Лабораторная работа №2 по Обыкновенным дифференциальным уравнениям

Маингарт Владислав Б8119-01.03.02систпро

5 мая 2021 г.

Содержание

Введение

В лабораторной работе требуется решить и оформить задания при помощи программ компьютерной математики (*«Maxima»*, *«Wolfram Mathematica»*, *«MATLAB»* и др.).

Задача 1. Решить дифференциальные уравнения

Постановка задачи

Для следующих дифференциальных уравнений определить тип, найти общее решение и нарисовать векторное поле с помощью программ компьютерной математики:

$$y' \cdot \cos^2 x = \sec y \cdot \ln \sin y$$

$$y' \cdot \ln x + 2xy = 2x \cdot \sqrt{y}$$

$$y' - 1 = e^{x-y} \cdot (1 - e^{y})$$

$$\big(2x - \cos(x+y)\big) \cdot y' + 2y = 2x + \cos x + y$$

$$xy' \cdot \big(\ln(y \operatorname{ctg} x) + 1\big) = \frac{2xy}{\sin 2x} - y \cdot \ln(y \operatorname{ctg} x)$$

Решение

1. $y' \cdot \cos^2 x = \sec y \cdot \ln \sin y$

   Тип уравнения: Уравнение с разделяющимися переменными

   Векторное поле:

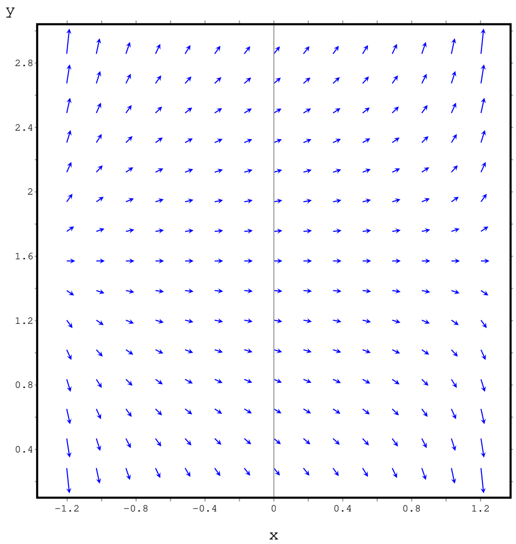

Рис. 1: Уравнение 1

   Ответ: $\mathrm{li}(\sin y) = \tan(x) + C, \ C \in \mathbb{R}$

2. $y' \cdot \ln x + 2xy = 2x \cdot \sqrt{y}$

Тип уравнения: Уравнение с разделяющимися переменными

Векторное поле:

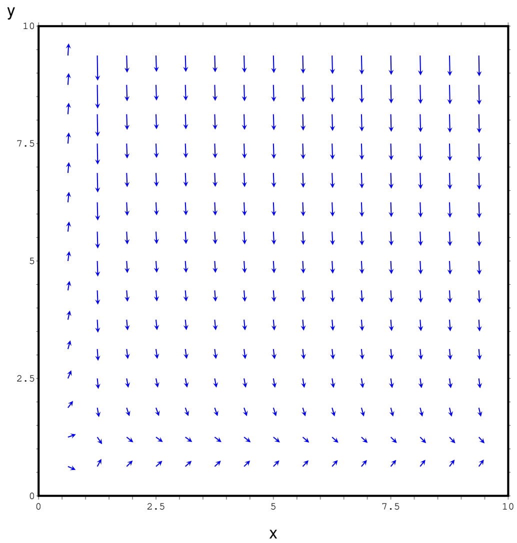

Рис. 2: Уравнение 2

Ответ: $\ln(\sqrt{y} - 1) = C - \mathrm{Ei}(2\ln x),\ C \in \mathbb{R}$

3. $y' - 1 = e^{x-y} \cdot (1 - e^y)$

   Тип уравнения: Линейное уравнение первого порядка относительно e^y

   Векторное поле:

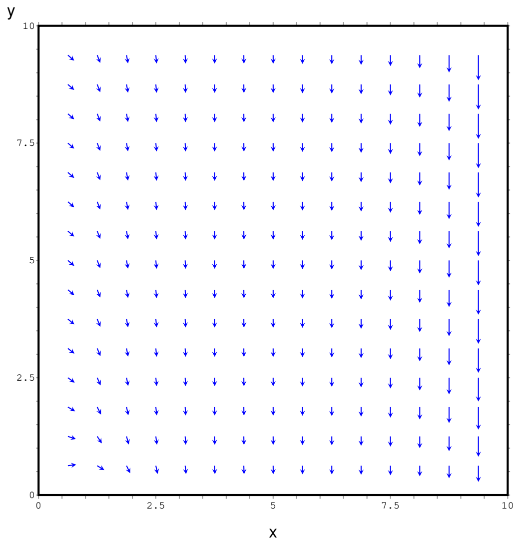

Рис. 3: Уравнение 3

   Ответ: $y = \ln\left(C + \mathrm{Ei}(e^x)\right) + x - e^x,\ C \in \mathbb{R}$

4. $\big(2x - \cos(x+y)\big) \cdot y' + 2y = 2x + \cos x + y$

Тип уравнения: Уравнение в полных дифференциалах

Векторное поле:

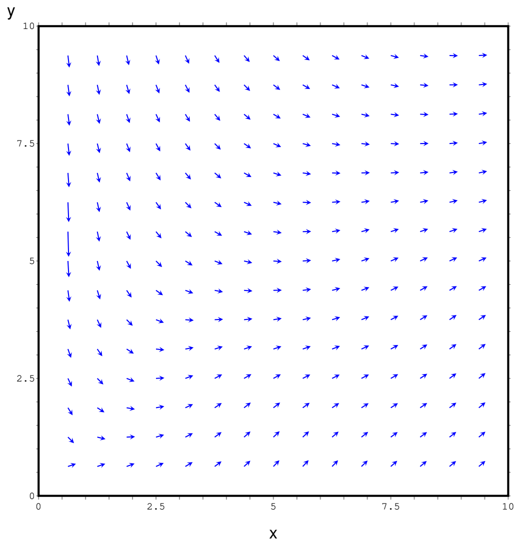

Рис. 4: Уравнение 4

Ответ: $-\sin(x+y) - x^2 + 2xy = C,\ C \in \mathbb{R}$

5. $xy' \cdot \left(\ln(y \operatorname{ctg} x) + 1\right) = \dfrac{2xy}{\sin 2x} - y \cdot \ln(y \operatorname{ctg} x)$

Тип уравнения: Уравнение в полных дифференциалах

Векторное поле:

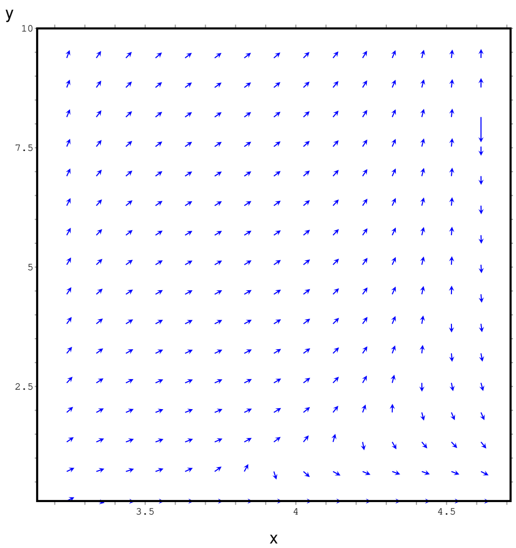

Рис. 5: Уравнение 5

Ответ: $xy \ln y + xy \ln(\operatorname{ctg} x) = C,\ C \in \mathbb{R}$

Задача 2.

Постановка задачи

Решить задачу Коши:

$$\begin{cases} xy' \cdot \ln x - y = 3x^2 \cdot \ln^2 x, \\ y(\sqrt[3]{e}) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y' \cdot \ln x + 2xy = 2x \cdot \sqrt{y}, \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Решение

1. $xy' \cdot \ln x - y = 3x^2 \cdot \ln^2 x$

   Общее решение: $y = \dfrac{3x^2 \ln x}{2} + C \ln x,\ C \in \mathbb{R}$

   Подставим $y(\sqrt[3]{e}) = 0$ в общее решение:

   $C = \dfrac{3e^{\frac{2}{3}}}{2}$

   Ответ: $y = \dfrac{3x^2 \ln x}{2} + \dfrac{3e^{\frac{2}{3}}}{2} \ln x$

2. $y' \cdot \ln x + 2xy = 2x \cdot \sqrt{y}$

   Общее решение: $\ln \sqrt{y} - 1 = C - \mathrm{Ei}(2 \ln x),\ C \in \mathbb{R}$

   Подставим $y(0) = 1$ в общее решение:

   $C = -1$

   Ответ: $\ln \sqrt{y} - 1 = -1 - \mathrm{Ei}(2 \ln x)$

Задача 3.

Постановка задачи

Проверить, является ли представленная неявная функция решением следующей задачи Коши:

$$\begin{cases} y' \cdot \big(1 - \sin(2x + 2y)\big) = 2\sqrt{y - y^2}, \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

$$y = \sin^2(x + y)$$

Решение

Проверим, удовлетворяет ли функция $y = \sin^2(x + y)$ начальному условию $y(0) = 0$:

$$0 = 0$$

Функция $y = \sin^2(x + y)$ должна удовлетворять исходному уравнению. Вычислим y':

$$y' = 2\sin(x + y)\cos(x + y)(1 + y')$$

Раскроем скобки, перегруппируем:

$$y' \cdot (1 - 2\sin(x + y)\cos(x + y)) = 2\sin(x + y)\cos(x + y)$$

Применим формулу двойного угла для $2\sin(x + y)\cos(x + y)$ в левой части уравнения и основное тригонометрическое тождество для косинуса в правой части уравнения:

$$y' \cdot (1 - \sin(2x + 2y)) = 2\sin(x + y)\sqrt{1 - \sin^2(x + y)}$$

Заметим, что $\sin^2(x + y) = y$, значит, $\sin(x + y) = \sqrt{y}$

Получили исходное уравнение:

$$y' \cdot \big(1 - \sin(2x + 2y)\big) = 2\sqrt{y - y^2}$$

Ответ: представленная неявная функция является решением данной задачи Коши

Заключение

В результате выполнения данной лабораторной работы, мною были решены и оформлены задания при помощи LaTeX и системы компьютерной математики *Wolfram Alpha*.