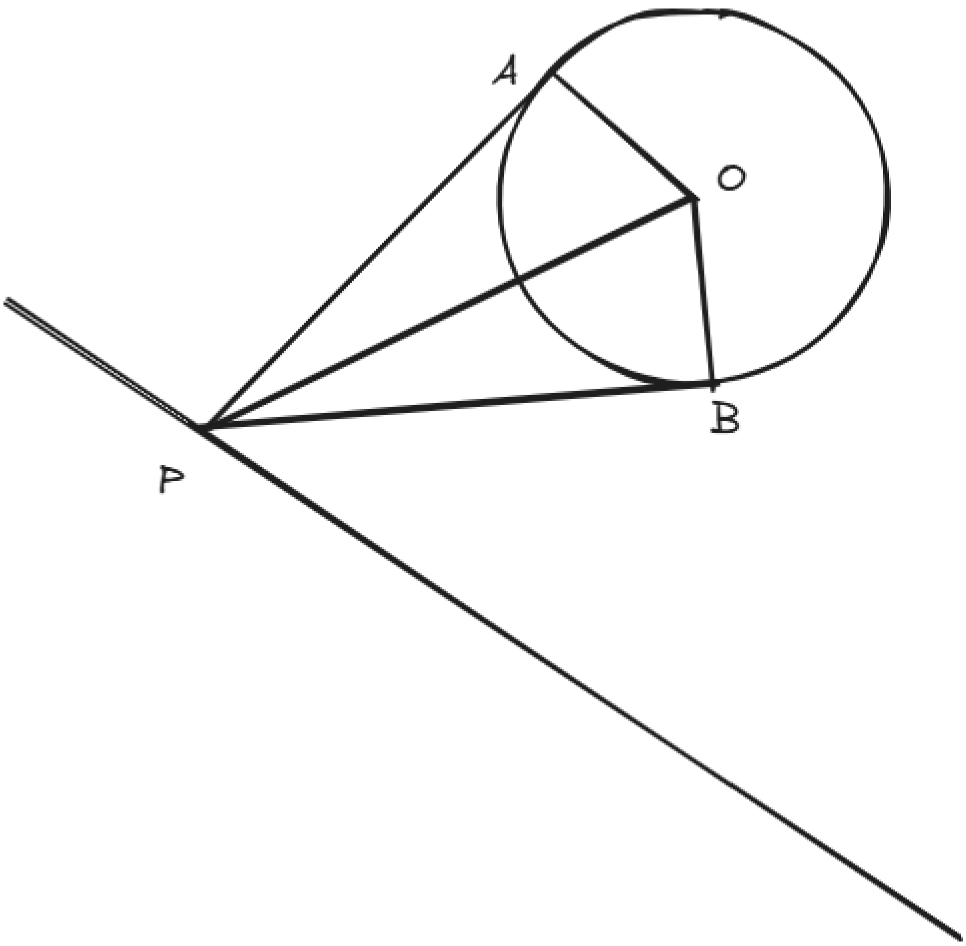
专题练习_直线与圆_1

题1

平面直角坐标系中，设直线$l: x+y=1$,圆$O(x-4)^2+(y-4)^2=1$，动点P在直线l上运动。过点P做圆O的两条切线，切点分别为A, B，则四边形$OAPB$的面积的最小值为_______

> 答案：$\sqrt{6}$

解析：



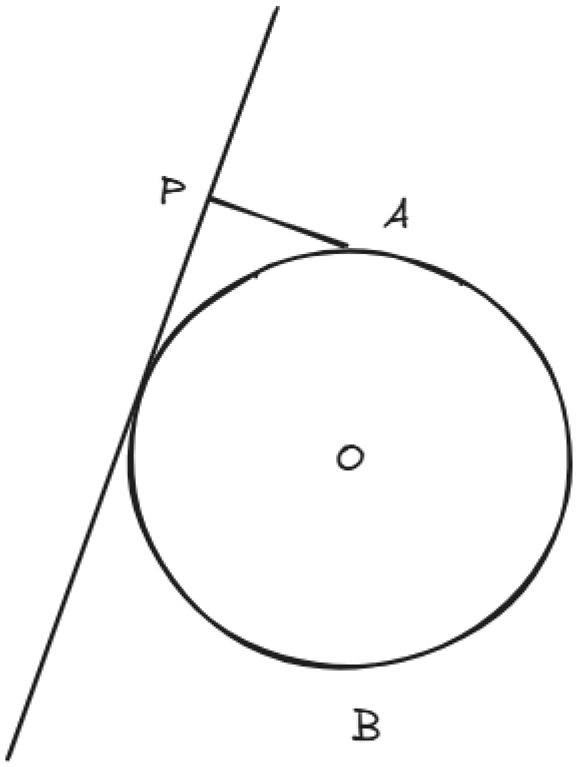
如上图所示，容易知道四边形$OAPB$的面积就是三角形OBP面积的两倍，也就是$S_{OAPB}=OB\times PB=\sqrt{OP^2-1}$。所以，只需要求$OP$的最小值，即点$O$到直线$l$的距离。

题2

平面直角坐标系中，设圆O：$x^2+y^2=1$，点$A(0,1)$，$B(0,-1)$。过A做圆O的一条切线的垂线，垂足为P。问$|PB|$的最大值为?

> 答案：$\frac{4\sqrt{3}}{3}$

解析：



如上图所示，我们的目的很明确：求出P点坐标。P是一个动点，它的坐标能用参变量来表示，或者能用轨迹方程来刻画，**这是动点问题亘古不变的解题原则。**

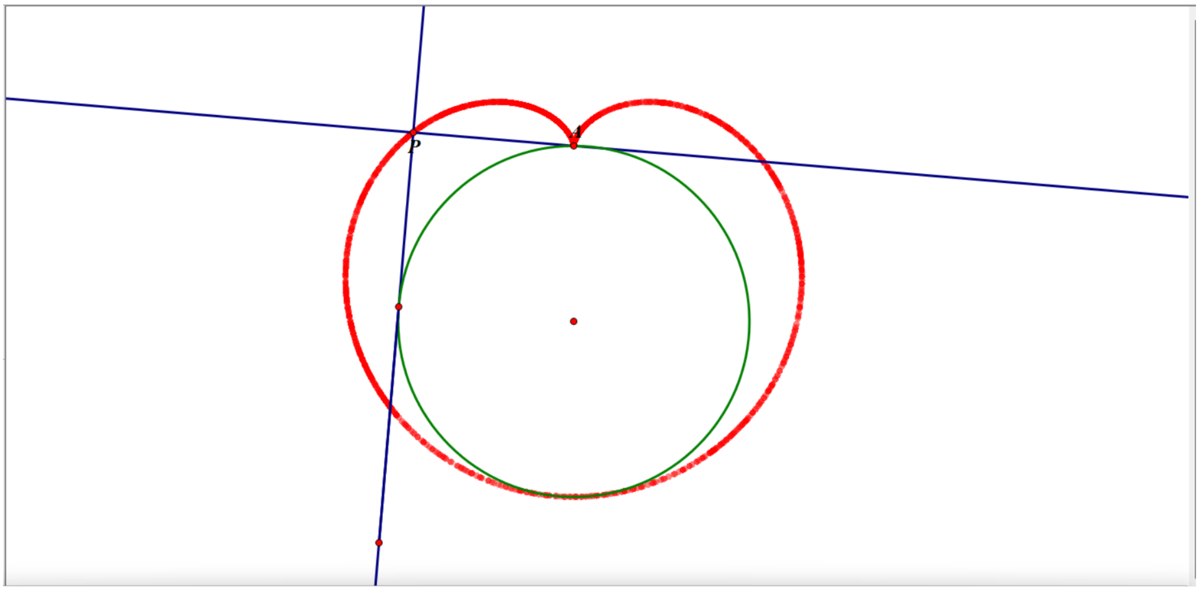
那么怎么求出P的坐标？它是切线和直线PA的交点，而直线PA是切线的垂线，如果知道切线方程，直线PA的方程就能求出(利用斜率相乘等于-1)，从而联立两条直线方程，就能求出交点P。

我们知道，单位圆的切线到圆心的距离为1，所以可以把切线方程设为$\cos\theta\cdot x+\sin\theta\cdot y=1$，或者写成$y=-\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\cdot x+\frac{1}{\sin\theta}$，这里的$\theta$是变量。从而直线$PA$的方程就是$y=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\cdot x+1$，联立它们，就能得到$P$ 的坐标：

$$P(\cos\theta-\sin\theta\cos\theta\quad,\quad\sin\theta+cos^2\theta)$$

最后就是求$|PB|$了，可以预见得到的结果是一个关于θ的函数，利用必修一学习的三角恒等变换可以求出其最小值，**过程略。**

顺便说下，本题中P点的轨迹是这样子的。这是一条**心形线** 。


A
P