太中2023级高二上学期十月段考选讲

题5

已知四面体$ABCD$满足$AB\perp BC,BC\perp CD,AB=BC=CD=2\sqrt{3}$,且该四面体的体积为6，则异面直线$AD$与$BC$所成角的大小为(　)

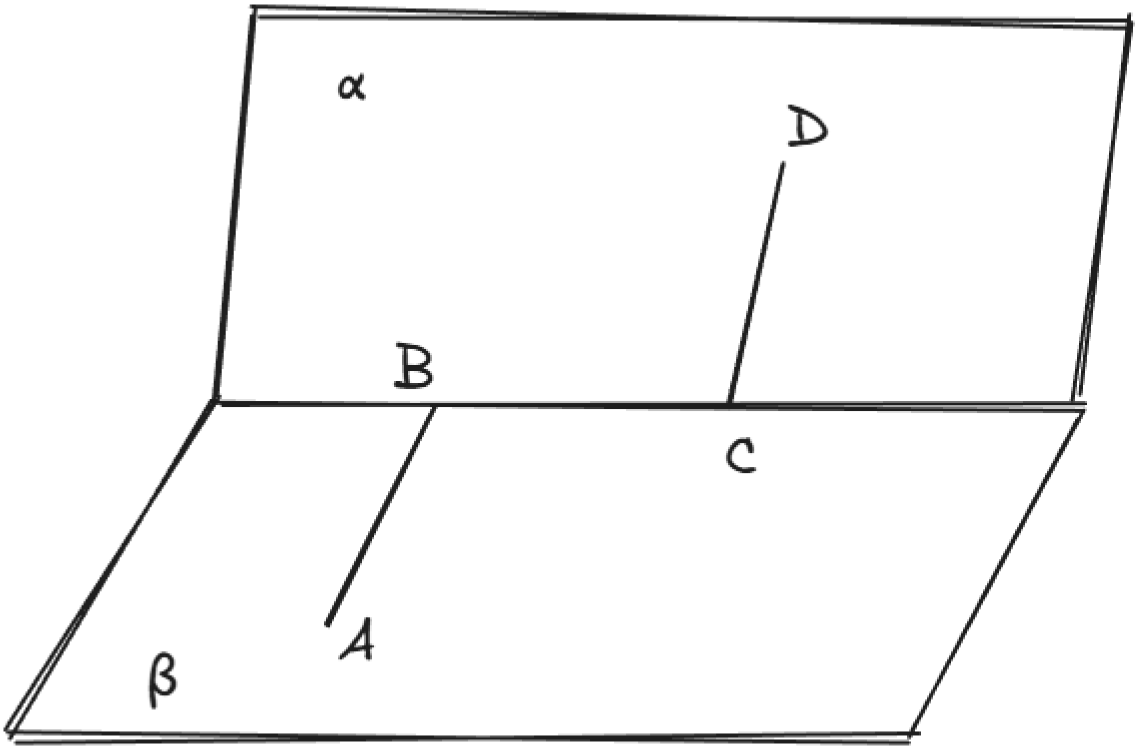
$A.45^{\circ}\quad B.60^{\circ}\quad C.45^{\circ}$ 或 $60^{\circ}\quad D.60^{\circ}$ 或 30°

> 答案：C

解析：

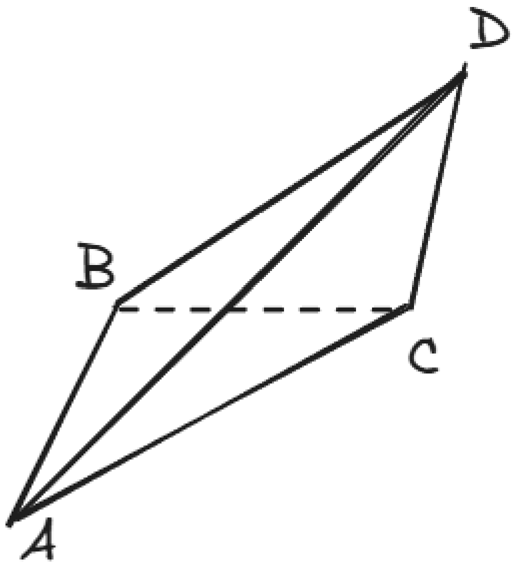
大家在初学空间向量时，一定做过下面这道题：

$AB\perp BC\perp CD$，现已知AB,BC,CD的长度为1，AB与CD的夹角为60°，求AD与BC 的夹角。



还记得这道题是怎么做的吗？我们把$\overrightarrow{AD}$用$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}$来表示，然后利用$\cos\theta=\frac{\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{AD}||\overrightarrow{BC}|}$就能求出夹角。

对比一下这两题的题干，是不是有亿点相似？只不过我们这个题目把已知AB与CD的夹角这个条件改为了已知四面体的体积，所以我们就要利用四面体的体积来求出AB与CD的夹角！首先我们画出本题的图：



怎么利用体积这个条件呢？**这里我要介绍一个公式。**首先，我们知道三角形的面积公式有两种常用的形式，一种是$\frac{1}{2}$底$\times$高，一种是$\frac{1}{2}$边$\times$边$\times sin$夹角，而四面体是三角形在空间中的推广，它的很多公式在形式上跟三角形的公式都有对应，例如我们知道的体积公式为$\frac{1}{3}$底$\times$高，只是“底”的含义从底边变成底面积，而$\frac{1}{2}$也变成了$\frac{1}{3}$而已，这是很自然的，因为维度从二维到了三维。

那么，$\frac{1}{2}$边$\times$边$\times sin$夹角这个公式能不能对应四面体的一个体积公式呢？答案是肯定的，就是下面这个公式：

$$V=\frac{2}{3a}S_1S_2\sin\theta$$

其中，V是四面体的体积，S_1,S_2是两个相邻面的面积，a是这两个相邻面的公共边的长度，θ是这两个相邻面的二面角的平面角。

例如在本题中，我们可以选取三角形ABC和三角形BCD的面积作为S_1,S_2，因而BC就是上面公式中的a，而θ不正是我们想要求的AB与CD的夹角吗？后面就完全转化成之前说的那道题了~~

题8

已知圆$C:x^2+y^2=4$上的两点$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$满足$x_1x_2+y_1y_2=0$，则$|x_1+\sqrt{3}y_1+6|+|x_2+\sqrt{3}y_2+6|$的最小值为( )

$A.6\sqrt{2}-4\quad B.12-4\sqrt{2}\quad 6-2\sqrt{2}\quad 3\sqrt{2}-2$

> 答案：B

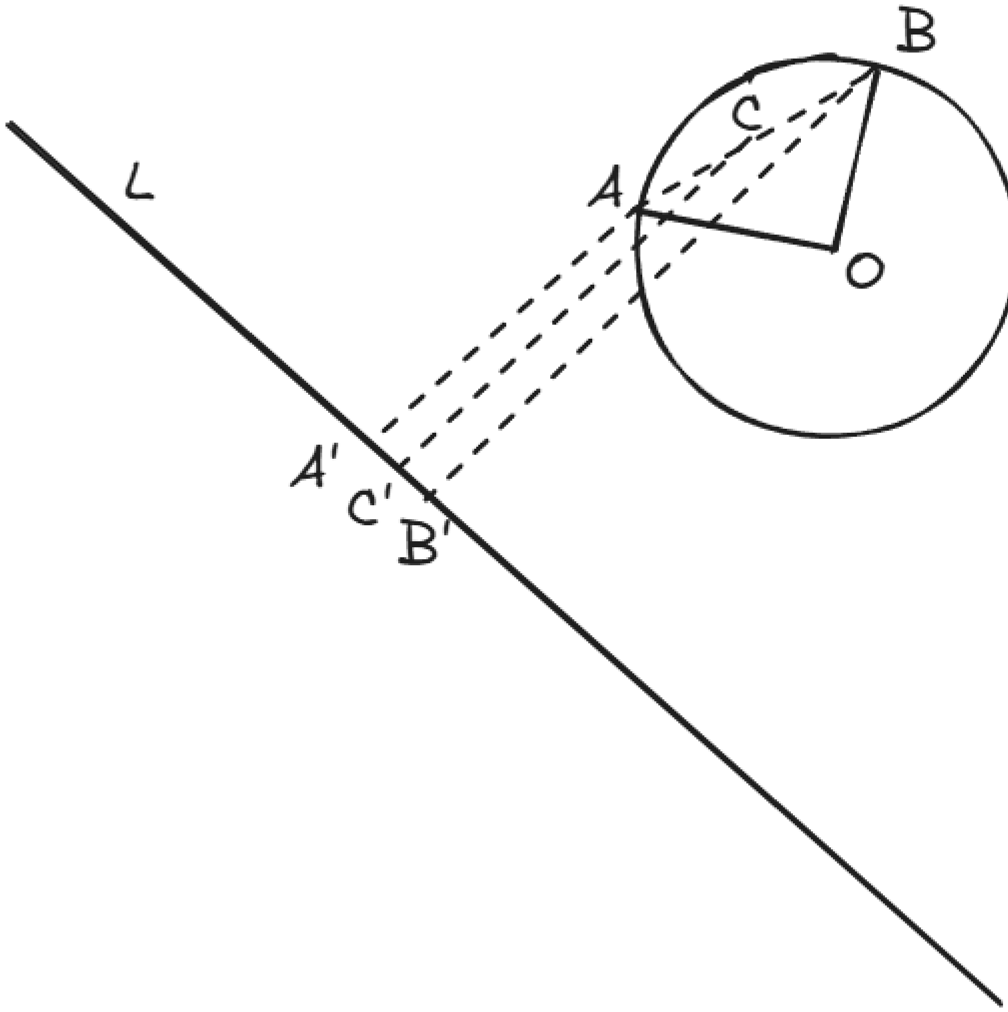
解析：

这道题是经典题型，属于是学习直线与圆一定会做到的题目。

首先看条件$x_1x_2+y_1y_2=0$，它的含义是很明确的：$OA\perp OB$，因为$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=x_1xx_2+y_1y_2=0$。

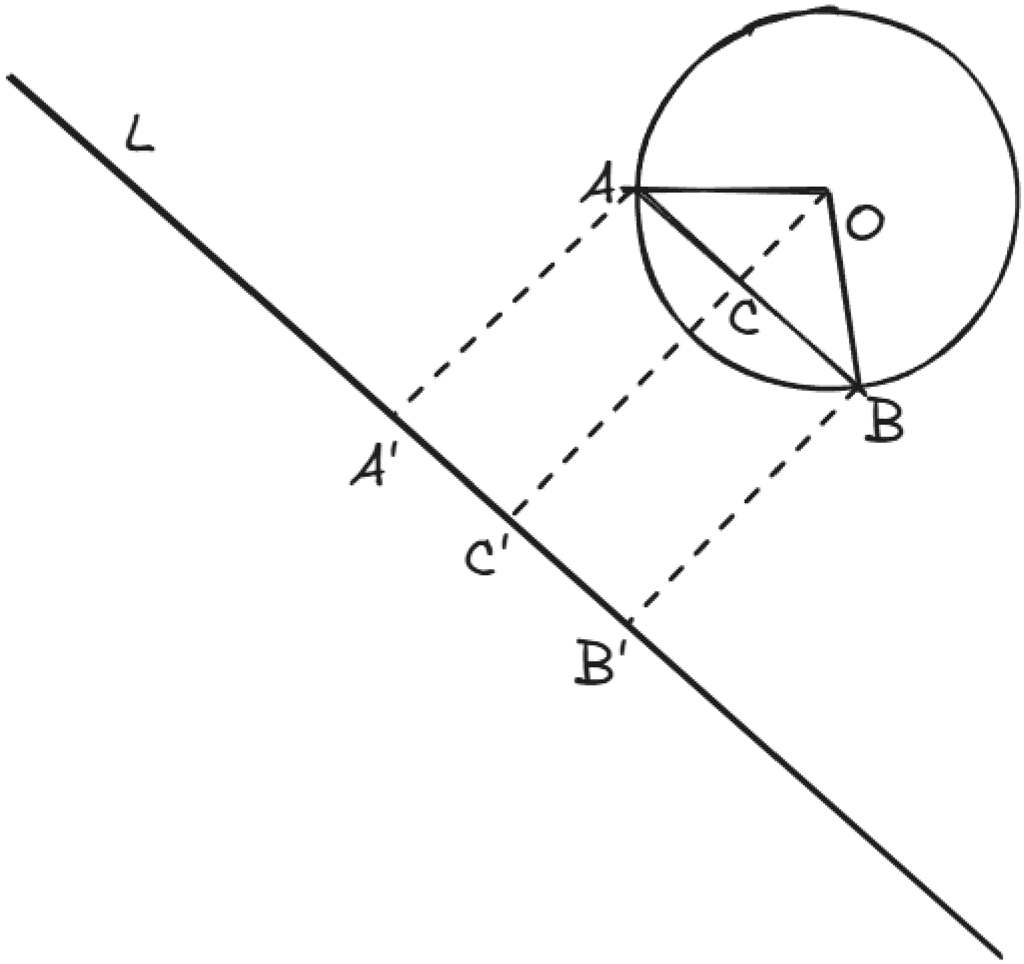
再看要求的式子$|x_1+\sqrt{3}y_1+6|+|x_2+\sqrt{3}y_2+6|$。数学里面求一个表达式的最值无非两种方法：代数法和几何法。这个式子里面有两个变量，还有两个绝对值，这样的情况下代数分析**显然是非常困难的**，所以我们要找出这个式子的**几何含义。**

这里就要利用点到直线的距离公式了（也许你第一次做这个题目想不到这样做，但之后再遇到一定要反应过来）。我们设直线$l: x+\sqrt{3}y+6=0$，那么$\frac{|x_1+\sqrt{3}y_1+6|}{2}+\frac{|x_2+\sqrt{3}y_2+6|}{2}$就是点$A,B$到直线$l$的距离之和，而我们要求的式子$|x_1+\sqrt{3}y_1+6|+|x_2+\sqrt{3}y_2+6|$不就是上面这个距离之和的两倍吗？



如上图所示，我们要求的就是$AA'+BB'$的最小值，我们取AB中点C（这么做的理由是：首先，在试错的过程中一般都会把AB连接起来，而三角形OAB是个等腰直角三角形，它斜边上的中点作为特殊点也是我们在寻找几何关系的时候应当着重考虑的地方），根据梯形的中位线，$AA'+BB'=2CC'$，所以我们只需要求CC'的最小值。容易知道当$AB \parallel l$时CC'最小。

注： 如果你不会求CC'的长度，可以求出OO'（也就是圆心到直线的距离），然后用$OO'-OC$就是CC'，不难发现此时O'和C'是重合的。

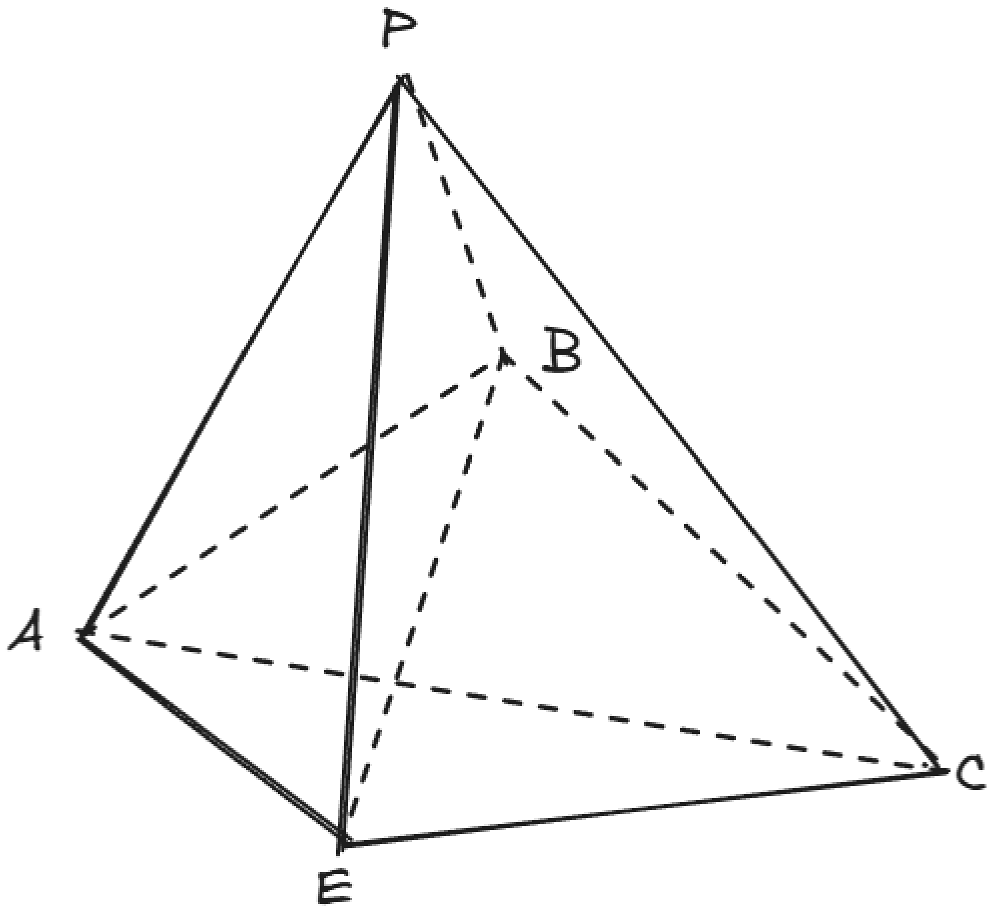


题19

如图，在三棱锥$P-ABC$中，$PB\perp$平面ABC，$AB=BC=BP=2$，点E在平面ABC内，且满足平面$PAE\perp$平面PBE，$BA\perp BC$。

（1）当$\angle ABE\in[\frac{\pi}{8},\frac{\pi}{3}]$时，求点$E$的轨迹长度。

（2）当二面角$E-PA-B$的余弦值为$\frac{\sqrt{3}}{3}$时，求三棱锥$E-PCB$的体积。



解析:

(1)