



Universidade Federal do Amazonas - UFAM  
Faculdade de Tecnologia – FT

## **CONTROLE DE POSIÇÃO DE UM SISTEMA PÊNDULO-HÉLICE**

Manaus – AM

2019

CAIO ARTHUR SALES TELES – 21453444  
EVALDO PATRICK DOS SANTOS CARDOSO – 21453640  
FRANK WILLIAMES GARCIA DOS SANTOS – 21550275  
MAILTON VIANA FARIAS – 21602230

## **CONTROLE DE POSIÇÃO DE UM SISTEMA PÊNDULO-HÉLICE**

Relatório apresentado ao curso de graduação em Engenharia da Computação da Faculdade de Tecnologia – Universidade Federal Do Amazonas (UFAM) para obtenção de nota parcial da disciplina de Laboratório de Sistemas de Controle.

Profº Nei Junior Silva Farias

Manaus – AM

2019

## RESUMO

Este trabalho consiste em modelar e implementar um controlador PID para o problema do controle da posição angular de um pêndulo atuado por uma hélice. O braço do pêndulo consiste de uma haste de comprimento  $L$  e massa  $m$  (massa da haste + massa do motor), tendo uma de suas extremidades fixa, por meio de um pivô, a um ponto estabilizado no sistema de coordenadas  $x$ ;  $y$ ;  $z$ . Considera-se o pivô como a origem do sistema de coordenadas. O acoplamento haste-pivô é tal que a haste se movimenta livremente no plano  $x$ ;  $y$ , descrevendo um ângulo  $\theta$ . À extremidade livre da haste é fixado um motor DC acoplado a uma hélice de massa muito pequena, vamos considerar desprezível. O comprimento  $L$  do braço do pêndulo compreende a distância entre o eixo do motor e o ponto de conexão com o pivô.

Após a modelagem, implementa-se o controlador PID pelo método de Zigler Nichols através do software computacional MATLAB, tendo como ideia principal estabilizar o pêndulo com a hélice numa certa coordenada equivalente a uma altura  $h$  em relação ao chão, de modo que, ao mexer nele, mudando sua posição, automaticamente ele possa voltar para sua posição.

## **ABSTRACT**

This work consists of modeling and implementing a PID controller for an assistant activated pendulum angular position control problem. The impactor arm consists of an acceleration of length  $L$  and mass  $m$  (acceleration mass + engine mass), with one end fixed by means of an axis to a stabilized point in the  $x$ -coordinate system;  $y$ ;  $z$ . The pivot is considered as the origin of the coordinate system. The hurry coupling is that the hurry moves freely in the  $x$  plane;  $y$ , describing an angle  $\theta$ . At free throttle speed is fixed on a DC motor coupled to a very small mass propeller, we will consider negligible. Length The arm of the arm comprises a distance between the motor shaft and the point of connection with the shaft.

After modeling, the controller PID implemented by the Zigler Nichols method through the MATLAB computational software, with the main idea of stabilizing the pendulum with the propeller, at a certain coordinate equivalent to a height in relation to the ground, so that when moving it by changing its position, it can automatically return to its position.

## SUMÁRIO

1.	INTRODUÇÃO.....	6
2.	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA .....	7
3.	METODOLOGIA.....	11
3.1	Modelagem do Sistema Pêndulo-Hélice.....	11
3.2	Sintonia da Planta do Sistema utilizando o método PID .....	16
4.	RESULTADOS .....	18
5.	CONCLUSÃO .....	21
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	22

## 1. INTRODUÇÃO

Um sistema pendular simples é um sistema mecânico que exhibe movimento periódico. Consiste em um corpo de massa  $m$  suspensa por uma corda leve de certo comprimento que é fixada na parte superior. O movimento ocorrido no plano vertical é acionado por uma força gravitacional.

Um pêndulo composto é um tópico padrão na maioria dos cursos de física porque inclui aspectos físicos como o movimento harmônico simples, o período de oscilação, a aceleração da gravidade, o centro de massa, o momento de inércia etc.[1].

O controle de posição do pêndulo proposto neste estudo, será abordado, primeiramente, através das equações matemáticas do pêndulo, onde veremos a modelagem do sistema, bem como sua função de transferência e em seguida, a sintonia do controlador PID com seus parâmetros obtidos pelo método Zigler Nichols e a descrição dos resultados dos testes simulados.

## 2. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

O “Sistema pêndulo + hélice: controle de posição” busca uma abordagem técnica de controle para posicionar um pêndulo a partir de uma posição de referência setada. Esse controle de posição foi feito utilizando controles dos seguintes tipos: liga/desliga, proporcional ( $K_p$ ), e proporcional-integral-derivativo ( $K_p$ ,  $T_d$ ,  $T_i$ ). Finalmente, foi observado a influência dos diversos tipos de controle, e a dificuldade na sintonia de controladores.

- **Pêndulo Simples**

O pêndulo simples é um acaso especial do pêndulo físico que consiste em uma haste de comprimento  $L$  na extremidade da qual é presa uma massa  $m$  [5]. Tendo na extremidade inferior, por exemplo, uma esfera de massa  $M$ ; a extremidade superior é fixada em um ponto, tal que ele possa oscilar livremente (resistência do ar desprezível), com amplitudes pequenas ( $\theta_{\text{máximo}} = 15^\circ$ ).

Ao descrever o movimento de um pêndulo simples em um plano, admitem-se as hipóteses simplificadoras de que a massa da haste é desprezível e quando o sistema busca seu equilíbrio o mesmo não conta com nenhuma força externa que o impulse [3].

Quando o pêndulo é deslocado de sua posição de equilíbrio, ele oscila sob a ação da força peso, apresentando um movimento periódico. As forças que atuam sobre a esfera de massa  $m$  são: a força peso  $p$  e a força de tração  $T$ . A força centrípeta,  $F_c$ , que mantém o pêndulo na trajetória de um arco circular, é a resultante da força de tração  $T$  que o fio exerce e da componente da força peso  $p_y$  na direção do raio, que imprime a aceleração centrípeta,  $a_c$ :

$$a_c = \frac{V^2}{R}$$

Podemos determinar a aceleração da gravidade local, medindo a aceleração tangencial e o ângulo  $\theta$  de um pêndulo simples.

$$g = -\frac{a_t}{\sin\theta}$$

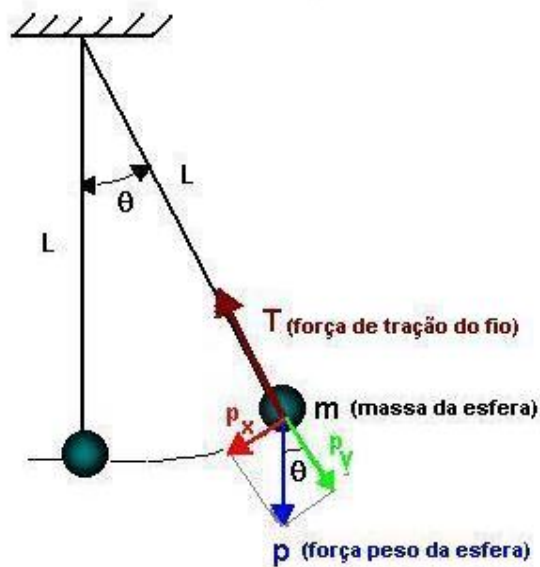


Figura 1: fonte: (Adir M. Luiz, 1996)

Quando o ângulo  $\theta$  for muito pequeno o pêndulo executa um movimento harmônico simples (MHS) e o período pode ser calculado pela expressão:

$$T = 2\pi \left( \frac{L}{g} \right)^{1/2}$$

O período de um pêndulo,  $T$ , é o tempo que ele leva para dar uma oscilação completa, ou seja, o tempo que leva para sair da sua posição inicial e voltar para a mesma posição. Para medir este tempo vamos medir o tempo  $\Delta t$  que leva para dar um número determinado de oscilações,  $n$ :

$$qT = \frac{\Delta t}{n}$$

A frequência é o número de oscilações,  $n$ , que o pêndulo executa em uma unidade de tempo,  $t$ .

- **Controlador PID**

Um controlador modifica o comportamento de um sistema, com o objetivo de que o mesmo atenda as especificações de desempenho.



A aplicação de um controlador PID exige três parâmetros a ser determinados que seja também chamado de ganhos:

- Ganho Proporcional ( $K_p$ );
- Ganho Integral ( $K_i$ );
- Ganho Derivativo ( $K_d$ ).

O processo que determina os parâmetros do controlador que garante uma dada especificação de desempenho é conhecido como Sintonia do Controlador [4].

A ação Proporcional do sinal de controle aplicado a cada instante à planta é proporcional à amplitude do sinal de erro, ou seja, a relação entre a ação de controle  $U(s)$  e o erro de atuação é dado por:

$$U(s) = K_p \cdot E(s)$$

Onde o  $K_p$  é denominado constante proporcional. A principal característica do controle Proporcional é eliminar as oscilações do processo provocadas pelo controle liga – desliga (on-off).

Porém, o controle Proporcional não consegue eliminar o erro de regime permanente, quanto maior o  $K_p$  menor o erro, ou seja, melhor a precisão em malha fechada. O caso é que apenas o controle proporcional não consegue anular completamente o erro em regime permanente [4].

A ação Integral tem por característica eliminar o erro em regime permanente deixado pela ação proporcional, assim, atua no processo ao longo do tempo enquanto existir diferença no valor desejado e no valor medido [4].

No integrador a ação do valor de controle varia proporcionalmente ao valor de erro, a ação integradora com a inserção de um pólo na origem aumenta a ordem do sistema, assim, em malha fechada passa ter erro nulo em regime permanente.

$$G_c(s) = \frac{1}{T_i \cdot s}$$

A ação derivativa melhora o comportamento transitório do sistema, correspondendo à ação de um controle proporcional a derivada do sinal de erro em malha fechada.

$$G_c(s) = T_d(s)$$

Os controladores descritos até o momento formam o controlador PID, que por sua simplicidade ocorrem algumas variações, ou seja, a combinação dos termos pode variar significativamente de fabricante para fabricante.

Ganhos	Tempo de subida ( $t_r$ )	Sobre-sinal ( $M_p$ )	Tempo de Estab. ( $t_s$ )	Erro de regime ( $e_{ss}$ )
$K_P$	Diminui	Aumenta	Pequena Alteração	Diminui
$K_I$	Diminui	Aumenta	Aumenta	Diminui
$K_D$	Pequena Alteração	Diminui	Diminui	Pequena Alteração

Fonte: (Ogata, 2010)

Tabela 1

- O Controle  $K_P$  atua na resposta transitória a fim de diminuir o tempo de subida diminuindo ocasionalmente o erro em regime permanente.
- O controle  $K_I$  elimina o erro em regime permanente, mas pode piorar a resposta transitória.
- O controlador  $K_D$  tem o efeito de aumentar a estabilidade do sistema melhorando a resposta transitória.

### 3. METODOLOGIA

#### 3.1 Modelagem do Sistema Pêndulo-Hélice

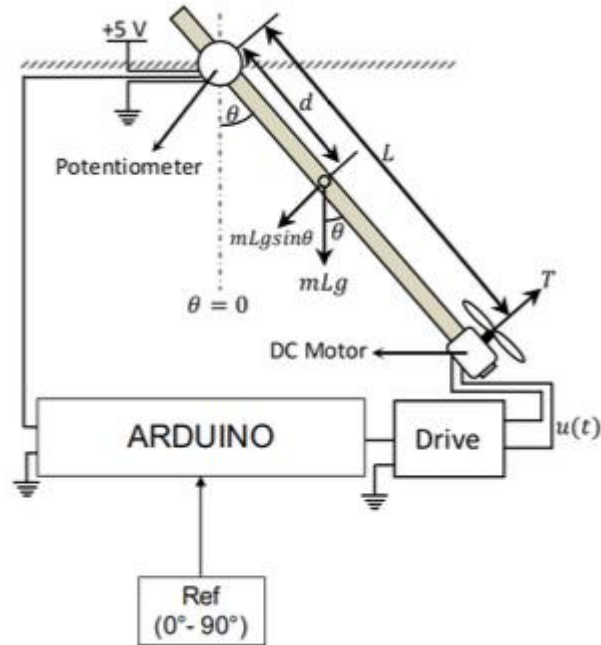


Figura 2

A modelagem parte da abstração do modelo de um pêndulo físico levando em conta as forças existentes num sistema mais aproximado do real possível.

A Figura acima mostra o diagrama do corpo livre para o sistema pêndulo-hélice. O braço do pêndulo consiste de uma massa  $m$  (*massa da haste somada a do motor*) e um comprimento  $L$ . Tendo sua extremidade oposta a do motor presa por meio de um pivô, tratado para fins de cálculo como a origem do plano do sistema de coordenadas  $x, y, z$ .

Para início dos cálculos, partimos de quatro equações preestabelecidas para encontrar a função de transferência do sistema.

A primeira, a equação da somatória das forças que atuam do sistema:

$$M = J\alpha$$

em que  $J$  é o momento de inércia no centro de massa do pêndulo e  $\alpha$ , a aceleração angular do sistema, que também pode ser descrita como uma derivada de segundo grau:

$$\alpha = \frac{d^2}{dt^2} \theta$$

logo,

$$M = J \frac{d^2}{dt^2} \theta \quad (1)$$

A segunda equação é a do torque promovido pela força da gravidade em conjunto da tensão do fio:

$$T_g = mgL \sin \theta$$

Para analisarmos a equação de torque gravitacional (chamaremos assim), partimos do estudo das suas forças em relação ao seu estado de repouso  $T_0$ .

$$T_g - T_0 = mgL \frac{d}{dt} \sin \theta|_{\theta=0} (\theta - 0)$$

$$T_g = mgL \theta \cdot \cos 0$$

$$T_g = mgL \theta \quad (2)$$

A terceira equação que nós utilizaremos relaciona o torque que precisamos gerar para assentarmos o sistema em uma determinada posição e a tensão de entrada para gerar esse torque:

$$T_v(t) = KV(t) \quad (3)$$

onde  $K$  será a constante de ganho do sistema e pode ser encontrado relacionando (2) e (3):

$$K = \frac{mgL\theta}{V} \quad (3.1)$$

Por último, temos a equação do atrito viscoso que é dada por:

$$\tau = -c \frac{d}{dt} \theta \quad (4)$$

Partindo dessas equações, fazemos a somatória das forças presentes no sistema da figura 2:

$$\begin{aligned} M &= T_v(t) + \tau - T_g \\ J\theta'' &= T_v(t) - c \frac{d}{dt} \theta - mgL\theta \\ J\theta'' + c\theta' + mgL\theta &= T_v(t) \end{aligned} \quad (5)$$

Fazendo a Transformada de Laplace da equação acima, teremos:

$$Js^2\theta(s) + cs\theta(s) + mgL\theta(s) = T_v(s)$$

$$(Js^2 + cs + mgL)\theta(s) = T_v(s)$$

$$\frac{\theta(s)}{T_v(s)} = \frac{1}{(Js^2 + cs + mgL)} \quad (6)$$

Achada a função de transferência tendo como saída o ângulo em que o pêndulo acaba posicionado, utilizamos a relação Torque-Tensão da terceira equação para acharmos uma relação mais adequada ao nosso sistema prático:

$$\frac{\theta(s)}{V(s)} = \frac{K}{(Js^2 + cs + mgL)}$$

$$\frac{\theta(s)}{V(s)} = \frac{K/J}{(s^2 + \frac{c}{J}s + \frac{mgL}{J})} \quad (7)$$

Para encontrarmos o valor do momento de Inércia  $J$  e o coeficiente de atrito viscoso  $c$  e sendo uma função de transferência de segunda ordem, igualamo-na à forma:

$$\frac{\theta(s)}{V(s)} = \frac{K_m(\omega_n)^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad (8)$$

Os valores de  $\zeta$  e  $\omega_n$  para esse sistema foram encontrados experimentalmente no artigo referenciado neste trabalho [1]. São eles:

$$\omega_n = 3.1621 \text{ rad/s}$$

$$\zeta = 0.1137$$

Portanto, o polinômio no denominador da equação (8) do Sistema Pêndulo-Hélice pode ser reescrito da forma:

$$P(s) = s^2 + 0.719s + 9.998 \quad (9)$$

A partir daí, podemos fazer a equivalência entre o polinômio da equação (9) com o denominador da função de transferência em (7). Assim teremos:

$$J = \frac{mgL}{(\omega_n^2)} = 0.00498$$

$$c = 2\zeta\omega_n J = 0.00349$$

Por fim, para os valores de  $m = 1.8 \times 10^{-2} \text{ Kg}$ ,  $L = 0.282 \text{ m}$  e  $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ , temos:

$$\frac{\theta(s)}{V(s)} = \frac{K/0.00498}{s^2 + 0.632s + 9.998}$$

com K sendo dado pela equação (3.1):

$$K = 0.00651$$

Portanto,

$$\frac{\theta(s)}{V(s)} = \frac{1.3088}{s^2 + 0.632s + 9.998} = G(s)$$

Esta é a função de transferência do sistema.

As duas raízes do polinômio no denominador são:

$$s_{1,2} = -0.316 \pm j3.14$$

ou seja, o sistema possui duas raízes no semiplano esquerdo, o que significa que esse sistema é estável em malha aberta.

Abaixo, a montagem do diagrama em blocos e a resposta da função de transferência a excitação de um degrau:

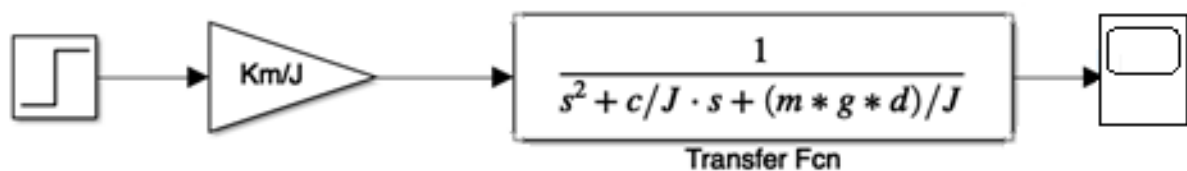


Figura 3

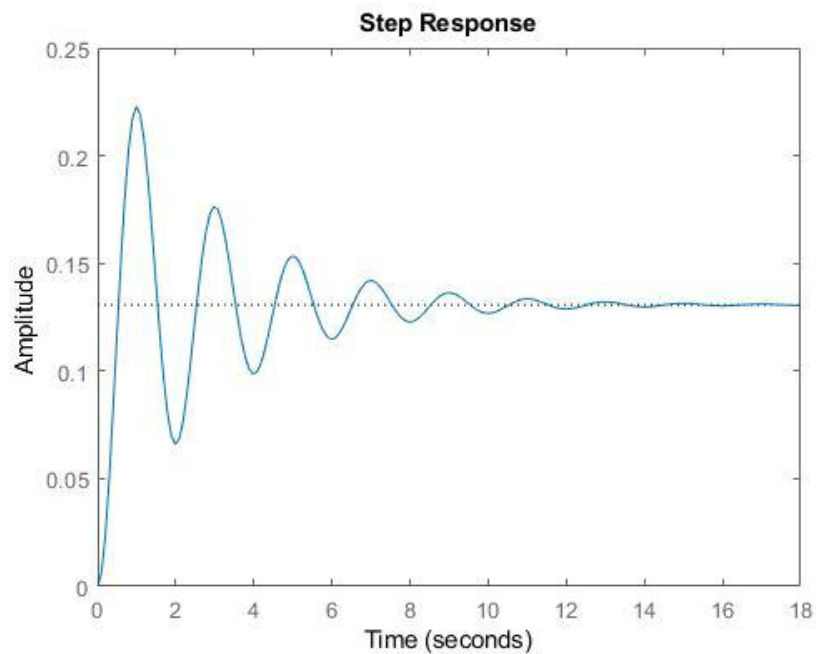


Figura 4

### 3.2 Sintonia da Planta do Sistema utilizando o PID

O processo de selecionar parâmetros do controlador que garantem dadas especificações de desempenho é conhecido como sintonia do controlador.

A inserção de sintonizadores e controladores nas malhas de um sistema servem para que, após um período transitório em que a resposta oscila de certa forma, a resposta permanente esteja de acordo com o sinal de entrada.

Ziegler e Nichols sugeriram regras para a sintonia de controladores PID, o que significa ajustar os valores de  $K_p$ ,  $T_i$  e  $T_d$ , baseadas na resposta experimental ao degrau ou no valor de  $K_p$  que resulta em uma estabilidade marginal. As regras de Ziegler-Nichols sugerem os valores para as constantes já citadas. A determinação desses valores podem ser feitas por meio de experimentos com a planta. Existem dois métodos para sintonizar essas constantes. Focamos em apenas um deles.

Neste método, definimos primeiro  $T_i = \infty$  e  $T_d = 0$ . Usando somente a ação de controle proporcional, aumentamos o valor de  $K_p$  de 0 ao valor crítico  $K_{cr}$ , no qual a saída exibe uma oscilação sustentada pela primeira vez. Portanto, o ganho crítico  $K_{cr}$  e o período  $P_{cr}$  correspondente são determinados experimentalmente. Ziegler e Nichols sugeriram escolher os valores os valores do parâmetro  $K_p$ ,  $T_i$  e  $T_d$  de acordo com a fórmula na tabela abaixo [4].

Tipo de Controlador	$K_p$	$T_i$	$T_d$
P	$0.5K_{cr}$	$\infty$	0
PI	$0.45K_{cr}$	$\frac{1}{1.2}P_{cr}$	0
PID	$0.6K_{cr}$	$0.5P_{cr}$	$0.125P_{cr}$

Tabela 2

Experimentalmente, aplicando um ganho na malha do sistema e ajustando-o até um valor crítico, chegamos ao valor  $K_{cr} = 100$  e obtivemos o período  $P_{cr} = 0.58$  s, fazendo com que os valores de  $K_p$ ,  $T_i$  e  $T_d$  sejam, respectivamente:



$$K_p = 60.000$$

$$T_i = 0.290$$

$$T_d = 0.0725$$

A função de transferência do bloco de sintonia do PID resulta a partir da equação abaixo:

$$PID = K_p + \frac{1}{T_i \cdot s} + T_d \cdot s$$

em:

$$PID = 60 + \frac{3.448}{s} + 0.0725s$$

Utilizando a ferramenta *Simulink* do MATLAB, insere-se o sintonizador e adiciona a realimentação no sistema (ou seja, fechando a malha), temos algo do tipo:

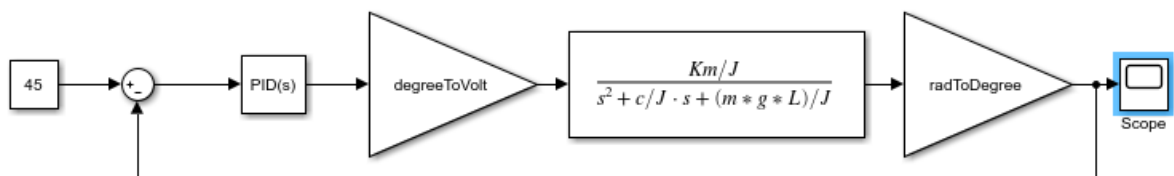


Figura 5

Os ganhos de conversão *degreeToVolt* e *radToDegree* são cálculos simples para transformar o sinal que entra em outro sinal de saída do tipo desejado, sendo dados por:

$$> \text{degreeToVolt} = (\text{tensão de carga/ângulo desejado}) + \text{tensão de carga}$$

$$> \text{radToDegree} = 180/\pi$$

Para o controle de posição do sistema, que é o objetivo deste trabalho, basta inserir um valor constante de referência (no caso da malha anterior foi 45). Um detalhe importante a se observar é que o sistema possui comportamento aproximado a um sistema linear apenas para valores de ângulos que vão de zero a sessenta graus (0 a 60°). Acima disso, o comportamento dos polinômios que regem a função de transferência passa a

ser de ordem maior, o que dificulta a análise do sistema e consequentemente a inserção de um controlador.

## 4. RESULTADOS

Numa primeira análise da função de transferência por si só em malha aberta sendo excitada por um degrau, temos o seguinte comportamento:

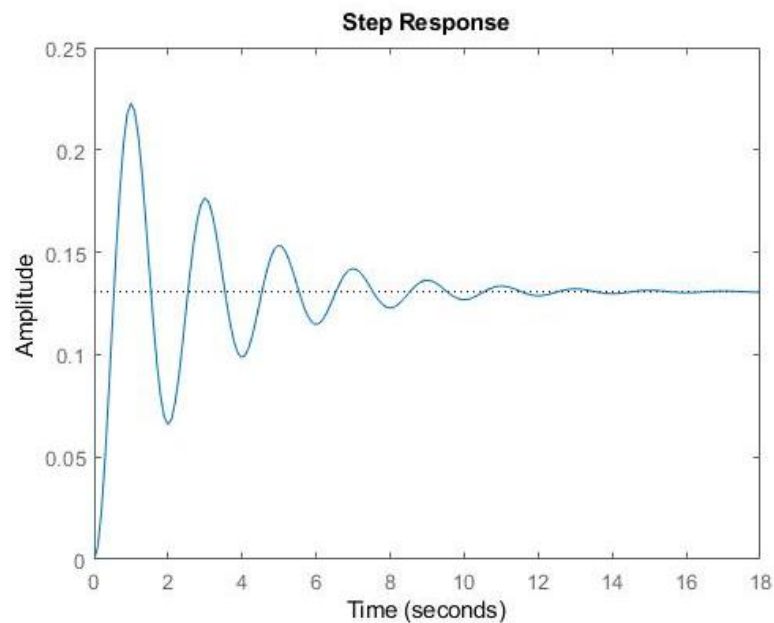


Figura 6

Percebe-se, ao analisar o gráfico, um intervalo razoavelmente grande de tempo de assentamento, ou seja, até que a resposta permanente se estabilize.

Outro detalhe muito importante a ser observado é o *overshoot* no valor de 70.4% (verificado no MATLAB através do botão *characteristics* -> *Peak Response*) fazendo com que a resposta transitória oscile bastante até sua estabilização, caracterizando um sistema subamortecido.

Por último, a resposta permanente nada tem haver com o sinal de referência: um degrau unitário.

Ao inserirmos a realimentação na malha do sistema, encontramos o seguinte comportamento:

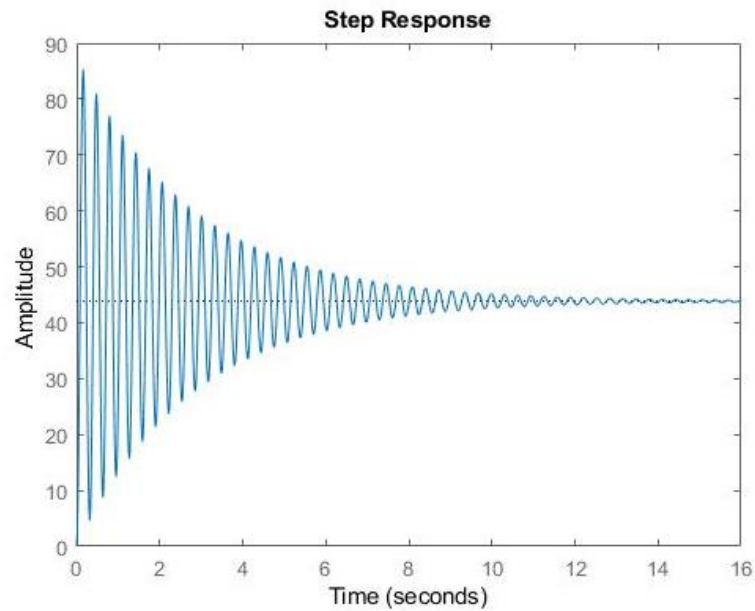


Figura 7

Tal comportamento, bastante oscilatório da resposta transitória não condiz em nada com o resultado desejado, provando a necessidade de um controlador para esse sistema.

Ao adicionarmos um sintonizador PID na malha direta do sistema com os valores já calculados nos tópicos anteriores deste relatório, mantendo a realimentação, a resposta se comporta na forma:

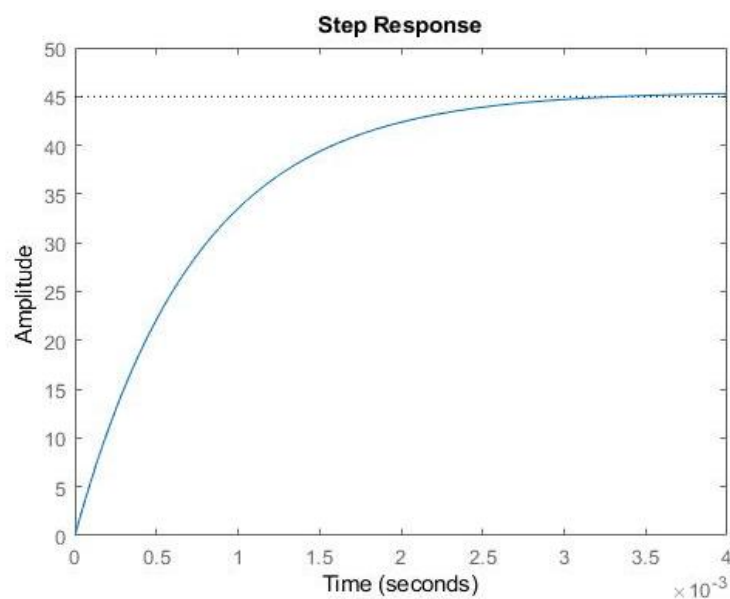


Figura 8

---

Ao fazer a análise das características no MATLAB, percebeu-se valores bastante aceitáveis para considerarmos a sintonia do PID bem-sucedida.

Os valores de *overshoot* (menos de 2%), tempo de assentamento (0.002 segundos) e a resposta permanente (igual ao sinal de referência de entrada) tiveram os valores esperados atendendo a todos os critérios que desejávamos para tais.

---

## 5. CONCLUSÃO

O objetivo deste trabalho foi projetar um controlador para um sistema de pêndulo-hélice. Utilizando-se de equações físicas para descrição do comportamento dinâmico do sistema, pudemos definir uma estratégia para o controle da posição do pêndulo.

Sugerimos aqui a utilização de um controlador do tipo PID e do método de Ziegler e Nichols para a sintonia do controlador. Chegamos a resultados satisfatórios, tendo em vista que, o comportamento do sistema antes de inserir o controlador tinha característica bastante oscilatória. Obtivemos um comportamento mais suave e que atende a referência usada no trabalho. Portanto o objetivo do trabalho foi alcançado.

---

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] H. Kizmaz, S. Aksoy, A. Muhurcu, Sliding Mode Control of Suspended Pendulum, *2010 Modern Electric Power Systems*, Wroclaw, 2010.
- [2] A. Mohammadbagheri, M. YaghoobiM, A New Approach to Control a Driven Pendulum with PID Method, *2011 UKSim 13th International Conference on Modelling and Simulation*, Cambridge, 2011.
- [3] BAUER, Wolfgang. Física Para Universitários. 1. ed. Porto Alegre – RS, Editora AMGH. 2012
- [4] OGATA, KATSUHIKO. Engenharia de Controle Moderno. 5ª ed. Rio de Janeiro: LTC, 2011
- [5] HALLIDAY D.; RESNICK R. e WALKER J. Fundamentos de Física: Mecânica. 3. ed. Rio de Janeiro – RJ, Editora LTC. 2009