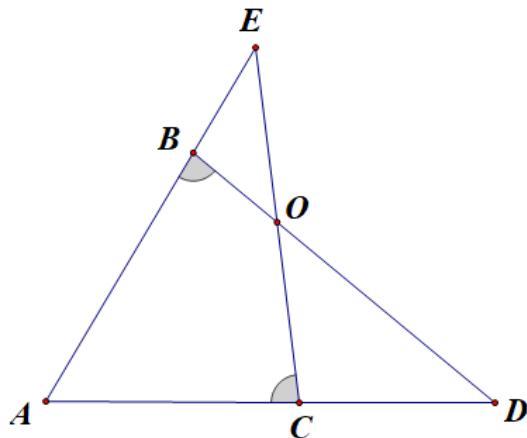
Do đó $\Delta ABC \sim \Delta NMC$ (g.g) (1)

Chứng minh tương tự, ta có $MP \parallel AC$ (gt)

$$\Rightarrow ABC \sim \Delta PBM \text{ (g.g) (2)}$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \Delta NMC \sim \Delta PBM$

Bài 2. Cho hình vẽ bên, biết rằng $\widehat{ABD} = \widehat{ACE}$. Chứng minh rằng $\Delta ABD \sim \Delta ACE$ và $\Delta BOE \sim \Delta COD$



Lời giải

Xét ΔABD và ΔACE có.

$$\hat{A} \text{ chung. } \widehat{ABD} = \widehat{ACE} \text{ (gt)}$$

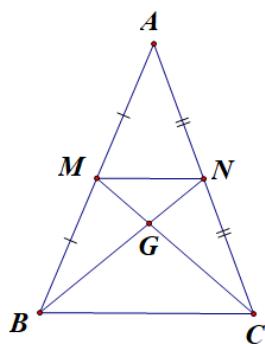
Do đó $\Delta ABD \sim \Delta ACE$ (g.g) $\Rightarrow \widehat{D} = \widehat{E}$

Xét ΔBOE và ΔCOD có $\widehat{BOE} = \widehat{COD}$ (đối đỉnh).

$$\widehat{E} = \widehat{D} \text{ (cmt). Do đó } \Delta BOE \sim \Delta COD \text{ (g.g)}$$

Bài 3. Hai đường trung tuyến BM, CN của tam giác ABC cắt nhau tại điểm G (hình vẽ). Chứng minh rằng tam giác GMN đồng dạng với tam giác GBC tìm tỉ số đồng dạng.

Lời giải



Ta có M là trung điểm của AC (gt).

N là trung điểm của AB (gt).

$\Rightarrow MN$ là đường trung bình của tam giác ABC .

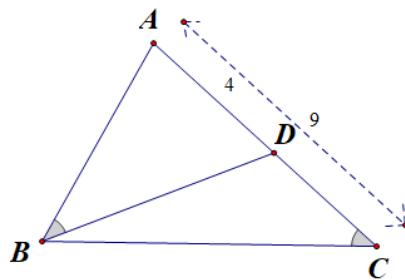
$\Rightarrow MN \parallel BC \Rightarrow \widehat{NMG} = \widehat{GBC}$ (cặp góc so le trong).

Và $\widehat{NGM} = \widehat{BGC}$ (đối đỉnh) $\Rightarrow \Delta GMN \sim \Delta GBC$ (g.g)

Vì G là trọng tâm tam giác ABC ta có $GM = \frac{1}{2}GB$.

Tương tự $GN = \frac{1}{2}GC$ nên ta có $\Delta GMN \sim \Delta GBC$ theo tỉ số đồng dạng là $k = \frac{1}{2}$.

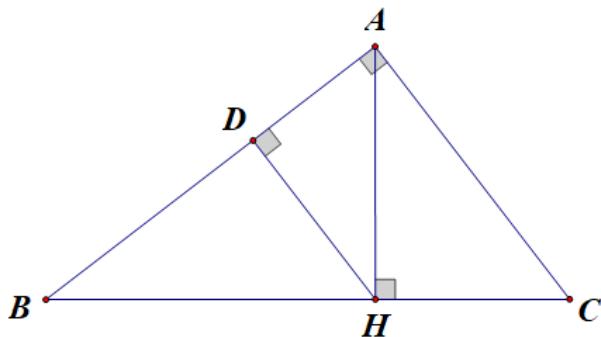
Bài 4. Trong hình vẽ bên, cho biết $\widehat{ABD} = \widehat{ACB}$, $AC = 9cm; AD = 4cm$.



a) Chứng minh $\Delta ABD \sim \Delta ACB$.

b) Tính độ dài cạnh AB

Lời giải



a) Xét ΔABD và ΔACB có \widehat{A} chung;

$$\widehat{ABD} = \widehat{ACB} \text{ (gt)}$$

Do đó $\Delta ABD \sim \Delta ACB$ (g.g)

b) Ta có $\Delta ABD \sim \Delta ACB$ (cmt) $\Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{AD}{AB}$

$$\Rightarrow AB^2 = AC \cdot AD \text{ hay } AB^2 = 36 \Rightarrow AB = 6(cm)$$

Bài 5. Cho tam giác ABC vuông tại A , có $AB = 5(cm); AC = 4(cm)$. Gọi AH, HD lần lượt là các đường cao kẻ từ đỉnh A của tam giác ABC và đỉnh H của tam giác HAB .

a) Chứng minh rằng $\Delta HDA \sim \Delta AHC$.

b) Tính độ dài các đoạn thẳng HA, HB, HC, HD .

Lời giải

a) Ta có $\widehat{DAH} = \widehat{C}$ (cùng phụ với \widehat{B}).

Dó đó $\Delta HDA \sim \Delta HAC$ (g.g).

b) Tam giác ABC vuông tại A (gt). Theo định lí Pytago ta có

$$BC^2 = AB^2 + AC^2$$

$$BC^2 = 5^2 + 4^2$$

$$BC^2 = 41 \Rightarrow BC = \sqrt{41}.$$

Gọi S_{ABC} là diện tích của tam giác ABC .

$$\text{Ta có } S_{ABC} = \frac{1}{2} AH \cdot BC = \frac{1}{2} AB \cdot AC \Rightarrow AH \cdot BC = AB \cdot AC$$

$$\text{Hay } AH \cdot \sqrt{41} = 5 \cdot 4 \Rightarrow AH = \frac{20}{\sqrt{41}} \text{ (cm)}$$

Xét ΔABC và ΔAHB có

$$\widehat{BAC} = \widehat{AHB} = 90^\circ \text{ (gt). } \widehat{B} \text{ (chung)} \text{ Dó đó } \Delta ABC \sim \Delta HBA \text{ (g.g)}$$

$$\Rightarrow \frac{AB}{BH} = \frac{BC}{AB} \Rightarrow AB^2 = BC \cdot BH \text{ hay } 5^2 = BH \cdot \sqrt{41} \Rightarrow BH = \frac{25}{\sqrt{41}} \text{ (cm)}$$

$$\text{Chứng minh tương tự, ta có } \Delta ABC \sim \Delta HAC \text{ (g.g)} \Rightarrow \frac{AC}{HC} = \frac{BC}{AC}$$

$$\Rightarrow AC^2 = BC \cdot HC \text{ hay } 4^2 = HC \cdot \sqrt{41} \Rightarrow HC = \frac{16}{\sqrt{41}} \text{ (cm)}.$$

Xét ΔAHB vuông tại đường cao HD , ta có

$$AB \cdot HD = HA \cdot HB \text{ hay } 5 \cdot HD = \frac{20}{\sqrt{41}} \cdot \frac{25}{\sqrt{41}} = \frac{500}{41} \Rightarrow HD = \frac{100}{41} \text{ (cm)}$$

Bài 6. Cho ΔABC vuông tại A ($AB < AC$). Kẻ đường cao AH ($H \in BC$).

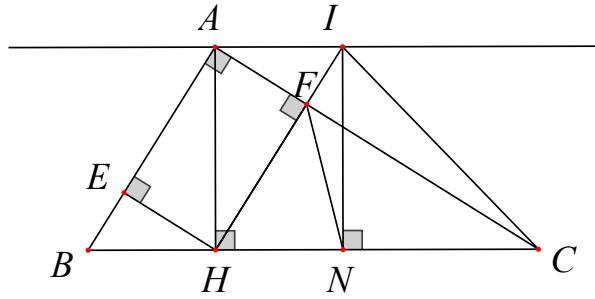
a) Chứng minh rằng $\Delta ABH \sim \Delta CBA$, suy ra $AB^2 = BH \cdot BC$;

b) Vẽ HE vuông góc với AB tại E , vẽ HF vuông góc với AC tại F . Chứng minh rằng $AE \cdot AB = AF \cdot AC$.

c) Chứng minh rằng $\Delta AFE \sim \Delta ABC$;

d) Qua A vẽ đường thẳng song song với BC cắt đường thẳng HF tại I . Vẽ IN vuông góc với BC tại N . Chứng minh rằng $\Delta HNF \sim \Delta HIC$.

Lời giải



a) Xét ΔABH và ΔABC có:

$$\widehat{AHB} = \widehat{BAC} = 90^\circ \text{ (gt)}; \widehat{B} \text{ chung}$$

Do đó $\Delta AHB \sim \Delta CAB \text{ (g.g)}$

$$\Rightarrow \frac{AB}{BC} = \frac{BH}{AB} \Rightarrow AB^2 = BH \cdot HC.$$

b) Xét ΔAHE và ΔAHB có:

$$\widehat{AEH} = \widehat{AHB} = 90^\circ \text{ (gt)}$$

\widehat{B} chung

$$\Rightarrow \Delta AEH \sim \Delta AHB \text{ (g.g)} \Rightarrow \frac{AH}{AB} = \frac{AE}{AH} \Rightarrow AH^2 = AB \cdot AE \text{ (1)}$$

Chứng minh tương tự ta có: $\Delta AFH \sim \Delta AHC$

$$\Rightarrow \frac{AH}{AC} = \frac{AF}{AH} \Rightarrow AH^2 = AC \cdot AF \text{ (2)}$$

$$\text{Từ (1) và (2)} \Rightarrow AE \cdot AB = AF \cdot AC \Rightarrow \frac{AE}{AF} = \frac{AC}{AB}$$

c) Xét ΔAEF và ΔABC có:

\widehat{BAC} chung

$$\frac{AE}{AF} = \frac{AC}{AB} \text{ (cmt)}$$

$$\Rightarrow \Delta AEF \sim \Delta ACB \text{ (c.g.c)}$$

d) Xét ΔHFC và ΔHNI có

$$\widehat{HFC} = \widehat{HNI} = 90^\circ \text{ và } \widehat{H} \text{ chung}$$

$$\text{Do đó } \Delta HFC \sim \Delta HNI \text{ (g.g)} \Rightarrow \frac{HF}{HN} = \frac{HC}{HI}$$

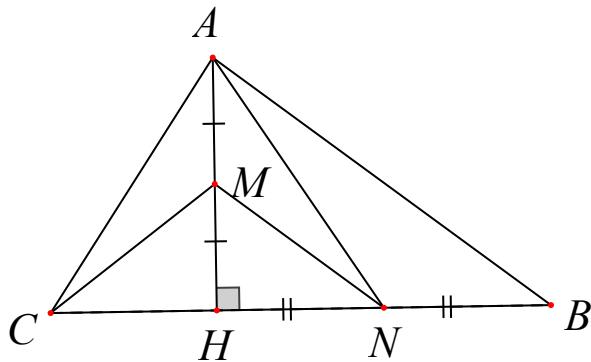
$$\text{Xét } \Delta HNF \text{ và } \Delta HIC \text{ có } \widehat{H} \text{ chung và } \frac{HF}{HN} = \frac{HC}{HI} \text{ (cmt)}$$

$$\Rightarrow \Delta HNF \sim \Delta HIC \text{ (c.g.c).}$$

Bài 7. Cho ΔABC có đường cao AH . Biết $AH = 12\text{ cm}; CH = 9\text{ cm}; BH = 16\text{ cm}$. Lấy M, N lần lượt là trung điểm của AH, BH (hình vẽ).

- a) Chứng minh rằng ΔABC vuông tại A ;
- b) Chứng minh $MN \perp AC$ và $CM \perp AN$;
- c) Tính diện tích ΔAMN .

Lời giải



- a) ΔAHB vuông tại $H(gt)$

Theo định lý Pytago ta có:

$$AB^2 = AH^2 + HB^2 = 12^2 + 16^2 = 400$$

$$\Rightarrow AB = 20(\text{cm})$$

Tương tự, ta có ΔAHC vuông tại H

$$AC^2 = AH^2 + HC^2 = 12^2 + 9^2 = 225$$

$$\Rightarrow AC = 15(\text{cm})$$

Ta có: $BC = 9 + 16 = 25(\text{cm})$

$$\Delta ABC \text{ có } BC^2 = AB^2 + AC^2 (25^2 = 20^2 + 15^2)$$

Theo định lý Pytago đảo $\Rightarrow \Delta ABC$ vuông tại A .

- b) Ta có M là trung điểm của $AH(gt)$

N là trung điểm của $BH(gt)$

$\Rightarrow MN$ là đường trung bình của ΔAHB

$\Rightarrow MN // AB$

Mà $AB \perp AC(cmt)$

$\Rightarrow MN \perp AC$

Xét ΔCAN có $AH \perp BC(gt); MN \perp AC(cmt)$

Mà AH cắt MN tại M

$\Rightarrow M$ là trực tâm của $\Delta CAN \Rightarrow CM \perp AN$

c) Gọi S_{AMN} là diện tích ΔAMN , ta có

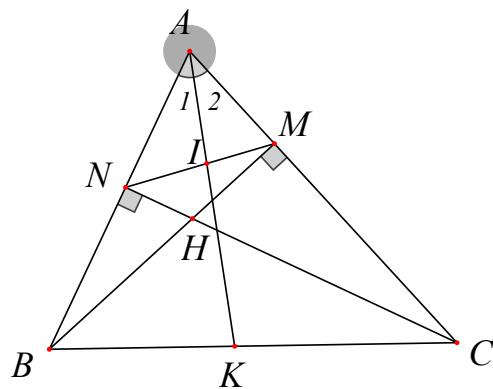
$$S_{AMN} = \frac{1}{2} \cdot AM \cdot AN = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 8 = 24 \text{ (cm}^2\text{)}.$$

Bài 8. Cho ΔABC nhọn có hai đường cao BM, CN cắt nhau tại H .

a) Chứng minh rằng $\Delta AMN \sim \Delta ABC$.

b) Phân giác của \widehat{ABC} cắt MN và BC lần lượt tại I và K . Chứng minh rằng $\frac{IM}{IN} = \frac{KB}{KC}$.

Lời giải



a) Xét ΔAMB và ΔANC có:

$\widehat{AMB} = \widehat{ANC} = 90^\circ$ và \widehat{A} chung

Do đó $\Delta AMB \sim \Delta ANC$ ($g.g$) $\Rightarrow \frac{AM}{AN} = \frac{AB}{AC}$

Xét ΔAMN và ΔABC có:

\widehat{A} chung và $\frac{AM}{AN} = \frac{AB}{AC}$ (cmt)

$\Rightarrow \Delta AMN \sim \Delta ABC$ ($c.g.c$)

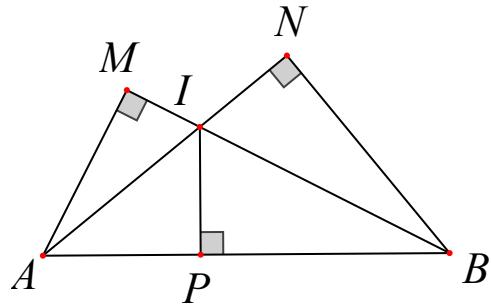
b) Xét ΔAMN có AI là đường phân giác, ta có

$$\frac{IM}{IN} = \frac{AM}{AN}$$

Với ΔABC có AK là phân giác, ta cũng có

$$\frac{KB}{KC} = \frac{AB}{AC} \text{ mà } \frac{AM}{AN} = \frac{AB}{AC} \text{ (cmt)} \Rightarrow \frac{IM}{IN} = \frac{KB}{KC}.$$

Bài 9. Cho hình vẽ bên. Chứng minh



a) $\Delta ABN \sim \Delta AIB$ và $AI \cdot AN = AP \cdot AB$;

b) $AI \cdot AN + BI \cdot BM = AB^2$.

Lời giải

a) Xét ΔABN và ΔAIP có:

$$\widehat{ANP} = \widehat{API} = 90^\circ (gt)$$

\widehat{NAP} chung

$$\Rightarrow \Delta ABN \sim \Delta AIP (g.g) \Rightarrow \frac{AI}{AB} = \frac{AP}{AN} \Rightarrow AI \cdot AN = AP \cdot AB \quad (1)$$

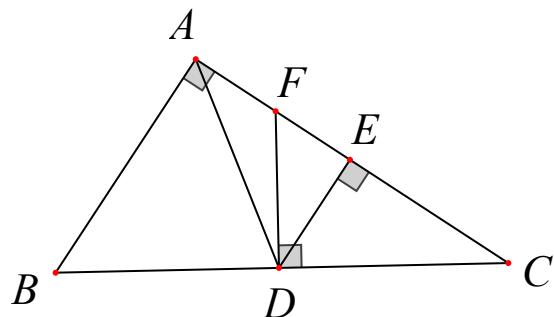
Chứng minh tương tự với hai tam giác vuông ABM và tam giác IBP ta có $BI \cdot BM = BP \cdot AB \quad (2)$

b) Cộng (1) và (2) vế với vế ta được

$$AI \cdot AN + BI \cdot BM = AP \cdot AB + BP \cdot AB$$

$$\Rightarrow AI \cdot AN + BI \cdot BM = AB^2$$

Bài 10. Cho ΔABC vuông tại A và các điểm D, E, F như hình vẽ bên sao cho AD là phân giác của \widehat{BAC} , DE và DF lần lượt vuông góc với AC và BC .



Chứng minh rằng:

a) $\frac{BD}{BC} = \frac{AB}{AB+AC}$, từ đó suy ra $AE = \frac{AB \cdot AC}{AB+AC}$.

b) $\Delta DFC \sim \Delta ABC$;

c) $DF = DB$

Lời giải

a) AD là phân giác của góc BAC (gt), ta có:

$$\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow \frac{BD}{BD+DC} = \frac{AB}{AB+AC} \Rightarrow \frac{BD}{BC} = \frac{AB}{AB+AC}$$

Ta có $DE // AB (\perp AC)$. Theo định lí Thalès $\frac{BD}{BC} = \frac{AE}{AC}$

$$\frac{BD}{BC} = \frac{AB}{AB+AC} \Rightarrow \frac{AE}{AC} = \frac{AB}{AB+AC} \Rightarrow AE = \frac{AB \cdot AC}{AB+AC}.$$

b) Xét tam giác DFC và tam giác ABC có:

$$\widehat{CDF} = \widehat{BAC} = 90^\circ (\text{gt}), \widehat{C} : \text{chung}$$

Do đó $\Delta DFC \sim \Delta ABC$ (g.g)

$$c) \text{Ta có: } \Delta DFC \sim \Delta ABC (\text{cmt}) \Rightarrow \frac{DF}{AB} = \frac{DC}{AC} \Rightarrow DF = \frac{DC \cdot AB}{AC} \quad (1)$$

Lại có AD là phân giác của \widehat{BAC} (gt)

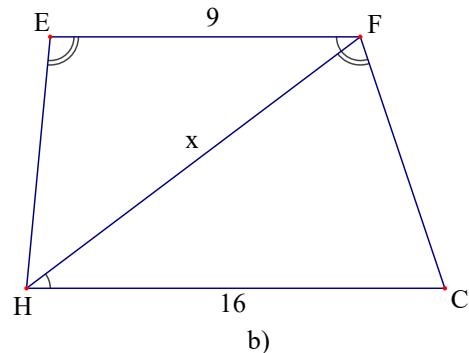
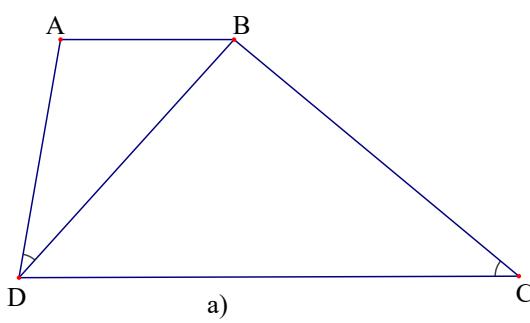
$$\Rightarrow \frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow DB = \frac{AB \cdot DC}{AC} \quad (2)$$

Từ (1) (2) $\Rightarrow DF = DB$

Bài 11. a) Cho hình thang $ABCD$ ($AB // CD$) biết $\widehat{ADB} = \widehat{DCB}$ (hình a).

Chứng minh rằng $BD^2 = AB \cdot CD$.

b) Cho hình thang $EFGH$ ($EF // GH$), $\widehat{HEF} = \widehat{HFG}$, $EF = 9m$, $GH = 16m$ (hình b). Tính độ dài x của HF .



Lời giải

a) Xét hình a), ta có $AB // CD$ (gt) $\Rightarrow \widehat{ABD} = \widehat{DCB}$ (cặp góc so le trong)

Xét tam giác ABD và tam giác BCD có:

$$\widehat{ABD} = \widehat{DCB} (\text{gt}), \widehat{ABD} = \widehat{DCB} (\text{cmt}) \Rightarrow \Delta ABD \sim \Delta BDC (\text{g.g}) \Rightarrow \frac{BD}{AB} = \frac{CD}{BD} \Rightarrow BD^2 = AB \cdot CD$$

b) Xét hình b), ta có $EF // GH$ (gt) $\Rightarrow \widehat{EFH} = \widehat{FHG}$ (cặp góc so le trong)

Xét tam giác EFH và tam giác FHG có:

$$\widehat{HEF} = \widehat{HFG}(\text{gt}), \widehat{EFH} = \widehat{FHG}(\text{cmt})$$

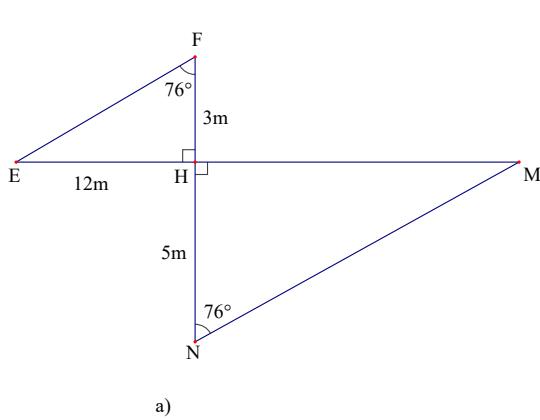
Do đó $\Delta EFH \sim \Delta FHG$ (g.g)

$$\Rightarrow \frac{HF}{HG} = \frac{EF}{HF} \Rightarrow HF^2 = EF \cdot HG = 9 \cdot 16 = 144 \Rightarrow HF = 12 \text{ m.}$$

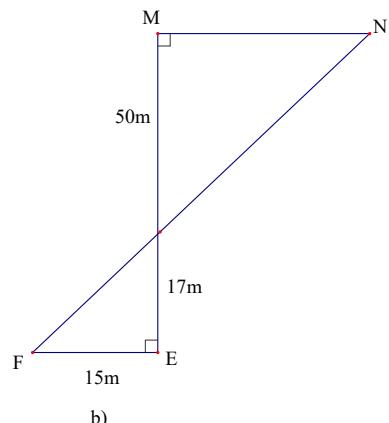
Độ dài x là 12m.

Bài 12. a) Tính khoảng cách HM của mặt hồ ở Hình a.

b) Tính khoảng cách MN của một khúc sòng ở hình b.



a)



b)

Lời giải

a) Tam giác EHF và tam giác MHN là hai tam giác vuông, có:

$$\hat{F} = \hat{N} = 76^\circ. \text{ Do đó } \Delta EHF \sim \Delta MHN \text{ (g.g)} \Rightarrow \frac{HM}{HE} = \frac{HN}{HF} \text{ hay } \frac{HM}{12} = \frac{5}{3} \Rightarrow HM = \frac{5 \cdot 12}{3} = 20(\text{m})$$

b) Tam giác IMN và tam giác IEF là hai tam giác vuông, có:

$$\widehat{MIN} = \widehat{EIF} \text{ (đối đỉnh)}$$

$$\text{Do đó } \Delta IMN \sim \Delta IEF \text{ (g.g)} \Rightarrow \frac{MN}{EF} = \frac{MI}{EI} \text{ hay } \frac{MN}{15} = \frac{50}{17}$$

$$\Rightarrow MN = \frac{50 \cdot 15}{17} \approx 44(\text{m})$$

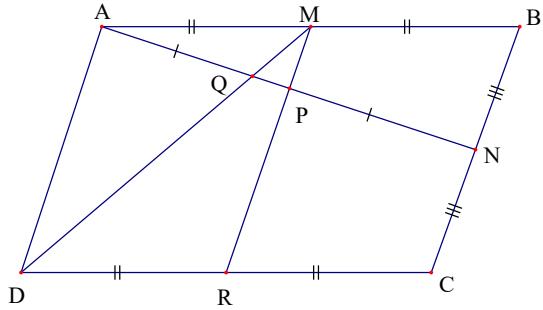
Bài 13. Cho hình bình hành ABCD. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng AB, BC, AN và Q là giao điểm của AN và DM. Chứng minh:

a) $MP // AD, MP = \frac{1}{4}AD;$

b) $AQ = \frac{2}{5}AN;$

c) Gọi R là trung điểm của CD. Chứng minh ba điểm M, P, R thẳng hàng và $PR = \frac{3}{4}AD$.

Lời giải



a) Ta có: M là trung điểm của AB (gt)

N là trung điểm của BC(gt)

\Rightarrow Măt phẳng là đường trung bình của tam giác ABN

\Rightarrow $MP // NB$ hay $MP // BC$ mà $BC // AD$ (tính chất cạnh đối của hình bình hành) \Rightarrow $MP // AD$

và $MP = \frac{1}{2}BN$ mà $BN = \frac{1}{2}BC$

$\Rightarrow MP = \frac{1}{4}BC$ hay $MP = \frac{1}{4}AD$ (vì $AD = BC$)

b) Ta có: $MP // AD$, theo bài toán 19. Bài 15, phần định lí Thalès, ta có:

$$\frac{AQ}{QP} = \frac{AD}{MP} = \frac{4}{1} \Rightarrow \frac{AQ + QP}{AQ} = \frac{4+1}{4} = \frac{5}{4}$$

$$\text{hay } \frac{AQ}{QP} = \frac{5}{4} \text{ mà } AP = \frac{1}{2}AN \Rightarrow \frac{2AP}{AQ} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$$

$$\frac{AN}{QP} = \frac{5}{2} \Rightarrow AQ = \frac{2}{5}AN.$$

c) Ta có: R là trung điểm của CD (gt),

P là trung điểm của AN(gt)

$\Rightarrow PR$ là đường trung bình của hình thang ANCD

$\Rightarrow PR // AD$ và BC

Lại có $MP // BC$ (cmt) $\Rightarrow MP$ và PR phải trùng nhau (Tiên đề Euclid) Hay 3 điểm M, P, R thẳng hàng.

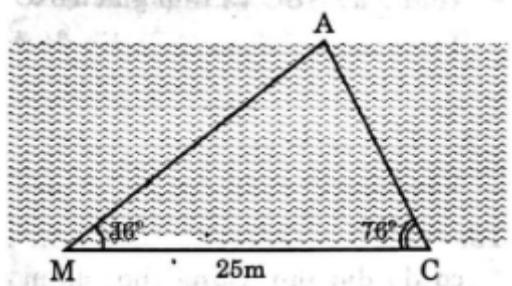
Khi đó $MR // AD$ và BC và $MR = AB = BC$.

$$\text{Ta có } PR = MR - MP \text{ hay } PR = AD - \frac{1}{4}AD = \frac{3}{4}AD$$

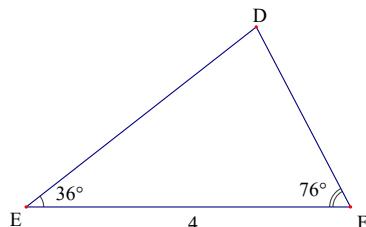
Bài 14. Quan sát hình vẽ, vẽ vào tờ giấy tam giác DEF với $EF = 4\text{cm}$, $\hat{E} = 36^\circ$, $\hat{F} = 76^\circ$.

a) Chứng minh rằng: $\Delta DEF \sim \Delta AMC$.

b) Dùng thước đo chiều dài cạnh DF của ΔDEF . Tính khoảng cách giữa hai điểm A và C ở hai bờ sông trong hình vẽ bên.



Lời giải



a) Xét tam giác DEF và tam giác AMC có $\hat{E} = \hat{M} = 36^\circ, \hat{F} = \hat{C} = 76^\circ$.

Do đó $\Delta DEF \sim \Delta AMC$ (g.g)

b) Ta có: $\Delta DEF \sim \Delta AMC$ (cmt)

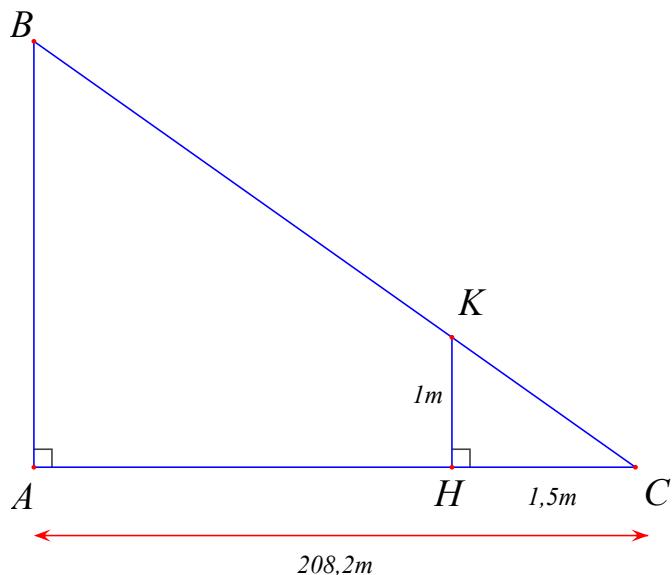
$$\Rightarrow \frac{AC}{DF} = \frac{MC}{EF} \quad (\text{đo chiều cao cạnh } DF = 2,5\text{cm} = 0,025\text{m}; 4\text{cm} = 0,04\text{m})$$

$$\text{Hay } \frac{AC}{0,025} = \frac{25}{0,04}$$

$$\Rightarrow AC = \frac{25 \cdot 0,025}{0,04} \approx 15,6\text{m}$$

Vậy khoảng cách giữa hai điểm A và C ở hai bờ sông là gần $15,6\text{m}$.

Bài 15. Để tính được chiều cao gần đúng của kim tự tháp Ai Cập, người ta cầm 1 cây cọc cao 1m vuông góc với mặt đất và đo được bóng cây cọc trên mặt đất là 1,5m . Khi đó chiều dài bóng của kim tự tháp trên mặt đất là 208,2m . Hỏi kim tự tháp cao bao nhiêu mét?



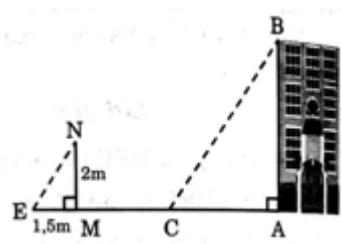
Tam giác ABC và tam giác HKC là hai tam giác vuông lần lượt tại A và H.

Ta có $AB \parallel HK (\perp AC)$. Do đó $\Delta HKC \sim \Delta ABC$

$$\Rightarrow \frac{AB}{HK} = \frac{AC}{HC} \text{ hay } \frac{AB}{1} = \frac{208,2}{1,5} \Rightarrow AB = \frac{208,2}{1,5} = 138,8(\text{m})$$

Vậy kim tự tháp cao 138,8(m).

- Bài 16.** Bóng của một căn nhà trên mặt đất có độ dài 6m. Cùng thời điểm đó, một cọc sắt cao 2m cắm vuông góc với mặt đất có bóng dài 1,5m (Hình vẽ). Tính chiều cao ngôi nhà.



Lời giải

Các tia nắng BC và NE được coi như song song với nhau.

Xét hai tam giác ABC và MNE có $\widehat{BAC} = \widehat{NME} = 90^\circ$ (gt)

$$BC \parallel EN \Rightarrow \widehat{C} = \widehat{E}$$

$$\text{Do đó } \Delta ABC \sim \Delta MNE \text{ (g.g)} \Rightarrow \frac{AB}{MN} = \frac{AC}{ME}$$

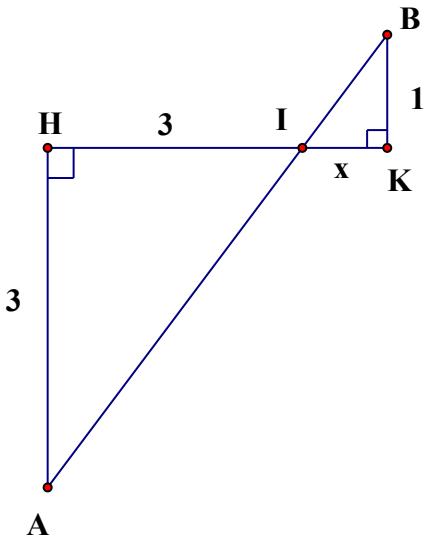
$$\text{hay } \frac{AB}{2} = \frac{6}{1,5} \Rightarrow AB = \frac{6 \cdot 2}{1,5} = 8(\text{m})$$

Chiều cao của ngôi nhà là 8(m).

- Bài 17.** Một xe taxi xuất phát từ điểm A để đón khách tại điểm B. Biết rằng đầu tiên người lái xe đi thẳng 3km, sau đó rẽ vuông góc sang bên phải và đi được một đoạn 3km nữa thì rẽ vuông góc sang trái. Người lái xe di thẳng tiếp 1km nữa thì đến được điểm B. Hỏi khoảng cách giữa A và B là bao nhiêu? là bao nhiêu?

Lời giải

Con đường đi của xe taxi từ A đến B chúng ta có thể biểu diễn bằng hình vẽ sau đây.



$$\text{Đã thấy } \Delta AHI \sim \Delta BKI \quad (\text{g}\cdot\text{g}) \Rightarrow \frac{AH}{BK} = \frac{HI}{KI}$$

Đặt $IK = x$, ta có $HI = 3 - x$

$$\text{Ta có } \frac{3}{1} = \frac{3-x}{x} \Rightarrow 3x = 3 - x \Rightarrow 4x = 3$$

$$\Rightarrow x = \frac{3}{4} \text{ hay } IK = \frac{3}{4} \text{ (km)}$$

$$\text{Do đó } HI = HK - IK = 3 - \frac{3}{4} = \frac{9}{4} \text{ (km)}$$

Xét tam giác AHI vuông tại H. Theo định lí Pythagore, ta có:

$$AI^2 = AH^2 + IH^2$$

$$AI^2 = 3^2 + \left(\frac{9}{4}\right)^2 = \frac{225}{16} \Rightarrow AI = \frac{15}{4} \text{ (km)}$$

$$\text{Ta có } \Delta AHI \sim \Delta BKI \quad (\text{cmt}) \Rightarrow \frac{AI}{BI} = \frac{AH}{BK}$$

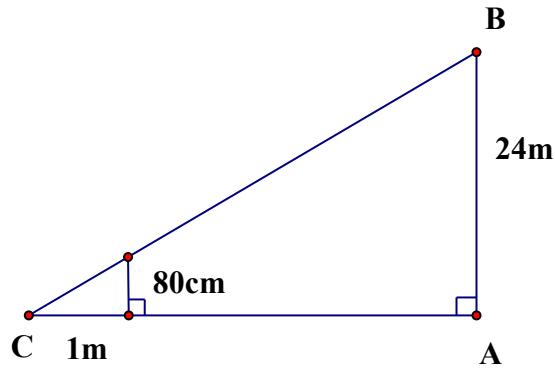
$$\text{hay } \frac{\frac{15}{4}}{BI} = \frac{3}{1} \Rightarrow BI = \frac{15}{4} : 3 = \frac{5}{4} \text{ (km)}$$

$$\text{Vậy } AB = AI + BI = \frac{15}{4} + \frac{5}{4} = \frac{20}{4} \text{ (km).}$$

Bài 18. Từ căn hộ chung cư nhà mình, bạn Lan đứng cách cửa sổ 1m nhìn sang tòa nhà đối diện thì vừa nhìn thấy đúng tất cả 6 tầng của tòa nhà đó. Biết rằng cửa sổ nhà Lan cao 80cm và mỗi tầng của tòa nhà đối diện cao 4m. Hỏi khoảng cách từ căn hộ nhà Lan đến tòa nhà đối diện là bao nhiêu?

Lời giải

Đề bài được minh họa bởi hình vẽ sau đây:



Chiều cao 6 tầng của tòa nhà:

$$AB = 6.4 = 24(\text{m})$$

$$80\text{ cm} = 0,8 \text{ m}$$

Để thấy tam giác ABC và tam giác HKC là hai tam giác vuông có \hat{C} chung.

Do đó $\Delta ABC \sim \Delta HKC$ (g.g)

$$\Rightarrow \frac{AC}{HC} = \frac{AB}{HK} \text{ hay } \frac{AC}{1} = \frac{24}{0,8}$$

$$\Rightarrow AC = \frac{24}{0,8} = 30(\text{m})$$

$$\Rightarrow HA = AC - HC = 30 - 1 = 29(\text{m})$$

Vậy khoảng cách từ căn hộ nhà Lan đến tòa nhà đối diện là 29(m).

HƯỚNG DẪN GIẢI BÀI TẬP CHƯƠNG IX

9.1. a) Ta có $\Delta A'B'C' \sim \Delta ABC$

$$\Rightarrow \frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{A'B' + A'C' + B'C'}{AB + AC + BC} = \frac{P_{A'B'C'}}{P_{ABC}}$$

($P_{A'B'C'}$ là chu vi $\Delta A'B'C'$, tương tự P_{ABC} là chu vi ΔABC)

$$\text{mà } \frac{A'B'}{AB} = \frac{3}{5} \Rightarrow \frac{P_{A'B'C'}}{P_{ABC}} = \frac{3}{5}.$$

b) Ta có $\frac{P_{A'B'C'}}{P_{ABC}} = \frac{3}{5}$

$$\Rightarrow \frac{P_{A'B'C'}}{3} = \frac{P_{ABC}}{5} = \frac{P_{ABC} - P_{A'B'C'}}{5-3} = \frac{40}{2} = 20$$

$$\Rightarrow P_{A'B'C'} = 20 \cdot 3 = 60(\text{cm})$$

$$\text{và } P_{ABC} = 20 \cdot 5 = 100(\text{cm}).$$

9.2. Ta có ΔABC có ba cạnh $AB = 6\text{cm}, AC = 8\text{cm}$ và $BC = 9\text{cm}$ và $\Delta A'B'C'$ có ba cạnh $A'B' = 9\text{cm}; A'C', B'C'$ cần tìm.

$$\text{Vì } \Delta ABC \sim \Delta A'B'C' (\text{gt}) \Rightarrow \frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} \text{ hay } \frac{6}{9} = \frac{8}{A'C'}$$

$$\Rightarrow A'C' = \frac{8 \cdot 9}{6} = 12(\text{cm})$$

$$\text{Tương tự } B'C' = \frac{9 \cdot 9}{6} = 13,5(\text{cm}).$$

9.3. Ta có: $A'B' = AB - 2 = 5 - 2 = 3\text{cm}$.

$$\Delta A'B'C' \sim \Delta ABC \Rightarrow \frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{B'C'}{BC} \text{ hay } \frac{3}{5} = \frac{A'C'}{7}$$

$$\Rightarrow A'C' = \frac{7 \cdot 3}{5} = 4,2(\text{cm})$$

$$\text{Tương tự } B'C' = \frac{9 \cdot 3}{5} = 5,4(\text{cm}).$$

9.4. a) Ta có $\frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{B'C'}{BC} \left(\frac{6}{8} = \frac{9}{12} = \frac{12}{16} \left(= \frac{3}{4} \right) \right)$

Do đó $\Delta A'B'C' \sim \Delta ABC$

$$\text{b)} \frac{P_{A'B'C'}}{P_{ABC}} = \frac{A'B'}{AB} = \frac{3}{4}.$$

Bài 9.5.

Xét ΔABC và ΔACD có :

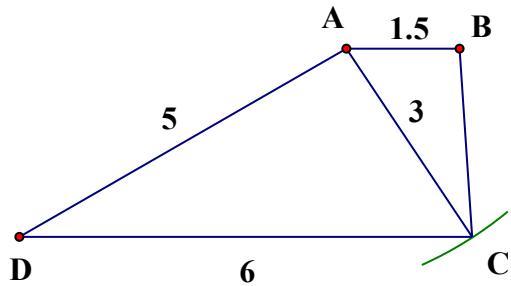
$$\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{CD} = \frac{BC}{AD} \left(\frac{1,5}{3} = \frac{3}{6} = \frac{2,5}{5} \left(= \frac{1}{2} \right) \right)$$

Do đó $\Delta ABC \sim \Delta CAD$ (c.c.c)

$$\Rightarrow \widehat{BAC} = \widehat{ACD}$$

Do đó $AB // CD$ (cặp góc so le trong bằng nhau)

Vậy $ABCD$ là hình thang.

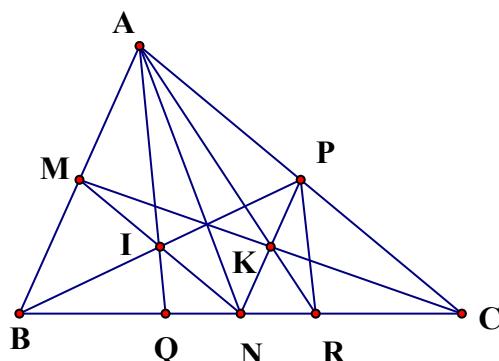


Bài 9.6. Gọi độ dài hai cạnh tương ứng là a' và a , tương tự chu vi của hai tam giác lần lượt là p' và p

$$\text{Ta có: } \frac{a'}{a} = \frac{p'}{p} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{a'}{2} = \frac{a}{3} = \frac{a-a'}{3-2} = \frac{5}{1}$$

$$\Rightarrow a' = 5 \cdot 2 = 10 \text{ (cm)}; a = 5 \cdot 3 = 15 \text{ (cm)}.$$

Bài 9.7.



a) Ta có MN là đường trung bình của ΔABC nên $MN // AC$.

Để chứng minh M, N, I thẳng hàng cần chứng minh I là trung điểm của BP .

Nối PR ta có: $PR // AQ$ hay $PR // IQ$

Trong ΔBPR có Q là trung điểm của BR (giả thiết)

Suy ra QI là đường trung bình

Suy ra I là trung điểm của BP

Suy ra $I \in MN$

Tương tự ta chứng minh được ba điểm M, K, P thẳng hàng.

b) Theo chứng minh trên I là trung điểm của BP nên IN là đường trung bình của tam giác BPC

$$\Rightarrow IN // CP; IN = \frac{1}{2} PC$$

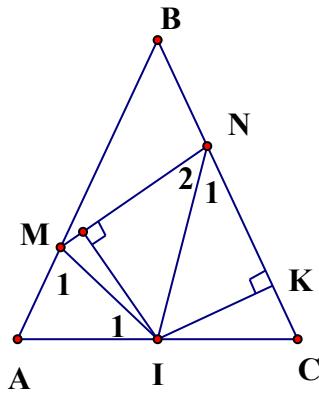
$$\Rightarrow IN = \frac{1}{4}AC$$

$$\text{Tương tự } NK = \frac{1}{4}AB \Rightarrow \frac{IN}{AC} = \frac{NK}{AB} = \frac{1}{4}$$

Mặt khác $\widehat{N} = \widehat{M}$ (so le trong) và $\widehat{M} = \widehat{A}$ (đồng vị) $\Rightarrow \widehat{N} = \widehat{A}$

Do đó $\Delta INK \sim \Delta CAB$ (c.g.c)

Bài 9.8.



a) Từ giả thiết $AI^2 = CN \cdot AM$

$$\Rightarrow \frac{CN}{AI} = \frac{CI}{AM}$$

Lại có $AI = CI$ nên ta có

$$\frac{CN}{AI} = \frac{CI}{AM} \quad (1)$$

Mặt khác $\widehat{A} = \widehat{C}$ (giả thiết) (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \Delta AIM \sim \Delta CNI$ (c.g.c)

$$\Rightarrow \widehat{I}_1 = \widehat{N}_1; \widehat{I}_2 = \widehat{M}_1$$

$$\Rightarrow \widehat{MIN} = \widehat{A} = \widehat{C} \quad (3)$$

$$\text{Và } \frac{CN}{CI} = \frac{AI}{AM} = \frac{IN}{IM} \quad (4)$$

Từ (3), (4) suy ra các tam giác AIM, CNI, IMN đồng dạng.

b) Gọi IH là khoảng cách từ I đến MN , IK là khoảng cách từ I đến cạnh BC .

$$\text{Từ } \Delta CIN \sim \Delta IMN \Rightarrow \widehat{N}_1 = \widehat{N}_2$$

Dễ thấy hai tam giác vuông IHN, IKN bằng nhau vì có cạnh huyền NI chung

$$\Rightarrow IH = IK \text{ không đổi (vì } I, K \text{ cố định)}$$

$$\Rightarrow IH \text{ không đổi.}$$

Bài 9.9

Ta có:

$$S_{ABCD} = AH \cdot DC = AK \cdot BC \quad (1)$$

$$AK \perp BC \quad (\text{gt})$$

$$BC // AD \quad (\text{gt})$$

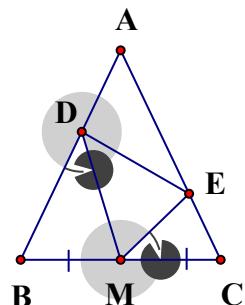
$$\Rightarrow AK \perp AD \text{ hay } \widehat{DAK} = 90^\circ$$

$$\text{Mà } \widehat{DAK} = \widehat{DAH} + \widehat{HAK} = 90^\circ$$

$$\text{Lại có: } \widehat{D} + \widehat{DAH} = 90^\circ \text{ (vì } \widehat{DHA} = 90^\circ \text{)} \Rightarrow \widehat{D} = \widehat{HAK} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) suy ra } \Delta AKH \sim \Delta DCA \text{ (c.g.c)} \Rightarrow \widehat{AKH} = \widehat{ACH}$$

Bài 9.10



a) Xét ΔBDM và ΔCME có:

$$\widehat{B} = \widehat{C} \quad (\text{gt})$$

$$\widehat{BDM} = \widehat{CME}$$

$$\Rightarrow \Delta BDM \sim \Delta CME \quad (\text{g.g})$$

$$\text{Do đó: } \frac{BD}{BM} = \frac{CM}{CE}$$

$$\text{Mà } CM = BM \quad (\text{gt})$$

$$\Rightarrow \frac{BD}{BM} = \frac{BM}{CE} \Rightarrow BD \cdot CE = BM^2$$

$$\text{Ta có: } \widehat{CME} + \widehat{EMD} + \widehat{DMB} = 180^\circ \quad (\text{kè bù})$$

$$\text{Mà: } \widehat{BDM} + \widehat{B} + \widehat{DMB} = 180^\circ \quad (\text{tổng các góc trong một tam giác})$$

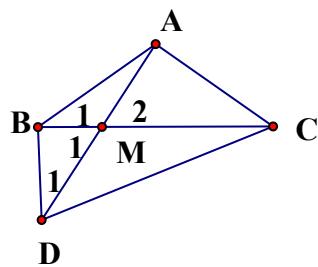
$$\text{Mà: } \widehat{CME} = \widehat{BDM} \quad (\text{gt})$$

$$\Rightarrow \widehat{MMD} = \widehat{B} \quad (1)$$

$$\text{Lại có: } \frac{BD}{BM} = \frac{CM}{CE} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $\Delta MDE \sim \Delta BDM$ (*c.g.c*)

Bài 9.11



a) Xét ΔAMB và ΔADB có:

$$\widehat{ABD} = \widehat{AMB} \text{ (gt)}$$

\widehat{BAD} chung

Do đó $\Delta AMB \sim \Delta ADB$ (*g.g*)

$$\Rightarrow \widehat{B_1} = \widehat{D_1}$$

$$\text{Mà } \widehat{B_1} = \widehat{C_1} \text{ (gt)} \Rightarrow \widehat{D_1} = \widehat{C_1}$$

b) Xét ΔBMD và ΔAMC có

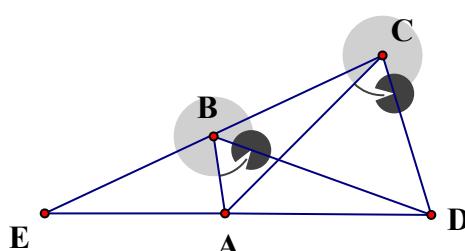
$$\widehat{M_1} = \widehat{M_2} \text{ (đối đỉnh)}$$

$$\widehat{D_1} = \widehat{C_1} \text{ (cmt)}$$

Do đó $\Delta BMD \sim \Delta AMC$ (*g.g*)

$$\Rightarrow \frac{MB}{MA} = \frac{MD}{MC} \Rightarrow MB \cdot MC = MA \cdot MD$$

Bài 9.12



a) Xét ΔAOB và ΔCOD có:

$$\widehat{AOB} = \widehat{COD} \text{ (đối đỉnh)}$$

$$\widehat{ABD} = \widehat{ACD} \text{ (gt)}$$

Do đó $\Delta AOB \sim \Delta DOC$ (*g.g*)

$$\Rightarrow \frac{OA}{OD} = \frac{OB}{OC} \Rightarrow OA \cdot OC = OB \cdot OD$$

b) Xét ΔAOD và ΔBOC có:

$$\widehat{AOD} = \widehat{BOC} \text{ (hai góc đối đỉnh)}$$

$$OA \cdot OC = OB \cdot OD \text{ (cmt)}$$

$$\Rightarrow \Delta AOD \sim \Delta BOC \text{ (c.g.c)}$$

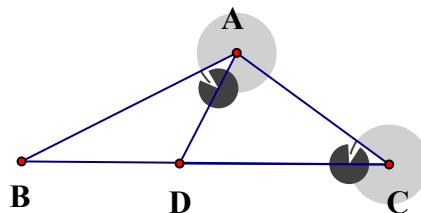
$$\Rightarrow \widehat{ADB} = \widehat{BCA} \text{ (1)}$$

Xét ΔEDB và ΔECA có \widehat{E} chung và (1)

$$\Rightarrow \Delta EDB \sim \Delta ECA \text{ (g.g)}$$

$$\Rightarrow \frac{ED}{EC} = \frac{EB}{EA} \Rightarrow EA \cdot ED = EB \cdot EC$$

Bài 9.13



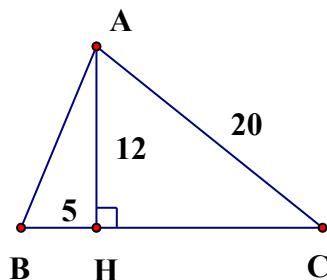
Xét ΔABC và ΔABD có

$$\widehat{B} \text{ chung và } \widehat{BAD} = \widehat{BCA} \text{ (gt)}$$

Do đó $\Delta ABC \sim \Delta DBA \text{ (g.g)}$

$$\Rightarrow \frac{BA}{BD} = \frac{BC}{BA} \Rightarrow BA^2 = BC \cdot BD$$

Bài 9.14



ΔAHB vuông tại H (gt).

Theo định lí Pythagore, ta có:

$$AB^2 = AH^2 + BH^2$$

$$AB^2 = 12^2 + 5^2 = 169$$

$$\Rightarrow AB = 13 \text{ (cm)}$$

Tương tự với tam giác vuông AHC ta có

$$AC^2 = AH^2 + HC^2 \text{ (định lí Pythagore)}$$

$$20^2 = 12^2 + HC^2$$

$$\Rightarrow HC^2 = 20^2 - 12^2 = 256$$

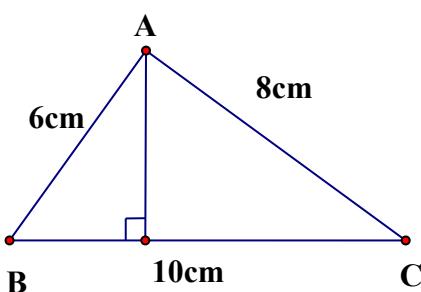
$$\Rightarrow HC = 16 \text{ (cm)}$$

$$\Rightarrow BC = BH + HC = 5 + 16 = 21 \text{ (cm)}$$

Gọi P_{ABC} là chu vi ΔABC ta có

$$P_{ABC} = AB + AC + BC = 13 + 20 + 21 = 54 \text{ (cm)}$$

Bài 9.15



a) Xét ΔABC ta có

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 (10^2 = 6^2 + 8^2)$$

Theo định lí Pythagore đảo, ΔABC vuông tại A .

b) Gọi S_{ABC} là diện tích ΔABC ta có

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} BC \cdot AH = \frac{1}{2} AB \cdot AC$$

$$\Rightarrow BC \cdot AH = AB \cdot AC \Rightarrow AH = \frac{AB \cdot AC}{BC} \quad (1)$$

$$\Rightarrow AH = \frac{6 \cdot 8}{10} = 4,8 \text{ (cm)}$$

Cách khác: Xét hai tam giác vuông ΔAHB và ΔCAB đồng dạng rồi suy ra (1)

Ta có ΔAHB vuông tại H (gt). Theo định lí Pythagore:

$$BH^2 = AB^2 - AH^2 = 6^2 - (4,8)^2 = 12,96$$

$$\Rightarrow BH = 3,6 \text{ (cm)}$$

$$CH = BC - BH = 10 - 3,6 = 6,4 \text{ (cm)}$$

Bài 9.16 Gọi cạnh huyền của tam giác vuông là a , hai cạnh góc vuông là b, c . Ta có:

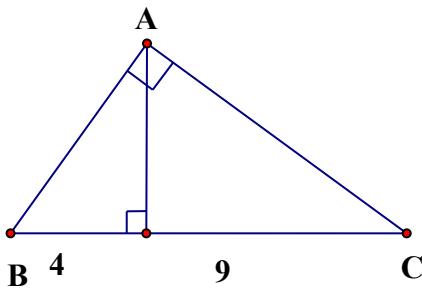
$$\frac{b}{c} = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{b}{3} = \frac{c}{4} \Rightarrow \frac{b^2}{9} = \frac{c^2}{16} = \frac{b^2 + c^2}{9+16} = \frac{5^2}{25} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{b^2}{9} = 1 \Rightarrow b^2 = 0 \Rightarrow b = 3$$

$$\text{Và } \frac{c^2}{16} = 1 \Rightarrow c^2 = 16 \Rightarrow c = 4$$

Vậy độ dài hai cạnh góc vuông là 3 và 4.

Bài 9.17



a) Xét ΔAHB và ΔAHC có:

$$\widehat{AHB} = \widehat{AHC} = 90^\circ (gt)$$

$$\widehat{BHA} = \widehat{C} \text{ cùng phụ với góc } B$$

$$\Rightarrow \Delta AHB \sim \Delta CHA (g.g)$$

$$\Rightarrow \frac{AH}{CH} = \frac{HB}{AH} \Rightarrow AH^2 = HB \cdot HC = 4 \cdot 9 = 36$$

$$\Rightarrow AH = 6$$

Xét ΔAHB vuông. Theo định lí Pythagore có:

$$AB^2 = BH^2 + AH^2 = 4^2 + 6^2 = 52 \Rightarrow AB = \sqrt{52} (cm)$$

Ta có: $BC = BH + HC = 4 + 9 = 13 (cm)$

Theo định lí Pythagore ta có

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 \text{ hay } 13^2 = (\sqrt{52})^2 + AC^2$$

$$\Rightarrow AC^2 = 13^2 - (\sqrt{52})^2 = 117 \Rightarrow AC = \sqrt{117} (cm)$$

b) Để thấy ΔAHB và ΔABC có

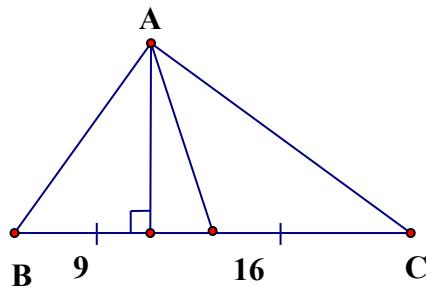
$$\widehat{AHB} = \widehat{BAC} = 90^\circ (gt)$$

\widehat{B} chung

Do đó $\Delta AHB \sim \Delta CAB (g.g)$

$$\Rightarrow \frac{AB}{BC} = \frac{HB}{AB} \Rightarrow AB^2 = HB \cdot BC.$$

Bài 9.18



Xét ΔAHB và ΔABC có:

$$\widehat{AHB} = \widehat{BAC} = 90^\circ$$

\hat{B} chung

$$\Rightarrow \Delta AHB \sim \Delta CAB (g.g)$$

$$\Rightarrow \frac{AB}{BC} = \frac{HB}{AB} \Rightarrow AB^2 = HB \cdot BC$$

$$\text{Mà } BC = BH + HC = 9 + 16 = 25 \text{ (cm)}$$

$$\text{Do đó } AB^2 = 9 \cdot 25 \Rightarrow AB = 15 \text{ (cm)}$$

Xét ΔAHB có

$$AH^2 = AB^2 - BH^2 = 15^2 - 9^2 = 144 \Rightarrow AH = 12 \text{ (cm)}$$

Lại có M là trung điểm của BC

$$\Rightarrow MB = MC = \frac{BC}{2} = \frac{25}{2} = 12,5 \text{ (cm)}$$

$$\Rightarrow HM = MB - HB = 12,5 - 9 = 3,5 \text{ (cm)}$$

$$\text{Vậy } S_{AHM} = \frac{1}{2} AH \cdot HM = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 3,5 = 21 \text{ (cm}^2\text{)}$$

Bài 9.19. Hai tam giác ABC và DEF cùng là tam giác đều $\Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta DEF$

$$\text{Do đó } \frac{S_{ABC}}{S_{DEF}} = \frac{1}{9} \Leftrightarrow \left(\frac{AB}{DE} \right)^2 = \left(\frac{1}{3} \right)^2 \Leftrightarrow \frac{AB}{DE} = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow DE = 3AB = 3 \cdot 30 = 90 \text{ (cm)}.$$

$$\text{Vậy } P_{DEF} = 90 \cdot 3 = 270 \text{ (cm)}$$

Bài 9.20. Các cặp hình đồng dạng là b và e, c và g, d và h.

Bài 9.21. Ta có $\frac{9}{4,5} = \frac{5}{2,5} = 2$ nên hình c đồng dạng với hình a.

Bài 9.22. Trên các cạnh EF, EG, EH lần lượt lấy các điểm $F''; G''; H''$

$$\text{sao cho } \frac{EF''}{EF} = \frac{EG''}{EG} = \frac{EH''}{EH} = \frac{4}{5} \quad (1)$$

Theo định lí Thalès đảo ta có $F''G'' // FG; G''H'' // GH$

Do đó tứ giác $EF''G''H''$ là hình chữ nhật

$$\text{Lại có } \frac{EF''}{EF} = \frac{F''G''}{FG} = \frac{G''H''}{GH} = \frac{H''E}{HE} = \frac{4}{5} \text{ (Theo bài toán 19. Bài 15, phần định lí Thalès)}$$

$$\Rightarrow EF'' = F''G'' = G''H'' = H''E = 4 \text{ (cm)}$$

Do đó tứ giác $EF''G''H''$ là hình vuông có độ dài cạnh bằng 4 cm.

Vì vậy hai hình vuông $EF''G''H''$ và $EF'G'H'$ bằng nhau.

Đẳng thức (1) chứng tỏ hình vuông $EF''G''H''$ đồng dạng phôi cảnh với hình vuông $EFGH$ với tâm đồng dạng phôi cạnh là điểm E .

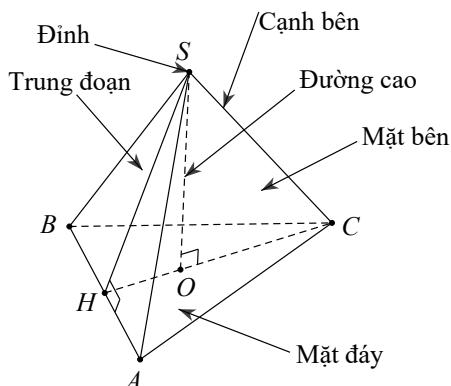
Vậy hình vuông $EF'G'H'$ đồng dạng với hình vuông $EFGH$.

CHƯƠNG X. MỘT SỐ HÌNH KHÓI TRONG THỰC TIỄN

Bài 38. HÌNH CHÓP TAM GIÁC ĐỀU

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

Hình chóp tam giác đều



- Hình chóp tam giác đều có đáy là một tam giác đều, các mặt bên là các tam giác cân bằng nhau chung một đỉnh. Đỉnh chung này được gọi là đỉnh của hình chóp tam giác đều.

Trong hình vẽ bên $S.ABC$ là hình chóp tam giác đều.

- Đoạn thẳng nối đỉnh của hình chóp và trọng tâm của tam giác đáy gọi là đường cao của hình chóp tam giác đều.
- Đường cao vẽ từ đỉnh của mặt bên gọi là trung đoạn của hình chóp tam giác đều.

Tạo lập hình chóp tam giác đều

- Công thức tính diện tích xung quanh và thể tích của hình chóp tam giác đều:

$$S_{xq} = P \cdot d \quad (P : \text{nửa chu vi}, d : \text{trung đoạn})$$

$$V = \frac{1}{3} S \cdot h \quad (S : \text{diện tích đáy}, h : \text{chiều cao của hình chóp})$$

- Công thức tính diện tích toàn phần của hình chóp bằng tổng diện tích xung quanh và diện tích đáy

Lưu ý: Khi vẽ đường cao của hình chóp tam giác đều $S.ABC$, trước hết ta phải xác định trọng tâm G của mặt đáy. Giả sử SG là đường cao của hình chóp tam giác đều $S.ABC$, ta vẽ trình tự như sau:

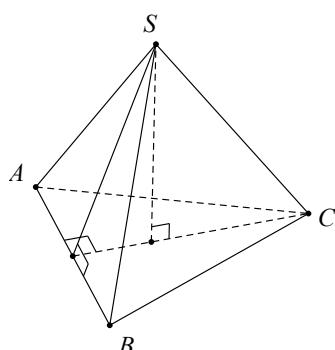
- Xác định trọng tâm G của mặt đáy.
- Vẽ SG song song với mép của tờ giấy.

B. PHÂN LOẠI CÁC BÀI TẬP

I. Xác định các yếu tố trong hình chóp tam giác đều

Bài 1. Gọi tên đỉnh, cạnh bên, mặt bên, cạnh đáy, mặt đáy, đường cao và một trung đoạn của hình chóp tam giác đều trong hình vẽ dưới.

Lời giải



S gọi là đỉnh.

Các đoạn thẳng SA, SB, SC bằng nhau gọi là các cạnh bên.

Ba mặt SAB, SBC, SCA là các tam giác cân là ba mặt bên.

Các đoạn thẳng AB, BC, CA bằng nhau gọi là cạnh đáy.

Mặt đáy ABC là tam giác đều.

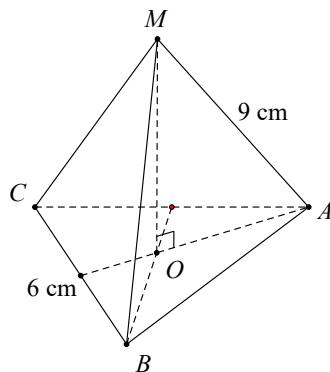
Đường cao của hình chóp tam giác đều: SO (O là trọng tâm của mặt đáy).

SH gọi là trung đoạn của hình chóp.

Bài 2. Cho hình vẽ bên. Hãy cho biết:

- Mặt bên
- Mặt đáy
- Đường cao
- Độ dài cạnh bên
- Độ dài cạnh đáy của hình chóp tam giác đều $M.ABC$

Lời giải



- Mặt bên: $\Delta MAB, \Delta MBC, \Delta MAC$ là các tam giác cân.

- Mặt đáy: ΔABC là các tam giác đều.

- Đường cao: MO

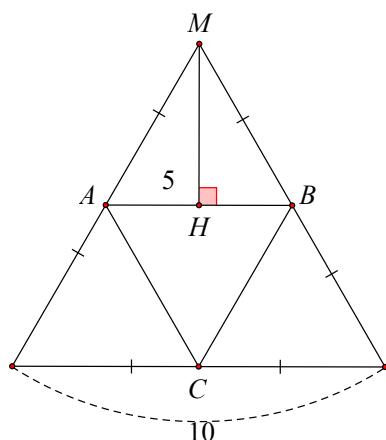
- Độ dài cạnh bên: $MA = MB = MC = 9$ (cm).

- Độ dài cạnh đáy: $AB = BC = AC = 6$ (cm).

II. Nhận biết các yếu tố của hình chóp tam giác đều từ hình khai triển

Bài 3. Hình vẽ bên là hình khai triển của một hình chóp tam giác đều cạnh 5. Hãy tính trung đoạn của hình chóp tạo thành.

Lời giải



Ta có MH là trung đoạn của hình chóp tam giác đều $M.ABC$.

Tam giác ABC đều cạnh 5 nên đường cao MH đồng thời là đường trung tuyến.

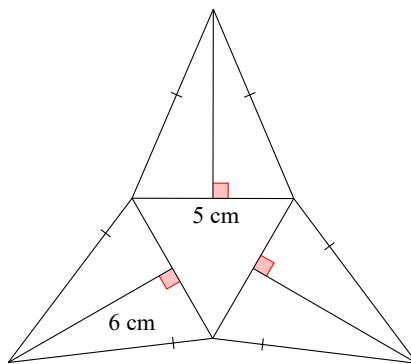
$$HA = HB = \frac{AB}{2} = \frac{5}{2} = 2,5 \text{ (đvđd)}$$

Xét tam giác vuông MHB có: $MB^2 = MH^2 + BH^2$ (định lí Pythagore) $\Rightarrow 5^2 = MH^2 + (2,5)^2$

$$MH^2 = 5^2 - (2,5)^2 = 48,75 \Rightarrow MH \approx 4,3 \text{ (đvđd)}$$

Bài 4. Hình vẽ bên là hình khai triển của một hình chóp tam giác đều có các kích thước cho sẵn. Hãy tính tổng các mặt bên của hình chóp.

Lời giải



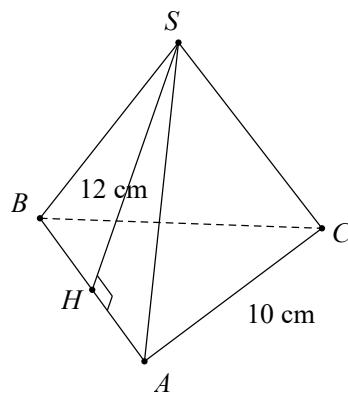
Ta có $P = \frac{(5+5+5)}{2} = \frac{15}{2}$ (cm) và trung đoạn của hình chóp là 6cm nên diện tích xung quanh của hình chóp

$$S_{xq} = P \cdot d = \frac{15}{2} \cdot 6 = 45 \text{ (cm}^2\text{)}$$

III. Tính diện tích xung quanh – Thể tích các hình và thực tế

Bài 5. Tính diện tích xung quanh của hình chóp tam giác đều $S.ABC$ trong hình vẽ bên. Biết $AC = 10 \text{ cm}$, $SH = 12 \text{ cm}$.

Lời giải



Đáy của hình chóp tam giác đều $S.ABC$ là một tam giác đều cạnh là 10 cm. Do đó nửa chu vi đáy của hình chóp tam giác đều là:

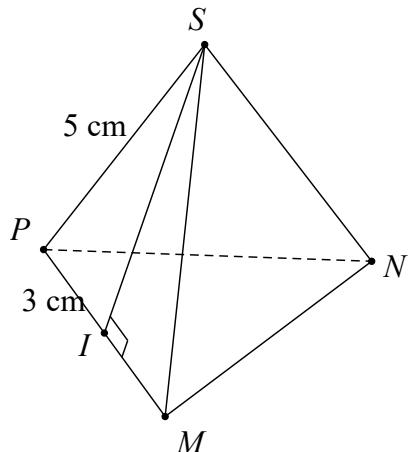
$$P = \frac{(10+10+10)}{2} = 15 \text{ (cm)}$$

Trung đoạn của hình chóp tam giác đều là: $d = SH = 12 \text{ cm}$

Vậy diện tích xung quanh của hình chóp tam giác đều $S.ABC$ là: $S_{xq} = 15.12 = 180 \text{ (cm}^2\text{)}$.

- Bài 6.** Tính diện tích xung quanh của hình chóp tam giác đều $S.MNP$ trong hình vẽ bên. Biết $IP = 3\text{ cm}$ và cạnh bên $SP = 5\text{ cm}$.

Lời giải



Mặt bên của hình chóp tam giác đều $S.MNP$ là các tam giác cân đỉnh S .

Xét tam giác cân MSP có SI là đường cao nên đồng thời là đường trung tuyến, ta có:

$$IM = IP = 3\text{ cm} \Rightarrow MP = 6\text{ cm}$$

Xét tam giác SIP vuông tại I (gt).

Theo định lí Pythagore, ta có: $SP^2 = SI^2 + PI^2$ hay

$$5^2 = SI^2 + 3^2$$

$$\Rightarrow SI^2 = 5^2 - 3^2 = 16 \Rightarrow SI = 4\text{ (cm)}$$

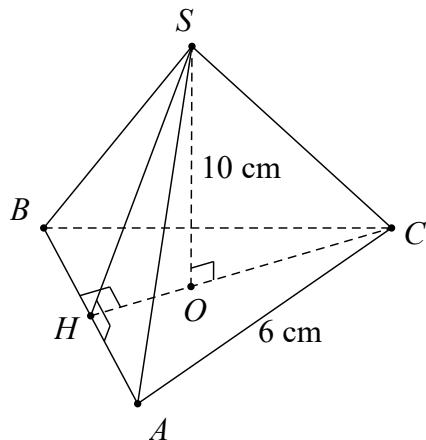
Nửa chu vi của hình chóp tam giác đều $S.MNP$ là:

$$P = \frac{1}{2}(6+6+6) = 9\text{ (cm)}$$

Trung đoạn của hình chóp tam giác đều $S.MNP$ là $SI = 4\text{ (cm)}$. Vậy diện tích xung quanh của hình chóp tam giác đều $S.MNP$ là: $S_{xq} = 9 \cdot 4 = 36\text{(cm}^2\text{)}$.

- Bài 7.** Tính thể tích hình chóp tam giác đều $S.ABC$ trong hình vẽ bên, biết cạnh đáy bằng 6 cm , chiều cao của hình chóp $SO = 10\text{ cm}$. Cho biết $\sqrt{27} \approx 5,2$. (Làm tròn kết quả đến hàng phần mười).

Lời giải



Mặt đáy của hình chóp tam giác đều $S.ABC$ là một tam giác đều có cạnh 6 cm và có đường cao CH đồng thời là đường trung tuyến:

$$AH = BH = \frac{AB}{2} = \frac{6}{2} = 3 \text{ (cm)}$$

Tam giác AHC vuông tại H , theo định lí Pythagore, ta có: $AC^2 = AH^2 + CH^2$ hay

$$6^2 - 3^2 = CH^2 \Rightarrow CH^2 = 6^2 - 3^2 = 27$$

$$\Rightarrow CH = \sqrt{27} \approx 5,2 \text{ (cm)}$$

Do đó diện tích tam giác ABC là: $S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot CH \approx \frac{1}{2} 6 \cdot 5,2 = 15,6 \text{ (cm}^2\text{)}$

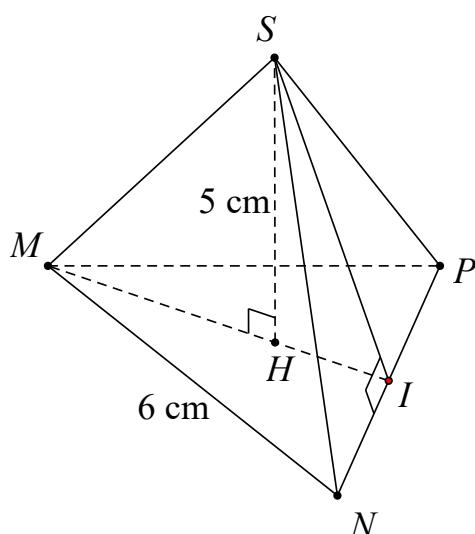
Vậy thể tích của hình chóp tam giác đều $S.ABC$ là: $V = \frac{1}{3} S_{ABC} \cdot h \approx \frac{1}{3} 15,6 \cdot 10 = 52 \text{ (cm}^3\text{)}$

Bài 8. Cho hình chóp tam giác đều $S.MNP$ như hình vẽ bên.

a) Tính diện tích tam giác MNP .

b) Thể tích hình chóp $S.MNP$, biết $\sqrt{27} \approx 5,19$

Lời giải



Mặt đáy của hình chóp tam giác đều $S.MNP$ là một tam giác đều cạnh 6 cm, đường cao của tam

giác đều MNP là MI đồng thời là đường trung tuyến: $IN = IP = \frac{NP}{2} = \frac{6}{2} = 3 \text{ cm}$.

Xét tam giác MIN vuông tại I . Theo định lí Pythagore, ta có: $MN^2 = MI^2 + NI^2$ hay $6^2 = MI^2 + 3^2$

$$\Rightarrow MI^2 = 6^2 - 3^2 = 27 \Rightarrow MI = \sqrt{27} \approx 5,19 \text{ (cm)}$$

Gọi S_{MNP} là diện tích đáy:

$$S_{MNP} = \frac{1}{2} NP \cdot MI \approx \frac{1}{2} 6 \cdot 5,19 = 15,57 \text{ (cm}^2\text{)}$$

Vậy thể tích của hình chóp tam giác đều $S.MNP$ là: $V = \frac{1}{3} S.h \approx \frac{1}{3} \cdot 15,57 \cdot 5 = 26 \text{ (cm}^3\text{)}$

Bài 9. Biết rằng diện tích xung quanh của hình chóp tam giác đều $S.MNP$ là 45 cm^2 , cạnh đáy của hình chóp tam giác đều $S.MNP$ là 5 cm. Tính độ dài của trung đoạn của hình chóp $S.MNP$.

Lời giải

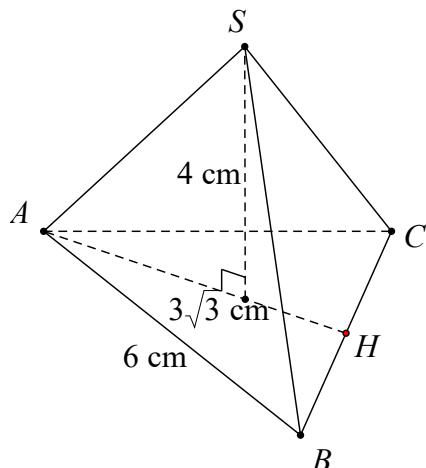
Ta có: $S_{xq} = P.d$ (1)

Cạnh đáy của hình chóp tam giác đều $S.MNP$ là 5 cm nên nửa chu vi là:

$$P = \frac{1}{2}(5+5+5) = \frac{15}{2} \text{ (cm)} \quad (1) \Rightarrow d = \frac{S_{xq}}{P} = \frac{45}{\frac{15}{2}} = 6 \text{ (cm)}$$

- Bài 10.** Tính thể tích của hình chóp tam giác đều, biết chiều cao của hình chóp là 4 cm, tam giác đáy có cạnh là 6 cm và chiều cao là $3\sqrt{3}$ cm.

Lời giải

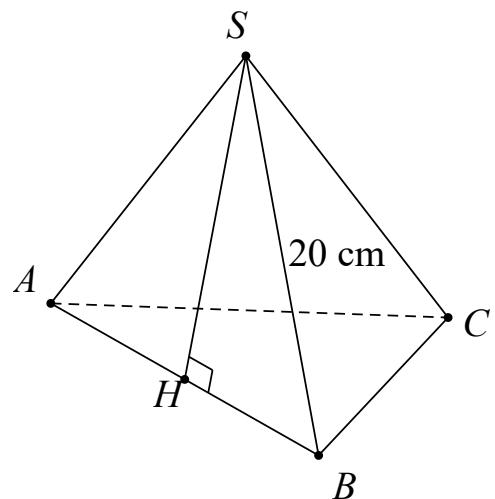


Đáy của hình chóp là tam giác đều có cạnh là 6 cm và chiều cao là $3\sqrt{3}$ cm nên diện tích mặt đáy: $S_D = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 3\sqrt{3} = 9\sqrt{3} \text{ (cm}^2\text{)}$

Vậy thể tích của hình chóp là: $V = \frac{1}{3} S.h = \frac{1}{3} \cdot 9\sqrt{3} \cdot 4 = 12\sqrt{3} \text{ (cm}^3\text{)}$

- Bài 11.** Nhà bạn Thu có một đèn trang trí có dạng hình chóp tam giác đều như hình vẽ bên. Các cạnh của hình chóp đều bằng nhau và bằng 20 cm. Bạn Thu dự định sẽ dán các mặt bên của đèn bằng những tấm giấy màu. Tính diện tích giấy bạn Thu sử dụng (coi như mép dán không đáng kể). Cho biết $\sqrt{300} = 17,32$.

Lời giải



Các mặt bên và mặt đáy của hình chóp $S.ABC$ là những tam giác đều cạnh 20 cm .

Xét tam giác đều SAB có đường cao SH đồng thời là đường trung tuyến, ta có:

$$AH = BH = \frac{AB}{2} = \frac{20}{2} = 10 \text{ (cm)}$$

Xét tam giác SHB vuông tại H . Theo định lí Pythagore, ta có:

$$SB^2 = SH^2 + BH^2 \text{ hay } 20^2 = SH^2 + 10^2$$

$$SH^2 = 20^2 - 10^2 = 300$$

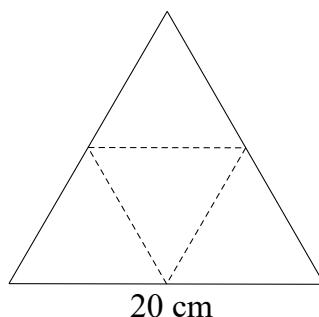
$$\Rightarrow SH = \sqrt{300} \approx 17,32 \text{ (cm)}$$

Nửa chu vi đáy: $P = \frac{1}{2}(20 + 20 + 20) = 30 \text{ (cm)}$

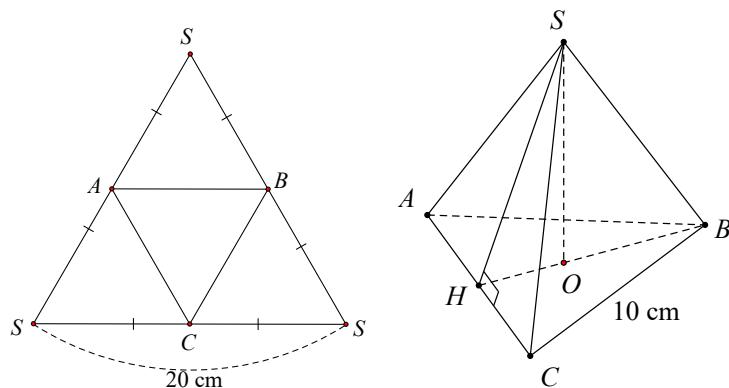
Diện tích xung quanh của hình chóp tam giác đều $S.ABC$ là:

$$S_{xq} = P \cdot d = P \cdot SH = 30 \cdot 17,32 = 519,6 \text{ (cm}^2\text{)}$$

- Bài 12.** Bạn Trang cắt miếng bìa hình tam giác đều cạnh dài 20 (hình vẽ bên) và gấp lại theo các dòng kẻ (nét đứt) để được hình chóp tam giác đều. Tính diện tích xung quanh của hình chóp tam giác đều tạo thành. Cho biết $\sqrt{75} \approx 8,66$.



Lời giải



(Bạn xem hình vẽ b)

Mặt đáy của hình chóp được tạo thành là tam giác đều ABC cạnh 10 (đvt), đường cao mặt đáy là BH nên BH đồng thời là đường trung tuyến:

$$HC = HA = \frac{AC}{2} = \frac{10}{2} = 5 \text{ (đvt)}$$

Ta có nửa chu vi của mặt đáy là: $P = \frac{1}{2}(10 + 10 + 10) = 15 \text{ (đvt)}$

Các mặt bên của hình chóp tam giác đều cạnh 10, chẳng hạn SAC có đường cao mặt bên còn gọi là trung đoạn của hình chóp là SH (xem hình b).

Tâm bìa sau khi gấp theo các nét khuất ta được bình b) là hình chóp tam giác đều.

Xét tam giác đều SAC có đường cao SH đồng thời là đường trung tuyến, ta có:

$$AH = CH = \frac{1}{2} AC = \frac{10}{2} = 5 \text{ (đvt)}$$

Xét tam giác SHC vuông tại H , ta có: $SC^2 = SH^2 + CH^2$ hay $10^2 = SH^2 + 5^2$

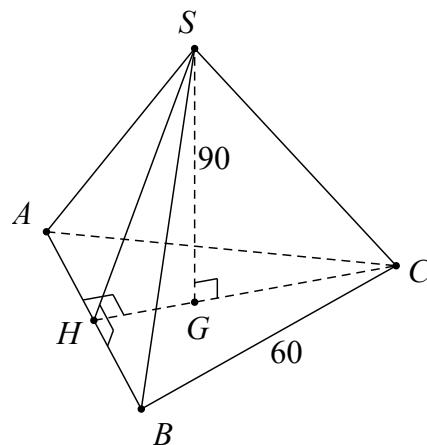
$$\Rightarrow SH^2 = 10^2 - 5^2 = 75 \Rightarrow SH = \sqrt{75} \approx 8,66 \text{ (đvt)}$$

Vậy diện tích xung quanh của hình chóp tam giác đều tạo thành là:

$$S_{xq} = P.d \approx 15 \cdot 8,66 = 129,9 \text{ (đvdt)}.$$

Bài 13. Đỉnh **FANSIPAN** (Lào Cai) cao 3143m, là đỉnh núi cao nhất Đông Dương. Trên đỉnh núi, người ta đặt một chóp làm bằng inox có dạng hình chóp tam giác đều cạnh đáy dài 60cm, chiều cao 90cm (xem hình). Hỏi tổng diện tích các mặt bên của hình chóp bằng bao nhiêu?

Lời giải



Mặt đáy của hình chóp $S.ABC$ là một tam giác đều ABC có cạnh 60cm. Gọi đường cao của mặt đáy là CH , ta có CH đồng thời là đường trung tuyến:

$$HA = HB = \frac{AB}{2} = \frac{60}{2} = 30 \text{ cm}$$

Xét tam giác BHC vuông tại H . Theo định lí Pythagore, ta có: $BC^2 = HB^2 + HC^2$ hay $60^2 = 30^2 + HC^2$

$$60^2 = 30^2 + HC^2 \Rightarrow HC^2 = 60^2 - 30^2 = 2700 \Rightarrow HC = 30\sqrt{3} \text{ (cm)}$$

G là trọng tâm của mặt đáy nên:

$$GH = \frac{1}{3} HC = \frac{30\sqrt{3}}{3} = 10\sqrt{3} \text{ (cm)}.$$

Hình chóp $S.ABC$ có đường cao SG nên $SG \perp HC$.

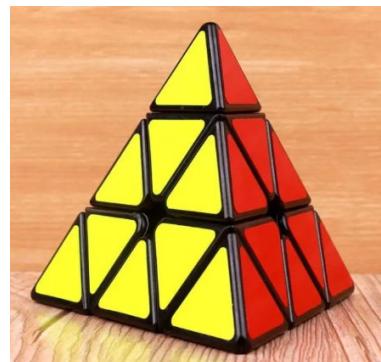
Xét tam giác SGH vuông tại G . Theo định lí Pythagore, ta có: $SH^2 = SG^2 + HG^2$

$$SH^2 = 90^2 + 30^2 = 9000 \Rightarrow SH = 30\sqrt{10} \text{ (cm)}$$

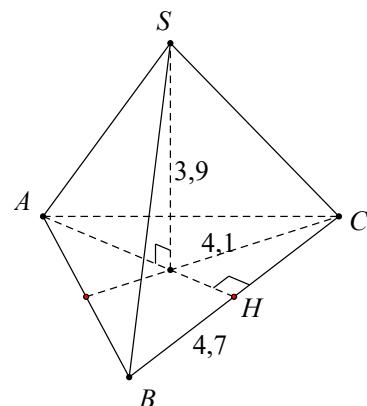
Nửa chu vi đáy: $P = \frac{1}{2}(60 + 60 + 60) = 90 \text{ (cm)}$

Vậy $S_{xq} = P \cdot d = 90 \cdot 30\sqrt{10} \approx 8538,15 \text{ (cm}^2\text{)}.$

Bài 14. Tính thể tích khối rubik có dạng hình chóp tam giác đều (hình vẽ). Biết khối rubik này có bốn mặt là các tam giác đều bằng nhau cạnh $4,7\text{ cm}$ và chiều cao $4,1\text{ cm}$, chiều cao của khối rubik bằng $3,9\text{ cm}$.



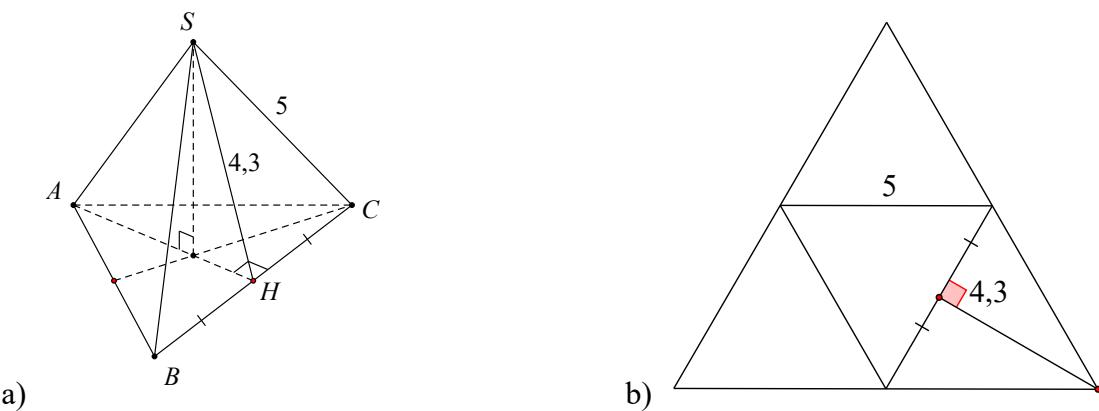
Lời giải



$$\text{Diện tích mặt đáy của khối rubik là: } S = \frac{1}{2}BC \cdot AH = \frac{1}{2} \cdot 4,7 \cdot 4,1 \approx 9,64 \text{ (cm}^2\text{)}$$

$$\text{Thể tích của khối rubik là: } V = \frac{1}{3}S \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 9,64 \cdot 3,9 \approx 12,5 \text{ (cm}^3\text{)}$$

Bài 15. Lớp bạn Na dự định gấp 100 hộp đựng quà dạng hình chóp tam giác đều có tất cả các mặt đều là hình tam giác đều cạnh 5 cm để đựng các món quà gửi tặng cho học sinh khó khăn dịp Tết Trung thu. Cho biết chiều cao của mỗi mặt là $4,3\text{ cm}$. Tính diện tích giấy cần để làm hộp, biết rằng phải tốn 20% diện tích giấy cho các mép giấy và các phần giấy bị bỏ đi.



Lời giải

Hộp giấy bạn Na cần làm là một hình chóp tam giác đều, trong đó các mặt của hình chóp là các tam giác đều cạnh 5 cm và đường cao là $4,3\text{ cm}$.

Hình khai triển của hình chóp là bốn tam giác đều (xem hình vẽ b ta cần tính diện tích của từng tam giác).

$$S = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 4,3 = 10,75 \text{ (cm}^2\text{)}$$

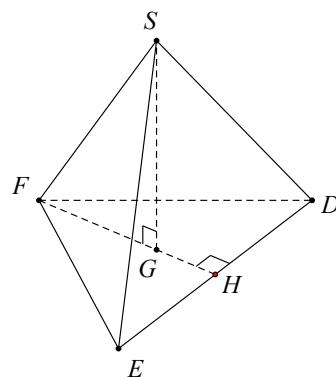
Do đó diện tích của bốn mặt là: $4 \cdot 10,75 = 43 \text{ (cm}^2\text{)}$

20% diện tích giấy cho các mép giấy và các phần giấy bị bỏ đi là: $\frac{43 \cdot 20\%}{100\%} = 8,6 \text{ (cm}^2\text{)}$ S

Vậy diện tích giấy cần dùng là: $43 + 8,6 = 51,6 \text{ (cm}^2\text{)}$

C. BÀI TẬP

Bài 10.1. Gọi tên đỉnh, cạnh bên, mặt bên, cạnh đáy, mặt đáy, đường cao và một trung đoạn của hình chóp tam giác đều trong hình vẽ sau.



Bài 10.2. Quan sát hình chóp tam giác đều ở hình vẽ bên và cho biết:

- a) Đỉnh, mặt đáy và các mặt bên của hình đó.
- b) Độ dài cạnh MA và cạnh BC .
- c) Đoạn thẳng nào là đường cao của hình đó.

Bài 10.3. Tính diện tích xung quanh, diện tích toàn phần và thể tích của: Hình chóp tam giác đều có chiều cao là 98,3 cm; tam giác đáy có độ dài cạnh là 40 cm và chiều cao là 34,6 cm; chiều cao mặt bên xuất phát từ đỉnh của hình chóp tam giác đều là 99 cm.

↔ HẾT ↔

Bài 39. HÌNH CHÓP TÚ GIÁC ĐỀU

A. KIẾN THỨC CÀN NHÓ

• Hình chóp tú giác đều

Hình chóp $S.ABCD$ trong hình vẽ có đáy $ABCD$ là hình vuông, các mặt bên là những tam giác cân bằng nhau, có chung đỉnh.

Chân đường cao kẻ từ đỉnh tới mặt đáy là điểm cách đều các đỉnh của mặt đáy (giao điểm hai đường chéo)

Đường cao kẻ từ đỉnh của mỗi mặt bên gọi là trung đoạn của hình chóp tú giác đều.

• Tạo lập hình chóp tam giác đều

- Công thức tính diện tích xung quanh và thể tích của hình chóp tú giác đều:

$$S_{xq} = P \cdot d \quad (P : \text{nửa chu vi}, d : \text{trung đoạn})$$

$$V = \frac{1}{3} S \cdot h \quad (S : \text{diện tích đáy}, h : \text{chiều cao của hình chóp})$$

- Công thức tính diện tích toàn phần của hình chóp bằng tổng diện tích Xung quanh và diện tích đáy.

Lưu ý: Khi vẽ đường cao của hình chóp tú giác đều $S.ABCD$ trước hết phải xác định giao điểm của hai đường chéo của mặt đáy O (hình vuông). Gọi S là đỉnh của hình chóp, từ O vẽ đường thẳng song song với mép của tờ giấy trên đường thẳng đó lấy S (đỉnh của hình chóp).

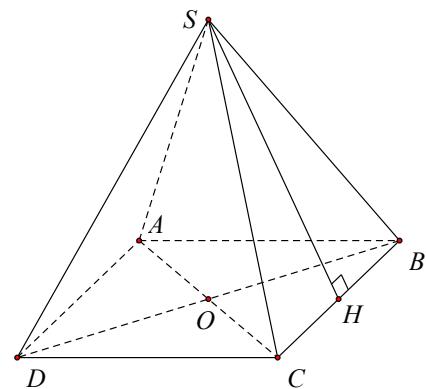
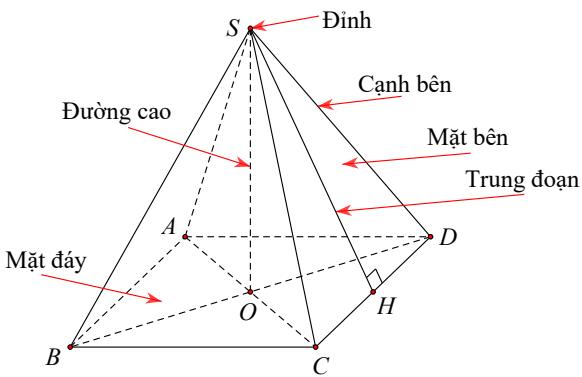
B. PHÂN LOẠI CÁC BÀI TẬP

I. Xác định các yếu tố trong hình chóp tú giác đều

Bài toán 1. Gọi tên đỉnh, cạnh bên, cạnh đáy, mặt đáy, đường cao và một trung đoạn của hình chóp tú giác đều trong hình vẽ bên.

Lời giải

- S gọi là đỉnh.
- Các cạnh bên là các đoạn thẳng SA, SB, SC, SD bằng nhau.
- Bốn mặt bên SAB, SBC, SCD, SAD là các tam giác cân.
- Các cạnh đáy là các đoạn thẳng AB, BC, CA, AD bằng nhau.
- Mặt đáy $ABCD$ là hình vuông.
- Đường cao của hình chóp tú giác đều: SO (O là giao điểm của hai đường chéo của hình vuông $ABCD$)
- Trung đoạn của hình chóp là SH .

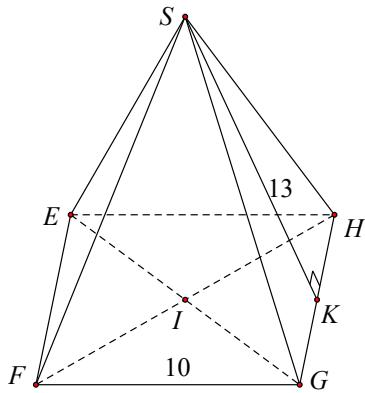


Bài toán 2. Cho hình vẽ bên. Hãy cho biết:

- Mặt bên - Mặt đáy
- Đường cao - Trung đoạn
- Độ dài cạnh đáy của hình chóp tứ giác đều.
- Độ dài trung đoạn của hình chóp tứ giác đều $S.EFGH$.

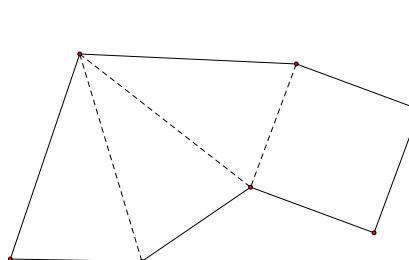
Lời giải

- Bốn mặt bên: SEF, SFG, SGH, SHE là các tam giác cân.
- Mặt đáy: $EFGH$ là hình vuông.
- Đường cao: SI (I là giao điểm của hai đường chéo mặt đáy)
- Trung đoạn SK có độ dài 13 (đvt).
- Độ dài cạnh đáy của hình chóp $S.EFGH$ là 10 (đvt).

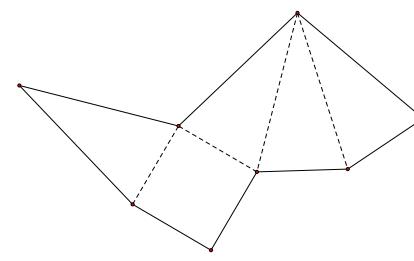


II. Nhận biết các yếu tố của hình chóp tứ giác đều từ hình khai triển

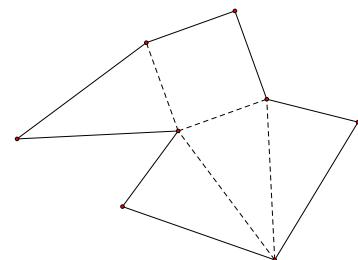
Bài toán 3. Trong các miếng bìa ở hình dưới đây, hình nào gấp lại cho ta một hình chóp tứ giác đều?



a)



b)



c)

Lời giải

Hình b) gấp lại cho ta hình chóp tứ giác đều.

Bài toán 4. Hình vẽ bên là hình khai triển của một hình chóp tứ giác đều có các kích thước cho sẵn. Hãy cho biết:

- Hình này có bao nhiêu mặt bên.
- Diện tích của mỗi mặt bên.
- Diện tích của tất cả mặt các bên.
- Diện tích đáy của hình này.

Lời giải

- Hình có 4 mặt bên.
- Diện tích của mỗi mặt bên.

Chỗng hran SAB là: $\frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 4 = 10 (\text{cm}^2)$

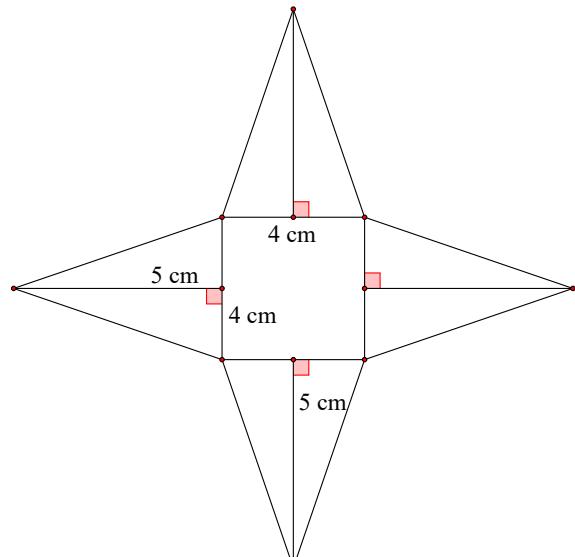
c) Cách 1:

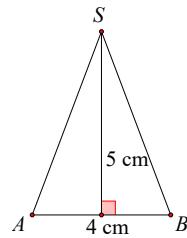
Diện tích của bốn mặt các bên là:

$$S_{\text{tổ}} = \frac{1}{2} (4+4+4+4) \cdot 5 = 40 (\text{cm}^2)$$

Cách 2: $4 \cdot 10 = 40 (\text{cm}^2)$

d) Diện tích đáy là $4 \cdot 4 = 16 (\text{cm}^2)$.





III. Tính diện tích xung quanh - Thể tích các hình và thực tế

Bài toán 5. Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD như hình vẽ.

- Tính diện tích xung quanh của hình chóp.
- Tính diện tích toàn phần của hình chóp.

Lời giải

a) Ta có nửa chu vi đáy $P = \frac{1}{2}(10+10+10+10) = 20$

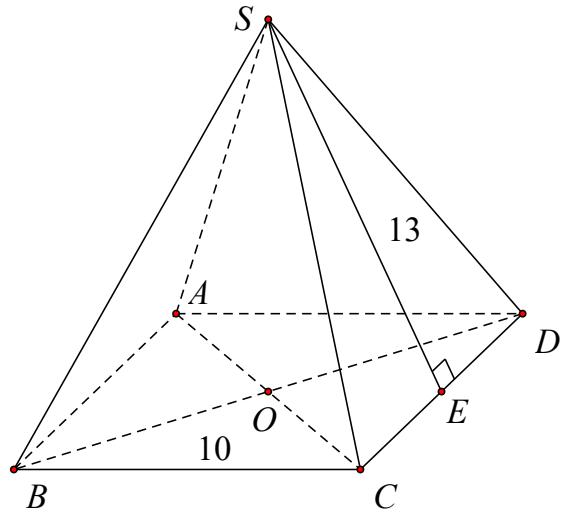
(đvt)

Trung đoạn của hình chóp $SE = 13$ (đvt).

$$S_{xq} = P \cdot d = 20 \cdot 13 = 260 \text{ (đvdt)}$$

b) Đáy $ABCD$ của hình chóp là hình vuông có cạnh là 10, suy ra diện tích đáy là: $10^2 = 100$ (đvdt)

$$\text{Vậy } S_{TP} = S_{xq} + S_D = 260 + 100 = 360 \text{ (đvdt)}$$



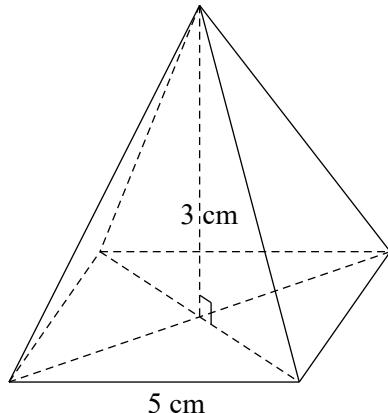
Bài toán 6. Tính thể tích của hình chóp tứ giác đều có chiều cao 3cm, độ dài cạnh của tứ giác này là 5cm (hình vẽ).

Lời giải

Mặt đáy của hình chóp tứ giác đều là hình vuông cạnh là 10cm nên diện tích mặt đáy là

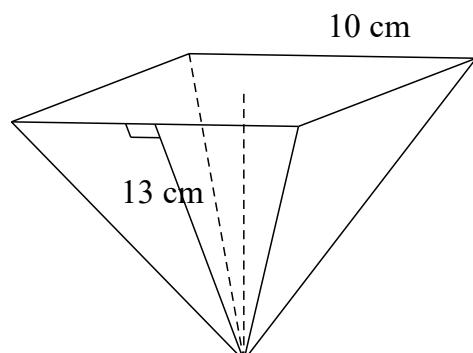
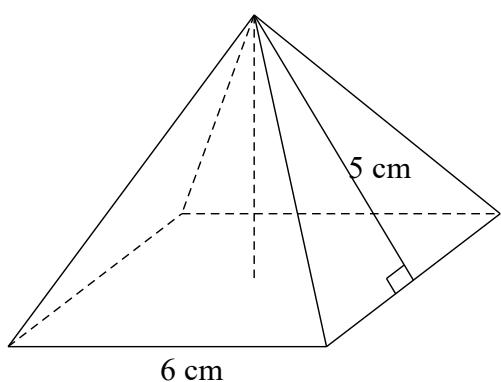
$$S = 5^2 = 25 \text{ (cm}^2\text{)}$$

$$\text{Thể tích là } V = \frac{1}{3} \cdot S \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 25 \cdot 3 = 25 \text{ (cm}^3\text{)}$$



Bài toán 7.

- Tính diện tích xung quanh của mỗi hình chóp tứ giác đều dưới đây.



a)

b)

b) Cho biết chiều cao của hình chóp tú giác đều trong hình a và hình b lần lượt là 4 cm và 12 cm . Tính thể tích của mỗi hình.

Lời giải

a) Hình a) Hình chóp tú giác đều có cạnh đáy 6 cm nên nửa chu vi mặt đáy là:

$$P = \frac{1}{2}(6+6+6+6) = 12(\text{cm})$$

Do đó diện tích xung quanh của hình chóp tú giác đều là: $S_{xq} = P \cdot d = 12 \cdot 5 = 60(\text{cm}^2)$

Hình b) Hình chóp tú giác đều có cạnh 10 cm nên nửa chu vi mặt đáy:

$$P = \frac{1}{2}(10+10+10+10) = 20(\text{cm})$$

Diện tích xung quanh của hình chóp tú giác đều là: $S_{xq} = P \cdot d = 20 \cdot 13 = 360(\text{cm}^2)$

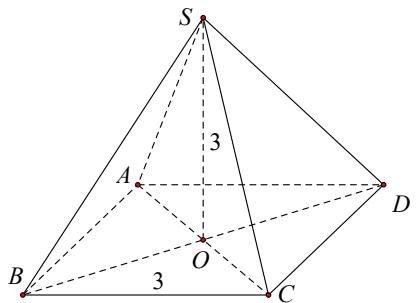
b) Hình a) Hình chóp tú giác đều có cạnh đáy 6cm nên diện tích mặt đáy là: $S = 6^2 = 36(\text{cm}^2)$

Thể tích của hình là: $V = \frac{1}{3} \cdot S \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 36 \cdot 4 = 48(\text{cm}^3)$

Hình b) Diện tích mặt đáy là: $S = 10^2 = 100(\text{cm}^2)$

Thể tích là: $V = \frac{1}{3} \cdot S \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 100 \cdot 12 = 400(\text{cm}^3)$

Bài toán 8. Bánh ít trong hình vẽ bên có dạng hình chóp tú giác đều, cạnh đáy 3 cm , cao 3 cm . Tính thể tích một chiếc bánh ít



Lời giải

* Diện tích đáy của chiếc bánh ít là:

$$S = 3^2 = 9(\text{cm}^2)$$

Thể tích là:

$$V = \frac{1}{3} \cdot S \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 9 \cdot 3 = 9(\text{cm}^3)$$

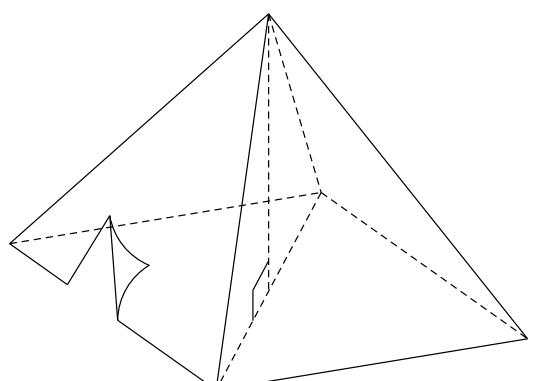
Bài toán 9. Một chiếc lèu có dạng hình chóp tú giác đều ở trại hè của học sinh có kích thước như hình vẽ bên.

a) Tính thể tích không khí trong chiếc lèu.

b) Tính diện tích vải lèu (không tính các mép dán), biết chiều cao của mặt bên xuất phát từ đỉnh của chiếc lèu là 3,18 m .

Lời giải

a) Mặt đáy của lèu là hình vuông cạnh đáy 3m , nên diện tích mặt đáy là: $S = 3^2 = 9(\text{m}^2)$



$$\text{Thể tích lèu là: } V = \frac{1}{3} \cdot S \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 9 \cdot 2,8 = 8,4 (\text{m}^3)$$

b) Nửa chu vi mặt đáy là: $P = \frac{1}{2}(3+3+3+3) = 6(\text{m})$.

Diện tích xung quanh là: $S_{xq} = P \cdot d = 6 \cdot 3,18 = 19,08 (\text{m}^2)$

Bài toán 10. Tính diện tích xung quanh, diện tích toàn phần và thể tích của: Hình chóp tứ giác đều có độ dài cạnh đáy là 120 cm, chiều cao là 68,4 cm, chiều cao mặt bên xuất phát từ đỉnh của hình chóp tứ giác đều là 91 cm.

Lời giải

Hình chóp tứ giác đều có độ dài cạnh đáy là 120 cm.

Nửa chu vi đáy là: $P = \frac{1}{2}(120+120+120+120) = 240(\text{cm})$. Vậy $S_{xq} = P \cdot d = 240 \cdot 91 = 21840(\text{cm}^2)$

Diện tích mặt đáy: $S_D = 120^2 = 14400(\text{cm}^2)$

Diện tích toàn phần: $S_{tp} = S_{xq} + S_D = 21840 + 14400 = 36240(\text{cm}^2)$

Thể tích của hình chóp: $V = \frac{1}{3} \cdot S \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 14400 \cdot 68,4 = 328320(\text{cm}^3)$

Bài toán 11. Người ta làm mô hình một kim tự tháp ở cổng vào của bảo tàng Louvre. Mô hình có dạng hình chóp tứ giác đều, chiều cao 21m, độ dài cạnh đáy là 34m.

- a) Tính thể tích hình chóp.
- b) Tính tổng diện tích các tấm kính để phủ kín bốn mặt bên hình chóp này.



Lời giải

- a) Mô hình có dạng hình chóp tứ giác đều nên mặt đáy là hình vuông có cạnh 34m, nên diện tích mặt đáy: $S = 34^2 = 1156(\text{m}^2)$.

Thể tích của hình là: $V = \frac{1}{3} \cdot S \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 1156 \cdot 21 = 8092(\text{m}^3)$

b) Đường cao của hình chóp SO vuông góc với mặt đáy $ABCD$ nên $SO \perp OH$.

$$\text{Để thấy } OH = \frac{1}{2}DC = \frac{1}{2} \cdot 34 = 17 \text{ (m)}$$

Xét tam giác SOH vuông tại O .

Theo định lí Pythagore, ta có:

$$SH^2 = SO^2 + OH^2$$

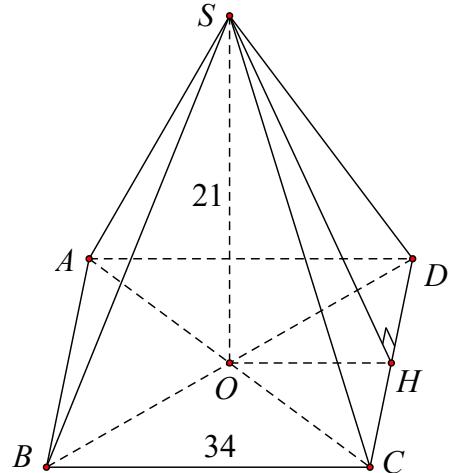
$$SH^2 = 21^2 + 17^2 = 730$$

$$SH \approx 27 \text{ (m)}$$

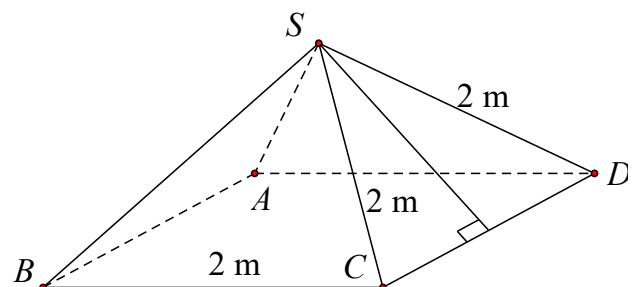
$$\text{Nửa chu vi mặt đáy là: } P = \frac{1}{2}(34 + 34 + 34 + 34) = 68 \text{ (m)}$$

Tổng diện tích các tấm kính để phủ kín bốn mặt bên hình chóp là

$$S_{\text{xy}} = P \cdot d = 68 \cdot 27 = 1836 \text{ (m}^2\text{)}.$$



Bài toán 12. Một mái che giếng trời của một ngôi nhà có dạng hình chóp tứ giác đều, bốn mặt bên làm bằng kính. Diện tích kính làm bốn mặt bên của mái che bằng bao nhiêu? Biết các mặt bên là các tam giác đều có cạnh dài 2 m và viền không đáng kể. Cho biết $\sqrt{3} \approx 1,73$.



Lời giải

Hình chóp tứ giác đều có các mặt bên (chẳng hạn mặt SCD là tam giác đều cạnh 2 m). Khi đó mặt đáy là hình vuông cạnh 2 m. Xét tam giác SCD đều cạnh 2 m, đường cao SH đồng thời là đường trung tuyến hay

$$HC = HD = \frac{1}{2}CD = 1 \text{ (m)}$$

Xét tam giác SHD vuông tại H , theo định lí Pythagore, ta có:

$$SD^2 = SH^2 + HD^2$$

$$\Rightarrow SH^2 = SD^2 - HD^2 = 2^2 - 1^2 = 3$$

$$\Rightarrow SH = \sqrt{3} \approx 1,73 \text{ (m)}$$

$$\text{Nửa chu vi đáy là: } P = \frac{1}{2}(2 + 2 + 2 + 2) = 4 \text{ (m)}$$

$$\text{Vậy diện tích kính làm bốn mặt bên của mái che là: } S_{\text{xy}} = P \cdot d \approx 4 \cdot 1,73 = 6,92 \text{ (m}^2\text{)}$$

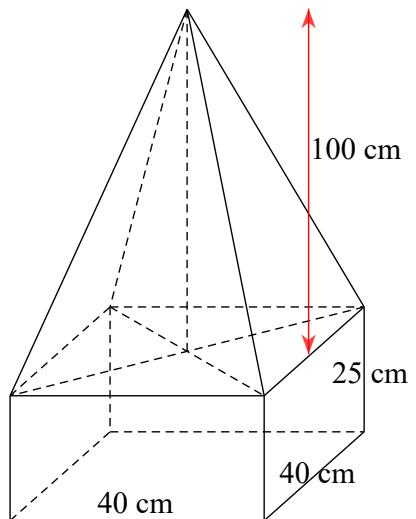
Bài toán 13. Một khối bê tông có dạng như hình vẽ bên. Phần dưới của khối bê tông có dạng hình hộp chữ nhật, đáy là hình vuông có cạnh 40 cm, chiều cao 25 cm. Phần trên của khối bê tông có dạng hình chóp tứ giác đều, chiều cao 100 cm. Tính thể tích của khối bê tông đó.

Lời giải

Phần dưới của khối bê tông có dạng hình hộp chữ nhật, đáy là hình vuông có cạnh 40 cm, chiều cao 25 cm nên thể tích của khối bê tông là: $V = S \cdot h = 40^2 \cdot 25 = 40000(\text{cm}^3)$

Phần trên của khối bê tông có dạng hình chóp tứ giác đều có độ dài cạnh của mặt đáy là 40 cm và chiều cao là 100 cm.

Diện tích mặt đáy của hình chóp là: $S = 40^2 = 1600(\text{cm}^2)$



Thể tích của khối bê tông hình chóp là: $V = \frac{1}{3} \cdot S \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 1600 \cdot 100 = \frac{160000}{3}(\text{cm}^3)$

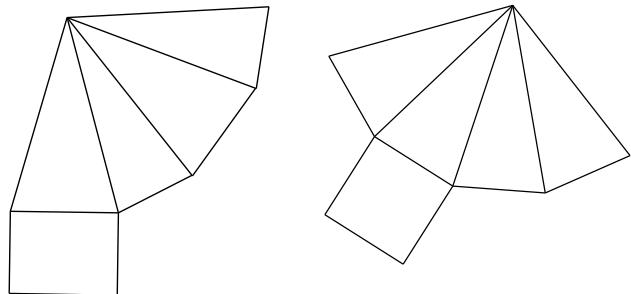
Vậy thể tích của khối bê tông trên gồm hai khối: là khối hình hộp chữ nhật và khối hình chóp tứ giác đều.

$$V = 40000 + \frac{160000}{3} = \frac{280.000}{3}(\text{cm}^3)$$

C. BÀI TẬP

10.4. Trong các miếng bìa ở hình vẽ dưới đây, miếng bìa nào khi gấp và dán lại thì được một hình chóp tứ giác đều.

10.5. Tính diện tích toàn phần và thể tích của hình chóp tứ giác đều có độ dài cạnh đáy là 72 dm, chiều cao là 68,1 dm, chiều cao của mặt bên xuất phát từ đỉnh của hình chóp tứ giác đều là 77 dm.



10.6. Bảo tàng Louvre (Pháp) có một kim tự tháp hình

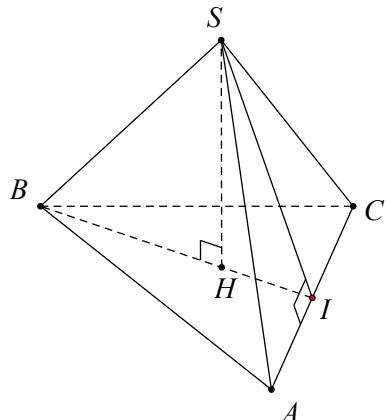
chóp tứ đều bằng kính (gọi là kim tự tháp Louvre) có chiều cao 21,3 m và cạnh đáy 34 m. Tính thể tích của kim tự tháp này. (Nguồn: <https://www.pariscityvision.com/en/paris/museums>)

↔ HẾT ↔

ÔN TẬP CUỐI CHƯƠNG X

PHẦN A. TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Trung đoạn của hình chóp tam giác đều trong hình vẽ bên là:



A. SB

B. SH

C. SI

D. HI

Câu 2. Đáy của hình chóp tứ giác đều là:

A. Hình vuông.

B. Hình bình hành.

C. Hình thoi.

D. Hình chữ nhật.

Câu 3. Diện tích xung quanh của hình chóp tam giác đều bằng:

A. Tích của nửa chu vi đáy và chiều cao của hình chóp.

B. Tích của nửa chu vi đáy và trung đoạn.

C. Tích của chu vi đáy và trung đoạn.

D. Tổng của chu vi đáy và trung đoạn.

Câu 4. Một hình chóp tam giác đều có chiều cao h , thể tích V . Diện tích đáy S là:

A. $S = h \cdot V$

B. $S = V$

C. $S = \frac{3V}{h}$

D. $S = \frac{3h}{V}$

Hướng dẫn – Đáp án

Câu 1. Chọn C

Câu 2. Chọn A

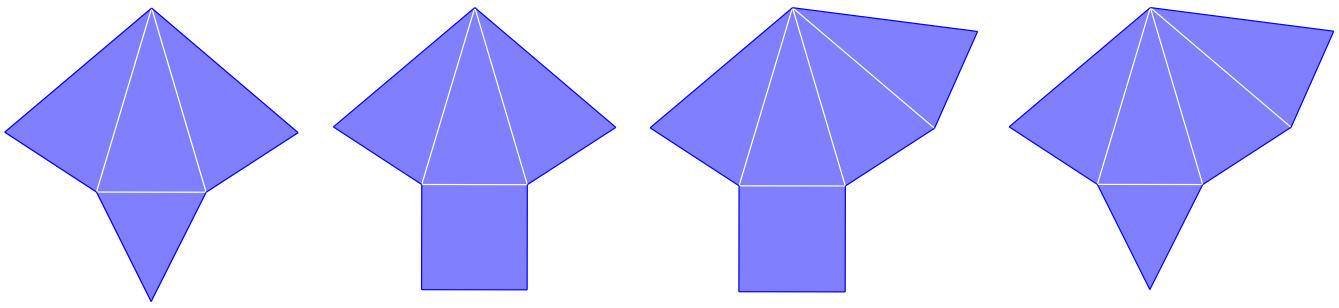
Câu 3. Chọn B

Câu 4. Chọn C

Ta có: $V = \frac{1}{3}S \cdot h$.

PHẦN B. TỰ LUẬN

Bài 1. Trong các tấm bìa ở hình vẽ dưới đây tấm bìa nào gấp được hình chóp tam giác đều, tấm bìa nào gấp được hình chóp tứ giác đều?



a)

b)

c)

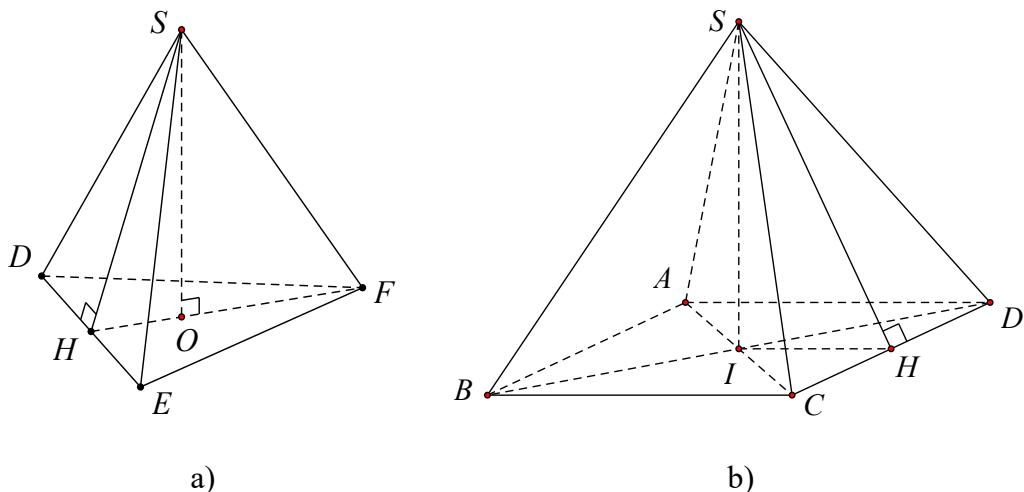
d)

Lời giải

Ở hình a) Đây là một tam giác đều, ba mặt bên là các tam giác cân bằng nhau. Nên tám bìa ở hình a) sẽ gấp được hình chóp tam giác đều. Ở hình c) Đây là hình vuông, bốn mặt bên là các tam giác cân bằng nhau. Nên tám bìa ở hình c) sẽ gấp được hình chóp tứ giác đều.

Bài 2. Gọi tên đỉnh, cạnh bên, cạnh đáy, đường cao và một trung đoạn của hình chóp tam giác đều, hình chóp tứ giác đều trong hình vẽ a), b) dưới đây.

Lời giải



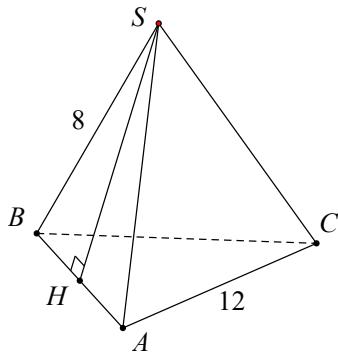
Ở hình a) Hình chóp tam giác đều $S.DEF$.

Đỉnh S . Cạnh bên SD, SE, SF . Cạnh đáy DE, EF, FD . Trung đoạn SH . Đường cao SO .

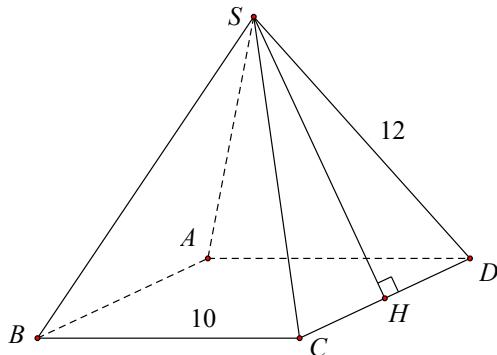
Ở hình b) Hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$.

Đỉnh S . Cạnh bên SA, SB, SC, SD . Cạnh đáy AB, BC, CD, DA . Trung đoạn SH . Đường cao SI

Bài 3. Tính diện tích xung quanh của hình chóp tam giác đều, hình chóp tứ giác đều trong hình vẽ dưới đây.



a)



b)

Lời giải

Xét hình a). Hình chóp tam giác đều $D.ABC$ có đáy là tam giác đều ABC cạnh 12 (đvt).

Xét mặt đáy ABC có đường cao CH đồng thời là đường trung tuyến: $HA = HB = \frac{1}{2}AB = \frac{12}{2} = 6$ (đvt)

Xét tam giác DHA vuông tại H . Theo định lí Pythagore, ta có:

$$AD^2 = AH^2 + DH^2 \text{ hay } 8^2 = 6^2 + DH^2 \Rightarrow DH^2 = 8^2 - 6^2 = 28 \Rightarrow DH = \sqrt{28} = 2\sqrt{7} \text{ (đvt)}$$

Nửa chu vi mặt đáy: $P = \frac{1}{2}(12+12+12) = 18$ (đvt)

$$\text{Vậy } S_{xa} = P \cdot d = 18 \cdot 2\sqrt{7} = 36\sqrt{7} \text{ (đvdt)}$$

Xét hình b) Hình chóp tú giác đều $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh 10 (đvt).

Xét mặt đáy $ABCD$ ta có nửa chu vi mặt đáy là: $P = \frac{1}{2}(10+10+10+10) = 20$ (đvt)

Xét mặt bên SCD là tam giác cân có đường cao SH đồng thời là đường trung tuyến, ta có:

$$HD = HC = \frac{1}{2}CD = \frac{10}{2} = 5 \text{ (dvt).}$$

Canh bên của hình chóp là 12 (đvt)

Xét tam giác SHC vuông tại H . Theo định lí Pythagore, ta có:

$$SC^2 = SH^2 + CH^2 \text{ hay } 12^2 = SH^2 + 5^2$$

$$SH^2 = 12^2 - 5^2 = 119$$

$SH \approx 10,91$ (đvt)

Vậy $S_{xa} = P \cdot d \approx 20 \cdot 10,91 = 218,2$ (đvdt)

Bài 4. Tính diện tích toàn phần của một hình chóp tam giác đều, biết một mặt bên có diện tích 42 cm^2 và diện tích đáy là 30 cm^2 .

Lời giải

Mỗi mặt bên có diện tích là 42 cm^2 mà hình chóp tam giác đều có ba mặt bên nên diện tích xung quanh là: $42 \cdot 3 = 126 (\text{cm}^2)$.

Do đó diện tích toàn phần là: $S_{tp} = S_{xq} + S_D = 126 + 30 = 156 (\text{cm}^2)$

Câu 5. Tính thể tích của hình chóp tứ giác đều, biết rằng diện tích đáy là 30 m^2 , chiều cao là 100 dm .

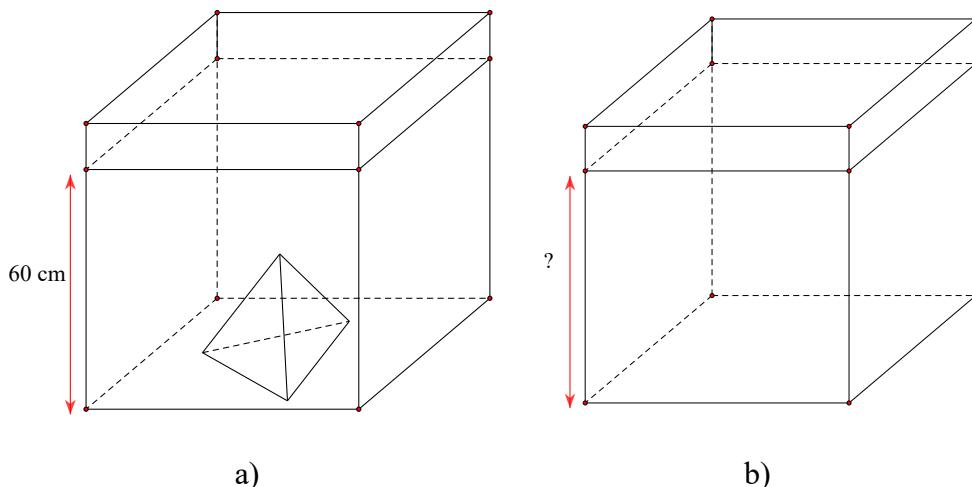
Lời giải

Đổi: $100 \text{ dm} = 10 \text{ m}$.

Vậy thể tích của hình chóp tứ giác đều là: $V = \frac{1}{3} S \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 30 \cdot 10 = 100 \text{ m}^3$.

Câu 6. Một bể kính hình hộp chữ nhật có hai cạnh đáy là 60 cm và 30 cm . Trong bể có một khối đá hình chóp tam giác đều với diện tích đáy là 270 cm^2 chiều cao 30 cm . Người ta đổ nước vào bể sao cho nước ngập khói đá và đo được mực nước là 60 cm . Khi lấy khói đá ra thì mực nước của bể là bao nhiêu?

Lời giải



Thể tích khói đá hình chóp tam giác đều là: $V_{\text{đá}} = \frac{1}{3} \cdot S \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 270 \cdot 30 = 2700 (\text{cm}^3)$

Thể tích khói nước là: $V_N = 60 \cdot 30 \cdot 60 = 108000 (\text{cm}^3)$

Do đó thể tích nước còn lại là: $108000 - 2700 = 105300 (\text{cm}^3)$

Diện tích đáy của bể hình hộp chữ nhật là: $60 \cdot 30 = 1800 (\text{cm}^2)$

Khi khói đá được lấy ra thì mực nước của bể là: $105300 : 1800 = 58,5 (\text{cm})$.

HƯỚNG DẪN GIẢI BÀI TẬP CHƯƠNG X

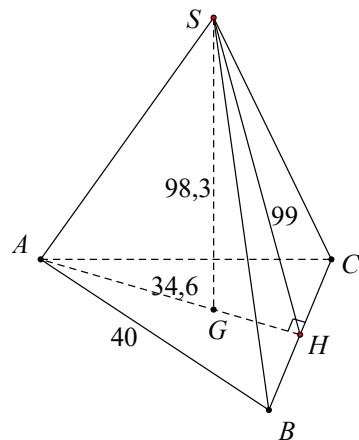
Bài 10.1. Đỉnh S . Cạnh bên SD, SE, SF . Mặt bên SDE, SEF, SFD . Cạnh đáy DE, EF, FD . Mặt đáy DEF . Đường cao SG . Trung đoạn SH .

Bài 10.2. a) Đỉnh M . Mặt đáy ABC . Mặt bên MAB, MBC, MCA .

b) Độ dài cạnh bên $MA = MC = 17 (\text{cm})$. Độ dài cạnh $BC = AC = AB = 13 (\text{cm})$.

c) Đường cao của hình chóp là MO .

Bài 10.3.



Đáy của hình chóp tam giác đều có cạnh là 40 cm.

$$\text{Do đó nửa chu vi đáy là: } P = \frac{1}{2}(40 + 40 + 40) = 60 \text{ (cm)}$$

Trung đoạn của hình chóp là chiều cao mặt bên xuất phát từ đỉnh của tam giác đều là 99 cm.

$$\text{Vậy } S_{xq} = P \cdot d = 60 \cdot 99 = 5940 \text{ (cm}^2\text{)}$$

Đáy của hình chóp là tam giác đều ABC cạnh 40 cm và đường cao là 34,6 cm

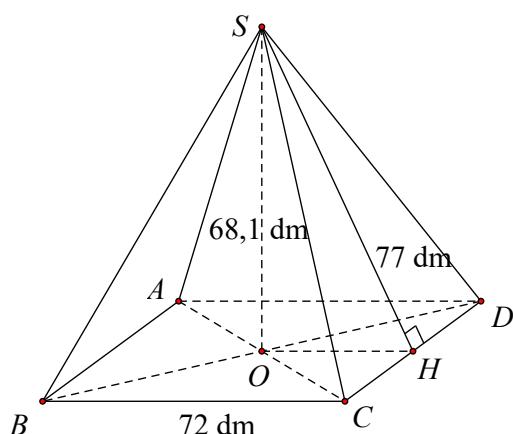
$$\text{Nên } S_D = \frac{1}{2} \cdot 40 \cdot 34,6 = 692 \text{ (cm}^2\text{)}$$

$$\text{Do đó } S_{TP} = S_{xq} + S_D = 5940 + 692 = 6632 \text{ (cm}^2\text{)}$$

$$\text{Thể tích của hình chóp } S.ABC \text{ là: } V = \frac{1}{3} \cdot S \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 692 \cdot 98,3 = 34011,8 \text{ (cm}^3\text{)}$$

Bài 10.4. Chọn b) vì là hình vuông và bốn mặt bên là các tam giác cân bằng nhau.

Bài 10.5.



Hình chóp tứ giác đều có đáy là hình vuông, cạnh đáy là 72 dm nên nửa chu vi đáy:

$$P = \frac{1}{2}(72 + 72 + 72 + 72) = 144 \text{ (dm)}$$

Chiều cao của mặt bên xuất phát từ đỉnh của hình chóp là 77 dm .

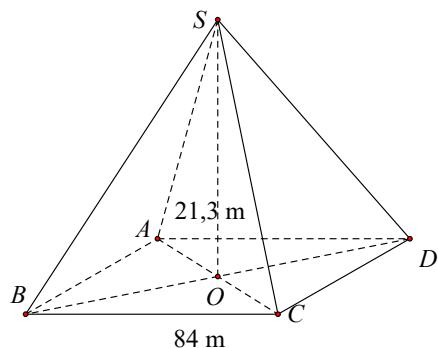
$$\text{Do đó } S_{xq} = P \cdot d = 144 \cdot 77 = 11088 \left(\text{dm}^2 \right)$$

$$\text{Diện tích mặt đáy: } S_D = 72^2 = 5184 \left(\text{dm}^2 \right)$$

$$\text{Vậy } S_{TP} = S_{xq} + S_D = 11088 + 5184 = 16272 \left(\text{dm}^2 \right)$$

$$\text{Thể tích của hình chóp } S.ABCD \text{ là: } V = \frac{1}{3} \cdot 5184 \cdot 68,1 = 117676,8 \left(\text{cm}^3 \right)$$

Bài 10.6.



Hình chóp tứ giác đều (kim tự tháp). Mặt đáy hình vuông, cạnh 34 m nên diện tích mặt đáy:

$$S_D = 34^2 = 1156 \left(\text{m}^2 \right)$$

Vậy thể tích của kim tự tháp là:

$$V = \frac{1}{3} \cdot S \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 1156 \cdot 21,3 = 8207,6 \left(\text{m}^3 \right).$$

↔ HẾT ↔