Ejercicios.

1. Calcule la trayectoria que da la distancia más corta entre dos puntos sobre la superficie de un cono invertido, con ángulo de vértice α. Use coordenadas cilíndricas.

Para coordenadas cilíndricas $(x, y, z) \to (r, \theta, z)$

En un cono invertido $\cot(\alpha) = \frac{z}{r} \Rightarrow z = r\cot(\alpha)$

Diferenciamos para obtener dz:

$$dz = \cot(\alpha)\, dr \qquad (1)$$

Hallamos el ds^2:

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + dz^2 \qquad (2)$$

Reemplazamos (1) en (2).

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + \cot^2(\alpha)\, dr^2$$

$$ds^2 = (1 + \cot^2(\alpha))\, dr^2 + r^2 d\theta^2$$

$$ds^2 = \csc^2(\alpha)\, dr^2 + r^2 d\theta^2$$

Teniendo lo anterior, vamos a minimizar la integral de longitud del arco:

$$\mathcal{L} = \int ds = \int \sqrt{\csc^2(\alpha)\, dr^2 + r^2 d\theta^2}$$

parametrizamos en términos de $d\theta$ con $dr = \frac{dr}{d\theta} d\theta$

$$\mathcal{L} = \int \sqrt{\csc^2(\alpha)\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + r^2}\, d\theta$$

Utilizamos la ecuación de Euler-Lagrange

$$f(r, r') = \sqrt{\csc^2(\alpha)(r')^2 + r^2}$$

$$\frac{d}{d\theta}\left(\frac{\partial f}{\partial r'}\right) - \frac{\partial f}{\partial r} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial r'} = \frac{\csc^2(\alpha)\, r'}{\sqrt{\csc^2(\alpha)(r')^2 + r^2}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial r} = \frac{r}{\sqrt{\csc^2(\alpha)(r')^2 + r^2}}$$

$$\cancel{\frac{d}{d\theta}\left(\frac{\csc^2(\alpha)\, r'}{\sqrt{\csc^2(\alpha)(r')^2+r^2}}\right)}^{\,0} - \frac{r}{\sqrt{\csc^2(\alpha)(r')^2+r^2}} = 0$$

Al no depender explicitamente de θ

Por lo tanto. ocurre lo siguiente

$$\frac{df}{d\theta} = \frac{\partial f}{\partial r}\cdot r' + \frac{\partial f}{\partial r'}\, r'' \quad (*)$$ Si ahora multiplicamos a Euler Lagrange por r'

$$r'\cdot\frac{d}{d\theta}\left(\frac{\partial f}{\partial r'}\right) - r'\cdot\frac{\partial f}{\partial r} = 0$$ usando la regla de la cadena

$$\left[\, r'\frac{d}{d\theta}\left(\frac{\partial f}{\partial r'}\right) = \frac{d}{d\theta}\left(r'\cdot\frac{\partial f}{\partial r'}\right) - r''\frac{\partial f}{\partial r'} \quad (**)\right.$$

$$\frac{d}{d\theta}\left(r'\cdot\frac{\partial f}{\partial r'}\right) = r''\frac{\partial f}{\partial r'} + r'\frac{\partial f}{\partial r}$$

Si notamos $(*)$ es igual a $(**)$

$$\frac{\partial f}{\partial \theta} = \frac{d}{d\theta}\left(r'\cdot\frac{\partial f}{\partial r'}\right)$$

Conveniencia

$$r'\cdot\frac{\partial f}{\partial r'} - f = \text{Constante} = -\frac{r^2}{\sqrt{\csc^2(\alpha)(r')^2+r^2}} = -C$$

$$\frac{r^4}{\csc^2(\alpha)(r')^2 + r^2} = C^2$$

$$r^4 = c^2\csc^2(\alpha)(r')^2 + c^2 r^2$$

$$(r')^2 = \frac{r^2(r^2-c^2)}{c^2\csc^2(\alpha)} \Rightarrow r' = \frac{r\sqrt{r^2-c^2}}{c\,\csc(\alpha)}$$

$$\frac{dr}{r\sqrt{r^2-c^2}} = \frac{d\theta}{C\csc(\alpha)}$$

$$\frac{1}{\cancel{c}}\sec^{-1}\left(\frac{r}{c}\right) = \frac{sen(\alpha)}{\cancel{c}}\theta + D$$

$$\boxed{r(\theta) = C\sec(\theta sen(\alpha) + D)}$$

2. Calcule el valor mínimo de la integral.

$$I = \int_0^1 [(y')^2 + 12xy]\,dx.$$

donde la función $y(x)$ satisface $y(0) = 0$ y $y(1) = 1$.

Definimos f.

$$f(y, y') = (y')^2 + 12xy$$

Utilizamos la ecuación de Euler - Lagrange:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) - \frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y'} = 2y' \qquad // \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 12x.$$

$$\frac{d}{dx}(2y') = 2y''$$

$$2y'' - 12x = 0$$

$$y'' = 6x$$

Integramos

$$y' = \int 6x\,dx = 3x^2 + C_1$$

$$y = \int (3x^2 + C_1)\,dx = x^3 + C_1x + C_2$$

Aplicamos las condiciones de frontera con $y(0)=0$ y $y(1)=1$.

$$y(x) = x^3 + C_1 x + C_2$$

$$\begin{cases} y(0) = \cancel{(0)^3} + \cancel{C_1(0)} + C_2 = 0 & \Rightarrow \boxed{C_2 = 0} \\ y(1) = (1)^3 + C_1(1) + \cancel{C_2}^{0} = 1 & \Rightarrow \boxed{C_1 = 0} \end{cases}$$

$$\cancel{1} + C_1 = \cancel{1}$$

$$C_1 = 0$$

Por lo tanto:

$$\boxed{y(x) = x^3}$$

Calculamos el valor mínimo de la integral sabiendo que $y(x) = x^3$ y $y'(x) = 3x^2$

$$I = \int_0^1 [(3x^2)^2 + 12x(x^3)]dx = \int_0^1 [9x^4 + 12x^4]dx$$

$$I = \int_0^1 21x^4 dx = \frac{21}{5} x^5 \Big|_0^1 = \frac{21}{5}[1-0]$$

$$\boxed{I = \frac{21}{5}}$$ ⇒ Valor mínimo de la integral.

3. Encuentre la geodésica entre los puntos $P_1 = (a, 0, 0)$ y $P_2 = (-a, 0, \pi)$ sobre la superficie $x^2 + y^2 - a^2 = 0$. Use coordenadas cilíndricas.

En coordenadas cilíndricas la superficie del cilindro está dada por:

$$x^2 + y^2 = a^2$$

$$r^2 = a^2$$

$$\boxed{r = a}$$

Por lo tanto, las coordenadas en los puntos P_1 y P_2 en coordenadas cilíndricas son:

$$r = \sqrt{x^2+y^2}, \quad \theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right), \quad z = z.$$

$P_1 = (a, 0, 0)$

$$r = \sqrt{a^2+0} = a.$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{0}{a}\right) = \tan^{-1}(0) = 0$$

$$z = 0.$$

$$\boxed{P_1 = (a, 0, 0)}$$

$P_2 = (-a, 0, \pi)$

$$r = \sqrt{(-a)^2+0} = a.$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{0}{-a}\right) = \pi$$

$$z = \pi$$

Por el cuadrante

$$\boxed{P_2 = (a, \pi, \pi)}$$

Tenemos que $ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + dz^2$ y como $r = a$ $dr = 0$.

$$ds^2 = a^2 d\theta^2 + dz^2$$

para una curva tenemos $z(\theta)$:

$$S = \int \sqrt{a^2 + \left(\frac{dz}{d\theta}\right)^2}\, d\theta = \int \sqrt{a^2 + z'^2}\, d\theta$$

Usamos la ec. de Euler-Lagrange con $f(z, z') = \sqrt{a^2+z'^2}$

$$\frac{d}{d\theta}\left(\frac{\partial f}{\partial z'}\right) - \frac{\partial f}{\partial z} = 0$$

como $\frac{\partial f}{\partial z} = 0$, entonces

$$\frac{\partial f}{\partial z'} = \frac{z'}{\sqrt{a^2+z'^2}} = C$$

$$z' = C\sqrt{a^2+z'^2} \Rightarrow z'^2 = C^2(a^2+z'^2)$$

$$z'^2 - C^2 z'^2 = C^2 a^2$$

$$z'^2(1-C^2) = C^2 a^2$$

$$z'^2 = \frac{C^2}{1-C^2} a^2$$

$$\frac{dz}{d\theta} = \frac{c}{\sqrt{1-c^2}}\, a$$

Resolviendo la ecuación diferencial.

$$z(\theta) = \frac{c\,a\,\theta}{\sqrt{1-c^2}} + C_1$$

Aplicando las condiciones de frontera donde para $\theta = 0,\ z = 0$
$\theta = \pi,\ z = \pi$

$$z(0) = \frac{c \cdot a}{\sqrt{1-c^2}}(0) + C_1 = 0 \Rightarrow \boxed{C_1 = 0}$$

$$z(\pi) = \frac{c \cdot a\,(\pi)}{\sqrt{1-c^2}} = \pi$$

$$\frac{c}{\sqrt{1-c^2}} = \frac{1}{a}$$

$$c^2 = \frac{1-c^2}{a^2}$$

$$c^2 + \frac{c^2}{a^2} = \frac{1}{a^2}$$

$$c^2\left(1+\frac{1}{a^2}\right) = \frac{1}{a^2}$$

$$c^2 = \frac{1}{a^2\,\frac{(a^2+1)}{a^2}}$$

$$c^2 = \frac{1}{a^2+1}$$

$$\boxed{c = \frac{1}{\sqrt{a^2+1}}}$$

$$z(\theta) = \frac{\frac{a}{\sqrt{a^2+1}}}{\sqrt{1-\frac{1}{a^2+1}}}\,\theta = \frac{\frac{a}{\sqrt{a^2+1}}}{\sqrt{\frac{a^2+1-1}{a^2+1}}}\,\theta = \frac{\frac{a}{\sqrt{a^2+1}}}{\frac{a}{\sqrt{a^2+1}}}\,\theta$$

por lo tanto

$\boxed{z = \theta}$ → La geodésica es una hélice dada por esta relación

Parametrizando, usamos t que varía de 0 a 1, esto nos permitirá describir la curva de manera continua desde P_1 (cuando $t=0$) hasta P_2 (cuando $t=1$).

Por lo tanto.

$\theta(t) = \pi t$, $z(t) = \pi t.$, $r(t) = a.$

En coordenadas cartesianas.

$$\begin{cases} x(t) = a\cos(\pi t) \\ y(t) = a\,\mathrm{sen}(\pi t) \\ z(t) = \pi t \end{cases}$$

//

En coordenadas cilíndricas.

$$\begin{cases} r(t) = a \\ \theta(t) = \pi t \\ z(t) = \pi t. \end{cases}$$

∎

Tarea 25/02/17

4. Un cuerpo se deja caer desde una altura h y alcanza el suelo en un tiempo T. La ecuación de movimiento concediblemente podría tener cualquiera de las formas

$$y = h - g_1 t \quad y = h - \frac{1}{2} g_2 t^2 \quad y = h - \frac{1}{4} g_3 t^3$$

donde g_1, g_2, g_3 son constantes apropiadas

Para resolver esto recordemos el principio de mínima acción que dice

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L \, dt$$, donde $L = T - V$ es el Lagrangiano, T la energía cinética y V la potencial

En una caída libre, este lagrangiano se vería así $L = \frac{1}{2} m \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 - mgy$

$T = \frac{1}{2} m \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 \quad V = mgy$

Para que la acción sea mínima se requiere que se cumpla la ecuación de euler - Lagrange que dice

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\right) - \frac{\partial L}{\partial y} = 0$$

Aplicando nuestro lagrangiano.

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m\dot{y} \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\right) = m\ddot{y}$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = -mg$$

Por tanto tenemos que $m\ddot{y} = -mg$ es la condición necesaria para que la acción sea mínima.
Derivando las opciones del principio tenemos

$$\ddot{y}_1 = 0$$
$$\ddot{y}_2 = -g$$
$$\ddot{y}_3 = -\frac{3}{2} g_3 t$$

Por tanto la opción correcta es la $\ddot{y}_2$.

5. El lagrangiano de una partícula de masa m es

$$L = \frac{m^2 \dot{x}^4}{12} + m\dot{x}^2 f(x) - f^2(x)$$

donde $f(x)$ es una función diferenciable de x. Encuentre la ecuación de movimiento.

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{m^2 \dot{x}^3}{3} + 2m\dot{x} f(x)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = m^2 \dot{x}^2 \ddot{x} + 2m\ddot{x} f(x) + 2m\dot{x} \frac{df(x)}{dx}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 0 + m\dot{x}^2 \frac{df(x)}{dx} - 2f(x)\frac{df(x)}{dx}$$

Por tanto la ecuación de movimiento es

$$m^2 \dot{x}^2 \ddot{x} + 2m\ddot{x} f(x) + m\dot{x}^2 \frac{df(x)}{dx} + 2f(x)\frac{df(x)}{dx} = 0$$

Scribe

6. Consideremos un sistema con n grados de libertad q^a con $a=1,\dots,n$. La forma mas general para un lagrangiano puramente cinetico es

$$L = \frac{1}{2} g_{ab}(q_c)\,\dot{q}^a \dot{q}^b$$

Demostrar que las ecuaciones de Lagrange para este sistema vienen dadas por,

$$\ddot{q}^a + \Gamma^a_{bc}\,\dot{q}^b \dot{q}^c = 0$$

$$\Gamma^a_{bc} = \frac{1}{2} g^{ad}\left(\frac{\partial g_{bd}}{\partial q^c} + \frac{\partial g_{cd}}{\partial q^b} - \frac{\partial g_{bc}}{\partial q^d}\right)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a}\right) - \frac{\partial L}{\partial q^a} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a} = \frac{1}{2}\left(g_{bc}\frac{\partial}{\partial \dot{q}^a}\left(\dot{q}^b \dot{q}^c\right)\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial \dot{q}^a}\left(\dot{q}^b \dot{q}^c\right) = \frac{\partial \dot{q}^b}{\partial \dot{q}^a}\dot{q}^c + \frac{\partial \dot{q}^c}{\partial \dot{q}^a}\dot{q}^b$$

$$\frac{\partial}{\partial \dot q^a}(\dot q^b \dot q^c) = \delta^b_a \dot q^c + \delta^c_a \dot q^b$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot q^a} = \frac{1}{2}\left(g_{bc}\left(\delta^b_a \dot q^c + \delta^c_a \dot q^b\right)\right)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot q^a} = \frac{1}{2}\left(g_{ac}\dot q^c + g_{ba}\dot q^b\right)$$

Como $g_{ab} = g_{ba}$ y los indices son mudos

$$\frac{\partial L}{\partial \dot q^a} = g_{ab}\dot q^b$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q^a}\right) = \frac{d}{dt}\left(g_{ab}\dot q^b\right)$$

$$\frac{d}{dt}\left(g_{ab}\dot q^b\right) = \frac{d g_{ab}}{dt}\dot q^b + g_{ab}\ddot q^b$$

$$\frac{d g_{ab}(q^c)}{dt} = \frac{\partial g_{ab}}{\partial q^c}\dot q^c$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q^a}\right) = \frac{\partial g_{ab}}{\partial q^c}\dot q^c \dot q^b + g_{ab}\ddot q^b$$

$$\frac{\partial L}{\partial q^a} = \frac{1}{2}\frac{\partial g_{bc}}{\partial q^a}\dot{q}^b\dot{q}^c =$$

Por tanto

$$\frac{\partial g_{ab}}{\partial q^c}\dot{q}^c\dot{q}^b + g_{ab}\ddot{q}^b - \frac{1}{2}\frac{\partial g_{bc}}{\partial q^a}\dot{q}^b\dot{q}^c = 0$$

$$g_{ab}\ddot{q}^b + \left(\frac{\partial g_{ab}}{\partial q^c} - \frac{1}{2}\frac{\partial g_{bc}}{\partial q^a}\right)\dot{q}^b\dot{q}^c = 0$$

Ahora multiplicamos por g^{ad}

$$g^{ad}g_{ab}\ddot{q}^b + g^{ad}\left(\frac{\partial g_{ab}}{\partial q^c} - \frac{1}{2}\frac{\partial g_{bc}}{\partial q^a}\right)\dot{q}^b\dot{q}^c = 0$$

$$\ddot{q}^d + g^{ad}\left(\frac{\partial g_{ab}}{\partial q^c} - \frac{1}{2}\frac{\partial g_{bc}}{\partial q^a} + \frac{1}{2}\frac{\partial g_{ac}}{\partial q^b} - \frac{1}{2}\frac{\partial g_{ac}}{\partial q^b}\right)\dot{q}^b\dot{q}^c = 0$$

$$\ddot{q}^d + \frac{1}{2}g^{ad}\left(\frac{\partial g_{ab}}{\partial q^c} + \frac{\partial g_{ac}}{\partial q^b} - \frac{\partial g_{bc}}{\partial q^a}\right)\dot{q}^b\dot{q}^c = 0$$

$$\ddot{q}^d + \Gamma^d_{bc}\dot{q}^b\dot{q}^c = 0$$