ЖАДНЫЕ АЛГОРИТМЫ

Идеи и применимость жадных алгоритмов. Алгоритм Радо-Эдмондса

К. Владимиров, Syntacore, 2023
mail-to: konstantin.vladimirov@gmail.com

Распределяем работу

- Каждый заказ занимает один день и имеет дедлайн и стоимость.
- Одновременно можно делать только один.

JobId	**A**	**B**	**C**	**D**	**E**
Deadline	2	1	2	1	3
Profit	40	25	20	15	30

- Задача: распределить заказы так, чтобы максимизировать прибыль.
- Например в приведённом примере разумно заниматься в первый день заказом **A**, во второй **C** и в третий день заказом **E**.

Problem JA: распределение работы

- Формально (для контеста) у нас есть n заказов и d дней.

```
struct order_t { int number; int cost; int deadline; };
struct answer_t { int norders; int *numbers; };
```

JobId	A	B	C	D	E
Deadline	2	1	2	1	3
Profit	40	25	20	15	30

→

B	A	E

- Вы должны выбрать наилучшее по суммарной стоимости число заказов.

```
struct answer_t betforjobs(struct order_t *, int n, int d);
```


greedy contest

Обсуждение

- Попробуйте найти наилучшую стратегию.
- Попробуйте также понять как вы рассуждаете в поисках наилучшей стратегии.
- Подумайте что будет с вашей стратегией, если изменить дедлайн нескольких задач?

JobId	**A**	**B**	**C**	**D**	**E**
Deadline	2	1	2	1 $\to$ 3	3 $\to$ 1
Profit	40	25	20	15	30

Жадные алгоритмы

- Распределяя работы, вы, вероятно, прибегали к следующему жадному алгоритму:

  Для всех дедлайнов (с конца) выбираем наибольший из имеющихся заказов.

- Это главные ингредиенты жадного алгоритма: безопасный шаг выбора следующего элемента и подобие в структуре оставшейся подзадачи.
- Каждый раз безопасный шаг соответствует локально оптимальному выбору.

Размен монет

- Иногда жадный шаг не является оптимальным.
- Задача: разменять сумму X монетами с номиналами $x_1, x_2, \dots, x_n$ выбрав наименьшее число монет.
- Пример: разменять 6 рублей монетами с номиналами 4, 3 и 1.
- Жадное решение: взять 4, потом 1, потом опять 1.
- Оптимальное решение: взять 3 и 3.
- В этом случае говорят, что локально-оптимальный шаг не является безопасным шагом и нужно пользоваться другими методами.

Обсуждение

- В принципе для размена жадный алгоритм даёт какое-то решение. Не оптимальное, но вообще-то далёкое от наихудшего.
- Может ли быть такое, что, для определённого набора монет, жадный алгоритм даст оптимальное решение?

Перевод в двоичную систему

- Перевод в двоичную систему является частным случаем задачи размена монет. Только теперь вы должны оптимальным способом разменять число X «монетами» с номиналами $1, 2, 4, 8, 16, \ldots$
- Например $25 = 16 + 8 + 1 = 8 + 8 + 4 + 4 + 2 + 1$
- Алгоритм для оптимального размена прост: берём в качестве следующего разряда $N \div 2$ и переходим к $N/2$
- `25` $\rightarrow$ `12` $\rightarrow$ `6` $\rightarrow$ `3` $\rightarrow$ `1`
- `1, 0, 0, 1, 1` $\rightarrow$ `11001`
- Является ли это жадным алгоритмом? Какой тут безопасный шаг? Есть ли тут подобие подзадач?

Обсуждение

- Интересно, что жадный алгоритм будет работать оптимально для размена любой суммы монетами с номиналами `10`, `5`, `2` и `1`
- Есть ли у вас гипотеза в чём принципиальная разница между множествами монет для которых жадный алгоритм работает оптимально и не оптимально?
- Не оптимально: `{4, 3, 1}`, `{10, 7, 2, 1}`
- Оптимально: `{4, 2, 1}`, `{10, 5, 2, 1}`

Обсуждение

- Интересно, что жадный алгоритм будет работать оптимально для размена любой суммы монетами с номиналами 10, 5, 2 и 1
- Есть ли у вас гипотеза в чём принципиальная разница между множествами монет для которых жадный алгоритм работает оптимально и не оптимально?
- Не оптимально: {4, 3, 1}, {10, 7, 2, 1}, {9, 4, 1}, {25, 15, 1}
- Оптимально: {4, 2, 1}, {10, 5, 2, 1}, {9, 5, 1}, {25, 15, 10, 5, 1}
- Добавленные примеры показывают, что эта задача гораздо сложнее, чем кажется. Отложим её (пока что).

Problem EV: степени четверки

- Напишите функцию, которая оптимально раскладывает число n по ограниченному количеству степеней четверки 4^0, 4^1, и т. д. до 4^m включительно.

- Каждая степень считается одной монетой.
  Например $27 = 1 * 16 + 2 * 4 + 3 * 1$ использует 6 монет.
  В то же время $27 = 1 * 16 + 1 * 4 + 7 * 1$ использует 9 монет.

```
unsigned powers_four(unsigned n, unsigned m);
```

- Функция должна возвращать минимальное количество монет.

```
unsigned res = powers_of_four(13, 1);
assert(res == 4); // 3 * 4 + 1 * 1
```

Problem EG: египетские дроби

- Египетской дробью называется дробь, имеющая в числителе 1.
- Каждое число может быть разложено на египетские дроби жадным алгоритмом, который выбирает наибольшую дробь на каждом шаге.
- Например: $\frac{39}{50} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{34} + \frac{1}{1700}$
- Напишите функцию, которая берёт числитель и знаменатель и возвращает выделенный в динамической памяти массив знаменателей и его размер.

```
struct denom_array_t { unsigned *arr; unsigned sz; };
```

```
struct denom_array_t
egyptian_fractions(unsigned num, unsigned den);
```

Обсуждение

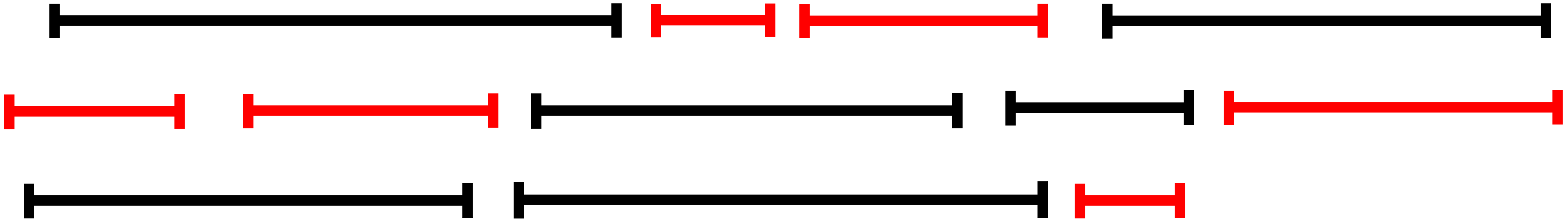
- В случае египетских дробей, даёт ли жадный алгоритм оптимальное разложение или просто какое-то?
- Иногда это не очевидно.
- Иногда, особенно когда вариантов жадных шагов несколько, не очевидно существует ли жадный алгоритм, дающий оптимальное решение.
- Но если он существует, обычно он прост и эффективен, поэтому попытаться его найти часто стоит потраченных усилий.

Алгоритм поиска алгоритмов

- Переход к следующему пункту только если недостаточно эффективно сработал предыдущий.

1. Поискать в интернете и в доступной литературе.
2. Попробовать самое наивное решение.
3. Поискать жадный алгоритм.
4. Поискать алгоритм с разбиением на подзадачи (divide & conquer).
5. Попробовать дискретное динамическое программирование.
6. Поискать рандомизированный алгоритм.
7. Начать думать.

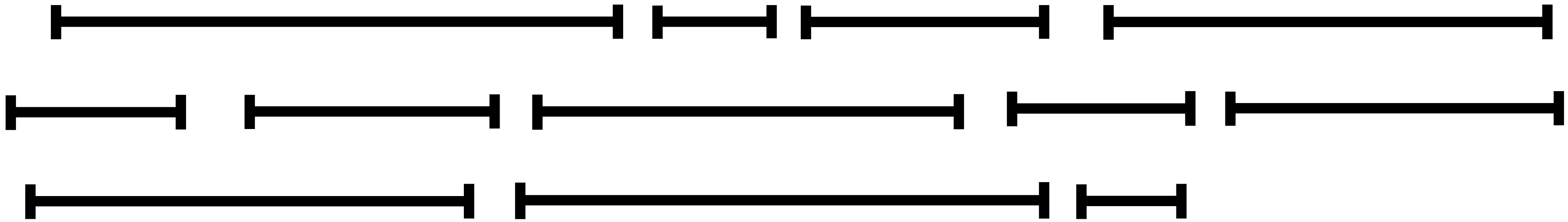
Выбор подмножества интервалов



- Необходимо выбрать максимальное подмножество непересекающихся интервалов на прямой (показано красным).
- Какой жадный шаг вы бы тут попробовали?

Неочевидные жадные шаги

- Структура жадного алгоритма не всегда очевидна

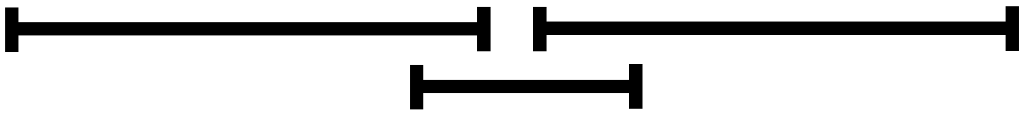


- Какие жадные шаги можно сделать для выбора множества интервалов?
- Выбирать первый слева?
- Выбирать самый короткий?
- Выбирать самый длинный?

Контрпримеры

- Первый слева

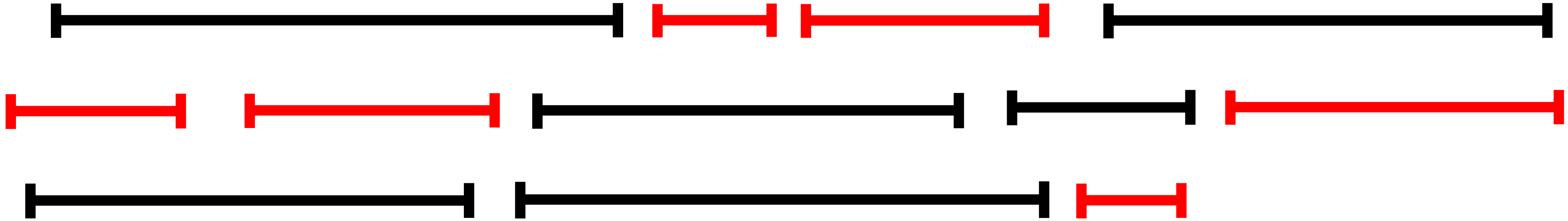
- Самый короткий



- Самый длинный (см. контрпример первому слева).
- Первый справа (см. контрпример первому слева).
- У вас есть ещё идеи?

Правильный жадный шаг

- Нужно первым брать тот, который первым заканчивается.



- Этот шаг является безопасным и локально оптимальным: если мы возьмём иной интервал, то он не пересечёт меньшего числа интервалов.
- Получающаяся подзадача после этого шага подобна исходной.

Problem IC: расписание аудитории

- Для конкретной аудитории есть ряд заявок с временем начала окончания.
- Необходимо вернуть максимальное количество допустимых заявок.

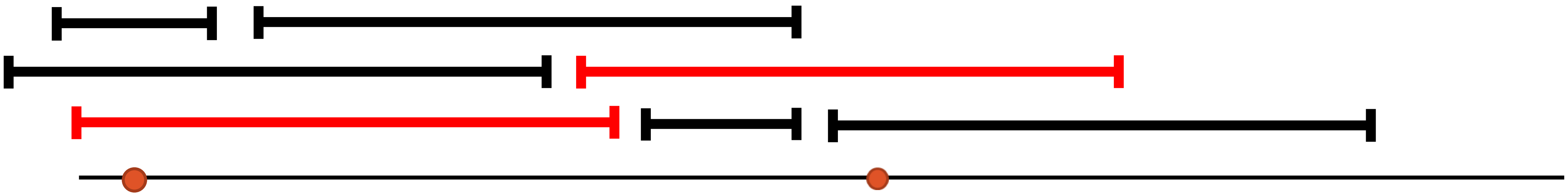
```
struct intvl_t { int number; int start; int fin; };

int schedulemax(struct intvl_t *reqs, int nreqs);
```

- Это та самая задача выбора подмножества интервалов, которая рассматривалась выше.

Problem RU: ларьки под общую крышу

- На прямой расположены отрезки $[l_i, r_i]$ которые полностью или даже с избытком покрывают интервал $[L, R]$.

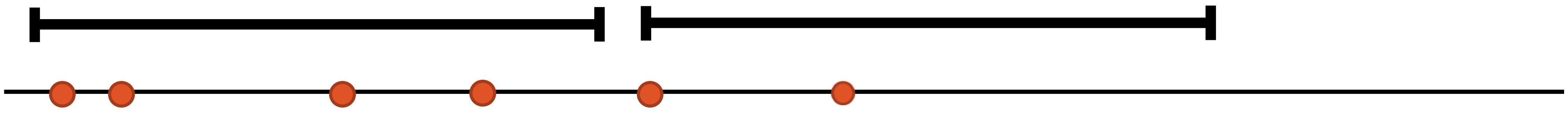


- Ваша задача обратна проблеме IC: теперь вам нужно выбрать наименьшее множество отрезков так, чтобы они всё ещё покрывали интервал.

```
int covermin(int L, int R, struct intvl_t *intrs, int ncovs);
```

Problem PC: покрытие точек отрезками

- У вас есть n точек с целыми координатами на прямой. Их необходимо покрыть отрезками длины `unitlen`, используя минимальное количество отрезков.
- Ваш запас отрезков в этой задаче неограничен, но все они одинаковые.
- Нужно вернуть количество использованных отрезков



```
int coverpoints(int *pts, int n, int unitlen);
```

Problem FP: организация утренника

- Вам нужно организовать детский утренник на которых пришло `nkids` детей. У каждого ребёнка есть номер `id` и возраст `age`.
- Вы хотели бы получить минимальное количество групп, но при этом возраст детей в каждой группе не должен отличаться больше, чем на 2 года.

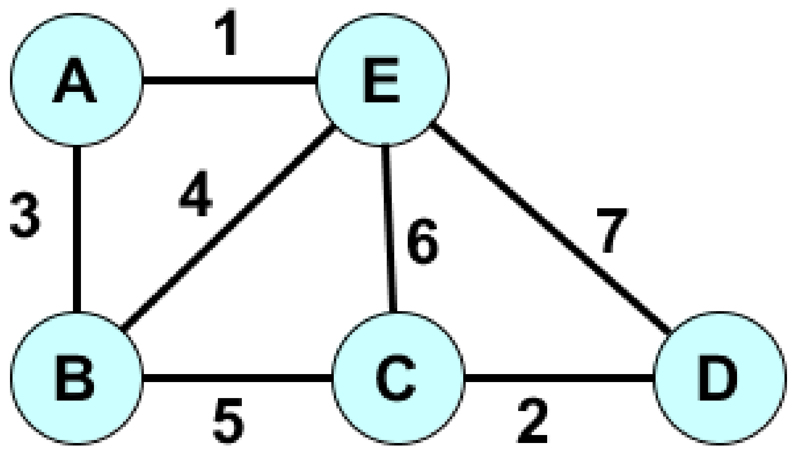
```
struct kid_t { int id; int age; };
struct kidgroup_t { int nkid; int ngroup; };
struct answer_t { int ngroups; struct kidgroup_t *mapping; };

struct answer_t funparty(struct kid_t *kids, int nkids);
```

- Сможете ли вы свести эту задачу к `Problem PC`?

Графы

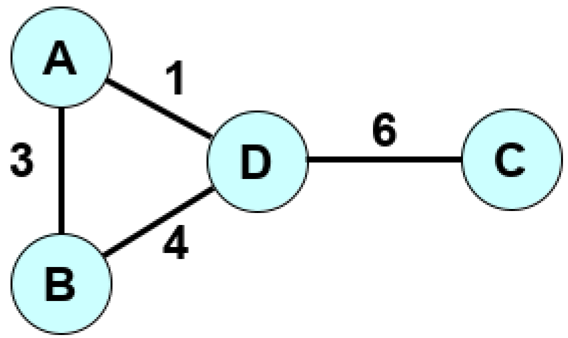
- Графом (V, E) называется множество вершин V, соединённых множеством рёбер E.
- Можно думать о вершинах как о городах, а о рёбрах как о дорогах.
- Или о вершинах как о числах, а о рёбрах, как о парах чисел.
- Или о вершинах как о котиках, а о рёбрах как о признаке совместного появления двух котиков на одной фотке.



- У вершин и рёбер могут быть дополнительные признаки, например здесь у каждого ребра показан его вес.

Представления графов

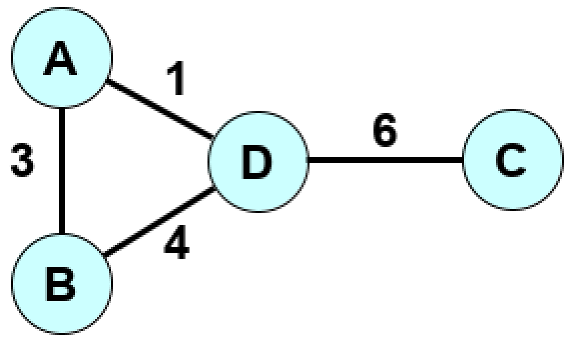
- Самое простое представление графа это просто список его рёбер.
- Такое представление хорошо для сброса в человеко-читаемый файл но непрактично для операций над графом.



4		
0	1	3
0	3	1
1	3	4
2	3	6

Представления графов

- Граф может быть представлен двумерным массивом который называется матрицей смежности.
- Если у рёбер есть веса, то в матрице смежности легко ставить веса вместо единиц.

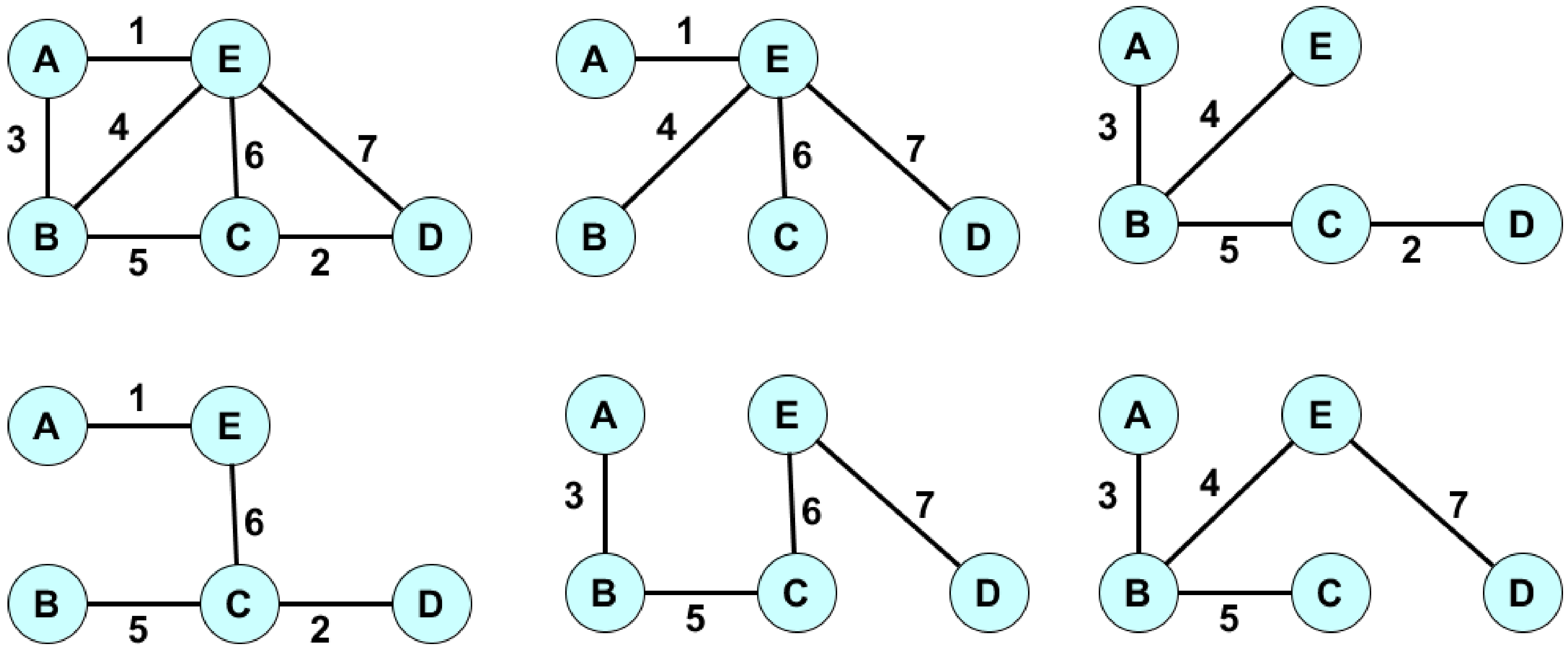


4		
0	1	3
0	3	1
1	3	4
2	3	6

$$\begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 1 & 4 & 6 & 0 \end{bmatrix}$$

Остовные деревья

- Деревом в теории графов называется ненаправленный ациклический граф. Ниже изображён граф со взвешенными рёбрами и некоторые его остовные деревья.



Обсуждение

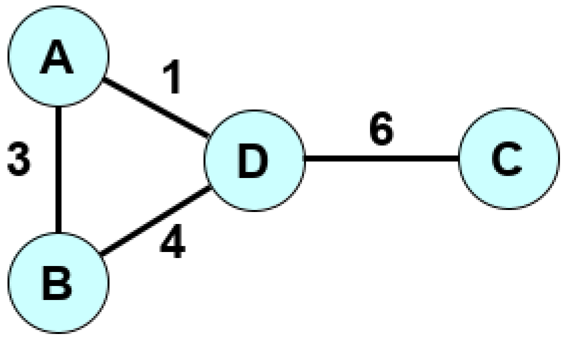
- Как можно понять, что некий неориентированный граф является деревом?

Обсуждение

- Как можно понять, что некий неориентированный граф является деревом?
- Самый простой способ это поиск в ширину, использующий массив родителей.
  - Изначально для всех вершин устанавливаем $P(v) = -1$.
  - Берём любую вершину w и для всех её соседей устанавливаем $P(v) = w$.
  - Рекурсивно вызываем ту же функцию для каждого из соседей отмечая w как текущего родителя.
  - Как только найдётся сосед v не совпадающий с её текущим родителем и имеющий родителя, не совпадающего с v, цикл найден и это не дерево.
- Почему этот поиск называют поиском в ширину?

Problem GL – петля в графе

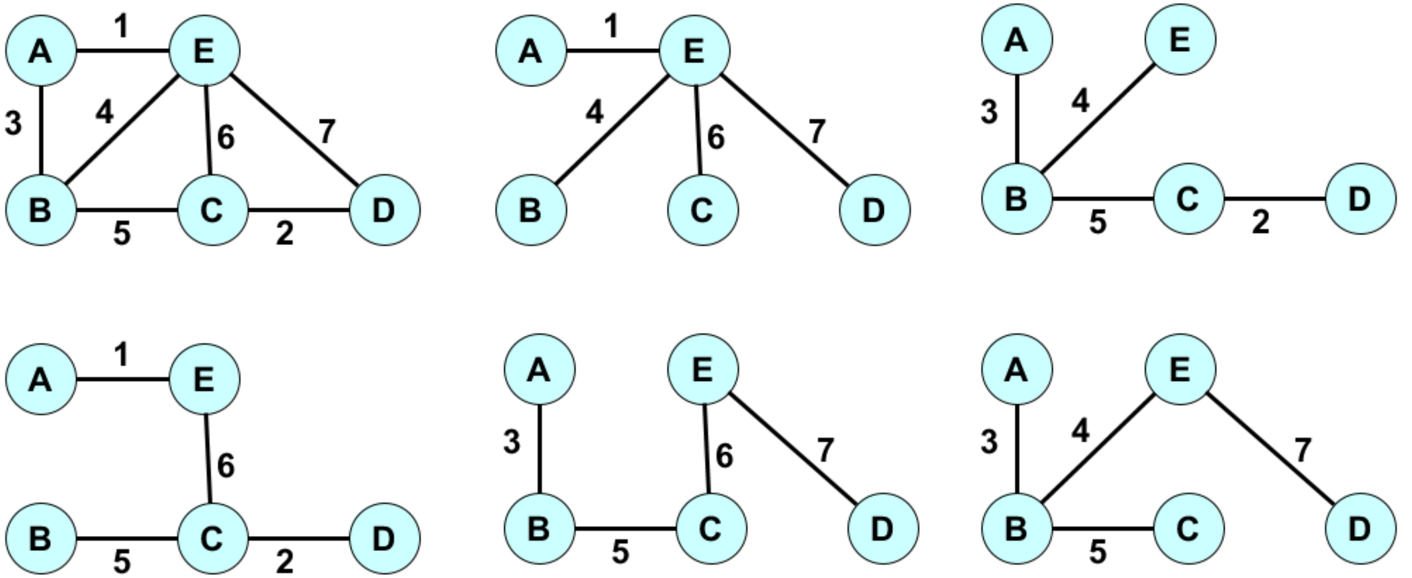
- Вам задан неориентированный граф как количество вершин и потом список рёбер с весами.
- Выдайте на выход `1` если цикл любой длины есть и `0` если его нет.
- В данном случае есть цикл длины 3.



4		
0	1	3
0	3	1
1	3	4
2	3	6

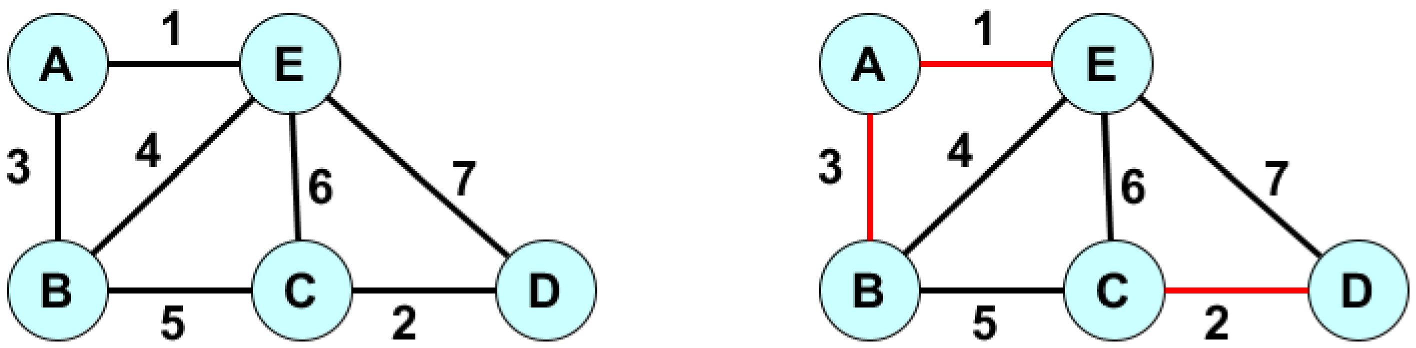
Обсуждение

- Каждый раз, когда мы проверяем таким образом цикличность, мы строим дерево, которой, при успешном построении будет остовным.
- Как найти минимальное по весу остовное дерево?



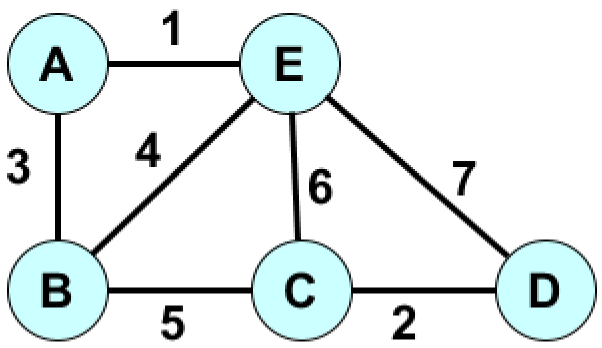
Алгоритм Краскала

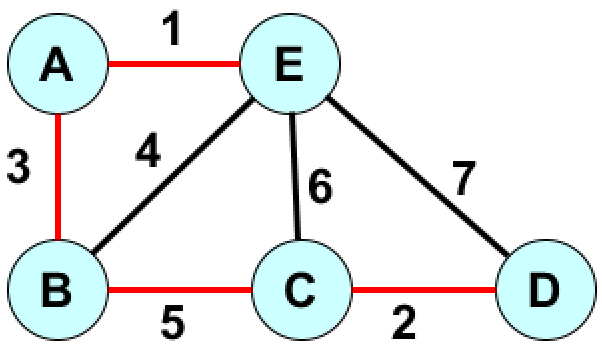
- Жадный шаг: берётся ребро с минимальным весом и добавляется в остовное дерево, если при этом не создаёт там цикла.
- На рисунке выбраны рёбра с весами 1, 2 и 3. Далее ребро с весом 4 добавить нельзя, так как образуется цикл.



Алгоритм Краскала

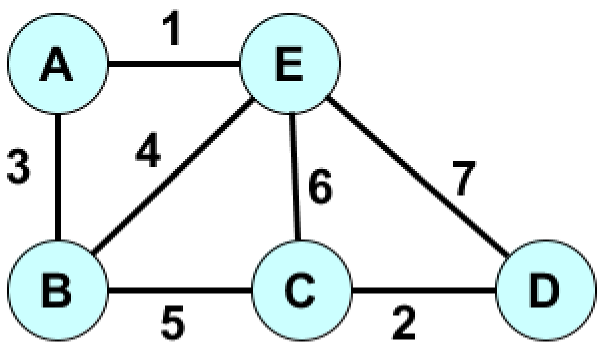
- Жадный шаг: берётся ребро с минимальным весом и добавляется в остовное дерево, если при этом не создаёт там цикла.
- На рисунке выбраны рёбра с весами 1, 2 и 3. Далее ребро с весом 4 добавить нельзя, так как образуется цикл.

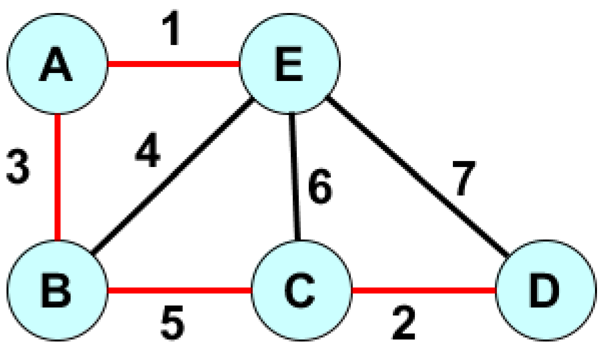




Домашняя работа HWG

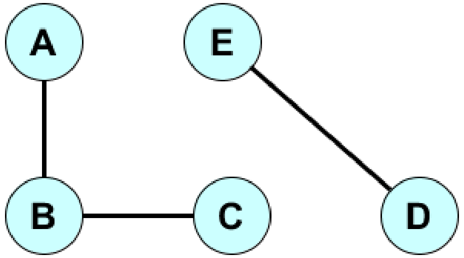
- Считайте со стандартного ввода имя файла, в котором граф задан как список рёбер. Пример: 5 `0 1 3 0 4 1 1 4 4 1 2 5 2 3 2 2 4 6 3 4 7`.
- Реализуйте алгоритм Краскала.
- Напечатайте в `stdout` вес найденного дерева, в данном случае `11`.

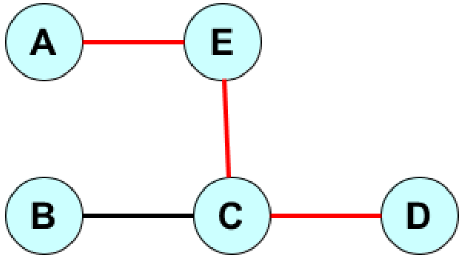


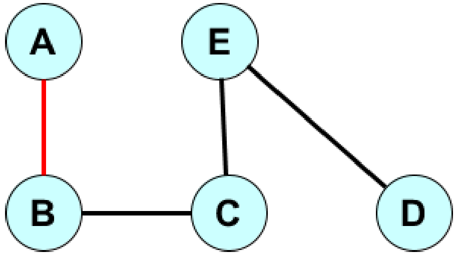


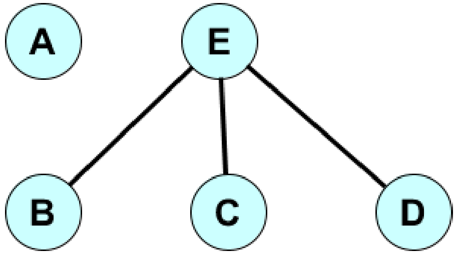
Жадные алгоритмы: скрытая структура

- Обратим внимание на интересное свойство ациклических подграфов.
- Пусть в одном ациклическом подграфе меньше рёбер, чем в другом.
- Тогда в большем подграфе всегда можно найти ребро, чтобы добавить в меньший, сохранив его ацикличность.









Матроиды

- Матроидом I называется система множеств, в которой.

1. Пустое множество принадлежит I [nil]
2. Если множество принадлежит I, то все его подмножества принадлежат I [sub]
3. Если одно из принадлежащих I множеств больше другого по мощности, в большем всегда найдётся такой элемент, который можно добавить в меньшее так, чтобы меньшее множество с добавленным элементом тоже принадлежало I [aug]

- Все множества, входящие матроид состоят из элементов носителя матроида.
- Базой матроида называется максимальное по включение множество в нём.

Алгоритм Радо-Эдмондса

- Пусть дан матроид I, с носителем X, в котором каждому элементу x_i сопоставлен вес w_i, а каждое входящее в матроид множество имеет вес равный сумме весов своих элементов.
- Алгоритм Радо-Эдмондса ищет в матроиде базу максимального веса, делая каждый раз жадный шаг, выбирая следующий элемент с наименьшим весом.

$$A_0 = \emptyset$$

$$A_i = A_{i-1} + \{x\}, \text{ где } x = \max_{w_j} \{\, y_j \in X \setminus A_{i-1} \mid A_{i-1} + \{y_j\} \in I \,\}$$

- Любой жадный алгоритм на конкретном матроиде, например алгоритм Краскала, это всего лишь специализация этого общего алгоритма.

Вернёмся к проблеме JA

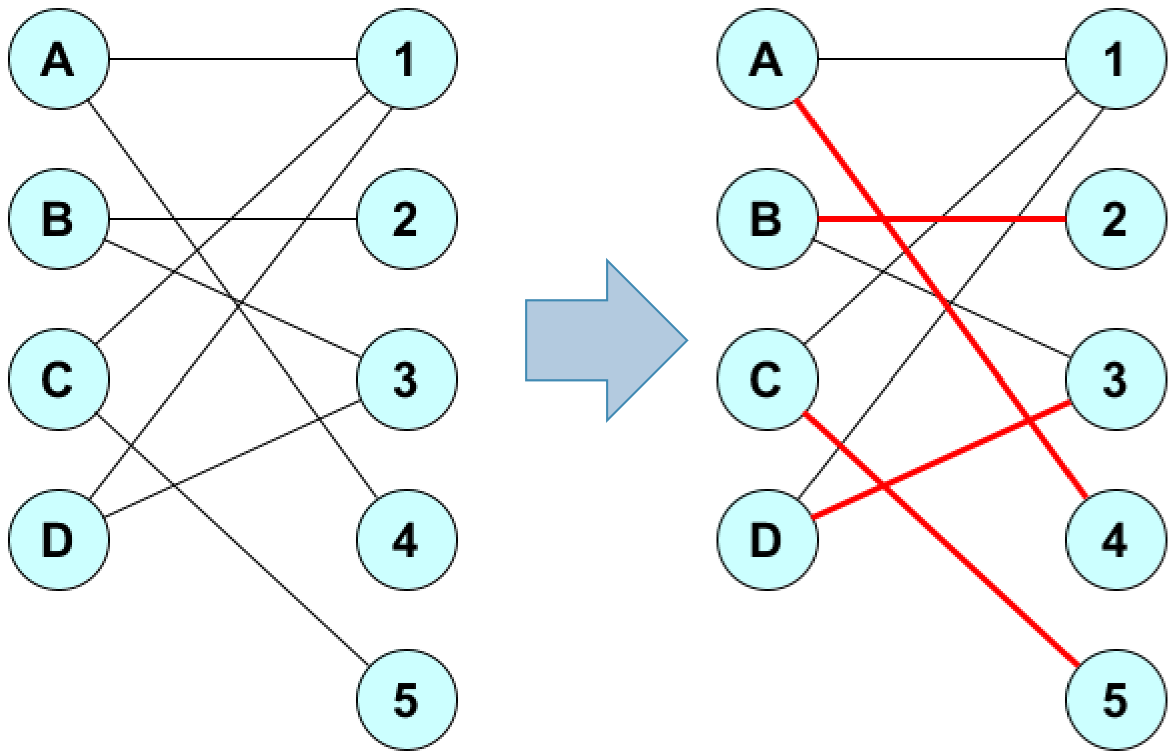
- У Кормена $[Cormen]$ есть замечательный анализ проблемы JA (см. ранее).

JobId	A	B	C	D	E
Deadline	2	1	2	1	3
Profit	100	27	25	19	25

- Назовём выполнимыми множества работ, которые можно сделать без просрочки дедлайна. Например $\{B, A, E\}$ или $\{D, C\}$ выполнимы.
- Очевидно выполнены [nil] и [sub]. Докажите [aug]?
- Тот жадный алгоритм, которым вы решали эту задачу, это тот же алгоритм, который ищет остовные деревья в графе.

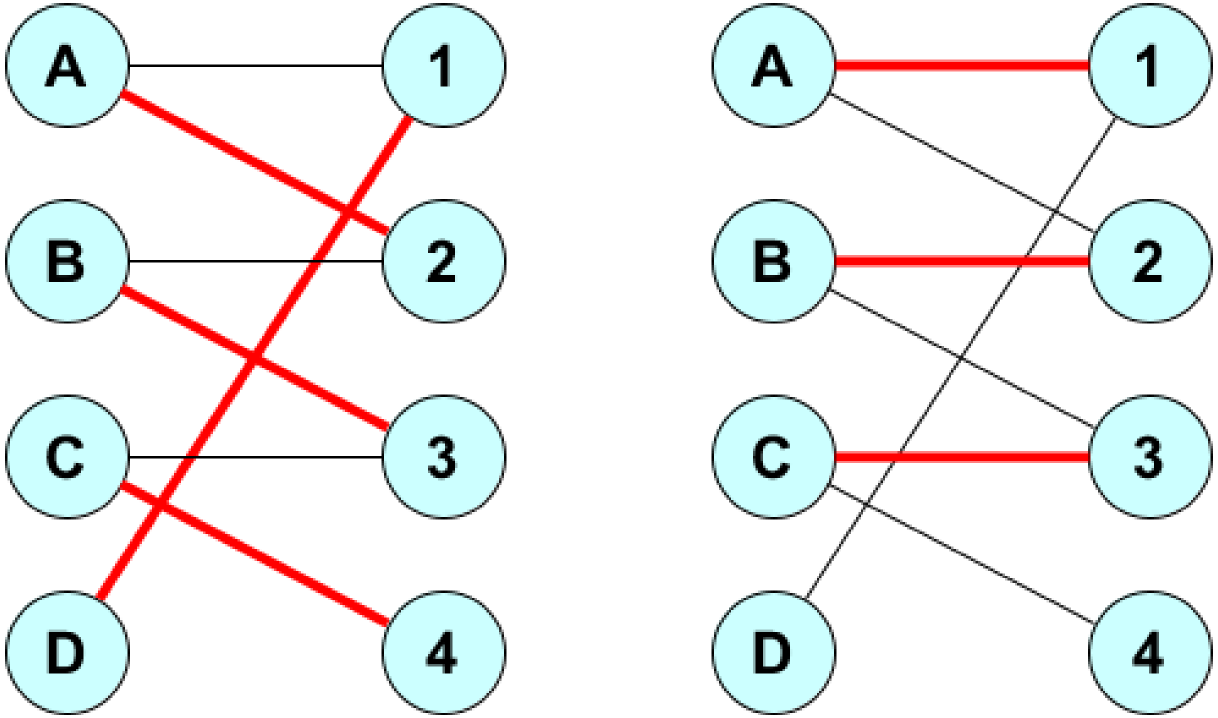
Распределение работников

- Интересная задача, которая тоже имеет структуру матроида это распределение работников по работам с целью максимизации прибыли.
- Слева буквами заданы работники.
- Справа цифрами стоимость работ.
- Показано оптимальное решение.
- Видите ли вы структуру матроида?
- Что является множествами?
- Как будет выглядеть жадный алгоритм решения этой задачи?



Матроид не образуют рёбра сочетания

- Тривиальный контрпример.
- Здесь нарушается [aug]
- Тем не менее, жадный алгоритм возможен.
- В чём же дело?

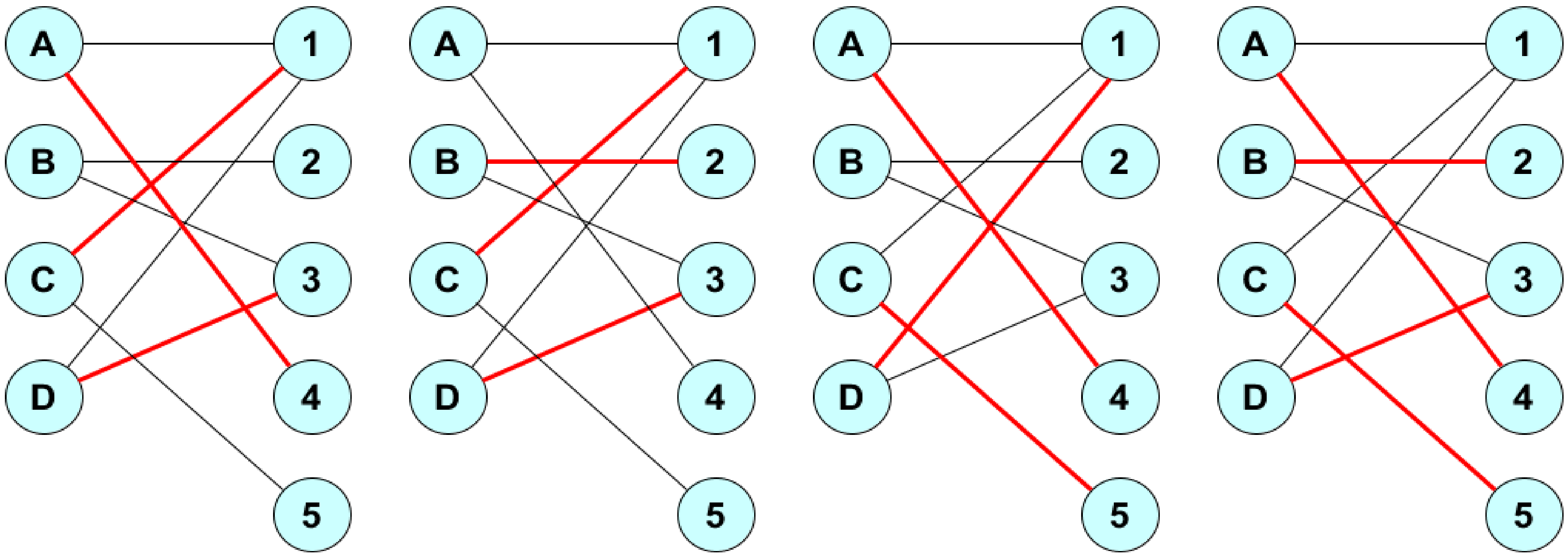


Обсуждение

- Если бы рёбра сочетания образовали матроид, то жадный алгоритм существовал бы для взвешенного паросочетания.
- Понимаете ли вы почему это так?

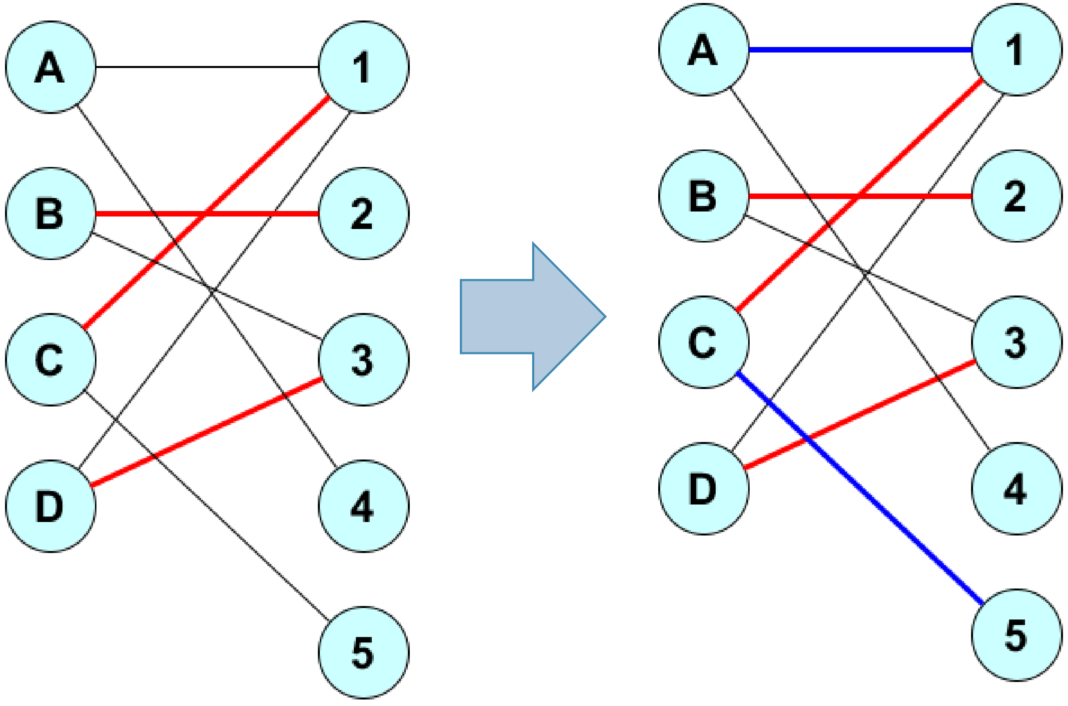
Выполнимые множества

- Назовём множество работ выполнимым, если для него есть удовлетворяющее его паросочетание.



Идея увеличивающего пути

- Увеличивающим путём для выбранного паросочетания называется путь с чередующимися рёбрами и с обоими концами в свободных вершинах.
- Всегда найдётся увеличивающий путь в меньшем сочетании с одним из концов в большем сочетании.
- Это задаёт секущий матроид и подсказывает жадный алгоритм.



{1, 2, 3} → {1, 2, 3, 5}

Обсуждение

- И какой же жадный алгоритм поиска максимального паросочетания это вам подсказывает?

Вернёмся к монетам

- Выполним следующие операции:
  1. Разменяем жадным алгоритмом и посмотрим сколько получилось монет.
  2. Рассмотрим все частичные размены не более чем по столько монет.
- Например для 6 монет и разменного множества $\{4, 3, 1\}$
- Имеем частичные размены 6 не более чем по 3 монеты:
  $\{4, 1, 1\}$, $\{3, 1, 1\}$, $\{1, 1, 1\}$, $\{4, 1\}$, $\{3, 1\}$, $\{3, 3\}$, $\{1, 1\}$, $\{4\}$, $\{3\}$, $\{1\}$
- Они не образуют матроид ([aug] нарушается для $\{4, 1, 1\}$ и $\{3, 3\}$)
- Значит жадный алгоритм для этого разменного множества не работает.

Вернёмся к монетам

- Выполним следующие операции:
  1. Разменяем жадным алгоритмом и посмотрим сколько получилось монет.
  2. Рассмотрим все частичные размены не более чем по столько монет.
- Например для 6 монет и разменного множества {4, 2, 1}
- Имеем частичные размены не более чем по 2 монеты:
  {4, 2}, {4, 1}, {2, 2}, {2, 1}, {1, 1}, {4}, {2}, {1}
- Они образуют матроид.
- Значит жадный алгоритм для этого разменного множества работает.

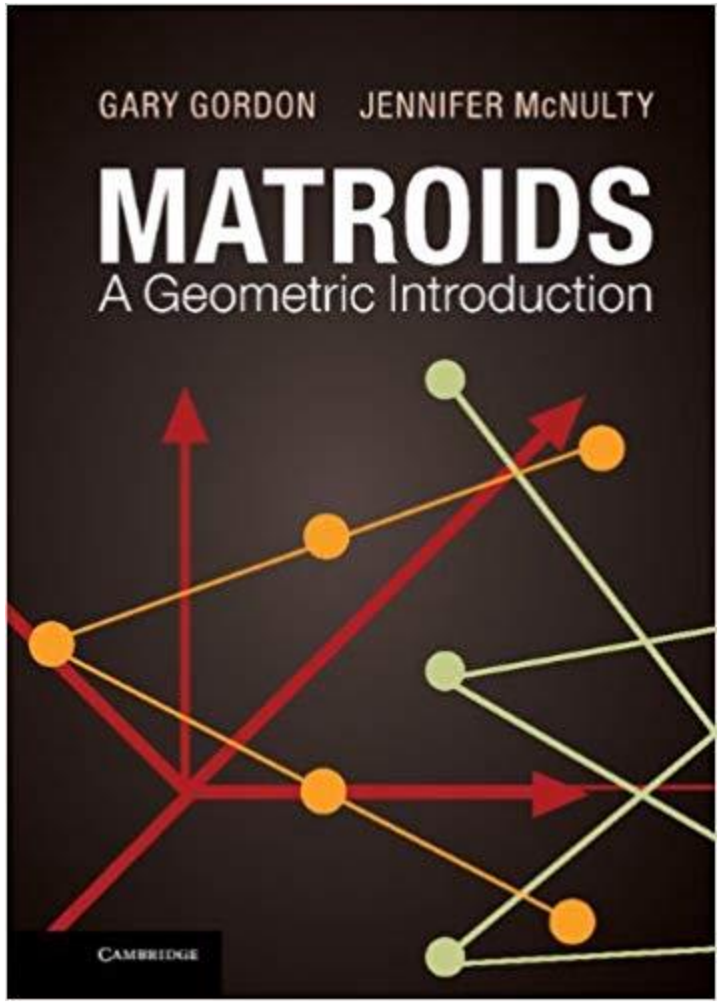
http://graal.ens-lyon.fr/~abenoit/algo09/coins2.pdf

Больше о матроидах

- На самом деле матроиды это удивительные комбинаторные объекты.
- Они имеют странную связь с графами, в частности с планарными графами.
- У них масса обобщений, разной степени обобщённости. Например каждый матроид это комбинаторная геометрия.
- Подробнее можно почитать в $[GM]$ (для математически настроенной части аудитории).

Литература

- $[C11]$ ISO/IEC – "Information technology – Programming languages – C", 2011
- $[Cormen]$ Thomas H. Cormen – Introduction to Algorithms, 2009
- $[GM]$ Gordon, McNulty – Matroids, A Geometric Introduction, 1993
- $[KS]$ Klappenecker – Theory of Greedy Algorithms
- $[NP]$ Новиков, Поздняков «Жадные алгоритмы»
- $[AT]$ Алексеев, Таланов , «Графы и алгоритмы», онлайн-курс, Intuit



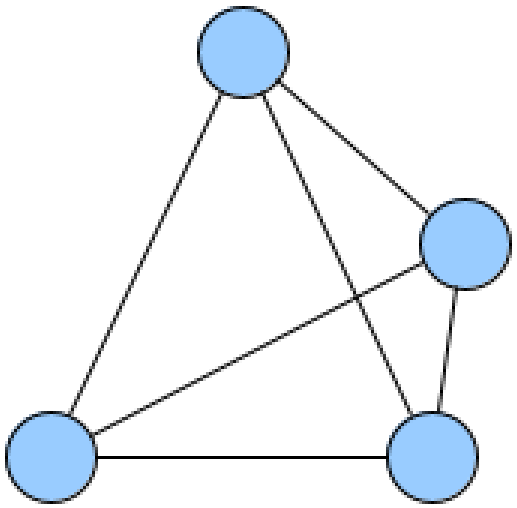
СЕКРЕТНЫЙ УРОВЕНЬ

Жадные алгоритмы на матрицах

Жадные алгоритмы на матрицах

- Пусть стоит задача собрать из n точек взвешенный симплекс минимального веса.

A:1	B:2	C:1	D:3	E:2	F:3	G:1
0	1	0	0	-3	3	2
0	0	2	1	2	2	2
-7	-10	3	-1	12	-6	-3



- Веса $w_a, w_b, \ldots, w_g$ обозначены через двоеточие.
- Можете ли вы здесь предложить жадный алгоритм?

Жадные алгоритмы на матрицах

- Попробуем жадно собрать треугольник минимального веса.
- Выберем точку минимального веса.
- Выберем вторую за ней по весу,
  не совпадающую с первой.
- Теперь нужно выбрать третью так,
  чтобы она не лежала с первыми двумя на одной прямой.
- Как проверить, лежат ли на одной прямой точки (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)?

A:1	B:2	C:1	D:2	E:1	F:3	G:3
2	4	0	-2	-4	0	4
0	-1	1	2	3	2	0

Жадные алгоритмы на матрицах

- Попробуем жадно собрать треугольник минимального веса.
  - Выберем точку минимального веса
  - Выберем вторую за ней по весу, не совпадающую с первой.
  - Выберем третью так, чтобы она не лежала с первыми двумя на одной прямой.

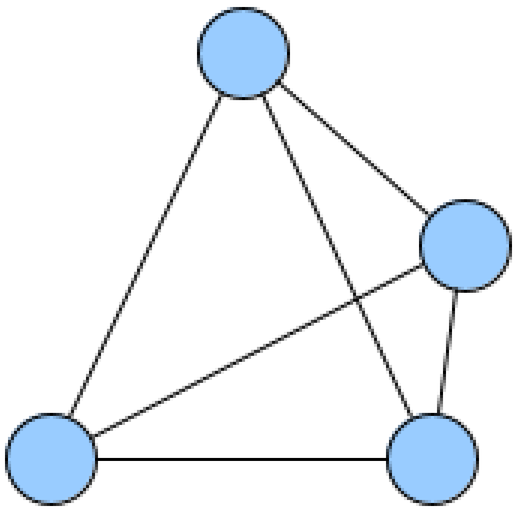
A:1	B:2	C:1	D:2	E:1	F:3	G:3
2	4	0	-2	-4	0	4
0	-1	1	2	3	2	0

- Как проверить, лежат ли на одной прямой точки (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)?
- Составить определитель $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$ и проверить, что он не равен нулю.

Жадные алгоритмы на матрицах

- Теперь симплекс минимального веса сводится к жадному алгоритму.

A:1	B:2	C:1	D:3	E:2	F:3	G:1
0	1	0	0	-3	3	2
0	0	2	1	2	2	2
-7	-10	3	-1	12	-6	-3
1	1	1	1	1	1	1



- Каждый шаг выбирается столбец наименьшего веса.
- Проверяется линейная независимость с уже выбранными столбцами.

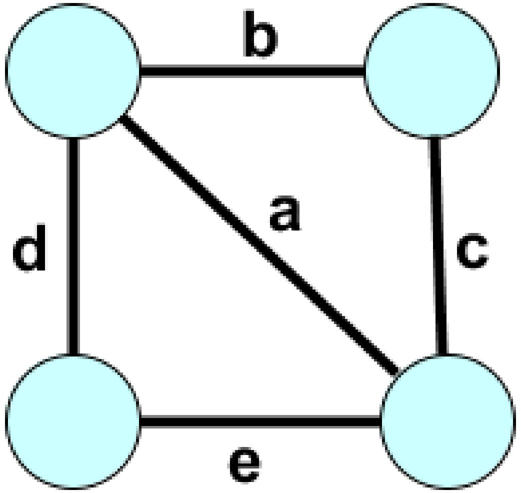
Жадные алгоритмы: скрытая структура

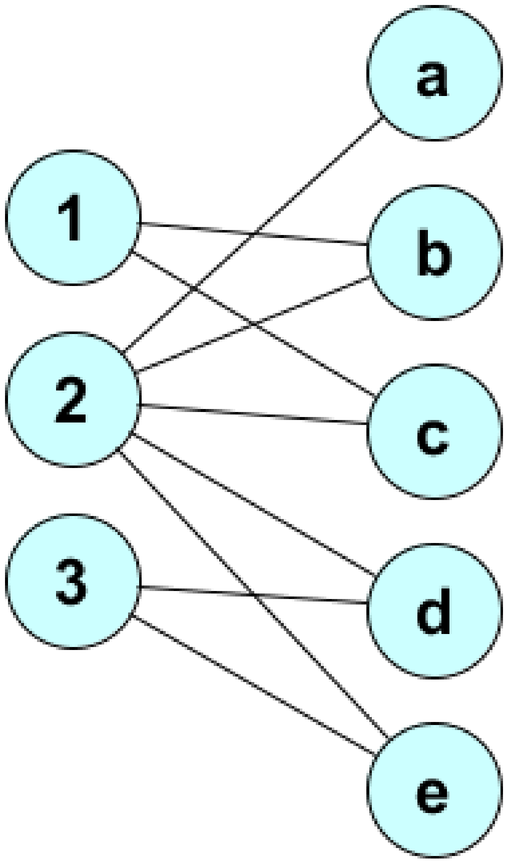
- Подумайте можем ли мы доказать, что в большей всегда можно найти вектор, чтобы добавить в меньшую, сохранив её линейную независимость?

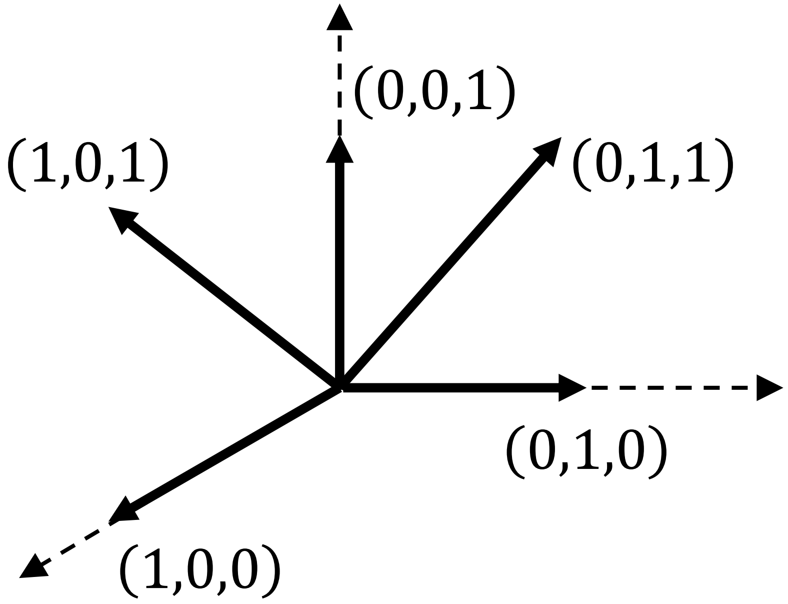
A	B	C	D
-1	0	0	0
0	1	0	0
0	0	1	-1
1	1	1	1

E	F	G
1	-1	-1
1	1	0
0	0	-1
1	1	1

Криптоморфизмы (см. $[GMN]$)







СЕКРЕТНЫЙ УРОВЕНЬ

Матроиды без украшений

Матроиды без украшений

- Матроид это просто система множеств $I \subseteq 2^E$ над своим носителем
- Ниже считаем, что ab это сокращение для $\{a, b\}$

$E = \{a, b, c\}, \qquad I = \{\emptyset, a, c, ab, ac\}$

$E = \{a, b, c\}, \qquad I = \{\emptyset, a, b, c, ab\}$

$E = \{a, b, c, d\}, \qquad I = \{\emptyset, a, b, c, ab, ac, abc\}$

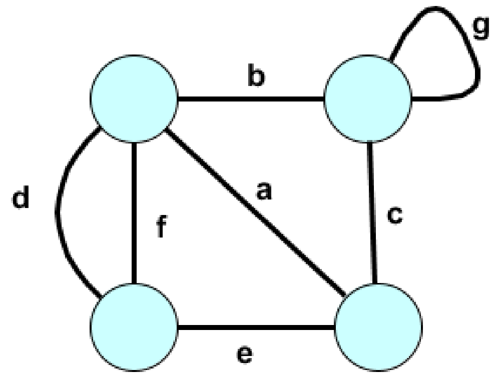
$E = \{a, b, c, d, e, f\}, \qquad I = E + \{xy \mid x, y \in E\} + \{xyz \mid x, y, z \in E\} - \{abc, bcd, cde, def\}$

$E = \{a, b, c, d, e, f\}, \qquad I = E + \{xy \mid x, y \in E\} + \{abc, bcd, cde, def\}$

- Какие из перечисленных систем множеств являются матроидами?
- Как вы думаете над этой проблемой?

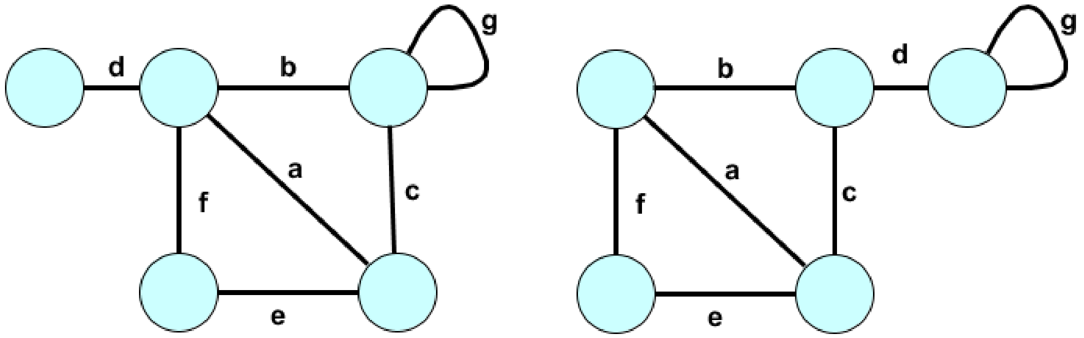
Пример: графический матроид

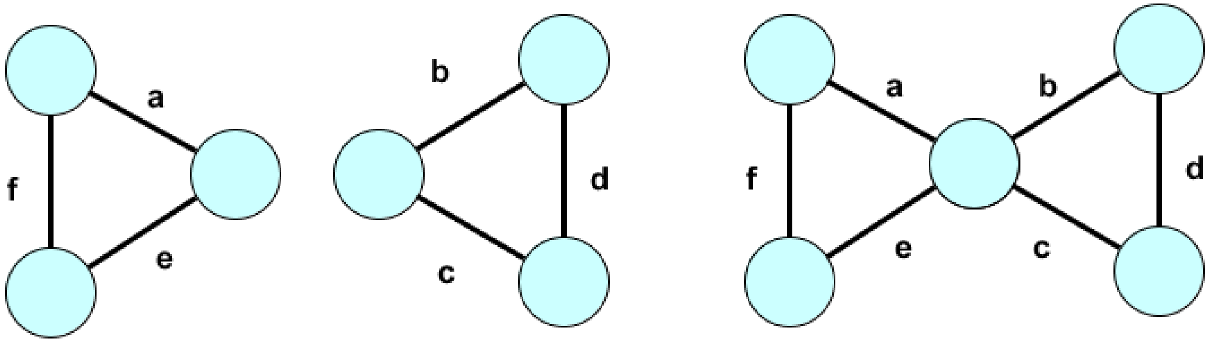
- Циклический или графический матроид приблизительно соответствует графу
- Множество носителя (рёбра): $E = \{a, b, c, d, e, f, g\}$
- Все рёбра кроме циклов: $F = E - \{g\}$
- Все пары рёбер кроме 2-циклов: $P = \{xy \mid x, y \in E\} - df$
- Все тройки кроме 3-циклов: $T = \{xyz \mid x, y, z \in E\} - \{abc, ade, afe\}$
- Итоговый матроид: $I = F + P + T$
- Так как в графе всего четыре вершины, все четверки ребер можно уже и не рассматривать.



Графические матроиды

- Графический матроид строится с точностью до рёбер.
- Он может быть одинаковым для разных графов.
- Как вы думаете, каждый ли матроид является графическим?





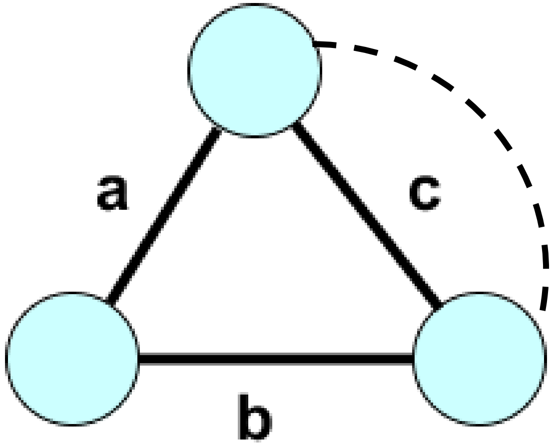
Не только графические матроиды

- Каждый ли матроид является графическим?
- Нет. И пример привести очень просто.

$E = \{a, b, c, d\}$

$I = E + \{xy \mid x, y \in E\}$

- Можно ли истолковать этот матроид как-то иначе?



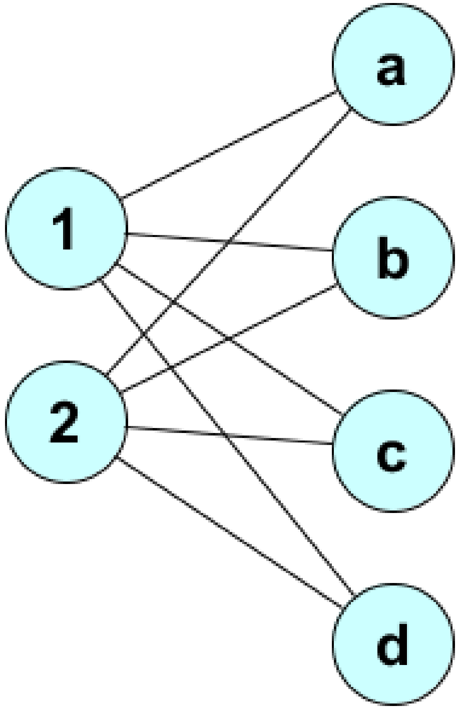
Секущие матроиды

- Каждый ли матроид является графическим?
- Нет. И пример привести очень просто.

$E = \{a, b, c, d\}$

$I = E + \{xy \mid x, y \in E\}$

- Можно ли истолковать этот матроид как-то иначе?
- Да, например это секущий матроид
- Каждый ли матроид является секущим?



Не только секущие матроиды

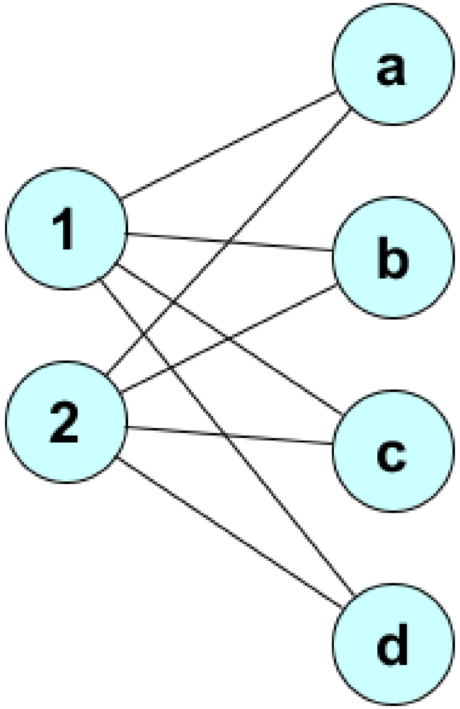
- Каждый ли матроид является графическим?
- Нет. И пример привести очень просто.

$E = \{a, b, c, d\}$

$I = E + \{xy \mid x, y \in E\}$

- Можно ли истолковать этот матроид как-то иначе?
- Да, например это секущий матроид.
- Но и секущим является не каждый матроид.

$E = \{a, b, c, d, e, f\}$ $I = E + \{xy \mid x, y \in E\} - \{ab, cd, ef\}$

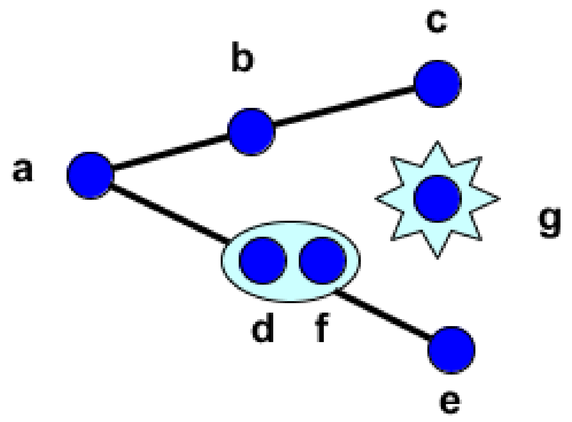


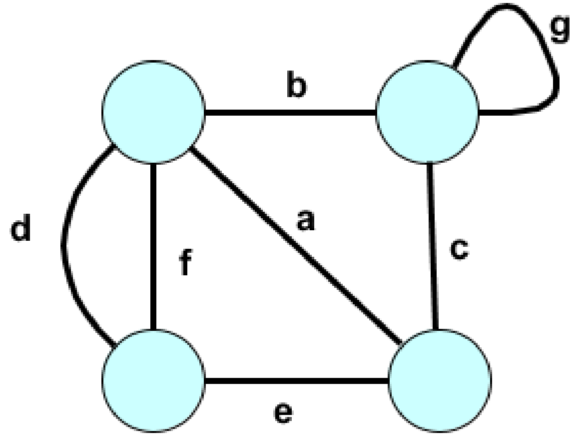
Обсуждение

- Матроиды очень странные животные. Они имеют тонкие и сложные связи со многими категориями комбинаторных объектов, но, такое чувство, что они больше, чем все эти категории.
- Можем ли мы вычленить главное, что характеризует матроиды как системы множеств?

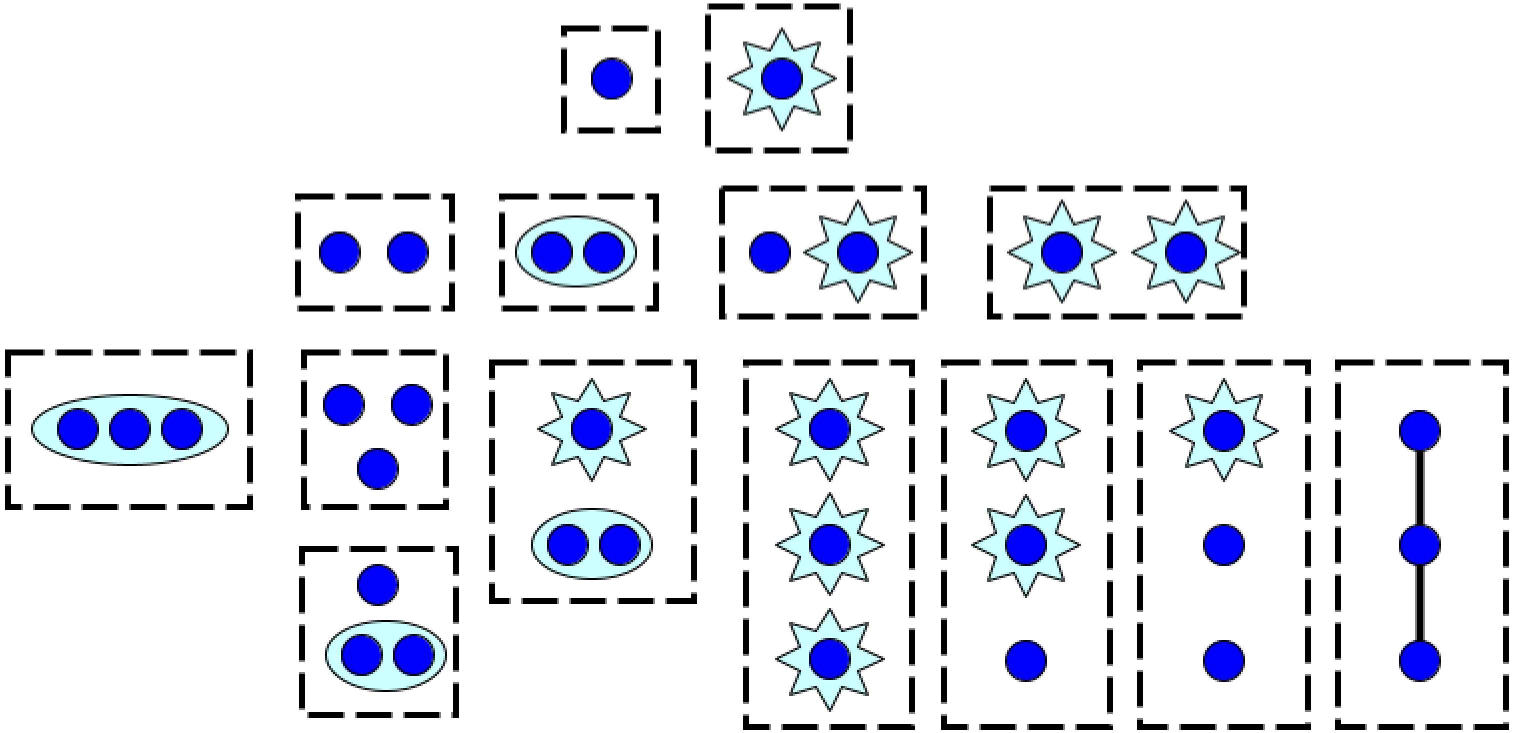
Схемы матроидов

- Для матроидов невысоких рангов удобно рисовать схемы как на рисунке справа.
- Каждые три точки (очевидно матроид ранга 3), лежащие на одной прямой образуют зависимое множество или цепочку в матроиде.
- Могут быть изолированные точки (циклы) и кратные точки. Без них матроид называется простым.
- Проблема таких схем, что уже для графа из пяти вершин нам придётся рисовать трёхмерную картинку.





Все матроиды из N элементов



2

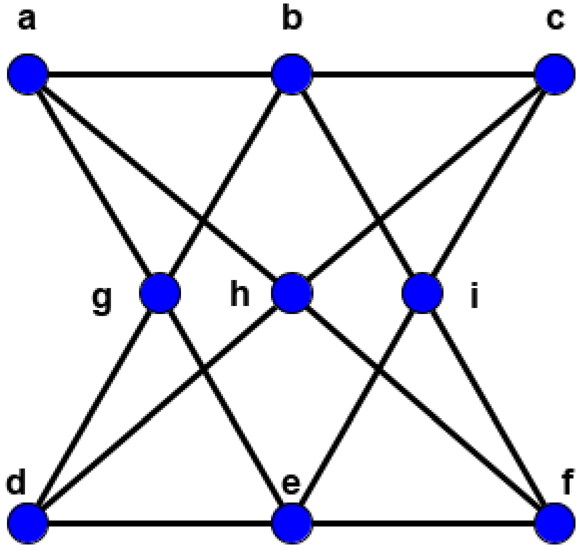
4

8

https://oeis.org/A055545

Представимые матроиды

- Мы говорим, что матроид представим над полем F если существует криптоморфная ему матрица с элементами из F, для которой независимыми множествами являются линейно независимые наборы столбцов.
- Существует ли некое поле, над которым любой графический матроид является представимым?
- На удивление да, это поле F_2 и матрица инцидентности графа.
- Существует ли матроид, не представимый ни над каким полем? Ни над каким кольцом с делением?



Обсуждение

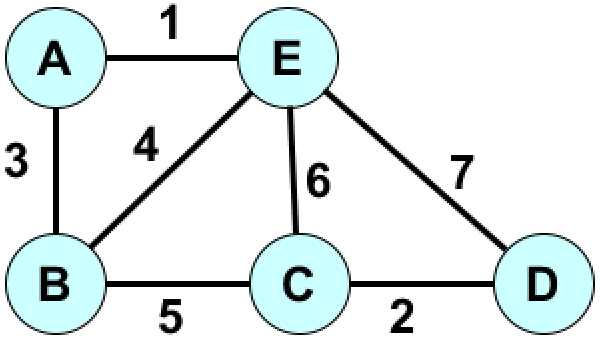
- Допустим вас просят сгенерировать случайный матроид на N точках.
- Как вы поступите?

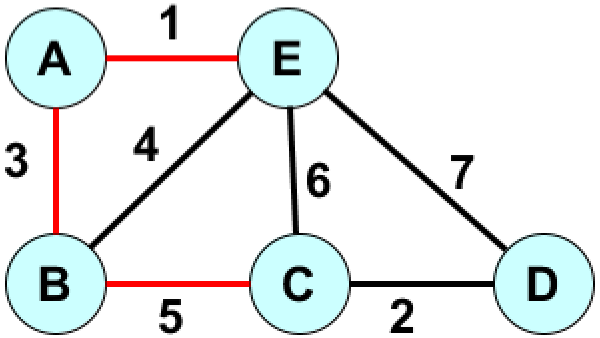
СЕКРЕТНЫЙ УРОВЕНЬ

Гридоиды

Алгоритм Прима

- Ещё один известный способ искать остовное дерево в графе.

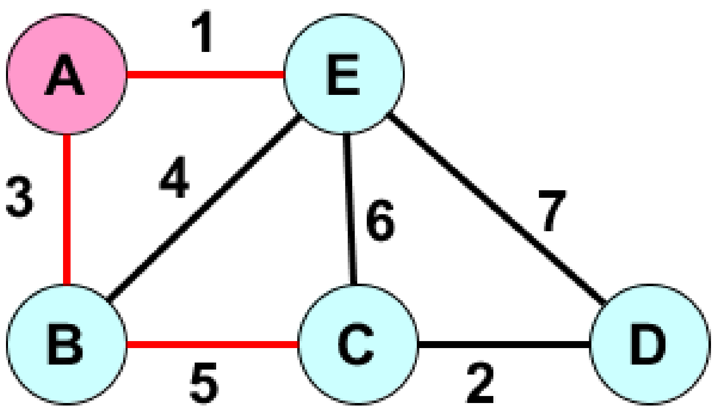


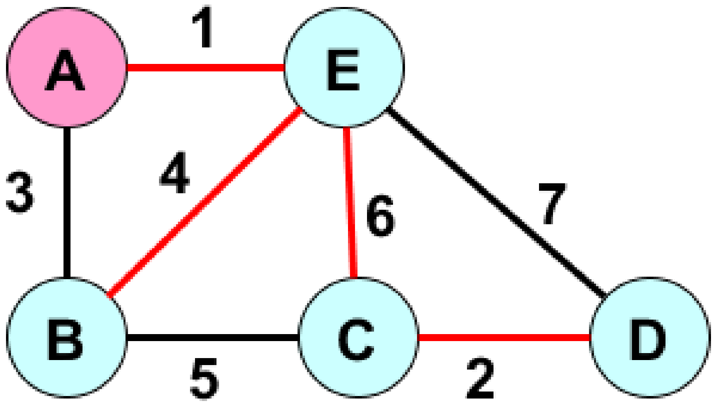


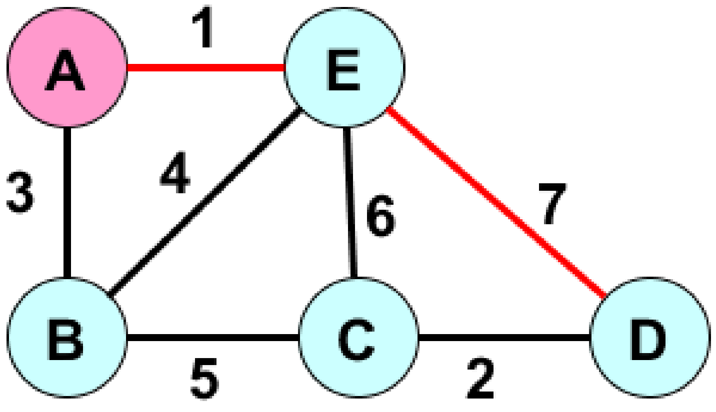
- Жадный шаг: берётся ребро с минимальным весом и добавляется в растущее остовное дерево, если при этом не создаёт там цикла.
- На рисунке выбраны рёбра с весами 1 и 3. Далее ребро с весом 4 добавить нельзя, так как образуется цикл, поэтому добавляем 5 и 2.

Алгоритм Прима

- Совершенно очевидно, что, в отличии от произвольных остовных подграфов, остовные поддеревья не образуют матроид.
- Рассмотрим остовные деревья, укоренённые в одной точке.
- Такое ощущение, что [sub] для них не выполняется (напр. $\{2,4\} \subset \{1,2,4,6\}$).







Системы достижимости

- Системой достижимости A над носителем E называется система множеств, в которой.

[nil] Пустое множество принадлежит A.

[rea] Если непустое множество X принадлежит A, то найдётся его элемент, такой, что, множество после удалении этого элемента принадлежит A.

- Сравните [rea] с гораздо более сильным [sub].
- Если система достижимости удовлетворяет [sub], говорят, что это хередитарная система достижимости или система независимости или симплициальный комплекс.
- Максимальные достижимые множества называются базами системы.

Гридоиды

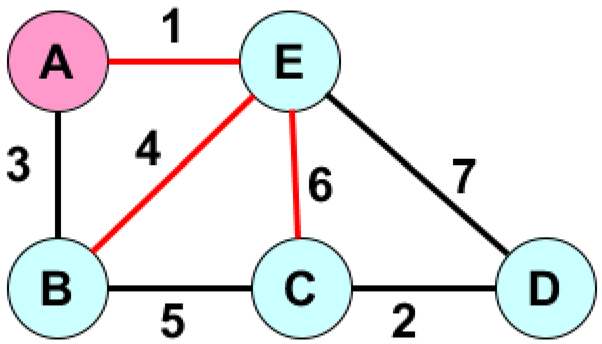
- Гридоидом G над носителем E называется система достижимости, в которой:

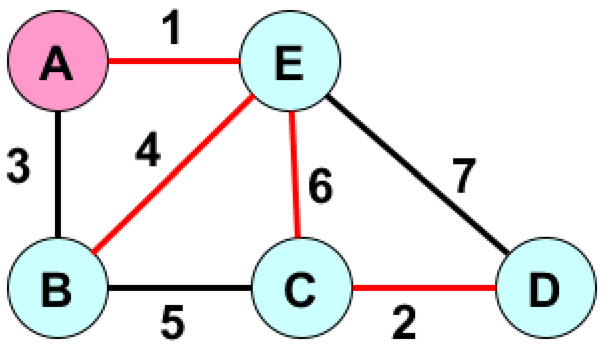
[exc] Если множества X и Y принадлежат A, и при этом $|X| = |Y| + 1$, то в множестве X найдётся элемент, такой, что, множество Y после добавления этого элемента принадлежит A.

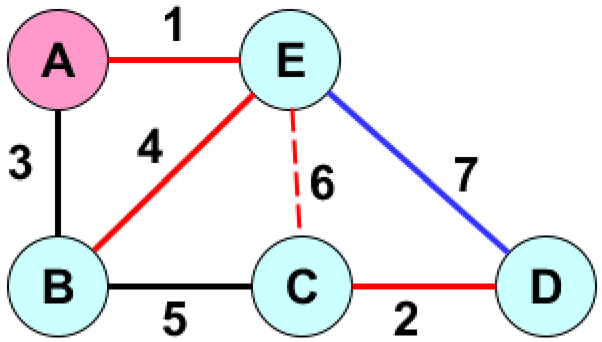
- Сравните [exc] с гораздо более сильным [aug].
- Оказывается, что на гридоидах тоже работает жадный алгоритм в тех случаях (см. $[HMT]$) когда они удовлетворяют условию строгого обмена.

[sexc] Если множество X и базис B, $X \subset B$ принадлежат G, то для каждого $z \in G - B$, такого, что $X + \{z\} \subset G$ найдётся $y \in B - X$, такой, что $X + \{y\} \subset G$ и $B + \{z\} - \{y\} \subset G$

Осознание сильного обмена







[sexc] Если множество X и базис B, $X \subset B$ принадлежат G, то для каждого $z \in G - B$, такого, что $X + \{z\} \subset G$ найдётся $y \in B - X$, такой, что $X + \{y\} \subset G$ и $B + \{z\} - \{y\} \subset G$

- Здесь $B = \{1,4,6,2\}$, $X = \{1,4,6\}$ и
- Выберем $z = 7$, тогда $y = 6$
- Обсуждение: что если $X = \{1,6\}$ и $z = 3$?

Обсуждение

- Все матроиды также являются гридоидами.
- Как изменится для более общего случая гридоидов жадный алгоритм?