# 专题练习_直线与圆_1

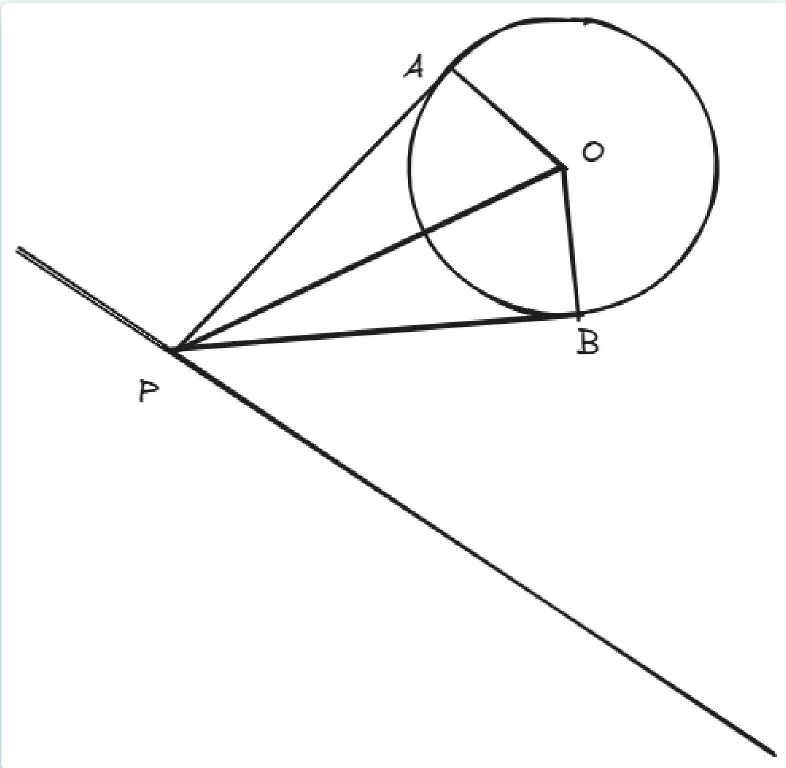
## 题1

平面直角坐标系中，设直线$l: x+y=1$,圆$O(x-4)^2+(y-4)^2=1$，动点$P$在直线$l$ 上运动。过点$P$做圆$O$的两条切线，切点分别为$A,B$，则四边形$OAPB$的面积的最小值为________

H2

> 答案：$\sqrt{6}$

**解析：**




如上图所示，容易知道四边形$OAPB$的面积就是三角形$OBP$面积的两倍，也就是$S_{OAPB}=OB\times PB=\sqrt{OP^2-1}$ 。所以，只需要求$OP$的最小值，即点$O$到直线$l$的距离。

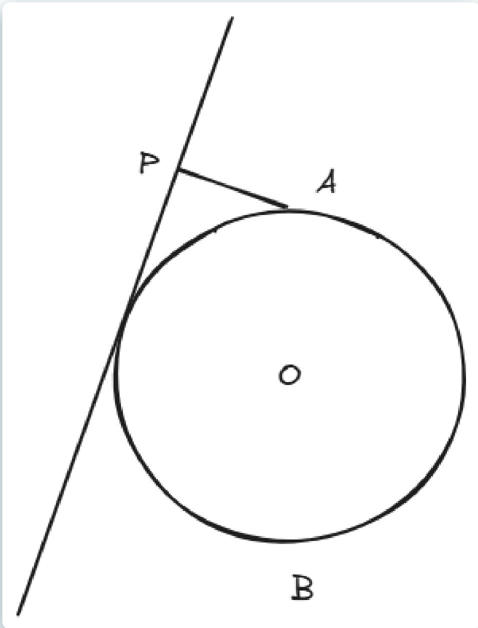
## 题2

平面直角坐标系中，设圆$O$：$x^2+y^2=1$，点$A(0,1)$，$B(0,-1)$。过$A$做圆$O$的一条切线的垂线，垂足为$P$。问$|PB|$的最大值为?

H2

> 答案：$\frac{4\sqrt{3}}{3}$

**解析：**




如上图所示，我们的目的很明确：求出$P$点坐标。$P$是一个动点，它的坐标能用参变量来表示，或者能用轨迹方程来刻画，**这是动点问题亘古不变的解题原则。**

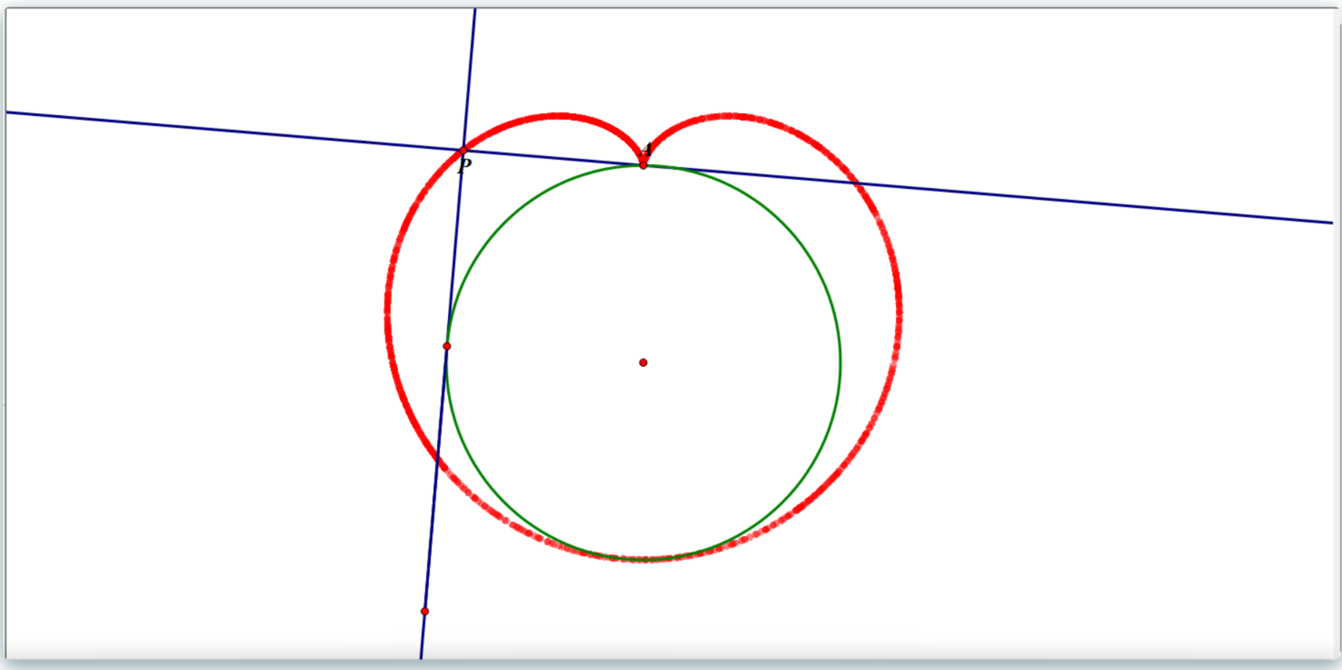
那么怎么求出$P$的坐标？它是切线和直线$PA$的交点，而直线$PA$是切线的垂线，如果知道切线方程，直线$PA$的方程就能求出(利用斜率相乘等于-1)，从而联立两条直线方程，就能求出交点$P$。

我们知道，单位圆的切线到圆心的距离为1，所以可以把切线方程设为$\cos\theta\cdot x+\sin\theta\cdot y=1$，或者写成$y=-\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\cdot x+\frac{1}{\sin\theta}$，这里的$\theta$是变量。从而直线$PA$的方程就是$y=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\cdot x+1$，联立它们，就能得到$P$ 的坐标：

$$P(\cos\theta-\sin\theta\cos\theta\quad,\quad\sin\theta+cos^2\theta)$$

最后就是求$|PB|$了，可以预见得到的结果是一个关于$\theta$的函数，利用必修一学习的三角恒等变换可以求出其最小值，**过程略。**

顺便说下，本题中P点的轨迹是这样子的。这是一条**心形线** 。



## 题3

（2021-北京）已知直线 $y=kx+m$（$m$为常数）与圆 $x^2+y^2=4$交于点$M,N$，当 $k$ 变化时，若$|MN|$的最小值为 2，则 $m=$（　）

$A.1$或$-1$　　$B.\sqrt{2}$或$-\sqrt{2}$　　$C.\sqrt{3}$或$-\sqrt{3}$　　$D.2$或$-2$

> 答案：$C$

**解析：**

$|MN|$是弦长，我们知道圆的弦长公式为

$$l=2\cdot\sqrt{R^2-d^2}$$

其中，$l$是弦长，$R$是圆的半径，$d$是圆心到弦的距离（圆心距）。

既然弦长$|MN|$的最小值为2，说明圆心距$d$的最大值为$\sqrt{3}$，也就是圆心$(0,0)$到直线 $y=kx+m$的距离最大值为$\sqrt{3}$。

$$d=\frac{|m|}{\sqrt{k^2+1}}\leq|m|=\sqrt{3}$$
$$m=\sqrt{3}\text{或}-\sqrt{3}$$

## 题4

（2020-全国）已知圆 $M:x^2+y^2-2x-2y-2=0$，直线$l:2x+y+2=0$，$P$ 为 $l$ 上的动点，过点 $P$ 做圆 $M$的切线 $PA,PB$，切点为 $A,B$，当 $|PM|\cdot|AB|$最小时，直线 $AB$的方程为（　　）

$A.2x-y-1=0$　　$B.2x+y-1=0$　　$C.2x-y+1=0$　　$D.2x+y+1=0$

> 答案：$D$

**解析：**

这道题和题1是不是一模一样？注意四边形$PAMB$是我们在初中就学过的筝形，它的面积就等于$|PM|\cdot|AB|$

## 题5

（2020-山东）直线 $2x+3y-6=0$关于点 $(-1,2)$对称的直线方程是（　　）

$A.3x-2y-10=0$　　$B.3x-2y-23=0$　　$C.2x+3y-4=0$　　$D.2x+3y-2=0$

答案：$D$

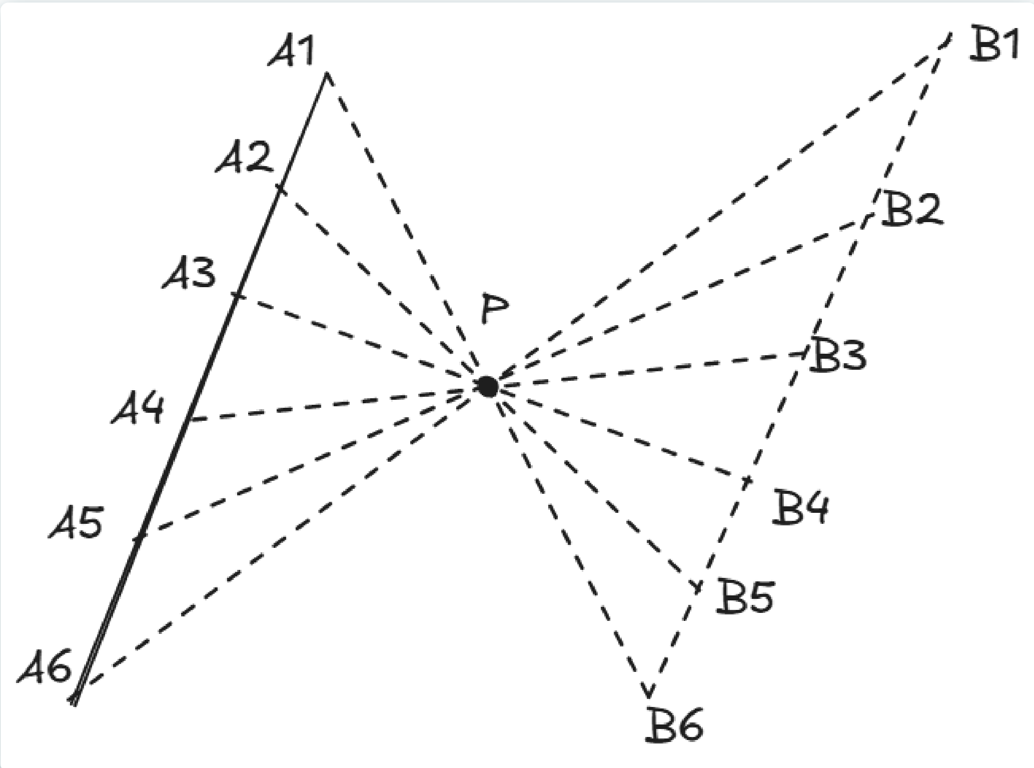
**解析：**

直线与圆这一章有几个与对称有关的考点，列举如下：

- 点关于点对称
- 点关于线对称
- 线关于点对称
- 圆关于点对称
- 圆关于线对称

其实，所有的这些对称，本质上都是点关于点对称。

本题就是线关于点对称。想象一条直线，它上面有无数个点，我们给每个点做关于对称中心$P$的对称点，那么所有的对称点就连成了一条直线，也就是线关于点的对称直线。下面是一个示意图：

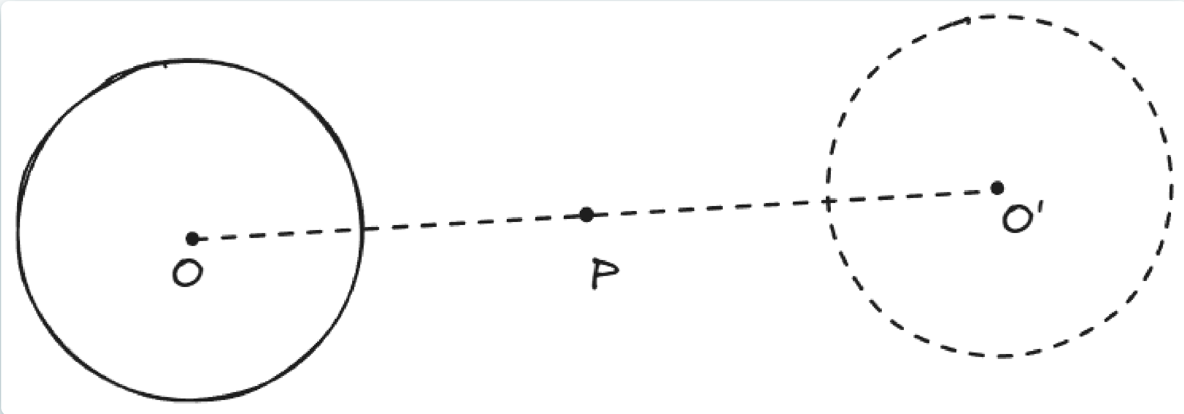


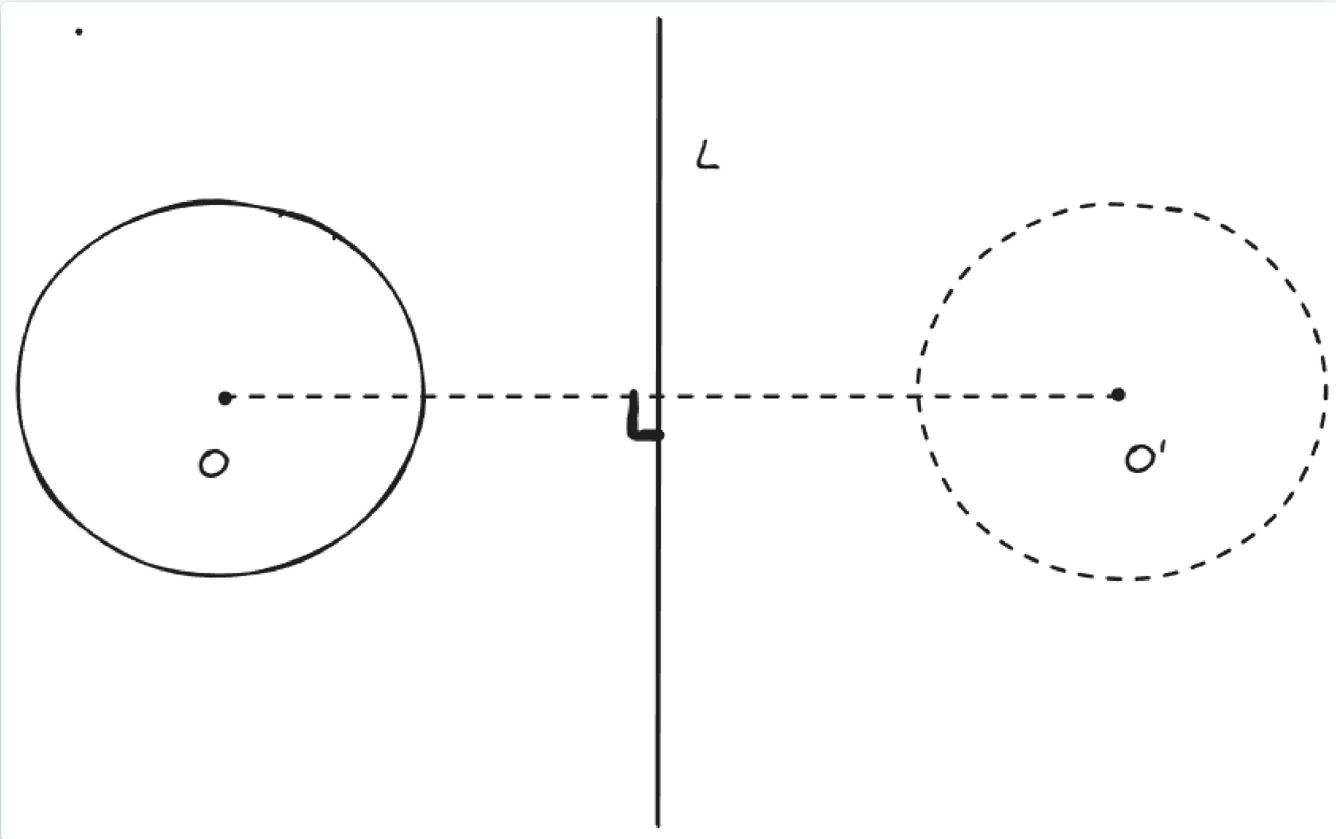

是不是很直观？现在的问题是，我们已经知道了直线$l$的方程$2x+3y-6=0$，以及对称中心$P(-1,2)$，我们怎么求出对称直线$l'$呢？

刚才的思想是，我们对直线$l$上面无数个点都做对称点，但是在实际操作时，我们往往只在直线$l$上取一个点$(m,n)$作为这无数个点的**代表。**

取$2x+3y-6=0$上面一个点$(m,n)$，它满足$2m+3n-6=0$，然后求出$(m,n)$关于$P(-1,2)$的对称点为 $(-2-m,4-n)$ ，下面是**关键**：既然$(m,n)$是直线$l$的一个代表点，那么 $(-2-m,4-n)$就应该是对称直线$l'$的一个代表点，也就是说，我们把$-2-m$和$4-n$分别看成整体$p,q$，得到 $m=-2-p,n=4-q$，代入$2m+3n-6=0$中，解得 $2p+3q-2=0$，所以对称直线$l'$的方程就是 $2p+3q-2=0$，习惯上写作$2x+3y-2=0$。

**注：**对于圆关于点对称，以及圆关于线对称，比上面的线关于点对称要简单很多，因为我们要确定一个圆，只需要确定圆心和半径就行了。一个圆关于点/线的对称圆，它们的半径是一样的，**所以只需要把圆心做对称点就行了。**如下图所示




## 题6

若直线 $(a+2)x+(1-a)y-3=0$与直线 $(a-1)x+(2a+3)y+2=0$互相垂直，则$a$的值为（　　）

H2 $A.1$　　$B.-1$　　$C.1$或$-1$　　$D.-\frac{3}{2}$

> 答案：$C$

**解析：**

这道题目，无论是把直线方程转化为$y = kx + b$形式还是转化为$x = my + t$形式都会涉及到分类讨论，比较麻烦。究其本质，是因为这两种形式都**不能表达所有方向的直线**，例如前一种形式不能表达垂直于$x$轴的直线，后一种形式不能表达垂直于$y$轴的直线。

那么，有没有一种方法，能表达出直线的所有方向？答案是使用**法向量**。

熟悉空间向量的同学们对平面的法向量不陌生，那么直线的法向量是什么意思呢？顾名思义，**就是和直线垂直的向量。**形式为$Ax + By + C = 0$的直线，它的法向量是$(A, B)$。例如直线$x + y - 1 = 0$，它的法向量是$(1, 1)$，大家可以自行验证，向量$(1, 1)$的方向是不是和$x + y - 1 = 0$这条直线垂直。

法向量可以表达出直线的所有方向，例如和$x$轴垂直的直线$x - 1 = 0$，它的法向量是$(1, 0)$，和$y$轴垂直的直线$y + 1 = 0$，它的法向量是$(0, 1)$。

和平面的法向量一样，有了直线的法向量，我们就可以对直线的平行和垂直进行刻画。

- 两条直线垂直，等价于法向量垂直
- 两条直线平行，等价于法向量平行

再来看本题，两条直线的法向量分别为$(a + 2, 1 - a)$和$(a - 1, 2a + 3)$，这两个法向量垂直，从而数量积为$0$，

即$(a + 2)(a - 1) + (1 - a)(2a + 3) = 0$，解得$a = 1$或$-1$。你看，避免了分类讨论，是不是很简单？

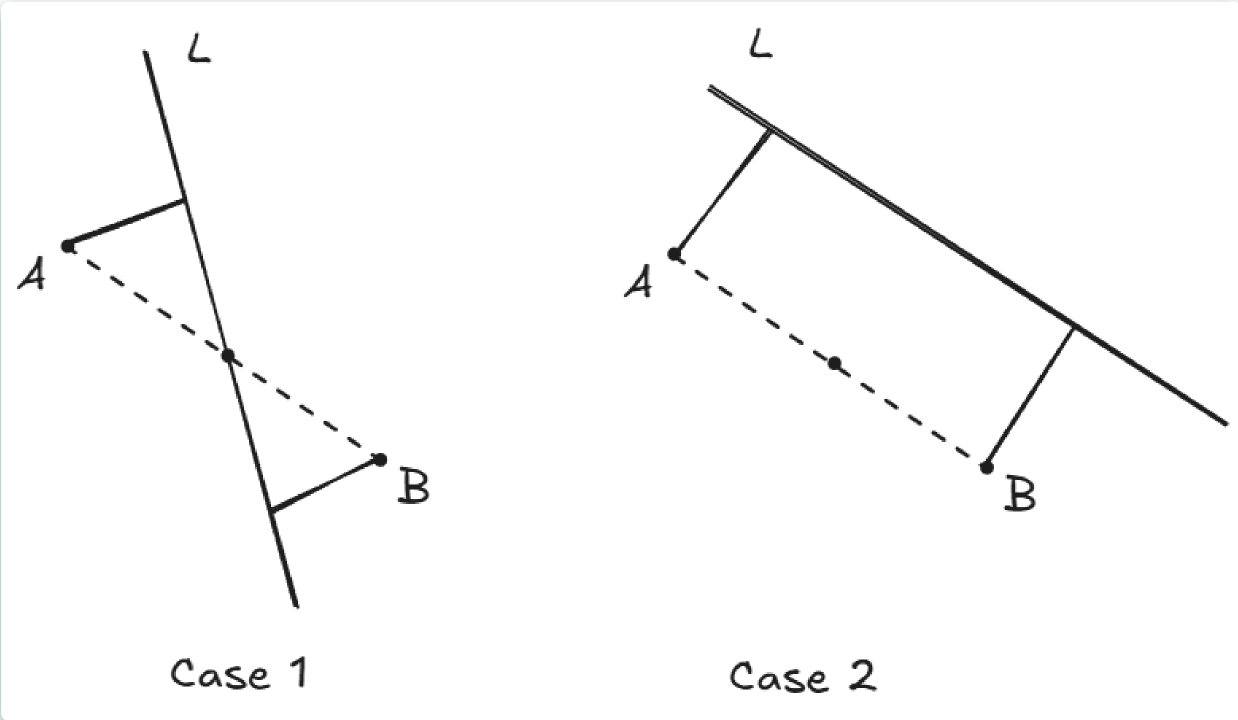
## 题7

过点$A(1, 2)$且与两定点$(2, 3), (4, -5)$等距离的直线方程为______

> 答案：$3x + 2y - 7 = 0$或$4x + y - 6 = 0$

**解析：**

稍微在脑海中想一想就知道，和两个定点等距离，要么就和这两个定点连成的直线平行，要么就经过这两个定点的连线的中心，如下




我曾经遇到过一个立体几何题：

> 平面$\alpha$内存在不共线的三个点到平面$\beta$的距离相等，则$\alpha \parallel \beta$

这个命题是对还是错呢？仔细想想，是不是和题7很像！不过我当时居然想了很久才想明白~

## 题8

对任意实数$m$，直线$x+my-3m-4=0$被圆$C$截得的线段长恒为$4$，若动点$P$在圆$C$上，则点$P$到原点距离的最小值是_____

H2

> 答案：3

**解析：**

看到$x+my-3m-4=0$这样一个带参数的直线方程，**马上就要想到它过一个定点。**我们把参数$m$提取出来，$x+m(y-3)-4=0$，很明显它经过定点$(4,3)$。现在题目要求这条直线被圆截得的线段长恒定，也就是弦长恒定。什么时候才会出现这种情况？**当然就是直线经过的定点$(4,3)$恰好是圆心的时候了**，此时不管直线如何旋转，弦长都是恒定的直径。否则的话，直线稍微一旋转，弦长就会改变。

## 题9

设$0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1$，令$S=\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{(x-1)^2+y^2}+\sqrt{x^2+(y-1)^2}+\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}$，则$S$的最小值为______

H2

答案：$2\sqrt{2}$

**解析：**

数学里面求代数式的最值，无非两种方法：**代数法**和**几何法**。

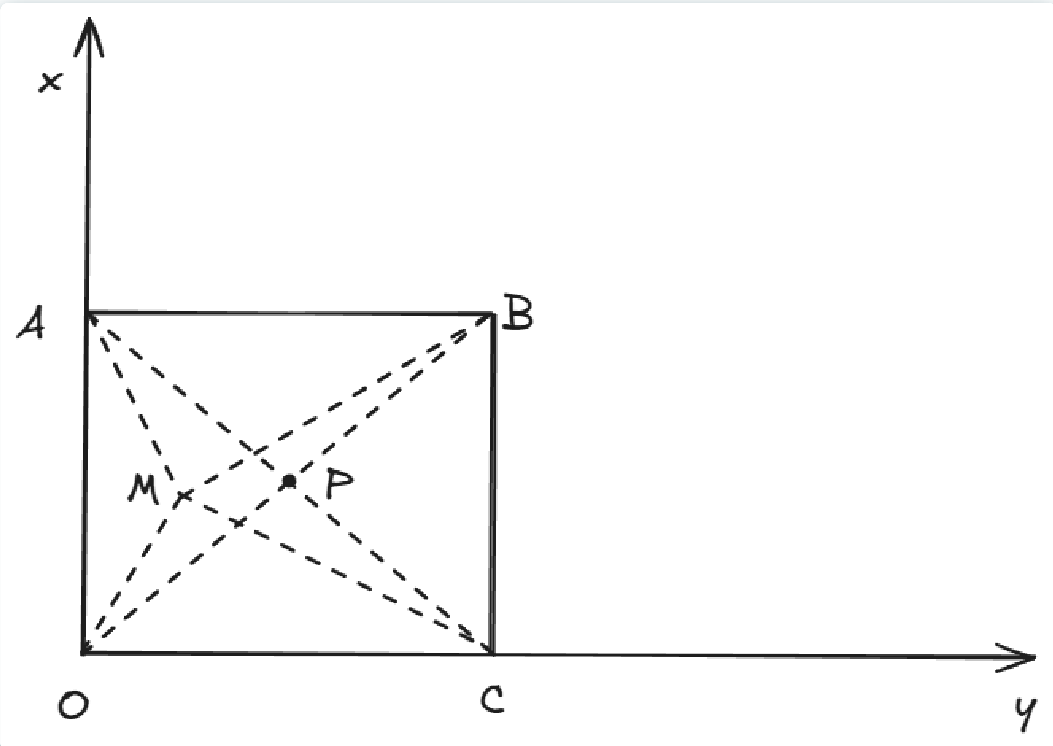
- 几何法：

观察$S$的形式，我们发现这四个根号可以看成点$(x,y)$到$(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)$的距离之和。

如下图，正方形$OABC$边长为1，点$M(x,y)$在正方形内部（包括边界），我们要求的式子$S$就等于$MO+MA+MB+MC$。由于

$$MO+MA+MB+MC=(MA+MC)+(MO+MB)\geq AC+OB=2\sqrt{2}$$

其中用到了**三角形两边之和大于第三边**，或者称为**三角不等式**。当且仅当点$M$位于对角线交点时取=。




- 代数法：

使用柯西不等式的变式：

$$\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{(1-x)^2+y^2}+\sqrt{x^2+(y-1)^2}+\sqrt{(1-x)^2+(y-1)^2}$$
$$\geq\sqrt{(x+1-x+x+1-x)^2+(y+1-y+y+1-y)^2}=2\sqrt{2}$$

（注意我把$x-1$和$y-1$写成了$1-x$和$1-y$）。当且仅当$x=y=\frac{1}{2}$时取等。

**注：** 柯西不等式变式：

对任意正整数$n \geq 2$以及非零实数$x_i, y_i (i=1,2,3\cdots n)$, 有

$$\sqrt{x_1^2+y_1^2}+\sqrt{x_2^2+y_2^2}+\cdots+\sqrt{x_n^2+y_n^2} \geq \sqrt{(x_1+x_2+\cdots+x_n)^2+(y_1+y_2+\cdots+y_n)^2}$$

当且仅当$\frac{x_1}{y_1}=\frac{x_2}{y_2}=\cdots=\frac{x_n}{y_n}$时取等。