



ĐẠI HỌC  
BÁCH KHOA HÀ NỘI  
HANOI UNIVERSITY  
OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

# THUẬT TOÁN ỨNG DỤNG

CẤU TRÚC DỮ LIỆU VÀ KỸ THUẬT NÂNG  
CAO

Mảng cộng dồn, kỹ thuật 2 trỏ

ONE LOVE. ONE FUTURE.

- Mạng cộng dồn
- Kỹ thuật 2 con trỏ

# Mảng cộng dồn

- **Bài tập minh họa (P.02.02.01).** Cho dãy số  $a_1, a_2, \dots, a_n$ . Thực hiện Q truy vấn, mỗi truy vấn được đặc trưng bởi cặp chỉ số  $(i, j)$  trong đó ta cần tính tổng  $a_i + a_{i+1} + \dots + a_j$ .
- Thuật toán trực tiếp:
  - Với mỗi truy vấn, ta duyệt dãy từ  $a_i$  đến  $a_j$  để thực hiện tính tổng các phần tử của dãy con
  - Độ phức tạp trong tình huống tồi nhất của mỗi truy vấn là  $O(n)$
  - Độ phức tạp trong tình huống tồi nhất của Q truy vấn là  $O(Qn)$

```
sum(i, j){  
    T = 0;  
    for k = i to j do  
        T = T +  $a_k$ ;  
    return T;  
}
```

# Mảng cộng dồn

- **Bài tập minh họa (P.02.02.01).** Cho dãy số  $a_1, a_2, \dots, a_n$ . Thực hiện  $Q$  truy vấn, mỗi truy vấn được đặc trưng bởi cặp chỉ số  $(i, j)$  trong đó ta cần tính tổng  $a_i + a_{i+1} + \dots + a_j$ .
- Thuật toán sử dụng mảng cộng dồn:
  - Tính mảng cộng dồn  $S_k = a_1 + a_2 + \dots + a_k$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ),  $S_0 = 0$ 
    - Độ phức tạp  $O(n)$
  - Khi đó truy vấn  $(i, j)$  có giá trị bằng  $S_j - S_{i-1}$ 
    - Độ phức tạp mỗi truy vấn là  $O(1)$
    - Độ phức tạp của toàn bộ chương trình:  $O(n) + O(Q)$

```
Input  $a_1, a_2, \dots, a_n$  and  $Q$ ;  
 $S_0 = 0$ ;  
for  $k = 1$  to  $n$  do  
     $S_k = S_{k-1} + a_k$ ;  
  
for  $q = 1$  to  $Q$  do {  
    Input  $i, j$ ;  
     $res = S_j - S_{i-1}$ ;  
    output( $res$ );  
}
```

# Mảng cộng dồn

- Cho mảng 2 chiều  $a[1..n, 1..m]$ , mảng cộng dồn  $S[1..n, 1..m]$  được định nghĩa như sau:
  - $S[0, j] = 0, S[i, 0] = 0, i = 0, 1, \dots, n$  và  $j = 0, 1, \dots, m$
  - $S[i, j] = \sum_{k=1}^i \sum_{q=1}^j a[k, q], i = 1, \dots, n$  và  $j = 1, \dots, m$
  - Công thức truy hồi:  $S[i, j] = S[i-1, j] + S[i, j-1] - S[i-1, j-1] + a[i, j]$
- Thuật toán tính mảng cộng dồn
  - Độ phức tạp  $O(nm)$

```
for i = 0 to n do S[i,0] = 0;
for j = 0 to m do S[0,j] = 0;
for i = 1 to n do {
    for j = 1 to n do {
        S[i,j] = S[i-1,j] + S[i,j-1] -
                S[i-1,j-1] + a[i,j];
    }
}
```

- **Bài tập minh họa (P.02.02.02).** Cho mảng 2 chiều  $a[1..n, 1..m]$ . Ta cần thực hiện  $Q$  truy vấn, mỗi truy vấn có dạng được đặc trưng bởi bộ chỉ số  $(a, b, c, d)$  và được định nghĩa như sau:

$$\text{query}[a, b, c, d] = \sum_{k=a}^c \sum_{q=b}^d a[k, q]$$

- Thuật toán trực tiếp:
  - Với mỗi truy vấn, ta thực hiện 2 vòng lặp lồng nhau để thực hiện duyệt qua tất cả các phần tử và tính tổng
  - Độ phức tạp của mỗi truy vấn trong tình huống tồi nhất  $O(nm)$

# Mảng cộng dồn

- **Bài tập minh họa (P.02.02.02).** Cho mảng 2 chiều  $a[1..n, 1..m]$ . Ta cần thực hiện Q truy vấn, mỗi truy vấn có dạng được đặc trưng bởi bộ chỉ số  $(a, b, c, d)$  và được định nghĩa như sau:

$$\text{query}[a, b, c, d] = \sum_{k=a}^c \sum_{q=b}^d a[k, q]$$

- Thuật toán sử dụng mảng cộng dồn:
  - Công thức:  $\text{query}[a, b, c, d] = S[c, d] - S[c, b-1] - S[a-1, d] + S[a-1, b-1]$
  - Độ phức tạp của mỗi truy vấn trong tình huống tồi nhất  $O(1)$

# Kỹ thuật 2 trỏ

- Trong nhiều tình huống, chúng ta phải thực hiện duyệt một dãy  $a_1, a_2, \dots, a_n$  để tìm kiếm các đối tượng được đặc trưng bởi 2 chỉ số  $(i, j)$  trên dãy (ví dụ: dãy con gồm các phần tử liên tiếp đứng cạnh nhau hoặc cặp 2 phần tử của dãy) có tính chất nào đó.
  - Dùng 2 vòng lặp lồng nhau để duyệt qua tất cả các cặp 2 chỉ số  $(i, j)$ : độ phức tạp  $O(n^2)$
  - Dùng 2 con trỏ tiến theo 1 chiều hoặc tiến theo 2 chiều ngược nhau: độ phức tạp  $O(n)$



# Kỹ thuật 2 trở

- **Bài tập minh họa 2.1 (P.02.02.03).** Cho dãy số  $a[1], a[2], \dots, a[n]$  được sắp xếp theo thứ tự tăng dần (các phần tử đôi một khác nhau). Cho trước giá trị  $Q$ , hãy đếm số cặp 2 chỉ số  $i$  và  $j$  sao cho  $a[i] + a[j] = Q$ .
- Thuật toán trực tiếp
  - Dùng 2 vòng lặp lồng nhau để duyệt qua tất cả các cặp  $(i, j)$  và kiểm tra điều kiện  $a[i] + a[j] = Q$
  - Độ phức tạp  $O(n^2)$

```
res = 0;
for i = 1 to n do {
    for j = i+1 to n do {
        if a[i] + a[j] = Q then
            res = res + 1;
    }
}
Output(res);
```

# Kỹ thuật 2 trỏ

- **Bài tập minh họa 2.1 (P.02.02.03).** Cho dãy số  $a[1], a[2], \dots, a[n]$  được sắp xếp theo thứ tự tăng dần (các phần tử đôi một khác nhau). Cho trước giá trị  $Q$ , hãy đếm số cặp 2 chỉ số  $i$  và  $j$  sao cho  $a[i] + a[j] = Q$ .
- Thuật toán sử dụng 2 trỏ
  - Biến  $i$  di chuyển từ trái qua phải; biến  $j$  chạy từ phải qua trái trên dãy
  - Độ phức tạp  $O(n)$

```
res = 0;
i = 1; j = n;
while i < j do {
    if a[i] + a[j] = Q then {
        res = res + 1; i = i + 1; j = j - 1;
    } else if a[i] + a[j] < Q then
        i = i + 1;
    else
        j = j - 1;
}
Output(res);
```

# Kỹ thuật 2 trở

- **Bài tập minh họa 2.2 (P.02.02.04).** Cho dãy số không âm  $a[1], a[2], \dots, a[n]$ . Cho trước giá trị  $Q$ , hãy tìm dãy con (gồm một số phần tử đứng liên tiếp cạnh nhau) dài nhất mà có tổng nhỏ hơn hoặc bằng  $Q$ .
- Thuật toán trực tiếp
  - Dùng 2 vòng lặp lồng nhau để xét tất cả các vị trí bắt đầu và kết thúc của 1 dãy con và kiểm tra điều kiện tổng có nhỏ hơn hoặc bằng  $Q$  hay không?
  - Độ phức tạp  $O(n^2)$

```
res = 0;
for i = 1 to n do {
    S = 0;
    for j = i to n do {
        S = S + a[j];
        if S <= Q then {
            res = max(res, j - i + 1);
        }
    }
}
Output(res);
```

# Kỹ thuật 2 trỏ

- **Bài tập minh họa 2.2 (P.02.02.04).** Cho dãy số không âm  $a[1], a[2], \dots, a[n]$ . Cho trước giá trị  $Q$ , hãy tìm dãy con (gồm một số phần tử đứng liên tiếp cạnh nhau) dài nhất mà có tổng nhỏ hơn hoặc bằng  $Q$ .
- Thuật toán sử dụng 2 trỏ
  - Biến  $L$  di chuyển từ trái qua phải; biến  $R$  chạy từ trái qua phải trên dãy
  - Độ phức tạp  $O(n)$

```
res = 0; S = 0;
L = 1;
for R = 1 to n do {
    S = S + a[R];
    while S > Q do {
        S = S - a[L]; L = L + 1;
    }
    res = max(res, R - L + 1);
}
Output(res);
```

A graphic on the left side of the slide. It features a dark blue background with a large, stylized circular pattern of red dots. The dots are arranged in concentric, slightly irregular rings, creating a sense of depth and movement. In the center of this pattern, the word "HUST" is written in a bold, white, sans-serif font.

**HUST**

**THANK YOU !**