Aula 02- Funções

Definição de função, representação de funções, função crescente e decrescente, função linear , polinomial, racionais e algébricas

Definição de Funções

Dados A e B dois conjuntos de $\mathbb{R}$:

uma **função** $f : A \rightarrow B$ é uma ***relação ou correspondência*** que a cada elemento de A associa um único elemento de B.

As funções ***servem para descrever*** o mundo real em termos matemáticos.

Domínio e Imagem

Seja f uma função.

O conjunto de todos os $x \in \mathbb{R}$ que satisfazem a definição da f é chamado ***domínio*** da f e denotado por $D(f)$.

O conjunto de todos os $y \in \mathbb{R}$ tais que $y = f(x)$, onde $x \in D(f)$, é chamado ***imagem*** da f e denotado por $\mathrm{Im}(f)$.

$$x \xrightarrow[\text{entrada (Domínio)}]{} \boxed{\quad f \quad} \xrightarrow[\text{saída (Imagem)}]{} f(x)$$

Idéia de função

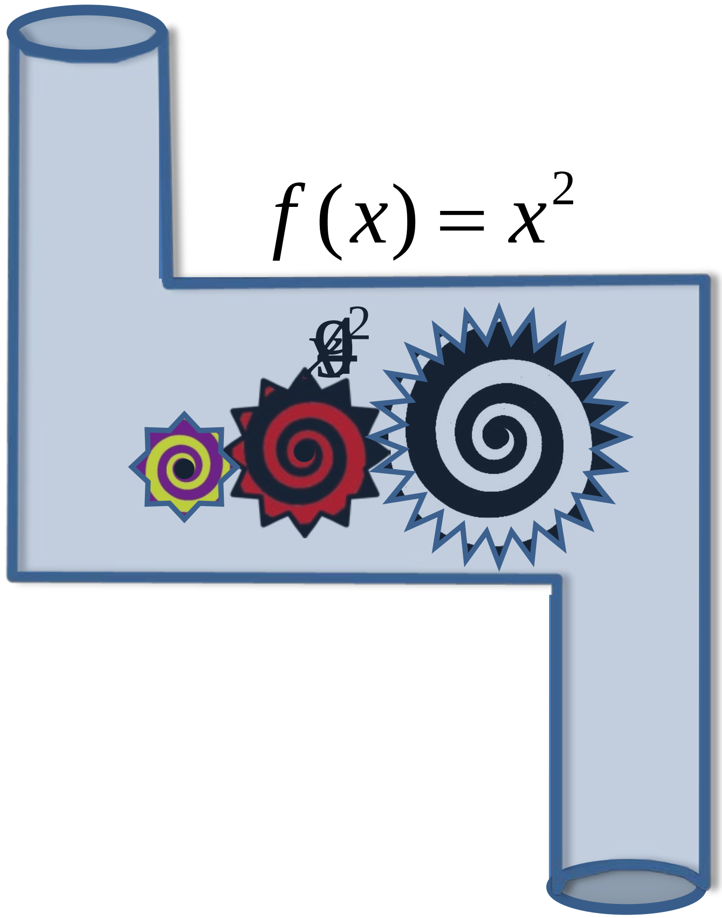
1

2

3

x

$$f(x) = x^2$$



Idéia de função

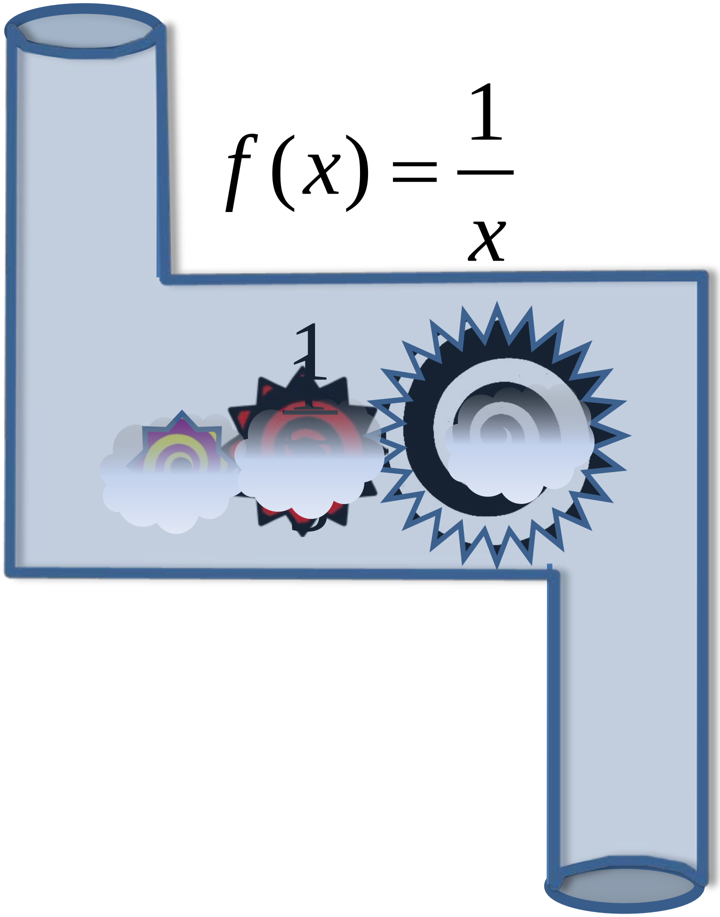
1

2

3

$\frac{1}{5}$

0



$$f(x) = \frac{1}{x}$$

Exemplos

1) $f(x) = 2x \Rightarrow D(f) = \mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}$

2) $f(x) = x^2 \Rightarrow D(f) = \mathbb{R}$ e $\mathrm{Im}(f) = [0, +\infty)$

3) $f(x) = \dfrac{1}{x} \Rightarrow D(f) = \mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}^*$

4) $f(x) = \sqrt{4 - x} \Rightarrow D(f) = \left\{x \in \mathbb{R}; x \leq 4\right\}$

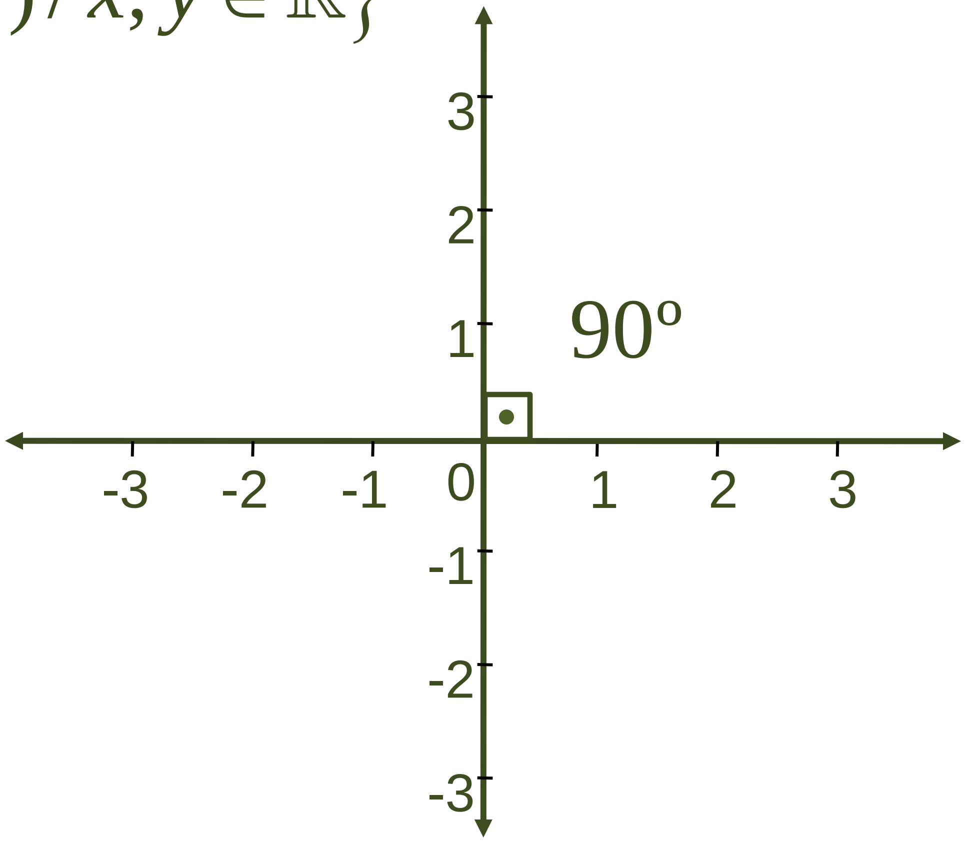
e $\mathrm{Im}(f) = [0, +\infty)$

5) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 1} \Rightarrow D(f) = \mathbb{R} - \left\{1, -1\right\}, \mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}^*$

Plano Cartesiano

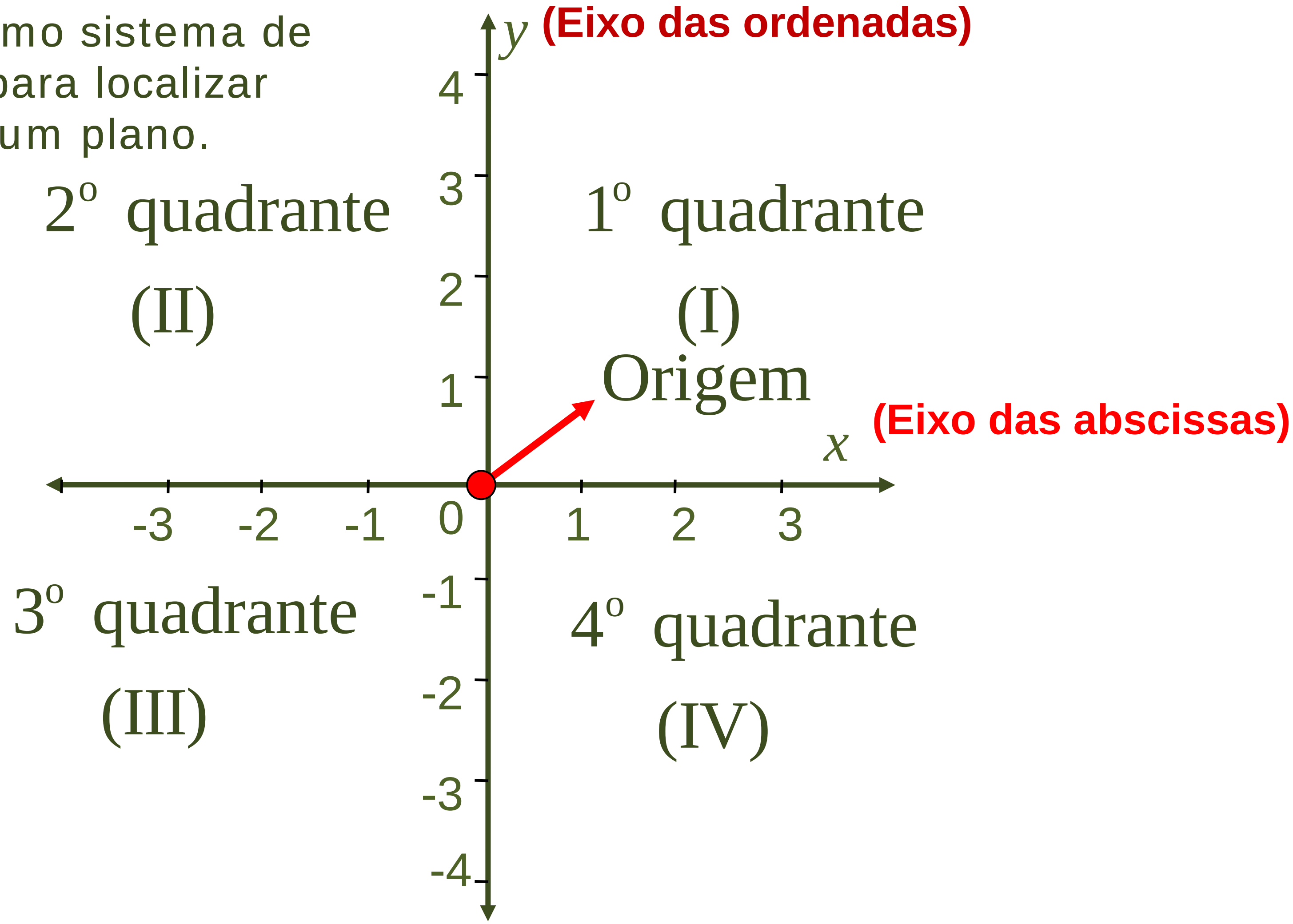
O **plano cartesiano** é o conjunto de todos os pares ordenados (x, y) de números reais tal que: $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) / x, y \in \mathbb{R}\}$

O plano cartesiano é representado por duas retas numéricas reais que se interceptam a um ângulo de 90^0.



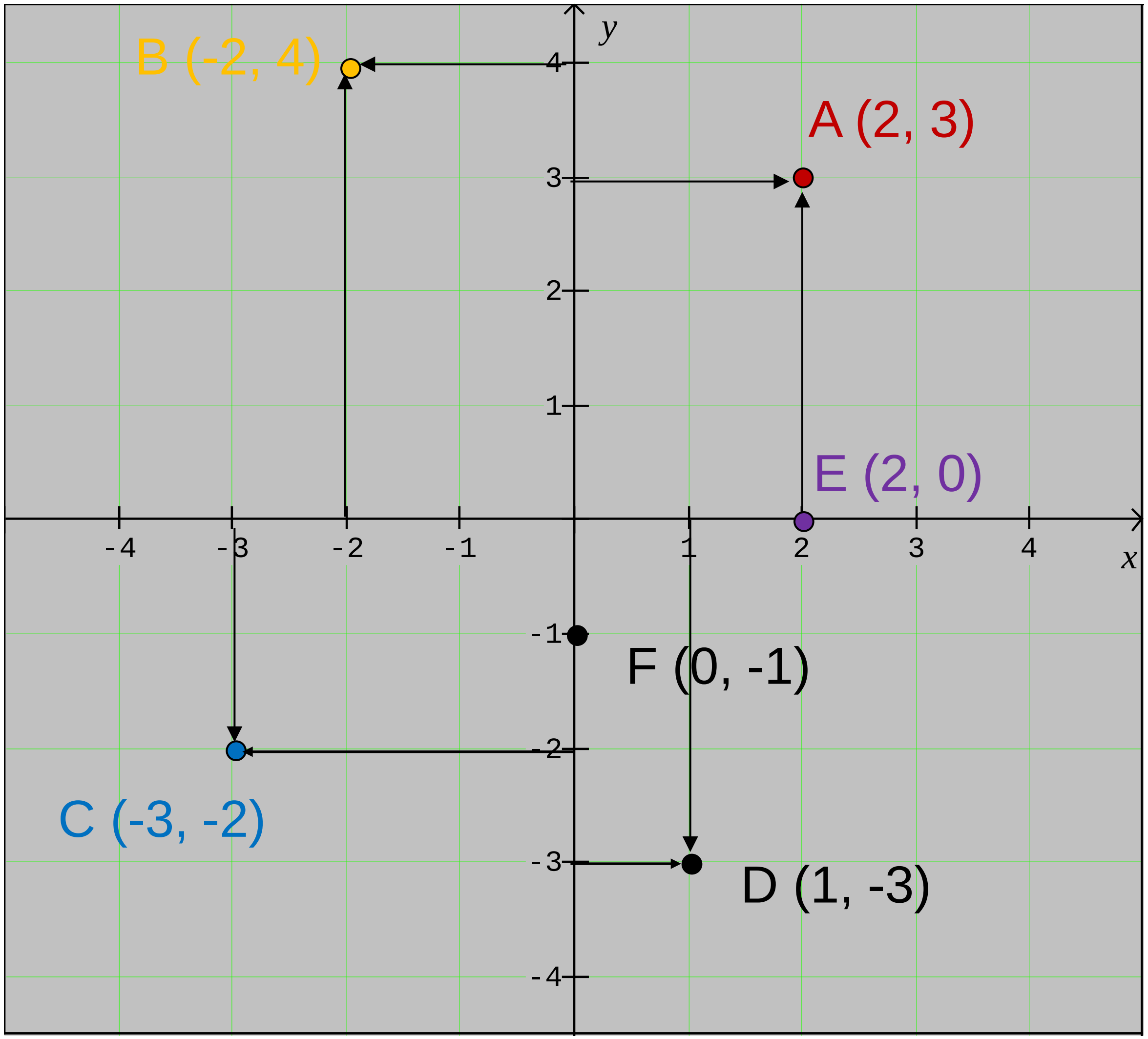
Plano Cartesiano

O **plano cartesiano** é utilizado como sistema de referência para localizar pontos em um plano.



Plano Cartesiano

A forma geral de um par ordenado é: (*abscissa*,*ordenada*) .



A (2, 3)

B (-2, 4)

C (-3, -2)

D (1, -3)

E (2, 0)

F (0, -1)

Gráfico de uma função

O **gráfico** de uma função $y = f(x)$ é o seguinte subconjunto do plano $x0y$

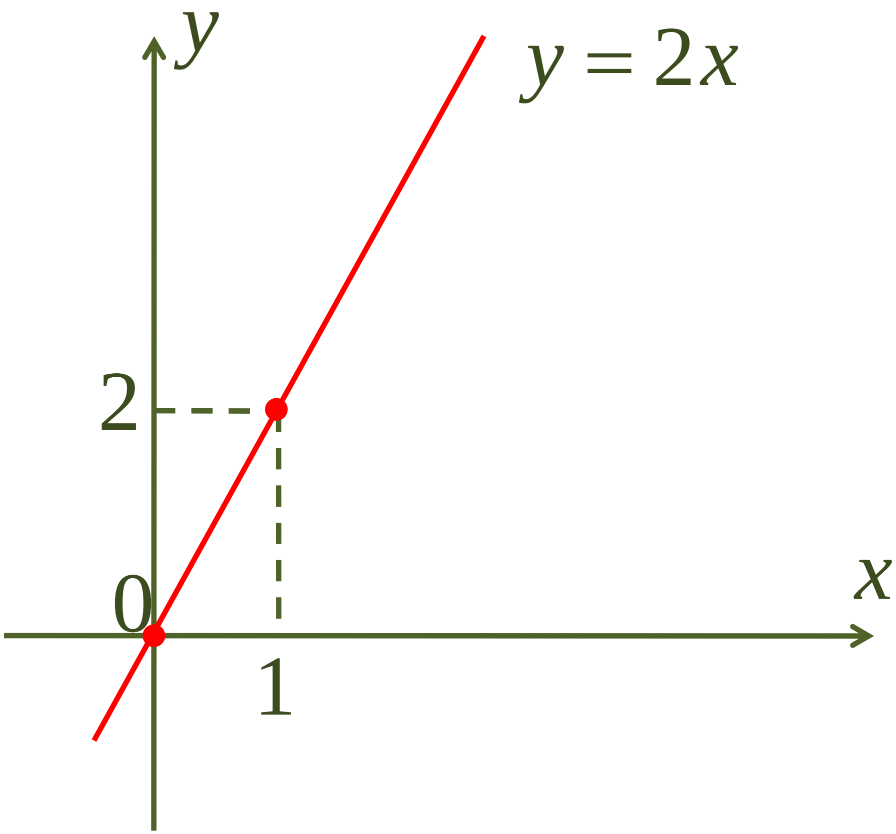
$$G(f) = \left\{ \left(x, f(x) \right); x \in D(f) \right\}$$

variável independente

variável dependente

Gráficos de funções

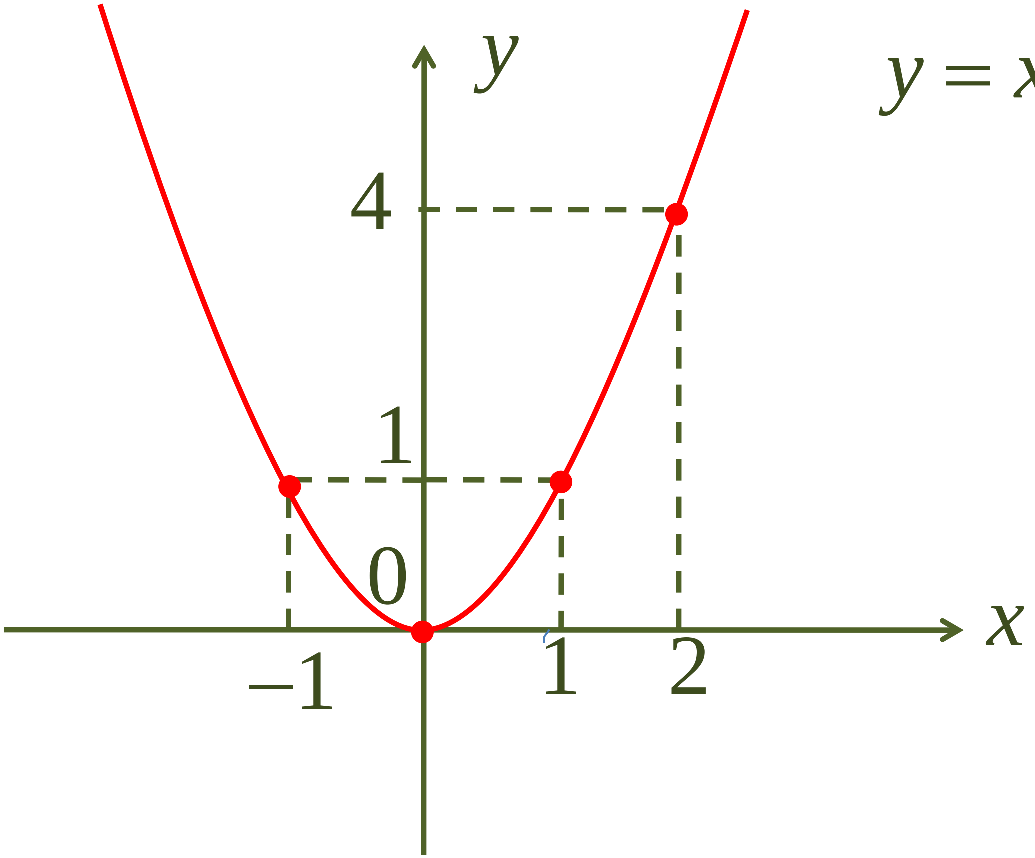
1)



x	$f(x)$
0	0
1	2

Os exemplos

2)



$$y = x^2$$

x	$f(x)$
-1	1
0	0
1	1
2	4

Função do 1º grau ou Afim

Esta função é definida por:

$$f(x) = a.x + b$$

onde $a, b \in \mathbb{R}$. Notemos que:

1) $D(f) = \mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}$
2) a é chamado coeficiente angular
3) b é o coeficiente linear

Gráfico da função afim

4) Uma função afim $f(x) = a.x + b$ pode ser determinada se dois de seus valores são conhecidos.

Exemplo: Dados $f(1) = 12$ e $f(2) = 14$ temos

$$\begin{cases} a + b = f(1) = 12 \\ 2.a + b = f(2) = 14 \end{cases} \Rightarrow a = 2 \text{ e } b = 10$$

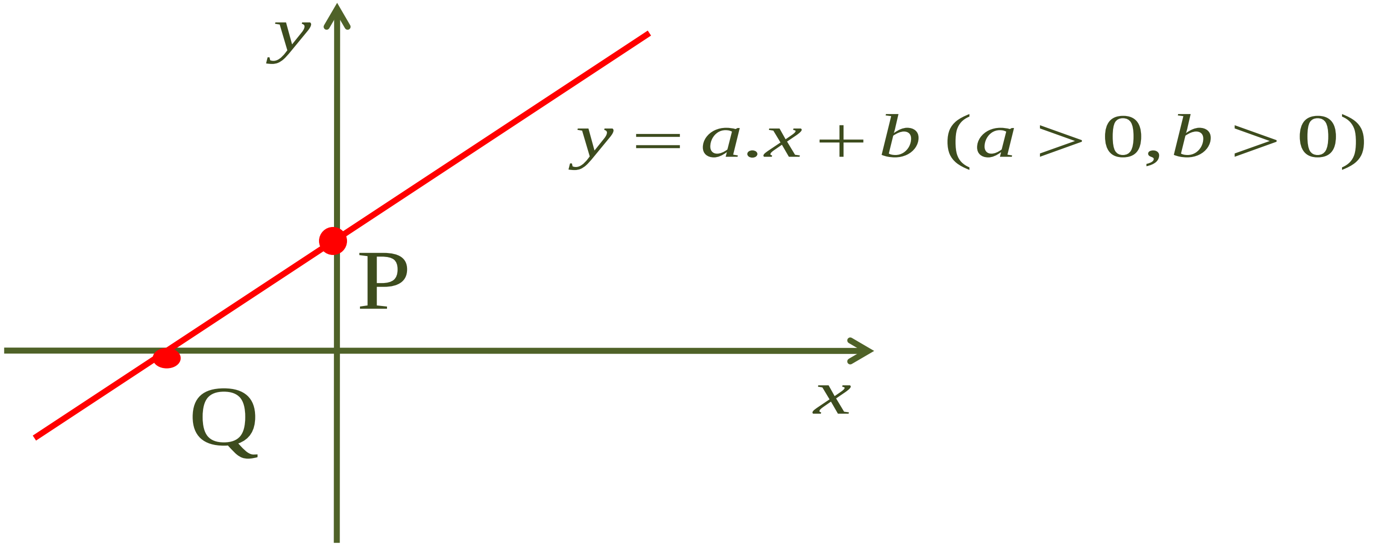
Logo $f(x) = 2.x + 10$.

Gráfico de uma função afim

5) O gráfico é uma reta que passa pelos pontos

$$P=(0,b) \text{ e } Q=\left(-\frac{b}{a},0\right)$$

ou seja, $f(0)=b, f(\frac{-b}{a})=0$. Logo, por exemplo, se $a>0$ e $b>0$ temos



Função do 1° grau ou Afim

6) Além disso como $f(1) = a.1 + b = a + b$ vale

$$\frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = a + b - b = a$$

De um modo geral para $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ com $x_1 \neq x_2$

$$\underbrace{\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}}_{\text{taxa de variação}} = \frac{a.x_1 + b - (a.x_2 + b)}{x_1 - x_2} = \frac{a.(x_1 - x_2)}{x_1 - x_2} = a$$

Casos especiais

Seja $f(x) = a.x + b$

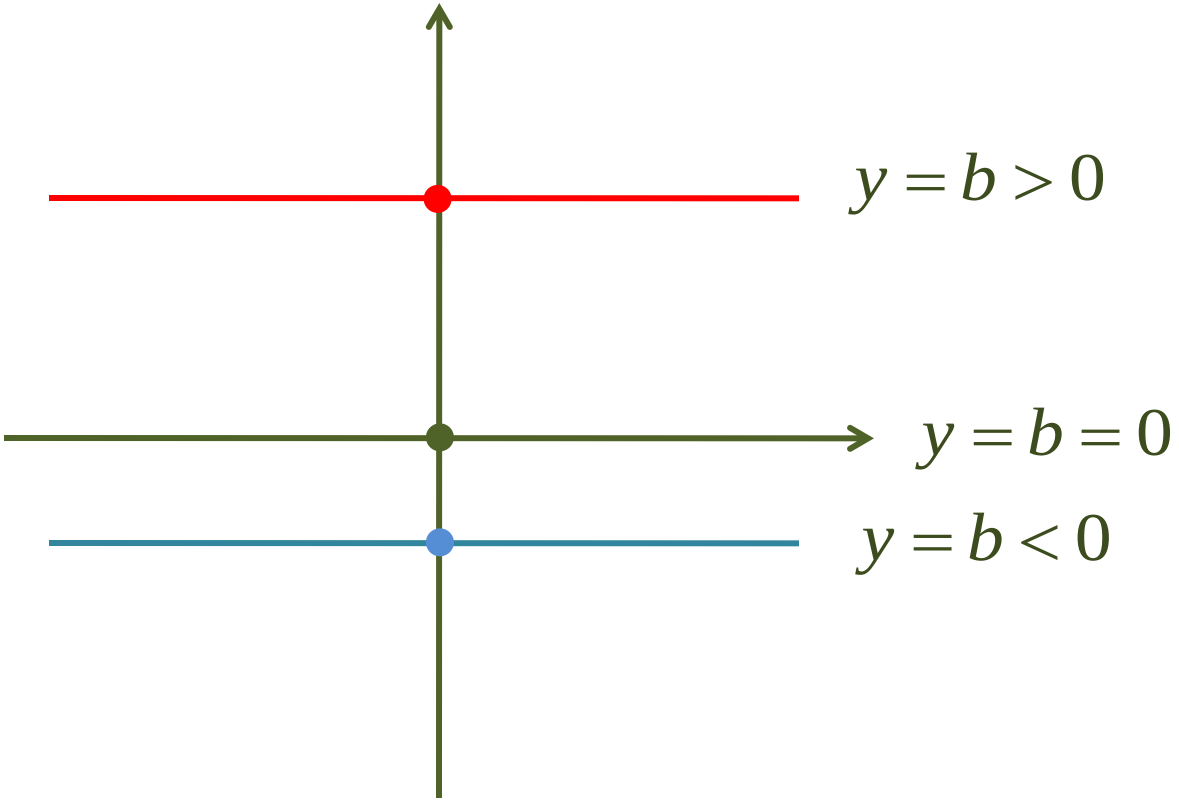
1. Se $a = 0$ então $f(x) = b$ (constante)

2. Se $a \neq 0$ e $b = 0$ então $f(x) = a.x$ (linear)

   Para $a = 1$ temos a função identidade.

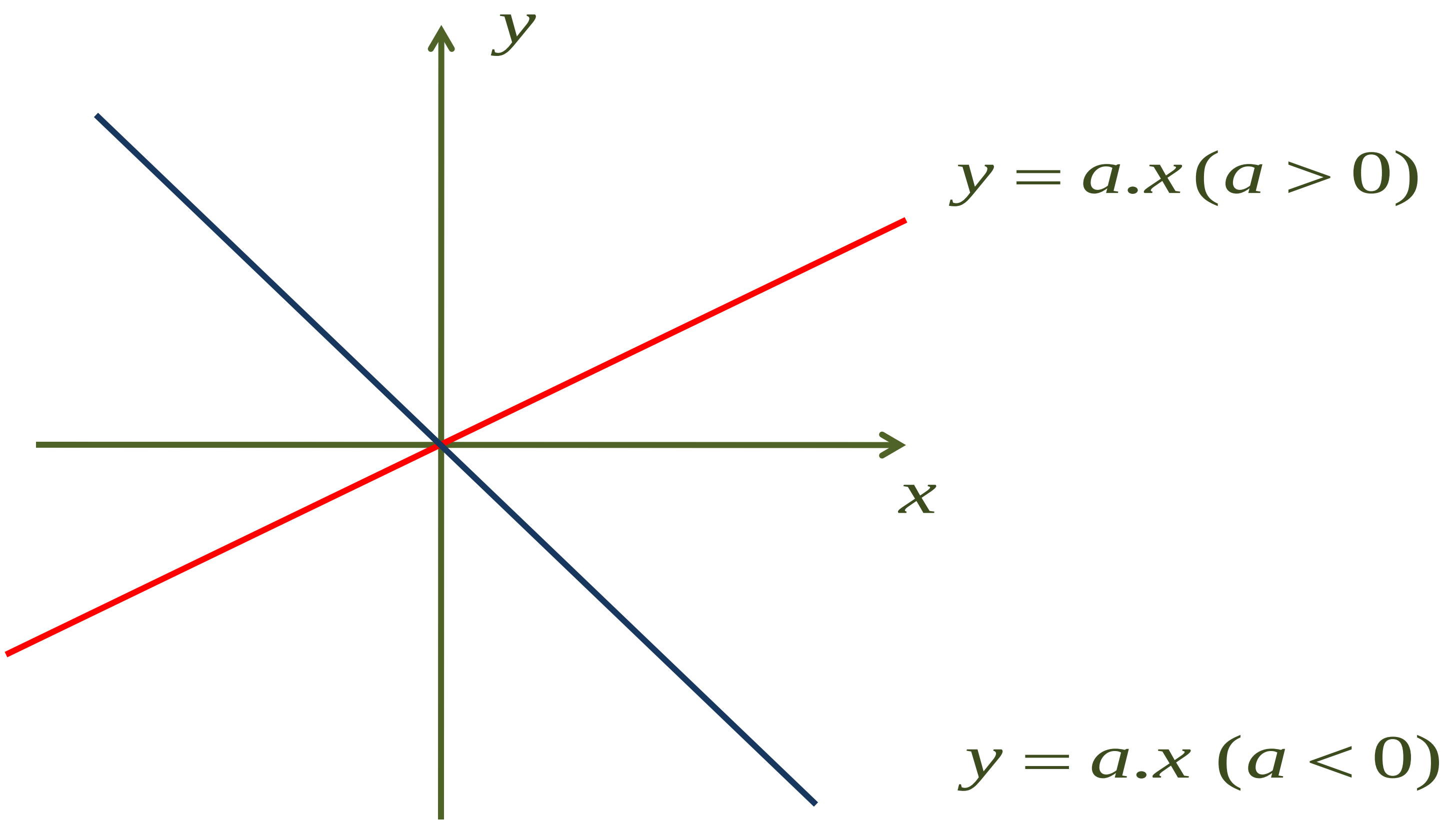
Gráficos dos casos especiais

1. Função afim Constante: $y = f(x) = b$



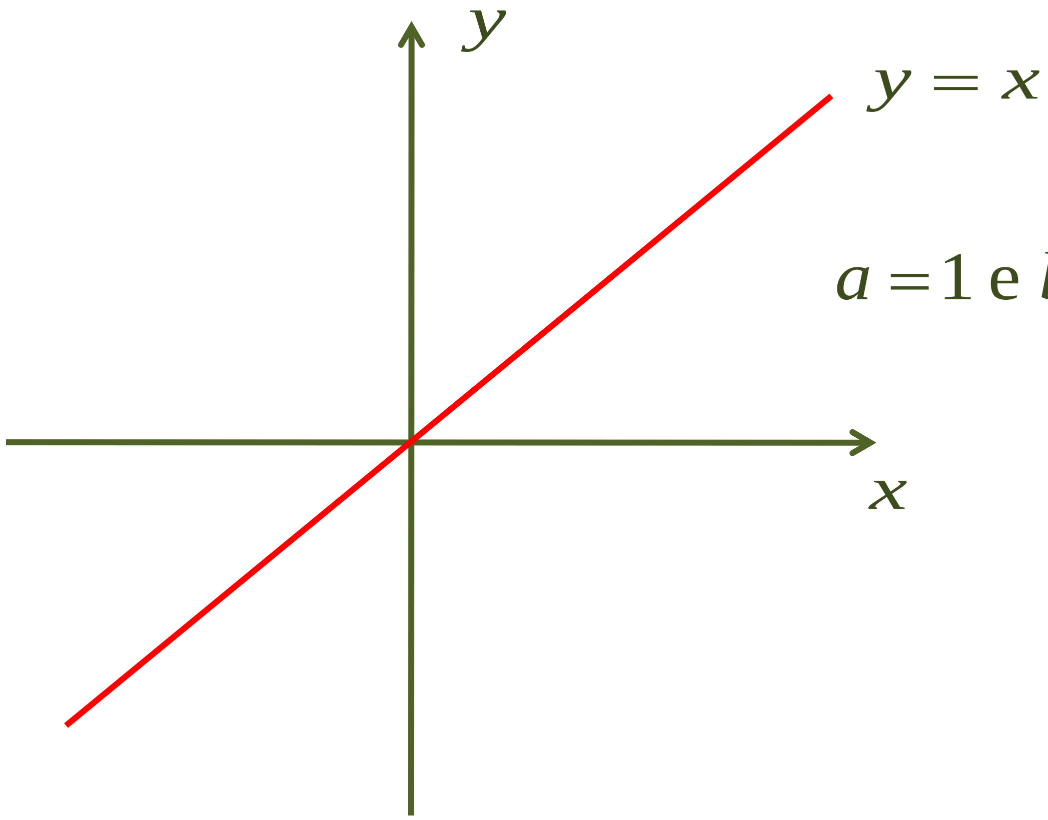
Gráficos dos casos especiais

2. Função linear: $y = f(x) = a.x$



Gráficos dos casos especiais

Função Identidade: $y = f(x) = x$



$a = 1 \text{ e } b = 0$

Função Quadrática

Sejam $a,b,c \in \mathbb{R}$, com $a \neq 0$. A função $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = ax^2 + bx + c$, para todo $x \in \mathbb{R}$, é chamada função quadrática ou função polinomial do segundo grau.

Atividade 1

Em cada uma das funções quadráticas definidas abaixo, determine seus coeficientes.

a) $f\left(x\right)=2x^2-4x+\sqrt{5}$

b) $f\left(x\right)=-2x^2-5x+4$

c) $f\left(x\right)=\pi-4x+3x^2$

d) $f\left(x\right)=-4x+2x^2$

e) $f\left(x\right)=-2x^2-5$

f) $f\left(x\right)=\dfrac{3}{4}x^2$

Gráfico de uma função quadrática

Sendo $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ uma função quadrática

definida por $f\left(x\right)=x^{2}$, esboce o seu gráfico.

Gráfico de uma função quadrática

Para resolver este problema, vamos, inicialmente, construir uma tabela, escolhendo alguns valores para x e encontrando os correspondentes para y. Desta forma, determinaremos pares ordenados (x, y).

Gráfico de uma função quadrática

x	$y = x^2$	(x, y)
-4	16	$(-4, 16)$
-3	9	$(-3, 9)$
-2	4	$(-2, 4)$
-1	1	$(-1, 1)$
0	0	$(0, 0)$
1	1	$(1, 1)$
2	4	$(2, 4)$
3	9	$(3, 9)$
4	16	$(4, 16)$

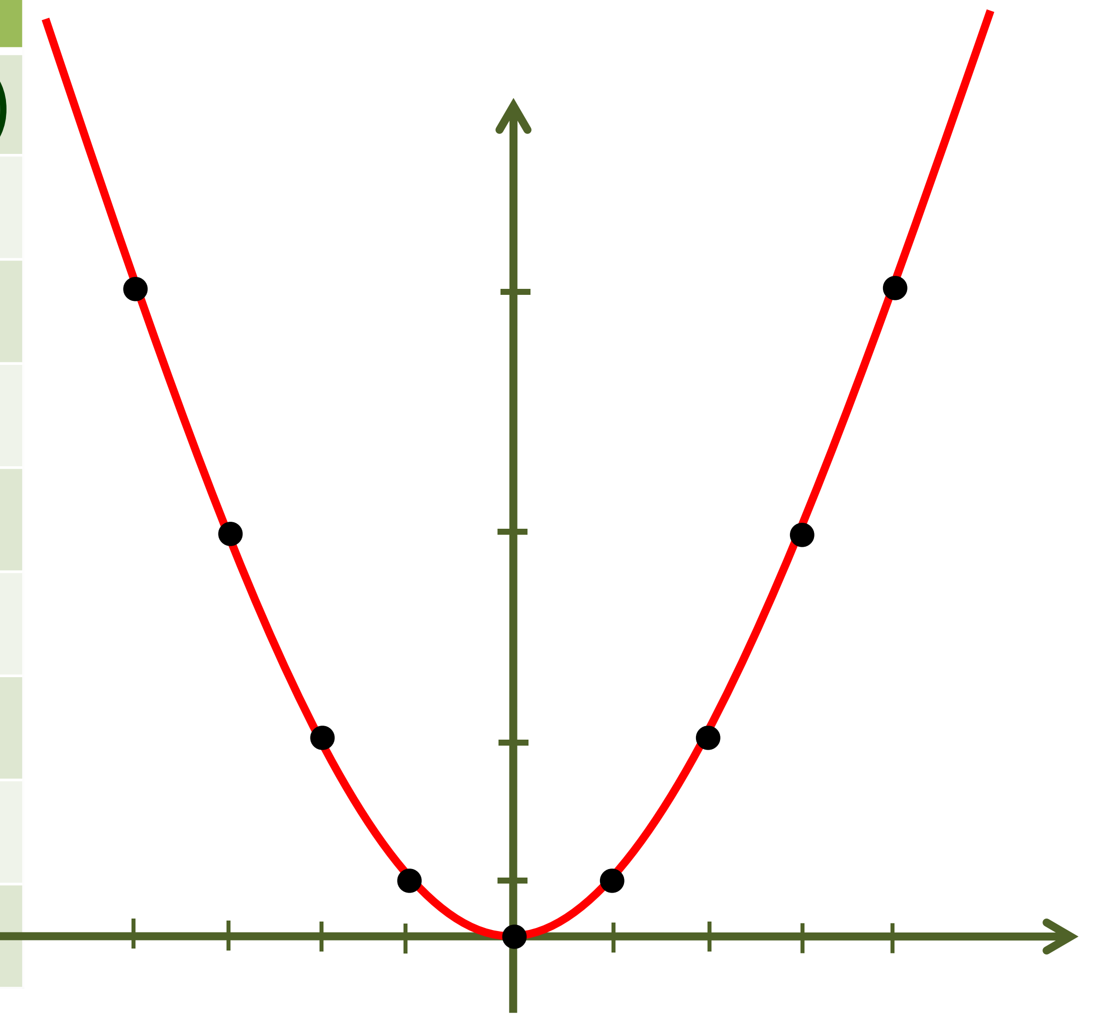


Gráfico de uma função quadrática

Sendo $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ uma função quadrática definida por $f\left(x\right)=x^2+1$, esboce o seu gráfico.

Gráfico de uma função quadrática

x	$y = x^2 + 1$	(x, y)
-4	17	$(-4, 17)$
-3	10	$(-3, 10)$
-2	5	$(-2, 5)$
-1	2	$(-1, 2)$
0	1	$(0, 1)$
1	2	$(1, 2)$
2	5	$(2, 5)$
3	10	$(3, 10)$
4	17	$(4, 17)$

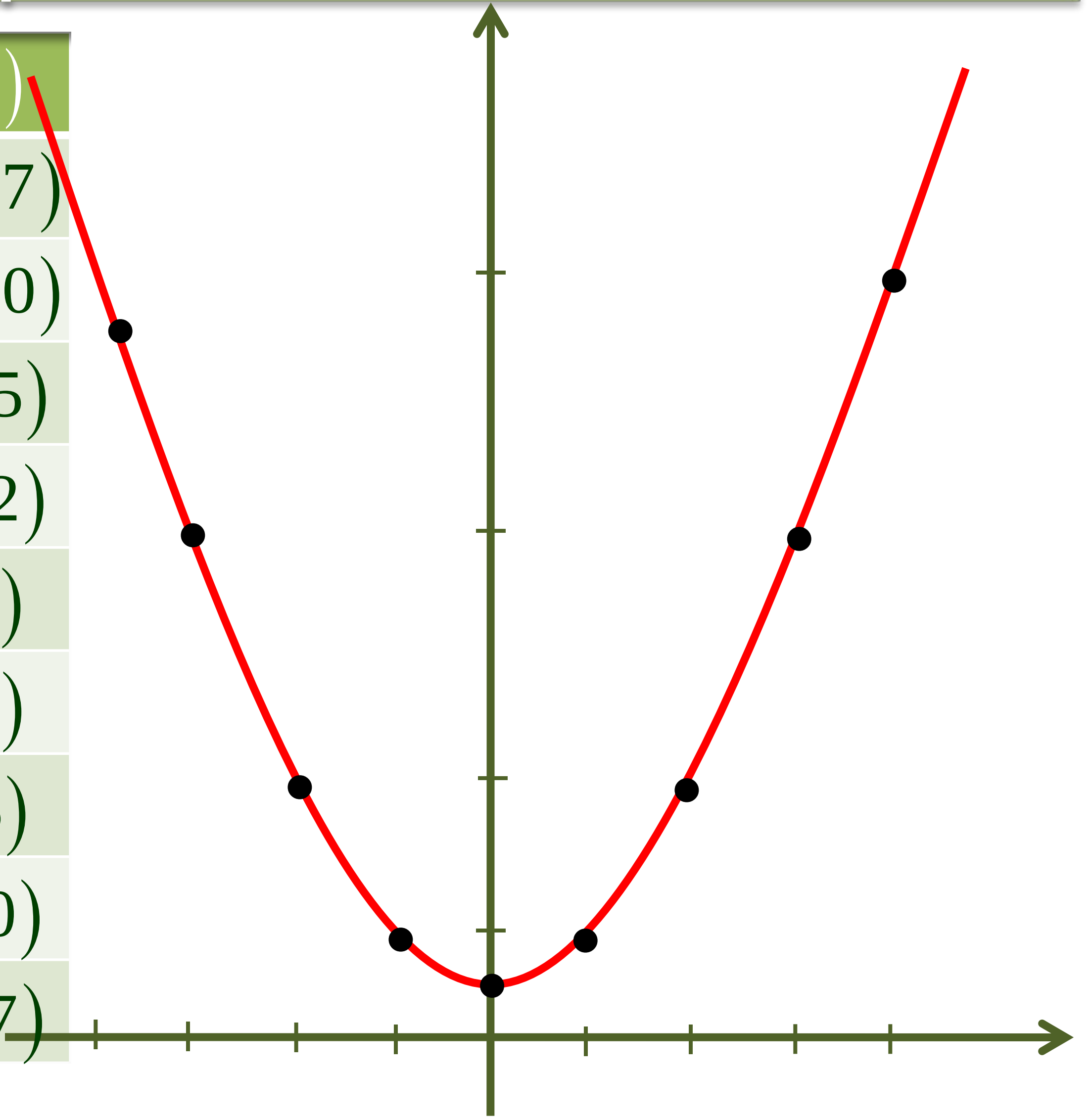


Gráfico de uma função quadrática

Sendo $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ uma função quadrática

definida por $f(x)=x^2-1$, esboce o seu

gráfico.

Gráfico de uma função quadrática

x	$y = x^2 - 1$	(x, y)
-4	15	$(-4, 15)$
-3	8	$(-3, 8)$
-2	3	$(-2, 3)$
-1	0	$(-1, 0)$
0	-1	$(0, -1)$
1	0	$(1, 0)$
2	3	$(2, 3)$
3	8	$(3, 8)$
4	15	$(4, 15)$

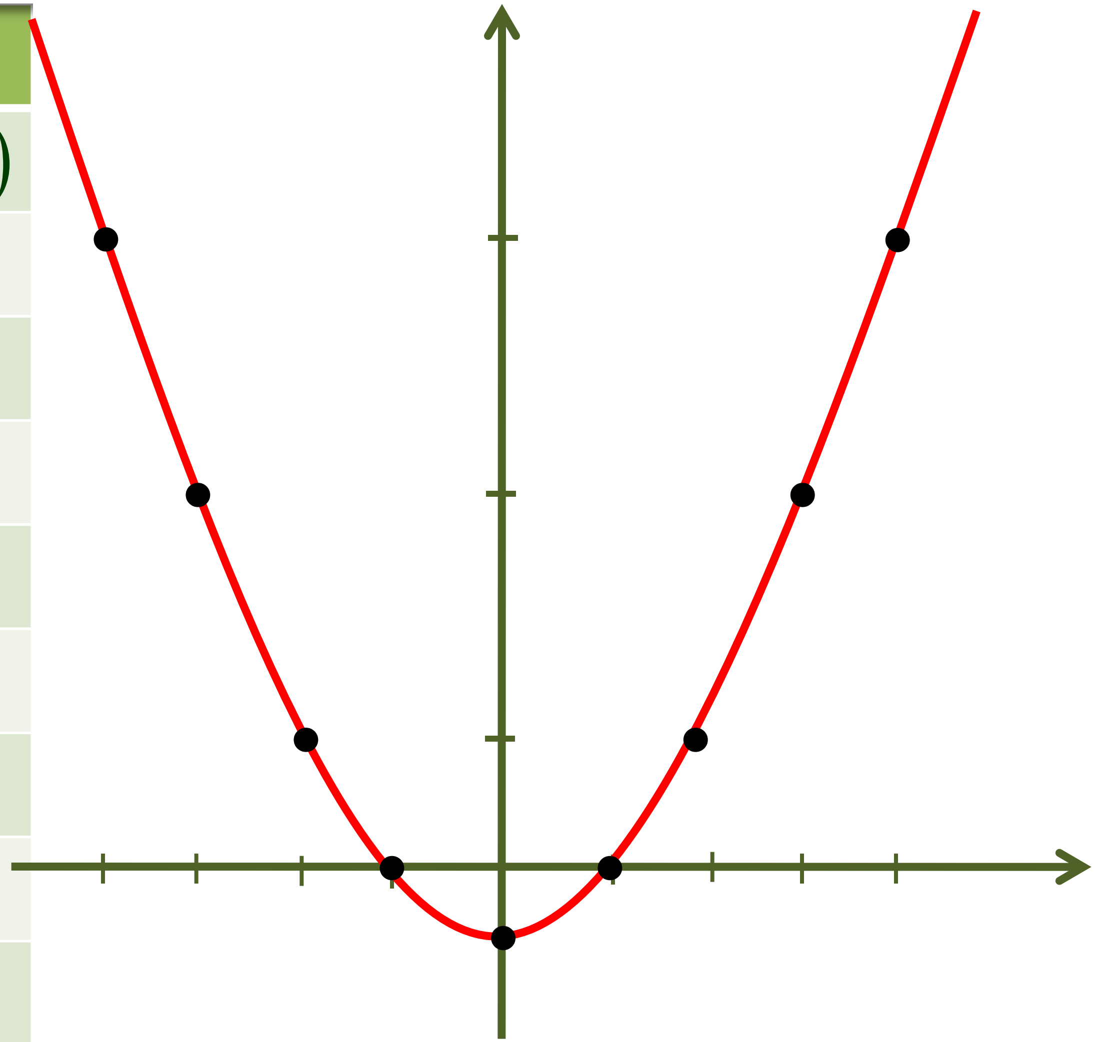


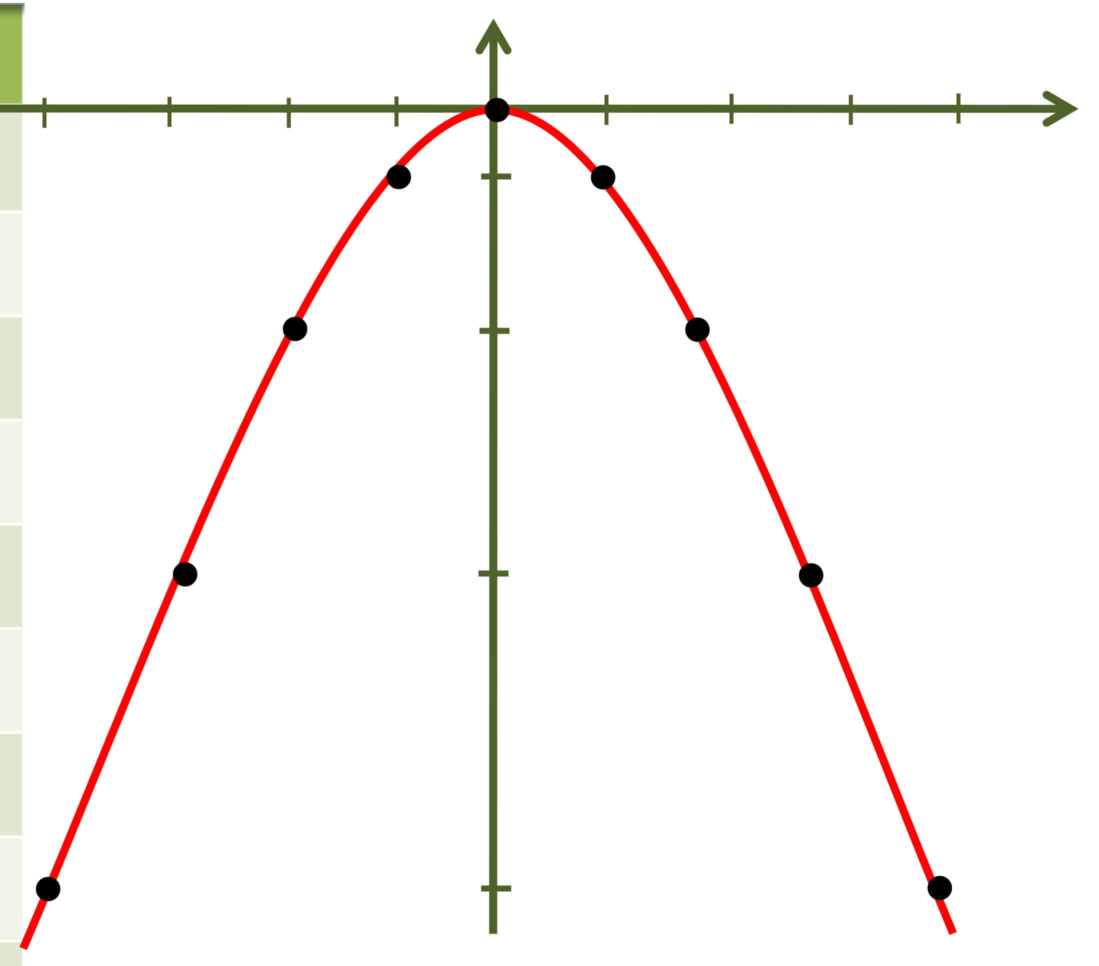
Gráfico de uma função quadrática

Sendo $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ uma função quadrática

definida por $f\left(x\right)=-x^2$, esboce o seu gráfico.

Gráfico de uma função quadrática

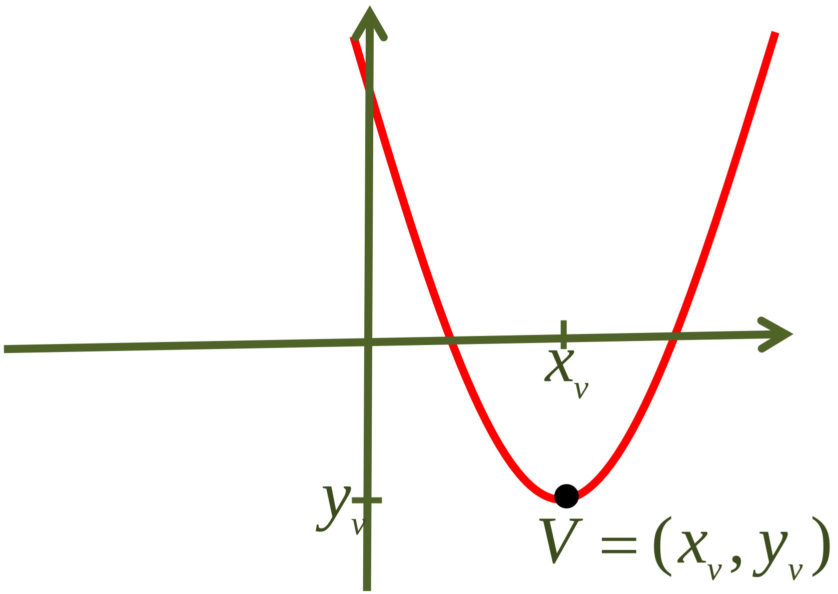
x	$y=-x^2$	(x,y)
-4	-16	$(-4,-16)$
-3	-9	$(-3,-9)$
-2	-4	$(-2,-4)$
-1	-1	$(-1,-1)$
0	0	$(0,0)$
1	-1	$(1,-1)$
2	-4	$(2,-4)$
3	-9	$(3,-9)$
4	-16	$(4,-16)$



Ponto Importante do Gráfico

- O vértice $V = (x_v, y_v)$

$$x_v = \frac{-b}{2a} \qquad y_v = \frac{-\Delta}{4a}$$



Funções Crescentes e Decrescentes

Uma função $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ é dita crescente, se

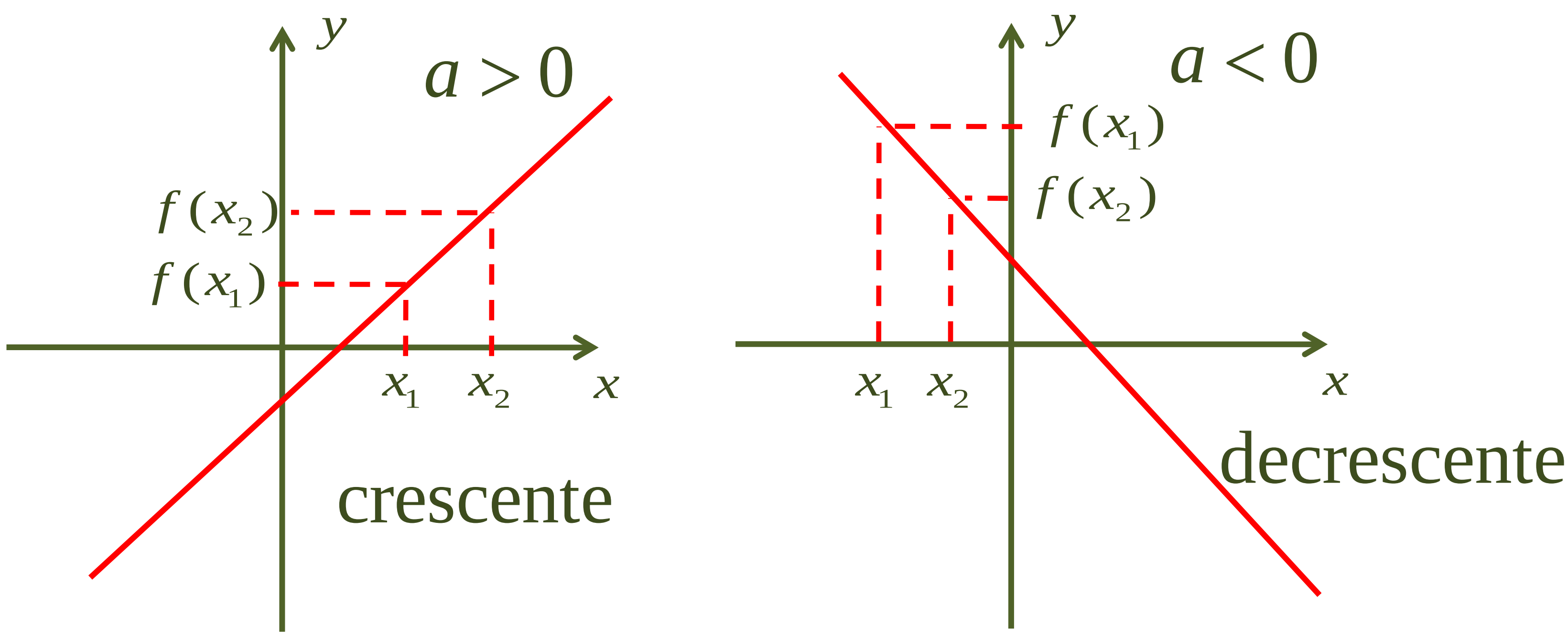
$$x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

Uma função $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ é dita decrescente, se

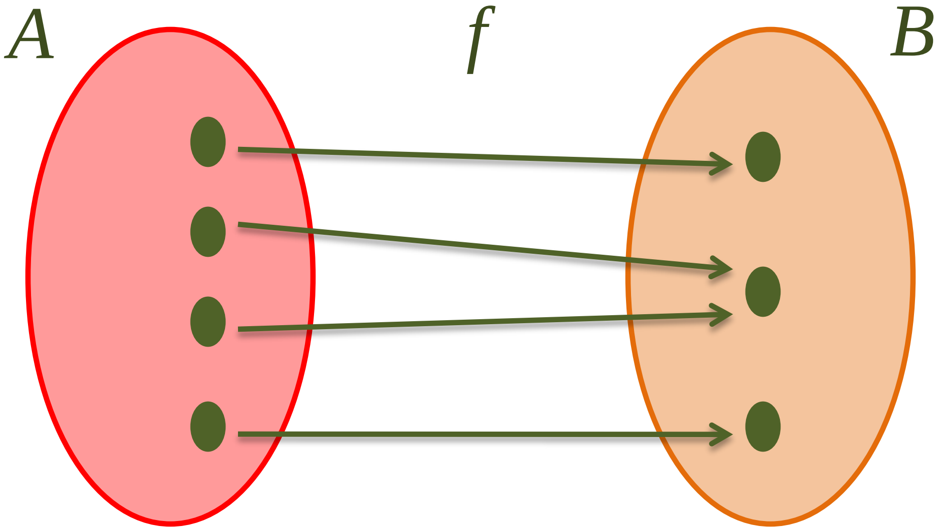
$$x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

Exemplo

Função afim: $f(x) = ax + b$



Função Sobrejetora

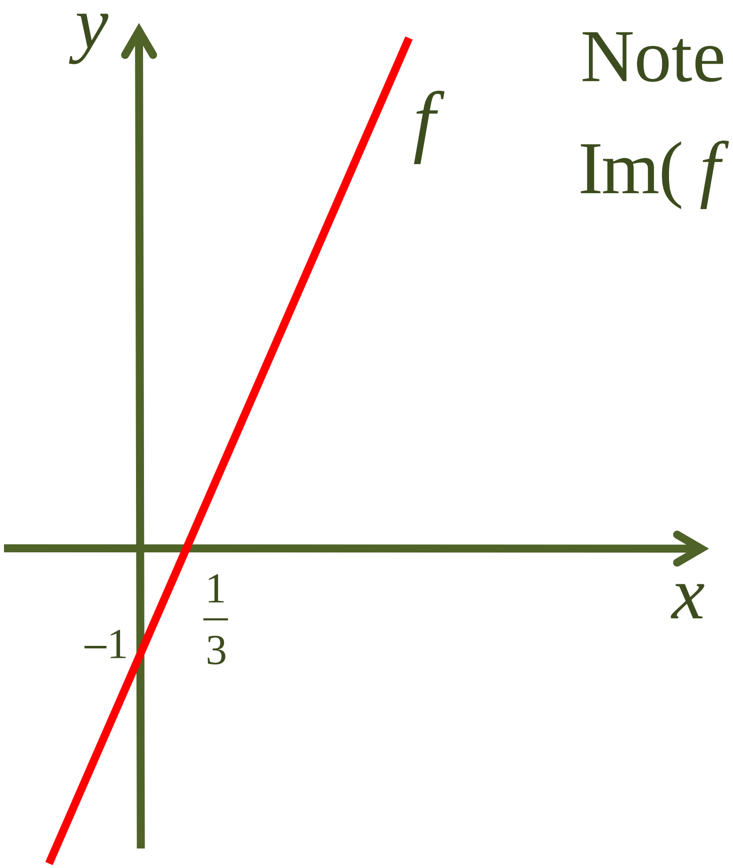


$$f : A \to B$$

$$f \text{ é sobrejetora } \Leftrightarrow \forall y \in B, \exists x \in A \text{ tal que } f(x) = y$$

Exemplo

1) $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R};\, f(x)=3x-1$



Note que o gráfico nos fornece

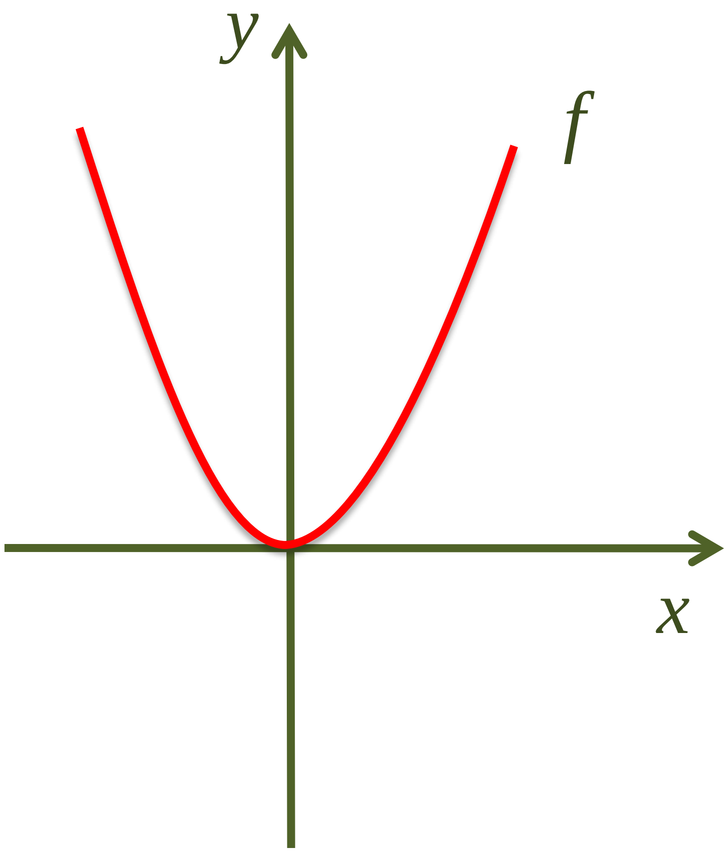
$\text{Im}(f)=\mathbb{R}$ e $\text{CD}(f)=\mathbb{R}$

Logo, $\text{Im}(f)=\text{CD}(f)$

$\therefore f$ é sobrejetora

Exemplo

2) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R};\, f(x) = x^2$



Note que o gráfico nos fornece

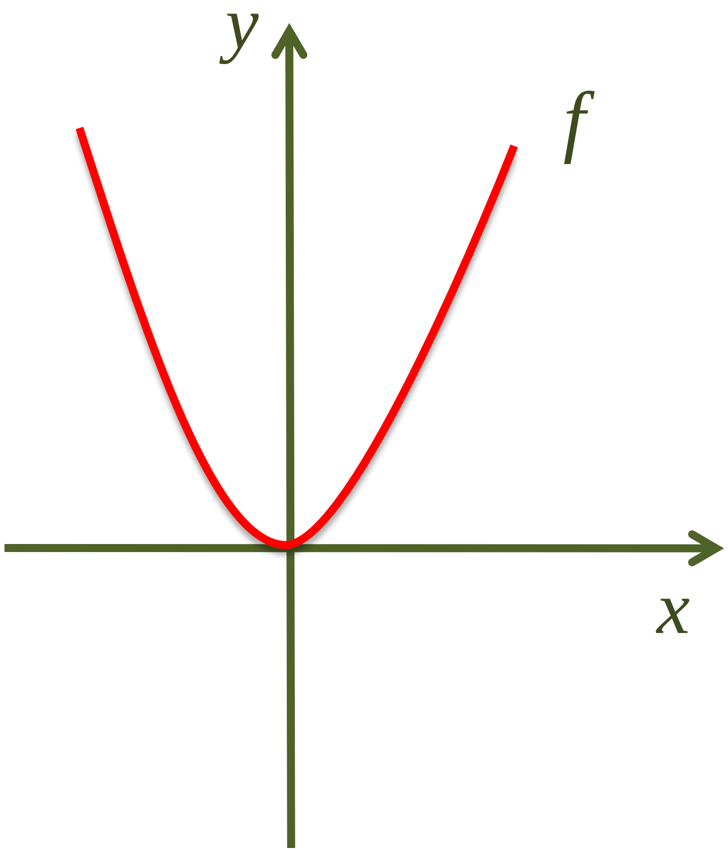
$\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}_+$ e $\mathrm{CD}(f) = \mathbb{R}$

Logo, $\mathrm{Im}(f) \neq \mathrm{CD}(f)$

$\therefore f$ não é sobrejetora

Exemplo

$3)\ f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}_+;\ f(x)=x^2$



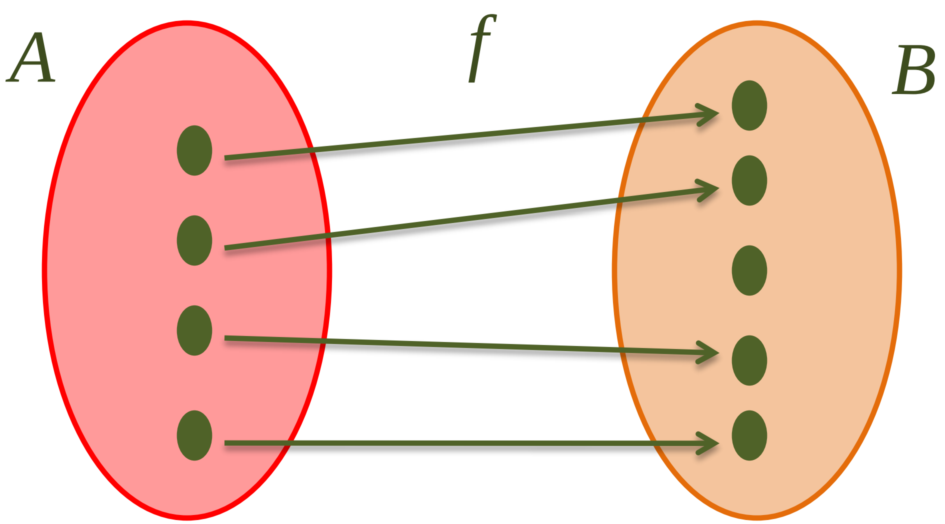
Note que o gráfico nos fornece

$\mathrm{Im}(f)=\mathbb{R}_+$ e $\mathrm{CD}(f)=\mathbb{R}_+$

Logo, $\mathrm{Im}(f)=\mathrm{CD}(f)$

$\therefore f$ é sobrejetora

Função Injetora



$$f : A \to B$$

f é injetora $\Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in A$, se $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

Ou equivalentemente, se $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$.

Esta definição é mais prática para os cálculos.

Exemplo

$$1)\ f:\mathbb{R}\to\mathbb{R};\ f(x)=x^3$$

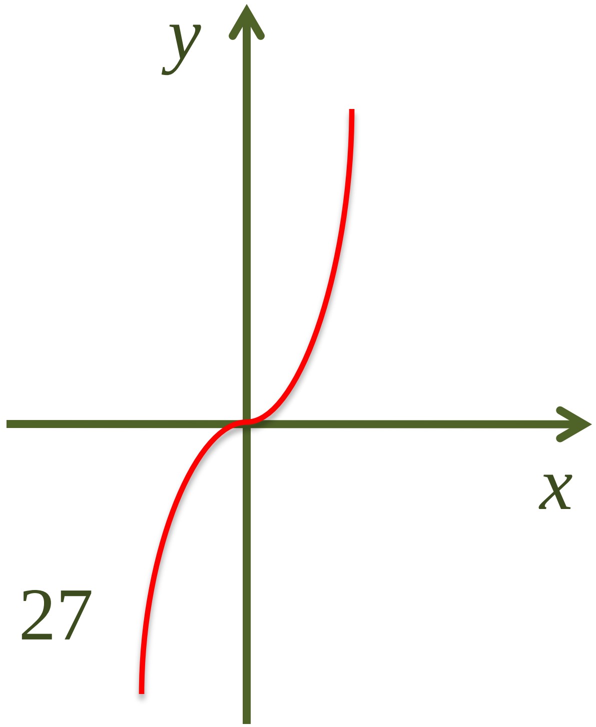
Sendo $x_1 = -2$ e $x_2 = 3$, temos

$$f(x_1) = f(-2) = (-2)^3 = -8 \ \text{ e}$$

$$f(x_2) = f(3) = 3^3 = 27$$

Logo

$$-2 = x_1 \neq x_2 = 3 \Rightarrow -8 = f(x_1) \neq f(x_2) = 27$$



Usando a segunda definição temos: se

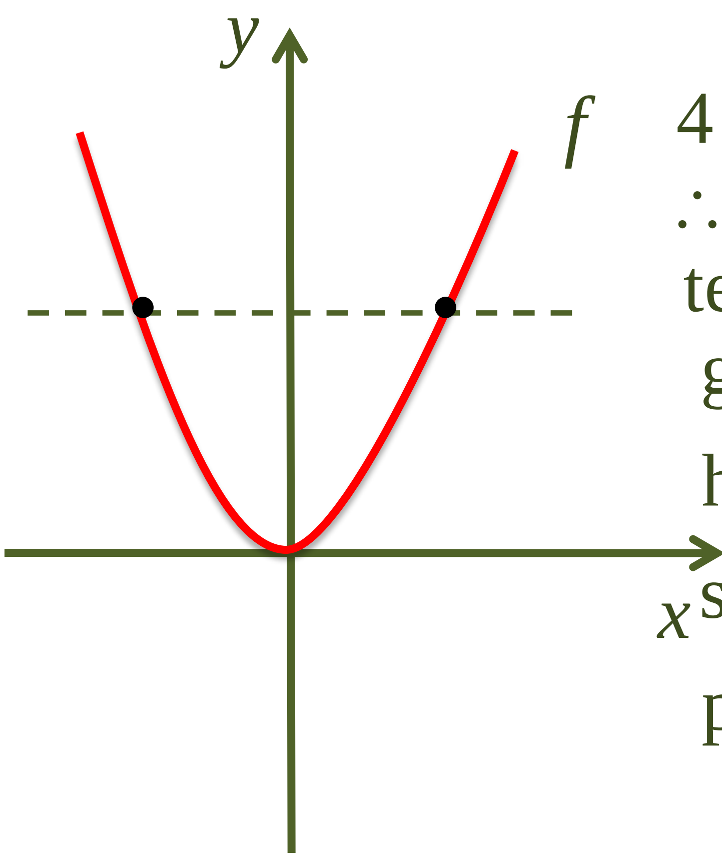
$$f(x_2) = f(x_1) \Rightarrow x_1^{\ 3} = x_2^3 \Rightarrow x_1^{\ 3} - x_2^3 = 0$$

$$(x_1 - x_2)(x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2) = 0 \Rightarrow x_1 - x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2$$

$\therefore f$ não é injetora

Exemplo

2) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R};\, f(x)=x^2$



Sendo $-2=x_1 \neq x_2=2$, temos

$$4=(-2)^2=f(x_1)=f(x_2)=2^2=4$$

$\therefore f$ não é injetora. Pode-se mostrar testar a injetividade de uma função graficamente . Basta traçar retas

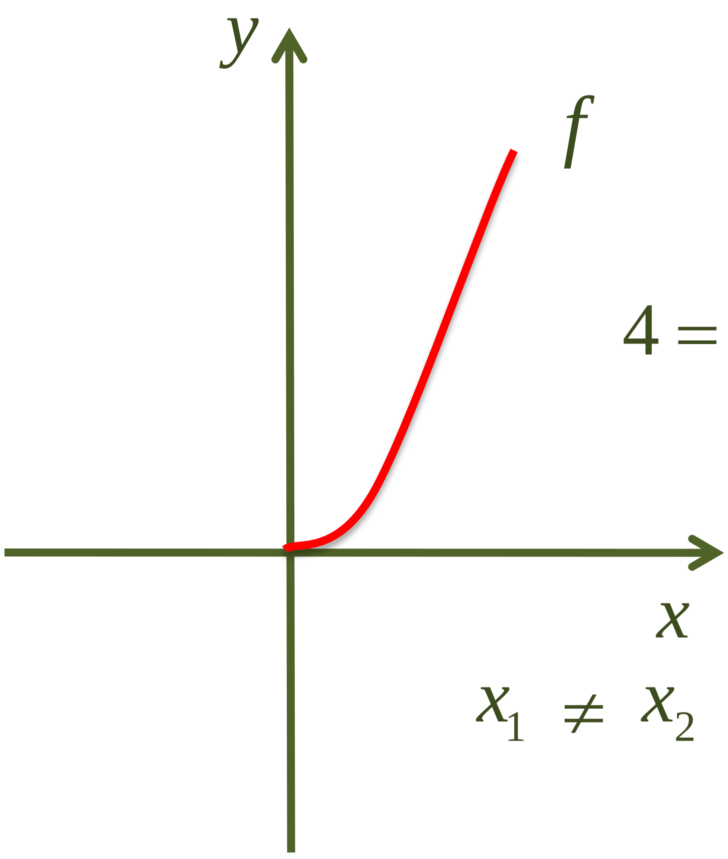
horizontais no plano cartesiano

se uma reta tocar o gráfico em dois

pontos, então f não é injetiva

Exemplo

$3)\ f:\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+;\ f(x)=x^2$



Sendo $2 = x_1 \neq x_2 = 3,$ temos

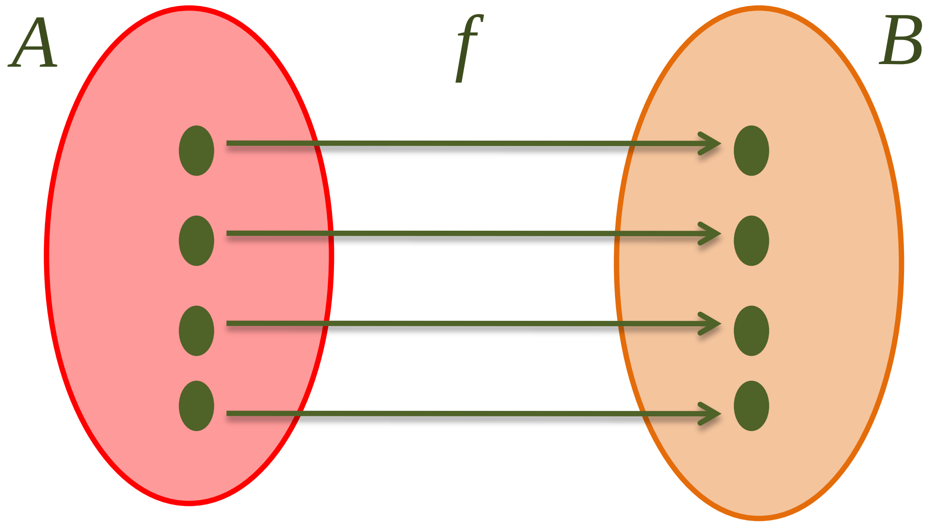
$$4 = 2^2 = f(x_1) \neq f(x_2) = 3^2 = 9$$

Assim $\forall x_1 \in \mathbb{R}$ e $\forall x_2 \in \mathbb{R}$ temos

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow x_1^2 = f(x_1) \neq f(x_2) = x_2^2$$

$\therefore f$ é injetora

Função Bijetora



$f : A \to B$ é bijetora $\Leftrightarrow$ f é sobrejetora e injetora

Ou ainda:

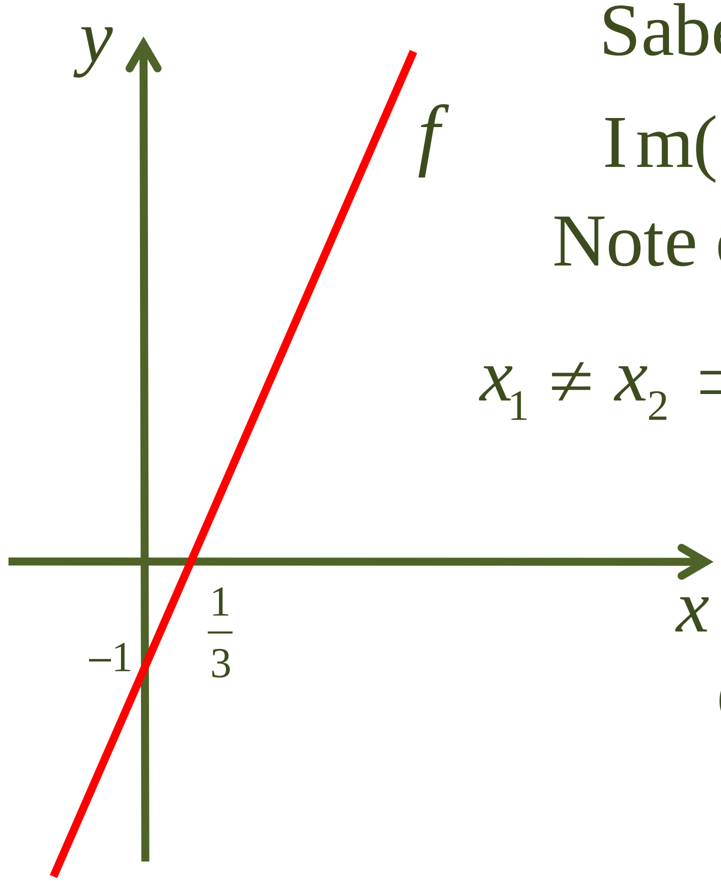
f é bijetora:

$$\operatorname{Im} f(x) = \text{ contradomínio } B$$

$$\forall x_1, x_2 \in A, \text{ se } x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

Exemplo

$1)\ f:\mathbb{R}\to\mathbb{R};\ f(x)=3x-1$



Sabemos que f é sobrejetora pois

$\mathrm{Im}(f)=\mathrm{CD}(f)=\mathbb{R}$

Note que $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ temos:

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow 3x_1 \neq 3x_2 \Rightarrow 3x_1 - 1 \neq 3x_2 - 1$$

$$\Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

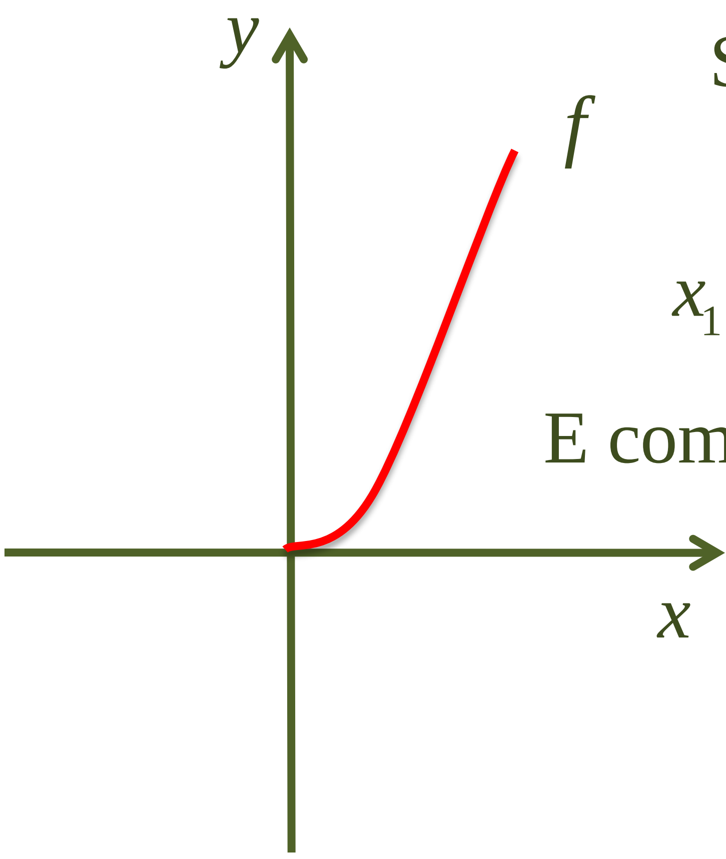
Logo f é injetora

Como f é sobrejetora e injetora

$\therefore f$ é Bijetora

Exemplo

2) $f:\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+; f(x) = x^2$



Sabemos que f é injetora

Pois $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ temos

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow x_1^2 = f(x_1) \neq f(x_2) = x_2^2$$

E como $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{CD}(f) = \mathbb{R}_+$ temos que

f é sobrejetora

Como f é sobrejetora e injetora

$\therefore f$ é Bijetora

Função Par

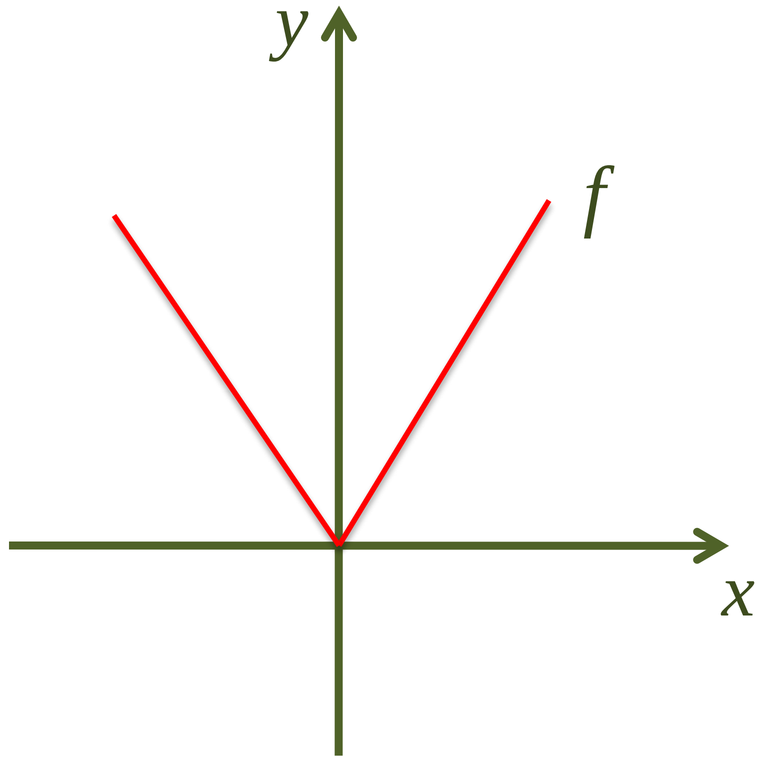
$$f: A \to B \text{ tal que } f(x) = f(-x)\ \forall x \in A$$

Exemplos

1) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R};\ f(x) = |x|$ é par pois

$$f(-x) = |-x| = |x| = f(x)\ \ \forall x \in \mathbb{R}$$

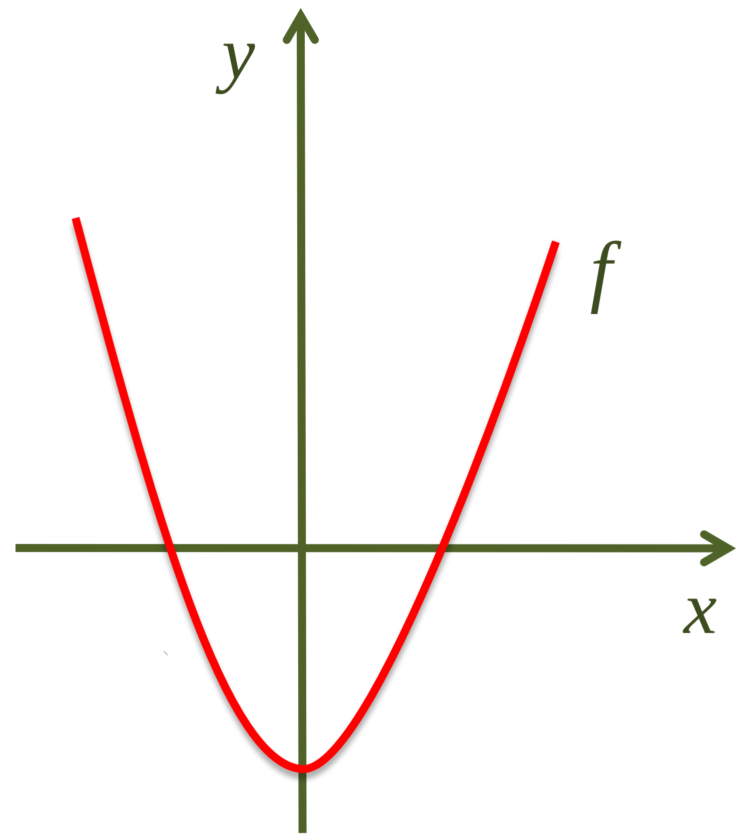
Obs.: O gráfico de f é simétrico em relação ao eixo y.



2) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R};\ f(x)=x^2-1$ é par pois,

$$f(-x) = (-x)^2 - 1 = x^2 - 1 = f(x)\ \forall x \in \mathbb{R}$$

Obs.: O gráfico de f é simétrico em relação ao eixo y.



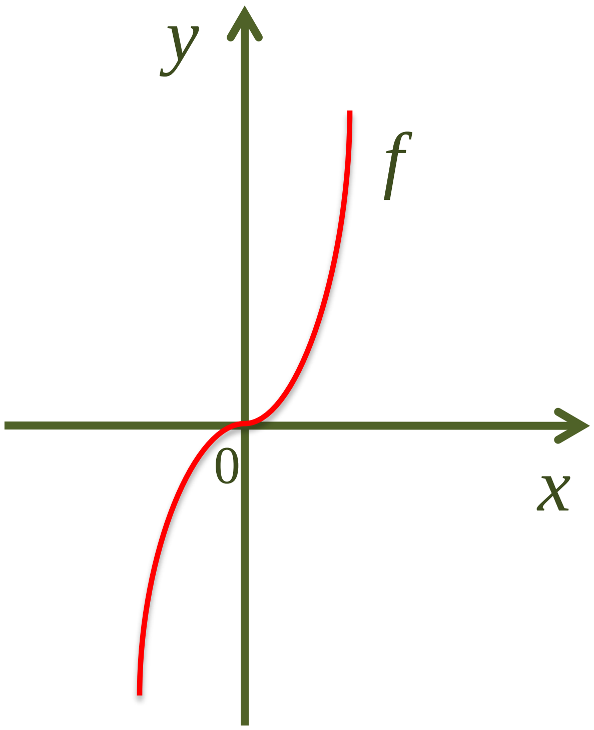
Função Ímpar

$$f : A \to B \text{ tal que } f(-x) = -f(x) \, \forall x \in A$$

Exemplos

1) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; f(x) = x^3$ é ímpar pois,

$$f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x) \, \forall x \in \mathbb{R}$$



Obs.: O gráfico de f é simétrico em relação à origem.

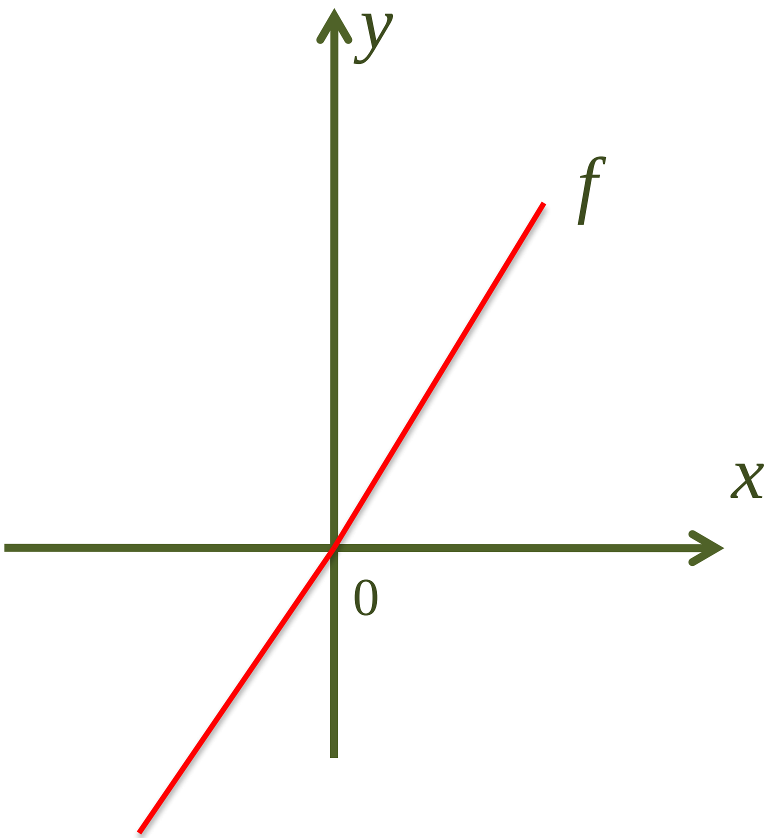
2) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R};\ f(x) = x$ é ímpar pois,

$$f(-x) = -x$$

$$-f(x) = -x$$

Logo,

$$f(-x) = -f(x)\ \forall x \in \mathbb{R}$$



Obs.: O gráfico de f é simétrico em relação à origem.

Função que não é nem par e nem Ímpar

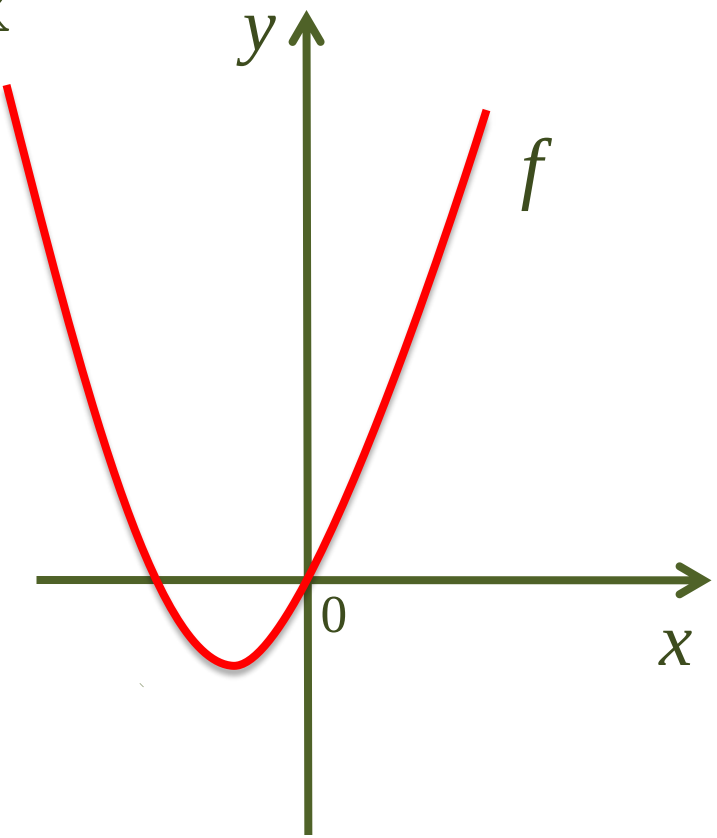
$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R};\ f(x) = x^2 + x$$

$$f(-x) = (-x)^2 + (-x) = x^2 - x\ \forall x \in \mathbb{R}$$

$$-f(x) = -(x^2 + x) = -x^2 - x\ \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\therefore f(x) \neq f(-x) \text{ e}$$

$$f(-x) \neq -f(x)\ \forall x \in \mathbb{R}$$



Obs.: O gráfico de f não é simétrico nem em relação à origem, nem em relação ao eixo y.

Obrigado !

Esta aula está disponível em

www.mat.ufam.edu.br