Ejercicios.

1. Considere un sistema con el Lagrangiano

$$L = \frac{1}{2}a(\dot{x}^2 \operatorname{sen}^2 y + \dot{y}^2) + \frac{1}{2}b(\dot{x}\cos y + \dot{z})^2$$

donde a y b son constantes

a.) Derive las ecuaciones de movimiento del sistema.

Para encontrar las ecuaciones de movimiento, usamos:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \qquad \text{con } q_i = x, y, z$$

• Para x

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 0 \qquad \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = a\dot{x}\operatorname{sen}^2 y + b\cos y(\dot{x}\cos y + \dot{z})$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = a\ddot{x}\operatorname{sen}^2 y + 2a\dot{x}\dot{y}\operatorname{sen}y\cos y - b\dot{y}\operatorname{sen}y(\dot{x}\cos y + \dot{z}) + b\cos y(\ddot{x}\cos y - \dot{x}\dot{y}\operatorname{sen}y + \ddot{z})$$

$$a\ddot{x}\operatorname{sen}^2 y + 2a\dot{x}\dot{y}\operatorname{sen}y\cos y - b\dot{y}\operatorname{sen}y(\dot{x}\cos y + \dot{z}) + b\cos y(\ddot{x}\cos y - \dot{x}\dot{y}\operatorname{sen}y + \ddot{z}) = 0$$

$$\boxed{\ddot{x}[a\operatorname{sen}^2 y + b\cos^2 y] + 2\dot{x}\dot{y}\operatorname{sen}y\cos y[a - b] - b\dot{z}\dot{y}\operatorname{sen}y + \ddot{z}b\cos y = 0}$$

Ecuación de movimiento

• Para y

$$\frac{\partial L}{\partial y} = a\dot{x}^2\operatorname{sen}y\cos y - b\dot{x}\operatorname{sen}y(\dot{x}\cos y + \dot{z})$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = a\dot{y} \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\right) = a\ddot{y}$$

$$a\ddot{y} - a\dot{x}^2\operatorname{sen}y\cos y - b\dot{x}\operatorname{sen}y(\dot{x}\cos y + \dot{z}) = 0$$

$$\boxed{a\ddot{y} - \dot{x}^2\operatorname{sen}y\cos y[a + b] - b\dot{x}\dot{z}\operatorname{sen}y = 0}$$ Ecuación de movimiento

• Para z

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z} = 0 \qquad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{z}} = b(\dot{x}\cos y + \dot{z})$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{z}}\right) = b\ddot{x}\cos y - b\dot{x}\,\mathrm{sen}\,y + \ddot{z}b$$

$$\boxed{\ddot{z} + \ddot{x}\cos y - \dot{x}\dot{y}\,\mathrm{sen}\,y = 0}$$ Ecuación de movimiento.

b.) Calcule e identifique las cantidades conservadas. ¿Es integrable el sistema?

Hallamos los momentos conjugados de $\mathcal{L} \rightarrow p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}$ con $q_i = (x, y, z)$

• $p_x = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = a\dot{x}\,\mathrm{sen}^2 y + b\cos y(\dot{x}\cos y + \dot{z})$

• $p_y = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}} = a\dot{y}$

• $p_z = b(\dot{x}\cos y + \dot{z})$

Una cantidad se conserva si su derivada temporal es cero, es decir, si $\frac{dp_i}{dt} = 0$. Analizando el lagrangiano

• En p_x

$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 0$, por lo tanto $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}}\right) = \frac{d}{dt} p_i = 0$ Se conserva

• En p_y

$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} \neq 0$ por lo tanto No se conserva.

• En p_z

$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z} = 0$ por lo tanto Se conserva

Además como $\mathcal{L}$ no depende explícitamente del tiempo, la Energía total del sistema se conserva.

Integrabilidad

Para que el sistema sea integrable, necesitaríamos tantas cantidades conservadas independientes como grados de libertad, en este caso 3. Como solo conocemos 2 cantidades conservadas, no podemos afirmar que el sistema sea integrable.

c.) Calcule la energía del sistema.

La energía total del sistema se calcula cómo

$$E = \dot{x}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} + \dot{y}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}} + \dot{z}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{z}} - \mathcal{L}$$

con $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = a\dot{x}\,\text{sen}^2 y + b\cos y(\dot{x}\cos y + \dot{z})$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}} = a\dot{y} \qquad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{z}} = b(\dot{x}\cos y + \dot{z})$$

$$E = a\dot{x}^2\text{sen}^2 y + b\dot{x}\cos y(\dot{x}\cos y + \dot{z}) + a\dot{y}^2 + \dot{z}b(\dot{x}\cos y + \dot{z}) - \frac{1}{2}a(\dot{x}^2\text{sen}^2 y + \dot{y}^2) - \frac{1}{2}b(\dot{x}\cos y + \dot{z})^2$$

$$E = \frac{1}{2}a\dot{x}^2\text{sen}^2 y - \frac{1}{2}a\dot{y}^2 + \frac{1}{2}b\dot{x}^2\cos^2 y + a\dot{y}^2 + \frac{1}{2}b\dot{z}^2 + b\dot{z}\dot{x}\cos y$$

$$E = \frac{1}{2}a[\dot{x}^2\text{sen}^2 y + \dot{y}^2] + \frac{1}{2}b[\dot{x}^2\cos^2 y + 2\dot{z}\dot{x}\cos y + \dot{z}^2]$$

$$\boxed{E = \frac{1}{2}a[\dot{x}^2\text{sen}^2 y + \dot{y}^2] + \frac{1}{2}b[\dot{x}\cos y + \dot{z}]^2}$$

d.) Suponga que $y(t) = y_0 = cte$, es una solución. ¿Cuáles son $x(t)$ y $z(t)$ en este caso?

con $y(t) = y_0 \Rightarrow \frac{dy}{dt} = 0$.

El lagrangiano queda

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} a \dot{x}^2 \operatorname{sen}^2 y_0 + \frac{1}{2} b (\dot{x} \cos y_0 + \dot{z})^2$$

Hallando las ecuaciones de movimiento

- Para x

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 0 \qquad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = a \dot{x} \operatorname{sen}^2 y_0 + b \cos y_0 (\dot{x} \cos y_0 + \dot{z})$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}}\right) = a \ddot{x} \operatorname{sen}^2 y_0 + b \cos y_0 (\ddot{x} \cos y_0 + \ddot{z})$$

$$\ddot{x} [a \operatorname{sen}^2 y_0 + b \cos^2 y_0] + b \cos y_0 \ddot{z}$$

$$\ddot{x} = \frac{b \cos y_0}{a \operatorname{sen}^2 y_0 + b \cos^2 y_0} \ddot{z} \qquad (1)$$

- Para z

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z} = 0 \qquad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{z}} = b (\dot{x} \cos y_0 + \dot{z}) -$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{z}}\right) = \ddot{x}\, b \cos y_0 + b \ddot{z}$$

$$\ddot{x} \cancel{b} \cos y_0 + \cancel{b} \ddot{z} = 0$$

$$\ddot{z} = -\ddot{x} \cos y_0 \qquad (2)$$

Reemplazando (2) en (1)

$$a \ddot{x} \operatorname{sen}^2 y_0 + \cancel{b \cos y_0 (\dot{x} \cos y_0 - \dot{x} \cos y_0)} = 0$$

$$a \ddot{x} \operatorname{sen}^2 y_0 = 0.$$

Como $\operatorname{sen}^2 y_0 \neq 0$ a menos que sea $n\pi$ con $n \in \mathbb{N}$ ...

$$\boxed{\ddot{x} = 0.} \Rightarrow \text{por lo tanto } \boxed{x(t) = x_0 + V_x t}$$

Ahora para $z(t)$.

$\ddot{z} = -\ddot{x}\cos y_0 = -(0)\cos y_0) = 0.$

$\ddot{z} = 0$

por lo tanto $\boxed{z(t) = z_0 + V_z t}$

Entonces

$\boxed{x(t) = x_0 + V_x t}$ y $\boxed{z(t) = z_0 + V_z t}$ ∎ para $y = y_0$

Tarea 25/02/27

2. Una particula de masa m se mueve en el potencial unidimensional

$$V(x) = -\frac{V_0}{\cosh^2 \alpha x}$$

a) Lagrangeano y ecuaciones de movimiento

$$L = T - V \qquad T = \frac{1}{2} m\dot{x}^2$$
$$V = -\frac{V_0}{\cosh^2 \alpha x}$$

$$L = \frac{1}{2} m\dot{x}^2 + \frac{V_0}{\cosh^2 \alpha x}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = m\ddot{x}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = -\frac{2V_0 \alpha \operatorname{senh}(\alpha x)}{\cosh^3(\alpha x)}$$

$$m\ddot{x} + \frac{2V_0\alpha \operatorname{senh}(\alpha x)}{\cosh^3(\alpha x)} = 0$$

b) ¿Existen cantidades conservadas?

La energía es una cantidad conservada puesto que no depende del tiempo.

c) Muestre que el movimiento de la partícula es finito si su energía $E<0$ y es infinito si $E \geq 0$

Caso $E<0$

Si es negativa quiere decir que el término de energía potencial es mayor, por lo que se mantendrá dentro de la zona de acción del potencial

Caso $E \geq 0$

Si es mayor significa que la energia cinetica es mayor por lo que la particula rompería la barrera del potencial y se convertirá en una particula libre.

d) Encuentre los puntos de retorno y el minimo valor posible de E.

puntos de retorno son los cuales en donde $\dot{x} = 0$, por tanto

$$E = -\frac{V_0}{\cosh^2(\alpha x)} \quad , \text{ resolviendo}$$

$$\cosh^2(\alpha x) = -\frac{V_0}{E}$$

Como $\cosh^2(\alpha x) \geq 1$, E debe ser menor que 0.

El valor mínimo de E es cuando la partícula está al fondo del potencial, es decir cuando $E=0$, además se anula la energía cinética

$$E_{min} = -\frac{V_0}{\cosh^2(0)} = -V_0$$

e) Para el movimiento finito encuentre el periodo en función de E.

$E<0$

$$E = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{V_0}{\cosh^2(\alpha x)}$$, despejamos $\dot{x}$

$$\dot{x} = \sqrt{\frac{2}{m}\left(E + \frac{V_0}{\cosh^2(\alpha x)}\right)}$$

En un sistema oscilatorio, el periodo es

$$T = 2\int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\dot{x}}$$

Por tanto

$$T = 2\int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E + \frac{V_0}{\cosh^2(\alpha x)}\right)}}$$

Como vemos depende de E, V_0 y α como valores específicos.

3. El Lagrangiano de un sistema se puede expresar como.

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}\left(a\dot{x}^2 + 2b\dot{x}\dot{y} + c\dot{y}^2\right) - \frac{k}{2}\left(ax^2 + 2bxy + cy^2\right)$$

donde a, b, c son constantes, pero sujetas a la condición $b^2 - ac \neq 0$

a.) Encuentre las ecuaciones de movimiento para este sistema

Usamos La ecuación de Lagrange

• Para x.

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = -k\left[ax + by\right] \qquad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = m\left[a\dot{x} + b\dot{y}\right]$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}}\right) = m\left[a\ddot{x} + b\ddot{y}\right]$$

$$ma\ddot{x} + mb\ddot{y} + kax + kby = 0.$$

$$ma\ddot{x} = kax + kby + mb\ddot{y}$$

• Para y

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = -k\left[bx + cy\right] \qquad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}} = m\left[b\dot{x} + c\dot{y}\right]$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}}\right) = m[b\ddot{x} + c\ddot{y}]$$

$$mb\ddot{x} + mc\ddot{y} + kbx + kcy = 0.$$

$$\begin{cases} m[a\ddot{x} + b\ddot{y}] + k[ax + by] = 0 \\ m[b\ddot{x} + c\ddot{y}] + k[bx + cy] = 0. \end{cases} \quad (1)$$

Definimos el sistema de ecuaciones como

$$m\underbrace{\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}}_{C}\underbrace{\begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{pmatrix}}_{\ddot{X}} + k\underbrace{\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}}_{C}\underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$mC\ddot{X} + kCX = 0$$

Para resolver el sistema, planteamos una solución

$X(t) = Ae^{i\omega t}$ con $A = \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \end{pmatrix}$ vector de amplitudes y ω la frecuencia angular.

Sustituyendo.

$$-m\omega^2 CA + kCA = 0 \Rightarrow [kC - m\omega^2 C]A = 0.$$

para que exista una solución no trivial con $A = 0$, el determinante de la matriz debe ser cero

$$\det(kC - m\omega^2 C) = 0.$$

$$\det(C[k - m\omega^2]) = 0$$

$$(k - m\omega^2)\det(C) = 0.$$

$$\det(C) = \det\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} = \underbrace{ac - b^2 \neq 0}_{\text{Lo sabemos por el ejercicio}}$$

por lo tanto, la única solución es.

$$k - m\omega^2 = 0.$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Como la única frecuencia es $w = \sqrt{\frac{k}{m}}$ las soluciones son de la forma

$$\begin{cases} x(t) = A_1 \cos(wt) + A_2 \operatorname{sen}(wt) \\ y(t) = B_1 \cos(wt) + B_2 \operatorname{sen}(wt) \end{cases}$$

Sustituimos en (1)

$$\begin{cases} aA_1 + bB_1 = 0 \\ aA_2 + bB_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow B_1 = -\frac{a}{b} A_1 \quad , B_2 = -\frac{a}{b} A_2$$

La solución entonces es.

$$\begin{cases} x(t) = A_1 \cos wt + A_2 \operatorname{sen} wt \\ y(t) = -\frac{a}{b} (A_1 \cos wt + A_2 \operatorname{sen} wt \end{cases}$$

b.) Calcule e identifique las cantidades conservadas

Inicialmente, vemos que $\mathcal{L}$ no depende explícitamente del tiempo, por lo que la energía total del sistema se conserva

Ahora hallamos los momentos conjugados

- Para x

$$p_x = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = m[a\dot{x} + b\dot{y}]$$

para que se conserve, $\frac{dp_x}{dt} = 0$

Usando el lagrangiano sabemos que para que

$\frac{dp_x}{dt} = 0$ debe ocurrir que $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 0$, pero no ocurre

por lo tanto, no se conserva p_x y lo mismo ocurre por p_y

Conclusión

Solo se conserva la energía.

c.) ¿El sistema es integrable?

Para que un sistema sea integrable, debe ocurrir que hayan suficiente cantidades que se conserven como grados de libertad, en este caso 2 grados de libertad. Por lo tanto, no es integrable.

en este caso 2 grados de libertad...
integrable

4. Una partícula se mueve en un plano sujeta a una fuerza centro de magnitud

$$F = \frac{1}{r^2}\left[1 - \frac{(\dot{r}^2 - 2r\ddot{r})}{c^2}\right]$$

donde r es la distancia de la partícula al centro de fuerza y c es una constante. Halle el potencial generalizado que resulta del tal fuerza y, a partir de este, el Lagrangiano del sistema.

Para hallar el potencial generalizado, tenemos: para una fuerza generalizada Q_i

$$Q_i = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial U}{\partial q_i}$$

Para la fuerza central, tenemos entonces:

$$F = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial U}{\partial \dot{r}}\right) - \frac{\partial U}{\partial r}$$

Descomponemos la fuerza $F = \frac{1}{r^2} - \frac{1}{r^2}\frac{(\dot{r}^2 - 2r\ddot{r})}{c^2}$

Dado que F depende de $r, \dot{r}$ y $\ddot{r}$

$$U = U_1(r) + U_2(r, \dot{r})$$

Debido a que $U_1(r)$ depende únicamente de r, podemos decir que

$$-U_1(r) = \int \frac{1}{r^2} dr = -\frac{1}{r}$$

Sugerimos entonces un potencial $U_1(r) = \frac{1}{r}$

$$U_1(r) = \frac{1}{r}$$

Ahora para $U_2(r,\dot{r})$ podemos sugerir

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial U_2}{\partial \dot{r}}\right) - \frac{\partial U_2}{\partial r} = -\frac{1}{r^2}\frac{(\dot{r}^2 - 2r\ddot{r})}{c^2}$$

Se Propone que $U_2(r,\dot{r}) = f(r)\dot{r}^2$

$$\frac{d}{dt}\left(2f(r)\dot{r}\right) - \frac{\partial}{\partial r}\left(f(r)\dot{r}^2\right)$$

$$\frac{d}{dt}\left(2f(r)\dot{r}\right) = 2\frac{df}{dr}\dot{r}^2 + 2f(r)\ddot{r}$$

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(f(r)\dot{r}^2\right) = \frac{df}{dr}\dot{r}^2$$

Sustituimos

$$2\frac{df}{dr}\dot{r}^2 + 2f(r)\ddot{r} - \frac{df}{dr}\dot{r}^2 = -\frac{1}{r^2}\frac{(\dot{r}^2 - 2r\ddot{r})}{c^2}$$

$$\frac{df}{dr}\dot{r}^2 + 2f(r)\ddot{r} = -\frac{\dot{r}^2}{r^2c^2} + \frac{2r\ddot{r}}{r^2c^2}$$

Hallamos $f(r)$

$$\cancel{2}f(r)\cancel{\ddot{r}} = \frac{\cancel{2}r\cancel{\ddot{r}}}{r^2c^2} \qquad \frac{df}{dr}\cancel{\dot{r}^2} = -\frac{\cancel{\dot{r}^2}}{r^2c^2}$$

$$f(r) = \frac{1}{rc^2} \qquad \frac{df}{dr} = -\frac{1}{r^2c^2}$$

por lo tanto

$$U_2 = \frac{\dot{r}^2}{rc^2}$$

Hallos $U = U_1(r) + U_2(r,\dot{r})$

$$\boxed{U = \frac{1}{r} + \frac{\dot{r}^2}{rc^2} = \frac{1}{r}\left[1 + \frac{\dot{r}^2}{c^2}\right]}$$ potencial generalizado

Ahora hallamos el lagrangiano

$\mathcal{L} = T - U$ en coordenadas polares

$T = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2)$

$$\boxed{\mathcal{L} = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) - \frac{1}{r}\left[1 + \frac{\dot{r}^2}{c^2}\right]}$$