Aula 01 - Conjuntos

$\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{I}, \mathbb{R}$, operações, intervalos e desigualdades.

Números Naturais

Sua notação é $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$.

Quando não se considera o elemento zero, a notação utilizada é

$$\mathbb{N}^* = \mathbb{N} - \{0\} = \{1, 2, 3, \ldots\}$$

Números Inteiros

A notação utilizada para representar os números inteiros é

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\} \ .$$

Quando o elemento zero não pertence ao conjunto, denotamos:

$$\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} - \{0\}$$

Outras notações

$\mathbb{Z}_+ = \mathbb{N}$ (inteiros não negativos)

$\mathbb{Z}_+^* = \mathbb{N}^*$ (inteiros positivos)

$\mathbb{Z}_- = \{\ldots, -2, -1, 0\}$ (inteiros não positivos)

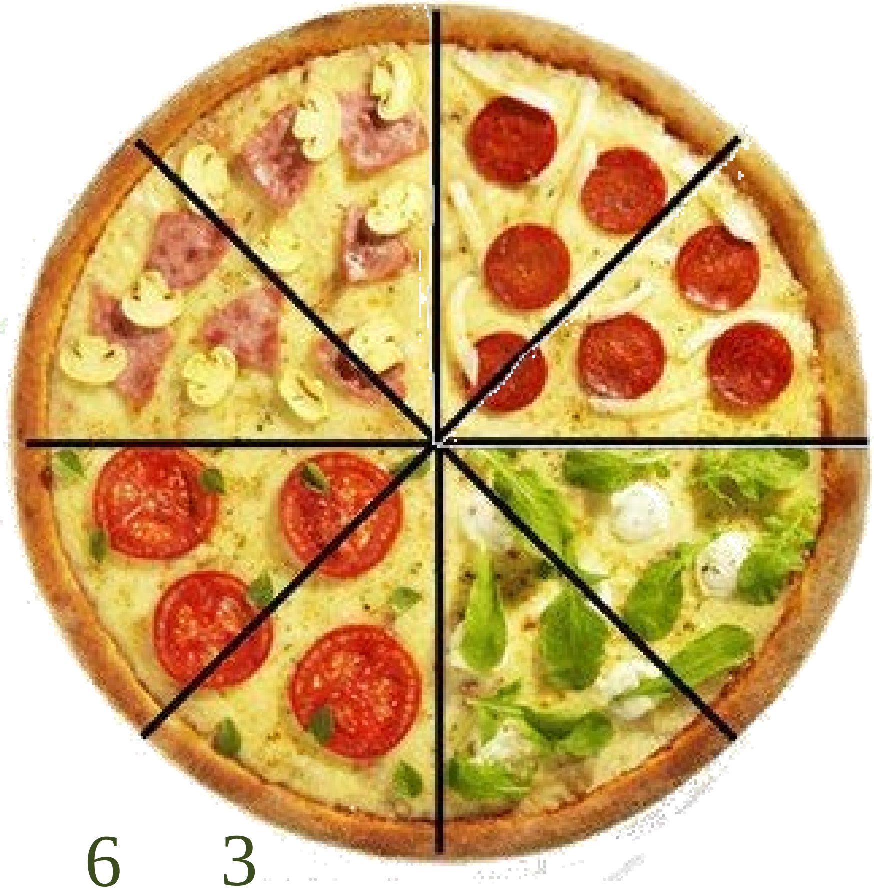
$\mathbb{Z}_-^* = \{\ldots, -3, -2, -1\}$ (inteiros negativos)

Alguns números racionais

a) 2
b) -7
c) $\frac{2}{5}$
d) 0,6
e) 1,37
f) 0,333...
g) 1,123123123...

Exemplo

$$\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$$



$$\frac{6}{8}=\frac{3}{4}$$

Números racionais

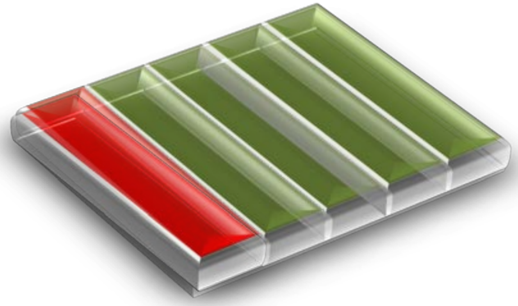
$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \,/\, p \in \mathbb{Z} \text{ e } q \in \mathbb{Z}^* \right\}$$

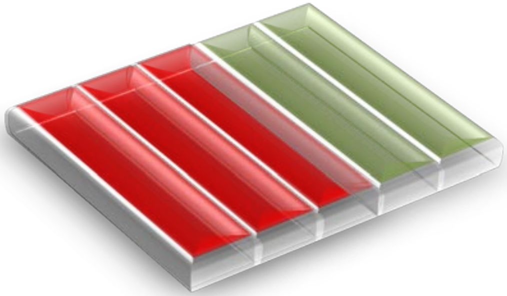
São todos os números que podem ser escritos sob forma de fração de números inteiros.

Têm representação decimal finita ou periódica.

Soma de frações

$$\frac{1}{5}+\frac{3}{5}=?$$



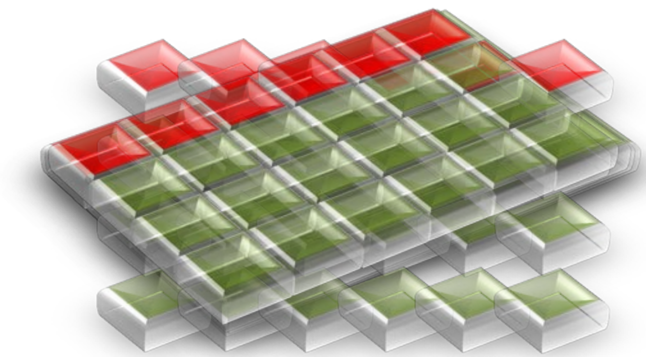


$$\frac{1}{5} \qquad + \qquad \frac{3}{5}$$

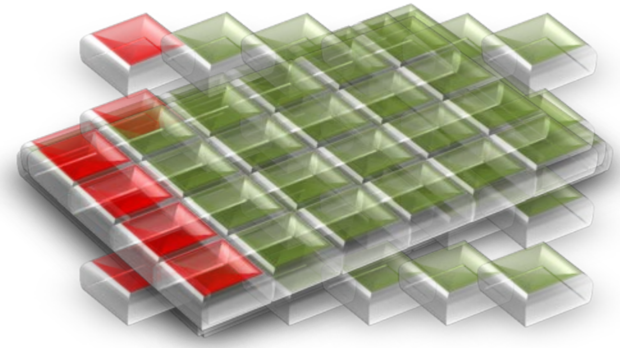
$$=\frac{4}{5}$$

Soma de frações

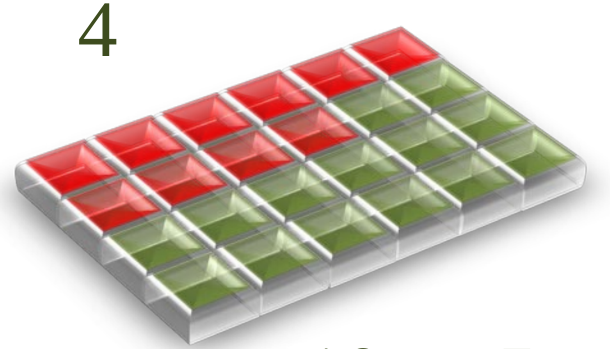
$$\frac{1}{4}+\frac{1}{6}=?$$



$$\frac{1}{4}$$



$$\frac{1}{6}$$



$$\frac{10}{24}=\frac{5}{12}$$

Operações

Sejam $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$ duas frações quaisquer.

A ***soma*** e o ***produto*** destas frações são obtidos da seguinte forma:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$$

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

Números irracionais $(\mathbb{I} = \mathbb{Q}')$

São os números cuja representação decimal não é exata nem periódica, consequentemente não pode ser escrita sob a forma de fração de inteiros.

Exemplos:

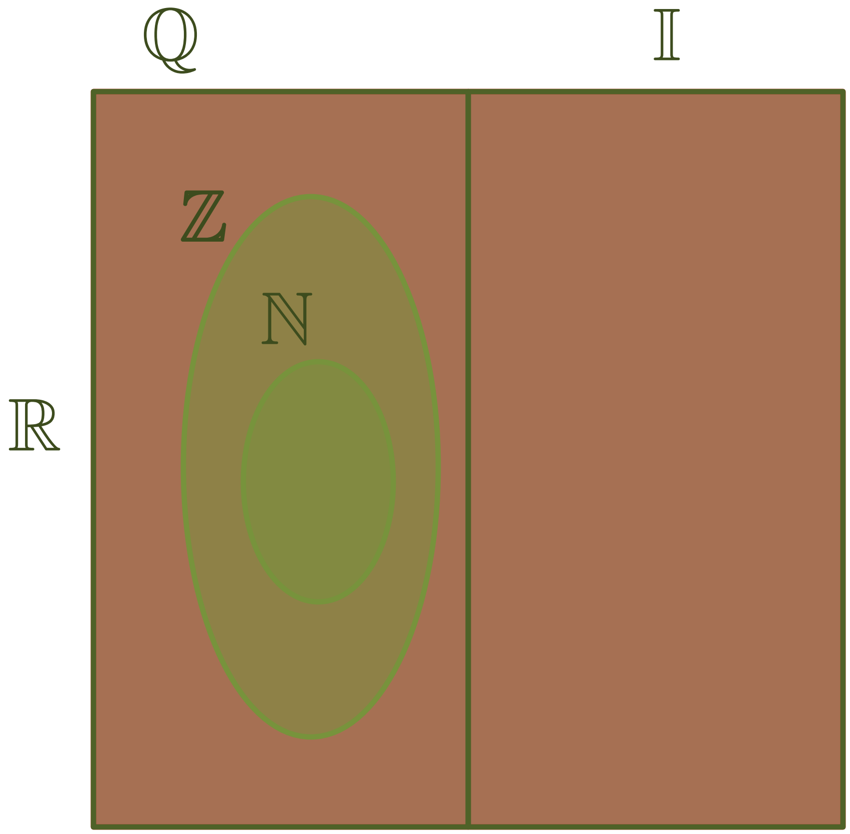
a) $\sqrt{2} = 1,4142135624...$

b) $\pi = 3,14159265...$

c) $e = 2,718281828...$

Números reais $(\mathbb{R})$

$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$, onde $\mathbb{Q} \cap \mathbb{I} = \varnothing$



Adição e multiplicação

A operação que a cada par de números associa sua soma denomina-se ***adição,*** e a que associa a o produto denomina-se ***multiplicação***.

Um número racional $\frac{a}{b}$ se diz positivo se $a \cdot b \in \mathbb{N}$;

Se $a \neq 0$ e $a \cdot b \in \mathbb{N}$, então $\frac{a}{b}$ se diz estritamente positivo.

Propriedades

- Fechamento

Se $a, b \in \mathbb{R}$ então $a+b \in \mathbb{R}$ e $ab \in \mathbb{R}$.

- Comutativa

$a+b=b+a$ e $ab=ba$

- Associativa

$a+(b+c)=(a+b)+c$ e $a(bc)=(ab)c$

- distributiva

$a(b+c)=ab+ac$

Propriedades

- Elemento neutro da adição

$$\exists\, 0 \in \mathbb{R}; 0 + a = a + 0 = a \quad \forall a \in \mathbb{R}$$

- Elemento neutro da multiplicação

$$\exists\, 1 \in \mathbb{R}; 1 \cdot a = a \cdot 1 = a \quad \forall a \in \mathbb{R}$$

- Existência do simétrico ou oposto

$$\forall\, a \in \mathbb{R},\ \exists (-a) \in \mathbb{R}; a + (-a) = 0 \quad \forall a \in \mathbb{R}$$

- Existência do inverso ou recíproco

$$\forall\, a \in \mathbb{R}^{*},\ \exists \frac{1}{a} \in \mathbb{R}; a \cdot \frac{1}{a} = 1$$

Subtração e divisão

- Subtração

$a - b = a + (-b)$ onde $(-b)$ é o simétrico de b.

- Divisão

$\frac{a}{b} = a \cdot \frac{1}{b}$ onde $\frac{1}{b}$ é o inverso de b.

$$Obs: -\frac{a}{b} = \frac{a}{-b} = \frac{-a}{b}$$

Ordenação dos reais

No conjunto dos números reais, existe um subconjunto denominado números positivos, tal que:

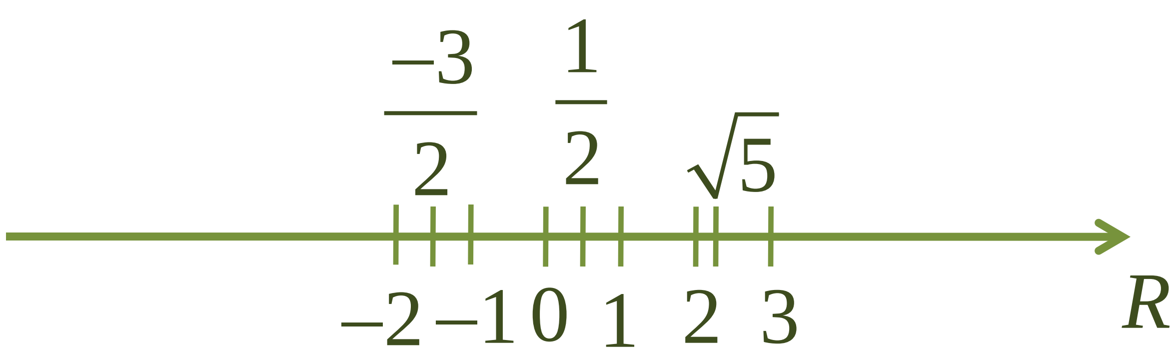
- Se a for um número real, então exatamente uma das três afirmativas será verdadeira.
  - $a = 0$;
  - a é positivo;
  - $(-a)$ é positivo;

Definições

- O número real a é ***negativo*** se, e somente se, $(-a)$ for positivo.
- O símbolo < significa ***é menor que***.
  - $a < b$ se, e somente se, $b - a$ for positivo.
- O símbolo > significa ***é maior que***.
  - $a > b$ se, e somente se, $a - b$ for positivo.
- O símbolo $\leq$ significa ***é menor ou igual a***.
  - $a \leq b$ se, e somente se, $a < b$ ou $a = b$.

Intervalos numéricos

Existe uma correspondência biunívoca (um a um entre o conjunto dos números reais e o conjunto dos pontos da reta numerada.



Algumas propriedades

1) $a = b \Leftrightarrow a \pm c = b \pm c$

2) $a = b \Leftrightarrow ac = bc$

3) $ab = 0 \Leftrightarrow a = 0 \text{ ou } b = 0$

4) $c(a+b) = ca + cb$

5) $a < b \text{ e } b < c \Rightarrow a < c$

6) $a < b \;\Leftrightarrow\; \mathrm{a} \pm c < b \pm c$

7) $a < b \text{ e } c < d \Rightarrow a + c < b + d$

Algumas propriedades

7) $a < b \text{ e } c > 0 \Rightarrow ac < bc$

8) $a < b \text{ e } c < 0 \Rightarrow ac > bc$

9) $a > 0 \Rightarrow \dfrac{1}{a} > 0$

10) $ab > 0 \Leftrightarrow (a > 0 \text{ e } b > 0) \text{ ou } (a < 0 \text{ e } b < 0)$

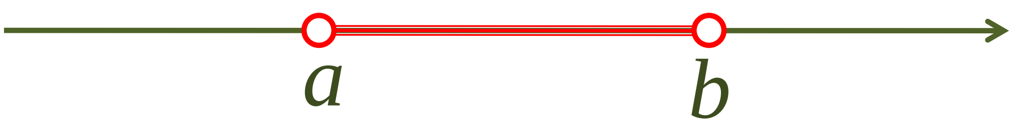
11) $ab < 0 \Leftrightarrow (a > 0 \text{ e } b < 0) \text{ ou } (a < 0 \text{ e } b > 0)$

12) $0 < b < a \Leftrightarrow 0 < \dfrac{1}{a} < \dfrac{1}{b}$

Intervalos

São subconjuntos de $\mathbb{R}$, determinados por desigualdades.

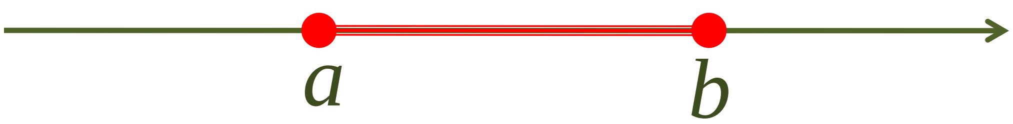
- Intervalo ***aberto*** de a a b denotado por (a,b) é o conjunto de todos os números reais, tais que $a < x < b$.



$$(a,b) = \{x \in \mathbb{R} \,/\, a < x < b\}$$

Intervalos fechados

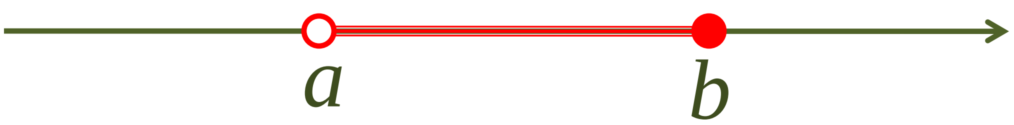
- Intervalo ***fechado*** de a a b denotado por $\left[a,b\right]$ é o conjunto de todos os números reais, tais que $a \leq x \leq b$.



$$\left[a,b\right] = \left\{x \in \mathbb{R} \,/\, a \leq x \leq b\right\}$$

Intervalos semi-abertos

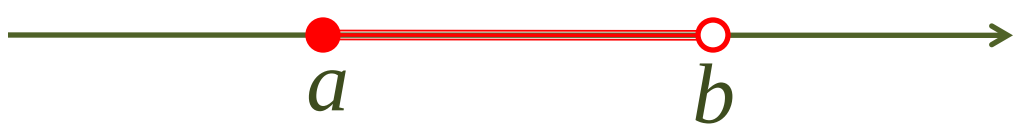
- Intervalo ***semi-aberto*** à esquerda de a a b denotado por $(a,b]$ é o conjunto de todos os números reais, tais que $a < x \leq b$.



$$(a,b] = \{x \in \mathbb{R} \,/\, a < x \leq b\}$$

Intervalos semi-abertos

- Intervalo ***semi-aberto*** à direita de a a b denotado por $[a,b)$ é o conjunto de todos os números reais, tais que $a \leq x < b$.



$$[a,b) = \{x \in \mathbb{R} \,/\, a \leq x < b\}$$

Outros intervalos

$$\mathbb{R}_+ = [0,+\infty) = [0,+\infty[$$

$$\mathbb{R}_+^* = (0,+\infty) =]0,+\infty[$$

$$\mathbb{R}_- = (-\infty,0] =]-\infty,0]$$

$$\mathbb{R}_-^* = (-\infty,0) =]-\infty,0[$$

$$\mathbb{R} = (-\infty,+\infty) =]-\infty,+\infty[$$

Outros intervalos

$$[a,+\infty) = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x \geq a\}$$

$$(-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x \leq a\}$$

$$(a,+\infty) = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x > a\}$$

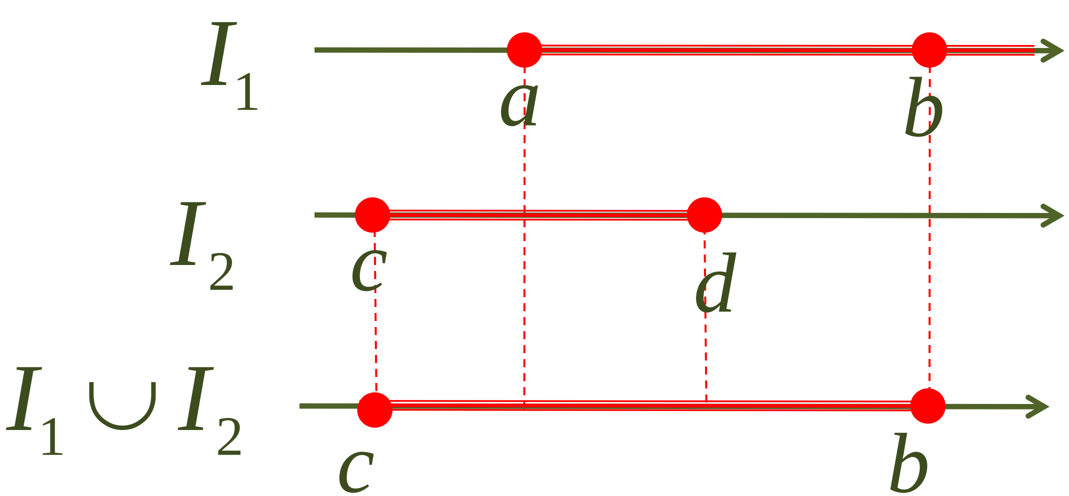
$$(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x < a\}$$

União de intervalos

Sejam I_1 e I_2 intervalos da reta.

Definimos

$$I_1 \cup I_2 = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x \in I_1 \text{ ou } x \in I_2\}$$

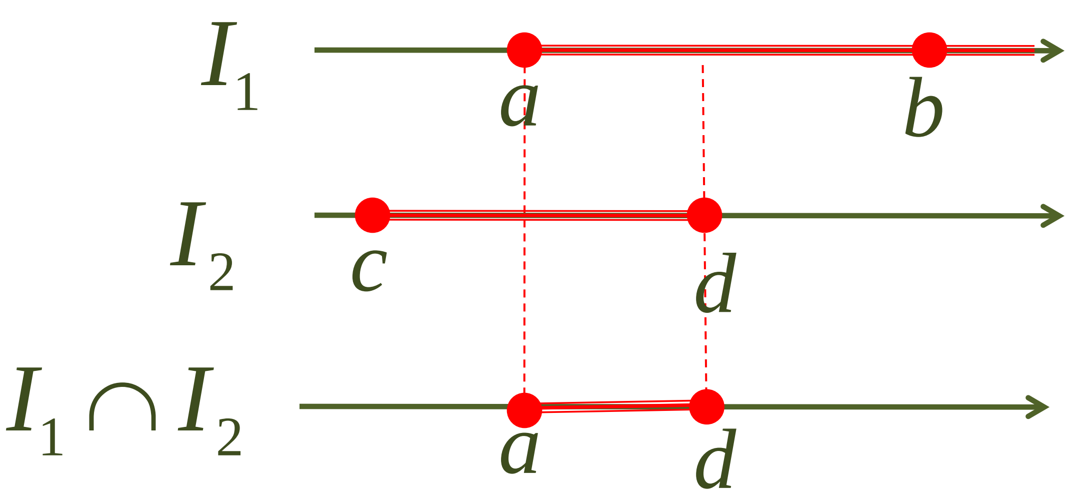


Interseção de intervalos

Sejam I_1 e I_2 intervalos da reta.

Definimos

$$I_1 \cap I_2 = \{x \in \mathbb{R} / x \in I_1 \text{ e } x \in I_2\}$$



Obrigado !

Esta aula está disponível em

http://www.mat.ufam.edu.br/