

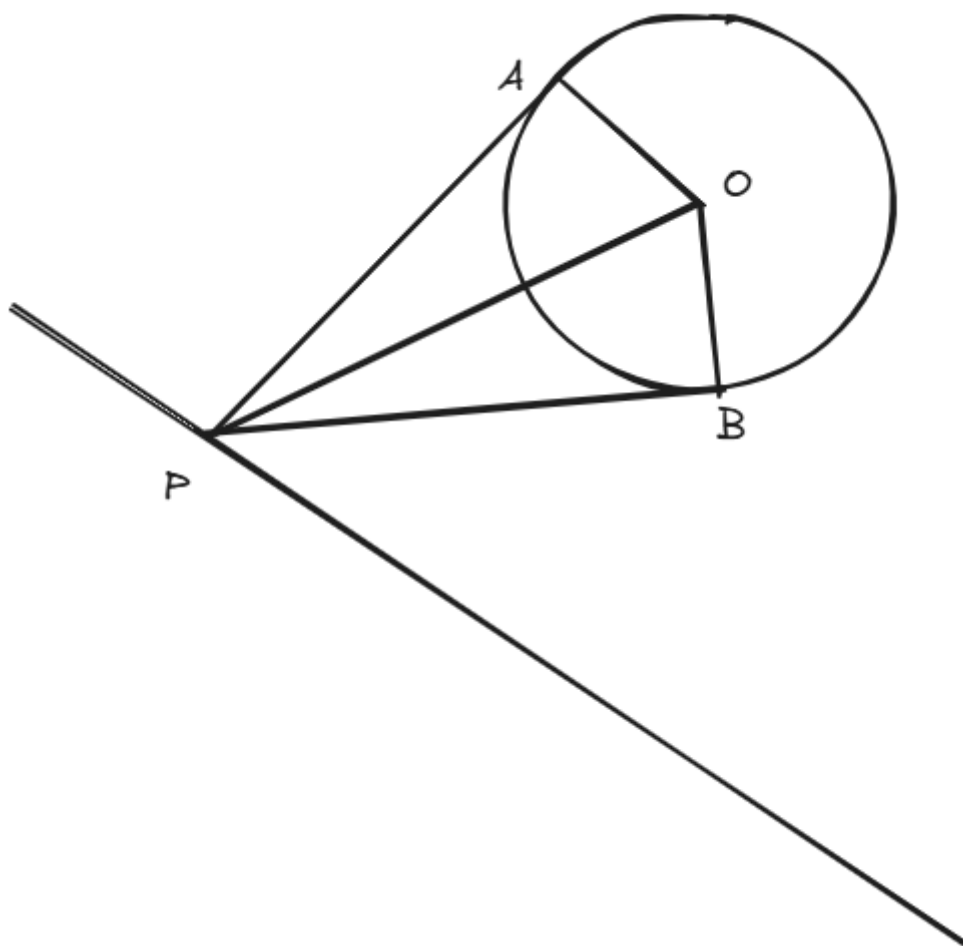
专题练习_直线与圆_1

题1

平面直角坐标系中, 设直线 $l: x + y = 1$, 圆 $O(x - 4)^2 + (y - 4)^2 = 1$, 动点 P 在直线 l 上运动。过点 P 做圆 O 的两条切线, 切点分别为 A, B , 则四边形 $OAPB$ 的面积的最小值为_____

答案: $\sqrt{6}$

解析:



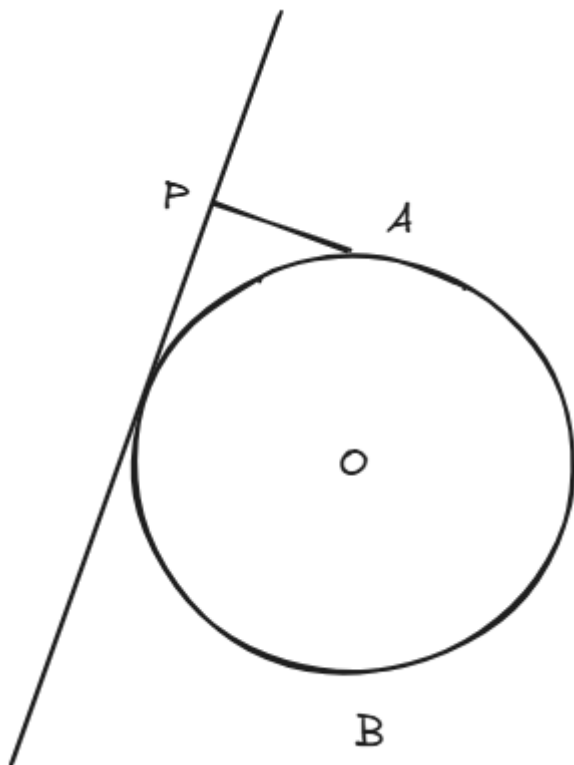
如上图所示, 容易知道四边形 $OAPB$ 的面积就是三角形 OBP 面积的两倍, 也就是 $S_{OAPB} = OB \times PB = \sqrt{OP^2 - 1}$ 。所以, 只要求 OP 的最小值, 即点 O 到直线 l 的距离。

题2

平面直角坐标系中, 设圆 $O: x^2 + y^2 = 1$, 点 $A(0, 1)$, $B(0, -1)$ 。过 A 做圆 O 的一条切线的垂线, 垂足为 P 。问 $|PB|$ 的最大值为?

答案: $\frac{4\sqrt{3}}{3}$

解析:



如上图所示，我们的目的很明确：求出 P 点坐标。 P 是一个动点，它的坐标能用参变量来表示，或者能用轨迹方程来刻画，**这是动点问题亘古不变的解题原则。**

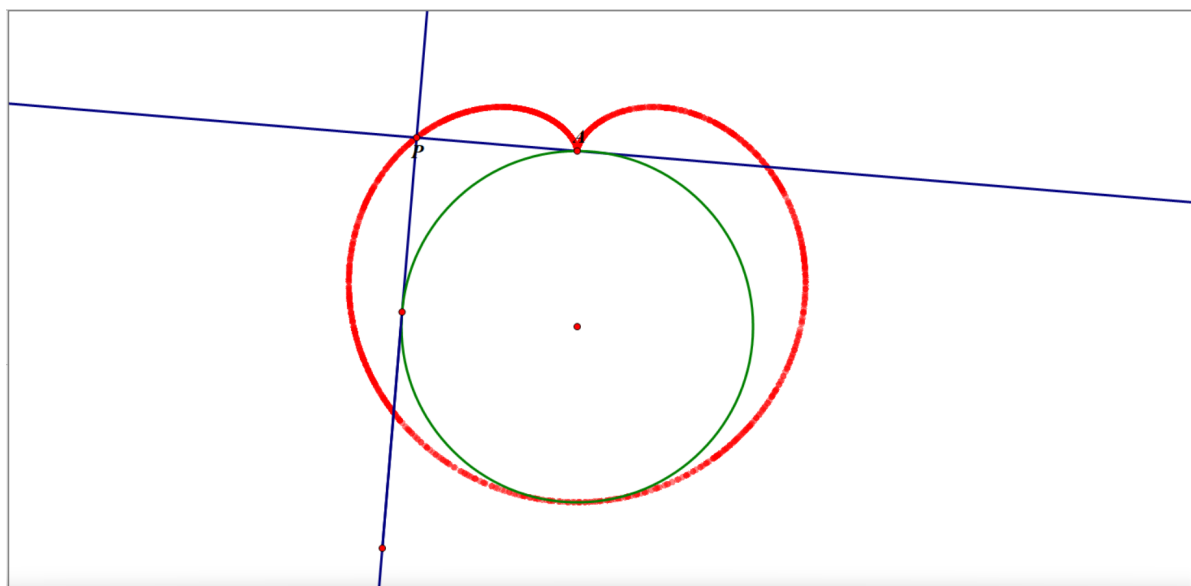
那么怎么求出 P 的坐标？它是切线和直线 PA 的交点，而直线 PA 是切线的垂线，如果知道切线方程，直线 PA 的方程就能求出(利用斜率相乘等于-1)，从而联立两条直线方程，就能求出交点 P 。

我们知道，单位圆的切线到圆心的距离为1，所以可以把切线方程设为 $\cos \theta \cdot x + \sin \theta \cdot y = 1$ ，或者写成 $y = -\frac{\cos \theta}{\sin \theta} \cdot x + \frac{1}{\sin \theta}$ ，这里的 θ 是变量。从而直线 PA 的方程就是 $y = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \cdot x + 1$ ，联立它们，就能得到 P 的坐标：

$$P(\cos \theta - \sin \theta \cos \theta, \sin \theta + \cos^2 \theta)$$

最后就是求 $|PB|$ 了，可以预见得到的结果是一个关于 θ 的函数，利用必修一学习的三角恒等变换可以求出其最小值，**过程略。**

顺便说下，本题中 P 点的轨迹是这样子的。这是一条**心形线**。



题3

(2021-北京) 已知直线 $y = kx + m$ (m 为常数) 与圆 $x^2 + y^2 = 4$ 交于点 M, N , 当 k 变化时, 若 $|MN|$ 的最小值为 2, 则 $m = ()$

A. 1 或 -1 B. $\sqrt{2}$ 或 $-\sqrt{2}$ C. $\sqrt{3}$ 或 $-\sqrt{3}$ D. 2 或 -2

答案: C

解析:

$|MN|$ 是弦长, 我们知道圆的弦长公式为

$$l = 2 \cdot \sqrt{R^2 - d^2}$$

其中, l 是弦长, R 是圆的半径, d 是圆心到弦的距离 (圆心距)。

既然弦长 $|MN|$ 的最小值为 2, 说明圆心距 d 的最大值为 $\sqrt{3}$, 也就是圆心 $(0, 0)$ 到直线 $y = kx + m$ 的距离最大值为 $\sqrt{3}$ 。

$$d = \frac{|m|}{\sqrt{k^2 + 1}} \leq |m| = \sqrt{3}$$
$$m = \sqrt{3} \text{ 或 } -\sqrt{3}$$

题4

(2020-全国) 已知圆 $M: x^2 + y^2 - 2x - 2y - 2 = 0$, 直线 $l: 2x + y + 2 = 0$, P 为 l 上的动点, 过点 P 做圆 M 的切线 PA, PB , 切点为 A, B , 当 $|PM| \cdot |AB|$ 最小时, 直线 AB 的方程为 ()

A. $2x - y - 1 = 0$ B. $2x + y - 1 = 0$ C. $2x - y + 1 = 0$ D. $2x + y + 1 = 0$

答案: D

解析:

这道题和题1是不是一模一样? 注意四边形 $PAMB$ 是我们在初中就学过的筝形, 它的面积就等于 $|PM| \cdot |AB|$

题5

(2020-山东) 直线 $2x + 3y - 6 = 0$ 关于点 $(-1, 2)$ 对称的直线方程是 ()

A. $3x - 2y - 10 = 0$ B. $3x - 2y - 23 = 0$ C. $2x + 3y - 4 = 0$ D. $2x + 3y - 2 = 0$

答案: D

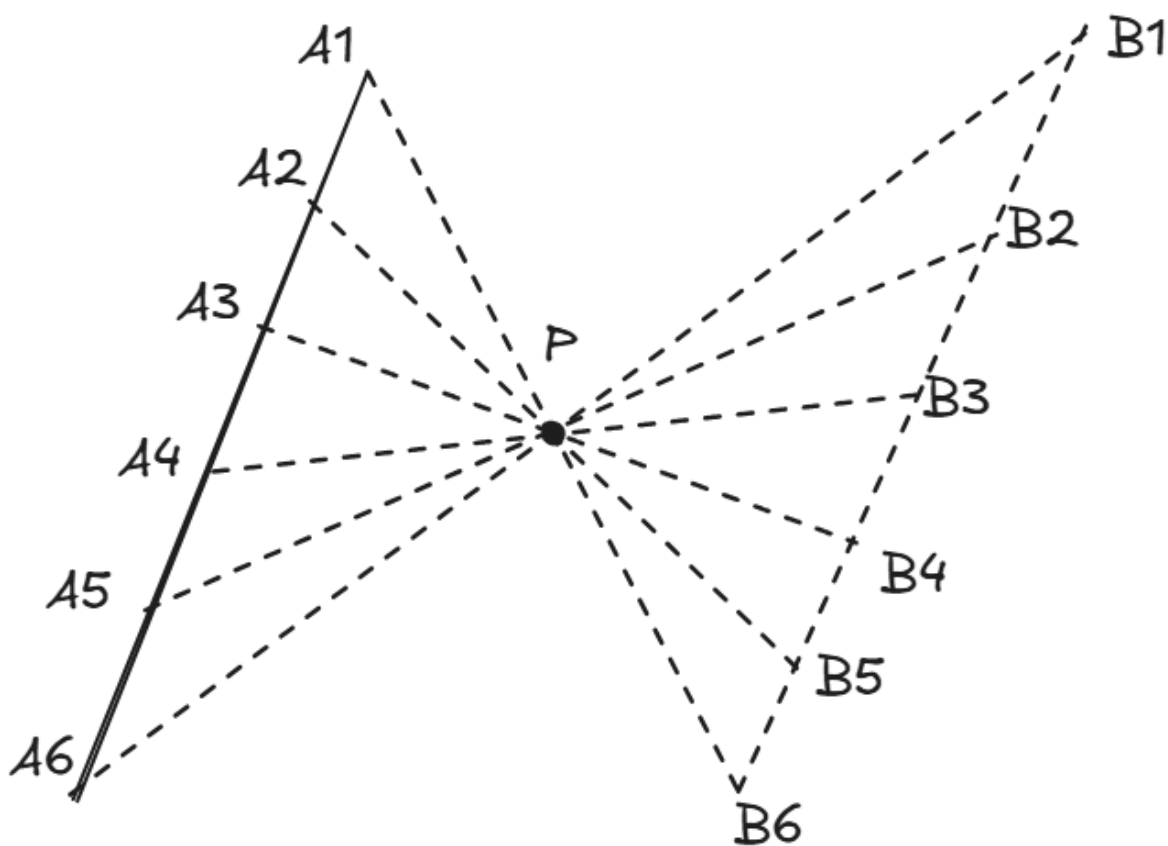
解析:

直线与圆这一章有几个与对称有关的考点, 列举如下:

- 点关于点对称
- 点关于线对称
- 线关于点对称
- 圆关于点对称
- 圆关于线对称

其实，所有的这些对称，本质上都是点关于点对称。

本题就是线关于点对称。想象一条直线，它上面有无数个点，我们给每个点做关于对称中心 P 的对称点，那么所有的对称点就连成了一条直线，也就是线关于点的对称直线。下面是一个示意图：

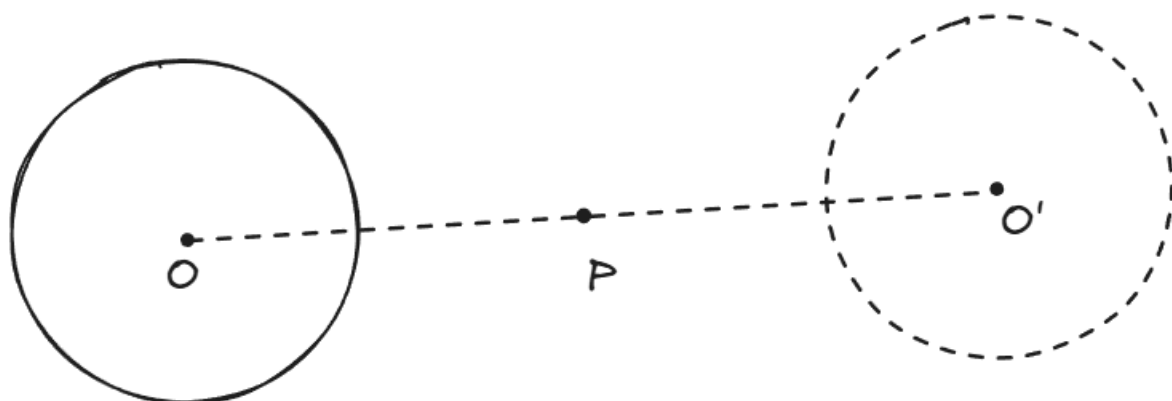


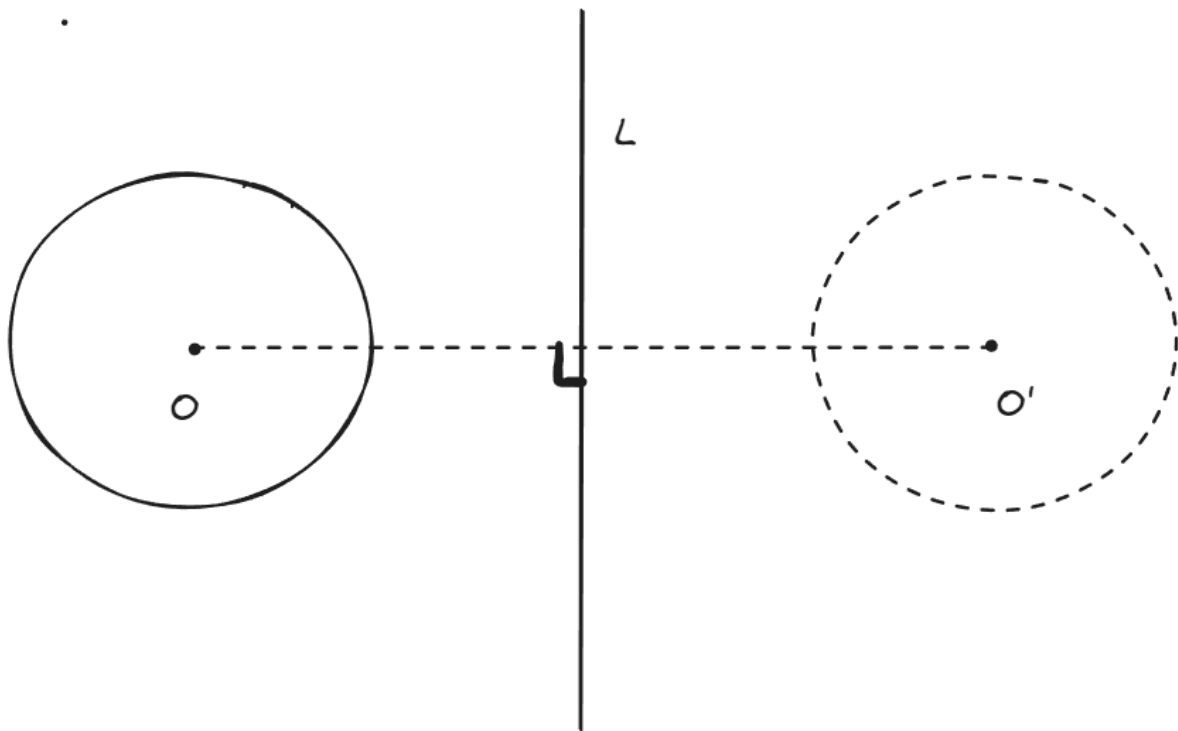
是不是很直观？现在的问题是，我们已经知道了直线 l 的方程 $2x + 3y - 6 = 0$ ，以及对称中心 $P(-1, 2)$ ，我们怎么求出对称直线 l' 呢？

刚才的思想是，我们对直线 l 上面无数个点都做对称点，但是在实际操作时，我们往往只在直线 l 上取一个点 (m, n) 作为这无数个点的**代表**。

取 $2x + 3y - 6 = 0$ 上面一个点 (m, n) ，它满足 $2m + 3n - 6 = 0$ ，然后求出 (m, n) 关于 $P(-1, 2)$ 的对称点为 $(-2 - m, 4 - n)$ ，下面是**关键**：既然 (m, n) 是直线 l 的一个代表点，那么 $(-2 - m, 4 - n)$ 就应该是对称直线 l' 的一个代表点，也就是说，我们把 $-2 - m$ 和 $4 - n$ 分别看成整体 p, q ，得到 $m = -2 - p, n = 4 - q$ ，代入 $2m + 3n - 6 = 0$ 中，解得 $2p + 3q - 2 = 0$ ，所以对称直线 l' 的方程就是 $2p + 3q - 2 = 0$ ，习惯上写作 $2x + 3y - 2 = 0$ 。

注：对于圆关于点对称，以及圆关于线对称，比上面的线关于点对称要简单很多，因为我们要确定一个圆，只需要确定圆心和半径就行了。一个圆关于点/线的对称圆，它们的半径是一样的，**所以只需要把圆心做对称点就行了**。如下图所示





题6

若直线 $(a+2)x + (1-a)y - 3 = 0$ 与直线 $(a-1)x + (2a+3)y + 2 = 0$ 互相垂直，则 a 的值为 ()

A. 1 B. -1 C. 1或-1 D. $-\frac{3}{2}$

答案: C

解析:

这道题目，无论是把直线方程转化为 $y = kx + b$ 形式还是转化为 $x = my + t$ 形式都会涉及到分类讨论，比较麻烦。究其本质，是因为这两种形式都**不能表达所有方向的直线**，例如前一种形式不能表达垂直于 x 轴的直线，后一种形式不能表达垂直于 y 轴的直线。

那么，有没有一种方法，能表达出直线的所有方向？答案是使用**法向量**。

熟悉空间向量的同学们对平面的法向量不陌生，那么直线的法向量是什么意思呢？顾名思义，**就是和直线垂直的向量**。形式为 $Ax + By + C = 0$ 的直线，它的法向量是 (A, B) 。例如直线 $x + y - 1 = 0$ ，它的法向量是 $(1, 1)$ ，大家可以自行验证，向量 $(1, 1)$ 的方向是不是和 $x + y - 1 = 0$ 这条直线垂直。

法向量可以表达出直线的所有方向，例如和 x 轴垂直的直线 $x - 1 = 0$ ，它的法向量是 $(1, 0)$ ，和 y 轴垂直的直线 $y + 1 = 0$ ，它的法向量是 $(0, 1)$ 。

和平面的法向量一样，有了直线的法向量，我们就可以对直线的平行和垂直进行刻画。

- 两条直线垂直，等价于法向量垂直
- 两条直线平行，等价于法向量平行

再来看本题，两条直线的法向量分别为 $(a+2, 1-a)$ 和 $(a-1, 2a+3)$ ，这两个法向量垂直，从而数量积为0，

即 $(a+2)(a-1) + (1-a)(2a+3) = 0$ ，解得 $a = 1$ 或 -1 。你看，避免了分类讨论，是不是很简单？

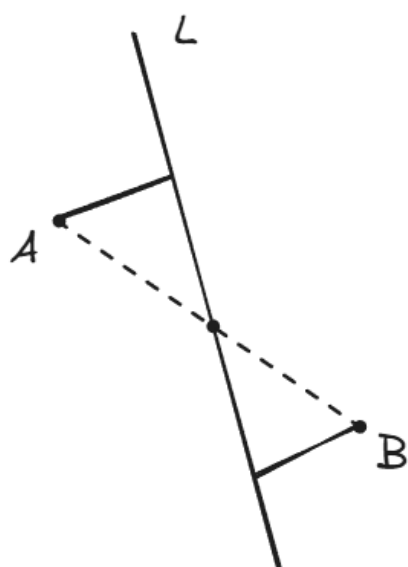
题7

过点 $A(1, 2)$ 且与两定点 $(2, 3)$, $(4, -5)$ 等距离的直线方程为_____

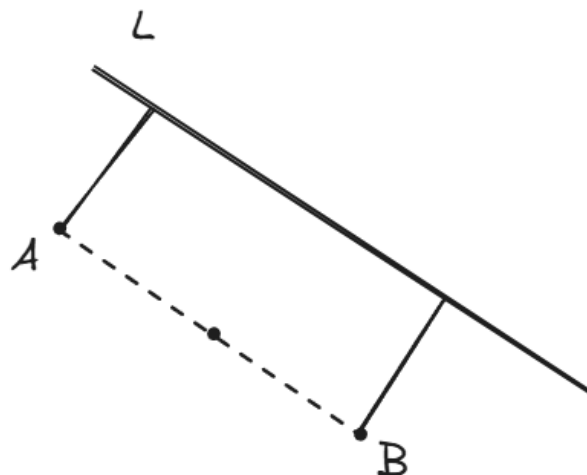
答案: $3x + 2y - 7 = 0$ 或 $4x + y - 6 = 0$

解析:

稍微在脑海中想一想就知道, 和两个定点等距离, 要么就和这两个定点连成的直线平行, 要么就经过这两个定点的连线的中心, 如下



Case 1



Case 2

我曾经遇到过一个立体几何题:

平面 α 内存在不共线的三个点到平面 β 的距离相等, 则 $\alpha \parallel \beta$

这个命题是对还是错呢? 仔细想想, 是不是和题7很像! 不过我当时居然想了很久才想明白~~

题8

对任意实数 m , 直线 $x + my - 3m - 4 = 0$ 被圆 C 截得的线段长恒为4, 若动点 P 在圆 C 上, 则点 P 到原点距离的最小值是_____

答案: 3

解析:

看到 $x + my - 3m - 4 = 0$ 这样一个带参数的直线方程, 马上就要想到它过一个定点。我们把参数 m 提取出来, $x + m(y - 3) - 4 = 0$, 很明显它经过定点 $(4, 3)$ 。现在题目要求这条直线被圆截得的线段长恒定, 也就是弦长恒定。什么时候才会出现这种情况? 当然就是直线经过的定点 $(4, 3)$ 恰好是圆心的时候了, 此时不管直线如何旋转, 弦长都是恒定的直径。否则的话, 直线稍微一旋转, 弦长就会改变。

题9

设 $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$, 令

$S = \sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{(x-1)^2 + y^2} + \sqrt{x^2 + (y-1)^2} + \sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2}$, 则 S 的最小值为_____

答案: $2\sqrt{2}$

解析:

数学里面求代数式的最值, 无非两种方法: **代数法**和**几何法**。

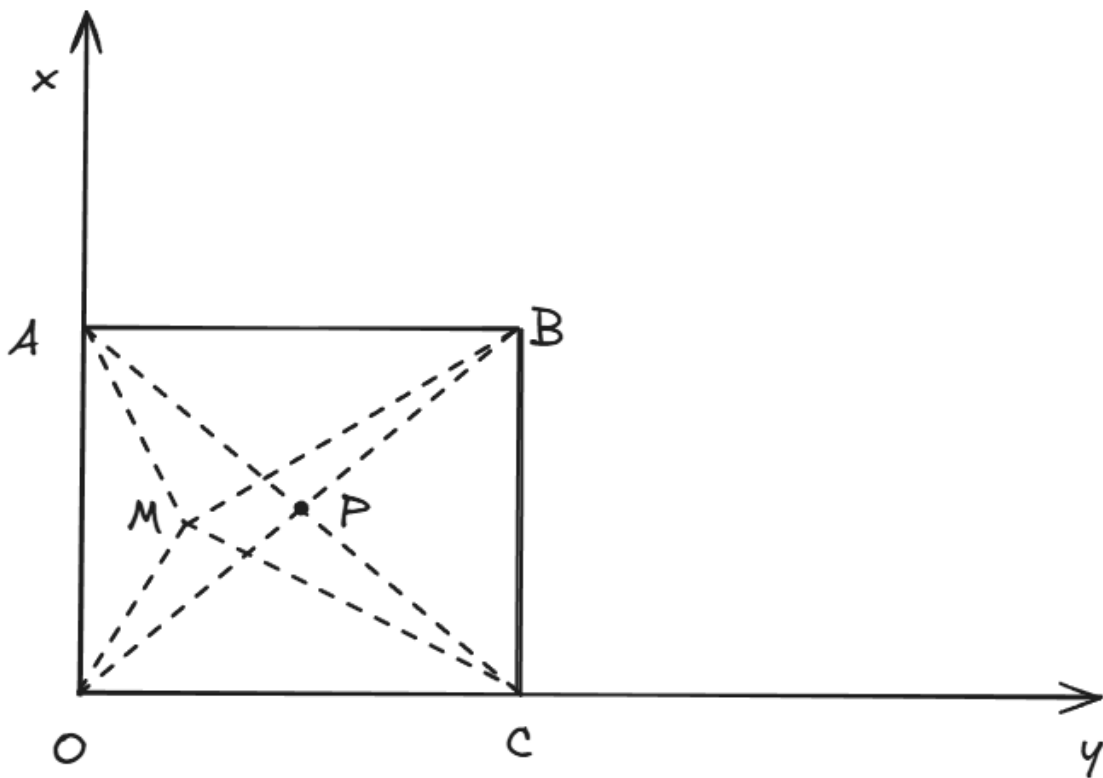
• 几何法:

观察 S 的形式, 我们发现这四个根号可以看成点 (x, y) 到 $(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)$ 的距离之和。

如下图, 正方形 $OACB$ 边长为1, 点 $M(x, y)$ 在正方形内部 (包括边界), 我们要求的式子 S 就等于 $MO + MA + MB + MC$ 。由于

$$MO + MA + MB + MC = (MA + MC) + (MO + MB) \geq AC + OB = 2\sqrt{2}$$

其中用到了**三角形两边之和大于第三边**, 或者称为**三角不等式**。当且仅当点 M 位于对角线交点时取等。



• 代数法:

使用柯西不等式的变式:

$$\begin{aligned} & \sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{(1-x)^2 + y^2} + \sqrt{x^2 + (y-1)^2} + \sqrt{(1-x)^2 + (y-1)^2} \\ & \geq \sqrt{(x+1-x+x+1-x)^2 + (y+1-y+y+1-y)^2} = 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

(注意我把 $x-1$ 和 $y-1$ 写成了 $1-x$ 和 $1-y$)。当且仅当 $x = y = \frac{1}{2}$ 时取等。

注: 柯西不等式变式:

对任意正整数 $n \geq 2$ 以及非零实数 $x_i, y_i (i = 1, 2, 3 \cdots n)$, 有

$$\sqrt{x_1^2 + y_1^2} + \sqrt{x_2^2 + y_2^2} + \cdots + \sqrt{x_n^2 + y_n^2} \geq \sqrt{(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)^2 + (y_1 + y_2 + \cdots + y_n)^2}$$

当且仅当 $\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2} = \cdots = \frac{x_n}{y_n}$ 时取等。