

Лабораторная работа №2 по  
Обыкновенным дифференциальным  
уравнениям

Маингарт Владислав Б8119-01.03.02систпро

6 мая 2021 г.

# Содержание

<b>Введение</b>	<b>2</b>
<b>Задача 1. Решить дифференциальные уравнения</b>	<b>3</b>
Постановка задачи . . . . .	3
Решение . . . . .	4
<b>Задача 2.</b>	<b>9</b>
Постановка задачи . . . . .	9
Решение . . . . .	10
<b>Задача 3.</b>	<b>12</b>
Постановка задачи . . . . .	12
Решение . . . . .	12
<b>Заключение</b>	<b>13</b>

# Введение

В лабораторной работе требуется решить и оформить задания при помощи программ компьютерной математики («*Maxima*», «*Wolfram Mathematica*», «*MATLAB*» и др.).

# Задача 1. Решить дифференциальные уравнения

## Постановка задачи

Для следующих дифференциальных уравнений определить тип, найти общее решение и нарисовать векторное поле с помощью программ компьютерной математики:

1.  $y' \cdot \cos^2 x = \sec y \cdot \ln \sin y$

2.  $y' \cdot \ln x + 2xy = 2x \cdot \sqrt{y}$

3.  $y' - 1 = e^{x-y} \cdot (1 - e^y)$

4.  $(2x - \cos(x + y)) \cdot y' + 2y = 2x + \cos(x + y)$

5.  $xy' \cdot (\ln(y \operatorname{ctg} x) + 1) = \frac{2xy}{\sin 2x} - y \cdot \ln(y \operatorname{ctg} x)$

## Решение

1.  $y' \cdot \cos^2 x = \sec y \cdot \ln \sin y$

*Тип уравнения:* Уравнение с разделяющимися переменными

*Векторное поле:*

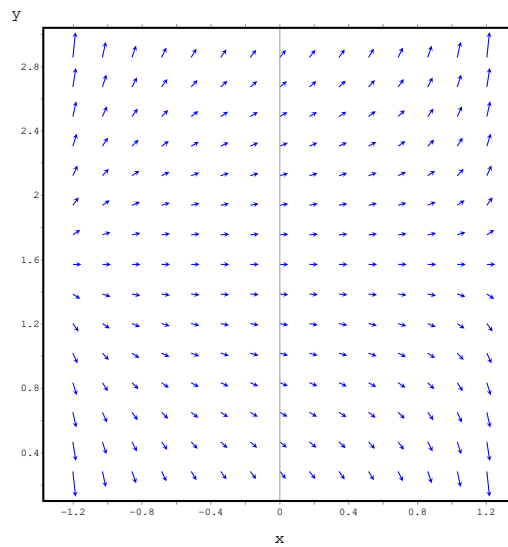


Рис. 1: Векторное поле уравнения 1

*Ответ:*  $\operatorname{li}(\sin y) = \tan(x) + C, C \in \mathbb{R}$

$$2. \quad y' \cdot \ln x + 2xy = 2x \cdot \sqrt{y}$$

*Тип уравнения:* Уравнение с разделяющимися переменными

*Векторное поле:*

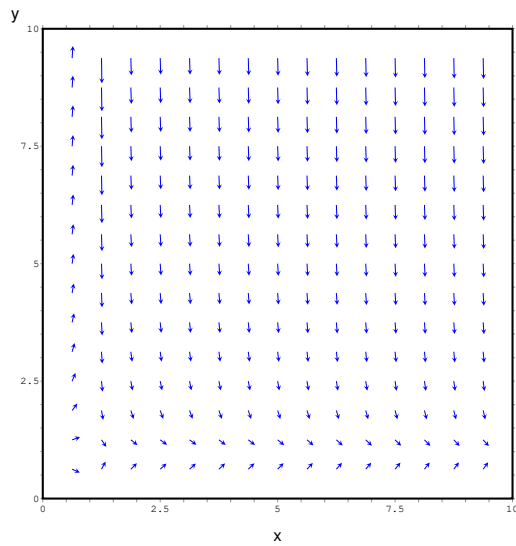


Рис. 2: Векторное поле уравнения 2

*Ответ:*  $\ln(\sqrt{y} - 1) = C - \text{Ei}(2 \ln x), \quad C \in \mathbb{R}$

3.  $y' - 1 = e^{x-y} \cdot (1 - e^y)$

*Тип уравнения:* Линейное уравнение первого порядка относительно  $e^y$

*Векторное поле:*

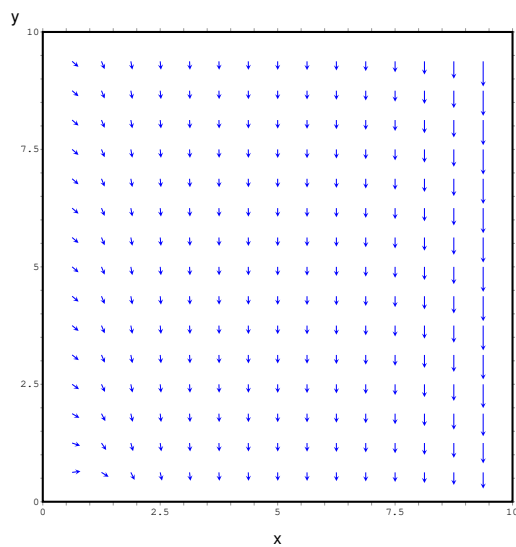


Рис. 3: Векторное поле уравнения 3

*Ответ:*  $y = \ln(C + \text{Ei}(e^x)) + x - e^x$ ,  $C \in \mathbb{R}$

4.  $(2x - \cos(x + y)) \cdot y' + 2y = 2x + \cos(x + y)$

*Тип уравнения:* Уравнение в полных дифференциалах

*Векторное поле:*

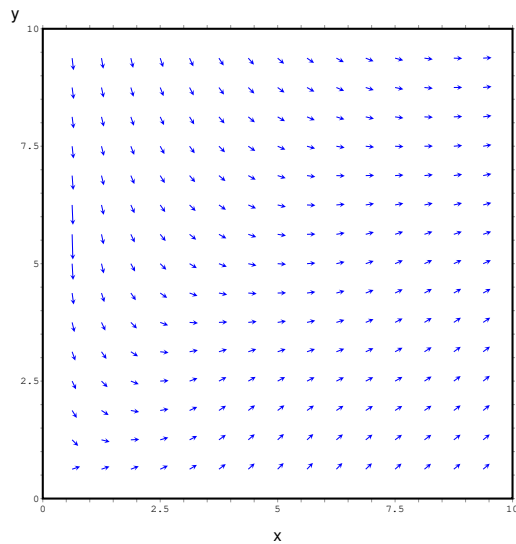


Рис. 4: Векторное поле уравнения 4

*Ответ:*  $-\sin(x + y) - x^2 + 2xy = C, C \in \mathbb{R}$



$$5. \quad xy' \cdot (\ln(y \operatorname{ctg} x) + 1) = \frac{2xy}{\sin 2x} - y \cdot \ln(y \operatorname{ctg} x)$$

*Тип уравнения:* Уравнение в полных дифференциалах

*Векторное поле:*

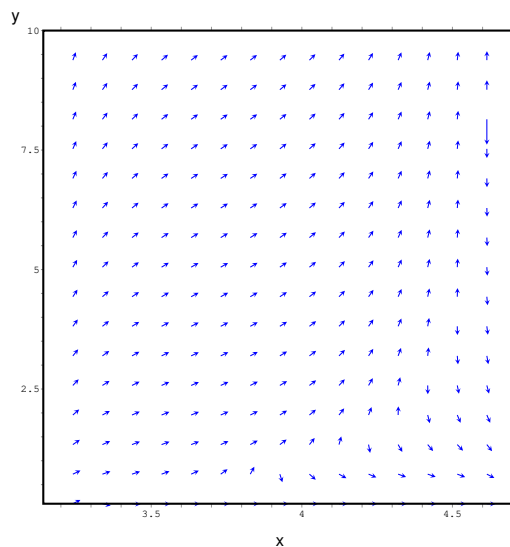


Рис. 5: Векторное поле уравнения 5

*Ответ:*  $xy \ln y + xy \ln(\operatorname{ctg} x) = C, \quad C \in \mathbb{R}$

## Задача 2.

### Постановка задачи

Решить задачу Коши:

$$1. \begin{cases} xy' \cdot \ln x - y = 3x^2 \cdot \ln^2 x, \\ y(\sqrt[3]{e}) = 0 \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} y' \cos x + y = \frac{y}{\ln y}, \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

## Решение

1.  $xy' \cdot \ln x - y = 3x^2 \cdot \ln^2 x$

Общее решение:  $y = \frac{3x^2 \ln x}{2} + C \ln x, C \in \mathbb{R}$

Подставим  $y(\sqrt[3]{e}) = 0$  в общее решение:

$$C = \frac{3e^{\frac{2}{3}}}{2}$$

Ответ:  $y = \frac{3x^2 \ln x}{2} + \frac{3e^{\frac{2}{3}}}{2} \ln x$

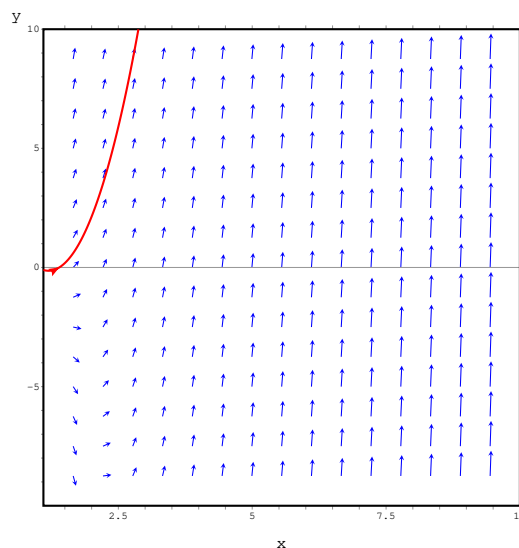


Рис. 6: Векторное поле частного решения уравнения 1

$$2. \quad y' \cos x + y = \frac{y}{\ln y}$$

$$\text{Общее решение: } y - y \ln y = \frac{C \cos x}{\sin x + 1}, \quad C \in \mathbb{R}$$

Подставим  $y(0) = 1$  в общее решение:

$$C = 1$$

$$\text{Ответ: } y - y \ln y = \frac{\cos x}{\sin x + 1}$$

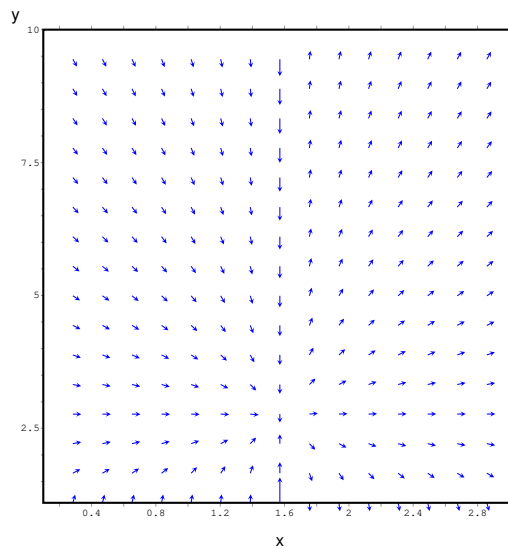


Рис. 7: Векторное поле частного решения уравнения 2

*Кривой частного решения является точка*

## Задача 3.

### Постановка задачи

Проверить, является ли представленная неявная функция решением следующей задачи Коши:

$$\begin{cases} y' \cdot (1 - \sin(2x + 2y)) = 2\sqrt{y - y^2}, \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

$$y = \sin^2(x + y)$$

### Решение

Проверим, удовлетворяет ли функция  $y = \sin^2(x + y)$  начальному условию  $y(0) = 0$ :

$$0 = 0$$

Функция  $y = \sin^2(x + y)$  должна удовлетворять исходному уравнению. Вычислим  $y'$ :

$$y' = 2 \sin(x + y) \cos(x + y)(1 + y')$$

Раскроем скобки, перегруппируем:

$$y' \cdot (1 - 2 \sin(x + y) \cos(x + y)) = 2 \sin(x + y) \cos(x + y)$$

Применим формулу двойного угла для  $2 \sin(x + y) \cos(x + y)$  в левой части уравнения и основное тригонометрическое тождество для косинуса в правой части уравнения:

$$y' \cdot (1 - \sin(2x + 2y)) = 2 \sin(x + y) \sqrt{1 - \sin^2(x + y)}$$

Заметим, что  $\sin^2(x + y) = y$ , значит,  $\sin(x + y) = \sqrt{y}$

Получили исходное уравнение:

$$y' \cdot (1 - \sin(2x + 2y)) = 2\sqrt{y - y^2}$$

*Ответ:* представленная неявная функция является решением данной задачи Коши

## Заключение

В результате выполнения данной лабораторной работы, мною были решены и оформлены задания при помощи L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X и системы компьютерной математики *Wolfram Alpha*.