集萃_1

题1

> *类型：组合数学*

定义：三维欧氏空间中的点称为整点，当且仅当x,y,z坐标都是整数，例如(1,1,2)，(-2,6,-2)。从空间中任取n个整点$P_1, P_2, P_3, ... P_n$，再从它们之中任取两个不同的点$P_i, P_j(i \neq j)$，P_i, P_j的中点**不会**是整点。问：n的最大值为______

> *答案：8*

解答：

如果两个整点的中点还是整点，说明x, y, z坐标的奇偶性相同（因为奇加奇得偶，偶加偶得偶，而偶数除以二一定是整 数）。x, y, z的奇偶性一共能组合出8种情况：(奇，奇，奇)，(奇，偶，奇)，(偶，奇，奇)，(奇，奇，偶)，(奇，偶，偶)，(偶，偶，奇)，(偶，奇，偶)，(偶，偶，偶)。那么$n > 8$时，也就是任取空间中至少9个整点时，其中必然存在两个整点的奇偶性相同，从而它们两个的中点也是整点。现在题目要求所有的中点都不能是整点，所以n最大为8(也就是取遍了所有奇偶性的组合)。

题2

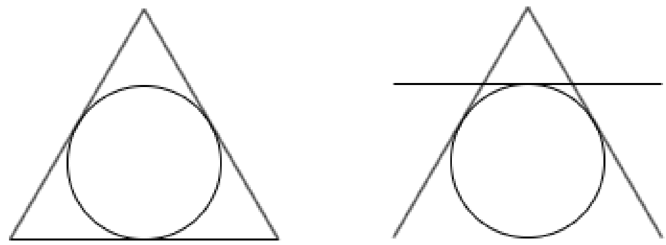
> *类型：直线与圆*

平面直角坐标系中有三条直线：$l_1: \cos\theta_1 \cdot x + \sin\theta_1 \cdot y = 1, l_2: \cos\theta_2 \cdot x + \sin\theta_2 \cdot y = 1, l_3: \cos\theta_3 \cdot x + \sin\theta_3 \cdot y = 1$，其中$\theta_1 \neq \theta_2 \neq \theta_3$。若$l_1, l_2, l_3$围成一个等边三角形，其面积为$S$，则$S$的取值集合为______

> *答案：*$\{\frac{\sqrt{3}}{3}, 3\sqrt{3}\}$

解答：

观察三条直线的结构，容易注意到它们到原点的距离都为1。所以，它们都是单位圆的切线。又因为围成了等边三角形，所以有两种情形：要么单位圆作为等边三角形的内切圆，要么单位圆作为等边三角形的**外切圆**(注意不是外接圆)。如下图所示：



题3

> *类型：古典概型*
>
> *考察：逻辑能力*

任取一户有两个孩子的家庭，已知其中一个是女孩，则另一个是女孩的概率为______

> *答案：$\frac{1}{2}$……还是$\frac{1}{3}$?*

本题是一道争议很大的题目，被称为两孩悖论。在著名的概率论科普读物《醉汉的脚步》中，作者认为本题的答案是$\frac{1}{3}$，同时他还得到了一个更加违反常识的结论：如果把条件“已知其中一个是女孩”改为“已知其中一个是女孩，名字叫佛罗里达”，则结果变成$\frac{1}{2}$。

我知道，第一次看到上面的答案时，你会感到惊讶。实际上，上面的答案虽然有一定的道理，但也并不完全正确。迄今为止，包括《醉汉的脚步》作者蒙洛迪诺在内的很多人都对上面的答案提出了质疑。

我们先来看看蒙洛迪诺在书中写提出的解法：

- 这是一个古典概型问题，考虑出生顺序，样本空间为{男，男}，{男，女}，{女，男}，{女，女}，现在已知有一个是女孩，那么{男，男}这种情况就不可能了，样本空间缩小为{女，女}，{男，女}，{女，男}，因此概率为$\frac{1}{3}$。
- 如果把条件改成“已知其中一个是女孩，名字叫佛罗里达”，我们可以用女F表示叫佛罗里达的女孩，女NF表示不叫佛罗里达的女孩，这样样本空间就变成{男，男}，{女F，男}，{男，女F}，{女NF，男}，{男，女NF}，{女F，女NF}，{女NF，女F}，现在已知有一个叫佛罗里达的女孩，那么样本空间缩小为{女F，男}，{男，女F}，{女F，女NF}，{女NF，女F}，因此概率为$\frac{1}{2}$。

上面的解答看起来天衣无缝，但得到的结果非常违反直觉。到底错在哪?

严格来说，本题的题干是模糊不清的，因而对题干的不同理解，会导出不同的答案。

如果你认为本题的答案是$\frac{1}{2}$,你应该是这么想的：这是一个古典概型问题，不考虑出生顺序，样本空间为{男，男}，{男，女}，{女，女}，现在已知有一个是女孩，那么{男，男}这种情况就不可能了，样本空间变成{女，女}，{男，女}，因此概率为$\frac{1}{2}$。

问题在于样本空间上面，究竟有没有先后顺序之分?

在本题中，这个争议是解决不了的，因为本题的条件：“已知其中一个是女孩”叙述模糊。