集萃_1

题1

定义：三维欧氏空间中的点称为整点，当且仅当x,y,z坐标都是整数，例如(1,1,2)，(-2,6,-2)。从空间中任取n个整点$P_1, P_2, P_3, \ldots P_n$，再从它们之中任取两个不同的点$P_i, P_j (i \neq j)$，$P_i, P_j$的中点**不会**是整点。问：$n$的最大值为_____

> 答案：8

解析:

如果两个整点的中点还是整点，说明x, y, z坐标的奇偶性相同（因为奇加奇得偶，偶加偶得偶，而偶数除以二一定是整 数）。x, y, z的奇偶性一共能组合出8种情况：(奇，奇，奇)，(奇，偶，奇)，(偶，奇，奇)，(奇，奇，偶)，(奇，偶，偶)，(偶，偶，奇)，(偶，奇，偶)，(偶，偶，偶)。那么$n > 8$时，也就是任取空间中至少9个整点时，其中必然存在两个整点的奇偶性相同，从而它们两个的中点也是整点。现在题目要求所有的中点都不能是整点，所以n最大为8(也就是取遍了所有奇偶性的组合)。

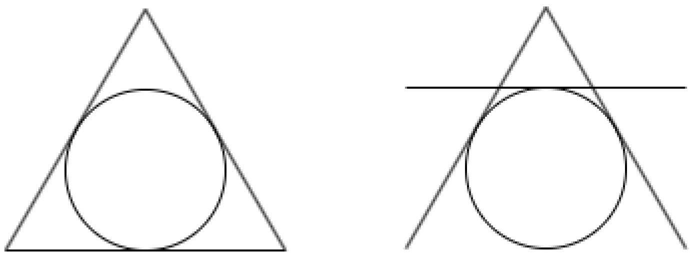
题2

平面直角坐标系中有三条直线:
$l_1 : \cos\theta_1 \cdot x + \sin\theta_1 \cdot y = 1, l_2 : \cos\theta_2 \cdot x + \sin\theta_2 \cdot y = 1, l_3 : \cos\theta_3 \cdot x + \sin\theta_3 \cdot y = 1$，其中$\theta_1 \neq \theta_2 \neq \theta_3$。若$l_1, l_2, l_3$围成一个等边三角形，其面积为$S$，则$S$的取值集合为_____

> 答案：$\{\frac{\sqrt{3}}{3}, 3\sqrt{3}\}$

解析:

观察三条直线的结构，容易注意到它们到原点的距离都为1。所以，它们都是单位圆的切线。又因为围成了等边三角形，所以有两种情形：要么单位圆作为等边三角形的内切圆，要么单位圆作为等边三角形的**外切圆**(注意不是外接圆)。如下图所示：



题3

任取一户有两个孩子的家庭，已知其中一个是女孩，则另一个是女孩的概率为_____

> 答案：$\frac{1}{2}$......还是$\frac{1}{3}$?

本题是一道争议很大的题目，被称为两孩悖论。在著名的概率论科普读物《醉汉的脚步》中，作者认为本题的答案是$\frac{1}{3}$，同时他还得到了一个更加违反常识的结论：如果把条件“已知其中一个是女孩”改为“已知其中一个是女孩，名字叫佛罗里达”，则结果变成$\frac{1}{2}$。

我知道，第一次看到上面的答案时，你会感到惊讶。实际上，上面的答案虽然有一定的道理，但也并不完全正确。迄今为止，包括《醉汉的脚步》作者蒙洛迪诺在内的很多人都对上面的答案提出了质疑。

我们先来看看蒙洛迪诺在书中写提出的解法：

- 这是一个古典概型问题，考虑出生顺序，样本空间为{男，男}，{男，女}，{女，男}，{女，女}，现在已知有一个是女孩，那么{男，男}这种情况就不可能了，样本空间缩小为{女，女}，{男，女}，{女，男}，因此概率为$\frac{1}{3}$。
- 如果把条件改成“已知其中一个是女孩，名字叫佛罗里达”，我们可以用女F表示叫佛罗里达的女孩，女NF表示不叫佛罗里达的女孩，这样样本空间就变成{男，男}，{女F，男}，{男，女F}，{女NF，男}，{男，女NF}，{女F，女NF}，{女NF，女F}，现在已知有一个叫佛罗里达的女孩，那么样本空间缩小为{女F，男}，{男，女F}，{女F，女NF}，{女NF，女F}，因此概率为$\frac{1}{2}$。

上面的解答看起来天衣无缝，但得到的结果非常违反直觉。到底错在哪？

严格来说，本题的题干是模糊不清的，因而对题干的不同理解，会导出不同的答案。

如果你认为本题的答案是$\frac{1}{2}$,你应该是这么想的：这是一个古典概型问题，不考虑出生顺序，样本空间为{男，男}，{男，女}，{女，女}，现在已知有一个是女孩，那么{男，男}这种情况就不可能了，样本空间变成{女，女}，{男，女}，因此概率为$\frac{1}{2}$。

问题在于样本空间上面，究竟有没有先后顺序之分？

在本题中，这个争议是解决不了的，因为本题的条件：“已知其中一个是女孩”叙述模糊，不管是从中文来理解，还是从英文原文来理解，都无从确定是否“特指”。

题4

设n个随机事件$A_1, A_2, \cdots A_n$，发生的概率分别为$p_1, p_2, \cdots p_n$，满足$p_1 + p_2 + \cdots p_n = 1$，其中$p_1 \leq p_2 \leq \cdots p_n$，并且$p_i(i = 1, 2, \cdots n)$都是$\frac{1}{2}$的幂。

证明：$p_1 = p_2$。

解析:

我们设

$$p_i = (\frac{1}{2})^{k_i}, (i = 1, 2, \cdots n)$$

应有$k_1 \geq k_2 \geq \cdots k_n$，我们要证明$k_1 = k_2$。根据$p_1 + p_2 + \cdots p_n = 1$，有

$$(\frac{1}{2})^{k_1} + (\frac{1}{2})^{k_2} + \cdots (\frac{1}{2})^{k_n} = 1$$

我们把它写成

$$1 + 2^{k_1 - k_2} + 2^{k_1 - k_3} + \cdots + 2^{k_1 - k_n} = 2^{k_1}$$

注意到右边是偶数，所以左边也是偶数。那么$2^{k_1-k_2}+2^{k_1-k_3}+\cdots+2^{k_1-k_n}$就应该是奇数，说明其中有指数为0的项（有奇数个，总之至少有一个）。因此至少我们知道k_1-k_2为0（因为它是最小的指数），从$k_1=k_2$。即

$p_1=p_2$。

注：这个问题看似单薄，实则背景深厚。所有概率均为$\frac{1}{2}$的幂，这样的情况非常特别，在很多地方都有应用。就我所知道的而言，计算机科学中的$Huffman$编码就是在这样的情况下，取到平均编码长度的下界。

题5

设$a,b\in\mathbb{R}$，若对于任意$x\in[-1,1]$，都有$|x^2+ax+b|\le 1$，则a的取值范围是________

> 答案：$[2-2\sqrt{2},-2+2\sqrt{2}]$

解析：

这道题目可谓是把数学“**题干越短，题目越难**”的特点展现得淋漓尽致。没有接触过数学竞赛的正常高中生，如果能独立地做出这道题，可以说是非常非常不错的了。

曾经，浙江卷自主命题的时候，其一大特点就是层出不穷的绝对值。绝对值，这个数学概念看似简单，实则深奥无比，在绝对值上大做文章的难题比比皆是。

本题就是这样一道绝对值难题，它其实有一个背景，称为“**切比雪夫最佳逼近**”，只不过这个背景实在是过于深邃，没有一定竞赛基础的话很难真正弄懂，所以，我就以最通俗易懂的高中数学方法来解决这道题目。

设$f(x)=x^2+ax+b,x\in[-1,1]$，根据题目条件，$|f(x)|$的最大值为1。那么很自然的想到，要把$|f(x)|$的图像给画出来。

这是个什么样的函数？二次函数套绝对值，它在$[-1,1]$内的图像应该有5种情况：

我们先来考虑最复杂的**Case 1**：

要想出现这样的图像，说明$f(x)$的对称轴在$[-1,1]$内，并且$f(x)$的最小值要小于0，把这两个条件转换成数学语言，就是：

$$-1<-\frac{a}{2}<1 \qquad (1)$$
$$\frac{4b-a^2}{4}<0 \qquad (2)$$

也就是

$$-2 < a < 2$$
$$b < \frac{a^2}{4}$$

此时$|f(x)|$的最大值等于$max\{f(-1), f(-\frac{a}{2}), f(1)\}$，即

$$\begin{aligned} max_{[-1,1]}|f(x)| &= max\{f(-1), f(-\frac{a}{2}),\ f(1)\} \\ &= max\{-a+b+1, \frac{4b-a^2}{4}, a+b+1\} \end{aligned}$$

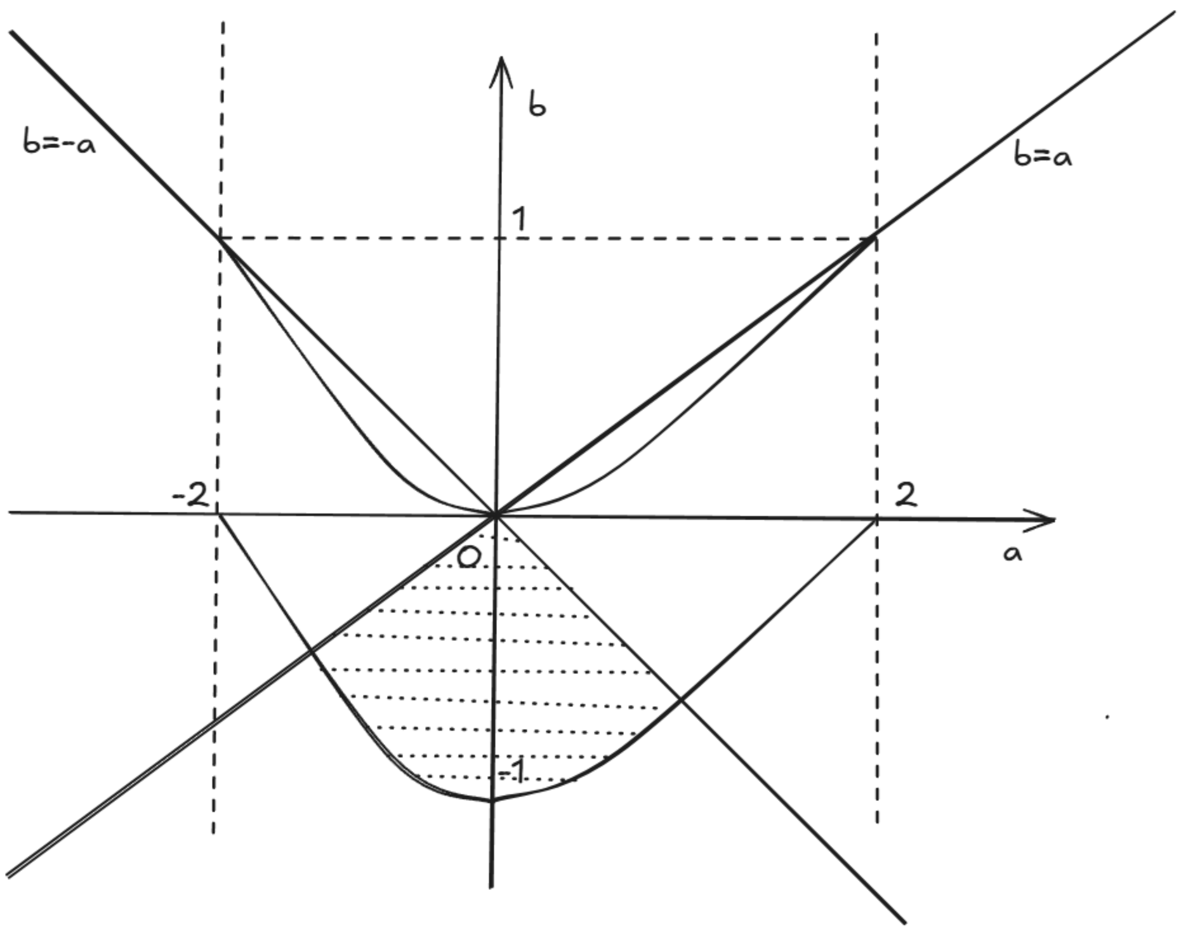
根据题意，上面这个最大值小于等于1，说明

$$-a+b+1 \le 1$$
$$\frac{a^2-4b}{4} \le 1$$
$$a+b+1 \le 1$$

化简上面的式子，并结合$(1), (2)$，我们有

$$b \le a \qquad (3)$$
$$b \ge \frac{a^2}{4} - 1 \qquad (4)$$
$$b \le -a \qquad (5)$$
$$-2 < a < 2 \qquad (6)$$
$$b \le \frac{a^2}{4} \qquad (7)$$

上面这个不等式组，已经指明了a, b的范围。我们在平面直角坐标系中画出该不等式组表示的的区域：



如图，点 (a,b) 的范围用点线描绘了出来。它是由 $b=\frac{a^2}{2}, b=\frac{a^2}{4}-1, b=a, b=-a$ 四条曲线/直线包围出来的区域，包括边界。因此 $2-2\sqrt{2}\le a\le 2\sqrt{2}-2$ 。

对于其它 4 种情况，做法是一样的，留给读者自行解决。

题6

（1）证明：不存在 7 条棱的多面体。

（2）已知对于任意多面体，其面数 ϕ ，顶点数v，边数 ε 满足：$v+\phi-\varepsilon=2$ 。证明：正多面体的面数只能是 $4,6,8,12,20$ 。

解析：

（1）反证法。假设存在一个 7 条棱的多面体，它的面数为 ϕ，顶点数为 v，边数为 $\varepsilon=7$ 。

因为每个面上至少有 3 条边，所以 $3\phi\le 2v=14$，所以 $\phi\le 4$，又因为 $\phi\ge 4$ （三个面不能构成多面体），故 $\phi=4$ 。但是四面体的边数为 6，故假设不成立，也就是不存在 7 条棱的多面体。

（2）设正多面体的面数为 ϕ，顶点数为 v，边数为 ε，从每个顶点连出的边数为 δ，每个面都是正 n 边形，则：

$$\begin{gathered}v+\phi-\varepsilon=2\\ n\cdot\phi=2\varepsilon\\ \delta\cdot v=2\varepsilon\end{gathered}$$

解得

$$(2n+2\delta-\delta n)\phi=4\delta$$

分下面几种情况讨论：

- $\delta=3$，则 $(6-n)\phi=12$
  - $n=3$，$\phi=4$，即正四面体，每个面都是正三角形
  - $n=4$，$\phi=6$，即正六面体，每个面都是正四边形
  - $n=5$，$\phi=12$，即正十二面体，每个面都是正五边形
- $\delta=4$，则 $(8-2n)\phi=16$
  - $n=3$，$\phi=8$，即正八面体，每个面都是正三角形
- $\delta=5$，则$(10-3n)\phi=20$
  - $n=3$，$\phi=20$，即正二十面体，每个面都是正三角形
- $\delta>5$，这种情况是不成立的。

证毕！

注：本题中的公式 $v+\phi-\varepsilon=2$ 称为**欧拉公式**。

题7

设

$$P=\frac{a}{a+b}+\frac{b}{b+c}+\frac{c}{c+a}\quad a,b,c>0$$

关于 P ，下列说法中正确的是(　)

$A.$ P 有最大值，无最小值

$B.$ P 有最小值，无最大值

$C.$ P 既有最大值又有最小值

$D.$ P 既没有最大值又没有最小值

> 答案：D

解析：

这道题比较考验代数功底。

首先，P 可以放缩为

$$P>\frac{a}{a+b+c}+\frac{b}{a+b+c}+\frac{c}{a+b+c}=1$$

那么 P 有没有最小值呢？我们取 $a\to 0,b\to 0$ ，则 $P\to 1$ ，所以 P 可以无限趋近于 1 ，没有最小值。

另一方面，P 还可以放缩为

$$P<\frac{a+c}{a+b+c}+\frac{b+a}{a+b+c}+\frac{c+b}{a+b+c}=2$$

我们取 $a\to 0,b\to +\infty$ ，则 $P\to 2$ ，所以 P 可以无限趋近于 2 ，没有最大值。

题8