МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«Дальневосточный федеральный университет»
(ДВФУ)

ШКОЛА ЕСТЕСТВЕННЫХ НАУК

Кафедра информатики, математического и компьютерного моделирования

ОТЧЕТ

к лабораторной работе №3 по дисциплине
«Обыкновенные дифференциальные уравнения»

Направление подготовки
01.03.02 «Прикладная математика и информатика»

Выполнил студент
гр. Б8119-01.03.02систпро
Маингарт В. А. ________
(ФИО) *(подпись)*

« 14 » мая 2021 г.

г. Владивосток
2021

Содержание

Введение

В лабораторной работе требуется решить и оформить задания при помощи программ компьютерной математики («*Maxima*», «*Wolfram Mathematica*», «*MATLAB*» и др.).

Задача 1. Дать характеристику

Постановка задачи

Для следующих дифференциальных уравнений дать характеристику и найти общее решение с помощью программ компьютерной математики:

1. $\dfrac{y}{y'^2} = 1 - \tan y'$
2. ${y'}^2 - 2xy' = 8x^2$
3. $y'^2 - yy' + 4e^x = 0$
4. $y = \dfrac{3}{2}xy' + e^{y'}$
5. $\ln\left(xy'^2 - yy'\right) = y' \ln\sin y' + \ln y'$

Решение

1. $\dfrac{y}{y'^2} = 1 - \tan y'$

   Характеристика: Уравнение, неразрешенное относительно производной, вида $F(y, y') = 0$. Разрешимо относительно искомой функции y заменой $y' = p$.

   Общее решение: $\begin{cases} y = p^2 - p^2 \tan p \\ x = \ln\cos p - p(\tan p + 2) + C \end{cases}$

2. $y'^2 - 2xy' = 8x^2$

Характеристика: Уравнение, неразрешенное относительно производной, вида $F(x, y') = 0$. Разрешимо, как квадратное уравнение относительно y'.

Общее решение: $\begin{cases} y = C_1 - x^2 \\ y = 2x^2 + C_2 \end{cases}$

3. $y'^2 - yy' + 4e^x = 0$

Характеристика: Уравнение, неразрешенное относительно производной, вида $F(x, y, y') = 0$. Разрешимо, как квадратное уравнение относительно y'.

Общее решение: $\begin{cases} y\sqrt{y^2 - 16e^x} + y^2 = Ce^{2x} + 8e^x \\ y\sqrt{y^2 - 16e^x} + y^2 = 8e^x + C \\ x = \ln\dfrac{y^2}{16} \end{cases}$

4. $y = \dfrac{3}{2}xy' + e^{y'}$

Характеристика: Уравнение, неразрешенное относительно производной, вида $F(x, y, y') = 0$. Разрешимо, как уравнение Лагранжа.

Общее решение: $\begin{cases} x = \dfrac{C - (2p^2 - 4p + 4)e^p}{p^3} \\ y = \dfrac{3C - 2(3p^2 - 6p + 6)e^p}{2p^2} + e^p \end{cases}$

5. $\ln\left(xy'^2 - yy'\right) = y' \ln\sin y' + \ln y'$

Характеристика: Уравнение, неразрешенное относительно производной, вида $F(x, y, y') = 0$. Сводится к уравнению Клеро.

Общее решение: $y = Cx - e^C \sin C$

Задача 2. Разрешить уравнения

Постановка задачи

Разрешить следующие уравнения относительно производной и, используя метод Эйлера, найти значение функции в точке. Нарисовать график искомой функции. Реализацию решения проводить на языке «C++»:

1. $$\begin{cases} \sin^2 y' - \cos y = e^{xy} \cdot \cos^2 y' \\ y(1) = -2\pi \end{cases}$$

   $y(\pi) = ?$

2. $$\begin{cases} \tan\left(xy^2\right) - \dfrac{5e^{4x}}{y} = \arcsin y' + 1 \\ y(0) = -2 \end{cases}$$

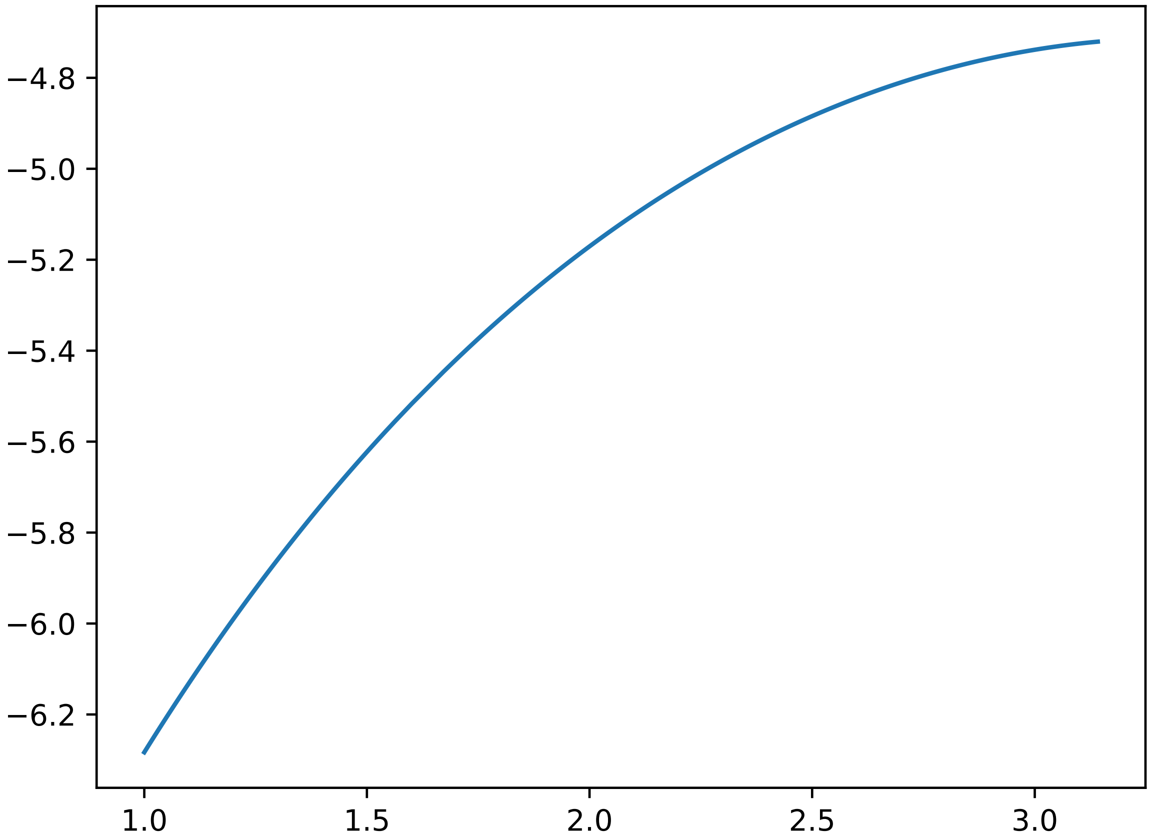
   $y\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = ?$

Решение

1. $$\begin{cases} \sin^2 y' - \cos y = e^{xy} \cdot \cos^2 y' \\ y(1) = -2\pi \end{cases}$$

Решим численно: $y(\pi) \approx -4.720470218$

График:



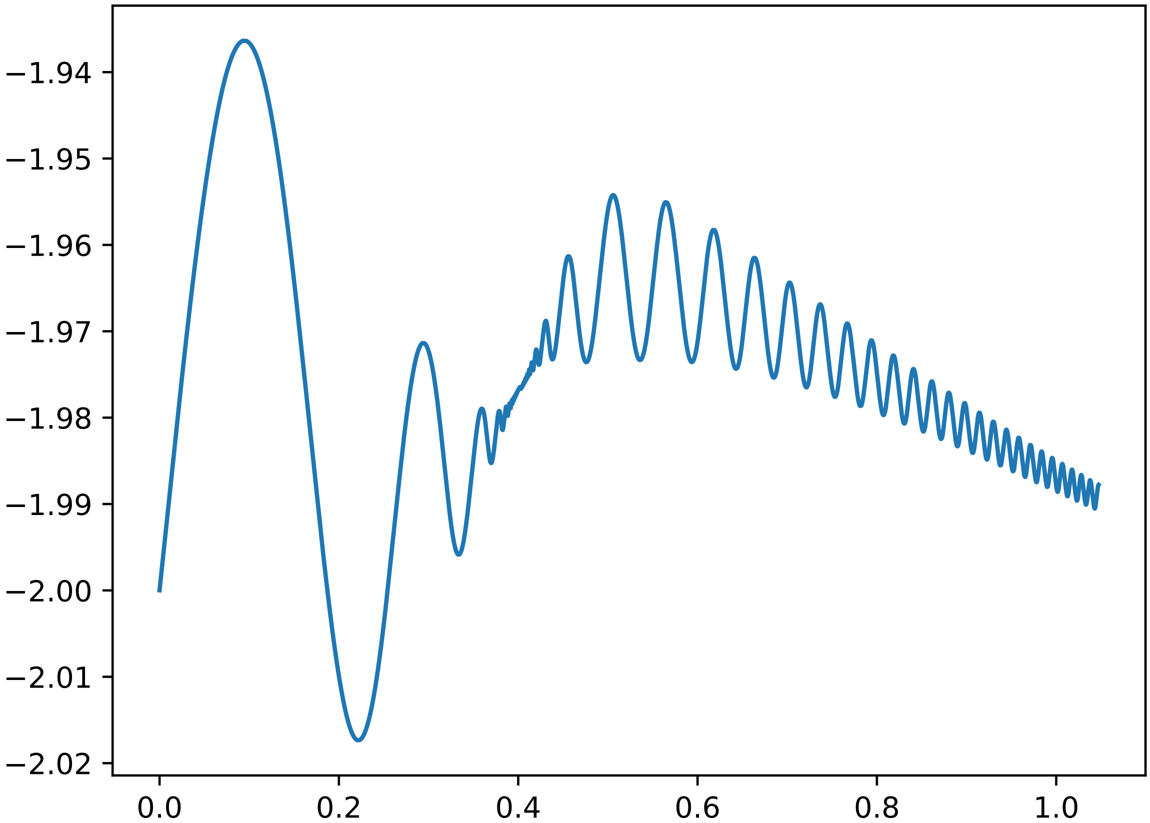
Код:

```cpp
#include <iostream>
#include <fstream>
#include <cmath>

typedef double F(double,double);

double euler(F f, double y0, double x0, double xN, double h)
{
  std::ofstream fout("ode_results1.txt");
  double y = y0;
  for (double x = x0; x < xN; x += h) {
    y += h * f(x, y);
    fout << x << ' ' << y << '\n';
  }
  fout.close();
  return y;
}

double fun(double x, double y) {
  return acos(sqrt((1 - cos(y)) / (exp(x*y) + 1)));
}

int main()
{
  euler(fun, -2*M_PI, 1, M_PI, 0.00001);
}
```

2. $$\begin{cases} \tan(xy^2) - \dfrac{5e^{4x}}{y} = \arcsin y' + 1 \\ y(0) = -2 \end{cases}$$

Решим численно: $y\left(\dfrac{\pi}{3}\right) \approx -1.987772503$

График:



Код:

```
#include <iostream>
#include <fstream>
#include <cmath>

typedef double F(double,double);

double euler(F f, double y0, double x0, double xN, double h)
{
  std::ofstream fout("ode_results2.txt");
  double y = y0;
  for (double x = x0; x < xN; x += h) {
    y += h * f(x, y);
    fout << x << ' ' << y << '\n';
  }
  fout.close();
  return y;
}

double fun(double x, double y) {
  return sin(tan(x * y * y) - 5 * exp(4 * x) / y - 1);
}

int main()
{
  euler(fun, -2, 0, M_PI/3, 0.00001);
}
```

Задача 3. Дать характеристику

Постановка задачи

Для следующих дифференциальных уравнений определить тип, дать характеристику и найти общее решение с помощью программ компьютерной математики

1. $yy' - y'^2 = y^2$
2. $y'' - y'^2 \tan y = y' \sec y$
3. $\dfrac{y''}{y'^2} = \dfrac{2}{\sinh y}$

Решение

1. $yy' - y'^2 = y^2$

   Тип: Уравнение вида $F(y, y') = 0$.

   Характеристика: Разрешимо, как квадратное уравнение относительно y'.

   Общее решение: $y = C_{1,2}e^{\frac{x \pm i\sqrt{3}x}{2}}$

2. $y'' - y'^2 \tan y = y' \sec y$

   Тип: Уравнение вида $F(y, y', y'') = 0$, допускающее понижение порядка заменой $y' = p$.

   Характеристика: Сводится к линейному уравнению 1-го порядка

   Общее решение: $x + C_2 = \sin(C_1) \operatorname{Si}(y + C_1) + \cos(C_1) \operatorname{Ci}(y + C_1)$

3. $\dfrac{y''}{y'^2} = \dfrac{2}{\sinh y}$

   Тип: Уравнение вида $F(y, y', y'') = 0$, допускающее понижение порядка заменой $y' = p$.

   Характеристика: Сводится к уравнению с разделяющимися переменными

   Общее решение: $y - 2\coth\left(\dfrac{y}{2}\right) = C_1x + C_2$

Заключение

В результате выполнения данной лабораторной работы, мною были решены и оформлены задания при помощи $\LaTeX$ и системы компьютерной математики *Wolfram Alpha*.