Лабораторная работа №1 по Обыкновенным дифференциальным уравнениям

Маингарт Владислав Б8119-01.03.02систпро

21 апреля 2021 г.

Содержание

Введение **2**

Задача 1. Найти интеграл **3**

Постановка задачи 3

Решение 3

Задача №2. Численно решить интеграл **4**

Постановка задачи 4

Решение 4

Задача 3 **8**

Постановка задачи 8

Решение 8

Заключение **10**

Введение

В лабораторной работе требуется решить и оформить задания при помощи программ компьютерной математики («Maxima», «Wolfram Mathematica», «MATLAB» и др.). Также требуется произвести численное интегрирование определенного интеграла

Задача 1. Найти интеграл

Постановка задачи

Найти следующий интеграл с подробным описанием всех действий:

$$\int \frac{\sqrt{1-\sin x}}{\sec x}\, dx$$

Решение

Перепишем исходный интеграл:

$$\int \cos x \cdot \sqrt{1-\sin x}\, dx$$

После занесения $1-\sin x$ под знак дифференциала получается известный табличный интеграл

$$\int \cos x \cdot \sqrt{1-\sin x}\, dx = -\int \sqrt{1-\sin x}\, d(1-\sin x) =$$
$$= -\frac{2(1-\sin x)^{\frac{3}{2}}}{3} + C, C \in \mathbb{R}$$

Ответ: $\int \frac{\sqrt{1-\sin x}}{\sec x}\, dx = -\frac{2(1-\sin x)^{\frac{3}{2}}}{3} + C, C \in \mathbb{R}$

Задача №2. Численно решить интеграл

Постановка задачи

Четыремя методами численно вычислить следующий интеграл с точностью $\varepsilon = 10^{-6}$. Реализацию решения проводить на языке «C#»:

$$\int\limits_1^{\infty} \frac{e^{-x}}{x}\,dx$$

Решение

С помощью системы компьютерной математики WolframAlpha вычислим исходный интеграл:

$$\int\limits_1^{\infty} \frac{e^{-x}}{x}\,dx = -\operatorname{Ei}(-1) \approx 0.219384$$

Представим подинтегральную функцию в коде:

```
static double function(double x): {
  return Math.Exp(-x) / x;
}
```

Так как верхняя граница интегрирования – ∞, найдем ее численное значение:

```
static double findUpperLimit(double epsilon) {
  const double step = 1;
  var lim = 1d;
  var val = 0d;
  do {
    lim += step;
    val = Program.function(lim);
  } while (Math.Abs(val) > epsilon);
  return lim;
}
```

1. Метод левых прямоугольников на языке $C\#$

$$\int\limits_{a}^{b} f(x)\,dx \approx \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)(x_{i+1} - x_i)$$

```
static double LeftRectangle(
 double a, double b, double n
) {
  var h = (b - a) / n;
  var sum = 0d;
  for (var i = 0; i <= n - 1; i++) {
    var x = a + i * h;
    sum += Program.function(x);
  }
  var result = h * sum;
  return result;
}
```

Листинг 1: Метод левых прямоугольников на языке $C\#$

Ответ: $\int\limits_{1}^{\infty} \frac{e^{-x}}{x}\,dx \approx 0.219383661620837$, $\Delta = 0.000000338389163$

2. Метод правых прямоугольников на языке $C\#$

$$\int\limits_{a}^{b} f(x)\,dx \approx \sum_{i=1}^{n} f(x_i)(x_i - x_{i-1})$$

```
static double RightRectangle(
 double a, double b, double n
) {
  var h = (b - a) / n;
  var sum = 0d;
  for(var i = 1; i <= n; i++) {
    var x = a + i * h;
    sum += Program.function(x);
  }
  var result = h * sum;
  return result;
}
```

Листинг 2: Метод правых прямоугольников на языке $C\#$

Ответ: $\int\limits_1^{\infty} \frac{e^{-x}}{x}\,dx \approx 0.219383256954015,\ \Delta = 0.000000743046985$

3. Метод средних прямоугольников на языке $C\#$

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{x_{i-1}+x_i}{2}\right)(x_i - x_{i-1})$$

```
static double CenterRectangle(
 double a, double b, double n
) {
  var h = (b - a) / n;
  var sum = (
    Program.function(a) + Program.function(b)
  ) / 2;
  for (var i = 1; i < n; i++)
  {
    var x = a + h * i;
    sum += Program.function(x);
  }
  var result = h * sum;
  return result;
}
```

Листинг 3: Метод средних прямоугольников на языке $C\#$

Ответ: $\int\limits_1^{\infty} \frac{e^{-x}}{x}\,dx \approx 0.219383459287426,\ \Delta = 0.000000540712574$

4. Метод трапеции на языке $C\#$

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{i=0}^{n-1} f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right)(x_{i+1} - x_i)$$

```
static double Trapeze(double a, double b, double n) {
  var h = (b - a) / n;
  var sum = 0d;
  var a1 = 0d;
  for(var i = 0; i <= n - 1; i++) {
    a1 = a + h;
    sum += h * (
      Program.function(a) + Program.function(a1)
    ) / 2;
    a = a1;
  }
  return sum;
}
```

Листинг 4: Метод трапеции на языке $C\#$

Ответ: $\int\limits_1^{\infty} \frac{e^{-x}}{x}\,dx \approx 0.219383459290611$, $\Delta = 0.000000540719389$

Задача 3

Постановка задачи

Для следующих дифференциальных уравнений определить тип и найти общее решение с помощью программ компьютерной математики:

1. $y' = \dfrac{\cos^2 y \cdot \cos x}{\sin^2 x - 1}$
2. $x^2 + y^2 + xyy' = 0$
3. $y' = \dfrac{x+y}{y-x+2}$
4. $y' \cdot e^x + y = 3e^{-x}$

Решение

Поиск аналитического решения будем проводить в системе компьютерной математики Wolfram Alpha

1. $y' = \dfrac{\cos^2 y \cdot \cos x}{\sin^2 x - 1}$

   Тип уравнения: уравнение с разделяющимися переменными

   Решение: $\operatorname{tg} y = \dfrac{\ln \frac{\sin x - 1}{\sin x + 1}}{2} + C, C \in \mathbb{R}$

2. $x^2 + y^2 + xyy' = 0$

   Тип уравнения: однородное уравнение

   Решение: $\dfrac{1}{\sqrt[4]{\frac{2y^2}{x^2} + 1}} = Cx, C \in \mathbb{R}$

3. $y' = \dfrac{x+y}{y-x+2}$

   Тип уравнения: приводящееся к однородному уравнению

   Решение: $\sqrt{y^2 + (4-2x)y - x^2 + 2} = C, C \in \mathbb{R}$

4. $y' \cdot e^x + y = 3e^{-x}$

   Тип уравнения: линейное уравнение

   Решение: $y = \dfrac{Ce^{e^{-x}+x} + 3e^x + 3}{e^x}, C \in \mathbb{R}$

Заключение

В результате выполнения данной лабораторной работы, мною были решены и оформлены задания при помощи LaTeXи системы компьютерной математики «Wolfram Mathematica».