HUST

ĐẠI HỌC BÁCH KHOA HÀ NỘI
HANOI UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

ONE LOVE. ONE FUTURE.

ĐẠI HỌC
BÁCH KHOA HÀ NỘI
HANOI UNIVERSITY
OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

Phương trình truyền nhiệt
2D Heat Equation

Học phần: Tính toán khoa học - IT3280
GVHD: TS. Vũ Văn Thiệu

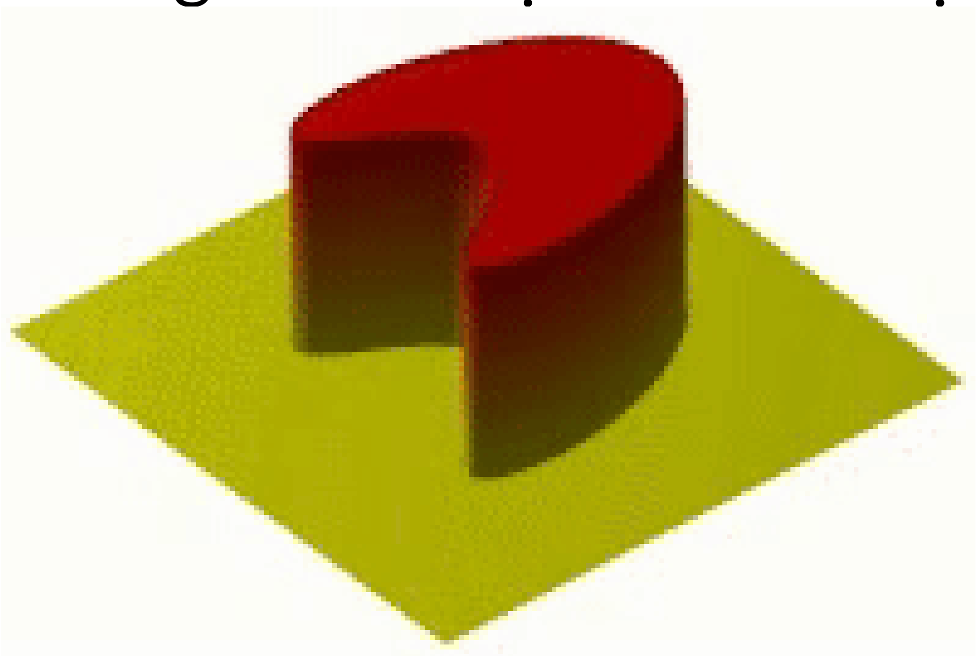
Nhóm 18 :	Phạm Việt Anh	20225599
	Mạch Ngọc Đức Anh	20225595
	Mai Minh Quân	20225661
	Vũ Minh Quân	20225910
	Đỗ Thanh Sơn	20225665
	Nguyễn Đức Hậu	20225834

Mục lục

1. Cơ sở lý thuyết

Định nghĩa:

- **Phương trình nhiệt** là một ***phương trình đạo hàm riêng*** *(parabol nguyên mẫu)* mô tả quá trình truyền nhiệt trong các vật thể rắn, lỏng hoặc khí
- Giải pháp của phương trình nhiệt đôi khi được gọi là hàm calo



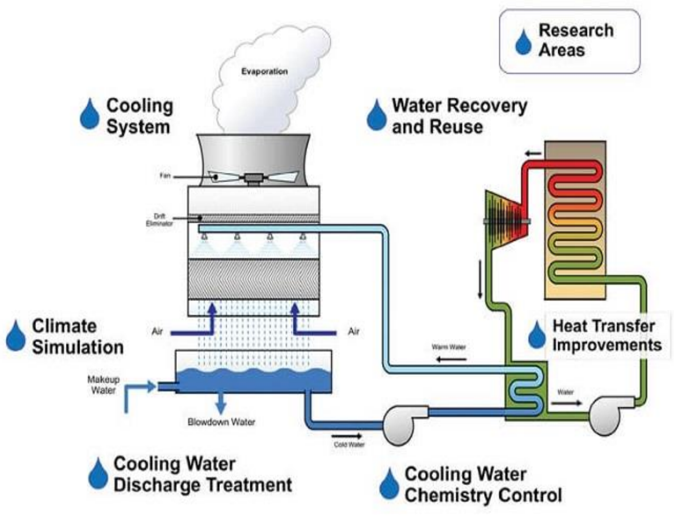
1. Cơ sở lý thuyết

Nguồn gốc:

- Lý thuyết về phương trình nhiệt được Joseph Fourier phát triển lần đầu tiên vào năm 1822 nhằm mục đích mô hình hóa cách thức một đại lượng như nhiệt khuếch tán qua một vùng nhất định hoặc khuếch tán chất tan trong một dung dịch.

Joseph Fourier (1768-1830)

Ứng dụng của phương trình truyền nhiệt trong thực tế



Kỹ thuật nhiệt và truyền nhiệt

Quá trình luyện kim và sản xuất

2. Phát biểu phương trình

Trong toán học, nếu cho một tập con mở U của R^n và một khoảng con I của R , người ta nói rằng hàm $u : U \times I \to R$ là nghiệm của **phương trình nhiệt** nếu

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial {x_1}^2} + \cdots + \frac{\partial^2 u}{\partial {x^2}_n}$$

trong đó:

- $(x_1, \dots, x_n, t)$ biểu thị một điểm tổng quát của miền xác định
- t là thời gian
- $x_1, \dots . x_n$ là "các biến không gian"

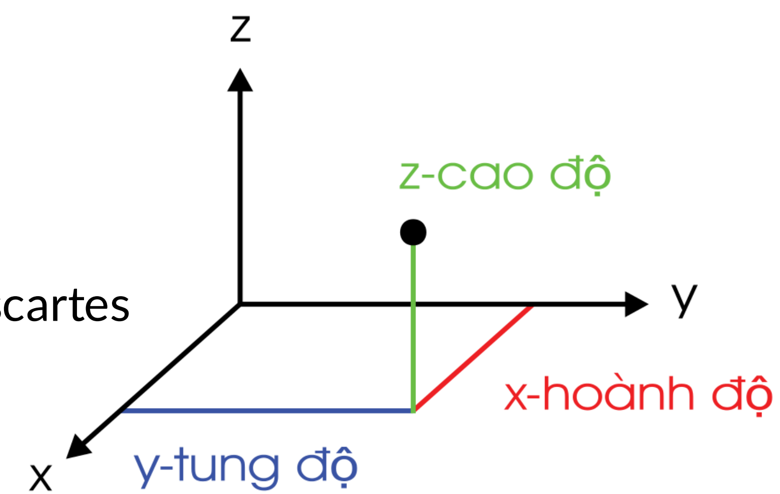
2. Phát biểu phương trình

- **Phương trình nhiệt được viết gọn như sau:** $\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u$

- Cố định hệ tọa độ Descartes xét trường hợp cụ thể hàm $u(x, y, z, t)$ .Khi đó người ta nói rằng u là nghiệm của phương trình nhiệt nếu:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)$$

Trong đó:
α $(\alpha > 0)$ là độ khuếch tán nhiệt của vật liệu
$x,\ y,\ z$ là 3 biến không gian trong hệ tọa độ Descartes



Hệ tọa độ Descartes

3. Bài toán phương trình truyền nhiệt 2D

Phương trình nhiệt (Hệ phương trình đạo hàm riêng – Partial Difference Equation):

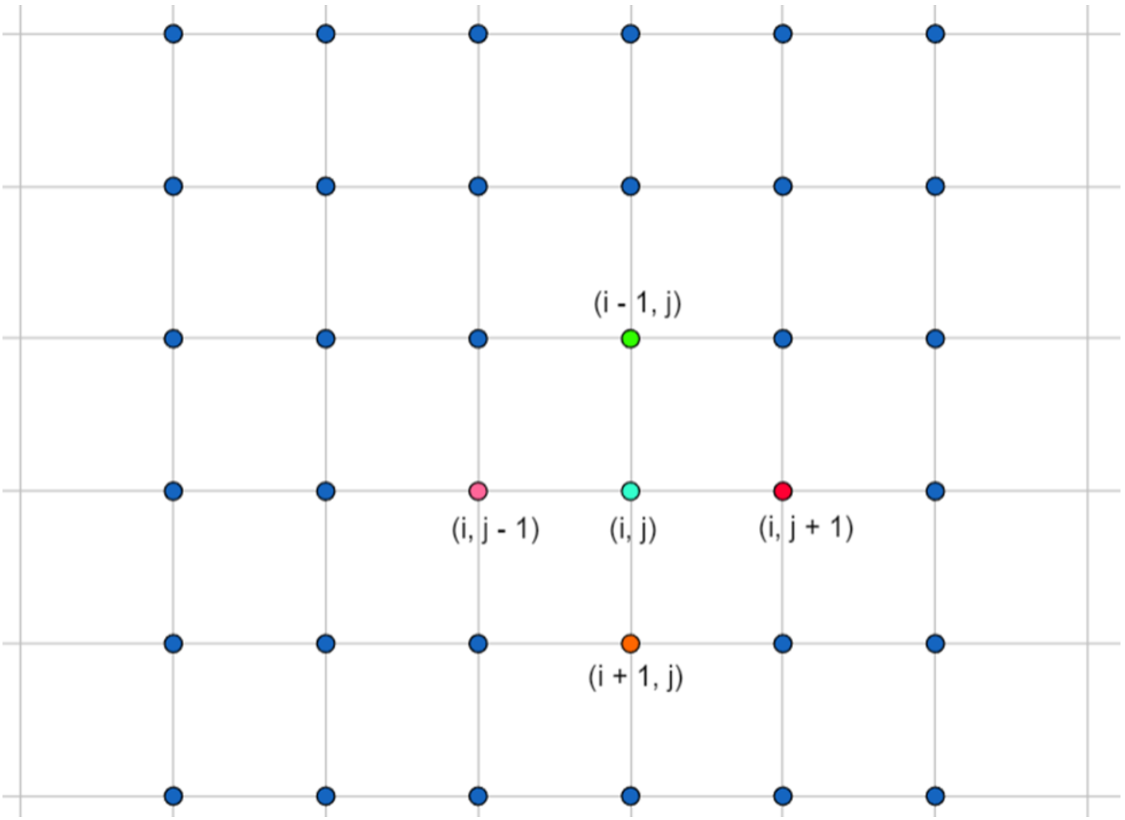
$$\begin{cases} \dfrac{\partial C}{\partial t} = D\nabla^2 C \\ \nabla^2 C = \dfrac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 C}{\partial y^2} \end{cases}$$

Trong đó:

- C: nhiệt độ
- $\frac{C}{\partial t}$: đạo hàm nhiệt độ theo thời gian
- $\nabla^2 C$: đạo hàm bậc 2 của nhiệt độ theo không gian
- D: hệ số truyền nhiệt (phụ thuộc vào vật liệu ta đang khảo sát)

3. Bài toán phương trình truyền nhiệt 2D

Bài toán PDE, ta làm qua 2 bước:
- ***Bước 1***: tính đạo hàm theo không gian
- ***Bước 2:*** giải phương trình vi phân



3. Bài toán phương trình truyền nhiệt 2D

Công thức giải:

- Khởi tạo giá trị ban đầu: $C_{i,j}^{0}$

- Tại bước $n+1$: $\nabla^2 C_{i,j}^{tn} = FD_{i,j}^{tn} = \dfrac{C_{i+1,j}^{tn} + C_{i-1,j}^{tn} + C_{i,j+1}^{tn} + C_{i,j-1}^{tn} - 4C_{i,j}^{tn}}{dx^2}$

Công thức Euler thuận: $C_{i,j}^{tn+1} = U_{i,j}^{tn} + dt * D * FD_{i,j}^{tn}$

3. Bài toán phương trình truyền nhiệt 2D

Giải thích công thức:

Xét khai triển Taylor của hàm f tại lân cận x:

$$(x-h)=f(x)-f'(x)h+f''(x)\frac{h^2}{2!}+\cdots(1)$$

$$f(x+h)=f(x)+f'(x)h-f''(x)\frac{h^2}{2!}+\cdots(2)$$

- Từ (1) và (2) ta có công thức tính gần đúng đạo hàm bậc 2:

$$f''(x)=\frac{f(x+h)-2f(x)+f(x-h)}{h^2}$$

- Từ đó ta có thể xây dựng công thức tính đạo hàm riêng cho hàm (x,y) như sau:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}=\frac{f(x+h,y)-f(x-h,y)}{2h}$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=\frac{f(x,y+h)-f(x,y-h)}{2h}$$

3. Bài toán phương trình truyền nhiệt 2D

➢ Vì vậy, ta có:

$$\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} = \frac{C^{tn}_{\mathrm{i+1},j} - 2C^{tn}_{\mathrm{i},j} + C^{tn}_{\mathrm{i-1},j}}{\mathrm{d}x^2}$$

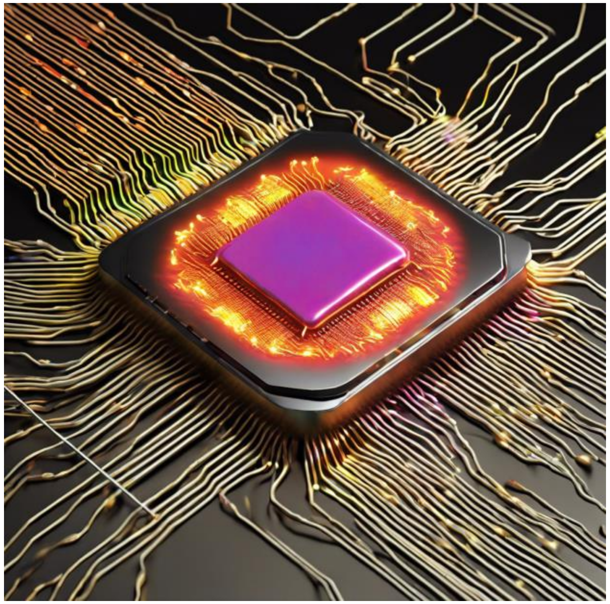
$$\frac{\partial^2 C}{\partial y^2} = \frac{C^{tn}_{\mathrm{i},j+1} - 2C^{tn}_{\mathrm{i},j} + C^{tn}_{\mathrm{i},j-1}}{\mathrm{d}y^2}$$

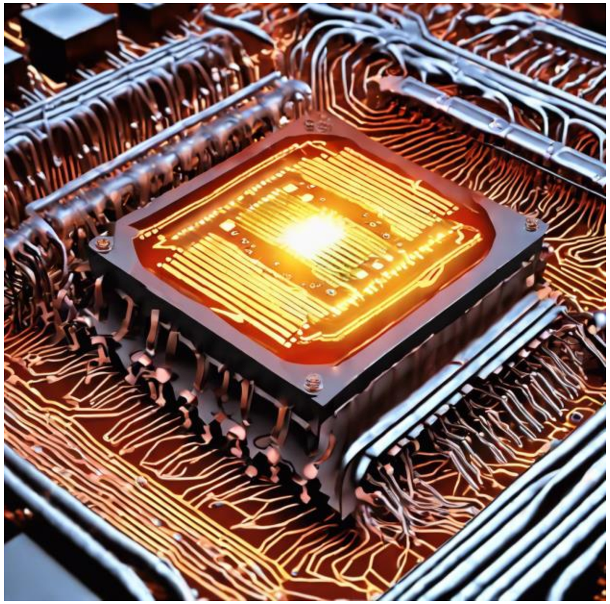
Chọn $dx = dy$, ta có công thức:

$$\nabla^2 C^{tn}_{i,j} = FD^{tn}_{i,j} = \frac{C^{tn}_{i+1,j} + C^{tn}_{i-1,j} + C^{tn}_{i,j+1} + C^{tn}_{i,j-1} - 4C^{tn}_{i,j}}{dx^2}$$

4. Bài toán thực tế

- Trong thực tế, CPU của máy tính thường được thiết kế có dạng hình vuông và được chế tạo từ các chất bán dẫn.
- CPU khi hoạt động sẽ sinh ra nhiệt do quá trình xử lý các lệnh. Việc truyền nhiệt của CPU là quá trình quan trọng để giữ cho CPU hoạt động ổn định và tránh quá nhiệt.





5. Mô tả thuật toán

Bước 1: Khởi tạo các giá trị cho chương trình

```
%Tham số ban đầu
X=50;       % Số điểm lưới theo chiều X
Y=50;       % Số điểm lưới theo chiều Y
D=0.01;       % Hệ số khuếch tán nhiệt
dx=0.01;      % Kích thước bước lưới không gian
dt=0.001;   % Kích thước bước thời gian
T=0.5;        % Thời gian mô phỏng
t0=0;         % Thời gian bắt đầu
X_toanhiet = 5;      % Kích thước nguồn nhiệt theo chiều X
Y_toanhiet = 5;       % Kích thước nguồn nhiệt theo chiều Y
%Khởi tạo giá trị ban đầu
C = 25 * ones(X, Y);
figure;
image(C, 'CDataMapping', 'scaled');
colorbar;
title('Phân bố nhiệt độ ban đầu');
pause(10);
```

5. Mô tả thuật toán

Bước 2: Rời rạc hóa theo không gian

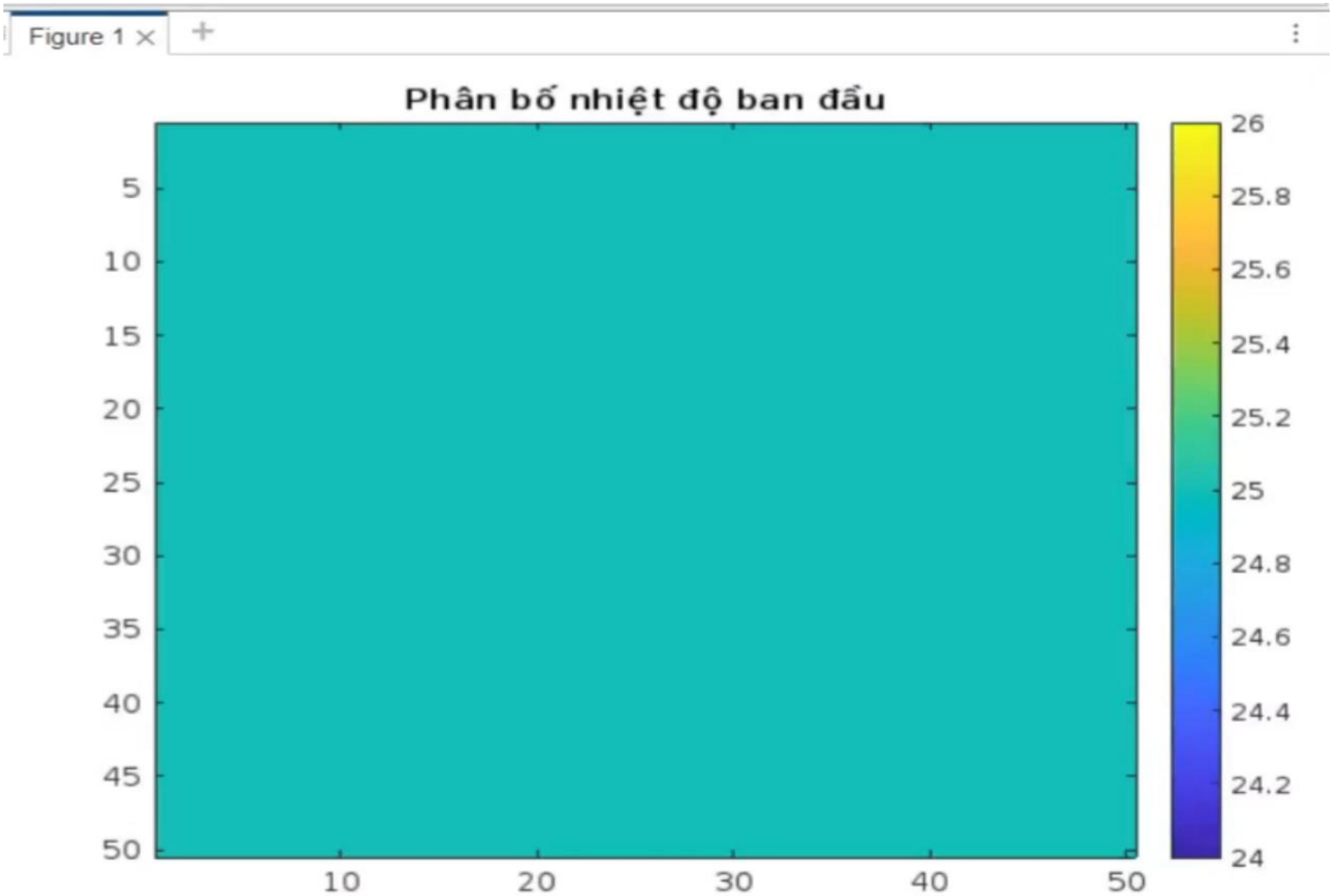
```
%Buoc 1: Tính đạo hàm bậc 2 của nhiệt độ theo không gian
t=t0;
while(t<T)
    for i=1:X
        for j=1:Y
            %Kiểm tra điều kiện biên
            if(i == 1)
                u = 25;
            else
                u = C(i-1,j);
            end


            if(j == 1)
                l = 25;
            else
                l = C(i,j-1);
            end

            if (i == X)
                d = 25;
            else
                d = C(i+1,j);
            end


            if(j == Y)
                r = 25;
            else
                r = C(i,j+1);
            end

            c = C(i,j);  %Nhiệt độ điểm đang khảo sát
            deltaC2(i,j) = (d+u+r+l-4*c)/(dx*dx);
        end
    end
```

5. Mô tả thuật toán

Bước 3: Tích hợp theo thời gian

```
%Bước 2: Tính đạo hàm theo thời gian
a=X/2-X_toanhiet/2;
b=X/2+X_toanhiet/2;
e=Y/2-Y_toanhiet/2;
f= Y/2+Y_toanhiet/2;
for i = 1: X
    for j = 1:Y
        if(i >= a) && (i <= b) && (j >= e) && (j <= f)
        Ct(i,j) = 80;
        else
        Ct(i,j) = C(i,j) + dt*D*deltaC2(i,j);
        end
    end
end
%Cập nhật lại theo thời gian
for i = 1:X
    for j = 1:Y
        C(i,j)=Ct(i,j);
    end
end
t=t+dt;
%Mô phỏng
```

6. Demo kết quả



7.Kết luận

1. Mô hình hóa phân bố nhiệt độ
2. Thiết kế hệ thống làm mát
3. Kiểm tra và đánh giá hiệu năng tản nhiệt
4. Tối ưu hóa bố trí linh kiện
5. Phát triển các vật liệu tản nhiệt mới

HUST

hust.edu.vn fb.com/dhbkhn

THANK YOU !