Sistemas e Sinais
semana 6

Prof. Vinícius Valduga de Almeida Camargo

Resposta de Sistemas Discretos

- Em sistemas contínuos temos que:

$$x(t) = e^{st} \longrightarrow \boxed{H(s)} \longrightarrow y(t) = H(s)e^{st}$$

- Em sistemas discretos

$$x[n] = z^n \longrightarrow \boxed{H[z]} \longrightarrow y[n] = H(z)z^n$$

$$y[n] = x[n] * h[n]$$

$$y[n] = z^n * h[n]$$

$$y[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h[m] \cdot z^{(n-m)}$$

$$y[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h[m] \cdot z^n \cdot z^m$$

$$y[n] = z^n \cdot \overbrace{\sum_{m=-\infty}^{\infty} h[m]\, z^{-m}}^{H(z)}$$

Transformada-Z

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n}$$

$$X(z) = \mathcal{Z}\{x[n]\} \qquad \text{ou} \qquad x[n] \overset{Z}{\Leftrightarrow} X(z)$$

- O espaço em que a função opera é alterado, de n para $z = \underbrace{|z|e^{j\Omega}}_{\text{Polares}}$ Ω
- No caso da transformada-z unilateral usamos

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x[n]z^{-n}$$

Transformada-Z Inversa

$$x[n] = \frac{1}{2\pi j}\oint X(z)z^{n-1}dz$$

$$x[n] = \mathcal{Z}^{-1}\{X(z)\}$$

ou

$$x[n] \Leftrightarrow X(z)$$

Transformada-Z
Linearidade

- Para uma operação ser linear, se

$$X_1(z) = \mathcal{Z}\{x_1[n]\} \qquad X_2(z) = \mathcal{Z}\{x_2[n]\}$$

$$X(z) = \mathcal{Z}\{\underbrace{x_1[n] + a_2 x_2[n]}_{x[n]}\} = X_1(z) + X_2(z)$$

Sendo

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x[n] z^{-n}$$

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(x_1[n] + a_2 x_2[n]\right) \cdot z^{-n}$$

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(x_1[n] \cdot z^{-n} + a_2 x_2[n] \cdot z^{-n}\right)$$

$$X(z) = \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} x_1[n] z^{-n}}_{X_1(z)} + \underbrace{a_2 \sum_{n=0}^{\infty} x_2[n] z^{-n}}_{a_2 X_2(z)}$$

Transformada-Z unilateral

- É utilizada para se estudar sistemas causais

$x[n]$	$X[z]$
$\delta[n-n]$	z^{-k}
$u[n]$	$\frac{z}{z-1}$
$nu[n]$	$\frac{z}{(z-1)^2}$
$n^2u[n]$	$\frac{z(z+1)}{(z-1)^3}$
$n^3u[n]$	$\frac{z(z^2+4z+1)}{(z-1)^4}$
$\gamma^n u[n]$	$\frac{z}{z-\gamma}$
$\gamma^{n-1}u[n-1]$	$\frac{1}{z-\gamma}$

$x[n]$	$X[z]$
$n\gamma^n u[n]$	$\frac{\gamma z}{(z-\gamma)^2}$
$n^2\gamma^n u[n]$	$\frac{\gamma z(z+\gamma)}{(z-\gamma)^3}$
$\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)}{\gamma^m m!}\gamma^n u[n]$	$\frac{z}{(z-\gamma)^{m+1}}$
$\|\gamma\|^n \cos\beta n\, u[n]$	$\frac{z(z-\|\gamma\|\cos\beta)}{z^2-(2\|\gamma\|\cos\beta)z+\|\gamma\|^2}$
$\|\gamma\|^n \operatorname{sen}\beta n\, u[n]$	$\frac{z\|\gamma\|\operatorname{sen}\beta}{z^2-(2\|\gamma\|\cos\beta)z+\|\gamma\|^2}$

$$\frac{z\cdot z^{-1}}{(z-\gamma)z^{-1}} = \boxed{\frac{1}{1-\gamma z^{-1}}}$$

$x[n]$		$X[z]$
$r\|\gamma\|^n\cos(\beta n+\theta)u[n]$		$\frac{rz[z\cos\theta-\|\gamma\|\cos(\beta-\theta)]}{z^2-(2\|\gamma\|\cos\beta)z+\|\gamma\|^2}$
$r\|\gamma\|^n\cos(\beta n+\theta)u[n]$	$\gamma=\|\gamma\|e^{j\beta}$	$\frac{(0{,}5re^{j\theta})z}{z-\gamma}+\frac{(0{,}5re^{-j\theta})z}{z-\gamma^*}$
$r\|\gamma\|^n\cos(\beta n+\theta)u[n]$		$\frac{z(Az+B)}{z^2+2az+\|\gamma\|^2}$

$$r=\sqrt{\frac{A^2|\gamma|^2+B^2-2AaB}{|\gamma|^2-a^2}}$$

$$\beta=\cos^{-1}\frac{-a}{|\gamma|}$$

$$\theta=\tan^{-1}\frac{Aa-B}{A\sqrt{|\gamma|^2-a^2}}$$

Transformada-Z
Região de Convergência (RDC)

- é o conjunto de valores de Z para os quais o somatório da transformada converge.

- Exemplo: $x[n] = \gamma^n u[n]$

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x[n] z^{-n}$$

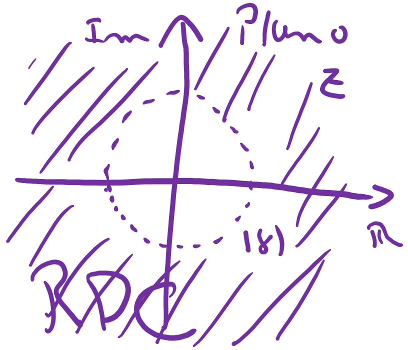
$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \gamma^{n} \cdot z^{-n}$$

$$z = |z| e^{j\Omega}$$

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\gamma}{z}\right)^n \rightarrow \text{série geométrica}$$

$$\frac{|\gamma|}{|z|} < 1$$

RDC $|z| > |\gamma|$



Transformada-Z

Encontrando a transformada inversa – Frações Parciais

- X(z) costuma ter cara de um quociente de polinômios em z^{-1};

- Utilizamos os pares básicos e propriedades disponíveis nas tabelas;

$$\gamma^n \mathrm{u}[n] \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{1-\gamma z^{-1}}$$

- O método das frações parciais é utilizado para separar uma divisão de polinômios complexa em pares básicos

- É preciso cuidar a normalização, diferente da utilizada na transformada de Laplace.

$$X(z) = \frac{12z}{(z^2+5z+6)} \begin{matrix} \div z^2 \\ \div z^2 \end{matrix}$$

$$X(z) = \frac{12z^{-1}}{1+z^{-1}5+6z^{-2}} = \frac{12z^{-1}}{(1+2z^{-1})(1+3z^{-1})}$$

$$X(z) = \frac{A}{1+2z^{-1}} + \frac{B}{1+3z^{-1}} \Leftrightarrow \boxed{x[n] = 12(-2)^n - 12(-3)^n \cdot u[n]}$$

$$A = \frac{12\cdot(-2)^{-1}}{1+3(-2)^{-1}} = 12 \qquad B = \frac{12\cdot(-3)^{-1}}{1+2\cdot(-3)^{-1}} = -12$$

Transformada-Z

Encontrando a transformada inversa – Frações Parciais

$$X(z) = \frac{10z^2}{z^2 - z + 0.5} \quad \begin{matrix} \div z^2 \\ \div z^2 \end{matrix}$$

$\rightarrow 0{,}5 \pm 0{,}5j$

$$x(z) = \frac{10}{1 - z^{-1} + 0{,}5 z^{-2}}$$

$$x(z) = \frac{10}{\left(1 - \frac{(0{,}5 + 0{,}5j)}{z}\right)\left(1 - \frac{(0{,}5 - 0{,}5j)}{z}\right)}$$

$$x(z) = \frac{A}{1 - \frac{\sqrt{2}}{2} e^{j\pi/4} \cdot z^{-1}} + \frac{B}{1 - \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-j\pi/4} z^{-1}}$$

$$A = \frac{10}{1 - \frac{\cancel{\frac{\sqrt{2}}{2}} e^{-j\pi/4}}{\cancel{\frac{\sqrt{2}}{2}} e^{j\pi/4}}} = \frac{10}{1 - \underbrace{e^{-j\pi/2}}_{-j}} = \frac{10}{1+j}$$

$$A = 10 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-j\pi/4}$$

Complexo conjugados

$\Longleftrightarrow B = 10 \frac{\sqrt{2}}{2} e^{j\pi/4}$

$$x[n] = 10 \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-j\pi/4} \cdot \left(e^{j\pi n/4}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n + 10 \frac{\sqrt{2}}{2} e^{j\pi/4} \cdot$$

$$x[n] = 10 \frac{\sqrt{2}}{\cancel{2}} \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n \cdot \left(\frac{e^{j\left(\frac{\pi n}{4} - \frac{\pi}{4}\right)} + e^{-j\left(\frac{\pi n}{4} - \frac{\pi}{4}\right)}}{2}\right) \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n \cdot \left(e^{-j\pi n/4}\right.$$

$$x[n] = 10\sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4}(n-1)\right) u(t)$$

Transformada Z - Propriedades

- **Deslocamento à direita**
- Deslocamento à esquerda
- Multiplicação por γ^n
- Multiplicação por n
- Reversão no tempo
- Convolução
- Teorema do valor inicial
- Teorema do valor final
- Estabilidade

- Se

$$x[n]u[n] \Leftrightarrow X(z)$$

- Então

$$x[n-m]u[n-m] \Leftrightarrow z^{-m}X(z)$$

- e

$$x[n-m]u[n] \Leftrightarrow z^{-m}X(z) + z^{-m}\sum_{n=1}^{m} x[-n]z^{n}$$

- Ou seja

$$x[n-1]u[n] \Leftrightarrow z^{-1}X(z) + x[-1]$$

$$x[n-2]u[n] \Leftrightarrow z^{-2}X(z) + z^{-1}x[-1] + x[-2]$$

$$x[n-3]u[n] \Leftrightarrow z^{-3}X(z) + z^{-2}x[-1] + z^{-1}x[-2] + x[-3]$$

Transformada Z - Propriedades

- Deslocamento à direita
- **Deslocamento à esquerda**
- Multiplicação por γ^n
- Multiplicação por n
- Reversão no tempo
- Convolução
- Teorema do valor inicial
- Teorema do valor final
- Estabilidade

- Se

$$x[n]u[n] \Leftrightarrow X(z)$$

- Então

$$x[n+m]u[n] \Leftrightarrow z^m X(z) - z^m \sum_{n=0}^{m-1} x[n]z^{-n}$$

- Ou seja

$$x[n+1]u[n] \Leftrightarrow zX(z) - zx[0]$$

$$x[n+2]u[n] \Leftrightarrow z^2 X(z) - z^2 x[0] - zx[1]$$

$$x[n+3]u[n] \Leftrightarrow z^3 X(z) - z^3 x[0] - z^2 x[1] - zx[2]$$

Transformada Z - Propriedades

- Deslocamento à direita
- Deslocamento à esquerda
- **Multiplicação por γ^n**
- Multiplicação por n
- Reversão no tempo
- Convolução
- Teorema do valor inicial
- Teorema do valor final
- Estabilidade

- Se

$$x[n]u[n] \Leftrightarrow X(z)$$

- Então

$$\gamma^n x[n]u[n] \Leftrightarrow X\left(\frac{z}{\gamma}\right)$$

Transformada Z - Propriedades

- Deslocamento à direita
- Deslocamento à esquerda
- Multiplicação por γ^n
- **Multiplicação por n**
- Reversão no tempo
- Convolução
- Teorema do valor inicial
- Teorema do valor final
- Estabilidade

- Se

$$x[n]u[n] \Leftrightarrow X(z)$$

- Então

$$nx[n]u[n] \Leftrightarrow -z\frac{d}{dz}X(z)$$

$x = u[n]$

$$X(z) = \frac{1}{1-z^{-1}}$$

$r = n\,u[n]$

$$R(z) = -z \cdot \frac{d}{dz}\left(\frac{1}{1-z^{-1}}\right)$$

Transformada Z - Propriedades

- Deslocamento à direita
- Deslocamento à esquerda
- Multiplicação por γ^n
- Multiplicação por n
- **Reversão no tempo**
- Convolução
- Teorema do valor inicial
- Teorema do valor final
- Estabilidade

- Se

$$x[n] \Leftrightarrow X(z)$$

- Então

$$x[-n] \Leftrightarrow X\left(\frac{1}{z}\right)$$

Apenas para a transformada bilateral!

Transformada Z - Propriedades

- Deslocamento à direita
- Deslocamento à esquerda
- Multiplicação por γ^n
- Multiplicação por n
- Reversão no tempo
- **Convolução**
- Teorema do valor inicial
- Teorema do valor final
- Estabilidade

- Se

$$x_1[n] \Leftrightarrow X_1(z) \qquad\qquad x_2[n] \Leftrightarrow X_2(z)$$

- Então

$$x_1[n] * x_2[n] \Leftrightarrow X_1(z)X_2(z)$$

$$x[n] \rightarrow \boxed{h[n]} \rightarrow y[n]$$

Transformada Z - Propriedades

- Deslocamento à direita
- Deslocamento à esquerda
- Multiplicação por γ^n
- Multiplicação por n
- Reversão no tempo
- Convolução
- **Teorema do valor inicial**
- **Teorema do valor final**
- Estabilidade

- Se

$$x[n] \Leftrightarrow X(z)$$

- Então

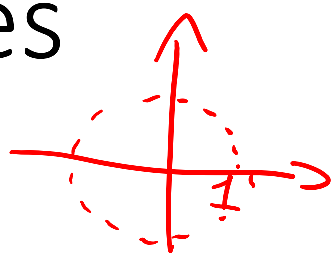
$$x[0] = \lim_{z \to \infty} X(z) \quad \text{TVI}$$

E

$$\lim_{N \to \infty} x[N] = \lim_{z \to 1} (z-1)X(z) \quad \text{TVF}$$

Com $(z-1)X(z)$ estável

Transformada Z - Propriedades



- Deslocamento à direita
- Deslocamento à esquerda
- Multiplicação por γ^n
- Multiplicação por n
- Reversão no tempo
- Convolução
- Teorema do valor inicial
- Teorema do valor final
- **Estabilidade**

Um sistema discreto LTI **é estável** se e somente se a RDC de sua função do sistema H(z) incluir a linha que define o circulo unitário.

Um sistema causal com função de sistema racional H(z) **é estável** se e somente se **todos os polos** de H(z) estiverem dentro do circulo unitário no plano z.

Transformada Z

Solução de equações de diferenças

- Exemplo

$$y[n] + \frac{5}{4}y[n-1] + \frac{3}{8}y[n-2] = 2x[n],\ \text{com}\ \begin{matrix} y[-1] = 2 \\ y[-2] = 8 \end{matrix}\ \text{e}\ x[n] = u[n]$$

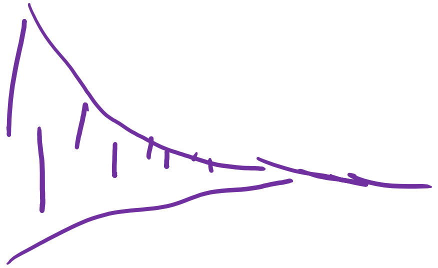
$$\updownarrow z$$

$$Y(z) + \frac{5}{4}\left(Y(z)\cdot z^{-1} + y[-1]\right) + \frac{3}{8}\left(z^{-2}Y(z) + z^{-1}y[-1] + y[-2]\right) = 2\cdot\frac{1}{1-z^{-1}}$$

$$Y(z)\left(1 + \frac{5}{4}z^{-1} + \frac{3}{8}z^{-2}\right) = \underbrace{-\frac{5}{4}\cdot \overset{2}{y[-1]} - \frac{3}{8}z^{-1}\overset{2}{y[-1]} - \frac{3}{8}\overset{8}{y[-2]}}_{\text{Resposta natural}} + \underbrace{\frac{2}{1-z^{-1}}}_{\text{Resp. forçada}}$$

Transformada Z

Solução de equações de diferenças



residuez

$$y[n] + \frac{5}{4}y[n-1] + \frac{3}{8}y[n-2] = 2x[n],\ \text{com}\ \begin{matrix} y[-1] = 2 \\ y[-2] = 8 \end{matrix}\ \text{e}\ x[n] = u[n]$$

Resposta Natural

$$Y_N(z) = \frac{\frac{3}{4}z^{-1} + 5,5}{1 + \frac{5}{4}z^{-1} + \frac{3}{8}z^{-2}} = \frac{\frac{3}{4}z^{-1} + 5,5}{(1+0,5\cdot z^{-1})(1+0,75\cdot z^{-1})}$$

$$Y(z) = \frac{A}{1+0,5z^{-1}} + \frac{B}{1+0,75z^{-1}} \Leftrightarrow y_N[n] = (8(-0,5)^n - 13,5\cdot(-0,75)^n)\,u[n]$$

$A = 8$

$B = -13,5$

$+0,5$

$+0,75$

Resposta Forçada

$$Y_F(z) = \frac{2}{(1-z^{-1})(1+0,5z^{-1})(1+0,75z^{-1})}$$

$$= \frac{A}{1-z^{-1}} + \frac{B}{1+0,5z^{-1}} + \frac{C}{1+0,75z^{-1}}$$

$A = 16/21 \qquad B = -4/3 \qquad C = 18/7$

$$y_F[n] = \left(\frac{16}{21} - \frac{4}{3}(-0,5)^n + \frac{18}{7}\cdot(-0,75)^n\right)u[n]$$