# 1 Modul 1 - Ikke-lineære ligninger

## 1.1 Utlede kriterium for konvergens av fikspunktiterasjon (x = g(x))

Gitt at r er en løsning av $r - g(r) = 0$, og gitt betingelsene for eksistens og unikhet av r og gitt

$$\begin{aligned} x_k + 1 &= g(x_k) \\ r &= g(r) \end{aligned}$$

Så kan vi se at forskjellen mellom dem blir:

$$r - x_{k+1} = g(r) - g(x_k)$$

Tar absoluttverdien og bruker definisjonen av feil $e_{k+1}$:

$$|e_{k+1}| = |r - x_{k+1}| = |g(r) - g(x_k)|$$

Middelverditeoremet sier videre at dersom g er kontinuerlig (antatt fra betingelsen om eksistens) på intervallet [a,b] og deriverbar på intervallet (a, b) (antatt fra betingelsen om unikhet), så finnes det et punkt $\xi_k$, slik at $g'(\xi_k)$ slik at $g'(\xi_k) = \frac{g(b)-g(a)}{b-a}$. Hvis vi tar absoluttverdien av denne og ganger med $|b - a|$ får vi:

$$|g'(\xi_k)||b - a| = |\frac{g(b) - g(a)}{b - a}||b - a| = |g(r) - g(x_k)| = |g'(\xi_k)||r - x_k| = |e_{k+1}|$$

når vi setter inn $b = r$ og $a = x_k$ (altså må $\xi_k$ ligge mellom $x_k$ og $r$). Denne feilen er representert ved to ukjente (tre, egentlig, men hva $\xi_k$ er er ikke viktig, forklarer det straks). Vi vet ikke $r$ og vi vet ikke $e_{k+1}$. Hvis vi ser tilbake på betingelsen for eksistens, ser vi at dersom initialverdien $x_0 \in [a, b]$ så er alle $x_k \in (a, b)$. Videre, hvis punktet er unikt, så er $|g'(x)| < 1$ for alle $x \in [a, b]$. Vi kan gi denne en øvregrense, gitt ved $|g'(x)| \leq L < 1$, der L altså er den største mulige verdien av g' i intervallet. Vi får da:

$$\begin{aligned} |e_{k+1}| &\leq L|e_k| \\ |e_k| &\leq L|e_{k-1}| \\ |e_{k+1}| &\leq L^2|e_{k-1}| \end{aligned}$$

Vi kan fortsette dette og være sikker på at hver gang vi går ned (for eksempel fra k+1 til k), vil L få +1 til eksponenten sin. Da ender vi opp med etter k ganger:

$$\begin{aligned} |e_k| &\leq L^k|e_0| \\ \lim_{k->\infty} |e_k| &= 0 \end{aligned}$$

fordi L er mindre enn 1. Dette kan brukes videre til å finne formlene for feilestimat, men du trenger ikke vite hvordan det utledes.

## 1.2 Utlede at Newtons metode har kvadratisk konvergens

Man kan bevise dette på to måter. Enten start fra fikspunktiterasjon og utled Newtons metode derfra med hensikt om å få kvadratisk konvergens, eller start med Newtons metode og feilanalyser denne. Her gjør jeg sistnevnte. Newtons metode med gitt $f(x)$ og initialverdi $x_0$ tar formen:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \tag{1}$$

Hvis vi rekkeutvikler $f(r) = 0$ rundt $x_k$, får vi:

$$0 = f(r) = f(x_k) + f'(x_k)(r - x_k) + \frac{1}{2}f''(\xi_k)(r - x_k)^2 \tag{2}$$

$$0 = f(x_k) + f'(x_k)(x_{k+1} - x_k) \tag{3}$$

Der (2) er en andre-ordens Taylor-utvikling av f(r), og (3) er bare en omordning av (1). Hvis vi tar forskjellen mellom dem får vi:

$$\begin{aligned} 0 &= f(x_k) + f'(x_k)(r - x_k) + \frac{1}{2}f''(\xi_k)(r - x_k)^2 - f(x_k) - f'(x_k)(x_{k+1} - x_k) \\ &= f(x_k) - f(x_k) + f'(x_k)(r - x_k - x_{k+1} + x_k) + \frac{1}{2}f''(\xi_k)(r - x_k)^2 \\ &= f'(x_k)(r - x_{k+1}) + \frac{1}{2}f''(\xi_k)(r - x_k)^2 \end{aligned} \tag{4}$$

Husker at $e_k = r - x_k$, slik at $e_{k+1} = r - x_{k+1}$, og (4) blir:

$$\begin{aligned} f'(x_k)e_{k+1} + \frac{1}{2}f''(\xi_k)e_k^2 &= 0 \\ e_{k+1} &= -\frac{1}{2}\frac{f''(\xi_k)}{f'(x_k)}e_k^2 \end{aligned}$$

Siden kvadratisk konvergens er definert ved at feilen for hvert steg er mindre enn kvadratet av den forrige feilen ganger en konstant, er dette kvadratisk konvergens dersom f" finnes rundt rundt r, $f'(x_k) \neq 0$, og $x_0$ er nærme r. Sistnevnte er nødvendig for at taylorutviklingen er nøyaktig nok.

# 2 Modul 2 - Numerisk interpolasjon

## 2.1 Bevise at interpolasjonsproblemet har en entydig løsning for n+1 datapunkter og polynomgrad n

Det at det eksisterer en løsning, kan man vise simpelthen ved å se at n+1 datapunkter gir n+1 kardinalfunksjoner, alle av grad n. (For hvert datapunkt ganger man sammen n x-er, siden man ikke skal ta med det datapunkt nummer i i den i-te kardinalfunksjon). Det vi vil vise er da at den er entydig. Vi kan gjøre det slik:

- Anta at det finnes to forskjellige polynomer av grad n $p_n$ og $q_n$ som interpolerer datapunktene, slik at for alle $x_k$ så er $p_n(x_k) = y_k$, og $q_n(x_k) = y_k$.
- Hvis vi lager et nytt polynom av grad n $r(x) = p_n(x) - q_n(x)$ så får vi for alle $x_k$ at $r(x) = 0$. Det er n+1 slike punkter, som gjør at $r(x)$ har n+1 null-er. Men et polynom som ikke er null av grad n kan maksimum ha n nullpunkter, så r(x) må være 0 og $p_n(x) = q_n(x)$. Altså er $p_n$ entydig, da det kun finnes en løsning.

## 2.2 Kunne utlede uttrykk for feil i interpolasjon når $f \in C^{n+1}[a, b]$

$f$ er per definisjon deriverbar n+1 ganger, slik at $f^{(n+1)}$ eksisterer. Vi definerer her to funksjoner som du bare må huske til eksamen for å gjøre denne utledningen. Den første er:

$$\omega(x) = \Pi_{i=0}^{n}(x - x_i)$$

Som er et polynom av grad n. Hvis vi velger en vilkårlig $x \in [a, b]$ som er ulik nodene $x_i$, så er $e(x) \neq 0$ og vi kan definere en funksjon i t (bare en mellomvariabel):

$$\phi(t) = e(t)\omega(x) - e(x)\omega(t)$$

der $e(t) = f(t) - p_n(t)$. $\phi(t)$ er deriverbar n+1 ganger, samme som $f$. Den har også n+2 distinkte nullpunkt, n+1 fra nodene, og en fra x-en vi valgte. Dermed har den deriverte minst n+1 nullpunkter, og den andrederiverte har minst n. Ved å fortsette denne prosessen finner vi at $\phi^{(n+1)}(t)$ har minst ett nullpunkt i intervallet. Vi kan kalle dette nullpunktet som vi vet eksisterer $t = \xi(x)$, siden det er avhengig av valget av x. $p_n(t)$ er deriverbar n ganger, så den går vekk i uttrykket for $e^{(n+1)}$ som blir $e^{(n+1)} = f^{(n+1)}$. Videre blir $\omega^{(n+1)}(t) = (n + 1)!$ siden det er et polynom av grad n+1 med koeffisient 1 foran $x^{n+1}$. $\omega(x)$ og $e(x)$ er konstante i variabelen t, så når vi deriverer med hensyn på t, vil de ikke påvirke. Vi får da:

$$\phi^{(n+1)}(t) = f^{(n+1)}(t)\omega(x) - e(x)(n + 1)!$$

og

$$\phi^{(n+1)}(\xi(x)) = f^{(n+1)}(\xi(x))\omega(x) - e(x)(n+1)! = 0$$

som når vi omordner for $e(x)$ blir:

$$e(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi(x))\omega(x)}{(n+1)!}$$

# 3 Modul 4 - Numerisk løsning av diff.ligninger

## 3.1 Utlede uttrykk for global avbruddsfeil i Eulers metode ved bruk av Lipschitz-konstant og rekursjonsformel for globalfeil i hvert skritt

Vi ønsker å finne ut hva vi kan si om feilen $e_N = y(x_{end}) - y_N$ for N antall steg, og lik avstand $h = (x_{end} - x_0)/N$ mellom hvert steg. Steg 1 i utledningen er å finne lokalfeilen, for så å se på relasjonen mellom lokalfeilen og globalfeilen. Eulers metode er kun de to første termene av Taylor-utviklingen til den eksakte løsningen $y_N$. Lokalfeilen blir da bare:

$$d_{n+1} = y(x_n + h) - (y(x_n) + hy'(x_n)) = \frac{1}{2}h^2 y''(\xi), \quad \xi \in (x_n, x_n + h) \tag{5}$$

Der svaret blir resten av den avkortede Taylor-rekka, $R_2(x)$. Differensialligningen vi ser på er av formen $y' = f(x, y(x))$. Vi kan da skrive om (5) til:

$$y(x_n + h) = y(x_n) + hy'(x_n) + d_{n+1} = y(x_n) + hf(x_n, y(x_n)) + d_{n+1} \tag{6}$$

Vi har også Eulers metode og definisjonen for globale feil:

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n) \tag{7}$$
$$e_n = y(x_n) - y_n \tag{8}$$

Trekker fra (7) fra (6) og setter inn (8) og bruker det faktum at $y(x_n+h) = y_{n+1}$ får vi:

$$y(x_n + h) - y_{n+1} = y(x_n) + hf(x_n, y(x_n)) + d_{n+1} - y_n - hf(x_n, y_n)$$
$$e_{n+1} = e_n + h(f(x_n, y(x_n) - f(x_n, y_n)) + d_{n+1} \tag{9}$$

Vi bruker deretter middelverditeoremet, som forteller oss at:

$$f_y(x_n, \xi) = \frac{f(x_n, y(x_n)) - f(x_n, y_n)}{y(x_n) - y_n}$$
$$f(x_n, y(x_n)) - f(x_n, y_n) = f_y(x_n, \xi)(y(x_n) - y_n) = f_y(x_n, \xi)e_n$$

Setter inn i (9) og får:

$$e_{n+1} = e_n + hf_y(x_n, \xi)e_n + d_{n+1}$$

Vi kan deretter ta absoluttverdien og triangelulikheten gir dermed:

$$|e_{n+1}| = |e_n + hf_y(x_n, \xi)e_n + d_{n+1}| \le |e_n| + |hf_y(x_n, \xi)e_n| + |d_{n+1}|$$

Dersom det finnes en konstant L og en konstant D slik at:

$$|f_y(x, y)| \le L, \qquad |y''(x)| \le 2D$$

Da får vi, ved å bruke (5) for $d_{n+1}$:

$$|e_{n+1}| \leq |e_n| + hL|e_n| + 2Dh^2$$

Vi får dermed en rekursiv formel for globalfeilen. Ved å bruke at $e_0 = 0$, får vi en øvre grense på globalfeilen ved:

$$|e_N| \leq \sum_{n=0}^{N-1} (1 + hL)^n Dh^2 \tag{10}$$

Denne kan forenkles videre ved å bruke summen av en avkortet geometrisk rekke:

$$\sum_{n=0}^{N-1} r^N = \frac{r^N - 1}{r - 1}$$

og rekka til eksponentialfunksjonen:

$$e^x = 1 + x + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$
$$1 + x < e^x, \qquad\qquad x > 0$$

Som gir:

$$\sum_{n=0}^{N-1} (1 + hL)^n = \frac{(1 + hL)^N - 1}{(1 + hL) - 1} < \frac{e^{hLN} - 1}{hL} = \frac{e^{L(x_{end} - x_0)} - 1}{hL}$$

ved å bruke $N = (x_{end} - x_0)/h$. Når vi setter inn dette i (10) får vi:

$$|e_N| \leq \sum_{n=0}^{N-1} (1 + hL)^n Dh^2 < \frac{e^{L(x_{end} - x_0)} - 1}{hL} Dh^2 = \frac{e^{L(x_{end} - x_0)} - 1}{L} Dh = Ch$$

L er Lipschitz-konstanten, og vi bruker rekursjon i hvert skritt for å komme til (10), så det vi skulle vise er vist. Så vidt jeg har forstått, er det ikke nødvendig å kunne utlede det generelle resultatet at en metode med lokalorden $h^{p+1}$ gir globalfeil av orden $h^p$.