Universidade Federal de Pelotas
Curso de Engenharia de Computação
Disciplina: 22000178 – Sistemas e Sinais
Turma: 2020/1 – T52
Professor: Vinícius V. A. Camargo

Relatório da Tarefa 6: Transformada Z.

Aluno: Mairon Schneider Cardoso. Data: 11/11/2020

Número de matrícula: 17102515.

1 Introdução

Como vimos no capítulo 3 do livro texto da disciplina, a extração da representação de um sinal em domínio de tempo discreto é possível quando conhecemos as técnicas para extrair as respostas naturais e forçadas para determinadas entradas, entretanto, operações como a convolução pode tornar-se um pouco trabalhoso tanto no domínio discreto quanto no domínio de tempo contínuo(como visto na transformada de Laplace).

Sabendo que a transformada auxilia facilitando tais operações citadas anteriormente, no domínio discreto, é possível transformar uma equação de diferenças de modo a determinar a resposta em frequência dessa equação e também para projetar uma resposta particular de frequência do sistema. Deste modo, a transformada z, se torna uma importante ferramenta na hora de compreendermos as funções de transferências que descrevem o comportamento de um sistema.

2 Resultados e Discussões

A transformada unilateral z (equação 1) ela é definida por um somatório de zero até infinito onde, a condição de inicio zero no somatório é justamente para isolarmos o interesse somente em sinais causais, sem necessidade de se preocupar com a região de convergência, além disso, sabemos que sinais discretos são definidos por pulsos, e por isso usamos um somatório ao invés da integral (de Laplace) para transitar para o domínio frequência, contudo, para tornar viável a transição de um sinal de domínio discreto para domínio frequência, assim como na transformada de Laplace, precisamos de um variável que transite no eixo complexo, no caso da transformada z, utilizaremos a variável z que é descrita em coordenadas polares, isto é, definidas pelo seu módulo e frequência angular.

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x[n](\underbrace{z}_{|z|e^{j\Omega}})^{[-n]} \tag{1}$$

2.1 Extração da transformada z de uma equação de diferenças

Para transformarmos uma equação de diferenças de domínio discreto (equação 2) para o domínio da frequência através da transformada z, precisamos realizar o somatório demonstrado anteriormente, entretanto, para facilitar os cálculos, foi utilizado uma tabela que já retorna o valor das transformadas mais genéricas, além disso, foi utilizado também algumas propriedades de deslocamento para obter a transformada completa (considerando inclusive suas entradas).

$$\begin{gathered} y[n] - \frac{2}{7}y[n-1] + \frac{1}{2}y[n-2] = 3x[n-1] - 6x[n] \\ y[-1] = 10 \\ y[-2] = 4 \end{gathered} \tag{2}$$

Obtendo a transformada z da equação de diferenças, conseguimos perceber que, na equação que descreve a transformada (equação 3) possuímos as duas equações algébricas (polinômio quando multiplicarmos pela maior ordem de z) que serão utilizadas em conjunto com o termo que é multiplicado por $Y(z)$ para extrair as diferentes respostas do sistema.

$$Y(z)\left(1-\frac{2}{7}z^{-1}+\frac{1}{2}z^{-2}\right)=\left(\underbrace{\frac{6}{7}-5z^{-1}}_{\text{Resposta natural}}\right)+\left(\underbrace{\frac{3z^{-1}-6}{1-z^{-1}}}_{\text{Resposta forçada}}\right) \tag{3}$$

2.2 Extração da resposta natural

Para extrair a resposta natural através da equação obtida pela transformada z da equação de diferenças, é preciso dividir a equação que descreve resposta natural (obtida anteriormente) e pela equação que é multiplicada por Y(z), isto é, precisamos isolar Y(z) e desconsiderar a resposta forçada para obter a resposta natural. É preciso extrair as raízes e as constantes para que consigamos expandir a equação em frações parciais, então, a equação é multiplicada e dividia por um z que corresponde ao valor de maior ordem, isto é, se existe um z^{-2}, será multiplicado e dividido a equação por $\frac{z^2}{z^2}$. Com os valores obtidos, é preciso somente colocá-los na equação genérica que define a resposta (equação 4).

$$y[n]=C_1r_1^{[n]}+C_2r_2^{[n]}\cdots C_nr_n^{[n]} \tag{4}$$

Com esses valores aplicados na equação, é necessário somente convertê-los do formato retangular para o formato polar, onde será possível utilizar uma identidade que converterá as exponenciais complexas em um cosseno, obtendo assim a equação que define a resposta natural do sistema (equação 5).

$$y_{nat}[n]=(7,092(0,707)^{[n]}cos(1,449+1,367[n]))u[n] \tag{5}$$

2.3 Extração da resposta forçada ao degrau unitário

Para extração da resposta ao degrau unitário, foi necessário apenas dividir o lado esquerdo da transformada z pela resposta forçada (observada na equação 3), nesse caso, o que podemos perceber é que, devido a multiplicação dos denominadores, acabará surgindo um novo pólo na equação, se lembrarmos do relatório 3, perceberemos que esse pólo que surge nada mais é que a constante particular da função que descreve o comportamento no domínio discreto. Então, a equação foi multiplicada por $\frac{z^3}{z^3}$ e extraímos as constantes e raízes da equação apartir da multiplicação, aplicado na equação genérica as raízes e constantes(equação 4), convertendo as raízes e contantes para o formato polar, obtendo assim a resposta forçada ao degrau (equação 6).

$$y_{resp}[n]=(-2,470(1)^{[n]}+4,33(0,707)^{[n]}cos(2,523+1,367[n]))u[n] \tag{6}$$

2.4 Extração da resposta completa

Antes de efetivamente extrairmos a resposta completa, precisamos calcular o resultado da função $y_{resp}[n]-y_{resp}[n-11]$ e para isso, é preciso aproveitar-se da propriedade de linearidade e invariância no tempo do sistema, isto é, para calcular $y_{resp}[n-11]$ é preciso somente utilizar a mesma função que descreve a resposta ao degrau unitário com o valor da variável $[n]=[n-11]$ e subtrair da função calculada através da função $y_{resp}[n]$. Após extrair a resposta forçada de $[n-11]$ é possível calcular a resposta completa do sistema (equação 7).

$$y_{completa}[n]=y_{nat}+(y_{resp}[n]-y_{resp}[n-11]) \tag{7}$$

Comparando os resultados obtidos através do cálculo da resposta completa via recursão e via cálculo da resposta natural subtraído da resposta forçada, obtemos o mesmo resultado (figura 1), significando que, a transformada z é totalmente viável quando queremos fugir de operações complicadas como convolução, por exemplo.

2.5 Extração da transformada z da resposta ao impulso do sistema H(z)

Para realizar a extração da resposta ao impulso da função de transferência $H(z)$ foi preciso primeiramente estabelecer a relação de entrada e saída do sistema, então, levando em consideração o impulso, foi aplicado na relação estabelecida pela equação 8 onde $X(z) = 1$.

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} => Y(z)\left(1 - \frac{2}{7}z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-2}\right) = \underbrace{X(z)}_{1}\left(3z^{-1} - 6\right) \tag{8}$$

Essa relação, nos diz que a função de transferência será definida pela equação 9, onde podemos ver o comportamento dela através da figura 2.

$$H(z) = \frac{3z^{-1} - 6}{1 - \frac{2}{7}z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-2}} \tag{9}$$

Uma das coisas interessantes que é possível observar na função de transferência, é que, quando pensamos que o impulso aplicado nesse sistema nada mais é que um mecanismo semelhante a um *start-up circuit*, isto é, um pulso que ativará o circuito e ao decorrer o tempo o sistema estabiliza-se em um valor fixo, o que acontece quando o sistema estabiliza é justamente o valor constante particular extraída da resposta forçada (figura 3).

2.6 Diagrama de bloco

Para representar o sistema visto anteriormente através de um diagrama de bloco, foram utilizados dois métodos para construção, onde eles se diferenciam pelo parâmetro de otimização de cada diagrama. O primeiro é basicamente o método mais arcaico para construção (figura 4), onde a construção dele é feita através das relações estabelecidas pelas constantes que acompanham z, como comentado no último relatório. O segundo método de obtenção do diagrama de blocos que descreve o sistema é basicamente construído através da variável $Y(s)$ isolada no sistema, por este modo, vemos a troca de sinais em variáveis que inicialmente estariam ao lado esquerdo da equação de diferenças resultando assim em um diagrama de bloco de utiliza um componente de *delay* a menos que o método anterior (figura 5).

3 Conclusões

Portanto, através dos experimentos propostos sobre transformada z, conseguimos perceber a sua viabilidade quando possuímos uma operação complexa no domínio discreto, possibilitando a transição entre domínio discreto e domínio frequência para evitar o trabalho dessas operações quando elas ocorrerem, além disso, os pares básicos da transformada z dá uma ideia contra intuitiva do funcionamento do sistema, entretanto, multiplicando os termos da função pela variável de maior ordem, se assemelha com a transformada de Laplace, trazendo um pensamento mais intuitivo para encontrar as raízes e as constantes presentes na expansão em funções parciais.

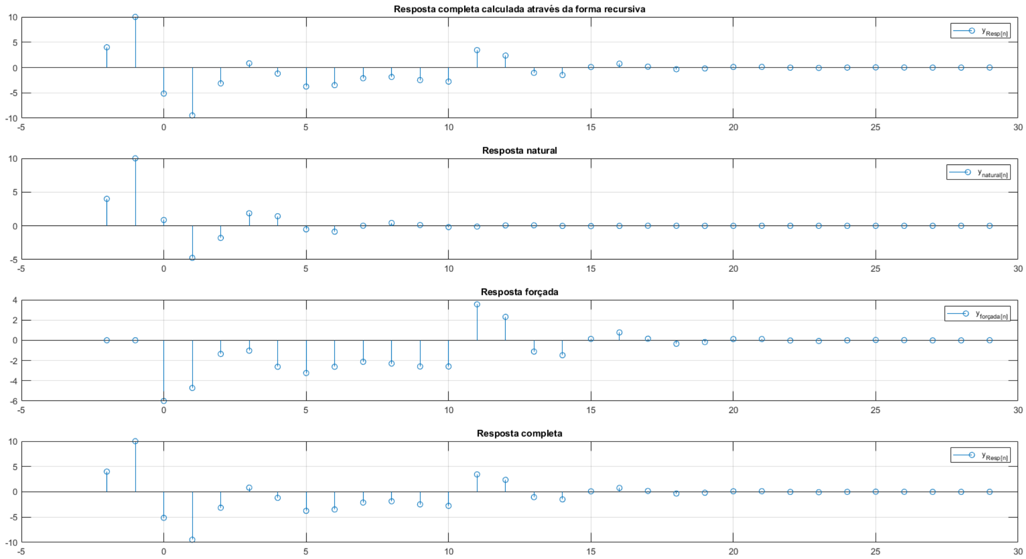

Figura 1: Respostas do circuito compondo a resposta completa em conjunto com a resposta completa calculada através da recursividade.

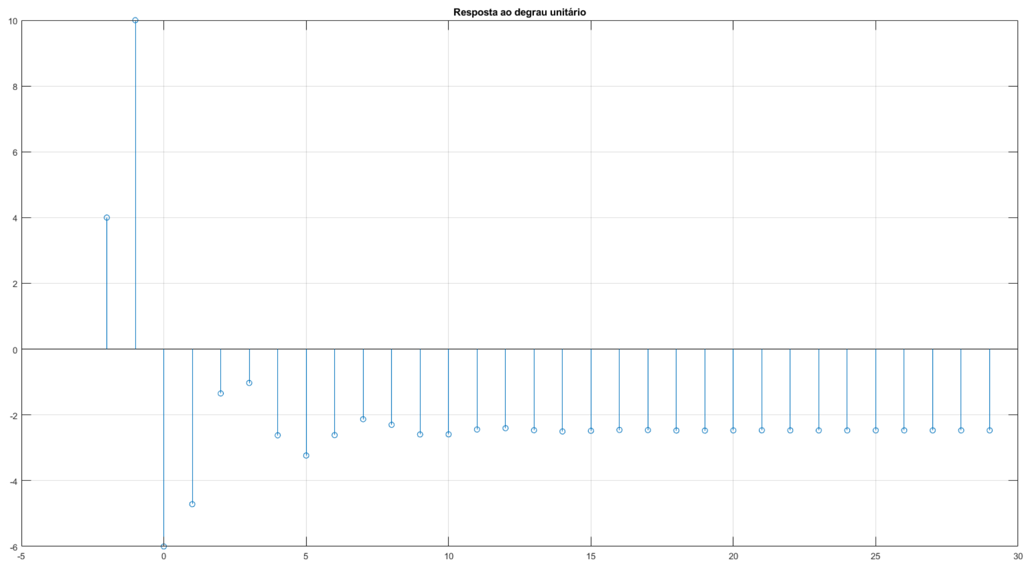

Figura 2: Resposta ao impulso do sistema H(z).

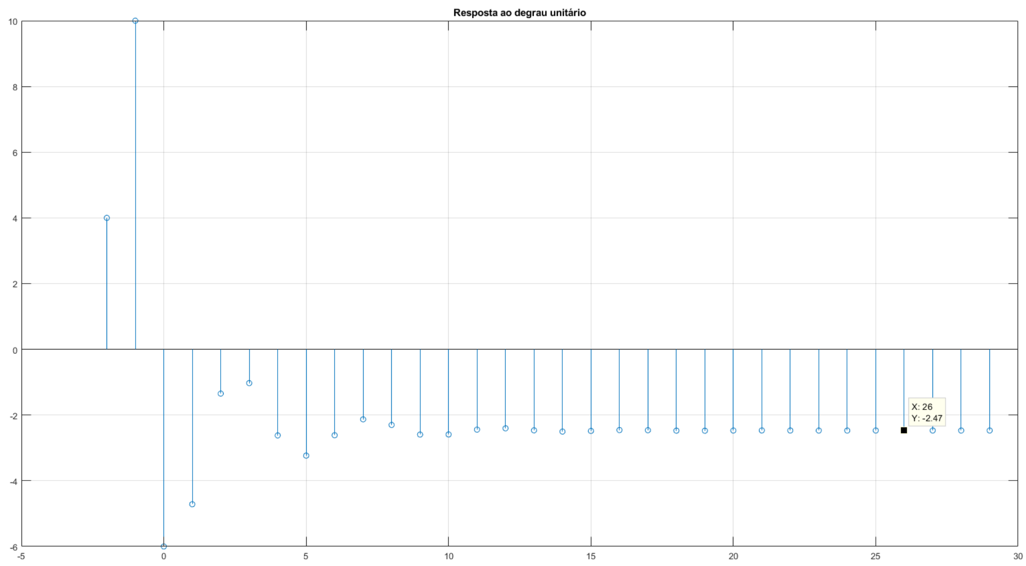

Figura 3: Resposta ao impulso do sistema tendendo a C_p.

$$H(z) = \frac{3z^{-1} - 6}{1 - \frac{2}{7}z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-2}}$$

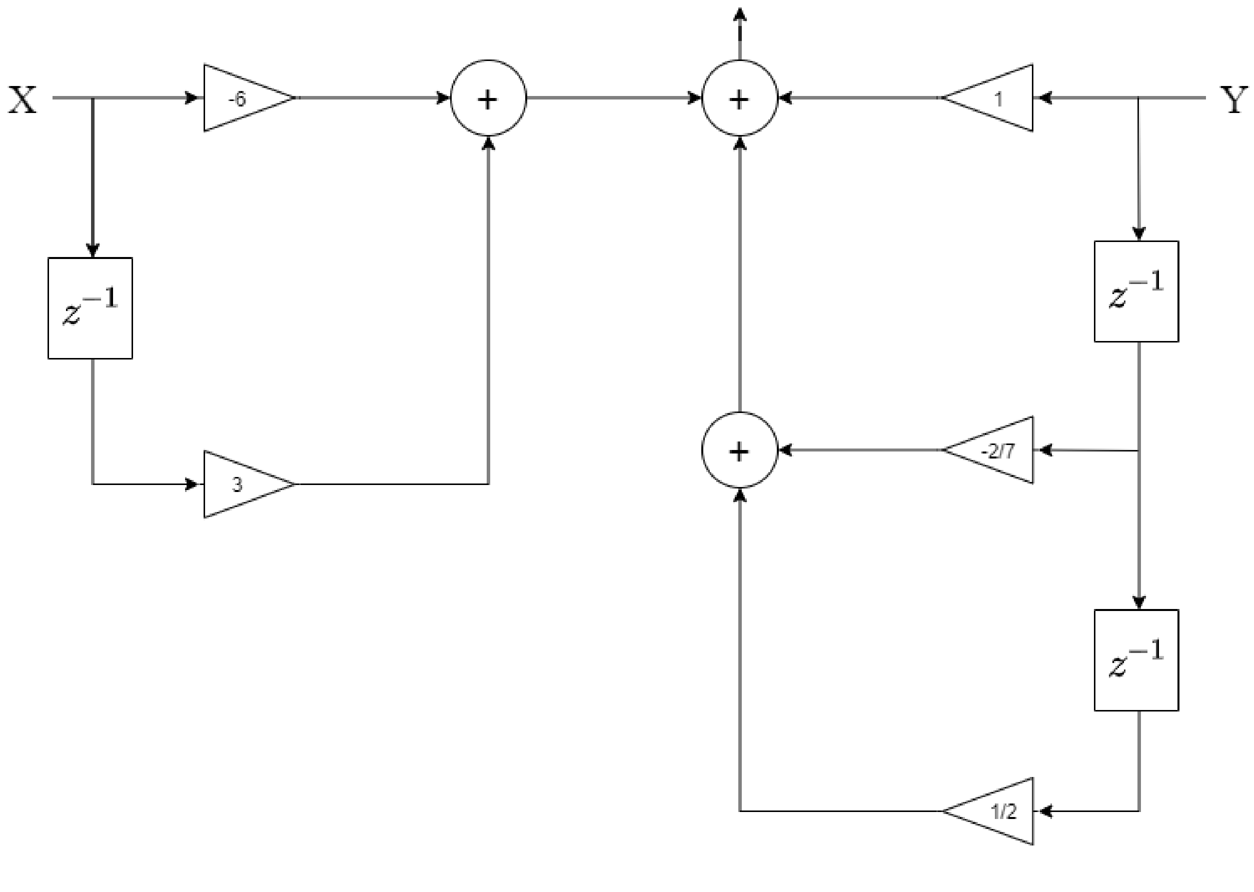

Figura 4: Sistema H(s) utilizando a técnica demonstrada na aula 5.

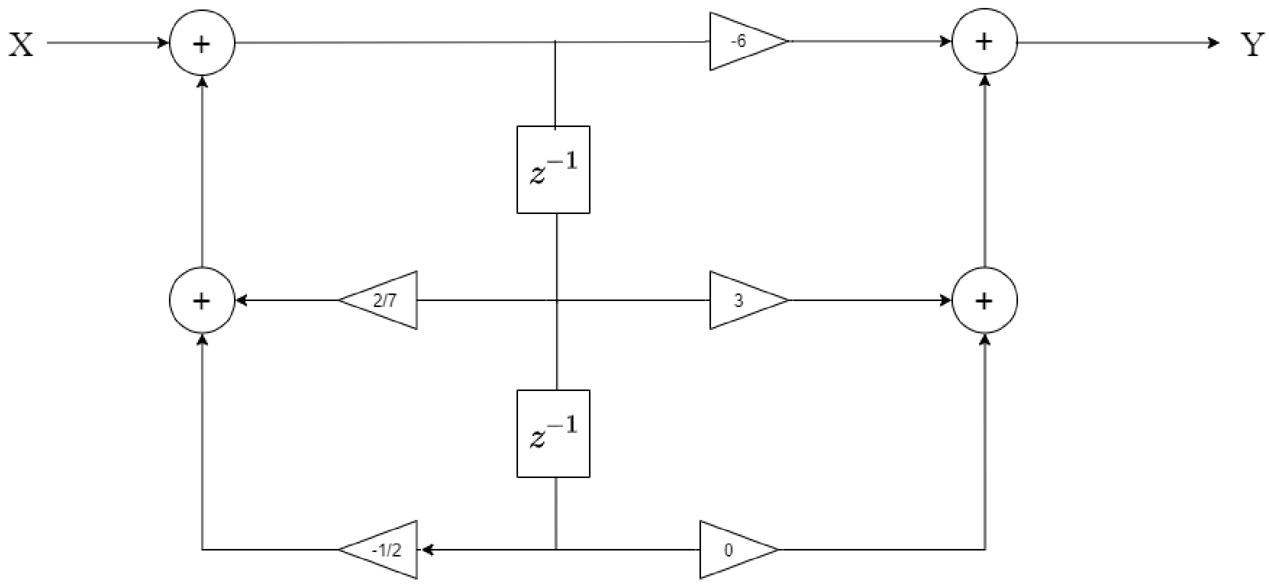

Figura 5: Sistema H(s) com otimização.