Universidade Federal de Pelotas
Curso de Engenharia de Computação
Disciplina: 22000178 – Sistemas e Sinais
Turma: 2020/1 – T52
Professor: Vinícius V. A. Camargo

Relatório da Tarefa 10: Análise de Fourier de Sinais em Tempo Discreto.

Aluno: Mairon Schneider Cardoso. Data: 10/12/2020

Número de matrícula: 17102515.

1 Introdução

Como visto nos capítulos 6 e 7 do livro texto da disciplina, é possível representar uma enorme gama de sinais em domínio tempo através de uma série denominada Fourier, que é descrita pela soma de diferentes componentes senoidais ou exponenciais, entretanto, vimos somente o comportamento da série para sinais em domínio tempo, quando se trata de representar sinais em domínio discreto, de forma análoga a representação em domínio tempo, conseguimos reconstruir o exato comportamento de um sinal discreto através de uma soma infinita de componentes harmônicas, além disso, assim como no tempo contínuo, a transformada de Fourier comporta-se como uma extensão da série de Fourier, isto é, de forma análoga, consideraremos a série de Fourier com frequência fundamental tendendo a zero, como será visto no decorrer do relatório e especialmente na subseção que estuda o segundo sinal.

2 Resultados e Discussões

A série de Fourier em tempo discreto para representação de um sinal periódico é composto por uma senoide de frequência fundamental ($\omega_0 = \frac{2\pi}{N_0}$) e suas harmônicas, isto é, ele representa um sinal periódico de tempo discreto como um somatório de exponenciais complexas ponderadas (também é possível representa-ló pela forma trigonométrica) que são autofunções de sistemas LTI, gerando um alto valor de a_k da autofunção $e^{jk\omega_0 t}$. Como vimos na série de Fourier em tempo contínuo, possuímos as equações de análise e de síntese (equações 1b e 1a, respectivamente), onde, através da equação de análise conseguimos calcular os coeficientes da série de Fourier. Caso quiséssemos recompor o sinal através dos coeficientes da série, utilizaríamos a equação de síntese obtendo a representação correta de um sinal discreto periódico.

$$x[n] = \sum_{k=<N>} a_k \cdot e^{jk\omega_0 n} \tag{1a}$$

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=<N>} x[n] \cdot e^{-jk\omega_0 n} \tag{1b}$$

A transformada de Fourier de tempo discreto (equação 2), como citado anteriormente, é a extensão da série de Fourier quando tendemos o período do sinal (N) ao infinito, semelhante a transformada de Fourier de tempo contínuo, além disso, a transformada de Fourier de tempo discreto é um caso particular da transformada Z, com uma relação similar a transformada de Fourier em tempo contínuo com a transformada de Laplace.

$$X(e^{j\Omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\Omega n} \tag{2}$$

2.1 Sinal periódico em tempo discreto

Uma vez que o exercício já dispõe da representação de $x[n]$ que é equivalente aos dígitos que compõem a matrícula, de período fundamental N, onde nesse caso, N é igual a quantidade de dígitos da matrícula, precisamos apenas calcular os coeficientes da série de Fourier e como visto anteriormente, para o correto cálculo dos coeficientes precisamos empregar a equação de análise (equação 1b) e, através dela, é possível representar a série de Fourier de tempo discreto (equação 3).

$$x[n] = \frac{1}{8}\Big(e^{-jk\frac{\pi}{4}} + 7e^{-2jk\frac{\pi}{4}} + e^{-3jk\frac{\pi}{4}} + 2e^{-5jk\frac{\pi}{4}} + 5e^{-6jk\frac{\pi}{4}} + e^{-7jk\frac{\pi}{4}} + 5e^{-8jk\frac{\pi}{4}}\Big) \tag{3}$$

Neste caso, os coeficientes calculados anteriormente nos retornam valores complexos, o que nos permite analisar o impacto em formato de módulo e fase do sinal. Observando a figura 1 conseguimos perceber os valores de módulo e fase do sinal, consequentemente, conseguimos perceber que o módulo e fase será periódico, uma vez que o sinal também tem o comportamento periódico, além disso, conseguimos perceber em quais pontos ocorrem a inversão de fase que é resultado da soma das componentes imaginarias das harmônicas.

Utilizando um construtor ideal semelhante ao visto na aula anterior, é possível reconstruir o sinal através da multiplicação por uma função $sinc(\frac{\omega_s}{2\pi} \cdot (t - nT_s))$ para cada ponto do gráfico $x[n]$, onde, o período é igual a $T_s = 2\pi/\omega_s$, devido ao enunciado que nos diz que o sinal é originado de um processo de amostragem com frequência de 1Hz, consideraremos ω_s como 1Hz ou 2π o que nos resulta em uma função igual a $sinc(t - n)$ multiplicando o $x[n]$ o que nos resulta em um sinal reconstruído (figura 2), onde, através dele, conseguimos notar um algumas nuncias que são presentes também na $sinc(x)$, como o amortecimento, por exemplo. O que conseguimos perceber através da reconstrução do sinal, é que observando a figura 3, o sinal que foi reconstruído consegue representar satisfatoriamente o sinal proposto inicialmente.

2.2 Sinal aperiódico em tempo discreto

O sinal aperiódico abordado no exercício dois, utiliza o sinal discreto visto anteriormente, entretanto, ele tende o período do sinal ao infinito, para que consigamos observar como um sinal aperiódico. Neste caso, o cálculo da transformada do sinal é feito através da equação 2 e o resultado disso é um gráfico de módulo e fase bastante semelhante ao do sinal periódico (figura 4), entretanto, sem o $\frac{1}{N}$ da fórmula do cálculo dos coeficientes que multiplicam as componentes harmônicas, os valores de módulo e fase são $0,125$ vezes menores que no primeiro sinal (equação 4), apesar de ser representado no domínio frequência, conseguimos observar a diferença determinando um valor inteiro igual no eixo das abcissas de ambos os gráficos de módulo e fase (figura 5).

$$X(e^{j\Omega}) = \Big(e^{-jk\frac{\pi}{4}} + 7e^{-2jk\frac{\pi}{4}} + e^{-3jk\frac{\pi}{4}} + 2e^{-5jk\frac{\pi}{4}} + 5e^{-6jk\frac{\pi}{4}} + e^{-7jk\frac{\pi}{4}} + 5e^{-8jk\frac{\pi}{4}}\Big) \tag{4}$$

A reconstrução do sinal aperiódico é semelhante ao que foi feito no sinal periódico, porém, ao invés de multiplicarmos um sinal periódico pela $sinc(\frac{\omega_s}{2\pi} \cdot (t - nT_s))$, será multiplicado apenas as componentes definidas do intervalo de [1, 8] (uma vez que todo o restante será zero), o que nos resultará em um sinal representado pela figura 6. Como no exercício anterior, para assegurar a representação satisfatória do sinal reconstruído, foram isolados os valores que compõem o intervalo de [1, 8] (figura 7) e conseguimos perceber que a representação do sinal através do amostrador ideal, é semelhante a função de entrada. O interessante dessa representação, é especialmente o comportamento já citado na $sinc(x)$, nesse caso especificamente, conseguimos notar o quão agressivo o sinal tende a zero quando não está no intervalo do sinal, ele exibe um comportamento de amortecimento, que é uma das características da função $sinc(x)$.

3 Conclusões

Portanto, através dos experimentos propostos pelo relatório dessa semana, conseguimos perceber que a série de Fourier em tempo discreto consegue representar com facilidade uma grande quantidade de sinais periódicos, além disso, torna-se mais fácil que a série de Fourier em tempo contínuo, pois, a reconstrução do sinal que era uma etapa necessária no domínio tempo, acaba por se tornar mais fácil em domínio discreto, uma vez que a representação de um sinal discreto nada mais é que uma função impulso.

Observando as diferenças entre a transformada de Fourier e a transformada Z, conseguimos perceber a utilidade de cada um, os gráficos obtidos que demonstram a fase e magnitude de um sinal é a grande vantagem de Fourier, isto é, analisar um sinal acaba se tornando mais simples quando utilizamos Fourier, entretanto, quando queremos analisar um sistema, a escolha da transformada Z pode se tornar a melhor escolha para um engenheiro.

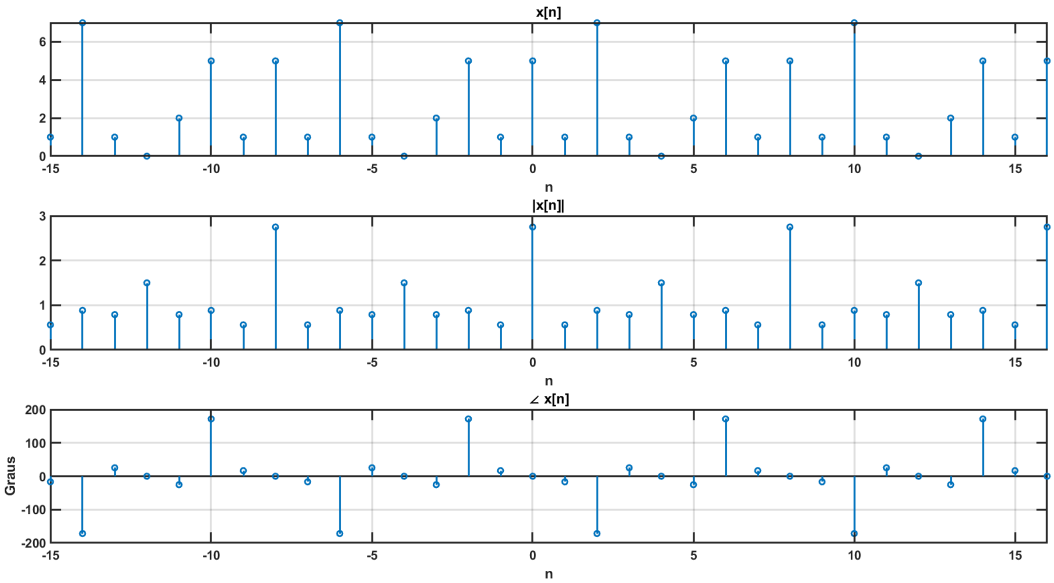

Figura 1: Representações em modulo e fase de um sinal discreto $x[n]$.

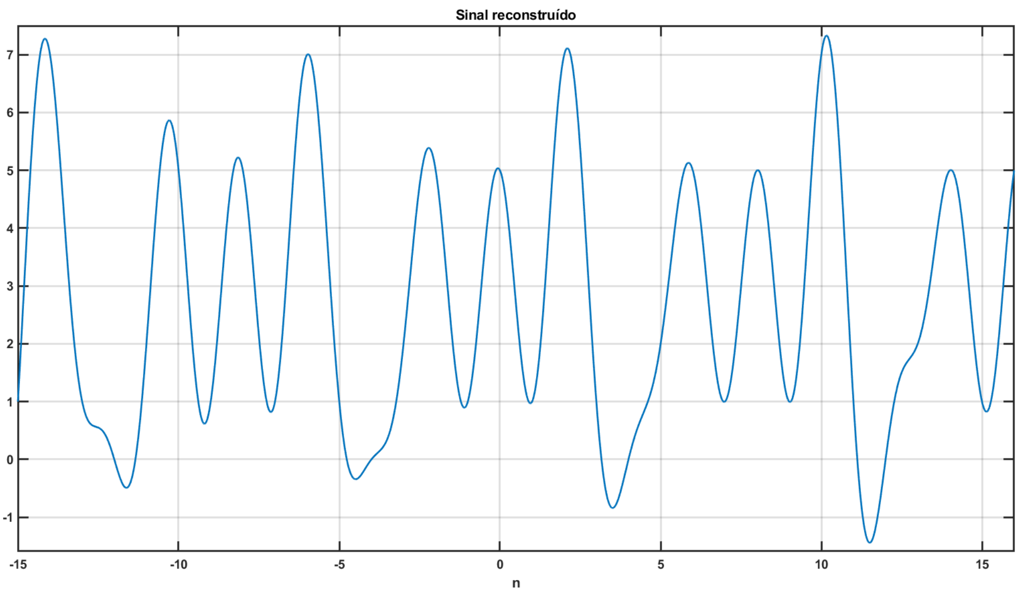

Figura 2: Reconstrução do sinal x[n].

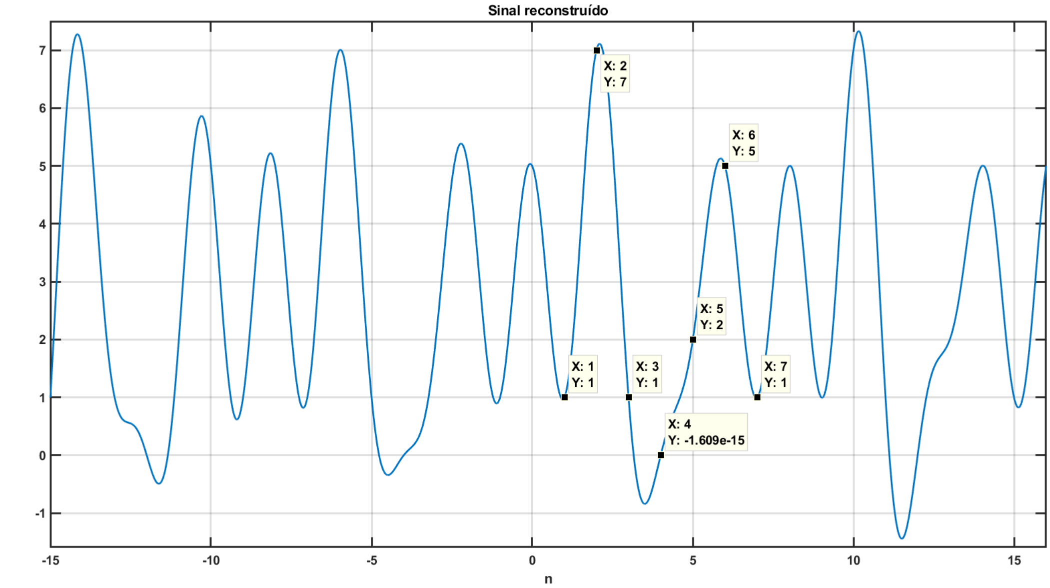

Figura 3: Valores iniciais na reconstrução do sinal x[n].

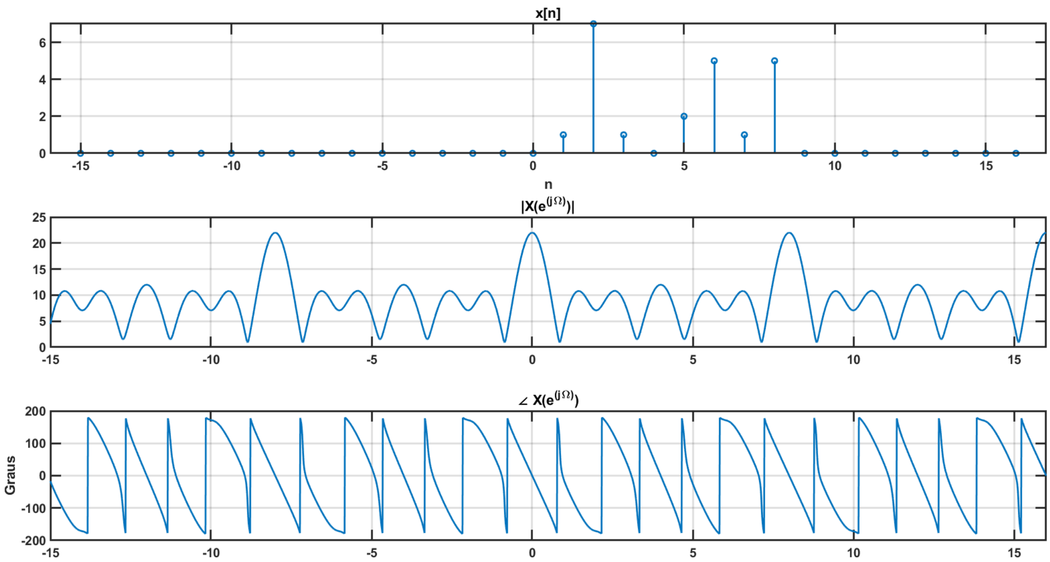

Figura 4: Representações em espectro de frequência da transformada de Fourier de um sinal discreto aperiódico.

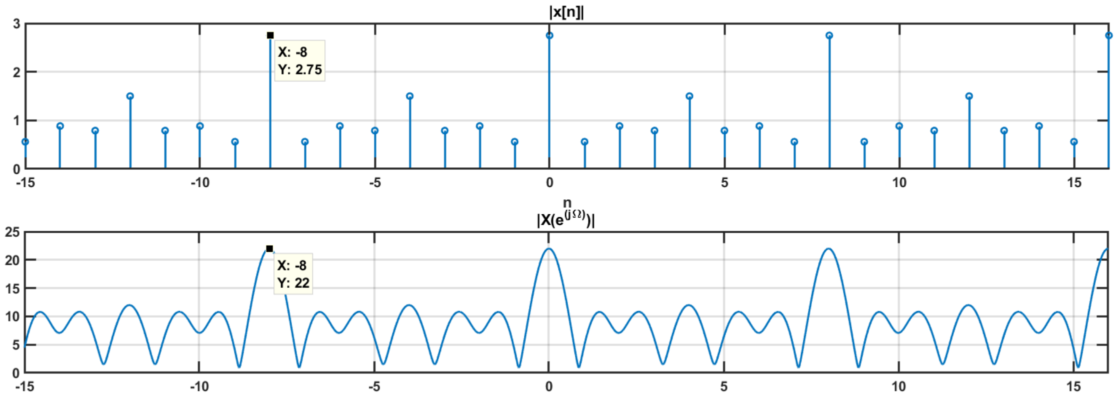

Figura 5: Comparação entre os valores de módulo do sinal resultante da série de Fourier e do sinal resultante da transformada de Fourier.

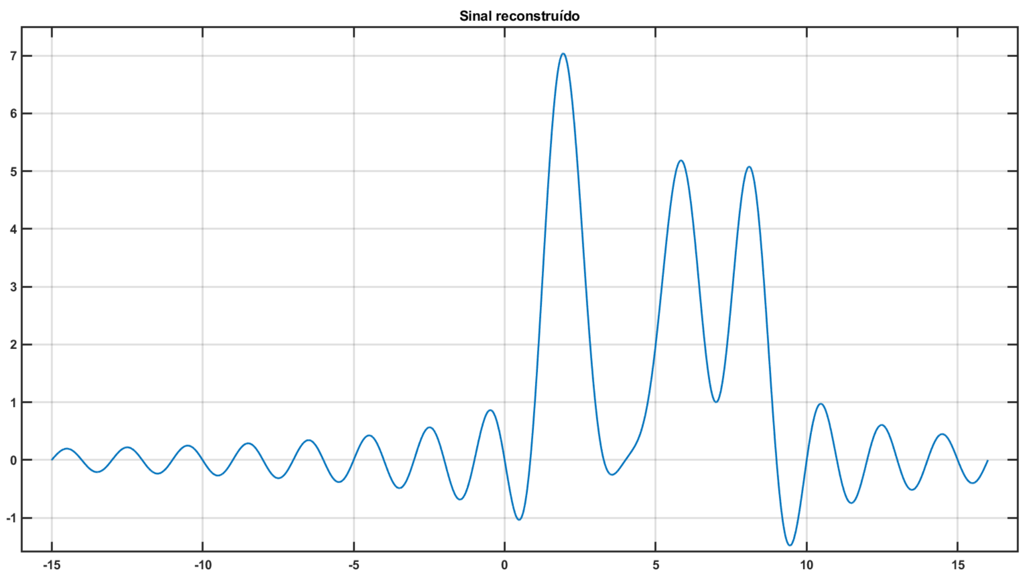

Figura 6: Reconstrução do sinal x[n].

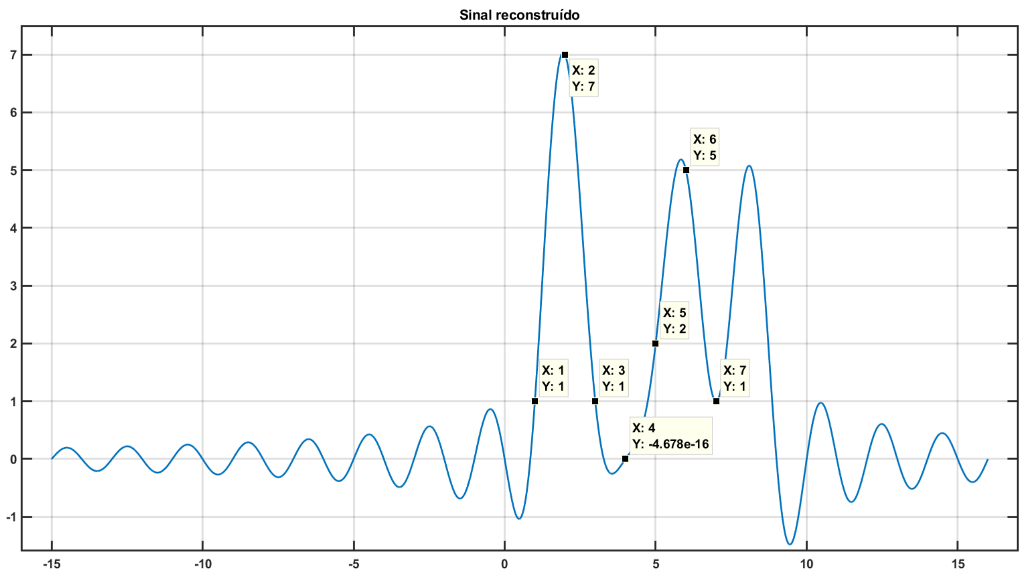

Figura 7: Valores iniciais na reconstrução do sinal x[n].