

Лабораторная работа №1 по
Обыкновенным дифференциальным
уравнениям

Маингарт Владислав Б8119-01.03.02систпро

21 апреля 2021 г.

Содержание

Введение	2
Задача 1. Найти интеграл	3
Постановка задачи	3
Решение	3
Задача 2. Численно решить интеграл	4
Постановка задачи	4
Решение	4
Задача 3	8
Постановка задачи	8
Решение	8
Заключение	10

Введение

В лабораторной работе требуется решить и оформить задания при помощи программ компьютерной математики («Maxima», «Wolfram Mathematica», «MATLAB» и др.). Также требуется произвести численное интегрирование определенного интеграла

Задача 1. Найти интеграл

Постановка задачи

Найти следующий интеграл с подробным описанием всех действий:

$$\int \frac{\sqrt{1 - \sin x}}{\sec x} dx$$

Решение

Перепишем исходный интеграл:

$$\int \cos x \cdot \sqrt{1 - \sin x} dx$$

После занесения $1 - \sin x$ под знак дифференциала получается известный табличный интеграл

$$\begin{aligned} \int \cos x \cdot \sqrt{1 - \sin x} dx &= - \int \sqrt{1 - \sin x} d(1 - \sin x) = \\ &= - \frac{2(1 - \sin x)^{\frac{3}{2}}}{3} + C, C \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

$$\text{Ответ: } \int \frac{\sqrt{1 - \sin x}}{\sec x} dx = - \frac{2(1 - \sin x)^{\frac{3}{2}}}{3} + C, C \in \mathbb{R}$$

Задача 2. Численно решить интеграл

Постановка задачи

Четырьмя методами численно вычислить следующий интеграл с точностью $\varepsilon = 10^{-6}$. Реализацию решения проводить на языке «C#»:

$$\int_1^{\infty} \frac{e^{-x}}{x} dx$$

Решение

С помощью системы компьютерной математики WolframAlpha вычислим исходный интеграл:

$$\int_1^{\infty} \frac{e^{-x}}{x} dx = -\text{Ei}(-1) \approx 0.219384$$

Представим подынтегральную функцию в коде:

```
static double function(double x): {  
    return Math.Exp(-x) / x;  
}
```

Так как верхняя граница интегрирования $-\infty$, найдем ее численное значение:

```
static double findUpperLimit(double epsilon) {  
    const double step = 1;  
    var lim = 1d;  
    var val = 0d;  
    do {  
        lim += step;  
        val = Program.function(lim);  
    } while (Math.Abs(val) > epsilon);  
    return lim;  
}
```

1. Метод левых прямоугольников на языке C#

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)(x_{i+1} - x_i)$$

```
static double LeftRectangle(  
    double a, double b, double n  
) {  
    var h = (b - a) / n;  
    var sum = 0d;  
    for (var i = 0; i <= n - 1; i++) {  
        var x = a + i * h;  
        sum += Program.function(x);  
    }  
    var result = h * sum;  
    return result;  
}
```

Листинг 1: Метод левых прямоугольников на языке C#

Ответ: $\int_1^{\infty} \frac{e^{-x}}{x} dx \approx 0.219383661620837, \Delta = 0.000000338389163$

2. Метод правых прямоугольников на языке C#

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{i=1}^n f(x_i)(x_i - x_{i-1})$$

```
static double RightRectangle(  
    double a, double b, double n  
) {  
    var h = (b - a) / n;  
    var sum = 0d;  
    for (var i = 1; i <= n; i++) {  
        var x = a + i * h;  
        sum += Program.function(x);  
    }  
    var result = h * sum;  
    return result;  
}
```

Листинг 2: Метод правых прямоугольников на языке C#

Ответ: $\int_1^{\infty} \frac{e^{-x}}{x} dx \approx 0.219383256954015, \Delta = 0.000000743046985$

3. Метод средних прямоугольников на языке C#

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{i=1}^n f\left(\frac{x_{i-1} + x_i}{2}\right) (x_i - x_{i-1})$$

```
static double CenterRectangle(
    double a, double b, double n
) {
    var h = (b - a) / n;
    var sum = (
        Program.function(a) + Program.function(b)
    ) / 2;
    for (var i = 1; i < n; i++)
    {
        var x = a + h * i;
        sum += Program.function(x);
    }
    var result = h * sum;
    return result;
}
```

Листинг 3: Метод средних прямоугольников на языке C#

Ответ: $\int_1^{\infty} \frac{e^{-x}}{x} dx \approx 0.219383459287426, \Delta = 0.000000540712574$

4. Метод трапеции на языке C#

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{i=0}^{n-1} f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right) (x_{i+1} - x_i)$$

```
static double Trapeze(double a, double b, double n) {  
    var h = (b - a) / n;  
    var sum = 0d;  
    var a1 = 0d;  
    for(var i = 0; i <= n - 1; i++) {  
        a1 = a + h;  
        sum += h * (  
            Program.function(a) + Program.function(a1)  
        ) / 2;  
        a = a1;  
    }  
    return sum;  
}
```

Листинг 4: Метод трапеции на языке C#

Ответ: $\int_1^{\infty} \frac{e^{-x}}{x} dx \approx 0.219383459290611, \Delta = 0.000000540719389$

Задача 3

Постановка задачи

Для следующих дифференциальных уравнений определить тип и найти общее решение с помощью программ компьютерной математики:

$$1. \ y' = \frac{\cos^2 y \cdot \cos x}{\sin^2 x - 1}$$

$$2. \ x^2 + y^2 + xyy' = 0$$

$$3. \ y' = \frac{x + y}{y - x + 2}$$

$$4. \ y' \cdot e^x + y = 3e^{-x}$$

Решение

Поиск аналитического решения будем проводить в системе компьютерной математики Wolfram Alpha

$$1. \ y' = \frac{\cos^2 y \cdot \cos x}{\sin^2 x - 1}$$

Тип уравнения: уравнение с разделяющимися переменными

$$\text{Решение: } \operatorname{tg} y = \frac{\ln \frac{\sin x - 1}{\sin x + 1}}{2} + C, C \in \mathbb{R}$$

$$2. \ x^2 + y^2 + xyy' = 0$$

Тип уравнения: однородное уравнение

$$\text{Решение: } \frac{1}{\sqrt[4]{\frac{2y^2}{x^2} + 1}} = Cx, C \in \mathbb{R}$$

$$3. \quad y' = \frac{x + y}{y - x + 2}$$

Тип уравнения: приводящееся к однородному уравнению

Решение: $\sqrt{y^2 + (4 - 2x)y - x^2 + 2} = C, C \in \mathbb{R}$

$$4. \quad y' \cdot e^x + y = 3e^{-x}$$

Тип уравнения: линейное уравнение

Решение: $y = \frac{Ce^{e^{-x}+x} + 3e^x + 3}{e^x}, C \in \mathbb{R}$

Заключение

В результате выполнения данной лабораторной работы, мною были решены и оформлены задания при помощи \LaTeX и системы компьютерной математики «Wolfram Mathematica».