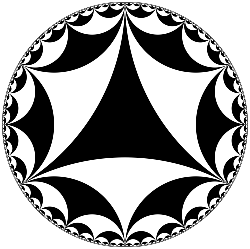
Triangles avec somme angulaire 270 degrés ?
Dreiecke mit Winkelsumme 270 Grad ?

Ruth Kellerhals

Leonardo Math Camp – Octobre 2023

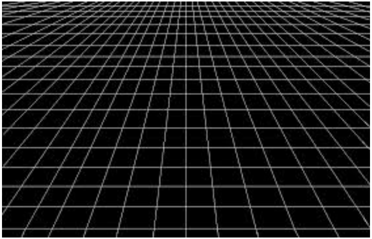


Postulats de géométrie d'Euclide –
Euklid's Postulate der Geometrie ($\sim$ 300 a.D.)

- Zwei Punkte P, Q können durch eine Strecke verbunden werden
- Jede Strecke kann zu einer Geraden verlängert werden
- Zu jedem Mittelpunkt P und jedem Abstand gibt es einen Kreis
- Alle rechten Winkel sind gleich
- *Parallelenpostulat:*
  Zu einer Geraden g und einem Punkt P, der nicht auf g liegt, existiert genau eine Gerade h durch P, die parallel zu g ist

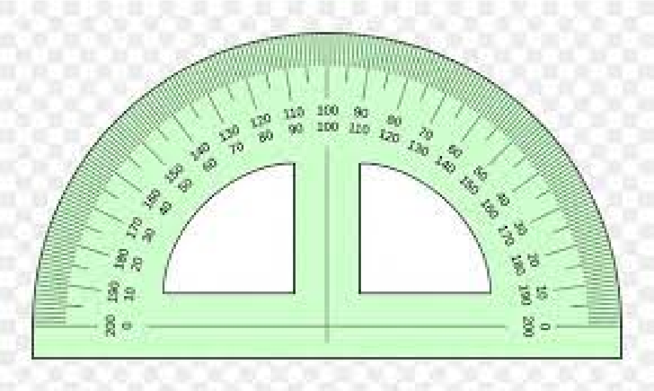
Dabei heissen zwei Geraden g und h *parallel*, wenn sie in derselben Ebene liegen und einander nicht schneiden

Reformulation du 5ème axiome d'Euclide – Umformulierung von Euklid's Parallelenaxiom



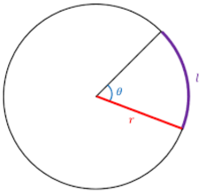
- In jedem Dreieck ist die Winkelsumme gleich 180° oder π
- Zu jedem Dreieck gibt es ein *ähnliches* Dreieck jeder Grösse
- Es gibt Rechtecke und (Hyper-)Würfel
- Je drei nicht auf einer Geraden liegende Punkte bestimmen einen Kreis

Mesurer un angle en grades –
das Messen eines Winkels im Gradmass



Angle, distance sphérique et π – Winkel, sphärischer Abstand und π

- Sei C_r eine Kreislinie vom Radius r mit Zentrum O, mit Umfang $U(r)$ und mit Durchmesser $2r$
- Die Zahl π ist definiert durch die Konstante $\pi = \frac{U(r)}{2r}$ ("periphereia") und entspricht $180°$
- Die *sphärische Distanz* von zwei Punkten A, B ist definiert durch die Bogenlänge $d(A,B) = l = 2\pi r \cdot \frac{\theta°}{360°} \leq \pi$, wobei $\theta° = \angle(A,B)$ der Winkel im *Gradmass* zwischen den Strahlen von O nach A respektive von O nach B auf der Kreislinie C_r ist. Im *Bogenmass* gilt $d(A,B) = l = \theta \cdot r$ für $A, B \in C_r$

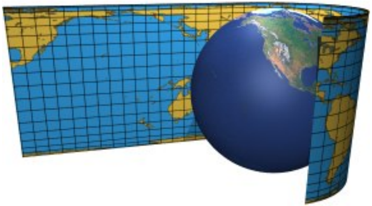


Distance et aire de la sphère $\mathbb{S}$ – Distanz und Fläche der Sphäre $\mathbb{S}$

Es sei $\mathbb{S}$ die *Einheitssphäre* gegeben durch die Oberfläche eines Balls vom Radius 1. Für zwei Punkte $A, B \in \mathbb{S}$ ist $d(A,B) = \theta \leq \pi$, d.h. gleich dem entsprechenden Innenwinkel.

- Der Umfang (périmètre) jeder Grosskreislinie der Gestalt C_1 ist gleich 2π (oder $360°$)
- Für die Fläche der Einheitssphäre $\mathbb{S}$ (oder das Volumen der Oberfläche einer Einheitskugel) gilt:

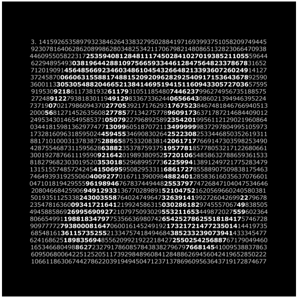
$$\operatorname{vol}\mathbb{S} = 4\pi$$



La somme angulaire 180° en radians –
Die Winkelsumme 180° im Bogenmass

Nach Euklid's Axiomen haben Dreiecke stets Winkelsumme gleich 180°. Im Bogenmass entspricht dies der Einheit π. Sehr grob gilt:

$\frac{22}{7} \approx 3{,}14285714$ oder $\frac{355}{113} \approx 3{,}1415929$, und etwas genauer...



Die Zahl π ist *transzendent*, da π *keine* algebraische Gleichung der Form $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$ über den ganzen Zahlen erfüllt. *Hierzu ein kleiner Exkurs...*

Des nombres algébriques et transcendants – Algebraische und transzendente Zahlen

Somme angulaire $= \pi$? Winkelsumme $= \pi$?
Carl Friedrich Gauss

Haben auch **grosse** Dreiecke immer Winkelsumme gleich 180° oder $\pi \approx 3,14159265358979323846264338327950288419716939 9\ldots$?

Zwischen 1818 und 1826 leitete Gauss die Hannoversche Landesvermessung und entwickelte dabei Verfahren mit erheblich gesteigerter Genauigkeit (Sextant). In diesem Zusammenhang entstand die Meinung (von Wolfgang Sartorius von Waltershausen), er habe experimentell nach einer Krümmung des Raumes gesucht, indem er die Winkelsumme in einem Dreieck vermass, das vom Brocken im Harz, dem Inselsberg im Thüringer Wald und dem Hohen Hagen bei Göttingen gebildet wird. Sie wird heute mehrheitlich als Legende angesehen, auch wenn die Möglichkeit, Gauss habe nach Abweichungen vom üblichen Wert der Winkelsumme von 180 Grad gesucht, nicht mit letzter Konsequenz ausgeschlossen werden kann.

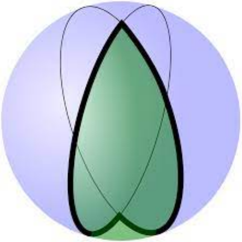
De la géométrie euclidienne à la géométrie non euclidienne
Von der euklidischen zur nichteuklidischen Geometrie

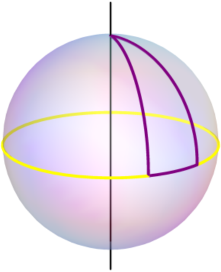
De l'espace plat vers des espaces courbés
Vom Flachland zu gekrümmten Welten

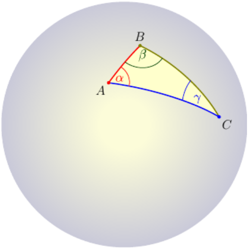
Géométrie sphérique et –
Sphärische Geometrie – Ludwig Schläfli

15.01.1814 – 20.03.1895

Courbure positive et triangles sphériques sur $\mathbb{S}$ – Positive Krümmung und sphärische Dreiecke auf $\mathbb{S}$

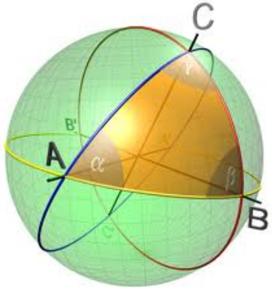






La formule de l'excès pour des triangles sphériques – Die Exzessformel für sphärische Dreiecke

Die Fläche F eines sphärischen Dreiecks auf $\mathbb{S}$ *mit Winkeln* α, β, γ *ist gleich* $F = \alpha + \beta + \gamma - \pi$



Der Eckpunkt C zum Winkel γ liefert das Zweieck $D(\gamma)$ mit Fläche

$$f(\gamma) = \frac{\gamma}{2\pi}\mathrm{vol}(\mathbb{S}) = 2\gamma \quad \text{im Bogenmass, und somit}$$

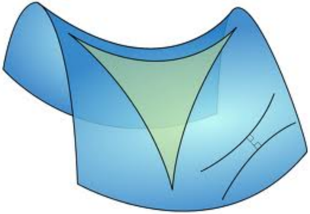
$$2\left[f(\alpha) - F + f(\beta) - F + f(\gamma) - F \right] + 2F = \mathrm{vol}(\mathbb{S}) = 4\pi$$

Courbure négative et géométrie hyperbolique – Negative Krümmung und hyperbolische Geometrie

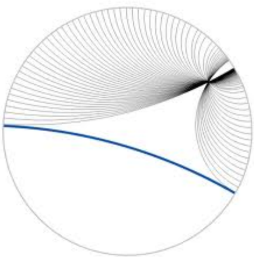
Janos Bolyai
1802–1860

Nikolai Iwanowitsch Lobatschewski
1792–1856

Un modèle de la géométrie hyperbolique – ein Modell der hyperbolischen Geometrie

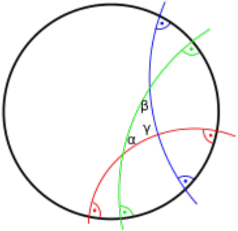


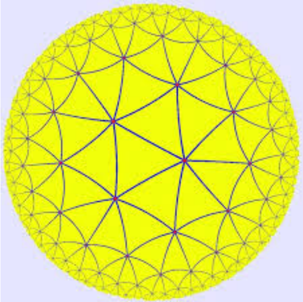
ein hyperbolisches Dreieck



∞ viele parallele Geraden

Le plan hyperbolique dans le disque conforme –
die hyperbolische Ebene im winkeltreuen Scheibenmodell





Hyperbolische Distanz

$$d_{\mathbb{H}}(0,P) = \log \frac{1+|P|}{1-|P|} \quad , \quad |P| = d_{\mathbb{E}}(0,P)$$

Hyperbolische Geraden sind Durchmesser oder Kreisbögen senkrecht zur Scheibe

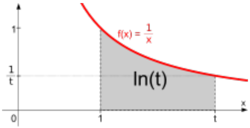
Le logarithme naturel – der natürliche Logarithmus

Der Logarithmus $\log x$ oder $\ln(x)$ ist als Umkehrfunktion zur Exponentialfunktion e^x mit $e^{\log x} = 1$ für $x > 0$ definiert und erfüllt

$$\log(xy) = \log x + \log y \quad , \quad \log 1 = 0 \quad , \quad \frac{d}{dx} \log x = \frac{1}{x}$$

und kann angenähert werden via

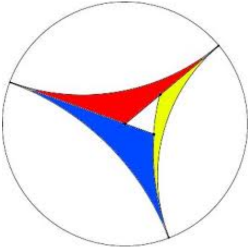
$$\log x = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \frac{(x-1)^4}{4} + - \cdots$$



La formule du défaut pour un triangle hyperbolique – die Defektformel für ein hyperbolisches Dreieck

Die Fläche F eines hyperbolischen Dreiecks mit Winkeln α, β, γ ist gleich $F = \pi - (\alpha + \beta + \gamma)$

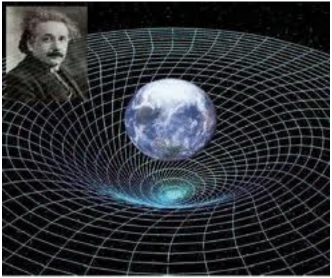
Zum Beweis ergänze zu und vergleiche mit einem *idealen* Dreieck mit unendlich fernen Eckpunkten, lauter Nullwinkeln und Fläche π entsprechend dem sphärischen Fall



Fiche pour le plan hyperbolique $\mathbb{H}$ – Merkblatt zur hyperbolischen Ebene $\mathbb{H}$

- Zu einem Punkt P und einer hyperbolischen Geraden g in $\mathbb{H}$ gibt es unendlich viele parallele Geraden durch P zu g
- $\mathbb{H}$ besitzt einen sichtbaren Rand von unendlich fernen Punkten
- In jedem Dreieck in $\mathbb{H}$ ist die Winkelsumme kleiner als π
- Es gibt keine hyperbolischen Rechtecke und (Hyper-)Würfel

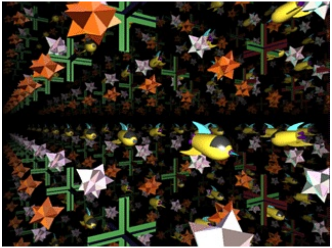
A grande échelle des espaces sont courbés –
Im Grossen sind Räume gekrümmt

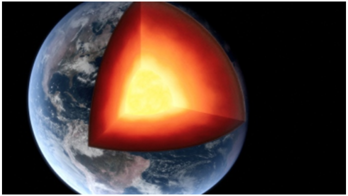


Meteorologie, Luftfahrt...

Kosmologie, Schwarze Löcher...

Quelle courbure pour notre univers ambient ? – Welche Krümmung für unser Universum ?



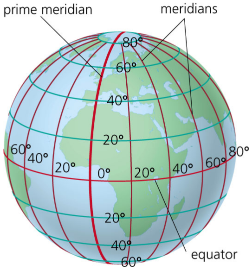


De masses, d’unités et du mètre des archives – Von Massen, Einheiten und dem Urmeter

Ist es einfacher *Längen* zu messen und mit den Regeln der Trigonometrie im Dreieck auf die Winkelsumme zu schliessen ?

Als *Urmeter* bezeichnet man den Massstab der in Paris 1799 erstmals eingeführten dezimalmetrischen Längeneinheit;

er ist definiert als der zehnmillionste Teil des Meridianbogens vom Pol zum Äquator; der Urmeter ist aus Platiniridium und lagert bis heute in einem Tresor des Internationalen Büros für Mass und Gewicht (BIPM) bei Paris



Film (ARTE – ZDF, 2011):
Mètre des archives – der Urmeter

Cliquer ici pour commencer !
Hier klicken für Start !