集萃_3

题1

设三角形 ABC 的三边长分别为 a, b, c ，面积为 S 。若 $a^2+2b^2+3c^2=1$ ，则 S 的最大值为 ______

> 答案：$\frac{\sqrt{11}}{44}$

这道题是前几年江苏省盐城中学某次考试的一道题目，后来广为流传。有一个高中（似乎也是盐城中学）的一个高中生，在本题的基础上，证明了一个一般性的结论，它被称为“页岩不等式”（顺带一提，我在高中时看到过知乎上有人介绍过该学生和他的页岩不等式，不过现在已经找不到那个页面了）：

> 设三角形 ABC 的三边长分别为 a, b, c ，面积为 S 。则成立下面的不等式：
>
> $$x \cdot a^2 + y \cdot b^2 + z \cdot c^2 \geq 4\sqrt{xy+yz+zx} \cdot S$$
>
> 其中 x, y, z 是任意正实数。

不难发现，本题就是 $x=1, y=2, z=3$ 的情形，使用上面的页岩不等式，我们得到：

$$a^2+2b^2+3c^2 \geq 4\sqrt{11} \cdot S$$

所以 $S \leq \frac{\sqrt{11}}{44}$ 。

页岩不等式不仅仅给出了本题的推广，它还是三角形中的一些著名的不等式的推广。

例如曾经被作为 **IMO(International Mathematical Olympiad，国际数学奥林匹克竞赛)** 考题的**外森比克不等式**：

$$a^2+b^2+c^2 \geq 4\sqrt{3}\cdot S$$

不难发现，外森比克不等式就是页岩不等式中 $x=y=z=1$ 的情形。

下面我们对页岩不等式给出证明，同时也给出了本题的解法。

Proof：

$$\begin{aligned} x\cdot a^2+y\cdot b^2+z\cdot c^2 &= x\cdot(b^2+c^2-2bc\cos A)+y\cdot b^2+z\cdot c^2 \\ &= (x+y)\cdot b^2+(x+z)\cdot c^2-2xbc\cos A \\ &\geq 2\sqrt{(x+y)(x+z)}bc-2xbc\cos A \\ &= 2(\sqrt{(x+y)(x+z)}-x\cos A)\cdot bc \end{aligned}$$

要证明 $x\cdot a^2+y\cdot b^2+z\cdot c^2 \geq 4\sqrt{xy+yz+zx}\cdot S$ ，只要证明:

$$2(\sqrt{(x+y)(x+z)}-x\cos A)\cdot bc \geq 4\sqrt{xy+yz+zx}\cdot S$$

我们有 $S=\frac{1}{2}bc\sin A$ ，代入上式得:

$$\begin{aligned} 2(\sqrt{(x+y)(x+z)}-x\cos A)\cdot bc &\geq 2\sqrt{xy+yz+zx}\cdot bc\sin A \\ \sqrt{xy+yz+zx}\cdot\sin A+x\cos A &\leq \sqrt{(x+y)(x+z)} \\ \sqrt{xy+yz+zx+x^2}\cdot\sin(x+\varphi) &\leq \sqrt{(x+y)(x+z)} \\ \sqrt{(x+y)(x+z)}\cdot\sin(x+\varphi) &\leq \sqrt{(x+y)(x+z)} \\ \sin(x+\varphi) &\leq 1 \end{aligned}$$

上式显然成立，所以原不等式得证。

Q.E.D.

本题的正常方法就是上面页岩不等式的证明方法，能做出本题的话，上面的证明过程应该很容易读懂。

> 思考：根据我给出的证明过程，你能给出页岩不等式的取等条件吗?

题2

设 α 和 β 均为锐角，且 $\tan\alpha=\frac{1}{5},\tan\beta=\frac{1}{239}$,则 $12\alpha-3\beta=$ ______

> 答案：$\frac{3\pi}{4}$

这道题的背景是著名的 **马青公式** 。马青的全名是约翰·马青（John Machin），英国天文学教授。他在1706年发现了这个公式，并利用它计算到了100位的圆周率。

我们不妨先算出 $4\alpha-\beta$ 的值：（因为12倍的 α 的正切值显然非常非常难算）

$$\tan\left(4\alpha-\beta\right)=\frac{\tan(4\alpha)-\tan\beta}{1+\tan(4\alpha)\cdot\tan\beta}$$

其中的 $\tan(4\alpha)$ 是容易求出的，只需要用两次正切的二倍角公式就行了。

$$\begin{aligned}\tan(2\alpha)&=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}\\&=\frac{\frac{2}{5}}{\frac{24}{25}}\\&=\frac{5}{12}\\\tan(4\alpha)&=\frac{2\tan(2\alpha)}{1-\tan^2(2\alpha)}\\&=\frac{\frac{5}{6}}{\frac{119}{144}}\\&=\frac{120}{119}\end{aligned}$$

从而

$$
\begin{aligned}
\tan(4\alpha-\beta) &= \frac{\tan(4\alpha)-\tan\beta}{1+\tan(4\alpha)\cdot\tan\beta} \\
&= \frac{\frac{120}{119}-\frac{1}{239}}{1+\frac{120}{119}\cdot\frac{1}{239}} \\
&= \frac{28561}{28561} \\
&= 1
\end{aligned}
$$

所以 $4\alpha-\beta=\frac{\pi}{4}$ (注意 α,β 均为锐角，而且都小于 30° ，所以 $4\alpha-\beta$ 的范围是 $(-30^\circ,120^\circ)$)。

所以 $12\alpha-3\beta=\frac{3\pi}{4}$ 。

题3

从 $1,2,3,\cdots n$ 中随机选取两个不同的数，设 ξ 是其中最小的数 ，若每个数被选取的概率相等，求 $E(\xi)$

> 答案：$\frac{n+1}{6}$

本题看上去比较陌生，其实跟一般的概率题差不多。

我们考虑 $P(\xi=k)$ ：它说明两个数中有一个为 k ，另一个只能在 $k+1,k+2,\cdots n$ 中选取，因此有 $n-k$ 种情况。而总的情况数(也就是在 n 个数中任意选两个)是 $C_n^2=\frac{n(n-1)}{2}$ ，故

$$P(\xi=k)=\frac{2(n-k)}{n(n-1)}$$

从而

$$
\begin{aligned}
E(\xi) &= 1\cdot P(\xi=1)+2\cdot P(\xi=2)+3\cdot P(\xi=3)+\cdots n\cdot P(\xi=n) \\
&= \frac{2(n(1+2+3+\cdots n)-(1^2+2^2+3^2+\cdots n^2))}{n(n-1)} \\
&= \frac{2((\frac{n^2(n+1)}{2})-\frac{n(n+1)(2n+1)}{6})}{n(n-1)} \\
&= \frac{n+1}{6}
\end{aligned}
$$

> 思考：如果设 η 是选取的两个数中最大的数，则 $E(\eta)$ 等于多少?
>
> 如果把随机选取两个数改为随机选取 m 个数(其中 $m < n$)，结果又如何?

题4

给出4个命题：

1. $\varnothing \in \{\varnothing\}$
2. $\varnothing \subseteq \{\varnothing\}$
3. $\varnothing \in \{\{\varnothing\}\}$
4. $\varnothing \subseteq \{\{\varnothing\}\}$

其中正确的有哪些?

> 答案：1、2、4

考验对空集和$\in, \subseteq$ 的理解。

题5

掷骰子问题在概率论发展的早期占有显著地位，用母函数法可以给予统一处理。对于问题“掷 n 颗骰子，求所得点数之和为 m 的概率”，可以用下面的方法解决：

记点数之和为 η，则 η 的母函数为

$$\mathrm{H}(s) = [\frac{1}{6}(s + s^2 + s^3 + s^4 + s^5 + s^6)]^n$$

所求的概率 $P(\eta = m)$ 即为 $\mathrm{H}(s)$ 展开式中 s^m 的系数。

那么，掷 5 颗骰子，所得点数之和为 15 的概率为 _______

> 答案：

表面上是概率问题，实则多项式展开问题。

题6

已知数列 $\{a_n\}$ 共有 9 项，$a_1 = a_9 = 1$ ，且对每个 $i \in \{1, 2, 3, \cdots 8\}$ ，都有 $\frac{a_{i+1}}{a_i} \in \{1, 2, -\frac{1}{2}\}$ ，问这样的数列 $\{a_n\}$ 有几种?

> 答案：491

根据题意，数列 $\{a_n\}$ 的前一位乘以 $1, 2, -\frac{1}{2}$ 中的一个数就得到后一位。从 a_1 到 a_9 要乘以 8 次，不妨设想成 8 个格子，在这些格子中填入 $1, 2, -\frac{1}{2}$ ，要保证所有格子中的数的乘积为 1 ，说明填入的 2 和 $-\frac{1}{2}$ 的数目要相等，而且 $-\frac{1}{2}$ 的数目必须是偶数(从而 2 的数目也是偶数)。确定了 1 ,2,$-\frac{1}{2}$ 各自要填入的数目之后，剩下的就是考虑填入的顺序了。

1. 填入八个 1 ，只有一种情况。
2. 填入四个 1 ，两个 2 ，两个 $-\frac{1}{2}$ ，有 $C_8^4 \cdot C_4^2 = 420$ 种情况。
3. 填入四个 2 ，四个 $-\frac{1}{2}$ ，有 $C_8^4 = 70$ 种情况。

所以一共有 491 种不同的数列 $\{a_n\}$ 。

题7