Universidade Federal de Pelotas
Curso de Engenharia de Computação
Disciplina: 22000178 – Sistemas e Sinais
Turma: 2020/1 – T52
Professor: Vinícius V. A. Camargo

Relatório da Tarefa 3: Resposta de sistemas de tempo discreto.

Aluno: Mairon Schneider Cardoso. Data: 22/10/2020

Número de matrícula: 17102515.

1 Introdução

Como visto no capítulo 1 do livro base da disciplina, sinais não se limitam somente a funções em tempo contínuo, há também a possibilidade de representar um sinal utilizando variáveis em tempo discreto, e isto nos evidência, a necessidade de conhecer as técnicas que nos permitem extrair as respostas de diferentes sistemas lineares de tempo discreto invariantes no tempo(LDIT) para que possamos modificar-ló para viabilizar o uso em determinadas aplicações.

O relatório desta semana tem como objetivo viabilizar a ideia de como é feita a extração da resposta natural, da resposta completa e das respostas forçadas de modo a propiciar não só o entendimento acerca dos passos que serão seguidos para extração das respostas, mas também para que possamos entender uma aplicação do princípio de superposição, além disso, também é abordado a operação de convolução em LDIT's e suas diferenças quando comparado a convolução de um sistema linear no domínio do tempo contínuo.

2 Resultados e Discussões

No capítulo anterior, aprendemos que poderíamos descrever um sistema linear através de uma equação diferencial, onde nela, era possível obter as respostas referentes a sua entrada nula e sua resposta forçada. Já em LDIT's utilizaremos a representação de um sistema através de equações de diferenças, para que compreendamos o formato desses sistemas representados por equações de diferenças, precisamos entender que uma equação de diferenças (equação 1) é uma relação entre os termos de uma sucessor/antecessor, isto é, caso quiséssemos extrair a solução do sistema seria possível através da recursão desses elementos. Semelhante a EDO do capítulo passado, utilizaremos valores antecessores para que consigamos extrair parâmetros como as raízes do sistema.

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k] \tag{1}$$

2.1 Extração da resposta completa através da solução recursiva

Como citado anteriormente, com o conhecimento prévio de recursão é possível extrair a resposta completa do sistema, onde a equação de diferenças é expressa pela equação 2, através dos casos base (condições inciais) $y[-1] = 10$ e $y[-2] = 4$ é possível calcular os pontos, então, para a extração a solução completa via recursão foi projetado um algorítimo que calcula o valor dos pontos da equação, os valores obtidos foram alocados em um vetor, exibindo a solução do sistema (figura 1). Uma peculiaridade desse algorítimo é justamente a necessidade de alocar os valores iniciais em posições positivas (afinal, um vetor não tem posição negativa no MATLAB) e utilizando uma variável que vá até o eixo negativo, corrigir para que o gráfico fique correto, mostrando as condições iniciais no eixo negativo das abscissas.

$$y[n] - \frac{1}{2}y[n-1] + \frac{2}{7}y[n-2] = 5x[n-1] - 3x[n] \tag{2}$$

2.2 Extração da reposta natural

Para que possamos extrair a resposta natural da equação de diferenças, é preciso encontrar as raízes que descrevem o comportamento da reposta, para isso, consideramos $x[n] = 0$ e através da aplicação da fórmula de Bhaskara é possível obter as raízes $r_1 = 0,534e^{j1,083}$ e $r_2 = 0,534e^{-j1,083}$.

Apesar de efetivamente desconsiderar as condições inciais na hora de extrair a equação que descreve a resposta natural, para que consigamos montar o sistema com o objetivo de encontrar as contantes, em um LDIT precisamos utilizar a recursividade para encontrar y[0] e y[1] e, portanto, acabaremos por utilizar as condições iniciais y[-1] e y[-2]. Com as constantes e raízes calculadas, é necessário somente anexa-lós na equação genérica (equação 3) e converte-lás de retangular para polar (equação 4). Como forma de ilustrar o comportamento da resposta natural do sistema (figura 2), o algorítimo precisa estar com a mesma peculiaridade que o exercício anterior, justamente por utilizar indiretamente as condições iniciais.

$$y_n[n] = C_1 r_1^n + C_2 r_2^n \tag{3}$$

$$y_n[n] = 5,56 * 0,534^n * cos(1,083n + 0,804) \tag{4}$$

2.3 Extração da resposta forçada

Para que consigamos extrair a equação que descreve a resposta forçada quando aplicamos uma função u[t], é necessário calcular através da recursão y[1], y[2] e y[3], é necessário o cálculo de três condições iniciais justamente pela representação genérica da equação apresentar uma constante particular, entretanto, diferentemente da resposta natural, aqui as condições iniciais serão igualadas a zero. Com os valores e raizes cálculados, é necessário somente emprega-ló no sistema utilizando como base a equação genérica(equação 5) que define a resposta ao degrau e convertendo de retangular para polar, resultando na equação 6. Neste caso, o vetor que descreve a resposta ao degrau terá condições iniciais y[-1] e y[-2] iguais a zero, o algoritimo atribuirá nas duas primeiras posições.

$$s[n] = Cp + C_1 r_1^n + C_2 r_2^n \tag{5}$$

$$s[n] = 5,724 * 0,534^n * cos(1,083n + 2,893) + 2,545 \tag{6}$$

Tendo em mãos a resposta do circuito quando um degrau é aplicado na sua entrada, através do princípio da superposição que nos diz que se várias entradas estão atuando em um LIT, a saída total será a soma das respostas de cada entrada, isto é, o princípio da superposição nos diz que se as entradas y[n] = s[n-11] e y[n] = s[n] estão atuando em um LIT a saída total será y[n] = s[n] - s[n-11].

Conhecendo o princípio da superposição, podemos calcular a resposta forçada do sistema quando são aplicados na entrada s[n] e s[n-11] separadamente, onde a segunda entrada nada mais é que a s[n] deslocadas 11 unidades para a direita, ou seja, o comportamento da resposta forçada quando essas duas entradas são aplicas no sistema é ilustrada na equação 7. Nesse caso, para que consigamos calcular separadamente as entradas, o algorítimo que calculou s[n-11] se propôs apenas em deslocar a curva, através da manipulação de vetores, onde foi colocado 0 em valores anteriores ao deslocamento e aplicando a função s[n] no restante dos pontos.

$$y_f[n] = 5,724 * 0,534^n * cos(1,083n + 2,893) - (5,724 * 0,534^{(n-11)} * cos(1,083(n-11) + 2,893)) \tag{7}$$

2.4 Extração da resposta completa

Através dos cálculos realizados anteriormente conseguimos obter a resposta natural e a resposta forçada (por uma entrada s[n] - s[n-11]) somando às duas respostas extraídas, conseguimos obter a resposta completa que descreve o sistema. Através da representação gráfica do sistema (figura 3) com todas suas respostas, conseguimos observar que a extração da resposta via recursão exibe o mesmo resultado que a extração via soma da resposta natural mais a forçada.

$$y_{completa}[n] = y_f[n] + y_n[n] \tag{8}$$

2.5 Características do sistema h[n]

Igualando um sistema $h[n]$ a $y_f[n]$ e aplicando na entrada s[n]-s[n-1], conseguimos obter o comportamento ilustrado na figura 4. Nesse sistema, conseguimos observar que ambas as raízes estão dentro do círculo unitário do sistema se comportam como BIBO estável, esse comportamento pode ser observado através da figura 5, para garantir que às duas raízes estão contidas realmente dentro do círculo unitário, é necessário somente compreender que a relação estabelecida na figura 6, onde nos diz que a condição para estabilidade do sistema depende da condição $|\gamma| = |0,534| < 1$, que nesse caso, é verdadeira.

Para identificar se o sistema é causal é necessário observar se o lado esquerdo da equação de diferenças que define o sistema (equação 2) é de maior "ordem"(traçar o paralelo com uma EDO é mais intuitivo) que o lado direto das entradas (que no caso é s[n]-s[n-1]), como demonstrado na equação 1 isto é, para que o sistema seja causal é necessário que $N \geq M$, onde, se o sistema for causal, ele só depende de valores passados ou presentes para conceber os próximos pontos na curva.

O sistema é dinâmico (com memória), visto que, o sistema utiliza-se somente de valores anteriores para construir a função que descreve o sistema. Conseguimos observar isso através de seu comportamento (figura 5) onde ele aparenta um movimento de amortecimento da curva sobre o eixo x.

2.6 Convolução do sistema

A operação de convolução do sistema $h[n] = s[n] - s[n-1]$ com uma função $x[n] = cos(0,2*n)*u(n)$ é descrita pela equação, o cálculo da curva resultante da operação de convolução é parecida com a integral de convolução do capítulo anterior, entretanto, ao invés de calcular a área das curvas, calcularemos o somatório do pulso em cada instante e faremos isso refletindo uma das funções discretas e percorrendo o gráfico da esquerda para a direita através do deslocamento de m, somando os pulsos em cada instante.

$$x[n] * h[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]h[n-m] \tag{9}$$

3 Conclusões

Entender o funcionamento de diferentes respostas de sistemar lineares discretos invariantes no tempo é uma parte importante quando se diz respeito a processamento de sinais, visto que, quando conhecemos a resposta do sistema em determinadas situações é possível utilizar operações lineares como a convolução para modificar a função que descreve o sistema. Foi possível entender através do relatório, o teorema de superposição em uma aplicação que utiliza diretamente essa relação para encontrarmos diferentes respostas do sistema quando diferentes entradas são empregadas.

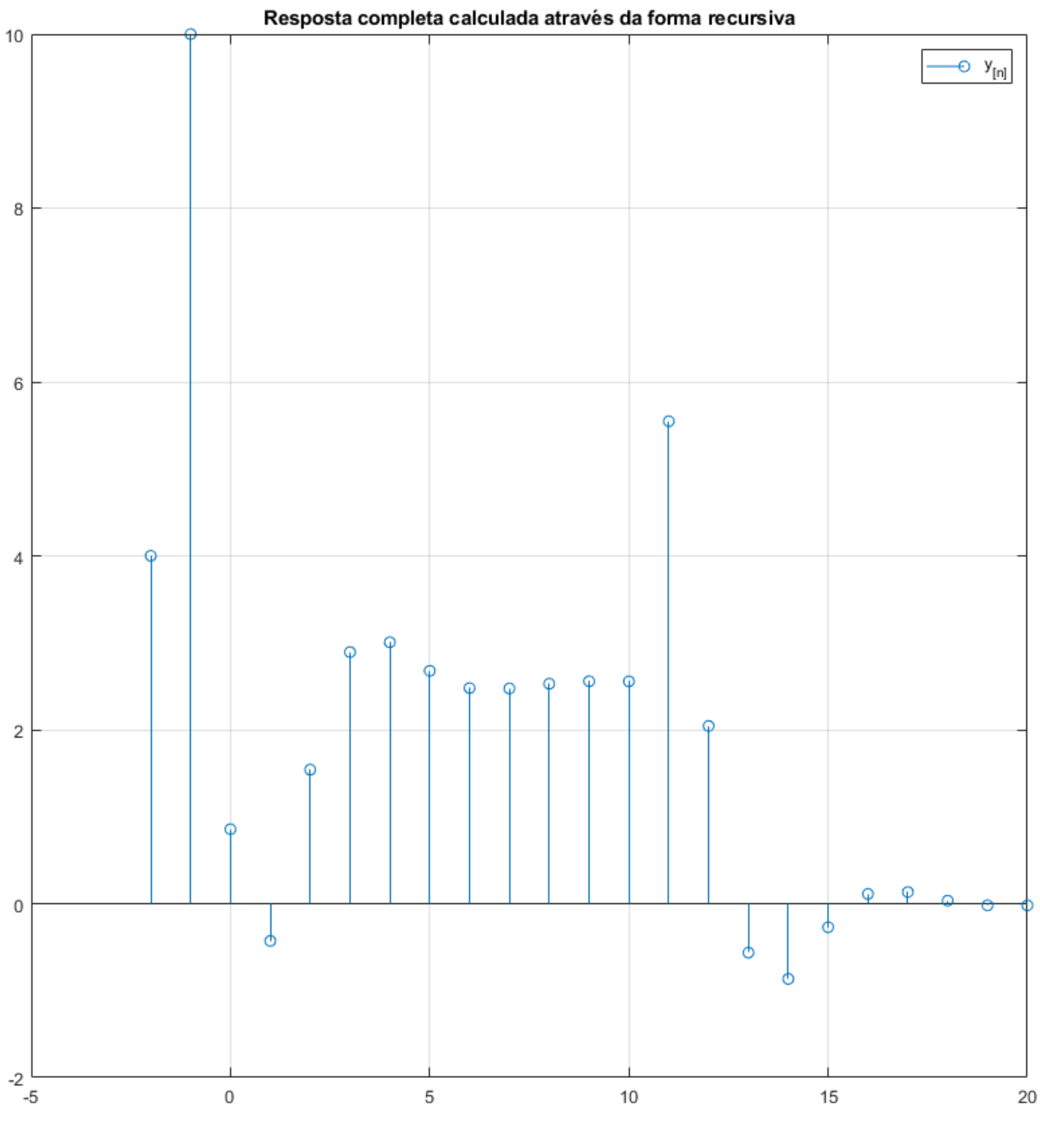

Figura 1: Resposta extraída através da solução recursiva.

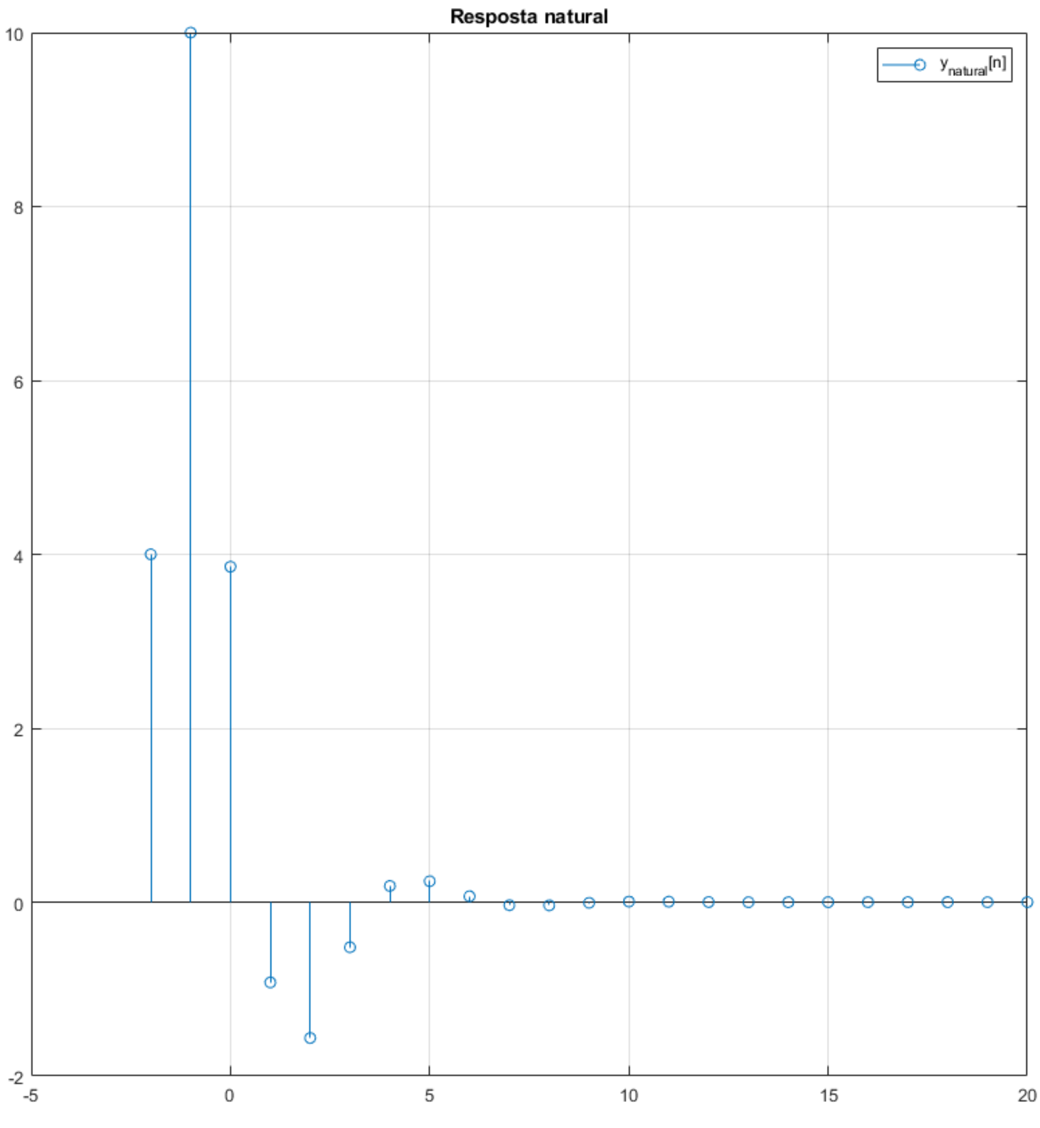

Figura 2: Resposta natural do sistema.

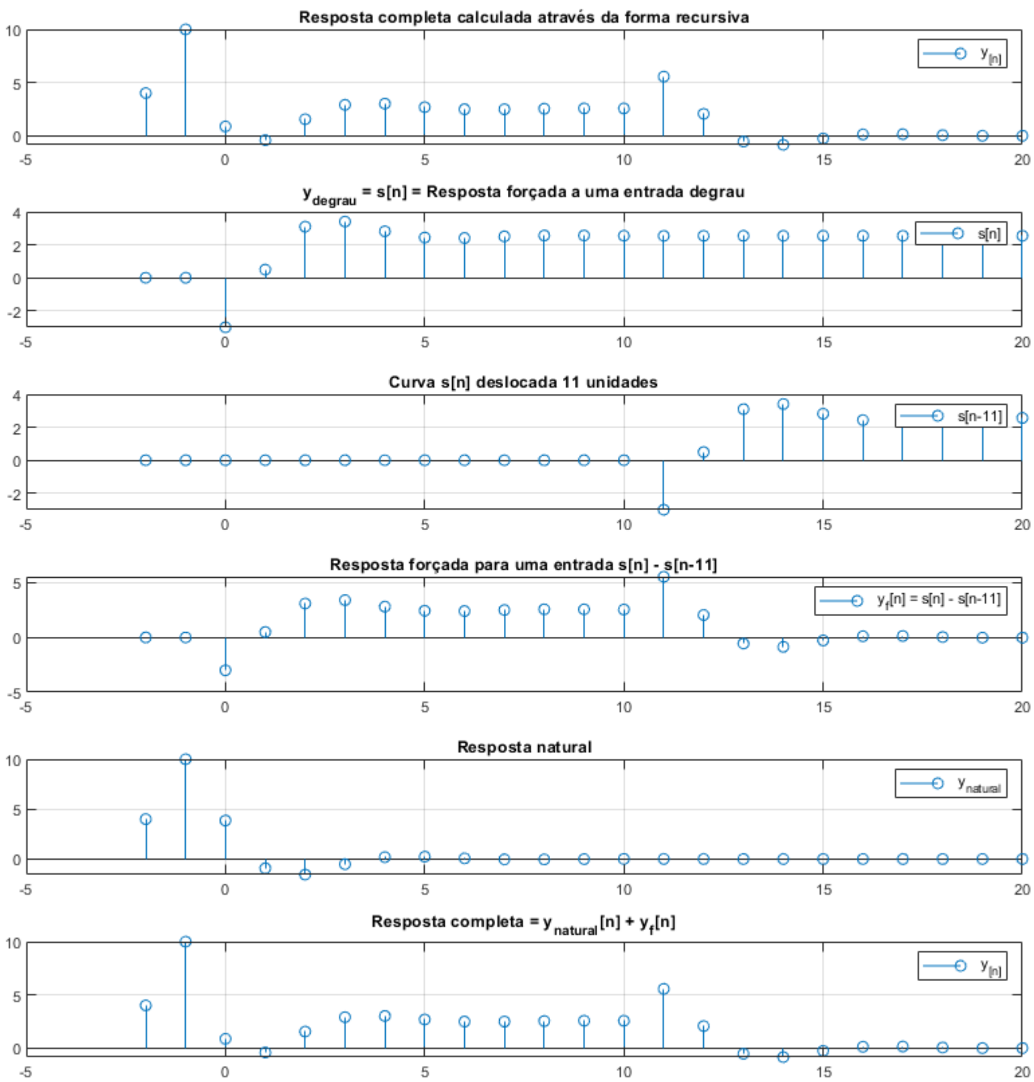

Figura 3: Extração da resposta completa através da soma da natural e da forçada.

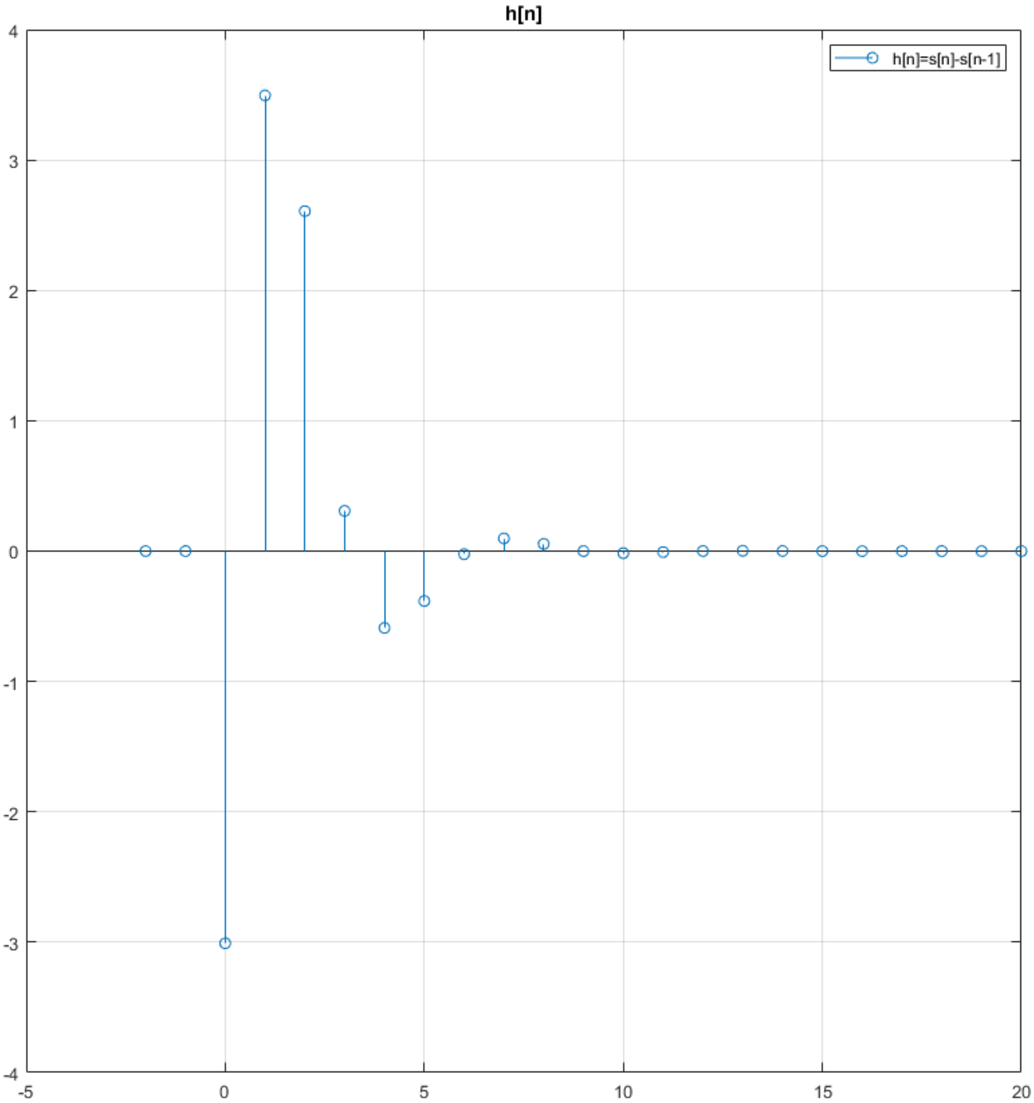

Figura 4: Sistema h[n] = s[n] - s[n-1].

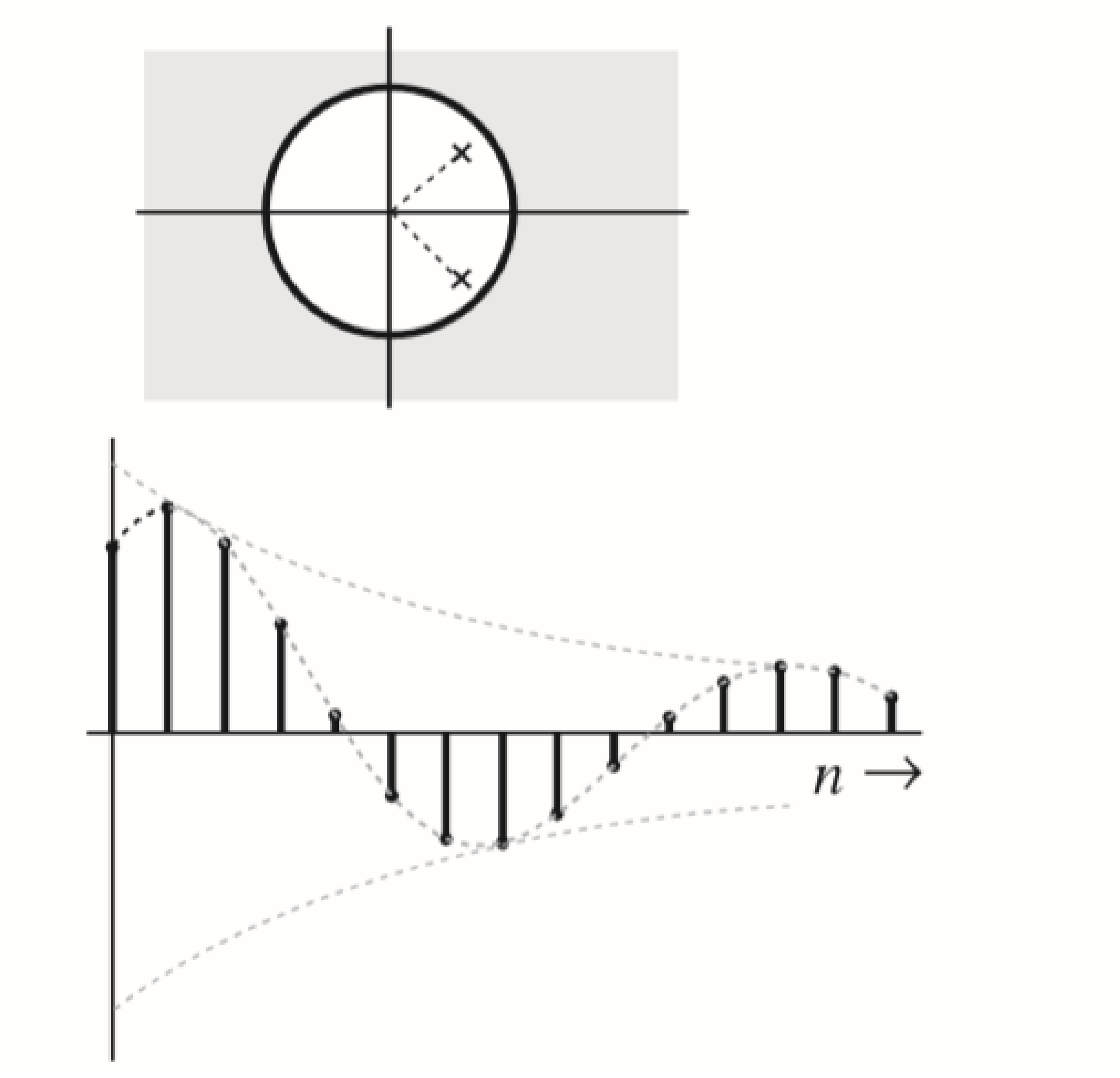

Figura 5: Função que se assemelha ao comportamento da equação de diferenças.

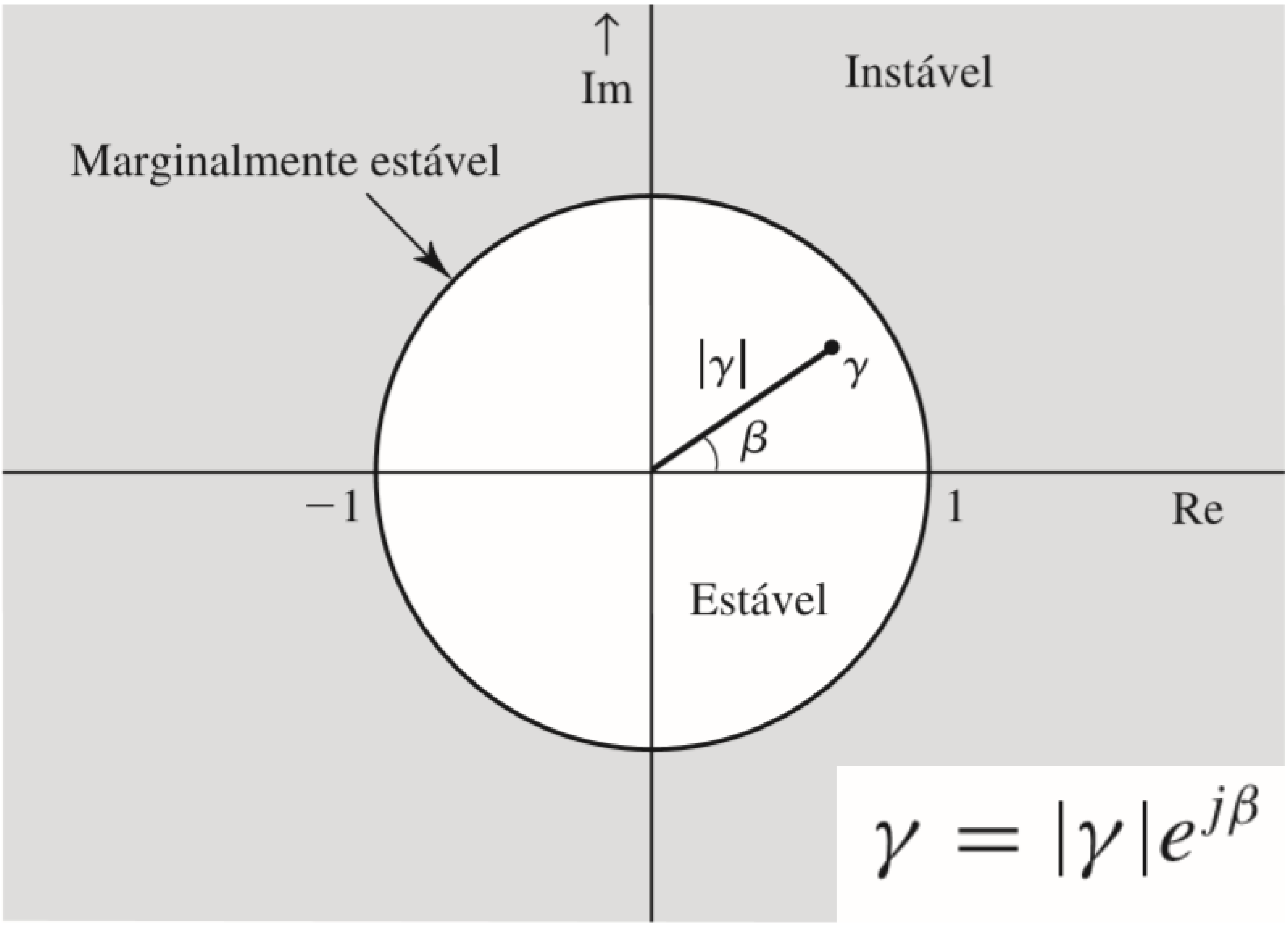

Figura 6: Classificações quanto a estabilidade do sistema.

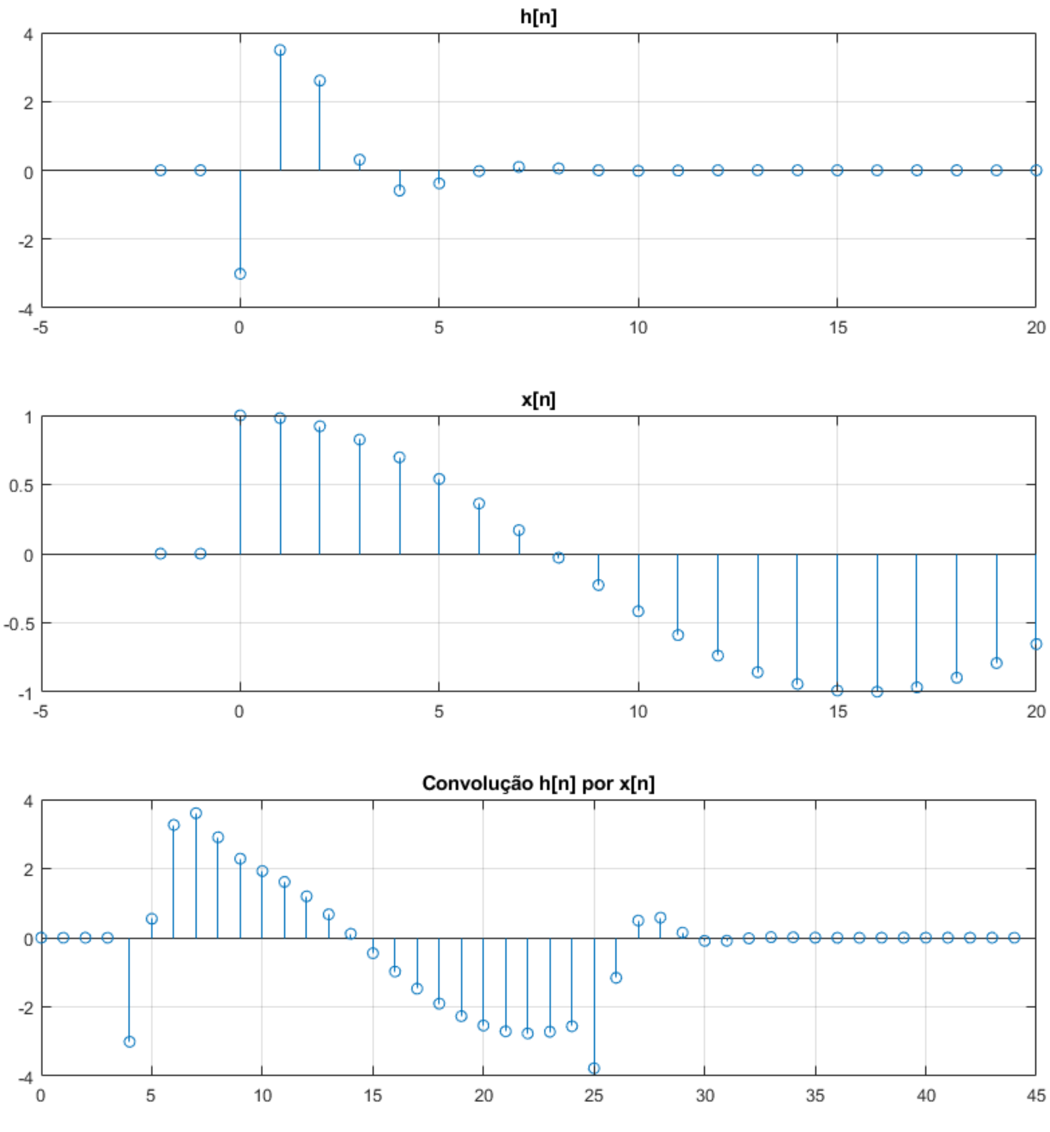

Figura 7: Convolução de h[n] por x[n].