Übungszettel 9

OK

Projektaufgabe:Gen-Pflanzen für den Mars

Algorithmik
Institut für Theoretische Informatik
Wintersemester 2014

[redacted]

Aufgabe 9.1 Dr. Mendel und die Anfänge der Pflanzenzucht

Teilaufgabe 9.1.1

bearbeitet

Teilaufgabe 9.1.2

bearbeitet

Teilaufgabe 9.1.3

Das ILP soll die Bisektionsweite bei der Bisektionen bestimmen, also die minimale Weite über alle möglichen Bisektionen von $G = \{V, E\}$.

$$\begin{aligned}
\min \quad & \sum e_{ij},\ \forall e_{ij} \in E & (1)\\
\text{s.t.} \quad & e_{ij} \geq v_i - v_j,\ \forall e_{ij} \in E \wedge v_i, v_j \in V & (2)\\
& e_{ij} \geq v_j - v_i,\ \forall e_{ij} \in E \wedge v_i, v_j \in V & (3)\\
& \sum_{i}^{n} v_i = \frac{n}{2} & (4)\\
& e_{ij}, v_i, v_j \in \{0, 1\},\ \forall e_{ij} \in E \wedge v_i, v_j \in V & (5)
\end{aligned}$$

Die Zielfunktion versucht die Anzahl der Kanten, die bei einer Bisektion durchtrennt wird, zu minimieren um die Bisektionsweite von G zu erhalten. Die ersten zwei Bedingungen sind immer erfüllt, weil zwischen den Knoten der Partitionen eine XOR Beziehung besteht (2.Teilaufgabe). Die letzte explizite Bedingung stellt sicher, dass nur Bisektionen bei der Partitionierung beachtet werden.

Teilaufgabe 9.1.4

Die `lp_solve` Programme befinden sich im Ordner „Mars_Gen-Pflanzen/lp_solve/ ...“

Aufgabe 9.2

Teilaufgabe 9.2.1

Damit das Programm eine Kantenliste für einen Graphen mit n-Knoten erzeugt, benötigt es folgende (Übergabe-)Parameter:

1. <Graphennamen>
2. <n>
3. EL

Teilaufgabe 9.2.2

Damit das Programm ein ILP für einen Graphen mit n-Knoten erzeugt, benötigt es folgende (Übergabe-)Parameter:

1. <Graphennamen>
2. <n>
3. ILP oder ILPF, ersteres um direkt zu `lp_solve` zu pipen, letzteres um in eine File zuschreiben

Teilaufgabe 9.2.3

siehe nächste Seite ...

Aufgabe 9.3

Teilaufgabe 9.3.1

siehe nächste Seite ...

Teilaufgabe 9.3.2 **Clintonia Satanis**

Gegen die Zufallspflanze Clintonia Cubicus von Prof. Cayley, kommt man kaum an. Ihre Bisektionsweite kann größer als $\sqrt{n}$ werden. Daher haben wir uns $\sqrt{n}$ als Grenze für die Bisektionsweite gesetzt. Dieser Wert war auch die Bisektionsweite von L.Columnaris von Prof. Hamilton, jedoch hatte L.Columnaris einen Knotengrad von bis zu 4.
Unsere Pflanze **Clintonia Satanis** hat einen Knotengrad von genau 3 und eine Bisektionsweite von $\sqrt{n}$. Sie hat weiterhin die Knoten $v_1, v_2, \ldots, v_n$ und eine spezifische Kantenmenge. Für $n = m^2, m$ gerade ist

$$
\begin{aligned}
E_{CS} = &\Big\{\{v_{m\cdot i+j}, v_{m\cdot i+(j \bmod m)+1}\} \mid i = 0,\ldots,m-1 \wedge j = 1,\ldots,m\Big\} \\
\cup &\Big\{\{v_{m\cdot i+j}, v_{m\cdot((i+1) \bmod m)+j)}\} \mid i = 0,\ldots,m-1 \wedge j = 1,\ldots,m,\ (i+j) \bmod 2 = 1\Big\}
\end{aligned}
$$

Die n-Knoten werden zu m-Kreise mit jeweils m-Knoten zusammengefasst. Die Kreise werden durch Kanten verbunden. Sei K_m einer dieser Kreise mit dem Index m. Wenn m gerade ist, werden die Knoten mit geraden Indizes von K_m mit den Knoten mit gerader Indizes vom Nachbarkreis K_{m+1} durch Kanten verbunden. Wenn m ungerade ist, werden die Knoten mit ungeraden Indizes von K_m mit den Knoten mit ungerader Indizes von K_{m+1} durch Kanten verbunden. Wenn K_m der äußerste Kreis ist, gilt K_1 als sein Nachbarkreis.

ungünstige Notation. besser: C_m

Gut!

Teilaufgabe 9.3.3

Die Pflanzen sind für das Projekt Mars gänzlich ungeeignet, weil ihre Bisektionsweite von der Anzahl der Knoten des Graphens abhängt. Bei C.Borealis und C.Udensis dagegen ist die Bisektionsweite jeweils konstant bzw. konvergiert schnell. Bei L.Columnaris ist die Bisektionsweite zwar ebenfalls $\sqrt{n}$, doch der maximale Grad ist 4 anstatt 3 wie bei der Pflanze C.Cubicus von Prof. Cayley.

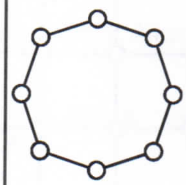
Aufgabe 9.2

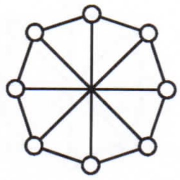
die Knoten $v_1, \dots, v_n$ und jeweils eine spezifische Kantenmenge.

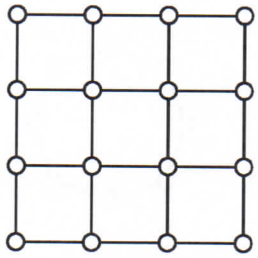
- Clintonia borealis: $E_{cb} = \{\{v_i, v_j\} \mid i \in \{1, \dots, n\}, j = (i \bmod n) + 1\}$ für n gerade
- Clintonia udensis: $E_{cu} = E_{cb} \cup \{\{v_i, v_j\} \mid i \in \{1, \dots, n/2\}, j = (i + n/2)\}$ für n gerade
- Lobelia columnaris: Für $n = m^2$, m gerade ist

$$E_{lc} = \Big\{\{v_{i+km}, v_{i+1+km}\} \mid i \in \{1, \dots, m-1\}, k \in \{0, \dots, m-1\}\Big\}$$
$$\cup \Big\{\{v_{i+km}, v_{i+m+km}\} \mid i \in \{1, \dots, m\}, k \in \{0, \dots, m-2\}\Big\}$$

Clintonia Borealis ist für den Mars am besten geeignet, weil ihre Bisektionsbreite konstant bei 2 liegt und unabhängig von der Knotenzahl n ist


Clintonia borealis


Clintonia udensis


Lobelia columnaris

Bearbeiten Sie die folgenden Teilaufgaben und geben Sie den kommentierten Quelltext ab. Füllen Sie außerdem die untenstehende Tabelle aus.

1. Um die Pflanzen mit dem Geninizer 3000 zu erzeugen, wird eine Kantenliste benötigt. Schreiben Sie ein Programm, das als Eingabe die Pflanzenart und die Knotenzahl n erwartet und anschließend für den entsprechenden Graphen die Kantenliste erzeugt und ausgibt.
2. Erweitern Sie Ihr Programm derart, dass es alternativ zur Kantenliste ein ILP für das Bisektionsproblem auf dem entsprechenden Graphen ausgibt.
3. Erzeugen Sie für die in der Tabelle aufgeführen Parameter die entsprechenden ILPs und lassen Sie mit `lp_solve` die Bisektionsweite der entsprechenden Graphen bestimmen. Füllen Sie damit die Tabelle aus. Welcher Graph ist für den Mars am besten geeignet?

$n =$	4	16	36	64	100
Clintonia borealis	2	2	2	2	2
~~Clintonia udensis~~	4	4	4	4	4
~~Lobelia columnaris~~	2	4	6	8	10

Aufgabe 9.3 Pflanzenarten für Prof. Cayley (Abgabe bis 26. Januar 2015)

Prof. Cayley ist Chief-Saboteur bei `Roskov Moskov Rockets` und wurde damit beauftragt, die Mission zu stören. Er will eine Pflanze einschleusen, die den zukünftigen Marsianern möglichst viel Arbeit beim Zerschneiden der Pflanzen macht. Gesucht ist also ein Graph mit hoher Bisektionsweite, d.h. egal wie geschickt man die Verbindungen zerschneidet, es wird immer eine hohe Zahl an Trennungen erfordert.

Bearbeiten Sie die folgenden Teilaufgaben und geben Sie den kommentierten Quelltext ab. Füllen Sie außerdem die untenstehende Tabelle aus. Erzeugen Sie in dieser Aufgabe analog zur vorhergehenden Aufgabe ILPs, die Sie dann mittels `lp_solve` lösen, um die Bisektionsweite zu bestimmen.

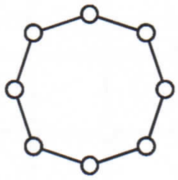
1. Da bei `Roskov Moskov Rockets` das Chaos vorherrscht, entwickelt Prof. Cayley zuerst einen zufälligen Graphen. Erweitern Sie Ihre Implementierung derart, dass ein zufälliger Graph mit n Knoten und Knotengrad 3 erzeugt werden kann, die sogenannte Clintonia Cubicus. Füllen Sie die Tabelle aus und interpretieren Sie die Ergebnisse.
2. Strengen Sie Ihren bösen Erfindergeist an und überlegen Sie sich mindestens eine weitere Art mit Knotengrad 3 und einer möglichst hohen Bisektionsweite. Beschreiben Sie die neue Pflanzenart schriftlich und anschaulich. Implementieren Sie den Graphen und ergänzen Sie die Tabelle entsprechend. Wie verhält sich Ihre Pflanze im Vergleich zur Clintonia Cubicus?
3. Wie verhalten sich die Pflanzen im Gegensatz zu denen von Prof. Hamilton? Welches Fazit können Sie aus den Untersuchungen ziehen?

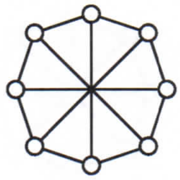
$n =$	16	36	64	100
Clintonia Cubicus				
eigene Graphen				

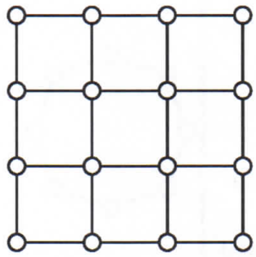
die Knoten $v_1, \dots, v_n$ und jeweils eine spezifische Kantenmenge.

- Clintonia borealis: $E_{cb} = \{\{v_i, v_j\} \mid i \in \{1, \dots, n\}, j = (i \bmod n) + 1\}$ für n gerade
- Clintonia udensis: $E_{cu} = E_{cb} \cup \{\{v_i, v_j\} \mid i \in \{1, \dots, n/2\}, j = (i + n/2)\}$ für n gerade
- Lobelia columnaris: Für $n = m^2$, m gerade ist

$$E_{lc} = \left\{ \{v_{i+km}, v_{i+1+km}\} \mid i \in \{1, \dots, m-1\}, k \in \{0, \dots, m-1\} \right\}$$
$$\cup \left\{ \{v_{i+km}, v_{i+m+km}\} \mid i \in \{1, \dots, m\}, k \in \{0, \dots, m-2\} \right\}$$


Clintonia borealis


Clintonia udensis


Lobelia columnaris

Bearbeiten Sie die folgenden Teilaufgaben und geben Sie den kommentierten Quelltext ab. Füllen Sie außerdem die untenstehende Tabelle aus.

1. Um die Pflanzen mit dem Geninizer 3000 zu erzeugen, wird eine Kantenliste benötigt. Schreiben Sie ein Programm, das als Eingabe die Pflanzenart und die Knotenzahl n erwartet und anschließend für den entsprechenden Graphen die Kantenliste erzeugt und ausgibt.
2. Erweitern Sie Ihr Programm derart, dass es alternativ zur Kantenliste ein ILP für das Bisektionsproblem auf dem entsprechenden Graphen ausgibt.
3. Erzeugen Sie für die in der Tabelle aufgeführen Parameter die entsprechenden ILPs und lassen Sie mit **lp_sol** … e Tabelle aus. Welch…

Das Ergebnis legt nah, dass CC sehr fies ist, weil die Bisektionsbreite mindestens Wurzel(n) sein kann, manchmal sogar schlimmer, für n = 100 kann es zwischen 14 und 16 liegen. Damit ist es fieser als LC aus 9.2. lp_solve braucht für CC mit n=100 fast 30 Sekunden zum Berechnen, das ist ungefähr das Dreifache im Vergleich zu LC n=100.

Dann ist das ILP ungünstig formuliert. Kann schneller gehen.

Aufgabe 9.3 Pflanzenarten für Prof. Cayley (Abgabe bis 26. Januar 2015)

Prof. Cayley ist Chief-Saboteur bei **Roskov Moskov Rockets** und wurde damit beauftragt, die Mission zu stören. Er will eine Pflanze einschleusen, die den zukünftigen Marsianern möglichst viel Arbeit beim Zerschneiden der Pflanzen macht. Gesucht ist also ein Graph mit hoher Bisektionsweite, d.h. egal wie geschickt man die Verbindungen zerschneidet, es wird immer eine hohe Zahl an Trennungen erfordert.

Bearbeiten Sie die folgenden Teilaufgaben und geben Sie den kommentierten Quelltext ab. Füllen Sie außerdem die untenstehende Tabelle aus. Erzeugen Sie in dieser Aufgabe analog zur vorhergehenden Aufgabe ILPs, die Sie dann mittels **lp_solve** lösen, um die Bisektionsweite zu bestimmen.

1. Da bei **Roskov Moskov Rockets** das Chaos vorherrscht, entwickelt Prof. Cayley zuerst einen zufälligen Graphen. Erweitern Sie Ihre Implementierung derart, dass ein zufälliger Graph mit n Knoten und Knotengrad 3 erzeugt werden kann, die sogenannte Clintonia Cubicus. Füllen Sie die Tabelle aus und interpretieren Sie die Ergebnisse.
2. Strengen Sie Ihren bösen Erfindergeist an und überlegen Sie sich mindestens eine weitere Art mit Knotengrad 3 und einer möglichst hohen Bisektionsweite. Beschreiben Sie die neue Pflanzenart schriftlich und anschaulich. Implementieren Sie den Graphen und ergänzen Sie die Tabelle entsprechend. Wie verhält sich Ihre Pflanze im Vergleich zur Clintonia Cubicus?
3. Wie verhalten sich die Pflanzen im Gegensatz zu denen von Prof. Hamilton? Welches Fazit können Sie aus den Untersuchungen ziehen?

$n =$	16	36	64	100
Clintonia Cubicus	2	6	10	14-16
Clintonia Satanis	4	6	8	10