

Relatório da Tarefa 5: Resposta em frequência.

Aluno: Mairon Schneider Cardoso.

Data: 21/05/2021

Número de matrícula: 17102515.

1 Introdução

No âmbito de sistemas de controle, a análise no domínio frequência de um sistema refere-se a aplicação de uma excitação senoidal na entrada do sistema e, avalia-se a resposta em frequência do sinal de entrada ao longo de uma faixa de frequência de interesse do projetista. A análise de estabilidade de um sistema, como comentado nos capítulos anteriores, limitavam-se ao emprego de técnicas aritméticas para validação de critérios preestabelecidos, como o de e Routh-Hurwitz, cujo critério de estabilidade foi compreendido em capítulos anteriores. A partir da análise da resposta em frequência de um sistema em malha aberta, será possível identificar a estabilidade de um sistema de uma forma mais gráfica e portanto, menos complexa em sistemas de maior ordem.

2 Resultados e Discussões

Como vimos no capítulo anterior, a aplicação do critério de Routh-Hurwitz em conjunto com o projeto por lugar das raízes, nos permite deslocar o mapa de polos e zeros com a adição de um compensador, afim de encontrar uma melhor característica transiente da resposta ao degrau do sistema em questão, entretanto, quando tratamos de um sistema cuja característica é possuir diversos elementos passivos (capacitores e indutores, por exemplo) acabamos por limitar a aplicação do critério de Routh-Hurwitz, uma vez que, a tabela que é construída para garantir a estabilidade do sistema se torna extremamente trabalhosa assim como os polinômios, isto é, acabamos por obter um método eficaz, porém demasiado trabalhoso em relação a sua aplicação em sistemas de maior ordem.

Uma das formas de contornar esse problema na concepção de controladores é a análise da resposta do sistema em domínio frequência e para isso, primeiramente, recordaremos os conceitos do diagrama de Bode compreendido na disciplina de sinais. O diagrama de Bode é uma forma de representar a resposta em frequência do sistema. Através dele, conseguimos observar as margens de ganho e fase do sistema, de modo a obter uma relação que explicita a limitação de ganho em uma determinada frequência para que não adentremos a região de instabilidade do sistema, tal relação pode ser vista através da equação que descreve o sistema (equação 1), através dela, vemos que caso a soma dos polos com a realimentação do sistema $T(s)$ sejam iguais a zero, obteremos uma indeterminação e consequentemente um sistema instável. Para verificar a veracidade da relação estabelecida, observaremos o diagrama de Bode do sistema em malha aberta (figura 1) aplicando no controlador um ganho igual a -1, sabendo que para o denominador do sistema $T(s)$ ser igual a zero, precisamos garantir que a relação $G(s)C(s)$ seja igual a -1, a representação do valor -1 no gráfico de modulo e fase pode ser vista através da equação 2, isto é, esse valor no diagrama de modulo e fase demonstra a limiar da nossa margem de ganho e fase que podemos transitar até que o sistema altere sua característica de estabilidade. Definindo a margem de ganho e fase através da relação vista anteriormente (com k igual a -1), observamos um ganho de $-12,3dB$ (figura 2) para garantirmos um sistema marginalmente estável, aplicamos o valor encontrado em k (figura 3), o que retornará um sistema com ganho um pouco acima da limiar visto anteriormente (figura 4).

$$T(s) = \frac{G(s)C(s)}{1 + \underbrace{G(s)C(s)}_{\neq -1}} \quad (1)$$

$$\underbrace{0dB}_1 \quad \underbrace{\pm 180^\circ}_{/180^\circ} \quad (2)$$

O emprego do critério de Routh-Hurwitz na análise de instabilidade de sistemas, como citado anteriormente, é o método mais preciso para verificar os intervalos de estabilidade. Portanto, para verificar a veracidade do valor encontrado anteriormente, através do diagrama de Bode, foi empregado o critério nos polos do sistema $T(s)$, o resultado do cálculo (todos os cálculos detalhados estão presentes no arquivo **Cálculo.pdf**) nos exibe que, através da equação 3a (sem deslocamento), é possível construir a tabela (equação 3b) e, através dela, extraímos a interseção dos intervalos para que a primeira coluna da tabela não troque de sinal, logo, obtemos o valor de ganho mínimo para garantir a estabilidade, exibido na equação 3c.

$$q(s) = 0,6s^3 + (-6k)s^2 + (-10 - 66k)s - 60k \quad (3a)$$

$$\begin{array}{c|cc} s^3 & 0,6 & -10 - 66k \\ s^2 & -6k & -60k \\ s^1 & -16 - 66k & 0 \\ s^0 & -60k & 0 \end{array} \quad (3b)$$

$$k < -0,242424 \dots \quad (3c)$$

A discrepância que surge quando comparamos o intervalo obtido aplicando o critério de Routh-Hurwitz com o valor de ganho obtido através do gráfico de magnitude do diagrama de Bode, nos exibe a perda de resolução que o diagrama de Bode tem como característica. O impacto disso em termos da concepção do controlador pode ser visto quando aplicamos dois ganhos diferentes. Um deles sendo o ganho encontrado no gráfico de módulo (figura 5), através dele, observamos que ao empregar o ganho, obteremos um sistema (em malha fechada) marginalmente estável. Quando empregamos o valor de ganho encontrado através do critério de Routh-Hurwitz (figura 6), percebemos a característica de instabilidade do sistema (em malha fechada), ou seja, o critério de Routh-Hurwitz, nos oferece uma precisão maior quando comparado com a extração da estabilidade através da resposta em frequência, todavia, quando estamos interessados em conceber um controlador, como projetistas, é indesejável operar em uma região marginalmente estável, logo, essa discrepância não seria um fator crítico, entretanto, precisamos refletir acerca de sistemas sensíveis ao ganho, onde a precisão no ganho é um fator essencial para o desempenho correto do sistema, nesse tipo de situação, é melhor determinar a região de estabilidade empregando o critério de Routh-Hurwitz e portanto, o aumento da complexidade será justificável.

Uma das desvantagens do diagrama de Bode para a análise de estabilidade em sistemas é sua aplicação em sistemas com múltiplas frequências de cruzamento (quando o 0dB é ultrapassado diferentes vezes em diferentes frequências, por exemplo). Uma forma alternativa de verificar a estabilidade do sistema através da resposta em frequência, é utilizar o diagrama de Nyquist (diagrama polar) e o critério de Nyquist. O esboço do diagrama de Nyquist é construído a partir das coordenadas polares quando variamos a frequência (ω) de zero até infinito. A representação do $C(s)G(s)$ com ganho k igual a -1, através do diagrama de Nyquist, tem um comportamento que pode ser observado na figura 7, através das margens de estabilidade (vistas anteriormente na equação 1), conseguimos observar o mesmo ganho no diagrama de Nyquist, que foi observado antes no diagrama de Bode (figura 8), além disso, também é possível observar de uma maneira mais gráfica a sua margem de fase em relação a manutenção da sua estabilidade. Quando aplicado um ganho k igual a -0,2425, obtemos um comportamento já visto anteriormente no diagrama de Bode (figura 9) o que pode ser visto como um modelo equivalente, com a vantagem de não confundir o projetista quando múltiplas frequências de cruzamento estão intrínsecas no projeto de concepção do controlador.

O critério de Nyquist é uma forma de garantir que o sistema em malha aberta, será estável em malha fechada através da representação do diagrama de Nyquist. A relação estabelecida pelo critério de Nyquist (equação 4) nos diz que, o número de zeros (que é o que queremos descobrir) menos o número de polos de $C(s)G(s)$ no plano direito do mapa de polos e zeros, é igual ao número de voltas em sentido horário de $-1 + 0j$, quando $Z=0$ o sistema é estável.

$$N = Z - P \quad (4)$$

Com o critério de Nyquist, podemos verificar a estabilidade do sistema $T(s)$ através da aplicação do critério no denominador $(1 + C(s)G(s))$, considerando um ganho k de $-0,2$ (sistema instável), o que devemos observar na representação de Nyquist é um comportamento onde o número de voltas em torno do ponto $-1+0j$ é igual a zero (figura 10), o número de polos no semi-plano direito é 1 (4,08), neste caso, o polo na origem não conta para a extração do critério, com esses dois dados, conseguimos extrair o zero, onde essa extração é descrita pela equação 5. O zero descoberto através do critério de Nyquist para um ganho igual a $-0,2$ nos diz que o sistema não é Bibo-estável, como vimos através do critério de Routh-Hurwitz.

$$0 = Z - 1 \quad (5)$$

O emprego de um ganho k de $-0,6$ no $C(s)$ pelo critério de Routh-Hurwitz, tem como resultado um sistema Bibo-estável, podemos verificar a veracidade dessa informação através do critério de Nyquist, pela representação no diagrama de Nyquist do sistema $C(s)G(s)$, conseguimos obter as informações necessárias para aplicação no critério, então, através da figura 11, observamos que, o número de voltas no ponto $-1+0j$ será 1, entretanto, como estamos no sentido anti-horário, será atribuído ao N o valor -1 , o número de polos no semi plano direito, ainda será o mesmo (1) e portanto, através da relação obtida na equação 6, conseguimos observar que Z será igual a zero, ou seja, o sistema realimentado cumprirá o critério de Nyquist e consequentemente será Bibo-estável.

$$-1 = Z - 1 \quad (6)$$

3 Conclusões

Portanto, através dos experimentos propostos a cerca da verificação da estabilidade de um sistema, através da resposta em frequência, conseguimos distinguir diferentes situações para aplicação de diferentes critérios para extração da estabilidade, onde, caso tenhamos um sistema de maior ordem, acabamos por dispensar o critério de Routh-Hurwitz pela complexidade aritmética. Como alternativa, surgem os métodos de extração via diagrama de Bode e também através do critério de Nyquist, onde a aplicação de Bode é útil quando possuímos um $C(s)G(s)$ sem múltiplas frequências de cruzamento, quando temos o problema de diversas frequências de cruzamento, é imprescindível aplicar o critério de Nyquist para conseguir avaliar corretamente a estabilidade do sistema.

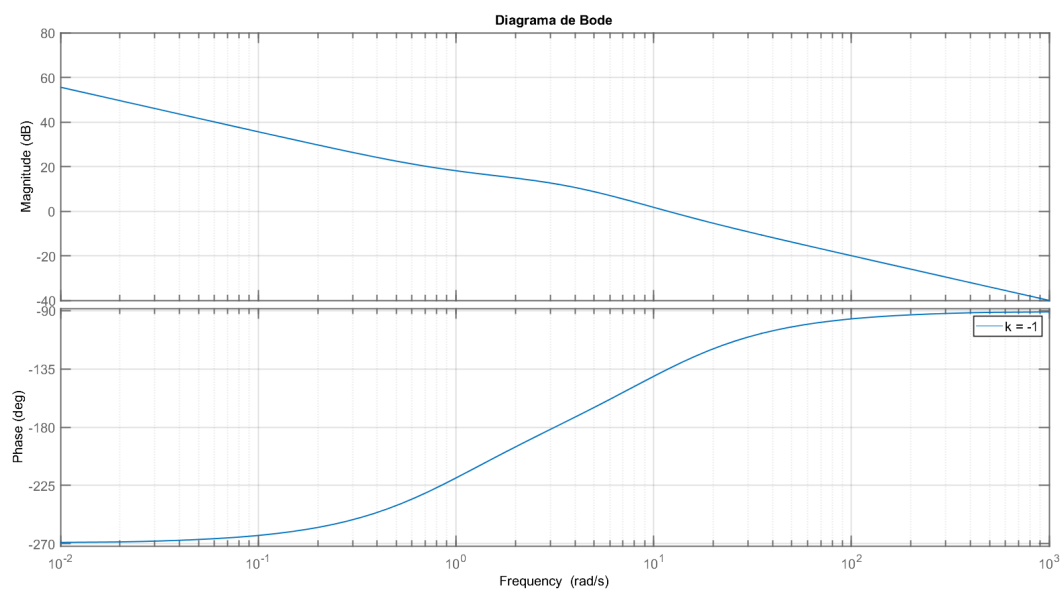


Figura 1: Diagrama de Bode de $G(s) \cdot C(s)$ com a constante de ganho k do controlador igual a -1.

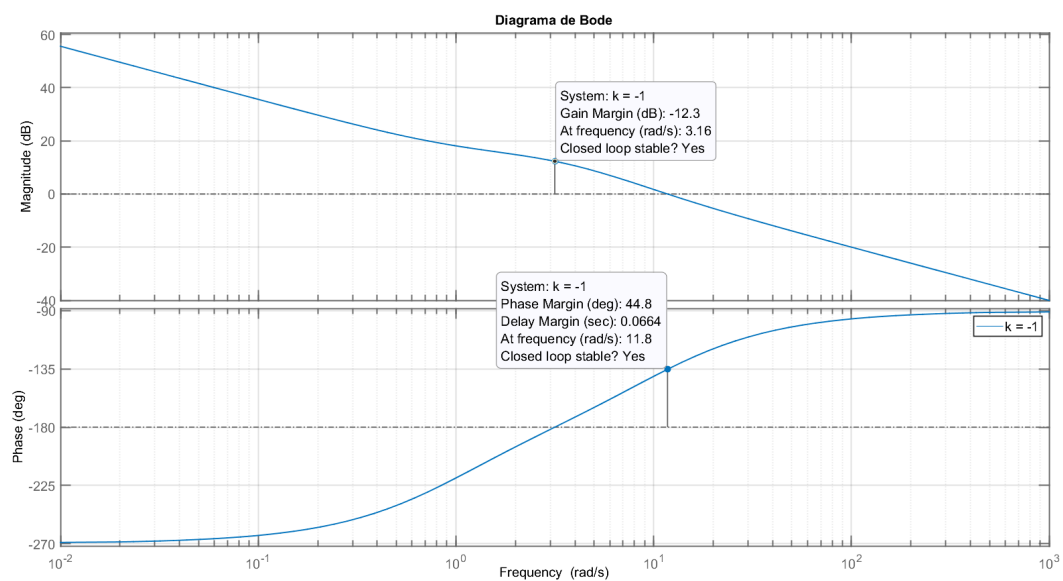


Figura 2: Margens de estabilidade do sistema em malha aberta $C(s) \cdot G(s)$, com ganho k igual a -1.

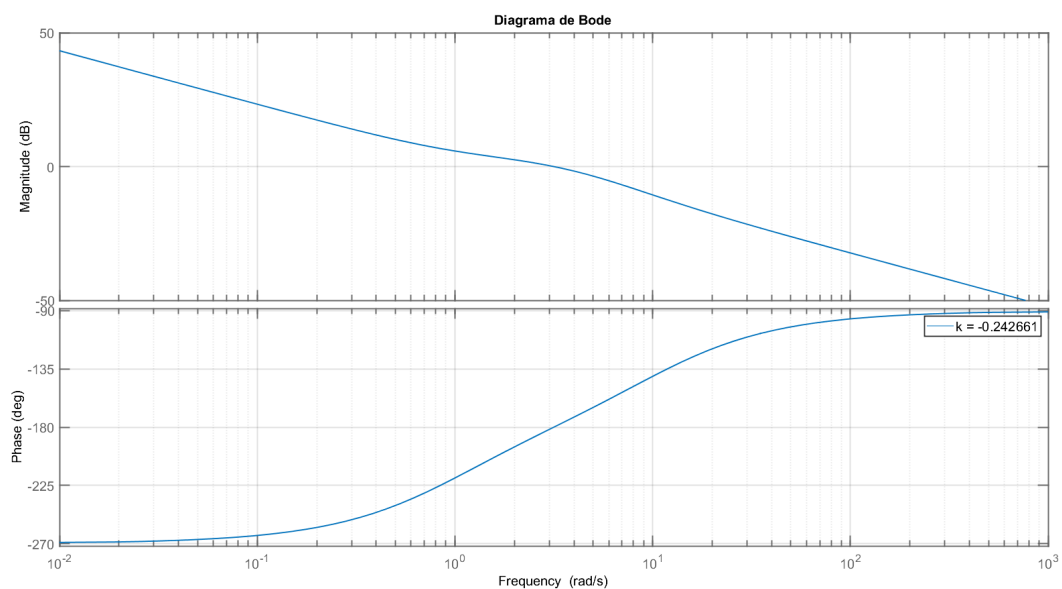


Figura 3: Diagrama de Bode de $G(s) \cdot C(s)$ com a constante de ganho k do controlador igual a -0,242661.

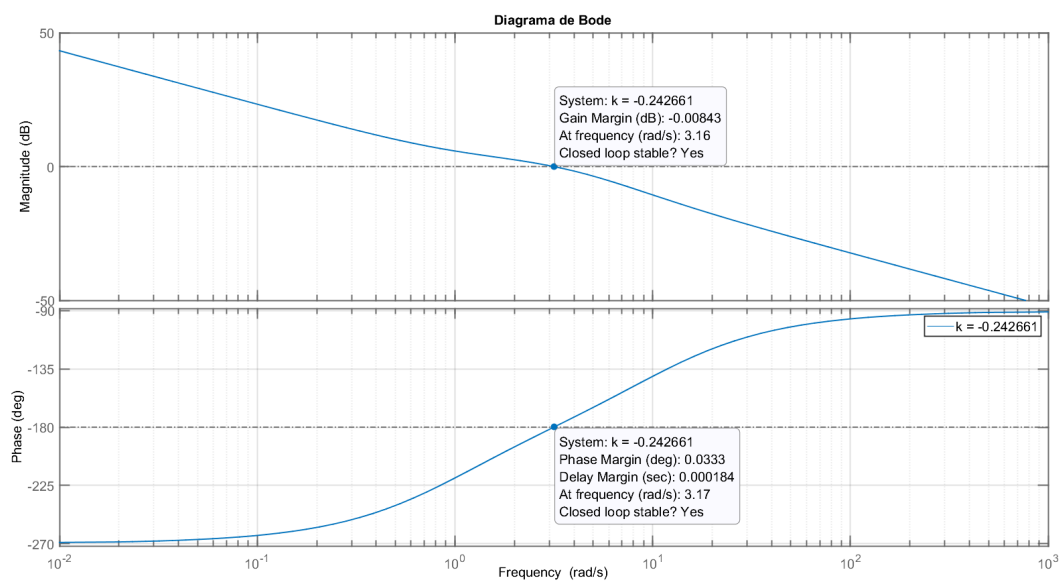


Figura 4: Margens de estabilidade do sistema em malha aberta $C(s) \cdot G(s)$, com ganho k igual a -0,242661.

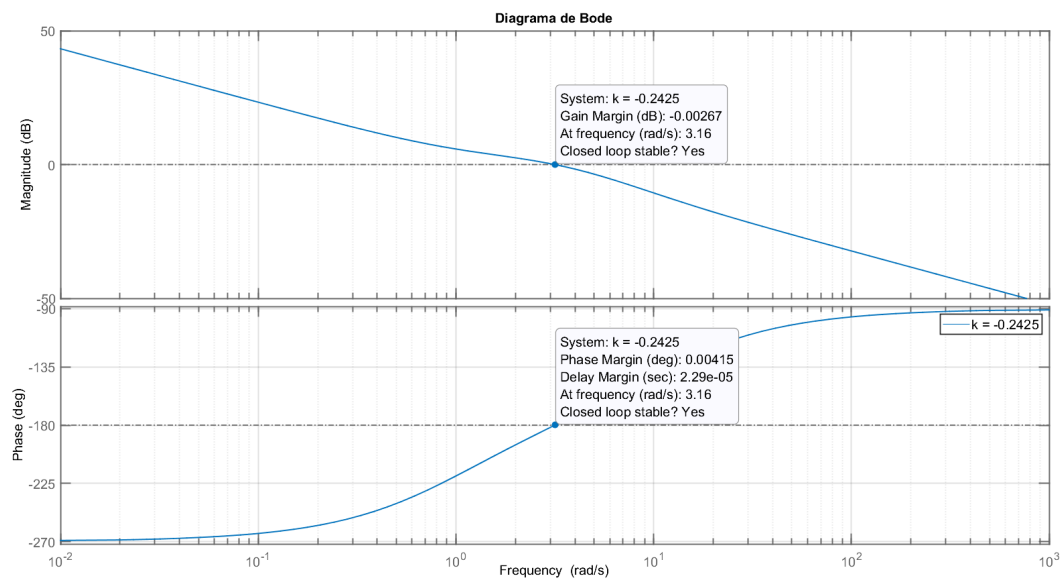


Figura 5: Margens de estabilidade do sistema em malha aberta $C(s) \cdot G(s)$, com ganho k igual a -0,2425 (marginalmente estável).

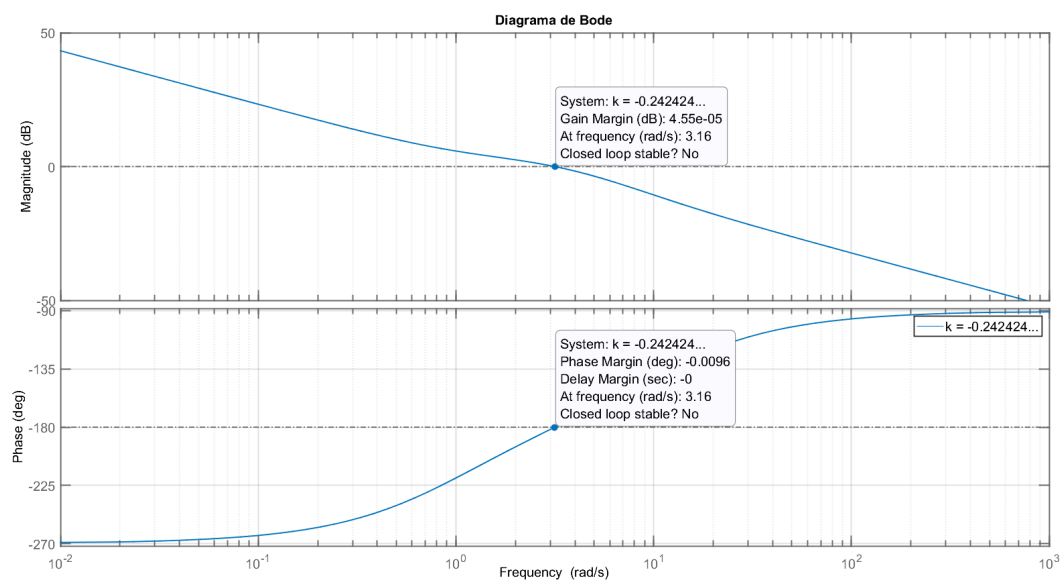


Figura 6: Margens de estabilidade do sistema em malha aberta $C(s) \cdot G(s)$, com ganho k igual a -0,24242424 (instável).

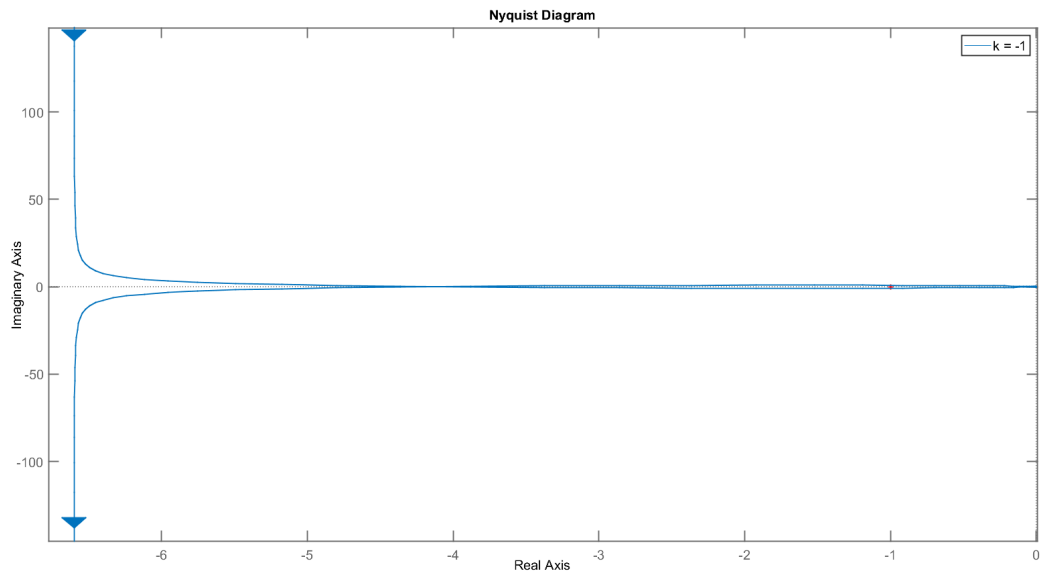


Figura 7: Diagrama de Nyquist do sistema $G(s) \cdot C(s)$ com ganho k igual a -1 .

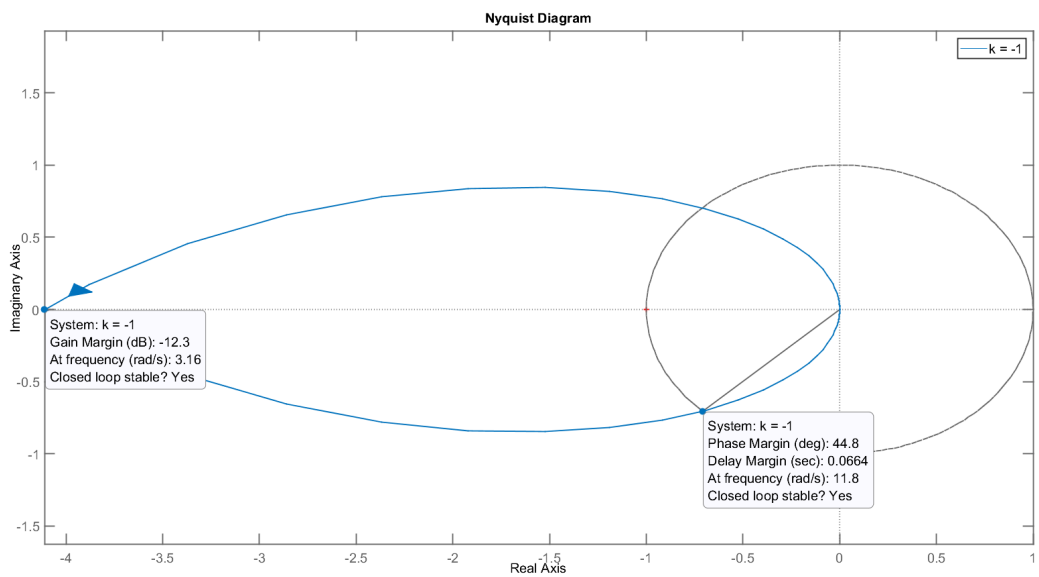


Figura 8: Margens de estabilidade do sistema em malha aberta $C(s) \cdot G(s)$, com ganho k igual a -1 , através da análise do diagrama de Nyquist.

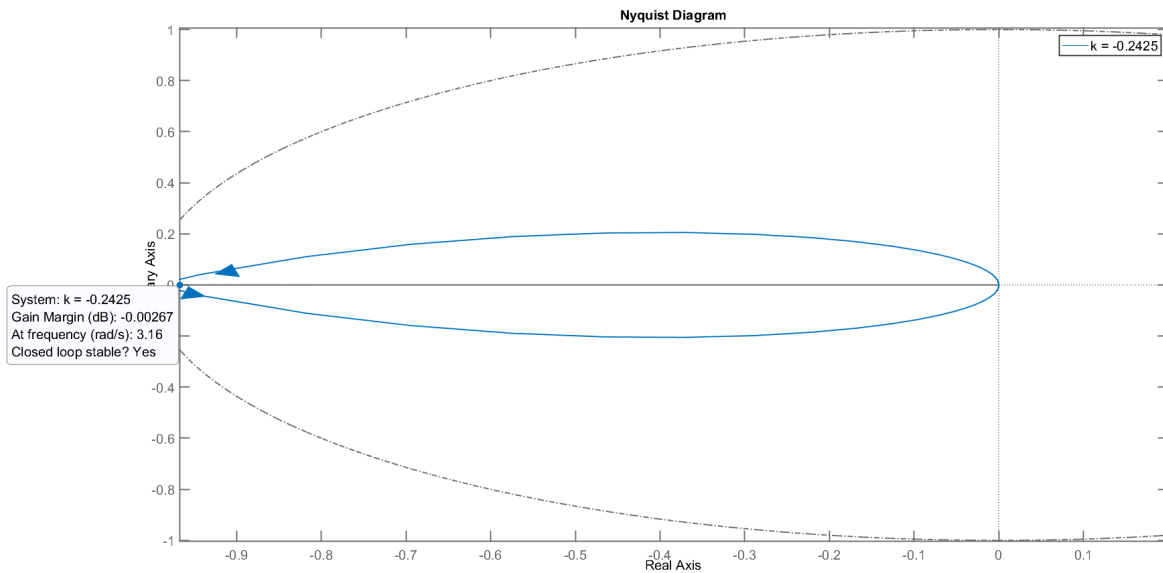


Figura 9: Margens de estabilidade do sistema em malha aberta $C(s) \cdot G(s)$, com ganho k igual a -0,2425 (marginalmente estável), através da análise do diagrama de Nyquist.

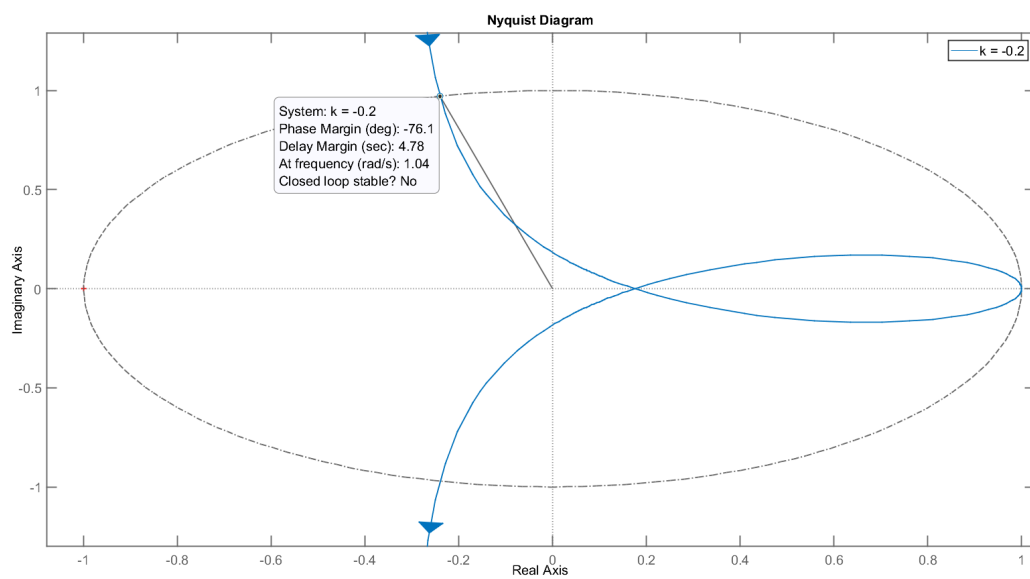


Figura 10: Diagrama de Nyquist de $C(s)G(s) + 1$ com ganho k igual a -0,2.

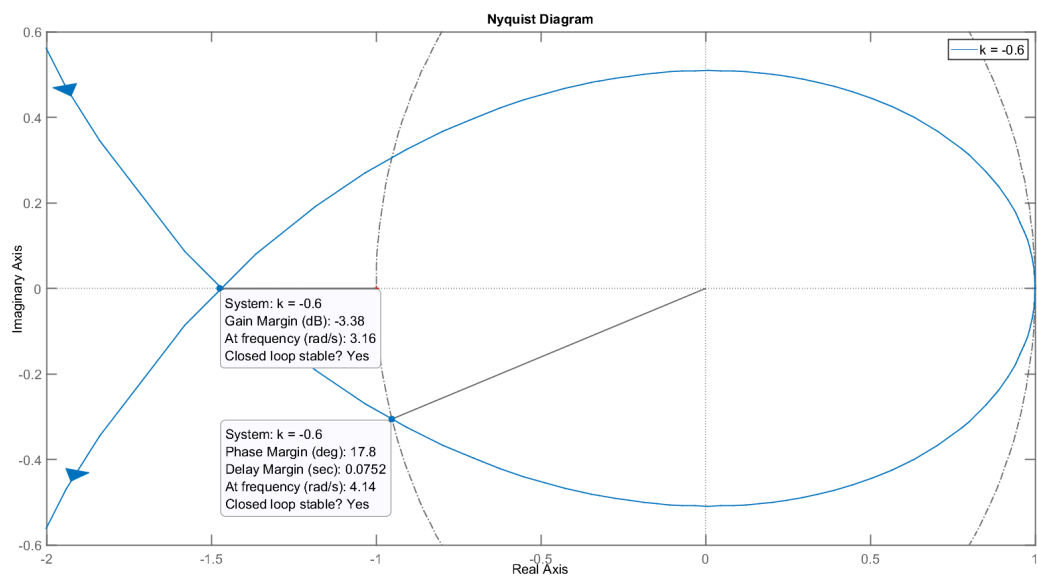


Figura 11: Diagrama de Nyquist de $C(s)G(s) + 1$ com ganho k igual a $-0,6$.