Лабораторная работа №2 по Обыкновенным дифференциальным уравнениям

Маингарт Владислав Б8119-01.03.02систпро

6 мая 2021 г.

Содержание

Введение

В лабораторной работе требуется решить и оформить задания при помощи программ компьютерной математики (*«Maxima»*, *«Wolfram Mathematica»*, *«MATLAB»* и др.).

Задача 1. Решить дифференциальные уравнения

Постановка задачи

Для следующих дифференциальных уравнений определить тип, найти общее решение и нарисовать векторное поле с помощью программ компьютерной математики:

1. $y' \cdot \cos^2 x = \sec y \cdot \ln \sin y$
2. $y' \cdot \ln x + 2xy = 2x \cdot \sqrt{y}$
3. $y' - 1 = e^{x-y} \cdot (1 - e^y)$
4. $\big(2x - \cos(x+y)\big) \cdot y' + 2y = 2x + \cos(x+y)$
5. $xy' \cdot \big(\ln(y \operatorname{ctg} x) + 1\big) = \dfrac{2xy}{\sin 2x} - y \cdot \ln(y \operatorname{ctg} x)$

Решение

1. $y' \cdot \cos^2 x = \sec y \cdot \ln \sin y$

   Тип уравнения: Уравнение с разделяющимися переменными

   Векторное поле:

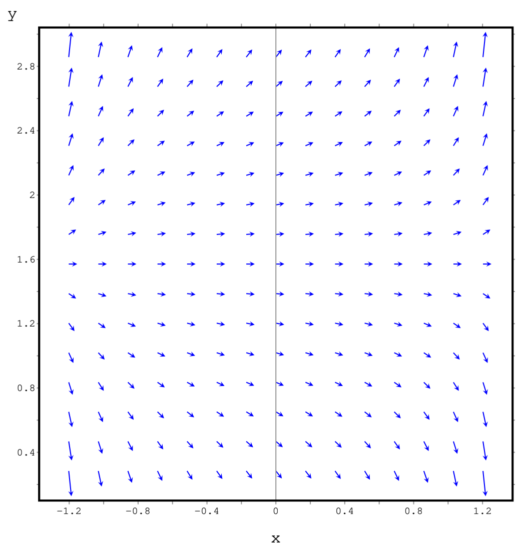

Рис. 1: Векторное поле уравнения 1

   Ответ: $\mathrm{li}\big(\sin y\big) = \tan(x) + C,\ \ C \in \mathbb{R}$

2. $y' \cdot \ln x + 2xy = 2x \cdot \sqrt{y}$

Тип уравнения: Уравнение с разделяющимися переменными

Векторное поле:

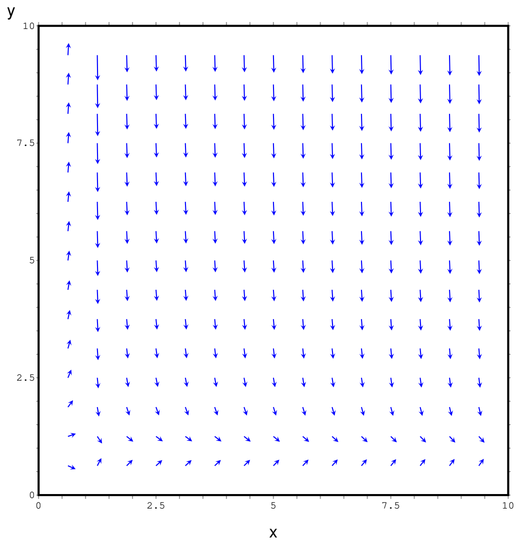

Рис. 2: Векторное поле уравнения 2

Ответ: $\ln\left(\sqrt{y} - 1\right) = C - \mathrm{Ei}(2\ln x),\ C \in \mathbb{R}$

3. $y' - 1 = e^{x-y} \cdot (1 - e^y)$

Тип уравнения: Линейное уравнение первого порядка относительно e^y

Векторное поле:

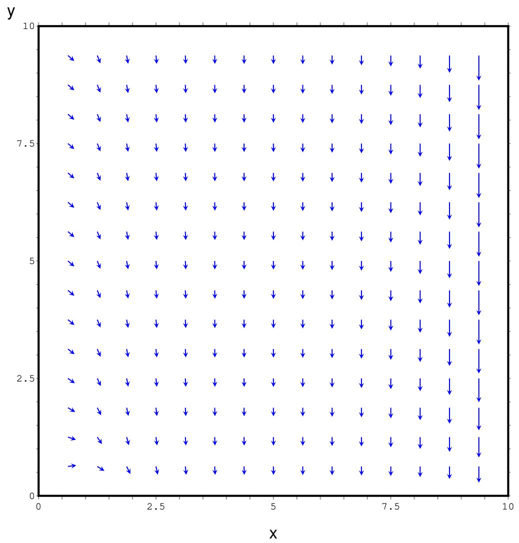

Рис. 3: Векторное поле уравнения 3

Ответ: $y = \ln\left(C + \mathrm{Ei}(e^x)\right) + x - e^x,\ C \in \mathbb{R}$

4. $\big(2x - \cos(x+y)\big) \cdot y' + 2y = 2x + \cos(x+y)$

Тип уравнения: Уравнение в полных дифференциалах

Векторное поле:

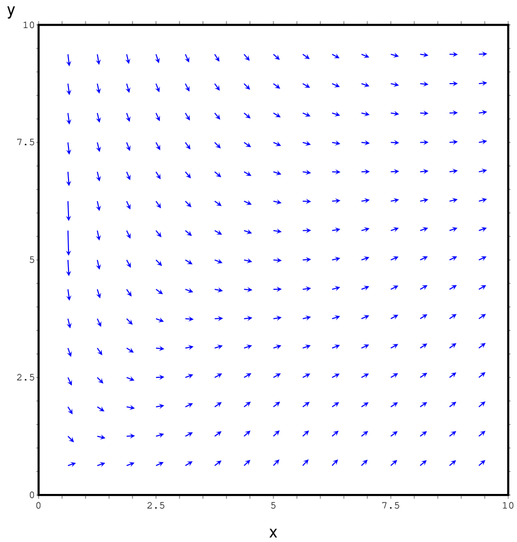

Рис. 4: Векторное поле уравнения 4

Ответ: $-\sin(x+y) - x^2 + 2xy = C,\ C \in \mathbb{R}$

5. $xy' \cdot \big(\ln(y \operatorname{ctg} x) + 1\big) = \dfrac{2xy}{\sin 2x} - y \cdot \ln(y \operatorname{ctg} x)$

Тип уравнения: Уравнение в полных дифференциалах

Векторное поле:

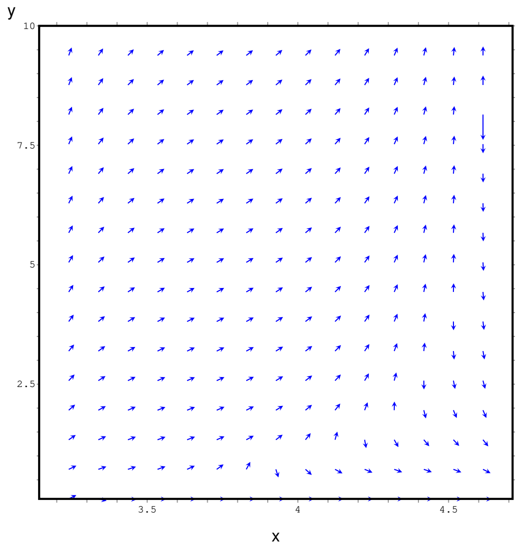

Рис. 5: Векторное поле уравнения 5

Ответ: $xy \ln y + xy \ln(\operatorname{ctg} x) = C, \ C \in \mathbb{R}$

Задача 2.

Постановка задачи

Решить задачу Коши:

1. $$\begin{cases} xy' \cdot \ln x - y = 3x^2 \cdot \ln^2 x, \\ y\big(\sqrt[3]{e}\big) = 0 \end{cases}$$

2. $$\begin{cases} y' \cos x + y = \dfrac{y}{\ln y}, \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Решение

1. $xy' \cdot \ln x - y = 3x^2 \cdot \ln^2 x$

   Общее решение: $y = \dfrac{3x^2 \ln x}{2} + C \ln x, \; C \in \mathbb{R}$

   Подставим $y\left(\sqrt[3]{e}\right) = 0$ в общее решение:

   $C = \dfrac{3e^{\frac{2}{3}}}{2}$

   Ответ: $y = \dfrac{3x^2 \ln x}{2} + \dfrac{3e^{\frac{2}{3}}}{2} \ln x$

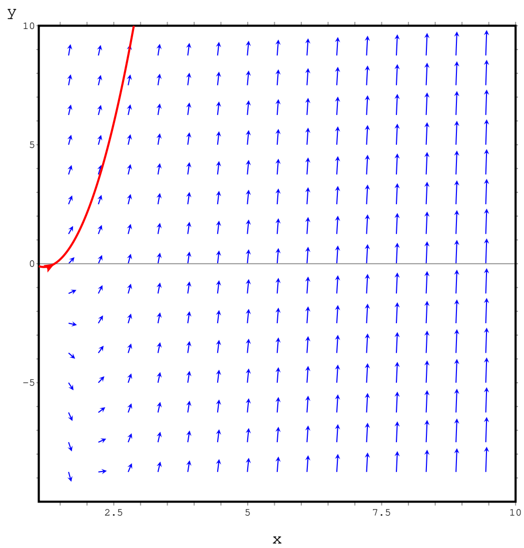

Рис. 6: Векторное поле частного решения уравнения 1

2. $y' \cos x + y = \dfrac{y}{\ln y}$

Общее решение: $y - y \ln y = \dfrac{C \cos x}{\sin x + 1}$, $C \in \mathbb{R}$

Подставим $y(0) = 1$ в общее решение:

$C = 1$

Ответ: $y - y \ln y = \dfrac{\cos x}{\sin x + 1}$

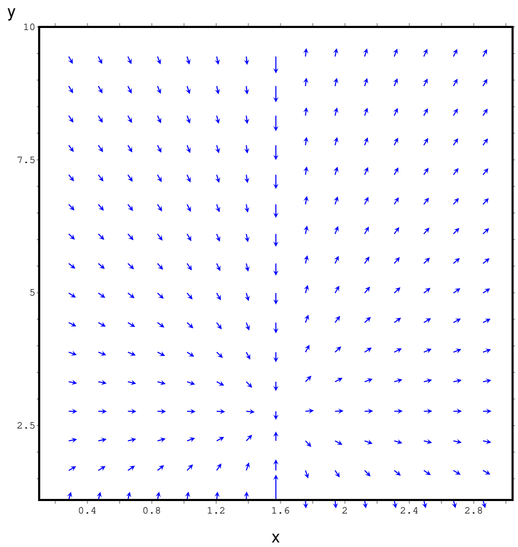

Рис. 7: Векторное поле частного решения уравнения 2

Кривой частного решения является точка

Задача 3.

Постановка задачи

Проверить, является ли представленная неявная функция решением следующей задачи Коши:

$$\begin{cases} y' \cdot \big(1 - \sin(2x + 2y)\big) = 2\sqrt{y - y^2}, \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

$$y = \sin^2(x + y)$$

Решение

Проверим, удовлетворяет ли функция $y = \sin^2(x + y)$ начальному условию $y(0) = 0$:

$$0 = 0$$

Функция $y = \sin^2(x + y)$ должна удовлетворять исходному уравнению. Вычислим y':

$$y' = 2\sin(x + y)\cos(x + y)(1 + y')$$

Раскроем скобки, перегруппируем:

$$y' \cdot \big(1 - 2\sin(x + y)\cos(x + y)\big) = 2\sin(x + y)\cos(x + y)$$

Применим формулу двойного угла для $2\sin(x + y)\cos(x + y)$

в левой части уравнения и основное тригонометрическое тождество для косинуса в правой части уравнения:

$$y' \cdot \big(1 - \sin{(2x + 2y)}\big) = 2 \sin{(x + y)} \sqrt{1 - \sin^2{(x + y)}}$$

Заметим, что $\sin^2(x + y) = y$, значит, $\sin{(x + y)} = \sqrt{y}$

Получили исходное уравнение:

$$y' \cdot \big(1 - \sin{(2x + 2y)}\big) = 2\sqrt{y - y^2}$$

Ответ: представленная неявная функция является решением данной задачи Коши

Заключение

В результате выполнения данной лабораторной работы, мною были решены и оформлены задания при помощи LaTeX и системы компьютерной математики *Wolfram Alpha*.