

1 目的

抵抗とキャパシタの直列回路による過渡応答をオシロスコープで観測し、時定数の実測値を計算値と比較する。また、同じ回路を交流電源につなげ、ローパスフィルタや電圧、位相角について実測値を求め、計算値と比較する。

2 原理

2.1 RC の過渡応答

RC 直列回路に直流電流をつないだ場合を考える。下の図 1 のような回路を組むとき、流れる電流 i 、キャパシタ両端電圧 V_C 、抵抗両端電圧 V_R は各々以下のように表せる。

$$i = \frac{E}{R} \exp\left(-\frac{t}{RC}\right)$$

$$V_C = E \left\{ 1 - \exp\left(-\frac{t}{RC}\right) \right\}$$

$$V_R = E \exp\left(-\frac{t}{RC}\right)$$

この上の式において、 $t = RC$ のとき、キャパシタまたは抵抗両端電圧は、

$$V_C = E(1 - e^{-1}) \cong 0.63E$$

$$V_R = E e^{-1} \cong 0.37E$$

となり、この時間を回路の時定数とよび、記号 τ で表す。

図 1 RC 直列回路の過渡応答

2.2 RC ローパスフィルタ

抵抗 R とキャパシタ C の直列回路に交流電源をつなぐ。この回路の入力電圧を V_{in} 、出力電圧 V_C をととしたとき、

$$V_C = \frac{1/j\omega C}{R + 1/j\omega C} V_{in} = \frac{1 - j\omega RC}{1 + (\omega RC)^2} V_{in}$$

となり、入力電圧と出力電圧の比(伝達関数)の絶対値およびを基準にしたの位相角は次式で表される。

$$\left| \frac{V_C}{V_{in}} \right| = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{f}{f_c} \right)^2}} \quad (1)$$

$$\phi_C = \tan^{-1} \left(-\frac{f}{f_c} \right) \quad (2)$$

ただし、ここで f_c は $\omega_c RC = 1$ をみたす周波数、

$$f_c = \frac{1}{2\pi RC} \quad (3)$$

であり、カットオフ周波数と呼ばれる。周波数がカットオフ周波数に等しいとき、 $|V_C/V_{in}| = 1/\sqrt{2} (= 3\text{dB})$ となり、このときの位相角は $\phi_C = -45^\circ$ となる。

周波数が低い場合と高い場合における入出力電圧比や位相角について。式(1)において、低周波領域では、

$$\left| \frac{V_C}{V_{in}} \right| \rightarrow 1$$

となり、一方高周波領域では

$$\left| \frac{V_C}{V_{in}} \right| \rightarrow 0$$

となる。これより、定性的に言えば、 V_{in} は抵抗とキャパシタのインピーダンスの比にしたがって分圧されるので、低周波でキャパシタのインピーダンスが大きいときは、 $V_{in} \cong V_C$ 、すなわち $|V_C/V_{in}| \cong 1$ であり、また V_{in} を基準とした V_C の位相差 ϕ_C は 0 に近似できる。周波数が高くなり、インピーダンスが小さくなっていくと、 $V_{in} \rightarrow V_R$ となる。すなわち $|V_C/V_{in}| \rightarrow 0$ であり、 ϕ_C は -90° に近づくのである。

3 実験方法

3.1 ローパスフィルタの測定手順

1. 抵抗に 10Ω 、キャパシタに $0.01\mu\text{F}$ を用い、次の図 2 に従って回路を組んだ。回路の電源としてはファンクションジェネレータ (FG) をつないだ。
2. FG の発信波形を sin 波とし、オシロスコープを適切に設定した。CH2 の反転は OFF とした。
3. CH1 では V_{in} 、CH2 では V_C を観測するようにプローブをつないだ。
4. RLC メーターで実測した抵抗値と静電容量の値からカットオフ周波数を計算した。
5. FG を ON にし、周波数を計算したカットオフ周波数に、出力を pp 値で 10V にした。
6. カットオフ周波数での入力電圧 V_{in} と V_C および V_{in} を基準とした V_C 波形の位相差を測定した。
7. 測定した電圧と位相差より、 $|V_C/V_{in}|$ とゲイン、 ϕ_C を計算した。
8. ゲインと位相角を各々片変数グラフ用紙にプロットした。
9. 周波数を 100Hz~50kHz の範囲で適当な感覚で変え、以上の測定を繰り返した。

3.2 過渡応答の測定手順

1. ローパスフィルタの際と同じ抵抗とキャパシタを用いて測定を行った。実測した抵抗値と静電容量の値から、時定数 τ_0 の値を計算した。
2. 図 1 の右の回路をくみ、FG の GND はキャパシタ側に接続した。
3. オシロスコープの入力接合を DC とし、CH2 の反転は OFF とした。CH1 で FG の入力信号 V_{in} 、CH2 でキャパシタ両端電圧を観測するようプローブを接続した。
4. FG を Square モードに設定し、矩形波の周期が時定数 τ_0 の 20 倍程度となるように発振周波数を設定した。
5. FG の出力を High:+4V、Low:0V に設定した。
6. CH1 の電圧レンジを 2V/DIV とし、GND レベルを電圧軸の中央よりも上の適当な目盛に合わせた。CH2 の電圧レンジは 1V/DIV として、GND レベルは中央よりも 3DIV 下の目盛りに合わせた。
7. CH2 の波形が充電過程の始まりからほぼ飽和した領域まで表示されるよう、時間感度設定や HORIZON POSITION を調整した。
8. カーソルメニューの項目を時間にし、CH2 の波形についての実際の時定数 τ_C を求めた。
9. τ_C の前後で、CH1 および CH2 の波形からカーソルを使って数点ずつ電圧と時間を測定し、方眼紙にスケッチした。

10.FG の出力を OFF にし、抵抗とキャパシタを入れ替えたのち、同様の手順で τ_R を測定し、スケッチした。

図 2 ローパスフィルタ回路

4 実験結果

4.1 ローパスフィルタの測定

最初に、LCR メーターで測定した $10\text{k}\Omega$ の抵抗と、 $0.01\text{ }\mu\text{F}$ のキャパシタは、

$$R = 10.012\text{k}\Omega$$

$$C = 9.994\text{nF}$$

であった。これより、カットオフ周波数は、

$$f_c = \frac{1}{2\pi \times 10.012 \times 10^3 \times 9.994 \times 10^{-9}} = 1590.6\text{Hz}$$

と導いた。これを踏まえ、先ほど述べた手順のとおりに測定して得られた値とともに、式を用いて算出した $|V_c/V_{in}|$ とゲイン、位相角の値も以下の表にまとめた。

表 1. ローパスフィルタの測定結果

f / kHz	V_{in} / V	V_c / V	Δt / μs	$ V_c/V_{in} $	ゲイン/dB	Φ_c / deg
100	10.0	10.0	-120.0	1.000	0.00	-4.3
200	10.0	10.0	-100.0	1.000	0.00	-7.2
300	10.0	10.0	-100.0	1.000	0.00	-10.8
500	10.1	9.5	-100.0	0.943	-0.51	-18.0
1000	10.0	8.4	-86.0	0.840	-1.51	-31.0
1590.6	10.0	7.0	-76.0	0.704	-3.05	-43.5
2000	10.0	6.2	-72.0	0.624	-4.10	-51.8
3000	10.0	4.6	-56.0	0.464	-6.67	-60.5
5000	10.0	3.0	-40.0	0.300	-10.46	-72.0
10000	10.0	1.6	-22.0	0.156	-16.14	-79.2
20000	10.0	0.8	-11.4	0.080	-21.94	-82.1
30000	10.0	0.5	-7.5	0.053	-25.55	-81.0
50000	10.0	0.3	-4.6	0.032	-29.90	-82.8

また次に、 $|V_c/V_{in}|$ とゲイン、位相角 Φ_c の実験値と、式を用いて算出した理論値について、次の表にまとめた。

表 2. ローパスフィルタの実験値と理論値

f / kHz	実験値			理論値		
	$ V_C/V_{in} $	ゲイン/dB	ϕ_C / deg	$ V_C/V_{in} $	ゲイン/dB	ϕ_C / deg
100	1.000	0.00	-4.3	0.998	-0.02	-3.6
200	1.000	0.00	-7.2	0.992	-0.07	-7.2
300	1.000	0.00	-10.8	0.983	-0.15	-10.7
500	0.943	-0.51	-18.0	0.954	-0.41	-17.5
1000	0.840	-1.51	-31.0	0.847	-1.45	-32.2
1590.6	0.704	-3.05	-43.5	0.707	-3.01	-45.0
2000	0.624	-4.10	-51.8	0.622	-4.12	-51.5
3000	0.464	-6.67	-60.5	0.468	-6.59	-62.1
5000	0.300	-10.46	-72.0	0.303	-10.37	-72.4
10000	0.156	-16.14	-79.2	0.157	-16.08	-81.0
20000	0.080	-21.94	-82.1	0.079	-22.02	-85.5
30000	0.053	-25.55	-81.0	0.053	-25.52	-87.0
50000	0.032	-29.90	-82.8	0.032	-29.95	-88.2

縦軸を周波数、横軸をゲインおよび位相角とし、各々片対数グラフ用紙にプロットし、次に添付した。実験値は黒丸、理論値は白丸でプロットしてある(図 3、図 4)。

4.2 過渡応答の測定

時定数 τ_0 の理論値は、

$$\tau_0 = 10.012 \times 10^3 \times 9.994 \times 10^{-9} = 1.00 \times 10^{-4}$$

と算出できた。先に述べた手順で得られた測定結果を、以下の2つの表にまとめた。

表 3. キャパシタの過渡応答

入力信号 V_{in}		キャパシタの両端電圧	
$t / \mu s$	V / V	$t / \mu s$	V / V
0	0.00	0	0.00
0	0.00	50	1.52
400	4.00	102	2.52
		200	3.44
		300	3.80
		400	3.96

表 4. 抵抗の過渡応答

入力信号 V_{in}		キャパシタの両端電圧	
$t / \mu s$	V / V	$t / \mu s$	V / V
0	0.00	4	3.96
0	0.00	50	2.44
400	4.00	100	1.52
		104	1.48
		200	0.56
		300	0.24
		400	0.08

これより、実際の時定数 τ_C 、 τ_R は、

$$\tau_C = 1.02 \times 10^{-4}$$

$$\tau_R = 1.04 \times 10^{-4}$$

と求めることが出来た。また、これらの測定結果より、この波形を各々方眼紙にスケッチし、次に添付した(図5、図6)。

5 考察

5.1 ローパスフィルタについて

図3をみると、ゲインに関しては実験値と理論値とではほぼ同じ値をとっており、大体正確な測定ができたことが分かる。どちらの値にしても、 $f = 100\text{Hz} \sim 1\text{kHz}$ においては曲線、 $f = 1\text{kHz} \sim 10\text{kHz}$ においてはやや曲線、 $f = 10\text{kHz} \sim 50\text{kHz}$ においては直線のグラフになっている。つまり、カットオフ周波数を境にして、低周波領域ではほとんど減衰せず、高周波領域では大きく減衰している。また、原理でも述べた、低周波領域において電圧比 $|V_c/V_{in}|$ は1に近づき、高周波領域において電圧比 $|V_c/V_{in}|$ は0に近づくというのは、表1をみると、実験値についても理論値についてもほぼ成り立っていることが分かる。

次に位相角について、図4をみる。低周波領域では実験値と理論値がほぼ一致しているが、高周波領域では大きくずれてしまっていることが分かる。50kHzのような高周波領域では、先ほど述べたように減衰がおきるので、このような誤差が生まれたのかもしれない。原理において、低周波領域では位相角の値は 0° に近づき、高周波領域では 90° に近づくと述べたが、理論値でも実験値でもその傾向は述べたほどは見られない。どの周波数領域でもグラフの傾きはある。また、実験値については、高周波領域では約 85° に近づいている。原因ははっきりと分からないが、おそらく様々な器具を使っているので、多少の誤差がその間で生まれてしまったのかもしれない。

5.2 過渡応答

先に述べたように、時定数の理論値は、 $\tau_0 = 1.00 \times 10^{-4}$ であり、実験値は、 $\tau_c = 1.02 \times 10^{-4}$ 、 $\tau_R = 1.04 \times 10^{-4}$ であった。いずれも5%以下の誤差に収まった。

また、時定数 τ_c と τ_R について、2%の値の違いはあるものの、器具の内部抵抗や減衰を考慮すると、この二つの時定数は一致するといつてよいと思う。

抵抗値Rと静電容量Cの積RCの次元が何か、考える。抵抗値Rの単位は一般的に Ω だが、これを国際単位系で表すと、

$$\Omega = \frac{V}{A} = \frac{\text{kg} \cdot \text{m}^2}{\text{s}^3 \text{A}^2}$$

となる。また、静電容量Cの容量は一般にFで表すが、同様に国際単位系で表すと

$$\text{F} = \frac{\text{A} \cdot \text{s}}{V} = \frac{\text{s}^4 \text{A}^2}{\text{kg} \cdot \text{m}^2}$$

となる。これより、抵抗値Rと静電容量Cの積RCの単位は、

$$\frac{\text{kg} \cdot \text{m}^2}{\text{s}^3 \text{A}^2} \times \frac{\text{s}^4 \text{A}^2}{\text{kg} \cdot \text{m}^2} = \text{s}$$

であり、次元は時間になっている。

6 感想

今回は珍しく4時より早く実験が終わった。4回目にして、器具の使い方や考え方によりよく慣れてきた気がする。

今回の実験では、実験値だけでなく理論値でも原理通りになっておらず、困惑した。