HANOI UNIVERSITY OF SCIENCE & TECHNOLOGY SCHOOL OF INFORMATION AND COMMUNICATION TECHNOLOGY

\- - - - - - - - - - - - -

FINAL PROJECT REPORT
IT4110 – SCIENCE COMPUTING

Course information

Course ID	**Course title**	**Class ID**
IT4110	Tính toán khoa học	147769

Student information

Student's full name	**Class**	**Student ID**
Mạch Ngọc Đức Anh	Việt Nhật 03	20225595
Phạm Việt Anh	Việt Nhật 03	20225599
Nguyễn Đức Hậu	Việt Nhật 03	20225834
Mai Minh Quân	Việt Nhật 03	20225661
Vũ Minh Quân	Việt Nhật 04	20225910
Đỗ Thanh Sơn	Việt Nhật 03	20225665

Instructor: MSc. Vũ Văn Thiệu

Mục lục

I. Cơ sở lý thuyết bài toán Heat equation

1. Định nghĩa:

- Phương trình nhiệt, hay còn gọi là phương trình truyền nhiệt, là một trong những phương trình đạo hàm riêng (PDE – Partial Difference Equation) cơ bản trong vật lý và toán học, được sử dụng để mô tả quá trình truyền nhiệt trong các vật thể rắn, lỏng hoặc khí. Phương trình này mô tả sự biến đổi nhiệt độ trong không gian và thời gian.

2. Nguồn gốc:

- Trong toán học và vật lý, phương trình nhiệt là một phương trình vi phân từng phần nhất định. Giải pháp của phương trình nhiệt đôi khi được gọi là hàm calo. Lý thuyết về phương trình nhiệt được Joseph Fourier phát triển lần đầu tiên vào năm 1822 nhằm mục đích mô hình hóa cách thức một đại lượng như nhiệt khuếch tán qua một vùng nhất định.
- Là phương trình vi phân từng phần parabol nguyên mẫu, phương trình nhiệt là một trong những chủ đề được nghiên cứu rộng rãi nhất trong toán học thuần túy và việc phân tích nó được coi là nền tảng cho lĩnh vực rộng hơn của phương trình vi phân từng phần.
- Ngoài ra bài toán còn liên quan mật thiết đến hình học quang phổ, được ứng dụng nghiên cứu rộng rãi trong toán học thuần túy.

3. Ứng dụng của bài toán trong thực tế:

- Phương trình nhiệt, cùng với các biến thể của nó, cũng rất quan trọng trong nhiều lĩnh vực khoa học và toán ứng dụng.
- Nó được sử dụng để mô hình hóa sự phân bố nhiệt độ trong môi trường dẫn nhiệt, chẳng hạn như chất rắn và chất lỏng, đồng thời cũng có thể áp dụng cho các quá trình khuếch tán
- Phương trình nhiệt có nhiều ứng dụng khác nhau trong các lĩnh vực khác nhau. Phương trình này là một ví dụ tiêu chuẩn của phương trình vi phân parabol và thường được sử dụng trong nghiên cứu sự dẫn nhiệt.
- Trong lý thuyết xác suất, phương trình nhiệt được kết nối với việc nghiên cứu bước đi ngẫu nhiên và chuyển động Brown thông qua phương trình Fokker–Planck.

II. Phương trình nhiệt

- Trong toán học, nếu cho một tập con mở U của R^n và một khoảng con I của R, người ta nói rằng hàm u: $U \times I \to R$ là nghiệm của phương trình nhiệt nếu:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial {x_1}^2} + \cdots + \frac{\partial^2 u}{\partial {x^2}_n}$$

Trong đó:

- $(x_1, x_2, \ldots, x_n, t)$ biểu diễn một điểm tổng quát trong miền U×I.
- t là thời gian.
- $x_1, x_2, \ldots, x_n$ là tập hợp các biến không gian.

- Với giá trị bất kỳ của t, vế phải của phương trình là Laplace của hàm $u(.,t)$: $U \to R$.

Như vậy, phương trình nhiệt thường được viết gọn hơn như sau:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u$$

Trong đó

- Δu: Laplace của u.
- $u(.,t)$: hàm u được xét theo biến không gian đang xét tại một thời điểm t cố định.

- Trong bối cảnh vật lý và kỹ thuật, đặc biệt là trong bối cảnh khuếch tán qua môi trường, người ta thường cố định hệ tọa độ Descartes và sau đó xem xét trường hợp cụ thể của hàm $u\ (\ x\ , y\ , z\ , t\ )$ của ba biến không gian $(\ x\ , y\ , z\ )$ và biến thời gian t . Khi đó người ta nói rằng *u* là nghiệm của phương trình nhiệt nếu:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)$$

Trong đó: *α* là hệ số dương hay độ khuếch tán của môi trường.

"Hằng số khuếch tán" α thường không xuất hiện trong các nghiên cứu toán học về phương trình nhiệt, trong khi giá trị của nó có thể rất quan trọng trong kỹ thuật. Đây không phải là một sự khác biệt lớn, vì lý do sau. Khi đó, *u* là 1 hàm với:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \Delta u$$

III. Bài toán phương trình nhiệt 2D

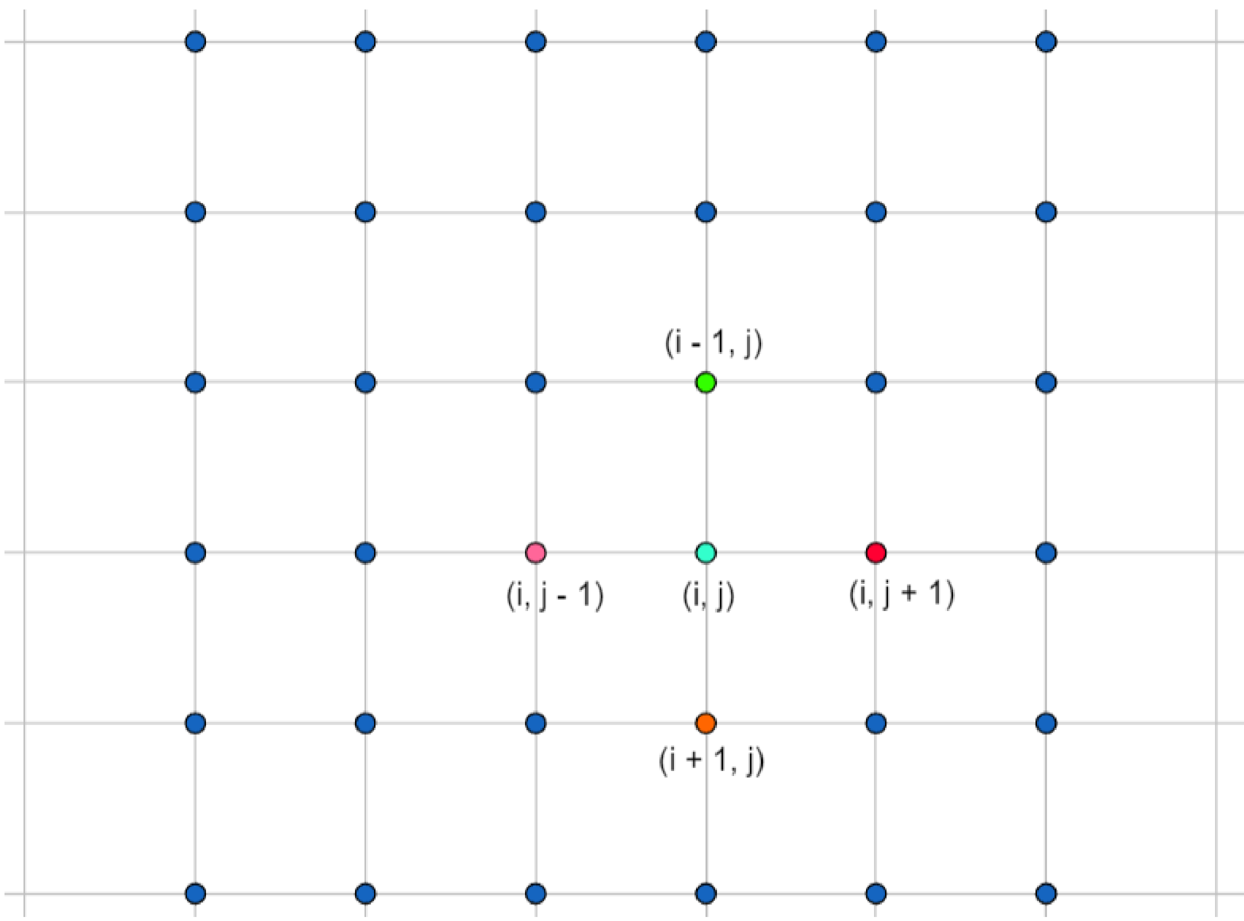
- Phương trình nhiệt (Hệ phương trình đạo hàm riêng – Partial Difference Equation)

$$\begin{cases} \dfrac{\partial C}{\partial t} = D\nabla^2 C \\ \nabla^2 C = \dfrac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 C}{\partial y^2} \end{cases}$$

Trong đó:

- $C(x, y, t)$: là hàm nhiệt độ tại vị trí (x, y) và thời gian.
- $\frac{\partial C}{\partial t}$: đạo hàm nhiệt độ theo thời gian.
- $\nabla^2 C$: đạo hàm cấp 2 của hàm C theo không gian.
- D**:** hệ số truyền nhiệt (phụ thuộc vào vật liệu ta đang khảo sát).

- Với bài toán PDE, ta làm qua 2 bước:
  - Bước 1: tính đạo hàm theo không gian.
  - Bước 2: giải phương trình vi phân.



- Công thức giải:
  - Khởi tạo giá trị ban đầu: $C_{i,j}^{0}$
  - Tại bước n + 1:

$$\nabla^2 C_{i,j}^{tn} = FD_{i,j}^{tn} = \frac{C_{i+1,j}^{tn} + C_{i-1,j}^{tn} + C_{i,j+1}^{tn} + C_{i,j-1}^{tn} - 4C_{i,j}^{tn}}{dx^2}$$

  - Công thức Euler thuận:

$$C_{i,j}^{tn+1} = C_{i,j}^{tn} + dt * D * FD_{i,j}^{tn}$$

- Giải thích công thức:
  - Xét khai triển Taylor của hàm f tại lân cận x:

$$f(x-h) = f(x) - f'(x)h + f''(x)\frac{h^2}{2!} + \cdots (1)$$

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + f''(x)\frac{h^2}{2!} + \cdots (2)$$

  - Từ (1) và (2) ta có công thức tính gần đúng đạo hàm bậc 2:

$$f''(x) = \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2}$$

  - Từ đó ta có thể xây dựng công thức tính đạo hàm riêng cho hàm (x, y) như sau:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \frac{f(x+h,y) - f(x-h,y)}{2h}$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \frac{f(x,y+h) - f(x,y-h)}{2h}$$

  - Vì vậy ta có:

$$\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} = \frac{C_{i+1,j}^{tn} - 2C_{i,j}^{tn} + C_{i-1,j}^{tn}}{dx^2}$$

$$\frac{\partial^2 C}{\partial y^2} = \frac{C_{i,j+1}^{tn} - 2C_{i,j}^{tn} + C_{i,j-1}^{tn}}{dy^2}$$

  - Chọn $dx = dy$, ta có công thức:

$$\nabla^2 C_{i,j}^{tn} = FD_{i,j}^{tn} = \frac{C_{i+1,j}^{tn} + C_{i-1,j}^{tn} + C_{i,j+1}^{tn} + C_{i,j-1}^{tn} - 4C_{i,j}^{tn}}{dx^2}$$

IV. Bài toán thực tế

- CPU (Central Processing Unit), hay còn gọi là bộ vi xử lý trung tâm, là bộ não của máy tính.
- Trong thực tế, CPU của máy tính thường được thiết kế có dạng hình vuông và được chế tạo từ các chất bán dẫn. CPU khi hoạt động sẽ sinh ra nhiệt do quá trình xử lý các lệnh. Việc truyền nhiệt của CPU là quá trình quan trọng để giữ cho CPU hoạt động ổn định và tránh quá nhiệt. Quá trình truyền nhiệt của CPU diễn ra như sau:

  - Sinh nhiệt: Khi CPU hoạt động, các transistor bên trong nó chuyển đổi giữa các trạng thái bật và tắt, tạo ra nhiệt.
  - Truyền nhiệt qua tản nhiệt

    - Tản nhiệt thường được làm từ kim loại như nhôm hoặc đồng và được gắn trực tiếp lên bề mặt của CPU.
    - Nhiệt từ CPU được truyền qua bề mặt tiếp xúc và sau đó lan ra toàn bộ tản nhiệt.

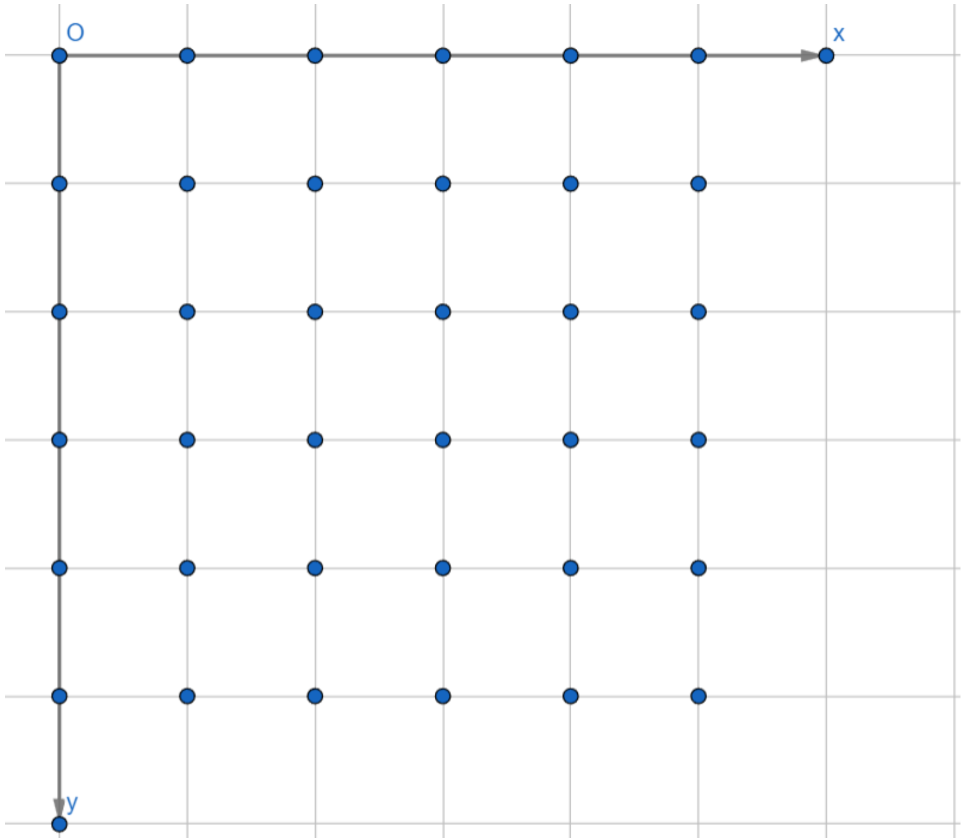
- Thuật toán sau đây sẽ đặc tả quá trình truyền nhiệt của CPU.

V. Mô tả thuật toán

- Bước 1: Khởi tạo các giá trị cho chương trình

```
%Tham số ban đầu
X=50;        % Số điểm lưới theo chiều X
Y=50;        % Số điểm lưới theo chiều Y
D=0.01;        % Hệ số khuếch tán nhiệt
dx=0.01;      % Kích thước bước lưới không gian
dt=0.001;    % Kích thước bước thời gian
T=0.5;        % Thời gian mô phỏng
t0=0;         % Thời gian bắt đầu
X_toanhiet = 5;       % Kích thước nguồn nhiệt theo chiều X
Y_toanhiet = 5;        % Kích thước nguồn nhiệt theo chiều Y
%Khởi tạo giá trị ban đầu
C = 25 * ones(X, Y);
figure;
image(C, 'CDataMapping', 'scaled');
colorbar;
title('Phân bố nhiệt độ ban đầu');
pause(1);
```

- Giả sử ta chia bề mặt CPU thành một lưới điểm Oxy kích thước $X * Y$.



Chia tọa độ trên CPU

- Trong bài toán ta khởi tạo
  - $X = Y = 50$
  - $D = 0.01$: Hệ số khuếch tán nhiệt.
  - $dx = dy = 0.01$: Kích thước lưới không gian.
  - $dt = 0.001$: Kích thước bước thời gian.
  - $T = 0.5$: Thời gian mô phỏng.
  - $t_0 = 0$: Thời gian bắt đầu.
  - $X_{tỏa\ nhiệt} = 5$: Kích thước nguồn nhiệt theo chiều X.
  - $Y_{tỏa\ nhiệt} = 5$: Kích thước nguồn nhiệt theo chiều Y.

- Bước 2: Rời rạc hóa theo không gian

```
%Buoc 1: Tính đạo hàm bậc 2 của nhiệt độ theo không gian
t=t0;
while(t<T)
    for i=1:X
        for j=1:Y
            %Kiểm tra điều kiện biên
            if(i == 1)
                u = 25;
            else
                u = C(i-1,j);
            end


            if(j == 1)
                l = 25;
            else
                l = C(i,j-1);
            end

            if (i == X)
                d = 25;
            else
                d = C(i+1,j);
            end



           if(j == Y)
               r = 25;
           else
               r = C(i,j+1);
           end

           c = C(i,j);
           deltaC2(i,j) = (d+u+r+l-4*c)/(dx*dx);
       end
   end
```

- Dựa trên công thức

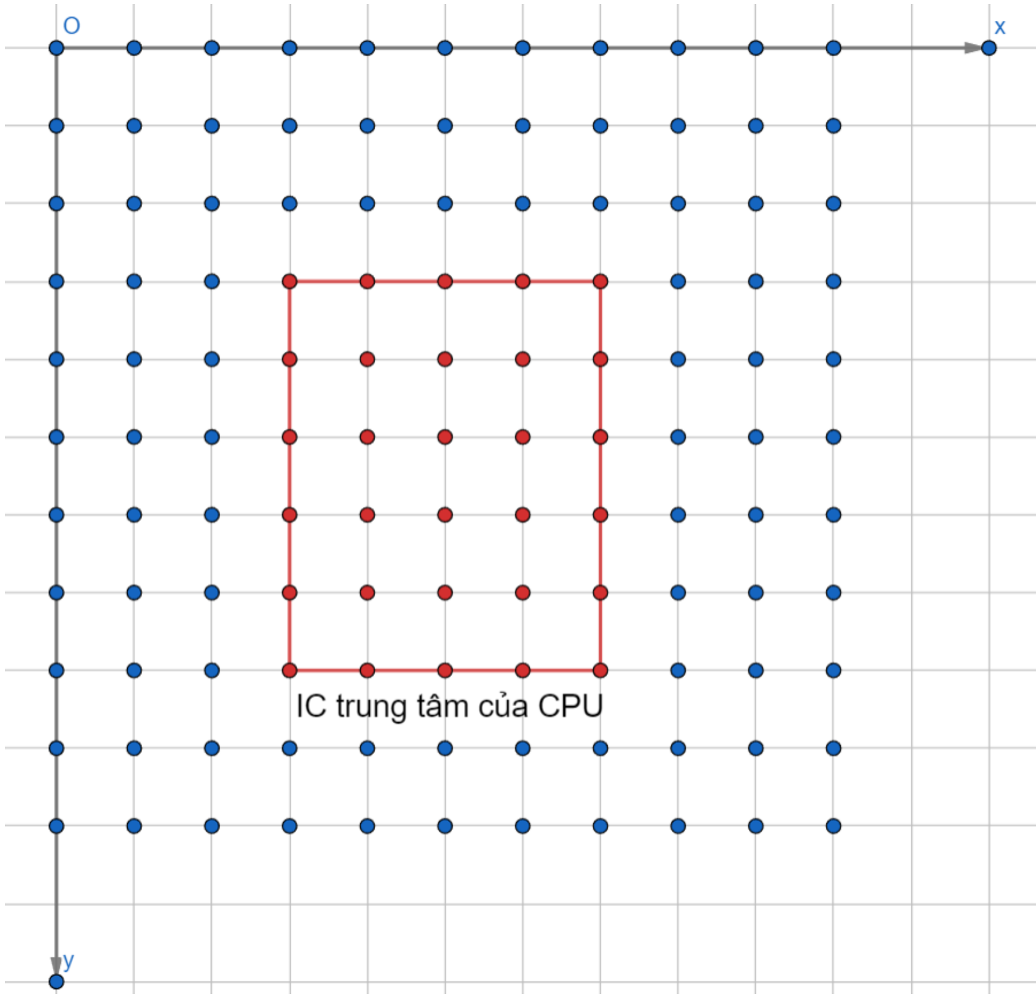
$$\nabla^2 C_{i,j}^{tn} = FD_{i,j}^{tn} = \frac{C_{i+1,j}^{tn} + C_{i-1,j}^{tn} + C_{i,j+1}^{tn} + C_{i,j-1}^{tn} - 4C_{i,j}^{tn}}{dx^2}$$

- Trước hết ta phải khởi tạo các giá trị nhiệt độ cho các điểm bên ngoài CPU là 25^0C(nhiệt độ phòng), cụ thể:
  - Các điểm có tọa độ x < 1 hoặc x > X: ta khởi tạo giá trị nhiệt độ cho điểm đó là 25^0C.
  - Các điểm có tọa độ y < 1 hoặc y > Y: ta khởi tạo giá trị nhiệt độ cho điểm đó là 25^0C.
- Sau đó
  - Gán giá trị $C_{i-1,j}^{tn}$ vào biến u.
  - Gán giá trị $C_{i,j-1}^{tn}$ vào biến l.
  - Gán giá trị $C_{i+1,j}^{tn}$ vào biến d.
  - Gán giá trị $C_{i,j+1}^{tn}$ vào biến r.
  - Lưu lại giá trị $\frac{d+u+r+l-4c}{(dx)^2}$ vào trong vào trong mảng deltaC2.

- Bước 3: Tích hợp theo thời gian.

```
%Bước 2: Tính đạo hàm theo thời gian
a=X/2-X_toanhiet/2;
b=X/2+X_toanhiet/2;
e=Y/2-Y_toanhiet/2;
f= Y/2+Y_toanhiet/2;
for i = 1: X
    for j = 1:Y
        if(i >= a) && (i <= b) && (j >= e) && (j <= f)
        Ct(i,j) = 80;
        else
        Ct(i,j) = C(i,j) + dt*D*deltaC2(i,j);
        end
    end
end
%Cập nhật lại theo thời gian
for i = 1:X
    for j = 1:Y
        C(i,j)=Ct(i,j);
    end
end
```

- Ở bước tiếp theo, ta sẽ khởi tạo giá trị nhiệt độ theo thời gian cho các điểm nằm ở IC trung tâm giá trị khởi đầu là 80^0C



- Cụ thể, những điểm có tọa độ thỏa mãn:

$$\frac{x_{CPU}}{2} - \frac{x_{IC}}{2} < x < \frac{x_{CPU}}{2} + \frac{x_{IC}}{2}$$

$$\frac{y_{CPU}}{2} - \frac{y_{IC}}{2} < y < \frac{y_{CPU}}{2} + \frac{y_{IC}}{2}$$

Thì sẽ được khởi tạo giá trị là 80^0C

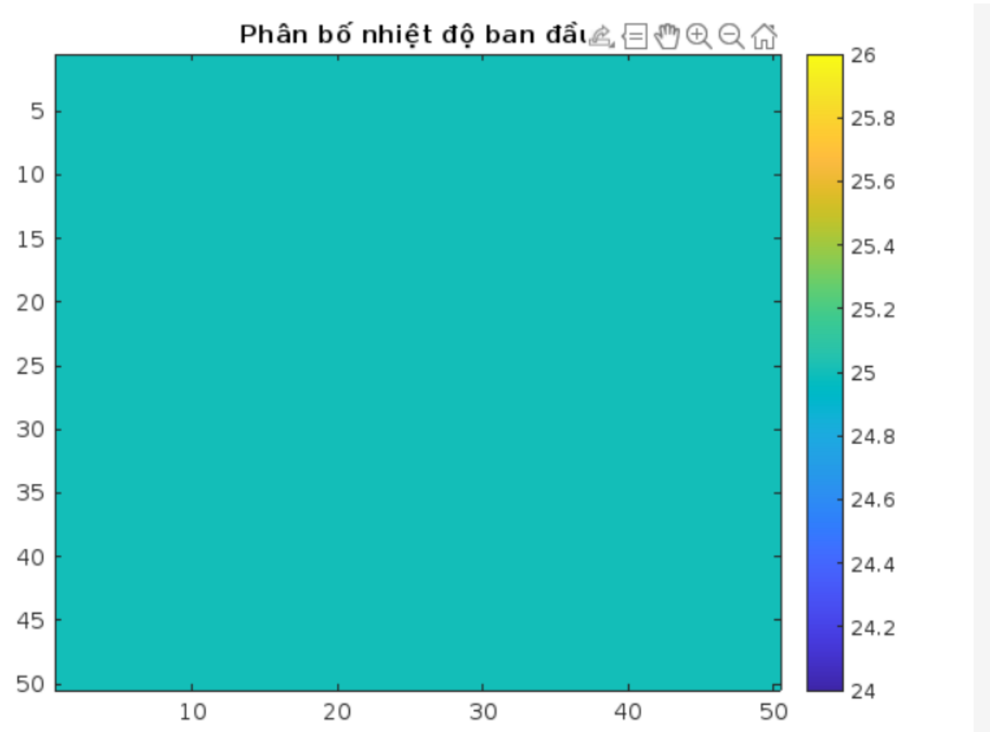
- Còn nhiệt độ các điểm còn lại sẽ được tính theo công thức

$$C_{i,j}^{tn+1} = C_{i,j}^{tn} + dt * D * FD_{i,j}^{tn}$$

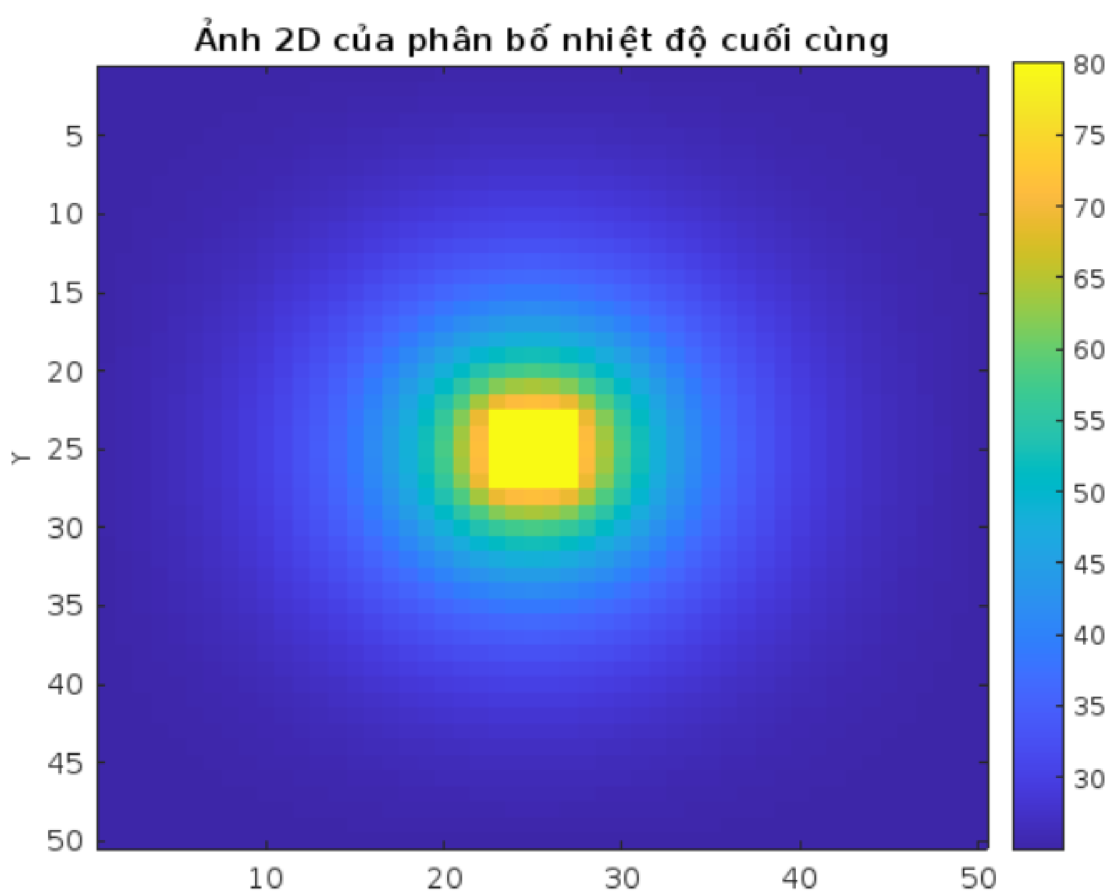
- Sau đó giá trị sẽ được lưu vào trong mảng Ct
- Cuối cùng, giá trị nhiệt độ của các điểm trên CPU theo thời gian và không gian sẽ được cập nhật lại vào trong mảng C

VI. Demo chương trình

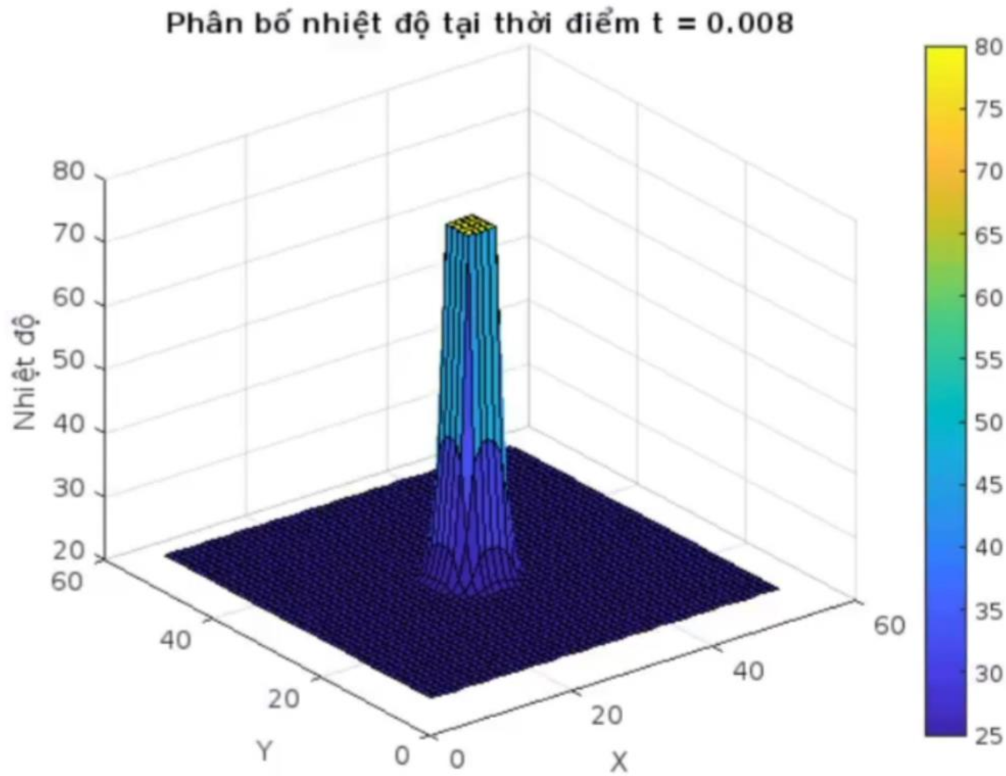
- Quá trình tỏa nhiệt tại thời điểm $t = 0s$ trong không gian 2 chiều



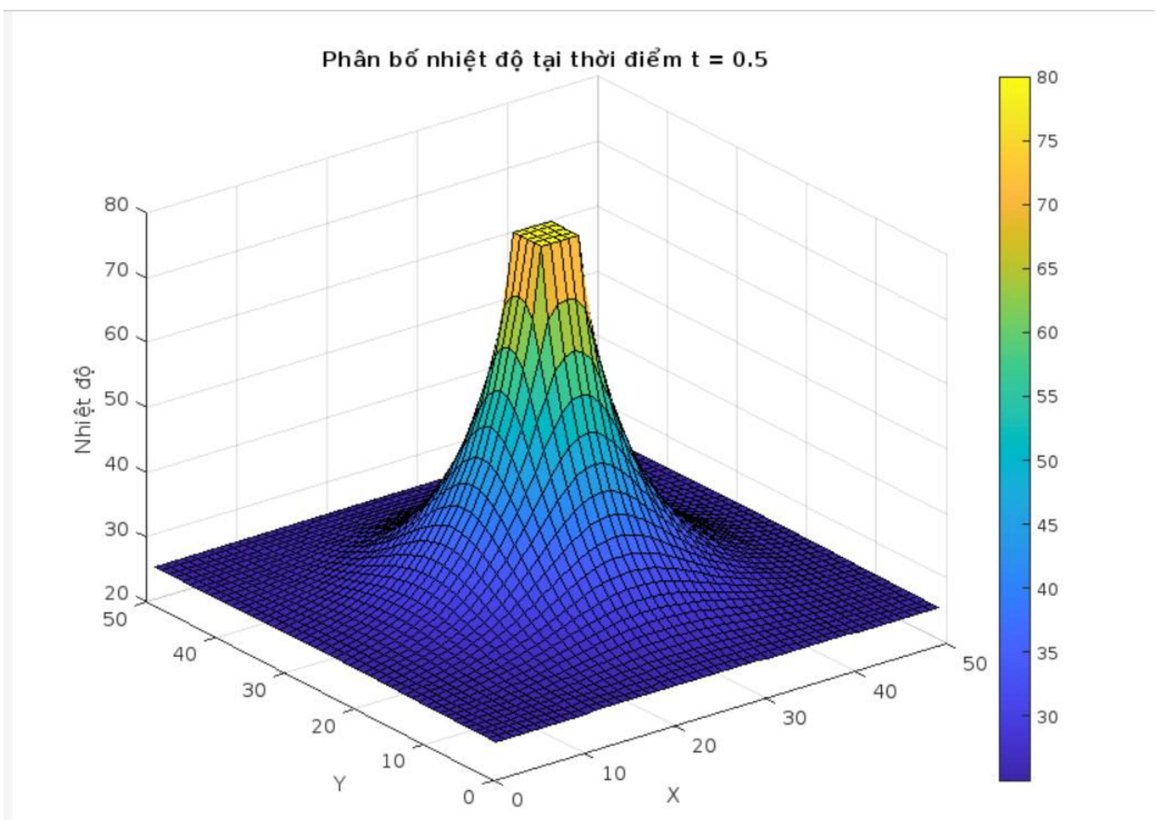
- Phân bố nhiệt tại thời điểm cuối cùng ($t = 0.5s$) trong không gian 2 chiều:



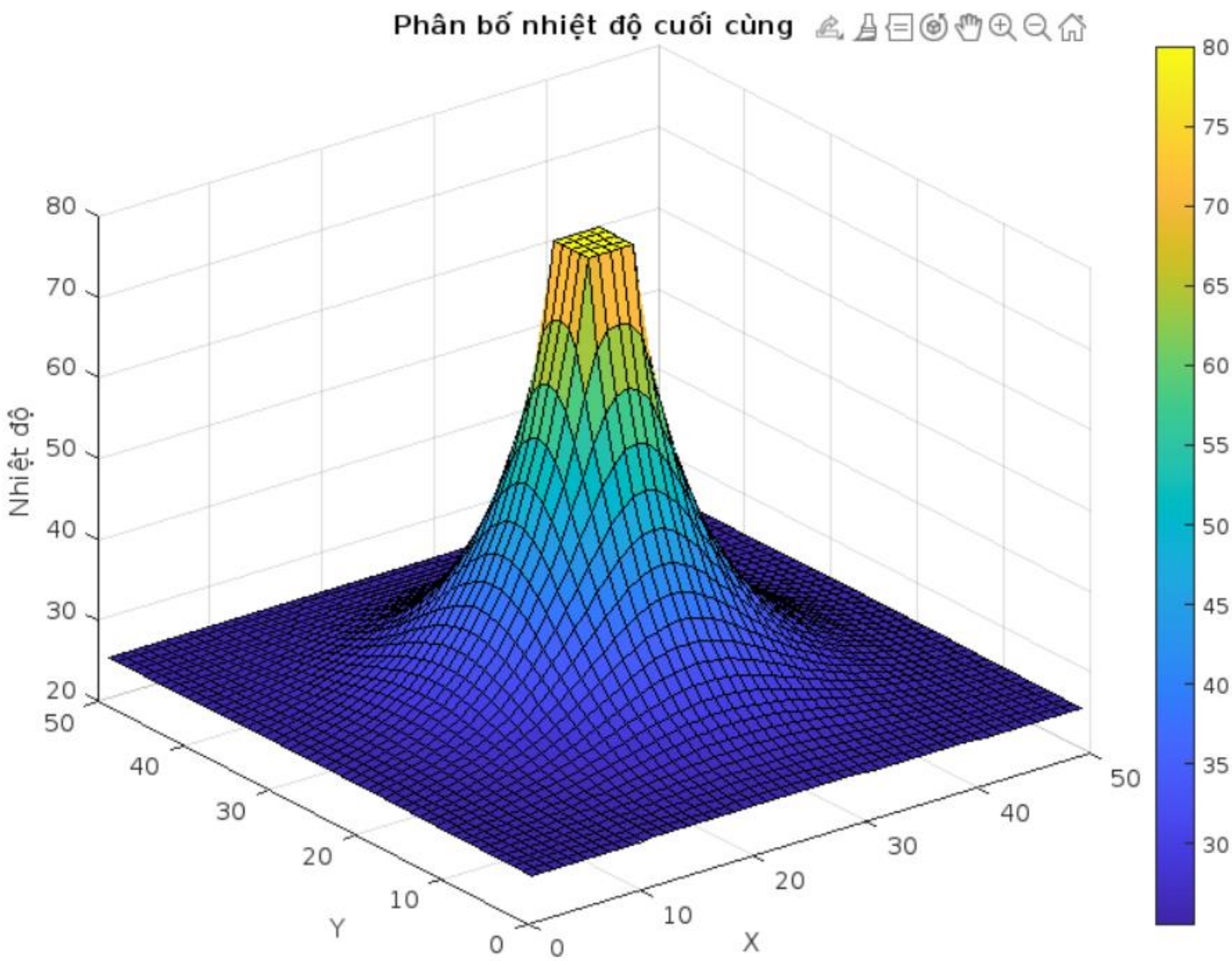
- Phân bố nhiệt độ tại thời điểm $t = 0.008s$



- Quá trình tỏa nhiệt tại thời điểm t = 0.5s



- Phân bố nhiệt tại thời điểm cuối cùng



VII.Kết luận

1. **Mô hình hóa phân bố nhiệt độ**

- Phương trình nhiệt giúp mô hình hóa sự phân bố nhiệt độ trong CPU khi hoạt động. Bằng cách giải phương trình nhiệt, kỹ sư có thể dự đoán cách nhiệt độ sẽ thay đổi trong suốt quátrình hoạt động của CPU, giúp xác định các điểm nóng và tối ưu hóa thiết kế tản nhiệt.

2**. Thiết kế hệ thống làm mát**

- Các kỹ sư sử dụng phương trình nhiệt để thiết kế hệ thống làm mát, bao gồm quạt, tản nhiệt (heatsinks), và hệ thống làm mát bằng chất lỏng. Bằng cách hiểu rõ cách nhiệt lan truyền trong CPU và các bộ phận xung quanh, hệ thống làm mát có thể được thiết kế để hiệu quả hơn, giảm nguy cơ quá nhiệt.

3. **Kiểm tra và đánh giá hiệu năng tản nhiệt**

- Phương trình nhiệt có thể được sử dụng để kiểm tra và đánh giá hiệu năng của các giải pháp tản nhiệt hiện có. Bằng cách so sánh mô hình nhiệt độ thực tế với các dự đoán từ phương trình nhiệt, kỹ sư có thể xác định xem hệ thống làm mát hiện tại có đủ hiệu quả hay không và cần phải điều chỉnh gì để cải thiện.

4**. Tối ưu hóa bố trí linh kiện**

- Khi thiết kế mạch in (PCB) cho CPU và các linh kiện điện tử khác, phương trình nhiệt giúp xác định cách sắp xếp các linh kiện sao cho giảm thiểu sự tích tụ nhiệt. Bằng cách tối ưu hóa bố trí linh kiện, các kỹ sư có thể giảm nguy cơ hư hỏng do nhiệt và cải thiện tuổi thọ của các linh kiện.

5. **Phát triển các vật liệu tản nhiệt mới**

- Nghiên cứu và phát triển các vật liệu mới có khả năng dẫn nhiệt tốt hơn cũng sử dụng phương trình nhiệt. Các nhà khoa học và kỹ sư sử dụng phương trình này để hiểu cách các vật liệu mới có thể cải thiện hiệu quả tản nhiệt, giúp CPU hoạt động mát mẻ hơn và hiệu quả hơn.

VIII. Tài liệu tham khảo

[1] Cannon, John Rozier (1984), The One-Dimensional Heat Equation, Encyclopedia of Mathematics and Its Applications, vol. 23, Reading, MA: Addison-Wesley Publishing Company, Advanced Book Program, ISBN 0-201-13522-1, MR 0747979, Zbl 0567.35001

[2] Crank, J.; Nicolson, P. (1947), "Practical method for numerical evaluation of solutions of partial differential equations of the thermal conduction type", Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, 43 (1): 50–67, Bibcode:1947PCPS...43...50C, doi:10.1017/S0305004100023197, S2CID 16676040

[3] Evans, Lawrence C. (2010), Partial Differential Equations, Graduate Studies in Mathematics, vol. 19 (2nd ed.), Providence, RI: American Mathematical Society, ISBN 978-0-8218-4974-3

[4] Perona, P; Malik, J. (1990), "Edge Detection and Scale Space Using Anisotropic Diffusion" (PDF), IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 12 (7): 629– 639, doi:10.1109/34.56205, S2CID 14502908

[5] Thambynayagam, R. K. M. (2011), Diffusion Handbook: Application Solutions for Engineers, McGraw-Hill Professional, ISBN 978-0-07-175184-1

[6] Wilmott, Paul; Howison, Sam; Dewynne, Jeff (1995), Mathematics of Financial Derivatives. Student Introduction, Cambridge: Cambridge University Press, ISBN 0-521-49699-3