

# 集萃\_1

## 题1

定义：三维欧氏空间中的点称为整点，当且仅当 $x, y, z$ 坐标都是整数，例如 $(1, 1, 2)$ ,  $(-2, 6, -2)$ 。从空间中任取 $n$ 个整点 $P_1, P_2, P_3, \dots, P_n$ ，再从它们之中任取两个不同的点 $P_i, P_j (i \neq j)$ ， $P_i, P_j$ 的中点**不会**是整点。问： $n$ 的最大值为\_\_\_\_\_

答案：8

解析：

如果两个整点的中点还是整点，说明 $x, y, z$ 坐标的奇偶性相同（因为奇加奇得偶，偶加偶得偶，而偶数除以二一定是整数）。 $x, y, z$ 的奇偶性一共能组合出8种情况：(奇, 奇, 奇), (奇, 偶, 奇), (偶, 奇, 奇), (奇, 奇, 偶), (奇, 偶, 偶), (偶, 偶, 奇), (偶, 奇, 偶), (偶, 偶, 偶)。那么 $n > 8$ 时，也就是任取空间中至少9个整点时，其中必然存在两个整点的奇偶性相同，从而它们两个的中点也是整点。现在题目要求所有的中点都不能是整点，所以 $n$ 最大为8(也就是取遍了所有奇偶性的组合)。

## 题2

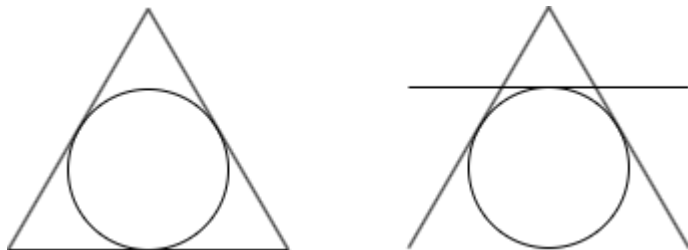
平面直角坐标系中有三条直线：

$l_1 : \cos \theta_1 \cdot x + \sin \theta_1 \cdot y = 1, l_2 : \cos \theta_2 \cdot x + \sin \theta_2 \cdot y = 1, l_3 : \cos \theta_3 \cdot x + \sin \theta_3 \cdot y = 1$ ，其中 $\theta_1 \neq \theta_2 \neq \theta_3$ 。若 $l_1, l_2, l_3$ 围成一个等边三角形，其面积为 $S$ ，则 $S$ 的取值集合为\_\_\_\_\_

答案： $\{\frac{\sqrt{3}}{3}, 3\sqrt{3}\}$

解析：

观察三条直线的结构，容易注意到它们到原点的距离都为1。所以，它们都是单位圆的切线。又因为围成了等边三角形，所以有两种情形：要么单位圆作为等边三角形的内切圆，要么单位圆作为等边三角形的外切圆(注意不是外接圆)。如下图所示：



## 题3

任取一户有两个孩子的家庭，已知其中一个女孩，则另一个是女孩的概率为\_\_\_\_\_

答案： $\frac{1}{2}$ .....还是 $\frac{1}{3}$ ?

本题是一道争议很大的题目，被称为两孩悖论。在著名的概率论科普读物《醉汉的脚步》中，作者认为本题的答案是 $\frac{1}{3}$ ，同时他还得到了一个更加违反常识的结论：如果把条件“已知其中一个是女孩”改为“已知其中一个是女孩，名字叫佛罗里达”，则结果变成 $\frac{1}{2}$ 。

我知道，第一次看到上面的答案时，你会感到惊讶。实际上，上面的答案虽然有一定的道理，但也并不完全正确。迄今为止，包括《醉汉的脚步》作者蒙洛迪诺在内的很多人都对上面的答案提出了质疑。

我们先来看看蒙洛迪诺在书中写提出的解法：

- 这是一个古典概型问题，考虑出生顺序，样本空间为{男，男}，{男，女}，{女，男}，{女，女}，现在已知有一个是女孩，那么{男，男}这种情况就不可能了，样本空间缩小为{女，女}，{男，女}，{女，男}，因此概率为 $\frac{1}{3}$ 。
- 如果把条件改成“已知其中一个是女孩，名字叫佛罗里达”，我们可以用女F表示叫佛罗里达的女孩，女NF表示不叫佛罗里达的女孩，这样样本空间就变成{男，男}，{女F，男}，{男，女F}，{女NF，男}，{男，女NF}，{女F，女NF}，{女NF，女F}，现在已知有一个叫佛罗里达的女孩，那么样本空间缩小为{女F，男}，{男，女F}，{女F，女NF}，{女NF，女F}，因此概率为 $\frac{1}{2}$ 。

上面的解答看起来天衣无缝，但得到的结果非常违反直觉。到底错在哪？

严格来说，本题的题干是模糊不清的，因而对题干的不同理解，会导出不同的答案。

如果你认为本题的答案是 $\frac{1}{2}$ ，你应该是这么想的：这是一个古典概型问题，不考虑出生顺序，样本空间为{男，男}，{男，女}，{女，女}，现在已知有一个是女孩，那么{男，男}这种情况就不可能了，样本空间变成{女，女}，{男，女}，因此概率为 $\frac{1}{2}$ 。

问题在于样本空间上面，究竟要不要考虑出生的先后顺序？

在本题中，这个争议是解决不了的，因为本题的条件：“已知其中一个是女孩”叙述模糊，不管是从中文来理解，还是从英文原文来理解，都无从确定是否“特指”。

## 题4

设 $n$ 个随机事件 $A_1, A_2, \dots, A_n$ ，发生的概率分别为 $p_1, p_2, \dots, p_n$ ，满足 $p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$ ，其中 $p_1 \leq p_2 \leq \dots \leq p_n$ ，并且 $p_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 都是 $\frac{1}{2}$ 的幂。

证明： $p_1 = p_2$ 。

解析：

我们设

$$p_i = \left(\frac{1}{2}\right)^{k_i}, (i = 1, 2, \dots, n)$$

应有 $k_1 \geq k_2 \geq \dots \geq k_n$ ，我们要证明 $k_1 = k_2$ 。根据 $p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$ ，有

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{k_1} + \left(\frac{1}{2}\right)^{k_2} + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^{k_n} = 1$$

我们把它写成

$$1 + 2^{k_1-k_2} + 2^{k_1-k_3} + \dots + 2^{k_1-k_n} = 2^{k_1}$$

注意到右边是偶数，所以左边也是偶数。那么  $2^{k_1-k_2} + 2^{k_1-k_3} + \dots + 2^{k_1-k_n}$  就应该是奇数，说明其中有指数为0的项（有奇数个，总之至少有一个）。因此至少我们知道  $k_1 - k_2$  为0（因为它是最小的指数），从而  $k_1 = k_2$ 。即  $p_1 = p_2$ 。

**注：**这个问题看似单薄，实则背景深厚。所有概率均为  $\frac{1}{2}$  的幂，这样的情况非常特别，在很多地方都有应用。就我所知道的而言，计算机科学中的 *Huffman* 编码就是在这样的情况下，取到平均编码长度的下界。

## 题5

设  $a, b \in \mathbb{R}$ ，若对于任意  $x \in [-1, 1]$ ，都有  $|x^2 + ax + b| \leq 1$ ，则  $a$  的取值范围是\_\_\_\_\_

答案：  $[2 - 2\sqrt{2}, -2 + 2\sqrt{2}]$

**解析：**

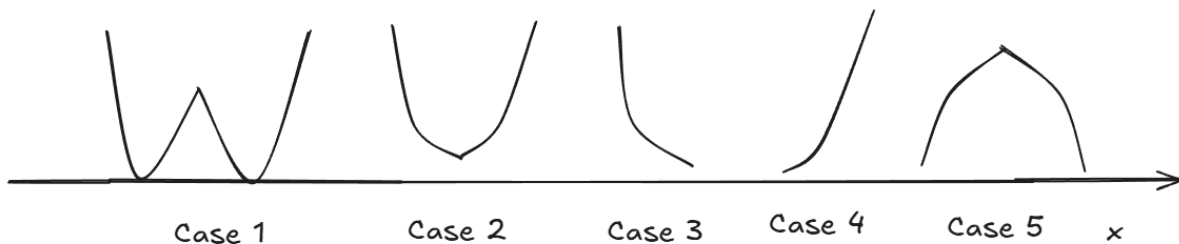
这道题目可谓是把数学“**题干越短，题目越难**”的特点展现得淋漓尽致。没有接触过数学竞赛的正常高中生，如果能独立地做出这道题，可以说是非常非常不错的了。

曾经，浙江卷自主命题的时候，其一大特点就是层出不穷的绝对值。绝对值，这个数学概念看似简单，实则深奥无比，在绝对值上大做文章的难题比比皆是。

本题就是这样一道绝对值难题，它其实有一个背景，称为“**切比雪夫最佳逼近**”，只不过这个背景实在是过于深邃，没有一定竞赛基础的话很难真正弄懂，所以，我就以最通俗易懂的高中数学方法来解决这道题目。

设  $f(x) = x^2 + ax + b, x \in [-1, 1]$ ，根据题目条件， $|f(x)|$  的最大值为1。那么很自然的想到，要把  $|f(x)|$  的图像给画出来。

这是个什么样的函数？二次函数套绝对值，它在  $[-1, 1]$  内的图像应该有5种情况：



我们先来考虑最复杂的 Case 1：

要想出现这样的图像，说明  $f(x)$  的对称轴在  $[-1, 1]$  内，并且  $f(x)$  的最小值要小于0，把这两个条件转换成数学语言，就是：

$$-1 < -\frac{a}{2} < 1 \quad (1)$$

$$\frac{4b - a^2}{4} < 0 \quad (2)$$

也就是

$$-2 < a < 2$$

$$b < \frac{a^2}{4}$$

此时 $|f(x)|$ 的最大值等于  $\max\{f(-1), -f(-\frac{a}{2}), f(1)\}$  , 即

$$\begin{aligned}\max_{[-1,1]}|f(x)| &= \max\{f(-1), -f(-\frac{a}{2}), f(1)\} \\ &= \max\{-a+b+1, \frac{a^2-4b}{4}, a+b+1\}\end{aligned}$$

根据题意, 上面这个最大值小于等于 1 , 说明

$$-a+b+1 \leq 1$$

$$\frac{a^2-4b}{4} \leq 1$$

$$a+b+1 \leq 1$$

化简上面的式子, 并结合 (1), (2) , 我们有

$$b \leq a \quad (3)$$

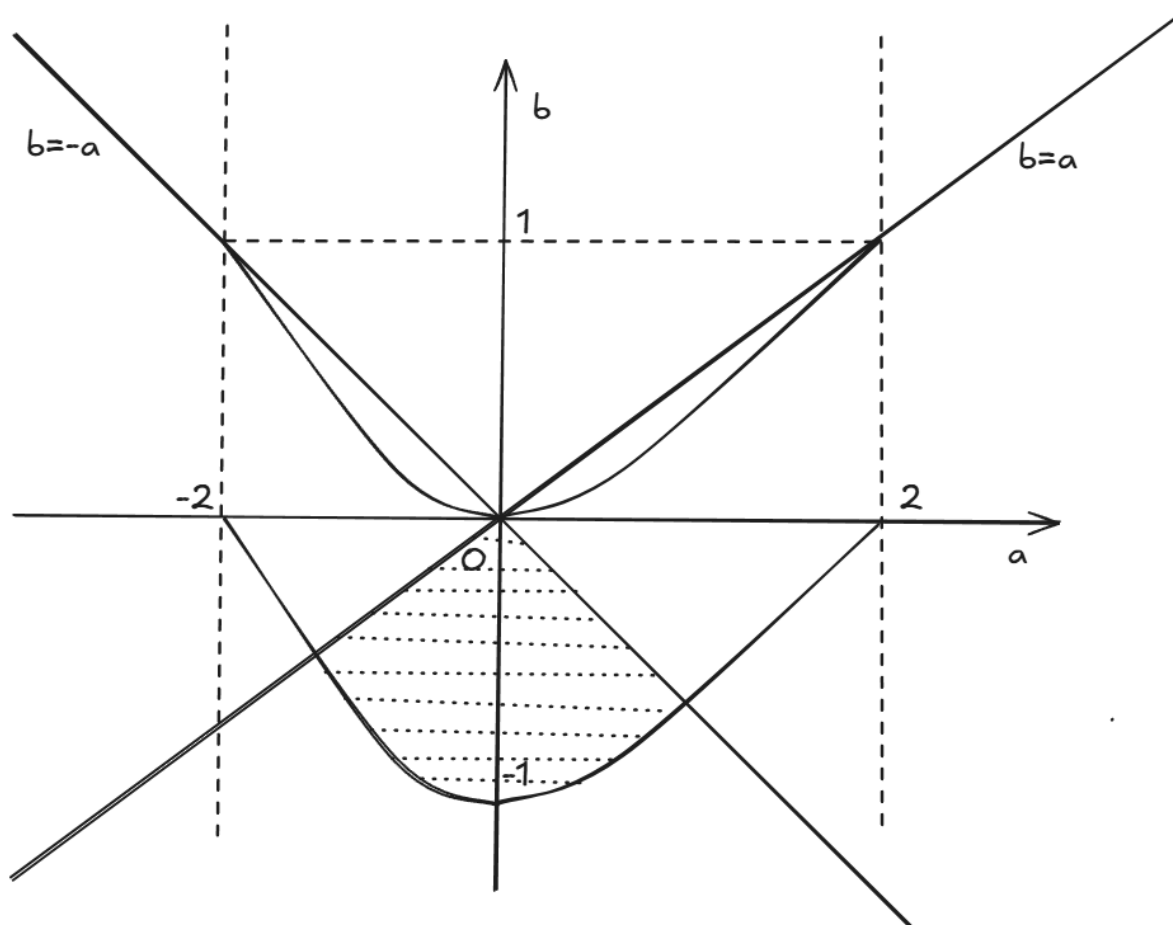
$$b \geq \frac{a^2}{4} - 1 \quad (4)$$

$$b \leq -a \quad (5)$$

$$-2 < a < 2 \quad (6)$$

$$b \leq \frac{a^2}{4} \quad (7)$$

上面这个不等式组, 已经指明了  $a, b$  的范围。我们在平面直角坐标系中画出该不等式组表示的区域:



如图, 点  $(a, b)$  的范围用点线描绘了出来。它是由  $b = \frac{a^2}{2}, b = \frac{a^2}{4} - 1, b = a, b = -a$  四条曲线/直线包围出来的区域, 包括边界。因此  $2 - 2\sqrt{2} \leq a \leq 2\sqrt{2} - 2$  。

对于其它 4 种情况, 做法是一样的, 留给读者自行解决。

## 题6

(1) 证明：不存在 7 条棱的多面体。

(2) 已知对于任意多面体，其面数  $\phi$ ，顶点数  $v$ ，边数  $\varepsilon$  满足： $v + \phi - \varepsilon = 2$ 。证明：正多面体的面数只能是 4, 6, 8, 12, 20。

**解析：**

首先我们明确两个关系，在之后的解题中很有用：

设多面体的面数为  $\phi$ ，顶点数为  $v$ ，边数为  $\varepsilon$ ，每个面上分别有  $m_1, m_2 \cdots m_\phi$  条边，每个顶点分别连出了  $n_1, n_2 \cdots n_v$  条边，则有：

$$m_1 + m_2 + \cdots m_\phi = 2\varepsilon$$

$$n_1 + n_2 + \cdots n_v = 2\varepsilon$$

这两个等式其实很显然，因为每条边都属于两个面，同时也属于两个顶点，因此每条边都被计算了两次。

(1) 反证法。假设存在一个 7 条棱的多面体，它的面数为  $\phi$ ，顶点数为  $v$ ，边数为  $\varepsilon = 7$ 。

因为每个面上至少有 3 条边，所以  $3\phi \leq 2v = 14$ ，所以  $\phi \leq 4$ ，又因为  $\phi \geq 4$ （三个面不能构成多面体），故  $\phi = 4$ 。但是四面体的边数为 6，故假设不成立，也就是不存在 7 条棱的多面体。

(2) 设正多面体的面数为  $\phi$ ，顶点数为  $v$ ，边数为  $\varepsilon$ ，从每个顶点连出的边数为  $\delta$ ，每个面都是正  $n$  边形，则：

$$v + \phi - \varepsilon = 2$$

$$n \cdot \phi = 2\varepsilon$$

$$\delta \cdot v = 2\varepsilon$$

解得

$$(2n + 2\delta - \delta n)\phi = 4\delta$$

分下面几种情况讨论：

- $\delta = 3$ ，则  $(6 - n)\phi = 12$ 
  - $n = 3$ ， $\phi = 4$ ，即正四面体，每个面都是正三角形
  - $n = 4$ ， $\phi = 6$ ，即正六面体，每个面都是正四边形
  - $n = 5$ ， $\phi = 12$ ，即正十二面体，每个面都是正五边形
- $\delta = 4$ ，则  $(8 - 2n)\phi = 16$ 
  - $n = 3$ ， $\phi = 8$ ，即正八面体，每个面都是正三角形
- $\delta = 5$ ，则  $(10 - 3n)\phi = 20$ 
  - $n = 3$ ， $\phi = 20$ ，即正二十面体，每个面都是正三角形
- $\delta > 5$ ，这种情况是不成立的，留给读者作为练习。

**证毕！**

**注：**本题中的公式  $v + \phi - \varepsilon = 2$  称为**欧拉公式**。

## 题7

设

$$P = \frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} \quad a, b, c > 0$$

关于  $P$ ，下列说法中正确的是( )

- A.  $P$  有最大值，无最小值
- B.  $P$  有最小值，无最大值
- C.  $P$  既有最大值又有最小值
- D.  $P$  既没有最大值又没有最小值

答案：D

解析：

这道题比较考验代数功底。

首先， $P$  可以放缩为

$$P > \frac{a}{a+b+c} + \frac{b}{a+b+c} + \frac{c}{a+b+c} = 1$$

那么  $P$  有没有最小值呢？我们取  $a \rightarrow 0, b \rightarrow 0$ ，则  $P \rightarrow 1$ ，所以  $P$  可以无限趋近于 1，没有最小值。

另一方面， $P$  还可以放缩为

$$P < \frac{a+c}{a+b+c} + \frac{b+a}{a+b+c} + \frac{c+b}{a+b+c} = 2$$

我们取  $a \rightarrow 0, b \rightarrow +\infty$ ，则  $P \rightarrow 2$ ，所以  $P$  可以无限趋近于 2，没有最大值。

## 题8

(2022-武汉四调) 某同学在课外阅读时了解到概率统计中的切比雪夫不等式，该不等式可以使人们在随机变量  $X$  的期望  $E(X)$  和方差  $D(X)$  存在但其分布未知的情况下，对事件 “ $|X - E(X)| \geq \varepsilon$ ” 的概率作出上限估计，其中  $\varepsilon$  为任意正实数。切比雪夫不等式的形式为：

$P(|X - E(X)| \geq \varepsilon) \leq f(D(X), \varepsilon)$ ，其中  $f(D(X), \varepsilon)$  是关于  $D(X)$  和  $\varepsilon$  的表达式。由于记忆模糊，该同学只能确定  $f(D(X), \varepsilon)$  的具体形式是下列四个选项中的一种。请你根据所学相关知识，确定该形式是 ( )

- A.  $D(X) \cdot \varepsilon$
- B.  $\frac{1}{D(X) \cdot \varepsilon}$
- C.  $\frac{\varepsilon^2}{D(X)}$
- D.  $\frac{D(X)}{\varepsilon^2}$

答案：D

解析：

这道题目比较创新，解法也多种多样。一种比较简单的方法是使用量纲的思想。

所谓量纲，通俗来说就是单位：米、千克、秒、伏特.....

物理公式（经验公式除外）都严格遵循量纲守恒，公式两边的量纲必须一致。其实，数学公式也是如此。

例如海伦公式：

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

左边的面积  $S$  的量纲是 2 次的（你可以想象成平方米），右边的量纲是  $4 \times \frac{1}{2} = 2$  次的，满足量纲守恒。不知道你发现没有，这个所谓的量纲守恒其实就是**齐次**。一般地，数学中的公式都是齐次的。

回到本题，切比雪夫不等式  $P(|X - E(X)| \geq \varepsilon) \leq f(D(X), \varepsilon)$  的左边是概率，概率值是个常数，所以应该是 0 次的，从而右边也应该是 0 次的。观察四个选项，是 0 次的只有  $C$  和  $D$ 。（注意  $D(X)$  是 2 次， $\varepsilon$  是 0 次）

然后我们要在  $C$  和  $D$  中选。 $|X - E(X)| \geq \varepsilon$  这个不等式刻画了  $X$  的**中心偏离程度**，而方差  $D(X)$  越小，中心偏离程度应该越小，所以方差应该在分子上，故选  $D$ 。

## 题9

空间直角坐标系中，有一个棱长为 4 的正四面体  $ABCD$ ，顶点  $A, B$  分别在  $x$  轴和  $y$  轴上运动。设坐标原点为  $O$ ，正四面体  $ABCD$  的中心为  $P$ ，则  $|PO|$  的取值范围是 \_\_\_\_\_

答案：  $[2 - \sqrt{2}, 2 + \sqrt{2}]$

**解析：**

令人叹为观止的一道题。

$AB$  在  $x$  轴和  $y$  轴上滑动的时候，相当于把坐标系看成参考系，正四面体围绕着坐标系运动。现在我们反过来想，把正四面体看成参考系，于是坐标系绕着正四面体运动，也就是  $O$  在运动。注意到  $\angle AOB$  始终为  $90^\circ$ ，因此点  $O$  的轨迹是以  $AB$  为直径的球！后面就很简单了，留给读者作为练习。