## 集萃 1

题1

类型:组合数学

定义:三维欧氏空间中的点称为整点,当且仅当x,y,z坐标都是整数,例如(1,1,2),(-2,6,-2)。从空间中任取n个整点 $P_1,P_2,P_3,\ldots P_n$ ,再从它们之中任取两个不同的点 $P_i,P_j$   $(i\neq j)$ , $P_i,P_j$  的中点**不会**是整点。问:n的最大值为

答案: 8

## 解答:

如果两个整点的中点还是整点,说明x,y,z坐标的奇偶性相同(因为奇加奇得偶,偶加偶得偶,而偶数除以二一定是整数)。x,y,z的奇偶性一共能组合出8种情况:(奇,奇,奇),(奇,偶,奇),(偶,奇,奇),(奇,奇,奇),(奇,偶),(奇,偶,偶),(偶,倚),(偶,奇,偶),(偶,偶,偶)。那么n>8时,也就是任取空间中至少9个整点时,其中必然存在两个整点的奇偶性相同,从而它们两个的中点也是整点。现在题目要求所有的中点都不能是整点,所以n最大为8(也就是取遍了所有奇偶性的组合)。

题2

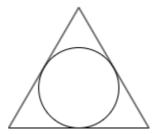
类型:直线与圆

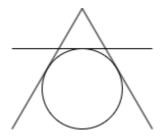
平 面 直 角 坐 标 系 中 有 三 条 直 线 :  $l_1:\cos\theta_1\cdot x+\sin\theta_1\cdot y=1, l_2:\cos\theta_2\cdot x+\sin\theta_2\cdot y=1, l_3:\cos\theta_3\cdot x+\sin\theta_3\cdot y=1$ , 其中 $\theta_1\neq\theta_2\neq\theta_3$ 。若 $l_1,l_2,l_3$  围成一个等边三角形,其面积为S,则S的取值集合为\_\_\_\_

答案:  $\{\frac{\sqrt{3}}{3}, 3\sqrt{3}\}$ 

## 解答:

观察三条直线的结构,容易注意到它们到原点的距离都为1。所以,它们都是单位圆的切线。又因为围成了等边三角形,所以有两种情形:要么单位圆作为等边三角形的内切圆,要么单位圆作为等边三角形的**外切圆**(注意不是外接圆)。如下图所示:





## 题3

类型: 古典概型

考察:逻辑能力

任取一户有两个孩子的家庭,已知其中一个是女孩,则另一个是女孩的概率为

答案:  $\frac{1}{2}$ .....还是 $\frac{1}{3}$ ?

本题是一道争议很大的题目,被称为两孩悖论。在著名的概率论科普读物《醉汉的脚步》中,作者认为本题的答案是 $\frac{1}{3}$ ,同时他还得到了一个更加违反常识的结论:如果把条件"已知其中一个是女孩"改为"已知其中一个是女孩,名字叫佛罗里达",则结果变成 $\frac{1}{3}$ 。

我知道,第一次看到上面的答案时,你会感到惊讶。实际上,上面的答案虽然有一定的道理,但也并不完全正确。迄今为止,包括《醉汉的脚步》作者蒙洛迪诺在内的很多人都对上面的答案提出了质疑。

我们先来看看蒙洛迪诺在书中写提出的解法:

- 这是一个古典概型问题,考虑出生顺序,样本空间为{男,男},{男,女},{女,男},{女,女},现在已知有一个是女孩,那么{男,男}这种情况就不可能了,样本空间缩小为{女,女},{男,女},{女,男},因此概率为⅓
- 如果把条件改成"已知其中一个是女孩,名字叫佛罗里达",我们可以用女F表示叫佛罗里达的女孩,女NF表示不叫佛罗里达的女孩,这样样本空间就变成{男,男},{女F,男},{男,女F},{女NF,男},{男,女NF},{女 F,女NF},{女NF,女F},现在已知有一个叫佛罗里达的女孩,那么样本空间缩小为{女F,男},{男,女F},{女F,女NF},{女NF,女F},因此概率为点。

上面的解答看起来天衣无缝,但得到的结果非常违反直觉。到底错在哪?

严格来说,本题的题干是模糊不清的,因而对题干的不同理解,会导出不同的答案。

如果你认为本题的答案是 $\frac{1}{2}$ ,你应该是这么想的:这是一个古典概型问题,不考虑出生顺序,样本空间为{男,男},{男,女},{女,女},现在已知有一个是女孩,那么{男,男}这种情况就不可能了,样本空间变成{女,女},{男,女},因此概率为 $\frac{1}{2}$ 。

问题在于样本空间上面,究竟有没有先后顺序之分?

在本题中,这个争议是解决不了的,因为本题的条件:"已知其中一个是女孩"叙述模糊。