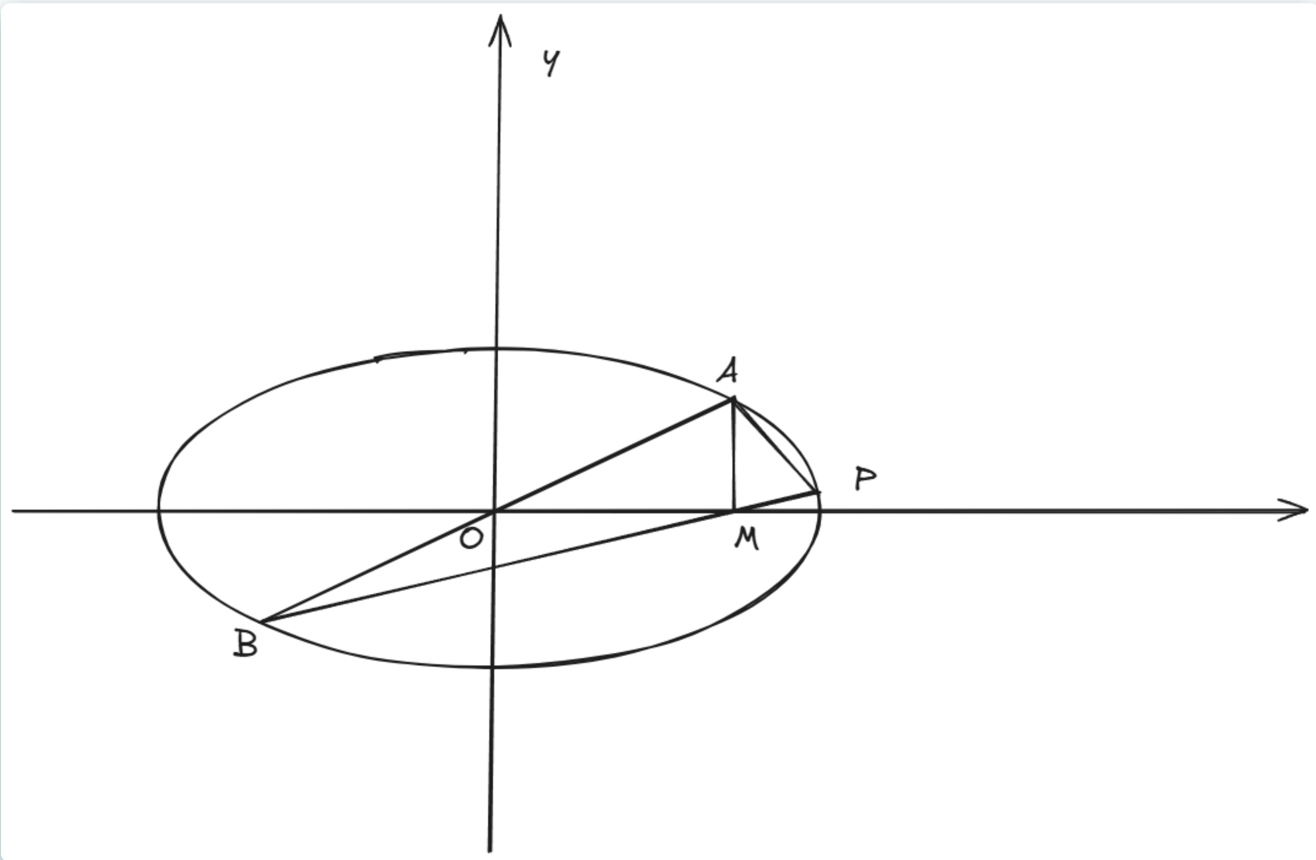
专题练习_圆锥曲线_2

2024年10月31日

题1

已知椭圆 $C:\frac{x^2}{2}+y^2=1$ ，过坐标原点 O 的直线与椭圆交于 A,B 两点（A 在第一象限）。过 A 作 x 轴的垂线，垂足为 M ，直线 BM 与椭圆的另一个交点为 P 。证明：$AB\perp AP$ 。

H2

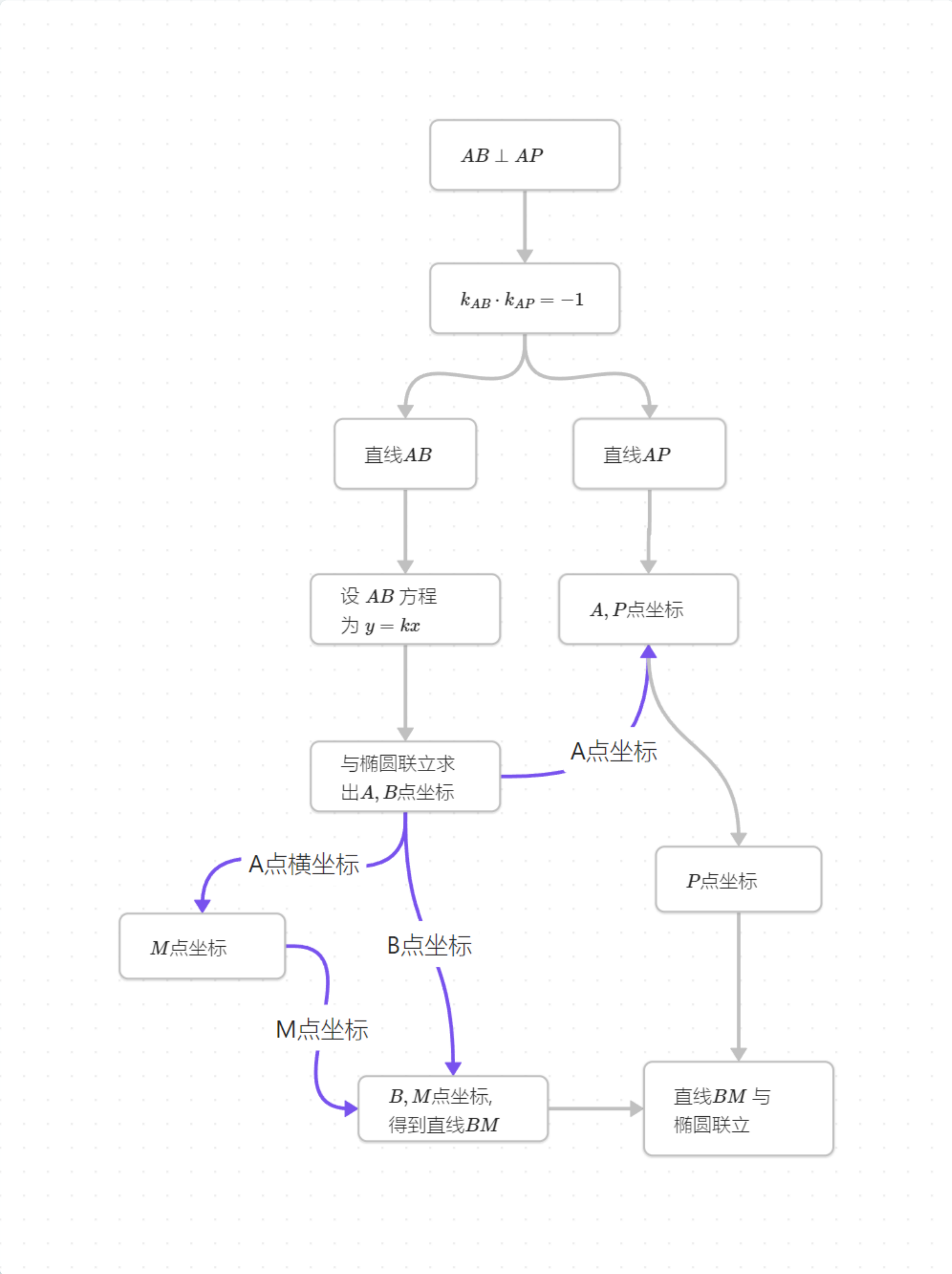


这是十几年前江苏卷的一道题，有人认为这道题奠定了全国高考圆锥曲线题计算量大的基调。对于这道传世经典，我们用三种方法来解决。

1. 设线法

首先，设计出本题的逻辑链：

逻辑的运转，也就是说关键步骤就是设 AB 方程为 $y=kx$ ，所以前面说过设线法叫做“线驱动”。



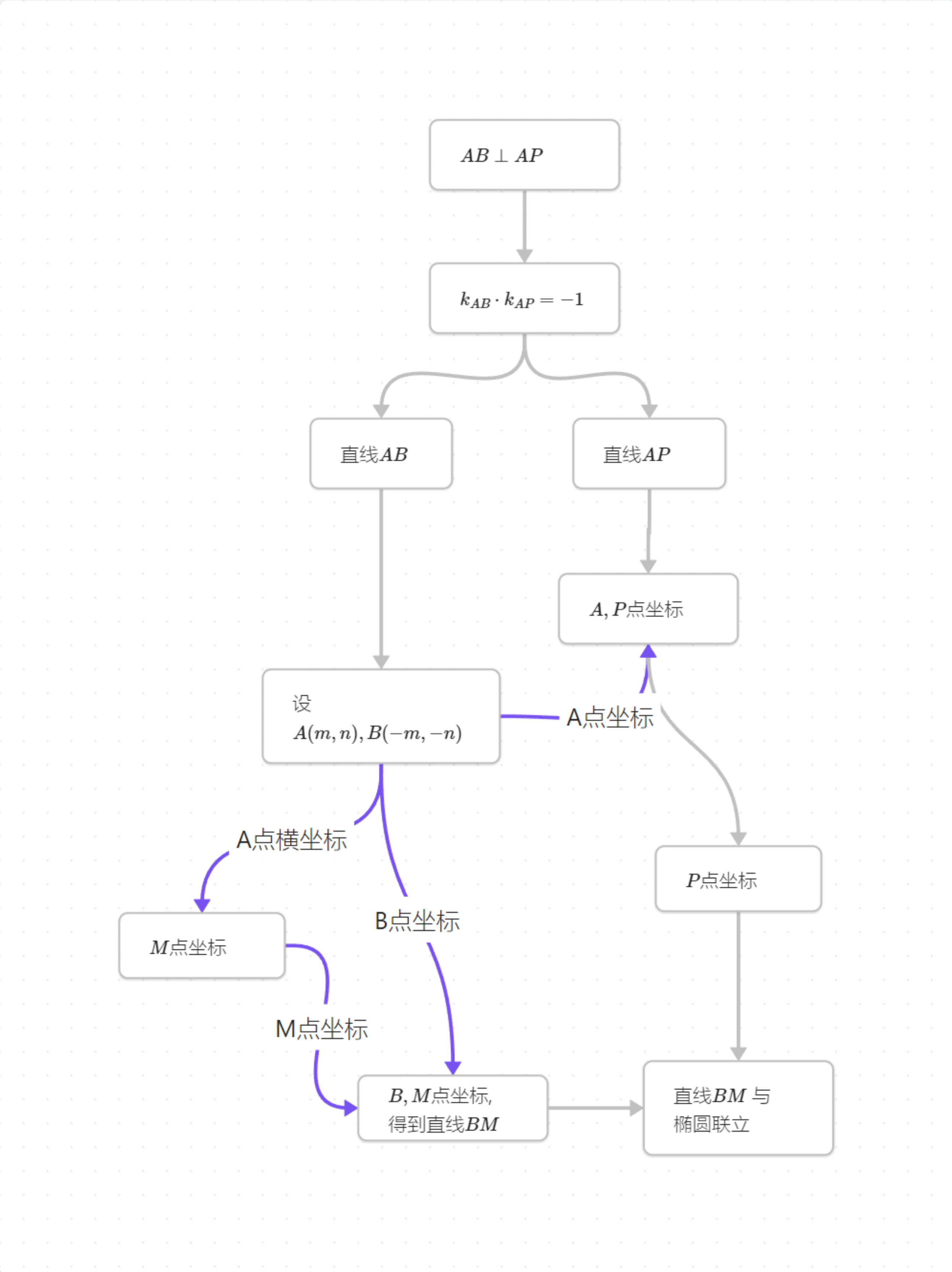
比之前稍微复杂一点，但是并不难理解。上面图中标为蓝色的地方就是**核心**，它**驱动**了整个逻辑的运转，也就是说关键步骤就是设 AB 方程为 $y=kx$ ，所以前面说过设线法叫做“线驱动”。

一套完整、自洽的逻辑链是我们解出题目的基础，实际上这并不仅仅适用于解析几何，而适用于任何领域（也不仅仅限于数学领域）。

你还可以从另外的角度来理解这套逻辑。想一想，我们要画出本题的图像，顺序是怎样的？我们先画出直线 AB ，再画出点 M ，然后连接 BM 与椭圆交于 P ，最后连接 AP 。整个流程的驱动力就是直线 AB ，有了直线 AB 才衍生出后面那么多东西。这就是为什么我们设 AB 的方程，而不去设 AP, BP 这些直线的方程。而且我们也**只**需要设出直线 AB 的方程，因为从我们作图的流程可以看出，基本的驱动力只有直线 AB ，有了它就能求出其它所有东西。

2. 设点法

设点法与刚才的设线法只有一点小小的区别。刚才我们说直线 AB 是基本的驱动力，设出它就能求出其它所有点和直线。在设线法中，我们用直线方程 $y = kx$ 来表示直线 AB ，而在设点法中，我们可以用 $A(m, n)$,$B(-m. -n)$ 来表示直线 AB （**无非就是强调出直线 AB 是经过原点的**）。所以，设点法的逻辑链和设线法也基本一致。



3. 二级结论法

观察本题的图像，其中 AB 是椭圆的一条直径，而 $\angle APB$ 就是 “直径所对的圆周

角"，因此

$$k_{PA}\cdot k_{PB}=e^2-1=-\frac{1}{2}$$

(如果你不知道这个结论，就去看看圆锥曲线专题练习1)

我们要证明的结论是 $AB\perp AP$，用斜率来表示就是

$$k_{PA}\cdot k_{AB}=-1$$

结合上面两个式子，就有

$$k_{PB}=\frac{1}{2}k_{AB}$$

我们要证明上面这个式子。现在设 $A(m,n),B(-m,-n),M(m,0)$（当然你也可以用设线法来表示），那么 $k_{AB}=\frac{n}{m}$，而 $k_{PB}=k_{MB}=\frac{n}{2m}$，所以确实有 $k_{PB}=\frac{1}{2}k_{AB}$。结束。

这种方法几乎没有计算量（前提是你能想到），如果你试过设点法和设线法，它们的计算量还是有点强度的。

这道题目由于太过于经典，以至于被2019年全国二卷改编过后拿来作为压轴题。如下：

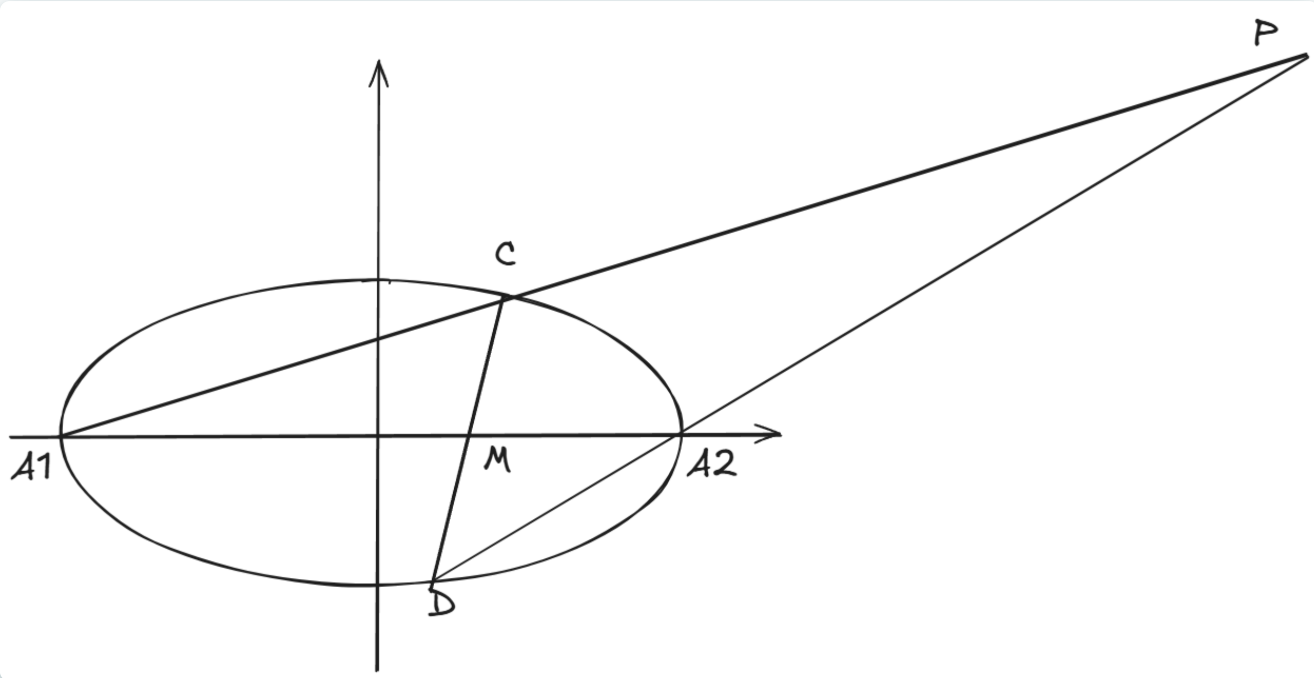
> 已知点 $A(-2,0),B(2,0)$，动点 $M(x,y)$ 满足直线 AM 与 BM 的斜率之积为 $-\frac{1}{2}$，记 M 的轨迹为曲线 C。
>
> (1) 求 C 的方程，并说明 C 是什么曲线。
>
> (2) 过坐标原点的直线交 C 于 P,Q 两点，点 P 在第一象限，$PE\perp x$轴，垂足为 E，连结 QE 并延长交 C 与点 G。
>
> (i) 证明:$\triangle PQG$ 是直角三角形。
>
> (ii) 求 $\triangle PQG$ 面积的最大值。

其中(2)(i)就是原题，而(2)(ii)在原题的基础上作了一个简单的推广。

题2

已知椭圆 $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{2}=1$，$A_1,A_2$ 分别为椭圆的左右顶点，已知直线 l 过定点 $M(\frac{1}{2},0)$ 交椭圆于 C,D 两点。求证：A_1C 与 A_2D 两直线的交点在一条定直线上。

H2



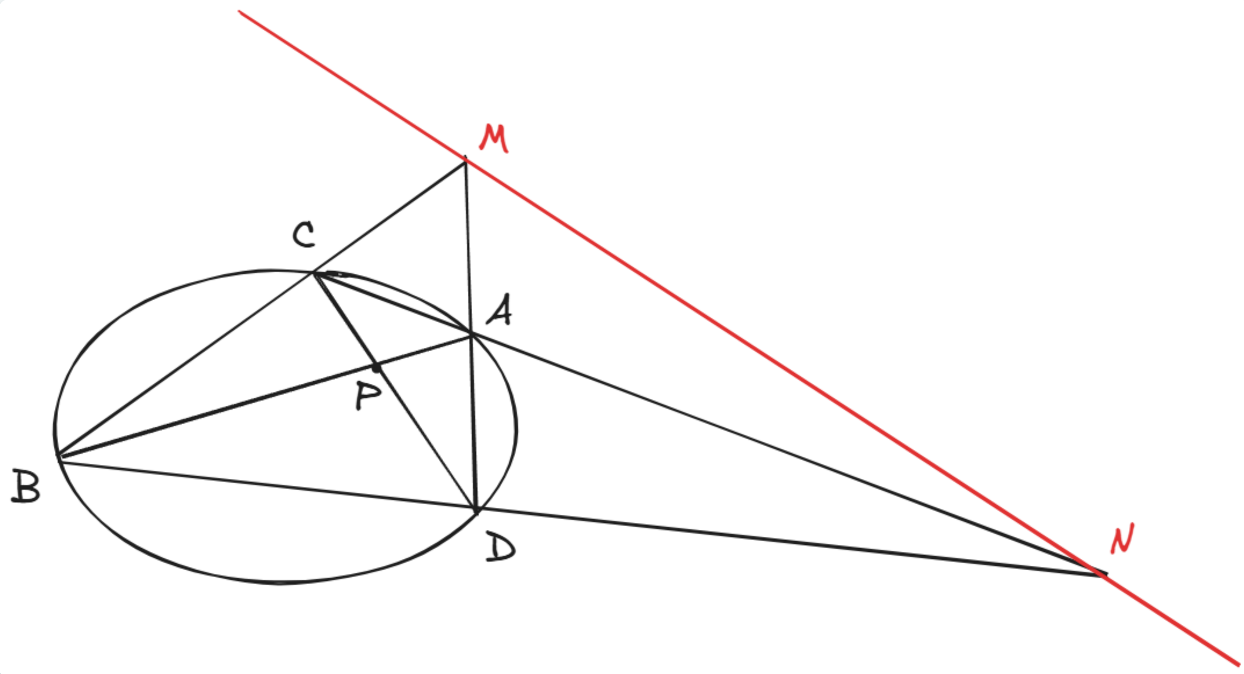
解析：

在**圆锥曲线专题练习1**中，我介绍过所谓**极点、极线**的概念。当时，我只是粗略地介绍：

- 当极点位于圆锥曲线内时，极线位于圆锥曲线外。
- 当极点位于圆锥曲线外时，极线位于圆锥曲线内

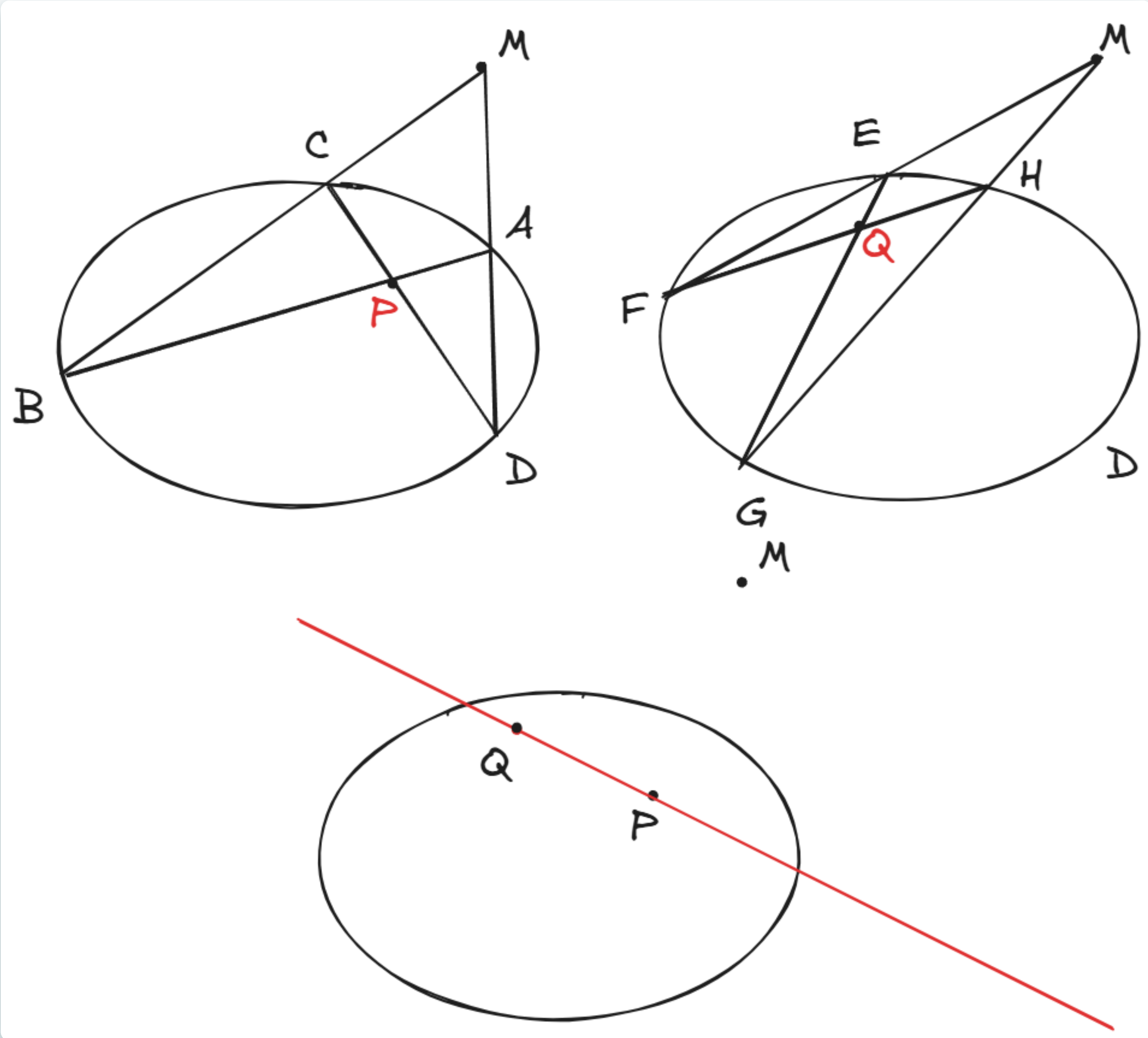
上面的叙述，并没有指明极点、极线确切的位置关系，尽管大家已经知道可以根据极点坐标 (x_0,y_0) 求出对应的极线方程: $\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}=1$ ，但是我们如何在几何上确定极点和极线？于是，补充相关知识如下：

> 当极点 P 位于圆锥曲线（不妨考虑椭圆）内部时， P 的极线按如下方式确定：



如上图，P 是椭圆内一点（作为极点），过 P **任意**作两条直线 AB, CD，设直线 AD, BC 交于 M，直线 AC, BD 交于 N，则直线 MN 就是 P 的极线。

上面的过程是可逆的，也就是说，不仅 M 位于 P 的极线上，其实 P 也位于 M 的极线上（不过在上面没有画出来）！同理，P 也位于 N 的极线上。所以这就指明了，如果极点位于圆锥曲线外，那么它的极线应该如何确定，过程如下：



如上图，M 是圆锥曲线外一点（作为极点），过 M 作两条直线与椭圆交于 4 点，然后连接这 4 点的对角线，得到交点 P ，然后用同样的方法得到另一个交点 Q ，那么由于 P 和 Q 都在 M 的极线上（这是因为 M 在 P 和 Q 的极线上，这种关系是相互的），而两点确定一条直线，所以直线 PQ 就是 M 的极线。

现在，回过头看本题的图像。**仔细看！**，如果 M 作为极点，那么 P 是不是正位于 M 的极线上？（当然， M 也位于 P 的极线上，前面说过这种关系是相互的）尽管这里我们没有确定出位于极线上的另一点 N，但是对本题而言，我们知道 P 位于 M 的极线上就足够了。因为本题正是要证明 P 位于一条定直线上，**所以这条定直线就是 M 的极线！** 也就是 $x=6$ 。

别高兴太早，现在我们面临一个新的问题：**极点、极线不能在大题中书写**。如果你在考试的时候这样做，会被扣分（基本上只有答案分）。既然如此，我们还有学习极点、极线的必要吗？当然有，因为它能帮助我们快速地得到大题的正确答案，这是非常有帮助的。例如：

- 如果这题计算量大，而你算到天荒地老发现结果错了，一瞬间天都塌了。并且你没有时间、或者不想从头再来，那么这个时候你可以尝试**蒙混过关**。比如你用极点、极线事先确定出了正确答案是 a ,而你计算一个非常复杂的表达式时发现结果是 b ，但你非常狡猾地在答题卡上写道： **表达式**$=b$ 。阅卷老师不会去看你的计算过程，他只关心你的结果，以及你的大体

流程。 不排除有失手的情况，所以不要依赖这种方法。

我在高中时研究过很多圆曲的题目，根据我的经验，对于绝大部分题目而言，事先通过某些手段（不仅仅是极点极线）得出正确答案，对于解答本题是非常非常有帮助的。我觉得做每个题目时都应该花几分钟时间去尝试这一点。当然，这里面有很多技巧，不仅仅只有极点极线。我会在以后的题目解析中给出。

现在回到本题，我们通过强大的极点极线得出了正确答案后，接下来就要用正常的高中数学方法来书写过程了。

显然，本题最核心、最重要的直线是 l ，也就是直线 CD 。于是我们设 $l: x=my+\frac{1}{2}$ ，点 C, D 的坐标分别为 $(x_1, y_1),(x_2, y_2)$ 。联立：（有一点需要注意，直线 l 的方程当然也可以设为 $y=k(x-\frac{1}{2})$ ，但是，反设 $x=my+\frac{1}{2}$ 更好，这是因为我们就不需要去特别讨论直线垂直于 x 轴的情况了，因为方程 $x=my+\frac{1}{2}$ 包含直线垂直 x 轴的情况，它只是不能表达垂直于 y 轴的情况，而本题中的 l 不可能垂直 y 轴。

$$\begin{cases} x=my+\dfrac{1}{2} \\ 2x^2+3y^2=6 \end{cases}$$

得到（尽管考试的时候不建议，但平时练习时可以试试心算这个联立方程）

$$(2m^2+3)y^2+2my-\frac{11}{2}=0$$

根据韦达定理，我们有（这一步有2分，考试必拿）

$$\begin{cases} y_1+y_2=-\dfrac{2m}{2m^2+3} \\ y_1y_2=-\dfrac{11}{2(2m^2+3)} \end{cases}$$

直线 A_1C 的方程为：$y=\frac{y_1}{x_1+\sqrt{3}}(x+\sqrt{3})$

直线 A_2D 的方程为：$y=\frac{y_2}{x_2-\sqrt{3}}(x-\sqrt{3})$

联立它们，得到 P 点横坐标为（我们只需要横坐标，因为是要证明 $x_P=6$,这里就体现出我们事先得到正确答案的优势了，如果你不知道它位于的定直线是垂直 x 轴的，那么你还要考虑 y_P)。

下面的计算过程，可以试试不使用草稿纸完成:

$$
\begin{aligned}
x_P &= \sqrt{3}\cdot\frac{\frac{y_2}{x_2-\sqrt{3}}+\frac{y_1}{x_1+\sqrt{3}}}{\frac{y_2}{x_2-\sqrt{3}}-\frac{y_1}{x_1+\sqrt{3}}}\\
&= \sqrt{3}\cdot\frac{y_2(x_1+\sqrt{3})+y_1(x_2-\sqrt{3})}{y_2(x_1+\sqrt{3})-y_1(x_2-\sqrt{3})}
\end{aligned}
$$

到这一步怎么往下做呢？我们之前的韦达定理得到的是关于 y_1,y_2 的式子，所以我们应该把 x_1,x_2 转换成 y_1,y_2 。因为我们有 $x_1=my_1+\frac{1}{2},x_2=my_2+\frac{1}{2}$ ，代入上式得到：

$$
\begin{aligned}
x_P &= \sqrt{3}\cdot\frac{y_2(my_1+\frac{1}{2}+\sqrt{3})+y_1(my_2+\frac{1}{2}-\sqrt{3})}{y_2(my_1+\frac{1}{2}+\sqrt{3})-y_1(my_2+\frac{1}{2}-\sqrt{3})}\\
&= \sqrt{3}\cdot\frac{2my_1y_2+(\frac{1}{2}-\sqrt{3})y_1+(\frac{1}{2}+\sqrt{3})y_2}{(\sqrt{3}-\frac{1}{2})y_1+(\frac{1}{2}+\sqrt{3})y_2}
\end{aligned}
$$

到这一步，又怎么往下做？这个式子里面有 y_1y_2 ，这是可以使用韦达定理来替换的。然而我们不能使用 y_1+y_2 来替换其他项，因为不管是分子还是分母， y_1 和 y_2 的系数都不相等！

这里就涉及到圆锥曲线为数不多的**技巧**之一了：非对称韦达定理。

就像上面那个式子一样，y_1 和 y_2 的系数不相等，是不对称的，我们不能用 y_1+y_2 来替换。像这样的情况，我们只需要把 y_1y_2 表示成 y_1+y_2 即可，看下面的操作：

我们已经知道 $y_1+y_2=-\frac{2m}{2m^2+3},y_1y_2=-\frac{11}{2(2m^2+3)}$ ，可以得到 $y_1y_2=\frac{11}{4m}(y_1+y_2)$ ，我们把这个式子代入上面的 x_P 中，就有：

$$
\begin{aligned}
x_P &= \sqrt{3}\cdot\frac{\frac{11}{2}(y_1+y_2)+(\frac{1}{2}-\sqrt{3})y_1+(\frac{1}{2}+\sqrt{3})y_2}{(\sqrt{3}-\frac{1}{2})y_1+(\frac{1}{2}+\sqrt{3})y_2}\\
&= \sqrt{3}\cdot\frac{(6-\sqrt{3})y_1+(6+\sqrt{3})y_2}{(\sqrt{3}-\frac{1}{2})y_1+(\frac{1}{2}+\sqrt{3})y_2}\\
&= 6
\end{aligned}
$$

上面最后一步的 $=6$ 是如何得出的？并不是我在‘蒙混过关’，而是因为：

$$
\frac{6-\sqrt{3}}{\sqrt{3}-\frac{1}{2}}=\frac{6+\sqrt{3}}{\frac{1}{2}+\sqrt{3}}=2\sqrt{3}
$$

$$
\frac{(6-\sqrt{3})y_1+(6+\sqrt{3})y_2}{(\sqrt{3}-\frac{1}{2})y_1+(\frac{1}{2}+\sqrt{3})y_2}=2\sqrt{3}\cdot\frac{(\sqrt{3}-\frac{1}{2})y_1+(\frac{1}{2}+\sqrt{3})y_2}{(\sqrt{3}-\frac{1}{2})y_1+(\frac{1}{2}+\sqrt{3})y_2}=2\sqrt{3}
$$

这就是非对称韦达定理，一个特别的技巧。