

Лабораторная работа №2 по
Обыкновенным дифференциальным
уравнениям

Маингарт Владислав Б8119-01.03.02систпро

6 мая 2021 г.

Содержание

Введение	2
Задача 1. Решить дифференциальные уравнения	3
Постановка задачи	3
Решение	4
Задача 2.	9
Постановка задачи	9
Решение	10
Задача 3.	12
Постановка задачи	12
Решение	12
Заключение	14

Введение

В лабораторной работе требуется решить и оформить задания при помощи программ компьютерной математики («*Maxima*», «*Wolfram Mathematica*», «*MATLAB*» и др.).

Задача 1. Решить дифференциальные уравнения

Постановка задачи

Для следующих дифференциальных уравнений определить тип, найти общее решение и нарисовать векторное поле с помощью программ компьютерной математики:

1. $y' \cdot \cos^2 x = \sec y \cdot \ln \sin y$

2. $y' \cdot \ln x + 2xy = 2x \cdot \sqrt{y}$

3. $y' - 1 = e^{x-y} \cdot (1 - e^y)$

4. $(2x - \cos(x + y)) \cdot y' + 2y = 2x + \cos(x + y)$

5. $xy' \cdot (\ln(y \operatorname{ctg} x) + 1) = \frac{2xy}{\sin 2x} - y \cdot \ln(y \operatorname{ctg} x)$

Решение

1. $y' \cdot \cos^2 x = \sec y \cdot \ln \sin y$

Тип уравнения: Уравнение с разделяющимися переменными

Векторное поле:

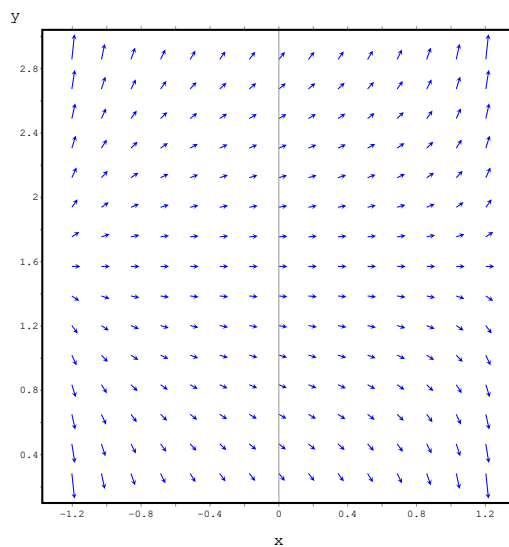


Рис. 1: Векторное поле уравнения 1

Ответ: $\operatorname{li}(\sin y) = \tan(x) + C, C \in \mathbb{R}$

2. $y' \cdot \ln x + 2xy = 2x \cdot \sqrt{y}$

Тип уравнения: Уравнение с разделяющимися переменными

Векторное поле:

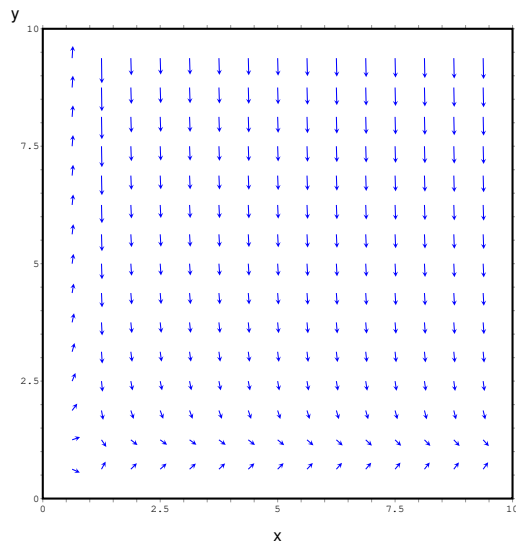


Рис. 2: Векторное поле уравнения 2

Ответ: $\ln(\sqrt{y} - 1) = C - \text{Ei}(2 \ln x)$, $C \in \mathbb{R}$

3. $y' - 1 = e^{x-y} \cdot (1 - e^y)$

Тип уравнения: Линейное уравнение первого порядка относительно e^y

Векторное поле:

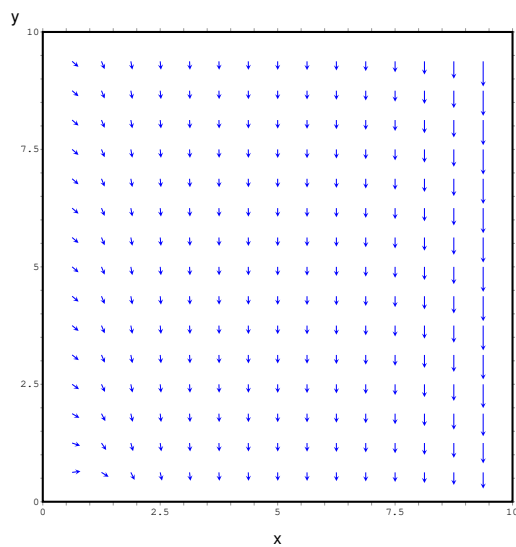


Рис. 3: Векторное поле уравнения 3

Ответ: $y = \ln(C + \text{Ei}(e^x)) + x - e^x$, $C \in \mathbb{R}$

4. $(2x - \cos(x + y)) \cdot y' + 2y = 2x + \cos(x + y)$

Тип уравнения: Уравнение в полных дифференциалах

Векторное поле:

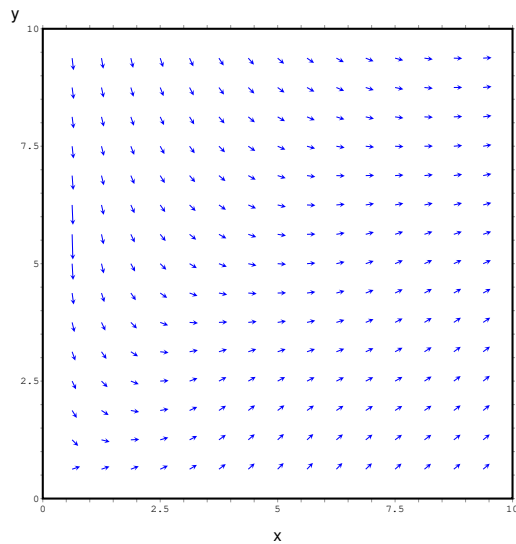


Рис. 4: Векторное поле уравнения 4

Ответ: $-\sin(x + y) - x^2 + 2xy = C, C \in \mathbb{R}$

$$5. \quad xy' \cdot (\ln(y \operatorname{ctg} x) + 1) = \frac{2xy}{\sin 2x} - y \cdot \ln(y \operatorname{ctg} x)$$

Тип уравнения: Уравнение в полных дифференциалах

Векторное поле:

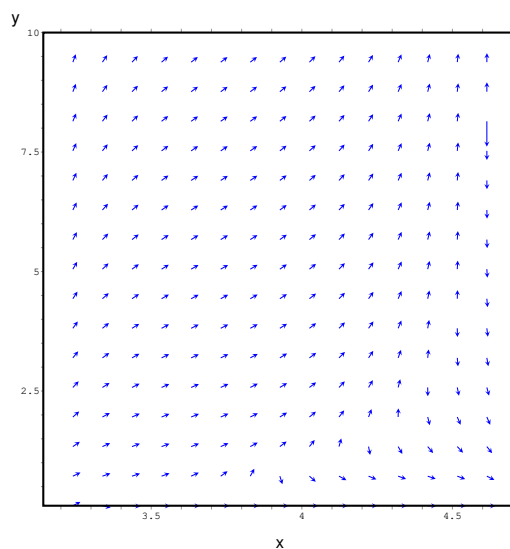


Рис. 5: Векторное поле уравнения 5

Ответ: $xy \ln y + xy \ln(\operatorname{ctg} x) = C, \quad C \in \mathbb{R}$

Задача 2.

Постановка задачи

Решить задачу Коши:

$$1. \begin{cases} xy' \cdot \ln x - y = 3x^2 \cdot \ln^2 x, \\ y(\sqrt[3]{e}) = 0 \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} y' \cos x + y = \frac{y}{\ln y}, \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Решение

1. $xy' \cdot \ln x - y = 3x^2 \cdot \ln^2 x$

Общее решение: $y = \frac{3x^2 \ln x}{2} + C \ln x, C \in \mathbb{R}$

Подставим $y(\sqrt[3]{e}) = 0$ в общее решение:

$$C = \frac{3e^{\frac{2}{3}}}{2}$$

Ответ: $y = \frac{3x^2 \ln x}{2} + \frac{3e^{\frac{2}{3}}}{2} \ln x$

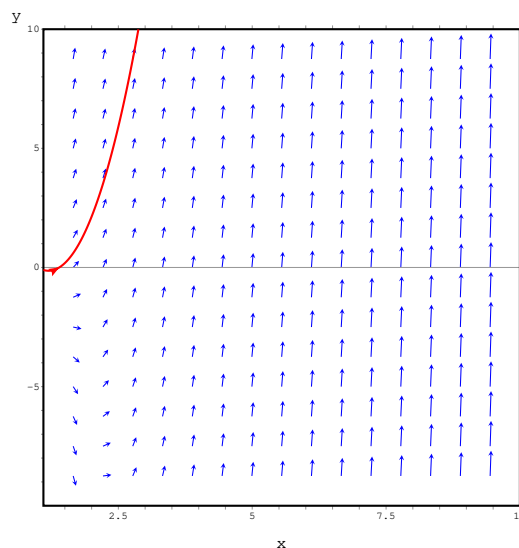


Рис. 6: Векторное поле частного решения уравнения 1

$$2. \quad y' \cos x + y = \frac{y}{\ln y}$$

$$\text{Общее решение: } y - y \ln y = \frac{C \cos x}{\sin x + 1}, \quad C \in \mathbb{R}$$

Подставим $y(0) = 1$ в общее решение:

$$C = 1$$

$$\text{Ответ: } y - y \ln y = \frac{\cos x}{\sin x + 1}$$

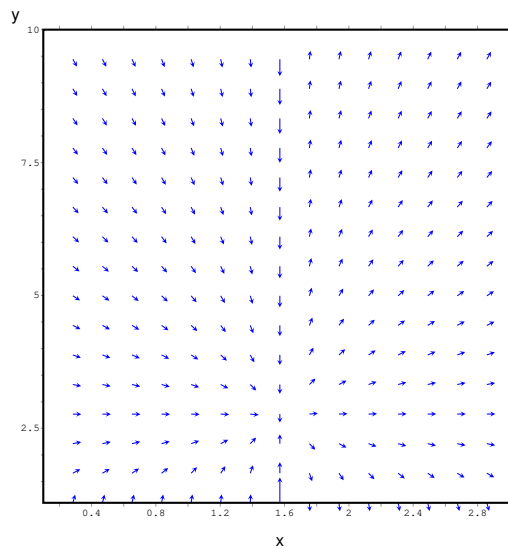


Рис. 7: Векторное поле частного решения уравнения 2

Кривой частного решения является точка

Задача 3.

Постановка задачи

Проверить, является ли представленная неявная функция решением следующей задачи Коши:

$$\begin{cases} y' \cdot (1 - \sin(2x + 2y)) = 2\sqrt{y - y^2}, \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

$$y = \sin^2(x + y)$$

Решение

Проверим, удовлетворяет ли функция $y = \sin^2(x + y)$ начальному условию $y(0) = 0$:

$$0 = 0$$

Функция $y = \sin^2(x + y)$ должна удовлетворять исходному уравнению. Вычислим y' :

$$y' = 2 \sin(x + y) \cos(x + y)(1 + y')$$

Раскроем скобки, перегруппируем:

$$y' \cdot (1 - 2 \sin(x + y) \cos(x + y)) = 2 \sin(x + y) \cos(x + y)$$

Применим формулу двойного угла для $2 \sin(x + y) \cos(x + y)$ в левой части уравнения и основное тригонометрическое тождество для косинуса в правой части уравнения:

$$y' \cdot (1 - \sin(2x + 2y)) = 2 \sin(x + y) \sqrt{1 - \sin^2(x + y)}$$

Заметим, что $\sin^2(x + y) = y$, значит, $\sin(x + y) = \sqrt{y}$

Получили исходное уравнение:

$$y' \cdot (1 - \sin(2x + 2y)) = 2\sqrt{y - y^2}$$

Ответ: представленная неявная функция является решением данной задачи Коши

Заключение

В результате выполнения данной лабораторной работы, мною были решены и оформлены задания при помощи \LaTeX и системы компьютерной математики *Wolfram Alpha*.