Sistemas e Sinais
semana 5

Prof. Vinícius Valduga de Almeida Camargo

Diagrama de Blocos

$y(t) = h(t) * x(t)$

$\Updownarrow$

$Y(s) = H(s) \cdot X(s)$

- A função de transferência de um Sistema é definida pela transformada de Laplace de sua resposta ao impulso.

$$h(t) \leftrightarrow H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$$

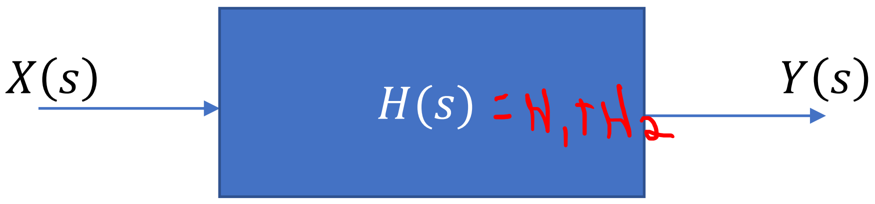
$$X(s) \longrightarrow \boxed{H(s)} \longrightarrow Y(s)$$

Diagrama de Blocos

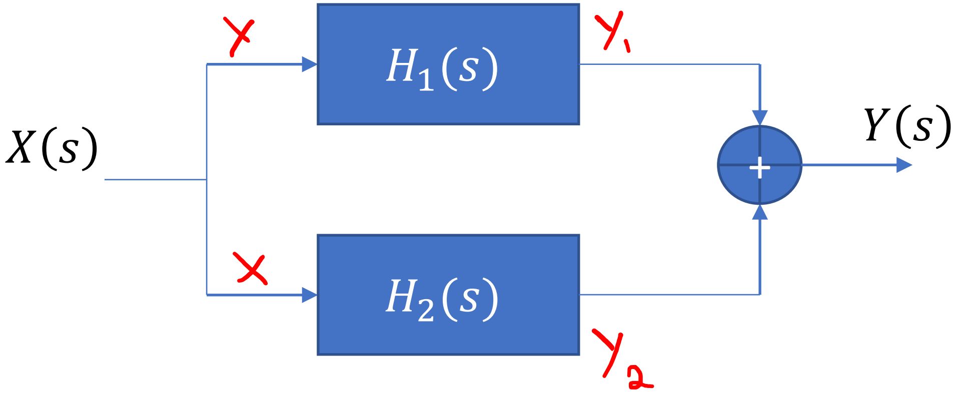
$$H(s) = \frac{\Pi(s+z)}{\Pi(s+p)}$$

- A função de transferência de um Sistema é definida pela transformada de Laplace de sua resposta ao impulso.

$$h(t) \leftrightarrow H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$$



$$\frac{\quad}{s+p_1} + \frac{\quad}{s+p_2}$$



$$Y(s) = Y_1(s) + Y_2(s)$$

$$Y(s) = (H_1 X_1 + H_2 X_2)$$

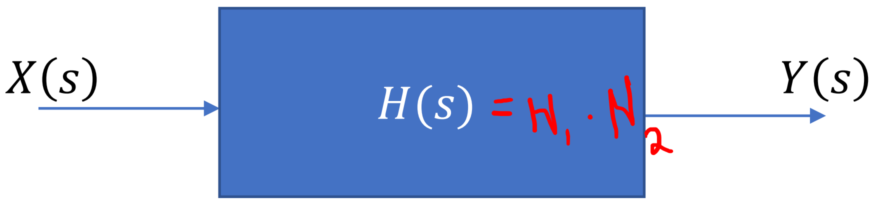
$$Y(s) = (H_1 + H_2)\, X(s)$$

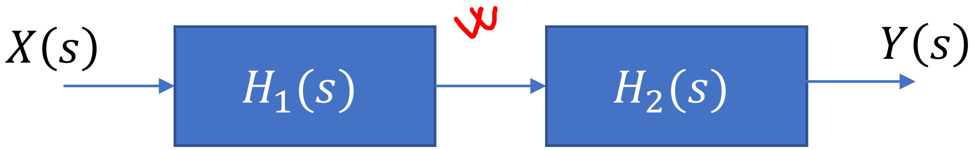
$$\frac{\quad}{(s+p_1)(s+p_2)}$$

Diagrama de Blocos

- A função de transferência de um Sistema é definida pela transformada de Laplace de sua resposta ao impulso.

$$h(t) \leftrightarrow H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$$





$$W = H_1(s) \cdot X(s)$$

$$Y = H_2(s) \cdot W(s)$$

$$Y = \underbrace{H_1 \cdot H_2}_{H} \cdot X$$

$$\frac{\quad}{s+p_1} \cdot \frac{\quad}{s+p_2}$$

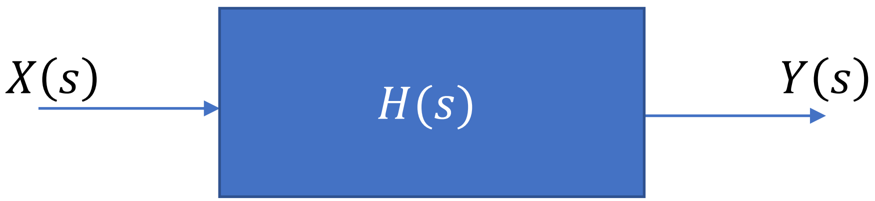
$$\frac{\quad}{(s+p_1)\cdot(s+p_2)}$$

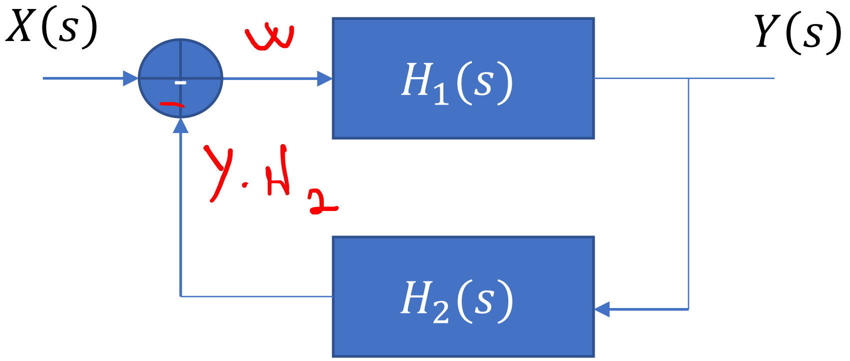
Diagrama de Blocos

$$H = \frac{(s+z_1)\cdot(s+p_2)}{(s+p_1)(s+p_2) + (s+z_1)(s+z_2)}$$

- A função de transferência de um Sistema é definida pela transformada de Laplace de sua resposta ao impulso.

$$h(t) \leftrightarrow H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$$





$$X - Y\cdot H_2 = W$$

$$W\cdot H_1 = Y$$

$$X - YH_2 = \frac{Y}{H_1}$$

$$X = Y\left(\frac{1}{H_1} + H_2\right) = Y\left(\frac{1+H_1H_2}{H_1}\right)$$

$$H = \frac{H_1}{1+H_1H_2} = \frac{\frac{s+z_1}{s+p_1}}{1 + \frac{(s+z_2)(s+z_1)}{(s+p_2)(s+p_1)}}$$

Diagrama de Blocos (bloco integrador)

- Podemos definer blocos elementares de ganho, soma e integração e, a partir destes, descrever sistemas mais complexos.

$X(s) \longrightarrow \boxed{k} \longrightarrow Y(s) = \mathrm{k}\,\mathrm{X(s)}$

$X(s) \longrightarrow \boxed{1/s = s^{-1}} \longrightarrow Y(s) = \frac{1}{\mathrm{s}}\mathrm{X(s)}$

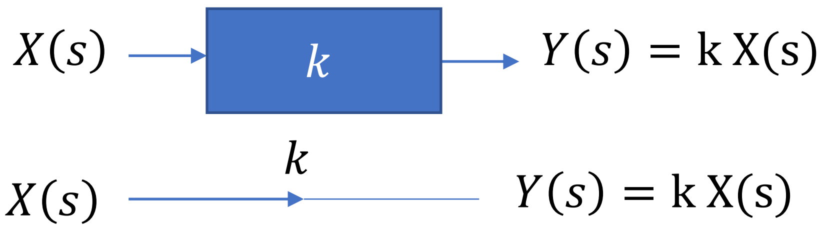
$X(s) \xrightarrow{k} \quad Y(s) = \mathrm{k}\,\mathrm{X(s)}$

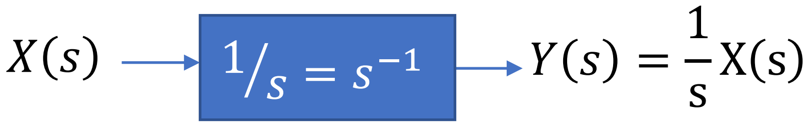
$$H(s) = \frac{\left(b_0 s^3 + b_1 s^2 + b_2 s + b_3\right) \div s^3}{\left(s^3 + a_1 s^2 + a_2 s + a_3\right) \div s^3} = \frac{\left(b_0 + \frac{b_1}{s} + \frac{b_2}{s^2} + \frac{b_3}{s^3}\right)}{1 + \frac{a_1}{s} + \frac{a_2}{s^2} + \frac{a_3}{s^3}}$$

$$Y\left(1 + \frac{a_1}{s} + \frac{a_2}{s^2} + \frac{a_3}{s^3}\right) =$$

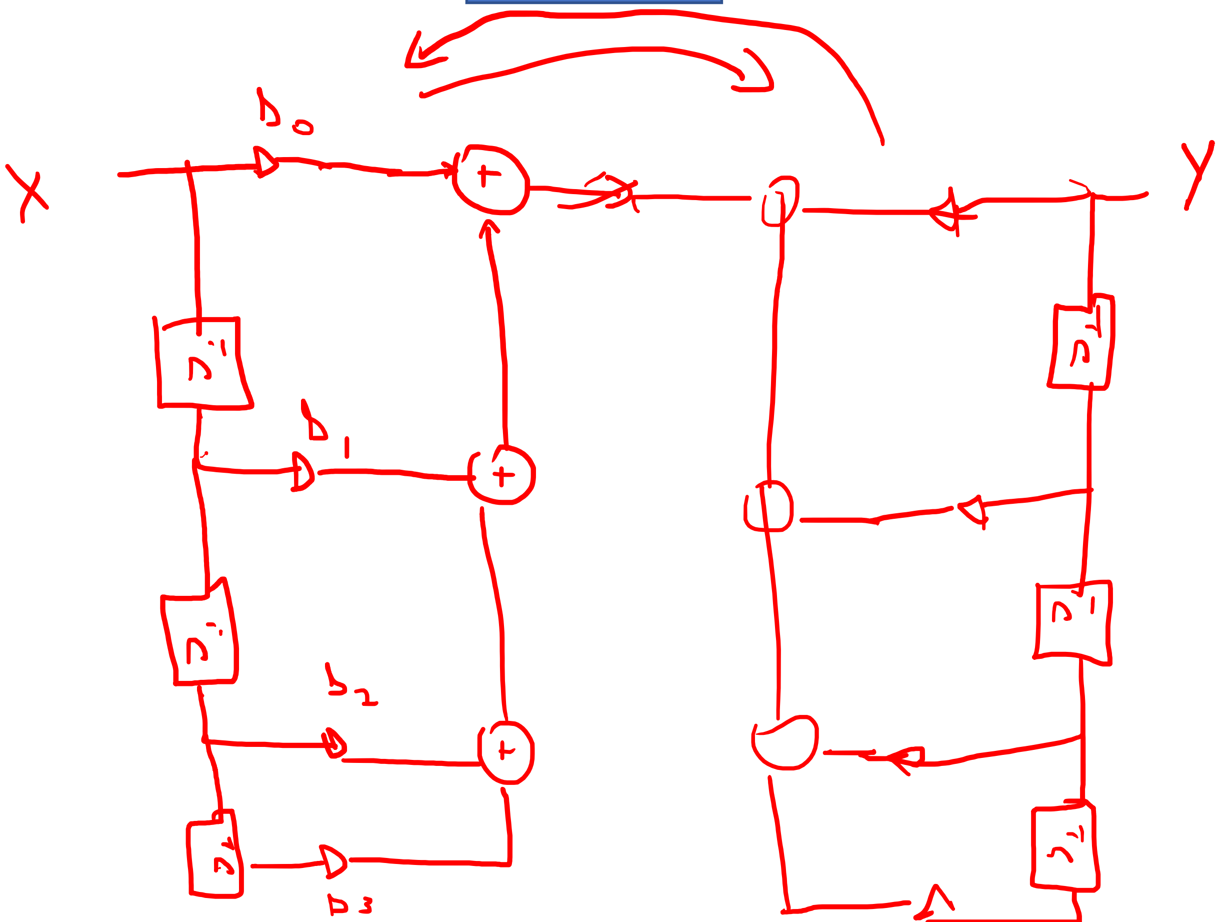
$$\rightarrow X \cdot \left(b_0 + \frac{b_1}{s} + \frac{b_2}{s^2} + \frac{b_3}{s^3}\right)$$

Diagrama de Blocos (bloco integrador)





$$H(s) = \frac{b_0 s^3 + b_1 s^2 + b_2 s + b_3}{s^3 + a_1 s^2 + a_2 s + a_3}$$



Resposta em Frequência

$$e^{st} \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow y(t) = e^{st}\underline{H(s)}$$

$$y(t) = \underline{e^{st}} * h(t)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\,\underline{e^{s(t-\tau)}}\,d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\, e^{st} e^{-s\tau}\, d\tau$$

$$= e^{st} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\, e^{-s\tau}\, d\tau}_{H(s)}$$

$$s = 0 + j\omega$$

$$y(t) = e^{j\omega t} \quad H(j\omega)$$

$$y(t) = e^{j\omega t} \quad |H(j\omega)|\, e^{j\angle H(j\omega)}$$

$$y(t) = |H(j\omega)| \cdot e^{j(\omega t + \angle H(j\omega))}$$

Resposta em RP para senoides

$$\cos(\omega t) \rightarrow \boxed{h(t)} \rightarrow y(t) = e^{st}H(s)$$

$$\cos \omega t = \frac{e^{j\omega t}}{2} + \frac{e^{-j\omega t}}{2}$$

$$y(t) = \frac{e^{j\omega t}}{2} \cdot |H(j\omega)| \cdot e^{j\angle H(j\omega)} +$$

$$\frac{e^{-j\omega t}}{2} \cdot |H(-j\omega)| \cdot e^{j\angle H(-j\omega)}$$

$$|H(j\omega)| = |H(-j\omega)|$$

$$\angle H(j\omega) = -\angle H(-j\omega)$$

$$y(t) = \cancel{\tfrac{1}{2}} \cdot |H(j\omega)| \cdot \left(\frac{e^{j(\omega t + \angle H(j\omega))} + e^{-j(\omega t + \angle H(j\omega))}}{2} \right)$$

$$y(t) = |H(j\omega)| \cdot \cos(\omega t + \angle H(j\omega))$$

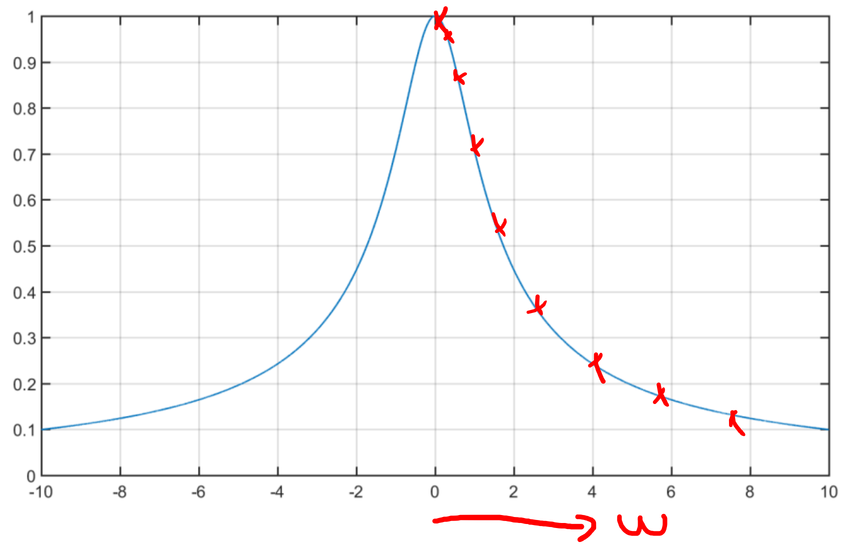
Representação da resposta em frequência

$$H(\mathrm{j}\,\omega) = \frac{3}{s+3}$$

$$H(\mathrm{j}\,\omega) = |H(\mathrm{j}\,\omega)|e^{j\angle H(\mathrm{j}\,\omega)}$$

Magnitude

- fator de ponderação (ganho) aplicado a cada componente de frequência



Fase

- atraso que incide sobre cada uma dessas componentes de frequência

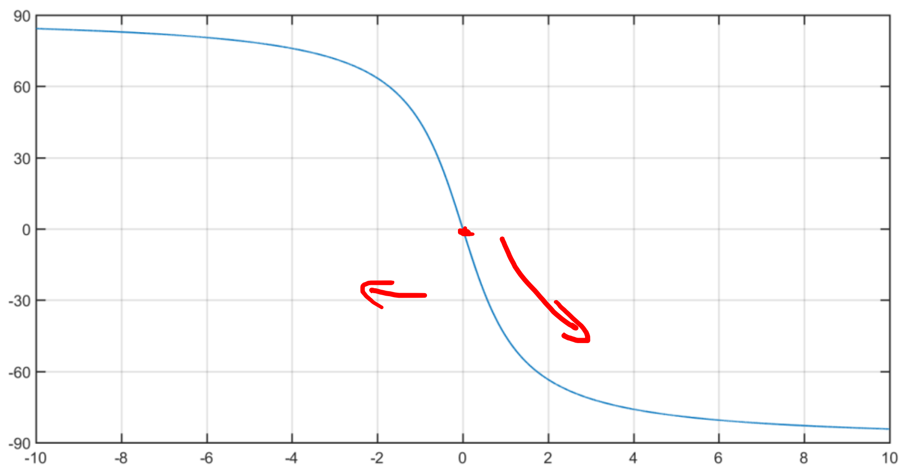


Diagrama de Bode

- Mostra a resposta em frequência de um Sistema.
- Gráficos Semi-log (Linear-Logarítmico)
  - Magnitude linear em dB (lembrando que $H_{dB} = 20\log|H(j\omega)|$)
  - Fase linear em graus
  - Frequência em escala logarítmica

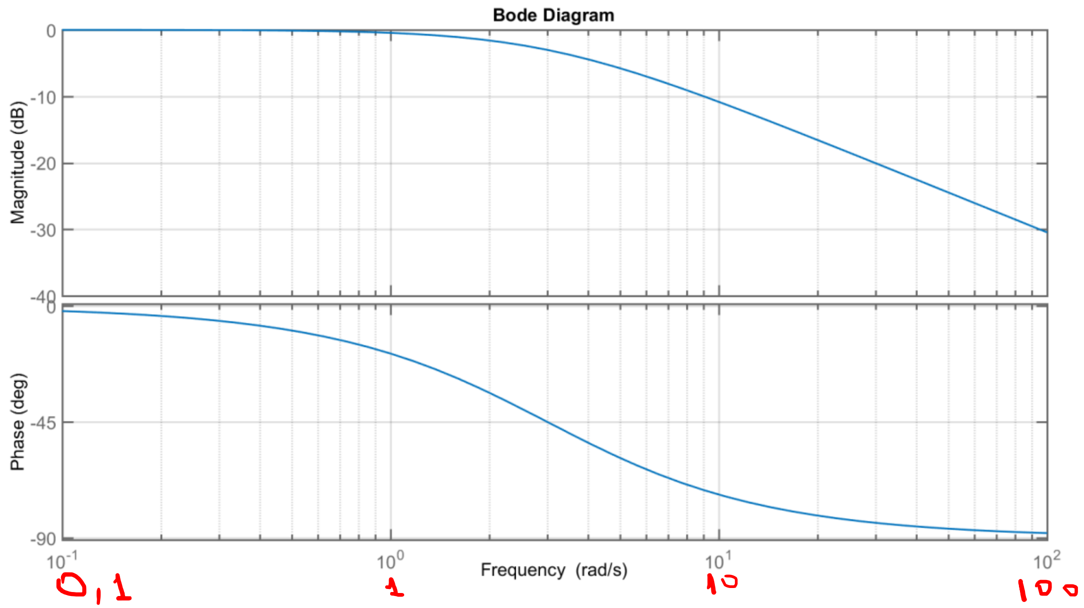


Diagrama de Bode

- O uso das escalas propostas facilita o esboço da resposta em frequência de sistemas e facilita compreender o funcionamento destes de forma intuitiva.

$$H(j\omega) = 100\frac{(j\omega + 1)}{(j\omega + 10)(j\omega + 100)} = 100\frac{(j\omega + 1)}{j\omega^2 + 110j\omega + 1000}$$

- Raízes no numerador -> Zeros
- Raízes no denominador -> Pólos

$$H(j\omega) = 100\frac{(j\omega + 1)}{(j\omega + 10)(j\omega + 100)} = 100\frac{(j\omega + 1)}{j\omega^2 + 110j\omega + 1000}$$

Diagrama de Bode – primeiro passo

- Primeiro passo é modificar a função de forma que todas raízes fiquem no formato (1+jω/ ω_0)

$$H(j\omega) = 100\frac{(j\omega + 1)}{(j\omega + 10)(j\omega + 100)}$$

$$H(j\omega) = 100\frac{\cdot 1\ (1 + j\omega/1)}{10 * (1 + j\omega/10) * 100 * (1 + j\omega/100)}$$

$$H(j\omega) = 0.1\frac{(1 + j\omega/1)}{(1 + j\omega/10)(1 + j\omega/100)}$$

Diagrama de Bode – Segundo passo

- Dividir a função de transferência em termos constantes, pólos e zeros.

$$H(j\omega) = 0{,}1 \cdot \left(1 + \frac{j\omega}{1}\right) \cdot \frac{1}{(1 + j\omega/10)} \cdot \frac{1}{(1 + j\omega/100)}$$

- Como a magnitude é feita em dB, podemos calcular a magnitude de cada termo independentemente e somar.
- Como temos uma multiplicação de números complexos, o ângulo total é dado pela soma dos ângulos dos termos.

Ou seja, cada termo pode ser analisado individualmente!

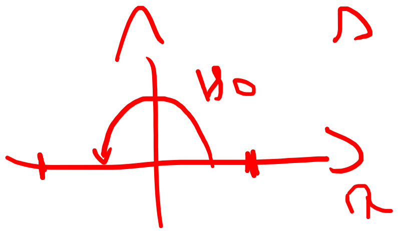
Diagrama de Bode – Termo Constante

$$H(j\omega) = \boxed{0{,}1} \cdot \left(1 + \frac{j\omega}{1}\right) \cdot \frac{1}{(1 + j\omega/10)} \cdot \frac{1}{(1 + j\omega/100)}$$

Magnitude: é uma linha reta dada por:

$$X = 20 \log |H(j\omega)|$$

Fase: é uma linha reta em 0º (ou múltiplo de 180) para constante positiva e -180º (ou múltiplo) para constante negativa.



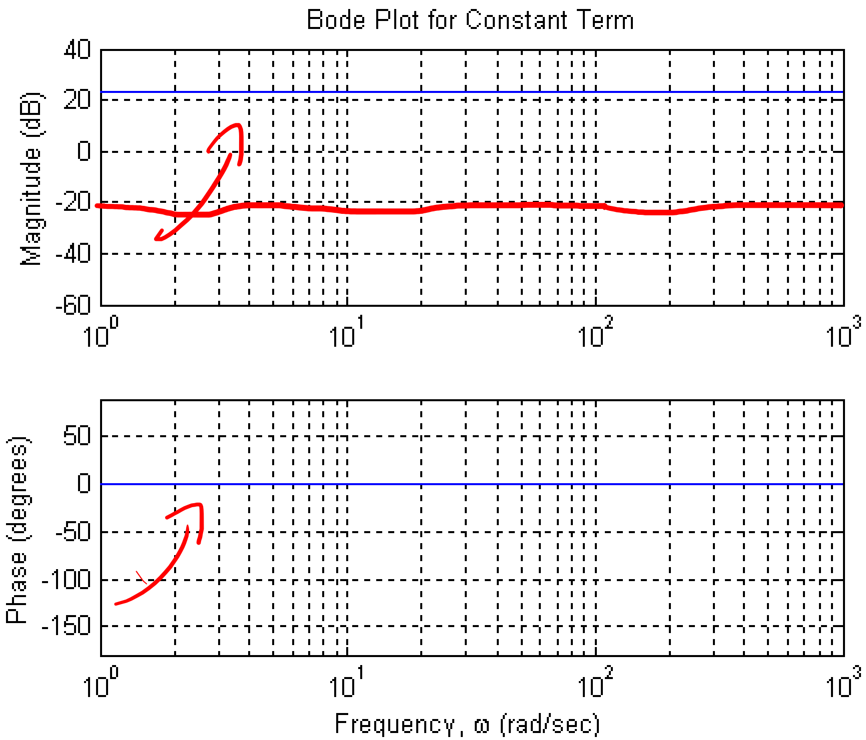


Diagrama de Bode – Polo Real

$$H(j\omega) = 0{,}1 \cdot \left(1 + \frac{j\omega}{1}\right) \cdot \boxed{\frac{1}{(1 + j\omega/10)}} \cdot \frac{1}{(1 + j\omega/100)}$$

Magnitude: segue em 0dB até a frequência de corte (raiz do polo) e então decresce 20dB/década. Polos de ordem *n* decrescem 20*n* dB/década.

Na frequência de corte o erro é de 3dB.

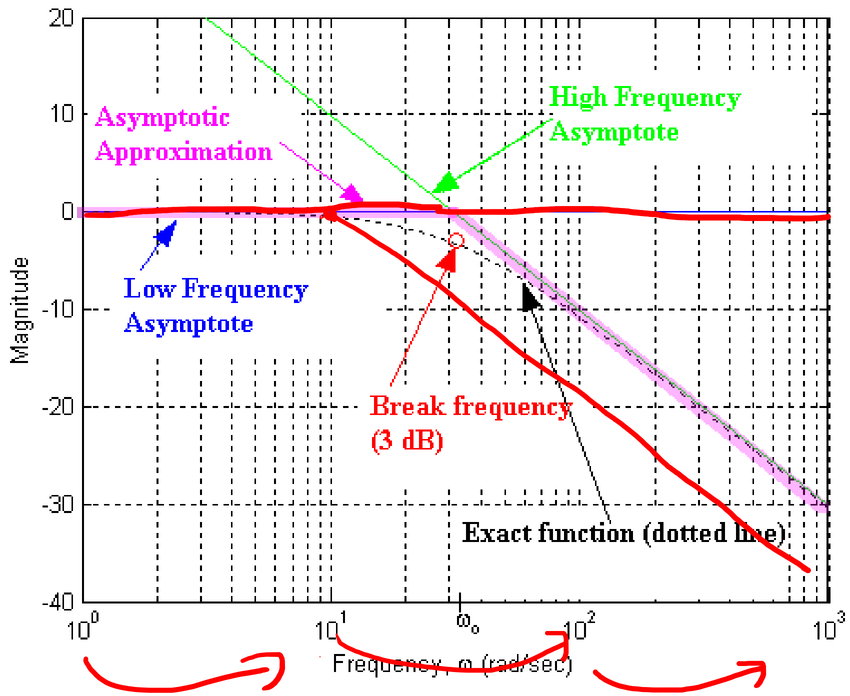


Diagrama de Bode – Polo Real

$$H(j\omega) = 0{,}1 \cdot \left(1 + \frac{j\omega}{1}\right) \cdot \boxed{\frac{1}{(1 + j\omega/10)}} \cdot \frac{1}{(1 + j\omega/100)}$$

Fase: é de 0º até 1/10 da frequência de corte (uma década antes) e decresce 90º até 10 vezes a frequência de corte (uma década após). Inclinação de -45º por década. Polos de orden *n* decrescem 90º*n* por década.

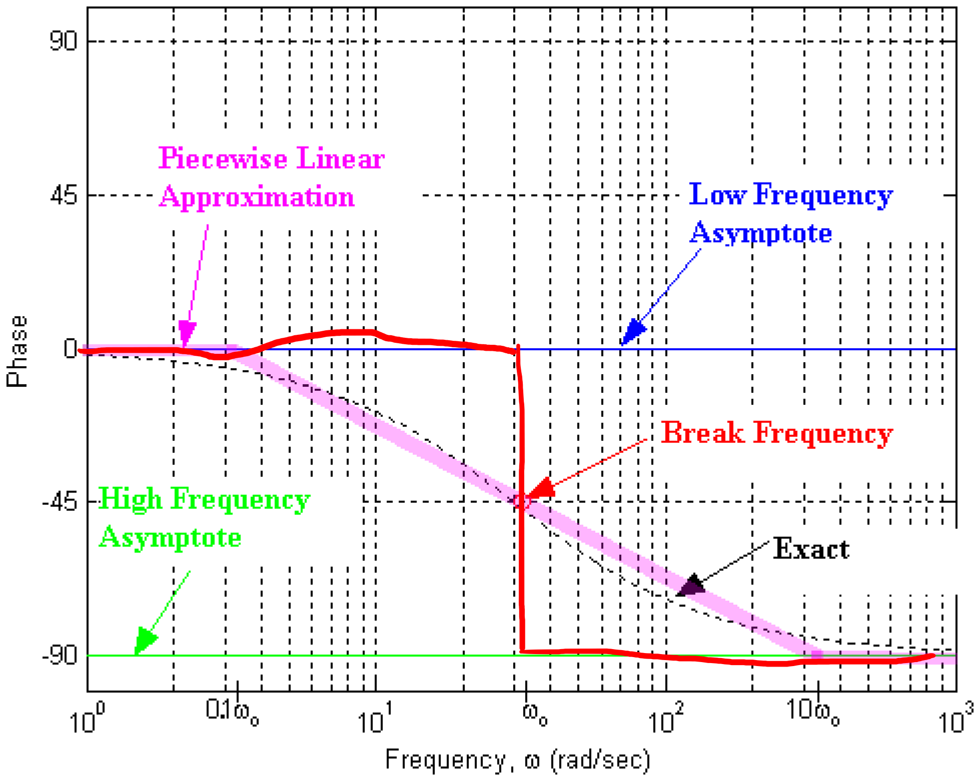


Diagrama de Bode – Zero Real

$$H(j\omega) = 0{,}1 \cdot \boxed{\left(1 + \frac{j\omega}{1}\right)} \cdot \frac{1}{(1 + j\omega/10)} \cdot \frac{1}{(1 + j\omega/100)}$$

Magnitude: segue em 0dB até a frequência de corte (raiz do polo) e então aumenta 20dB/década. Polos de ordem *n* crescem 20*n* dB/década.

Na frequência de corte o erro é de 3dB.

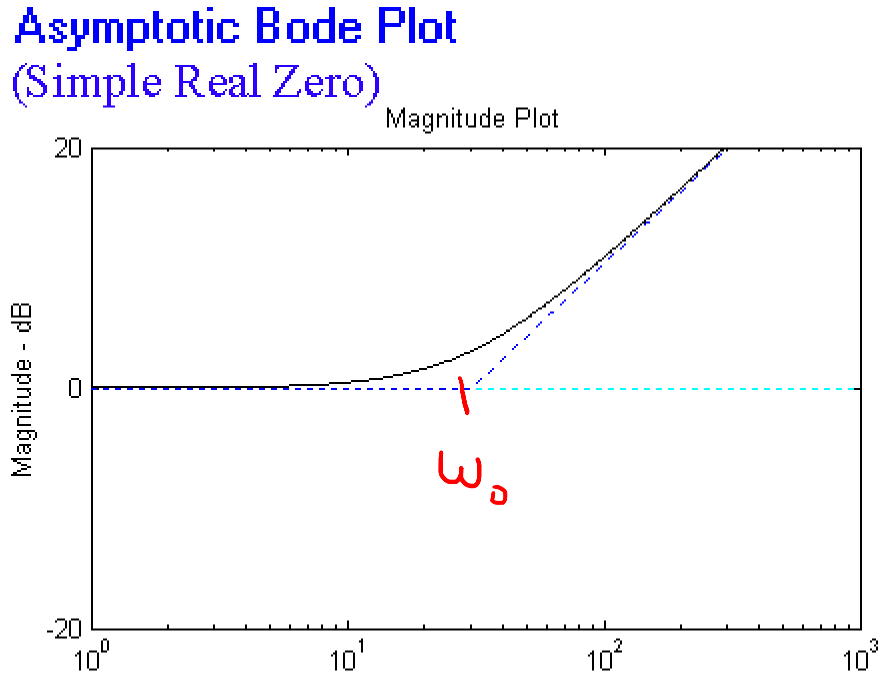


Diagrama de Bode – Zero Real

$$H(j\omega) = 0{,}1 \cdot \boxed{\left(1 + \frac{j\omega}{1}\right)} \cdot \frac{1}{(1 + j\omega/10)} \cdot \frac{1}{(1 + j\omega/100)}$$

Fase: é de 0º até 1/10 da frequência de corte (uma década antes) e cresce 90º até 10 vezes a frequência de corte (uma década após). Inclinação de +45º por década. Polos de orden *n* crescem 90º*n* por década.

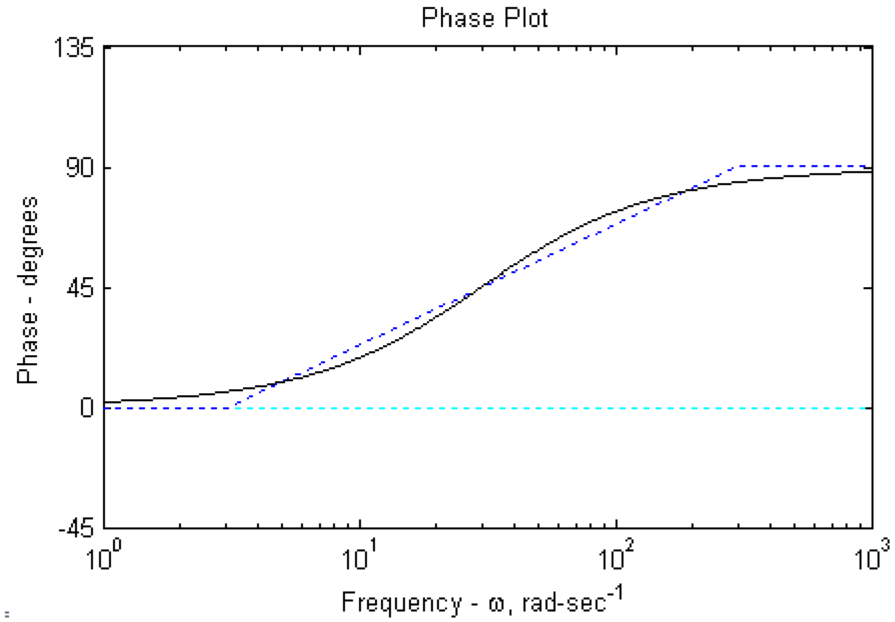


Diagrama de Bode – Polo na origem

$$H(j\omega) = 0{,}1 \cdot \left(1 + \frac{j\omega}{1}\right) \cdot \frac{1}{\left(1 + \frac{j\omega}{10}\right)} \cdot \frac{1}{\left(1 + \frac{j\omega}{100}\right)} \cdot \boxed{\frac{1}{s}}$$

$\rightarrow |1|$

$s = j\omega$

$\rightarrow 1$

$\rightarrow \omega_0 = 0$

Magnitude: linha reta com inclinação de -20dB/década que passe pelo ponto de 0dB em 1 rad/s. Polos de ordem *n* tem inclinação de -20*n* dB/década.

Fase: é uma linha reta em -90º. Polos de ordem *n* são retas em -90º*n*.

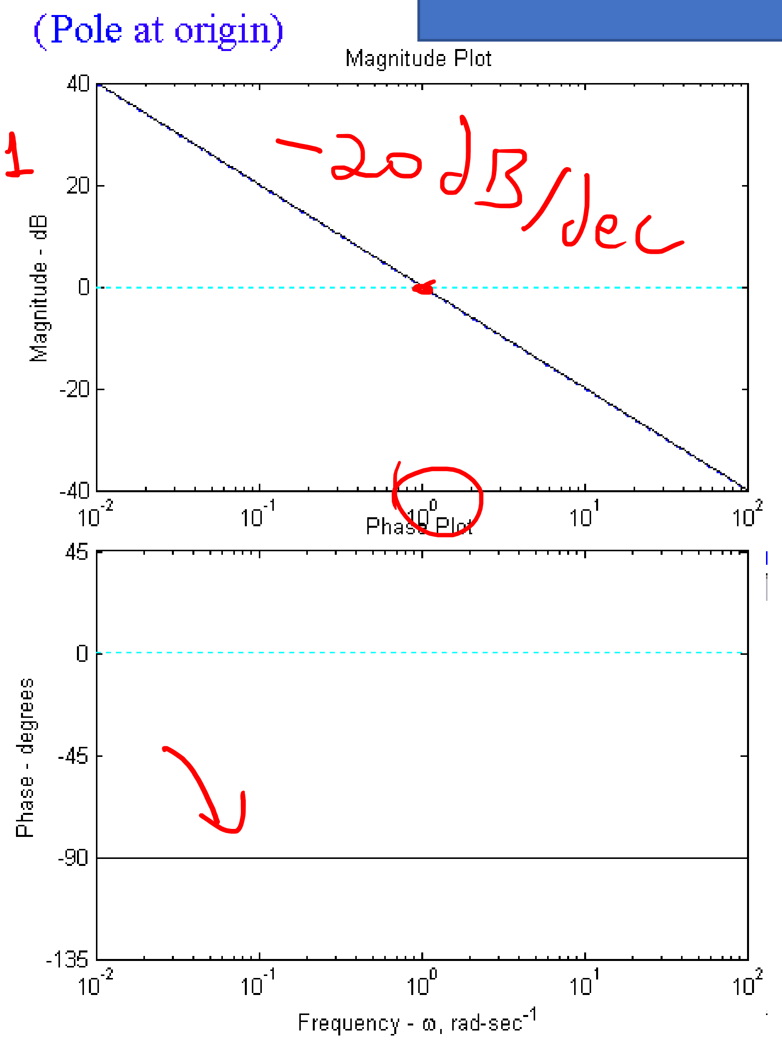


Diagrama de Bode – Zero na origem

$$H(j\omega) = 0{,}1 \cdot \left(1 + \frac{j\omega}{1}\right) \cdot \frac{1}{\left(1 + \frac{j\omega}{10}\right)} \cdot \frac{1}{\left(1 + \frac{j\omega}{100}\right)} \cdot \boxed{s}$$

Magnitude: linha reta com inclinação de +20dB/década que passe pelo ponto de 0dB em 1 rad/s. Polos de ordem *n* tem inclinação de +20*n* dB/década.

Fase: é uma linha reta em +90º. Polos de ordem *n* são retas em +90º*n*.

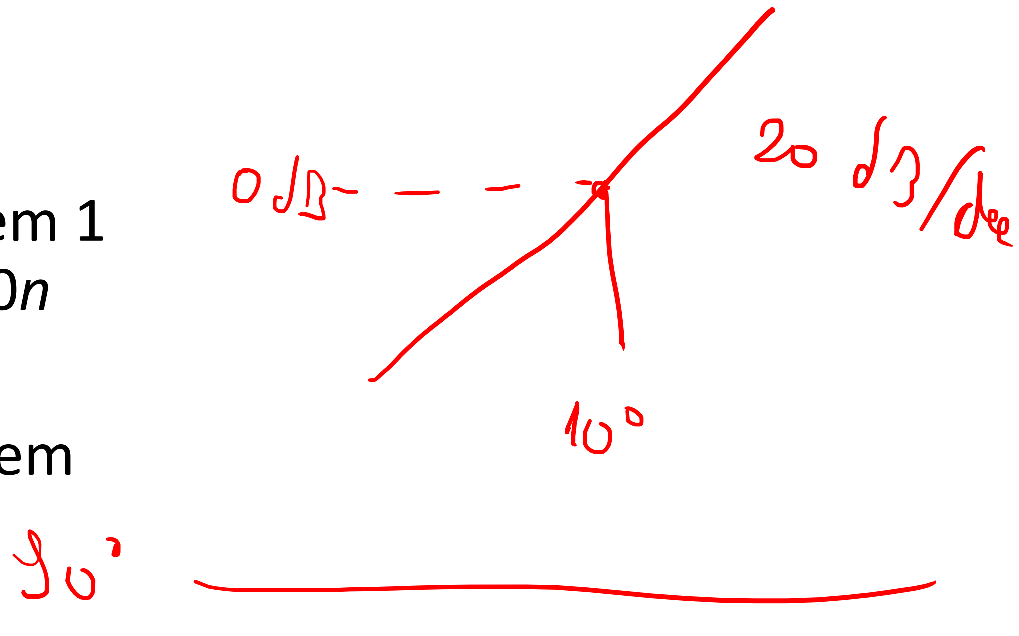


Diagrama de Bode – Polo conjugado complexo

$$H(j\omega) = 0{,}1 \cdot \left(1 + \frac{j\omega}{1}\right) \cdot \boxed{\frac{1}{\left(\left(\frac{j\omega}{\omega_0}\right)^2 + 2\xi\frac{j\omega}{\omega_0} + 1\right)}}$$

Magnitude: segue em 0 dB até a frequência de corte (ω_r) e então decresce 40dB/década. Há um pico calculado pela equação baixo.

$$|H(j\omega_0)| \approx \frac{1}{2\zeta} = -20 \cdot \log_{10}(2\zeta), \quad \text{in dB}$$

$$\omega_r = \omega_0\sqrt{1 - 2\xi^2}$$

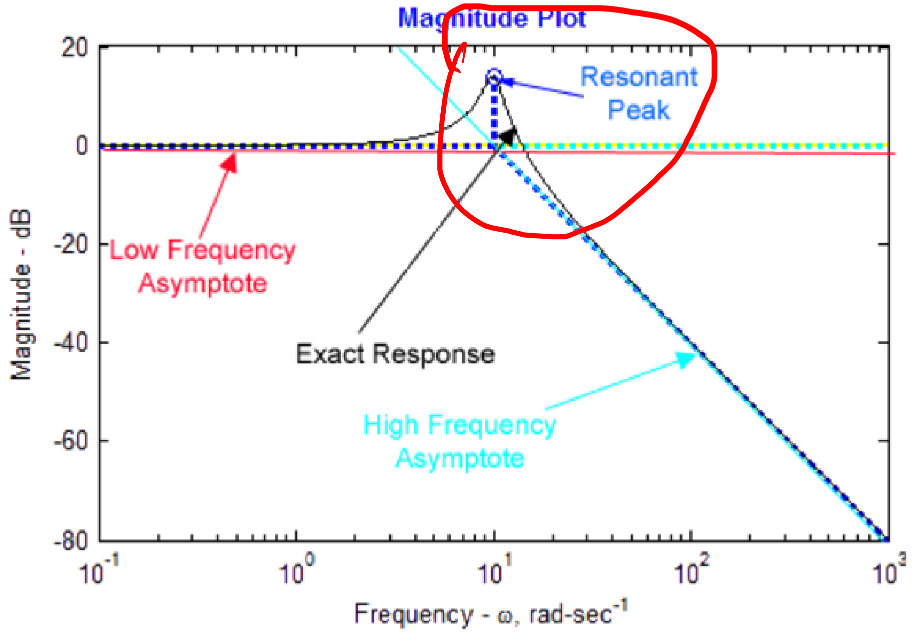


Diagrama de Bode – Polo conjugado complexo

$$H(j\omega) = 0{,}1 \cdot \left(1 + \frac{j\omega}{1}\right) \cdot \boxed{\frac{1}{\left(\left(\frac{j\omega}{\omega_0}\right)^2 + 2\xi\frac{j\omega}{\omega_0} + 1\right)}}$$

Fase: segue em 0º e decresce até -180º com início e fim indicados pelas equações abaixo.

$$\omega = \frac{\omega_0}{10^{\xi}}$$

$$\omega = \omega_0 10^{\xi}$$

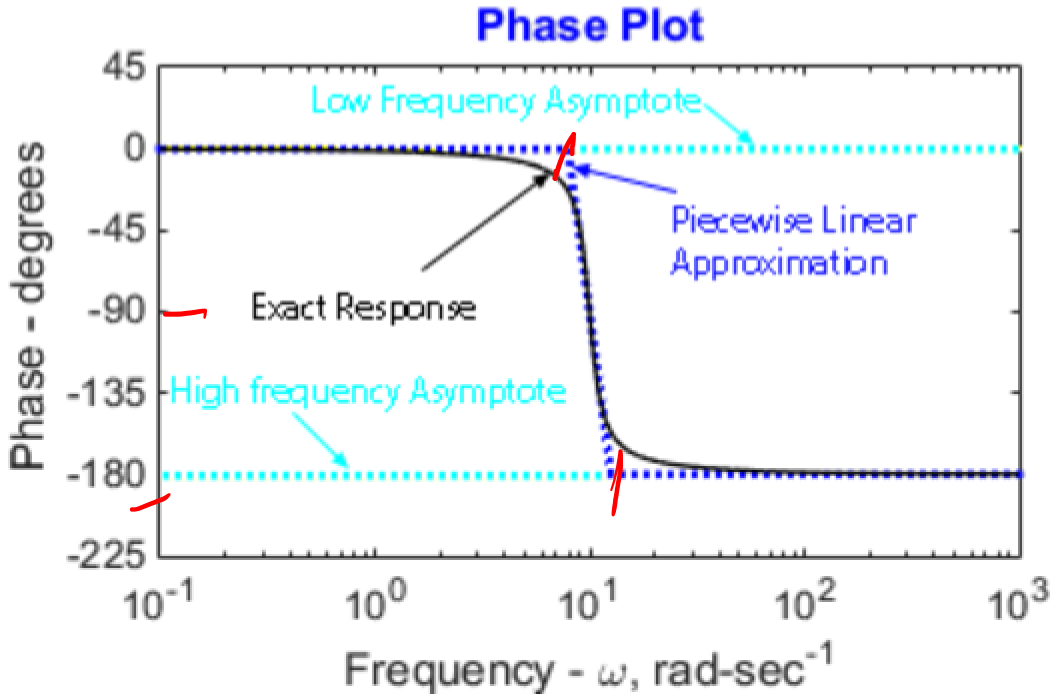
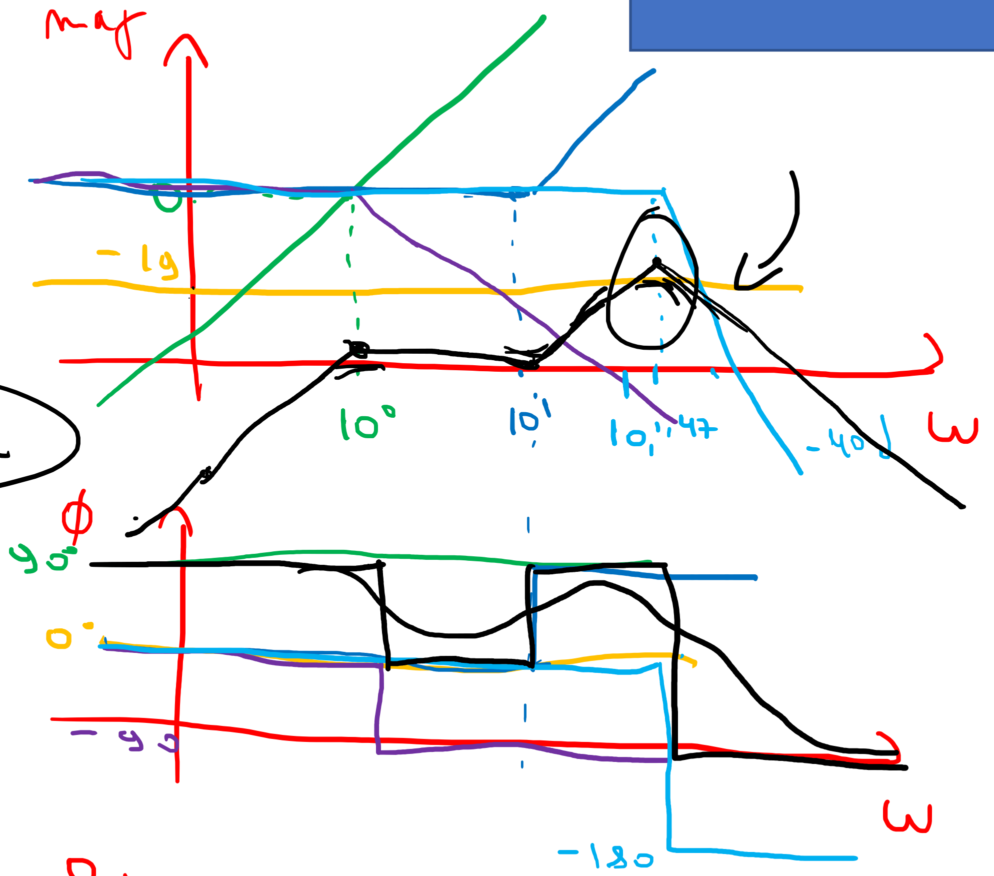


Diagrama de Bode – resumo e exercício

- Escrever a função de transferência no formato adequado
- Separar os termos (constante, polos e zeros)
- Desenhar o diagrama para cada termo
- Desenhar o gráfico resultante somando os gráficos de cada termo



$$H(s) = \frac{10\,s^2+100s}{(s+1)(s+30)^2} = \frac{10 \cdot s \cdot (s+10)}{(s+1)(s+30)(s+30)}$$

$$= s \cdot \left(\frac{s}{10}+1\right) \cdot \frac{1}{s+1} + \frac{1}{\left(\frac{s}{30}+1\right)^2} \cdot \frac{10 \cdot 10}{30^2}$$

0,1111 → -19 dB