

Лабораторная работа №1 по  
Обыкновенным дифференциальным  
уравнениям

Маингарт Владислав Б8119-01.03.02систпро

21 апреля 2021 г.

# Содержание

<b>Введение</b>	<b>2</b>
<b>Задача 1. Найти интеграл</b>	<b>3</b>
Постановка задачи . . . . .	3
Решение . . . . .	3
<b>Задача 2. Численно решить интеграл</b>	<b>4</b>
Постановка задачи . . . . .	4
Решение . . . . .	4
<b>Задача 3</b>	<b>9</b>
Постановка задачи . . . . .	9
Решение . . . . .	9
<b>Заключение</b>	<b>11</b>

## Введение

В лабораторной работе требуется решить и оформить задания при помощи программ компьютерной математики («Maxima», «Wolfram Mathematica», «MATLAB» и др.). Также требуется произвести численное интегрирование определенного интеграла

# Задача 1. Найти интеграл

## Постановка задачи

Найти следующий интеграл с подробным описанием всех действий:

$$\int \frac{\sqrt{1 - \sin x}}{\sec x} dx$$

## Решение

Перепишем исходный интеграл:

$$\int \cos x \cdot \sqrt{1 - \sin x} dx$$

После занесения  $1 - \sin x$  под знак дифференциала получается известный табличный интеграл

$$\begin{aligned} \int \cos x \cdot \sqrt{1 - \sin x} dx &= - \int \sqrt{1 - \sin x} d(1 - \sin x) = \\ &= - \frac{2(1 - \sin x)^{\frac{3}{2}}}{3} + C, C \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

$$\text{Ответ: } \int \frac{\sqrt{1 - \sin x}}{\sec x} dx = - \frac{2(1 - \sin x)^{\frac{3}{2}}}{3} + C, C \in \mathbb{R}$$

## Задача 2. Численно решить интеграл

### Постановка задачи

Четырьмя методами численно вычислить следующий интеграл с точностью  $\varepsilon = 10^{-6}$ . Реализацию решения проводить на языке «C#»:

$$\int_1^{\infty} \frac{e^{-x}}{x} dx$$

### Решение

С помощью системы компьютерной математики WolframAlpha вычислим исходный интеграл:

$$\int_1^{\infty} \frac{e^{-x}}{x} dx = -\operatorname{Ei}(-1) \approx 0.219384$$

Представим подынтегральную функцию в коде:

```
static double function(double x):  
    return Math.Exp(-x) / x;
```

Так как верхняя граница интегрирования  $-\infty$ , найдем ее численное значение:

```
static double findUpperLimit(double epsilon)  
    const double step = 1;  
    var lim = 1d;  
    var val = 0d;  
    do  
        lim += step;  
        val = Program.function(lim);  
        while (Math.Abs(val) > epsilon);  
    return lim;
```

1. Метод левых прямоугольников на языке C#

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)(x_{i+1} - x_i)$$

```
static double LeftRectangle(  
    double a, double b, double n  
)  
{  
    var h = (b - a) / n;  
    var sum = 0d;  
    for (var i = 0; i <= n - 1; i++)  
        var x = a + i * h;  
        sum += Program.function(x);  
  
    var result = h * sum;  
    return result;  
}
```

Листинг 1: Метод левых прямоугольников на языке C#

Ответ:  $\int_1^{\infty} \frac{e^{-x}}{x} dx \approx 0.219383661620837, \Delta = 0.000000338389163$

2. Метод правых прямоугольников на языке C#

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{i=1}^n f(x_i)(x_i - x_{i-1})$$

```
static double RightRectangle(  
    double a, double b, double n  
)  
{  
    var h = (b - a) / n;  
    var sum = 0d;  
    for (var i = 1; i <= n; i++)  
        var x = a + i * h;  
        sum += Program.function(x);  
  
    var result = h * sum;  
    return result;  
}
```

Листинг 2: Метод правых прямоугольников на языке C#

Ответ:  $\int_1^{\infty} \frac{e^{-x}}{x} dx \approx 0.219383256954015, \Delta = 0.000000743046985$

3. Метод средних прямоугольников на языке C#

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{i=1}^n f\left(\frac{x_{i-1} + x_i}{2}\right) (x_i - x_{i-1})$$

```
static double CenterRectangle(
    double a, double b, double n
)
{
    var h = (b - a) / n;
    var sum = (
        Program.function(a) + Program.function(b)
    ) / 2;
    for (var i = 1; i < n; i++)
    {
        var x = a + h * i;
        sum += Program.function(x);
    }

    var result = h * sum;
    return result;
}
```

Листинг 3: Метод средних прямоугольников на языке C#

Ответ:  $\int_1^{\infty} \frac{e^{-x}}{x} dx \approx 0.219383459287426, \Delta = 0.000000540712574$

#### 4. Метод трапеции на языке C#

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{i=0}^{n-1} f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right) (x_{i+1} - x_i)$$

```
static double Trapeze(double a, double b, double n)
{
    var h = (b - a) / n;
    var sum = 0d;
    var a1 = 0d;
    for(var i = 0; i <= n - 1; i++)
    {
        a1 = a + h;
        sum += h * (
            Program.function(a) + Program.function(a1)
        ) / 2;
        a = a1;
    }

    return sum;
}
```

Листинг 4: Метод трапеции на языке C#

Ответ:  $\int_1^{\infty} \frac{e^{-x}}{x} dx \approx 0.219383459290611, \Delta = 0.000000540719389$



## Задача 3

### Постановка задачи

Для следующих дифференциальных уравнений определить тип и найти общее решение с помощью программ компьютерной математики:

$$1. \ y' = \frac{\cos^2 y \cdot \cos x}{\sin^2 x - 1}$$

$$2. \ x^2 + y^2 + xyy' = 0$$

$$3. \ y' = \frac{x + y}{y - x + 2}$$

$$4. \ y' \cdot e^x + y = 3e^{-x}$$

### Решение

Поиск аналитического решения будем проводить в системе компьютерной математики Wolfram Alpha

$$1. \ y' = \frac{\cos^2 y \cdot \cos x}{\sin^2 x - 1}$$

*Тип уравнения:* уравнение с разделяющимися переменными

$$\text{Решение: } \operatorname{tg} y = \frac{\ln \frac{\sin x - 1}{\sin x + 1}}{2} + C, C \in \mathbb{R}$$

$$2. \ x^2 + y^2 + xyy' = 0$$

*Тип уравнения:* однородное уравнение

$$\text{Решение: } \frac{1}{\sqrt[4]{\frac{2y^2}{x^2} + 1}} = Cx, C \in \mathbb{R}$$

$$3. \ y' = \frac{x+y}{y-x+2}$$

*Тип уравнения:* приводящееся к однородному уравнению

*Решение:*  $\sqrt{y^2 + (4-2x)y - x^2 + 2} = C, C \in \mathbb{R}$

$$4. \ y' \cdot e^x + y = 3e^{-x}$$

*Тип уравнения:* линейное уравнение

*Решение:*  $y = \frac{Ce^{e^{-x}+x} + 3e^x + 3}{e^x}, C \in \mathbb{R}$

## Заключение

В результате выполнения данной лабораторной работы, мною были решены и оформлены задания при помощи  $\text{\LaTeX}$  и системы компьютерной математики «Wolfram Mathematica».