



**NTNU – Trondheim**  
Norwegian University of  
Science and Technology

NTNU, INSTITUTT FOR FYSIKK

---

# TMA4320 vår 2022 - Prosjekt i teknisk fysikk

---

Jon Andreas Støvneng, Niels Henrik Aase, Simen Ellingsen

February 25, 2022

## Hvorfor sank *Vasa*?



Figure 1: The Sinking of the Vasa. (Andrew Howat)

Prosjektperiode: 28.02.22 - 14.03.22

# Praktisk informasjon

Innleveringsfrist: Mandag 14.03.22, kl 16.00

Innleveringsplattform: Inspira (Anonymt)

Språk: Dere kan velge om dere vil svare på engelsk eller norsk.

Innleveringsformat: Jupyter Notebook

Fagansvarlig: Jon Andreas Støvneng, mail: [jon.stovneng@ntnu.no](mailto:jon.stovneng@ntnu.no)

Vurderingsansvarlig: Niels Henrik Aase, mail: [niels.h.aase@ntnu.no](mailto:niels.h.aase@ntnu.no)

## 1 Innledning

Vasa er et svensk orlogsskip som kantret og sank i Stockholms havn på jomfruturen 10. august 1628. Kong Gustav II Adolf kommanderte sjøsetting, til tross for at en stabilitetstest <sup>1</sup> antydte at skipet kunne være ustabilt. Litt vind i seilene etter 20 minutters seilas var nok til at skipet kantret og sank. Vasaskipet ble hevet 24. april 1961 og er i dag utstilt i Vasamuseet i Stockholm.

I dette prosjektet skal vi bruke en enkel skipsmodell til å studere noen faktorer som påvirker dynamikken og stabilitetsegenskapene.

## 2 Skipsmodell

Vi ser på et langt, halvsirkelformet skip, med radius  $R$ , som vugger om en akse i skipets lengderetning. Skipet kan være kompakt, med konstant massetetthet  $\sigma$ , eller hult, med et tynt skrog og dekk med konstant massetetthet  $\lambda$ . Her er  $\sigma$  og  $\lambda$  hhv masse pr flateenhet og masse pr lengdeenhet, angitt pr meter i skipets lengderetning. I dette prosjektet vil vi anta et kompakt skip, der skipets massesenter  $C$  ligger en avstand

$$h = 4R/3\pi \simeq 0.42R \quad (1)$$

under dekkets midtpunkt  $M$ . (Med hult skip:  $2R/(\pi + 2)$ .) Skipet vil i likevekt fortrenge en vannmengde som bestemmes av Arkimedes' lov, og som kan angis ved skipets tverrsnitt under overflaten. Dette arealet er

$$A_0 = \sigma\pi R^2/2\sigma_0 \quad (2)$$

med et kompakt skip. (Med hult skip:  $\lambda(\pi + 2)R/\sigma_0$ .) Her er  $\sigma_0 = 1000 \text{ kg/m}^2$  vannets massetetthet.

Fortrengt vannmengde vil variere når skipet vugger. Det er hensiktsmessig å benytte sektorvinkelen  $\gamma$  for å angi fortrengt vannmengde. Figuren nedenfor viser skipet i likevekt (a) og i en tilstand (b) hvor det har rotert og forflyttet seg. I likevekt betegner vi

---

<sup>1</sup>Når 30 mann løp tre ganger fram og tilbake på dekk, krenget skipet 10 grader. Dette viste seg senere å være det skipet kunne tåle uten å kandre. Vanligvis løp man seks ganger fram og tilbake i en stabilitetstest, men kongen var utålmodig denne dagen.

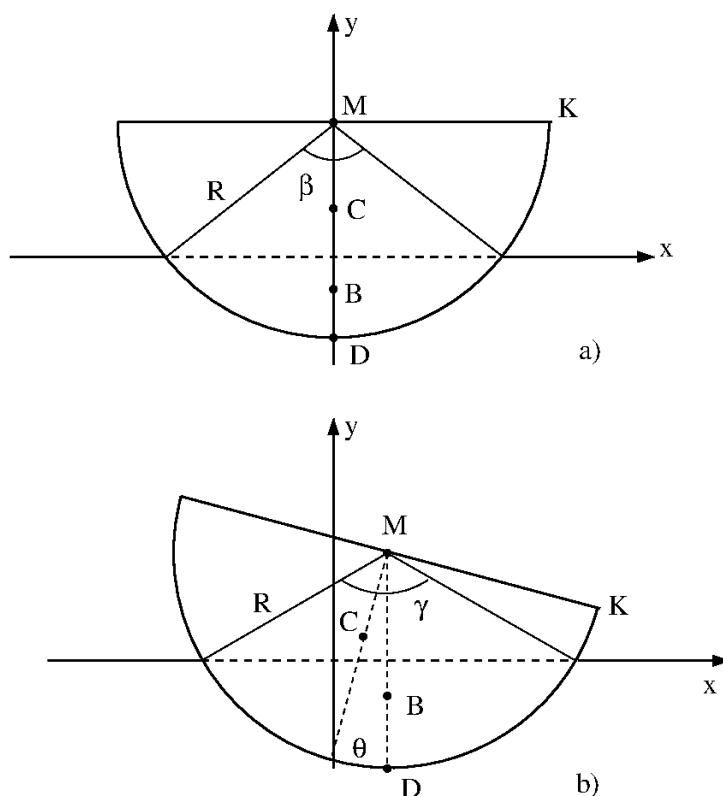


Figure 2: Skipsmodellens geometri. a) I likevekt. b) Etter rotasjon en vinkel  $\theta$  om C og translasjon av C. Rotasjonsvinkelen velges positiv mot klokka, slik at  $\theta < 0$  i figuren. M: metasenter (se neste kapittel) og dekkets midtpunkt; C: tyngdepunkt; B: oppdriftsenter; D: skipets dypeste punkt; K: skipets kant og dekkets laveste punkt.

sektorvinkelen  $\beta$ . Arealet av hele sektoren er da  $\beta R^2/2$ . Trekanten over vannlinjen har areal

$$R \sin \beta/2 \cdot R \cos \beta/2 = \frac{1}{2} R^2 \sin \beta$$

slik at arealet av fortrengt vann blir

$$A_0 = \frac{1}{2} R^2 (\beta - \sin \beta).$$

Typisk vil massetetthetene  $\sigma$  og  $\sigma_0$  være gitte størrelser. Sektorvinkelen i likevekt fastlegges da ved å løse ligningen

$$\beta - \sin \beta = \pi \sigma / \sigma_0 \quad (3)$$

med en passende metode.

Tyngdepunktet til det fortrengte vannet er angitt med B i figuren. Med sektorvinkel  $\gamma$  er avstanden fra M til B

$$Y_{MB} = R \cdot \frac{4 \sin^3 \gamma/2}{3(\gamma - \sin \gamma)}.$$

Ved en ren rotasjon om C vil M følge en sirkelbane med radius  $h$ , med C i sentrum. Hvis rotasjonsvinkelen er  $\theta$ , forflyttes M vertikalt  $\Delta y_M = h(\cos \theta - 1)$  og horisontalt  $\Delta x_M = -h \sin \theta$ . Her er  $\Delta y_M$  alltid negativ mens  $\Delta x_M$  er positiv når skipet har rotert med klokka.

Posisjonene B og D ligger alltid rett under M og får dermed samme horisontale forflytning som M. Avstanden fra M til D er selvsagt alltid lik skipets radius  $R$ .

Sektorvinkelen  $\gamma$  avhenger av rotert vinkel  $\theta$  og vertikal forflytning  $\Delta y_C$ . Vi lar overflaten ligge fast i høyde  $y = 0$  og tar for oss vertikale koordinater for M, C, B og D.

I likevekt:

$$y_M^0 = R \cos \beta/2 \quad (4a)$$

$$y_C^0 = y_M^0 - h = R \cos \beta/2 - 4R/3\pi \quad (4b)$$

$$y_B^0 = y_M^0 - Y_{MB}^0 = R \cos \beta/2 - 4R \sin^3(\beta/2)/3(\beta - \sin \beta) \quad (4c)$$

$$y_D^0 = y_M^0 - R = R \cos \beta/2 - R \quad (4d)$$

Etter en rotasjon  $\theta$  om C:

$$y_M^\theta = y_M^0 + \Delta y_M = R \cos \beta/2 + (4R/3\pi)(\cos \theta - 1)$$

$$y_C^\theta = y_C^0 = R \cos \beta/2 - 4R/3\pi$$

$$y_D^\theta = y_D^0 + \Delta y_M = R \cos \beta/2 - R + (4R/3\pi)(\cos \theta - 1)$$

Etter en rotasjon  $\theta$  og en vertikal forflytning  $\Delta y_C$ :

$$y_M = R \cos \beta/2 + (4R/3\pi)(\cos \theta - 1) + \Delta y_C$$

$$y_C = R \cos \beta/2 - 4R/3\pi + \Delta y_C$$

$$y_D = R \cos \beta/2 - R + (4R/3\pi)(\cos \theta - 1) + \Delta y_C$$

Sektorvinkelen  $\gamma$  oppfyller  $\cos \gamma/2 = y_M/R$  slik at

$$\gamma = 2 \arccos [\cos \beta/2 - (4/3\pi)(1 - \cos \theta) + \Delta y_C/R]. \quad (5)$$

Arealet av fortrenget vann er da

$$A = \frac{1}{2} R^2 (\gamma - \sin \gamma), \quad (6)$$

slik at oppdriften  $F_B = A \sigma_0 g$  ikke er lik tyngden av skipet (og eventuelt lasten på dekk), slik den er i likevekt. Dette fører til en "duppebevegelse" opp og ned. Størrelsen  $\Delta y_C$  er tyngdepunktets vertikale forflytning relativt likevekt, dvs  $\Delta y_C = y_C - y_C^0$ .

Siden avstanden fra M til B er  $Y_{MB}$ , blir  $y_B = y_M - Y_{MB}$  vertikal koordinat for oppdriftsenteret B.

Skipets treghetsmoment med hensyn på akse gjennom tyngdepunktet C er

$$I_C = \frac{1}{2} m R^2 \left( 1 - \frac{32}{9\pi^2} \right). \quad (7)$$

Det følger av at treghetsmomentet  $I_M$  med hensyn på en akse gjennom M er halvparten av treghetsmomentet for en hel sirkulær kompakt sylinder med masse  $2m$ , dvs  $I_M = (1/2) \cdot (1/2) \cdot 2m R^2 = m R^2/2$ , hvorefter Steiners sats gir  $I_C = I_M - m h^2$  med  $h = 4R/3\pi$ .

### 3 Ytre krefter på skipet

I tillegg til tyngdekraften virker det kontaktkrefter mellom skipet og vannet. Oppdriften  $F_B$  er netto normalkraft på skipet fra det omgivende vannet. Ifølge Arkimedes er  $F_B$  lik tyngden av det fortrengte vannet, dvs  $F_B = \sigma_0 A g$ . Oppdriften angriper i oppdriftsentret B, som tilsvarer tyngdepunktet til det fortrengte vannet. (B for *buoyancy*, oppdrift på engelsk.) Med et symmetrisk skip som her vil B alltid ligge rett under dekkets midtpunkt M. Skjæringspunktet mellom loddlinjen gjennom B og loddlinjen gjennom C (og B) i likevekt kalles gjerne skipets metasenter. For vårt skip er dekkets midtpunkt og metasenteret samme sted M. Når skipet er i likevekt, er selvsagt oppdriften lik skipets tyngde,  $F_B = mg = \sigma_0 A_0 g$ .

Når skipet beveger seg, virker det friksjonskrefter mellom skip og vann. Det aller enkleste er å se helt bort fra friksjon. En mer realistisk tilnærming vil være å anta en friksjonskraft  $f$  proporsjonal med arealet av skipets grenseflate mot vann (og dermed proporsjonal med buelengden  $R\gamma$ ), samt denne grenseflatens vinkelhastighet,

$$f = -k_f R \gamma \omega, \quad (8)$$

med retning horisontalt og med angrepspunkt D. Koeffisienten  $k_f$  har enhet kg/s.<sup>2</sup>

Vind og bølger kan også inkluderes på enkle eller mer kompliserte måter. Her gjør vi det så enkelt som mulig og bruker en harmonisk horisontalt rettet kraft på tvers av lengderetningen,

$$F_w(t) = F_0 \cos \omega_w t, \quad (9)$$

som angriper i høyde med vannlinjen.

### 4 Harmoniske svingninger

La oss anta at tyngdekraften  $mg$  og oppdriften  $F_B$  er de eneste ytre kreftene som virker på skipet. Vi antar videre en ren rotasjon om tyngdepunktet C og  $F_B = mg$ . Oppdriftens dreiemoment om C er da  $\tau_B = -mgh \sin \theta$ , og hvis vi betrakter små utsving omkring likevekt, er  $\sin \theta \simeq \theta$ . Newtons 2. lov for rotasjon om C blir

$$-mgh\theta = I_C \ddot{\theta}, \quad (10)$$

dvs en harmonisk oscillator med vinkelfrekvens

$$\omega_0 = \sqrt{mgh/I_C} \quad (11)$$

og periode  $T = 2\pi/\omega_0 = 2\pi\sqrt{I_C/mgh}$ . Med uttrykk for  $h$  og  $I_C$  i ligning (1) og (7) blir perioden

$$T = \pi \sqrt{\frac{3\pi R}{2g} \left(1 - \frac{32}{9\pi^2}\right)}.$$

---

<sup>2</sup>Her innser vi at nøyaktige beregninger blir utfordrende: Skipets bevegelse vil sette det omgivende vannet i bevegelse, og vi står plutselig overfor et reelt fluiddynamisk problem. Det skal vi ikke gi oss i kast med her.

Friksjonskraften  $f$  foreslått ovenfor gir et bidrag  $\tau_f = -fY_{CD}$  til ytre dreiemoment om C, med  $Y_{CD} \simeq 0.58R$ . (Denne "armen" varierer med vinkelutsvinget  $\theta$ .) Skipet forventes da å utføre dempede harmoniske svingninger

$$\theta(t) = \theta_0 e^{-\delta t} \sin \omega t$$

med tidskonstant  $1/\delta \simeq m/k_f \gamma$  og vinkelfrekvens  $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$ .

## 5 Bevegelig last

En bevegelig last modelleres enklest med en punktmasse  $m_L$  som i utgangspunktet ligger i ro i posisjon M, dvs midt på dekk. Eventuell statisk og kinetisk friksjon mellom lasten og underlaget kan karakteriseres med tilhørende friksjonskoeffisienter  $\mu_s$  og  $\mu_k$ , men det aller enkleste er å se helt bort fra friksjon mellom last og dekk. Vi velger å gjøre det så enkelt her. En bevegelig last resulterer i en rikere dynamikk og vil kunne påvirke skipets stabilitetsegenskaper. Det er hensiktsmessig kun å bruke lastens posisjon  $s_L$  relativt metasenteret M, slik at når  $s_L = R$  (eller  $-R$ ), er lasten lengst mulig til høyre (eller venstre) på dekk.

Dersom vi antar at lasten glir friksjonsfritt langs dekket, vil kun tyngdekraften og normalkraften  $\mathbf{N}$  fra dekket virke på lasten og bestemme bevegelsen til lasten i henhold til Newtons andre lov. Merk at vi bruker fet skrift på  $\mathbf{N}$  for å fremheve at den har både en  $x$ - og en  $y$ -komponent. Alle andre krefter i prosjektet virker kun i én retning (dvs  $x$  eller  $y$ ). Fra Newtons tredje lov følger det at lasten virker med en kraft  $-\mathbf{N}$  på skipet. Denne kraften bidrar også med et dreiemoment på skipet.

## 6 Bevegelsesligninger

For å beskrive bevegelsen/dynamikken til skipet, bruker vi Newtons andre lov for tyngdepunktbevegelsen og for rotasjonsbevegelsen. Ligningen som beskriver tyngdepunktbevegelsen er

$$\sum \mathbf{F} = m\mathbf{A} = m \frac{d\mathbf{V}}{dt} = m \frac{d^2 \mathbf{R}}{dt^2}, \quad (12)$$

der  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{V}$  og  $\mathbf{R}$  er henholdsvis akselerasjonen, hastigheten, og posisjonen til skipets massesenter. På komponentform kan vi skrive  $\mathbf{R} = (x_C, y_C)$ . Rotasjonsbevegelsen er gitt ved

$$\sum \tau = I_C \frac{d\omega}{dt}, \quad (13)$$

hvor vi har droppet vektornotasjon for dreiemomentet, siden alle dreiemoment i oppgaven er vektorer som peker i  $z$ -retning.

La oss oppsummere hvilke krefter som virker på skipet:

$$F_G = -mg \quad (y) \quad (14a)$$

$$F_B = A\sigma_0 g \quad (y) \quad (14b)$$

$$f = -k_f R\gamma\omega \quad (x) \quad (14c)$$

$$F_w = F_0 \cos \omega_w t \quad (x) \quad (14d)$$

$$F_L^y = -m_L g \cos^2 \theta \quad (y) \quad (14e)$$

$$F_L^x = m_L g \cos \theta \sin \theta \quad (x). \quad (14f)$$

Her er  $F_L^x$  og  $F_L^y$  komponentene av kontaktkraften fra lasten på skipet. Dersom dere føler at mekanikk-kunnskapene er på litt gyngende grunn, er det ingen grunn til å være bekymret. Ved å kombinere ligning (12) og (14) har dere all informasjon dere trenger om differensialligningen som beskriver bevegelsen til skipets massesenter. Dere trenger ikke å utlede uttrykkene selv. Merk at det vil være to slike differensialligninger, siden massesenteret har både en  $x$ - og en  $y$ -koordinat.

Dreiemomentene som virker på skipet vil avhenge både av størrelsen på kreftene og av lengden mellom massesenteret og kreftenes forlengelse ("armene"). Dette gjør for eksempel at dreiemomentet til tyngdekraften som virker på skipet alltid er null. For enkelhets skyld oppgir vi alle uttrykkene for de ulike dreiemomentene som virker på skipet (mhp aksen gjennom C):

$$\tau_B = -F_B h \sin \theta \quad (15a)$$

$$\tau_f = f(y_C - (R(\cos(\gamma/2)) - 1)) \quad (15b)$$

$$\tau_w = F_w y_C \quad (15c)$$

$$\tau_L = -m_L g \cos(\theta) s_L \quad (15d)$$

Kombinasjonen av ligning (13) og (15) er på samme måte som ovenfor tilstrekkelig for å beskrive rotasjonsbevegelsen til skipet.

I dette prosjektet skal dere løse det koblede systemet av differensialligninger som er gitt ved ligningene i denne delen. Dette gjør vi stegvis, så de forskjellige kreftene legges gradvis på utover i oppgavene. For eksempel er det kun kreftene i ligning (14a) og (14b) og dreiemomentet i ligning (15a) som skal hensyntas i hele oppgave 1. Da beveger ikke massesenteret seg, så vi trenger kun å løse ligning (13).

## 7 Oppgaver

Som i biofysikkprosjektet kan dere referere direkte til oppgavenumrene (for eks. **1e**) i besvarelsen. Dette prosjektet er mer åpent strukturert enn det forrige, så selv om dere absolutt burde sjekke at dere svarer på alt oppgavene spør om, så bør dere utdype og diskutere når dere ser muligheten til det (i større grad enn i forrige prosjekt). For eksempel bør alle plott kommenteres/diskuteres selv om det ikke står eksplisitt i oppgaven.

Den endelige rapporten skal inneholde både en innledning og en konklusjon. Den bør også inneholde en del der dere beskriver de viktigste elementene av skipsmodellen og kreftene som virker på skipet. Dette er ikke direkte et fysikk-kurs, så dere trenger ikke utlede bevegelsesligningene til skipet. Med unntak av bevegelsesligningen til lasten kan dere referere til oppgavesettet for resten av bevegelsesligningene, men symbolene som brukes i dem skal forklares.

Til slutt oppfordrer vi til å bruke konsepter og begreper fra ODE-notatet på fagsiden og/eller i fagboken. Besvarelser som gjør dette utover det oppgaveteksten ber om vil bli belønnet. Dette er også særlig relevant i siste oppgave, som er en åpen oppgave der dere står fritt til å velge selv hva dere vil se nærmere på. Flere av oppgavene dere skal løse er tett knyttet opp mot oppgavene dere har gjort i de numeriske øvingene i faget, samt kode som ligger på hjemmesiden. Å bli inspirert fra disse øvingene er både tillatt og oppmuntret, da det vil spare dere for litt arbeid.

## Parametre

I starten av koden deres er det endel parametre som det er hensiktsmessig å kun definere én gang. Som nevnt innledningsvis er massetettheten til vann per lengdeenhet (dvs: per meter i lengderetningen)  $\sigma_0 = 1000 \text{ kg/m}^2$ . Vi antar at hele skipet er laget av samme materiale, med massetetthet per lengdeenhet  $\sigma = 500 \text{ kg/m}^2$ . Videre er skipets radius  $R = 10 \text{ m}$  og skipets tverrsnitt  $A_s = \frac{1}{2}\pi R^2$ . Det følger da at skipets masse per lengdeenhet er gitt ved  $m = A_s\sigma$ . Tregghetsmomentet til skipet er gitt ved ligning (7), og er konstant i hele prosjektet. Høydeforskjellen mellom metasenteret og massesenteret,  $h$ , gitt ved ligning (1), er også konstant i hele prosjektet. Likevektsstørrelser som  $\beta$ , beskrevet i ligning (3), og  $y$ -koordinatene i ligning (4), kan også med fordel beregnes kun én gang, siden de heller ikke vil endre seg når skipets parametre er bestemt.

I oppgave 2 vil de følgende parametrene kunne variere fra deloppgave til deloppgave:

- Lastens masse  $m_L$ . For enkelhets skyld er det greiest å definere denne relativt skipets masse, for eksempel  $m_L = 0.001m$ .
- Størrelsen på friksjonskoeffisienten  $k_f$  i ligning (8).
- Amplituden  $F_0$  og frekvensen  $\omega_w$  som beskriver den harmoniske kraften i ligning (9).

## Oppgave 1

I denne oppgaven skal vi løse en relativt enkel differensialligning som mange av dere har vært borti i tidligere fysikkemner. Rammeverket dere kommer til å utvikle i denne oppgaven er nok til å løse oppgave 2 uten å måtte gjøre særlig store endringer i koden.

**1a)** Bruk en valgfri metode til å løse fikspunktlikningen (3) for  $\beta$ . For de (litt fiktive) parametrene vi bruker til å beskrive Vasaskipet, hva er vinkelen som beskriver hvor mye av skipet som er i kontakt med vann når skipet er i likevekt?



**1b)** Definer  $y = 0$  til å være i vannflaten. Beregn høyden over vannlinja til de følgende størrelsene i likevekt: Metasenteret  $y_M$ , skipets massesenter  $y_C$ , skipets dypeste punkt  $y_D$ , angrepspunktet til oppdriftskraften  $y_B$ . Bruk ligning (4). Definer disse konstantene slik at dere kan bruke dem i resten av koden.

Dersom bevegelsen til skipets massesenter neglisjeres, beskrives hele skipets dynamikk av ligning (13). I hele oppgave **1** kommer vi til å ignorere alle krefter/dreiemomenter utenom de som er gitt i ligningene (14a), (14b) og (15a). I tillegg antar vi at mengden fortrenget vann ikke endrer seg når skipet beveger seg, slik at  $A \rightarrow A_0$ . Fra dette følger det at  $|F_G| = |F_B|$ , slik at det er kun dreiemomentet  $\tau_B$  som gjør at skipet beveger seg.

**1c)** Introduser vektoren  $\vec{w}(t) = [\theta(t) \quad \omega(t)]^T$ , der  $\omega = \frac{d\theta}{dt}$ , og vis at den andreordens differensialligningen i ligning (13) (med antagelsene ovenfor) kan skrives som

$$\frac{d\vec{w}}{dt} = \vec{f}(t, \vec{w}), \quad (16)$$

med  $\vec{w}(t = t_0) = [\theta(t = t_0) \quad \omega(t = t_0)]^T$ , for en spesiell vektorfunksjon  $\vec{f}(t, \vec{w})$ . Uttrykk  $\vec{f}$  ved  $\theta(t)$  og  $\omega(t)$ .

## Eulers metode

Eulers metode er den eldste og mest primitive måten å løse ODE-er på numerisk. Den er en førsteordens metode. Som en oppvarmingsøvelse starter vi med å implementere denne metoden før vi får videre til litt mer slagkraftige saker. Hvis vi tar utgangspunkt i ligning (16), kan Eulers metode skrives som

$$\vec{w}_{i+1} = \vec{w}_i + h\vec{f}(t_i, \vec{w}_i), \quad (17)$$

der vi har diskretisert tidsaksen slik at  $h$  beskriver avstanden mellom de diskrete tidsverdiene  $\{t_i\}$ . Hvis man kjenner initialverdien  $\vec{w}(t = t_0)$ , kan man finne  $\vec{w}(t)$  ved å bruke ligning (17) og ta nok tidssteg for å komme seg fra  $t_0$  til  $t$ .

**NB!** Merk at vi bruker  $h$  her for å holde oss til konvensjonen om at  $h$  brukes som steglengde, mens vi har definert  $h$  tidligere som avstanden mellom metasenteret og massesenteret. Pass på at dere ikke kaller begge disse størrelsene  $h$  i koden.

**1d)** Bruk uttrykket deres fra oppgave **1c)** til å løse ODE-en i ligning (13) numerisk med Eulers metode. Bruk initialverdiene  $\theta(t = 0) = 20^\circ$  og  $\omega(t = 0) = 0$ . Eksperimenter med forskjellige skrittstørrelser  $h$ , og velg en passende  $h$ . Rettferdiggjør valget deres. Plott  $\theta$  som funksjon av  $t$  fra  $t = 0$  til  $t = 20$  s.

*Tips:* I implementasjonen deres er det svært hensiktsmessig at dere tar funksjonen  $\vec{f}$  som input.

**1e)** For  $\theta \ll 1$  kan vi approksimere  $\sin \theta \approx \theta$ . Dette er en approksimasjon som er nesten pinlig mye brukt i fysikk, så vi benytter anledningen til å studere hvor god denne approksimasjonen er. Gjenta forrige deloppgave der dere nå løser ligning (10) numerisk. Plott denne løsningen sammen med løsningen i **1d)**. Gjenta dette med initialverdien  $\theta(t = 0) = 1^\circ$ . Kommenter resultatene.

*Tips:* Dersom dere har implementert Eulers metode på en god måte i **1d)**, vil det i denne oppgaven være mulig å kjøre nøyaktig den samme koden som i oppgave **1d)** med unntak av hvilken  $\vec{f}$  som brukes som input.

### Fjerde ordens Runge-Kuttas metode

Fjerde ordens Runge-Kuttas metode (RK4) tilhører en familie av numeriske metoder for å løse differensialligninger. Dette er en metode der man får mye for pengene, ettersom metoden er enkel å implementere selv om den er en fjerdeordens metode. Ved å innføre hjelpestørrelsene

$$\begin{aligned}\vec{k}_1 &= \vec{f}(t_i, \vec{w}_i) \\ \vec{k}_2 &= \vec{f}(t_i + \frac{h}{2}, \vec{w}_i + h\frac{\vec{k}_1}{2}) \\ \vec{k}_3 &= \vec{f}(t_i + \frac{h}{2}, \vec{w}_i + h\frac{\vec{k}_2}{2}) \\ \vec{k}_4 &= \vec{f}(t_i + h, \vec{w}_i + h\vec{k}_3),\end{aligned}$$

kan vi uttrykke  $\vec{w}_{i+1}$  som

$$\vec{w}_{i+1} = \vec{w}_i + \frac{h}{6}(\vec{k}_1 + 2\vec{k}_2 + 2\vec{k}_3 + \vec{k}_4). \quad (18)$$

Legg merke til hvor like ligningene (17) og (18) er, det eneste som skiller dem er stegfunksjonen  $\vec{S}(t, \vec{w}, h, t) \equiv \vec{w}_{i+1} - \vec{w}_i$ . Ellers vil implementasjonen av de to ODE-løserne være like.

**1f)** Implementer RK4.

**1g)** Innenfor småvinkelapproksimasjonen, finn den analytiske løsningen av differensialligningen dere løste i oppgave **1e)**. Dette er løsningen av bevegelsen til en harmonisk oscillator. Kall denne løsningen  $\tilde{\theta}(t)$ .

I siste deloppgave skal dere tallfeste og diskutere størrelsen på avviket mellom den analytiske og de numeriske løsningene. Bruk initialverdiene  $\theta(t = 0) = 0.01$  rad, og  $\omega(t = 0) = 0$  rad/s.

**1h)** Plott absoluttverdien av differansen mellom den analytiske og de numeriske løsningene ved  $t = 20$  s som funksjon av  $h$  for både Eulers metode og RK4. Plottet skal være hensiktsmessig for å se hvordan feilen minker som funksjon av  $h$ . Kommenter plottet og forklar hvordan ordenen til de to metodene manifesterer seg i plottet. Hvis

feilen flater ut for veldig små  $h$ , forklar dette kort. Det kan være hensiktsmessig å bruke logaritmiske akser.

*Tips 1:* Pass på at de numeriske løsningene evaluerer  $\vec{w}$  ved nøyaktig  $t = 20$  s.

*Tips 2:* For å finne stigningstallet til en linje numerisk kan funksjonen `scipy.optimize.curve_fit` være nyttig, men dere kan også finne stigningstallet på øyemål.

## Oppgave 2

I oppgave 2 skal dere alltid bruke RK4, med mindre noe annet blir spesifisert. Dere står fritt til å velge steglengde selv, men som rettesnor kan dere bruke  $h = 0.01$  s. Selv om differensialligningene som skal løses i denne oppgaven er mer komplekse, så kan de løses på samme måte som i oppgave 1) fordi de kan skrives på samme form som i ligning (16). For å holde styr på de forskjellige leddene i diffiligningene anbefaler vi at dere innfører hjelpestørrelser (som for eks.  $\gamma$  og  $A$ ) i funksjonene deres.

For å visualisere resultatene deres kan dere bruke utdelt kode `animation.py` for å se hvordan skipet (og eventuell last) beveger seg. Å få animasjoner til å kjøre i Jupyter Notebook er ikke-trivielt, så vi anbefaler at dere alltid kjører animasjonskode fra terminal eller en IDE.

Fra nå av skal dere bruke uttrykket for  $A$  gitt i ligning (6), dvs at dere skal la mengden fortrengt vann variere. Dette gjør at massesenteret ikke lenger vil ligge i ro, og at ligningene (12) og (13) nå er koblete. For å løse et slikt system av koblete ODE-er må  $\vec{w}$  i tillegg til  $\theta$  og  $\omega$  nå også inneholde  $x$ - og  $y$ -koordinatene til massesenteret til båten, samt tilhørende hastigheter  $v_x$  og  $v_y$ . (Strengt tatt trenger vi ikke legge på  $x$ -koordinaten ennå, men den vil endre seg fra og med oppgave 2d). Med mindre noe annet er spesifisert kan dere alltid anta at initialverdiene til  $x$ -koordinaten og fartskomponentene til massesenteret er 0. Initialverdien til massesenterets  $y$ -koordinat er gitt ved likevektsverdien  $y_C^0$ . Merk at det foreløpig ikke virker noen krefter i horisontal retning, så verken  $x$  eller  $v_x$  vil endre seg i denne deloppgaven.

**2a)** Definer en ny  $\vec{f}$  slik at den beskriver det koblete systemet av ODE-er beskrevet ovenfor. Vi fortsetter å se på et system der dynamikken kun bestemmes av kreftene/-dreiemomentene i ligningene (14a), (14b) og (15a), men siden vi lar mengden fortrengt vann variere, vil dynamikken endre seg.

**2b)** Gjenta oppgave 1d), men ta nå høyde for at arealet av fortrengt vann endrer seg som funksjon av  $\theta$  (dette svarer til å bruke  $\vec{f}$ -funksjonen dere definerte i forrige deloppgave). Plott  $y_C$  som funksjon av  $t$  og kommenter hvor stor effekten av variasjonen av mengden fortrengt vann er.

**2c)** Utvid funksjonaliteten i koden deres slik at dersom dekket kommer i kontakt med vannet, så kantrer skipet. Hvis skipet kantrer ved  $t = t_i$ , skal alle komponentene av  $\vec{w}(t)$  settes lik 0 fra og med  $t = t_i$ . Det eneste unntaket er  $\theta$ : For alle  $j > i$  er  $\theta(t =$

$t_j) = \text{sgn}(\theta_{i-1})\frac{\pi}{2}$ , der  $\text{sgn}$  er fortegnsfunksjonen, for å vise tydelig at skipet kantrer. Med  $\theta(t=0) = 0$  som initialverdi, hva er den laveste  $\omega(t=0)$  som gir kantring?

*Tips:* Kriteriet for kantring er  $\theta > (\pi - \gamma)/2$ .

Vi antar nå at skipet har en last med masse  $m_L$ , som vi for enkelhets skyld behandler som en punktpartikkel. Vi antar videre at våre svenske seilere har glemt å feste lasten, slik at den beveger seg fritt på dekk. For enkelhets skyld ser vi bort fra friksjon mellom dekket og lasten. Bevegelsen til lasten er da ekvivalent med bevegelsen til en friksjonsfri kloss på et skråplan med vinkel  $\theta$ , så akselerasjonen til lasten kan uttrykkes ved kun  $g$  og  $\theta$ . Som nevnt tidligere er det hensiktsmessig å kun bruke lastens posisjon relativt til metasenteret,  $s_L$ , slik at når  $s_L = R$  ( $-R$ ) så er lasten lengst mulig til høyre (venstre) på dekk. Lastens hastighet  $v_L$  er definert som  $v_L = \frac{ds_L}{dt}$ .

I tillegg til at lasten har sin egen dynamikk som styres av  $\theta$ , påvirker den også dynamikken til skipet. For det første endres den totale massen til systemet fra  $m \rightarrow m + m_L$ , slik at likevektsstørrelsene ( $\beta$ ,  $A_0$  etc.) må beregnes på nytt. For det andre skaper lasten et dreiemoment  $\tau_L$  om massesenteret til skipet, gitt ved ligning (15d) som blir et ekstra ledd i  $\tau$  i ligning (13). For det tredje blir skipet utsatt for kreftene i ligning (14f) og (14e), som blir ekstra ledd i ligning (12).

**2d)** Løs samme ODE som i oppgave **2a**), men der dere nå inkluderer lasten i dynamikken (utvid  $\vec{w}$  til også å inkludere  $s_L$  og  $v_L$  og inkluder leddet i ligning (15d)). Dere må finne differensialligningen som beskriver lastens bevegelse selv. Dersom  $|s_L(t)| > R$  faller lasten av skipet. Hvis dette skjer, skal  $m_L$  settes lik 0 kg, slik at lasten ikke påvirker dynamikken til skipet etter at den faller av. Plott  $\theta$  og  $s_L$  som funksjon av tid for  $m_L = 0.001m$  og  $m_L = 0.08m$  fra  $t = 0$  s til  $t = 40$  s. Hvis lasten faller av, skal det fremgå tydelig fra plottene hvor lasten faller av. Initialbetingelsene er  $\theta(t=0) = 0$ ,  $\omega(t=0) = 0.2$  rad/s, og at lasten starter i ro ved  $s_L(t=0) = 3$  m.

**2e)** De fleste skip har gjerder på kantene av dekket, og dette kan implementeres på følgende måte: Dersom  $|s_L| > R$  så vil lasten ikke falle av, den vil istedet miste all fart og forbli på kanten. (Merk at vi nå neglisjerer kraften som overføres fra lasten til gjerdet.) Inkluder gjerder og gjenta det dere gjorde i oppgave **2d**) (med de samme verdiene for lastens masse). Plott og diskuter dynamikken til skipet.

*Tips:* Her kan det være lurt å animere bevegelsen til skipet først for å se hvordan dynamikken til systemet utvikler seg før dere bestemmer dere for hvilke størrelser dere vil plote.

De siste komplikasjonene dere skal legge til er å ta høyde for friksjonskraften som oppstår mellom skipets skrog og vannet gitt ved ligning (14c), samt den harmoniske kraften i ligning (14d) som beskriver påvirkningen fra vind og bølger. Dette svarer til å inkludere samtlige krefter i ligning (14) og samtlige dreiemomenter i ligning (15) for å løse henholdsvis ligning (12) og (13).

I de to neste deloppgavene er vi mest interessert i skipets dynamikk uten påvirkning fra lasten, så vi setter  $m_L = 0$  kg.

**2f)** La oss først anta at skipet er i rolig farvann, slik at vi kan sette amplituden til den harmoniske kraften lik 0. Med initialbetingelser  $\theta(t=0) = 0$ ,  $\omega(t=0) = 0.4 \text{ rad/s}$ , plott hvordan dynamikken til skipet ser ut for forskjellige verdier av  $k_f$ .

*Tips:* Eksperimenter med flere forskjellige størrelsesordner for  $k_f$ .

**2g)** For å virkelig se effekten av den harmoniske kraften, plott  $\theta$  som funksjon av  $t$  fra  $t = 0 \text{ s}$  til  $t = 240 \text{ s}$  med følgende parametre:  $k_f = 100 \text{ kg/s}$ ,  $F_0 = 0.625mg$ ,  $\omega_w = 0.93\omega_0$ , der  $\omega_0$  er definert i ligning (11). Bruk initialbetingelser  $\theta(t=0) = 0$ ,  $\omega(t=0) = 2^\circ/\text{s}$ . Hva observerer dere?

*Tips:* Svingning er et fenomen som kan være relevant å nevne her.

**2h) (Åpen oppgave)** RK4 er en ODE-løser med begrensninger, og det finnes mange difflikninger som ikke lar seg løse ved bruk av RK4. Implementer en annen ODE-løser, og diskuter fordelene og ulempene med denne løseren sammenlignet med RK4. Dere står fritt til å velge en løser dere har hatt om i forelesning/øving, men dere kan også bruke eksisterende biblioteker som for eksempel `scipy.integrate.solve_ivp` (les dokumentasjonen selv for hvordan denne virker)<sup>3</sup>. Når dere har fått løseren deres til å virke, velg selv et interessant problem knyttet til skipets stabilitet (om skipet kantrer eller ikke) der dere sammenligner løseren deres og RK4. Denne oppgaven bør inneholde både kvantitative resultater og kvalitative diskusjoner.

*Tips:* Hvis dere sliter med å komme på en interessant problemstilling, kan dere se nærmere på hvordan den harmoniske kraften kan få skipet til å kantre. For enkelte verdier av  $\omega_w$  kan skipet kantre, selv for veldig lave verdier av  $\omega(t=0)$ , forutsatt at  $k_f$  ikke er for stor, og at  $F_w$  er stor nok.

---

<sup>3</sup>Dette er veldig representativt for hvordan fysikere jobber i praksis. Man implementerer sjelden ODE-løsere selv, man bruker eksisterende biblioteker. Dette krever dog at man har en god nok forståelse av ODE-er til at man forstår *hva* løseren gjør, selv om man ikke nødvendigvis forstår *hvordan* den gjør det.