2024 年普通高等学校招生全国统一考试

数　学

注意事项：

1. 答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。

2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。

3. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $A=\left\{x \mid -5<x^3<5\right\}$，$B=\{-3,-1,0,2,3\}$，则 $A\cap B=$

A. $\{-1,0\}$　　B. $\{2,3\}$　　C. $\{-3,-1,0\}$　　D. $\{-1,0,2\}$

2. 若 $\dfrac{z}{z-1}=1+\mathrm{i}$，则 $z=$

A. $-1-\mathrm{i}$　　B. $-1+\mathrm{i}$　　C. $1-\mathrm{i}$　　D. $1+\mathrm{i}$

3. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(0,1)$，$\boldsymbol{b}=(2,x)$，若 $\boldsymbol{b}\perp(\boldsymbol{b}-4\boldsymbol{a})$，则 $x=$

A. -2　　B. -1　　C. 1　　D. 2

4. 已知 $\cos(\alpha+\beta)=m$，$\tan\alpha\tan\beta=2$，则 $\cos(\alpha-\beta)=$

A. $-3m$　　B. $-\dfrac{m}{3}$　　C. $\dfrac{m}{3}$　　D. $3m$

5. 已知圆柱和圆锥的底面半径相等，侧面积相等，且它们的高均为 $\sqrt{3}$，则圆锥的体积为

A. $2\sqrt{3}\pi$　　B. $3\sqrt{3}\pi$　　C. $6\sqrt{3}\pi$　　D. $9\sqrt{3}\pi$

6. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}-x^2-2ax-a, & x<0,\\ \mathrm{e}^x+\ln(x+1), & x\geqslant 0\end{cases}$ 在 $\mathbb{R}$ 上单调递增，则 a 的取值范围是

A. $(-\infty,0]$　　B. $[-1,0]$　　C. $[-1,1]$　　D. $[0,+\infty)$

7. 当 $x\in[0,2\pi]$ 时，曲线 $y=\sin x$ 与 $y=2\sin\left(3x-\dfrac{\pi}{6}\right)$ 的交点个数为

A. 3　　B. 4　　C. 6　　D. 8

8. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbb{R}$，$f(x)>f(x-1)+f(x-2)$，且当 $x<3$ 时，$f(x)=x$，则下列结论中一定正确的是

A. $f(10)>100$　　B. $f(20)>1\,000$　　C. $f(10)<1\,000$　　D. $f(20)<10\,000$

二、选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分。

9. 为了解推动出口后的亩收入（单位：万元）情况，从该种植区抽取样本，得到推动出口后亩收入的样本均值 $\overline{x}=2.1$，样本方差 $s^2=0.01$，已知该种植区以往的亩收入 X 服从正态分布 $N\left(1.8,0.1^2\right)$，假设推动出口后的亩收入 Y 服从正态分布 $N\left(\overline{x},s^2\right)$，则（若随机变量 Z 服从正态分布 $N\left(\mu,\sigma^2\right)$，则 $P(Z<\mu+\sigma)\approx 0.8413$）

   A. $P(X>2)>0.2$　　B. $P(X>2)<0.5$

   C. $P(Y>2)>0.5$　　D. $P(Y>2)<0.8$

10. 设函数 $f(x)=(x-1)^2(x-4)$，则

   A. $x=3$ 是 $f(x)$ 的极小值点

   B. 当 $0<x<1$ 时，$f(x)<f\left(x^2\right)$

   C. 当 $1<x<2$ 时，$-4<f(2x-1)<0$

   D. 当 $-1<x<0$ 时，$f(2-x)>f(x)$

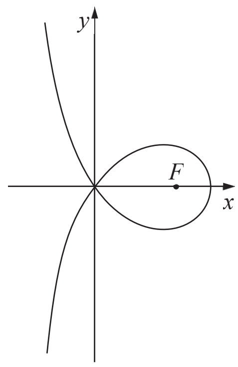
11. 造型“♾”可以做成美丽的丝带，将其看作图中曲线 C 的一部分．已知 C 过坐标原点 O，且 C 上的点满足横坐标大于 -2，到点 $F(2,0)$ 的距离与到定直线 $x=a$ $(a<0)$ 的距离之积为 4，则

   A. $a=-2$

   B. 点 $\left(2\sqrt{2},0\right)$ 在 C 上

   C. C 在第一象限的点的纵坐标的最大值为 1

   D. 当点 (x_0,y_0) 在 C 上时，$y_0\leqslant\dfrac{4}{x_0+2}$



三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分。

12. 设双曲线 $C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>0,b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1，F_2，过 F_2 作平行于 y 轴的直线交 C 于 A、B 两点，若 $|F_1A|=13$，$|AB|=10$，则 C 的离心率为 __________ .

13. 若曲线 $y = e^x + x$ 在点 $(0,1)$ 处的切线也是曲线 $y = \ln(x+1) + a$ 的切线，则 $a =$ ＿＿＿＿＿＿ .

14. 甲乙两人各有四张卡片，每张卡片上标有一个数字，甲的卡片上分别标有数字 1，3，5，7，乙的卡片上分别标有数字 2，4，6，8．两人进行四轮比赛，在每轮比赛中，两人各自从自己持有的卡片中随机选一张，并比较所选卡片上的数字大小，数字大的人得 1 分，数字小的人得 0 分，然后各自弃置此轮所选的卡片（弃置的卡片在此后的轮次中不能使用），则四轮比赛后，甲的总得分不小于 2 的概率为 ＿＿＿＿＿＿ .

四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

15.（13 分）设 $\triangle ABC$ 的内角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，已知 $\sin C = \sqrt{2}\cos B$，$a^2 + b^2 - c^2 = \sqrt{2}ab$.

（1）求 B；

（2）若 $\triangle ABC$ 的面积为 $3 + \sqrt{3}$，求 c.

16.（15 分）已知 $A(0,3)$ 和 $P\left(3, \dfrac{3}{2}\right)$ 为椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ $(a > b > 0)$ 上两点.

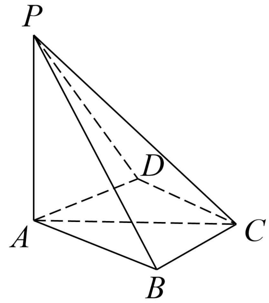
（1）求 C 的离心率；

（2）若过 P 的直线 l 交 C 于另一点 B，且 $\triangle ABP$ 的面积为 9，求 l 的方程.

17.（15 分）如图，四棱锥 $P\text{–}ABCD$ 中，$PA\perp$ 底面$ABCD$，$PA=AC=2$，$BC=1$，$AB=\sqrt{3}$.

（1）若 $AD\perp PB$，证明：$AD\parallel$ 平面PBC；

（2）若 $AD\perp DC$，且二面角 $A\text{–}CP\text{–}D$ 的正弦值为 $\dfrac{\sqrt{42}}{7}$，求 AD.



18.（17 分）已知函数 $f(x)=\ln\dfrac{x}{2-x}+ax+b\,(x-1)^3$.

（1）若 $b=0$，且 $f'(x)\geqslant 0$，求 a 的最小值；

（2）证明：曲线 $y=f(x)$ 是中心对称图形；

（3）若 $f(x)>-2$ 当且仅当 $1<x<2$，求 b 的取值范围.

19.（17 分）设 m 为正整数，数列 a_1，a_2，$\cdots$，a_{4m+2} 是公差不为 0 的等差数列，若从中删去两项 a_i 和 a_j $(i<j)$ 后剩余的 $4m$ 项可被平均分为 m 组，且每组的 4 个数都能构成等差数列，则称数列 a_1，a_2，$\cdots$，a_{4m+2} 是 (i,j)–可分数列.

（1）写出所有的 (i,j)，$1\leqslant i<j\leqslant 6$，使得数列 a_1，a_2，$\cdots$，a_6 是 (i,j)–可分数列；

（2）当 $m\geqslant 3$ 时，证明：数列 a_1，a_2，$\cdots$，a_{4m+2} 是 $(2,13)$–可分数列；

（3）从 1，2，$\cdots$，$4m+2$ 中一次任取两个数 i 和 j $(i<j)$，记数列 a_1，a_2，$\cdots$，a_{4m+2} 是 (i,j)–可分数列的概率为 P_m，证明：$P_m>\dfrac{1}{8}$.