

集萃_3

题1

设三角形 ABC 的三边长分别为 a, b, c ，面积为 S 。若 $a^2 + 2b^2 + 3c^2 = 1$ ，则 S 的最大值为 _____

H2

答案： $\frac{\sqrt{11}}{44}$

这道题是前几年江苏省盐城中学某次考试的一道题目，后来广为流传。有一个高中（似乎也是盐城中学）的一个高中生，在本题的基础上，证明了一个一般性的结论，它被称为“页岩不等式”（顺带一提，我在高中时看到过知乎上有人介绍过该学生和他的页岩不等式，不过现在已经找不到那个页面了）：

设三角形 ABC 的三边长分别为 a, b, c ，面积为 S 。则成立下面的不等式：

$$x \cdot a^2 + y \cdot b^2 + z \cdot c^2 \geq 4\sqrt{xy + yz + zx} \cdot S$$

其中 x, y, z 是任意正实数。

不难发现，本题就是 $x = 1, y = 2, z = 3$ 的情形，使用上面的页岩不等式，我们得到：

$$a^2 + 2b^2 + 3c^2 \geq 4\sqrt{11} \cdot S$$

所以 $S \leq \frac{\sqrt{11}}{44}$ 。

页岩不等式不仅仅给出了本题的推广，它还是三角形中的一些著名的不等式的推广。

例如曾经被作为 IMO(International Mathematical Olympiad, 国际数学奥林匹克竞赛) 考题的外森比克不等式：

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq 4\sqrt{3} \cdot S$$

不难发现，外森比克不等式就是页岩不等式中 $x = y = z = 1$ 的情形。

下面我们对页岩不等式给出证明，同时也给出了本题的解法。

Proof:

$$\begin{aligned}x \cdot a^2 + y \cdot b^2 + z \cdot c^2 &= x \cdot (b^2 + c^2 - 2bc \cos A) + y \cdot b^2 + z \cdot c^2 \\&= (x + y) \cdot b^2 + (x + z) \cdot c^2 - 2xbc \cos A \\&\geq 2\sqrt{(x + y)(x + z)bc} - 2xbc \cos A \\&= 2(\sqrt{(x + y)(x + z)} - x \cos A) \cdot bc\end{aligned}$$

要证明 $x \cdot a^2 + y \cdot b^2 + z \cdot c^2 \geq 4\sqrt{xy + yz + zx} \cdot S$ ，只要证明：

$$2(\sqrt{(x + y)(x + z)} - x \cos A) \cdot bc \geq 4\sqrt{xy + yz + zx} \cdot S$$

我们有 $S = \frac{1}{2}bc \sin A$ ，代入上式得：

$$\begin{aligned}2(\sqrt{(x + y)(x + z)} - x \cos A) \cdot bc &\geq 2\sqrt{xy + yz + zx} \cdot bc \sin A \\ \sqrt{xy + yz + zx} \cdot \sin A + x \cos A &\leq \sqrt{(x + y)(x + z)} \\ \sqrt{xy + yz + zx + x^2} \cdot \sin(x + \varphi) &\leq \sqrt{(x + y)(x + z)} \\ \sqrt{(x + y)(x + z)} \cdot \sin(x + \varphi) &\leq \sqrt{(x + y)(x + z)} \\ \sin(x + \varphi) &\leq 1\end{aligned}$$

上式显然成立，所以原不等式得证。

Q.E.D.

本题的正常方法就是上面页岩不等式的证明方法，能做出本题的话，上面的证明过程应该很容易读懂。

思考：根据我给出的证明过程，你能给出页岩不等式的取等条件吗？

题2

设 α 和 β 均为锐角, 且 $\tan \alpha = \frac{1}{5}, \tan \beta = \frac{1}{239}$, 则 $12\alpha - 3\beta =$ _____

H2

答案: $\frac{3\pi}{4}$

这道题的背景是著名的 **马青公式**。马青的全名是约翰·马青 (John Machin), 英国天文学教授。他在1706年发现了这个公式, 并利用它计算到了100位的圆周率。

我们不妨先算出 $4\alpha - \beta$ 的值: (因为12倍的 α 的正切值显然非常非常难算)

$$\tan(4\alpha - \beta) = \frac{\tan(4\alpha) - \tan \beta}{1 + \tan(4\alpha) \cdot \tan \beta}$$

其中的 $\tan(4\alpha)$ 是容易求出的, 只需要用两次正切的二倍角公式就行了。

$$\begin{aligned}\tan(2\alpha) &= \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} \\ &= \frac{\frac{2}{5}}{\frac{24}{25}} \\ &= \frac{5}{12} \\ \tan(4\alpha) &= \frac{2 \tan(2\alpha)}{1 - \tan^2(2\alpha)} \\ &= \frac{\frac{5}{6}}{\frac{119}{144}} \\ &= \frac{120}{119}\end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned}
 \tan(4\alpha - \beta) &= \frac{\tan(4\alpha) - \tan \beta}{1 + \tan(4\alpha) \cdot \tan \beta} \\
 &= \frac{\frac{120}{119} - \frac{1}{239}}{1 + \frac{120}{119} \cdot \frac{1}{239}} \\
 &= \frac{28561}{28561} \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

所以 $4\alpha - \beta = \frac{\pi}{4}$ (注意 α, β 均为锐角, 而且都小于 30° , 所以 $4\alpha - \beta$ 的范围是 $(-30^\circ, 120^\circ)$)。

$$\text{所以 } 12\alpha - 3\beta = \frac{3\pi}{4} \text{。}$$

题3

从 $1, 2, 3, \dots, n$ 中随机选取两个不同的数, 设 ξ 是其中最小的数, 若每个数被选取的概率相等, 求 $E(\xi)$

H2

答案: $\frac{n+1}{6}$

本题看上去比较陌生, 其实跟一般的概率题差不多。

我们考虑 $P(\xi = k)$: 它说明两个数中有一个为 k , 另一个只能在 $k+1, k+2, \dots, n$ 中选取, 因此有 $n-k$ 种情况。而总的情况数(也就是在 n 个数中任意选两个)是 $C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}$, 故

$$P(\xi = k) = \frac{2(n-k)}{n(n-1)}$$

从而

$$\begin{aligned}
 E(\xi) &= 1 \cdot P(\xi = 1) + 2 \cdot P(\xi = 2) + 3 \cdot P(\xi = 3) + \cdots \cdot n \cdot P(\xi = n) \\
 &= \frac{2(n(1 + 2 + 3 + \cdots \cdot n) - (1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots \cdot n^2))}{n(n-1)} \\
 &= \frac{2((\frac{n^2(n+1)}{2}) - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6})}{n(n-1)} \\
 &= \frac{n+1}{6}
 \end{aligned}$$

思考：如果设 η 是选取的两个数中最大的数，则 $E(\eta)$ 等于多少？

如果把随机选取两个数改为随机选取 m 个数（其中 $m < n$ ），结果又如何？

题4

给出4个命题：

- H2
1. $\emptyset \in \{\emptyset\}$
 2. $\emptyset \subseteq \{\emptyset\}$
 3. $\emptyset \in \{\{\emptyset\}\}$
 4. $\emptyset \subseteq \{\{\emptyset\}\}$

其中正确的有哪些？

答案：1、2、4

考验对空集和 \in, \subseteq 的理解。

题5

掷骰子问题在概率论发展的早期占有显著地位，用母函数法可以给予统一处理。对于问题“掷 n 颗骰子，求所得点数之和为 m 的概率”，可以用下面的方法解决：

H2

记点数之和为 η ，则 η 的母函数为

$$H(s) = \left[\frac{1}{6}(s + s^2 + s^3 + s^4 + s^5 + s^6) \right]^n$$

所求的概率 $P(\eta = m)$ 即为 $H(s)$ 展开式中 s^m 的系数。

那么，掷 5 颗骰子，所得点数之和为 15 的概率为 _____

答案：

表面上是概率问题，实则多项式展开问题。

题6

已知数列 $\{a_n\}$ 共有 9 项， $a_1 = a_9 = 1$ ，且对每个 $i \in \{1, 2, 3, \dots, 8\}$ ，都有 $\frac{a_{i+1}}{a_i} \in \{1, 2, -\frac{1}{2}\}$ ，问这样的数列 $\{a_n\}$ 有几种？

H2

答案：211

我们把 a_2, a_3, \dots, a_8 看成 7 个格子，在这些格子中填入 $1, 2, -\frac{1}{2}$ ，要保证所有格子中的数的乘积为 1，说明填入的 2 和 $-\frac{1}{2}$ 的数目要相等，而且 $-\frac{1}{2}$ 的数目必须是偶数（从而 2 的数目也是偶数）。确定了 $1, 2, -\frac{1}{2}$ 各自要填入的数目之后，剩下的就是考虑填入的顺序了。

1. 填入七个 1，只有一种情况。

2. 填入三个 1，两个 2，两个 $-\frac{1}{2}$ ，有 $C_7^3 \cdot C_4^2 = 210$ 种情况。

所以一共有 211 种不同的数列 $\{a_n\}$ 。

题7

H2