Zesde Serie Opgaven

1. Gegeven de formule: $((\overline{x_1} \wedge x_5 \wedge \overline{x_3}) \vee (x_2 \wedge x_5) \vee (x_2 \wedge \overline{x_4} \wedge x_1 \wedge x_3)) \wedge ((\overline{x_4} \wedge x_1) \vee (\overline{x_1} \wedge x_2 \wedge x_5) \vee (\overline{x_1} \wedge x_3 \wedge x_1 \wedge \overline{x_5}))$ Breng deze formule in 3-CNF met de methode uit de syllabus.

2. We gaan een reductie maken van VERTEX COVER naar SATISFIABILITY (om te laten zien dat dat ook kan).

   (a) Schrijf een formule met $k \times n$ variabelen x_{ij} die waar wordt als en alleen als precies k van de variabelen op waar gezet worden.

   (b) Voor een kant (v, w) van de ingevoerde graaf $G = (V, E)$ schrijf een formule die $2k$ van die variabelen gebruikt en uitdrukt dat tenminste één van v en w in de VERTEX COVER moeten zitten.

   (c) Reduceer het probleem VERTEX COVER naar SATISFIABILITY. Dus: gegeven een graaf $G = (V, E)$ en een getal K maak een formule F zo dat F vervulbaar is dan en slechts dan als G een vertex cover van grootte hoogstens K heeft.

   (d) Wat zegt deze reductie over de relatieve moeilijkheid van VERTEX COVER en SATISFIABILITY?

3. Laat van de volgende problemen steeds zien:

   (a) Het probleem zit in NP; dwz. elke instantie I van het probleem heeft een certificaat dat in polynomiale tijd in $|I|$ gecontroleerd kan worden.

   (b) Het probleem is zelfreduceerbaar; dwz. uit een ingevoerde instantie I, kan een in polynomiale tijd aantal kleinere instanties $I_1, \ldots, I_k$ worden afgeleid, zodat het antwoord op I in polynomiale tijd kan worden bepaald uit de antwoorden op $I_1, \ldots, I_k$. (Ter herinnering: voor VERTEX COVER gold $k = 2$ en het antwoord op (G, p) was $(G_1, p - 1) \vee (G_2, p - 1)$.)

   (c) Het probleem is NP-volledig; dwz. er bestaat een reductie van een bekend NP-volledig probleem naar dit probleem.

   Dit zijn de problemen:

   (a) PAKKETJES: Een bedrijf heeft twee bestelauto's en moet een aantal pakketten langs een n adressen brengen. Men wil graag dat beide chauffeurs weer op tijd thuis zijn, dus vraagt men zich af of de adressen zo te verdelen zijn, dat twee rondjes samen langs alle adressen gaan en kleiner dan K_1 resp. K_2 kilometer zijn.

   (b) UNIONS: Gegeven is een aantal verenigingen die bestaan uit leden. Hierbij kan één persoon lid zijn van meerdere verenigingen, en kunnen verenigingen deel zijn van andere verenigingen. Gevraagd: is er een groep van K personen zo dat geen tweetal personen in deze groep zijn van dezelfde vereniging?

   (c) FEEDBACK VERTEX SET: Gegeven is een graph $G = (V, E)$ en een getal K. Gevraagd is: bestaat er een deelverzameling $V' \subseteq V$ met $\|V'\| \leq K$, zodat op *elke* cykel in G tenminste één knoop uit V' ligt?

   (d) SETS OF LINEAR EQUATIONS WITH 0/1 SOLUTIONS (0/1SOLE): Gegeven een verzameling lineaire vergelijkingen met integer rechterkant. Gevraagd: bestaat er een toewijzing van de waarden 0 en 1 aan de variabelen, zo dat de vergelijkingen kloppen?

   (e) CELLPHONE CAPACITY. Gegeven is een aantal personen, elk op een vaste plaats. Twee personen kunnen met elkaar praten als ze in elkaars bereik zijn. Iedereen die dan ook in het bereik van één van deze twee is, moet dan stil zijn, anders is er interferentie. Gegeven N personen en hun posities en een getal k. Gevraagd, kunnen er tenminste k gesprekken tegelijk gevoerd worden?

4. Stel dat ik een efficiente, polynomiale tijd, procedure/subroutine/functie/methode heb genaamd TSP die ja zegt als een gegeven gewogen volledige graaf een hamilton circuit heeft van gewicht hoogstens k en nee anders. Dus $TSP(G, k) \in \{0, 1\}$ en $TSP = 1$ d.e.s.d.a. $G, k \in$ TSP. Beschrijf een algoritme die gegeven een graaf en een getal k in polynomiale tijd in die graaf een Hamilton circuit vindt van grootte k als dat bestaat (en nee zegt anders). Let op: voor een graaf op n knopen kan $k\Omega(2^n)$ zijn.