Exercícios Propostos[1]

Produto escalar e norma

1. Seja $E = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ uma base ortonormal. Calcule $||\vec{u}||$ nos casos:

   (a) $\vec{u} = (1, 1, 1)_E$ (b) $\vec{u} = 3\vec{i} + 4\vec{k}$ (c) $\vec{u} = -\vec{i} + \vec{j}$ (d) $\vec{u} = 4\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$

2. Dados os pontos $A = (3, 4, 3)$, $B = (-3, 1, 4)$ e $C = (2, -3, 0)$, desenhe o triângulo ABC no plano cartesiano e encontre:

   (a) Os vetores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ e $\overrightarrow{CA}$.
   (b) O comprimento dos três lados do triângulo, dados por $||\overrightarrow{AB}||$, $||\overrightarrow{BC}||$ e $||\overrightarrow{CA}||$.
   (c) Os pontos médios dos três lados do triângulo.
   (d) A soma $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}$. Por que essa soma deve ser zero?

3. Demonstre as expressões abaixo.

   (a) Prove que $|\vec{u} \cdot \vec{v}| \leq ||\vec{u}||\ ||\vec{v}||$ (Desigualdade de Schwarz) e que $|\vec{u} \cdot \vec{v}| = ||\vec{u}||\ ||\vec{v}||$ se, e somente se, $\vec{u}$ é paralelo a $\vec{v}$.
   (b) Use o item (a) para provar que $||\vec{u} + \vec{v}|| \leq ||\vec{u}|| + ||\vec{v}||$ (Desigualdade triangular).
   (c) Prove que $4\vec{u} \cdot \vec{v} = ||\vec{u} + \vec{v}||^2 - ||\vec{u} - \vec{v}||^2$.

Ângulo entre vetores

4. São dadas as coordenadas de $\vec{u}$ e $\vec{v}$ em relação a uma base ortonormal fixada. Calcule, em radianos, o ângulo entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

   (a) $\vec{u} = (1, 0, 1)$, $\vec{v} = (-2, 10, 2)$
   (b) $\vec{u} = (-1, 1, 1)$, $\vec{v} = (1, 1, 1)$
   (c) $\vec{u} = (3, 3, 0)$, $\vec{v} = (2, 1, -2)$
   (d) $\vec{u} = \left(\sqrt{3}, 1, 0\right)$, $\vec{v} = \left(\sqrt{3}, 1, 2\sqrt{3}\right)$

5. Considerando uma base ortonormal fixada, determine x de modo que $\vec{u}$ e $\vec{v}$ sejam ortogonais, isto é, $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

   (a) $\vec{u} = (x, 0, 3)$, $\vec{v} = (1, x, 3)$
   (b) $\vec{u} = (x + 1, 1, 2)$, $\vec{v} = (x - 1, -1, -2)$
   (c) $\vec{u} = (x, x, 4)$, $\vec{v} = (4, x, 1)$
   (d) $\vec{u} = (x, -1, 4)$, $\vec{v} = (x, -3, 1)$.

6. Obtenha um vetor $\vec{u}$ ortogonal a $\vec{v} = (4, -1, 5)$ e $\vec{w} = (1, -2, 3)$ tal que $\vec{u} \cdot (1, 1, 1) = -1$.

Projeção ortogonal

7. Dada a base ortonormal $B = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, sejam $\vec{u} = 2\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$ e $\vec{v} = 3\vec{i} - 6\vec{j}$.

   (a) Obtenha a projeção ortogonal de $\vec{v}$ sobre $\vec{u}$.
   (b) Determine $\vec{p}$ e $\vec{q}$ tais que $\vec{v} = \vec{p} + \vec{p}$, sendo $\vec{p}$ paralelo e $\vec{q}$ ortogonal a $\vec{u}$. (Dica: $\vec{p}$ é o resultado do item a e $\vec{q} = \vec{v} - \vec{p}$.)

8. Calcule a projeção ortogonal de $\vec{v}$ sobre $\vec{u}$ em cada caso, onde se considerou uma base ortonormal fixada.

[1]Resolva os exercícios sem omitir nenhuma passagem em seus cálculos. Respostas sem resolução e/ou justificativa não serão consideradas. **Data máxima de entrega: 14/06/2023 até 14:00 horas**

(a) $\vec{v} = (1, -1, 2)$, $\vec{u} = (3, -1, 1)$
(b) $\vec{v} = (1, 3, 5)$, $\vec{u} = (-3, 1, 0)$
(c) $\vec{v} = (-1, 1, 1)$, $\vec{u} = (-2, 1, 2)$
(d) $\vec{v} = (1, 2, 4)$, $\vec{u} = (-2, -4, -8)$

Produto vetorial

9. Seja $E = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ uma base ortonormal *positiva ou cíclica*, isto é, $\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}$, $\vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}$, $\vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}$, ou seja, $\vec{j} \times \vec{i} = -\vec{k}$, $\vec{k} \times \vec{j} = -\vec{i}$, $\vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j}$, com $\vec{i} \times \vec{i} = \vec{j} \times \vec{j} = \vec{k} \times \vec{k} = \vec{0}$. Calcule o produto vetorial entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$ usando as propriedades da base cíclica nos seguintes casos:

   (a) $\vec{u} = \vec{i} - 3\vec{j}$ e $\vec{v} = 5\vec{i} - 15\vec{j} - 3\vec{k}$
   (b) $\vec{u} = 2\vec{i} - 16\vec{j} - 15\vec{k}$ e $\vec{v} = 3\vec{i} + 3\vec{j} - 2\vec{k}$
   (c) $\vec{u} = 3\vec{i} + 3\vec{j}$ e $\vec{v} = 5\vec{i} + 4\vec{j}$
   (d) $\vec{u} = 5\vec{k}$ e $\vec{v} = 2\vec{i} + \vec{j} - 3\vec{k}$

10. Fixada uma base ortonormal positiva, calcule $\vec{u} \times \vec{v}$ usando o *método do determinante* e determine $||\vec{u} \times \vec{v}||$.

   (a) $\vec{u} = (6, -2, -4)$, $\vec{v} = (-1, -2, 1)$
   (b) $\vec{u} = (7, 0, -5)$, $\vec{v} = (1, 2, -1)$
   (c) $\vec{u} = (1, -3, 1)$, $\vec{v} = (1, 1, 4)$
   (d) $\vec{u} = (2, 1, 2)$, $\vec{v} = (4, 2, 4)$

11. Resolva os sistemas para encontrar o vetor $\vec{x} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$.

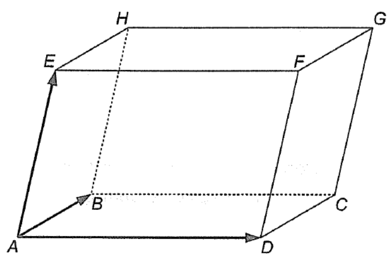
   (a) $\begin{cases} \vec{x} \cdot (2\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k}) = 9 \\ \vec{x} \times (-\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}) = -2\vec{i} + 2\vec{k} \end{cases}$
   (b) $\begin{cases} \vec{x} \times (1, 0, 1) = 2(1, 1, -1) \\ ||\vec{x}|| = \sqrt{6} \end{cases}$

Cálculo de áreas e volumes

12. Calcule as seguintes áreas:

   (a) Área do paralelogramo $ABCD$, sendo $\overrightarrow{AB} = (1, 1, -1)$ e $\overrightarrow{AD} = (2, 1, 4)$.
   (b) Área do triângulo ABC, sendo $\overrightarrow{AB} = (-1, 1, 0)$ e $\overrightarrow{AC} = (0, 1, 3)$.

13. Considere o paralelepípedo $ABCDEFGH$ da figura abaixo. Em relação a uma base ortonormal positiva, $\overrightarrow{AB} = (1, 0, 1)$, $\overrightarrow{BE} = (1, 1, 1)$ e $\overrightarrow{AD} = (0, 3, 3)$. Calcule:



   (a) A área do paralelogramo $ABCD$.
   (b) O volume do paralelepípedo $ABCDEFGH$.
   (c) O volume do tetraedro $EABD$.
   (d) A altura do tetraedro $EABD$ em relação à face DEB.