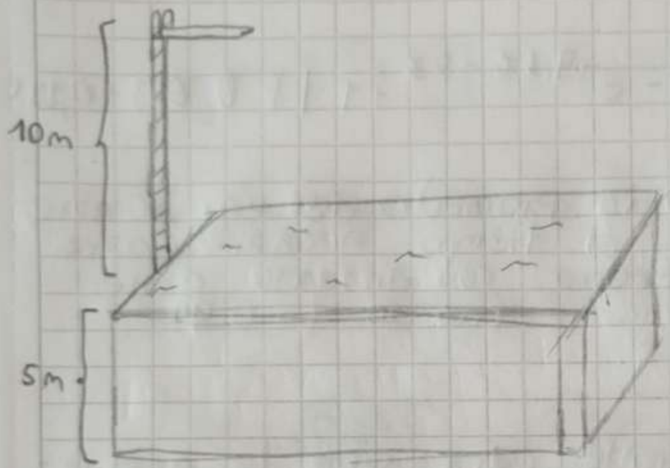
1. Las fosas para competencias de clavados, desde plataforma de 10m de altura, tiene profundidad de 5m.

a.) Justifique (cuantitativamente) por qué esa debe ser la profundidad que garantice la seguridad de los atletas



Analisamos el caso en 2 situaciones.

1. Antes de caer al agua

$E_1 = E_2$

$E_1 = mgh$

$E_2 = \frac{1}{2} m v^2$

$\Rightarrow \cancel{m}gh = \frac{1}{2}\cancel{m}v^2$

$v = \sqrt{2gh}$

$v = \sqrt{2 \cdot 9{,}8 \cdot 10} = 14 [m/s]$

2. Después de entrar al agua.

$V_0 = 14 m/s$

$V_f = 0$.

densidad del agua

$F_d = \frac{1}{2} C_d \rho A v^2$

$F_d = \frac{1}{2}(0.5)\left(1000 \frac{kg}{m^3}\right)\left(\pi\left(\frac{0{,}87}{2}\right)^2\right)v^2$

$F_d = 148{,}62 v^2$

Asumimos el cuerpo humano de un hombre adulto promedio en colombia, con

Altura: 1.72 m

Peso: 67 kg

Ancho = 0,87 m

También asumimos que el cuerpo humano se comporta como un cono con 30°, por lo tanto $C_d = 0.5$

Con $\cancel{m}g - \frac{\cancel{m}F_d}{m} = \cancel{m}a$

$\frac{dv}{dt} + 2{,}21 v^2 - 9.8 = 0$

Resolviendo con $v(0) = 14$.

$v(t) = 2.21\left(\frac{1 + e^{-9{,}3t - 0.3}}{1 - e^{-9{,}3t - 0.3}}\right)$

65 kg

Scribe

Si analizamos la función $v(t)$.

$\lim_{t\to\infty} v(t) = 2.21 \, [m/s]$ → Quiere decir, que en ese punto la velocidad es constante donde $a=0$

Integrando $v(t)$ tenemos:

$$y(t) = \int_0^t v(t)\,dt \Rightarrow 0.48 \left(\ln\left| - e^{-9,3t - 0.3} + 1 \right| + 0.65 \right) + 0,23t$$

Teniendo en cuenta una altura promedio de un hombre en colombia que es de 1.72, el tiempo necesario para que el centro de masa recorra esa distancia es de

$$y(t) = 1.72 \Rightarrow t = 4,65\ s$$

Por lo tanto, es tiempo suficiente para que la aceleración sea lo suficientemente pequeña para despreciarse. Esto quiere decir que es necesario 5m para que la persona pueda duplicar su altura y tenga aún libertad para moverse.

b.) Suponga un corcho esférico de 5cm de diámetro está en el fondo de la fosa. Calcule la velocidad a la que llega a la superficie.

$r = 2.5\,cm \to 0,025\,m$

Fuerza de flotación

$$F_b = \rho_{agua} V g \qquad \text{con} \quad V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi(0.025m)^3$$

$$V = 6,5 \times 10^{-5}$$

$$F_b = 1000 \cdot 6.54\times10^{-5} \cdot 9,8 \,[N] = 0,64\,N$$

Ahora hallamos el peso del corcho

$$P = \rho_{corcho} \cdot V \cdot g = 240 \cdot 6,5\times10^{-5} \cdot 9,8$$

$\rho_{corcho} = 240\ Kg/m^3$ $\qquad P = 0,154\,N$

$$\sum F_y = F_b - P = 0{,}64N - 0{,}154\ N = 0{,}487\,[N]$$

Cuando el corcho llega a la superficie, ocurre que la fuerza de arrastre se equilibra con la fuerza neta

$$F_{neta} = F_d = \frac{1}{2}\rho_{agua} \cdot C_d \cdot A \cdot V_f^2 \qquad \text{con } C_d \approx 0.47$$

$$F_{neta} = \frac{1}{2}(1000)(0{,}47)(\pi(0{,}025)^2)\,V_f^2$$

$$0{,}487 = 0{,}461\,V_f^2$$

$$V_f = \sqrt{\frac{0{,}487}{0{,}461}} = \boxed{1{,}03\ m/s}$$

c.) Suponga que una burbuja de un gas ideal se encuentra en el fondo de la fosa de clavados y calcule la velocidad con la cual arriba a la superficie.

Asumimos un diámetro similar al del corcho.

$d = 0{,}05m \rightarrow r = 0{,}025m$

$$F_b = \rho_{agua} \cdot V \cdot g = 1000 \cdot 6{,}54\times10^{-5} \cdot 9{,}8 = 0{,}64N$$

$$P = \rho_{gas} \cdot V \cdot g = (0{,}178)(6{,}5\times10^{-5})(9{,}8) = 1{,}13\times10^{-4}\,[N]$$

↳ Asumimos el helio

$$\sum F_y = F_b - P = 0{,}64 - 1.13\times10^{-4} = 0{,}64\,[N]$$

Hallamos la velocidad terminal, donde $\sum F_y = F_d$

$$F_{neta} = F_d = \frac{1}{2} \cdot \rho_{agua} \cdot C_d \cdot A \cdot V_f^2 \qquad \text{con } C_d \approx 0{,}47$$

$$F_d = \frac{1}{2}(1000)(0{,}47)\cdot(\pi(0{,}025)^2)\,V_f^2 \Rightarrow \boxed{V_f = 1{,}18\,[m/s]}$$

Ejercicios

2. Una partícula cargada se mueve en un campo electromagnético. La ecuación de Lorentz que provee fuerza que actúa sobre la partícula. Si es $\mathbb{E}$ el vector del campo eléctrico y $\mathbb{B}$ el vector de inducción magnética, la fuerza sobre una partícula de masa m que lleva una carga e y una velocidad $\mathbb{V}$ está dada por

$$\mathbb{F} = e\mathbb{E} + \frac{e}{c}\mathbb{V} \times \mathbb{B}$$

donde c es la velocidad de la luz y se supone que $v \ll c$

a.) Si no existe campo eléctrico y la partícula penetra en el campo magnético en una dirección normal a las líneas de flujo, demostrar que la trayectoria es un círculo de radio

$$r = \frac{cmv}{eB} = \frac{v}{w_c} \qquad \text{con } w_c \equiv \frac{eB}{mc}$$

frecuencia ciclotrónica.

con $\mathbb{E} = 0$

$\mathbb{F} = \frac{e}{c}\mathbb{V} \times \mathbb{B}$ Como la partícula penetra en la dirección normal del campo magnético, sabemos entonces que es perpendicular a $\mathbb{V}$ y a $\mathbb{B}$ debido a que la fuerza de Lorentz es perpendicular a ambos. Esto implica que sea igual a una fuerza centrípeta, por lo tanto:

$$F = \frac{e}{c}v \cdot B \cdot \overset{1}{\cancel{\operatorname{sen}\theta}} = m\frac{v^2}{r}$$

$$\frac{ev}{c}B = \frac{mv^2}{r} \quad \text{despejamos } r$$

$$r = \frac{mcv^{\cancel{2}}}{e\cancel{v}B} = \frac{mcv}{eB} \Rightarrow \text{con } w_c = \frac{eB}{mc} \Rightarrow \boxed{r = \frac{v}{w_c}}$$

b.) Haga coincidir el eje z con la dirección de $\mathbb{B}$ y $\mathbb{E}$ con el eje y. Entonces,

$$\mathbb{B} = B\hat{e}_z \qquad \mathbb{E} = E_y \hat{e}_y + E_z \hat{e}_z$$

Demostrar que la componente $z = z_0 + \dot{z}_0 t + \frac{eE_z}{2m} t^2$

donde

$$z(0) \equiv z_0 \quad y \quad \dot{z}(0) \equiv \dot{z}_0$$

Hallamos la componente z de la fuerza de Lorentz.

$$\mathbb{F} = e\mathbb{E} + \frac{e}{c} \mathbb{V} \times \mathbb{B}$$

en F_z

$$e\mathbb{E} = e(E_y \hat{e}_y + E_z \hat{e}_z)$$

$$\mathbb{V} \times \mathbb{B} = \begin{vmatrix} \hat{e}_x & \hat{e}_y & \hat{e}_z \\ V_x & V_y & V_z \\ 0 & 0 & B \end{vmatrix}$$

$$\mathbb{V} \times \mathbb{B} = V_y B \hat{e}_x - V_x B \hat{e}_y + 0\hat{e}_z$$

Por lo tanto.

$$F_z = eE_z$$

$$m\ddot{z} = eE_z \Rightarrow \ddot{z} = \frac{eE_z}{m} \quad \text{integramos.}$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{eE_z}{m} t + \dot{z}_0 \quad \text{integramos nuevamente.}$$

$$\boxed{z(t) = z_0 + \dot{z}_0 t + \frac{eE_z}{2m} t^2} \quad \blacksquare$$

2.

c) Calcule las expresiones para $x(t)$ e $y(t)$. Muestre que los valores medios en el tiempo de estos componentes de la velocidad son

$$\langle \dot{x} \rangle = \frac{cE_y}{B} \; ; \quad \langle \dot{y} \rangle = 0$$

Para ello demuestre que el movimiento es periodico y despues calcule el valor medio un periodo completo.

Las componentes en x e y son

$$F_x = \frac{e}{c} v_y B \, , \quad F_y = eE_y - \frac{e}{c} v_x B$$

$$m\ddot{x} = \frac{e}{c} v_y B \, , \quad m\ddot{y} = eE_y - \frac{e}{c} v_x B$$

$$\omega_c = \frac{eB}{mc}$$

$$\ddot{x} = \omega_c \dot{y} \quad , \quad \ddot{y} = \frac{eE_y}{m} - \omega_c \dot{x}$$

Ahora se resuelven las ecuaciones diferenciales.

solución homogénea $\dot{x}_h(t) = A\cos(\omega_c t) + B\,sen(\omega_c t)$

solución particular $\dot{x}_p(t) = C \rightarrow 0 + \omega_c^2 C = \frac{eE_y \omega_c}{m}$

$\rightarrow C = \frac{eE_y}{m\omega_c}$

Por tanto:

$\rightarrow \dot{x}(t) = A\cos(\omega_c t) + B\,sen(\omega_c t) + \frac{cE_y}{B}$

Integrando

$x(t) = \frac{A}{\omega_c} sen(\omega_c t) - \frac{B}{\omega_c} \cos(\omega_c t) + \frac{cE_y}{B} t + D$

Ahora $y(t)$ $\ddot{x} = \omega_c \dot{y}$

$\rightarrow \dot{y}(t) = \frac{1}{\omega_c} \ddot{x}(t)$

Derivando $\dot{x}$ tenemos $\ddot{x}(t) = -A\omega_c\,sen(\omega_c t) + B\omega_c \cos(\omega_c t)$

Por lo tanto $\dot{y}(t) = -A\,sen(\omega_c t) + B\cos(\omega_c t)$

Integrando.

$$y(t)\ \frac{A}{\omega_c}\cos(\omega_c t) + \frac{B}{\omega_c}\operatorname{sen}(\omega_c t) + E$$

Como $x(t)$ y $y(t)$ tienen terminos oscilatorios con una frecuencia dada significa que el movimiento es periodico con un periodo $T = \frac{2\pi}{\omega_c}$

Ahora los valores medios

$$\langle \dot{x} \rangle = \frac{1}{T}\int_0^T \Big(A \underbrace{\cancel{\cos(\omega_c t)}}_{0} + B \underbrace{\cancel{\operatorname{sen}(\omega_c t)}}_{0} + \frac{cE_y}{B}\Big)dt$$

como es en un periodo, el termino $\cos(x)$ y $\operatorname{sen}(x)$ son 0.

$$= \frac{1}{\cancel{T}}\left(\frac{cE_y}{B}\cdot \cancel{T}\right) = \frac{cE_y}{B} \quad \checkmark$$

$$\langle \dot{y} \rangle = \frac{1}{T}\int_0^T \Big(-A\,\underbrace{\cancel{\operatorname{sen}(\omega_c t)}}_{0} + B\,\underbrace{\cancel{\cos(\omega_c t)}}_{0}\Big)dt$$

$$= 0 \quad \checkmark$$

D) Integre las expresiones de la velocidad determinadas arriba y demuestre que podemos escribir,

$$x(t) = \frac{A}{w_c}\,sen(w_c t) + \frac{cE_Y}{B}\,t \;\; ; \;\; y(t) = \frac{A}{w_c}\,(cos(w_c t) - 1)$$

las cuales son ecuaciones paramétricas de una trocoide. Trazar la proyección de la trayectoria sobre el plano x - y en los casos

$$x(t) = \frac{A}{w_c}\,sen(w_c t) - \frac{B}{w_c}\,cos(w_c t) + \frac{cE_Y}{B}\,t + D$$

$$y(t) = \frac{A}{w_c}\,cos(w_c t) + \frac{B}{w_c}\,sen(w_c t) + E$$

En $t = 0$, $y(0) = 0$ tenemos

$$y(0) = \frac{A}{w_c}\,cos(0) + \cancel{\frac{B}{w_c}\,sen(0)} + E = \frac{A}{w_c} + E$$

$$E = -\frac{A}{w_c}$$

En $t = 0$, $\dot{y}(0) = 0$

$$\dot{y}(0) = -A\,sen(0) + B\,cos(0) = B = 0$$

Con estos condiciones.

$$x(t) = \frac{A}{\omega_c} \operatorname{sen}(\omega_c t) + \frac{cE_y}{B} t + D$$

$$y(t) = \frac{A}{\omega_c} \cos(\omega_c t) - \frac{A}{\omega_c}$$

Si decimos $D = 0$, obtenemos

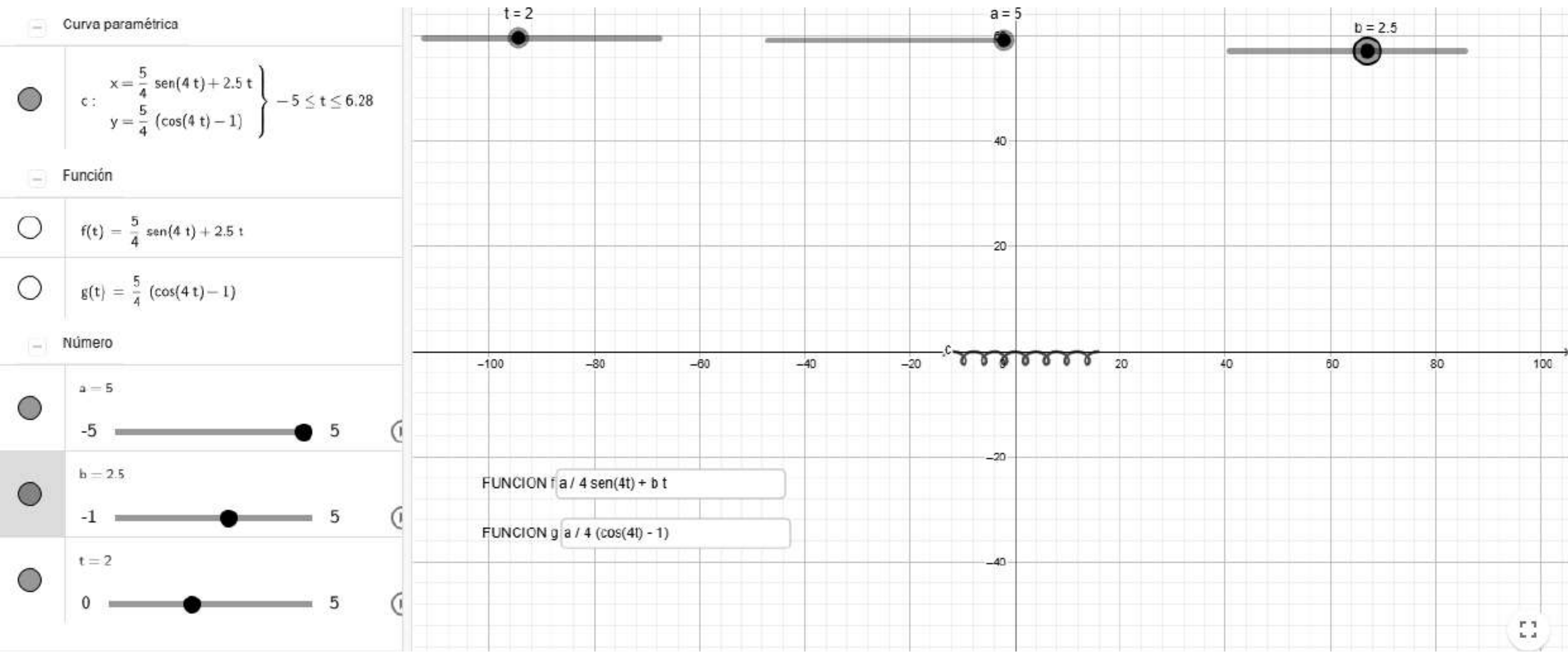
$$x(t) = \frac{A}{\omega_c} \operatorname{sen}(\omega_c t) + \frac{cE_y}{B} t$$

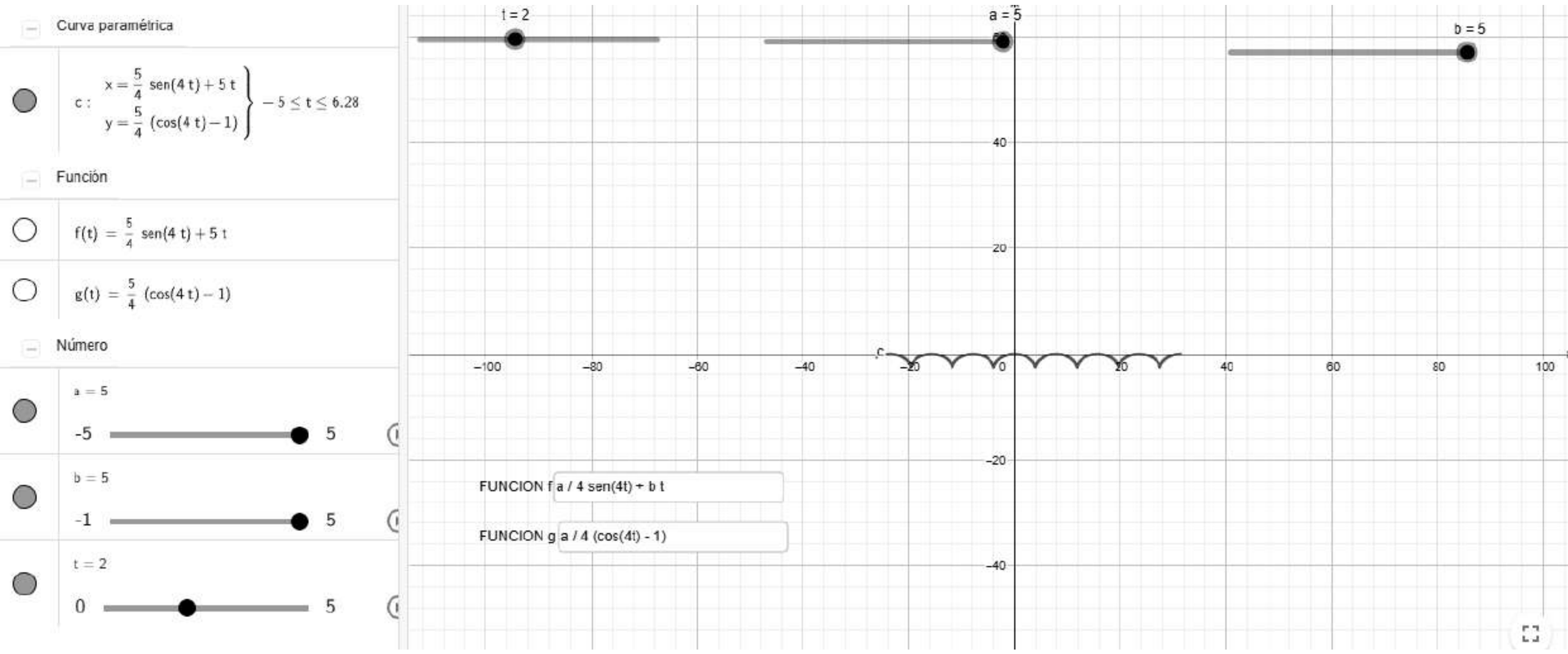
$$y(t) \frac{A}{\omega_c}(\cos(\omega_c t) - 1)$$

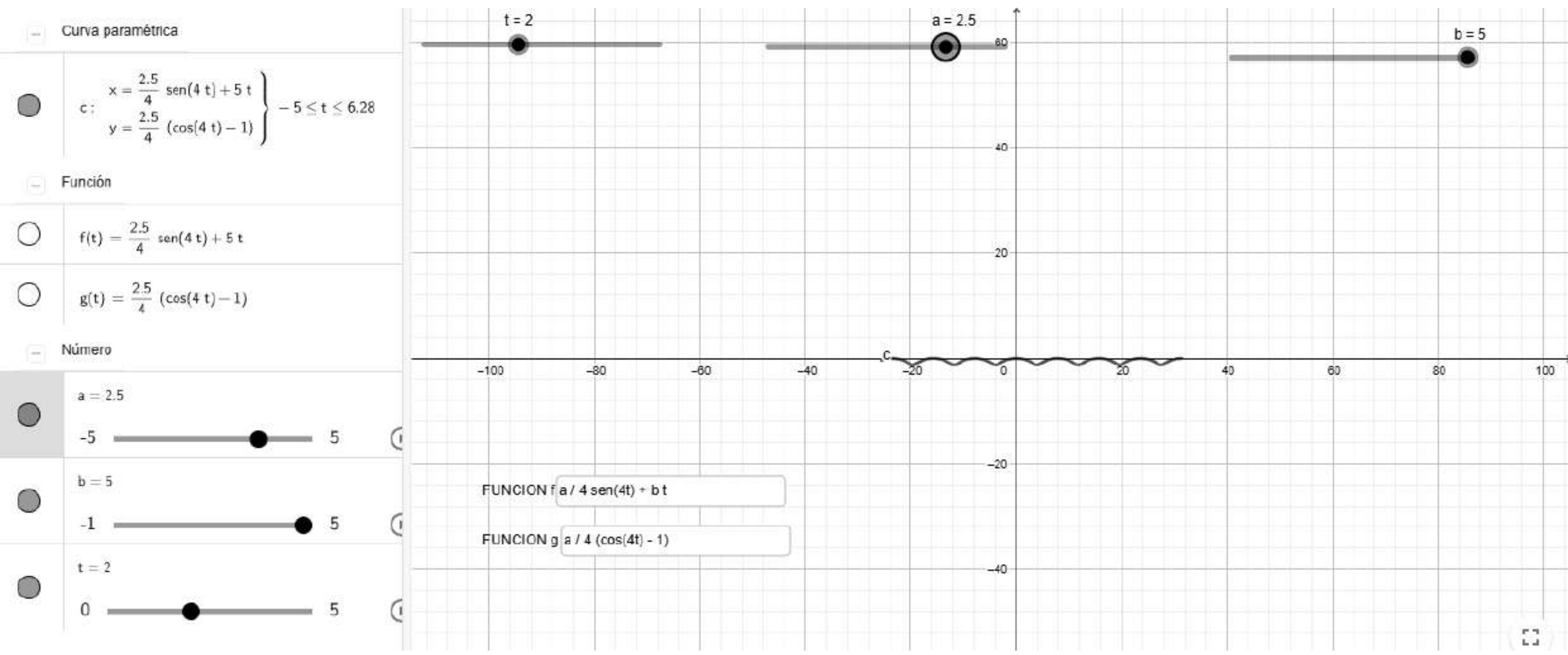
Si $A > \left|\frac{cE_y}{B}\right|$ es una prolata

Si $A < \left|\frac{cE_y}{B}\right|$ es una curtata

Si $A > \left|\frac{cE_y}{B}\right|$ es una cicloide


Curva paramétrica
c : x = 5/4 sen(4 t) + 2.5 t
y = 5/4 (cos(4 t) − 1)
−5 ≤ t ≤ 6.28
Función
f(t) = 5/4 sen(4 t) + 2.5 t
g(t) = 5/4 (cos(4 t) − 1)
Número
a = 5
-5
5
b = 2.5
-1
5
t = 2
0
5
t = 2
a = 5
b = 2.5
FUNCION f a / 4 sen(4t) + b t
FUNCION g a / 4 (cos(4t) - 1)


Curva paramétrica
c : x = 5/4 sen(4 t) + 5 t, y = 5/4 (cos(4 t) − 1)   −5 ≤ t ≤ 6.28
Función
f(t) = 5/4 sen(4 t) + 5 t
g(t) = 5/4 (cos(4 t) − 1)
Número
a = 5
-5 5
b = 5
-1 5
t = 2
0 5
t = 2
a = 5
b = 5
FUNCION f a / 4 sen(4t) + b t
FUNCION g a / 4 (cos(4t) - 1)


Curva paramétrica
c : x = 2.5/4 sen(4 t) + 5 t
y = 2.5/4 (cos(4 t) − 1)
− 5 ≤ t ≤ 6.28
Función
f(t) = 2.5/4 sen(4 t) + 5 t
g(t) = 2.5/4 (cos(4 t) − 1)
Número
a = 2.5
-5
5
b = 5
-1
5
t = 2
0
5
t = 2
a = 2.5
b = 5
FUNCION f a / 4 sen(4t) + b t
FUNCION g a / 4 (cos(4t) - 1)

07/02/2025

Problema 3

3. Una gota de lluvia de masa inicial m_0 g, cae, partiendo del reposo y cruza una nube cuyo espesor es de a cm.
A medida que va cayendo gana masa a razón de b g/seg
Las goticas que forman la nube están en reposo con relación a la tierra.
El movimiento de la gota encuentra una resistencia proporcional a su velocidad.

a) Escriba la ecuación diferencial del movimiento de la gota

Consideremos los factores principales de este problema

- $m(t) = m_0 + bt$ Masa de la gota
- $F_g = m(t)g$ Peso de la gota
- $F_r = -kv$ Fricción (k es una constante de proporcionalidad

Ahora aplicamos la segunda ley de Newton

$$\frac{d}{dt}(m(t)\,v(t)) = m(t)\,g - kv$$

$$m(t)\frac{dv}{dt} + v(t)\frac{dm}{dt} = m(t)\,g - k\,v(t)$$

Resolvemos que $\frac{dm}{dt} = \frac{d}{dt}(m_0 + bt) = b$

$$(m_0 + bt)\frac{dv}{dt} + v(t)\,b = (m_0 + bt)\,g - k\,v(t)$$

$$(m_0 + bt)\frac{dv}{dt} = (m_0 + bt)\,g - (k+b)\,v(t)$$

$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{(k+b)}{m_0 + bt}\,v(t)$$

b) Determine la velocidad de la gota al salir de la nube si, durante el paso por ella duplicó su masa.

Factores principales

- $m(t_f) = 2m_0 \rightarrow m_0 + bt_f = 2m_0$

$$\rightarrow t_0 = \frac{m_0}{b}$$

Ahora hay que resolver la ecuación diferencial de primer orden

$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{k+b}{m_0+bt} v(t)$$

Se resuelve con factor integrante

$$\frac{dv}{dt} + P(t)\,v(t) = Q(t)$$

$$P(t) = \frac{k+b}{m_0+bt} \qquad Q(t) = g$$

$$\mu(t) = e^{\int P(t)\,dt}$$

$$\int P(t)\,dt = \int \frac{k+b}{m_0+bt}\,dt$$

$$u = m_0 + bt \qquad du = b\,dt \qquad dt = \frac{du}{b}$$

$$\int \frac{k+b}{u} \cdot \frac{du}{b} = \frac{k+b}{b} \int \frac{1}{u}\,du = \frac{k+b}{b} \ln|u| + C$$

$$\int P(t)\,dt = \frac{k+b}{b} \ln(m_0+bt) + C$$

$$\mu(t) = e^{\frac{k+b}{b} \ln(m_0+bt)} = (m_0+bt)^{\frac{k+b}{b}}$$

Ahora se multiplica el factor a ambos lados de la ecuación y queda

$$\frac{d}{dt}\left(v(t) \cdot (m_0+bt)^{\frac{k+b}{b}}\right) = g(m_0+bt)^{\frac{k+b}{b}}$$

Luego se integra a ambos lados y

$$v(t)(m_0+bt)^{\frac{k+b}{b}} = g\frac{(m_0+bt)^{\frac{k+2b}{b}}}{k+2b}+c$$

Despejando

$$v(t)=\frac{g}{k+2b}(m_0+bt)+C(m_0+bt)^{-\frac{k+b}{b}}$$

Aplicando la condicion inicial $v(0)=0$

$$C=-\frac{g}{k+2b}m_0\cdot m_0^{\frac{k+b}{b}} = -\frac{g}{k+2b}m_0^{\frac{k+2b}{b}}$$

Sustituyendo C

$$v(t)=\frac{g}{k+2b}\left((m_0+bt)-m_0^{\frac{k+2b}{b}}(m_0+bt)^{-\frac{k+b}{b}}\right)$$

Ahora al fin se evalua en $t_f=\frac{m_0}{b}$

$$v(t_f)=\frac{g}{k+2b}\left(2m_0-m_0^{\frac{k+2b}{b}}(2m_0)^{-\frac{k+b}{b}}\right)$$

Simplificando y factorizando.

$$v(t_f)=\frac{gm_0}{k+2b}\left(2-2^{-\frac{k+b}{b}}\right)$$

c) Cual será la velocidad límite de la gota después de salir de la nube

Como su masa empieza a ser constante, la ecuación diferencial cambia

$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{k+b}{m_0+bt} v(t) \rightarrow \frac{dv}{dt} = g - \frac{k}{2m_0} v(t)$$

$$m_0 + bt_f = 2m_0$$

La velocidad límite se alcanza cuando $\frac{dv}{dt} = 0$.

$$0 = g - \frac{k}{2m_0} v_{lim} \rightarrow v_{lim} = \frac{2m_0 g}{k}$$