Chương 2

HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH

I. Hệ phương trình tuyến tính

1. Định nghĩa HPTTT

Hệ phương trình tuyến tính có dạng tổng quát như sau:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad (I)$$

Trong đó

- $x_1, x_2, \ldots, x_n$ là các ẩn số
- a_{ij} là các hệ số
- b_j là các hệ số tự do

* Hệ được gọi là thuần nhất nếu $b_1 = b_2 = \ldots = b_n = 0$

Ví dụ:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 = -1 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 1 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 3 \end{cases}$$

HPTTT không thuần nhất

$$\begin{cases} x_1 + 7x_2 - 2x_3 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

HPTTT thuần nhất

2. Dạng ma trận của HPTT

Xét hệ PTTT:
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad \text{(I)}$$

Ta có:

- Ma trận : $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots. & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots. & a_{2n} \\ \ldots. & \ldots. & \ldots. & \ldots. \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots. & a_{mn} \end{bmatrix}$ gọi là *ma trận hệ số*

- Ma trận : $B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix}$ gọi là ma trận hệ số tự do hay là *cột tự do*

- Ma trận : $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}$ gọi là *ma trận ẩn.*

Hệ (I) có thể viết là:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots. & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots. & a_{2n} \\ \dots. & \dots. & \dots. & \dots. \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots. & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix}$$

hay $AX = B$ (II)

Ví dụ: Cho hệ phương trình tuyến tính

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 - x_4 = 2 \\ -x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0 \\ 3x_1 + 8x_2 - 5x_3 + 3x_4 = -2 \\ \quad - 4x_2 + 2x_3 - 7x_4 = 9 \end{cases} \leftrightarrow A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 5 & -1 \\ -1 & -2 & 3 & 4 \\ 3 & 8 & -5 & 3 \\ 0 & -4 & 2 & -7 \end{bmatrix}$$

VD: Cho hệ phương trình

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 - x_4 = 2 \\ -x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0 \\ 3x_1 + 8x_2 - 5x_3 + 3x_4 = -2 \\ \quad\;\; -4x_2 + 2x_3 - 7x_4 = 9 \end{cases} \leftrightarrow B = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \\ 9 \end{bmatrix}$$

Ví dụ 1: Cho hệ phương trình tuyến tính

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 - x_4 = 2 \\ -x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0 \\ 3x_1 + 8x_2 - 5x_3 + 3x_4 = -2 \\ \quad - 4x_2 + 2x_3 - 7x_4 = 9 \end{cases}$$

$$\overline{A} = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 5 & -1 & 2 \\ -1 & -2 & 3 & 4 & 0 \\ 3 & 8 & -5 & 3 & -2 \\ 0 & -4 & 2 & -7 & 9 \end{bmatrix}$$

gọi là mt mở rộng hay mt bổ sung

Ví dụ 2

$$\begin{bmatrix} 2 & 7 & 1 \\ 3 & -1 & 4 \\ 5 & 9 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 7y + z = 9 \\ 3x - y + 4z = 0 \\ 5x + 9y + 2z = 5 \end{cases}$$

3. HPTTT thuần nhất

Có dạng:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

$$\overline{A} = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots. & a_{1n} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots. & a_{2n} & 0 \\ \ldots. & \ldots. & \ldots. & \ldots. & \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots. & a_{mn} & 0 \end{array}\right]$$

4. Hệ Cramer

HPTTT được gọi là hệ Cramer nếu:

i) Số phương trình bằng số ẩn
ii) Định thức ma trận hệ số của hệ khác không

II. Các phương pháp giải HPTTT

1. Định lý tồn tại nghiệm của HPTTT

(Định lí Kronecker – Capelli)

Hệ phương trình tuyến tính tổng quát có nghiệm khi và chỉ khi hạng của ma trận hệ số A bằng hạng của ma trận mở rộng $\bar{A}$

Từ định lí ta suy ra:

* Nếu $r(A) < r(\bar{A})$ thì hệ vô nghiệm

* Nếu $r(A) = r(\bar{A}) =$ n (số ẩn) thì hệ có nghiệm duy nhất.

$r(A) = r(\bar{A}) = r <$ n (số ẩn) thì hệ có vô số nghiệm,

2. Phương pháp Gauss (giải HPTT tổng quát)

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad \text{(I)}$$

$$\overline{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots. & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots. & a_{2n} & b_2 \\ \ldots. & \ldots. & \ldots. & \ldots. & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots. & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

Phương pháp Gauss: để giải HPTTT tổng quát, ta dựa vào các phép biến đổi sơ cấp trên các hàng của ma trận mở rộng, được gọi là các phép biến đổi tương đương của HPTTT:

1) Đổi chỗ 2 hàng của ma trận,

2) Nhân một hàng của ma trận với một số $\lambda \neq 0$,

3) Nhân các phần tử của 1 hàng với $\lambda \neq 0$ rồi cộng tương ứng với 1 hàng khác.

- Dùng phép biến đổi sơ cấp trên hàng biến đổi ma trận mở rộng $\bar{A}$ về ma trận bậc thang:

- Nếu $r(A) < r(\bar{A})$: hệ vô nghiệm.

- Nếu $r(A) = r(\bar{A}) = r$:

  - $r = n$: hệ có 1 nghiệm duy nhất.
  - $r < n$: hệ có vô số nghiệm.

    + Chọn r ẩn chính.

    + Cho (n – r) ẩn còn lại bởi (n – r) tham số tuỳ ý rồi tìm r ẩn chính theo các tham số đó.

Ví dụ 1:

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 2x_3 - x_4 = 2 \\ 2x_1 + 7x_2 - x_3 = 1 \\ 4x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 1 \end{cases}$$

Ví dụ 2:

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 2x_3 = -1 \\ x_1 + 9x_2 + 6x_3 = 3 \\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 5 \end{cases}$$

Ví dụ 3:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 2 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 = 5 \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 - 6x_4 = 4 \end{cases}$$

Ví dụ 4: Biện luận số nghiệm theo m

$$\begin{cases} 5x_1 + 5x_2 + mx_3 = 6 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 3 \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 = -1 \end{cases}$$

BÀI TẬP CỦNG CỐ

Bài 1. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 2 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 - 2x_4 = 2 \\ 3x_2 + 4x_3 - 5x_4 = -1 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 0 \end{cases}$$

Bài 2: Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 & = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 & = 3 \\ x_2 + x_3 + x_4 & = 1 \\ -4x_1 + 2x_3 + x_4 & = -2 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 & = 2 \end{cases} \qquad (2.10)$$

Bài 3: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 + x_5 & = 1 \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 - 2x_5 & = 0 \\ 3x_1 + 3x_2 - 3x_3 - 3x_4 + 4x_5 & = 2 \\ 4x_1 + 5x_2 - 5x_3 - 5x_4 + 7x_5 & = 3 \end{cases} \qquad (2.11)$$

3. Giải HPTTT thuần nhất

Có dạng:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

$$\overline{A} = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots. & a_{1n} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots. & a_{2n} & 0 \\ \ldots. & \ldots. & \ldots. & \ldots. & \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots. & a_{mn} & 0 \end{array}\right]$$

Nhận xét:

Vì HPTTT thuần nhất có $r(A) = r(\bar{A})$ nên hệ luôn luôn có nghiệm

1. Nếu r(A) = số ẩn thì hệ chỉ có duy nhất 1 nghiệm (0, 0, …, 0) gọi là nghiệm tầm thường

2. Nếu r(A) < số ẩn thì hệ có vô số nghiệm, trong đó có nghiệm *không* tầm thường.

Ví dụ: Tìm m để hệ phương trình sau có nghiệm không tầm thường

$$\begin{cases} x - 2y + z & = 0 \\ 2x - y + 3z & = 0 \\ -x - y + mz & = 0 \end{cases}$$

4. Phương pháp Cramer (giải hệ Cramer)

a. Định lý: Hệ Cramer có nghiệm duy nhất được tính bằng công thức

$$x_i = \frac{\det(A_i)}{\det(A)}$$

b. Ví dụ: Giải hệ bằng phương pháp Cramer

$$\begin{cases} x_1 + 2x_3 = 6 \\ -3x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 30 \\ -x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 8 \end{cases}$$

HẾT CHƯƠNG 2

Th.s: Nguyễn Quốc Thịnh