Sistemas e Sinais
semana 8

Prof. Vinícius Valduga de Almeida Camargo

Transformada de Fourier

A Transformada de Fourier – *FT* é utilizada para representar um sinal não-periódico de tempo contínuo como uma superposição de senoides complexas.

A natureza contínua não-periódica de um sinal de tempo implica que a superposição de senoides complexas envolva um *continuum* de frequências que variam de $-\infty\ a\ \infty$.

Transformada de Fourier - Derivação

$x(t)$ – sinal aperiódico

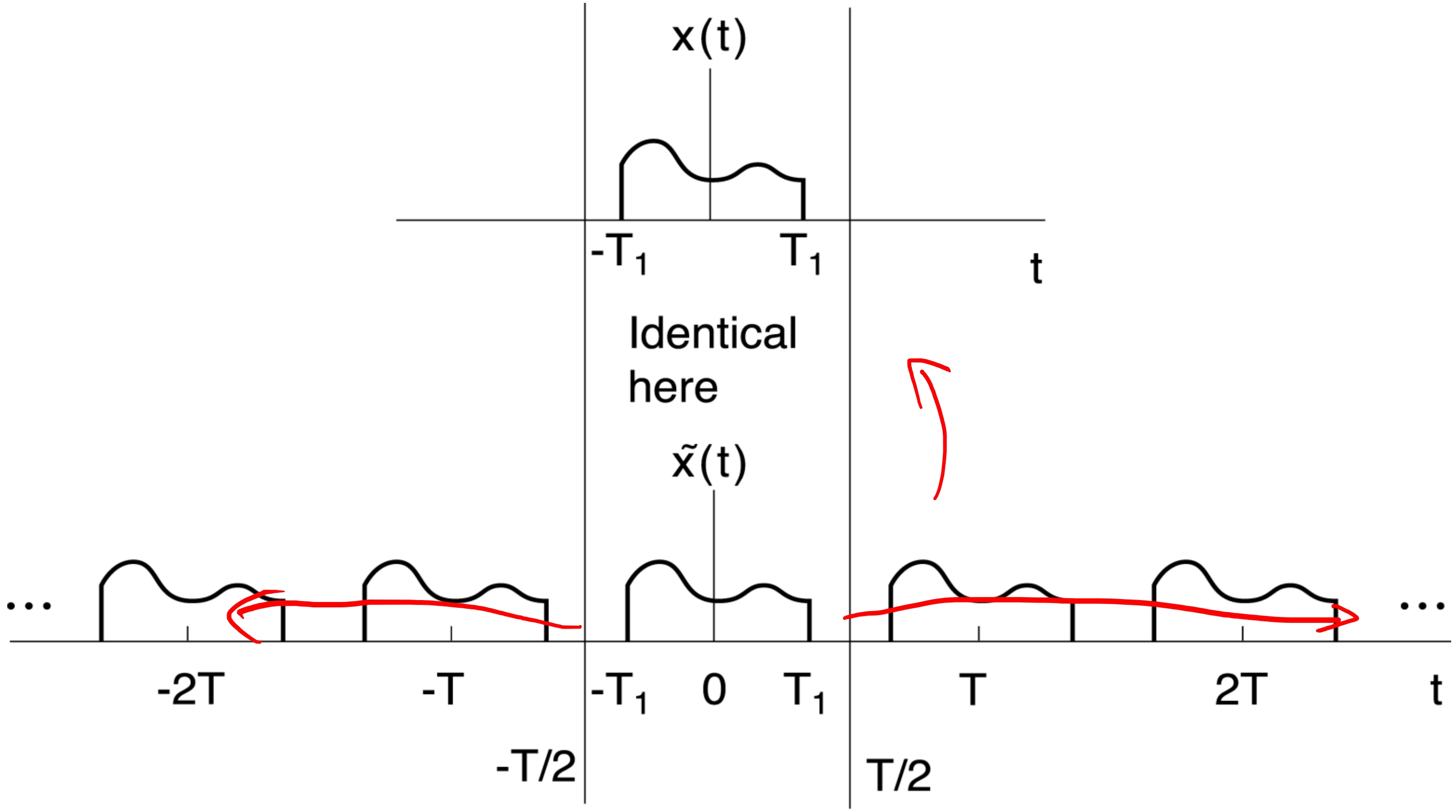
– podemos interpretar como um sinal periódico quando o período $T \rightarrow \infty$

Como componentes harmônicos são espaçados por $\omega_o = 2\pi/T$,

quando $T \rightarrow \infty$, então $\omega_o \rightarrow 0$ e $\omega = k\omega_o$ se torna contínuo

Série de Fourier $\rightarrow$ Integral de Fourier

Transformada de Fourier - Derivação



Por simplicidade, assumimos $x(t)$ de duração finita, e definimos um sinal periódico $\tilde{x}(t)$

$$\tilde{x}(t) = \begin{cases} x(t), & -\dfrac{T}{2} < t < \dfrac{T}{2} \\ periódico, & |t| > \dfrac{T}{2} \end{cases}$$

Quando $T \to \infty$, $\quad x(t) = \tilde{x}(t)$ para todo t

Derivação

Descrevendo $\tilde{x}(t)$ por sua série de Fourier temos

$$\tilde{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

$$a_k = \frac{1}{T}\int_{\langle T\rangle} \tilde{x}(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$$

$$a_k = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$$

$T \to \infty$ $\quad k\omega_0 \to \omega$

se $X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$

$$a_k = X(jk\omega_0)/T$$

para $-\frac{T}{2} < t < \frac{T}{2}$

$$x(t) = \tilde{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{X(jk\omega_0)}{T} e^{jk\omega_0 t}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \omega_0 X(jk\omega_0) e^{jk\omega_0 t}$$

$T \to \infty \quad \omega_0 \to 0 \quad \sum \omega_0 \to \int d\omega$

$$k\omega_0 = \omega$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$$

Transformada de Fourier

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt$$

Transformada de Fourier

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

Transformada Inversa de Fourier

$s = \cancel{\sigma}^{\,0} + j\omega$

A equação de *x(t)* expressa que o sinal no tempo é a superposição ponderada de senoides, cada uma com um fator de ponderação $\frac{1}{2\pi}X(j\omega)\underbrace{d\omega}_{0}$. Diz-se então que $x(t)$ e $X(j\omega)$ são um par de transformada de Fourier

$$x(t) \xleftrightarrow{FT} X(j\omega)$$

Transformada de Fourier - Convergência

A convergência ponto a ponto é garantida em todos os valores de t, exceto naqueles correspondentes a descontinuidades, se $x(t)$ satisfizer as **condições de Dirichlet** para sinais não-periódicos abaixo:

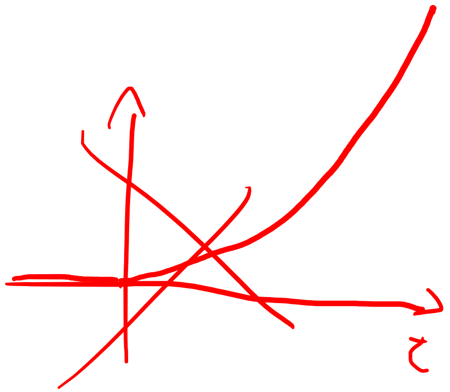
1. $x(t)$ é absolutamente integrável, ou seja

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|dt < \infty$$

2. $x(t)$ deve ter um número finito de máximos, mínimos e descontinuidades locais em qualquer intervalo finito;

3. O tamanho de cada descontinuidade é finito.

Exemplo



Encontre a *FT* do sinal $x(t) = e^{-at}u(t)$.

A *FT* não converge para valores de $a \leq 0$, uma vez que *x(t)* não seria absolutamente integrável, ou seja

$$\int_0^{\infty} e^{-at}\, dt \leq \infty \, .$$

Para *a>0* tem-se

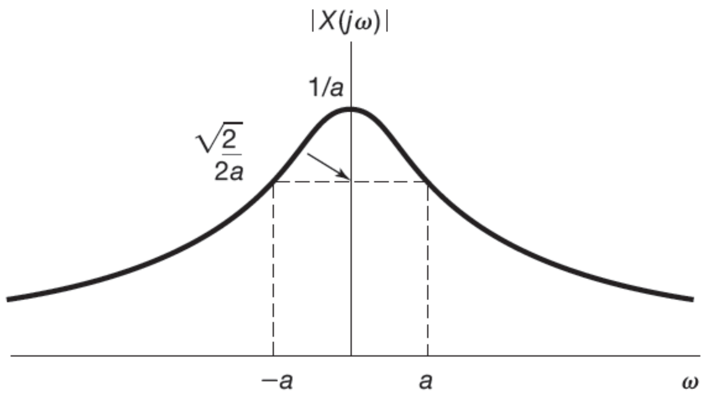
$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-at} u(t)\, e^{-j\omega t}\, dt = \int_0^{\infty} e^{-(a+j\omega)t}\, dt = \frac{-1}{a+j\omega}(0-1) = \frac{1}{a+j\omega}$$

$$|X(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{a^2+\omega^2}} \qquad \angle X(j\omega) = 0 - \operatorname{arctg}\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

Exemplo

O espectro de magnitude é obtido pela equação

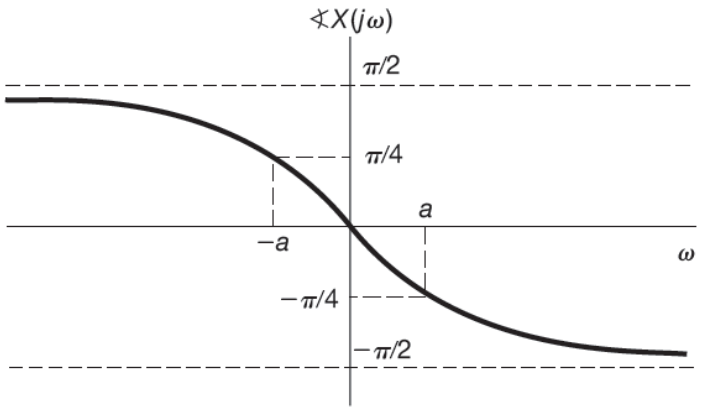
$$|X(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{\omega^2 + a^2}}$$



(a)

e o espectro de argumento (ou de fase) é obtido por

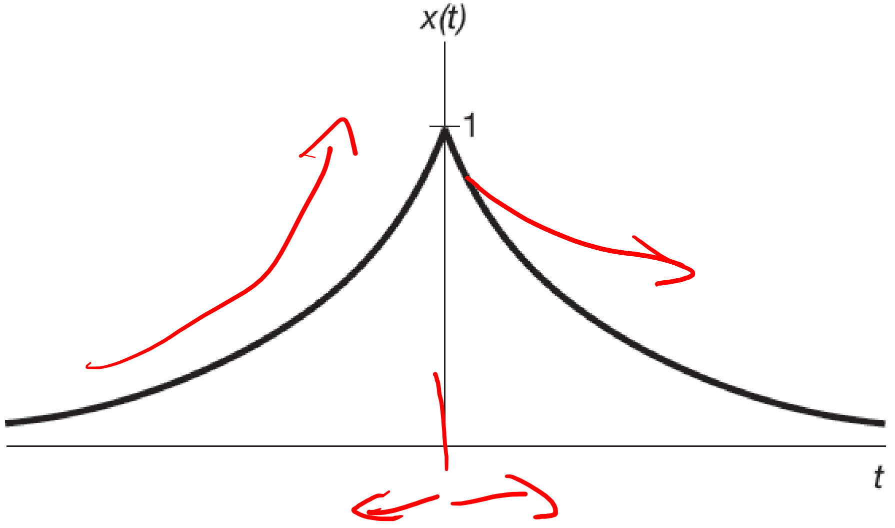
$$arg\{X(j\omega)\} = -arctg\left(\frac{\omega}{a}\right)$$



(b)

Exemplo

Determine a Transformada de Fourier de $x(t) = e^{-a|t|}$ supondo $a>0$.



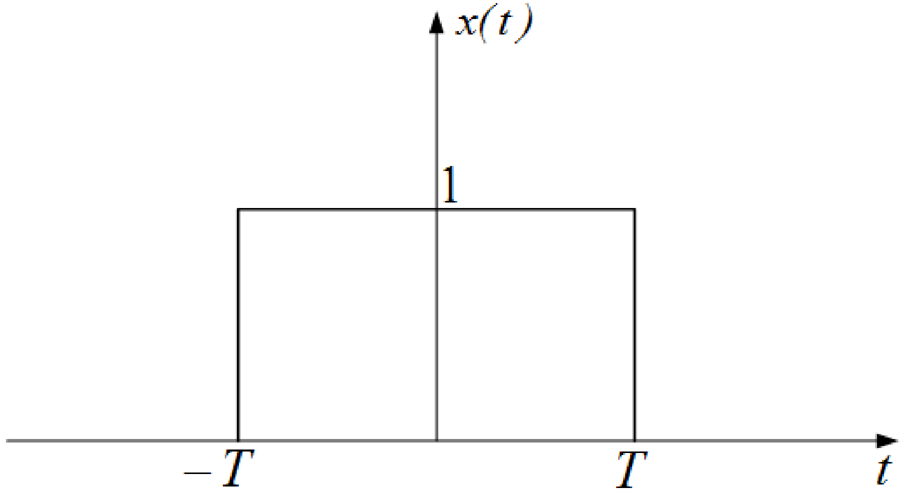
$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{0} e^{at} e^{-j\omega t} dt + \int_{0}^{\infty} e^{-at} e^{-j\omega t} dt$$

$$X(j\omega) = \frac{1}{a - j\omega}(1 - 0) + \frac{+1}{a + j\omega}(0 + 1)$$

$$X(j\omega) = \frac{a + \cancel{j\omega} + a - \cancel{j\omega}}{a^2 + \omega^2} = \frac{2a}{a^2 + \omega^2}$$

Exemplo

Determine a Transformada de Fourier do pulso retangular descrito na figura abaixo:



$$x(t) = \begin{cases} 1, -T \leq t \leq T \\ 0, |\ t\ | > T \end{cases}$$

seno

$$X(j\omega) = \int_{-T}^{T} 1 \cdot e^{-j\omega t}\, dt = \frac{+1}{j\omega} \cdot 2 \left(\frac{-e^{-j\omega T} + e^{+j\omega T}}{2} \right)$$

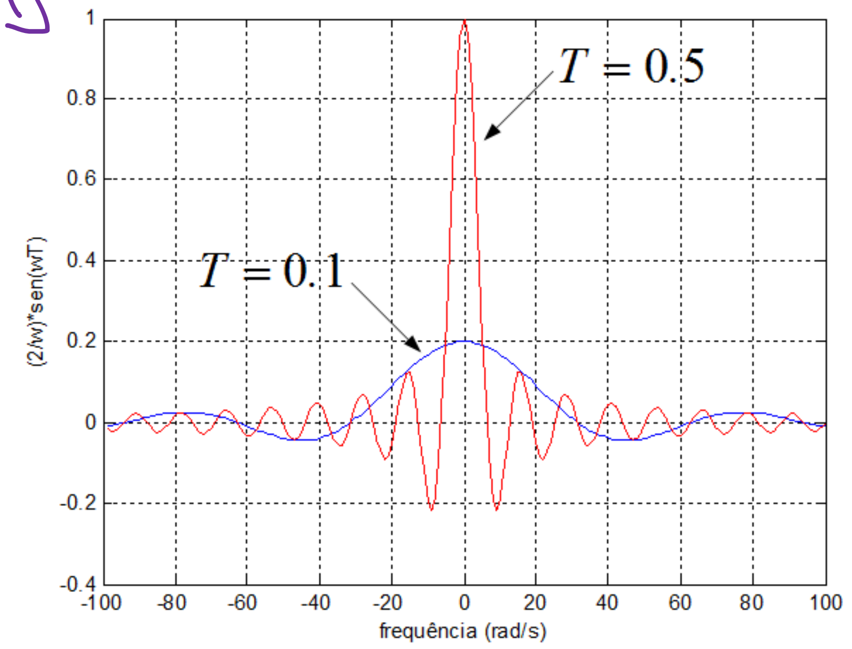
$$X(j\omega) = \frac{2T}{\omega} \cdot \frac{\text{sen}(\omega T)}{T} = 2T \cdot \text{sinc}(\omega T)$$

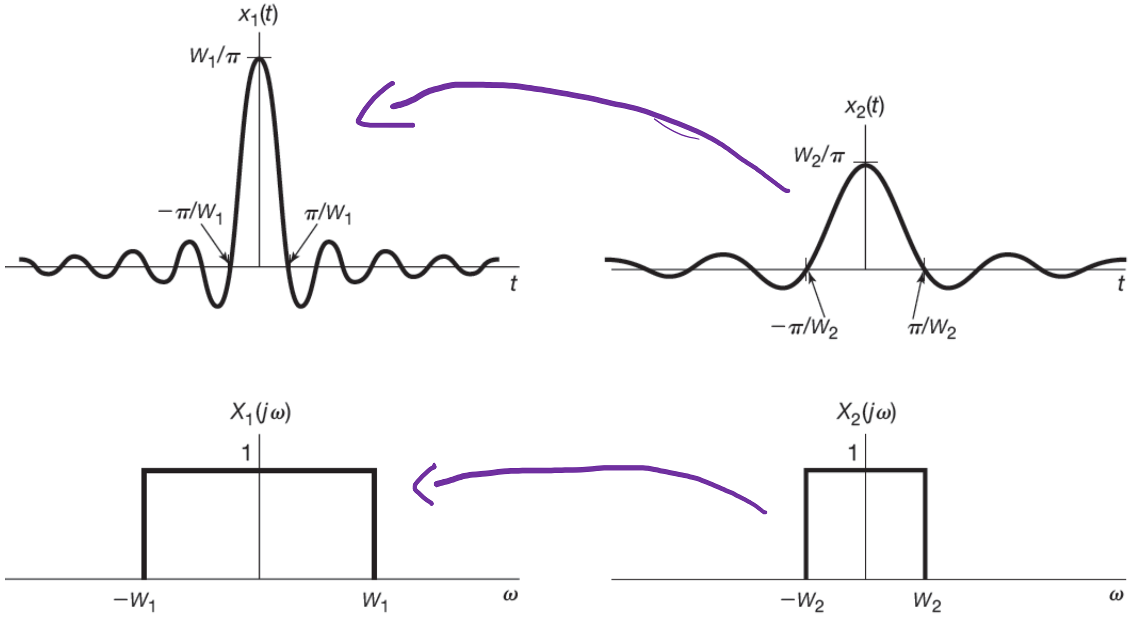
$$\text{sinc}(x) = \frac{\text{sen}\ x}{x}$$

Exemplo

Este exemplo ilustra o fato de que ao comprimir o sinal no domínio do tempo, o concentrando próximo a origem, temos uma expansão do sinal no domínio das frequências.
O inverso ocorrerá ao concentrar um sinal no domínio das frequências.

Função $X(j\omega)=2T\,sinc(\omega T)$





Exemplo

- Tranformada de Fourier do impulso:

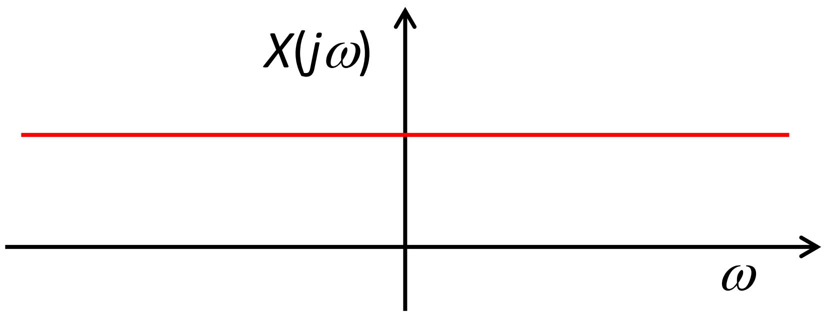
$$x(t) = \delta(t)$$

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-j\omega t} dt = 1$$

$e^{-j\omega \cdot 0}$

Propriedade do Peneiramento

- Portanto, a Transformada de Fourier do impulso tem uma contribuição constante de **todas as frequências**



Pares básicos da FT

Nº	$x(t)$	$X(\omega)$	
1	$e^{-at}u(t)$	$\dfrac{1}{a+j\omega}$	$a>0$
2	$e^{at}u(-t)$	$\dfrac{1}{a-j\omega}$	$a>0$
3	$e^{-a\|t\|}$	$\dfrac{2a}{a^2+\omega^2}$	$a>0$
4	$te^{-at}u(t)$	$\dfrac{1}{(a+j\omega)^2}$	$a>0$
5	$t^n e^{-at}u(t)$	$\dfrac{n!}{(a+j\omega)^{n+1}}$	$a>0$
6	$\delta(t)$	1	
7	1	$2\pi\delta(\omega)$	
8	$e^{j\omega_0 t}$	$2\pi\delta(\omega-\omega_0)$	
13	$\cos\omega_0 t\, u(t)$	$\dfrac{\pi}{2}[\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)]+\dfrac{j\omega}{\omega_0^2-\omega^2}$	
14	$\text{sen}\,\omega_0 t\, u(t)$	$\dfrac{\pi}{2j}[\delta(\omega-\omega_0)-\delta(\omega+\omega_0)]+\dfrac{\omega_0}{\omega_0^2-\omega^2}$	
15	$e^{-at}\,\text{sen}\,\omega_0 t\, u(t)$	$\dfrac{\omega_0}{(a+j\omega)^2+\omega_0^2}$	
16	$e^{-at}\cos\omega_0 t\, u(t)$	$\dfrac{a+j\omega}{(a+j\omega)^2+\omega_0^2}$	
17	$\text{ret}\left(\dfrac{t}{\tau}\right)$	$\tau\,\text{sinc}\left(\dfrac{\omega\tau}{2}\right)$	
18	$\dfrac{W}{\pi}\text{sinc}(Wt)$	$\text{ret}\left(\dfrac{\omega}{2W}\right)$	

Propriedades da FT

Operação	$x(t)$	$X(\omega)$
Multiplicação escalar	$kx(t)$	$kX(\omega)$
Adição	$x_1(t) + x_2(t)$	$X_1(\omega) + X_2(\omega)$
Conjugado	$x^*(t)$	$X^*(-\omega)$
Dualidade	$X(t)$	$2\pi x(-\omega)$
Escalonamento (a real)	$x(at)$	$\frac{1}{\lvert a\rvert}X\left(\frac{\omega}{a}\right)$
Deslocamento no tempo	$x(t - t_0)$	$X(\omega)e^{-j\omega t_0}$
Deslocamento na frequência (ω_0 real)	$x(t)e^{j\omega_0 t}$	$X(\omega - \omega_0)$
Convolução no tempo	$x_1(t) * x_2(t)$	$X_1(\omega)X_2(\omega)$
Convolução na frequência	$x_1(t)x_2(t)$	$\frac{1}{2\pi}X_1(\omega) * X_2(\omega)$
Diferenciação no tempo	$\frac{d^n x}{dt^n}$	$(j\omega)^n X(\omega)$
Integração no tempo	$\int_{-\infty}^{t} x(u)\, du$	$\frac{X(\omega)}{j\omega} + \pi X(0)\delta(\omega)$

FT para Sinais Periódicos

Sinais periódicos violam a condição de Dirichlet pois não são absolutamente integráveis.

No entanto, um sinal periódico pode ser representado pela série de Fourier

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$$

$$X(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi a_k \delta(\omega - k\omega_0)$$

pelo par básico

$1 \longleftrightarrow 2\pi\,\delta(\omega)$

utilizando deslocamento na freq.

$e^{j\omega_0 t k} \longleftrightarrow 2\pi\,\delta(\omega - k\omega_0)$