必修一 Review

By zkr

2024 年 8 月 16 日

1 集合

1.1 基本运算

1.2 两个公式

德摩根律：

$$\complement_U(\mathrm{A}\cup\mathrm{B})=\complement_U\mathrm{A}\cap\complement_U\mathrm{B}$$
$$\complement_U(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})=\complement_U\mathrm{A}\cup\complement_U\mathrm{B}$$

容斥原理:

$$|\mathrm{A}\cup\mathrm{B}|=|\mathrm{A}|+|\mathrm{B}|-|\mathrm{A}\cap\mathrm{B}|$$
$$|\mathrm{A}\cup\mathrm{B}\cup\mathrm{C}|=|\mathrm{A}|+|\mathrm{B}|+|\mathrm{C}|-|\mathrm{A}\cap\mathrm{B}|-|\mathrm{A}\cap\mathrm{C}|-|\mathrm{B}\cap\mathrm{C}|+|\mathrm{A}\cap\mathrm{B}\cap\mathrm{C}|$$

1.3 充分和必要

1.4 全称和存在, 逆和否，真和假

命题“$\exists x\in\mathbb{R}, x^2-2ax+1\le 0$”为假命题，则实数 a 的取值范围是

若命题 p:$\forall x\in\mathbb{R}, ax^2+b=0$恰有一解, 则 $\neg p$ 为

1.5 新定义

抽象代数中**群**，**环**，**域**，**格**概念的下放。

法国数学家埃瓦里斯特•伽罗瓦（Évariste Galois，1811 年 10 月 25 日一 1832 年 5 月 31 日）是群论的奠基人之一。在数学中，群的定义如下：一个非空集合 $\mathbb{G}$ 中，如果定义了一种运算“$*$”, 满足以下四种性质，那么 $<\mathbb{G},*>$ 称为群。

- 对 G 中任意两个元素 a 和 b,a*b 也是 $\mathbb{G}$ 中的元素。
- 运算 $*$ 满足结合律：$a*(b*c)=(a*b)*c$。
- 存在一个元素 e，对任意元素 a, 都有 $a*e=a=e*a$。
- 对任意元素 a，都存在 a'，使得 $a*a'=e$。

下列选项中，属于群的有 ( )
A.$<\mathbb{Z},+>$
B.$<\mathbb{Q},*>$
C.$<\mathbb{G},*>$，其中 $\mathbb{G}=\{a+\sqrt{2}b|a,b\in\mathbb{Q}\text{且}a,b\text{不同时为}0\}$
D.$<\mathbb{F},*>$, 其中 $\mathbb{F}$ 是全体一次函数的集合，即 $\mathbb{F}=\{ax+b|a,b\in\mathbb{R}\text{且}a\neq 0\}$
$*$ 是函数的复合运算，即如果 $f(x)=ax+b$ 和 $g(x)=cx+d$，则 $f*g=f(g(x))$。

布尔代数是一种基于逻辑符号和逻辑运算的数学体系。它包含一个集合 $\mathbb{B}=\{0,1\}$，并规定该集合上的两种运算“$+$”和“$*$”如下：

- $0+0=0,0+1=1,1+1=1$
- $0*0=0,0*1=0,1*1=1$
- $*$和 $+$ 分别满足交换律和结合律

设 a,b,c 是 $\mathbb{B}$ 中任意的元素，下列选项中，正确的是 ( )
A. $(a+b)*c=a*c+b*c$
B. $(a*b)+c=(a+c)*(b+c)$
C. $a+a=a*a$
D. $a*(a+b)=a$

2 一元二次函数，方程与不等式

2.1 不等式的证明方法

- 作差法

设 a, b, c是任意实数, 证明：

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$$

解：

作差，

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca &= \frac{1}{2} * 2(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) \\ &= \frac{1}{2} * \left((a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2)\right) \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

- 作商法

2.2 利用不等式的性质求范围

已知 $-1 < a + b < 5, -4 < a - b < 2$, 求 $2a - 4b$ 的取值范围。

解：

本题容易分别把 a, b 的范围解出来，再求 $2a - 4b$ 的范围，这是错误的。原因是 a, b 两个变量并不是完全不相关的，当 a 的值变化时，b 的值也要受影响。就本题而言，真正不相关的变量应该是 $a + b$ 和 $a - b$，所以要把它们两个看成变量，把 $2a - 4b$ 用这两个来表示。

(江苏) 设实数 x, y 满足 $1 \leq xy^2 \leq 2, 2 \leq \frac{x^2}{y} \leq 3$, 求 $\frac{x^4}{y^7}$ 的取值范围。

2.3 基本不等式 *

不等式链:

$$\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}$$

n 元形式:

$$\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n} \le \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} \le \sqrt{\frac{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}{n}}$$

当且仅当所有变量相等时，等号成立。

权方和不等式：

$$\frac{b_1^2}{a_1}+\frac{b_2^2}{a_2}+\cdots+\frac{b_n^2}{a_n} \ge \frac{(b_1+b_2+\cdots+b_n)^2}{a_1+a_2+\cdots+a_n}$$

解题方法:

- 齐次化

高中阶段 90% 的基本不等式问题都可以用齐次化来解决。

已知正数 x,y 满足 $x+2y=2$, 则 $\frac{x+8y}{xy}$ 的最小值为

解:

考虑给分子乘以一个一次式，使得目标式子的分子分母齐二次。即

$$\begin{aligned}\frac{x+8y}{xy} &= \frac{(x+8y)(x+2y)}{2xy}\\ &= \frac{x^2+10xy+16y^2}{2xy}\\ &= 5+\frac{x^2+16y^2}{2xy}\\ &\ge 5+\frac{8xy}{2xy}\\ &= 9\end{aligned}$$

已知正数 x,y 满足 $2x+y=1$, 则 $\frac{(x+1)(y+2)}{xy}$ 的最小值是

解:

考虑把分子的常数换成一次式，则目标式子的分子分母齐二次。

已知 $x>0, y>0$, 且 $\frac{2}{x}+\frac{1}{y}=1$, 则 $2x+y+\frac{2y}{x}$ 的最小值为

用齐次化的观点来看待这些不等式问题，解题思路就很清晰。然而有些不等式不适合用这种方法，例如

已知 $x>0,y>0$, 且 $x+y+xy=3$, 则 $x+y$ 的最小值为

- 万能 K 法

这种方法的要领是把待求的式子整体设为 k, 再回代到条件式中。

已知 $x>0,y>0$, 且 $x+y+xy=3$, 则 $x+y$ 的最小值为

解:

设 $x+y=k$, 则 $x=k-y$, 代入条件 $x+y+xy=3$ 中，得

$$k+ky-y^2=3$$

即

$$y^2-ky+3-k=0$$

这个关于 y 的一元二次方程有根, 具体来说, 是有正根。总之我们有

$$\Delta=k^2-4(3-k)\geq 0$$

解得 $k\geq 2$, 容易知道当 $x=y=1$ 的时候,k 取到 2。

注意, 上面的 $\Delta\geq 0$ 一般来说并非方程有正根的充要条件, 它只是必要条件。但是在本题当中, 它是充要条件。

这种设 K 法的本质是换元。以上面这个题目为例, 我们舍弃了变量 x, 增加了变量 k。这样做的好处是, 我们只需要求 k 一个变量的取值范围, 不需要考虑原来的 $x+y$ 这样含有两个变量的式子。

- 权方和不等式

权方和不等式是一个威力极其强大的不等式，它是柯西不等式的最常用的一种变体。熟悉权方和不等式后，很多简单的不等式问题甚至可以口算。

已知 $x, y > 0$, 且 $x + 2y = 1$, 求 $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ 的最小值

解:

$$\begin{aligned} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} &= \frac{1}{x} + \frac{2}{2y} \\ &\geq \frac{(1+\sqrt{2})^2}{x+2y} \\ &= (1+\sqrt{2})^2 \end{aligned}$$

(2022 - 上海交大强基) 已知 $a > b > 0$, 则 $a + \frac{4}{a+b} + \frac{1}{a-b}$ 的最小值为

解:

$$\begin{aligned} a + \frac{4}{a+b} + \frac{1}{a-b} &\geq a + \frac{(2+1)^2}{a+b+a-b} \\ &= a + \frac{9}{2a} \\ &\geq 2\sqrt{a * \frac{9}{2a}} \\ &= 3\sqrt{2} \end{aligned}$$

已知正实数 x, y 满足 $\frac{1}{x+3y} + \frac{1}{2x+y} = 1$, 则 $x + y$ 的最小值是

- 三角换元

这种方法特别适合于条件形如 $x^2 + y^2 = 1$ 的题目

已知 $x, y > 0$ 且 $x^2 + y^2 = 1$, 求 $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ 的取值范围

已知 $x, y \in \mathbb{R}$ 且 $x^2 + y^2 = 1$, 求 $x + 2y$ 的最大值

2.4 多元不等式

高中阶段，二元不等式最多，偶有三元以上的情况。

已知正实数 a,b,c 满足 $a+b=1, c+d=1$, 则 $\frac{1}{abc}+\frac{1}{d}$ 的最小值为

解:

本题有足足 4 个变量, 对于多变量问题，我们最自然的想法是消元:

$$\begin{aligned}\frac{1}{abc}+\frac{1}{d} &= \frac{1}{abc}+\frac{1}{1-c}\\ &= \frac{\frac{1}{ab}}{c}+\frac{1}{1-c}\\ &\geq \frac{(\frac{1}{\sqrt{ab}}+1)^2}{c+1-c}\\ &= (\frac{1}{\sqrt{ab}}+1)^2\\ &\geq (\frac{2}{a+b}+1)^2\\ &= 9\end{aligned}$$

已知 x,y,z 为正实数，则 $\frac{xy+yz}{x^2+y^2+z^2}$ 的最大值为

解:

观察式子结构，分子上有 xy, yz, 如果把分母的 x^2 和 y^2 配对，可以得到 xy, 再把 y^2 和 z^2 配对，可以得到 yz，剩下的工作就是配系数，使得分母用完不等式得到的 xy, yz 能和分子消掉。

$$\begin{aligned}\frac{xy+yz}{x^2+y^2+z^2} &= \frac{xy+yz}{x^2+\frac{1}{2}y^2+\frac{1}{2}y^2+z^2}\\ &\leq \frac{xy+yz}{\sqrt{2}xy+\sqrt{2}yz}\\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\end{aligned}$$

已知 x,y,z 为正数，求

$$\frac{10x^2+10y^2+z^2}{xy+yz+zx}$$

的最小值

2.5 二次函数和一元二次方程，不等式

这一节内容比较简单, 主要注意的是**分式不等式**

解不等式:

$$\frac{x+1}{x^2-3x+2} \geq 0$$

另外还有恒成立和能成立问题，一般分离参数。

若对于任意的 $1 \leq x \leq 3, mx^2-mx+m<5$ 恒成立，则实数 m 的取值范围是

3　函数的概念和性质

3.1　函数的概念

函数 f 是两个非空数集 $\mathbb{A}, \mathbb{B}$ 之间的映射关系, 记为

$$f\colon \mathbb{A} \mapsto \mathbb{B}$$

集合 $\mathbb{A}$ 称为函数的定义域，集合 $f(\mathbb{A}) = \{f(x) | x \in \mathbb{A}\}$ 称为函数的值域。

这种定义采用的是**狄利克雷** (Dirichlet,1805 年 2 月 13 日—1859 年 5 月 5 日) 对函数的现代定义, 与我们初中学的**“自变量-因变量论”**不同。这种定义更加抽象，因此也更加灵活。

说人话: 对非空数集 $\mathbb{A}$ 中任意的元素 x, 在非空数集 $\mathbb{B}$ 中都有唯一确定的元素 $f(x)$ 与之对应。

函数的英文是 $function$, 可以看出它是一种作用, 这种作用把一个数 x 变成另一个数 y。

注意: 集合 $\mathbb{B}$ 中可以有多余的元素不与 $\mathbb{A}$ 对应。例如

定义

$$\mathbb{A} = \{1,2,-2\}, \mathbb{B} = \{1,4,5\}, f\colon \mathbb{A} \mapsto \mathbb{B} = x^2$$

并非所有对应关系都是函数，判断一个对应关系是否函数的方法是，一个 x 只能对应一个 y。

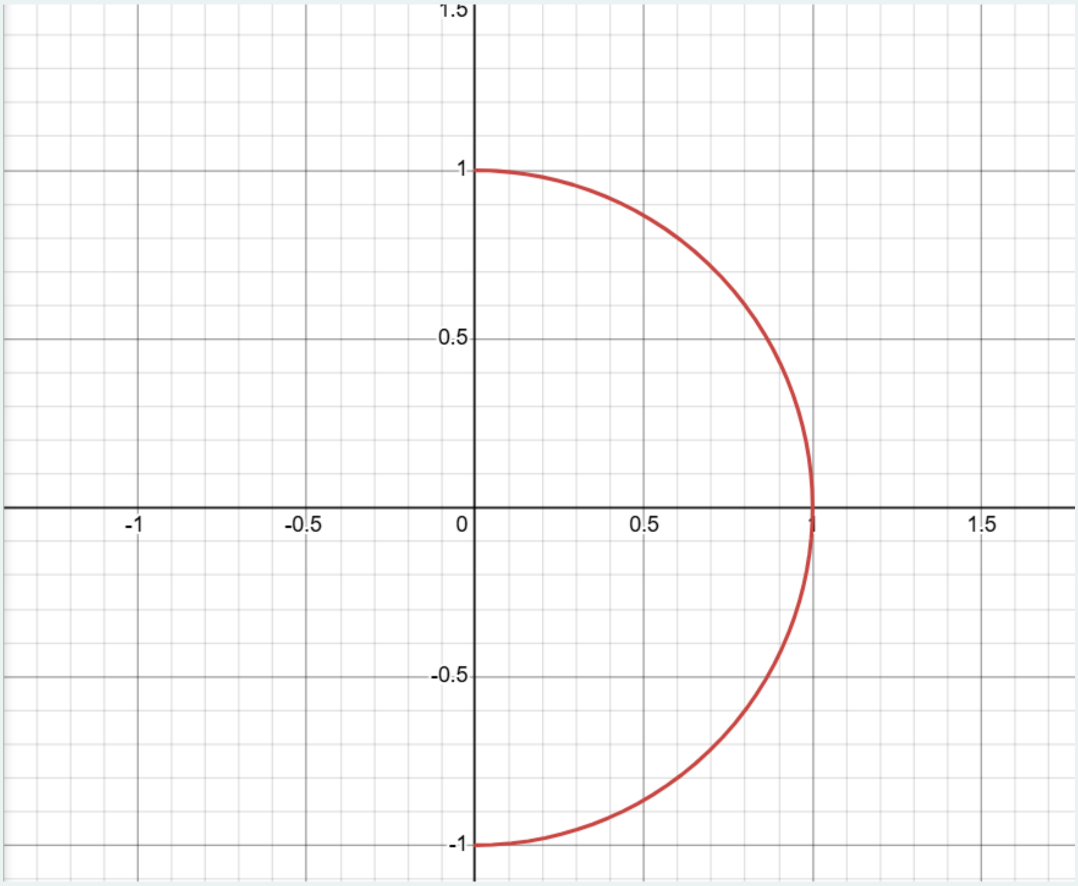

图 1: 是不是函数？

$$D(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{if } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

$\mathbb{A} = \{$所有三角形$\}$,$\mathbb{B} = \{x|x > 0\}$,f : 对 A 中三角形求面积与 B 中元素对应。

函数的三要素包括: **定义域, 值域, 对应关系**。只要这三个要素相同, 函数就相同。

$f(x) = 1 + x, g(y) = 1 + y$ 是不是同一函数？——- 是
$f(x) = 1, g(x) = \frac{|x|}{x}$ 是不是同一函数？——- 不是
$f(x) = \frac{x^4+1}{x^2+\sqrt{2}x+1}, g(x) = x^2 - \sqrt{2}x + 1$ 是不是同一函数？——-???

从上面第一个例子可以看出，$f(x)$ 里面的 x 只是一种代表, 真正重要而本质的是对应关系，也就是函数的形式 $1 +$ 变量。

下面看几个例子，能帮助你更好地理解:

- 求解析式

这种题型一般分为两类, 一类是已知 $f(g(x))$ 的解析式, 求 $f(x)$ 的解析式, 例如下面的 1,2 两题; 一类是已知一个含有 $f(g(x))$ 和 $f(h(x))$ 的方程, 求 $f(x)$ 的解析式, 例如下面的 3,4 两题。

1. 若函数 $f(x)$ 满足 $f(2x-1)=\frac{1}{x}$, 则 $f(x)=$
2. 若函数 $f(x)$ 满足 $f(\sqrt{x}+2)=x+4\sqrt{x}+5$, 则 $f(x)=$
3. 若函数 $f(x)$ 满足 $f(x)+2f(\frac{1}{x})=3x$, 则 $f(x)=$
4.(上海) 设 $f(x)$ 是 $\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}$ 的函数，满足对一切 $x\in\mathbb{R}$, 都有 $f(x)+xf(2-x)=2$, 则 $f(x)=$

解:

(3) 我们有

$$\begin{cases} f(x)+2f(\frac{1}{x})=3x \\ f(\frac{1}{x})+2f(x)=\frac{3}{x} \end{cases}$$

消去 $f(\frac{1}{x})$ 后，得到 $f(x)$, 注意定义域 $x\neq 0$。

(4) 我们有

$$\begin{cases} f(x)+xf(2-x)=2 \\ f(2-x)+(2-x)f(x)=2 \end{cases}$$

消去 $f(2-x)$ 后，得到 $f(x)$。

- 求定义域

这类问题只需要抓住一点：函数的定义域就是 f(变量) 中的 x 的范围，并不是括号内整个变量的范围。$f(3x-2)$ 的定义域还是 x 的范围，而不是 $3x-2$ 的范围。如果求出了 $3x-2$ 的范围，相当于求出了 $f(x)$ 的定义域，因为这个时候括号里的变量就是 x。

另外，要保证函数的每个部分都有意义，比如下面的第三题。

1. 已知 $f(x)=\sqrt{-x^2+2x+3}$, 则 $f(3x-2)$ 的定义域为
2. 已知函数 $f(2x+1)$ 的定义域是 $(-1,0)$, 则函数 $f(x-1)$ 的定义域为
3. 已知函数 $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x-2}}$, 则函数 $y=f(x)+f(3-x)$ 的定义域为

3.2 区间

区间就是一种集合，只不过换了种写法。

高中阶段，所有的取值范围最好都写成区间或者集合，**尤其是填空题**，防止扣分。

3.3 特殊函数

高中阶段的常见特殊函数有**取整函数 (高斯函数)**, **小数部分函数**这两个数论函数，以及实变函数论中的几个**病态函数**，其中最具代表性的是**狄利克雷函数**。

设

$$D(x)=\begin{cases}1 & \text{if } x\in\mathbb{Q},\\ 0 & \text{if } x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$$

则下列说法中，正确的是 ( )

A. $D(x)$ 是周期函数，且没有最小正周期。

B. $D(x)$ 是偶函数。

C. $D(D(x))=1$

D. 若 $x>0$, 则 $D(x)=D(x^x)$

解:

对于 A 选项: 任何正有理数都是 $D(x)$ 的周期。因为有理数加有理数是有理数，无理数加有理数也还是无理数。正有理数不存在最小值。

对于 B 选项: 显然

对于 C 选项:$D(x)$ 要么取 0 要么取 1, 总之都是有理数, 所以 $D(D(X))$ 一定是 1.

对于 D 选项: 本质上是看 x^x 会不会改变 x 的有理性 (无理性)。首先如果 x 是有理数，x^x 不一定是有理数，例如 $x=\frac{1}{2}$。到这里就可以判断 D 选项错误。实际上，如果 x 是无理数，x^x 也有可能是有理数。

黎曼函数（Riemann function）是一个特殊函数，由德国数学家黎曼发现并提出，黎曼函数定义在 $[0,1]$ 上，其基本定义是：

$$R(x)=\begin{cases}\frac{1}{q} & \text{if } x=\frac{p}{q}(\text{p,q 都是正整数，}\frac{p}{q}\text{为既约真分数}),\\ 0 & \text{if } x=0,1\text{和}(0,1)\text{内的无理数}\end{cases}$$

则下列说法中，正确的是 ( )

A. $R(x)=R(1-x)$

B. $R(x)$ 的最大值是 $\frac{1}{2}$, 没有最小值

C. $R(R(x))=R(x)$

D. $R(x)$ 有对称轴

用 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数，下列说法正确的是 ( )

A. $[x+y] \leq [x]+[y]$

B. $[x+y] \geq [x]+[y]$

C. 若 $n \in \mathbb{Z}$, 则 $[x+n]=[x]+n$

D. 函数 $f(x)=x-[x]$ 是周期函数

解:

我们只看 A,B 选项: 取特殊值 $x=1.5, y=0.6$, 则 $[x+y]>[x]+[y]$, 排除 A, 选 B。

3.4 抽象函数

所谓的抽象函数，就是只知道函数的一些性质，而不知道函数的具体形式。

按照常识，抽象函数应该比具体函数更难理解，然而高中的学习顺序是先抽象后具体。抽象函数也是这一章最常考的知识点之一，可以说**每年必考**。

抽象函数的考法多种多样，主要分为两类: 深度结合周期性和对称性的，以及不深度结合周期性和对称性的，这里我们先讲后者。在这种情况下，题目的条件往往是一个函数方程。

$$f(x+y)=f(x)+f(y)$$
$$f(xy)=f(x)f(y)$$
$$f(x+y)=f(x)f(y)$$
$$f(xy)=f(x)+f(y)$$

上面是一些常见的函数方程，如果在选填中出现了这些方程，你可以代入符合条件的特殊函数来做题。

$$f(x)=kx$$
$$f(x)=x^a$$
$$f(x)=a^x$$
$$f(x)=log_a(x)$$

下面看几个近几年的高考题：

(2024 年新高考一卷 T8) 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbb{R}$,$f(x)>f(x-1)+f(x-2)$, 且当 $x<3$ 时,$f(x)=x$, 则下列结论中一定正确的是 ( )

A.$f(10)>100$

B.$f(20)>1000$

C.$f(10)<1000$

D.$f(20)<10000$

解:

$f(3)>f(2)+f(1)=3, f(4)>f(3)+f(2)>5, f(5)>f(4)+f(3)>8, f(6)>13, f(7)>21, f(8)>34\cdots f(15)>1000$。故 $f(20)>1000$, 选 B。

注: 这个题目堪称新高考数学卷的耻辱。从未有过如此简单无脑的单选压轴题。

(2023 年新高考一卷 T11) 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbb{R}$, $f(xy)=y^2f(x)+x^2f(y)$, 则 ( )

A. $f(0)=0$

B. $f(1)=0$

C. $f(x)$ 是偶函数

D. $x=0$ 为 $f(x)$ 的极小值点

解:

对于 A: 令 $x=y=0$ 即得

对于 B: 令 $x=1, y=0$ 即得

对于 C: 令 $x=y=-1$, 得 $f(-1)=0$。再令 $y=-1$, 得 $f(-x)=f(x)$, 所以是偶函数。

(2022 年新高考二卷 T8) 若函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbb{R}$, 且 $f(x+y)+f(x-y)=f(x)f(y), f(1)=1$, 则 $\sum\limits_{k=1}^{22} f(k)=$( )

A. -3

B. -2

C. 0

D. 1

解:

这个题目可以取 $f(x)=2cos(\frac{\pi}{3}x)$, 这样就完美符合题目的条件，然后求和就是手到擒来了。

3.5 复合函数

函数的复合是一种运算:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

这种运算满足结合律:

$$(f \circ (g \circ h))(x) = ((f \circ g) \circ h)(x) = f(g(h(x)))$$

高中阶段, 我们主要关注复合函数的定义域和值域。只要理清楚下面的关系：

函数$f(g(x))$中,x的范围就是它的定义域, 而$g(x)$的范围是函数$f(x)$的定义域

求复合函数的值域时, 常常用到**换元法**。

函数

$$y = \frac{x+1}{x^2 - x + 2}$$

的值域为

解:

换元 $t = x + 1$, 则

$$\begin{aligned} y &= \frac{x+1}{x^2 - x + 2} \\ &= \frac{t}{t^2 - 3t + 4} \\ &= \frac{1}{t + \frac{4}{t} - 3} \\ &= \cdots \end{aligned}$$

3.6 函数的性质 *

本节是非常重要的内容。学好本节对学习必修一的函数，乃至选修二的导数都大有裨益。

函数有三大基本性质: 单调性, 奇偶性 (对称性), 周期性。

3.6.1 单调性

3.6.1.1 定义

定义：

设函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbb{D}$, 如果有区间 $(a,b)\in\mathbb{D}$, 且对于任意 $x_1,x_2\in(a,b), x_1>x_2$ 都有 $f(x_1)>f(x_2)$, 则称 $f(x)$ 在 (a,b) 上单调递增, 也称 $f(x)$ 是区间 (a,b) 上的增函数。如果 $f(x)$ 在整个定义域 $\mathbb{D}$ 上单调递增, 则称 $f(x)$ 是增函数。

单调递减以及减函数的定义同理。

上面的定义, 还有另一种常见的形式:

设函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbb{D}$, 如果有区间 $(a,b)\in\mathbb{D}$, 且对于任意 $x_1,x_2\in(a,b)$ 都有 $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}>0$, 则称 $f(x)$ 在 (a,b) 上单调递增，也称 $f(x)$ 是区间 (a,b) 上的增函数。如果 $f(x)$ 在整个定义域 $\mathbb{D}$ 上单调递增, 则称 $f(x)$ 是增函数。

3.6.1.2 单调性的证明

对于具体的简单函数，例如 $\sqrt{x}, \frac{1}{x}$, 它们的单调性如何证明，不必多说。如果是稍复杂的函数，例如 $e^x-x, xln(x)$, 它们的单调性需要学习导数之后才能求解。

有时候，要证明抽象函数的单调性，例如

若定义在 $\mathbb{R}$ 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(x+y)=f(x)+f(y)$, 且 $x>0$ 时 $f(x)>0$。证明：$f(x)$ 是增函数。

证明:

任取 $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ 且 $x_1>x_2$, 我们有

$$\begin{aligned} f(x_1) &= f(x_1-x_2+x_2) \\ &= f(x_2)+f(x_1-x_2) \\ &> f(x_2) \end{aligned}$$

3.6.1.3 由函数的单调性求参数范围

这种题目一般和分段函数结合，难度中下。

已知函数

$$f(x)=\begin{cases} -x^2-ax-5 & x\le 1 \\ \frac{a}{x} & x\ge 1 \end{cases}$$

在 $(-\infty,+\infty)$ 上是增函数，则实数 a 的取值范围是

3.6.1.4 单调区间

一个函数的单调区间，和一个函数在某个区间上单调是两个不同的概念。

1. 已知 $f(x)=x^2-mx+1$。若 $f(x)$ 的单增区间是 $[1,+\infty]$, 求 m 的范围。若 $f(x)$ 在 $[1,+\infty]$ 上单增, 求 m 的范围。
2. 已知 $f(x)=x+\frac{1}{x}$, 则 $f(x)$ 的单增区间是

3.6.1.5 复合函数的单调性

对于复合函数 $f(g(x))$, 它的单调性遵循 **"同增异减"**, 即如果 $f(x)$ 和 $g(x)$ 单调性相同，则 $f(g(x))$ 单增；如果 $f(x)$ 和 $g(x)$ 单调性相反，则 $f(g(x))$ 单减。

设 $f(x)=ln(x^2-ax+1)$, 若 $f(x)$ 在 $[1,+\infty]$ 上单调递增，求 a 的取值范围。

3.6.2 奇偶性

3.6.2.1 定义

设函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbb{D}$, 如果 $f(x)$ 在 $\mathbb{D}$ 上满足 $f(x)=f(-x)$, 则称 $f(x)$ 是偶函数, 如果 $f(x)+f(-x)=0$, 则称 $f(x)$ 是奇函数。

奇函数有个特殊性质：如果定义域包含 0, 则 $f(0)=0$。

奇函数和偶函数的定义域必须关于 0 对称。

3.6.2.2 判断函数的奇偶性

奇函数乘奇函数得偶函数，偶函数乘偶函数得偶函数，奇函数乘偶函数得奇函数。

奇函数加奇函数得奇函数，偶函数加偶函数得偶函数，奇函数加偶函数不确定。

另外，如果一个函数既是奇函数又是偶函数，那么它恒为 0。

我们举几个例子：

判断下列函数的奇偶性：

$$f(x)=\frac{sinx}{x^2+1}(x\in(-2,1))$$

$$g(x)=ln(x+\sqrt{x^2+1})$$

$$h(x) = ln(-x + \sqrt{x^2+1})$$
$$j(x) = \frac{2^x - 1}{2^x + 1}$$

$ln(x+\sqrt{x^2+1})$ 和 $ln(-x+\sqrt{x^2+1})$ 分别称为反双曲正弦函数 $arcsinhx$ 和反双曲余弦函数 $arccoshx$, 它们分别是双曲正弦函数 $sinhx = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ 和双曲余弦函数 $coshx = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ 的反函数。这两个反双曲三角函数的奇偶性**常考**，务必记住。

3.6.2.3 利用奇偶性求值, 求范围, 求解析式

这个考点也比较热门，现各举一例。

已知 $a > 0$, 设函数 $f(x) = x^5 + 2x + b, x \in [-a, a], b \in \mathbb{Z}$, 若 $f(x)$ 的最大值为 M, 最小值为 m, 则 M 和 m 的值可能为 ( )

A. 4 和 3

B. 3 和 1

C. 5 和 2

D. 7 和 4

解:

这个函数 $f(x)$ 是关于点 $(0, b)$ 对称的 (相当于把一个奇函数向上平移 b 个单位长度), 所以取最大值和最小值时，横坐标也是对称的。所以有 $M+m = 2b$, 即它们俩加起来是个偶数。

已知 $f(x) = \frac{(x+1)^2}{x^2+1}$, 则 $f(x)$ 在区间 $[-1, 1]$ 上的最大值和最小值之和等于

(2023 年新高考二卷 T4) 若 $f(x) = (x+a)ln\frac{2x-1}{2x+1}$ 为偶函数，则 $a =$( )

A. -1

B. 0

C. $\frac{1}{2}$

D. 1

解:

直接利用 $f(1) = f(-1)$, 解出 a 即可。注意最好不要用偶函数的定义式 $f(x) = f(-x)$, 这样计算量更大。

(2020 年新高考一卷 T8) 若定义在 $\mathbb{R}$ 的奇函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递减，且 $f(2)=0$, 则满足 $xf(x-1)\geq 0$ 的 x 的取值范围是 ( )

A. $[-1,1]\cup[3,+\infty)$

B. $[-3,-1]\cup[0,1]$

C. $[-1,0]\cup[1,+\infty)$

D. $[-1,0]\cup[1,3]$

若 $f(x)$ 为奇函数，且 $x>0$ 时,$f(x)=x^2-2x$, 求 $f(x)$ 的解析式。

解:

当 $x<0$ 时,$f(x)=-f(-x)=-((-x)^2-2(-x))=-x^2-2x$。又因为是奇函数，$f(0)=0$。

3.6.2.4 奇偶性的延伸

我们知道，奇函数的对称中心位于坐标原点 $(0,0)$, 偶函数的对称轴为 $x=0$。由此我们可以研究一般的情形：

$$f(x)=f(2a-x)\text{则}f(x)\text{有对称轴}x=a$$

$$f(x)+f(2a-x)=2b\text{则}f(x)\text{有对称中心}(a,b)$$

常用的一个结论是:

- 如果一个函数既有对称轴 $x=a$, 又有对称中心 (b,c), 那么它一定有一个周期是 $4|b-a|$。
- 如果一个函数有两条对称轴 $x=a,x=b$, 那么它一定有一个周期是 $2|b-a|$。
- 如果一个函数有两个对称中心 $(a,0),(b,0)$, 那么它一定有一个周期是 $2|b-a|$。

这个知识点几乎也是**每年必考**。

(2022 年全国乙卷 T12) 已知函数 $f(x),g(x)$ 的定义域均为 $\mathbb{R}$, 且 $f(x)+g(2-x)=5,g(x)-f(x-4)=7$, 若 $y=g(x)$ 的图像关于直线 $x=2$ 对称，$g(2)=4$, 则 $\sum_{k=1}^{22}f(k)=()$

A. -21

B. -22

C. -23

D. -24

解:

这个题目初看会觉得有点绕，这个时候要冷静分析。观察题干，我们发现待求的式子是一个 $f(x)$ 函数值的求和，但是在题目中，明显 $g(x)$ 的条件更多。所以我们可以考虑把 $f(x)$ 消掉 (或者说用 $g(x)$ 表示它)。

$f(x)+g(2-x)=5 \iff f(x)=5-g(2-x) \iff f(x-4)=5-g(6-x)$。把这个式子代入第二个条件 $g(x)-f(x-4)=7$ 得 $g(x)+g(6-x)=12$。这就说明 $g(x)$ 有一个对称中心是 $(3,6)$。而由题目条件，$g(x)$ 还有条对称轴是 $x=2$。到此为止这个函数就明朗了：它是一个周期函数。

画出 $g(x)$ 的草图。最后我们把待求的式子 $\sum\limits_{k=1}^{22} f(k)$ 利用本题的第二个条件转化为 $\sum\limits_{k=1}^{22}(g(k+4)-7)$, 也就是 $\sum\limits_{k=5}^{26} g(k)-154$。

(2022 年新高考一卷 T12) 已知函数 $f(x)$ 及其导函数 $f'(x)$ 的定义域均为 $\mathbb{R}$, 记 $g(x)=f'(x)$, 若 $f(\frac{3}{2}-2x), g(2+x)$ 均为偶函数，则 ( )

A. $f(0)=0$

B. $g(-\frac{1}{2})=0$

C. $f(-1)=f(4)$

D. $g(-1)=g(2)$

(2021 年新高考二卷 T8) 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbb{R}$,$f(x+2)$ 为偶函数,$f(2x+1)$ 为奇函数，则 ( )

A. $f(-\frac{1}{2})=0$

B. $f(-1)=0$

C. $f(2)=0$

D. $f(4)=0$

解:

本题作为这张卷子的单选压轴, 唯一的创新点在于“$f(2x+1)$ 为奇函数”这一条件。如果这个条件是“$f(x+1)$ 是奇函数”, 那么我们根据函数图像的平移，容易知道 $f(x)$ 有对称中心 $(1,0)$。但是本题有个系数 2。实际上，如果我们把 $2x$ 看成一个整体，或者说令 $t=2x$, 那么就有 $f(t+1)$ 是奇函数，这实际上就相当于 $f(x+1)$ 是奇函数了。

我们还可以这样理解：我们学过函数图像的变换，主要是平移变换。那么把 $f(x+1)$ 换成 $f(2x+1)$ 是一种什么样的变换呢？联想到三角函数，这其实是伸缩变换。也就是把函数在水平方向上伸缩。

3.6.3 周期性

3.6.3.1 定义

对于函数 $f(x)$, 若存在 $T > 0$, 使得 $f(x+T) = f(x)$, 则称 T 是 $f(x)$ 的一个 (正) 周期。

需要注意的是，周期函数加周期函数，以及周期函数乘周期函数，得到的都不一定是周期函数。例如

$$f(x) = sin(x) + sin(2x) + sin(3x)$$
$$g(x) = sin(x) + sin(2x) + sin(\sqrt{3}x)$$
$$h(x) = sin(x) * sin(\sqrt{2}x)$$

其中 $g(x)$ 和 $h(x)$ 都不是周期函数。容易看出，只有当每个周期函数的最小正周期存在最小公倍数的时候，它们相加或者相乘才是周期函数。

3.7 图像变换

学好函数图像的变换，是作出各种函数图像的必修课。尤其在必修一的最后一章《三角函数》中，涉及到图像变换的题目更是随处可见。

3.7.1 平移变换

左右平移遵循**“左加右减”**。

$f(x+a)$ 是把 $f(x)$ 的图像向左平移 a 个单位长度得到的。

上下平移遵循**“上加下减”**。

$f(x)+a$ 是把 $f(x)$ 的图像向上平移 a 个单位长度得到的。

3.7.2 对称变换

$f(-x)$ 是把 $f(x)$ 的图像沿 y 轴对称得到的。

$-f(x)$ 是把 $f(x)$ 的图像沿 x 轴对称得到的。

3.7.3 翻折变换

$|f(x)|$ 是把 $f(x)$ 的图像位于 x 轴下方的部分沿 x 轴翻转得到的。

$f(|x|)$ 是把 $f(x)$ 的图像位于 y 轴右边的部分沿 y 轴翻转得到的，它一般是偶函数。(如果定义域关于 0 对称的话)

3.8 函数图像题

这种题型曾经是年年考的热门，但近几年已经不再考了。它考察的是函数的三大性质以及图像平移。一般比较简单，通过训练可以在一分钟内轻松解决。

(2019 年全国一卷 T5) 函数 $f(x) = \frac{sinx+x}{cosx+x^2}$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上的图像大致为 ( )

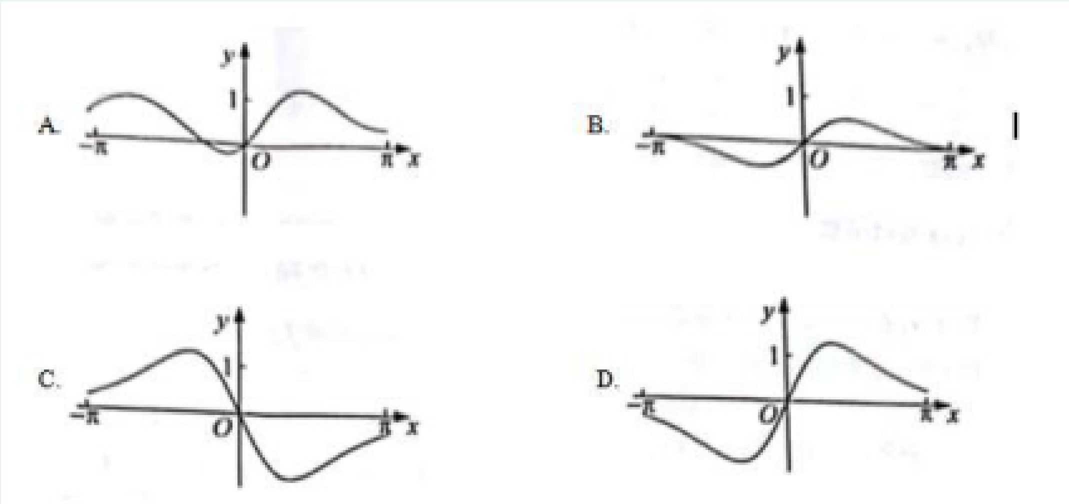

图 2

3.9 函数应用题

这种题型属于是常考常新。题目的背景年年换，而且越来越新颖，不过题目本身难度不大，毕竟是应用题。

全国卷每年几乎都会出一道应用题，这里面就包含了函数应用题, 其中对数函数的应用题是最常考的。

4 基本初等函数

数学家们把最基本, 也是最常用的六个函数规定为基本初等函数，也就是所谓的**六大基本初等函数**。它们是:

- 常函数

- 幂函数
- 指数函数
- 对数函数
- 三角函数
- 反三角函数

经历了上一章对函数的各种抽象性质的学习后，这一章我们要系统地学习**幂指对三角**这四个基本初等函数。

4.1 幂函数

4.1.1 定义

$f(x) = x^\alpha, (\alpha \neq 0)$ 称为幂函数。

注意:$2x^5, \frac{1}{x+1}$ 都不叫幂函数。

> 函数 $y = (m^2 + 2m - 2)x^{\frac{1}{m-1}}$ 是幂函数, 则 $m =$

4.1.2 图像和性质

研究幂函数的问题，一般要把指数 α 分成两种情况讨论：有理数和无理数。高中阶段，我们不讨论 α 是无理数的情况。

> 若 $\alpha = \frac{q}{p}, p, q$ 均为正整数,$f(x) = x^\alpha$ 则
>
> - **p 奇 q 奇:** $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty, +\infty)$, 单调递增, 奇函数。
> - **p 奇 q 偶:** $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty, +\infty)$, 先减后增, 偶函数。
> - **p 偶 q 奇:** $f(x)$ 的定义域为 $[0, +\infty]$, 单调递增, 非奇非偶函数。

对于 $\alpha < 0$ 的情况, 和上面一样分析。

所有幂函数都过定点 $(1,1)$。当 $\alpha > 0$ 时还过 $(0,0)$。

> 若幂函数 $f(x)$ 过点 $(2,8)$, 则满足不等式 $f(a-3) > f(1-a)$ 的实数 a 的取值范围是

函数 $f(x) = ax^\alpha + b$, 不论 a 取何值 $f(x)$ 都过点 $(m, 0)$, 则 m 的值为

4.2 # 多项式函数与代数学基本定理

多项式函数可以看成是多个幂函数的和。例如:$f(x) = x^5 - 3x^2 + 1, g(x) = 1 + x + x^2 + x^3$。

我们学过**穿根引线法**, 这种方法的本质是根据多项式函数的零点画出其大致图像。那么多项式函数的零点怎么求? 多项式函数有多少个零点?

前一个问题, 实际上问的是一元二次方程, 一元三次方程 $\cdots$ 一元 n 次方程是否存在求根公式。如果有, 那么对应的多项式函数的零点就可以求出来。我们知道一元二次方程存在求根公式, 实际上, 早在几百年前, 一元三次方程和一元四次方程的求根公式就已经被发现。之后, 数学家阿贝尔, 伽罗瓦等人证明了一元五次方程及以上**不存在求根公式**。

对于后一个问题, 用由高斯证明的代数学基本定理可以完美解决。它的内容是:

一元 n 次方程有 n 个根 (包括重根), 并且虚根成对出现。

例如，对于三次函数 $f(x)$, 利用上面的代数学基本定理, 我们可以知道 $f(x)$ 要么没有零点 (全是虚根)，要么有一个零点 (三重根), 要么有两个零点 (其中一个是重根), 要么有三个零点。

4.3 指数函数

4.3.1 定义

$f(x) = a^x, (a > 0且a \neq 1)$ 称为指数函数。

$3 * 2^x, 2^{x+1}$ 都不叫指数函数。

若函数 $f(x) = (\frac{1}{a}a - 3)a^x$ 是指数函数, 则 $a =$

4.3.2 图像和性质

- 所有指数函数都是恒正的:$a^x > 0$。
- 所有指数函数都过定点 $(0, 1)$。
- $a > 1$ 时函数单增,$0 < a < 1$ 时函数单减。实际上由于 $a^{-x} = (\frac{1}{a})^x$, 所以 $a > 1$ 时的图像和 $a < 1$ 时的图像可以说是关于 y 轴对称的, 例如 2^x 和 0.5^x。

- 注意**指数爆炸**。

(2020 年-北京) 已知函数 $f(x) = 2^x - x - 1$, 则不等式 $f(x) > 0$ 的解集是 ( )
A. $(-1, 1)$
B. $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$
C. $(0, 1)$
D. $(-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$

(2018 年-全国一卷) 设函数

$$f(x) = \begin{cases} 2^{-x} & x \leq 0, \\ 1 & x > 0 \end{cases}$$

则满足 $f(x+1) < f(2x)$ 的 x 的取值范围是 ( )
A. $(-\infty, -1]$
B. $(0, +\infty)$
C. $(-1, 0)$
D. $(-\infty, 0)$

4.3.3 根式化简

形如 $\sqrt{a+b+2\sqrt{a*b}}$ 的根式可以化简为 $\sqrt{a}+\sqrt{b}$。例如:

$$\sqrt{3+2\sqrt{2}} = \sqrt{2}+1$$
$$\sqrt{6-2\sqrt{5}} = \sqrt{5}-1$$

4.4 对数与对数函数

4.4.1 对数

一般地, 如果 $a^x = N(a > 0且a \neq 1)$, 那么 x 叫做以 a 为底 N 的对数, 记作 $x = \log_a N$, 其中 a 叫做底数,N 叫做真数。

特别地, 以 2 为底的对数记作 $\text{lb}\ x$, 以 10 为底的对数记作 $\lg x$, 以 e 为底的对数记作 $\ln x$。

e 叫做自然对数的底数, 也叫自然常数, 自然率, 纳皮尔常数...(纳皮尔是对数的创始人)。$e \approx 2.718281828$, 它是一个无理数。在数学中,e 和 π 是最重要的两个特殊常数。

使对数 $\log_a(-2a+1)$ 有意义的 a 的取值范围是

4.4.2 对数的运算性质以及换底公式

对数是一个非常强大的数学工具。它的运算性质简洁而锐利。

$$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$$

$$\log_a(\frac{y}{x}) = \log_a x - \log_a y$$

$$\log_{a^m} x^n = \frac{n}{m}\log_a x$$

此外, 还有换底公式:

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

下面我们看几个相关的题目。

设 $x > y > z > 1$, 则 $x^{\ln y}, y^{\ln z}, z^{\ln x}$ 之间的大小关系是

解:

首先要知道一个关系:$a^{\ln b} = b^{\ln a}$。证明如下:

两边取以 e 为底的对数, 有 $\ln b \ln a = \ln a \ln b$, 显然成立。

所以 $x^{\ln y} = y^{\ln x} > y^{\ln z}, y^{\ln z} = z^{\ln y} < z^{\ln x}, z^{\ln x} = x^{\ln z} < x^{\ln y}$。

若 $4^m = 3^n = k$, 且 $2m + n = mn \neq 0$, 则 $k =$

解:

对第一个条件取对数, 随便以什么为底, 比如以 e 为底，则

$$m\ln 4 = n\ln 3 = \ln k$$

$$m = \frac{\ln k}{2\ln 2}, n = \frac{\ln k}{\ln 3}$$

把上面两个代入 $2m + n = mn$, 即 $\frac{1}{m} + \frac{2}{n} = 1$ 中, 则

$$\frac{2\ln 2}{\ln k} + \frac{2\ln 3}{\ln k} = 1$$

$$\ln k = \ln 24$$

$$k = 24$$

4.4.3 对数的应用题

对数作为一个极其强大的数学工具, 它大大降低了复杂运算的计算量, 在各大领域都有广泛应用。全国卷喜欢考背景题, 应用题。其中与对数相关的应用题占了很大比例。

(2021 年-全国甲卷) 青少年视力是社会普遍关注的问题, 视力情况可借助视力表测量, 通常用五分记录法和小数记录法记录视力数据, 五分记录法的数据 L 和小数记录法的数据 V 满足 $L=5+\lg V$。已知某同学视力的五分记录法的数据为 4.9, 则其视力的小数记录法的数据约为 ($\sqrt[10]{10}\approx 1.259$)

A. 1.5

B. 1.2

C. 0.8

D. 0.6

(2023 年-新高考一卷 T10) 噪声污染问题越来越受到重视。用声压级来度量声音的强弱, 定义声压级 $L_p=20\times\lg\frac{p}{p_0}$, 其中常数 $p_0(p_0>0)$ 是听觉下限阈值，p 是实际声压，下表为不同声源的声压级:

声源	与声源的距离/m	声压级/dB
燃油汽车	10	$60\sim 90$
混合动力汽车	10	$50\sim 60$
电动汽车	10	40

已知在距离燃油汽车, 混合动力汽车, 电动汽车 10m 处测得实际声压分别为 p_1,p_2,p_3, 则 ( )

A. $p_1\geq p_2$

B. $p_2>10p_3$

C. $p_3=100p_0$

D. $p1\leq 100p_2$

2^{64} 有多少位?(已知 $\lg 2\approx 0.30103$)

解:

$\lg 2^{64}=64\lg 2\approx 64\times 0.30103\approx 19.3$, 所以 $2^{64}\approx 10^{19.3}$, 有 20 位。

一些素数可以被写成“$2^p-1,(p为素数)$”的形式, 称为梅森素数。已知第 20 个梅森素数为 $P=2^{4423}-1$, 第 19 个梅森素数为 $Q=2^{4253}-1$, 则下列各数中与 $\frac{P}{Q}$ 最接近的数为 (参考数据:$\lg 2 \approx 0.3$)

A. 10^{45}

B. 10^{51}

C. 10^{56}

D. 10^{59}

解:

$$\begin{aligned}
\frac{P}{Q} &= \frac{2^{4423}-1}{2^{4253}-1} \\
&\approx \frac{2^{4423}}{2^{4253}} \\
&= 2^{170}
\end{aligned}$$

现在对 2^{170} 估值。取以 10 为底的对数 (为了利用参考数据) 得

$$\lg 2^{170} = 170 \lg 2 \approx 170 \times 0.30103 \approx 51.3$$

所以与 2^{170} 最接近的是 10^{51}。

4.4.4 对数函数

4.4.4.1 定义

$f(x)=\log_a x(a>0且a\neq 1)$ 叫做对数函数。

$\log_2(x+1), \log_5 \frac{x}{2}, \log_x 2$ 都不是对数函数

4.4.4.2 图像和性质

- **定义域:** $x>0$, 即真数 >0
- **单调性:** 当 $0<a<1$ 时, 函数单减; 当 $a>1$ 时, 函数单增。
- **值域:** $\mathbb{R}$
- **过定点:** $(1,0)$

函数 $f(x)=\log_{x-1}(3-x)$ 的定义域为

与对数函数性质相关的一种热门考题, 就是所谓的“比大小”问题。

(2021 年-新高考二卷 T7) 已知 $a=\log_5 2, b=\log_8 3, c=\frac{1}{2}$, 则下列判断正确的是 ( )

A. $c<b<a$

B. $b<a<c$

C. $a<c<b$

D. $a<b<c$

解:

如果直接比较 a 和 b, 不太容易。我们先比较 a, c 和 b, c。

如果你熟悉对数函数的性质, 可以直接看出 $log_5 2<log_5\sqrt{5}=\frac{1}{2}$。如果不熟悉, 也可以用换底公式 $a=\log_5 2=\frac{\ln 2}{\ln 5}$，这样一来 $a<c$ 就相当于

$$\ln 4=2\ln 2<\ln 5$$

显然成立。所以 $a<c$。同理有 $b>c$。所以 $a<c<b$。

(2020 年-全国乙卷 T12) 若 $2^a+\log_2 a=4^b+2\log_4 b$, 则 ( )

A. $a>2b$

B. $a<2b$

C. $a>b^2$

D. $a<b^2$

解:

对这个题目的第一印象, 左右两边的结构好像差不多。我们把条件变成下面的形式。

$$2^a+\log_2 a=2^{2b}+log_2 b$$

但是左右两边并不是同一个函数。如果我们设函数为 $f(x)=2^x+\log_2 x$, 那么左边就是 $f(a)$, 但右边并不是 $f(b)$。实际上右边的部分 $2^{2b}+\log_2 b<2^{2b}+\log_2(2b)=f(2b)$。所以

$$f(a)<f(2b)$$

$f(x)$ 是增函数，所以 $a<2b$。本题就是所谓的“同构”, 我们把条件的左右两边变成了同一种函数。

(2020 年-全国三卷 T12) 已知 $5^5 < 8^4, 13^4 < 8^5$, 设 $a = \log_5 3, b = \log_8 5, c = \log_{13} 8$, 则 ( )

A. $a < b < c$

B. $b < a < c$

C. $b < c < a$

D. $c < a < b$

解:

首先把条件中的两个指数不等书转化为对数。取以 8 为底的对数得

$$\log_8 5 < \frac{4}{5} < \log_{13} 8$$

于是 $c > a$。另一方面容易证明 $\log_5 3 < \frac{4}{5}$(因为$3^4 < 5^5$), 所以 $c > a$。

还有 a, b 未比较。我们用**作商法**

$$\begin{aligned}\frac{a}{b} &= \frac{\log_5 3}{\log_8 5} \\ &= \frac{\ln 3 \ln 8}{\ln^2 5} \\ &\leq (\frac{\ln 3 + \ln 8}{2 \ln 5})^2 \\ &= (\frac{\ln 24}{\ln 25})^2 \\ &\leq 1\end{aligned}$$

所以 $a < b < c$。

4.4.4.3 反函数

在对数函数这一章, 教材上介绍了所谓“反函数”的概念。

设 $y = f(x)$, 如果 x 能写成 y 的函数, 即 $x = g(y)$, 那么函数 $g(x)$ 称为 $f(x)$ 的反函数, 记作 $f^{-1}(x)$。不是所有函数都有反函数, 例如 $f(x) = x^2$。

反函数有若干性质, 列举如下:

- $f(x)$ 和 $f^{-1}(x)$ 的图像关于直线 $y = x$ 对称。
- $f(x)$ 的定义域是 $f^{-1}(x)$ 的值域,$f(x)$ 的值域是 $f^{-1}(x)$ 的定义域。
- $f(f^{-1}(x)) = x$。

最典型的反函数就是 $\log_a x$ 和 a^x。

全国卷已经有十几年没有考过反函数了，但是反函数这个知识点一直没有删掉, 也没有标注为选学内容。

4.5 不同函数的增长差异

这一节内容看似简单, 实则意义重大。

各种函数的增长速度快慢如下:

$$log_a x << x^\alpha << a^x << x! << x^x (a > 1, \alpha > 0)$$

那么增长速度快与慢意味着什么? 这其实涉及到函数的极限。例如

$$f(x) = 0.000000001x^{0.00000001} - 1000000000 \ln x, (x > 1)$$

这个函数尽管在一开始的时候是负的, 但是当 x 充分大的时候, 它一定会变成正的, 最终到达正无穷。这是因为幂函数的增长快于对数函数, 即使系数差距很大, 也只能使得对数函数在有限的一段区间内暂时大于幂函数, 但最终它一定会落后于幂函数。

再来看一个例子:

$$f(x) = \frac{0.000001x^{3.000001} - x^2 - \ln x - 100}{1000x^3 + 1}, (x > 0)$$

尽管一开始 $f(x)$ 是负的, 但是最终它会趋向于正无穷。在无穷的视角下,$x^2, \ln x, x^3$ 以及那些常数和系数在 $x^{3.000001}$ 面前都可以忽略不计。

4.6 函数的零点

零点不是点，零点不是点，零点不是点。函数 $f(x)$ 的零点就是使得 $f(x) = 0$ 的 x 的值, 或者说方程 $f(x) = 0$ 的根, 或者说 $f(x)$ 的图像与 x 轴交点的横坐标。

教材上介绍了两个工具: 零点存在性定理和二分法。前者的作用是确定函数的零点个数和存在性, 后者的作用是确定函数零点的近似值。

零点存在性定理:

如果函数 $y = f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上的图像是一条连续不断的曲线, 且有 $f(a)f(b) < 0$, 那么, 函数 $y = f(x)$ 在区间 (a, b) 上至少有一个零点。

这个定理从几何上看完全是显然的, 但它的严格数学证明是高等数学的内容。零点存在性定理在高中阶段的应用主要集中在**导数**一章, 我们现在不用管它。

另外还有二分法, 了解其内容和思想就可以, 一般不考。

这一节**常考**, 譬如给你一个函数 $f(x)$, 求它的零点个数; 或者已知它的零点个数, 求参数的取值范围。一般来说, 题目给的函数 $f(x)$ 的零点个数我们直接从代数上是求不了的, 这个时候就要画图了。因为我们知道 $f(x)$ 的零点就是方程 $f(x) = 0$ 的根。那么如果能从 $f(x)$ 中分离出一个函数 $h(x)$, 剩下部分为 $g(x)$, 那么方程 $f(x) = 0$ 就变成了 $g(x) = h(x)$, 也就是这两个函数的交点。

已知 $f(x)=|x^2-1|$, 关于 x 的方程 $[f(x)]^2-f(x)-k=0$, 下列命题正确的是:( )

A. 可能有 3 个不同的实数解

B. 可能有 4 个不同的实数解

C. 可能有 5 个不同的实数解

D. 可能有 8 个不同的实数解

解:

首先, 很容易想到把 $f(x)$ 看成整体, 或令 $t=f(x), t\geq 0$, 则方程

$$[f(x)]^2-f(x)-k=0 \tag{1}$$

变为

$$t^2-t-k=0 \tag{2}$$

这是一个关于 t 的二次方程, 它的根的个数可能是 0,1,2。但是, 这并不代表方程 (1) 的根的个数就是 0,1,2。因为 $t=f(x)$, 也就是一个 t 可以对应多个 x。比方说如果 $t=t_0$ 是方程 (2) 的一个根, 那么完全有可能存在多个 x, 使得这些 $f(x)$ 都等于 t_0。

方程 (2) 的根, 也就是函数 $t^2-t(t\geq 0)$ 与直线 $y=k$ 的交点。画出 t^2-t 以及 $f(x)$ 的图像如下

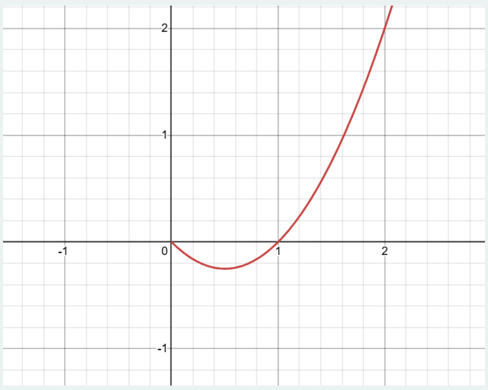

图 3: 函数 $t^2-t(t\geq 0)$

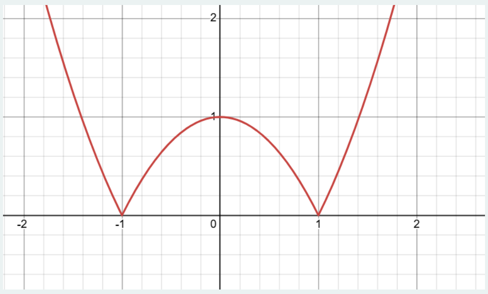

图 4: 函数 $f(x)=|x^2-1|$

情形 1:$k=-\frac{1}{4}$ 时,t^2-t-k 有一个零点 $\frac{1}{2}$, 也就是 $f(x)=\frac{1}{2}$, 在图 4 中, 可以看出有 4 个 x 能使得 $f(x)=\frac{1}{2}$, 所以此时一共有 3 个根。

情形 2:$-\frac{1}{4}<k<0$ 时,t^2-t-k 有两个零点 t_1, t_2, 且 $0<t_1<\frac{1}{2}, \frac{1}{2}<t_2<1$, 在图 4 中, 可以看出有 4 个 x 能使得 $0<f(x)<\frac{1}{2}$, 有 4 个 x 能使得

$\frac{1}{2} < f(x) < 1$, 所以此时一共有 8 个根。

情形 3:$k = 0$ 时,$t^2 - t - k$ 有两个零点 $0, 1$, 从图 4 可以看出有 2 个 x 使得 $f(x) = 0$, 有 3 个 x 使得 $f(x) = 1$, 所以一共有 5 个根。

情形 4:$k > 0$ 时,$t^2 - t - k$ 有一个零点 $t_0 > 1$, 从图 4 可以看出有 2 个 x 使得 $f(x) > 1$, 一共有 2 个根。

已知函数

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 + 4x & x < 0, \\ 2^{-x} - 1 & x \geq 0 \end{cases}$$

若关于 x 的方程 $4f^2(x) - 4af(x) + 2a + 3 = 0$ 有 5 个不同的实数解, 则 a 的取值可以为 ( )

A. $-\frac{7}{6}$

B. $-\frac{3}{2}$

C. $-\frac{5}{4}$

D. $-\frac{37}{30}$

4.7 三角函数

三角函数的定义, 性质, 图像不需要再讲了, 毕竟在必修二的解三角形一章用的很多。

初学这一章, 可能会觉得有些困难, 因为公式繁多。大概到高二下学期的时候, 你就会觉得这一章的题目很简单了。因为套路单一, 没什么花样。

这一章的内容是工具性的, 就像集合和基本不等式一样, 经常和其它内容结合起来考。不过这一章也经常单独考察, 一般分为两种题型。

4.7.1 简单的三角恒等变换

主要是对和角公式, 二倍角公式, 降幂公式的运用。下面我再介绍两个公式:

1. 和差化积和积化和差公式:

$$
\begin{aligned}
\cos x+\cos y&=2\cos(\frac{x+y}{2})\cos(\frac{x-y}{2})\\
\cos x-\cos y&=2\sin(\frac{x+y}{2})\sin(\frac{x-y}{2})\\
\sin x+\sin y&=2\sin(\frac{x+y}{2})\cos(\frac{x-y}{2})\\
\sin x-\sin y&=-2\cos(\frac{x+y}{2})\sin(\frac{x-y}{2})
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\cos x\cos y&=\frac{1}{2}(\cos(x+y)+\cos(x-y))\\
\sin x\sin y&=\frac{1}{2}(\cos(x+y)-\cos(x-y))\\
\cos x\sin y&=-\frac{1}{2}(\sin(x+y)-sin(x-y))\\
\sin x\cos y&=\frac{1}{2}(\sin(x+y)+\sin(x-y))
\end{aligned}
$$

2. 三倍角公式:

$$
\sin 3x=3\sin x-4\sin^3 x
$$
$$
\cos 3x=4\cos^3 x-3\cos x
$$

重在积累下面我们看看近几年全国卷对纯三角恒等变换的考察力度。

(2023 年-新高考一卷 T8) 已知 $\sin(\alpha-\beta)=\frac{1}{3},\cos\alpha\sin\beta=\frac{1}{6}$, 则 $\cos(2\alpha+2\beta)=($ $)$

A.$\frac{7}{9}$

B.$\frac{1}{9}$

C.$-\frac{1}{9}$

D.$-\frac{7}{9}$

(2023 年-新高考二卷 T7) 已知 α 为锐角,$\cos\alpha=\frac{1+\sqrt{5}}{4}$, 则 $\sin\frac{\alpha}{2}=($ $)$

A.$\frac{3-\sqrt{5}}{8}$

B.$\frac{-1+\sqrt{5}}{8}$

C.$\frac{3-\sqrt{5}}{4}$

D.$\frac{-1+\sqrt{5}}{4}$

(2022 年-新高考二卷 T6) 若 $\sin(\alpha+\beta)+\cos(\alpha+\beta)=2\sqrt{2}\cos(\alpha+\frac{\pi}{4})\sin\beta$, 则 ( )

A.$\tan(\alpha+\beta)=-1$

B.$\tan(\alpha+\beta)=1$

C.$\tan(\alpha-\beta)=-1$

D.$\tan(\alpha-\beta)=1$

(2021 年-新高考一卷 T6) 若 $\tan\theta=-2$, 则 $\frac{\sin\theta(1+\sin 2\theta)}{\sin\theta+\cos\theta}$ =( )

A.$-\frac{6}{5}$

B.$-\frac{2}{5}$

C.$\frac{2}{5}$

D.$\frac{6}{5}$

上面几个题目都比较简单。其实难度稍大一些的题目, 还需要观察角和角之间的关系。

已知 $\sin(x+\frac{\pi}{6})=\frac{\sqrt{3}}{3}$, 则 $\sin(\frac{5\pi}{6}-x)+\sin^2(\frac{\pi}{3}-x)=$

解:

首先观察 $\frac{5\pi}{6}-x$ 和 $x+\frac{\pi}{6}$ 的关系:$\frac{5\pi}{6}-x=\pi-(x+\frac{\pi}{6})$, 然后还有 $\frac{\pi}{3}-x=\frac{\pi}{2}-(x+\frac{\pi}{6})$, 于是

$$\begin{aligned}\sin(\frac{5\pi}{6}-x)+\sin^2(\frac{\pi}{3}-x)&=\sin(\pi-(x+\frac{\pi}{6}))+\sin^2(\frac{pi}{2}-(x+\frac{\pi}{6}))\\&=\sin(x+\frac{\pi}{6})+\cos^2(x+\frac{\pi}{6})\\&=\cdots\end{aligned}$$

$$\frac{\cos 35^\circ\sqrt{1-\sin 20^\circ}}{\cos 20^\circ}=$$

解:

跟上题一样，先观察角之间的关系:$20^\circ=90^\circ-2\times 35^\circ$

除了上面这些纯粹考察三角恒等变换的题目, 有时候还要利用三角恒等变换来化简函数, 进而求取值范围, 例如

函数 $f(x)=\sin x+\cos x+\sin x\cos x$ 的值域为

4.7.2 $Asin(\omega x+\varphi)+B$

这类题目考的最多, 基本上每张卷子都有一道。其实考来考去, 题目出的再天花乱坠, 本质上都是在函数 $Asin(\omega x+\varphi)+B$ 的性质上做文章。

对于函数 $f(x)=Asin(\omega x+\varphi)+B$, 它是由最简单的 $\sin x$ 经过多种函数图像变换得到的。它的周期是 $T=\frac{2\pi}{|\omega|}$。

这个题型一般分为两类: 带图像和不带图像的。我们分别加以说明。

(2023 年-新高考二卷 T16) 已知函数 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)$, 如图 A,B 是直线 $y=\frac{1}{2}$ 与曲线 $y=f(x)$ 的两个交点, 若 $|AB|=\frac{\pi}{6}$, 则 $f(\pi)=$

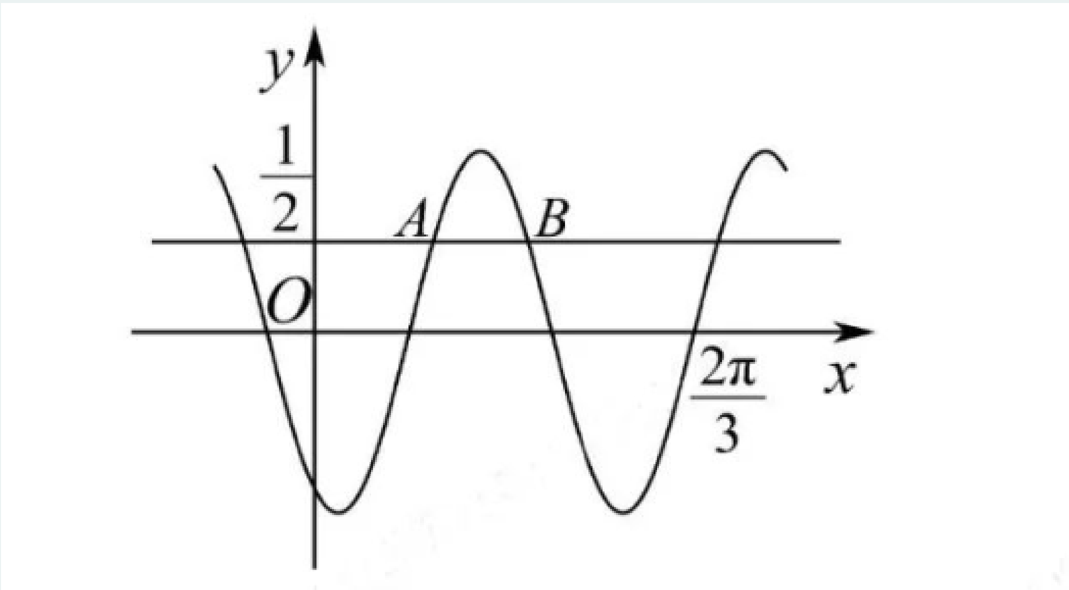

图 5

解:

考虑函数 $\sin x$,$|\frac{5\pi}{6}-\frac{\pi}{6}|=\frac{2\pi}{3}=\frac{T}{3}$, 再考虑函数 $\sin 2x$,$|\frac{5\pi}{12}-\frac{\pi}{12}|=\frac{\pi}{3}=\frac{T}{3}$。也就是说, 对于任何一个三角函数, 像上图中那样相邻两个函数值为 $\frac{1}{2}$ 的点 A,B, 它们之间的距离 $|AB|$ 始终占周期的 $\frac{1}{3}$ 倍。于是 $\frac{2\pi}{3\omega}=\frac{\pi}{6}$,$\omega=4$。周期为 $\frac{\pi}{2}$。

现在要求 $f(\pi)$, 那么 $\frac{2\pi}{3}$ 这个零点到 π 之间的距离占周期的比值为 $\frac{2}{3}$, 这对应函数 $\sin x$ 中的 $\sin\frac{4\pi}{3}$, 也就是 $-\frac{\sqrt{3}}{2}$。

(2020 年-新高考一卷 T10) 如图是函数 $y=\sin(\omega x+\varphi),(\omega>0,|\varphi|<\pi)$ 的部分图像, 则 $\sin(\omega x+\varphi)=$( )

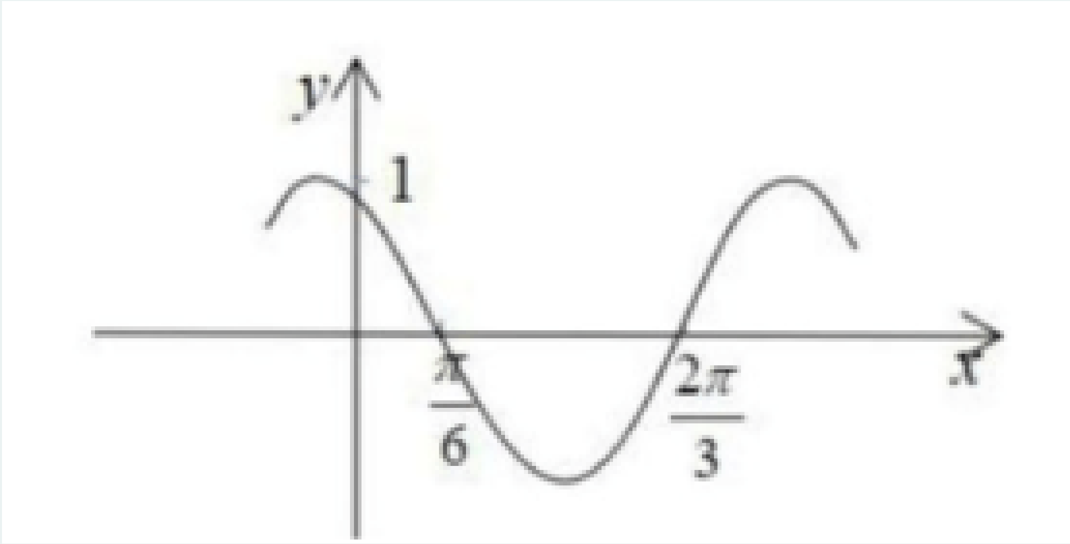

图 6

(2020 年-全国一卷 T7) 设函数 $f(x)=\cos(\omega x+\frac{\pi}{6})$ 在 $[-\pi,\pi]$ 的图像大致如下图, 则 $f(x)$ 的最小正周期为 ( )

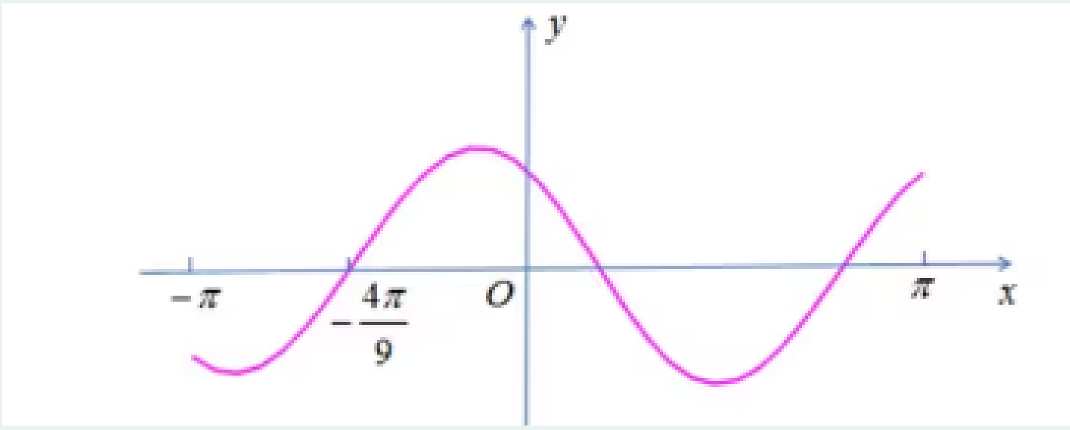

图 7

解:

和之前的题目类似, 本题中的 $-\frac{4\pi}{9}$ 到 0 这一段对应函数 $\cos x$ 中的 $-\frac{\pi}{2}$ 到 $\frac{\pi}{6}$, 它们占整个周期的比值是不变的。所以 $\frac{\frac{4\pi}{9}}{T}=\frac{1}{3}$, 得到 $T=\frac{4\pi}{3}$。

上面这些带图像的题目, 无非就是根据图像的特点, 求出 ω,φ 等参数。

下面这些题目则是另外一种情况, 即不带图像。

(2017 年-全国一卷 T9) 已知曲线 $C_1: y=\cos x, C_2: y=\sin(2x+\frac{2\pi}{3})$, 则下列结论正确的是 ( )

A. 把 C_1 上各点的横坐标伸长到原来的 2 倍, 纵坐标不变, 再把得到的曲线向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度, 得到曲线 C_1。

B. 把 C_1 上各点的横坐标伸长到原来的 2 倍, 纵坐标不变, 再把得到的曲线向左平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位长度, 得到曲线 C_1。

C. 把 C_1 上各点的横坐标缩短到原来的 $\frac{1}{2}$ 倍, 纵坐标不变, 再把得到的曲线向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度, 得到曲线 C_1。

D. 把 C_1 上各点的横坐标缩短到原来的 $\frac{1}{2}$ 倍, 纵坐标不变, 再把得到的曲线向左平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位长度, 得到曲线 C_1。

(2023 年-新高考一卷 T15) 已知函数 $f(x)=\cos\omega x-1(\omega>0)$ 在区间 $[0,2\pi]$ 有且仅有 3 个零点, 则 ω 的取值范围是

解:

这种题目的做法是固定的, 即把 $\sin(\omega x+\varphi)$ 或 $cos(\omega x+\varphi)$ 中的 $\omega x+\varphi$ 看成整体 (或者说换元法), 这样就能化归到最简单的正余弦函数了。

已知函数 $f(x)=\sin(\omega x+\frac{\pi}{6}),(\omega>0)$, 如果存在唯一的 $x_0\in[0,\pi]$, 使得 $f(x_0)=1$, 则 ω 的取值范围是

解:

这种题目的做法是固定的, 即把 $\sin(\omega x+\varphi)$ 或 $cos(\omega x+\varphi)$ 中的 $\omega x+\varphi$ 看成整体 (或者说换元法), 这样就能化归到最简单的正余弦函数了。