

Exercice 1 : modèles ARIMA

On dit qu'une série temporelle X_t est un processus ARIMA(p,d,q) si elle satisfait l'équation $(1 - \phi_1 B - \dots - \phi_p B^p)(1 - B)^d x_t = (1 + \theta_1 B + \dots + \theta_q B^q) \epsilon_t$ où B est l'opérateur de retard et ϵ_t un bruit blanc. Si une telle série existe, elle n'est en général pas stationnaire. La commande `arima.sim` permet de simuler de telles séries sous R.

Répondez aux questions suivantes :

- 1°) Simuler et tracer un processus AR(1) de paramètre $\phi_1 = 0,3$, puis $\phi_1 = 0,8$, puis $\phi_1 = -0,8$. Commenter. Donner leurs fonctions d'autocorrélations empiriques.
- 2°) Simuler et tracer 100 observations d'un processus MA(3) de paramètres $\theta_1 = 0,9$, $\theta_2 = 0,6$, $\theta_3 = 0,9$ puis tracer sa fonction d'autocorrélation empirique.
- 3°) Simuler 200 observations du modèle suivant :
 $(1 - 0,8B)X_t = (1 + 0,3B + 0,6B^2)\epsilon_t; (\epsilon_t) \sim \mathcal{N}(0, 1, 5) i.i.d$
On essaie de retrouver les coefficients à partir de la série simulée : Ajuster un modèle ARIMA(p,d,q) à la série simulée à l'aide de la commande "arima". Cette commande contient entre autres les résidus de la modélisation : afficher le graphe de la fonction d'autocorrélation empirique des résidus.

Exercice 2 : GNP US

On s'intéresse au GNP (gross national product) américain, et plus précisément au taux de croissance trimestriel du GNP US entre le deuxième trimestre 1947 et le premier trimestre 1991.

- 1°) Importer ce tableau sous R, créer la série temporelle associée (ts) et tracer-la.
- 2°) Faire un test de blancheur (Box.test). Que peut-on conclure ?
- 3°) Calculer et afficher la fonction d'auto-corrélation de la série jusqu'à $h = 12$. Commenter.
- 4°) Ajuster un modèle AR à la série (ar¹). Donner les paramètres estimés.
- 5°) Etudier les résidus de la modélisation AR : tracer leur graphe, leur fonction d'autocorrélation empirique, et faire un test de blancheur. Les résidus sont-ils gaussiens ? (shapiro.test²).
- 6°) Ajuster un modèle MA à la série. Donner les paramètres estimés. Etudier les résidus de cette modélisation.
- 7°) Que donne le résultat d'un auto-arima ?
- 8°) Quel modèle choisiriez-vous ?

1. Le choix du nombre de paramètres p de cette modélisation est basé sur le critère d'information d'Akaike (AIC), qui pénalise linéairement la méthode du maximum de vraisemblance en p.

2. Cette commande retourne la p-value du test de Shapiro-Wilk, qui teste l'hypothèse H_0 que l'échantillon testé est un échantillon gaussien.