专题练习_圆锥曲线_1

题1

椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a,b>0)$ 的一个焦点到右顶点 $(a,0)$ 的距离为 $3c$ （ c 是半焦距），则该椭圆的离心率为___

H2

> **答案：** $\frac{1}{4}$ 或 $\frac{1}{3}$ 或 $\frac{1}{2}$

解析：

本题容易因为粗心而漏解。注意题干中没有指明 a,b 间的大小关系，所以要分两种情况讨论。

- 当 $a>b$ 时，椭圆的两个焦点为 $(-c,0),(c,0)$ 。这两个焦点到右顶点 $(a,0)$ 的距离是不一样的，所以这里能得出两种解。
- 当 $a<b$ 时，椭圆的两个焦点为 $(0,c),(0,-c)$ 。这两个焦点到右顶点 $(a,0)$ 的距离相等，所以这里只有一种解。

题2

过点 $M(1,1)$ 作斜率为 $-\frac{1}{2}$ 的直线与椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 相交于 A,B 两点，若 M 是线段 AB 的中点，则椭圆 C 的离心率等于 ______

H2

> **答案：** $\pm\frac{1}{2}$

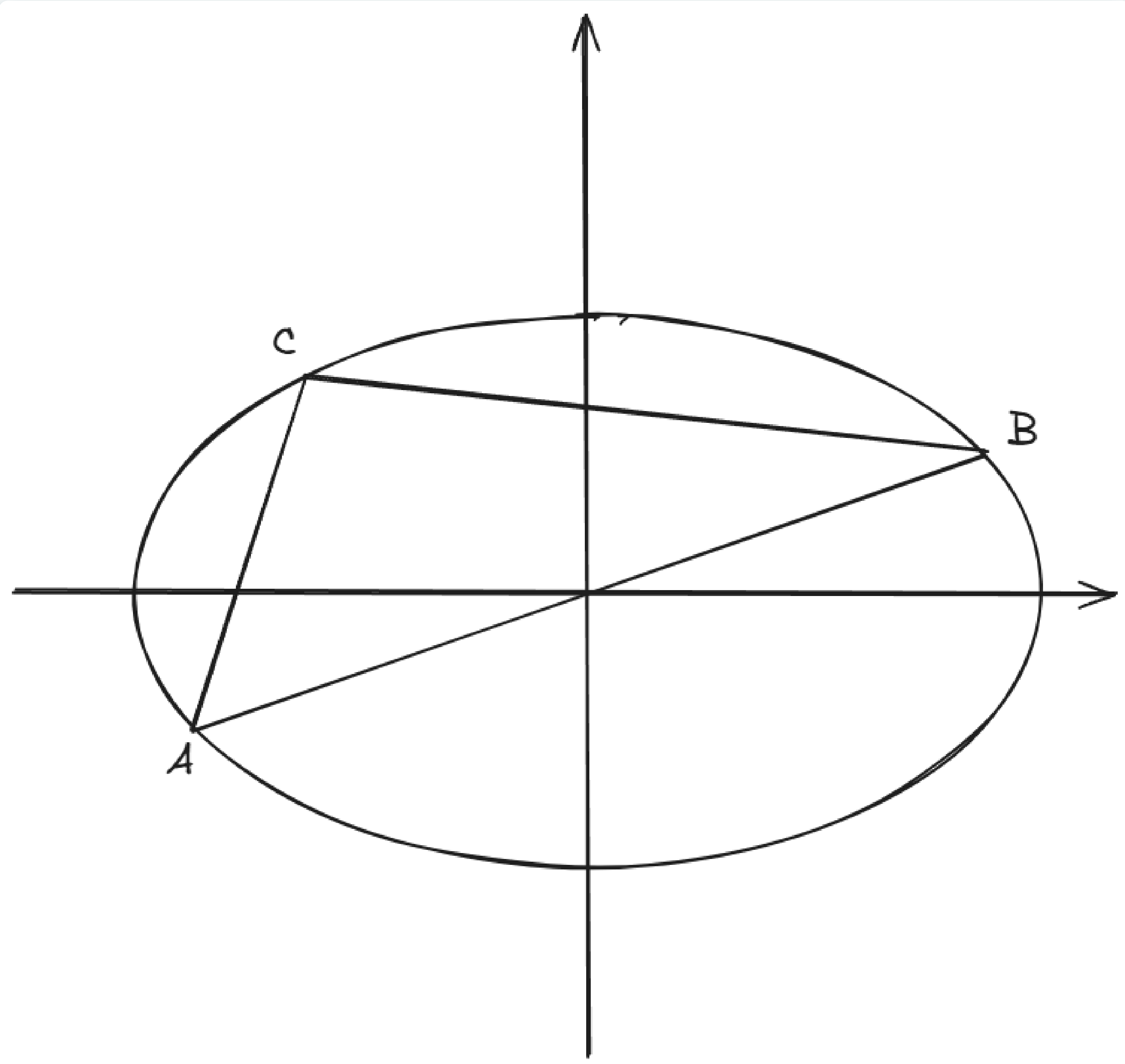
解析：

常规方法是使用点差法。这里介绍两个二级结论：

在椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 中，AB 是一条直径（即 AB 经过椭圆中心），C 是椭圆上任意一点，则直线 AC 的斜率 k_1 和直线 BC 的斜率 k_2 满足关系：

$$k_1k_2=e^2-1$$

其中 e 是椭圆的离心率。



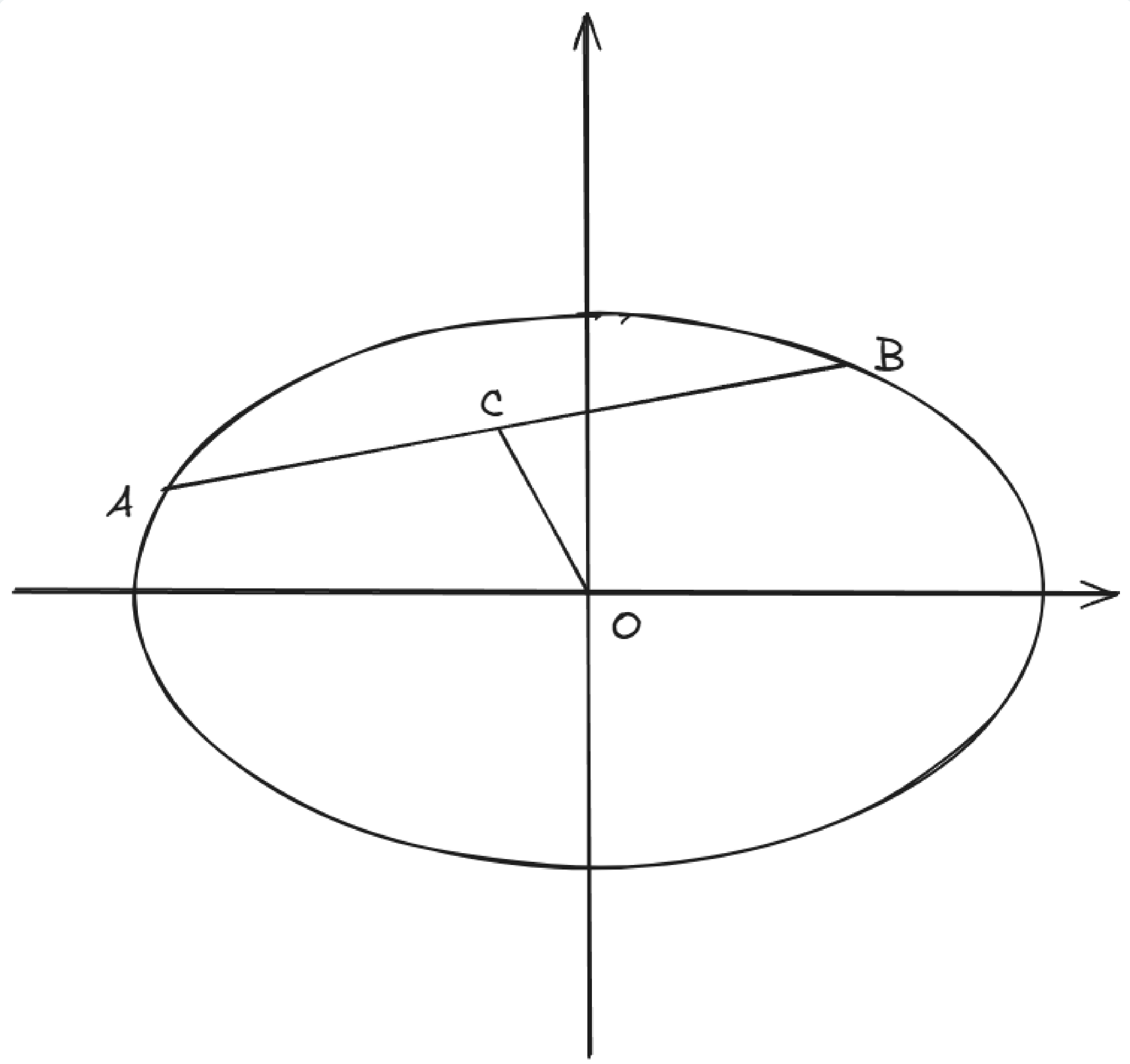
这是一个重要的结论，揭示了椭圆的本征。我们知道，如果上面不是椭圆，而是一个圆，那么无论何时都有 $k_1k_2=-1$ 。这是因为圆的离心率是 $e=0$ ，所以 $k_1k_2=0^2-1=-1$ 。而椭圆可以看做圆的推广，圆可以看做椭圆的特殊情形，所以 $k_1k_2=e^2-1$ 这个结论就是“直径所对的圆周角是九十度”这一性质在椭圆中的推广。

圆的性质有很多。除了上面这个，还有没有其他的性质可以推广到椭圆中呢？

下面再列举几个，大家想想它们对应圆中的哪些性质？

在椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 中， O 是椭圆中心， AB 是一条弦， C 是 AB 中点，则直线 AB 的斜率 k_1 和直线 OC 的斜率 k_2 满足关系：

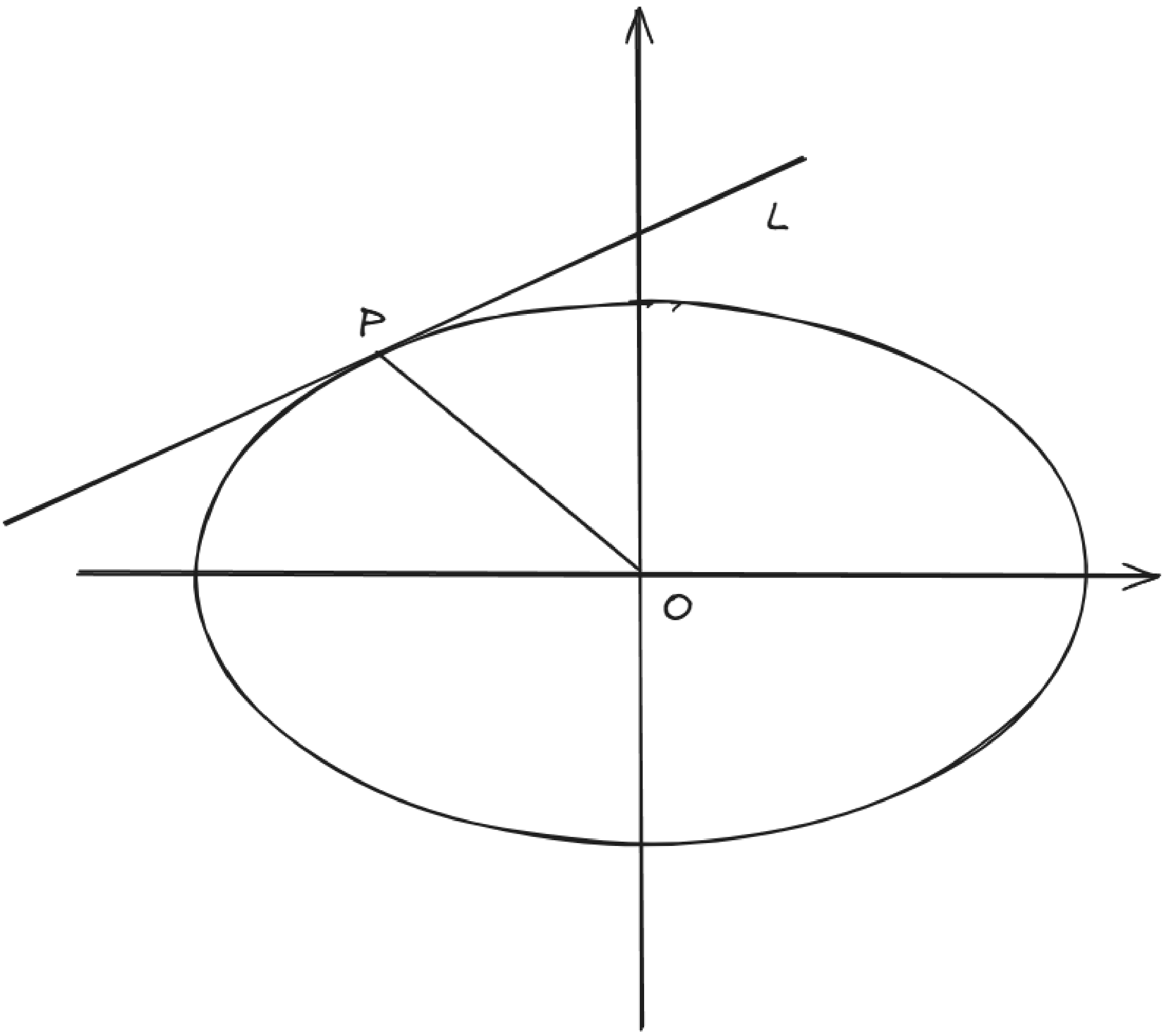
$$k_1k_2=e^2-1$$



不难看出，上面这个性质对应的是圆中的垂径定理。因此上面这个公式也叫做椭圆的垂径定理。

在椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 中， O 是椭圆中心， 直线 l 是椭圆的一条切线，切点为 P ，则直线 OP 的斜率 k_1 和直线 l 的斜率 k_2 满足关系：

$$k_1k_2=e^2-1$$



不难看出，上面这个性质对应的是“圆心与切点的连线垂直于切线”。

这三个结论，公式的形式完全一样。请牢牢记住，它们在很多题目中都有应用，属于是圆锥曲线的众多二级结论中最为基础的两个。

回到本题，我们可以利用上面的第二个结论，就有 $-\frac{1}{2}\times 1=e^2-1$ ，则 $e=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 。

题3

椭圆 $C:\frac{x^2}{2}+y^2=1$ 的一条切线 l 分别于 x 轴和 y 轴交于 A,B 两点， O 为坐标原点，则三角形 OAB 的面积的最小值为 ______

H2

答案： $\sqrt{2}$

解析：

在这里要补充一个知识，就是所谓的“极点、极线”。很多圆锥曲线题的命题背景都是极点极线。

极点、极线是射影几何中的概念。

> 坐标平面内有椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a,b>0)$ ，点 $P(x_0,y_0)$ 和直线 $l:\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}=1$ ，则称 P 是 l 对 C 的极点，l 是 P 对 C 的极线。

关于极点、极线，存在数不胜数的性质和定理。你遇到的任何一道圆锥曲线大题都很有可能就是以这些性质和定理为背景的。我们列举几个常见的：

> 1. 当极点位于圆锥曲线上，极线就是极点处的切线。
> 2. 当极点位于圆锥曲线外，极线就是极点的切点弦。
> 3. 当极点位于圆锥曲线内，极线就位于圆锥曲线外。

这三条性质，按照题目中的出现频率来分，是1>2>3。第1条性质经常使用，它直接给出了圆锥曲线(不仅仅是椭圆和圆)的切线方程。

例如在本题中，我们设椭圆上一点 (x_0,y_0) ，则这一点处的切线就是 $\frac{x_0x}{2}+y_0y=1$ ，它与两条坐标轴的交点分别为 $(\frac{2}{x_0},0),(0,\frac{1}{y_0})$ ，从而所求的三角形面积就是

$$S=\frac{1}{x_0y_0}$$

由于 (x_0,y_0) 在椭圆上(也就是极点在椭圆上)，所以它的坐标满足椭圆方程：

$$\frac{x_0^2}{2}+y_0^2=1\geq\sqrt{2}x_0y_0$$

推出 $x_0y_0\leq\frac{\sqrt{2}}{2}$ ，因此 $S\geq\sqrt{2}$ 。

题4

设 F_1,F_2 分别为椭圆 $\frac{x^2}{3}+y^2=1$ 的左、右焦点，点 A,B 在椭圆上，若 $\overrightarrow{F_1A}=5\overrightarrow{F_2B}$ ，则点 A 的坐标是 ______

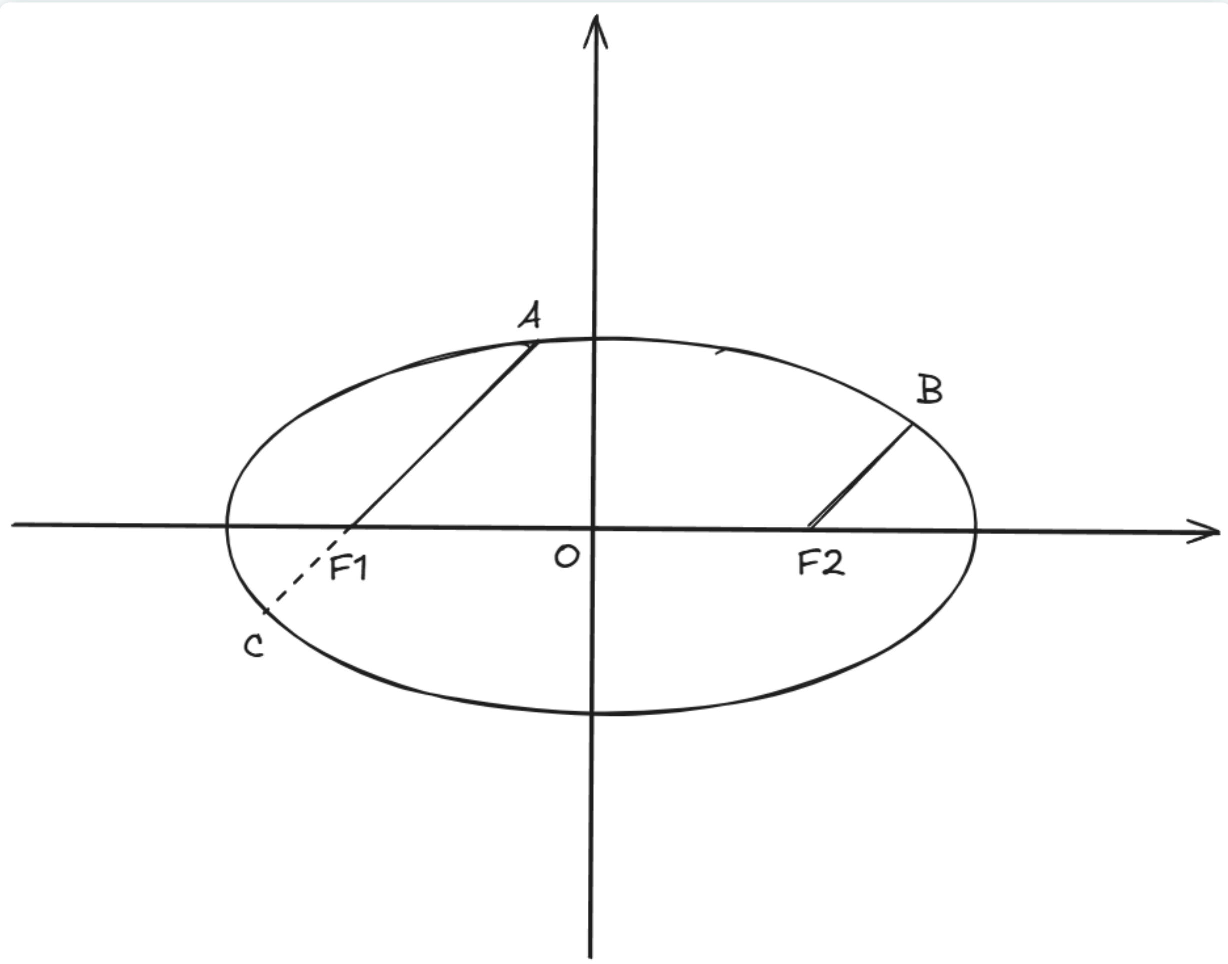
答案 $(0,\pm1)$

解析：

这是浙江卷的一道经典之作。这道题有四种方法：

▶ 暴力法

首先画出本题的图像：



根据椭圆的对称性，我们可以把线段 F_2B 平移到 F_1C 的位置。然后设 $A(x_1,y_1),C(x_2,y_2)$ 。不难得到点 F_1 的坐标为 $(-\sqrt{2},0)$ 。

设直线 AC 的方程为 $y=k(x+\sqrt{2})$ 。联立直线和椭圆：

$$\begin{cases} y=k(x+\sqrt{2}) \\ \dfrac{x^2}{3}+y^2=1 \end{cases}$$

得到 $(1+3k^2)x^2+6\sqrt{2}k^2x+6k^2-3=0$ 。根据韦达定理就有 $x_1+x_2=-\frac{6\sqrt{2}k^2}{1+3k^2}$ ，$x_1x_2=\frac{6k^2-3}{1+3k^2}$ 。又由条件 $\overrightarrow{F_1A}=5\overrightarrow{F_2B}$ ，可得 $x_1+5x_2=-6\sqrt{2}$ ，$y_1+5y_2=0$ 。根据这些方程就可以求出 $x_1=0$ 。所以点 A 位于椭圆的上顶点或者下顶点，即 $(0,\pm1)$。

- **定比点差法**

大家对点差法不陌生，但是点差法只能处理二等分弦的问题，而本题是六等分弦，所以要对点差法改进一下。

$$\begin{cases} \dfrac{x_1^2}{3}+y_1^2=1 \qquad (1) \\ \dfrac{x_2^2}{3}+y_2^2=1 \qquad (2) \end{cases}$$

正常的点差法就是用(1)-(2)，得到

$$\frac{\frac{y_1+y_2}{2}}{\frac{x_1+x_2}{2}}\cdot\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=-\frac{1}{3}$$

上面左边式子的第一项也就是 AC 中点与原点连线的斜率，但是我们这个题目中， F_1 并不是 AC 中点，而是 AC 的六等分点，根据我们在平面向量中学过的定比分点公式，它的坐标应该是 $(\frac{x_1+5x_2}{6},\frac{y_1+5y_2}{6})$。怎么改进我们的点差法呢？这样做，我们把(2)式乘以 5 的平方 25 。好好体会下面的过程，你应该能理解这么做的理由。

$$\begin{cases} \dfrac{x_1^2}{3}+y_1^2=1 \qquad (3) \\ \dfrac{(5x_2)^2}{3}+(5y_2)^2=25 \qquad (4) \end{cases}$$

(3)-(4)，我们有：

$$\frac{(x_1-5x_2)(x_1+5x_2)}{3}+(y_1-5y_2)(y_1+5y_2)=-24$$

前面说过 F_1 的坐标是 $(\frac{x_1+5x_2}{6},\frac{y_1+5y_2}{6})$ ，而它作为左焦点，坐标是已知的，也就是 $(-c,0)$ ，即 $(-\sqrt{2},0)$ ，所以 $x_1+5x_2=-6\sqrt{2},y_1+5y_2=0$ ，代入上面的式子中，我们有：

$$x_1-5x_2=6\sqrt{2}$$

结合 $x_1+5x_2=-6\sqrt{2}$ 就可以求出 $x_1=0$ ，从而点 A 就是椭圆的上顶点或者下顶点，也就是 $(0,\pm 1)$ 。

这就是定比点差法，聪明的你想必已经领悟了其中奥妙。

- 焦半径公式法

首先要介绍什么是焦半径公式：

> 椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ，左、右焦点分别为 F_1,F_2 ，椭圆上一点 $A(x_0,y_0)$ ，则：
>
> $$|AF_1|=a+ex_1$$
> $$|AF_2|=a-ex_2$$

证明很简单，利用两点间的距离公式计算然后化简即可。这个焦半径公式说明了椭圆上的点到焦点的距离是非常容易计算出来的，只需要知道椭圆的长短轴以及点的横坐标即可。

回到本题，根据焦半径公式，有

$$|AF_1|=\sqrt{3}+\frac{\sqrt{6}}{3}x_1$$
$$|CF_1|=\sqrt{3}+\frac{\sqrt{6}}{3}x_2$$

由于 $|AF_1|=5|CF_1|$ ，所以 $\sqrt{3}+\frac{\sqrt{6}}{3}x_1=5\sqrt{3}+\frac{5\sqrt{6}}{3}x_2$ ，化简后得到 $x_1-5x_2=6\sqrt{2}$ ，是不是与前面定比点差法得到的结论是一样的？同样结合

$x_1+5x_2=-6\sqrt{2}$ 就求出了 $x_1=0$ 。

- 直线的参数方程

在我们人教版教材的“拓展阅读”中（忘了是选修一还是必修二），介绍了直线的参数方程。（下面我对参数方程的讲解不会很细致，如果没弄明白就去看教材）

参数方程这个名词应该是不陌生的，我们在“直线与圆”一章已经学习过圆 $x^2+y^2=r^2$ 的参数方程：

$$\begin{cases}x=r\sin\theta\\y=r\cos\theta\end{cases}$$

其中 r 和 θ 的含义你是否清楚？ r 就是圆的半径，是个定值； θ 就是圆上一点到圆心的连线与 x 轴正方向的夹角，是个变量。从圆的参数方程可以看出来，所谓的参数方程就是用一个变量去表示 x,y 两个变量（当然这么说是片面的，这只是针对平面曲线的参数方程）。

直线也有参数方程，而且形式上和圆的很像：

直线 $l:ax+by+c=0$ 的参数方程为：

$$\begin{cases}x=r\sin\theta+x_0\\y=r\cos\theta+y_0\end{cases}$$

其中，(x_0,y_0) 是直线上一点，记作 O' ， r 是直线上任意一点 P 到 O' 的距离，是变量； θ 是直线与 x 轴正方向的夹角，是常量。

(x_0,y_0) 是任意在直线上取定的，例如在本题中，我们可以取 (x_0,y_0) 为 $F_1(-\sqrt{2},0)$ 。于是直线 AC 的参数方程为：

$$\begin{cases}x=r\sin\theta-\sqrt{2}\\y=r\cos\theta\end{cases}$$

我们把上面这个式子代入椭圆方程中（相当于把直线和椭圆联立）：

$$\frac{(r\sin\theta-\sqrt{2})^2}{3}+(r\cos\theta)^2=1$$
$$(1+2\cos^2\theta)\cdot r^2-2\sqrt{2}\sin\theta\cdot r-1=0$$

就像正常的直线方程与椭圆联立一样，上面这个关于 r 的一元二次方程的两个根 r_1, r_2 正对应点 A 和 C 到点 F_1 的距离，从而 $r_1 = 5r_2$ 。又根据韦达定理，有 $r_1 + r_2 = \frac{2\sqrt{2}\sin\theta}{1+2\cos^2\theta}$ 和 $r_1 r_2 = -\frac{1}{1+2\cos^2\theta}$ ，可以解出 r_1, r_2, θ 。

上面三种方法中，定比点差法是专门用来解决这种所谓“定比分弦”的问题的，如果是二等分弦，就是用常规的点差法，如果不是，就要乘以比例的平方再相减（本题就是乘以 5 的平方）；焦半径法的适用范围更广一些（所以比较推荐这种方法）；直线参数方程法属于进阶内容，一般情况下了解即可。

一道题目有这么多不同的路线可以走，这就是一道好题。

题5

过椭圆 $C: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 的右焦点 F 的直线 l 与该椭圆交于两点 $P_i(x_i, y_i)(i = 1, 2)$ ，其中 $y_1 > y_2$ ，且 $\overrightarrow{P_1F} = 2\overrightarrow{FP_2}$ ，求直线 l 的方程以及 $|P_1P_2|$ 。

> **答案：** $l: y = -\frac{\sqrt{5}}{2}(x-1)$ ， $|P_1P_2| = \frac{\sqrt{5}}{2}$

这道题目和题4是一样的，自己试试吧！