Aula 05

Estudo de funções exponenciais e logarítmicas

Função exponencial

Seja $a \in \mathbb{R}$, tal que $a > 0$ e $a \neq 1$.

Chamamos ***função exponencial de base*** a a função

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R};\ f(x) = a^x$$

Exemplos

1) $f(x) = 4^x$

2) $f(x) = \left(\frac{1}{5}\right)^x$

3) $f(x) = \left(\sqrt{2}\right)^x$

4) $f(x) = e^x$

Observações

1) $f(x) = a^x \Rightarrow f(0) = 1$

2) Como $a > 0$ e $a \neq 1$, então $a^x > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

3) Como $a > 0$ e $a \neq 1$, então $a > 1$ ou $0 < a < 1$.

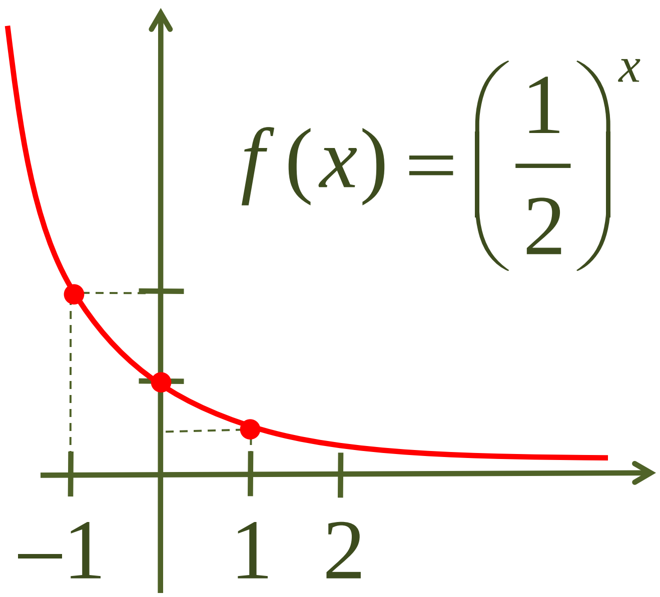
a) $a > 1$

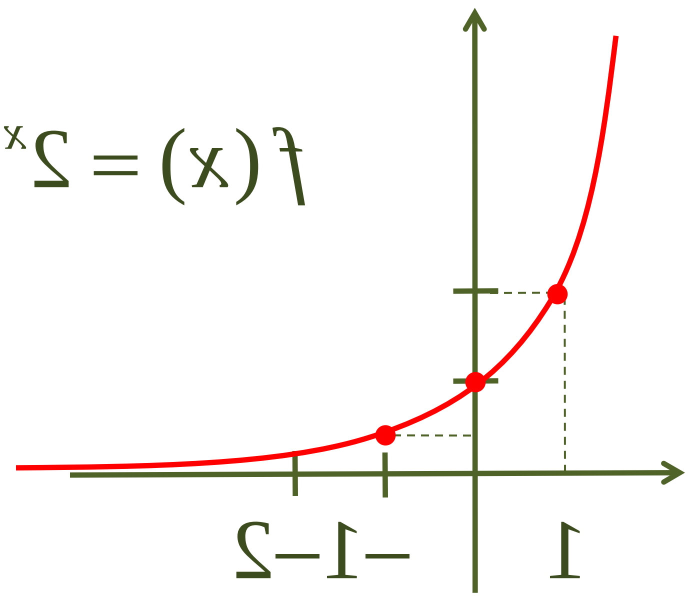
$x_1 < x_2 \Rightarrow a^{x_1} < a^{x_2} \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ (crescente)

b) $0 < a < 1$

$x_1 < x_2 \Rightarrow a^{x_1} > a^{x_2} \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$ (decrescente)

Gráficos



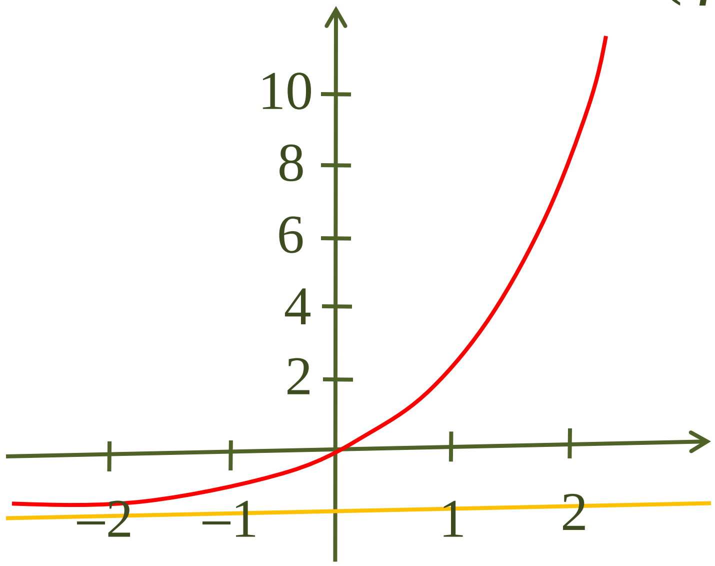


Exemplo 1

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R};\, f(x)=3^x-1$

$D(f)=\mathbb{R}$

Como $3^x>0 \Rightarrow 3^x-1>-1 \Rightarrow \mathrm{Im}(f)=(-1,+\infty)$

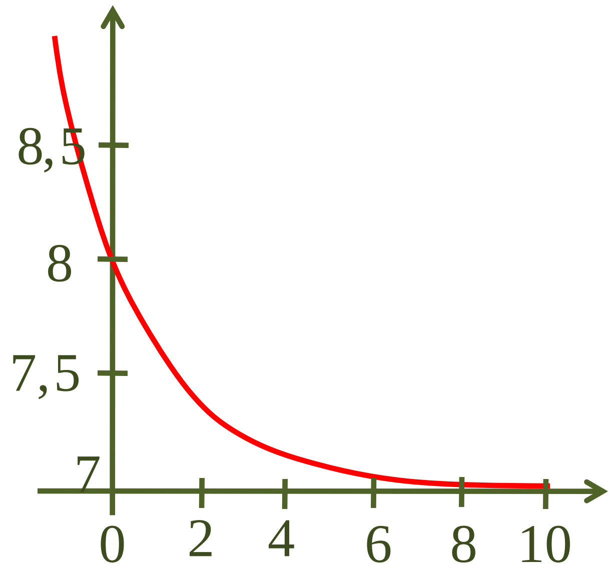


Exemplo 2

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R};\ f(x)=\left(\frac{3}{5}\right)^{x}+7$$

$$D(f)=\mathbb{R}$$

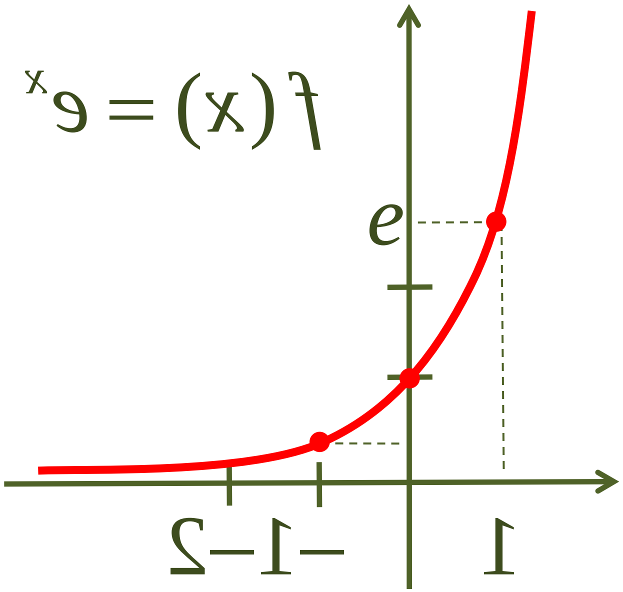
Como $\left(\frac{3}{5}\right)^{x}>0 \Rightarrow \left(\frac{3}{5}\right)^{x}+7>7 \ \Rightarrow \mathrm{Im}(f)=(7,+\infty)$



$f(x) = e^x$

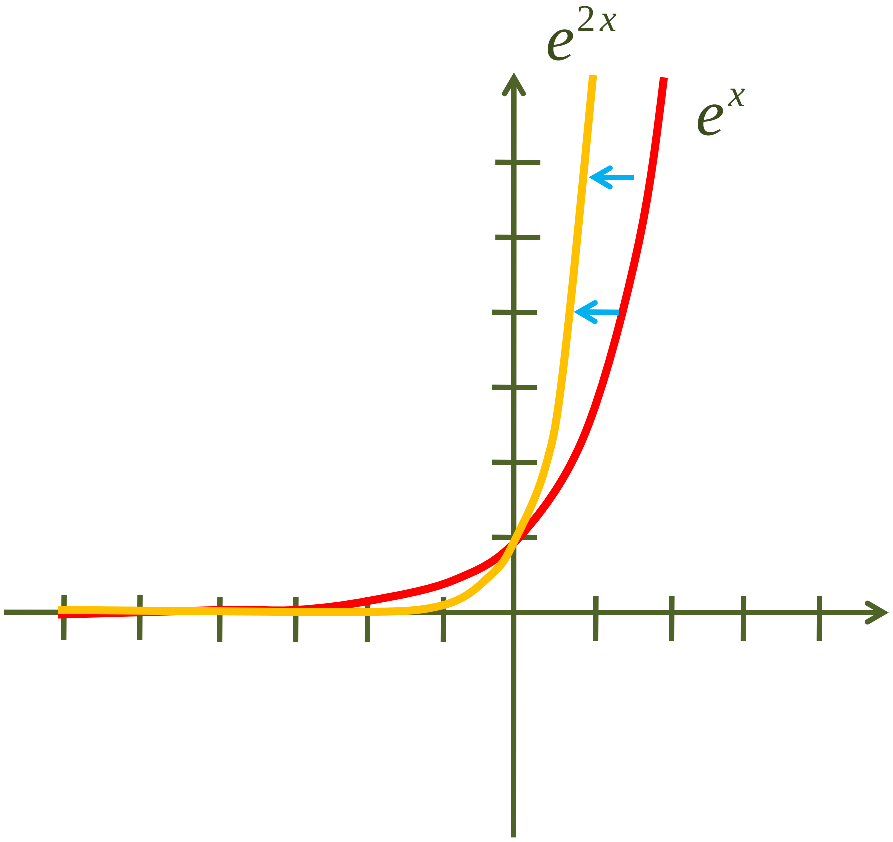
$D_f = \mathbb{R}$

$\mathrm{Im}_f = (0, +\infty)$



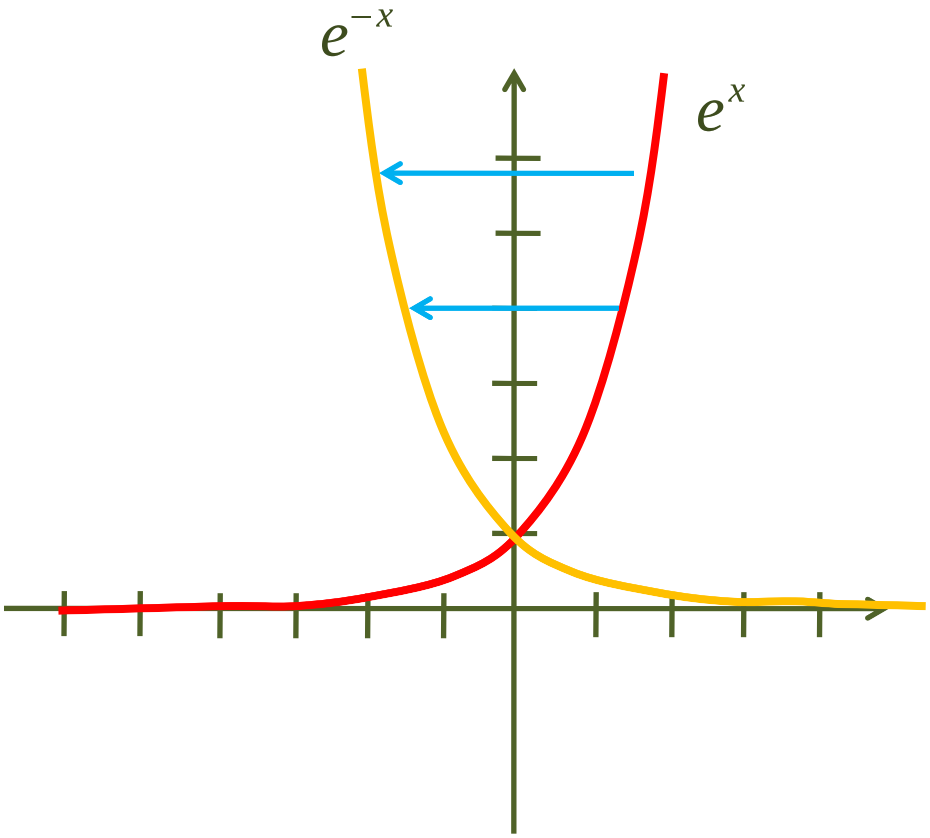
Transformações de funções exponenciais

$$g(x) = e^{2x}$$



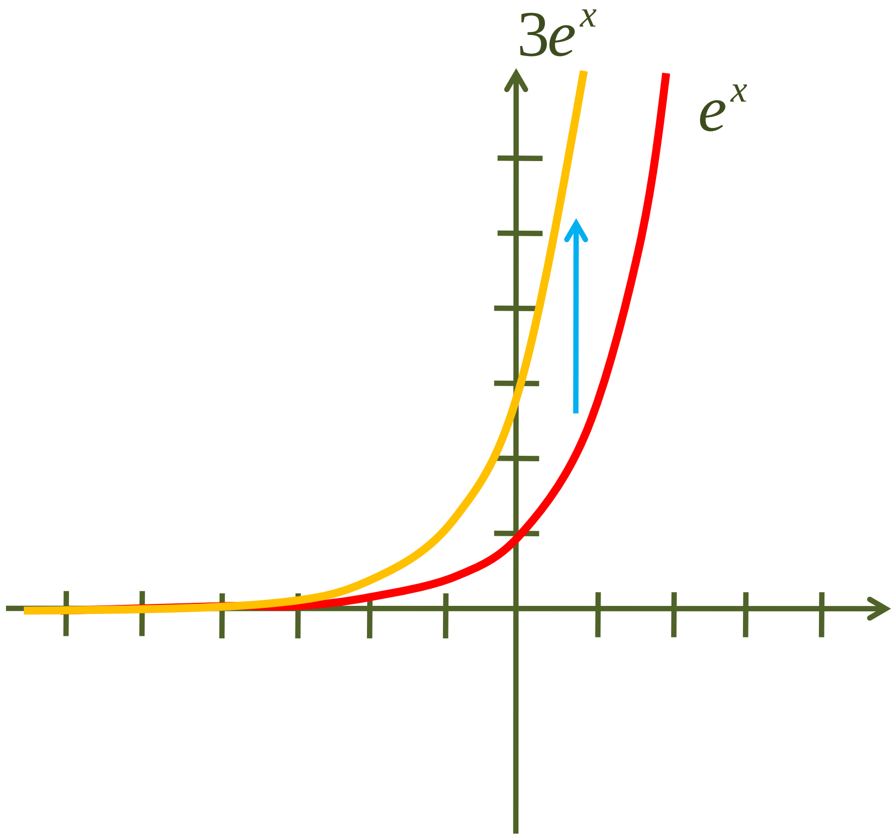
Transformações de funções exponenciais

$$h(x) = e^{-x}$$



Transformações de funções exponenciais

$$k(x) = 3e^{-x}$$



Função Logarítmica

Seja $a \in \mathbb{R}$, tal que $a > 0$ e $a \neq 1$.

Chamamos ***função logarítmica de base*** a a função

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R};\ f(x) = \log_a x$$

Exemplos

1) $f(x) = \log_4 x$

2) $f(x) = \log_{\frac{1}{4}} x$

3) $f(x) = \log_{10} x = \log x$

4) $f(x) = \log_e x = \ln x$

Observações

1) $y = \log_a x \Leftrightarrow a^y = x$

2) $f(x) = \log_a x \Rightarrow f(1) = \log_a 1 = 0$

3) Como $a > 0$ e $a \neq 1$, então $a > 1$ ou $0 < a < 1$.

a) $a > 1$

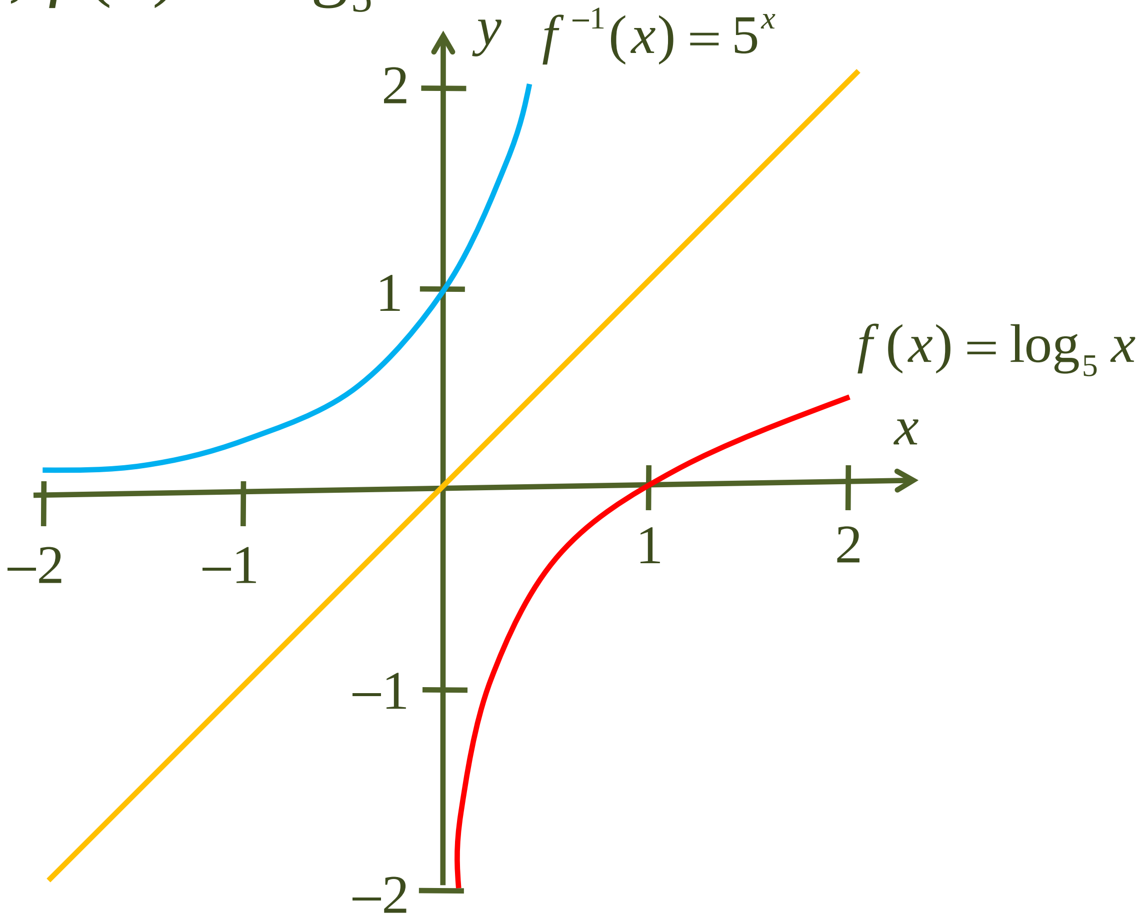
$x_1 < x_2 \Rightarrow \log_a x_1 < \log_a x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ (crescente)

b) $0 < a < 1$

$x_1 < x_2 \Rightarrow \log_a x_1 > \log_a x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$ (decrescente)

Exemplo 3

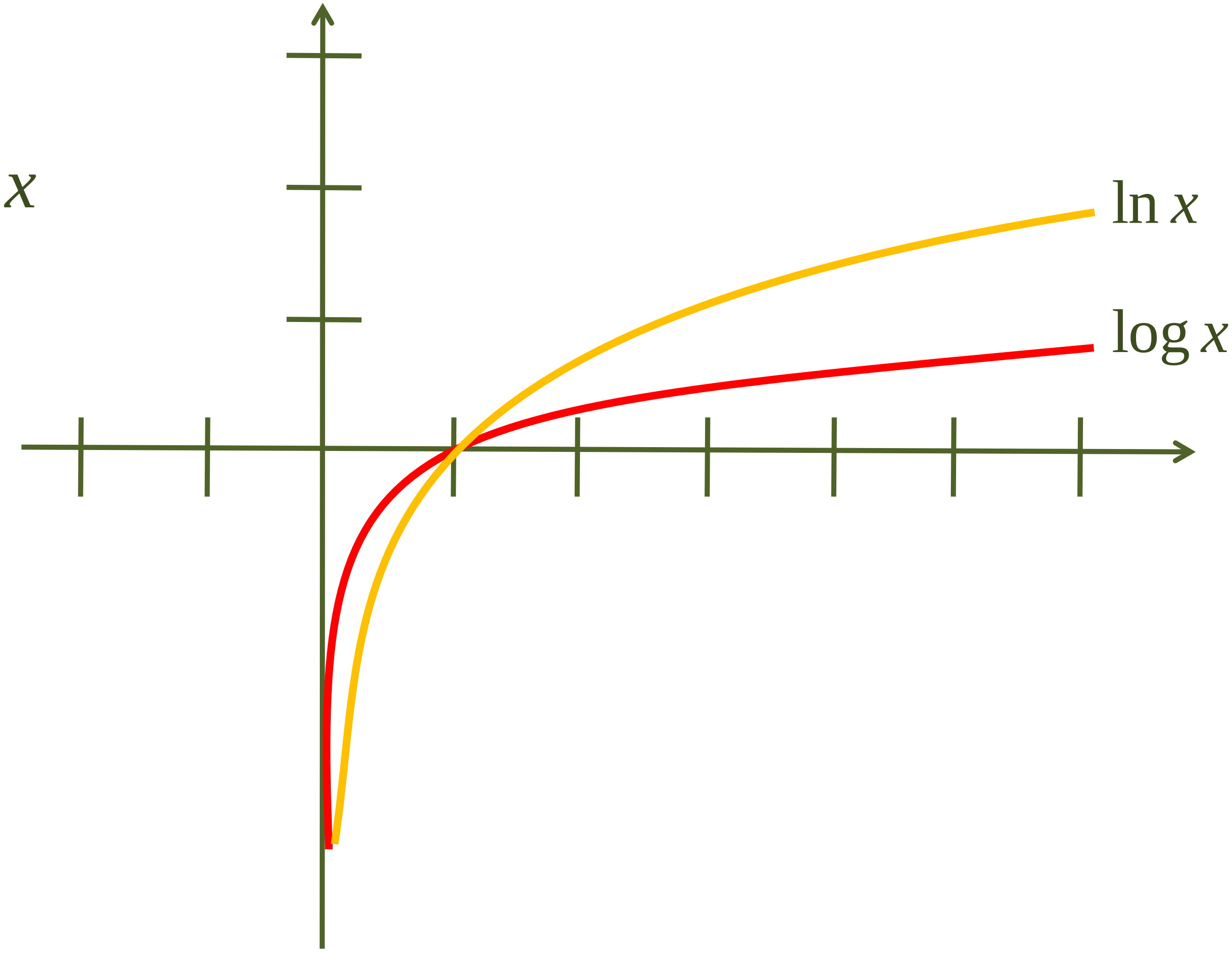
$f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R};\, f(x)=\log_5 x$



$\ln x$ e $\log x$

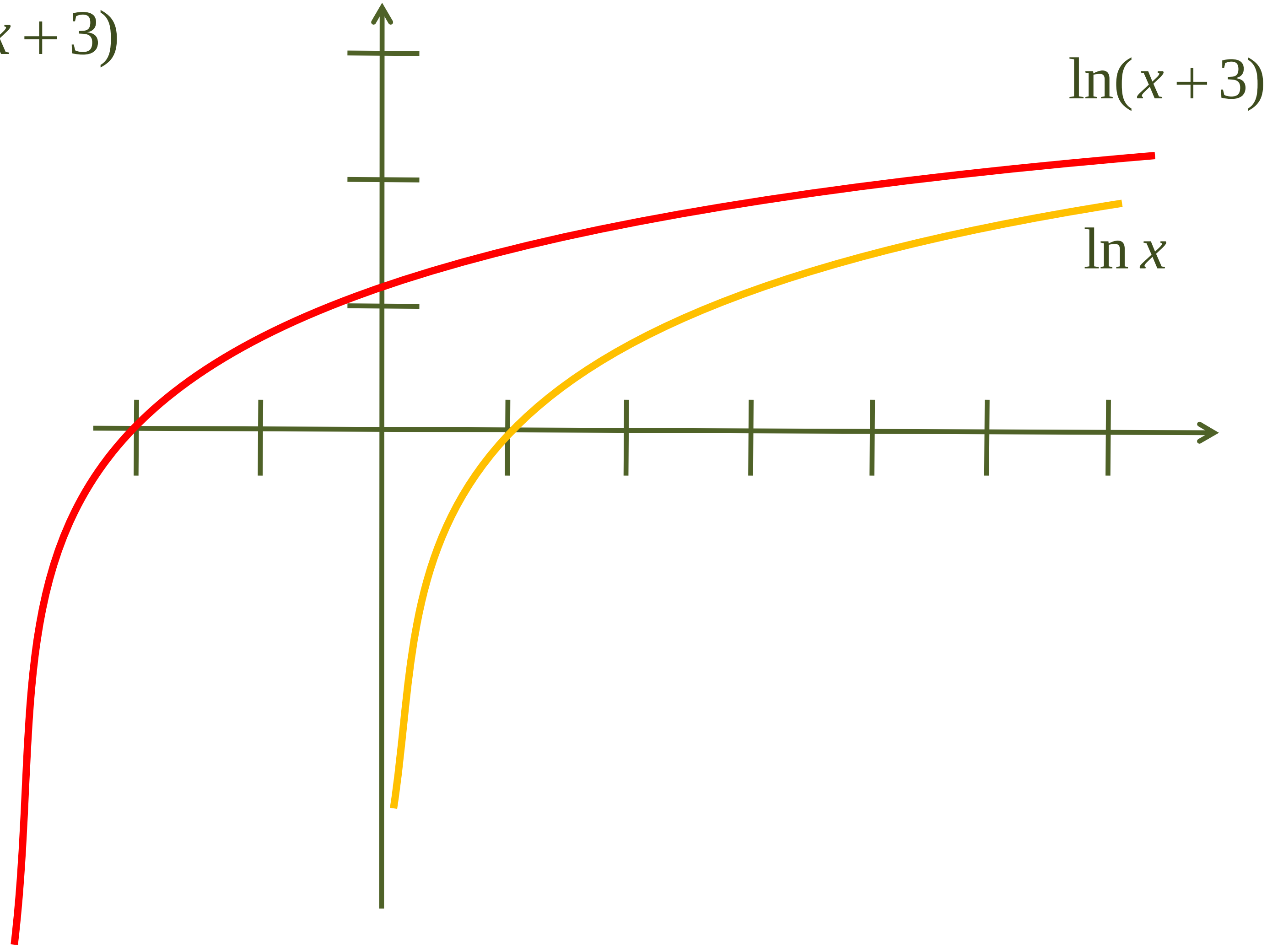
$$\log_e x \equiv \ln x$$

$$\log_{10} x \equiv \log x$$



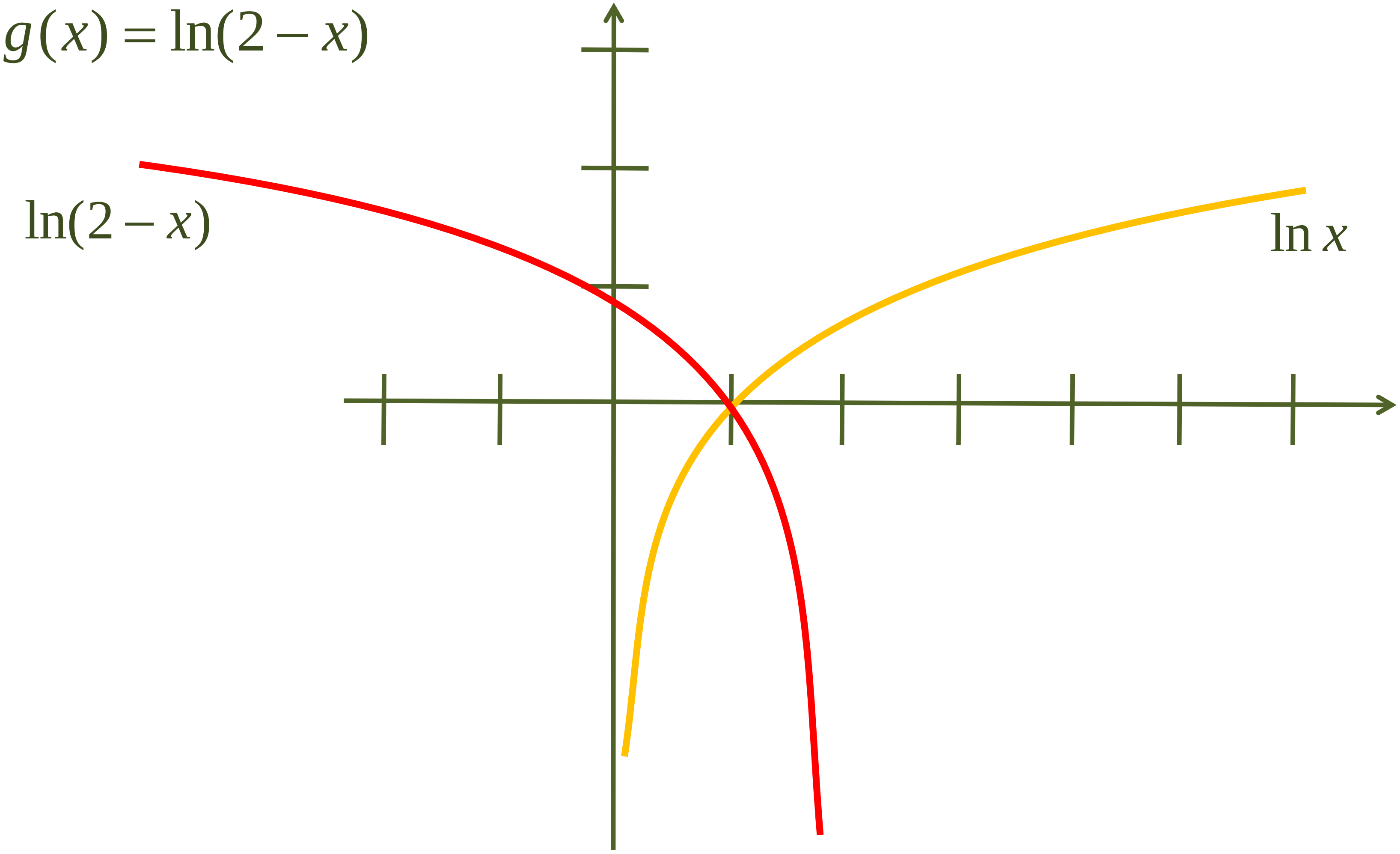
Transformações de funções Logarítmicas

$$g(x) = \ln(x+3)$$



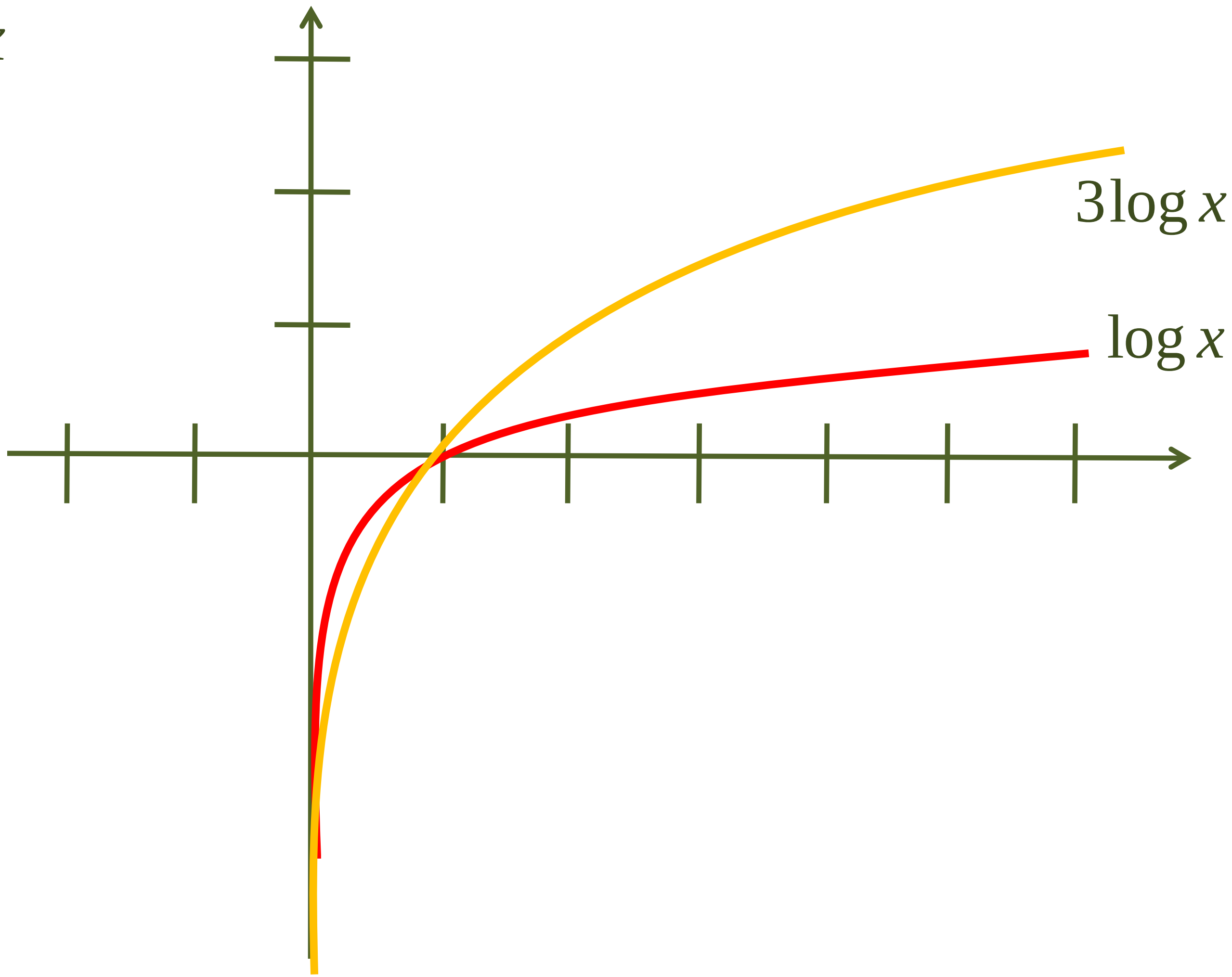
Transformações de funções Logarítmicas

$g(x) = \ln(2 - x)$



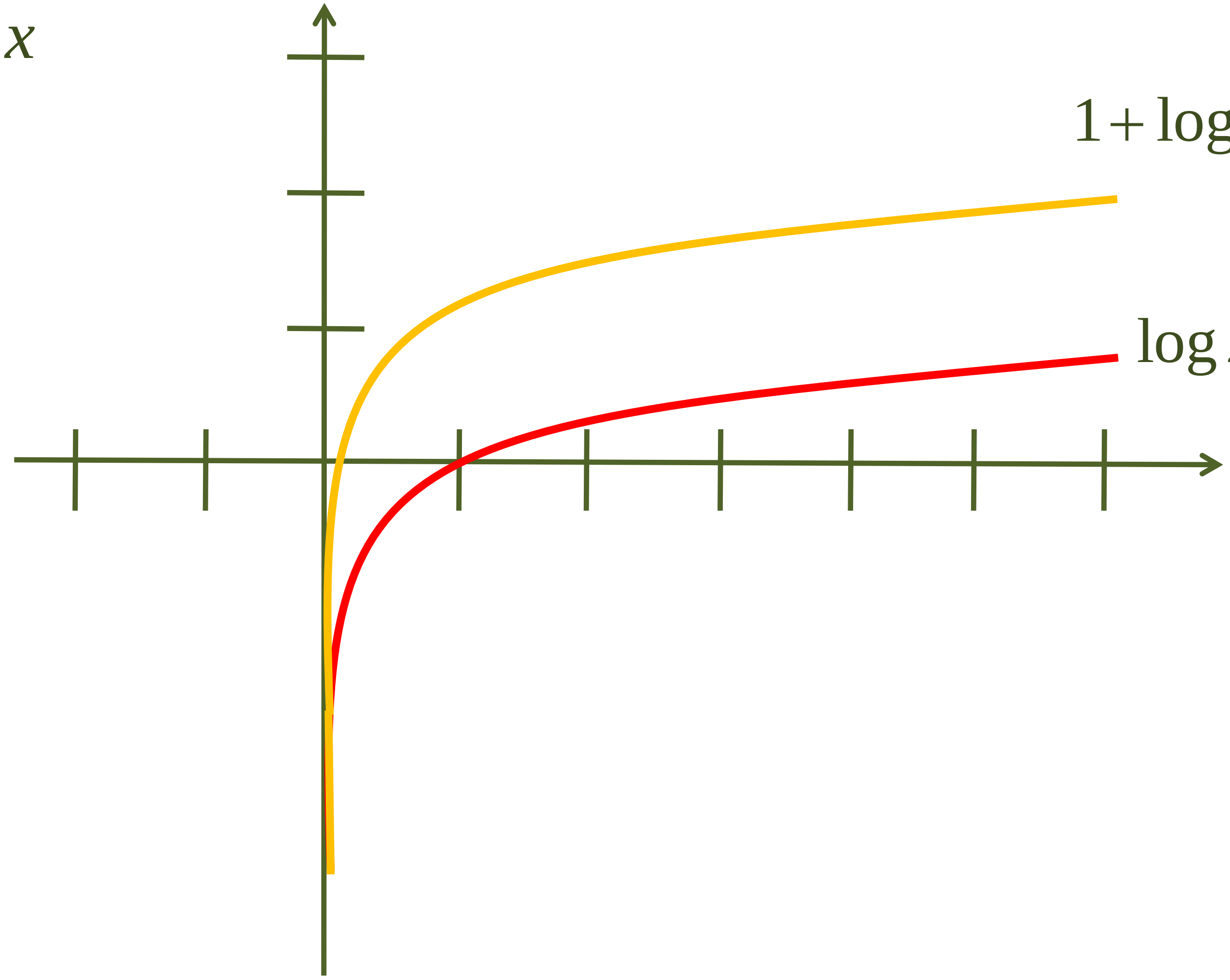
Transformações de funções Logarítmicas

$g(x) = 3\log x$



Transformações de funções Logarítmicas

$$g(x) = 1 + \log x$$



Logaritmo

Temos que:

$$\log_a x = y \iff a^y = x$$

$$\log_a(a^x) = x \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad a^{\log_a x} = x \quad \forall x \in \mathbb{R}_+$$

Propriedades:

1. $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$
2. $\log_a\left(\dfrac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$
3. $\log_a(x^r) = r \log_a x \quad \forall r \in \mathbb{R}$

Exemplo 4

Use as propriedades e calcule $\log_2 80 - \log_2 16$.

$$\log_2 80 - \log_2 5 = \log_2\left(\frac{80}{5}\right) = \log_2 16 = 4$$

pois $2^4 = 16$.

Obrigado !

Aula disponível em

www.mat.ufam.edu.br/calculo1