



Universidade Federal do Amazonas - UFAM

Faculdade de Tecnologia – FT

## **CONTROLE DE POSIÇÃO DE UM SISTEMA PÊNDULO-HÉLICE**

Manaus – AM

2019

CAIO ARTHUR SALES TELES – 21453444  
EVALDO PATRICK DOS SANTOS CARDOSO – 21453640  
FRANK WILLIAMES GARCIA DOS SANTOS – 21550275  
MAILTON VIANA FARIAS – 21602230

## **CONTROLE DE POSIÇÃO DE UM SISTEMA PÊNDULO-HÉLICE**

Relatório final de projeto para  
obtenção de nota parcial  
referente à disciplina de  
Sistemas de Controle do curso  
de graduação em Engenharia da  
Computação da Faculdade de  
Tecnologia – Universidade  
Federal Do Amazonas (UFAM).

Profº Dr. Florindo Antônio C. Ayres Júnior

Manaus – AM

2019

---

## RESUMO

Este trabalho consiste em modelar e implementar um controlador para o problema do controle da posição angular de um pêndulo atuado por uma hélice. O braço do pêndulo consiste de uma haste de comprimento  $L$  e massa  $m$  (massa da haste + massa do motor), tendo uma de suas extremidades fixa, por meio de um pivô, a um ponto estabilizado no sistema de coordenadas  $x$ ;  $y$ ;  $z$ . Considera-se o pivô como a origem do sistema de coordenadas. A modelagem é feita tanto matematicamente quanto por Espaço de Estado. A implementação parte dos controladores PID e Avanço-Atraso de fase (Lead-Lag) por vários métodos, como Lugar Geométrico das Raízes, Resposta em frequência, Ziegler Nichols, Alocação de pólos e cancelamento de pólos. Nosso objetivo é desenvolver controladores de modo que respeitem os parâmetros do sistema desejado, bem como um overshoot abaixo de 40% e um Tempo de assentamento de até 4,0 segundos. Todas essas implementações são feitas e simuladas no software computacional MATLAB.

---

---

## ABSTRACT

This work consists of modeling and implementing a driver for the angular position control problem of a propeller activated pendulum. The impactor arm consists of an acceleration of length  $L$  and mass  $m$  (acceleration mass + engine mass), with one end fixed by means of an axis to a stabilized point in the x-coordinate system; y; z. The pivot is considered as the origin of the coordinate system. Modeling is done both mathematically and by state space. The implementation of part of the PID and Lead-Lag controllers by various methods, such as Geometric Root Location, Frequency Response, Ziegler Nichols, Pole Allocation and Pole Cancellation. Our goal is to develop controllers that meet the required system parameters as overshoot below 40% and a settling time of 4.0 seconds. All of these implementations are made and simulated in MATLAB computer software.

---

---

## SUMÁRIO

<b>1. INTRODUÇÃO</b>	<b>6</b>
<b>2. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA</b>	<b>7</b>
2.1 Pêndulo Simples	7
2.2 Controlador PID	8
2.3 Controlador Avanço-Atraso de Fase (Lead-Lag)	10
<b>3. METODOLOGIA</b>	<b>11</b>
3.1 Modelagem do Sistema Pêndulo-Hélice	11
3.2 Modelagem do Sistema por Espaço de Estados	16
3.3 Sintonia do PID por Ziegler Nichols	18
3.4 Sintonia do PID por LGR	20
3.5 Sintonia do PID e Lead-Lag por Resposta em Frequência	20
3.6 Sintonia do PID por Alocação Polinomial de pólos	22
3.7 Sintonia do PID e Lead-Lag por Cancelamento de pólos	23
3.8 Sintonia do Lead-Lag por LGR	23
3.9 Sintonia do Lead-Lag por Alocação Polinomial de pólos	24
3.10 Sintonia por Realimentação com Regulador em Espaço de Estados	24
<b>4. RESULTADOS</b>	<b>26</b>
4.1 Controlador PID por LGR	26
4.2 Controlador PI por Ziegler Nichols	27
4.3 Controlador PID por Alocação Polinomial de Pólos	29
4.4 Controlador Lead-Lag por Alocação Polinomial de Pólos	30
4.5 Regulador com Realimentação em espaço de estados	31
<b>5. CONCLUSÃO</b>	<b>32</b>
<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS</b>	<b>33</b>
<b>ANEXOS</b>	<b>34</b>

---

## 1. INTRODUÇÃO

Um sistema pendular simples é um sistema mecânico que exhibe movimento periódico. Consiste em um corpo de massa  $m$  suspensa por uma corda leve de certo comprimento que é fixada na parte superior. O movimento ocorrido no plano vertical é acionado por uma força gravitacional.

Um pêndulo composto é um tópico padrão na maioria dos cursos de física porque inclui aspectos físicos como o movimento harmônico simples, o período de oscilação, a aceleração da gravidade, o centro de massa, o momento de inércia etc.[1].

O controle de posição do pêndulo proposto neste estudo, será abordado, primeiramente, através das equações matemáticas do pêndulo, onde veremos a modelagem do sistema, tanto matematicamente quando por Espaço de Estados, bem como sua função de transferência e em seguida, a sintonia do controlador PID e Avanço-Atraso de fase por diversos métodos, a ponto de obtermos resultados interessantes para analisar e mostrar.

---

## 2. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

O "Sistema pêndulo + hélice: controle de posição" busca uma abordagem técnica de controle para posicionar um pêndulo a partir de uma posição de referência setada. Esse controle de posição é feito utilizando controles dos seguintes tipos: liga/desliga, proporcional ( $K_p$ ), e proporcional-integral-derivativo ( $K_p$ ,  $T_d$ ,  $T_i$ ). Finalmente, foi observado a influência dos diversos tipos de controle, e a dificuldade na sintonia de controladores.

### 2.1 Pêndulo Simples

O pêndulo simples é um acaso especial do pêndulo físico que consiste em uma haste de comprimento  $L$  na extremidade da qual é presa uma massa  $m$  [5]. Tendo na extremidade inferior, por exemplo, uma esfera de massa  $M$ ; a extremidade superior é fixada em um ponto, tal que ele possa oscilar livremente (resistência do ar desprezível), com amplitudes pequenas ( $\theta_{\text{máximo}} = 15^\circ$ ).

Ao descrever o movimento de um pêndulo simples em um plano, admitem-se as hipóteses simplificadoras de que a massa da haste é desprezível e quando o sistema busca seu equilíbrio o mesmo não conta com nenhuma força externa que o impulse [3].

Quando o pêndulo é deslocado de sua posição de equilíbrio, ele oscila sob a ação da força peso, apresentando um movimento periódico. As forças que atuam sobre a esfera de massa  $m$  são: a força peso  $p$  e a força de tração  $T$ . A força centrípeta,  $F_c$ , que mantém o pêndulo na trajetória de um arco circular, é a resultante da força de tração  $T$  que o fio exerce e da componente da força peso  $p_y$  na direção do raio, que imprime a aceleração centrípeta,  $a_c$ :

$$a_c = \frac{V^2}{R}$$

Podemos determinar a aceleração da gravidade local, medindo a aceleração tangencial e o ângulo  $\theta$  de um pêndulo simples.

$$g = -\frac{a_t}{\sin\theta}$$

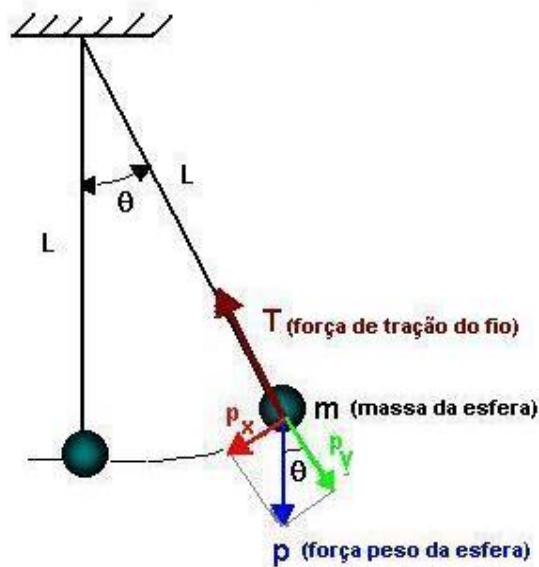


Figura 1: fonte: (Adir M. Luiz, 1996)

Quando o ângulo  $\theta$  for muito pequeno o pêndulo executa um movimento harmônico simples (MHS) e o período pode ser calculado pela expressão:

$$T = 2 \left( \frac{L}{g} \right)^{1/2}$$

O período de um pêndulo,  $T$ , é o tempo que ele leva para dar uma oscilação completa, ou seja, o tempo que leva para sair da sua posição inicial e voltar para a mesma posição. Para medir este tempo vamos medir o tempo  $\Delta t$  que leva para dar um número determinado de oscilações,  $n$ :

$$qT = \frac{t}{n}$$

A frequência é o número de oscilações,  $n$ , que o pêndulo executa em uma unidade de tempo,  $t$ .

## 2.2 Controlador PID

Um controlador modifica o comportamento de um sistema, com o objetivo de que o mesmo atenda as especificações de desempenho.

A aplicação de um controlador PID exige três parâmetros a ser determinados que seja também chamado de ganhos:



- Ganho Proporcional ( $K_p$ );
- Ganho Integral ( $K_i$ );
- Ganho Derivativo ( $K_d$ ).

O processo que determina os parâmetros do controlador que garante uma dada especificação de desempenho é conhecido como Sintonia do Controlador [4].

A ação Proporcional do sinal de controle aplicado a cada instante à planta é proporcional à amplitude do sinal de erro, ou seja, a relação entre a ação de controle  $U(s)$  e o erro de atuação é dado por:

$$U(s) = K_p \cdot E(s)$$

Onde o  $K_p$  é denominado constante proporcional. A principal característica do controle Proporcional é eliminar as oscilações do processo provocadas pelo controle liga – desliga (on-off).

Porém, o controle Proporcional não consegue eliminar o erro de regime permanente, quanto maior o  $K_p$  menor o erro, ou seja, melhor a precisão em malha fechada. O caso é que apenas o controle proporcional não consegue anular completamente o erro em regime permanente [4].

A ação Integral tem por característica eliminar o erro em regime permanente deixado pela ação proporcional, assim, atua no processo ao longo do tempo enquanto existir diferença no valor desejado e no valor medido [4].

No integrador a ação do valor de controle varia proporcionalmente ao valor de erro, a ação integradora com a inserção de um pólo na origem aumenta a ordem do sistema, assim, em malha fechada passa ter erro nulo em regime permanente.

$$G_c(s) = \frac{1}{T_i \cdot s}$$

A ação derivativa melhora o comportamento transitório do sistema, correspondendo à ação de um controle proporcional a derivada do sinal de erro em malha fechada.

$$G_c(s) = T_d(s)$$

Os controladores descritos até o momento formam o controlador PID, que por sua simplicidade ocorrem algumas variações, ou seja, a combinação dos termos pode variar significativamente de fabricante para fabricante.

Ganhos	Tempo de subida ( $t_r$ )	Sobre-sinal ( $M_p$ )	Tempo de Estab. ( $t_s$ )	Erro de regime ( $e_{ss}$ )
$K_P$	Diminui	Aumenta	Pequena Alteração	Diminui
$K_I$	Diminui	Aumenta	Aumenta	Diminui
$K_D$	Pequena Alteração	Diminui	Diminui	Pequena Alteração

Fonte: (Ogata, 2010)

Tabela 1

- O Controle  $K_P$  atua na resposta transitória a fim de diminuir o tempo de subida diminuindo ocasionalmente o erro em regime permanente.
- O controle  $K_I$  elimina o erro em regime permanente, mas pode piorar a resposta transitória.
- O controlador  $K_D$  tem o efeito de aumentar a estabilidade do sistema melhorando a resposta transitória.

### 2.3 Controlador Avanço-Atraso de Fase (Lead-Lag)

O controlador Lead-Lag, mais conhecido em português como Avanço-Atraso de fase, é composto por dois tipos de métodos, o Lead (avanço) e ao mesmo tempo pelo Lag (atraso), por isso o nome composto Lead-Lag.

- **Controlador Avanço de Fase (Lead)**

Sua principal finalidade é suprir um atraso de fase estabelecido naturalmente pelas próprias características de alguns componentes do sistema original. Este tipo de compensação permite remodelar o lugar das raízes de maneira a obterem-se pólos dominantes desejados em malha fechada. Em geral seus efeitos correspondem a um aumento no amortecimento, com menores tempo de subida e de acomodação, o que corresponde, no domínio da frequência, a um aumento na largura de faixa. Além disso, as margens de ganho e de fase são melhoradas, contudo o erro de estado estacionário não é afetado. [6]

- **Controlador Atraso de Fase (Lag)**

Uma compensação em atraso melhora o erro em regime permanente, no entanto, diminui a largura de faixa, o que implica, em termos de domínio do tempo, numa resposta mais lenta, com maiores tempos de subida e acomodação. [6]

- **Controlador Avanço-Atraso de Fase (Lead-Lag)**

Em casos onde se deseja uma resposta rápida, característica de sistema com compensação em avanço, porém com diminuição do erro em regime estacionário, que é garantida por uma compensação em atraso, é possível usar um controlador que una ambas as características, que é o caso do controlador em avanço–atraso. [6]

$$G_c(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = \frac{K(s + z1)(s + z2)}{(s + p1)(s + p2)}$$

Onde  $z1$  e  $z2$  são os zeros e  $p1$  e  $p2$  são os pólos.

### 3. METODOLOGIA

#### 3.1 Modelagem do Sistema Pêndulo-Hélice

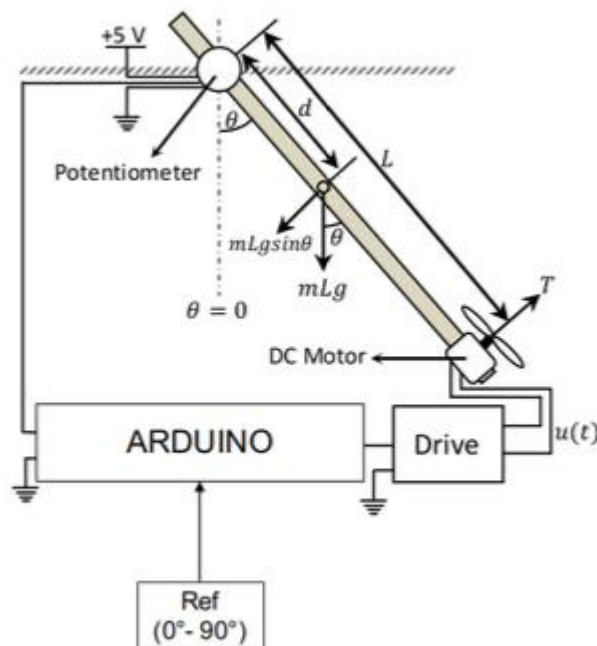


Figura 2 - Fonte: [1]

A modelagem parte da abstração do modelo de um pêndulo físico levando em conta as forças existentes num sistema mais aproximado do real possível.

A Figura acima mostra o diagrama do corpo livre para o sistema pêndulo-hélice. O braço do pêndulo consiste de uma massa  $m$  (*massa da haste somada a do motor*) e um comprimento  $L$ . Tendo sua extremidade oposta a do motor presa por meio de um pivô, tratado para fins de cálculo como a origem do plano do sistema de coordenadas  $x,y,z$ .

Para início dos cálculos, partimos de quatro equações preestabelecidas para encontrar a função de transferência do sistema.

A primeira, a equação da somatória das forças que atuam do sistema:

$$M = J\alpha$$

em que  $J$  é o momento de inércia no centro de massa do pêndulo e  $\alpha$ , a aceleração angular do sistema, que também pode ser descrita como uma derivada de segundo grau:

$$\alpha = \frac{d^2}{dt^2}\theta$$

logo,

$$M = J \frac{d^2}{dt^2}\theta \quad (1)$$

A segunda equação é a do torque promovido pela força da gravidade em conjunto da tensão do fio:

$$T_g = mgL \sin\theta$$

Para analisarmos a equação de torque gravitacional (chamaremos assim), partimos do estudo das suas forças em relação ao seu estado de repouso  $T_0$ .

$$T_g - T_0 = mgL \frac{d}{dt} \sin\theta|_{\theta=0}(\theta - 0)$$

$$T_g = mgL \theta \cdot \cos 0$$

$$T_g = mgL\theta \quad (2)$$

A terceira equação que nós utilizaremos relaciona o torque que precisamos gerar para assentarmos o sistema em uma determinada posição e a tensão de entrada para gerar esse torque:

$$T_v(t) = KV(t) \quad (3)$$

onde  $K$  será a constante de ganho do sistema e pode ser encontrado relacionando (2) e (3):

$$K = \frac{mgL\theta}{V} \quad (3.1)$$

Por último, temos a equação do atrito viscoso que é dada por:

$$\tau = -c \frac{d}{dt} \theta \quad (4)$$

Partindo dessas equações, fazemos a somatória das forças presentes no sistema da figura 2:

$$M = T_v(t) + \tau - T_g \quad (5)$$

$$J\theta'' = T_v(t) - c \frac{d}{dt} \theta - mgL\theta$$

$$J\theta'' + c\theta' + mgL\theta = T_v(t)$$

Fazendo a Transformada de Laplace da equação acima, teremos:

$$Js^2\theta(s) + cs\theta(s) + mgL\theta(s) = T_v(s)$$

$$(Js^2 + cs + mgL)\theta(s) = T_v(s)$$

$$\frac{\theta(s)}{T_v(s)} = \frac{1}{(Js^2 + cs + mgL)} \quad (6)$$

Achada a função de transferência tendo como saída o ângulo em que o pêndulo acaba posicionado, utilizamos a relação Torque-Tensão da terceira equação para acharmos uma relação mais adequada ao nosso sistema prático:

$$\frac{\theta(s)}{V(s)} = \frac{K}{(Js^2 + cs + mgL)}$$

$$\frac{\theta(s)}{V(s)} = \frac{K/J}{(s^2 + \frac{c}{J}s + \frac{mgL}{J})} \quad (7)$$

Para encontrarmos o valor do momento de Inércia  $J$  e o coeficiente de atrito viscoso  $c$  e sendo uma função de transferência de segunda ordem, igualamo-na à forma:

$$\frac{\theta(s)}{V(s)} = \frac{K_m(\omega_n)^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad (8)$$

Os valores de  $\zeta$  e  $\omega_n$  para esse sistema foram encontrados experimentalmente no artigo referenciado neste trabalho [1]. São eles:

$$\begin{aligned}\omega_n &= 3.1621 \text{ rad/s} \\ \zeta &= 0.1137\end{aligned}$$

Portanto, o polinômio no denominador da equação (8) do Sistema Pêndulo-Hélice pode ser reescrito da forma:

$$P(s) = s^2 + 0.719s + 9.998 \quad (9)$$

A partir daí, podemos fazer a equivalência entre o polinômio da equação (9) com o denominador da função de transferência em (7). Assim teremos:

$$\begin{aligned}J &= \frac{mgL}{(\omega_n^2)} = 0.00498 \\ c &= 2\zeta\omega_n J = 0.00349\end{aligned}$$

Por fim, para os valores de  $m = 1.8 \times 10^{-2} \text{ Kg}$ ,  $L = 0.282 \text{ m}$  e  $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ , temos:

$$\frac{\theta(s)}{V(s)} = \frac{K/0.00498}{s^2 + 0.632s + 9.998}$$

com  $K$  sendo dado pela equação (3.1):

$$K = 0.00651$$

Portanto,

$$\frac{\theta(s)}{V(s)} = \frac{1.3088}{s^2 + 0.632s + 9.998} = G(s)$$

Esta é a função de transferência do sistema.

As duas raízes do polinômio no denominador são:

$$s_{1,2} = -0.316 \pm j3.14$$

Ou seja, o sistema possui duas raízes no semiplano esquerdo, o que significa que esse sistema é estável em malha aberta, conforme o mapa de pólos abaixo.

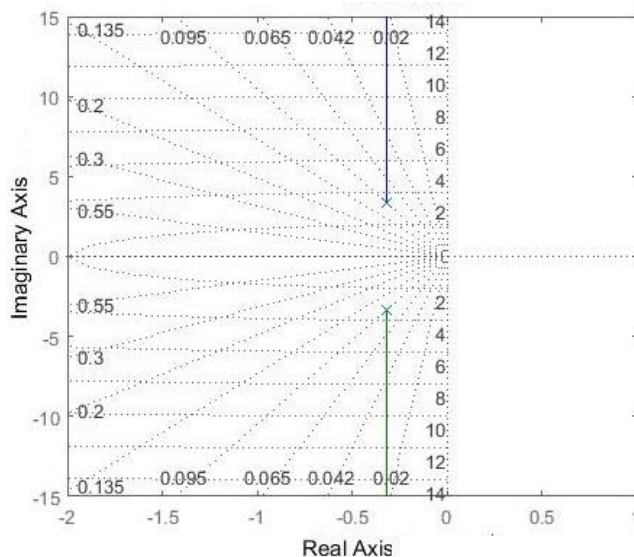


Figura 3 - Mapa de pólos

Abaixo, a montagem do diagrama em blocos e a resposta da função de transferência a excitação de um degrau:

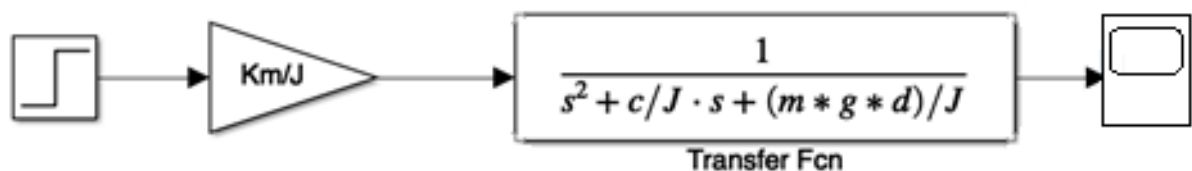


Figura 4

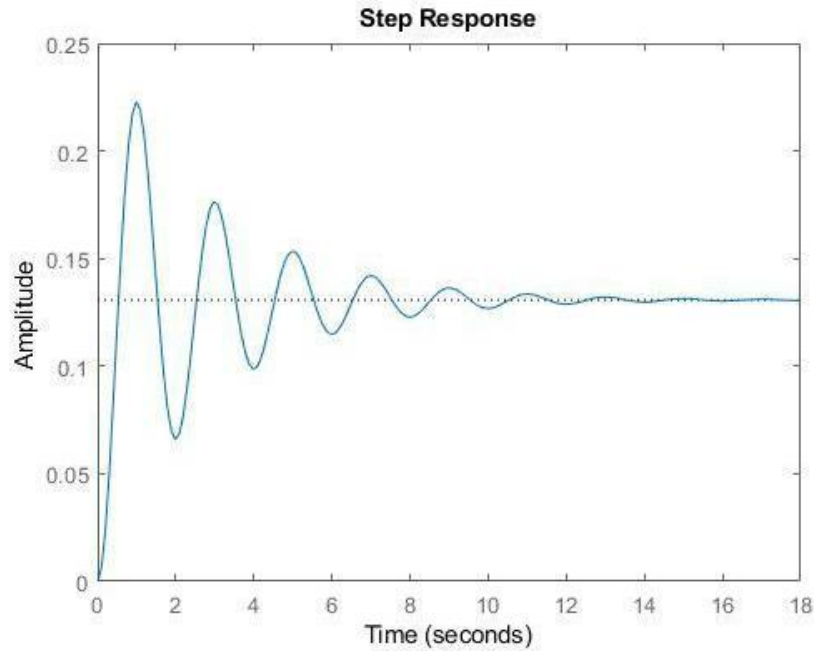


Figura 5 - Resposta do sistema em malha aberta

### 3.2 Modelagem do Sistema por Espaço de Estados

Para a modelagem por espaço de estados, é necessário definir as variáveis que serão consideradas os estados do nosso sistema. Sendo o controle de posição do pêndulo relativamente simples, escolhemos o conjunto de variáveis do ângulo e torque resultante do sistema. Assim, nosso vetor de estados foi definido por (o símbolo ' significa derivada):

$$\theta(t);$$

$$T(t) = T_v - C - T;$$

sendo,  $T_v$  o torque gerado pela bateria,  $C$  a viscosidade a que o sistema está submetido e  $T$  o torque natural do pêndulo. Assim, repetindo a equação na modelagem anterior, descrita em 3.1, temos:

$$J\theta'' + c\theta' + mgL\theta = T_v(t)$$

$$T_v(s) = K_m V(s)$$

$$\theta'' + \frac{c}{J}\theta' + \frac{mgL}{J}\theta = \frac{K_m V(s)}{J} \quad (2.1)$$

A transformada de Laplace é então:

$$s^2\theta(s) + \frac{c}{J}s\theta(s) + \frac{mgL}{J}\theta(s) = \frac{K_m V(s)}{J}$$



$$\frac{\theta(s)}{V(s)} = \frac{\frac{Km}{J}}{s^2 + \frac{c}{J}s + \frac{mgL}{J}}$$

Desejamos encontrar as duas equações que definem o espaço de estados:

$$x' = AX + Bu$$

$$y = CX + Du$$

e para isso é preciso definir  $x_1$ . Escolhendo  $x_1 = \theta$ :

$$X = [x_1 \ x_2] = [\theta \ \theta']$$

portanto,  $x_1' = x_2$  e  $x_2 = \theta''$ .

A partir da equação (2.1), podemos fazer a substituição para encontrar as equações de espaço de estados.

$$\begin{aligned} x_1' &= x_2 \\ x_2' &= \frac{Km}{J}V - \frac{c}{J}x_2 - \frac{mgL}{J}x_1 \\ y &= x_1 \end{aligned}$$

Efetivamente, temos:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{mgL}{J} & -\frac{c}{J} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{Km}{J} \end{bmatrix} V \\ Y &= [1 \ 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Logo, as matrizes modeladas são:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{mgL}{J} & -\frac{c}{J} \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{Km}{J} \end{bmatrix}$$

$$C = [1 \ 0]$$

$$D = 0$$

### 3.3 Sintonia do PID por Ziegler Nichols

O processo de selecionar parâmetros do controlador que garantem dadas especificações de desempenho é conhecido como sintonia do controlador.

A inserção de sintonizadores e controladores nas malhas de um sistema servem para que, após um período transitório em que a resposta oscila de certa forma, a resposta permanente esteja de acordo com o sinal de entrada.

Ziegler e Nichols sugeriram regras para a sintonia de controladores PID, o que significa ajustar os valores de  $K_p$ ,  $T_i$  e  $T_d$ , baseadas na resposta experimental ao degrau ou no valor de  $K_p$  que resulta em uma estabilidade marginal. As regras de Ziegler-Nichols sugerem os valores para as constantes já citadas. A determinação desses valores podem ser feitas por meio de experimentos com a planta. Existem dois métodos para sintonizar essas constantes. Focamos em apenas um deles.

Neste método, definimos primeiro  $T_i = \infty$  e  $T_d = 0$ . Usando somente a ação de controle proporcional, aumentamos o valor de  $K_p$  de 0 ao valor crítico  $K_{cr}$ , no qual a saída exibe uma oscilação sustentada pela primeira vez. Portanto, o ganho crítico  $K_{cr}$  e o período  $P_{cr}$  correspondente são determinados experimentalmente. Ziegler e Nichols sugeriram escolher os valores os valores do parâmetro  $K_p$ ,  $T_i$  e  $T_d$  de acordo com a fórmula na tabela abaixo [4].

Tipo de Controlador	$K_p$	$T_i$	$T_d$
P	$0.5K_{cr}$	$\infty$	0
PI	$0.45K_{cr}$	$\frac{1}{1.2}P_{cr}$	0
PID	$0.6K_{cr}$	$0.5P_{cr}$	$0.125P_{cr}$

Tabela 2

Experimentalmente, optando por um controlador PI, aplicamos um ganho na malha do sistema e ajustando-o até um valor crítico, chegamos ao valor  $K_{cr} = 17$  e obtivemos o período  $P_{cr} = 9$  s, fazendo com que os valores de  $K_p$  e  $T_i$  sejam, respectivamente:

$$K_p = 7.65$$

$$T_i = 7.47$$

A função de transferência do bloco de sintonia do PID resulta a partir da equação abaixo:

$$PID = K_p + \frac{1}{T_i \cdot s}$$

Com isso, temos:

$$PID = 7.47 + \frac{0.14}{s}$$

Utilizando a ferramenta *Simulink* do MATLAB, insere-se o sintonizador e adiciona a realimentação no sistema (ou seja, fechando a malha), temos algo do tipo:

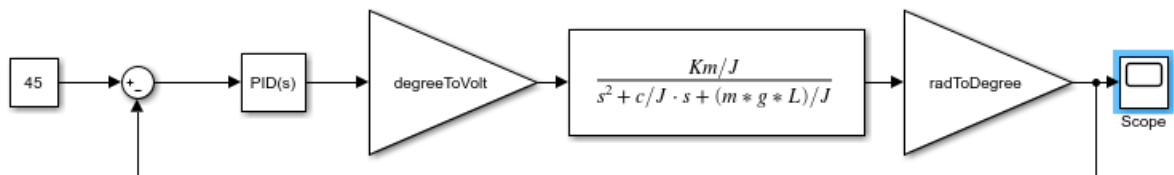


Figura 6

Os ganhos de conversão *degreeToVolt* e *radToDegree* são cálculos simples para transformar o sinal que entra em outro sinal de saída do tipo desejado, sendo dados por:

$$> \text{degreeToVolt} = (\text{tensão de carga/ângulo desejado}) + \text{tensão de carga}$$

$$> \text{radToDegree} = 180/\pi$$

Para o controle de posição do sistema, que é o objetivo deste trabalho, basta inserir um valor constante de referência (no caso da malha anterior foi 45). Um detalhe importante a se observar é que o sistema possui comportamento aproximado a um sistema linear apenas para valores de ângulos que vão de zero a sessenta graus (0 a 60°). Acima disso, o comportamento dos polinômios que regem a função de transferência passa a ser de ordem maior, o que dificulta a análise do sistema e consequentemente a inserção de um controlador.

### 3.4 Sintonia do PID por LGR

Para o projeto do controlador PID precisamos determinar os parâmetros  $K_p$ ,  $K_d$  e  $K_i$ . Para essa tarefa analisamos a planta através do método Lugar Geométrico das Raízes - LGR.

Utilizando-se da ferramenta *rltool*, do MATLAB, definimos os parâmetros do controlador PID de acordo com o estabelecido no planejamento do trabalho.

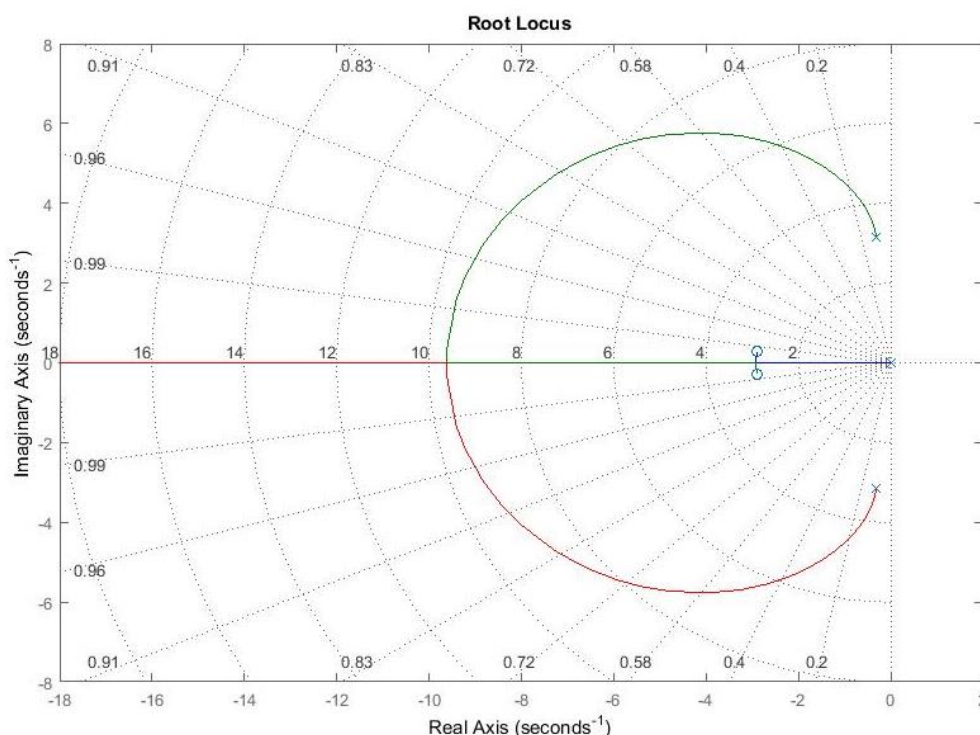


Figura 7 – Root locus

Os parâmetros encontrados e a resposta obtida da simulação descreveremos em “Resultados”.

### 3.5 Sintonia do PID e Lead-Lag por Resposta em Frequência

Sintonia por resposta em frequência é analisar o diagrama de margem de fase e margem de ganho e com essas informações realizar a sintonia.

Existem pelo menos duas maneiras comuns de se representar a resposta em frequência de sistemas, a saber, através de gráficos em escala logarítmica (Diagramas de Bode e Diagramas de Nichols) e através de gráficos polares (Diagramas de Nyquist).

Os Diagramas de Bode são gráficos de ganho e defasagem em função da frequência, está marcada em escala logarítmica. Uma das vantagens de se utilizar a escala logarítmica é que assim é possível representar frequências de ordens de grandeza muito diversas. [4]

O diagrama de Bode da planta deste trabalho não forneceu nenhum tipo de informação como mostrado na figura a seguir, sendo assim impossível de realizar a sintonia por este método, mesmo após adicionar um certo ganho K com o objetivo de deixar a planta mais rápida.

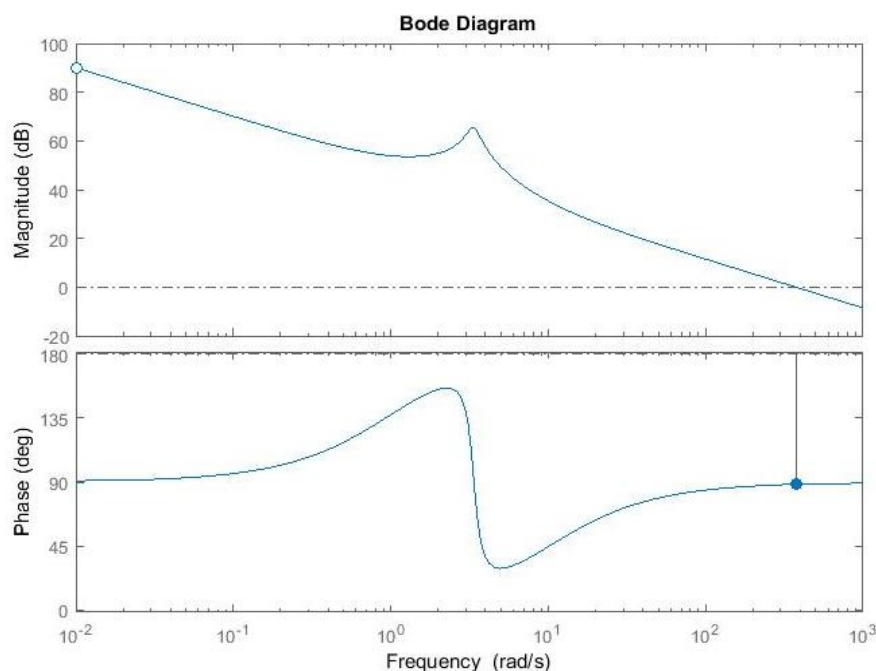


Figura 8 – Diagrama de bode do PID

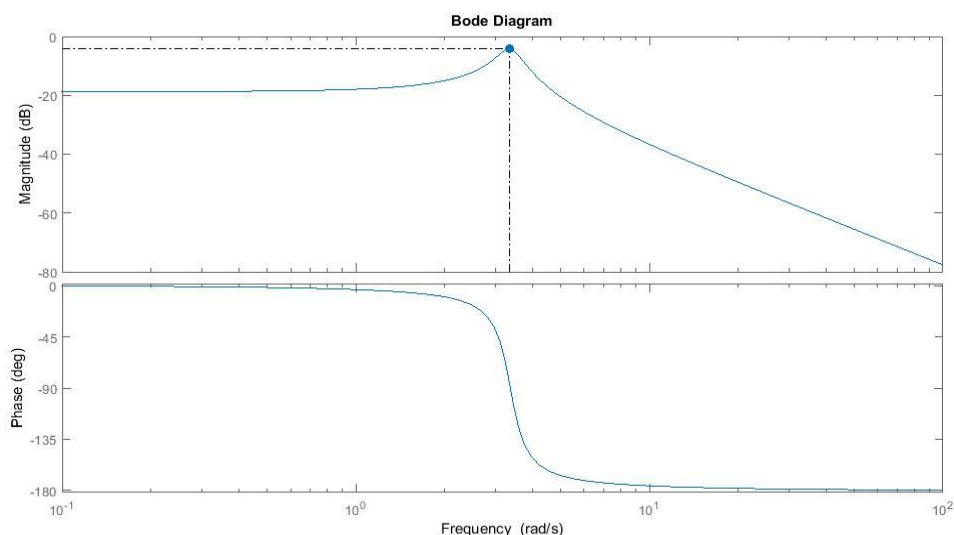


Figura 9 – Diagrama de bode do Lead-Lag

Com isso, vimos que nossa planta não tem um bom comportamento, ou melhor, uma boa resposta analisando por margem de fase e margem de ganho.

### 3.6 Sintonia do PID por Alocação Polinomial de pólos

Este método consiste basicamente em

$$Gmf(s) = \frac{C(s).G(s)}{1 + C(s).G(s)}$$

Onde  $Gmf(s)$  claramente define a função do sistema em malha fechada e, sabemos que para o controlador PID, tem-se  $C(s) = K_p + K_d s + \frac{K_i}{s}$

e nossa planta em malha aberta é  $G(s) = \frac{1.3088}{s^2 + 0.632s + 9.998}$

Logo,

$$Gmf(s) = \frac{\frac{1,3088Kds^2 + 1,3088Kps + 1,3088Ki}{s^3 + 0,632s^2 + 11,31s}}{\frac{1,3088Kds^2 + 1,3088Kps + 1,3088Ki + s^3 + 0,632s^2 + 11,31s}{s^3 + 0,632s^2 + 11,31s}} =$$

$$Gmf(s) = \frac{1,3088Kds^2 + 1,3088Kps + 1,3088Ki}{s^3 + (1,3088Kd + 0,632)s^2 + (1,3088Kp + 11,31)s + 1,3088Ki}$$

Então denominamos o polinômio característico sendo o denominador,  $P(s) = s^3 + (1,3088Kd + 0,632)s^2 + (1,3088Kp + 11,31)s + 1,3088Ki$  Seguindo a metodologia do alocação de pólos, iguala-se os termos deste polinômio a uma certa “função auxiliar”  $Q(s)$ . Temos:

$$P(s) = Q(s)$$

$$\begin{aligned} s^3 &\rightarrow 1 = 1 \\ s^2 &\rightarrow 1,3088Kd + 0,632 = q_2 \\ s^1 &\rightarrow 1,3088Kp + 11,31 = q_1 \\ s^0 &\rightarrow 1,3088Ki = q_0 \end{aligned}$$

Como visto, o polinômio que determina as raízes do nosso sistema é  $s^2 + 0,632s + 9,998$ , ou seja, um polinômio de ordem 2, logo, se faz necessário alocar um polo para considerar  $q_2$ ,  $q_1$  e  $q_0$  e por fim determinar os ganhos desejados  $K_p$ ,  $K_d$  e  $K_i$ .

Alocamos um pólo na ordem de 10 vezes maior que os já existentes, para não ficar muito próximo entre si, já que não temos zeros, com isso, alocamos um pólo real em  $(s+3,3)$ , com isso, nosso polinômio fica da seguinte forma:

$$(s^2 + 0,632s + 9,998) \cdot (s + 3,3) = s^3 + q_2s^2 + q_1s + q_0$$

$$s^3 + 3,932s^2 + 12,0836s + 32,993 = s^3 + q_2s^2 + q_1s + q_0$$

Igualando os termos de mesmo grau, obtendo um sistema e descobrimos os valores desejados:

$$3,932 = 1,3088Kd + 0,632 \rightarrow Kd = 2,521$$

$$12,0836 = 1,3088Kp + 11,31 \rightarrow Kp = 0,591$$

$$32,993 = 1,3088Ki \rightarrow Ki = 25,208$$

### 3.7 Sintonia do PID e Lead-Lag por Cancelamento de pólos

O cancelamento de pólo e zero reduz a ordem do modelo exatamente cancelando pares pólo-zero ou eliminando estados que não têm efeito na resposta geral do modelo. A remoção desses estados preserva as características da resposta do modelo, simplificando a análise e o “design” de controle.

O objetivo é eliminar estados inobserváveis ou incontroláveis dos modelos de espaço de estado, ou seja, principalmente em sistemas instáveis, o que não é o nosso caso, pois ele já é estável e não possui nenhum zero e apenas dois pólos complexos, contando ainda que nosso sistema é de 2ª ordem e “trivial”, então não vimos necessidade para utilizar este método para o PID e também para o Lead-Lag, onde alocamos dois zeros e dois polos, mesmo se tornando um polinômio de 4ª ordem, não foi possível utilizar o método a ponto de reduzir o grau do sistema e obtermos boa resposta.

### 3.8 Sintonia do Lead-Lag por LGR

Controladores Lead-Lag tem como características o aumento na precisão do regime transitório enquanto aumenta a largura de banda e margem de estabilidade. Objetivo é usar o LGR para definir os pólos, zeros e o ganho do controlador para planta estudada.

Utilizando da ferramenta *rltool*, do MATLAB, não foi possível atingir os parâmetros especificados para o trabalho. Mesmo com o tempo de assentamento ficando dentro da margem esperada, overshoot e o erro permanecia sempre acima de 50%. Sendo assim, este tipo de controlador não seria escolhido para construção desse projeto.

### 3.9 Sintonia do Lead-Lag por Alocação Polinomial de pólos

Seguindo o mesmo raciocínio da construção do PID por Alocação de pólos, obtem-se também os parâmetros para o controlador Lead-Lag, porém com um grau de dificuldades a mais, pois trabalharemos agora com dois zeros e dois pólos alocados.

Como visto no item 2.3 da Fundamentação Teórica,  $C(s)$  tem a seguinte “cara”:

$$C(s) = \frac{K \cdot (s + z1)(s + z2)}{(s + p1)(s + p2)}$$

$$\text{Logo, } Gmf(s) = \frac{1,3088K \cdot (s+z1)(s+z2)}{1,3088(s+z1)(s+z2) + (s^2 + 0,632s + 11,31)(s+p1)(s+p2)}$$

Onde  $z1$  e  $z2$  são os zeros que temos que adicionar e  $p1$  e  $p2$  são novos polos que teremos que adicionar também.

Para este caso, nos privamos de cálculos e matrizes para determinar esse ganho  $K$ , já que não conhecíamos nenhum zero e nenhum dos dois pólos, porém tínhamos uma noção de onde eles poderiam estar, então fomos definidos valores no MATLAB e olhando o mapa de polos e zeros e LGR do sistema, a ponto de definirmos logo o  $K = 10$  e depois de muitos testes e análises, obtivemos uma ótima resposta, como descreveremos no item “Resultados”, então extraímos como sendo nossos zeros alocados os valores de  $(s+9)$ ,  $(s+4)$  e nossos pólos em  $(s+0,6)$  e  $(s+10)$ .

### 3.10 Sintonia por Realimentação com Regulador em Espaço de Estados

Os passos executados nesta sintonia foram feitos no MATLAB, aqui serão apresentados apenas resultados de cada passo para evitar prolongamento excessivo do relatório.



Para fazer o controle de um sistema em espaço de estados, é preciso primeiro verificar se o dito sistema é controlável. Para isso podemos calcular a matriz de controlabilidade e verificar se seu determinante é diferente de zero. Caso positivo, a matriz é controlável.

Sendo os polos de malha aberta:

$$s_{1,2} = -0.35 \pm j3.14$$

E o polinômio em malha aberta:

$$p_a = s^2 + 0.7s + 9.998 = s^2 + a_1s + a_0$$

A matriz A é:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -9.998 \\ 1 & -0.7 \end{bmatrix}$$

E a matriz de Controlabilidade é:

$$Mc = \begin{bmatrix} A \\ AB \end{bmatrix}$$

$$Mc = \begin{bmatrix} 0 & 1.309 \\ 1.309 & -0.91 \end{bmatrix}$$

$$\det(Mc) = -1.71 \neq 0$$

portanto, o sistema é controlável.

Optamos por realocar esses polos a uma distância cinco vezes maior de sua origem. Para tal, os novos polos devem ser:

$$sn_{1,2} = -1.58 \pm j15.7$$

Assim, o polinômio de malha fechada é

$$p_f = (s - s_1)(s - s_2)$$

$$p_f = s^2 + 3.5s + 249.9 = s^2 + b_1s + b_0$$

Fazendo o polinômio em malha fechada utilizando os polos mais distantes:

$$p_f = (s - sn_1)(s - sn_2)$$

$$pn_f = s^2 + (0.7 + 1.309k_1)s + 9.998 + 1.309k_2$$

Igualando  $pn_f = p_f$ :

$$K_1 = \frac{249.86 - 9.998}{1.309} = 183.24$$

$$K_2 = \frac{3.5 - 0.7}{1.309} = 2.14$$

Portanto, a matriz de controle K é igual a

$$K = [183.24 \ 2.14]$$

## 4. RESULTADOS

### 4.1 Controlador PID por LGR

O controlador PID sintonizado pelo LGR gerou uma resposta bastante satisfatória, como mostrado no gráfico a seguir:

Os parâmetros de Kp, Kd e Ki encontrados pelo LGR estão de acordo com as características reais e físicas de sistema.

Vejamos abaixo o gráfico de resposta perante uma referência de amplitude 45.

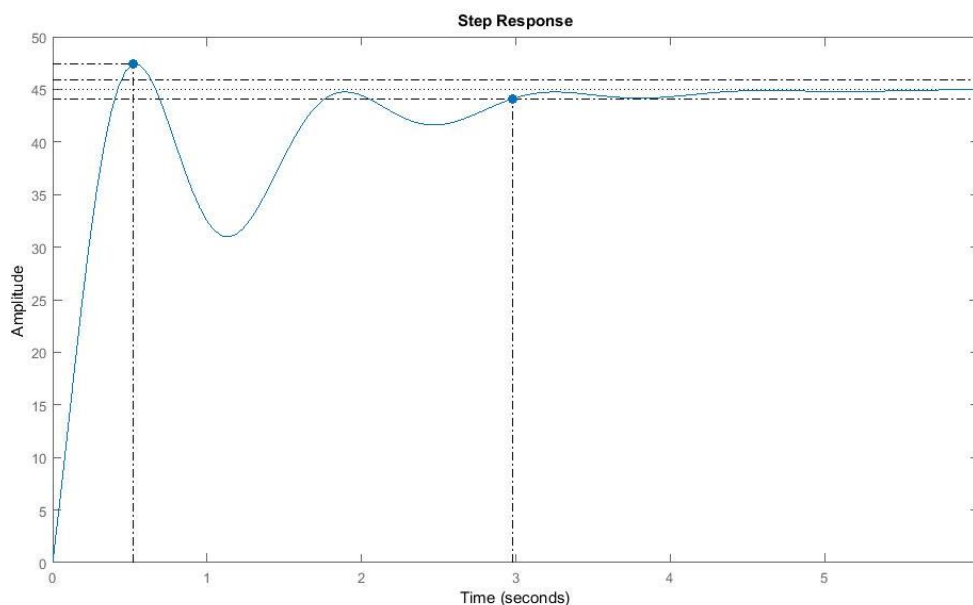


Figura 10

Com overshoot de 5.7% e tempo de assentamento de 2.98 segundos, os resultados estão dentro da margem estabelecida no planejamento do projeto.

## 4.2 Controlador PI por Ziegler Nichols

Numa primeira análise da função de transferência por si só em malha aberta sendo excitada por um degrau, temos o seguinte comportamento:

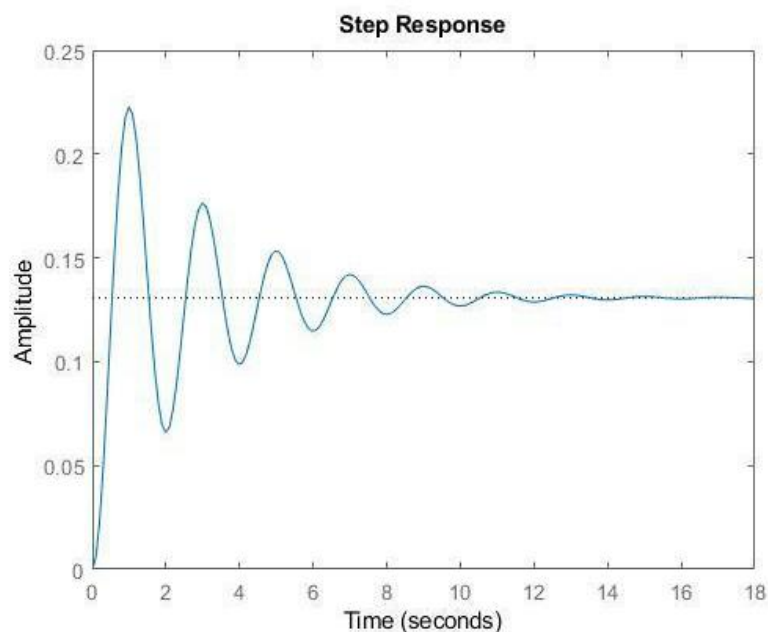


Figura 11

Percebe-se, ao analisar o gráfico, um intervalo razoavelmente grande de tempo de assentamento, ou seja, até que a resposta permanente se estabilize.

Outro detalhe muito importante a ser observado é o *overshoot* no valor de 70.4% (verificado no MATLAB através do botão *characteristics* -> *Peak Response*) fazendo com que a resposta transitória oscile bastante até sua estabilização, caracterizando um sistema subamortecido.

Por último, a resposta permanente nada tem haver com o sinal de referência: um degrau unitário.

Ao inserirmos a realimentação na malha do sistema, encontramos o seguinte comportamento:

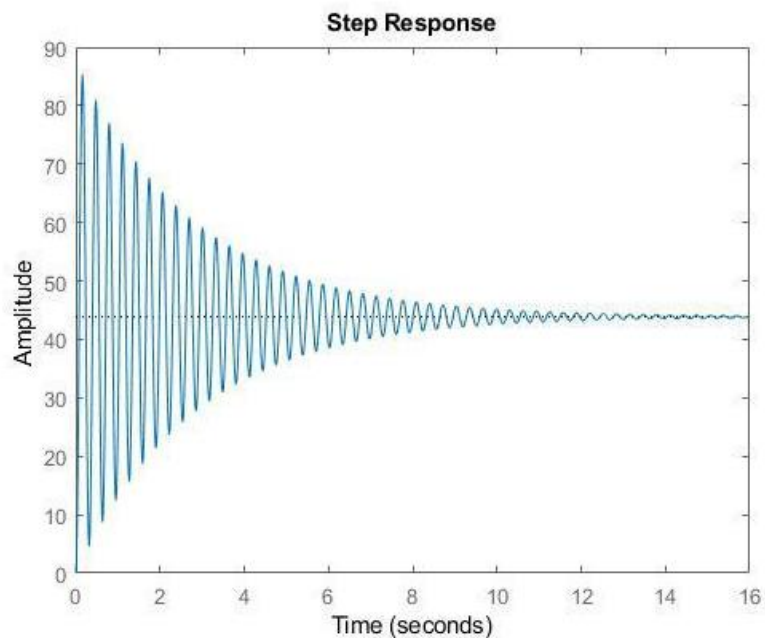


Figura 12

Tal comportamento, bastante oscilatório da resposta transitória não condiz em nada com o resultado desejado, provando a necessidade de um controlador para esse sistema.

Ao adicionarmos um sintonizador Proporcional-Integrativo na malha direta do sistema com os valores já calculados nos tópicos anteriores deste relatório, mantendo a realimentação, a resposta se comporta na forma:

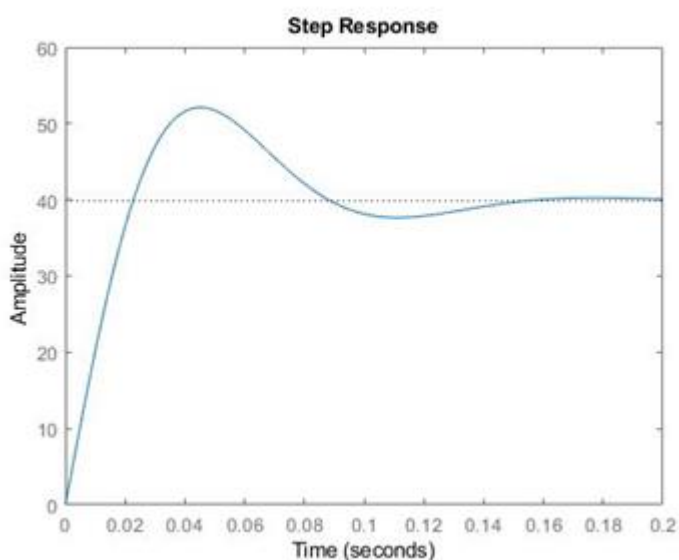


Figura 13

Ao fazer a análise das características no MATLAB, percebeu-se valores bastante aceitáveis para considerarmos a sintonia do PID bem-sucedida.

Os valores de *overshoot* (cerca de 30%), tempo de assentamento (0.14 segundos) e a resposta permanente (igual ao sinal de referência de entrada) tiveram os valores esperados atendendo a todos os critérios que desejávamos para tais.

### 4.3 Controlador PID por Alocação Polinomial de Pólos

Como descrito em 3.6, desenvolvemos também um controlador PID através do método de alocação polinomial de pólos, onde agora vamos mostrar a resposta obtida.

Relembrando os parâmetros do controlador encontrados:

$$Kd = 2,521; Kp = 0,591; Ki = 25,208$$

No MATLAB, construímos o controlador com estes parâmetros acima e já com a realimentação, obtivemos o gráfico de resposta abaixo.

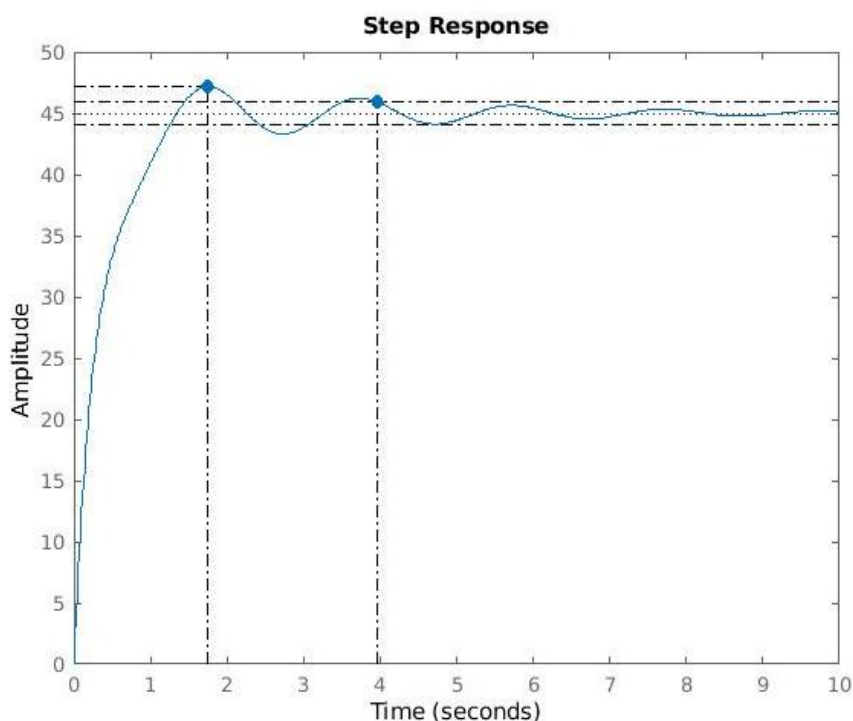


Figura 14

Com este método, obtivemos um overshoot de 4.84% e um Tempo de assentamento de 3.97 segundos, o que consideramos dentro do desejado, já

que nosso controle de posição foi projetado para estabilizar sempre por volta de 4.0 segundos.

Note que a referência é 45, que é referente ao ângulo de  $45^\circ$  denotado como referência, e não mais um degrau unitário.

#### 4.4 Controlador Lead-Lag por Alocação Polinomial de Pólos

Como descrito em 3.10, neste caso teríamos que ter dois zeros e dois pólos a mais, com isso, foi-se necessário “chutar” zeros e pólos de modo que obtivéssemos uma resposta de acordo com as características desejadas para nosso controlador, com isso, os valores encontrados foram:

$$z1 = 9,0 ; z2 = 4,0 ; p1 = 0,6 \text{ e } p2 = 10,0.$$

Onde  $z1$  e  $z2$  são nossos zeros alocados e  $p1$  e  $p2$  são os pólos alocados.

Então, do MATLAB, obtivemos o seguinte gráfico de resposta:

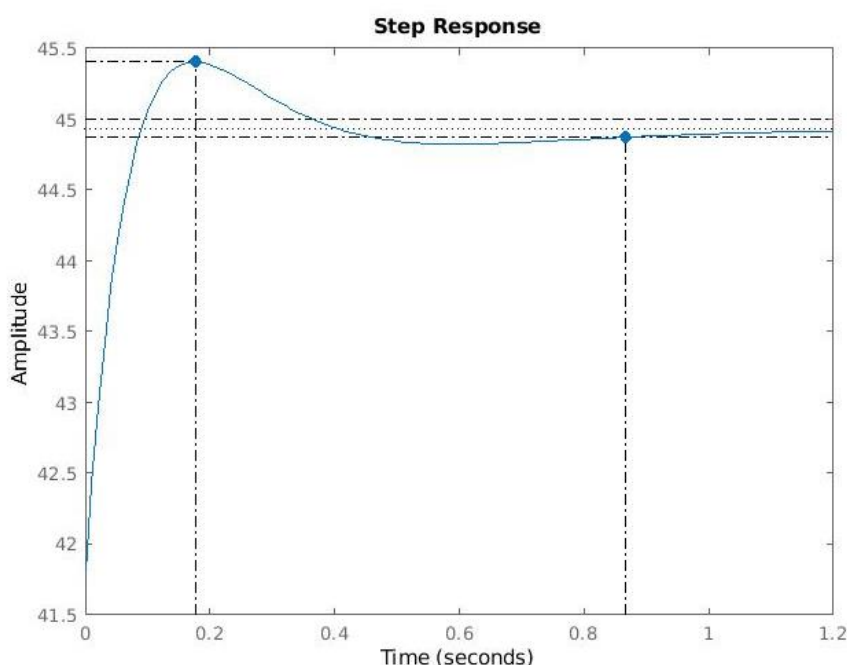


Figura 15

Com este método para o Lead-Lag, conforme o gráfico acima, nosso overshoot foi de 1.04% e o tempo de assentamento foi de 0.87 segundos, observando ainda um erro de regime de 0,1 em relação a referência.

#### 4.5 Regulador com Realimentação em espaço de estados

Tendo encontrado a matriz  $K$  de controle do espaço de estados e inserindo no sistema com realimentação, utilizando o *Simulink*, temos abaixo:

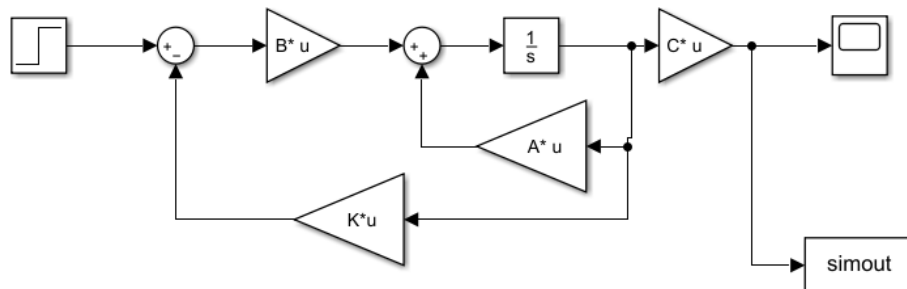


Figura 16

Vale ressaltar que apesar dos esforços do cálculo não houve um controle com os parâmetros desejados.

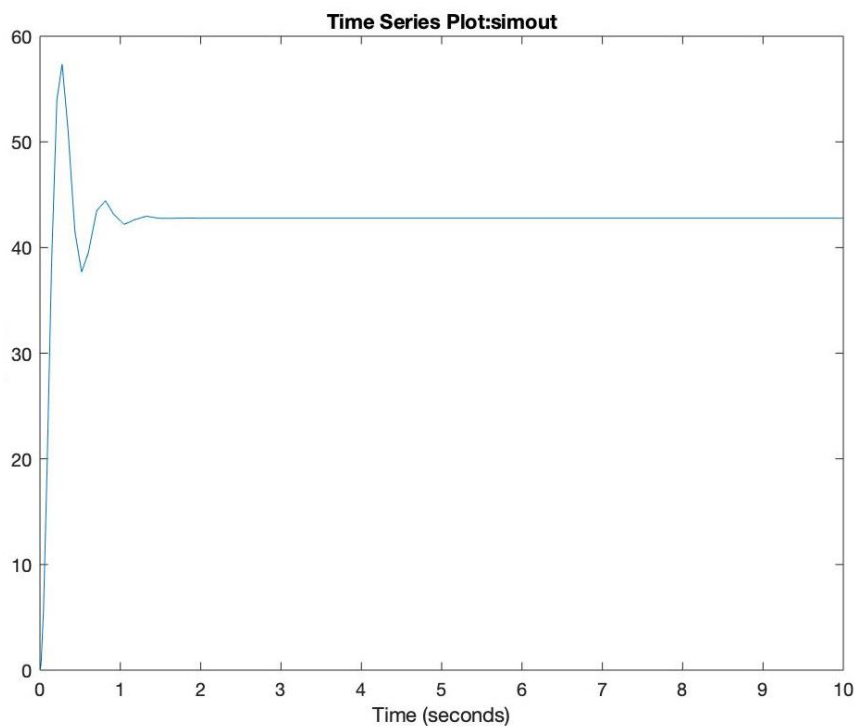


Figura 17

Nesse método, o *overshoot* foi cerca de 37.5% e o tempo de assentamento foi igual a 1.57 segundos. E como não houve controle utilizando um integrador e um terceiro ganho  $k_3$ , a saída não respeitou a referência também, logo, não nos foi satisfatório o comportamento por realimentação utilizando espaço de estados.

## 5. CONCLUSÃO

Este trabalho teve como objetivo projetar controladores para um sistema de controle de posição pêndulo-hélice por diversas estratégias de controle, de modo que, ao construirmos um a um, vimos que nem todos os métodos eram aplicáveis à nossa planta, devido às características da planta e também do método, assim, concluímos que dependendo da planta, utilizar um certo tipo de controlador é mais vantajoso e menos custoso do que tentar utilizar outro.

Com isso, através dos controladores que foram possíveis de projetarmos, obtivemos resultados satisfatórios tal que obedeceram os parâmetros desejados, além de descrevemos também sobre o Espaço de Estados, onde o tipo de controlador especial é o espaço de estados do tipo Regulador e o Regulador + Observador, que também nos trouxe resultados satisfatórios.

---



## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] H. Kizmaz, S. Aksoy, A. Muhurcu, Sliding Mode Control of Suspended Pendulum, *2010 Modern Electric Power Systems*, Wroclaw, 2010.
- [2] A. Mohammadbagheri, M. YaghoobiM, A New Approach to Control a Driven Pendulum with PID Method, *2011 UKSim 13th International Conference on Modelling and Simulation*, Cambridge, 2011.
- [3] BAUER, Wolfgang. Física Para Universitários. 1. ed. Porto Alegre – RS, Editora AMGH. 2012
- [4] OGATA, KATSUHIKO. Engenharia de Controle Moderno. 5ª ed. Rio de Janeiro: LTC, 2011
- [5] HALLIDAY D.; RESNICK R. e WALKER J. Fundamentos de Física: Mecânica. 3. ed. Rio de Janeiro – RJ, Editora LTC. 2009
- [6] Meneghetti U. de Araújo, Fábio. Sistemas de Controle - Universidade Federal do Rio Grande do Norte, 2007.
-

## ANEXOS

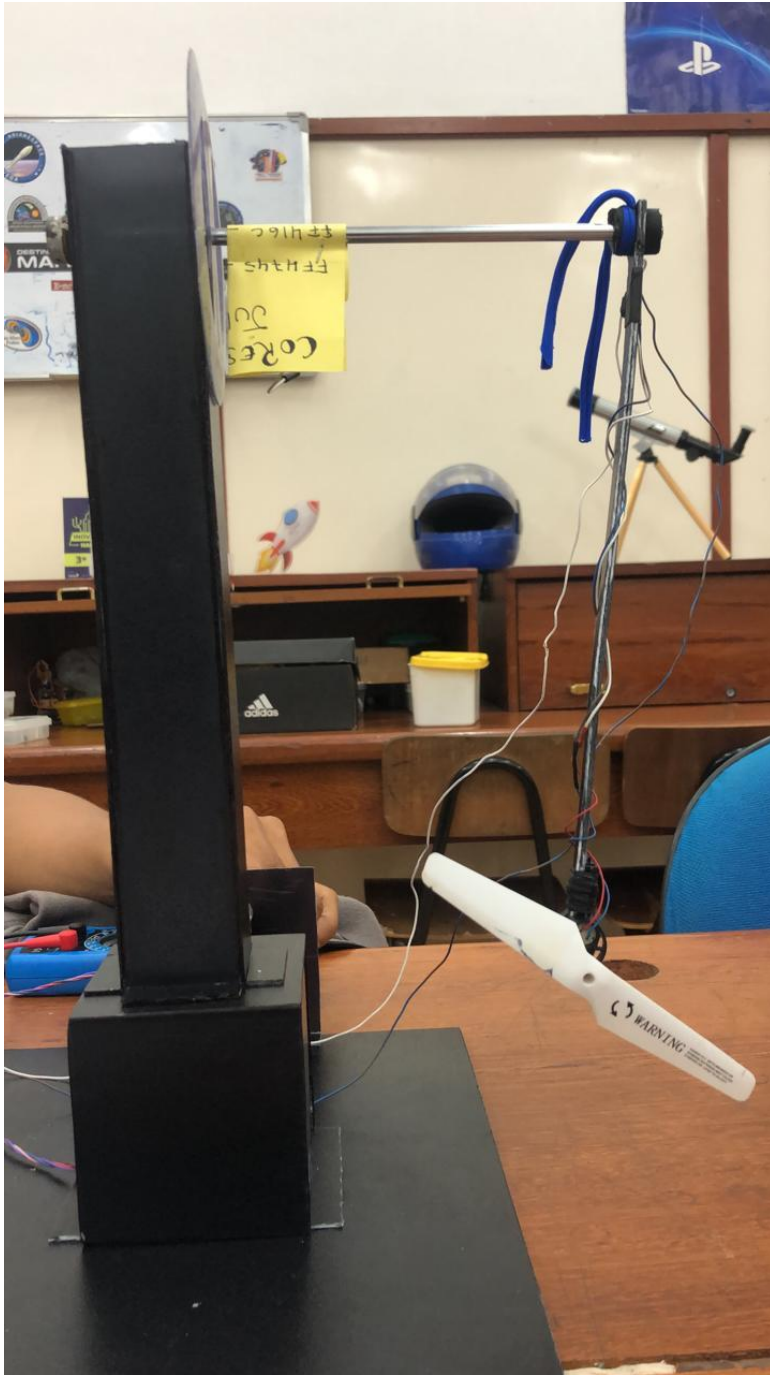


Imagem 01

Pêndulo e hélice em repouso:  $0^\circ$

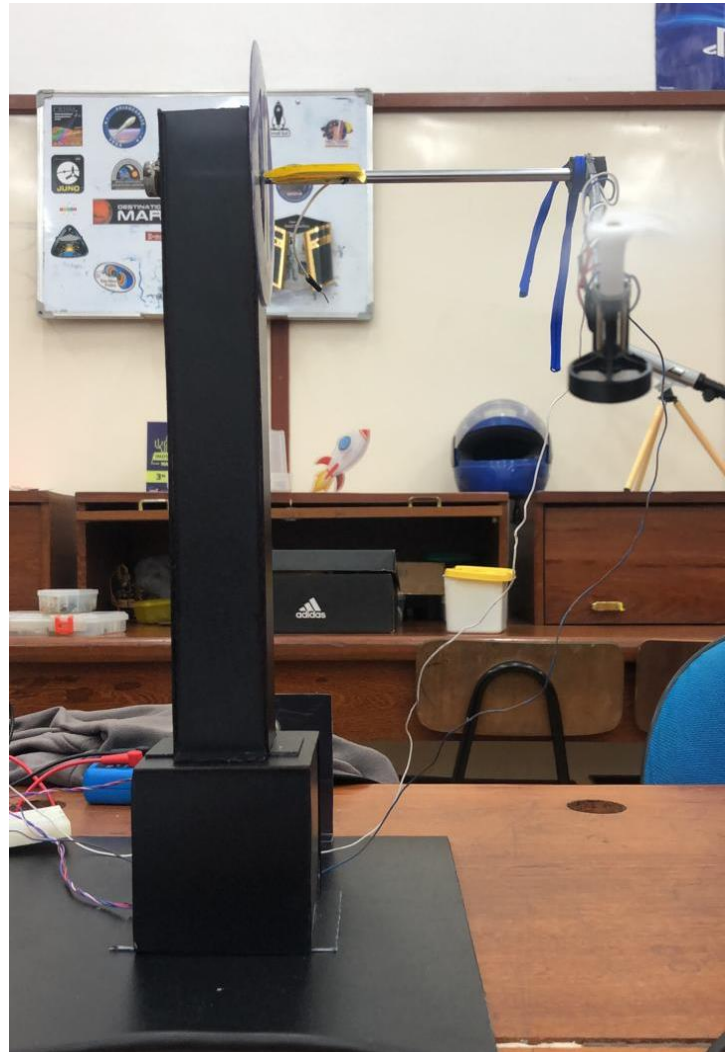


Imagem 02

Hélice girando e pêndulo estabilizado em  $45^\circ$



Imagem 03  
Visão diagonal do 'protótipo'



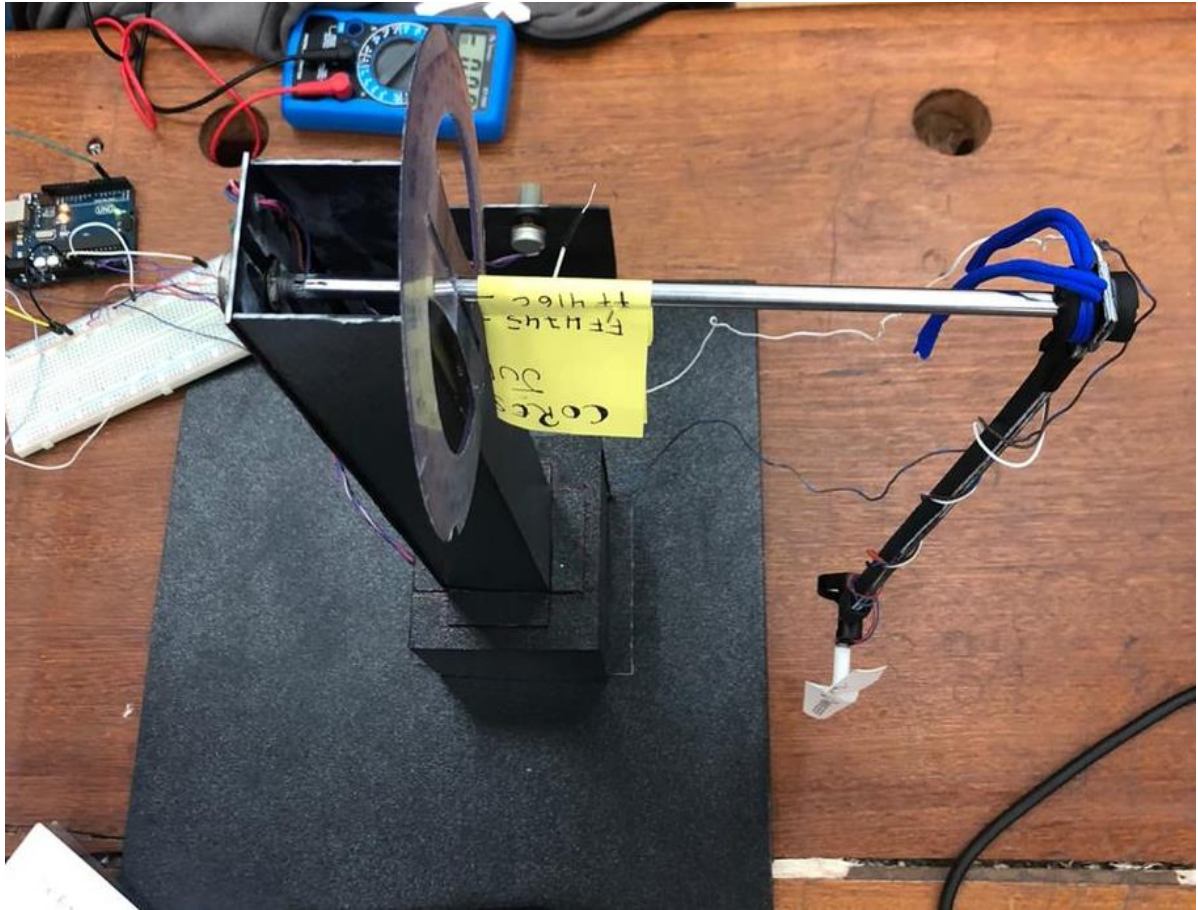


Imagem 04

Visão superior do 'protótipo' com pêndulo em repouso:  $0^\circ$