专题练习_圆锥曲线_3

> 本次专题练习是针对双曲线而写的
>
> 椭圆和双曲线尽管在图像上差别很大，但是它们的性质是对称的。椭圆中成立的结论，一般在双曲线中也成立。因此，下面的题目中，我会倾向于选择那些与双曲线特有的性质相关的题目，涵盖了**等轴双曲线**、**焦点三角形的内切圆**、**双曲线的渐近线**这三个元素。

题一

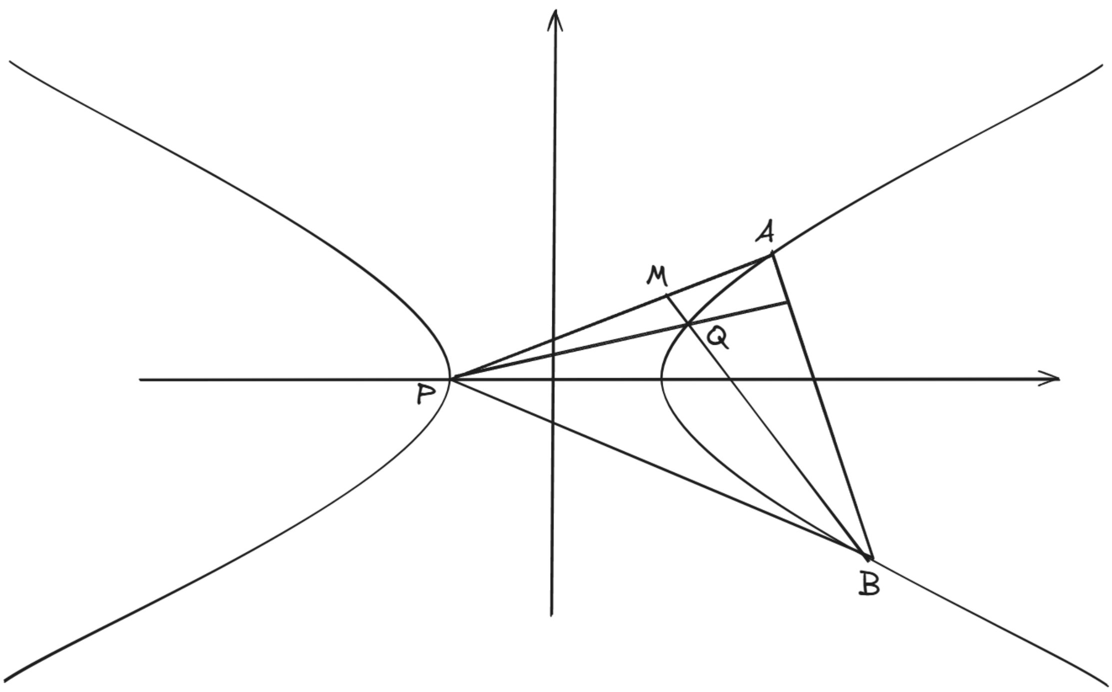
已知等轴双曲线 Π 的左顶点为 P ，AB 是双曲线右支的一条弦，过 P 作 AB 的垂线，与 Π 交于 Q 。

证明：Q 是 $\triangle PAB$ 的垂心。

注：

- 等轴双曲线指的是长轴和短轴长度相等的双曲线。
- Π 是希腊字母 π 的大写形式。除了用作取名，它还是**求积符号**：$\Pi_{i=1}^{n} a_i = a_1 a_2 a_3 \ldots a_n$ 。

解析：



不妨设双曲线 Π 的方程为 $x^2 - y^2 = a^2$ 。

如上图所示，我们要证明 Q 是垂心。既然现在 Q 已经位于一条垂线上了，那么我们只需要证明它位于另一条垂线上。例如，过 B 作垂线 BM ，我们去证明 BM 经过 Q 点就可以了，而要做到这件事，我们需要求出 Q 点坐标和 BM 的方程。

首先求 Q 点坐标，为此，需要求出 P 对 AB 的垂线，并与双曲线联立。而要求 AB 的垂线还需要 AB 的方程，这里我们使用设线法，直接设 AB 的方程为 $x = my + t$ ，注意这里反设方程，是为了避免讨论 AB 垂直于 x 轴的情况……我们之前是这么说的，然而在本题中这样做并没有效果，看下面：

P 点坐标为 $(-a,0)$ ，它关于 AB 的垂线为 $x=-\frac{1}{m}y-a$ ，注意，这里显然要求 $m\neq 0$ ，但是 m 是可以等于 0 的，此时 AB 垂直于 x 轴。所以，即使我们反设 AB 的方程，也不能避免分类讨论。当然这样的情况占少数，具体问题具体分析。这里我就不讨论垂直的情况了，直接看一般的情形，也就是 $m\neq 0$ 时。

联立垂线方程与双曲线方程 $x^2-y^2=a^2$，得到：

$$\begin{aligned}(\frac{1}{m^2}-1)y^2+\frac{2a}{m}y=0\\ y=-\frac{2am}{1-m^2}\text{ or }0\end{aligned}$$

其中， $y=0$ 这个解就是 P 点，从而 Q 点坐标为 $(\frac{a(1+m^2)}{1-m^2},-\frac{2am}{1-m^2})$ 。

接下来，我们只需要证明 $BQ\perp AP$ 即可，或者还有一种方法，就是先求出 AP 的垂线 BM ，然后证明 BM 经过 Q 点。两种方法其实差别不大，这里我们就采用前者。

设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$ 。我们之前设出 AB 方程后，还没有和双曲线联立得到韦达定理，这一步是设线法必不可少的，我们现在来写一下：

$$\begin{aligned}(m^2-1)y^2+2mty+t^2-a^2=0\\ y_1+y_2=\frac{2mt}{1-m^2},y_1y_2=\frac{t^2-a^2}{m^2-1}\end{aligned}$$

好了两分到手（其实这一步骤应该在设出 AB 方程后马上就写好的）。然后求 BQ 方程，也就是

$$y=\frac{y_2+\frac{2am}{1-m^2}}{x_2-\frac{a(1+m^2)}{1-m^2}}(x-x_2)+y_2$$

别看这么复杂，我们只需要它的斜率就够了。直线 AP 的斜率是 $\frac{y_1}{x_1+a}$,下面只需要证明这两个斜率之积为 -1 。

$$\begin{aligned}\frac{y_2+\frac{2am}{1-m^2}}{x_2-\frac{a(1+m^2)}{1-m^2}}\cdot\frac{y_1}{x_1+a}&=\frac{y_1[y_2(1-m^2)+2am]}{(x_1+a)[x_2(1-m^2)-a(1+m^2)]}\\ &=\frac{(1-m^2)y_1y_2+2amy_1}{(my_1+t+a)[(my_2+t)(1-m^2)-a(1+m^2)]}\\ &=\frac{(1-m^2)y_1y_2+2amy_1}{(my_1+t+a)[m(1-m^2)y_2+t(1-m^2)-a(1+m^2)]}\\ &=\frac{(1-m^2)y_1y_2+2amy_1}{m^2(1-m^2)y_1y_2+m[t(1-m^2)-a(1+m^2)]y_1+m(t+a)(1-m^2)y_2+(t+a)[t(1-m}\end{aligned}$$

上面这个式子中，出现了 y_1y_2 ，它能用韦达定理来替换。然而 y_1 和 y_2 的系数不相等，我们不能用 y_1+y_2 来替换。这里就是之前讲过的“非对称韦达定理”。处理方法是：用 y_1y_2 去表示 y_1+y_2 。

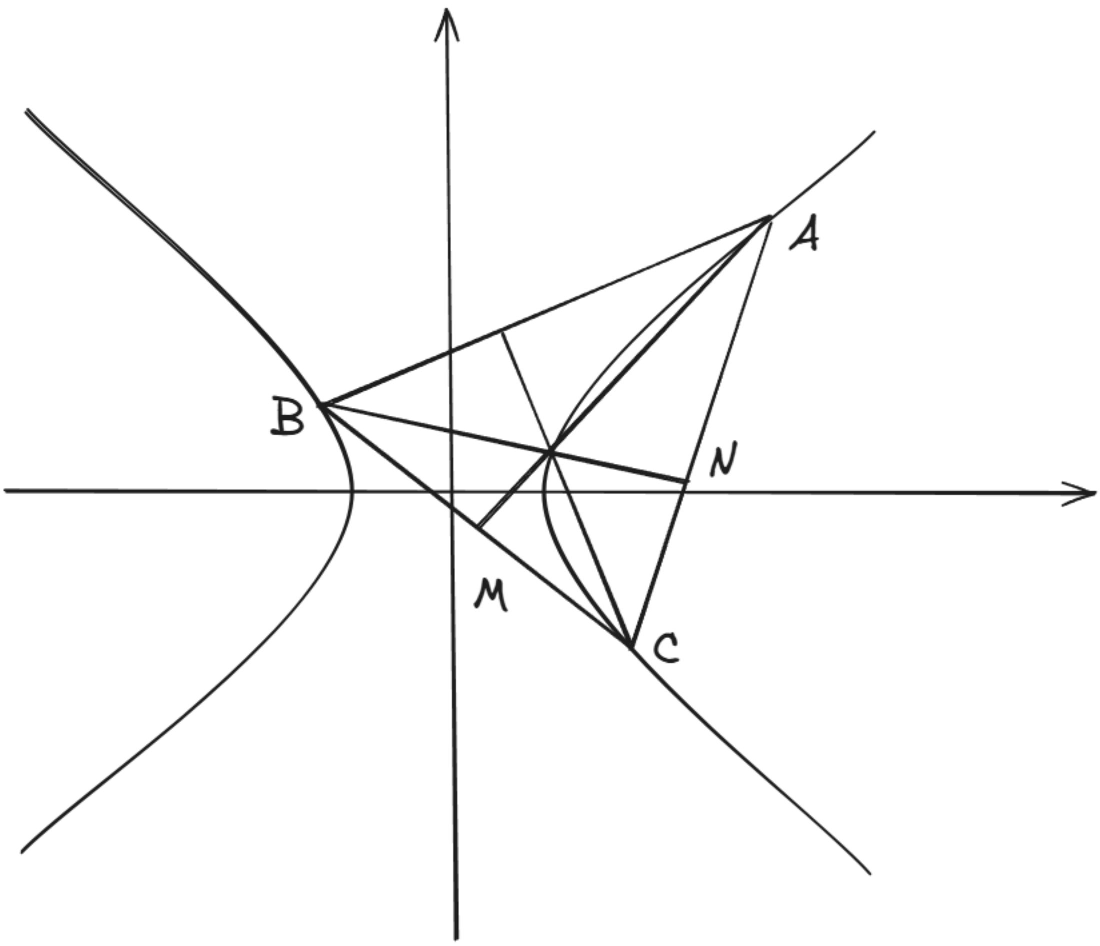
根据之前算出的韦达定理，可以得到 $y_1y_2=\frac{2mt}{a^2-t^2}(y_1+y_2)$ ，我们把这个式子代入上式，得到：

$$\begin{aligned}\frac{y_2+\frac{2am}{1-m^2}}{x_2-\frac{a(1+m^2)}{1-m^2}}\cdot\frac{y_1}{x_1+a}&=\frac{\frac{2mt(1-m^2)}{a^2-t^2}(y_1+y_2)+2amy_1}{\frac{2m^3t(1-m^2)}{a^2-t^2}(y_1+y_2)+m[t(1-m^2)-a(1+m^2)]y_1+m(t+a)(1-m^2)y_2+(t+a)[t(1-}\\ &=2m\cdot\frac{[t(1-m^2)+a(a^2-t^2)]y_1+t(1-}{2m^3t(1-m^2)(y_1+y_2)+m(a^2-t^2)[t(1-m^2)-a(1+m^2)]y_1+m(a^2-t^2)(t+a)}\\ &=2m\cdot\frac{[t(1-m^2)+a(a^2-t^2)]y_1+t}{(2m^3t(1-m^2)+m(a^2-t^2)[t(1-m^2)-a(1+m^2)])y_1+(2m^3t(1-m^2)+m(a^2-}\\ &=2m\cdot\end{aligned}$$

这道题目来源于下面这个美妙的定理，我作了简化，之前是直接把原定理作为题目，然而我做了之后发现难度太大。下面是之前写的解析，后面没有算完，但基本思路是一样的。

A,B,C 是等轴双曲线 Π 上的三点，证明：$\triangle ABC$ 的垂心也在 Π 上。

解析：



如上图所示，不妨设双曲线 Π 的方程为 $x^2-y^2=a^2(a>0)$ 。

我们要证明这个三角形的垂心位于 Π 上，所以需要求出两条垂线的交点坐标，并证明这个交点坐标满足双曲线的方程 $x^2-y^2=a^2$ 。

之前说过，椭圆和双曲线的题目一般用设线法。本题的三角形有三条边，那么我们应该设出哪一条边的直线方程呢？答案是**随便**。因为三条边的地位是等价的。不妨设 AB 的方程为 $y=kx+m$ ，点 A,B,C 的坐标分别为 $(x_1,y_1),(x_2,y_2),(x_3,y_3)$ 。注意，直线 AB 是可以垂直 x 轴的，当然也可以垂直 y 轴，因此无论如何，都要分类讨论一下，这一步留给读者。下面的解析，主要叙述的是一般性的情况，也就是 AB 不垂直于 x 轴时。

接下来，我们求出 A,B 到对边的垂线 AM,BN ，那么两条垂线的交点就是垂心。但是在此之前，需要先把直线 AB 和双曲线联立，求出韦达定理的两个式子。（不止一次地强调过，不管题目会不会做，这一步的两分是必须要拿到的）

$$
\begin{aligned}
x^2-(kx+m)^2&=a^2\\
(1-k^2)x^2-2kmx-m^2-a^2&=0
\end{aligned}
$$

于是根据韦达定理，我们有

$$
\begin{cases}
x_1+x_2=\dfrac{2km}{1-k^2}\\
x_1x_2=\dfrac{-m^2-a^2}{1-k^2}
\end{cases}
$$

好了两分到手，~~可以做下一题了~~,然后我们首先求 AM ，为此，需要先求出直线 BC 的方程：

$$
BC: y=\frac{y_2-y_3}{x_2-x_3}(x-x_2)+y_2
$$

先别急着求 AM ，这里有个疑点：直线 BC 也有可能垂直于 x 轴！当然它也可能垂直于 y 轴，所以这里又要分类讨论了......吗？其实不用，因为之前我们已经分类讨论过（虽然在这个解析里面没有写），当直线 AB 垂直于 x 轴的时候，题目的结论是成立的。现在你想一想，既然 AB 垂直于 x 轴的时候结论成立，那么 BC 垂直于 x 轴的时候结论是不是也一定成立？ AC 垂直于 x 轴的时候呢？这是当然的。**因为这三条边的地位是等价的。**所以这里就不需要分类

讨论了。下面求 AM 。

$$AM: y=\frac{x_3-x_2}{y_2-y_3}(x-x_1)+y_1$$

好了，两条垂线求出了一条，还剩下一条 BN 。那么我们还需要把上面求 AM 的过程重复一遍吗？其实不需要，我们可以直接写出：

$$BN: y=\frac{x_3-x_1}{y_1-y_3}(x-x_2)+y_2$$

为什么？其实很简单，还是利用 AB, BC, CA 三条边地位等价这一事实。AM 是 $B(x_2,y_2)C(x_3,y_3)$ 边上的垂线，它经过 $A(x_1,y_1)$；BN 是 $A(x_1,y_1),C(x_3,y_3)$ 边上的垂线，它经过 $B(x_2,y_2)$ 。比较一下，我们只需要把 B 和 A 换个位置就行了，也就是把 AM 方程中的 x_2 换成 x_1 ，x_1 换成 x_2，y_2 换成 y_1，y_1 换成 y_2 ，就能得到直线 BN 的方程。如果是考试，答题卡上就写一个 **同理** ，然后直接把 BN 方程美美写出来。**同理**这个东西是各种数学证明的常客，在高中阶段，我们只在像本题这样有明显规律和对称性的情况下使用。

好了，下面求 AM 和 BN 的交点，也就是我们心心念念的垂心，不妨给它取个名字叫做 P 。P 是 `point` 的首字母，常用来给点取名。

联立

$$\begin{cases} y=\frac{x_3-x_2}{y_2-y_3}(x-x_1)+y_1 \\ y=\frac{x_3-x_1}{y_1-y_3}(x-x_2)+y_2 \end{cases}$$

解得 P 点坐标为

$$\begin{cases} x_P=\frac{y_2-y_1+\frac{x_1(x_3-x_2)}{y_2-y_3}-\frac{x_2(x_3-x_1)}{y_1-y_3}}{\frac{x_3-x_2}{y_2-y_3}-\frac{x_3-x_1}{y_1-y_3}} \\ =\frac{(y_2-y_1)(y_2-y_3)(y_1-y_3)+x_1(x_3-x_2)(y_1-y_3)-x_2(x_3-x_1)(y_2-y_3)}{(x_3-x_2)(y_1-y_3)-(x_3-x_1)(y_2-y_3))} \\ =\frac{k(x_2-x_1)(kx_2+m-y_3)(kx_1+m-y_3)+x_1(x_3-x_2)(kx_1+m-y_3)-x_2(x_3-x_1)(kx_2+m-y_3)}{(x_3-x_2)(kx_1+m-y_3)-(x_3-x_1)(kx_2+m-y_3)} \\ =\frac{k(x_2-x_1)[k^2x_1x_2+k(m-y_3)(x_1+x_2)+(m-y_3)^2]+k[(x_1-x_2)(x_3(x_1+x_2)-x_1x_2)]+x_3(m-y_3)(x}{(kx_3+m-y_3)(x_1-x_2)} \\ =\frac{k(x_2-x_1)[k^2\cdot\frac{-m^2-a^2}{1-k^2}+k(m-y_3)\cdot\frac{2km}{1-k^2}+(m-y_3)^2]+k[(x_1-x_2)(x_3\cdot\frac{2km}{1-k^2}+\frac{m^2+a^2}{1-k^2})]+x_3(m-y_3)(x}{(kx_3+m-y_3)(x_1-x_2)} \\ =\frac{k(x_2-x_1)[-k^2m^2-k^2a^2+2k^2m^2-2k^2my_3+(1-k^2)(m-y_3)^2]+k(x_1-x_2)(2kmx_3+m^2+a^2)+x_3(}{(1-k^2)(kx_3+m-y_3)} \\ =\frac{[k^3m^2+k^3a^2-2k^3m^2+2k^3my_3+k^3m^2-2k^3my_3+k^3y_3^2-km^2+2kmy_3-ky_3^2+2k^2mx_3+km^2+ka^2}{(1-k^2)(kx_3+m-y_3)} \\ =\frac{[k^3(m^2+a^2-2m^2+2my_3+m^2-2my_3+y_3^2)+k^2(2mx_3-mx_3+x_3y_3)+k(-m^2+2my_3-y_3^2+m^2+}{(1-k^2)(kx_3+m-y_3)} \\ =\frac{[(a^2+y_3^2)k^3+x_3(m+y_3)k^2+(2my_3-y_3^2+a^2)k+mx_3-x_3y_3]}{(1-k^2)(kx_3+m-y_3)} \\ = \end{cases}$$

上面的公式貌似只有在线浏览能看全，PDF版只能看到一部分，因为太长了。

计算量实在很大，连我都坚持不下去。

题2