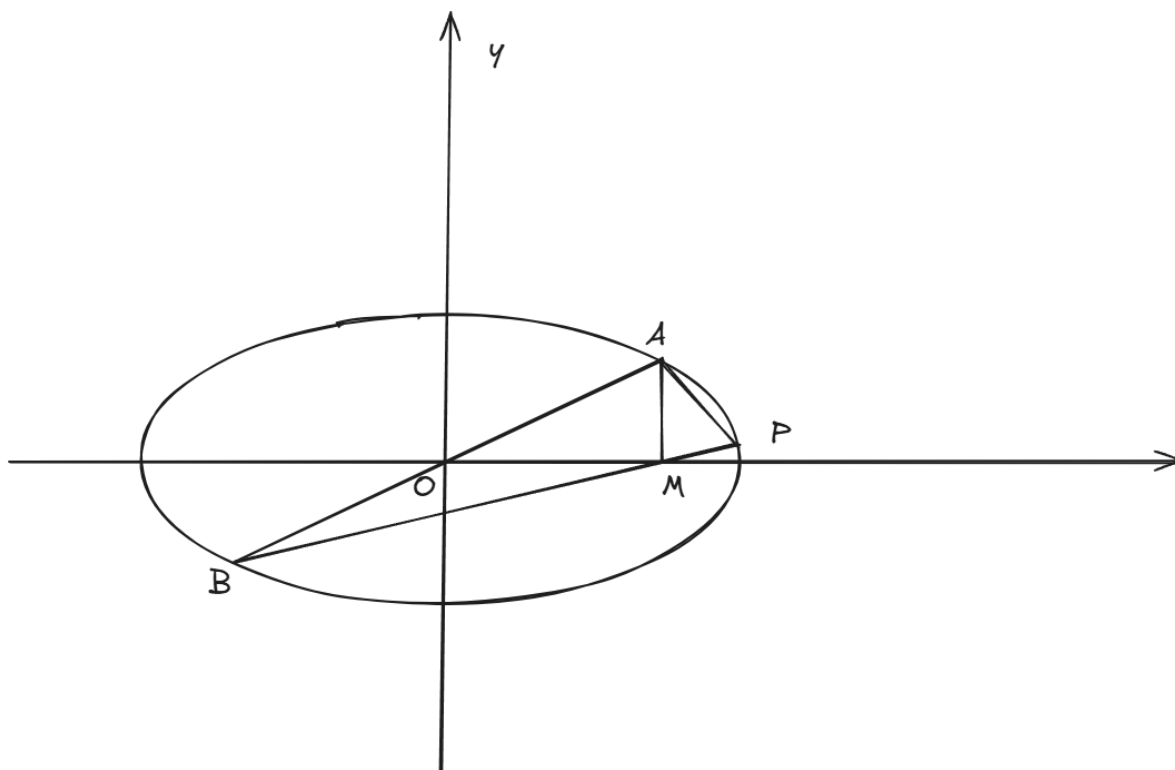


# 专题练习\_圆锥曲线\_2

2024年10月31日

## 题1

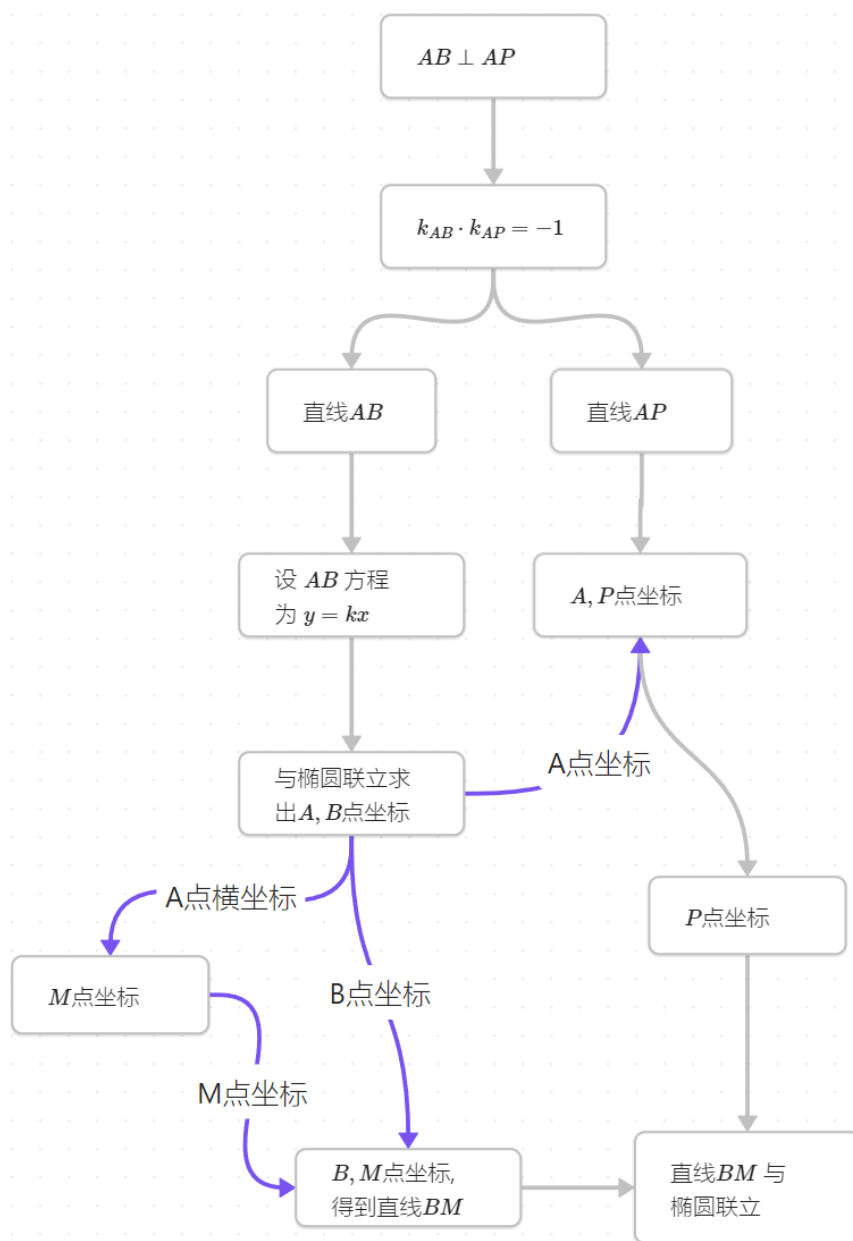
已知椭圆  $C: \frac{x^2}{2} + y^2 = 1$ ，过坐标原点  $O$  的直线与椭圆交于  $A, B$  两点 ( $A$  在第一象限)。过  $A$  作  $x$  轴的垂线，垂足为  $M$ ，直线  $BM$  与椭圆的另一个交点为  $P$ 。证明:  $AB \perp AP$ 。



这是十几年前江苏卷的一道题，有人认为这道题奠定了全国高考圆锥曲线题计算量大的基调。对于这道传世经典，我们用三种方法来解决。

### 1. 设线法

首先，设计出本题的逻辑链：



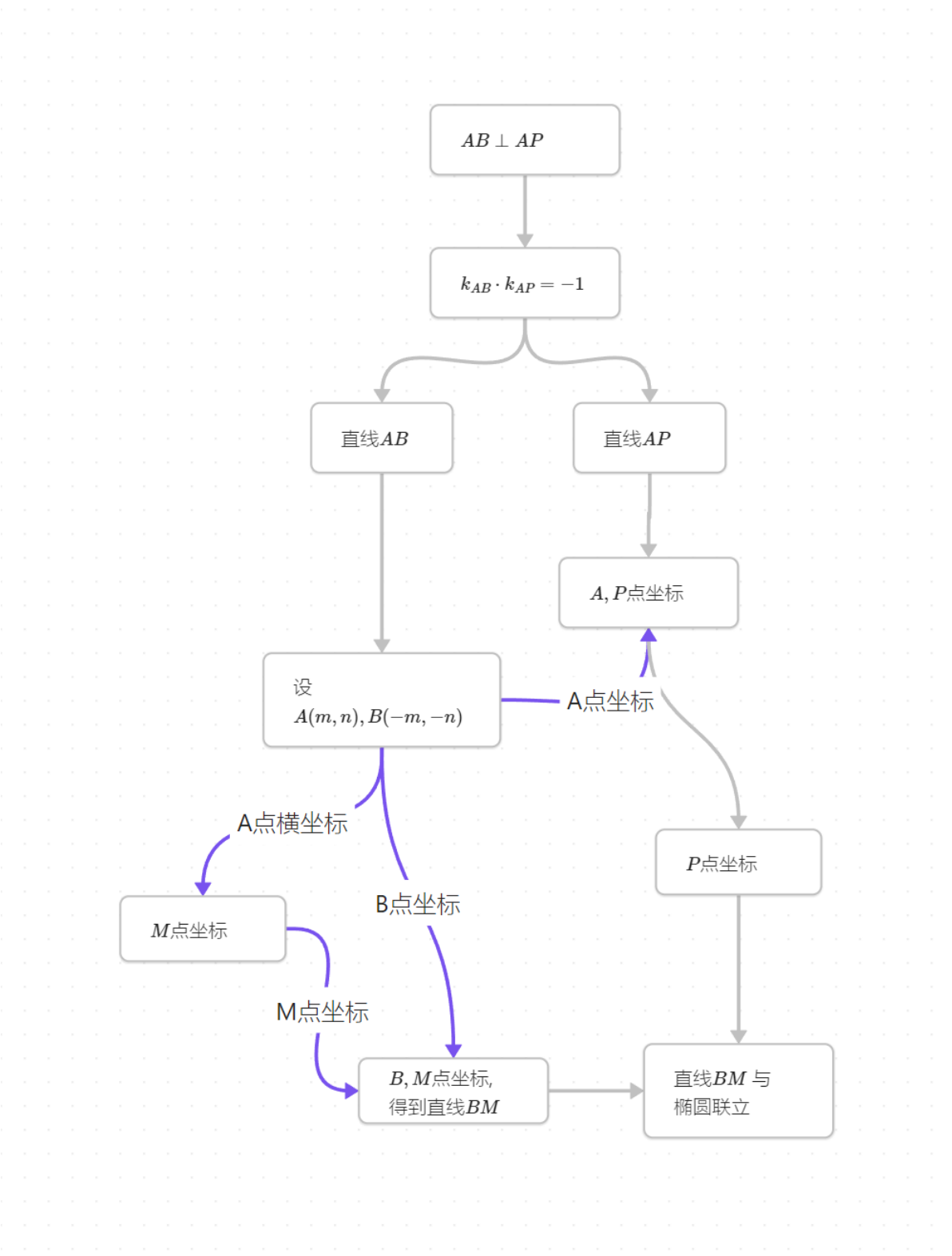
比之前稍微复杂一点，但是并不难理解。上面图中标为蓝色的地方就是**核心**，它**驱动**了整个逻辑的运转，也就是说关键步骤就是设  $AB$  方程为  $y = kx$ ，所以前面说过设线法叫做“线驱动”。

一套完整、自洽的逻辑链是我们解出题目的基础，实际上这并不仅仅适用于解析几何，而适用于任何领域（也不仅仅限于数学领域）。

你还可以从另外的角度来理解这套逻辑。想一想，我们要画出本题的图像，顺序是怎样的？我们先画出直线  $AB$ ，再画出点  $M$ ，然后连接  $BM$  与椭圆交于  $P$ ，最后连接  $AP$ 。整个流程的驱动力就是直线  $AB$ ，有了直线  $AB$  才衍生出后面那么多东西。这就是为什么我们设  $AB$  的方程，而不去设  $AP, BP$  这些直线的方程。而且我们也只需要设出直线  $AB$  的方程，因为从我们作图的流程可以看出，基本的驱动力只有直线  $AB$ ，有了它就能求出其它所有东西。

## 2. 设点法

设点法与刚才的设线法只有一点小小的区别。刚才我们说直线  $AB$  是基本的驱动力，设出它就能求出其它所有点和直线。在设线法中，我们用直线方程  $y = kx$  来表示直线  $AB$ ，而在设点法中，我们可以用  $A(m, n), B(-m, -n)$  来表示直线  $AB$ （无非就是强调出直线  $AB$  是经过原点的）。所以，设点法的逻辑链和设线法也基本一致。



3. 二级结论法

观察本题的图像，其中  $AB$  是椭圆的一条直径，而  $\angle APB$  就是“直径所对的圆周角”，因此

$$k_{PA} \cdot k_{PB} = e^2 - 1 = -\frac{1}{2}$$

(如果你不知道这个结论, 就去看看圆锥曲线专题练习1)

我们要证明的结论是  $AB \perp AP$ , 用斜率来表示就是

$$k_{PA} \cdot k_{AB} = -1$$

结合上面两个式子, 就有

$$k_{PB} = \frac{1}{2} k_{AB}$$

我们要证明上面这个式子。现在设  $A(m, n), B(-m, -n), M(m, 0)$  (当然你也可以用设线法来表示), 那么  $k_{AB} = \frac{n}{m}$ , 而  $k_{PB} = k_{MB} = \frac{n}{2m}$ , 所以确实有  $k_{PB} = \frac{1}{2} k_{AB}$ 。结束。

这种方法几乎没有计算量 (前提是你能想到), 如果你试过设点法和设线法, 它们的计算量还是有点强度的。

这道题目由于太过于经典, 以至于被2019年全国二卷改编过后拿来作为压轴题。如下:

已知点  $A(-2, 0), B(2, 0)$ , 动点  $M(x, y)$  满足直线  $AM$  与  $BM$  的斜率之积为  $-\frac{1}{2}$ , 记  $M$  的轨迹为曲线  $C$ 。

(1) 求  $C$  的方程, 并说明  $C$  是什么曲线。

(2) 过坐标原点的直线交  $C$  于  $P, Q$  两点, 点  $P$  在第一象限,  $PE \perp x$  轴, 垂足为  $E$ , 连结  $QE$  并延长交  $C$  与点  $G$ 。

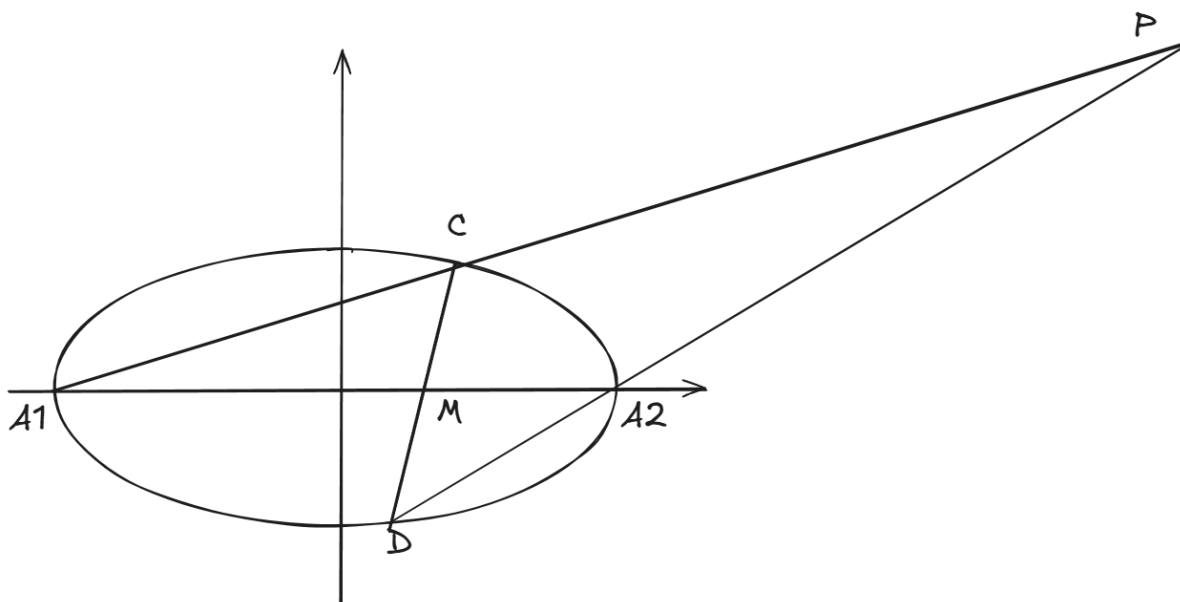
(i) 证明:  $\triangle PQG$  是直角三角形。

(ii) 求  $\triangle PQG$  面积的最大值。

其中(2)(i)就是原题, 而(2)(ii)在原题的基础上作了一个简单的推广。

## 题2

已知椭圆  $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2} = 1$ ,  $A_1, A_2$  分别为椭圆的左右顶点, 已知直线  $l$  过定点  $M(\frac{1}{2}, 0)$  交椭圆于  $C, D$  两点。求证:  $A_1C$  与  $A_2D$  两直线的交点在一条定直线上。



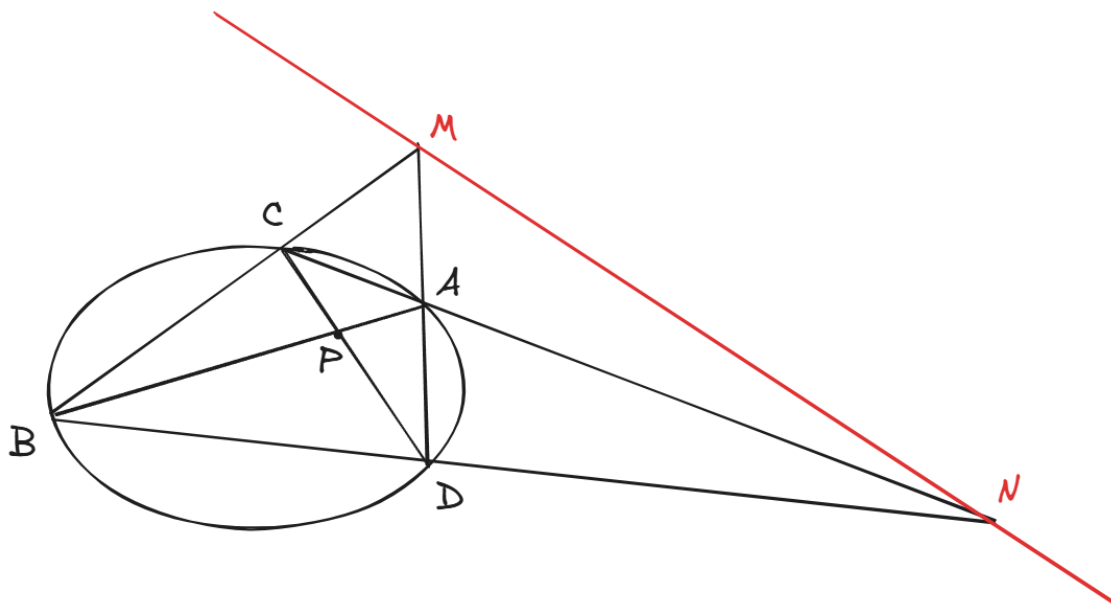
解析：

在圆锥曲线专题练习1中，我介绍过所谓**极点**、**极线**的概念。当时，我只是粗略地介绍：

- 当极点位于圆锥曲线内时，极线位于圆锥曲线外。
- 当极点位于圆锥曲线外时，极线位于圆锥曲线内

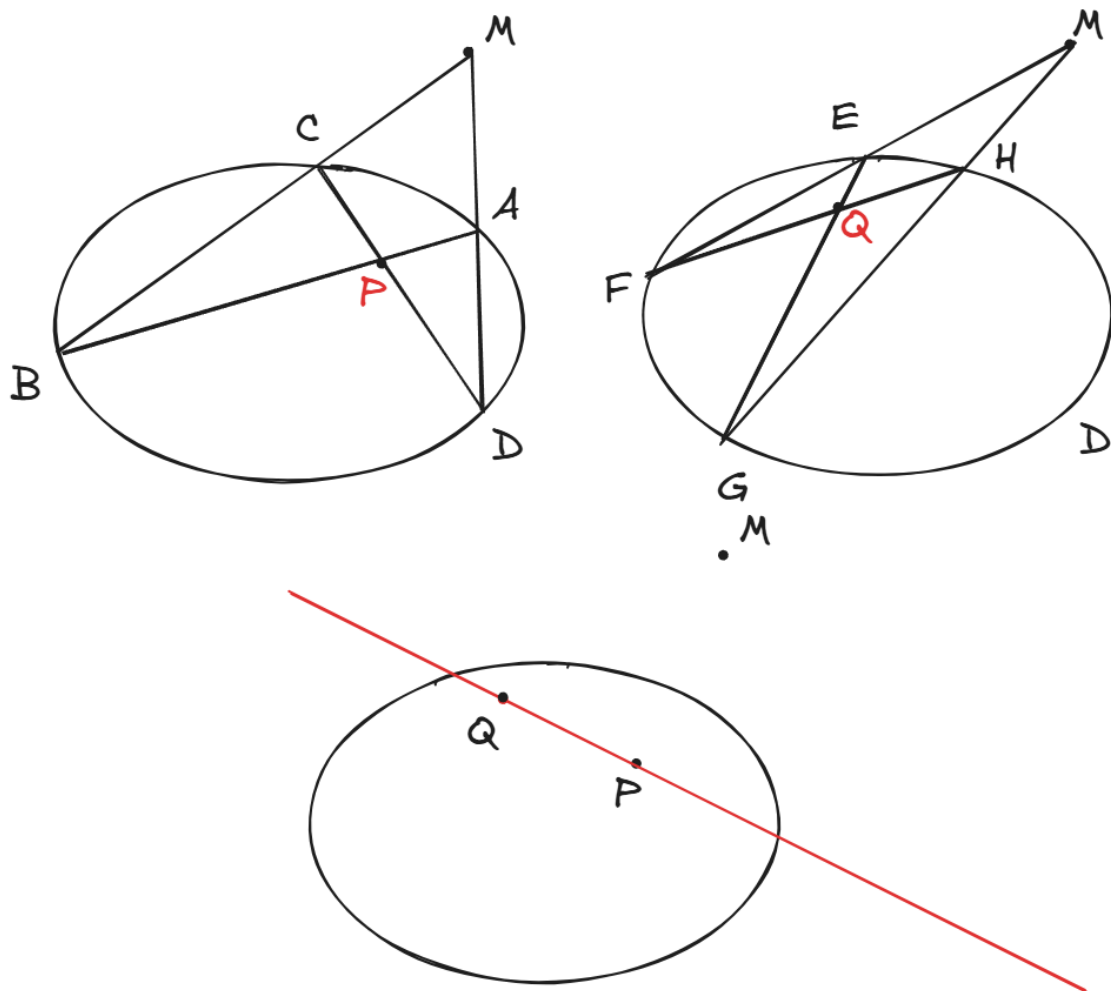
上面的叙述，并没有指明极点、极线确切的位置关系，尽管大家已经知道可以根据极点坐标  $(x_0, y_0)$  求出对应的极线方程:  $\frac{x_0x}{a^2} + \frac{y_0y}{b^2} = 1$ ，但是我们如何在几何上确定极点和极线？于是，补充相关知识如下：

当极点  $P$  位于圆锥曲线（不妨考虑椭圆）内部时， $P$  的极线按如下方式确定：



如上图， $P$  是椭圆内一点（作为极点），过  $P$  任意作两条直线  $AB, CD$ ，设直线  $AD, BC$  交于  $M$ ，直线  $AC, BD$  交于  $N$ ，则直线  $MN$  就是  $P$  的极线。

上面的过程是可逆的，也就是说，不仅  $M$  位于  $P$  的极线上，其实  $P$  也位于  $M$  的极线上（不过在上面没有画出来）！同理， $P$  也位于  $N$  的极线上。所以这就指明了，如果极点位于圆锥曲线外，那么它的极线应该如何确定，过程如下：



如上图， $M$  是圆锥曲线外一点（作为极点），过  $M$  作两条直线与椭圆交于 4 点，然后连接这 4 点的对角线，得到交点  $P$ ，然后用同样的方法得到另一个交点  $Q$ ，那么由于  $P$  和  $Q$  都在  $M$  的极线上（这是因为  $M$  在  $P$  和  $Q$  的极线上，这种关系是相互的），而两点确定一条直线，所以直线  $PQ$  就是  $M$  的极线。

现在，回过头看本题的图像。**仔细看！**，如果  $M$  作为极点，那么  $P$  是不是正位于  $M$  的极线上？（当然， $M$  也位于  $P$  的极线上，前面说过这种关系是相互的）尽管这里我们没有确定出位于极线上的另一点  $N$ ，但是对本题而言，我们知道  $P$  位于  $M$  的极线上就足够了。因为本题正是要证明  $P$  位于一条定直线上，**所以这条定直线就是  $M$  的极线！** 也就是  $x = 6$ 。

别高兴太早，现在我们面临一个新的问题：**极点、极线不能在大题中书写**。如果你在考试的时候这样做，会被扣分（基本上只有答案分）。既然如此，我们还有学习极点、极线的必要吗？当然有，因为它能帮助我们快速地得到大题的正确答案，这是非常有帮助的。例如：

- 如果这题计算量大，而你算到天荒地老发现结果错了，一瞬间天都塌了。并且你没有时间、或者不想从头再来，那么这个时候你可以尝试**蒙混过关**。比如你用极点、极线事先确定出了正确答案是  $a$ ，而你计算一个非常复杂的表达式时发现结果是  $b$ ，但你非常狡猾地在答题卡上写道：**表达式** =  $a$ 。阅卷老师不会去看你的计算过程，他只关心你的结果，以及你的大体流程。不排除有失手的情况，所以不要依赖这种方法。

我在高中时研究过很多圆曲的题目，根据我的经验，对于绝大部分题目而言，事先通过某些手段（不仅仅是极点极线）得出正确答案，对于解答本题是非常非常有帮助的。我觉得做每个题目时都应该花几分钟时间去尝试这一点。当然，这里面有很多技巧，不仅仅只有极点极线。我会在以后的题目解析中给出。

现在回到本题，我们通过强大的极点极线得出了正确答案后，接下来就要用正常的高中数学方法来书写过程了。

显然，本题最核心、最重要的直线是  $l$ ，也就是直线  $CD$ 。于是我们设  $l: x = my + \frac{1}{2}$ ，点  $C, D$  的坐标分别为  $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ 。联立：（有一点需要注意，直线  $l$  的方程当然也可以设为  $y = k(x - \frac{1}{2})$ ，但是，反设  $x = my + \frac{1}{2}$  更好，这是因为我们就不需要去特别讨论直线垂直于  $x$  轴的情况了，因为方程  $x = my + \frac{1}{2}$  包含直线垂直  $x$  轴的情况，它只是不能表达垂直于  $y$  轴的情况，而本题中的  $l$  不可能垂直  $y$  轴。

$$\begin{cases} x = my + \frac{1}{2} \\ 2x^2 + 3y^2 = 6 \end{cases}$$

得到（尽管考试的时候不建议，但平时练习时可以试试心算这个联立方程）

$$(2m^2 + 3)y^2 + 2my - \frac{11}{2} = 0$$

根据韦达定理，我们有（这一步有2分，考试必拿）

$$\begin{cases} y_1 + y_2 = -\frac{2m}{2m^2 + 3} \\ y_1 y_2 = -\frac{11}{2(2m^2 + 3)} \end{cases}$$

直线  $A_1C$  的方程为：  $y = \frac{y_1}{x_1 + \sqrt{3}}(x + \sqrt{3})$

直线  $A_2D$  的方程为：  $y = \frac{y_2}{x_2 - \sqrt{3}}(x - \sqrt{3})$

联立它们，得到  $P$  点横坐标为（我们只需要横坐标，因为是要证明  $x_P = 6$ ，这里就体现出我们事先得到正确答案的优势了，如果你不知道它位于的定直线是垂直  $x$  轴的，那么你还考虑  $y_P$ ）。

下面的计算过程，可以试试不使用草稿纸完成：

$$\begin{aligned} x_P &= \sqrt{3} \cdot \frac{\frac{y_2}{x_2 - \sqrt{3}} + \frac{y_1}{x_1 + \sqrt{3}}}{\frac{y_2}{x_2 - \sqrt{3}} - \frac{y_1}{x_1 + \sqrt{3}}} \\ &= \sqrt{3} \cdot \frac{y_2(x_1 + \sqrt{3}) + y_1(x_2 - \sqrt{3})}{y_2(x_1 + \sqrt{3}) - y_1(x_2 - \sqrt{3})} \end{aligned}$$

到这一步怎么往下做呢？我们之前的韦达定理得到的是关于  $y_1, y_2$  的式子，所以我们应该把  $x_1, x_2$  转换成  $y_1, y_2$ 。因为我们有  $x_1 = my_1 + \frac{1}{2}, x_2 = my_2 + \frac{1}{2}$ ，代入上式得到：

$$\begin{aligned} x_P &= \sqrt{3} \cdot \frac{y_2(my_1 + \frac{1}{2} + \sqrt{3}) + y_1(my_2 + \frac{1}{2} - \sqrt{3})}{y_2(my_1 + \frac{1}{2} + \sqrt{3}) - y_1(my_2 + \frac{1}{2} - \sqrt{3})} \\ &= \sqrt{3} \cdot \frac{2my_1y_2 + (\frac{1}{2} - \sqrt{3})y_1 + (\frac{1}{2} + \sqrt{3})y_2}{(\sqrt{3} - \frac{1}{2})y_1 + (\frac{1}{2} + \sqrt{3})y_2} \end{aligned}$$

到这一步，又怎么往下做？这个式子里面有  $y_1y_2$ ，这是可以使用韦达定理来替换的。然而我们不能使用  $y_1 + y_2$  来替换其他项，因为不管是分子还是分母， $y_1$  和  $y_2$  的系数都不相等！

这里就涉及到圆锥曲线为数不多的技巧之一了：非对称韦达定理。

就像上面那个式子一样， $y_1$  和  $y_2$  的系数不相等，是不对称的，我们不能用  $y_1 + y_2$  来替换。像这样的情况，我们只需要把  $y_1y_2$  表示成  $y_1 + y_2$  即可，看下面的操作：

我们已经知道  $y_1 + y_2 = -\frac{2m}{2m^2 + 3}, y_1y_2 = -\frac{11}{2(2m^2 + 3)}$ ，可以得到  $y_1y_2 = \frac{11}{4m}(y_1 + y_2)$ ，我们把这个式子代入上面的  $x_P$  中，就有：

$$\begin{aligned}
 x_P &= \sqrt{3} \cdot \frac{\frac{11}{2}(y_1 + y_2) + (\frac{1}{2} - \sqrt{3})y_1 + (\frac{1}{2} + \sqrt{3})y_2}{(\sqrt{3} - \frac{1}{2})y_1 + (\frac{1}{2} + \sqrt{3})y_2} \\
 &= \sqrt{3} \cdot \frac{(6 - \sqrt{3})y_1 + (6 + \sqrt{3})y_2}{(\sqrt{3} - \frac{1}{2})y_1 + (\frac{1}{2} + \sqrt{3})y_2} \\
 &= 6
 \end{aligned}$$

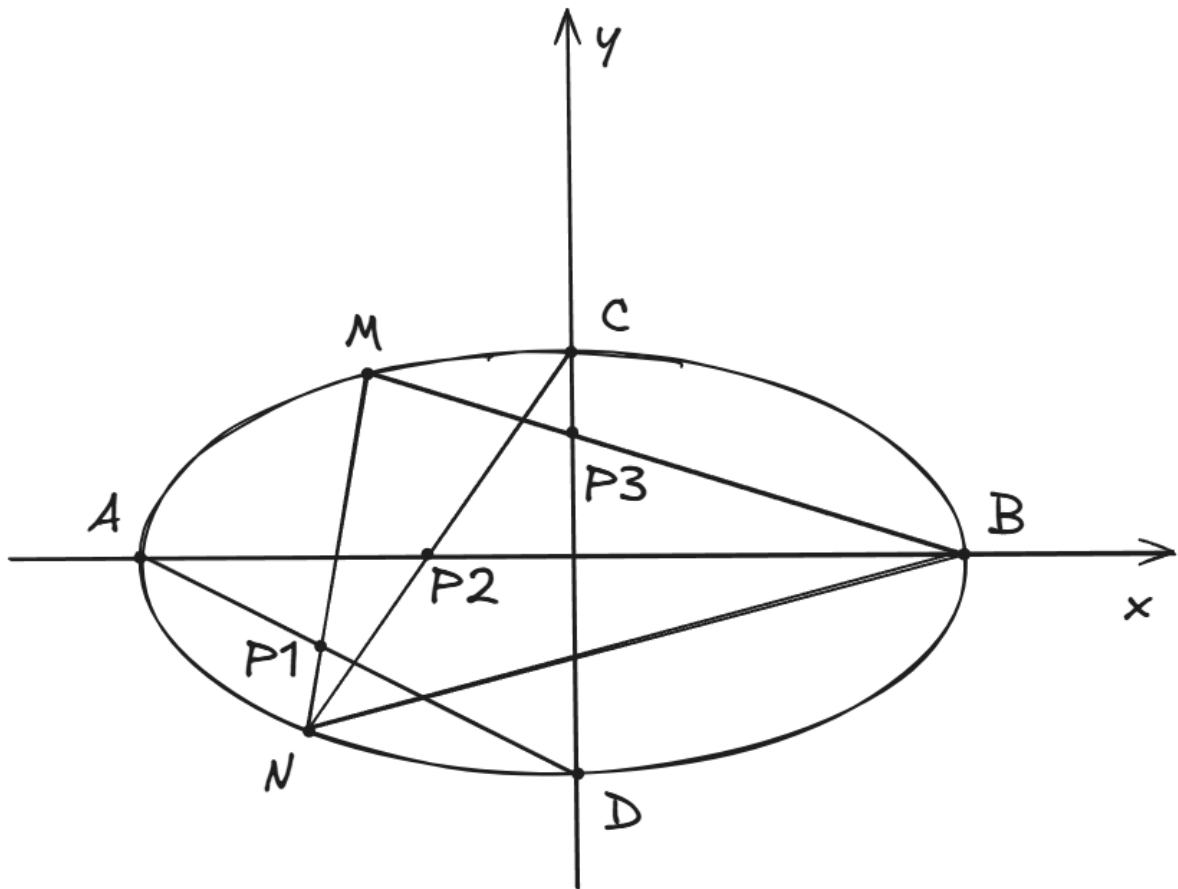
上面最后一步的  $= 6$  是如何得出的？并不是我在‘蒙混过关’，而是因为：

$$\begin{aligned}
 \frac{6 - \sqrt{3}}{\sqrt{3} - \frac{1}{2}} &= \frac{6 + \sqrt{3}}{\frac{1}{2} + \sqrt{3}} = 2\sqrt{3} \\
 \frac{(6 - \sqrt{3})y_1 + (6 + \sqrt{3})y_2}{(\sqrt{3} - \frac{1}{2})y_1 + (\frac{1}{2} + \sqrt{3})y_2} &= 2\sqrt{3} \cdot \frac{(\sqrt{3} - \frac{1}{2})y_1 + (\frac{1}{2} + \sqrt{3})y_2}{(\sqrt{3} - \frac{1}{2})y_1 + (\frac{1}{2} + \sqrt{3})y_2} = 2\sqrt{3}
 \end{aligned}$$

这就是非对称韦达定理，一个特别的技巧。

### 题3

已知椭圆  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$  的左、右顶点分别为  $A, B$ ，上、下顶点分别为  $C, D$ 。 $M(-1, \frac{3}{2})$  是椭圆上一点， $N$  是椭圆上位于  $x$  轴下方的任意一点。设直线  $AD, MN$  交于  $P_1$ ，直线  $AB, CN$  交于  $P_2$ ，直线  $BM, CD$  交于  $P_3$ ，证明： $P_1, P_2, P_3$  三点共线。



**解析：**

这道题目看上去有点吓人，点和线很多。其实和一般的题目相比，只是计算量稍微大了一点而已。

本题的背景，是著名的**帕斯卡定理**。



圆锥曲线(包括直线和圆)的内接六边形, 其三组对边的三个交点共线。

看上面的椭圆, 刚好有六个点  $A, M, C, B, D, N$ , 可以构成椭圆的一个内接六边形。而  $P_1, P_2, P_3$  正是这个六边形的三组对边的三个交点, 根据帕斯卡定理, 它们三点共线。

好了, 介绍完本题的背景, 下面我们来循规蹈矩地证明:

proof:

显然  $A(-2, 0), B(2, 0), C(0, \sqrt{3}), D(0, -\sqrt{3})$ 。另外还已知  $M(-1, \frac{3}{2})$ 。

本题的点、线关系貌似很复杂, 其实很简单, 因为唯一在“动”的元素, 只有  $N$  点, 其它五个点的坐标都是已知的, 所以, 我们只需要设出  $N$  点坐标为  $(m, n)$ , 其中  $n < 0$ 。

下面来求三个交点  $P_1, P_2, P_3$ 。

直线  $AD: y = \frac{\sqrt{3}}{2}x + \sqrt{3}$

直线  $MN: y = \frac{2n-3}{2m+2}(x+1) + \frac{3}{2}$ 。这里有个细节, 直线  $MN$  是可以垂直  $x$  轴的, 这个情况我们需要单独讨论。留到最后再写。(有一种避免分类讨论的方法, 就是把  $MN$  的方程写成  $x = my + t$  的形式, 因为它能表达直线垂直  $x$  轴的情况, 不过要注意, 如果你这样写, 那么其他直线的方程也要反设成  $x = my + t$  的形式)。

现在联立上面两条直线, 就可以求出  $P_1$  的坐标:

$$\begin{cases} x_{P_1} = \frac{\frac{2n-3}{2m+2} + \frac{3}{2} - \sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{2n-3}{2m+2}} \\ y_{P_1} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\frac{2n-3}{2m+2} + \frac{3}{2} - \sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{2n-3}{2m+2}} + \sqrt{3} \end{cases}$$

上面的坐标还没有化简。这两个式子长得非常非常丑陋, 即使化简了也好看不到哪里去。我们先把剩下两个点算出来。

直线  $CN: y = \frac{n-\sqrt{3}}{m}x + \sqrt{3}$ 。这里也有个细节,  $CN$  也是可以垂直于  $x$  轴的, 但是这个时候  $P_1, P_2, P_3$  显然都在  $y$  轴上, 所以三点共线成立。

直线  $AB$  就是  $x$  轴, 所以  $P_2$  就是  $CN$  和  $x$  轴的交点。

$$\begin{cases} x_{P_2} = \frac{\sqrt{3}m}{\sqrt{3}-n} \\ y_{P_2} = 0 \end{cases}$$

直线  $BM: y = \frac{n}{m-1}(x-2)$

直线  $CD$  就是  $y$  轴, 所以  $P_3$  就是  $BM$  和  $y$  轴的交点。

$$\begin{cases} x_{P_3} = 0 \\ y_{P_3} = \frac{2n}{1-m} \end{cases}$$

至此,  $P_1, P_2, P_3$  三点的坐标都已求出。下面要证明它们三点共线, 也就是证明  $P_1P_2$  的斜率等于  $P_2P_3$  的斜率 (或者  $P_1P_2$  的斜率等于  $P_1P_3$  的斜率之类的, 只不过  $P_2P_3$  的斜率明显最好算)。

$P_1P_2$  的斜率为:

$$\begin{aligned}
k_{P_1P_2} &= \frac{y_{P_2} - y_{P_1}}{x_{P_2} - x_{P_1}} \\
&= \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\frac{2n-3}{2m+2} + \frac{3}{2} - \sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{2n-3}{2m+2}} + \sqrt{3}}{\frac{\frac{2n-3}{2m+2} + \frac{3}{2} - \sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{2n-3}{2m+2}} - \frac{\sqrt{3}m}{\sqrt{3}-n}} \\
&=
\end{aligned}$$

看到上面这一坨，你肯定没有任何化简它的兴趣。我们不妨先算出比较简单的  $P_2P_3$  的斜率，因为我们知道这两个斜率肯定相等（除非题目让你证明的结论本身是错的，或者你算错了——这个时候我们可以尝试“蒙混过关”。看下面的操作：

$P_2P_3$  的斜率为：

$$\begin{aligned}
k_{P_2P_3} &= \frac{y_{P_3} - y_{P_2}}{x_{P_3} - x_{P_2}} \\
&= \frac{\frac{2n}{1-m}}{\frac{\sqrt{3}m}{n-\sqrt{3}}} \\
&= \frac{2n(n-\sqrt{3})}{\sqrt{3}m(1-m)}
\end{aligned}$$

好了，我们知道上面两个斜率肯定相等（如果没算错的话）。假如考试的时候你没有时间、或者不想算第一个斜率，那么直接在答题卡上面写：

$$\begin{aligned}
k_{P_1P_2} &= \frac{y_{P_2} - y_{P_1}}{x_{P_2} - x_{P_1}} \\
&= \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\frac{2n-3}{2m+2} + \frac{3}{2} - \sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{2n-3}{2m+2}} + \sqrt{3}}{\frac{\frac{2n-3}{2m+2} + \frac{3}{2} - \sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{2n-3}{2m+2}} - \frac{\sqrt{3}m}{\sqrt{3}-n}} \\
&= \frac{2n(n-\sqrt{3})}{\sqrt{3}m(1-m)}
\end{aligned}$$

最好装模做样化简一下，放个烟雾弹

$$\begin{aligned}
k_{P_1 P_2} &= \frac{y_{P_2} - y_{P_1}}{x_{P_2} - x_{P_1}} \\
&= \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\frac{2n-3}{2m+2} + \frac{3}{2} - \sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{2n-3}{2m+2}} + \sqrt{3}}{\frac{\frac{2n-3}{2m+2} + \frac{3}{2} - \sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{2n-3}{2m+2}} - \frac{\sqrt{3}m}{\sqrt{3}-n}} \\
&= \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \left( \frac{2n-3}{2m+2} + \frac{3}{2} - \sqrt{3} \right) + \sqrt{3} \left( \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{2n-3}{2m+2} \right)}{\frac{\frac{2n-3}{2m+2} + \frac{3}{2} - \sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{2n-3}{2m+2}} - \frac{\sqrt{3}m}{\sqrt{3}-n}} \\
&= \frac{\sqrt{3}(4n-6+6m+6-4\sqrt{3}m-4\sqrt{3}) + 2\sqrt{3}(2\sqrt{3}m+2\sqrt{3}-4n+6)}{8n-12+12m+12-8\sqrt{3}m-8\sqrt{3}-\frac{2\sqrt{3}m}{\sqrt{3}-n}(2\sqrt{3}m+2\sqrt{3}-4n+6)} \\
&= \frac{6\sqrt{3}m-4\sqrt{3}n+12\sqrt{3}}{8n+12m-8\sqrt{3}m-8\sqrt{3}-\frac{2\sqrt{3}m}{\sqrt{3}-n}(2\sqrt{3}m+2\sqrt{3}-4n+6)} \\
&= (n-\sqrt{3}) \cdot \frac{6\sqrt{3}m-4\sqrt{3}n+12\sqrt{3}}{(n-\sqrt{3})(8n+12m-8\sqrt{3}m-8\sqrt{3})+(12m^2-8\sqrt{3}mn+12m+12\sqrt{3}m)} \\
&= (n-\sqrt{3}) \cdot \frac{6\sqrt{3}m-4\sqrt{3}n+12\sqrt{3}}{8n^2+(12-16\sqrt{3})mn-16\sqrt{3}n+36m+24+12m^2} \\
&= \frac{2n(n-\sqrt{3})}{\sqrt{3}m(1-m)}
\end{aligned}$$

很明显我算错了。

*Q.E.D.*