

空间向量_1

题1

空间直角坐标系中有正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$, 其中 $A(1, 2, 3), B(4, 5, 6), C(5, 6, 4)$, 则 D_1 坐标的所有可能取值为 _____

H2

答案: $(2 + \frac{3\sqrt{6}}{2}, 3 - \frac{3\sqrt{6}}{2}, 1)$ 或 $(2 - \frac{3\sqrt{6}}{2}, 3 + \frac{3\sqrt{6}}{2}, 1)$

解析:

这道题目, 如果在空间直角坐标系中画出这个正方体, 从几何角度求解, 是比较困难的。事实上, A, B, C 三点是已知的, 由于(不共线的)三点确定一个平面, 所以这个正方体的底面正方形已经确定, 根据 $\overrightarrow{AD} \parallel \overrightarrow{BC}$ 可以求出 D 点坐标为 $(2, 3, 1)$ 。而正方形 $A_1B_1C_1D_1$ 既可以在正方形 $ABCD$ 的上面又可以在下面, 从而 D_1 的坐标有两种情况。下面我们来求 D_1 的坐标: 设 $D_1(a, b, c)$, 根据 $DD_1 \perp$ 平面 $ABCD$, 可以得到 $DD_1 \perp AB, DD_1 \perp BC$, 转换成数量积等于 0 , 就有:

$$\begin{cases} 3(a-2) + 3(b-3) + 3(c-1) = 0 \\ a-2 + b-3 - 2(c-1) = 0 \end{cases}$$

上面有三个未知数, 然而只有两个方程。我们还有什么条件没用到? 上面的方程组是刻画垂直关系的, 显然 DD_1 不光要垂直于平面 $ABCD$, 而且 $|DD_1| = |AB| = 3\sqrt{3}$, 所以还有一个刻画长度的方程:

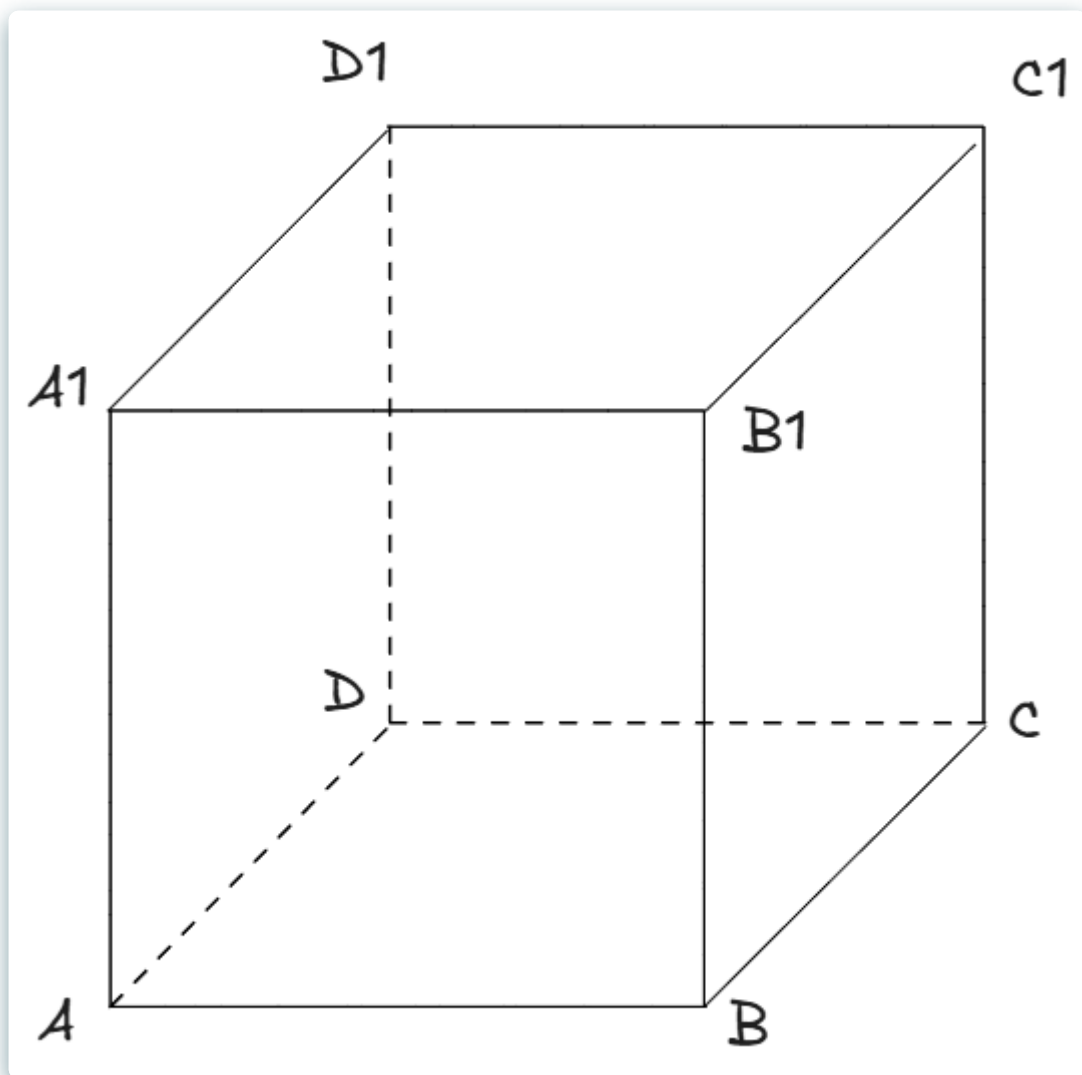
$$\sqrt{(a-2)^2 + (b-3)^2 + (c-1)^2} = 3\sqrt{3}$$

这样, 根据上面三个方程就能求出 a, b, c 。

题2

已知正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 1 , 点 P, Q 分别是直线 A_1D 和直线 BD_1 上的动点。则 $|PQ|$ 的最小值为 _____

H2



答案: $\frac{\sqrt{6}}{6}$

解析:

这道题目的本质是所谓**异面直线的公垂线段**。我会先给出一个使用**空间直线的参数方程**的方法，再略微解释何为公垂线段。

本题有两个动点 P, Q ，分别位于两条直线上。我们要求 $|PQ|$ ，那么自然想要把 P, Q 的坐标求出来，这就要利用它们两点位于直线上的条件了。在平面中，如果动点位于直线上，我们只要求出直线的方程就行了。然而在空间中，直线是没有形如 $Ax + By + C = 0$ 这样的一般式方程的。那么我们怎么表达“点在直线上”这一条件呢？这就要用到**空间直线的参数方程**。

例如在本题中，我们设 $Q(x, y, z)$ ， Q 位于直线 BD_1 上，那么应该有 $\overrightarrow{BQ} \parallel \overrightarrow{BD_1}$ ，即

$$(x - 1, y - 1, z) \parallel (-1 - 1, 1, 1)$$

得到

$$\frac{x-1}{-1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z}{1}$$

上面这个式子，就是直线 BD_1 的**参数方程**。所有空间直线的参数方程都可以用上面的方法求解，其实说白了，就是利用三点共线（从而向量平行）这一个简单的事实，大家不要被层出不穷的数学名词迷惑了。

你可能好奇，既然叫参数方程，那么参数在哪里呢？这个参数是我们设出来的，看下面：

得到了空间直线的参数方程后，下一步我们通常会令上面这个连等式 $= k$ （或者其它字母，你喜欢就好），这种对于连等式的处理技巧我们在初中就学过了。

$$\frac{x-1}{-1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z}{1} = k$$

从而 $x = 1 - k, y = 1 - k, z = k$ ，点 Q 的坐标就可以表示成 $(1 - k, 1 - k, k)$ ，原本有 x, y, z 三个变量的，现在只有 k 一个变量了。这里的 k 就是所谓的参数。

跟上面同理，可以得到 P 坐标的参数表示。单独针对本题而言， P 点坐标显然可以表示成 $(t, 0, t)$ ，其中 t 是参数。这是因为直线 A_1D 很简单，从几何关系不难发现 A_1D 上面的点的横坐标和竖坐标相等，我们就没有必要循规蹈矩地去求参数方程了。

于是，我们要求的 $|PQ|$ 就有了：

$$\begin{aligned} |PQ| &= \sqrt{(1-k-t)^2 + (1-k)^2 + (k-t)^2} \\ &= \sqrt{3k^2 + 2t^2 - 4k - 2t + 2} \\ &= \sqrt{3\left(k - \frac{2}{3}\right)^2 + 2\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{6}} \\ &\geq \sqrt{\frac{1}{6}} \\ &= \frac{\sqrt{6}}{6} \end{aligned}$$

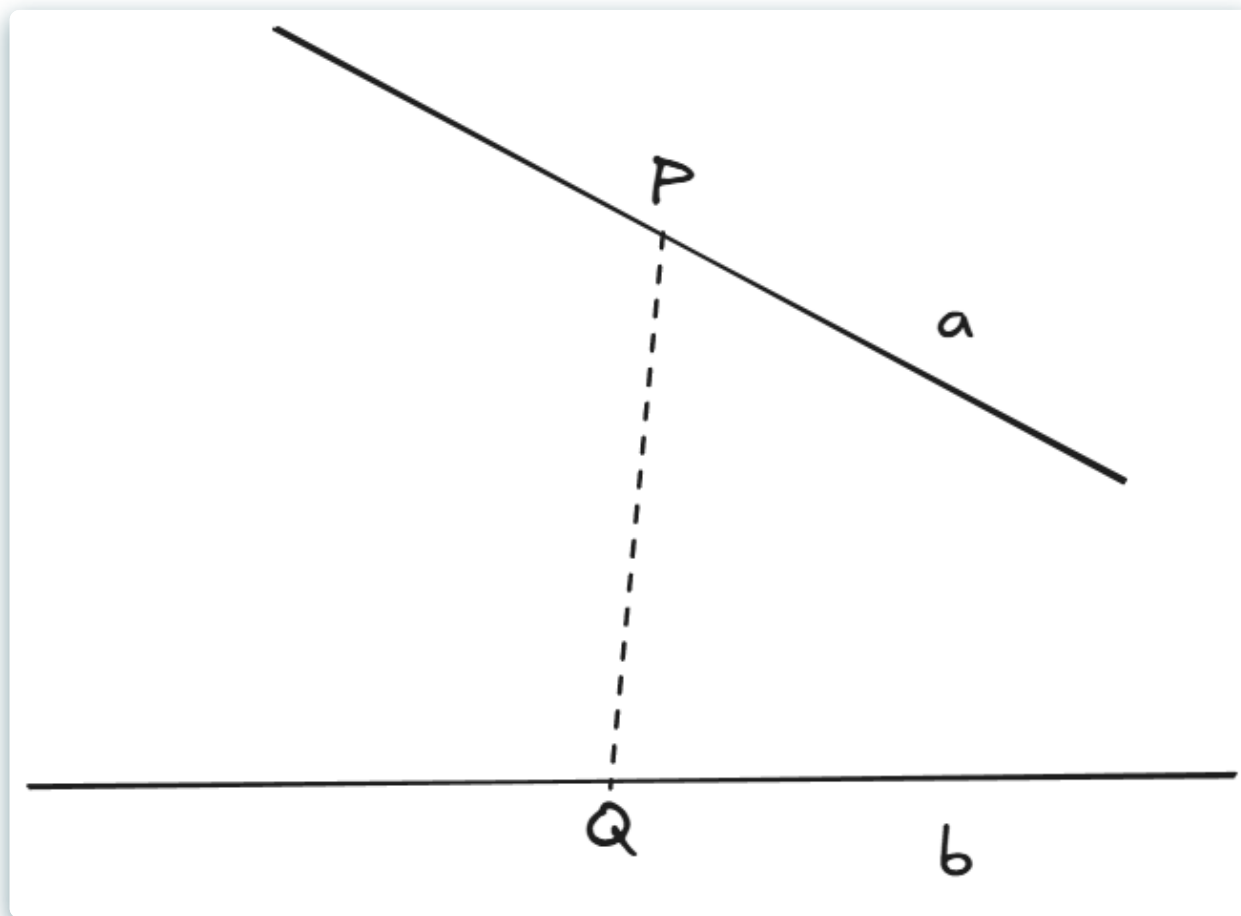
（注意上面的代数技巧，求两个变量的代数式的极值的时候，我们把这两个变量分开考虑，分别配方。）

最后，介绍一下什么是**异面直线的公垂线段**：

如图， a, b 是两条异面直线。在 a, b 之间存在唯一的一条线段 PQ ，它与 a, b 都垂直。这条线段 PQ 就称为异面直线 a, b 的公垂线段。

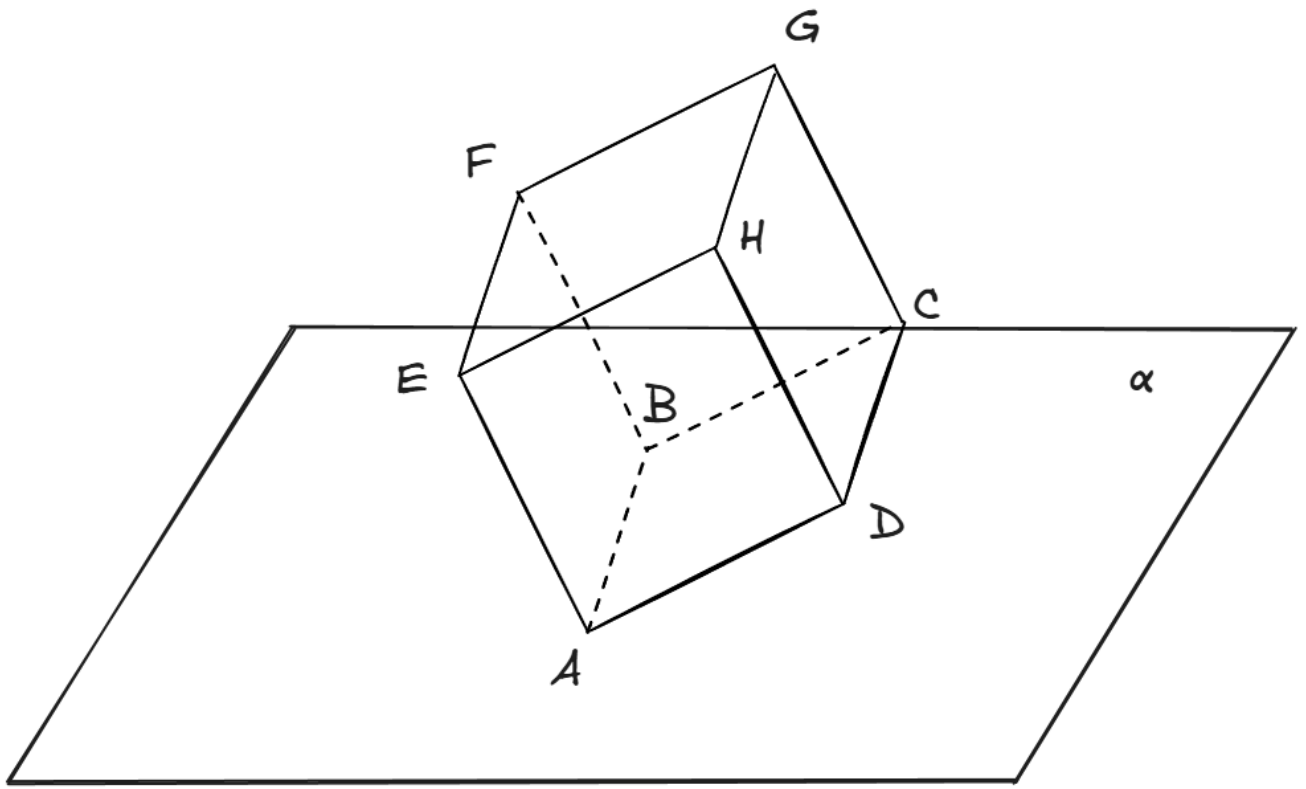
公垂线段最主要的性质是：它的长度是两条直线上任意两点间距离的最小值。例如本题中，我们要求的是直线 A_1D 和直线 BD_1 上面两个点之间距离的最小值，本质就是求它们公垂线段的长度。

公垂线段的长度事实上存在一个公式，但是需要引入向量的叉乘，感兴趣可以上网搜索。一般来说高中阶段掌握上面所述的空间直线的参数方程即可。



题3

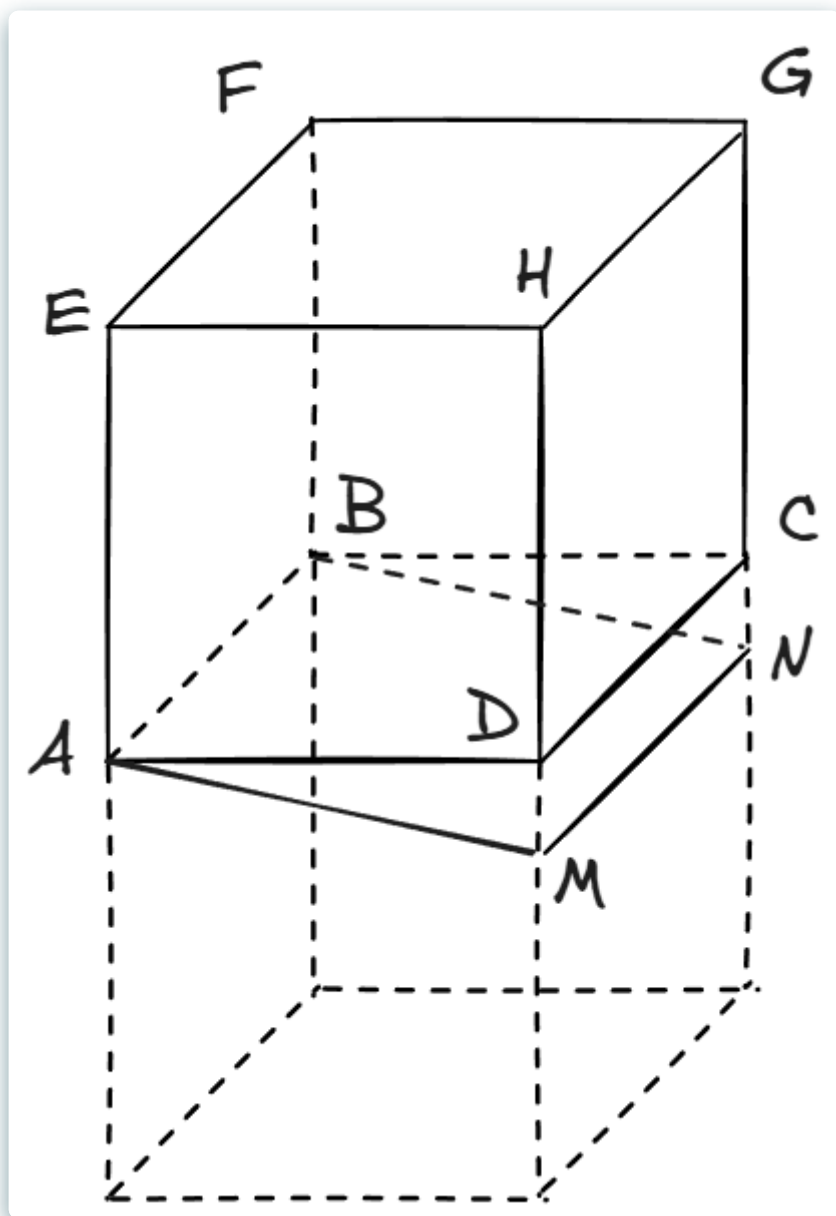
已知正方体 $ABCD - EFGH$ 的一条棱 AB 在平面 α 内，平面 $ABCD$ 与平面 α 的夹角为 30° ，若 $|AB| = 1$ ，试求 G 点到平面 α 的距离。



答案: $\frac{\sqrt{3}+1}{2}$

解析:

这道题目比较有意思的一点是正方体是一个斜着的。遇到正方体的题目我们自然想要去建系，所以我们不妨根据习惯，把题目中这个正方体**摆正**：



上面这个图中，平面 $ABNM$ 实际上就是题目中的平面 α ，根据题目条件可知 $\angle MAD = \angle NBC = 30^\circ$ 。下面那个正方体是为了辅助而补充画出的。

接下来就是常规的建系计算了。下面我介绍一种求点到直线距离的新方法。

首先，我要介绍平面的一般式方程。

平面的一般式方程形如： $Ax + By + Cz + D = 0$ 。

大家肯定会想到直线的一般式方程 $Ax + By + C = 0$ 。实际上这就是二维到三维的推广，直线的维度升了一级，变成平面；一般式方程的未知数也多了一个 z （其实我们经常用未知数的个数来表示一个式子的“维度”）。

那么，相比于用法向量来表示平面，用一般式方程来表示平面有什么好处呢？这体现在很多地方，例如下面这个公式：

点 (x_0, y_0, z_0) 到平面 $Ax + By + Cz + D = 0$ 的距离为

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

这就是**点到平面的距离公式**，它和我们学过的**点到直线的距离公式**在形式上非常像。

下面，我们利用这种方法，求解本题。首先，我们要求出平面 $ABNM$ 的一般式方程。

我们以 B 点为原点建系（常规建系点位），设平面 $ABNM$ 的一般式方程为 $Ax + By + Cz + D = 0$ ，则由于点 $B(0, 0, 0), A(1, 0, 0), N(0, 1, -\frac{\sqrt{3}}{3})$ 在平面内，我们有：

$$\begin{cases} D = 0 \\ A + D = 0 \\ B - \frac{\sqrt{3}}{3}C + D = 0 \end{cases}$$

解得 $A = 0, B = \frac{\sqrt{3}}{3}C, D = 0$ ，所以方程为 $\frac{\sqrt{3}}{3}Cy + Cz = 0$ ，即 $y + \sqrt{3}z = 0$ 。

利用公式，点 $G(0, 1, 1)$ 到平面 $ABNM$ 的距离为

$$d = \frac{|1 + \sqrt{3}|}{\sqrt{0^2 + 1^2 + \sqrt{3}^2}} = \frac{1 + \sqrt{3}}{2}$$

一般来说，这种方法比使用法向量更快。实际上，关于平面的一般式方程，性质还有很多，例如：

- ▶ 平面 $Ax + By + Cz + D = 0$ 的一个法向量为 $\vec{n} = (A, B, C)$ 。
- ▶ 一个法向量为 $\vec{n} = (A, B, C)$ 的平面，其一般式方程为 $Ax + By + Cz + D = 0$ （ D 待定，需要代入一个点才能算出来）。
- ▶ 两个平行平面 $Ax + By + Cz + D_1 = 0$ 与 $Ax + By + Cz + D_2 = 0$ 的距离为

$$d = \frac{|C_1 - C_2|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

还有很多有用的性质和定理，在此不方便阐述。这已经属于**空间解析几何**的范畴了，大家以后在大学会学习到。