专题练习_圆锥曲线_3

> 本次专题练习是针对双曲线而写的
>
> 椭圆和双曲线尽管在图像上差别很大，但是它们的性质是对称的。椭圆中成立的结论，一般在双曲线中也成立。因此，下面的题目中，我会倾向于选择那些与双曲线特有的性质相关的题目，涵盖了**等轴双曲线**、**焦点三角形的内切圆**、**双曲线的渐近线**这三个元素。

题一

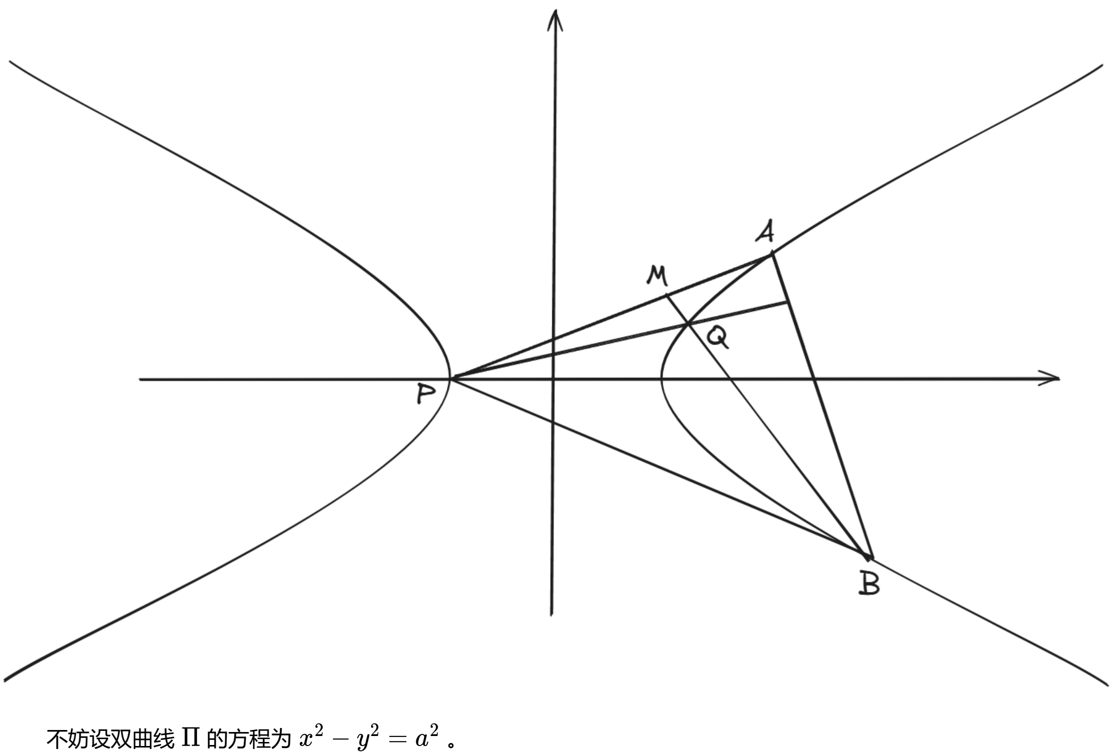
已知等轴双曲线 Π 的左顶点为 P ，AB 是双曲线右支的一条弦，过 P 作 AB 的垂线，与 Π 交于 Q 。

证明：Q 是 $\triangle PAB$ 的垂心。

注：

- 等轴双曲线指的是长轴和短轴长度相等的双曲线。
- Π 是希腊字母 π 的大写形式。除了用作取名，它还是**求积符号**：$\Pi_{i=1}^{n} a_i = a_1 a_2 a_3 \ldots a_n$ 。

解析：



不妨设双曲线 Π 的方程为 $x^2 - y^2 = a^2$ 。

如上图所示，我们要证明 Q 是垂心。既然现在 Q 已经位于一条垂线上了，那么我们只需要证明它位于另一条垂线上。例如，过 B 作垂线 BM ，我们去证明 BM 经过 Q 点就可以了，而要做到这件事，我们需要求出 Q 点坐标和 BM 的方程。

首先求 Q 点坐标，为此，需要求出 P 对 AB 的垂线，并与双曲线联立。而要求 AB 的垂线还需要 AB 的方程，这里我们使用设线法，直接设 AB 的方程为 $x = my + t$ ，注意这里反设方程，是为了避免讨论 AB 垂直于 x 轴的情况……我们之前是这么说的，然而在本题中这样做并没有效果，看下面：

P 点坐标为 $(-a,0)$，它关于 AB 的垂线为 $x=-\frac{1}{m}y-a$，注意，这里显然要求 $m\neq 0$，但是 m 是可以等于 0 的，此时 AB 垂直于 x 轴。所以，即使我们反设 AB 的方程，也不能避免分类讨论。当然这样的情况占少数，具体问题具体分析。这里我就不讨论垂直的情况了，直接看一般的情形，也就是 $m\neq 0$ 时。

联立垂线方程与双曲线方程 $x^2-y^2=a^2$，得到：

$$
\begin{gathered}
(\frac{1}{m^2}-1)y^2+\frac{2a}{m}y=0 \\
y=-\frac{2am}{1-m^2} \text{ or } 0
\end{gathered}
$$

其中，$y=0$ 这个解就是 P 点，从而 Q 点坐标为 $(\frac{a(1+m^2)}{1-m^2},-\frac{2am}{1-m^2})$。

接下来，我们只需要证明 $BQ\perp AP$ 即可，或者还有一种方法，就是先求出 AP 的垂线 BM，然后证明 BM 经过 Q 点。两种方法其实差别不大，这里我们就采用前者。

设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$。我们之前设出 AB 方程后，还没有和双曲线联立得到韦达定理，这一步是设线法必不可少的，我们现在来写一下：

$$
\begin{gathered}
(m^2-1)y^2+2mty+t^2-a^2=0 \\
y_1+y_2=\frac{2mt}{1-m^2},y_1y_2=\frac{t^2-a^2}{m^2-1}
\end{gathered}
$$

好了两分到手（其实这一步骤应该在设出 AB 方程后马上就写好的）。然后求 BQ 方程，也就是

$$
y=\frac{y_2+\frac{2am}{1-m^2}}{x_2-\frac{a(1+m^2)}{1-m^2}}(x-x_2)+y_2
$$

别看这么复杂，我们只需要它的斜率就够了。直线 AP 的斜率是 $\frac{y_1}{x_1+a}$，下面只需要证明这两个斜率之积为 -1。

$$
\begin{aligned}
\frac{y_2+\frac{2am}{1-m^2}}{x_2-\frac{a(1+m^2)}{1-m^2}}\cdot\frac{y_1}{x_1+a} &= \frac{y_1[y_2(1-m^2)+2am]}{(x_1+a)[x_2(1-m^2)-a(1+m^2)]} \\
&= \frac{(1-m^2)y_1y_2+2amy_1}{(my_1+t+a)[(my_2+t)(1-m^2)-a(1+m^2)]} \\
&= \frac{(1-m^2)y_1y_2+2amy_1}{(my_1+t+a)[m(1-m^2)y_2+t(1-m^2)-a(1+m^2)]} \\
&= \frac{(1-m^2)y_1y_2+2amy_1}{m^2(1-m^2)y_1y_2+m[t(1-m^2)-a(1+m^2)]y_1+m(t+a)(1-m^2)y_2+(t+a)[t(1-m}
\end{aligned}
$$

上面这个式子中，出现了 y_1y_2，它能用韦达定理来替换。然而 y_1 和 y_2 的系数不相等，我们不能用 y_1+y_2 来替换。这里就是之前讲过的“非对称韦达定理”。处理方法是：用 y_1y_2 去表示 y_1+y_2。

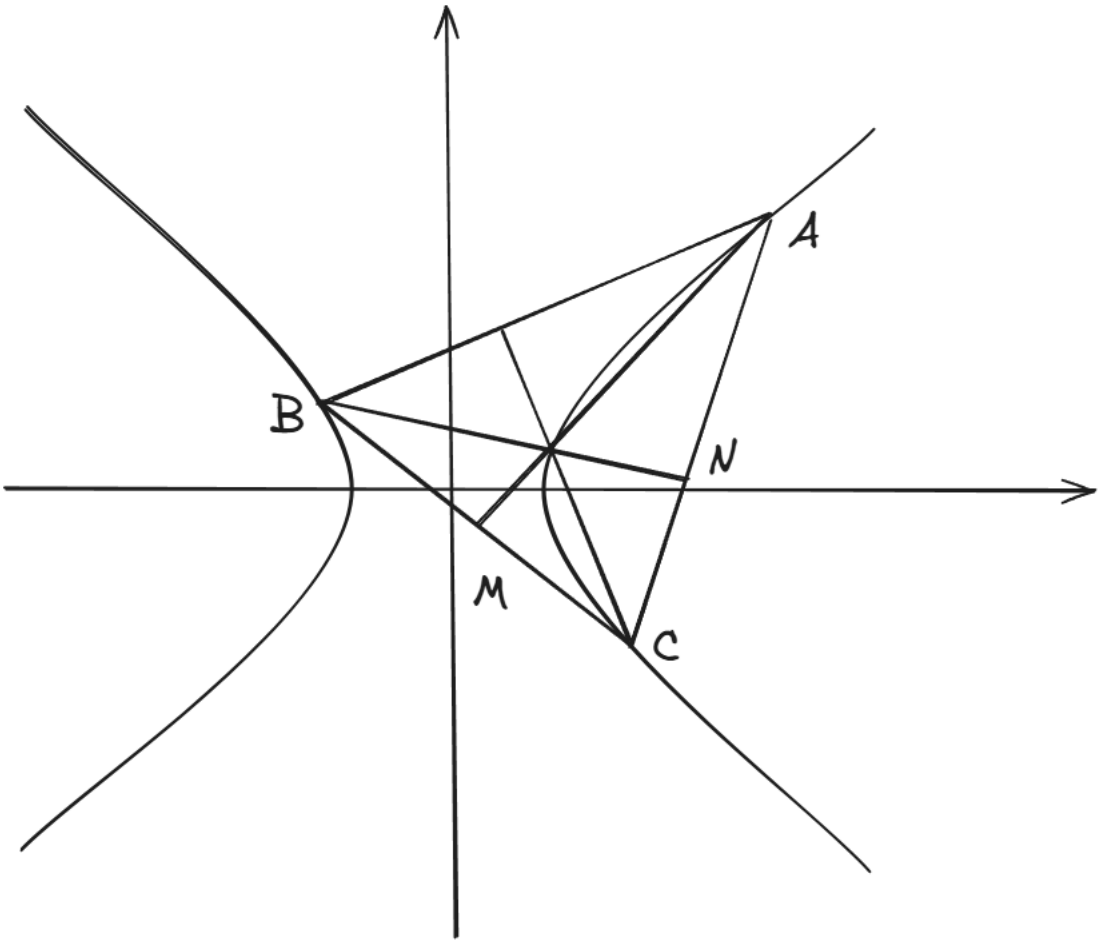
根据之前算出的韦达定理，可以得到 $y_1y_2=\frac{2mt}{a^2-t^2}(y_1+y_2)$，我们把这个式子代入上式，得到：

$$
\begin{aligned}
\frac{y_2+\frac{2am}{1-m^2}}{x_2-\frac{a(1+m^2)}{1-m^2}}\cdot\frac{y_1}{x_1+a} &= \frac{\frac{2mt(1-m^2)}{a^2-t^2}(y_1+y_2)+2amy_1}{\frac{2m^3t(1-m^2)}{a^2-t^2}(y_1+y_2)+m[t(1-m^2)-a(1+m^2)]y_1+m(t+a)(1-m^2)y_2+(t+a)[t(1-} \\
&= 2m\cdot\frac{[t(1-m^2)+a(a^2-t^2)]y_1+t(1-}{2m^3t(1-m^2)(y_1+y_2)+m(a^2-t^2)[t(1-m^2)-a(1+m^2)]y_1+m(a^2-t^2)(t+a)} \\
&= 2m\cdot\frac{[t(1-m^2)+a(a^2-t^2)]y_1+t}{(2m^3t(1-m^2)+m(a^2-t^2)[t(1-m^2)-a(1+m^2)])y_1+(2m^3t(1-m^2)+m(a^2-} \\
&= 2m\cdot -
\end{aligned}
$$

这道题目来源于下面这个美妙的定理，我作了简化，之前是直接把原定理作为题目，然而我做了之后发现难度太大。下面是之前写的解析，后面没有算完，但基本思路是一样的。

A,B,C 是等轴双曲线 Π 上的三点，证明：$\triangle ABC$ 的垂心也在 Π 上。

解析：



如上图所示，不妨设双曲线 Π 的方程为 $x^2-y^2=a^2(a>0)$ 。

我们要证明这个三角形的垂心位于 Π 上，所以需要求出两条垂线的交点坐标，并证明这个交点坐标满足双曲线的方程 $x^2-y^2=a^2$ 。

之前说过，椭圆和双曲线的题目一般用设线法。本题的三角形有三条边，那么我们应该设出哪一条边的直线方程呢？答案是**随便**。因为三条边的地位是等价的。不妨设 AB 的方程为 $y=kx+m$ ，点 A,B,C 的坐标分别为 $(x_1,y_1),(x_2,y_2),(x_3,y_3)$ 。注意，直线 AB 是可以垂直 x 轴的，当然也可以垂直 y 轴，因此无论如何，都要分类讨论一下，这一步留给读者。下面的解析，主要叙述的是一般性的情况，也就是 AB 不垂直于 x 轴时。

接下来，我们求出 A,B 到对边的垂线 AM,BN ，那么两条垂线的交点就是垂心。但是在此之前，需要先把直线 AB 和双曲线联立，求出韦达定理的两个式子。（不止一次地强调过，不管题目会不会做，这一步的两分是必须要拿到的）

$$x^2-(kx+m)^2=a^2$$
$$(1-k^2)x^2-2kmx-m^2-a^2=0$$

于是根据韦达定理，我们有

$$\begin{cases} x_1+x_2=\dfrac{2km}{1-k^2} \\ x_1x_2=\dfrac{-m^2-a^2}{1-k^2} \end{cases}$$

好了两分到手，~~可以做下一题了~~,然后我们首先求 AM ，为此，需要先求出直线 BC 的方程：

$$BC:y=\frac{y_2-y_3}{x_2-x_3}(x-x_2)+y_2$$

先别急着求 AM ，这里有个疑点：直线 BC 也有可能垂直于 x 轴！当然它也可能垂直于 y 轴，所以这里又要分类讨论了……吗？其实不用，因为之前我们已经分类讨论过（虽然在这个解析里面没有写），当直线 AB 垂直于 x 轴的时候，题目的结论是成立的。现在你想一想，既然 AB 垂直于 x 轴的时候结论成立，那么 BC 垂直于 x 轴的时候结论是不是也一定成立？ AC 垂直于 x 轴的时候呢？这是当然的。**因为这三条边的地位是等价的。**所以这里就不需要分类

讨论了。下面求 AM 。

$$AM: y=\frac{x_3-x_2}{y_2-y_3}(x-x_1)+y_1$$

好了，两条垂线求出了一条，还剩下一条 BN 。那么我们还需要把上面求 AM 的过程重复一遍吗？其实不需要，我们可以直接写出：

$$BN: y=\frac{x_3-x_1}{y_1-y_3}(x-x_2)+y_2$$

为什么？其实很简单，还是利用 AB, BC, CA 三条边地位等价这一事实。AM 是 $B(x_2,y_2)C(x_3,y_3)$ 边上的垂线，它经过 $A(x_1,y_1)$；BN 是 $A(x_1,y_1),C(x_3,y_3)$ 边上的垂线，它经过 $B(x_2,y_2)$ 。比较一下，我们只需要把 B 和 A 换个位置就行了，也就是把 AM 方程中的 x_2 换成 x_1 ，x_1 换成 x_2，y_2 换成 y_1，y_1 换成 y_2 ，就能得到直线 BN 的方程。如果是考试，答题卡上就写一个 **同理** ，然后直接把 BN 方程美美写出来。**同理**这个东西是各种数学证明的常客，在高中阶段，我们只在像本题这样有明显规律和对称性的情况下使用。

好了，下面求 AM 和 BN 的交点，也就是我们心心念念的垂心，不妨给它取个名字叫做 P 。P 是 `point` 的首字母，常用来给点取名。

联立

$$\begin{cases} y=\frac{x_3-x_2}{y_2-y_3}(x-x_1)+y_1 \\ y=\frac{x_3-x_1}{y_1-y_3}(x-x_2)+y_2 \end{cases}$$

解得 P 点坐标为

$$\begin{cases}
x_P=\frac{y_2-y_1+\frac{x_1(x_3-x_2)}{y_2-y_3}-\frac{x_2(x_3-x_1)}{y_1-y_3}}{\frac{x_3-x_2}{y_2-y_3}-\frac{x_3-x_1}{y_1-y_3}} \\
=\frac{(y_2-y_1)(y_2-y_3)(y_1-y_3)+x_1(x_3-x_2)(y_1-y_3)-x_2(x_3-x_1)(y_2-y_3)}{(x_3-x_2)(y_1-y_3)-(x_3-x_1)(y_2-y_3))} \\
=\frac{k(x_2-x_1)(kx_2+m-y_3)(kx_1+m-y_3)+x_1(x_3-x_2)(kx_1+m-y_3)-x_2(x_3-x_1)(kx_2+m-y_3)}{(x_3-x_2)(kx_1+m-y_3)-(x_3-x_1)(kx_2+m-y_3)} \\
=\frac{k(x_2-x_1)[k^2x_1x_2+k(m-y_3)(x_1+x_2)+(m-y_3)^2]+k[(x_1-x_2)(x_3(x_1+x_2)-x_1x_2)]+x_3(m-y_3)(x}{(kx_3+m-y_3)(x_1-x_2)} \\
=\frac{k(x_2-x_1)[k^2\cdot\frac{-m^2-a^2}{1-k^2}+k(m-y_3)\cdot\frac{2km}{1-k^2}+(m-y_3)^2]+k[(x_1-x_2)(x_3\cdot\frac{2km}{1-k^2}+\frac{m^2+a^2}{1-k^2})]+x_3(m-y_3)(x}{(kx_3+m-y_3)(x_1-x_2)} \\
=\frac{k(x_2-x_1)[-k^2m^2-k^2a^2+2k^2m^2-2k^2my_3+(1-k^2)(m-y_3)^2]+k(x_1-x_2)(2kmx_3+m^2+a^2)+x_3(}{(1-k^2)(kx_3+m-y_3)} \\
=\frac{[k^3m^2+k^3a^2-2k^3m^2+2k^3my_3+k^3m^2-2k^3my_3+k^3y_3^2-km^2+2kmy_3-ky_3^2+2k^2mx_3+km^2+ka^2}{(1-k^2)(kx_3+m-y_3)} \\
=\frac{[k^3(m^2+a^2-2m^2+2my_3+m^2-2my_3+y_3^2)+k^2(2mx_3-mx_3+x_3y_3)+k(-m^2+2my_3-y_3^2+m^2+}{(1-k^2)(kx_3+m-y_3)} \\
=\frac{[(a^2+y_3^2)k^3+x_3(m+y_3)k^2+(2my_3-y_3^2+a^2)k+mx_3-x_3y_3]}{(1-k^2)(kx_3+m-y_3)} \\
=
\end{cases}$$

上面的公式貌似只有在线浏览能看全，PDF版只能看到一部分，因为太长了。

计算量实在很大，连我都坚持不下去。

题2

已知双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左、右顶点分别为 A,B，点 $D(3,\sqrt{2})$ 在 C 上，且直线 AD 与 BD 的斜率之和为 $\sqrt{2}$。

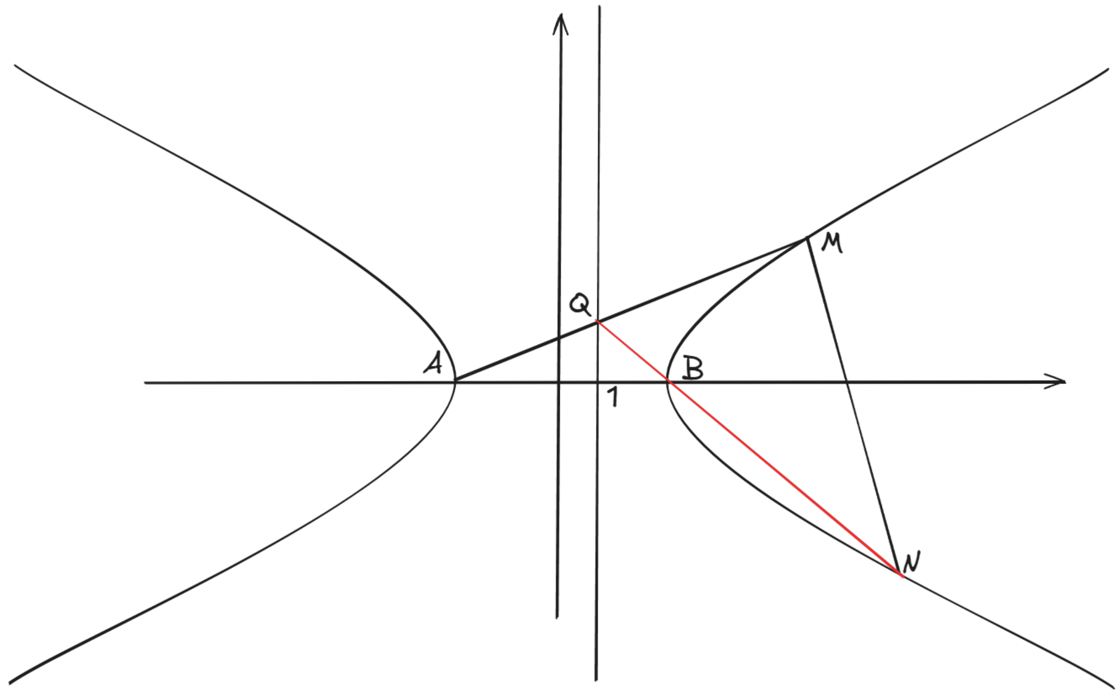
（1）求双曲线 C 的方程

（2）过点 $P(3,0)$ 的直线与 C 交于 M,N 两点（均异于点 A,B），直线 MA 与直线 $x=1$ 交于点 Q，求证：B,N,Q 三点共线

解析:

（1）略，求出来双曲线的方程为 $\frac{x^2}{3}-y^2=1$。

（2）首先，画出图像如下：



这道题目方法不止一种，先讲最经典的**设线法**：

首先理出本题的逻辑链：我们要证明的是B,N,Q 三点共线，那么肯定要把这三点的坐标都求出来，或者设出来。其中点 B 是已知的，那么我们只需要 N,Q 的坐标，而 Q 点是直线 MA 与直线 $x=1$ 的交点，所以如果要求 Q 点坐标，就需要求出直线 MA，而 A 点是已知的，所以我们需要点 M 的坐标。再加上之前的 N 点坐标，总而言之我们就需要直线 MN，因此就设出 MN 方程。

实际上，即使不做上面的思维体操，也很容易知道要设直线 MN 的方程（至于原因，在之前提及很多次了，在这里，MN 是构建整个图形的驱动，从作图顺序上看，也是先画出 MN 再有后面那些有的没的）。设出 MN 方程，也就相当于得到了 M,N 的坐标（因为我们要把 MN 和双曲线联立）。

思路已经理清，之后就是纯粹的计算。本题的计算量不算大，

设 MN 的方程为 $x=my+3$，M,N 的坐标分别为 $(x_1,y_1),(x_2,y_2)$，与双曲线联立：

$$(my+3)^2-3y^2=3$$
$$(m^2-3)y^2+2mty+6=0$$
$$y_1+y_2=\frac{6m}{3-m^2},y_1y_2=\frac{6}{m^2-3}$$

直线 AM 的方程为：

$$y=\frac{y_1}{x_1+\sqrt{3}}(x+\sqrt{3})$$

令 $x=1$，得到点 Q 的坐标为 $(1,\frac{(1+\sqrt{3})y_1}{x_1+\sqrt{3}})$。

下面证明 N,B,Q 三点共线。也就是证明 $k_{BQ}=k_{BN}$。

$$k_{BQ}=k_{BN}$$
$$\frac{(1+\sqrt{3})y_1}{(1-\sqrt{3})(x_1+\sqrt{3})}=\frac{y_2}{x_2-\sqrt{3}}$$
$$(1+\sqrt{3})(my_2+3-\sqrt{3})y_1=(1-\sqrt{3})(my_1+3+\sqrt{3})y_2----\text{把x换成y}$$
$$(1+\sqrt{3})(3-\sqrt{3})y_1+(\sqrt{3}-1)(3+\sqrt{3})y_2+2\sqrt{3}my_1y_2=0$$

现在，根据之前求出的韦达定理，可以得到：$y_1y_2=-\frac{y_1+y_2}{m}$，代入上式得到

$$2\sqrt{3}(y_1+y_2)-2\sqrt{3}(y_1+y_2)=0$$
$$0=0$$

所以，命题成立。

下面，再给出一种使用**定比点差**的方法：

在前两次的专题练习中介绍过所谓的定比点差法，这种技术是专门用来解决定比分弦的问题的，具体而言，就是已知圆锥曲线的一条弦，并且这条弦被一个点分成一定比例的两段。在本题中，并没有这样的条件，但是我们可以自己创造一个定比分弦的条件。

在刚才的设线法中，我们是先求出 Q 点坐标，然后证明 N,B,Q 三点共线。为了能够应用定比分弦技术，我们需要对这种证明思路做一个调整：现在我们假设直线 NB 与直线 MA 交于点 Q'，然后我们去证明 Q' 位于直线 $x=1$ 上，换句话说就是证明 Q' 和 Q 是重合的。这种证明思路在初中的平面几何中经常使用。

现在可以开始正式的证明：

首先，需要创造出定比分弦的条件：设

$$\overrightarrow{QM}=\lambda\overrightarrow{QA}$$
$$\overrightarrow{QN}=\mu\overrightarrow{QB}$$

这样一来，Q 点就把弦 MA 和 NB 分成了一定比例的两段。注意，即使 Q 点在弦 NB 的外面，我们也可以说它把 NB 分成了两段。用射影几何的术语来描述的话，我们称 Q 点是线段 NB 的**外分点**，是线段 MA 的**内分点。**

设点 Q 坐标为 (x_0,y_0)，点 M,N 的坐标分别为 (x_1,y_1)，(x_2,y_2)，根据上面两个向量等式，可以得到：

$$x_1-x_0=\lambda(-\sqrt{3}-x_0)$$
$$y_1-y_0=\lambda(0-y_0)$$
$$x_2-x_0=\mu(\sqrt{3}-x_0)$$
$$y_2-y_0=\mu(0-y_0)$$

整理得到

$$x_1=(1-\lambda)x_0-\sqrt{3}\lambda$$
$$y_1=(1-\lambda)y_0$$
$$x_2=(1-\mu)x_0+\sqrt{3}\mu$$
$$y_2=(1-\mu)y_0$$

从上面的式子中，凑出 M,N 坐标相加与相减的形式。（因为点差法作差之后会出现平方差）

$$\frac{x_1}{1-\lambda}-\frac{x_2}{1-\mu}=\frac{\sqrt{3}\lambda}{\lambda-1}+\frac{\sqrt{3}\mu}{\mu-1}$$
$$\frac{x_1}{1-\lambda}+\frac{x_2}{1-\mu}=2x_0+\frac{\sqrt{3}\lambda}{\lambda-1}+\frac{\sqrt{3}\mu}{1-\mu}$$
$$\frac{y_1}{1-\lambda}-\frac{y_2}{1-\mu}=0$$
$$\frac{y_1}{1-\lambda}+\frac{y_2}{1-\mu}=2y_0$$

之所以系数是 $\frac{1}{1-\lambda}$ 和 $\frac{1}{1-\mu}$ ，是因为要使得 $\frac{y_1}{1-\lambda}-\frac{y_2}{1-\mu}=0$ ，这样一来的话，在定比点差之后的式子里面就不会含有 y ，你马上就会知道：

下面就可以使用定比点差法了，

$$\frac{x_1^2}{3}-y_1^2=1$$
$$\frac{x_2^2}{3}-y_2^2=1$$

我们把 (1) 乘以 $(\frac{1}{1-\lambda})^2$ ，把 (2) 乘以 $(\frac{1}{1-\mu})^2$ ，得到：

$$\frac{(\frac{x_1}{1-\lambda})^2}{3}-(\frac{y_1}{1-\lambda})^2=(\frac{1}{1-\lambda})^2$$
$$\frac{(\frac{x_2}{1-\mu})^2}{3}-(\frac{y_2}{1-\mu})^2=(\frac{1}{1-\mu})^2$$

把这两个式子相减，注意第二项为 0 ，这就是为什么系数是这样的

$$\frac{(\frac{x_1}{1-\lambda}-\frac{x_2}{1-\mu})(\frac{x_1}{1-\lambda}+\frac{x_2}{1-\mu})}{3}-(\frac{y_1}{1-\lambda}-\frac{y_2}{1-\mu})(\frac{y_1}{1-\lambda}+\frac{y_2}{1-\mu})=(\frac{1}{1-\lambda})^2-(\frac{1}{1-\mu})^2$$
$$(\frac{\sqrt{3}\lambda}{\lambda-1}+\frac{\sqrt{3}\mu}{\mu-1})(2x_0+\frac{\sqrt{3}\lambda}{\lambda-1}+\frac{\sqrt{3}\mu}{1-\mu})=3(\frac{1}{1-\lambda})^2-3(\frac{1}{1-\mu})^2$$

好，这个式子看起来化简不了，我们先放着，后面再用。

题目还有一个条件：直线 MN 过点 $(3,0)$ 。还记得我们之前求出的 M,N 坐标吗？不用翻上去看，我把它搬过来：

$$x_1=(1-\lambda)x_0-\sqrt{3}\lambda$$
$$y_1=(1-\lambda)y_0$$
$$x_2=(1-\mu)x_0+\sqrt{3}\mu$$
$$y_2=(1-\mu)y_0$$

于是，直线 MN 的方程即为： $y=\frac{(\lambda-\mu)y_0}{(\lambda-\mu)x_0+\sqrt{3}(\lambda+\mu)}(x-(1-\lambda)x_0+\sqrt{3}\lambda)+(1-\lambda)y_0$，它过点 $(3,0)$ ，于是令 $x=3,y=0$ ，得到

$$\frac{(\lambda-\mu)y_0}{(\lambda-\mu)x_0+\sqrt{3}(\lambda+\mu)}(3-(1-\lambda)x_0+\sqrt{3}\lambda)+(1-\lambda)y_0=0$$
$$(\lambda-\mu)(3-(1-\lambda)x_0+\sqrt{3}\lambda)+[(\lambda-\mu)x_0+\sqrt{3}(\lambda+\mu)](1-\lambda)=0$$
$$(\lambda+\mu)(1-\lambda)+\sqrt{3}(\lambda-\mu)+\lambda(\lambda-\mu)=0$$
$$\frac{1+\sqrt{3}}{1-\lambda}+\frac{1-\sqrt{3}}{1-\mu}=2$$
$$\frac{1}{1-\lambda}=\frac{(\sqrt{3}-1)(1+\sqrt{3}-2\mu)}{2(1-\mu)}$$

现在回到之前定比点差得到的式子：

$$(\frac{\sqrt{3}\lambda}{\lambda-1}+\frac{\sqrt{3}\mu}{\mu-1})(2x_0+\frac{\sqrt{3}\lambda}{\lambda-1}+\frac{\sqrt{3}\mu}{1-\mu})=3(\frac{1}{1-\lambda})^2-3(\frac{1}{1-\mu})^2$$

$$x_0=\frac{3(\frac{1}{1-\lambda})^2-3(\frac{1}{1-\mu})^2-3[(\frac{\lambda}{\lambda-1})^2-(\frac{\mu}{\mu-1})^2]}{2\sqrt{3}(\frac{\lambda}{\lambda-1}+\frac{\mu}{\mu-1})}$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\frac{1+\lambda}{1-\lambda}-\frac{1+\mu}{1-\mu}}{\frac{\lambda}{\lambda-1}+\frac{\mu}{\mu-1}}$$

把之前算出的 λ 与 μ 的关系代入上式，化简后即得 $x_0=1$ 。这就证明了 Q' 位于 $x=1$ 上。