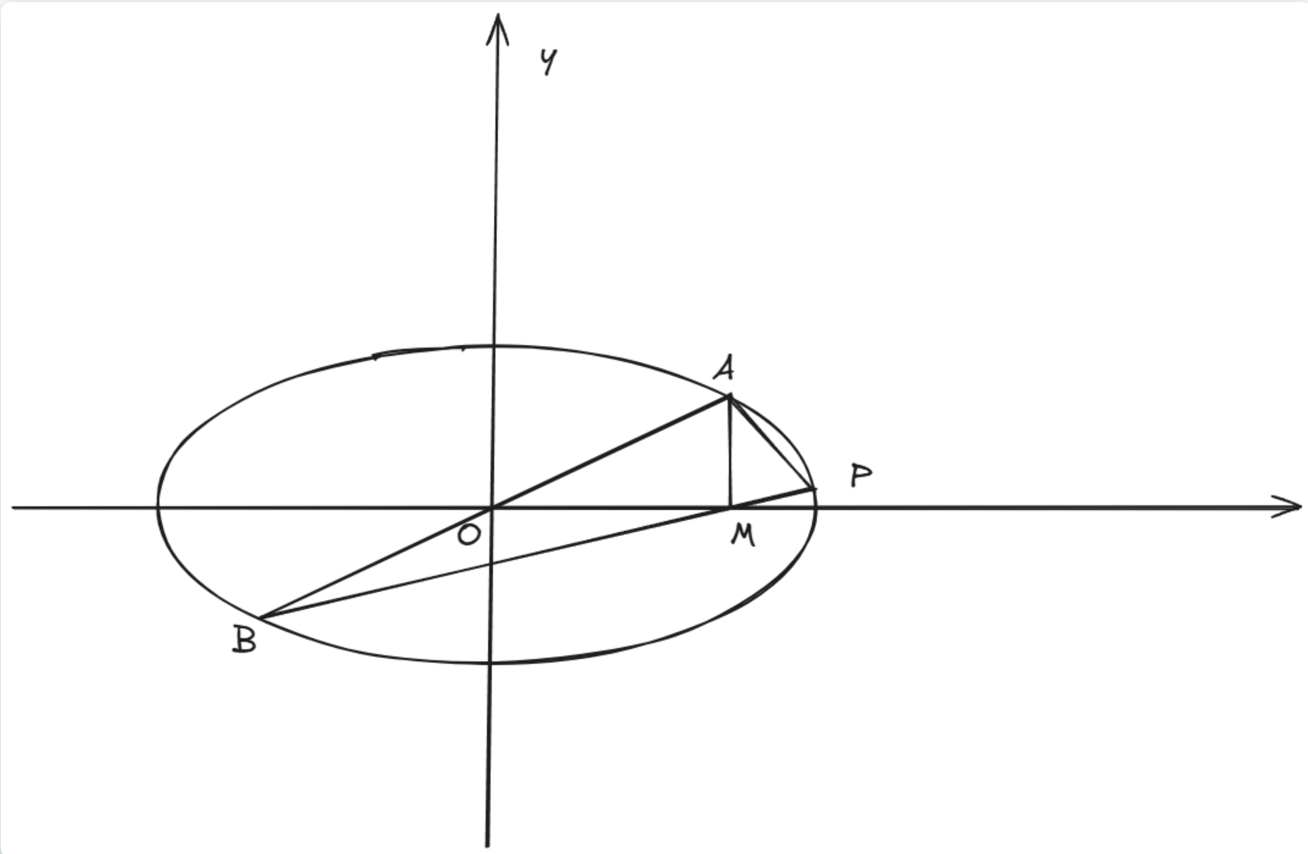
专题练习_圆锥曲线_2

2024年10月31日

题1

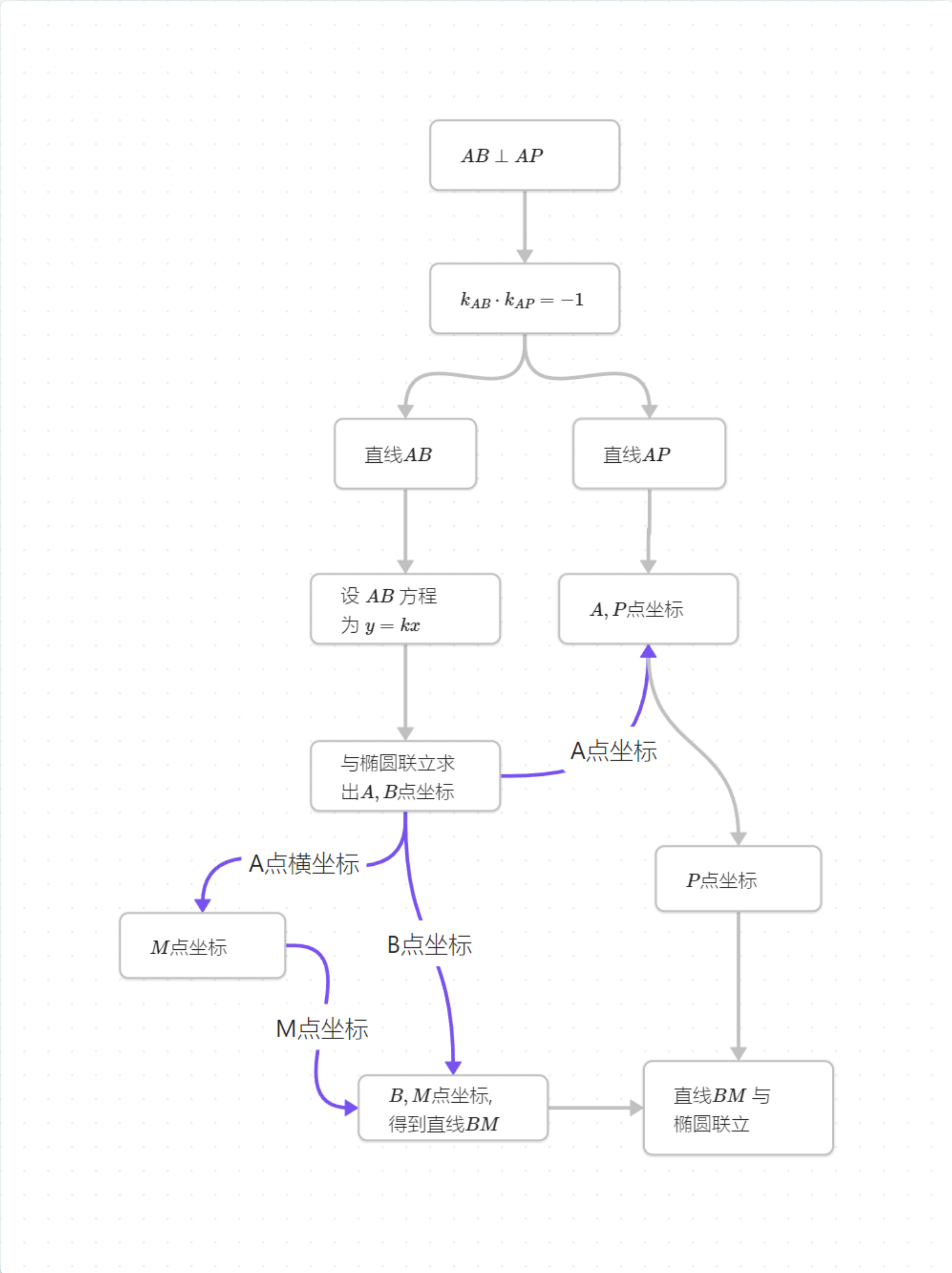
已知椭圆 $C:\frac{x^2}{2}+y^2=1$ ，过坐标原点 O 的直线与椭圆交于 A,B 两点（A 在第一象限）。过 A 作 x 轴的垂线，垂足为 M ，直线 BM 与椭圆的另一个交点为 P 。证明：$AB\perp AP$ 。



这是十几年前江苏卷的一道题，有人认为这道题奠定了全国高考圆锥曲线题计算量大的基调。对于这道传世经典，我们用三种方法来解决。

1. 设线法

首先，设计出本题的逻辑链：



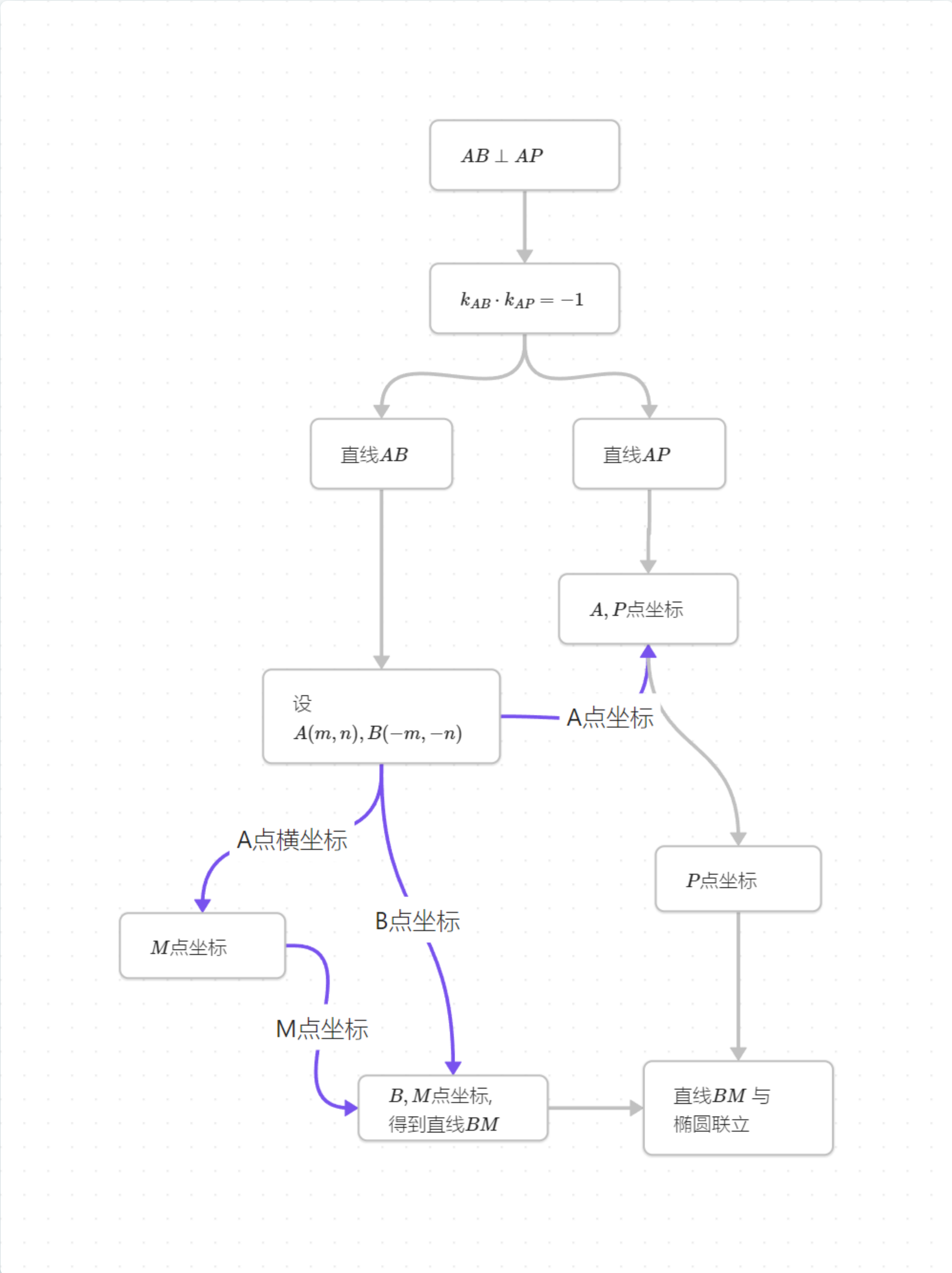
比之前稍微复杂一点，但是并不难理解。上面图中标为蓝色的地方就是**核心**，它**驱动**了整个逻辑的运转，也就是说关键步骤就是设 AB 方程为 $y=kx$ ，所以前面说过设线法叫做“线驱动”。

一套完整、自洽的逻辑链是我们解出题目的基础，实际上这并不仅仅适用于解析几何，而适用于任何领域（也不仅仅限于数学领域）。

你还可以从另外的角度来理解这套逻辑。想一想，我们要画出本题的图像，顺序是怎样的？我们先画出直线 AB ，再画出点 M ，然后连接 BM 与椭圆交于 P ，最后连接 AP 。整个流程的驱动力就是直线 AB ，有了直线 AB 才衍生出后面那么多东西。这就是为什么我们设 AB 的方程，而不去设 AP, BP 这些直线的方程。而且我们也**只**需要设出直线 AB 的方程，因为从我们作图的流程可以看出，基本的驱动力只有直线 AB ，有了它就能求出其它所有东西。

2. 设点法

设点法与刚才的设线法只有一点小小的区别。刚才我们说直线 AB 是基本的驱动力，设出它就能求出其它所有点和直线。在设线法中，我们用直线方程 $y = kx$ 来表示直线 AB ，而在设点法中，我们可以用 $A(m, n)$,$B(-m. -n)$ 来表示直线 AB （**无非就是强调出直线 AB 是经过原点的**）。所以，设点法的逻辑链和设线法也基本一致。



3． 二级结论法

观察本题的图像，其中 AB 是椭圆的一条直径，而 $\angle APB$ 就是“直径所

对的圆周角”，因此

$$k_{PA}\cdot k_{PB}=e^2-1=-\frac{1}{2}$$

（如果你不知道这个结论，就去看看圆锥曲线专题练习1）

我们要证明的结论是 $AB\perp AP$ ，用斜率来表示就是

$$k_{PA}\cdot k_{AB}=-1$$

结合上面两个式子，就有

$$k_{PB}=\frac{1}{2}k_{AB}$$

我们要证明上面这个式子。现在设 $A(m,n),B(-m,-n),M(m,0)$ （当然你也可以用设线法来表示），那么 $k_{AB}=\frac{n}{m}$ ，而 $k_{PB}=k_{MB}=\frac{n}{2m}$ ，所以确实有 $k_{PB}=\frac{1}{2}k_{AB}$ 。结束。

这种方法几乎没有计算量（前提是你能想到），如果你试过设点法和设线法，它们的计算量还是有点强度的。

这道题目由于太过于经典，以至于被2019年全国二卷改编过后拿来作为压轴题。如下：

> 已知点 $A(-2,0),B(2,0)$ ，动点 $M(x,y)$ 满足直线 AM 与 BM 的斜率之积为 $-\frac{1}{2}$ ，记 M 的轨迹为曲线 C 。
>
> （1）求 C 的方程，并说明 C 是什么曲线。
>
> （2）过坐标原点的直线交 C 于 P,Q 两点，点 P 在第一象限，$PE\perp x$轴，垂足为 E ，连结 QE 并延长交 C 与点 G 。
>
> （i）证明：$\triangle PQG$ 是直角三角形。
>
> （ii）求 $\triangle PQG$ 面积的最大值。

其中(2)(i)就是原题，而(2)(ii)在原题的基础上作了一个简单的推广。