

1 目的

直列共振回路と並列共振回路をつくり、共振周波数や周波数に対する回路のインピーダンスの大きさ、電圧に対する電流の位相差の変化を定量的に調べる。

2 原理

2.1 抵抗のインピーダンスと位相角

前回の実験課題でも述べたことであるが、基準抵抗 R_{100} と公称抵抗値 $10\text{k}\Omega$ の抵抗器 Z を直列につないだ回路において、抵抗器にかかる電圧を V_A 、抵抗にかかる電圧を $\overline{V_B}$ とすると、抵抗のインピーダンスの大きさ $|Z|$ は、次の式(1)で表すことができる。

$$|Z| = \frac{V_A}{\overline{V_B}} \times R_{100} \quad (1)$$

さらに、電流波形 $\overline{V_B}$ に対する電圧波形 V_A の時間差を Δt とすれば、位相角 ϕ は、次の式(2)で求めることができる。

$$\phi = 360^\circ \times \Delta t \times f \quad (2)$$

2.2 LC 直列共振回路

インダクタ(インダクタンス L)とキャパシタ(静電容量 C)が直列に接続された回路を考える。このとき回路のインピーダンス Z_S とその絶対値及び位相角は、

$$Z_S = j \frac{\omega^2 LC - 1}{\omega C} \quad (2)$$

$$|Z_S| = \left| \frac{\omega^2 LC - 1}{\omega C} \right| \quad (3)$$

$$\phi_S = \tan^{-1} \frac{(\omega^2 LC - 1)/\omega C}{0} \quad (4)$$

である。

また、式(2)より、 $\omega^2 LC - 1 = 0$ のとき、回路のインピーダンスの大きさは0となり、回路中の電流は制限なく流れる。この現象を直接共振という。共振がおこるときの周波数は共振周波数といい、これを f_c とすると次のように与えられる。

$$f_c = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \quad (5)$$

2.3 LC 並列共振回路

インダクタとキャパシタを並列に接続したものを考える。このときのインピーダンス Z_p とその大きさ、位相角 ϕ_p は、

$$\frac{1}{Z_p} = \frac{1 - \omega^2 LC}{j\omega L} \quad (6)$$

$$|Z_p| = \left| \frac{\omega L}{1 - \omega^2 LC} \right| \quad (7)$$

$$\phi_p = \tan^{-1} \frac{\omega L / (1 - \omega^2 LC)}{0} \quad (8)$$

である。式(6)より並列回路では角周波数が $1 - \omega^2 LC = 0$ をみたすとき、回路のインピーダンスの大きさは無限大になり、電流はこの周波数で0となる並列共振回路が観測できる。並列共振周波数は直列共振の場合と同じ式で表される。

2.4 Q 値

実際に回路を組み立てるとき、配線や素子の抵抗部分による損失を排除して考えることはできない。Q 値は、そのような系のエネルギーの散逸の度合いを表すもので、以下のように定義される。

$$Q \equiv 2\pi \frac{\text{ある瞬間に系に蓄えられているエネルギー}}{1 \text{ 周期の間に系から散逸するエネルギー}}$$

いま、LCR 直列回路である瞬間にコイルに蓄えられるエネルギーを考えると、電流の実効値を I_{rms} とすれば LI_{rms}^2 となる。一方で、1 周期の間に抵抗により散逸するエネルギーは、共振点での周期を T_0 と表すと $RI_{rms}^2 T_0$ であり、Q 値は次のようにあらわされる。

$$Q = 2\pi \frac{L}{RT_0} = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} \quad (9)$$

Q 値は共振回路だけでなく、フィルタ回路の特性を表すのに用いられる重要なパラメータである。

2.5 抵抗部分がある場合の回路の振舞い

直進共振回路において、インダクタとキャパシタの抵抗部分(等価直列抵抗 ESR)の和を R とし、これが L と C に直列に接続されている回路を考えるとインピーダンスの大きさと位相角は次式のように表すことが出来る。

$$|Z_{LCR}| = \sqrt{R^2 + \left(\frac{\omega^2 LC - 1}{\omega C}\right)^2} \quad (10)$$

$$\phi_{LCR} = \tan^{-1} \frac{\omega^2 LC - 1}{\omega RC} \quad (11)$$

一方、並列共振回路については、インダクタとキャパシタの ESR をそれぞれ R 、 r とすると、インピーダンスの大きさと位相角は次のようになる。

$$|Z_{LCR}| = \sqrt{\frac{R^2 + \omega^4 r^2 L^2 C^2 + \omega^2 R^2 r^2 C^2 + \omega^2 L^2}{(1 - \omega^2 LC)^2 + \omega^2 (R + r)^2 C^2}} \quad (12)$$

$$\phi_{LCR} = \tan^{-1} \frac{\omega\{L(1 - \omega^2 LC) - R^2 C + \omega^2 r^2 LC^2\}}{R^2 + \omega^4 r^2 L^2 C^2 + \omega^2 R^2 r^2 C^2 + \omega^2 L^2} \quad (13)$$

インピーダンスの大きさが、共振点(周波数 f_0)でのインピーダンスの大きさのちょうど $1/\sqrt{2}$ 倍または $\sqrt{2}$ 倍の値となるような周波数 f_1 、 f_2 を使うと

$$Q = \frac{f_0}{f_2 - f_1} \quad (14)$$

と表せる。

3 実験手順

3.1 LC 直列共振の場合の測定手順

1. 前回実験で用いたインダクタのインダクタンスの実測値 L および公称値 $0.1 \mu F$ のキャパシタの実測値 $C_{0.1}$ を使い、共振周波数の理論値 f_{r0} を計算した。
2. L と $C_{0.1}$ による直列回路を図 1 の Z として回路を組み立てた。
3. FG からサイン波を発生させ、オシロスコープの条件設定を行った。CH1(V_A)、CH2($\overline{V_B}$) を GND レベルを縦軸中央の目盛りに合わせた。
4. 周波数を f_{r0} の近傍で変化させながら 2 つの波形を観測し、位相差が 0 となる周波数(実測の共振周波数) f_r を求めた。

5. $f = f_r$ における振幅比を求め、R の値としての $R_{100} = 99.6\Omega$ の値を用いてインピーダンスの大きさを計算した。
6. 周波数を 2kHz～100kHz の範囲で変化させて、 V_A 、 $\overline{V_B}$ および位相差を記録し、インピーダンスの大きさと位相角を計算し、それぞれ片対数グラフと両対数グラフにプロットした。

3.2 LC 並列共振の場合の測定手順

1. FG の出力を OFF(または FG の電源を OFF)にし、インダクタとキャパシタを並列接続に変えた。
2. FG の出力を ON にして、周波数を f_{r0} の近傍で変化させながら 2 つの波形の位相差が 0 となる周波数(実測の共振周波数) f_p を求めた。
3. $f = f_r$ における振幅比を求め、インピーダンスの大きさを計算した。
4. 周波数を 2kHz～100kHz の範囲で変化させて、 V_A 、 $\overline{V_B}$ および位相差を記録し、インピーダンスの大きさと位相角を計算し、それぞれ片対数グラフと両対数グラフにプロットした。

図1 LC 共振の測定回路

4 実験結果

4.1 LC 直列共振の場合の測定結果

まず、式(5)にて、前回の実験で測定したインダクタのインダクタンスの実測値 $L = 979 \times 10^{-6} \text{H}$ および公称値 $0.1 \mu\text{F}$ のキャパシタの実測値 $C_{0.1} = 99.27 \times 10^{-9} \text{F}$ を用い、共振周波数の理論値 f_{r0} を計算すると、

$$f_{r0} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = \frac{1}{2 \times \pi \times \sqrt{979 \times 10^{-6} \times 99.27 \times 10^{-9}}} = 16.14 \text{ kHz}$$

となった。回路を組み立てたのち、周波数を f_{r0} の近傍で変化させながら 2 つの波形を観測し、位相差が 0 となる周波数(実測の共振周波数) f_r を求めたところ、

$$f_r = 16.06 \text{ kHz}$$

であった。この f_r と、他に測定した結果を以下の表 1 にまとめた。

表 1. LC 直列共振回路の各測定値

f / kHz	V_A / V	$\overline{V_B} / \text{V}$	$\Delta t / \mu\text{s}$
2	1.94	0.25	-126.0
3	1.92	0.37	-82.0
5	1.84	0.63	-50.0
7	1.72	0.91	-34.0
10	1.33	1.34	-24.0
12	0.96	1.59	-20.0
15	0.26	1.80	-13.4
13	0.73	1.72	-17.6
14	0.50	1.78	-15.6
16	0.08	1.82	-1.8
16.04	0.08	1.84	0.0
17	0.22	1.82	11.4
18	0.41	1.78	12.4
20	0.73	1.66	12.0
25	1.24	1.35	9.8
30	1.50	1.11	8.2
50	1.78	0.62	4.8
70	1.88	0.42	3.5
100	1.90	0.27	2.5

これらの測定値と、式(1)～(4)を用いて計算した理論値のインピーダンスの大きさ $|Z|$ と位相角 ϕ 、実験値のインピーダンス Z_p とその大きさ $|Z_p|$ 、位相角 ϕ_p を次の表 2 にまとめた。

表 2. LC 直列共振回路のインピーダンスおよび位相角

f / kHz	$ Z $ / Ω	ϕ / deg	Z_p / Ω	$ Z_p $ / Ω	ϕ_p / deg
2	783.9	-90.7	-791.5	791.5	-89.9
3	518.6	-88.6	-517.4	517.4	-89.9
5	291.2	-90.0	-290.8	290.8	-89.8
7	187.5	-85.7	-186.6	186.6	-89.7
10	98.7	-87.8	-99.3	99.3	-89.4
12	60.0	-86.4	-60.2	60.2	-89.0
15	14.6	-72.4	-14.9	14.9	-86.1
13	42.1	-82.4	-43.7	43.7	-88.7
14	27.7	-78.6	-28.7	28.7	-88.0
15	14.6	-72.4	-14.9	14.9	-86.1
16	4.6	-10.4	-2.1	2.0	-60.6
16.06	4.5	0.0	-1.3	1.3	-0.5
17	11.8	69.8	10.0	10.0	84.4
18	22.8	80.4	21.4	21.4	87.4
20	43.8	86.4	42.6	42.6	88.7
25	91.3	88.2	89.5	89.8	89.4
30	134.3	88.6	130.9	130.9	89.6
50	285.4	86.4	275.4	275.4	89.8
70	440.7	88.2	407.6	407.6	89.9
100	694.3	89.3	599.0	599.0	89.9

両対数グラフ用紙の横軸に周波数、縦軸にインピーダンスの大きさを、片対数グラフの横軸に周波数、縦軸に位相角をとり、プロットしたものを次に添付した(図 2、図 3)。ちなみに理論値は黒丸、実験値は白丸でプロットしてある。

また、図 2 には横軸に周波数、縦軸に ωL と $1/\omega C$ をとりプロットしたものも書き入れた。

4.2 LC 並列共振の場合の測定結果

回路を組み立てたのち、周波数を理論値 $f_{r0} = 16.14\text{kHz}$ の近傍で変化させながら 2 つの波形を観測し、位相差が 0 となる周波数(実測の共振周波数) f_r を求めたところ、

$$f_r = 15.99 \text{ kHz}$$

であった。この f_r と、他に測定した結果を以下の表 3 にまとめた。

表 3. LC 並列共振回路の各測定値

振動数 f / kHz	V_A / V	$\overline{V_B}$ / V	Δt / μs
2	0.24	1.86	118.0
3	0.37	1.84	80.0
5	0.62	1.76	49.0
7	0.90	1.62	35.0
10	1.33	1.28	24.4
12	1.62	0.90	20.0
13	1.72	0.70	18.0
14	1.80	0.47	16.4
15	1.84	0.25	12.8
15.99	1.88	0.09	0.0
16	1.88	0.09	-0.3
17	1.86	0.24	-11.2
18	1.84	0.43	-12.0
20	1.74	0.77	-11.6
25	1.42	1.29	-9.4
30	1.16	1.54	-8.0
50	0.68	1.82	-5.1
70	0.46	1.88	-3.5
100	0.33	1.90	-2.4

これらの測定値と、式(6)～(8)を用いて計算した理論値のインピーダンスの大きさ $|Z|$ と位相角 ϕ 、実験値のインピーダンス Z_p とその大きさ $|Z_p|$ 、位相角 ϕ_p を次の表 4 にまとめた。

表 4. LC 並列共振回路のインピーダンスと位相角

f / kHz	$ Z / \Omega$	Φ / deg	Z_p / Ω	$ Z_p / \Omega$	Φ_p / deg
2	13.0	85.0	12.5	12.5	85.4
3	19.9	86.4	19.1	19.1	87.0
5	35.2	88.2	34.0	34.0	88.3
7	55.5	88.2	53.0	53.0	88.9
10	103.3	87.8	99.8	99.8	89.4
12	178.1	86.4	165.0	165.0	89.7
13	245.6	84.2	227.5	227.5	89.7
14	379.1	82.7	347.3	347.3	89.8
15	743.5	69.1	675.1	675.1	89.9
15.99	2123.5	0.0	5188.5	5188.5	90.0
16	2143.0	-1.7	5551.1	5551.1	90.0
17	783.4	-68.5	-960.3	960.3	-89.9
18	427.3	-77.8	-455.3	455.3	-89.9
20	225.2	-83.5	-230.0	230.0	-89.8
25	109.4	-84.6	-110.0	110.0	-89.5
30	74.9	-86.4	-75.2	75.2	-89.2
50	37.1	-91.8	-35.8	35.8	-88.4
70	24.3	-87.7	-24.2	24.2	-87.6
100	17.2	-87.8	-16.5	16.5	-86.5

両対数グラフ用紙の横軸に周波数、縦軸にインピーダンスの大きさを、片対数グラフの横軸に周波数、縦軸に位相角をとり、プロットしたものを次に添付した(図4、図5)。ちなみに理論値は黒丸、実験値は白丸でプロットしてある。

また、図2には横軸に周波数、縦軸に ωL と $1/\omega C$ をとりプロットしたものも書き入れた。

4.3 Q 値

式(14)で Q 値を求める。

LC 直列共振回路の場合、共振点におけるインピーダンスの大きさは 4.5Ω であるから、インピーダンスの大きさがその $\sqrt{2}$ 倍の 6.4Ω となる周波数 f_1, f_2 は、図 2 から読み取ると、

$$f_1 = 15.7 \text{ kHz}, \quad f_2 = 16.5 \text{ kHz}$$

であった。共振周波数 $f_0 = 16.06\text{kHz}$ より、

$$Q = \frac{16.06}{16.5 - 15.7} = 20.0$$

と導くことが出来た。

LC 直列共振回路の場合、共振点におけるインピーダンスの大きさは 2123.5Ω であるから、インピーダンスの大きさがその $1/\sqrt{2}$ 倍の 1501.5Ω となる周波数 f_1, f_2 は、図 4 から読み取ると、

$$f_1 = 15.7 \text{ kHz}, \quad f_2 = 16.4 \text{ kHz}$$

であった。共振周波数 $f_0 = 15.99\text{kHz}$ より、

$$Q = \frac{15.99}{16.4 - 15.7} = 22.8$$

と導くことが出来た。

5 考察

5.1 LC 直列共振回路

LC 直列共振回路において、図 2 をみると、インピーダンスの大きさは共振点近傍ではほぼ理論値通りだが、周波数が高いところと低い所は大分離れてしまっている。それに対し位相角は、図 3 をみると、共振点付近で値がずれているが、周波数が高い所と低い所はほぼ理論値通りになっている。

ここで、下に前回の実験課題 2 において、LCR メータで、インダクタ及びキャパシタのインダクタンス L とキャパシタンス C とその ESR をいくつかの周波数で測定したときの測定値を引用した。

表 5. 実験課題 2 にて LCR メータで測定したインダクタンスとキャパシタンスおよび ESR

周波数 f /kHz	L / μ H	インダクタの ESR / Ω	C /nF	キャパシタの ESR /m Ω
1	994.4	1.50	101.36	6.76
10	979.0	2.05	99.28	1.58
100	975.2	6.56	97.91	0.05

この表をみると、周波数が小さいときはキャパシタの ESR が大きくなっており、周波数が高いときはインダクタの ESR が大きくなっている。インダクタンスやキャパシタンスは周波数が小さくなるとその値はともに大きくなっているが、いずれもあまり影響はないと考えた。

LC 直列共振回路について、インピーダンスの大きさが、周波数が高い所と低い所は理論値からずれてしまったのは、この ESR が原因だと考えた。直列回路なのでダイレクトに影響してしまうからだ。

5.2 LC 並列共振回路

LC 並列共振回路について、LC 直列共振回路と同様に図 4、図 5 を見てみると、共振点近傍では理論値から大分離れており、周波数が高い所と低い所はほぼ理論値通りになっている。そこで、表 5 を参照すると、インピーダンスの大きさが、周波数が高い所と低い所は理論値からあまりずれなかったのは、並列回路であるおかげで、インダクタの ESR とキャパシタの ESR がお互いに打ち消しあえたからではないかと考えた。

また、これはすべての図でいえることだが、実験値は理論値に比べると、共振点付近ではなだらかな変化になっている。これは Q 値が影響していると考えられる。インダクタやキ

ャパシタのほかに、トランスなども接続しているために、途中で幾分かのエネルギーが逃げていってしまっているのだ。

6 感想

実験時、最初間違って $1\text{k}\Omega$ の抵抗を使って行ってしまう、やり直しになってしまったのがつらかった。しかし、最終的には良い実験結果を得られたのでよかった。