Universidade Federal de Pelotas
Curso de Engenharia de Computação
Disciplina: 22000178 – Sistemas e Sinais
Turma: 2020/1 – T52
Professor: Vinícius V. A. Camargo

Relatório da Tarefa 2: Sistemas de tempo contínuo.

Aluno: Mairon Schneider Cardoso. Data: 14/10/2020

Número de matrícula: 17102515.

1 Introdução

No âmbito do processamento de sinais e em sistemas de controle, uma das características importantes que um engenheiro deve tomar conhecimento é a resposta do sistema quando determinadas situações acontecem, isto é, em sistemas lineares invariantes no tempo é necessário conhecer o sistema em situações na qual o sistema não é influenciado por nenhum impulso na entrada, esta situação é denominada resposta natural, outra situação na qual o sistema pode se encontrar é a situação onde determinado impulso excita o sistema de modo a propagar uma alteração na resposta do sistema, esta situação é denominada resposta ao impulso do sistema.

Além disso, é importante conhecer a integral de convolução, pois, ela é uma operação importante quando desejamos medir a soma do produto de uma função que detalha um sistema e outra que detalha um pulso em uma região onde elas se sobrepõe, empregando o conceito de superposição de duas funções para extrair uma terceira função que descreve o comportamento dessa soma do produto.

2 Resultados e Discussões

Antes de efetivamente entendermos como é feita a extração de ambas as respostas para uma determinada equação diferencial, é preciso entender a definição de um sistema linear invariante no tempo. Um sistema linear é um sistema onde através de sua saída é possível relacionar proporcionalmente a sua entrada e, além disso, também herda a propriedade aditiva (como visto no capítulo anterior), já a parte da invariância no tempo ela justamente implica que as definições de determinado sistema não sofrerão mudanças ao longo do tempo. Um determinado sistema linear invariante no tempo, através de equações diferenciais, consegue representar as características de entrada-saída através da relação estabelecida na equação 1.

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k}{dt^k} y(t) = \sum_{k=0}^{M} b_k \frac{d^k}{dt^k} x(t) \tag{1}$$

Através da relação vista anteriormente, é possível obter ambas as respostas do circuito, onde, quando queremos obter a resposta natural é necessário somente igualar $x(t) = 0$ (por isso é chamado também de resposta para entrada nula). Já a resposta de estado nulo, é necessário encontrar a equação característica e uma solução particular considerando o estado nulo do sistema.

2.1 Extração da reposta natural de um sistema definido por uma EDO

Dada uma equação diferencial definida pela equação 2, para encontrar a equação característica que define a resposta natural do sistema foi preciso igualar $x(t) = 0$, ou seja, a resposta natural do sistema nada mais é que as condições que o sistema tem internamente, sem interferência de entradas. Na tentativa de extrair as raízes da equação característica foi empregado na equação a fórmula de Bhaskara na equação 3 e extraído os valores referentes as raízes de $\lambda_1 = -0,3542$ e $\lambda_2 = -5,6457$.

$$\frac{d^2 y(t)}{dt} + 6\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = 5\frac{dx(t)}{dt} - 3x(t) \tag{2}$$

$$\lambda^2 + 6\lambda + 2 = 0 \tag{3}$$

Tendo em vista as raízes da equação característica encontradas, é possível observar que elas são inteiramente reais, o que implica no formato da equação característica, sendo definida pela equação 4, onde a equação característica terá um número de constantes associadas igual a maior ordem de derivada da equação (nesse exercício, a equação diferencial é de segunda ordem).

$$y_n = C1 * e^{-0.3542t} + C2 * e^{-5,6457t} \tag{4}$$

Deste modo, para conseguirmos a equação característica que define a resposta natural é necessário que obtenhamos os valores das constantes presentes na equação, para isso, montaremos um sistema igualando aos valores iniciais da função e de sua primeira derivada, disponibilizados no exercício, sendo eles, $y(0) = 10$ e $y'(0) = 6$. Através do sistema, foi possível observar que os valores das constantes que definem a equação característica são respectivamente $C1 = 11,8032$ e $C2 = -1,8032$ (para visualização completa da resolução do sistema linear, está tudo documentado no arquivo $1c$). Substituindo os valores encontrados nas constantes e os aplicando na equação anterior, conseguimos extrair a resposta natural do sistema, que é definida pela equação 5.

$$y_n = 11,8032 * e^{-0,3542t} - 1,8032 * e^{-5,6457t} \tag{5}$$

2.2 Extração da reposta ao impulso de um sistema definido por uma EDO

A extração da equação característica que será usada para definir uma resposta ao impulso ela também terá um formato semelhante a da resposta natural, entretanto, a resposta ao estado nulo terá uma solução particular associada. A solução particular será obtida através da substituição de $x(t) = u(t)$ para $t > 0^+$, na EDO, sendo assim, na equação obteremos uma solução particular definida por $C_p = -3/2$ obtendo a equação 6.

$$s_{(t)} = C1 * e^{-0,3542t} - C2 * e^{-5,6457t} - 3/2 \tag{6}$$

Novamente, com a intenção de conseguir extrair as constantes da equação, foi gerado um sistema considerando a equação e sua primeira derivada, entretanto agora, para o cálculo das constantes foi considerado o estado nulo, ou seja, o resultado das duas equações presentes no sistema será zero (para consulta das resoluções do sistema, foi tudo documentado no arquivo $1f$). Através da resolução do sistema, obtemos valores de constante de $C1 = 1,6004$ e $C2 = -0,1004$ obtendo a equação 7.

$$s_{(t)} = 1,6004 * e^{-0,3542t} - 0,1004 * e^{-5,6457t} - 3/2 \tag{7}$$

Para obter a equação que define a resposta ao impulso do sistema foi utilizado o método de Haykin que utiliza a resposta ao degrau ($s_{(t)}$ calculada anteriormente) se aproveitando da linearidade do sistema e da sua invariância no tempo, empregando a derivada (visto que é uma operação linear, pelo teorema do limite), sendo assim, para obter a resposta ao impulso de um sistema linear invariante no tempo, é necessário apenas derivar $s_{(t)}$ como demonstrado pela equação . A escolha da aplicação desse método é justamente por ser mais rápido e menos complexos que os demais.

$$h_{(t)} = -0,5668 * e^{-0,3542t} + 0,5668 * e^{-5,6457t} \tag{8}$$

2.3 Características do sistema h(t)

O sistema é caracterizado como BIBO estável, visto que, para que o sistema seja BIBO estável é importante garantir que a resposta $h(t)$ ao impulso seja absolutamente integrável, isto é, $\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|dt < \infty$ e isso significa que, se o sistema tiver duas raízes reais e positivas, o sistema tenderá ao infinito e será BIBO instável, como nesse caso ambas raízes (λ_1 e λ_2) são negativas e inteiramente reais, o sistema tenderá a zero em algum momento o que torna o sistema absolutamente integrável.

O sistema é causal justamente por depender somente do valor do presente e passado, isto é, dado um determinado sistema, caso você não excite a entrada dele com um sinal e mesmo assim ele exiba algum comportamento na saída, significa que ele tá dependendo de valores futuros, logo não causal (ou antecipativo). Caso o sistema não responda quando não é aplicado uma determinada entrada, é dito causal.

O sistema em questão também é dinâmico, visto que, o sistema utiliza-se de valores anteriores no instante t, sendo assim um sistema com memória. Uma maneira de entender isso de uma forma clara, é pensar em elementos de circuito, por exemplo, um capacitor/indutor utiliza-se de valores passados para determinar seu valor no instante t, já um resistor, utiliza somente o valor no instante t para determinar o valor de sua saída. Como o circuito se comporta de uma maneira bem parecida com a descarga de um capacitor (inclusive com uma exponencial semelhante), é possível entender o porquê do sistema ser classificado de dinâmico.

2.4 A integral de convolução do sistema h(t) com uma u(t)

A integral de convolução definida na equação 9 é uma operação que se aproveita de deslocamento de uma das funções para calcular uma curva que é resultado da soma do produto de duas funções ao longo do tempo.

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)u(t-\tau)d\tau = h(t) * u(t) \tag{9}$$

Para extrairmos o resultado da convolução de duas curvas, precisamos escreve-las em função de τ e como elemento deslocador da curva será definido o t. Como $u(t)$ será reflito no eixo τ para valores de $t \geqslant 0$, o gráfico será deslocado para a direita de modo a garantir a multiplicação dos valores de integral para valores na qual um gráfico sobrepõe o outro. Como forma de detalhar de uma maneira mais correta a operação, no arquivo anexado denominado 2d, são calculados as integrais onde cada parte do gráfico $u(t-\tau)$ sobrepõe $h(t)$ com representações gráficas para facilitar o entendimento. Logo após extrair essas integrais que definem funções para diferentes intervalos (intervalos nos quais há a superposição de funções) é necessário construir uma função resultante multiplicada com funções unitárias que definam esses intervalos calculados anteriormente montando assim a função resultante da convolução de cada função em seus determinados intervalos.

3 Conclusões

Entender o funcionamento de diferentes respostas de sistemar lineares invariantes no tempo é uma parte importante quando se diz respeito a processamento de sinais, visto que, quando conhecemos a resposta do sistema em determinadas situações é possível utilizar operações lineares como a convolução para modificar a função que descreve o sistema.

Através de representações gráficas foi possível também, notar o comportamento da operação de convolução de duas funções e como o conceito de superposição é utilizado na hora de extrair uma terceira função que descreve a operação de convolução.

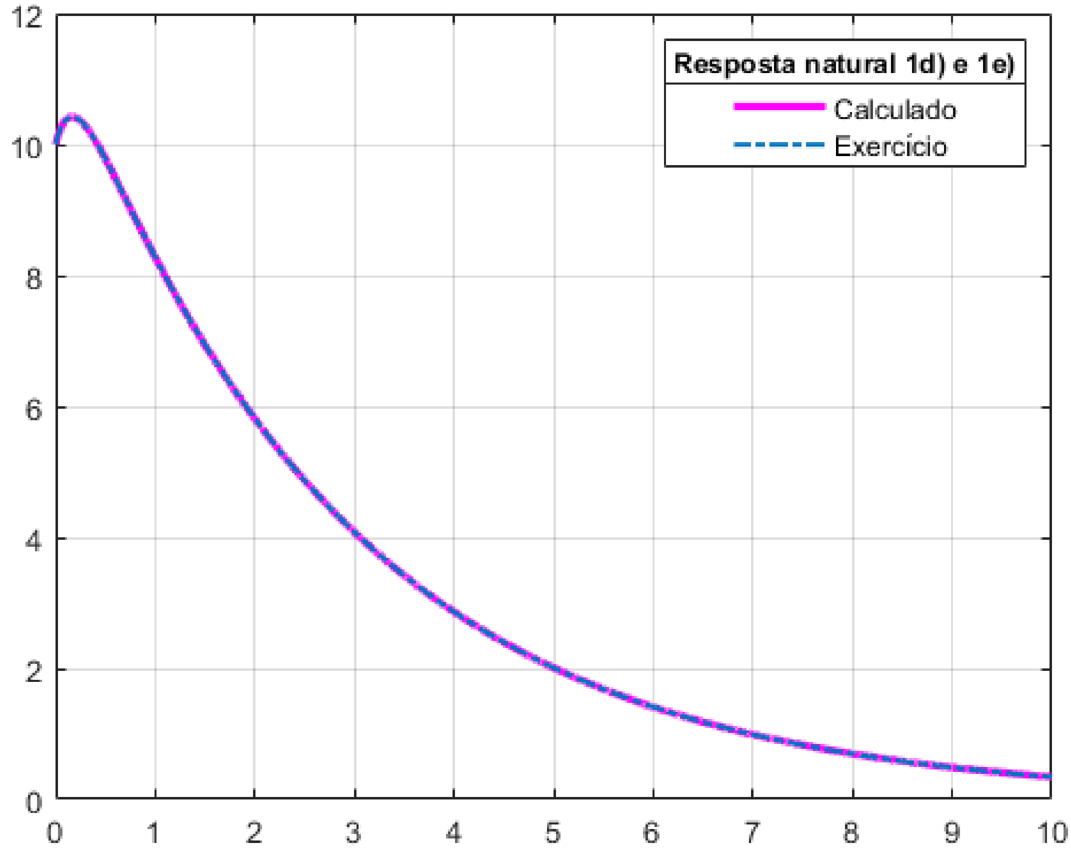

Figura 1: Simulação da resposta natural do sistema e seu valor calculado.

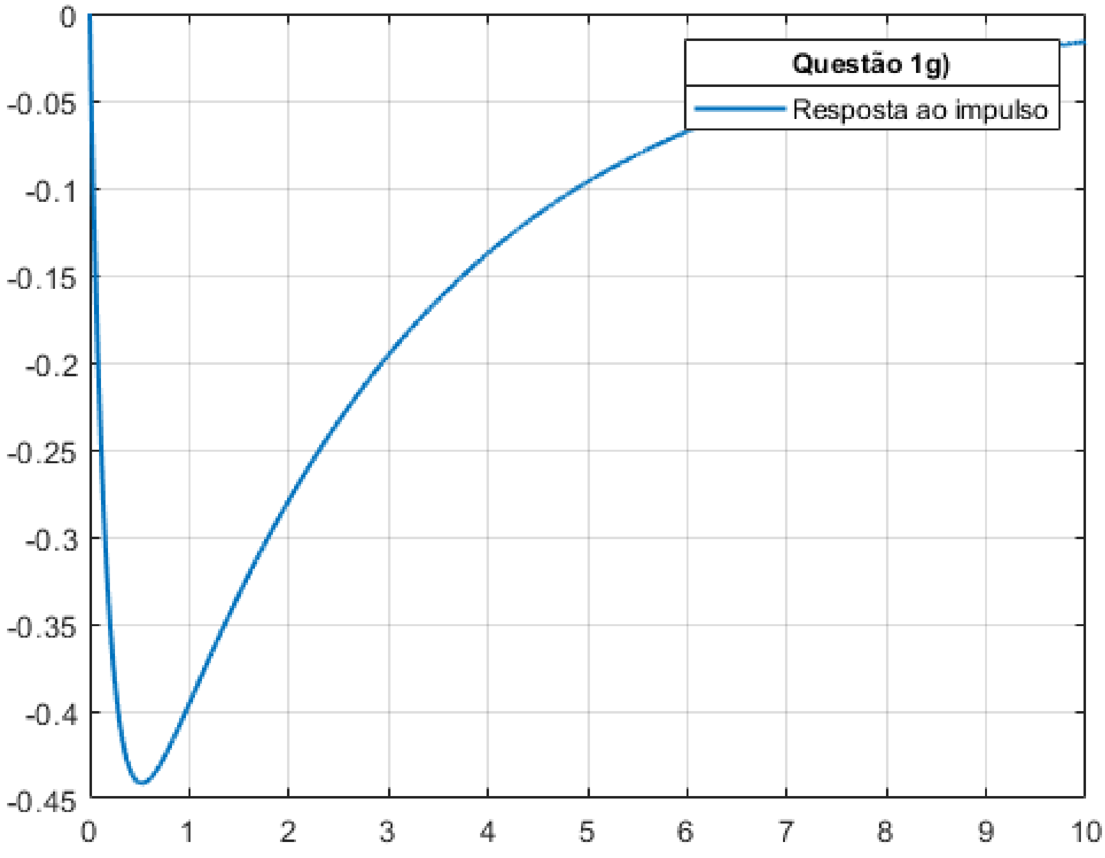

Figura 2: Resposta ao impulso do circuito h(t).

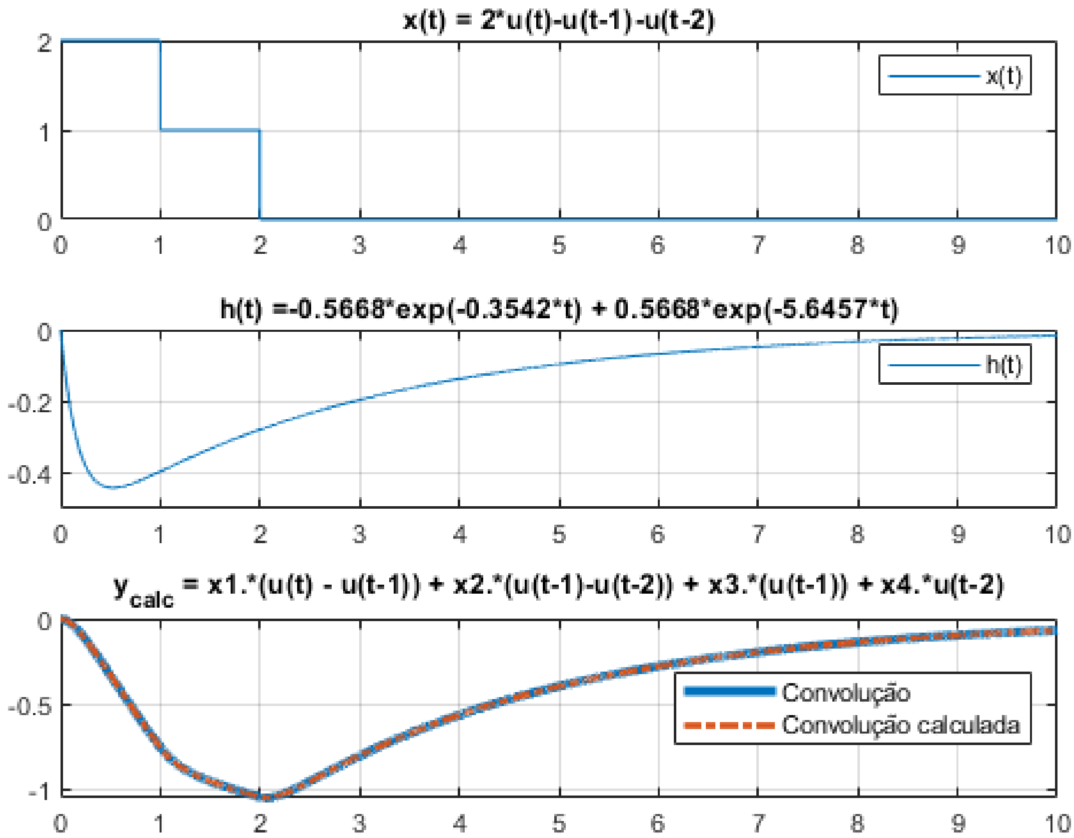

Figura 3: Simulação da operação de convolução e seu valor calculado do sinal x(t) e h(t).