Exercícios Propostos[1]

Equações da reta

1. Determine as equações paramétricas e na forma simétrica (se existirem) das retas que passam pelos pontos A e B.

   (a) $A = (3, 5, 1)$ e $B = (-2, 3, 2)$
   (b) $A = (0, 1, 0)$ e $B = (1, 0, 0)$
   (c) $A = (0, 1, 1)$ e $B = (0, 0, 0)$
   (d) $A = (3, 2, 1)$ e $B = (6, 1, 4)$

2. Considere a reta r de equações paramétricas $\begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = \lambda \\ z = 4 + 2\lambda \end{cases}, \ \lambda \in \mathbb{R}$.

   (a) Obtenha dois pontos e dois vetores diretores da reta r.
   (b) Verifique se os pontos $P = (1, 3, -3)$ e $Q = (-3, 4, 12)$ pertencem à reta r.
   (c) Obtenha equações paramétricas da reta que contém o ponto $(1, 4, -7)$ e é paralela à reta r.

3. Sejam $A = (3, 6, -7)$, $B = (-5, 2, 3)$ e $C = (4, -7, -6)$.

   (a) Mostre que A, B e C são vértices de um triângulo.
   (b) Escreva uma equação vetorial da reta que contém a mediana relativa ao vértice C.

Equações do plano

4. Escreva uma equação vetorial e equações paramétricas do plano π utilizando as informações dadas em cada caso.

   (a) π contém $A = (1, 2, 0)$ e é paralelo aos vetores $\vec{u} = (1, 1, 0)$ e $\vec{v} = (2, 3, -1)$.
   (b) π contém $A = (1, 1, 0)$ e $B = (1, -1, -1)$ e é paralelo ao vetor $\vec{v} = (2, 1, 0)$.
   (c) π contém $A = (1, 0, 1)$ e $B = (0, 1, -1)$ e é paralelo ao segmento de extremidades $C = (1, 2, 1)$ e $D = (0, 1, 0)$.
   (d) π contém os pontos $A = (1, 0, 1)$, $B = (2, 1, -2)$ e $C = (1, -1, 0)$.

5. Obtenha uma equação geral do plano π descrito em cada caso.

   (a) π contém o ponto $A = (9, -1, 0)$ e é paralelo aos vetores $\vec{u} = (0, 1, 0)$ e $\vec{v} = (1, 1, 1)$.
   (b) π contém os pontos $A = (1, 0, 1)$, $B = (-1, 0, 1)$ e $C = (2, 1, 2)$.
   (c) π contém $A = (1, 1, 0)$ e $B = (1, -1, -1)$ e é paralelo a $\vec{u} = (2, 1, 0)$.
   (d) π contém $P = (1, 0, -1)$ e $r : \ \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y}{3} = 2 - z$.
   (e) π contém $P = (1, -1, 1)$ e $r : \ X = (0, 2, 2) + \lambda(1, 1, -1)$.

[1] Resolva os exercícios sem omitir nenhuma passagem em seus cálculos. Respostas sem resolução e/ou justificativa não serão consideradas. **Data máxima de entrega: 10/07/2023 até 14:00 horas**

6. Dada uma equação geral, obtenha equações paramétricas do plano.

   (a) $4x + 2y - z + 5 = 0$
   (b) $5x - y - 1 = 0$
   (c) $z - 3 = 0$
   (d) $y - z - 2 = 0$

7. Dadas equações paramétricas, obtenha uma equação geral do plano.

   (a) $\begin{cases} x = 1 + \lambda - \mu \\ y = 2\lambda + \mu \\ z = 3 - \mu \end{cases}$ (b) $\begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 2 \\ z = 3 - \lambda + \mu \end{cases}$ (c) $\begin{cases} x = -2 + \lambda - \mu \\ y = 2\lambda + 2\mu \\ z = \lambda + \mu \end{cases}$ (d) $\begin{cases} x = \lambda - 3\mu \\ y = \lambda + 2\mu \\ z = 3\lambda - \mu \end{cases}$

Posições relativas entre retas

8. Verifique se as retas r e s são concorrentes e, se forem, determine o ponto de intersecção e obtenha uma equação geral do plano determinado por elas.

   (a) $r: \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = 1 + 3\lambda \end{cases}$, $s: \begin{cases} x = -1 + 4\mu \\ y = -1 + 2\mu \\ z = -2 + 6\mu \end{cases}$
   (b) $r:\ X = (1,1,0) + \lambda(1,2,3)$, $s:\ X = (2,3,3) + \mu(3,2,1)$
   (c) $r: \begin{cases} x = 2 - 4\lambda \\ y = 4 + 5\lambda \\ z = 11 \end{cases}$, $s: \dfrac{x}{2} = \dfrac{y-1}{-2} = z$
   (d) $r: \dfrac{x-2}{3} = \dfrac{y+2}{4} = z$, $s: \dfrac{x}{4} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z-3}{2}$

9. Dizemos que uma reta está escrita na *forma planar* quando ela é descrita como a interseção de dois planos na forma geral. Obtenha uma equação vetorial da reta r a partir de suas equações planares.

   (a) $r: \begin{cases} x + 2y + 3z - 1 = 0 \\ x - y + 2z = 0 \end{cases}$
   (b) $r: \begin{cases} x + y + z - 1 = 0 \\ x + y - z = 0 \end{cases}$
   (c) $r: \begin{cases} x = 3 \\ 2x - z + 1 = 0 \end{cases}$
   (d) $r: \begin{cases} y = 2 \\ z = 0 \end{cases}$

10. Estude a posição relativa das retas r e s.

   (a) $r:\ X = (1,-1,1) + \lambda(-2,1,-1)$, $s: \begin{cases} y + z = 3 \\ x + y - z = 6 \end{cases}$
   (b) $r: \dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y}{3} = \dfrac{z+1}{2}$, $s:\ X = (0,0,0) + \lambda(1,2,0)$
   (c) $r:\ X = (8,1,9) + \lambda(2,-1,3)$, $X = (3,-4,4) + \mu(1,-2,2)$
   (d) $r: \dfrac{x+1}{2} = y = z$, $s: \begin{cases} x + y - 3z = 1 \\ 2x - y - 2z = 0 \end{cases}$

Posições relativas entre reta e plano

11. Estude a posição relativa de r e π e, quando forem transversais, obtenha o ponto de intersecção P.

    (a) $r: \ X = (1,1,0) + \lambda(0,1,1)$, $\pi: \ x - y - z = 2$

    (b) $r: \ \dfrac{x-1}{2} = y = z$, $\pi: \ X = (3,0,1) + \lambda(1,0,1) + \mu(2,2,0)$

    (c) $r: \begin{cases} x - y = 1 \\ x - 2y = 0 \end{cases}$, $\pi: \ x + y = 2$

    (d) $r: \ x - 2y = 3 - 2z + y = 2x - z$, $\pi: \ X = (1,4,0) + \lambda(1,1,1) + \mu(2,1,0)$

12. Considere os exercícios abaixo.

    (a) Calcule m para que r seja paralela a π, onde $r: \ X = (1,1,1) + \lambda(2,m,1)$ e $\pi: \ X = (0,0,0) + \alpha(1,2,0) + \beta(1,0,1)$.

    (b) Calcule m e n para que r esteja contida em π, sendo $r: \ X = (n,2,0) + \lambda(2,m,m)$ e $\pi: \ x - 3y + z = 1$.

    (c) Para que valores de m a reta $r: \ \dfrac{x-1}{m} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z}{m}$ é transversal ao plano $\pi: \ x + my + z = 0$?

Posições relativas entre planos

13. Estude a posição relativa dos planos π_1 e π_2. Quando forem transversais, determine uma equação da intersecção na forma vetorial.

    (a) $\pi_1: \ X = (4,2,4) + \lambda(1,1,2) + \mu(3,3,1)$
    $\pi_2: \ X = (3,0,0) + \lambda(1,1,0) + \mu(0,1,4)$

    (b) $\pi_1: \ x - y + 2z - 2 = 0$, $\pi_2: X = (0,0,1) + \lambda(1,0,3) + \mu(-1,1,1)$

    (c) $\pi_1: \ 2x - y + z - 1 = 0$, $\pi_2: \ 4x - 2y + 2z - 9 = 0$

    (d) π_1 é determinado por $A = (0,1,6)$, $B = (5,0,1)$ e $C = (4,0,0)$.
    $\pi_2: 4x + 40y - 4z - 16 = 0$

14. Resolva os exercícios abaixo.

    (a) Mostre que os planos

    $$\pi_1: \begin{cases} x = -\lambda_1 + 2\mu_1 \\ y = m\lambda_1 \\ z = \lambda_1 + \mu_1 \end{cases} \quad \text{e} \quad \pi_2: \begin{cases} x = 1 + m\lambda_2 + \mu_2 \\ y = 2 + \lambda_2 \\ z = 3 + m\mu_2 \end{cases}$$

    são transversais qualquer que seja o número real m.

    (b) Calcule m e n para que os planos $\pi_1: \ X = (1,1,0) + \lambda(m,1,1) + \mu(1,1,m)$ e $\pi_2: \ 2x + 3y + 2z + n = 0$ sejam paralelos distintos.