



Universidade Federal do Amazonas - UFAM  
Faculdade de Tecnologia – FT

# **Relatório Final dos Experimentos**

## **Laboratório de Sistemas de Controle**

Manaus – AM  
2019

# **Relatório Final dos Experimentos**

## **Laboratório de Sistemas de Controle**

### **Alunos:**

Caio Arthur Sales Teles – 21453444  
Evaldo Patrick dos Santos Cardoso – 21453640  
Frank Willames Garcia dos Santos – 21550275  
Mailton Viana Farias – 21602230

Relatório apresentado ao curso  
de graduação em Engenharia da  
Computação da Faculdade de  
Tecnologia – Universidade  
Federal Do Amazonas (UFAM)  
para obtenção de nota parcial  
da disciplina de Laboratório de  
Sistemas de Controle.

Profº Nei Junior Silva Farias

Manaus – AM  
2019

## **RESUMO**

Analisar as diversas características de sistemas, analisar as respostas a diferentes tipos de excitação, desenvolver controles do tipo PID, Lead-Lag e por espaço de estados conforme visto em aulas utilizando a ferramenta do MATLAB.

## **ABSTRACT**

Analyze how many system characteristics, analyze how to respond to different types of excitation, develop PID, lead-lag phase and state space advance and delay controls as seen in class using the MATLAB tools.

## SUMÁRIO

INTRODUÇÃO .....	5
1. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA .....	6
1.1 Compensador Lead .....	6
1.2 Compensador Lag .....	6
1.3 Tipos de Respostas de sistema de Segunda Ordem .....	6
1.4 Sistemas lineares: .....	7
1.5 Sistemas lineares invariantes e variantes no tempo: .....	7
1.6 Sistemas não lineares: .....	7
1.7 Sistemas Contínuos e Discretos: .....	7
1.8 Sistema com e sem memória: .....	8
1.9 Erros em regime permanente .....	8
1.10 Controlador Proporcional-Integral-Derivativo (PID) .....	8
1.11 Modelo de Espaço de estados .....	9
2. METODOLOGIA .....	10
2.1 EXPERIMENTO 1 .....	10
2.2 EXPERIMENTO 2 .....	11
2.3 EXPERIMENTO 3 .....	12
2.4 EXPERIMENTO 4 .....	15
2.5 EXPERIMENTO 5 .....	16
2.6 EXPERIMENTO 6 .....	17
3. RESULTADOS .....	20
3.1 EXPERIMENTO 1 .....	20
3.2 EXPERIMENTO 2 .....	22
3.3 EXPERIMENTO 3 .....	34
3.4 EXPERIMENTO 4 .....	38
3.5 EXPERIMENTO 5 .....	41
CONCLUSÃO .....	44
REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA .....	45

## INTRODUÇÃO

A disciplina de sistemas de controle tem o objetivo de projetar sistemas automatizados, desenvolver e gerenciar equipamentos utilizados em qualquer tipo de indústria. O foco desta disciplina está no comportamento dinâmico de sistemas. Um dos objetivos de um sistema de controle é que a resposta na saída siga um determinado sinal de referência, em regime permanente. A diferença entre o sinal de saída e o sinal de referência, em regime permanente, é definido como erro em regime permanente (estacionário).

Sendo assim, este relatório tem o objetivo de analisar as diversas características dos sistemas como: linearidade, continuidade, invariância no tempo, memória. Análise da resposta a diversos tipo de entrada, o erro do sinal de saída do sistema. Além de, desenvolver controladores do tipo PID, Lead-Lag e por espaço de estados.

## 1. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

### 1.1 Compensador Lead

O compensador lead melhora margem de estabilidade, aumenta a faixa de passagem, melhora a resposta transitória (sistema fica mais rápido), fica sujeito a ruídos de alta frequência, diminui o sobressinal máximo na resposta ao degrau.

É um controlador definido pela seguinte equação.

$$C(s) = K_c \frac{T_1 s + 1}{T_2 s + 1}$$

O qual o zero é menor que o polo, ou seja, o zero está mais próximo das baixas frequência e logo é mais lento que o polo.

$$|Z| < |P|$$

$$T_1 > T_2$$

### 1.2 Compensador Lag

O compensador lag diminui o ganho do sistema em altas frequências, sem reduzir o ganho em baixas frequências (melhora a precisão em regime estacionário), reduz a largura de faixa, o sistema fica mais lento, por causa da diminuição do ganho em altas-frequências o ganho total do sistema pode ser aumentado, melhorando a precisão em regime permanente.

É um controlador definido pela seguinte equação.

$$C(s) = K_c \frac{T_1 s + 1}{T_2 s + 1}$$

O qual o polo é menor que o zero, ou seja, o polo está mais próximo das baixas frequências e logo é mais lento que o zero.

$$|Z| < |P|$$

$$T_1 < T_2$$

### 1.3 Tipos de Respostas de sistema de Segunda Ordem

As raízes  $s_1$  e  $s_2$  de um sistema de segunda ordem são chamadas frequências naturais, medidas em nepers por segundo (Np/s, Neper (Np) é uma unidade adimensional cujo nome foi dado em homenagem a John Napier (1550-1617), matemático escocês). As variáveis  $\alpha$  e  $\omega$  são valores importantes e são elas que nos

ajudam a definir o tipo de amortecimento do sistema. A razão  $\frac{\alpha}{\omega}$  é conhecida como fator de amortecimento.

Podemos inferir que existem três tipos de soluções para um sistema de segunda ordem:

1. Se  $\alpha > \omega$ , temos o caso de amortecimento supercrítico.
2. Se  $\alpha = \omega$ , temos o caso de amortecimento crítico.
3. Se  $\alpha < \omega$ , temos o caso de subamortecimento

#### **1.4 Sistemas lineares:**

Um sistema é dito linear se o princípio da superposição se aplicar a ele. O princípio da superposição afirma que a resposta produzida pela aplicação simultânea de duas funções de determinação diversas é a soma das duas respostas individuais. Então, para o sistema linear, a resposta a diversas entradas pode ser calculada tratando uma entrada de cada vez e somando os resultados. Esse é o princípio que permite construir soluções complicadas para equações diferenciais lineares a partir de soluções simples.

Na pesquisa experimental de um sistema dinâmico, se causa e efeito forem proporcionais, significando, assim, que é válida a aplicação do princípio da superposição, então o sistema pode ser considerado linear.

#### **1.5 Sistemas lineares invariantes e variantes no tempo:**

Um sistema é invariante no tempo se um deslocamento, no tempo do sinal de entrada (qualquer que seja ele) resulta em um deslocamento no tempo idêntico no sinal de saída.

#### **1.6 Sistemas não lineares:**

Um sistema é não linear se o princípio da superposição não se aplicar a ele. Assim, para um sistema não linear, não se pode obter a resposta a duas entradas simultâneas considerando as entradas individualmente e somando os resultados. Embora muitas relações de grandezas físicas sejam representadas por equações lineares, na maioria dos casos a relação entre elas não é efetivamente linear. De fato, um estudo cuidadoso dos sistemas físicos revela que mesmo os chamados 'sistemas lineares' são realmente lineares somente para intervalos limitados de operação. Na prática, muitos sistemas eletromecânicos, hidráulicos, pneumáticos e outros envolvem relações não lineares entre as variáveis.

#### **1.7 Sistemas Contínuos e Discretos:**

Um sistema de tempo contínuo é um sistema em que os sinais de entrada de tempo contínuo são aplicados e resultam em sinais de saída de tempo contínuo.

Sistemas discretos e sistemas contínuos representam modelos matemáticos distintos de sistemas físicos semelhantes, com características dinâmicas semelhantes

• Os sistemas discretos têm um número finito de graus de liberdade e os sistemas contínuos têm infinitos graus de liberdade  
 • Os sistemas discretos são governados por equações diferenciais ordinárias, e os sistemas contínuos são governados por equações diferenciais parciais  
 • Os sistemas contínuos têm soluções exatas apenas em casos especiais, essencialmente quando os parâmetros que caracterizam o sistema são uniformemente distribuídos.

### 1.8 Sistema com e sem memória:

Um sistema é dito sem memória se a sua saída, para todo valor da variável independente, em um dado instante, depende somente da entrada nesse mesmo instante.

### 1.9 Erros em regime permanente

O erro em regime permanente significa o erro que o sistema tem após a resposta transitória ter terminado.

Dado um sistema em malha fechada, com realimentação unitária, representado pelo diagrama de blocos da Figura 01. O bloco  $G(s)$  representa a planta ou processo a ser controlado. [2]

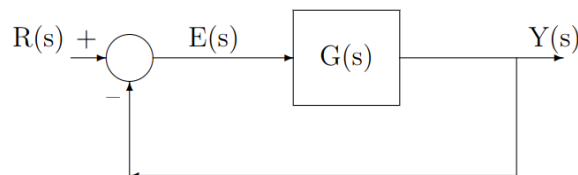


Figura 01 - Função de transferência em malha fechada

O erro de malha fechada é dado por:

$$E(s) = \frac{R(s)}{1 + G(s)}$$

Para encontrar o erro em regime usamos o teorema do valor final:

$$e(t \rightarrow \infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s)$$

O erro em regime de um sistema realimentado depende das características da função de transferência em malha aberta e da entrada de referência. Existem três entradas que são mais utilizadas para teste: entrada degrau, entrada rampa e entrada parábola.

### 1.10 Controlador Proporcional-Integral-Derivativo (PID)

A utilidade dos controles PID está na sua aplicabilidade geral à maioria dos sistemas de controle. Em particular, quando o modelo matemático da planta não é conhecido e, portanto, métodos de projeto analítico não podem ser utilizados, controles PID se mostram os mais úteis. Na área dos sistemas de controle de



processos, sabe-se que os esquemas básicos de controle PID e os controles PID modificados provaram sua utilidade conferindo um controle satisfatório, embora em muitas situações eles possam não proporcionar um controle ótimo.

O processo de selecionar parâmetros do controlador que garantam dada especificação de desempenho é conhecido como sintonia do controlador. Ziegler e Nichols sugeriram regras para a sintonia de controladores PID (o que significa ajustar os valores de  $K_p$ ,  $T_i$  e  $T_d$ ) baseadas na resposta experimental ao degrau ou no valor de  $K_p$  que resulta em uma estabilidade marginal, quando somente uma ação proporcional é utilizada. As regras de Ziegler-Nichols são úteis quando os modelos matemáticos da planta são desconhecidos. (Essas regras podem, é claro, ser aplicadas ao projeto de sistemas com modelos matemáticos conhecidos.) Elas sugerem um conjunto de valores de  $K_p$ ,  $T_i$  e  $T_d$  que vão proporcionar uma operação estável do sistema. Contudo, o sistema resultante pode exibir um sobressinal máximo grande na resposta do degrau, o que é inaceitável. Nesse caso, precisamos fazer uma série de sintonias finas até que um resultado aceitável seja obtido. De fato, as regras de sintonia de Ziegler-Nichols fornecem estimativas dos valores dos parâmetros e proporcionam um ponto de partida na sintonia fina, e não os valores definitivos de  $K_p$ ,  $T_i$  e  $T_d$  logo na primeira tentativa.[3]

### **1.11 Modelo de Espaço de estados**

Um sistema moderno complexo pode ter muitas entradas e muitas saídas, e elas podem ser interrelacionadas de maneira complexa. Para analisar esse sistema, é essencial reduzir a complexidade das expressões matemáticas, bem como recorrer aos computadores para a maioria dos processamentos tediosos necessários na análise. A abordagem com base no espaço de estados é a mais apropriada para analisar o sistema sob esse ponto de vista.

Enquanto a teoria de controle convencional é fundamentada na relação entrada-saída, ou função de transferência, a teoria de controle moderno é baseada na descrição de um sistema de equações em termos de  $n$  equações diferenciais de primeira ordem, as quais podem ser combinadas em uma equação diferencial vetorial-matricial de primeira ordem. O uso de uma notação vetorial-matricial simplifica bastante a representação matemática do sistema de equações. O aumento no número das variáveis de estado, no número de entradas ou no número de saídas não aumenta a complexidade das equações. De fato, a análise de sistemas complicados, com múltiplas entradas e múltiplas saídas, pode ser conduzida por procedimentos que são apenas ligeiramente mais complicados do que os necessários à análise dos sistemas de equações diferenciais escalares de primeira ordem.[3]

## 2. METODOLOGIA

### 2.1 EXPERIMENTO 1

O objetivo deste experimento inicial da disciplina foi verificar se as plantas atendem às 4 propriedades de:

- Linearidade;
- Variância no tempo;
- Memória e
- Continuidade.

Com isso, foi aplicado um degrau unitário na entrada e observado, através do Simulink do MatLab, as respostas dessas plantas, conforme descritas abaixo e comentadas em 'Resultados'.

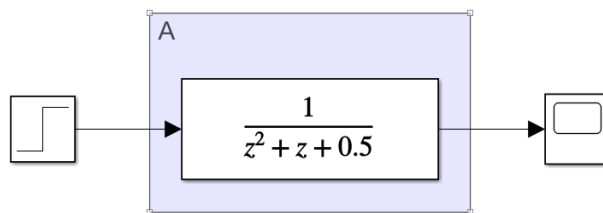


Figura 02 - Planta A

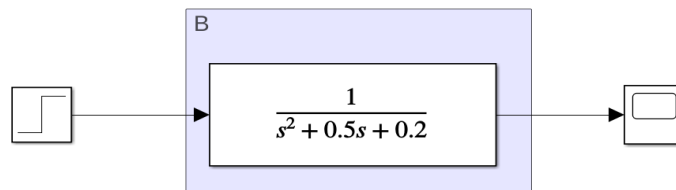


Figura 03 - Planta B

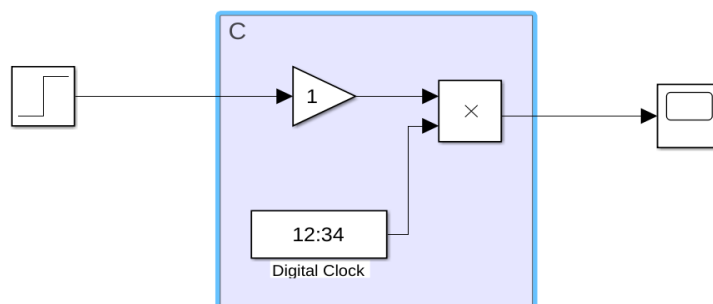


Figura 04 - Planta C

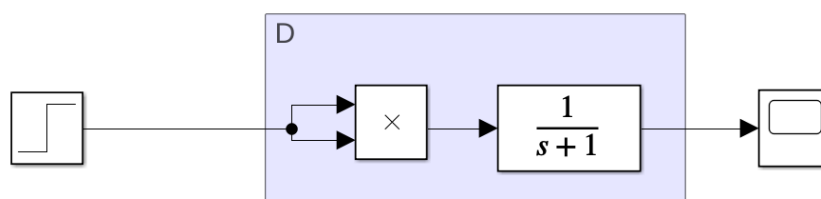


Figura 05 - Planta D

## 2.2 EXPERIMENTO 2

### 2.2.1 Primeira Simulação: Modelo Obtido em sala.

O objetivo é realizar a variação dos valores de 'Kp' e analisar a resposta do sistema, o erro em regime permanente para uma entrada degrau e rampa. A planta utilizada para o experimento foi a seguinte:

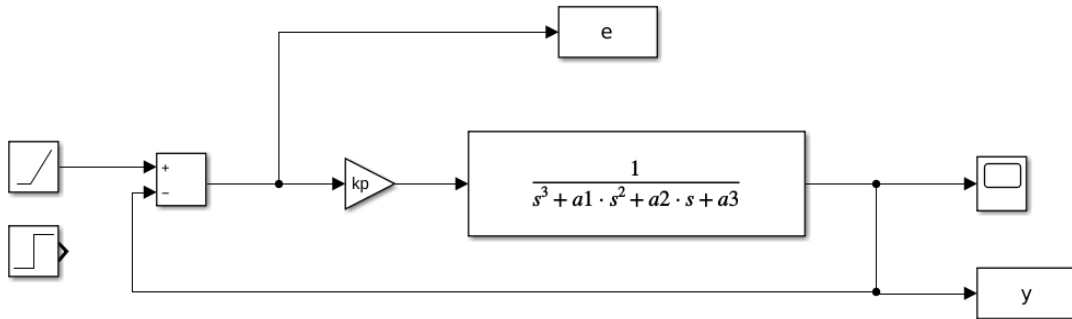


Figura 06 - Planta do sistema 1

Setamos na entrada do sistema um step com degrau unitário, logo, variamos o valor de Kp e observamos o comportamento se estabilizava ou não na referência e por quanto tempo.

Nossos experimentos foram para valores de Kp = 5, Kp = 10, Kp = 18, Kp = 35, Kp = 50, Kp = 75 e Kp = 100. conforme os gráficos em anexos e descritos em 'Resultados'.

Em seguida, analisamos aplicando na entrada do sistema um step com rampa, logo, variamos o valor de Kp novamente e observamos os mesmos comportamentos anteriores. Neste caso, nossos valores de Kp estão um pouco diferentes dos aplicados no degrau, com isso, utilizamos Kp = 3, Kp = 10, Kp = 50. Kp = 85 e Kp = 100 e discutiremos seus gráficos em 'Resultados'.

### 2.2.2 Segunda Simulação: Modelo enviado no Classroom.

Neste, conforme a planta a seguir, o trabalho é praticamente o mesmo do anterior, realizando a variação apenas dos valores de 'b' e analisar a resposta do sistema, o erro em regime permanente para uma entrada degrau e rampa.

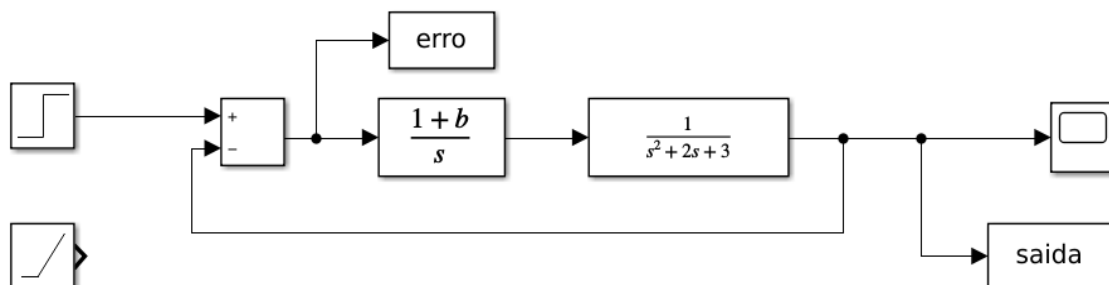


Figura 07 - Planta do sistema 2

Como vemos na figura acima, está conectado para uma entrada degrau, então começamos a variação de 'b' por b = 0.2, depois b = 0.6, b = 1, b = 7 e por fim b = 12 e a análise dos gráficos discutiremos em 'Resultados'.

Em seguida, mudamos a entrada para a rampa e novamente começamos a variar 'b' a partir de b = 0.2, depois fizemos para b = 1, b = 5, b = 8 e b = 12 e analisamos seus gráficos conforme veremos em 'Resultados'.

## 2.3 EXPERIMENTO 3

### 2.3.1 Circuito RLC - Série

Função de transferência do circuito RLC - Série

$$\frac{V(S)}{V(S)_c} = \frac{\frac{1}{LC}}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}}$$

Definir os valores de capacitância, resistência e indutância para que o circuito RLC - Série com fonte de alimentação de 24V tenha uma resposta:

- **Amortecimento supercrítico:**

Os valores definidos para que o sistema tenha uma resposta do tipo amortecimento supercrítico foram:

$$R = 5\Omega$$

$$L = 1H$$

$$C = 0.25F$$

A função de transferência:

$$\frac{V(S)}{V(S)_c} = \frac{4}{s^2 + 5s + 4} \quad ; \quad \alpha = 2.5 \text{ np/s} \quad \omega = 2 \text{ np/s}$$

- **Amortecimento crítico:**

Os valores definidos para que o sistema tenha uma resposta do tipo amortecimento crítico foram:

$$R = 4\Omega$$

$$L = 1H$$

$$C = 0.25F$$

A função de transferência:

$$\frac{V(S)}{V(S)_C} = \frac{4}{s^2 + 4s + 4} \quad ; \quad \alpha = 2 \text{ np/s} \quad \omega = 2 \text{ np/s}$$

- **Subamortecido:**

Os valores definidos para que o sistema tenha uma resposta do tipo subamortecido foram:

$$R = 1\Omega$$

$$L = 1\text{H}$$

$$C = 0.25\text{F}$$

A função de transferência:

$$\frac{V(S)}{V(S)_C} = \frac{4}{s^2 + s + 4} \quad ; \quad \alpha = 0.5 \text{ np/s} \quad \omega = 2 \text{ np/s}$$

- **Oscilação Permanente:**

Os valores definidos para que o sistema tenha uma resposta de oscilação permanente foram:

$$R = 0.01\Omega$$

$$L = 1\text{H}$$

$$C = 0.25\text{F}$$

A função de transferência:

$$\frac{V(S)}{V(S)_C} = \frac{4}{s^2 + 0.01s + 4} \quad \alpha = 0.005 \text{ np/s} \quad \omega = 2 \text{ np/s}$$

### 2.3.2 Amplificador Operacional

Função de transferência do circuito com Amplificador Operacional

$$\frac{V(S)}{V_0(S)} = \frac{s^2 + \left(\frac{1}{C_2 R_1} + \frac{1}{C_2 R_2} + \frac{1}{C_1 R_1}\right)s + \frac{1}{C_1 R_1 C_2 R_2}}{s^2 + \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{C_2 R_2}\right)s + \frac{1}{C_1 R_1 C_2 R_2}}$$

Definir os valores de capacitância e resistência para que o circuito com amplificador operacional com fonte de alimentação de 1V tenha uma resposta do tipo:

- **Amortecimento supercrítico:**

Os valores definidos para que o sistema tenha uma resposta do tipo amortecimento supercrítico foram:

$$R_1 = 10\Omega$$

$$R_2 = 15\Omega$$

$$C_1 = 6F$$

$$C_2 = 1F$$

A função de transferência:

$$\frac{V(S)}{V_0(S)} = \frac{S^2 + 0.1833S + 0.001111}{S^2 + 0.1667S + 0.001111} ; \alpha = 0.0833 \text{ np/s } \omega = 1 \text{ np/s}$$

- **Amortecimento crítico:**

Os valores definidos para que o sistema tenha uma resposta do tipo amortecimento crítico foram:

$$R_1 = 1\Omega$$

$$R_2 = 1\Omega$$

$$C_1 = 1F$$

$$C_2 = 1F$$

A função de transferência:

$$\frac{V(S)}{V_0(S)} = \frac{S^2 + 3S + 1}{S^2 + 2S + 1} ; \alpha = 1 \text{ np/s } \omega = 1 \text{ np/s}$$

- **Subamortecido:**

Os valores definidos para que o sistema tenha uma resposta do tipo amortecimento crítico foram:

$$R_1 = 0.1\Omega$$

$$R_2 = 0.1\Omega$$

$$C_1 = 6F$$

$$C_2 = 1F$$

A função de transferência:

$$\frac{V(S)}{V_0(S)} = \frac{S^2 + 21.67S + 16.67}{S^2 + 20S + 16.67} ; \alpha = 10 \text{ np/s } \omega = 1 \text{ np/s}$$

## 2.4 EXPERIMENTO 4

O motor de corrente contínua segue o esquema elétrico da figura abaixo:

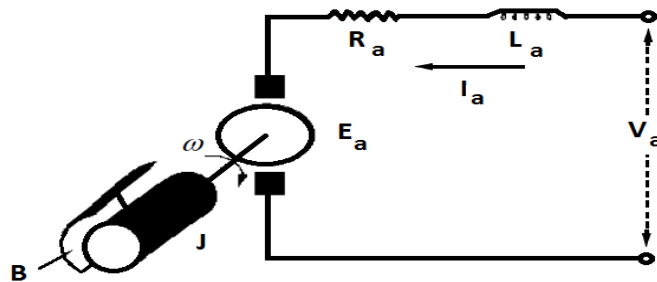


Figura 08 - Esquemático de um motor de corrente contínua

A modelagem do sistema foi não só realizada em sala como também realizada em outro dos relatórios já entregue, portanto nos atemos às equações já modeladas. Existem duas funções de transferência: referente ao componente elétrico e outra referente ao componente mecânico. São elas:

$$\frac{V_a(t)}{I_a(t)} = \frac{1}{L_a s + R_a}$$

$$\frac{\omega(t)}{I_a(t)} = \frac{1}{J s + B}$$

Como definido, o diagrama em blocos foi definido como:

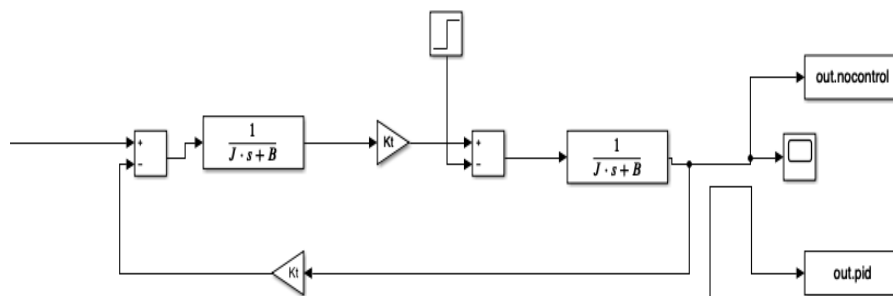


Figura 09 - Diagrama em blocos do sistema

Os valores escalares (sem as grandezas) das variáveis também foram definidos como:

$$J = 1.13 * 10^{-2}$$

$$B = 0.028$$

$$L_a = 10^{-1}$$

$$R_g = 0.45$$

$$K_t = 0.067$$

$$K_p = 0.067$$

$$V_i = 12$$

$$T_a = 0$$

$$I_a = 1$$

Os ganhos do controlador PID sintonizado foram (dados em aula):

$$K_p = 3$$

$$K_i = 15$$

$$K_d = 0.3$$

## 2.5 EXPERIMENTO 5

Neste experimento será visto duas formas de projetar controladores. uma é fazendo a análise da frequência, usando compensador de avanço de fase e definindo uma margem de fase desejada. O outro é utilizado lugar geométrico das raízes, ao qual definiremos um tempo de assentamento.

Usaremos uma planta em resposta a degrau e malha fechada do sistema definida por:

$$G(s) = \frac{5}{s(s+1)}$$

Cujo erro de velocidade desejado é 0.02 e a margem de fase é 50°:

$$\text{erro desejado} = 0.02$$

$$\text{margem de fase} = 50^\circ$$

Podemos encontrar o erro atual do sistema fazendo as seguintes manipulações

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{5}{s(s+1)} = 5$$

$$e_{ss} = \frac{1}{K_v} = \frac{1}{5} = 0,2$$

Obtendo esses valores, agora poderemos fazer a compensação para atingir o erro de velocidade desejado 0.02 temos que,

$$K_{v_{novo}} = K_c K_v$$

Onde  $K_{v_{novo}}$  é o ganho do compensador que vamos inserir, continuando:



$$e_{ss} = 0,02 = \frac{1}{K_{vnovo}}$$

$$e_{ss} = 0,02 = \frac{1}{K_c K_v}$$

Substituindo kn temos,

$$e_{ss} = 0,02 = \frac{1}{5K_c}$$

$$K_c = 10$$

Adicionamos o ganho do compensador à planta do sistema, logo temos:

$$G(s) = 10 \frac{5}{s(s+1)}$$

Os diagramas de bode das simulações obtidos são discutidos mais a frente em 'Resultados'.

## 2.6 EXPERIMENTO 6

### Parte I

Para esse experimento, tínhamos como objetivo reproduzir os cálculos para os ganhos da matriz de realimentação de estados demonstrados em sala. Na posse das matrizes A, B e C, das equações de estados, com D = 0, temos

$$\hat{x} = Ax + Bu$$

$$y = Cx + Du$$

em que

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; C = [1 \quad 0 \quad 0]$$

O polinômio característico do sistema é:

$$p = s^3 + 6s^2 + 11s + 6$$

Sendo os novos polos do sistema desejados:

$$K = [-1 \quad -0.5 \quad -2]$$

Encontramos o polinômio característico do sistema em malha fechada, que é:

$$p = s^3 + 3.5s^2 + 3.5s + 1$$

Assim, para encontrarmos os valores da matriz K, basta fazer a análise a partir dos coeficientes dos dois polinômios.

$$\begin{aligned}\tilde{\alpha}_1 &= 6 - 3.5 = 2.5 \\ \tilde{\alpha}_2 &= 11 - 3.5 = 7.5 \\ \tilde{\alpha}_3 &= 6 - 1 = 5\end{aligned}$$

## Parte II

Para a segunda parte desse experimento, foi utilizado um outro sistema representado em espaço de estados definido pelas matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 4 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}; C = [1 \quad 0 \quad 0]$$

Como a matriz A não se apresentou em nenhuma de suas formas canônicas, precisamos transformá-la de forma a poder utilizar seu valores nos cálculos da matriz de realimentação. Primeiro, verificamos se o sistema é controlável a partir do determinante da matriz de controlabilidade:

$$Mc = [B \quad AB \quad A^2B]$$

Seu determinante sendo diferente de zero, significa que a matriz é controlável, o que foi o caso.

A partir daí, precisamos encontrar o polinômio característico do sistema que irá definir a forma canônica controlável de A. Fazemos, então:

$$\begin{aligned}pc &= \det(sI - A) \\ pc &= s^3 - 7s^2 + 7s + 15\end{aligned}$$

O que faz com que a matriz A seja da forma

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 7 & -7 & -15 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}; \tilde{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Sendo os pólos realocados em -1, -2 e -0.3. Temos um polinômio em malha fechada igual a

$$pf = s^3 + 3.3s^2 + 2.9s + 0.6$$

Fazendo a relação dos coeficientes, temos a matriz  $\underline{K}$  :

$$\tilde{K} = [-7 - 3.3 \quad 7 - 2.9 \quad 15 - 0.6]$$

$$\tilde{K} = [-10.3 \quad 4.1 \quad 14.4]$$

Para encontrarmos a matriz final de ganho K, basta fazer o produto da matriz P de transformação com a matriz  $\underline{K}$  encontrada.

Sendo a matriz P, o inverso da matriz de controlabilidade, temos finalmente:

$$K = \tilde{K}P = [14.7 \quad -6.8 \quad -26]$$

### 3. RESULTADOS

#### 3.1 EXPERIMENTO 1

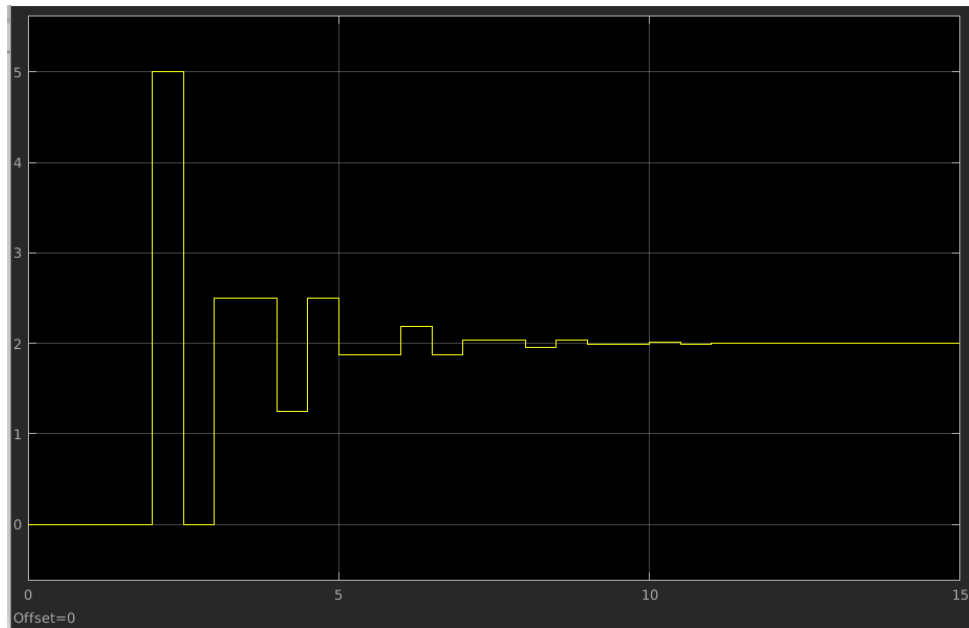


Figura 10 - Resposta ao degrau da Planta A

Analisando aquelas quatro propriedades, verificamos primeiramente que este sinal é discreto, além disso, é variante no tempo, possui memória, pois a saída no instante seguinte 'depende' da saída atual e o sistema é linear.

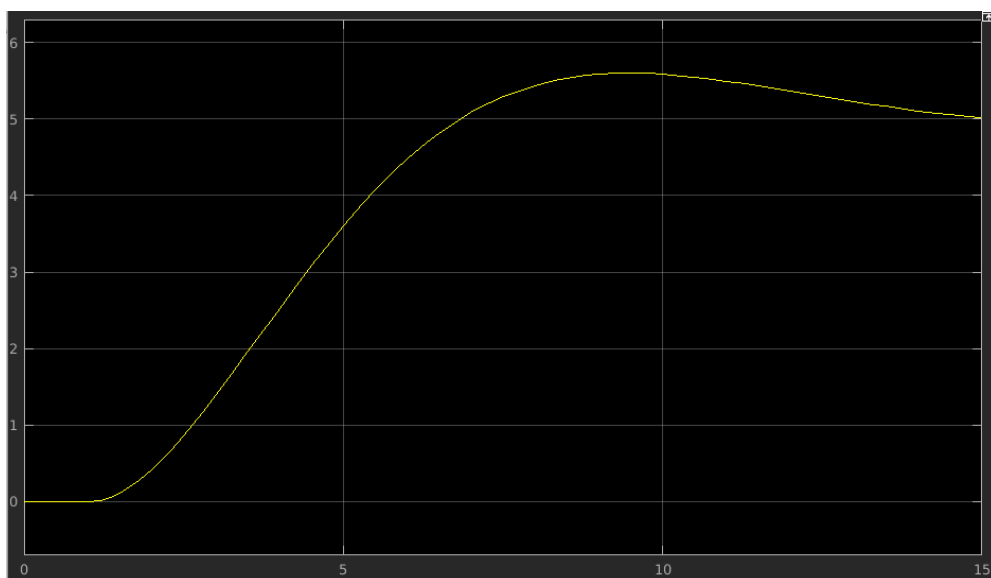


Figura 11 - Resposta ao degrau da Planta B

Para a planta B, pela resposta podemos dizer que o sistema é contínuo, sem memória, variante no tempo e linear.

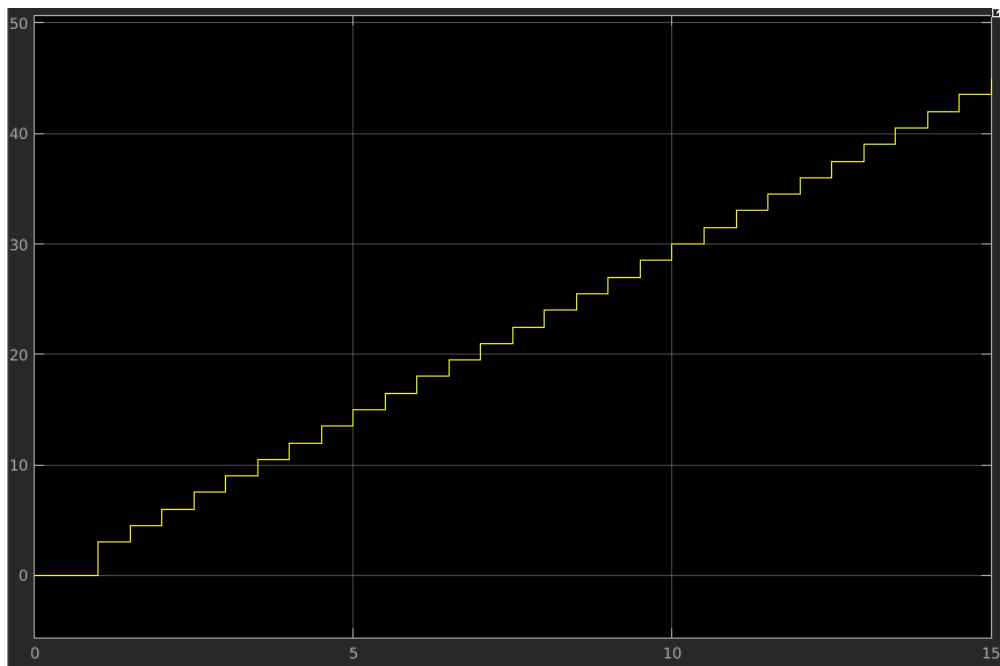


Figura 12 - Resposta ao degrau da Planta C

Pela resposta, facilmente concluímos que o sistema é discreto, podemos analisar e dizer que o sistema é sem memória, invariante no tempo pois tem o mesmo comportamento 'de mudança' a cada período e é linear.

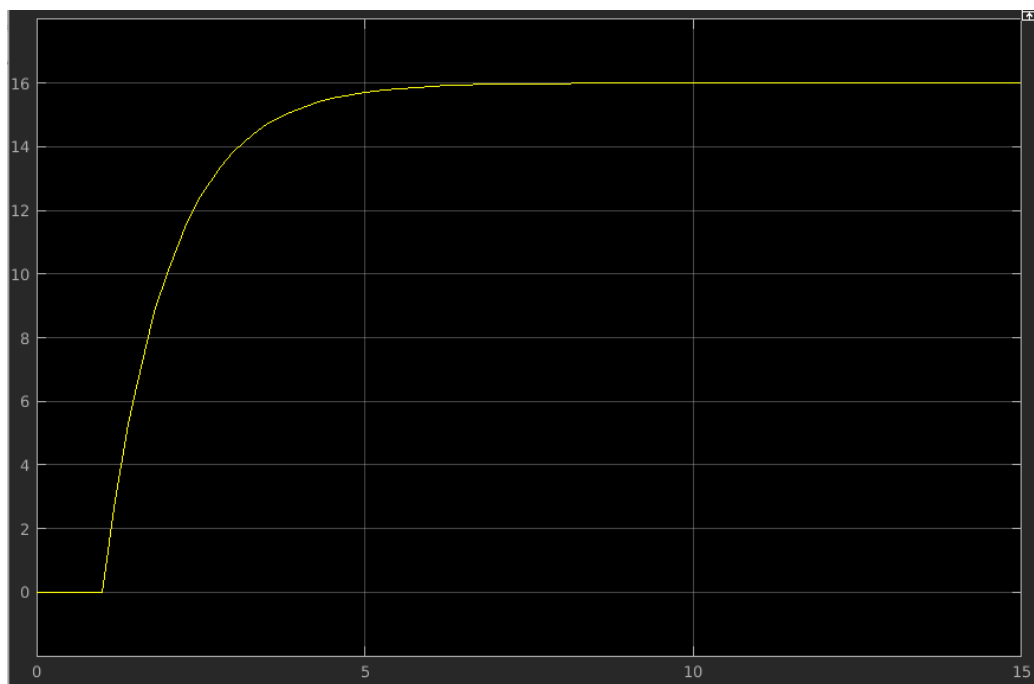


Figura 13 - Resposta ao degrau da Planta D

Para a planta D, conforme o gráfico de saída gerado acima, podemos dizer que o sistema é contínuo, sem memória, parcialmente variante no tempo e parcialmente invariante no tempo, pois apenas no começo ele leva tempo para crescer e depois se mantém estável e é linear.

## 3.2 EXPERIMENTO 2

### Parte 01

#### 3.2.1 Para uma entrada degrau unitário

- $K_p = 5$

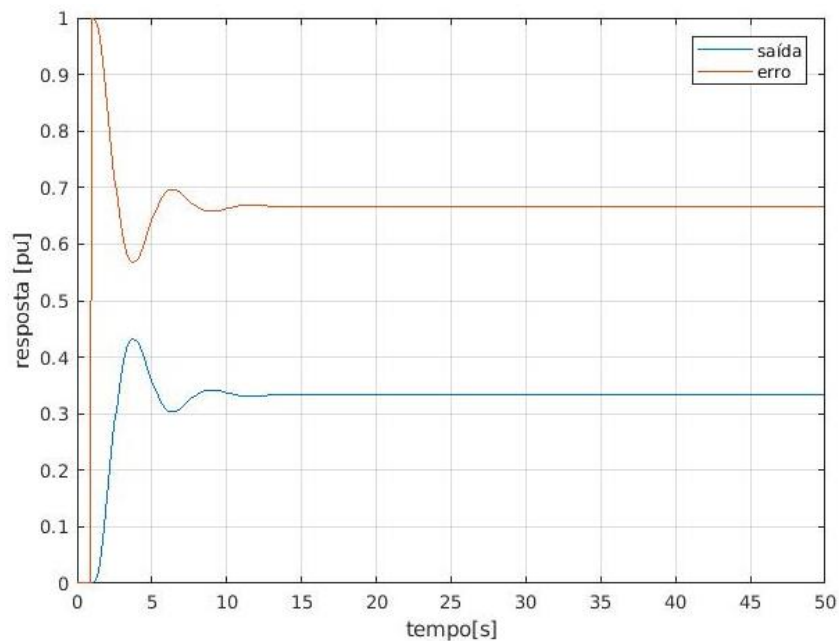


Figura 14 - Resposta para um ganho  $K_p = 5$

Neste gráfico, podemos observar que a saída não obedece a referência, onde deveria se estabilizar em 1. Visto que se estabiliza em 0.35, consequentemente temos um erro de regime de 0.65, ou seja, 65%. Logo, este valor de ganho proporcional ( $K_p$ ) não nos dá uma saída satisfatória nessa planta.

Lembrando que:

$$e(t \rightarrow \infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s)$$

- $K_p = 10$

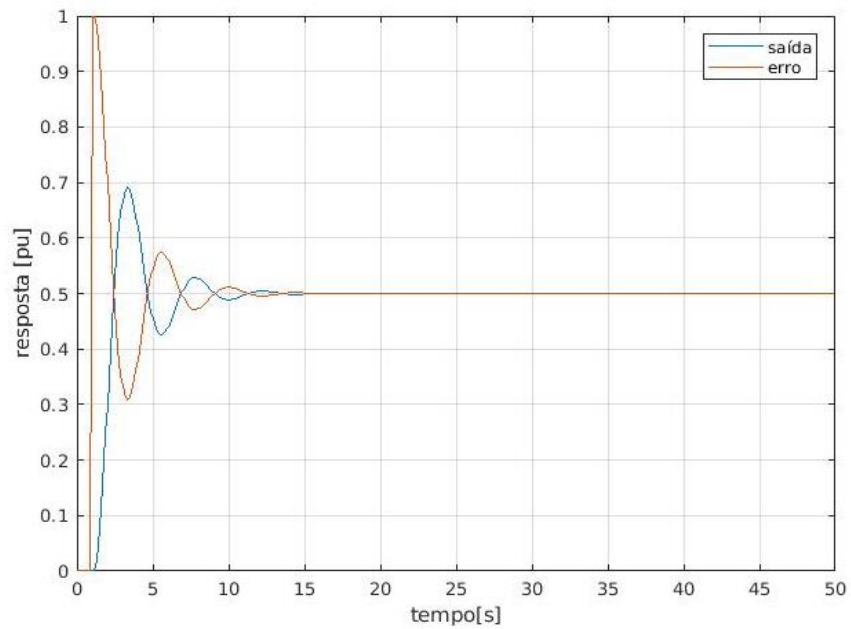


Figura 15 - Resposta para um ganho  $K_p = 10$

Para este valor, vimos que a saída atrasa alguns segundos até se estabilizar, aproximadamente em 15 segundos, porém não na referência, com isso, claramente se vê que o erro de regime é 50%, o que na prática também não é desejável.

- $K_p = 18$

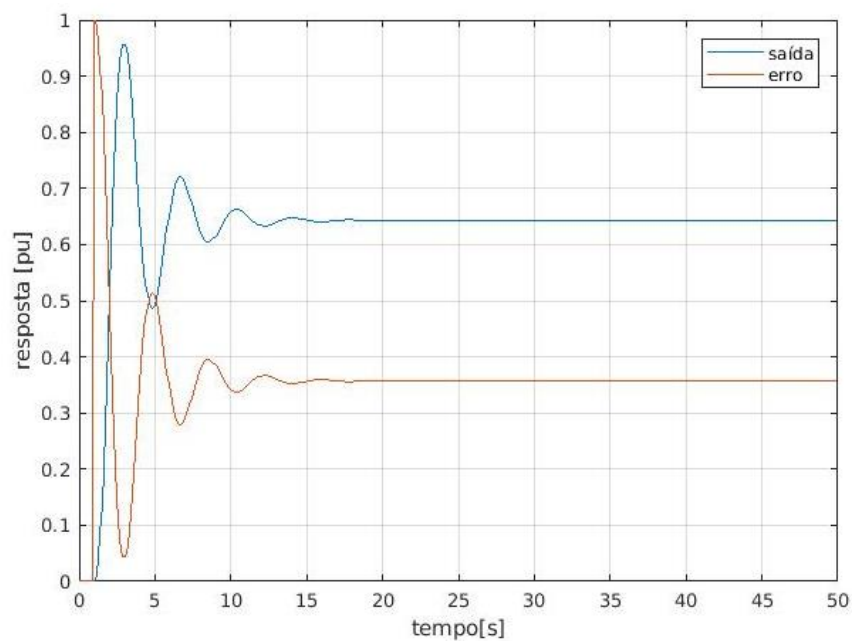


Figura 16 - Resposta para um ganho  $K_p = 18$

Observe que para este  $K_p$ , ainda se demora novamente uns 15 segundos para se estabilizar, onde acontece em aproximadamente 0.64, com

isso no traçado 'vermelho' se vê o erro em aproximadamente 0.36, ou seja, 36% de erro de regime, o que já é melhor do que as duas respostas anteriores.

- $K_p = 35$

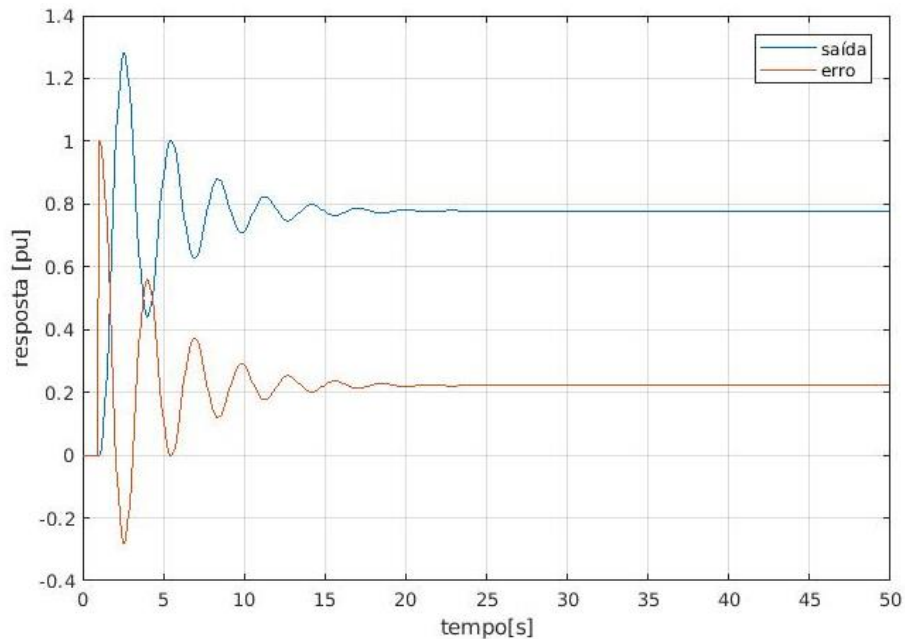


Figura 17 - Resposta para um ganho  $K_p = 35$

Aumentando consideravelmente o  $K_p$  de 18 para 35, observamos que ainda não segue a referência, ou seja, ainda há erro considerável, como observamos no gráfico, temos um erro de aproximadamente 21% e pela primeira vez um *overshoot* acima da referência.

Ou seja, já começamos a observar o padrão, então aumentamos mais um pouco o  $K_p$  para ver o quão se aproxima da referência.

- $K_p = 50$



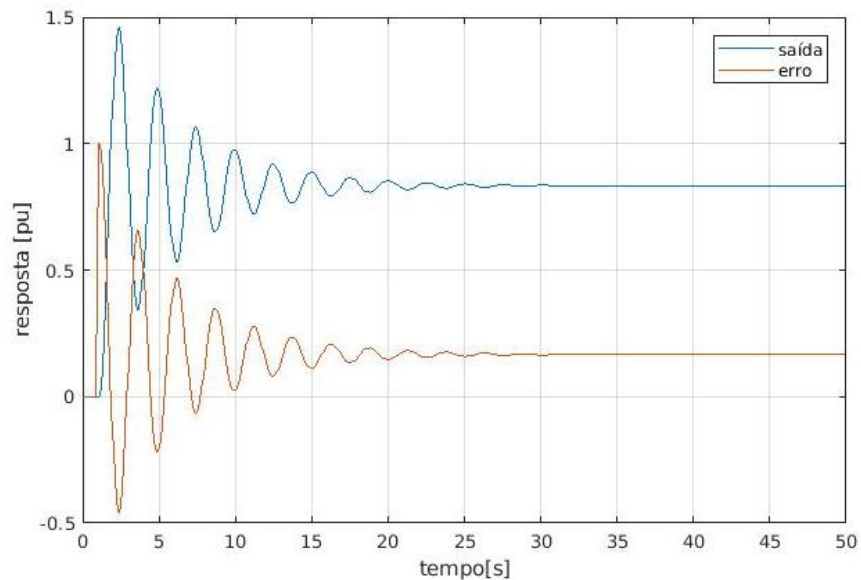


Figura 18 - Resposta para um ganho  $K_p = 50$

Veja que já se aproxima da referência, porém o erro de regime ainda é grande e para piorar, leva mais tempo, veja que se estabiliza em um pouco mais de 25 segundos.

- $K_p = 75$

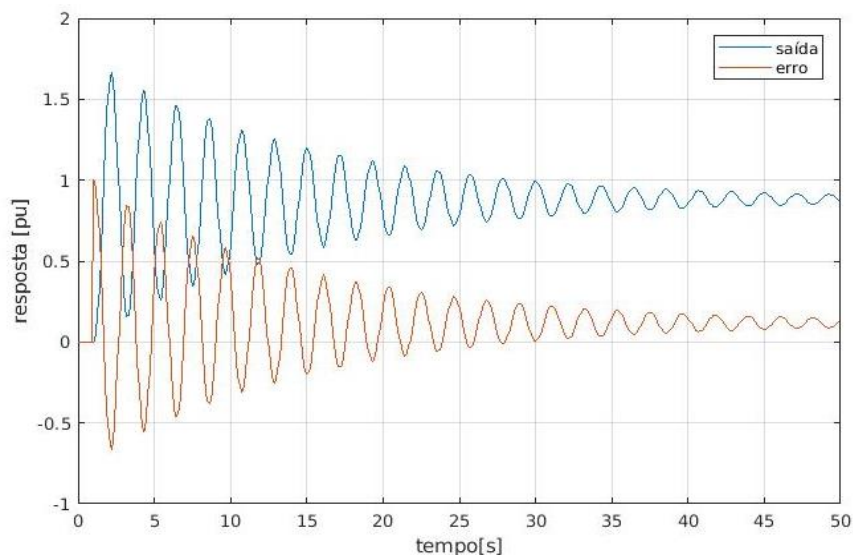


Figura 19 - Resposta para um ganho  $K_p = 75$

Observe que o erro é grande, pois oscila bastante e o sistema tem jeito de que vai demorar estabilizar na referência, pois o erro está quase em zero mas já passou de 50 segundos e não estabilizou, ou seja, imaginamos que para um  $K_p$  mais alto, tende a finalmente estabilizar na referência em um longo tempo.

Vejamos para finalizar em  $K_p = 100$ .

- $K_p = 100$

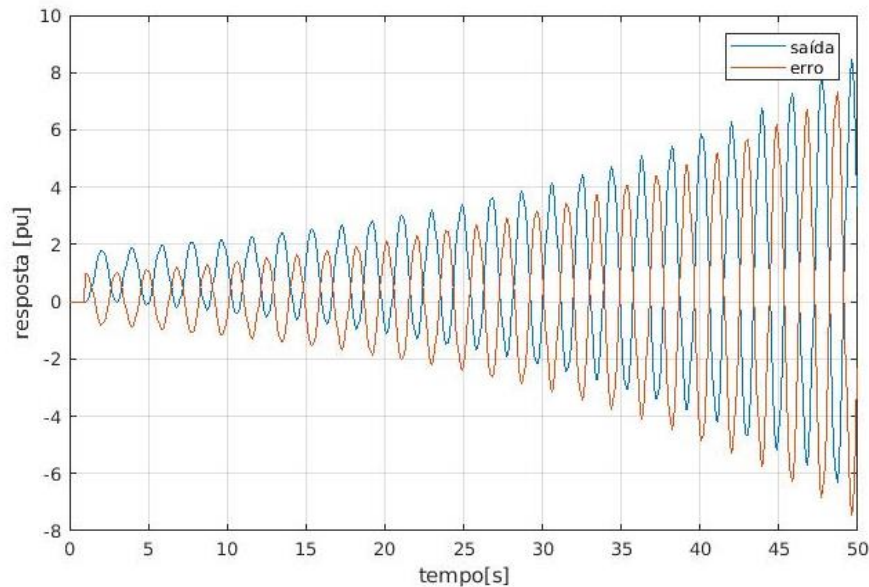


Figura 20 - Resposta para um ganho  $K_p = 100$

Veja que nossa suposição não foi verdadeira, pois não estabilizou na referência e o sistema se tornou instável, ou seja, para um  $K_p$  um pouco acima de 75, talvez até estabilizasse na referência, mas para um  $K_p$  muito alto, próximo e maior que 100, o sistema se torna instável.

O que concluímos que sempre haverá erro de regime permanente e principalmente transitório alto para esse sistema.

### 3.2.2 Para uma entrada rampa

- $K_p = 3$

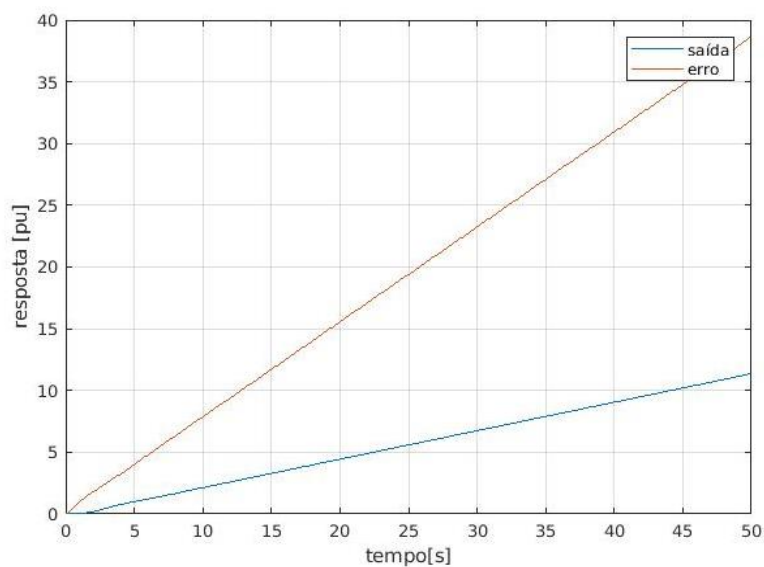


Figura 21 - Resposta para um ganho  $K_p = 3$

Para uma entrada rampa, com este  $K_p$  o erro está enorme, ou seja, vemos que há muito mais erro do que saída desejada.

- $K_p = 10$

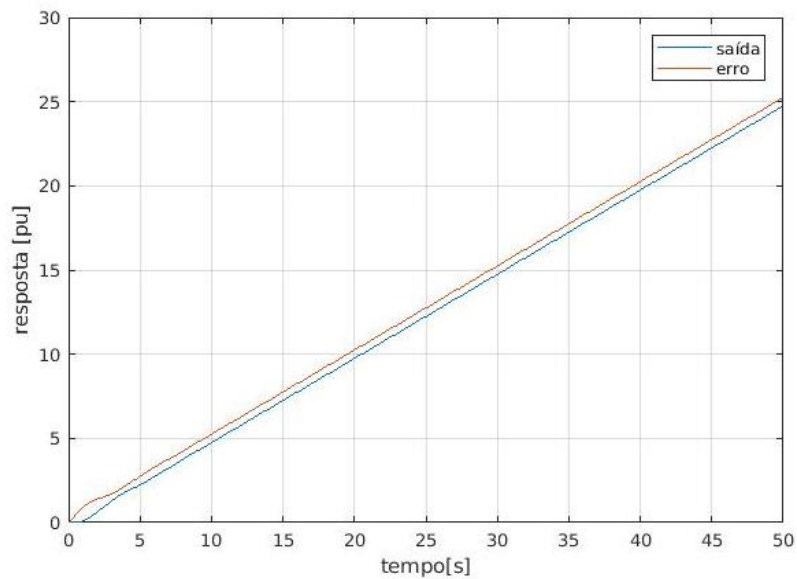


Figura 22 - Resposta para um ganho  $K_p = 10$

Aumentando o  $K_p$ , veja que já diminuiu o erro, porém ainda está um pouco acima da reta de saída, neste caso, o erro de regime é aproximadamente 50%.

- $K_p = 50$

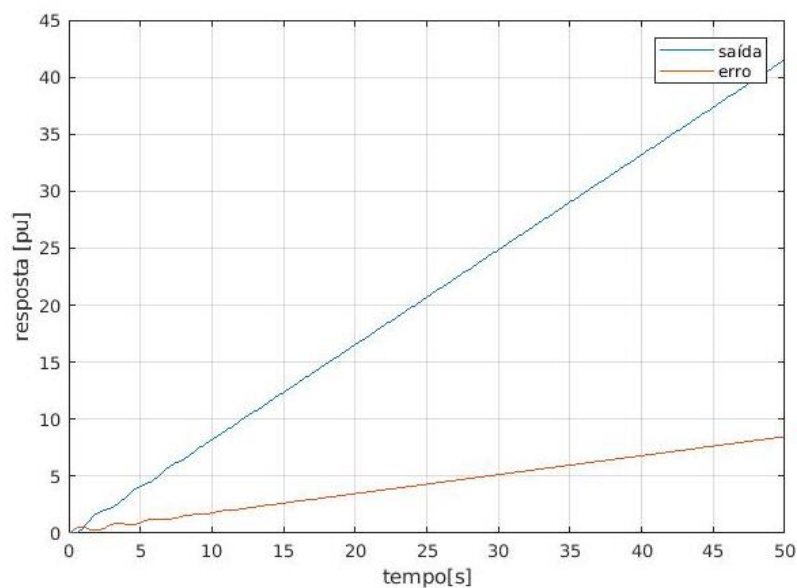


Figura 23 - Resposta para um ganho  $K_p = 50$

Aumentando consideravelmente o ganho em 5 vezes mais, temos no gráfico acima que a saída melhorou muito, porém há uma leve oscilação no começo, vejamos se aumentando mais trará consequências.

- $K_p = 85$

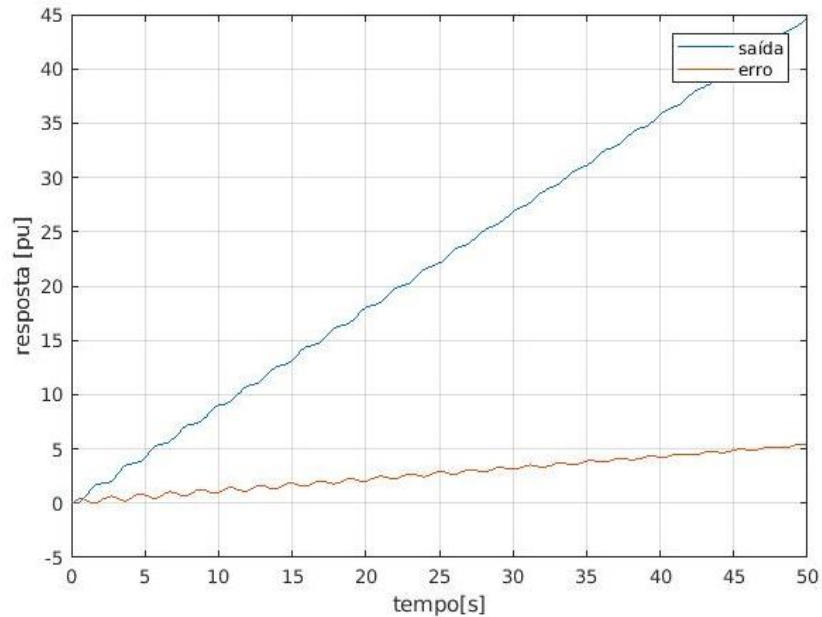


Figura 24 - Resposta para um ganho  $K_p = 85$

Neste gráfico, observamos que realmente, ao aumentarmos o  $K_p$ , há umas leves oscilações tanto na saída quanto no erro.

- $K_p = 100$

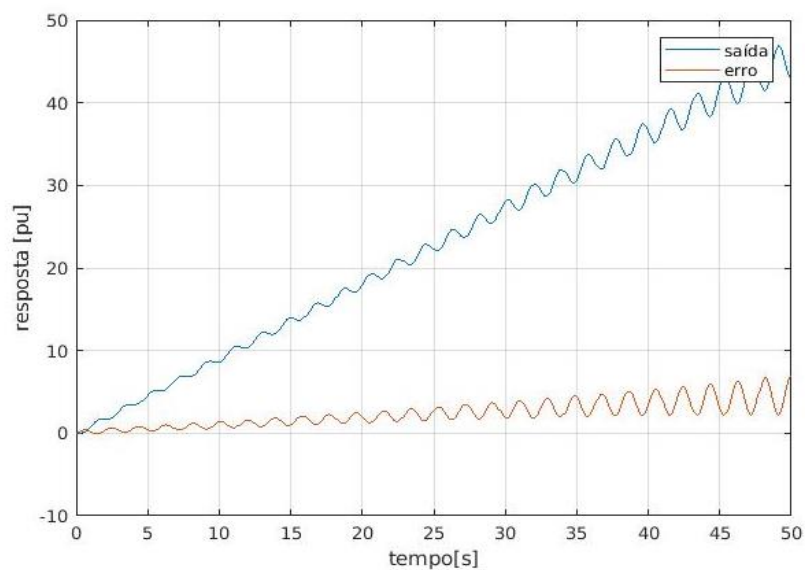


Figura 25 - Resposta para um ganho  $K_p = 100$

Observe que quanto maior o  $K_p$ , mais oscilatório fica a resposta no geral, ou seja, mesmo o erro de regime permanente sendo quase zero, não é viável utilizar este sistema para uma entrada rampa.

## Parte 2

### 3.2.3 Para uma entrada degrau unitário

- $b = 0.2$

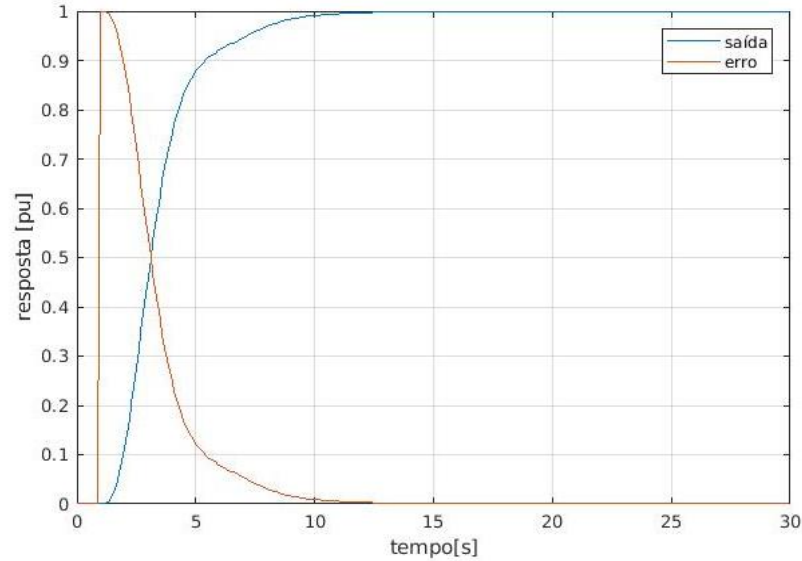


Figura 26 - Resposta ao degrau com  $b = 0.2$

Observe que o sistema se estabiliza na referência em aproximadamente 10 segundos, em 'vermelho' observamos o erro que aparece no início, enquanto o sistema está começando a responder e a partir de 10 segundos, não há mais erro de regime permanente.

- $b = 0.6$

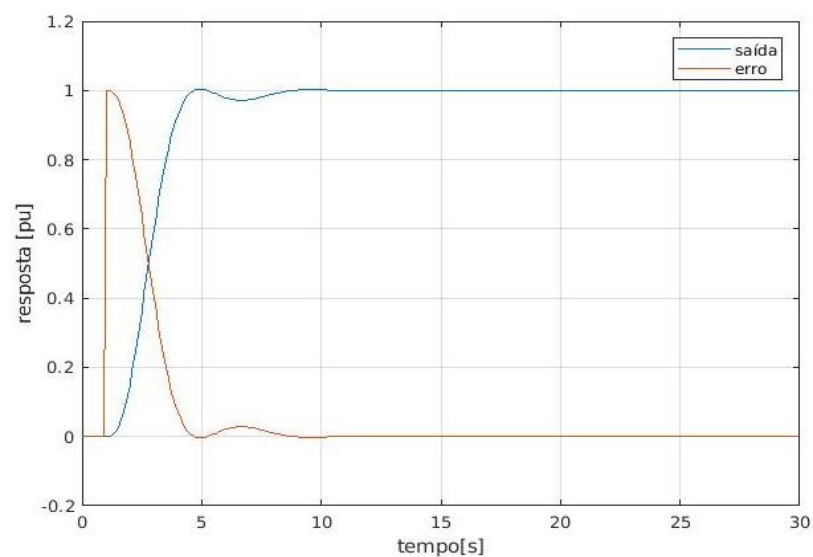


Figura 27 - Resposta ao degrau com  $b = 0.6$

Análogo à anterior, este começa com um pico de erro até a saída se estabilizar. Veja que o tempo de acomodação é um pouco menor, em torno de 8 segundos, é onde o erro de regime permanente zera.

- $b = 1$

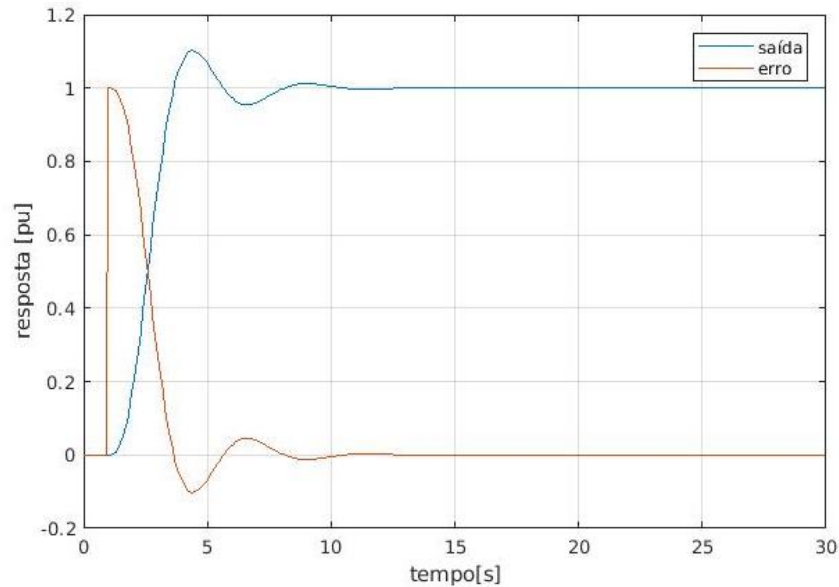


Figura 28 - Resposta ao degrau com  $b = 1$

Observamos neste gráfico que tem um comportamento semelhante aos dois anteriores, onde o sistema continua estável, pois a variação de 'b' foi pequena.

Vejamos para um valor de 'b' muito mais alto.

- $b = 7$

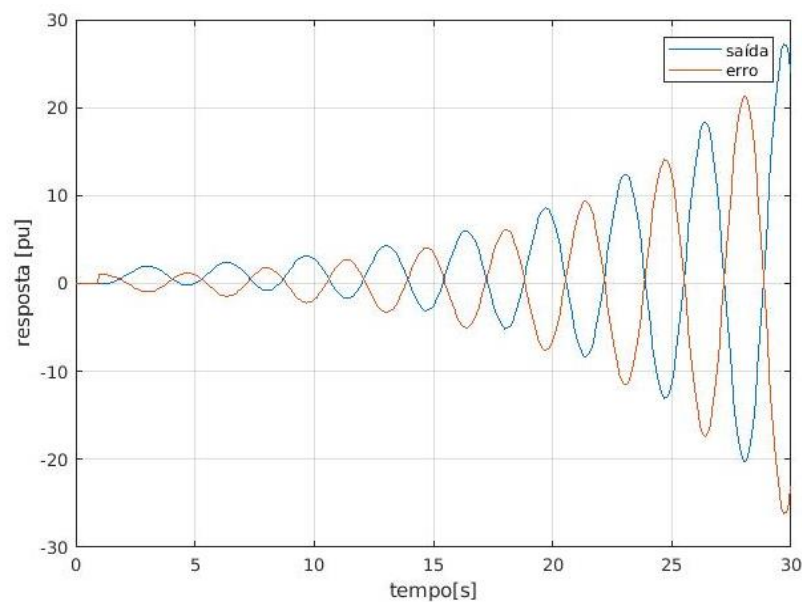


Figura 29 - Resposta ao degrau com  $b = 7$

Neste caso, vejamos que o sistema se tornou instável e o erro de regime é 50%, observamos que a *amplitude* também aumentou.

- $b = 12$

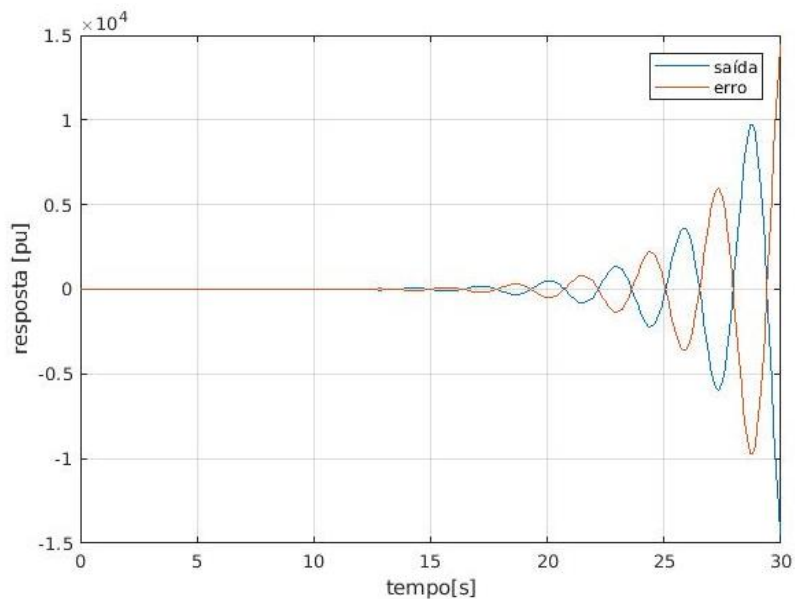


Figura 30 - Resposta ao degrau com  $b = 12$

Encerramos os experimentos com o degrau em  $b = 12$ , pois como vemos no gráfico acima, está instável conforme o anterior, mas uma coisa a se observar é a amplitude que aumentou consideravelmente para a ordem de  $10^4$ , ou seja, quanto maior o 'b', o erro de regime tende ao infinito

### 3.2.4 Para uma entrada rampa

- $b = 0.2$

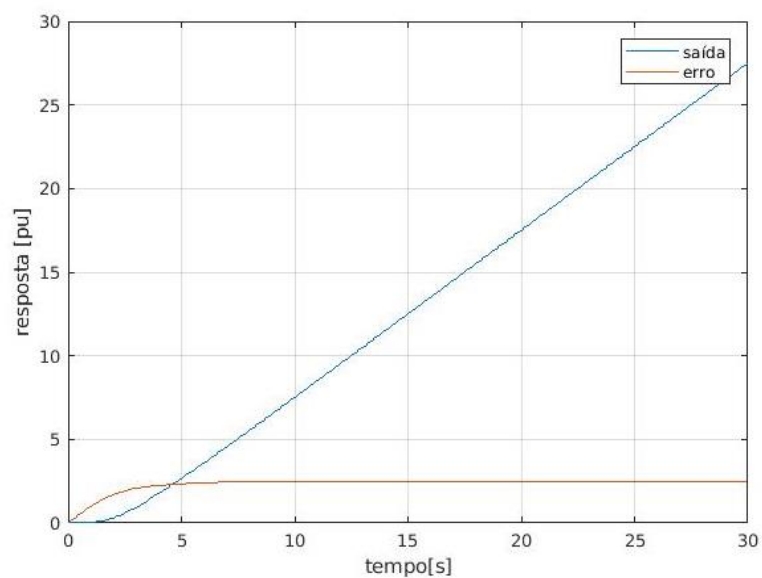


Figura 31 - Resposta à rampa com  $b = 0.2$

Para uma entrada rampa, com o mesmo valor de  $b = 0.2$ , o sistema possui um erro de aproximadamente 2,5.

- $b = 1$

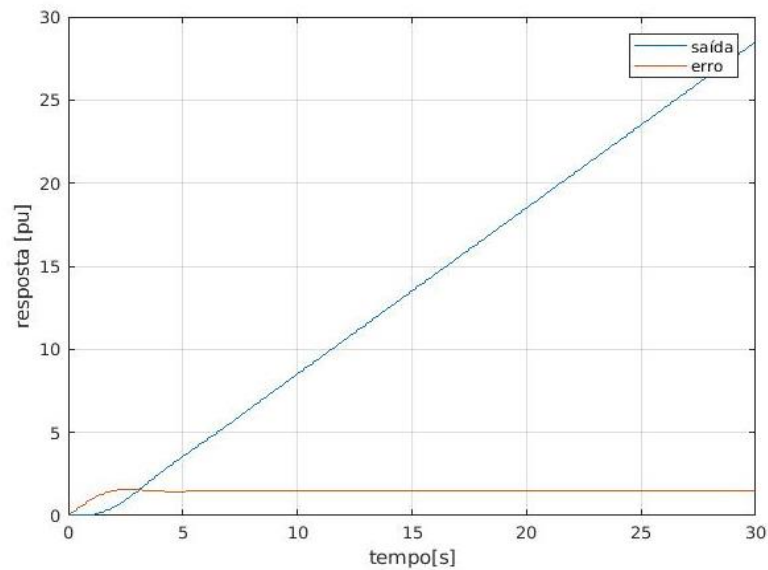


Figura 32 - Resposta à rampa com  $b = 0.6$

Já para uma entrada com  $b = 0.6$ , vejamos que o erro já diminui, podemos dizer que para aproximadamente 1,5.

- $b = 5$

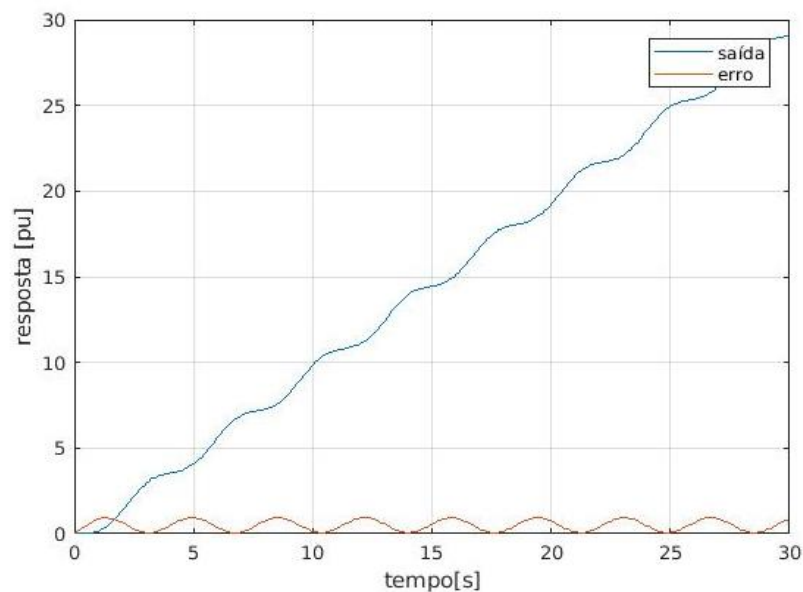


Figura 33 - Resposta à rampa com  $b = 5$

Analisamos para um  $b = 1$  e depois  $b = 2$ , porém percebeu-se que não havia muita mudança de comportamento, ou seja, continuava uma rampa 'linear' sem oscilações com erro quase zero.



Então analisando para um  $b = 5$ , chegamos à resposta do gráfico acima, onde podemos observar oscilação ao longo da reta, onde o erro também transita entre zero e uma parcela acima, ou seja, tende a querer se instabilizar.

- $b = 8$

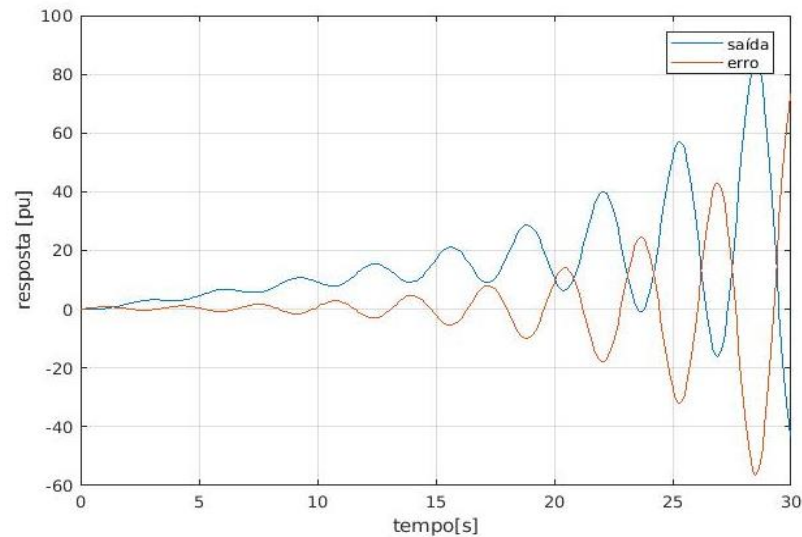


Figura 34 - Resposta à rampa com  $b = 8$

Para esta entrada, percebe-se que há muita oscilação na resposta, onde o pico de sinal chega a quase 100, percebe-se que a partir daí já não nos satisfaz uma resposta com rampa, assim, podemos considerar este sistema instável.

- $b = 12$

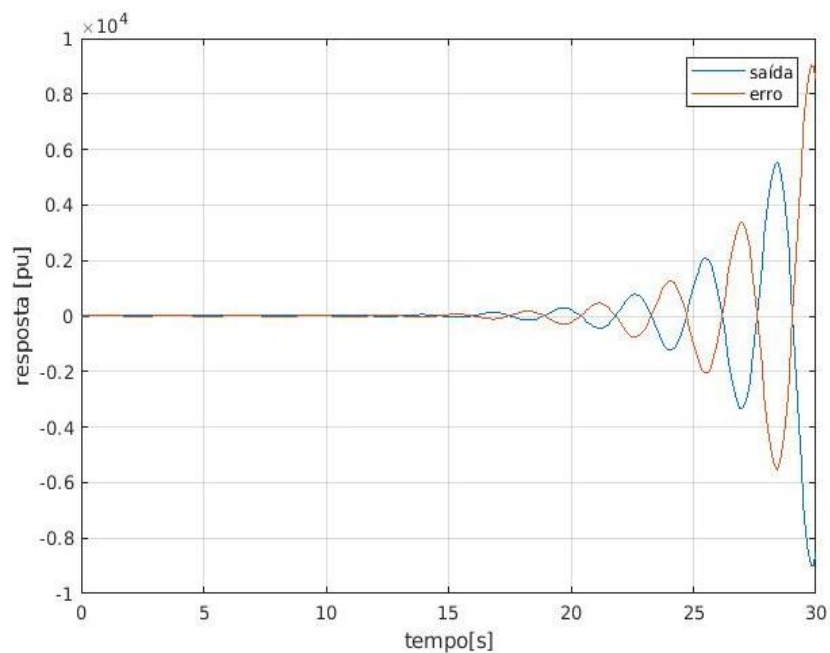


Figura 35 - Resposta à rampa com  $b = 12$

Se para  $b = 8$  o sistema já ficou instável e com um pico de sinal muito grande, agora para  $b = 12$  vemos que esse pico está muito enorme, chegando a ordem de  $10^4$  e conseqüentemente, o erro também, ou seja, sistema totalmente instável e com pico de sinal tendendo ao infinito quanto maior for o valor de 'b'.

### 3.3 EXPERIMENTO 3

#### 3.3.1 Circuito RLC - Série

- **Amortecimento Supercrítico:**

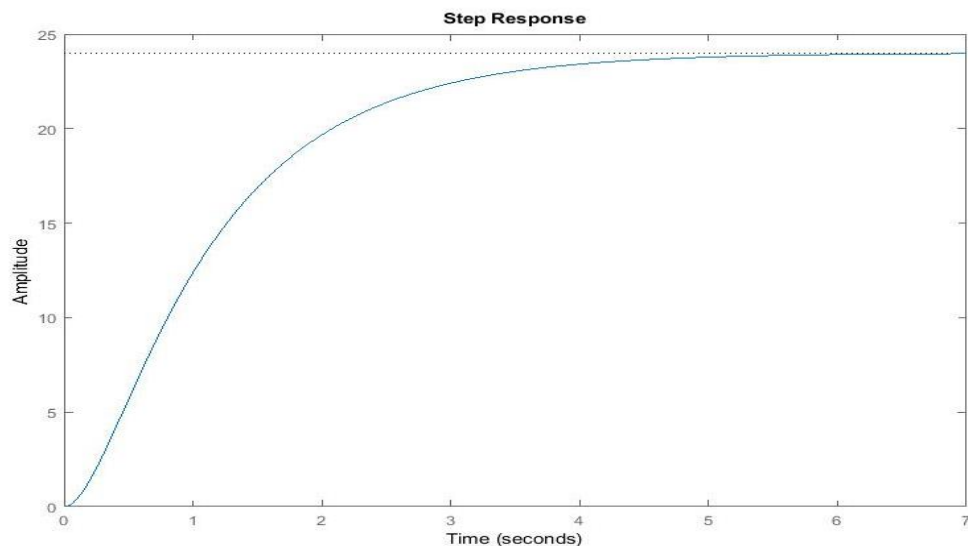


Figura 36

Como podemos perceber, a curva de resposta do sistema com amortecimento supercrítico, não apresenta nenhum indício de oscilação tendendo ao valor final de forma bastante suave.

- **Amortecimento Crítico:**

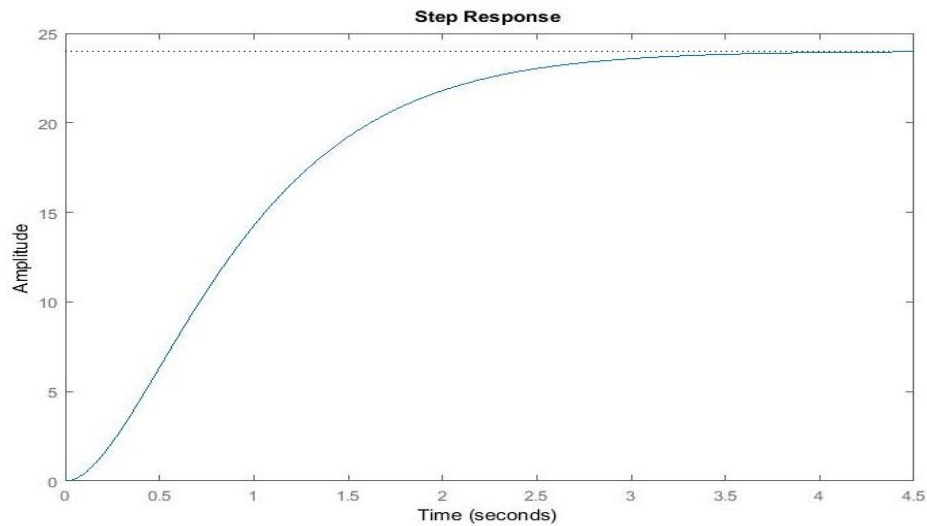


Figura 37

No gráfico do sistema com amortecimento crítico podemos ver um início de oscilação, porém bastante suave, se comparado com o gráfico anterior podemos perceber que a resposta é ligeiramente menos suave.

- **Subamortecido:**

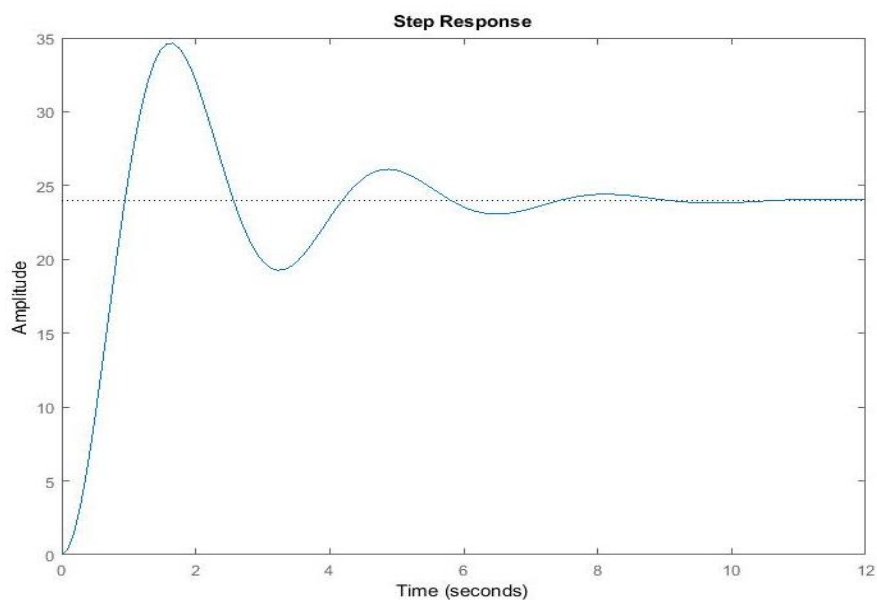


Figura 38

No gráfico da resposta subamortecida, notamos que o sistema tende a oscilar durante um tempo antes de estabilizar no valor final. Esta característica se dá pelo pouco amortecimento do sistema que tende a oscilar no início e estabilizar no final.

- **Oscilação Permanente:**

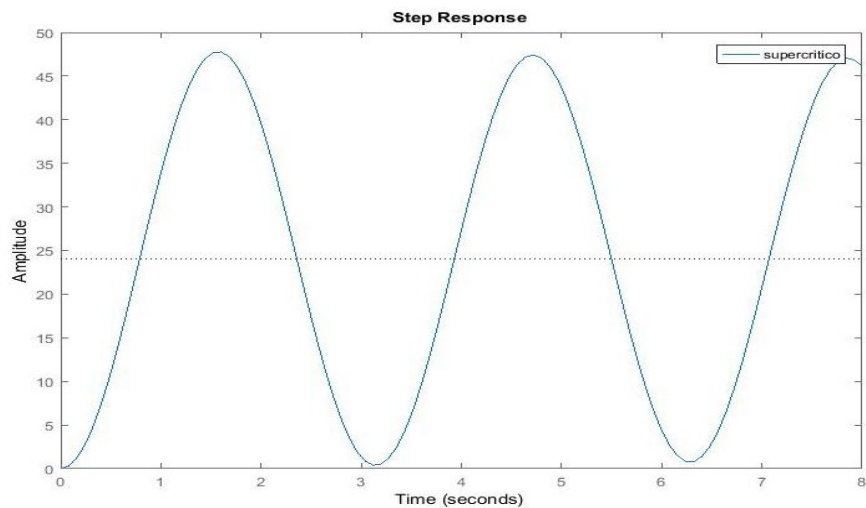


Figura 39

No gráfico de resposta com oscilação permanente, foi obtido eliminando quase que toda a parte resistiva do circuito, obtendo uma resposta totalmente oscilatória. Isso indica que a energia do sistema não está sendo dissipada, obviamente pela quase total ausência da componente resistiva do sistema, e que ela está oscilando entre as componentes armazenadoras de energia, o capacitor e o indutor.

### 3.3.2 Amplificador Operacional

- **Amortecimento Supercrítico:**

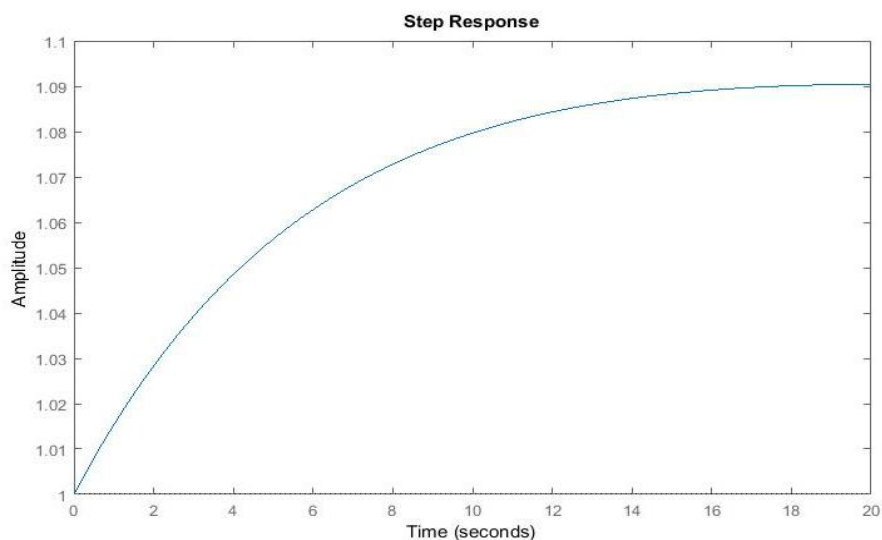


Figura 40

Assim como no experimento anterior, o gráfico de resposta de resposta supercrítica demonstra uma resposta com quase ou nenhuma oscilação e tende ao valor final de forma bastante suave.

- **Amortecimento Crítico:**

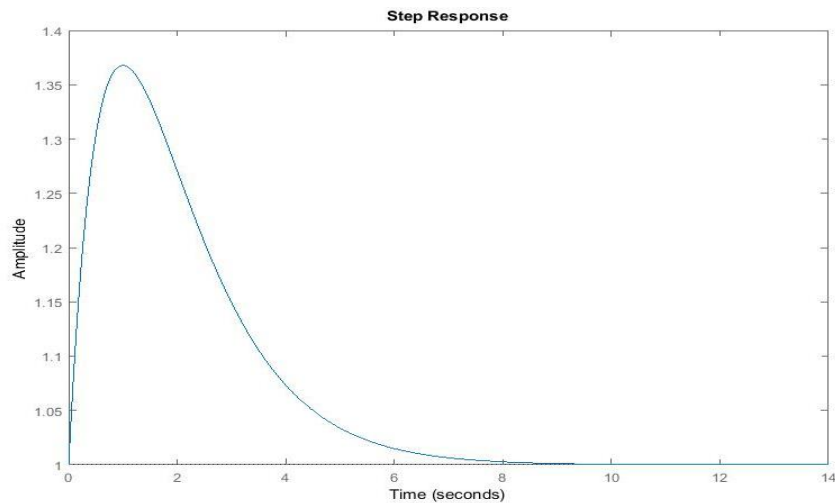


Figura 41

No amortecimento crítico, podemos perceber um indicativo de oscilação porém bastante suave, indicando que a resposta do sistema possui um grau de amortecimento ainda considerável.

- **Subamortecido:**

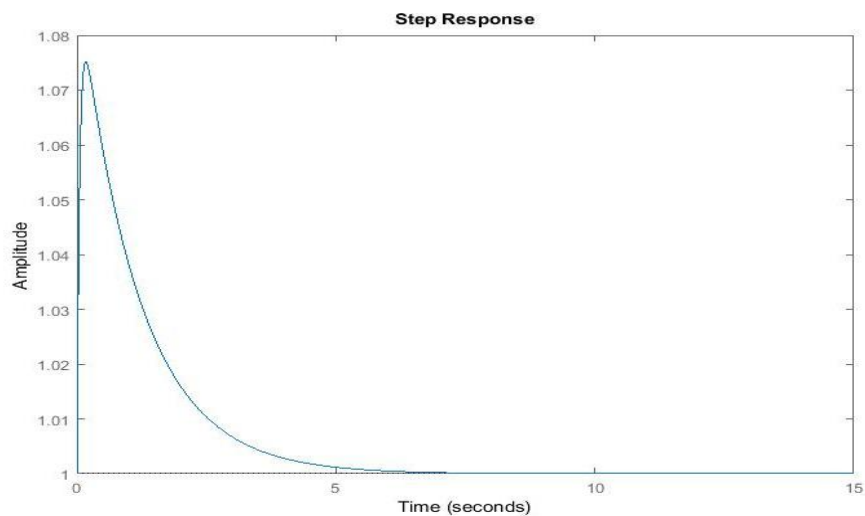


Figura 42

Na resposta subamortecida, podemos ver que o amortecimento está bastante pequeno, tendo em vista que o sistema está querendo oscilar. Talvez não oscile tanto quanto o circuito RLC por não ter dois tipos de elementos

armazenadores de energia, o capacitor se carregar e quando esta descarregando o resistor trata de dissipar toda a energia do circuito, fazendo que assim que ele não oscile tanto. Ainda isso seja o motivo do circuito não ter uma configuração de oscilação permanente.

### 3.4 EXPERIMENTO 4

- **Análise de desempenho**

Os parâmetro encontrados da simulação do sistema sem qualquer inserção de algum ganho de controle Proporcional, integral ou derivativo foi:

Máximo sobressinal ( $M_{ss}$ ) = 0.5 %

Tempo de assentamento ( $t_s$ ) = 1.93 segundos

Sendo a função de transferência do sistema:

$$G(s) = \frac{59.29}{s^2 + 6.97s + 70.44}$$

portanto,

$$\zeta = 0.41$$

$$\omega_n = 8.4$$

Os valores calculados através das fórmulas a disposição, foram:

$$M_{ss} = 0.1\%$$

$$t_s = 0.87 \text{ segundo, para tolerância de } 2\%$$

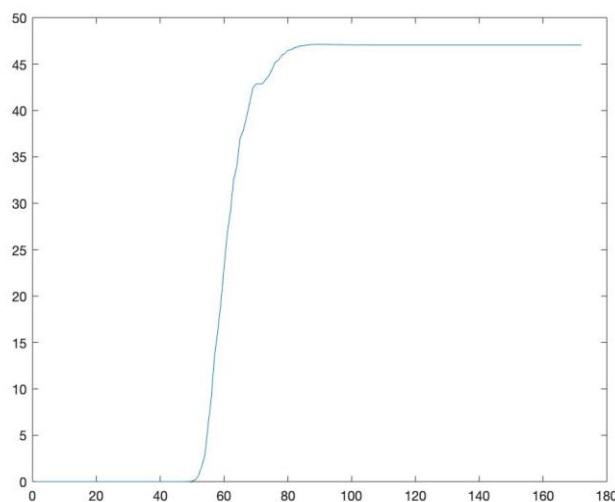


Figura 43 - Comportamento do sistema sem controlador

- **Ganho PID**

- **Proporcional (P)**

A primeira análise com ganhos de controle foi realizada a partir da inserção de unicamente um ganho proporcional  $K_p$ .

Os valores encontrados através da simulação foram:

$$M_{ss} = 42.14\%$$
$$t_s = 1.8 \text{ segundo}$$

Os valores calculados foram:

$$M_{ss} = 40.68\%$$
$$t_s = 1.3 \text{ segundo}$$

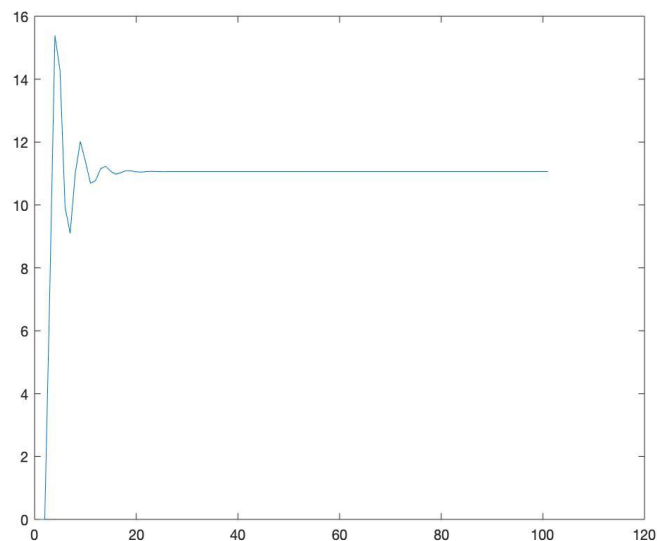


Figura 44 - Comportamento do sistema com ganho Proporcional

- **Proporcional-Integral (PI)**

Inserindo o ganho  $K_i$  com o integrador no sistema já com o ganho proporcional obtivemos valores:

$$M_{ss} = 71.5\%$$
$$t_s = 5.02 \text{ segundos}$$

Os valores calculados foram:

$$M_{ss} = 70.08\%$$
$$t_s = 4.88 \text{ segundos}$$

Percebe-se pelo gráfico que o sistema tem uma resposta transitória subamortecida, o que não é um bom comportamento para sistemas aplicáveis na vida real.

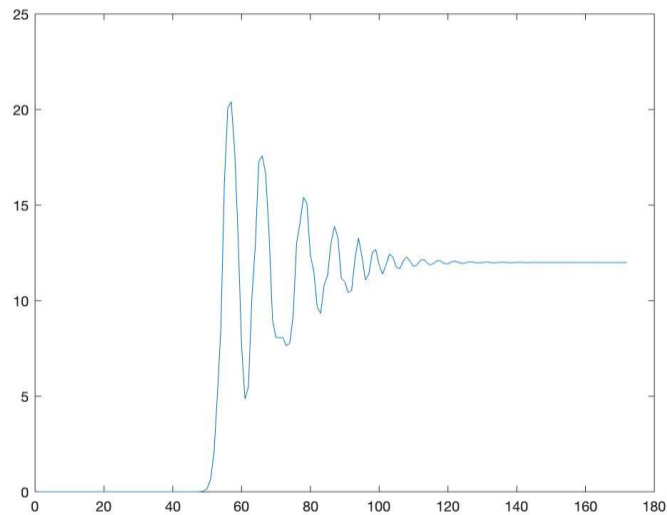


Figura 45 - Comportamento do sistema com ganho Proporcional e Integral

- **Proporcional-Integral-Derivativo (PID)**

Com o sistema já com o controlador PI, inserimos o último ganho derivativo. Os resultados obtidos foram:

$$M_{ss} = 27.56\%$$

$$t_s = 1.43 \text{ segundo}$$

Os valores calculados foram:

$$M_{ss} = 27.6\%$$

$$t_s = 1.49 \text{ segundo}$$

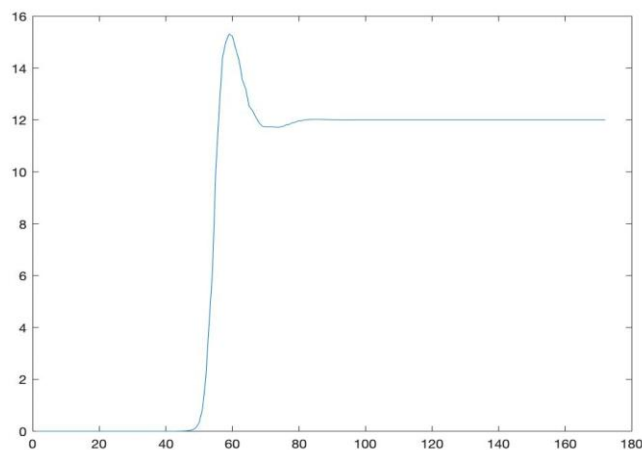


Figura 46 - Comportamento do sistema com o controlador PID



### 3.5 EXPERIMENTO 5

Analisando o diagrama de bode podemos observar que a margem de fase é de 8.09 graus (figura abaixo).

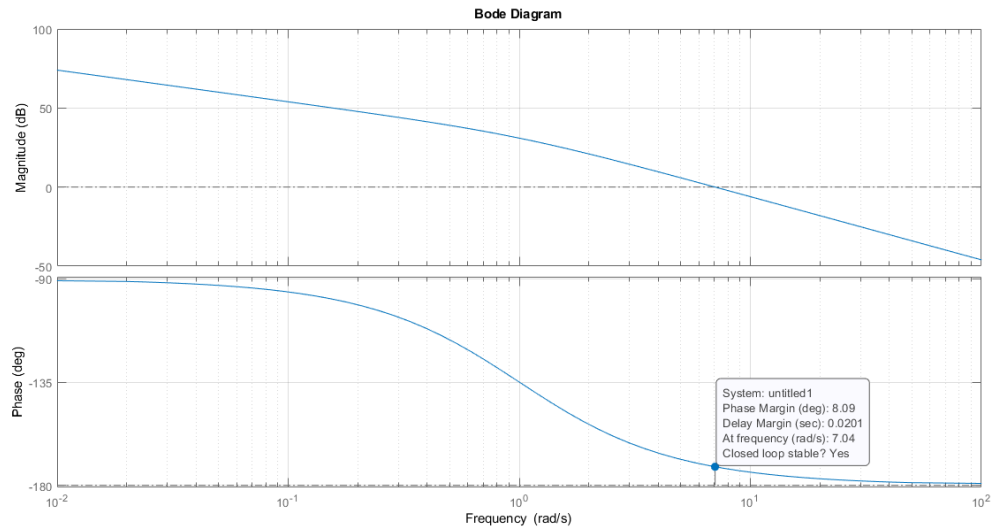


Figura 46

Como definido no início, precisamos de uma margem de fase de 50° para o sistema ficar mais robusto, nesse caso usaremos o compensador lead (avanço de fase) para melhorar a margem de fase do sistema.

Fazendo uma conta rápida temos,

$$MF_{desejada} - MF_{atual} = MF_{necessaria}$$

$$50 - 8.09 = 41.91$$

Obtemos a margem de fase para necessaria de 41.91 graus para fazermos o ajuste no sistema, porém adicionaremos uma margem de segurança de 3,09 graus a esse valor,

$$MF_{necessaria} = 45$$

A relação entre pólos e zeros do compensador lead é dada por:

$$a = \frac{1 - \sin\phi}{1 + \sin\phi}$$

onde ,  $\phi = 45$

Resolvendo temos que,

$$a = \frac{1 - \sin 45^\circ}{1 + \sin 45^\circ} = 0.172$$

O módulo do compensador na frequência que desejamos é:

$$|C(j\omega)| = 20 \log_{10} \frac{K_c}{\sqrt{a}}$$

Como estamos usando a margem desejada no cálculo temos que,

$$|C(j\omega)| = 20 \log_{10} \frac{1}{\sqrt{a}} = 7.64$$

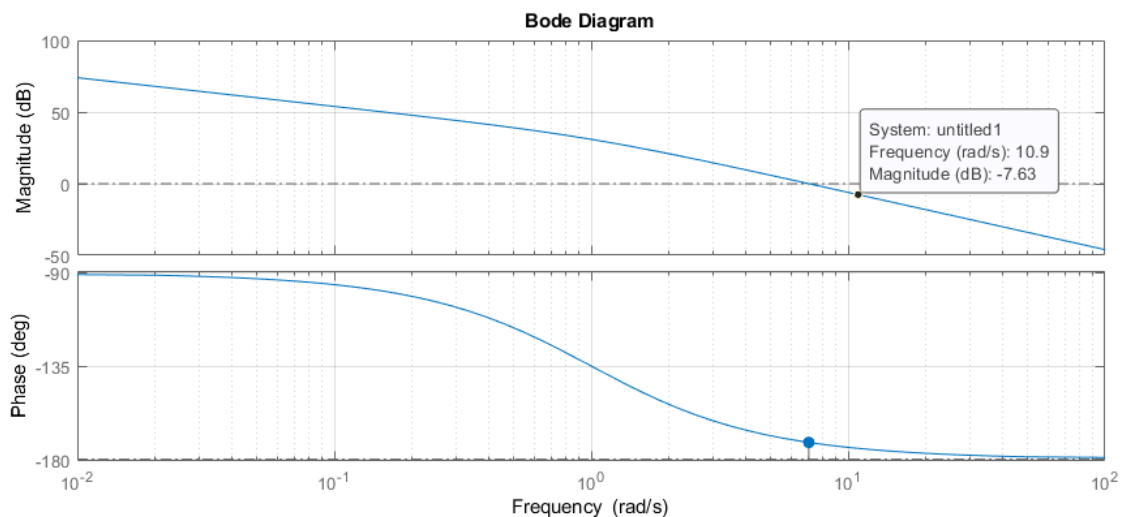


Figura 47

Analisando o diagrama de bode novamente, observamos que a frequência de corte, valor no qual é negativo ao valor do módulo de frequência do compensador.

$$\omega_n = 11$$

Agora que temos esse valor podemos obter T1 e T2:

$$T_1 = \frac{1}{\omega_n \sqrt{a}} = 0.22$$

$$T_2 = aT_1 = 0.038$$

Usando a definição do compensador lead dada por

$$C(s) = K_c \frac{T_1 s + 1}{T_2 s + 1}$$

Substituindo teremos a função de transferência da planta compensada do sistema

$$C(s) = K_c \frac{0.22s + 1}{0.038s + 1}$$

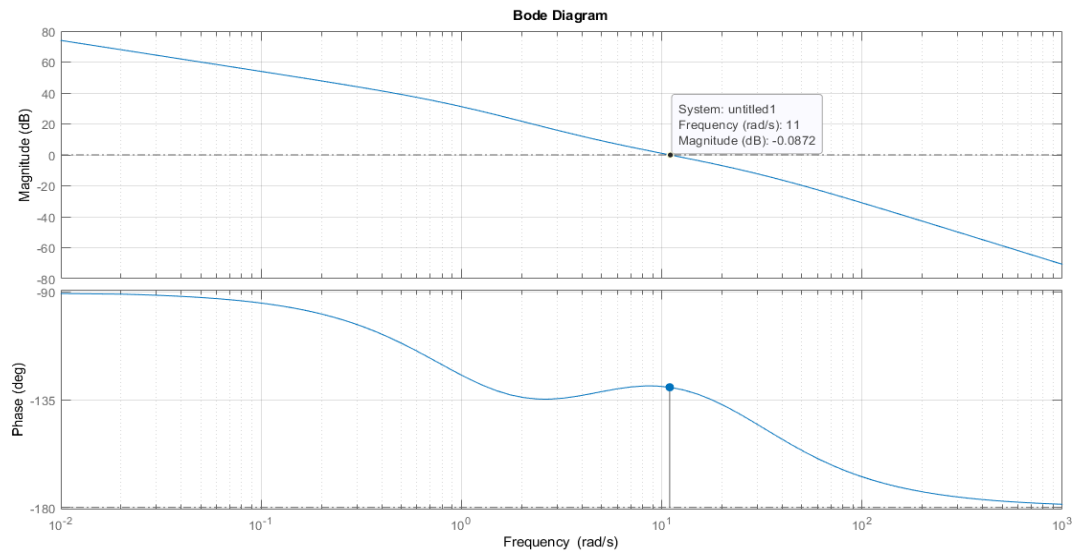


Figura 48

## **CONCLUSÃO**

Com o objetivo deste trabalho sendo analisar o comportamento dos sistemas propostos, podemos garantir que pudemos adquirir experiência dos mais diversos tipos de resposta aos mais variados tipos de entrada na qual as plantas utilizadas nesse trabalho foram submetidas. Foi de fundamental importância para o nosso conhecimento e para que pudéssemos antever um tipo de resposta de um sistema e se, seria esse o comportamento esperado. Conquistando assim formas de testar nossas plantas, que no num projeto real é uma parte vital para o sucesso do sistema projetado.

## REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA

- [1] ALEXANDER, Charles K.; SADIKU, Matthew NO. **Fundamentos de circuitos elétricos**. AMGH Editora, 2013.
- [2] Prof. Brero de Campos, Paulo Roberto. Controle Digital e Controle 1, Universidade Tecnológica Federal do Paraná, UTFPR.
- [3] OGATA, KATSUHIKO. Engenharia de Controle Moderno. 5ª ed. Rio de Janeiro: LTC, 2011