

# 2024 年普通高等学校招生全国统一考试

## 数 学

### 注意事项:

1. 答卷前, 考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时, 选出每小题答案后, 用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动, 用橡皮擦干净后, 再选涂其他答案标号。回答非选择题时, 将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
3. 考试结束后, 将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题: 本题共 8 小题, 每小题 5 分, 共 40 分。在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合  $A = \{x \mid -5 < x^3 < 5\}$ ,  $B = \{-3, -1, 0, 2, 3\}$ , 则  $A \cap B =$   
A.  $\{-1, 0\}$       B.  $\{2, 3\}$       C.  $\{-3, -1, 0\}$       D.  $\{-1, 0, 2\}$
2. 若  $\frac{z}{z-1} = 1 + i$ , 则  $z =$   
A.  $-1 - i$       B.  $-1 + i$       C.  $1 - i$       D.  $1 + i$
3. 已知向量  $\boldsymbol{a} = (0, 1)$ ,  $\boldsymbol{b} = (2, x)$ , 若  $\boldsymbol{b} \perp (\boldsymbol{b} - 4\boldsymbol{a})$ , 则  $x =$   
A.  $-2$       B.  $-1$       C.  $1$       D.  $2$
4. 已知  $\cos(\alpha + \beta) = m$ ,  $\tan \alpha \tan \beta = 2$ , 则  $\cos(\alpha - \beta) =$   
A.  $-3m$       B.  $-\frac{m}{3}$       C.  $\frac{m}{3}$       D.  $3m$
5. 已知圆柱和圆锥的底面半径相等, 侧面积相等, 且它们的高均为  $\sqrt{3}$ , 则圆锥的体积为  
A.  $2\sqrt{3}\pi$       B.  $3\sqrt{3}\pi$       C.  $6\sqrt{3}\pi$       D.  $9\sqrt{3}\pi$
6. 已知函数  $f(x) = \begin{cases} -x^2 - 2ax - a, & x < 0, \\ e^x + \ln(x+1), & x \geq 0 \end{cases}$  在  $\mathbb{R}$  上单调递增, 则  $a$  的取值范围是  
A.  $(-\infty, 0]$       B.  $[-1, 0]$       C.  $[-1, 1]$       D.  $[0, +\infty)$
7. 当  $x \in [0, 2\pi]$  时, 曲线  $y = \sin x$  与  $y = 2\sin\left(3x - \frac{\pi}{6}\right)$  的交点个数为  
A. 3      B. 4      C. 6      D. 8
8. 已知函数  $f(x)$  的定义域为  $\mathbb{R}$ ,  $f(x) > f(x-1) + f(x-2)$ , 且当  $x < 3$  时,  $f(x) = x$ , 则下列结论中一定正确的是  
A.  $f(10) > 100$       B.  $f(20) > 1\,000$       C.  $f(10) < 1\,000$       D.  $f(20) < 10\,000$



13. 若曲线  $y = e^x + x$  在点  $(0, 1)$  处的切线也是曲线  $y = \ln(x + 1) + a$  的切线, 则  $a =$  \_\_\_\_\_ .
14. 甲乙两人各有四张卡片, 每张卡片上标有一个数字, 甲的卡片上分别标有数字 1, 3, 5, 7, 乙的卡片上分别标有数字 2, 4, 6, 8. 两人进行四轮比赛, 在每轮比赛中, 两人各自从自己持有的卡片中随机选一张, 并比较所选卡片上的数字大小, 数字大的人得 1 分, 数字小的人得 0 分, 然后各自弃置此轮所选的卡片 (弃置的卡片在此后的轮次中不能使用), 则四轮比赛后, 甲的总得分不小于 2 的概率为 \_\_\_\_\_ .

四、解答题: 本题共 5 小题, 共 77 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

15. (13 分) 设  $\triangle ABC$  的内角  $A, B, C$  的对边分别为  $a, b, c$ , 已知  $\sin C = \sqrt{2} \cos B$ ,  $a^2 + b^2 - c^2 = \sqrt{2}ab$ .

(1) 求  $B$ ;

(2) 若  $\triangle ABC$  的面积为  $3 + \sqrt{3}$ , 求  $c$ .

16. (15 分) 已知  $A(0, 3)$  和  $P\left(3, \frac{3}{2}\right)$  为椭圆  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $a > b > 0$ ) 上两点.

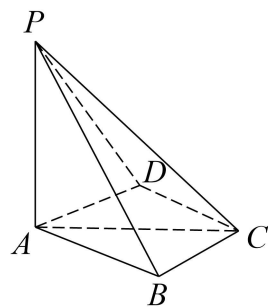
(1) 求  $C$  的离心率;

(2) 若过  $P$  的直线  $l$  交  $C$  于另一点  $B$ , 且  $\triangle ABP$  的面积为 9, 求  $l$  的方程.

17. (15 分) 如图, 四棱锥  $P-ABCD$  中,  $PA \perp$  底面  $ABCD$ ,  $PA = AC = 2$ ,  $BC = 1$ ,  $AB = \sqrt{3}$ .

(1) 若  $AD \perp PB$ , 证明:  $AD \parallel$  平面  $PBC$ ;

(2) 若  $AD \perp DC$ , 且二面角  $A-CP-D$  的正弦值为  $\frac{\sqrt{42}}{7}$ , 求  $AD$ .



18. (17 分) 已知函数  $f(x) = \ln \frac{x}{2-x} + ax + b(x-1)^3$ .

(1) 若  $b = 0$ , 且  $f'(x) \geq 0$ , 求  $a$  的最小值;

(2) 证明: 曲线  $y = f(x)$  是中心对称图形;

(3) 若  $f(x) > -2$  当且仅当  $1 < x < 2$ , 求  $b$  的取值范围.

19. (17 分) 设  $m$  为正整数, 数列  $a_1, a_2, \dots, a_{4m+2}$  是公差不为 0 的等差数列, 若从中删去两项  $a_i$  和  $a_j$  ( $i < j$ ) 后剩余的  $4m$  项可被平均分为  $m$  组, 且每组的 4 个数都能构成等差数列, 则称数列  $a_1, a_2, \dots, a_{4m+2}$  是  $(i, j)$ -可分数列.

(1) 写出所有的  $(i, j)$ ,  $1 \leq i < j \leq 6$ , 使得数列  $a_1, a_2, \dots, a_6$  是  $(i, j)$ -可分数列;

(2) 当  $m \geq 3$  时, 证明: 数列  $a_1, a_2, \dots, a_{4m+2}$  是  $(2, 13)$ -可分数列;

(3) 从  $1, 2, \dots, 4m+2$  中一次任取两个数  $i$  和  $j$  ( $i < j$ ), 记数列  $a_1, a_2, \dots, a_{4m+2}$  是  $(i, j)$ -可分数列的概率为  $P_m$ , 证明:  $P_m > \frac{1}{8}$ .