专题练习_圆锥曲线_3

> *本次专题练习是针对双曲线而写的*
>
> *椭圆和双曲线尽管在图像上差别很大，但是它们的性质是对称的。椭圆中成立的结论，一般在双曲线中也成立。因此，下面的题目中，我会倾向于选择那些与双曲线特有的性质相关的题目，涵盖了**等轴双曲线**、**焦点三角形的内切圆**、**双曲线的渐近线**这三个元素。*

题一

已知等轴双曲线 Π 的左顶点为 P ，AB 是双曲线右支的一条弦，过 P 作 AB 的垂线，与 Π 交于 Q 。

H2 证明：Q 是 $\triangle PAB$ 的垂心。

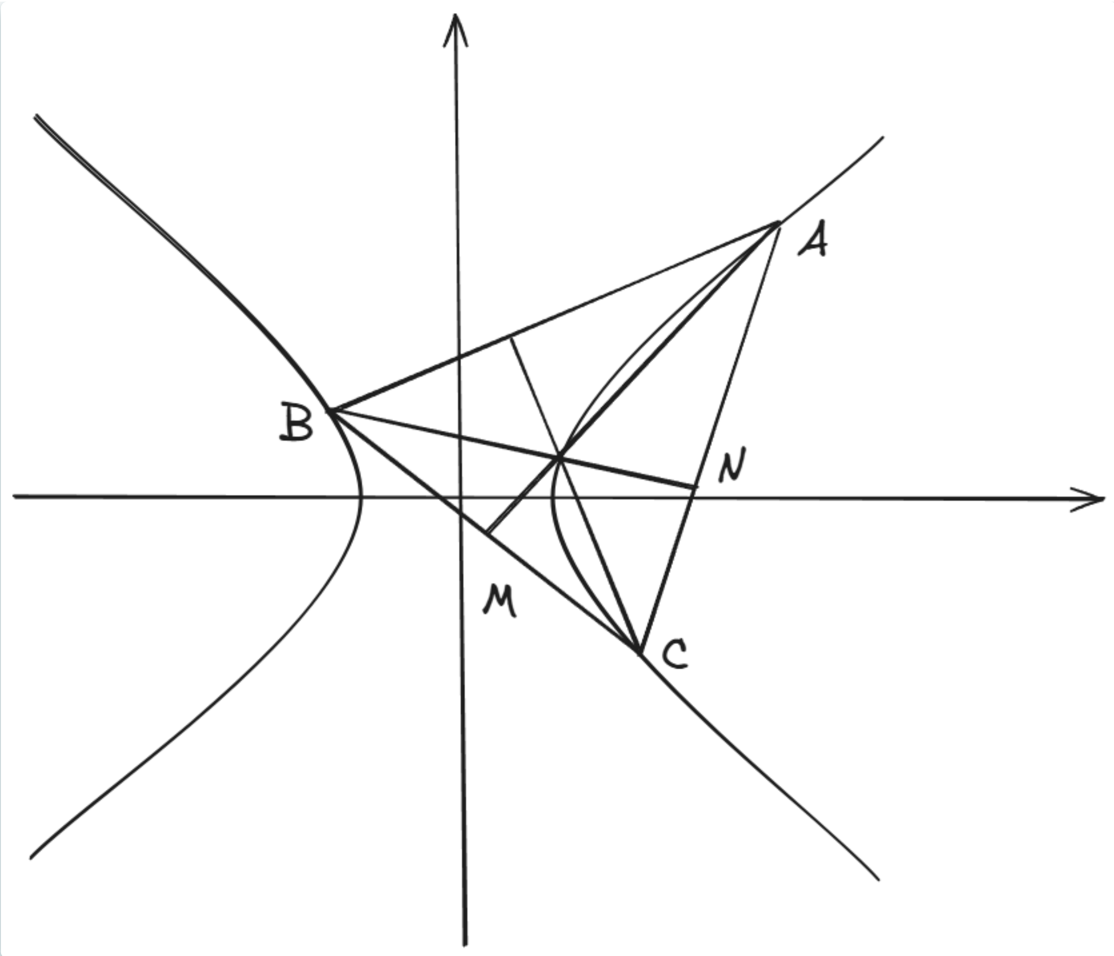
注：

- *等轴双曲线指的是长轴和短轴长度相等的双曲线。*
- Π *是希腊字母* π *的大写形式。除了用作取名，它还是**求积符号**：*$\Pi_{i=1}^{n}a_i = a_1a_2a_3\ldots a_n$ 。

这道题目来源于下面这个美妙的定理，我作了简化，之前是直接把原定理作为题目，然而我做了之后发现难度太大。下面是之前写的解析，后面没有算完，但基本思路是一样的。

A,B,C 是等轴双曲线 Π 上的三点，证明：$\triangle ABC$ 的垂心也在 Π 上。

解析：



如上图所示，不妨设双曲线 Π 的方程为 $x^2-y^2=a^2(a>0)$ 。

我们要证明这个三角形的垂心位于 Π 上，所以需要求出两条垂线的交点坐标，并证明这个交点坐标满足双曲线的方程 $x^2-y^2=a^2$ 。

之前说过，椭圆和双曲线的题目一般用设线法。本题的三角形有三条边，那么我们应该设出哪一条边的直线方程呢？答案是**随便**。因为三条边的地位是等价的。不妨设 AB 的方程为 $y=kx+m$ ，点 A,B,C 的坐标分别为 $(x_1,y_1),(x_2,y_2),(x_3,y_3)$ 。注意，直线 AB 是可以垂直 x 轴的，当然也可以垂直 y 轴，因此无论如何，都要分类讨论一下，这一步留给读者。下面的解析，主要叙述的是一般性的情况，也就是 AB 不垂直于 x 轴时。

接下来，我们求出 A,B 到对边的垂线 AM,BN ，那么两条垂线的交点就是垂心。但是在此之前，需要先把直线 AB 和双曲线联立，求出韦达定理的两个式子。（不止一次地强调过，不管题目会不会做，这一步的两分是必须要拿到的）

$$
\begin{aligned}
x^2-(kx+m)^2&=a^2\\
(1-k^2)x^2-2kmx-m^2-a^2&=0
\end{aligned}
$$

于是根据韦达定理，我们有

$$
\begin{cases}
x_1+x_2=\dfrac{2km}{1-k^2}\\
x_1x_2=\dfrac{-m^2-a^2}{1-k^2}
\end{cases}
$$

好了两分到手，~~可以做下一题~~子，然后我们首先求 AM ，为此，需要先求出直线 BC 的方程：

$$
BC:y=\frac{y_2-y_3}{x_2-x_3}(x-x_2)+y_2
$$

先别急着求 AM ，这里有个疑点：直线 BC 也有可能垂直于 x 轴！当然它也可能垂直于 y 轴，所以这里又要分类讨论了……吗？其实不用，因为之前我们已经分类讨论过（虽然在这个解析里面没有写），当直线 AB 垂直于 x 轴的时候，题目的结论是成立的。现在你想一想，既然 AB 垂直于 x 轴的时候结论成立，那么 BC 垂直于 x 轴的时候结论是不是也一定成立？ AC 垂直于 x 轴的时候呢？这是当然的。**因为这三条边的地位是等价的。**所以这里就不需要分类讨论了。下面求 AM 。

$$AM: y=\frac{x_3-x_2}{y_2-y_3}(x-x_1)+y_1$$

好了，两条垂线求出了一条，还剩下一条 BN 。那么我们还需要把上面求 AM 的过程重复一遍吗？其实不需要，我们可以直接写出：

$$BN: y=\frac{x_3-x_1}{y_1-y_3}(x-x_2)+y_2$$

为什么？其实很简单，还是利用 AB,BC,CA 三条边地位等价这一事实。AM 是 $B(x_2,y_2)C(x_3,y_3)$ 边上的垂线，它经过 $A(x_1,y_1)$；BN 是 $A(x_1,y_1),C(x_3,y_3)$ 边上的垂线，它经过 $B(x_2,y_2)$ 。比较一下，我们只需要把 B 和 A 换个位置就行了，也就是把 AM 方程中的 x_2 换成 x_1 ，x_1 换成 x_2，y_2 换成 y_1，y_1 换成 y_2 ，就能得到直线 BN 的方程。如果是考试，答题卡上就写一个 **同理** ，然后直接把 BN 方程美美写出来。**同理**这个东西是各种数学证明的常客，在高中阶段，我们只在像本题这样有明显规律和对称性的情况下使用。

好了，下面求 AM 和 BN 的交点，也就是我们心心念念的垂心，不妨给它取个名字叫做 P 。P 是 `point`的首字母，常用来给点取名。

联立

$$\begin{cases} y=\dfrac{x_3-x_2}{y_2-y_3}(x-x_1)+y_1 \\ y=\dfrac{x_3-x_1}{y_1-y_3}(x-x_2)+y_2 \end{cases}$$

解得 P 点坐标为

$$\begin{cases} x_P=\dfrac{y_2-y_1+\frac{x_1(x_3-x_2)}{y_2-y_3}-\frac{x_2(x_3-x_1)}{y_1-y_3}}{\frac{x_3-x_2}{y_2-y_3}-\frac{x_3-x_1}{y_1-y_3}} \\ =\dfrac{(y_2-y_1)(y_2-y_3)(y_1-y_3)+x_1(x_3-x_2)(y_1-y_3)-x_2(x_3-x_1)(y_2-y_3)}{(x_3-x_2)(y_1-y_3)-(x_3-x_1)(y_2-y_3))} \\ =\dfrac{k(x_2-x_1)(kx_2+m-y_3)(kx_1+m-y_3)+x_1(x_3-x_2)(kx_1+m-y_3)-x_2(x_3-x_1)(kx_2}{(x_3-x_2)(kx_1+m-y_3)-(x_3-x_1)(kx_2+m-y_3)} \\ =\dfrac{k(x_2-x_1)[k^2x_1x_2+k(m-y_3)(x_1+x_2)+(m-y_3)^2]+k[(x_1-x_2)(x_3(x_1+x_2)-x_1x_2)]}{(kx_3+m-y_3)(x_1-x_2)} \\ =\dfrac{k(x_2-x_1)[k^2\cdot\frac{-m^2-a^2}{1-k^2}+k(m-y_3)\cdot\frac{2km}{1-k^2}+(m-y_3)^2]+k[(x_1-x_2)(x_3\cdot\frac{2km}{1-k^2}+\frac{m^2+a^2}{1-k^2})]}{(kx_3+m-y_3)(x_1-x_2)} \\ =\dfrac{k(x_2-x_1)[-k^2m^2-k^2a^2+2k^2m^2-2k^2my_3+(1-k^2)(m-y_3)^2]+k(x_1-x_2)(2kmx_3+}{(1-k^2)(kx_3+m-y_3)} \\ =\dfrac{[k^3m^2+k^3a^2-2k^3m^2+2k^3my_3+k^3m^2-2k^3my_3+k^3y_3^2-km^2+2kmy_3-ky_3^2+2k^2m}{(1-k^2)(kx_3+m-y_3)} \\ =\dfrac{[k^3(m^2+a^2-2m^2+2my_3+m^2-2my_3+y_3^2)+k^2(2mx_3-mx_3+x_3y_3)+k(-m^2+2m}{(1-k^2)(kx_3+m-y_3)} \\ =\dfrac{[(a^2+y_3^2)k^3+x_3(m+y_3)k^2+(2my_3-y_3^2+a^2)k+mx_3-x_3y_3]}{(1-k^2)(kx_3+m-y_3)} \\ = \end{cases}$$

上面的公式貌似只有在线浏览能看全，PDF版只能看到一部分，因为太长了。

计算量实在很大，连我都坚持不下去。

题2

H2