集萃_3

题1

设三角形 ABC 的三边长分别为 a,b,c ，面积为 S 。若 $a^2+2b^2+3c^2=1$ ，则 S 的最大值为 ______

H2

> 答案：$\frac{\sqrt{11}}{44}$

这道题是前几年江苏省盐城中学某次考试的一道题目，后来广为流传。有一个高中（似乎也是盐城中学）的一个高中生，在本题的基础上，证明了一个一般性的结论，它被称为“页岩不等式”（顺带一提，我在高中时看到过知乎上有人介绍过该学生和他的页岩不等式，不过现在已经找不到那个页面了）：

> 设三角形 ABC 的三边长分别为 a,b,c ，面积为 S 。则成立下面的不等式：
>
> $$x\cdot a^2+y\cdot b^2+z\cdot c^2\geq 4\sqrt{xy+yz+zx}\cdot S$$
>
> 其中 x,y,z 是任意正实数。

不难发现，本题就是 $x=1,y=2,z=3$ 的情形，使用上面的页岩不等式，我们得到：

$$a^2+2b^2+3c^2\geq 4\sqrt{11}\cdot S$$

所以 $S\leq\frac{\sqrt{11}}{44}$ 。

页岩不等式不仅仅给出了本题的推广，它还是三角形中的一些著名的不等式的推广。

例如曾经被作为 IMO(International Mathematical Olympiad，国际数学奥林匹克竞赛）考题的外森比克不等式：

$$a^2+b^2+c^2\geq 4\sqrt{3}\cdot S$$

不难发现，外森比克不等式就是页岩不等式中 $x=y=z=1$ 的情形。

下面我们对页岩不等式给出证明，同时也给出了本题的解法。

Proof:

$$\begin{aligned} x\cdot a^2+y\cdot b^2+z\cdot c^2 &= x\cdot(b^2+c^2-2bc\cos A)+y\cdot b^2+z\cdot c^2 \\ &= (x+y)\cdot b^2+(x+z)\cdot c^2-2xbc\cos A \\ &\geq 2\sqrt{(x+y)(x+z)}bc-2xbc\cos A \\ &= 2(\sqrt{(x+y)(x+z)}-x\cos A)\cdot bc \end{aligned}$$

要证明 $x\cdot a^2+y\cdot b^2+z\cdot c^2\geq 4\sqrt{xy+yz+zx}\cdot S$ ，只要证明：

$$2(\sqrt{(x+y)(x+z)}-x\cos A)\cdot bc\geq 4\sqrt{xy+yz+zx}\cdot S$$

我们有 $S=\frac{1}{2}bc\sin A$ ，代入上式得：

$$\begin{gathered} 2(\sqrt{(x+y)(x+z)}-x\cos A)\cdot bc\geq 2\sqrt{xy+yz+zx}\cdot bc\sin A \\ \sqrt{xy+yz+zx}\cdot\sin A+x\cos A\leq\sqrt{(x+y)(x+z)} \\ \sqrt{xy+yz+zx+x^2}\cdot\sin(x+\varphi)\leq\sqrt{(x+y)(x+z)} \\ \sqrt{(x+y)(x+z)}\cdot\sin(x+\varphi)\leq\sqrt{(x+y)(x+z)} \\ \sin(x+\varphi)\leq 1 \end{gathered}$$

上式显然成立，所以原不等式得证。

Q.E.D.

本题的正常方法就是上面页岩不等式的证明方法，能做出本题的话，上面的证明过程应该很容易读懂。

> 思考：根据我给出的证明过程，你能给出页岩不等式的取等条件吗？