Capítulo 1

Separación de variables genérico

Supongamos que estamos en $\mathbb{R}^2$, y nos piden resolver mediante separación de variables de la siguiente forma:

Ejercicio: Encuentra las soluciones de

$$\Delta u = 0 \tag{1.1}$$

usando método de separación de variables. Clasifica las soluciones en función del signo de autovalor λ.

Lo primero que tenemos que hacer es reescribir la ecuación teniendo en cuenta que u depende de dos variables.

$$\Delta u = 0 \longleftrightarrow \frac{\partial u^2}{\partial x^2} + \frac{\partial u^2}{\partial y^2} = 0 \tag{1.2}$$

Ahora separamos u en dos variables, que serán x e y.

$$u(x, y) = v(x)w(y) \tag{1.3}$$

A esta nueva representación le aplicamos la ecuación que nos piden, en (1.1), y llegamos a lo siguiente:

$$\begin{cases} \frac{\partial u^2}{\partial x^2} = v''(x)w(y) \\ \frac{\partial u^2}{\partial y^2} = v(x)w''(y) \end{cases} \longleftrightarrow \frac{\partial u^2}{\partial x^2} + \frac{\mathrm{d}u^2}{\mathrm{d}y^2} = 0 \longleftrightarrow v''(x)w(y) + v(x)w''(y) = 0 \quad \frac{V''(x)}{V(x)} = \frac{-w''(y)}{w(y)} = \lambda$$

Ahora dependiendo del valor de λ, tendremos unos casos u otros.

- Si λ=0:

$$v(x) = Ax + B$$
$$w(y) = Cy + D$$

- Si $\lambda > 0$:

$$w(y) = A\cos\left(\sqrt{\lambda}y\right) + B\sin\left(\sqrt{\lambda}y\right)$$
$$v(x) = Ce^{(\sqrt{\lambda}x)} + De^{-(\sqrt{\lambda}x)}$$

- Si $\lambda < 0$, se cambian los papeles del apartado anterior, y teniendo en cuenta que ahora dentro de la raiz tenemos $-\lambda$.

Para llegar a esto se han usado métodos de resolución de EDOs. Una vez llegado aquí, se aplican a estas soluciones las condiciones que tengamos y nos quedará siempre una única opción.

Capítulo 2

Algunos ejercicios resueltos por mi

Sea $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < a, 0 < y < b\}$ *resolver el problema con condiciones de contorno mixtas:*

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{en } \Omega \\ u(x,0) = 0, u(x,b) = g(x) & \text{para } 0 \leq x \leq a \\ u(0,y) = u_x(a,y) = 0 & \text{para } 0 \leq y \leq b \end{cases}$$

donde $g \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$*, g(0)=0, g'(a)=0,* $(u_x = \frac{\partial u}{\partial x})$

Empezamos haciendo el estudio de casos de valores de λ, y nos saldrá que el único caso posible es el de $\lambda < 0$. En la parte espacial, tendríamos

$$V(x) = A\cos\Big(\sqrt{|\lambda|}x\Big) + B\sin\Big(\sqrt{|\lambda|}x\Big) \quad V(0) = 0 \longleftrightarrow A = 0$$

$$V'(x) = \sqrt{|\lambda|}B\cos(|\lambda|x) \xrightarrow{x=a} \sqrt{|\lambda|}B\cos(|\lambda|a) = 0 \longleftrightarrow \sqrt{|\lambda|}a = (n+\frac{1}{2})\pi \longleftrightarrow \sqrt{|\lambda|} = \frac{(n+\frac{1}{2})\pi}{a}$$

$$V(x) = A\sin\left(\frac{(n+\frac{1}{2})\pi}{a}x\right)$$

Ahora, para la parte que corresponde a la Y

$$W(y) = Ce^{(\sqrt{|\lambda|}y)} + De^{-(\sqrt{|\lambda|}y)} \xrightarrow{y=0,w=0} C + D = 0$$

$$W(y) = Ce^{(\frac{(n+\frac{1}{2})\pi}{a}y)} - Ce^{-(\frac{(n+\frac{1}{2})\pi}{a}y)} = C(e^{(\frac{(n+\frac{1}{2})\pi}{a}y)} - e^{-(\frac{(n+\frac{1}{2})\pi}{a}y)})$$

Esto, por definición de seno hiperbólico, nos queda $W(y) = 2C\sinh\left(\frac{(n+\frac{1}{2})\pi}{a}\right)$

Ahora, para formar nuestra solución definitiva, multiplicamos V y W, pero con la particularidad de que por comodidad el producto de las constantes (*A por parte de V, 2C por parte de W*) pasará a ser denotado por A, y no perderemos nada en este paso pues siguen siendo constantes.

Ahora, construimos nuestra solución final

$$u(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin\left(\frac{(n+\frac{1}{2})\pi}{a}x\right)\sinh\left(\frac{(n+\frac{1}{2})\pi}{a}y\right)$$ Si ahora le aplicamos la condición u(x,b)=g(x)

$$u(x,b)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin\left(\frac{(n+\frac{1}{2})=g(x)\pi}{a}x\right)\sinh\left(\frac{(n+\frac{1}{2})\pi}{a}b\right)$$

Donde la parte que depende del sinh ahora es una constante y la agrupamos con A_n

$$u(x,b)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin\left(\frac{(n+\frac{1}{2})\pi}{a}x\right)=g(x)$$

Por el enunciado sabemos que en x=0 la funcion vale 0, y que si derivamos y evaluamos en x=a, también vale 0

$$u(0,b)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin\left(\frac{(n+\frac{1}{2})\pi}{a}0\right)=g(0)=0 \text{ (Obvio se cumple pues el seno anula todo)}$$

$$u'(x,b)=A_n\frac{(n+\frac{1}{2})\pi}{a}\cos\left(\frac{(n+\frac{1}{2})\pi}{a}x\right)$$

$$u'(a,b)=A_n\frac{(n+\frac{1}{2})\pi}{a}\cos\left(\frac{(n+\frac{1}{2})\pi}{\cancel{a}}\cancel{a}\right)=g'(a)=0$$

Que también es cierto puesto que ese coseno se anula siempre, luego solo nos falta calcular A_n

$$A_n=\int_0^a g(x)\sin\left(\frac{(n+\frac{1}{2})\pi}{a}x\right)$$

Y aquí acaba el ejercicio puesto que no tenemos ninguna g(x) específica