Sistemas e Sinais
semana 10

Prof. Vinícius Valduga de Almeida Camargo

Série de Fourier

A série de Fourier é utilizada para representar sinais periódicos de tempo contínuo como um somatório ponderado de exponenciais complexas, as quais são autofunções de sistemas LTI.

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk(2\pi/T)t}$$

Equação de Síntese

$$a_k = \frac{1}{T}\int_T x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{1}{T}\int_T x(t) e^{-jk(2\pi/T)t} dt$$

Equação de Análise

- Os coeficientes a_k são chamados de **coeficientes da Série de Fourier** ou **coeficientes espectrais** de *x(t)*

Série de Fourier para tempo discreto

- Descreve sinais periódicos de tempo discreto como um somatório ponderado de exponenciais complexas.

Se $x[n]$ for periódico e de tempo discreto com período fundamental N, então este sinal pode ser representado pela série de Fourier de tempo discreto (DTFS) da seguinte forma

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 n} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk(2\pi/N)n}$$

onde $\omega_0 = \frac{2\pi}{N}$ é a frequência fundamental de $x[n]$.

Série de Fourier para tempo discreto

- Da mesma forma que para o caso contínuo, a_k é o peso

aplicado a k-ésima exponencial complexa do somatório

O número de termos e de pesos que deve ser utilizado em cada soma é definido, tendo por base que as senoides complexas $e^{jk\Omega_0 n}$ são N periódicas em k, ou seja

$$\underline{e^{j(k+N)\Omega_0 n}} = e^{jk\Omega_0 n}$$

ou seja, as exponenciais complexas de tempo discreto, que diferem em frequência em múltiplos de 2π, são idênticas.

Série de Fourier para tempo discreto

- Portanto podemos considerer apenas N exponenciais harmonicamente relacionadas consecutivas.
- A notação $k = \langle N \rangle$ implica que k varia entre quaisquer N valores consecutivos.

$$x[n] = \sum_{k=\langle N \rangle} a_k e^{jk\omega_0 n} = \sum_{k=\langle N \rangle} a_k e^{jk(2\pi/N)n}$$

- De forma análoga a série de Fourier de tempo contínuo, a transformada inversa é obtida multiplicando ambos lados por $e^{-jr\omega_0 n}$

$$a_r = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} x[n]\, e^{-jr(2\pi/N)n}$$

Série de Fourier de tempo discreto

A série de Fourier é utilizada para representar sinais periódicos de tempo discreto como um somatório ponderado de exponenciais complexas, as quais são autofunções de sistemas LTI.

$$x[n] = \sum_{k=\langle N\rangle} a_k e^{jk\omega_0 n} = \sum_{k=\langle N\rangle} a_k e^{jk(2\pi/N)n}$$

Equação de Síntese

$$a_k = \frac{1}{N}\sum_{n=\langle N\rangle} x[n]e^{-jk\omega_0 n} = \frac{1}{N}\sum_{n=\langle N\rangle} x[n]e^{-jk(2\pi/N)n}$$

Equação de Análise

- Os coeficientes a_k são chamados de **coeficientes da Série de Fourier** ou **coeficientes espectrais** de *x[n]*

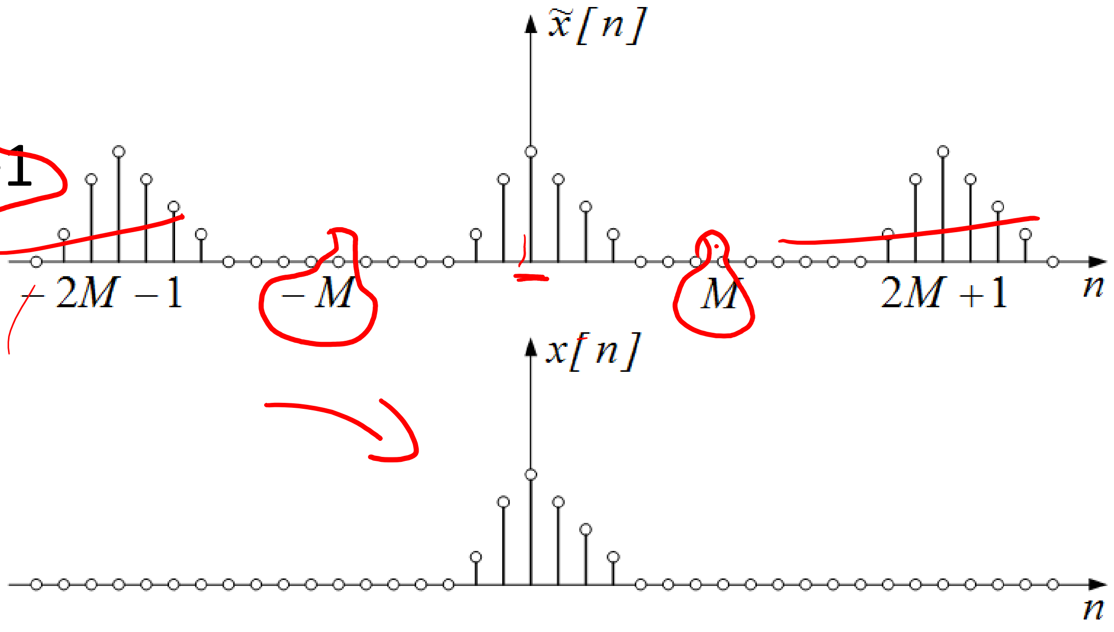
Transformada de Fourier de Tempo Discreto - DTFT

De forma análoga a transformada de Fourier de tempo contínio, a DTFT será desenvolvida descrevendo um sinal não-periódico como o limite de um sinal periódico com o período N aproximando-se do infinito.

Seja $\tilde{x}[n]$ um sinal periódico com período N=2M+1

$$x[n] = \begin{cases} \tilde{x}[n], -M \le n \le M \\ 0, |n| > M \end{cases}$$

$$x[n] = \lim_{M \to \infty} \tilde{x}[n]$$



Transformada de Fourier de Tempo Discreto - DTFT

O equacionamento de $x[n]$ é obtido iniciando-se pela série de Fourier de tempo discreto do sinal periódico $\tilde{x}[n]$.

$$\tilde{x}[n] = \sum_{k=-M}^{M} X[k]e^{jk\omega_0 n}$$

$$X[k] = \frac{1}{2M+1}\sum_{n=-M}^{M} \tilde{x}[n]e^{-jk\omega_0 n}$$

Como x[n]=0 para $|n| > M$

$$X[k] = \frac{1}{2M+1}\sum_{n=-M}^{M} x[n]e^{-jk\omega_0 n}$$

$$X[k] = \frac{1}{2M+1}\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-jk\omega_0 n}$$

Transformada de Fourier de Tempo Discreto - DTFT

Podemos escrever X[k] como

$$X[k] = \frac{1}{2M+1} \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-jk\omega_0 n}}_{X(e^{jk\omega_0})}$$

$$X(\mathrm{e}^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n}$$

com isso

$$X[k] = X(e^{jk\omega_0})/2M + 1$$

Transformada de Fourier de Tempo Discreto - DTFT

E então reescrever $\tilde{x}[n]$ como

$$\tilde{x}[n] = \frac{1}{2M+1} \sum_{k=-M}^{M} X(e^{jk\omega_0}) e^{jk\omega_0 n}$$

Uma vez que $\omega_0 = 2\pi/(2\,\mathrm{M}+1)$

$$\tilde{x}[n] = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-M}^{M} X(e^{jk\omega_0}) e^{jk\omega_0 n}\,\omega_0$$

Transformada de Fourier de Tempo Discreto - DTFT

A equação pode ser aproximada considerando que

$$x[n] = \lim_{M \to \infty} \tilde{x}[n]$$

e que nesta condição $\omega = k\omega_0$ e $d\omega = \omega_0$ com o somatório sendo reescrito como uma integral.

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} \, d\omega$$

Transformada de Fourier de Tempo Discreto - DTFT

A representação por *DTFT* é expressa como

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n}\, d\omega$$

Transformada Inversa de Fourier de tempo discreto

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\omega n}$$

Transformada de Fourier de tempo discreto

A representação de $x[n]$ foi realizada considerando que o sinal x[n] tem duração finita. O resultado pode ser aplicável a sinais de duração infinita, considerando consições sob as quais a soma infinita converge.