

Relatório da Tarefa 3: Estabilidade de sistemas de controle.

Aluno: Mairon Schneider Cardoso.

Data: 23/04/2021

Número de matrícula: 17102515.

1 Introdução

A estabilidade de um sistema realimentado é uma característica expressiva (pré-requisito na maioria dos casos) que deve ser observada com cuidado, na concepção do controlador, através do último relatório conseguimos perceber o impacto, em consumo potência, de um sistema cuja resposta ao degrau do sistema tende a um valor infinito, isto é, é imprescindível garantir que dado uma determinada entrada temporal limitada para o sistema a saída será também limitada, de modo que, consigamos estabelecer padrões de comportamento do sistema. Contudo, tratávamos anteriormente somente da análise transiente do sistema, no trabalho proposto desta semana, diferentemente dos anteriores, utilizaremos uma técnica alternativa para investigar a instabilidade do sistema (no plano s) e também empregaremos uma técnica que nos permite calcular os intervalos onde é possível deslocar os polos no plano, isto é, agora efetivamente iremos projetar o sistema de modo a garantir a resposta esperada e não somente analisar as características transientes.

2 Resultados e Discussões

Em primeiro momento, partiremos da análise da planta que equacionamos no primeiro trabalho, isto é, extrairemos novamente a equação característica da planta por técnicas de análise de circuito, entretanto, dessa vez, equacionaremos o ganho da planta em termos da variável k e não de 1,2 (todos os cálculos estão presentes no arquivo **Cálculo.pdf**), deste modo obteremos a equação 1. Através dessa equação descrita em termos de k , utilizaremos o critério de estabilidade de Routh-Hurwitz na equação característica da planta.

$$G_1(s) = \frac{-k \cdot (5s + 50)}{0,6s^2 + 6s - 5ks - 50k + 50} = \frac{-k \cdot (5s + 50)}{0,6s^2 + s(6 - 5k) - 50k + 50} \quad (1)$$

O critério de estabilidade de Routh-Hurwitz nos diz que, ao reescrevermos a equação característica e aplicarmos o denominador da função de transferência no arranjo (equação 2), descrita pela equação 3, obteremos as incógnitas b_{n-1} , c_{n-1} e z_{n-1} empregando as equações 4, através da obtenção dessas incógnitas, é possível afirmar que o sistema será estável sempre que os elementos da primeira coluna tiverem o mesmo sinal, isto é, o critério de estabilidade de Routh-Hurwitz indica se há polos instáveis de um sistema sem ter que calcular, através disso é possível extrair a estabilidade absoluta, contudo, há algumas desvantagens quanto a aplicação desse critério, uma delas é justamente não se preocupar com a melhora da estabilidade relativa, além disso, o critério nos diz se o sistema é estável ou não, porém, ele não nos diz como podemos torna-lo estável partindo de um sistema instável.

$$q(s) = \underbrace{0,6 s^2}_{a_n} + \underbrace{s(6 - 5k)}_{a_{n-1}} - \underbrace{50k + 50}_{a_{n-2}} \quad (2)$$

$$\begin{array}{c|ccc} s^n & a_n & a_{n-2} & a_{n-4} \cdots \\ s^{n-1} & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} \cdots \\ s^{n-2} & b_{n-1} & b_{n-3} & b_{n-5} \cdots \\ s^{n-3} & c_{n-1} & c_{n-3} & c_{n-5} \cdots \\ \vdots & \vdots & & \\ s^0 & z_{n-1} & & \end{array} \quad (3)$$

$$b_{n-1} = \frac{-1}{a_{n-1}} \begin{vmatrix} a_n & a_{n-2} \\ a_{n-1} & a_{n-3} \end{vmatrix} \quad c_{n-1} = \frac{-1}{b_{n-1}} \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ b_{n-1} & b_{n-5} \end{vmatrix} \quad (4)$$

No âmbito da concepção da planta com ganho adequado na fonte de corrente (fazendo com que ela seja Bibo-estável), conseguimos extrair dois intervalos de ganho, os quais garantem a condição para assegurar que os elementos da primeira coluna sejam maiores que zero, ou seja, não haja troca de sinal, os dois intervalos serão $k_1 < 1$ e $k_2 < 1,2$ e, na concepção do sistema, consideraremos marginalmente estável ($k = 1$) como instável, afinal, no âmbito de projetos é interessante não correr o risco de acabar saindo da região de estabilidade, uma vez que o consumo de potência tenderá ao infinito, criando um grande problema para o sistema e tudo que está conectado a ele.

Através da simulação da planta, conseguimos observar alguns comportamentos relevantes quando ajustamos o ganho. Inicialmente definimos um ganho em uma margem segura, em relação ao intervalo calculado anteriormente, então é utilizado um ganho $k = 0,8$ fazendo com que nosso sistema responda de forma estável, através do diagrama de Bode do sistema (figura 1), notamos o comportamento de um passa-baixa (semelhante ao comportamento observado no relatório 1), entretanto, o diagrama de Bode nós expõe um ganho maior em uma determinada faixa de frequência e isso pode ser explicado através do diagrama de polos e zeros do sistema (figura 2), através dele, conseguimos perceber que o deslocamento dos polos para o lado esquerdo do plano acaba por gerar uma frequência de ressonância, consequência da parte complexa dos polos, além disso, através do diagrama de polos e zeros, ele nos informa que o ganho é de $\approx 24\%$, o que realmente condiz com o ganho, como pode ser observado na figura 3.

Portanto, como projetista, é importante compreender que, apesar de parecer contra-intuitivo, ao alterarmos somente o comportamento dos polos (quando buscamos a estabilidade), podemos gerar uma frequência de ressonância que altera também o valor do ganho, por isso é importante testar o sistema através de um diagrama de Bode, além disso, em filtros passa baixa de grandes ordens esse efeito é mais intenso, então é preciso analisar os *trade-offs*. A resposta ao degrau do sistema $G_1(s)$, como esperado de um sistema estável, tende a um valor constante em regime permanente (figura 4), alterar k resulta em mudanças nas características transientes (figura 5).

A análise de estabilidade relativa, não deseja somente saber se o sistema é ou não estável (estabilidade absoluta), ela também se preocupa em analisar o quão fortemente estável está. A estabilidade relativa é definida como uma propriedade que é medida pela parte real de cada polo e um dos métodos para medir essa estabilidade relativa é deslocar o eixo imaginário e paralelamente aplicar o critério de estabilidade de Routh-Hurwitz, assim, aplicando a relação $s_n = s + p$ em cada polo, onde p é igual ao deslocamento do eixo imaginário para cada polo em que se deseja adquirir a estabilidade relativa.

Aplicando os conceitos de estabilidade relativa, no sistema presente na equação 5, utilizando um deslocamento de -1,5 na tentativa de garantir que nenhum polo esteja a direita deste valor de deslocamento, fazemos uma relação igual a $s = s - 1,5$ deslocando os polos no eixo imaginário de modo a obtermos a equação representada pela equação 6. Após obter a equação que descreve o denominador e, através dessa equação, é necessário verificar a veracidade quanto ao critério de estabilidade de Routh-Hurwitz através da construção do arranjo, anteriormente citado, e será necessário observar se o sistema não terá alterações de sinais na primeira coluna, o que nos resultará em condições iguais a $k_1 < -0,45807$, $k_2 > -0,06276$ e $k_3 > -0,5088$ e dentro desses valores, é possível estabelecer uma interseção de intervalos que resultará em uma possível condição, isto é, além de estável (por não possuir troca de sinais na primeira coluna) também será possível deslocar individualmente todos os polos do sistema.

$$T(s) = \frac{-6ks^2 - 66ks - 60k}{0,6s^3 - 10s - 6ks^2 - 66ks - 60k} \quad (5)$$

$$q(s - 1,5) = 0,6s^3 + (-2,7 - 6k)s^2 + (-5,95 - 48k)s + 12,975 + 25,5k \quad (6)$$

Verificando o diagrama de Bode desse sistema com um $k = -0,5087$ dentro do intervalo de interseção (figura 6), percebemos o impacto do polo em zero, consequência do controlador no diagrama

de ganho e fase, ainda possuímos a característica oscilatória dos polos complexos, e portando, também seremos afetados pela frequência de ressonância, além disso, observando o diagrama de polos e zeros (figura 7) conseguimos notar que quem ditará o deslocamento será o polo em zero do controlador. Utilizando o $k = -0,5087$ na resposta ao degrau do sistema (figura 8). Variando o valor de k , conseguimos perceber que simultaneamente alteramos as características transientes do sistema (figura 9), isto é, através do conceito de estabilidade relativa, é possível obter um menor tempo de acomodação ou até mesmo um menor sobrepasso.

Aplicando um deslocamento de -10 nos polos, obtemos a equação 7, devemos considerar o critério de estabilidade através do arranjo, e nele, conseguimos perceber que, em certo momento, a primeira coluna inverterá o sinal (proveniente do -500, que observamos na equação), como mencionado no livro do Ogata, a partir do momento em que identificamos que o sistema é instável pelo critério de estabilidade de Routh-Hurwitz, levando em consideração as técnicas que conhecemos atualmente, não conseguimos encontrar uma solução para deslocar os polos, para que não haja nenhum polo a direita de -10.

$$q(s - 10) = 0,6s^3 + (-18 - 6k)s^2 + (170 + 54k)s + (-500) \quad (7)$$

3 Conclusões

Portanto, através dos experimentos propostos a cerca do critério de estabilidade de Routh-Hurwitz, na tentativa de obter a estabilidade absoluta, conseguimos identificar a estabilidade de um sistema aplicando o denominador da função de transferência em um arranjo que nos diz, através de quatro diferentes casos, a possibilidade de estabilidade do sistema, além disso, observamos também que, alterar somente os polos do sistema, na tentativa de deslocá-lo no eixo real, pode causar uma alteração nas características transientes do sistema, observamos isso empregando o deslocamento no eixo quando buscávamos compreender acerca da estabilidade relativa do sistema.

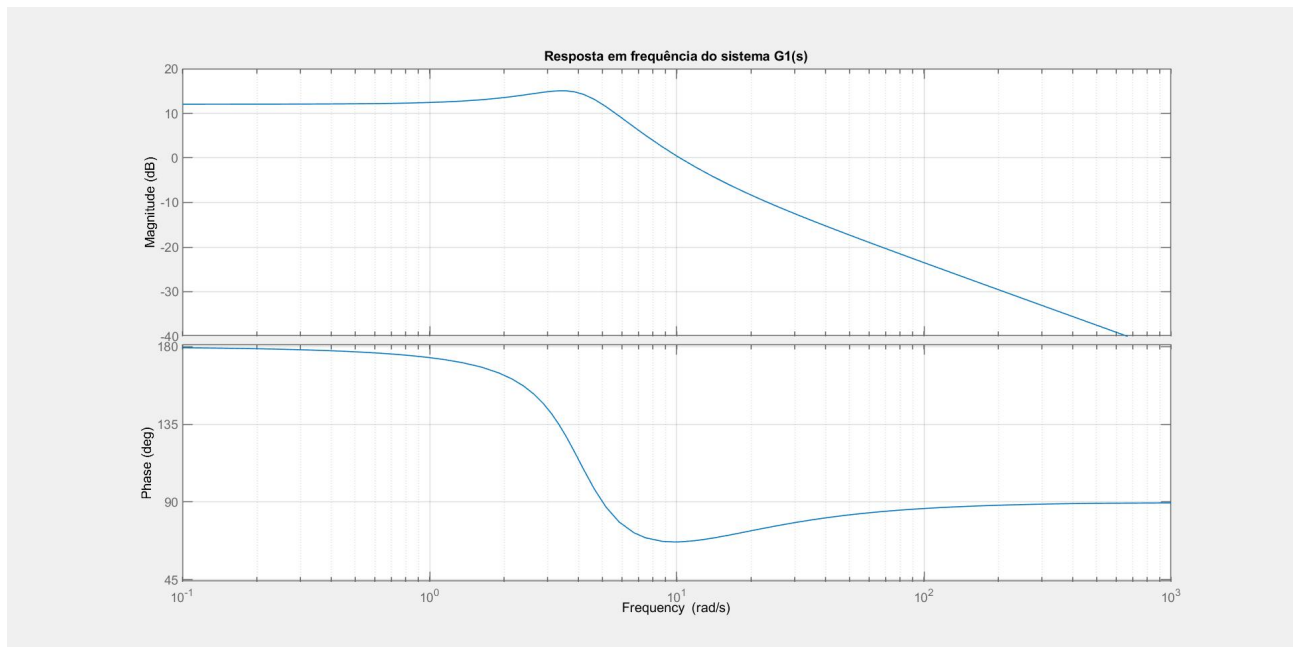


Figura 1: Diagrama de Bode da planta $G1(s)$ com 0,8 de ganho na fonte controlada.

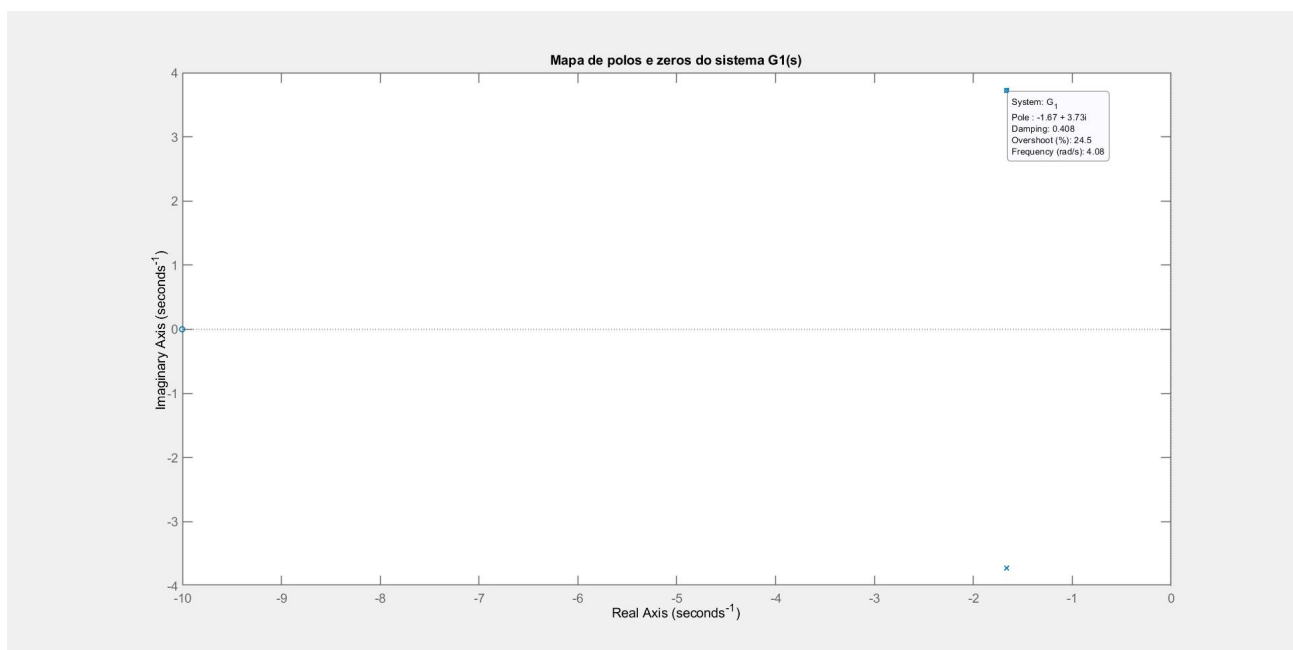


Figura 2: Diagrama de polos e zeros da planta $G1(s)$ com 0,8 de ganho na fonte controlada.

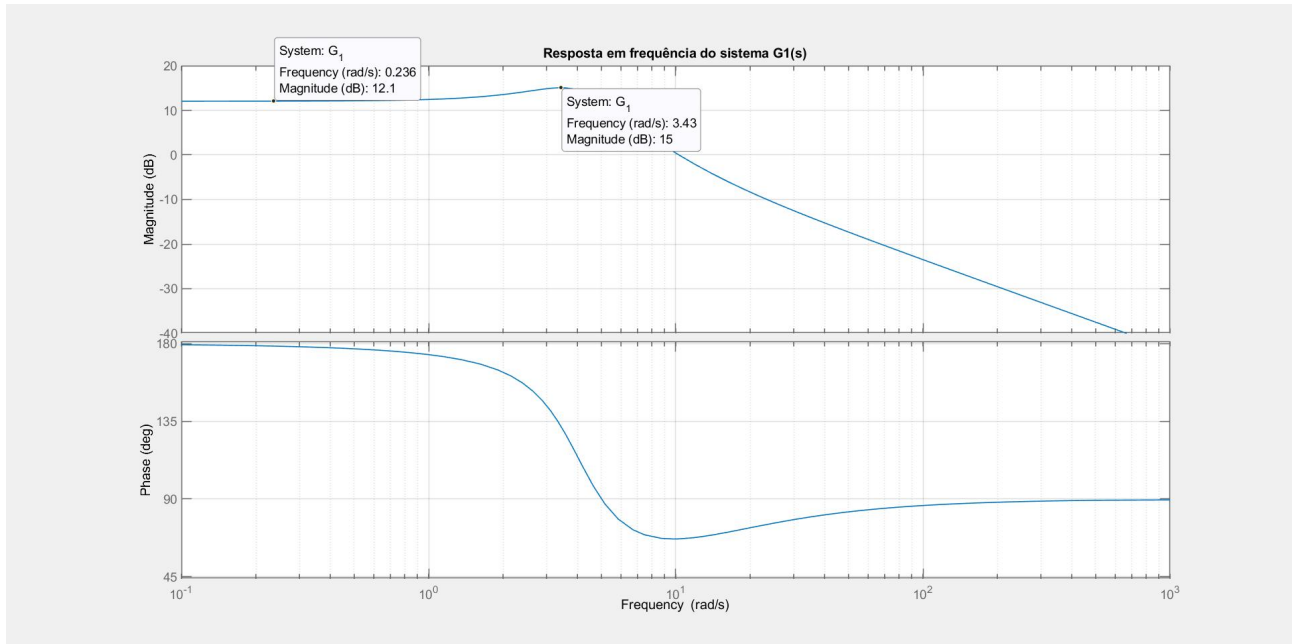


Figura 3: Verificando o parâmetro de *overshoot* do diagrama dos polos e zero com a frequência de ressonância da planta.

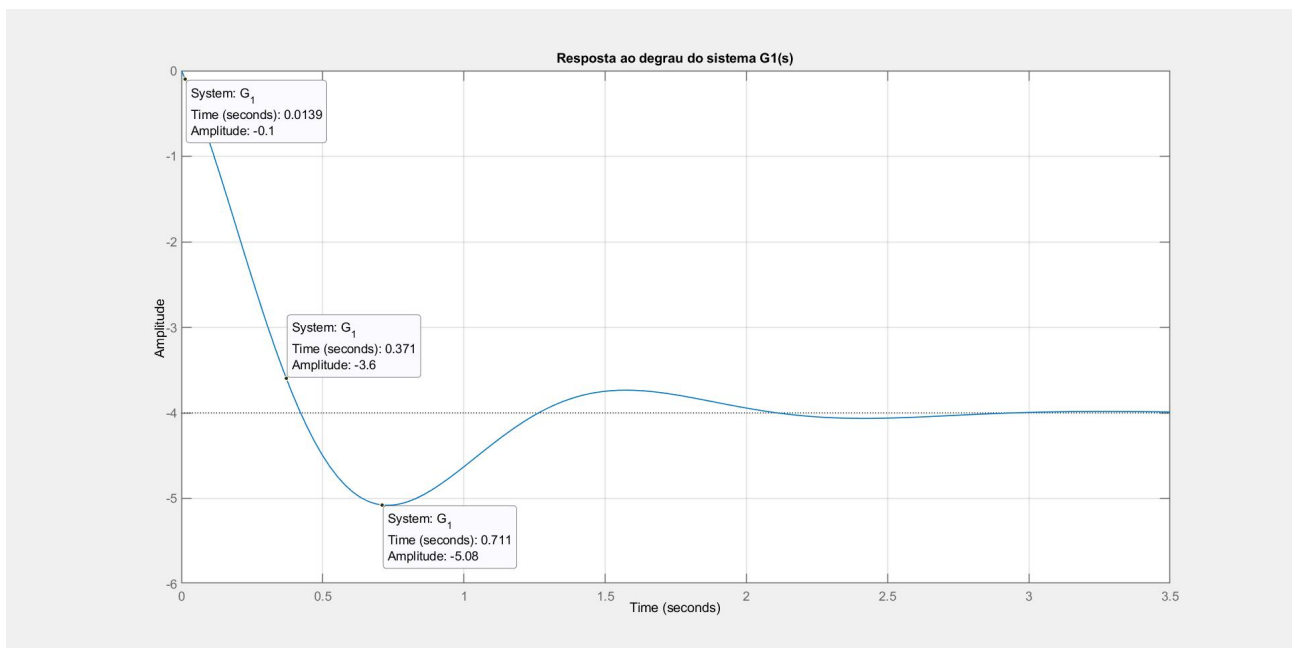


Figura 4: Resposta ao degrau da planta $G_1(s)$ com 0,8 de ganho na fonte controlada.

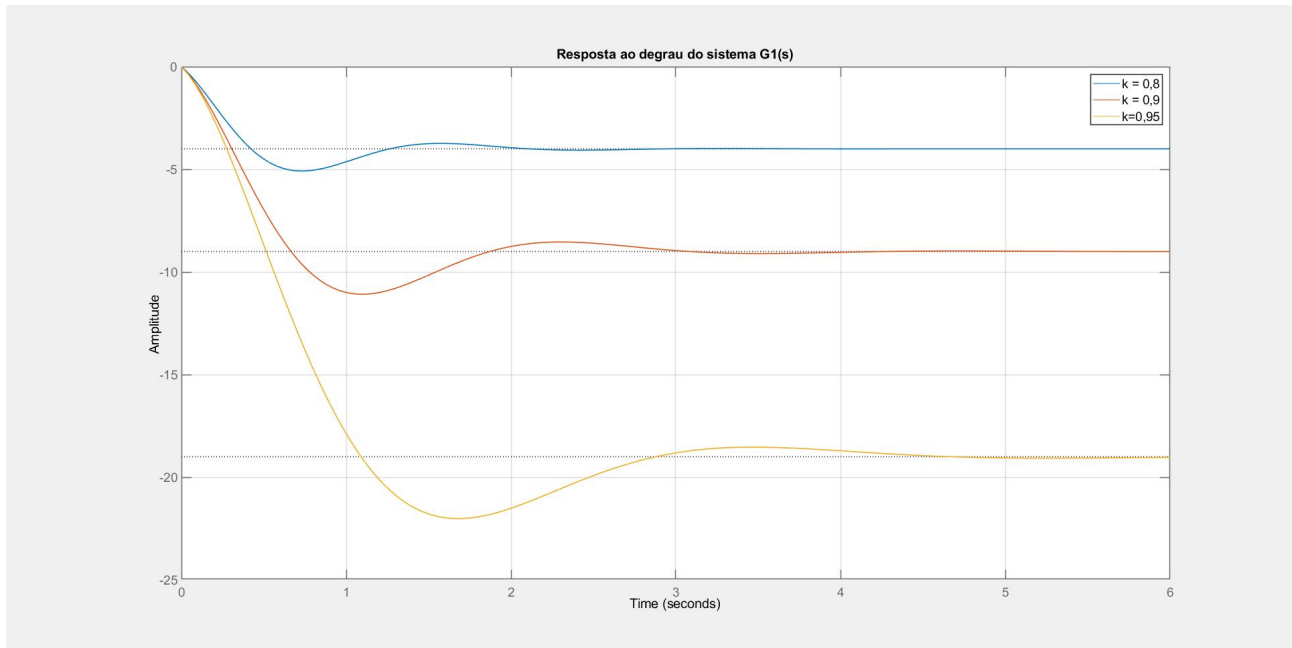


Figura 5: Resposta ao degrau da planta $G1(s)$ com diferentes ganhos na fonte controlada.

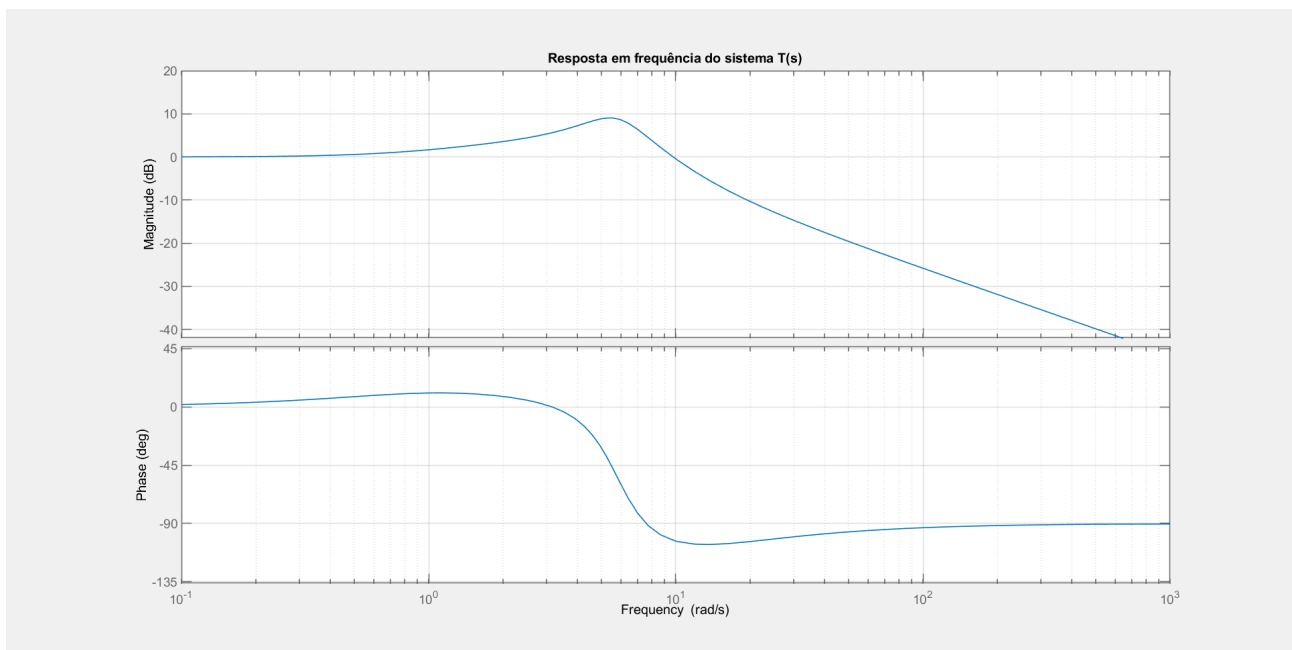


Figura 6: Diagrama de Bode do sistema $T(s)$.

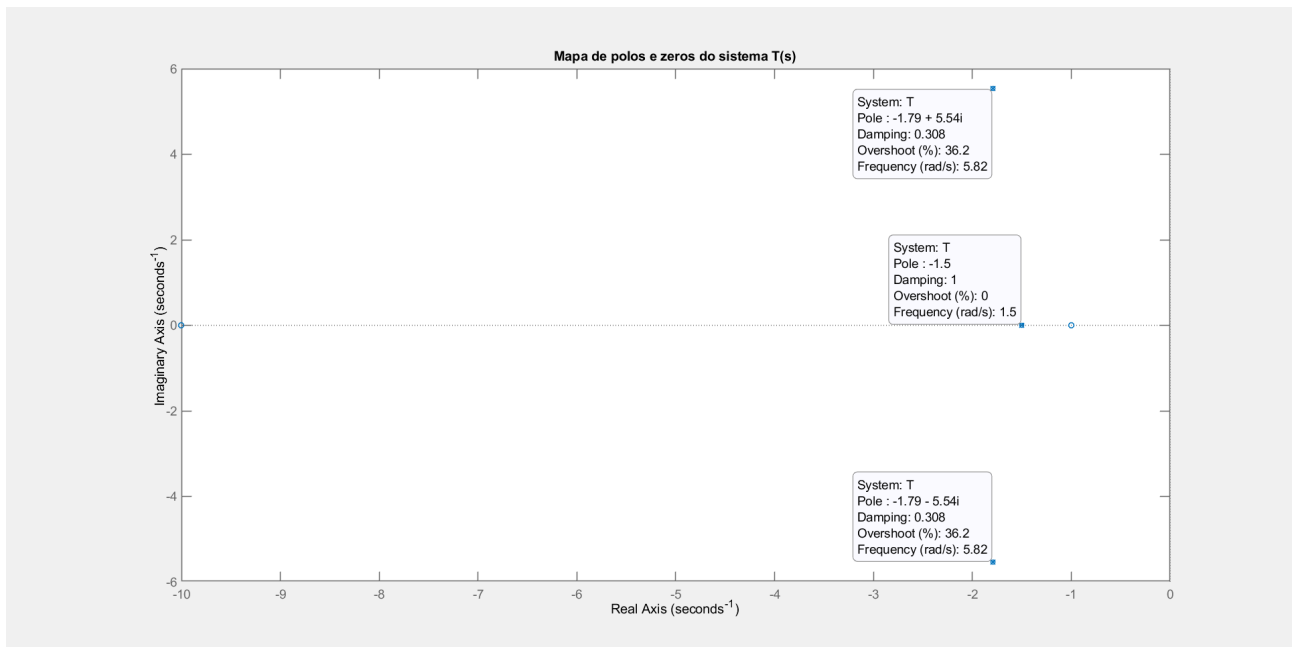


Figura 7: Diagrama de polos e zeros do sistema $T(s)$, garantindo que não tenha polos a direita de 1,5.

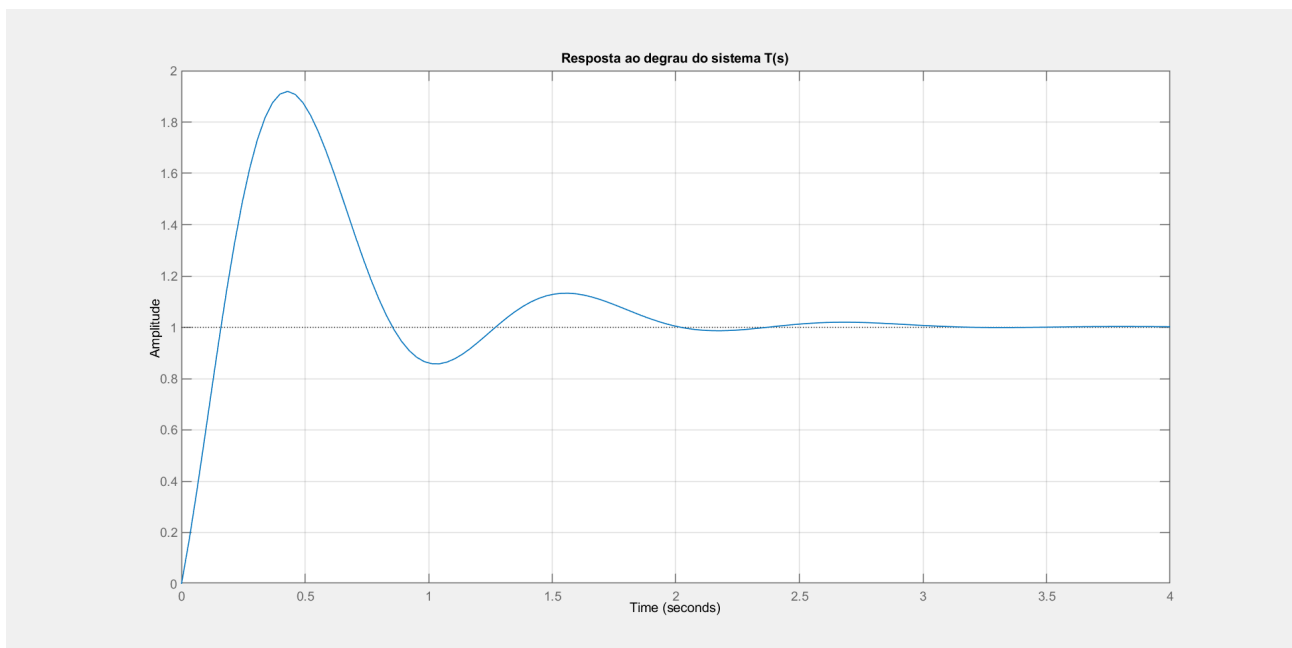


Figura 8: Resposta ao degrau do sistema $T(s)$.

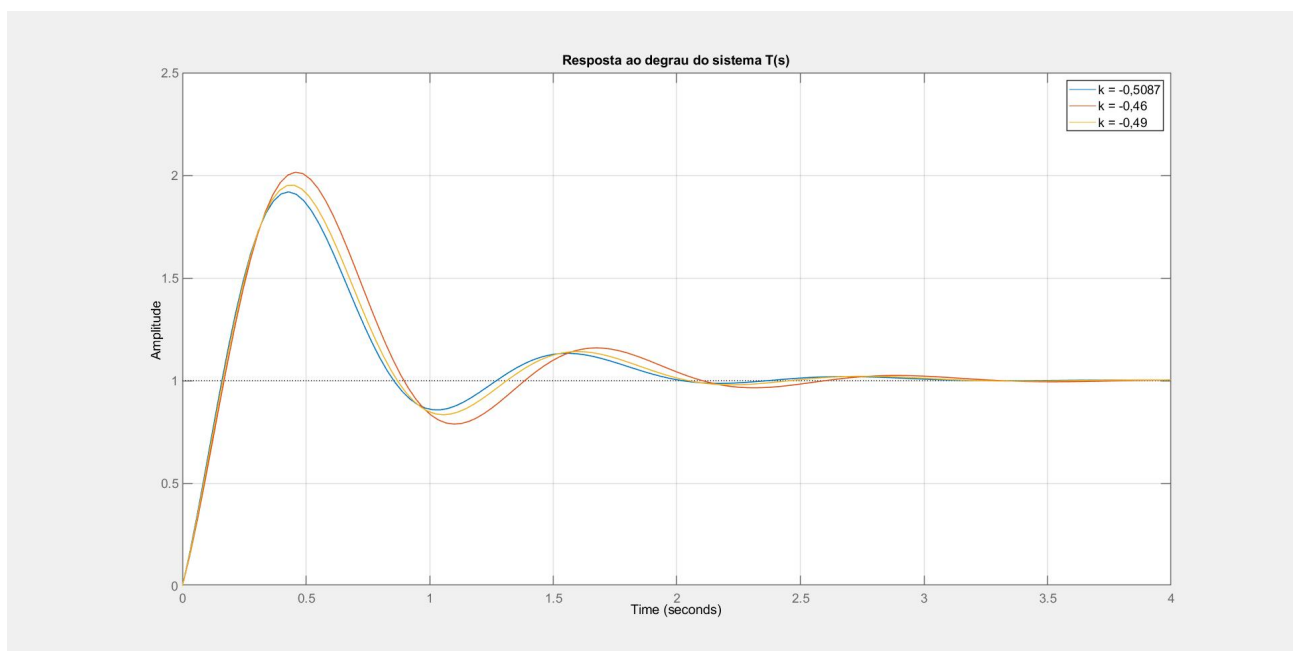


Figura 9: Resposta ao degrau da planta $T(s)$ com diferentes ganhos na fonte controlada