

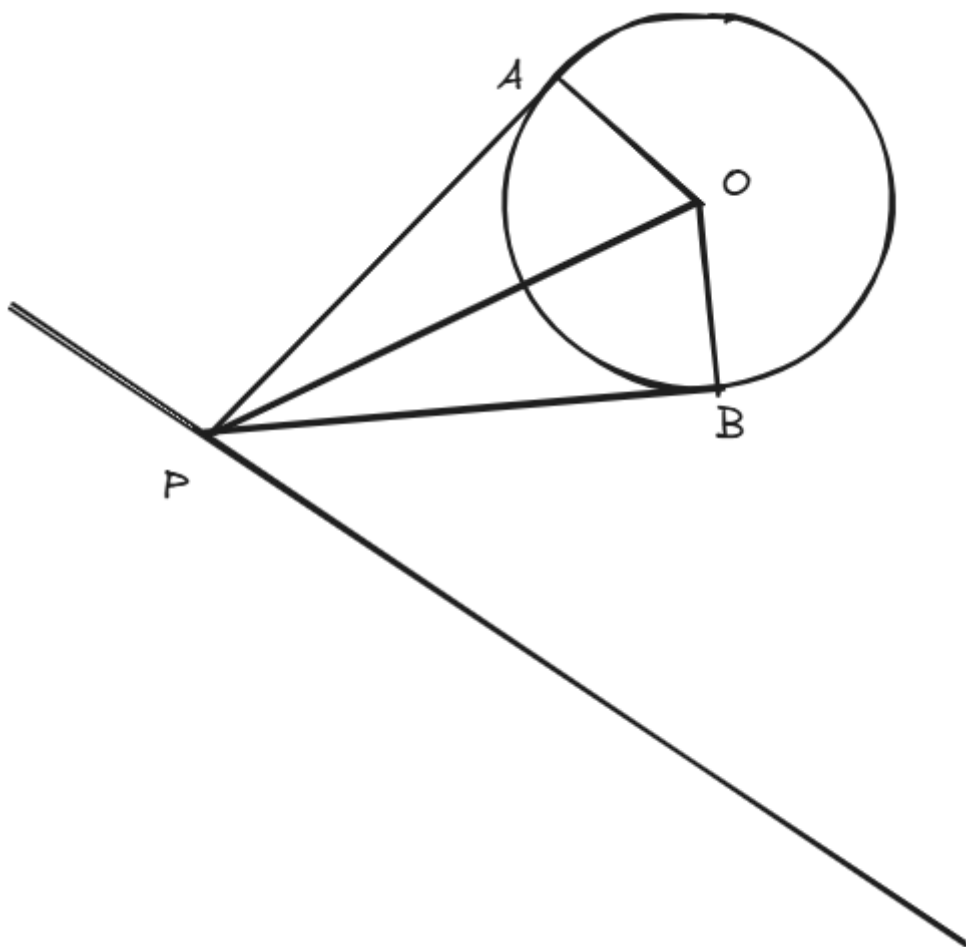
# 专题练习\_直线与圆\_1

## 题1

平面直角坐标系中，设直线 $l: x + y = 1$ ，圆 $O: (x - 4)^2 + (y - 4)^2 = 1$ ，动点 $P$ 在直线 $l$ 上运动。过点 $P$ 做圆 $O$ 的两条切线，切点分别为 $A, B$ ，则四边形 $OAPB$ 的面积的最小值为\_\_\_\_\_

答案： $\sqrt{6}$

解析：



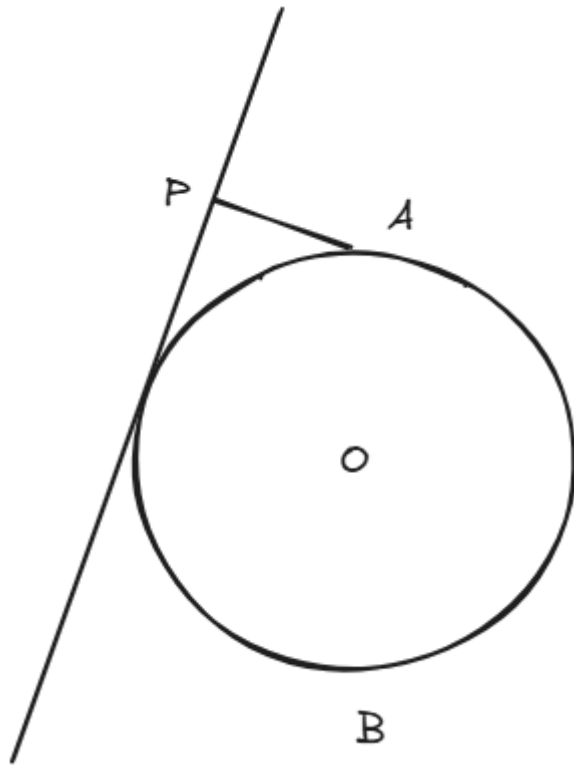
如上图所示，容易知道四边形 $OAPB$ 的面积就是三角形 $OAP$ 面积的两倍，也就是 $S_{OAPB} = 2 \times S_{OAP} = 2 \times \frac{1}{2} \times OA \times AP = OA \times AP = \sqrt{OP^2 - 1}$ 。所以，只要求 $OP$ 的最小值，即点 $O$ 到直线 $l$ 的距离。

## 题2

平面直角坐标系中，设圆 $O: x^2 + y^2 = 1$ ，点 $A(0, 1)$ ， $B(0, -1)$ 。过 $A$ 做圆 $O$ 的一条切线的垂线，垂足为 $P$ 。问 $|PB|$ 的最大值为？

答案:  $\frac{4\sqrt{3}}{3}$

解析:



如上图所示，我们的目的很明确：求出 $P$ 点坐标。 $P$ 是一个动点，它的坐标能用参变量来表示，或者能用轨迹方程来刻画，**这是动点问题亘古不变的解题原则。**

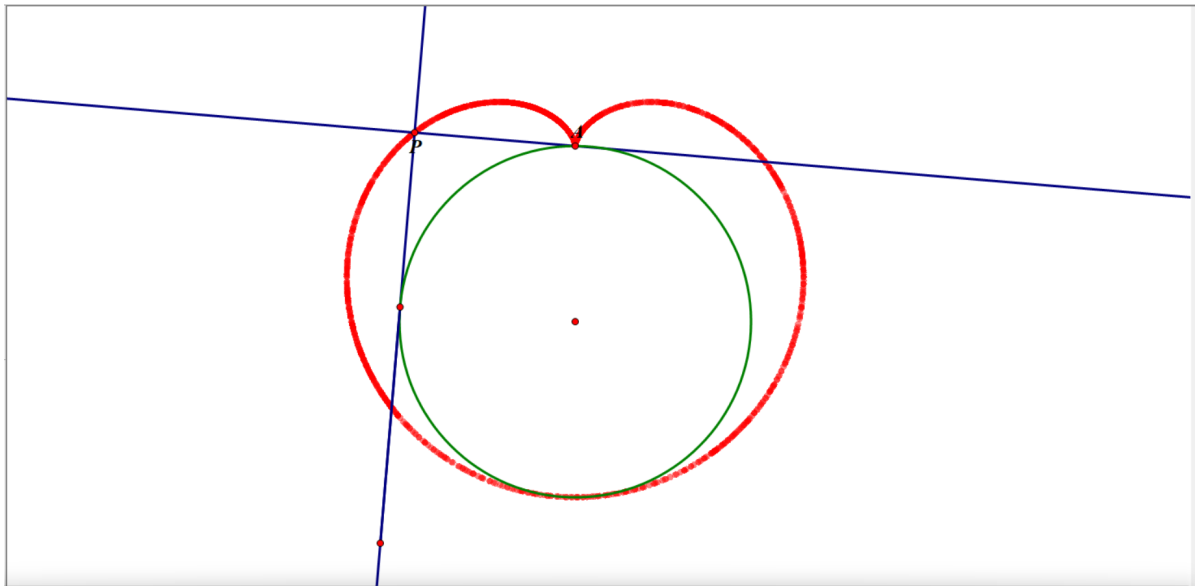
那么怎么求出 $P$ 的坐标？它是切线和直线 $PA$ 的交点，而直线 $PA$ 是切线的垂线，如果知道切线方程，直线 $PA$ 的方程就能求出(利用斜率相乘等于-1)，从而联立两条直线方程，就能求出交点 $P$ 。

我们知道，单位圆的切线到圆心的距离为1，所以可以把切线方程设为 $\cos \theta \cdot x + \sin \theta \cdot y = 1$ ，或者写成 $y = -\frac{\cos \theta}{\sin \theta} \cdot x + \frac{1}{\sin \theta}$ ，这里的 $\theta$ 是变量。从而直线 $PA$ 的方程就是 $y = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \cdot x + 1$ ，联立它们，就能得到 $P$ 的坐标：

$$P(\cos \theta - \sin \theta \cos \theta, \sin \theta + \cos^2 \theta)$$

最后就是求 $|PB|$ 了，可以预见得到的结果是一个关于 $\theta$ 的函数，利用必修一学习的三角恒等变换可以求出其最小值，**过程略。**

顺便说下，本题中 $P$ 点的轨迹是这样子的。这是一条**心形线**。



### 题3

(2021-北京) 已知直线  $y = kx + m$  ( $m$  为常数) 与圆  $x^2 + y^2 = 4$  交于点  $M, N$ , 当  $k$  变化时, 若  $|MN|$  的最小值为 2, 则  $m = ( )$

A. 1 或 -1    B.  $\sqrt{2}$  或  $-\sqrt{2}$     C.  $\sqrt{3}$  或  $-\sqrt{3}$     D. 2 或 -2

答案: C

解析:

$|MN|$  是弦长, 我们知道圆的弦长公式为

$$l = 2 \cdot \sqrt{R^2 - d^2}$$

其中,  $l$  是弦长,  $R$  是圆的半径,  $d$  是圆心到弦的距离 (圆心距)。

既然弦长  $|MN|$  的最小值为 2, 说明圆心距  $d$  的最大值为  $\sqrt{3}$ , 也就是圆心  $(0, 0)$  到直线  $y = kx + m$  的距离最大值为  $\sqrt{3}$ 。

$$d = \frac{|m|}{\sqrt{k^2 + 1}} \leq |m| = \sqrt{3}$$

$$m = \sqrt{3} \text{ 或 } -\sqrt{3}$$

### 题4

(2020-全国) 已知圆  $M: x^2 + y^2 - 2x - 2y - 2 = 0$ , 直线  $l: 2x + y + 2 = 0$ ,  $P$  为  $l$  上的动点, 过点  $P$  做圆  $M$  的切线  $PA, PB$ , 切点为  $A, B$ , 当  $|PM| \cdot |AB|$  最小时, 直线  $AB$  的方程为 ( )

A.  $2x - y - 1 = 0$     B.  $2x + y - 1 = 0$     C.  $2x - y + 1 = 0$     D.  $2x + y + 1 = 0$

答案: B

解析：

这道题和题1是不是一模一样？注意四边形 $PAMB$ 是我们在初中就学过的筝形，它的面积就等于 $|PM| \cdot |AB|$

## 题5

(2020-山东) 直线 $2x + 3y - 6 = 0$ 关于点 $(-1, 2)$ 对称的直线方程是 ( )

A.  $3x - 2y - 10 = 0$     B.  $3x - 2y - 23 = 0$     C.  $2x + 3y - 4 = 0$     D.  $2x + 3y - 2 = 0$

答案：D

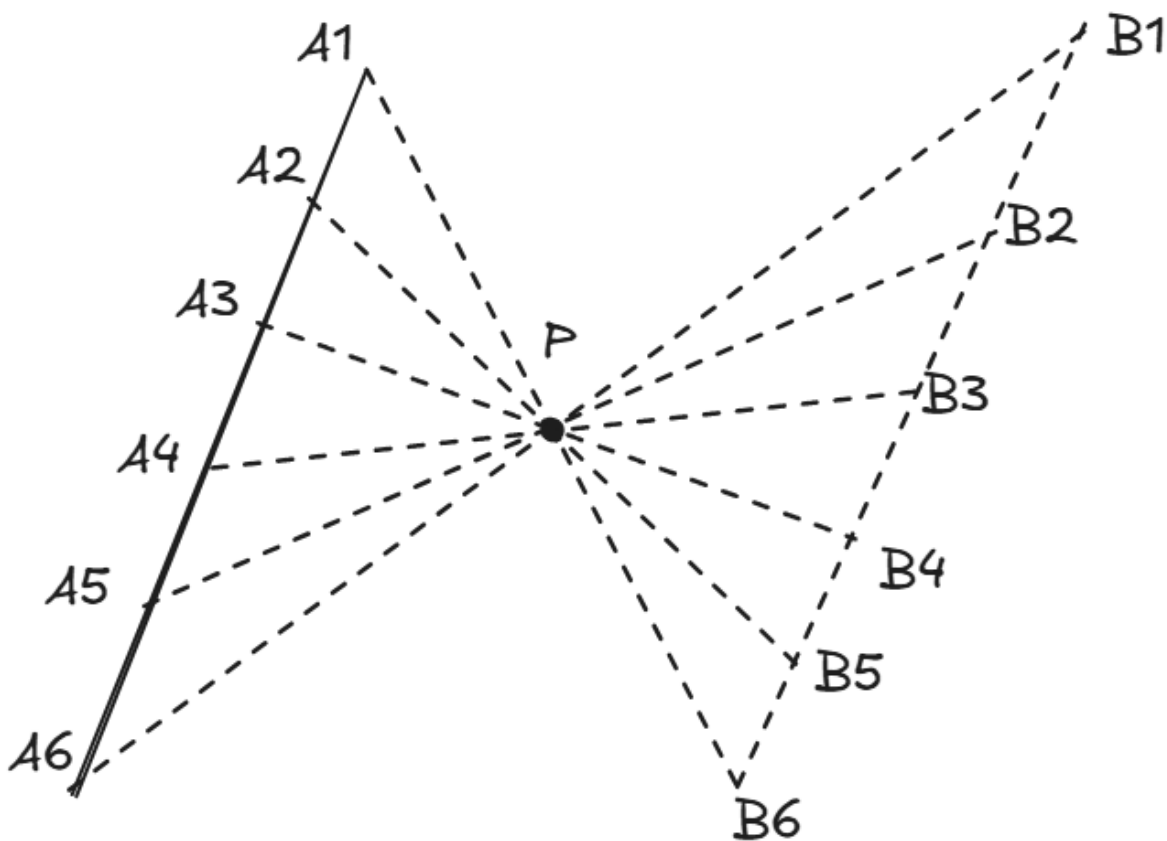
解析：

直线与圆这一章有几个与对称有关的考点，列举如下：

- 点关于点对称
- 点关于线对称
- 线关于点对称
- 圆关于点对称
- 圆关于线对称

其实，所有的这些对称，本质上都是点关于点对称。

本题就是线关于点对称。想象一条直线，它上面有无数个点，我们给每个点做关于对称中心 $P$ 的对称点，那么所有的对称点就连成了一条直线，也就是线关于点的对称直线。下面是一个示意图：



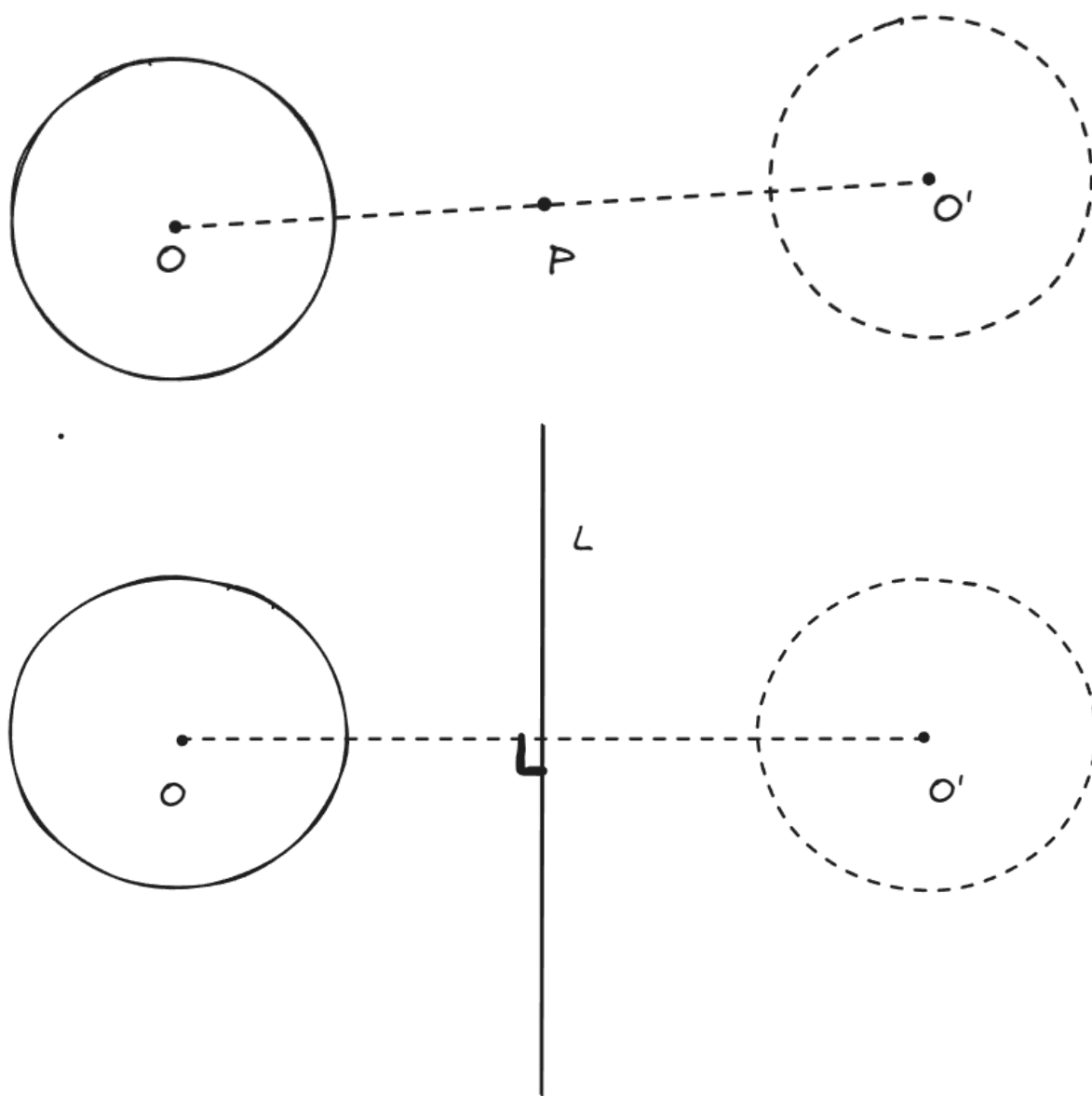
是不是很直观？现在的问题是，我们已经知道了直线 $l$ 的方程 $2x + 3y - 6 = 0$ ，以及对称中心 $P(-1, 2)$ ，我们怎么求出对称直线 $l'$ 呢？

刚才的思想是，我们对直线 $l$ 上无数个点都做对称点，但是在实际操作时，我们往往只在直线 $l$ 上取一个点 $(m, n)$ 作为这无数个点的**代表**。

取 $2x + 3y - 6 = 0$ 上面一个点 $(m, n)$ ，它满足 $2m + 3n - 6 = 0$ ，然后求出 $(m, n)$ 关于 $P(-1, 2)$ 的对称点为

$(-2 - m, 4 - n)$ ，下面是**关键**：既然 $(m, n)$ 是直线 $l$ 的一个代表点，那么 $(-2 - m, 4 - n)$ 就应该是对称直线 $l'$ 的一个代表点，也就是说，我们把 $-2 - m$ 和 $4 - n$ 分别看成整体 $p, q$ ，得到 $m = -2 - p, n = 4 - q$ ，代入 $2m + 3n - 6 = 0$ 中，解得 $2p + 3q - 2 = 0$ ，所以对称直线 $l'$ 的方程就是 $2p + 3q - 2 = 0$ ，习惯上写作 $2x + 3y - 2 = 0$ 。

**注：**对于圆关于点对称，以及圆关于线对称，比上面的线关于点对称要简单很多，因为我们要确定一个圆，只需要确定圆心和半径就行了。一个圆关于点/线的对称圆，它们的半径是一样的，**所以只需要把圆心做对称点就行了**。如下图所示



## 题6

若直线 $(a+2)x + (1-a)y - 3 = 0$ 与直线 $(a-1)x + (2a+3)y + 2 = 0$ 互相垂直，则 $a$ 的值为（ ）

A. 1    B. -1    C. 1或-1    D.  $-\frac{3}{2}$

答案：C

解析：

这道题目，无论是把直线方程转化为 $y = kx + b$ 形式还是转化为 $x = my + t$ 形式都会涉及到分类讨论，比较麻烦。究其本质，是因为这两种形式都**不能表达所有方向的直线**，例如前一种形式不能表达垂直于 $x$ 轴的直线，后一种形式不能表达垂直于 $y$ 轴的直线。

那么，有没有一种方法，能表达出直线的所有方向？答案是使用**法向量**。

熟悉空间向量的同学们对平面的法向量不陌生，那么直线的法向量是什么意思呢？顾名思义，**就是和直线垂直的向量**。形式为 $Ax + By + C = 0$ 的直线，它的法向量是 $(A, B)$ 。例如直线 $x + y - 1 = 0$ ，它的法向量是 $(1, 1)$ ，大家可以自行验证，向量 $(1, 1)$ 的方向是不是和 $x + y - 1 = 0$ 这条直线垂直。

法向量可以表达出直线的所有方向，例如和 $x$ 轴垂直的直线 $x - 1 = 0$ ，它的法向量是 $(1, 0)$ ，和 $y$ 轴垂直的直线 $y + 1 = 0$ ，它的法向量是 $(0, 1)$ 。

和平面的法向量一样，有了直线的法向量，我们就可以对直线的平行和垂直进行刻画。

- 两条直线垂直，等价于法向量垂直
- 两条直线平行，等价于法向量平行

再来看本题，两条直线的法向量分别为 $(a+2, 1-a)$ 和 $(a-1, 2a+3)$ ，这两个法向量垂直，从而数量积为0，

即 $(a+2)(a-1) + (1-a)(2a+3) = 0$ ，解得 $a = 1$ 或 $-1$ 。你看，避免了分类讨论，是不是很简单？

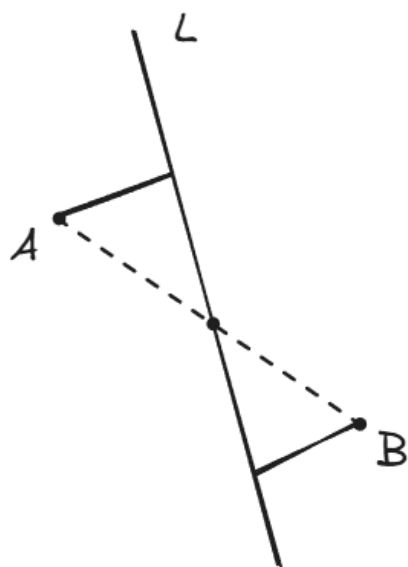
## 题7

过点 $A(1, 2)$ 且与两定点 $(2, 3)$ ,  $(4, -5)$ 等距离的直线方程为\_\_\_\_\_

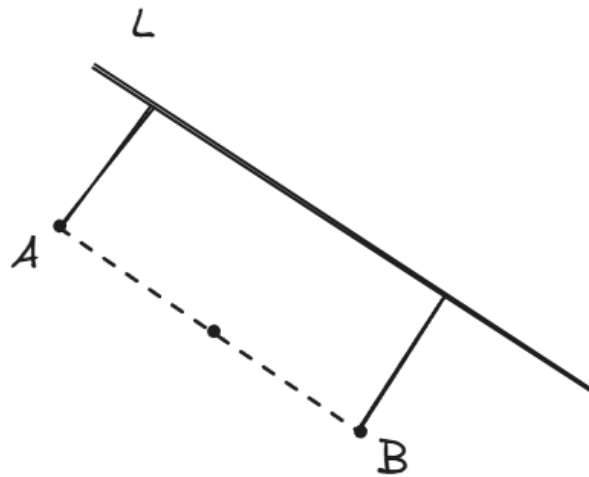
答案： $3x + 2y - 7 = 0$ 或 $4x + y - 6 = 0$

解析：

稍微在脑海中想一想就知道，和两个定点等距离，要么就和这两个定点连成的直线平行，要么就经过这两个定点的连线的中心，如下



Case 1



Case 2

我曾经遇到过一个立体几何题：

平面 $\alpha$ 内存在不共线的三个点到平面 $\beta$ 的距离相等，则 $\alpha \parallel \beta$

这个命题是对还是错呢？仔细想想，是不是和题7很像！不过我当时居然想了很久才想明白~~

## 题8

对任意实数 $m$ ，直线 $x + my - 3m - 4 = 0$ 被圆 $C$ 截得的线段长恒为4，若动点 $P$ 在圆 $C$ 上，则点 $P$ 到原点距离的最小值是\_\_\_\_\_

答案：3

解析：

看到 $x + my - 3m - 4 = 0$ 这样一个带参数的直线方程，**马上就要想到它过一个定点**。我们把参数 $m$ 提取出来， $x + m(y - 3) - 4 = 0$ ，很明显它经过定点 $(4, 3)$ 。现在题目要求这条直线被圆截得的线段长恒定，也就是弦长恒定。什么时候才会出现这种情况？**当然就是直线经过的定点 $(4, 3)$ 恰好是圆心的时候了**，此时不管直线如何旋转，弦长都是恒定的直径。否则的话，直线稍微一旋转，弦长就会改变。

## 题9

设 $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$ ，令  
 $S = \sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{(x-1)^2 + y^2} + \sqrt{x^2 + (y-1)^2} + \sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2}$ ，则 $S$ 的最小值为

答案： $2\sqrt{2}$

解析：

数学里面求代数式的最值，无非两种方法：**代数法**和**几何法**。

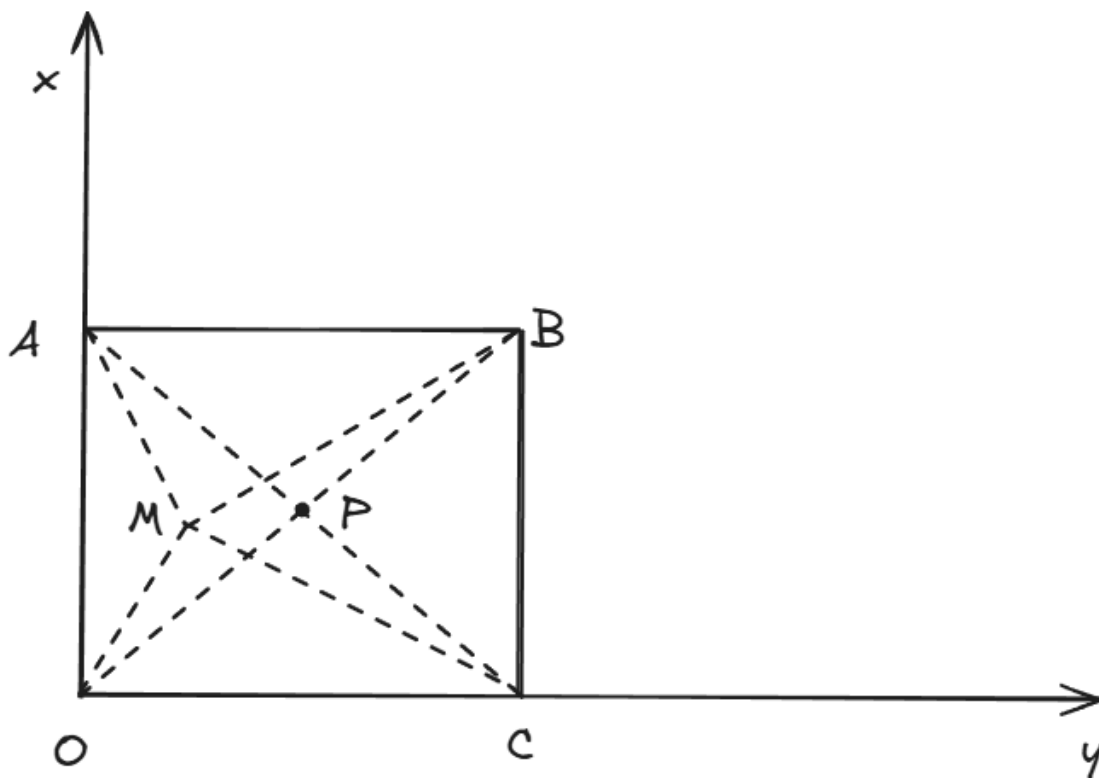
• 几何法：

观察 $S$ 的形式，我们发现这四个根号可以看成点 $(x, y)$ 到 $(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)$ 的距离之和。

如下图，正方形 $OABC$ 边长为1，点 $M(x, y)$ 在正方形内部（包括边界），我们要求的式子 $S$ 就等于 $MO + MA + MB + MC$ 。由于

$$MO + MA + MB + MC = (MA + MC) + (MO + MB) \geq AC + OB = 2\sqrt{2}$$

其中用到了**三角形两边之和大于第三边**，或者称为**三角不等式**。当且仅当点 $M$ 位于对角线交点时取等。



• 代数法：

使用柯西不等式的变式：

$$\begin{aligned} & \sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{(1-x)^2 + y^2} + \sqrt{x^2 + (y-1)^2} + \sqrt{(1-x)^2 + (y-1)^2} \\ & \geq \sqrt{(x+1-x+x+1-x)^2 + (y+1-y+y+1-y)^2} = 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

（注意我把 $x-1$ 和 $y-1$ 写成了 $1-x$ 和 $1-y$ ）。当且仅当 $x = y = \frac{1}{2}$ 时取等。

**注：**柯西不等式变式：

对任意正整数 $n \geq 2$ 以及非零实数 $x_i, y_i (i = 1, 2, 3 \cdots n)$ ，有

$$\begin{aligned} & \sqrt{x_1^2 + y_1^2} + \sqrt{x_2^2 + y_2^2} + \cdots + \sqrt{x_n^2 + y_n^2} \geq \sqrt{(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)^2 + (y_1 + y_2 + \cdots + y_n)^2} \\ & \text{当且仅当 } \frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2} = \cdots = \frac{x_n}{y_n} \text{ 时取等。} \end{aligned}$$