Universidade Federal de Pelotas
Curso de Engenharia de Computação
Disciplina: 22000178 – Sistemas e Sinais
Turma: 2020/2 – T52
Professor: Vinícius V. A. Camargo

Relatório da Tarefa 9: Teorema da amostragem.

Aluno: Mairon Schneider Cardoso. Data: 04/12/2020

Número de matrícula: 17102515.

1 Introdução

O processo de amostragem de um sinal é um importante tópico quando pensamos na possibilidade de transitar entre o tempo contínuo e tempo discreto, isto é, como observado nos capítulos anteriores, o domínio contínuo e discreto eram facilmente distinguíveis nas suas formas de manipulação, por exemplo, as transformadas de Laplace e Z, utilizadas para transformar o sinal para o espectro da frequência, empregavam diferentes elementos matemáticos para o cálculo da representação, a transição do tempo contínuo para o tempo discreto possibilita a integração de conversores para que possamos escolher como manipularemos os sinais, entretanto, é importante notar que a conversão dos sinais contínuos para discreto é algo que podem gerar graves erros de perda de informação, por isso é necessário a correta quantização observando os *trade-offs* de custo, número de amostras e frequência.

2 Resultados e Discussões

Antes de efetivamente entendermos o teorema de amostragem de um determinado sinal, precisamos reintroduzir alguns conceitos vistos durante a disciplina e adicionar alguns novos. A função impulso unitário (equação 1) será extremamente necessária no teorema da amostragem, pois, através da função e da propriedade de deslocamento no tempo, conseguiremos dimensionar o valor de uma determinada função multiplicada por $\delta(t)$, nos retornando o valor da função apenas no instante do impulso, isto é, dada uma função $y(x) = sin(x + 1,54)$ a multiplicação dessa função por uma delta de Dirac $\delta(x - x_0)$, nos resultará em um impulso que terá o mesmo valor da função $y(x)$ no instante do impulso, podemos escrever o resultado como demonstrado na equação 2 e conseguimos observar o comportamento dessa função através da figura 1.

$$\delta(t) = \begin{cases} 0, & \forall t \neq 0 \\ 1 & = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt \end{cases} \tag{1}$$

$$y(x) \cdot \delta(x - x_0) = y(x_0) \cdot \delta(x - x_0) \tag{2}$$

A expressão anteriormente observada representa a propriedade do peneiramento que também é chamada de amostragem e será utilizada como introdução para compreendermos o teorema da amostragem, através da propriedade do deslocamento no tempo, conseguimos avaliar o valor de uma função em qualquer instante, para isso, construiremos o chamado trem de impulso (figura 2) que nada mais é que o deslocamento no tempo do impulso a um determinado período (T), então, através do trem de impulso, conseguimos compor uma equação que descreve a conversão de um sinal em tempo contínuo para tempo discreto (equação 3).

$$x_\delta(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \cdot \delta(t - nT_s) \tag{3}$$

2.1 Transformada de Fourier e extração da máxima frequência do sinal (ω_m)

Dado três sinais em domínio tempo (equações 4a, 4b e 4c, respectivamente), conseguimos, através da transformada de Fourier, obter o espectro em frequência dos sinais, nesse caso, para obter a transformada de Fourier do sinal foram utilizados os pares básicos, vistos anteriormente e aplicado a propriedade de convolução na frequência e a propriedade de peneiramento.

$$x_1(t) = \frac{(2sinc(2t) + sinc(t))}{\pi} \tag{4a}$$

$$x_2(t) = sin(t) \cdot cos\Big(\frac{t}{2}\Big) \tag{4b}$$

$$x_3(t) = (sin(2\pi t) + 1) \cdot e^{-|t|} \tag{4c}$$

O primeiro sinal $x_1(t)$ (figura 3), tem na sua representação de frequência o período extraído através do $|X(jw)|$ (figura 4), nele conseguimos extrair uma frequência máxima (ω_m) igual a 2 rad/s onde, fazendo a relação definida por $\omega_s = 2\pi * fs$, sabendo que $fs = \frac{1}{T_s}$ conseguimos dizer que o período do sinal é igual a π, entretanto, aplicando a teorema de Nyquist para precaver-se das eventuais percas de informações, obteremos um sinal com período T_{sn} igual a $\frac{\pi}{2}$.

O segundo sinal $x_2(t)$ (figura 5), semelhante ao sinal anterior, conseguimos equacionar o período através da frequência das transformadas, entretanto nesse caso, temos a limitação da representação da função impulso no MATLAB® o que não nos permite extrair o período através da transformada do sinal, portanto, temos que analisar matematicamente o sinal no domínio de tempo contínuo, sabendo que a equação genérica de seno é igual a $x(t) = Asin(\omega t + \varphi)$, então, observando a equação que descreve o sinal, percebemos que a frequência do seno somado com a do cosseno resultará em um valor máximo de frequência de 1,5 rad/s, o que convertendo para o período será igual a $T_s = 1,33\pi$ aplicando o teorema de Nyquist temos que $T_{sn} = \frac{2\pi}{3}$.

O terceiro sinal $x_3(t)$ (figura 6), se comporta como um sinal não limitado, isto é, o módulo da equação retornada pela transformada de Fourier apenas tende a zero (figura 7), o que torna-se impossível obter a máxima frequência do sinal, uma vez que caso estipulássemos valores, acabaríamos por prejudicar a integridades dos dados.

2.2 Sinais de espectro limitado

Como comentado anteriormente, para os sinais limitados, conseguimos dimensionar a máxima frequência do sinal e aplicar o teorema de Nyquist para reduzir ao máximo a perca de informação.

Com o período ideal extraído anteriormente do sinal $x_1(t)$, aplicamos na equação 3, na prática, como observamos anteriormente, o resultado das amostras serão resultado de uma função impulso para cada instante da curva de entrada a um passo de T_{sn} e isso pode ser realizado através do deslocamento dos pulsos proveniente do trem de impulsos. A reconstrução ideal do sinal $x_1[n]$ pode ser feito através da soma ponderada de funções $sinc(x)$ deslocadas pelo passo de T_{sn}, entretanto, o MATLAB® já implementa esse conjunto de operações na função denominada *stairs()* que foi empregada nesse relatório, conseguimos observar o comportamento de $x_1[n]$ reconstruído a partir de um período de amostragem igual $\frac{\pi}{2}$ na figura 8. Multiplicando a frequência de amostragem por duas vezes, conseguimos aumentar a quantidade e melhorar a qualidade das amostras, como pode ser observado na figura 9, entretanto, apesar do ideal ser sempre aumentar a frequência de amostras, para garantir uma melhor qualidade na reconstrução do sinal, na prática o aumento do número de amostras e consequentemente da frequência, pode ser um preço alto a se pagar, então, é importante quantizar o sinal levando em consideração os *trade-offs* exibidos na aula síncrona.

O $x_2[n]$ foi construído da mesma forma que o sinal anterior, entretanto, com diferentes frequências, isto é, o período adotado para extração das amostras no primeiro caso respeita o teorema de Nyquist definindo como período $T_{sn} = \frac{1}{3}$ o resultado da reconstrução do sinal a partir das amostras pode ser observado na figura 10, aumentando em duas vezes a frequência de amostragem desse sinal, temos o mesmo comportamento notado anteriormente (figura 11), quanto maior a frequência adotada melhor será a capacidade do sinal reconstruído de representar o sinal original (analógico).

2.3 Sinais de espectro não limitado

Como visto anteriormente, o módulo da transformada de um espectro não limitado tende a zero, isto é, é impossível calcular a frequência do sinal (como foi feito anteriormente) através do período do sinal, então o sinal $x_3(t)$ teve sua frequência convencionada no enunciado do exercício como 3Hz, onde, nesse experimento, queremos aplicar um filtro passa baixa para reduzir significativamente as altas frequências. Sabendo que o filtro se comporta como uma função $ret(\omega)$ na frequência, conseguimos através dos pares básicos escreve-ló na forma de $sinc(x)$ no domínio tempo e, através de uma convolução do sinal original $x_3(t)$ com a função $sinc(x)$ é possível filtrar as frequenciais altas. Nesse exercício especificamente, extraímos o comportamento do sinal reconstruído em duas frequências distintas, uma que se encontra abaixo da frequência de Nyquist (figura 12) e uma que está na frequência de 3Hz (figura 13), o que conseguimos perceber é que, como comentado na aula, a escolha de uma frequência de corte do filtro abaixo da frequência que descreve o teorema de Nyquist, causa uma deformação do sinal, que pode resultar em perca de informações do sinal (neste caso, o filtro tá limitando a banda de passagem a valores extremamente pequenos, deixando de pegar alguns picos significativos), já o filtro com frequência de corte igual a 3Hz consegue satisfatoriamente reconstruir o sinal sem deforma-ló consideravelmente.

3 Conclusões

Através dos experimentos propostos nesse trabalho, foi possível compreender como é feito a conversão de um sinal de tempo contínuo para o tempo discreto através do teorema da amostragem, neste trabalho também foi possível extrair a frequência máxima de três sinais diferentes e adequá-lós ao teorema de Nyquist, em especifico, o terceiro sinal é a observação da necessidade de um filtro passa-baixas aplicado em um sinal de espectro não limitado. Conseguimos observar que quanto maior a frequência das amostras de um sinal, melhor será a representação discreta do sinal de tempo contínuo, entretanto, no mundo real, precisamos levar em consideração o custo por conversões com frequências altas e consequentemente um grande número de amostras, tornando muito caro a conversão de sinais que exigirem muitos bits para representação, por exemplo.

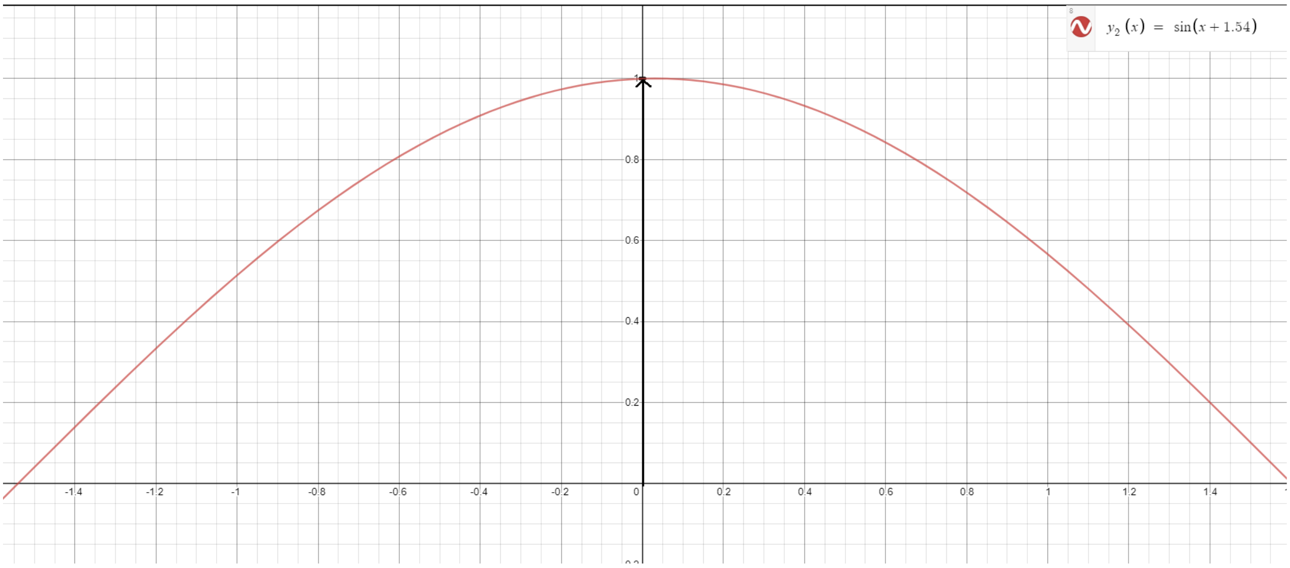

Figura 1: Função $\delta(t_0) \cdot m(t_0)$.

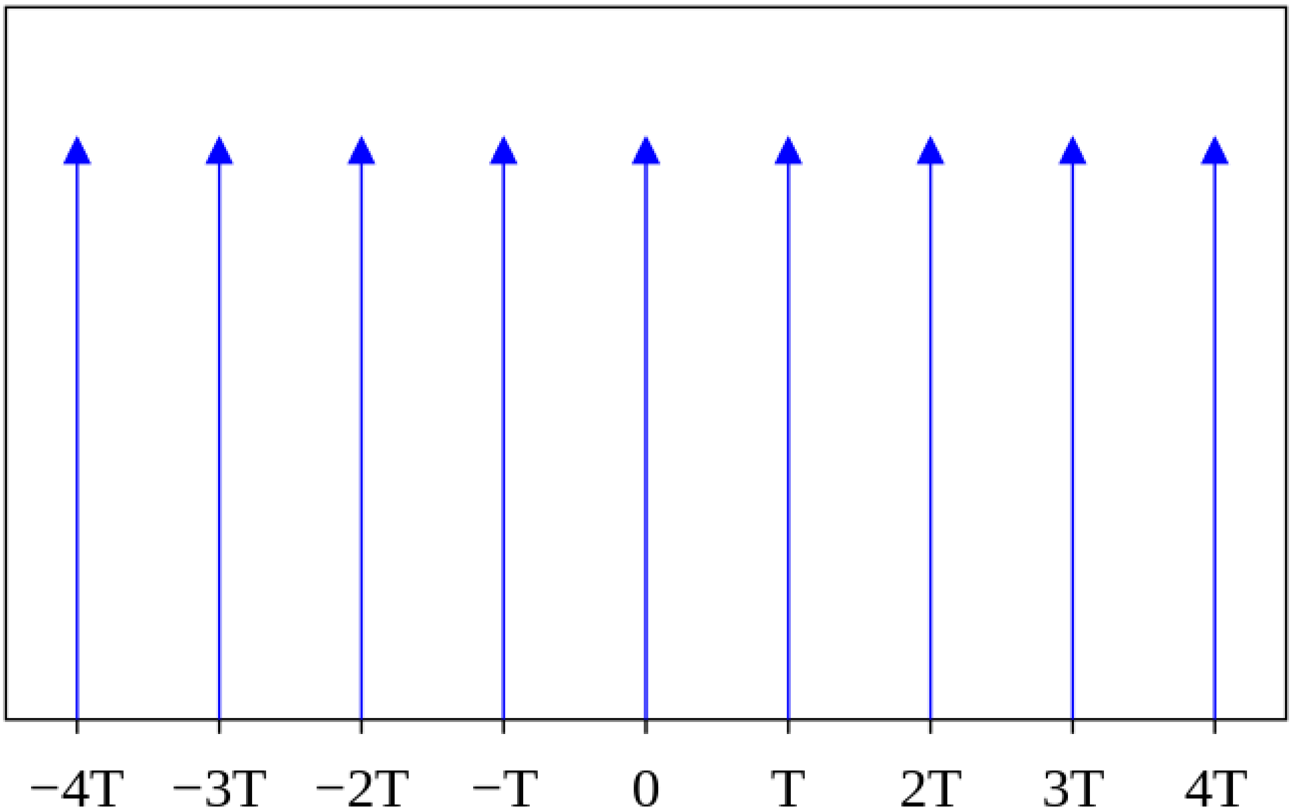

Figura 2: Trem de impulsos.

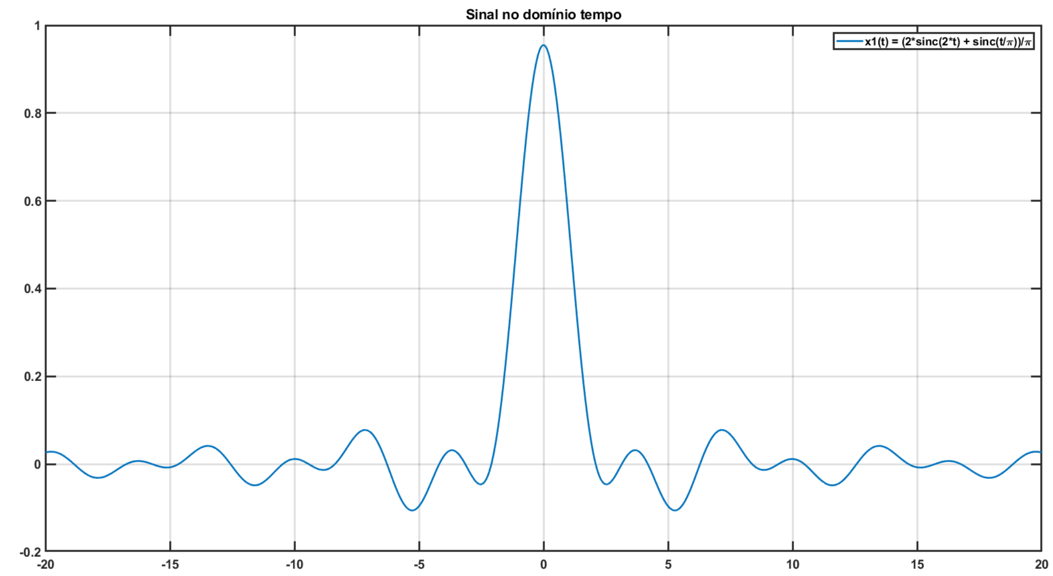

Figura 3: $x_1(t)$ plotado dos intervalos de -20 a 20.

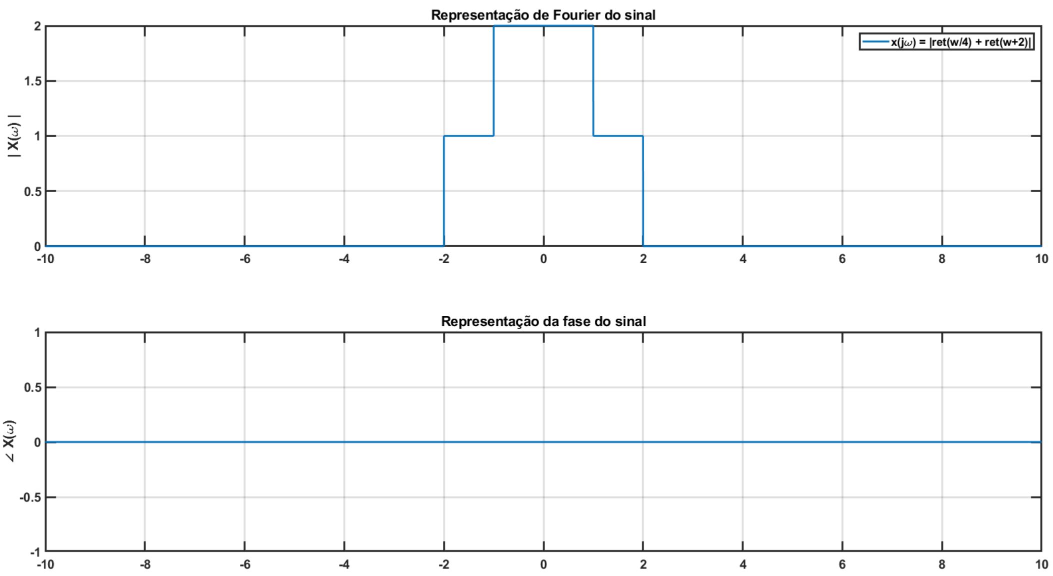

Figura 4: Transformada de Fourier do sinal $x_1(t)$.

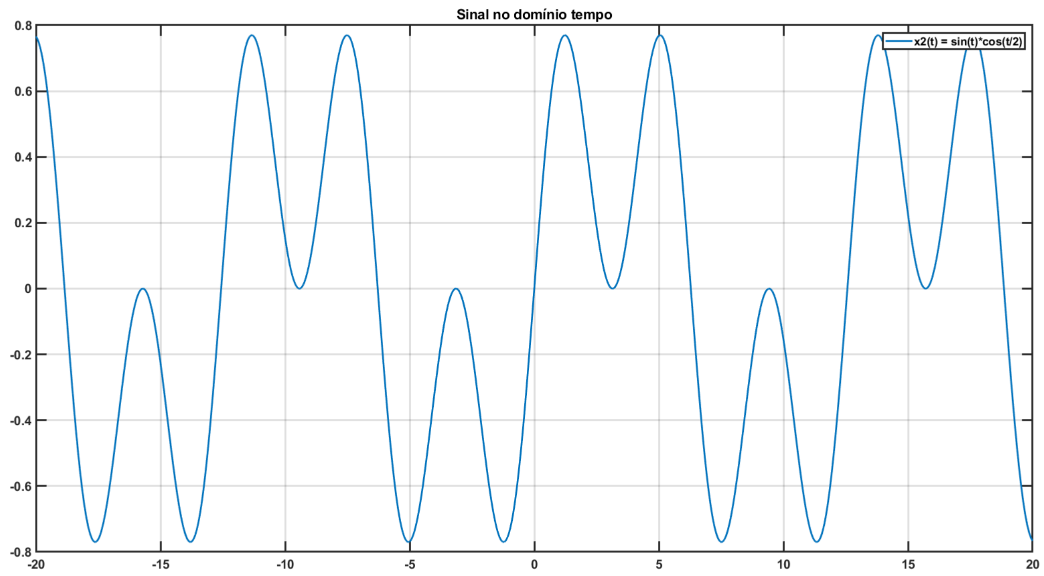

Figura 5: $x_2(t)$ plotado dos intervalos de -20 a 20.

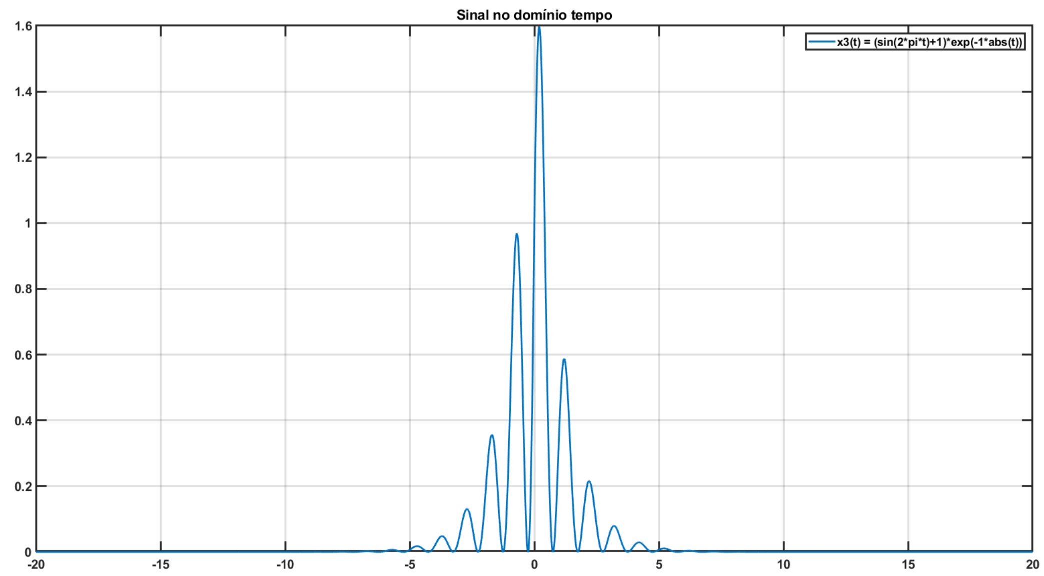

Figura 6: $x_3(t)$ plotado dos intervalos de -20 a 20.

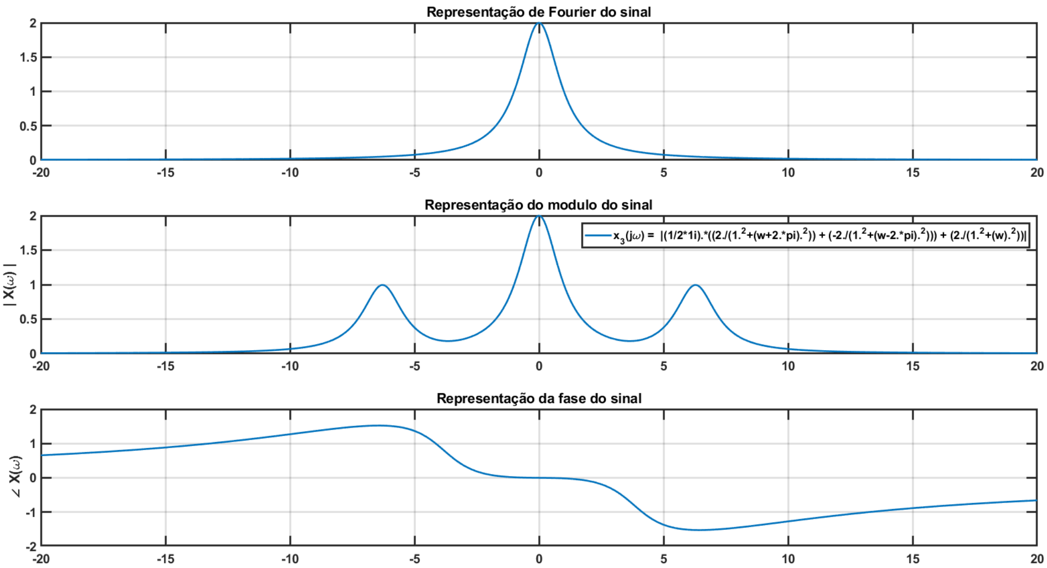

Figura 7: Transformada de Fourier do sinal $x_3(t)$.

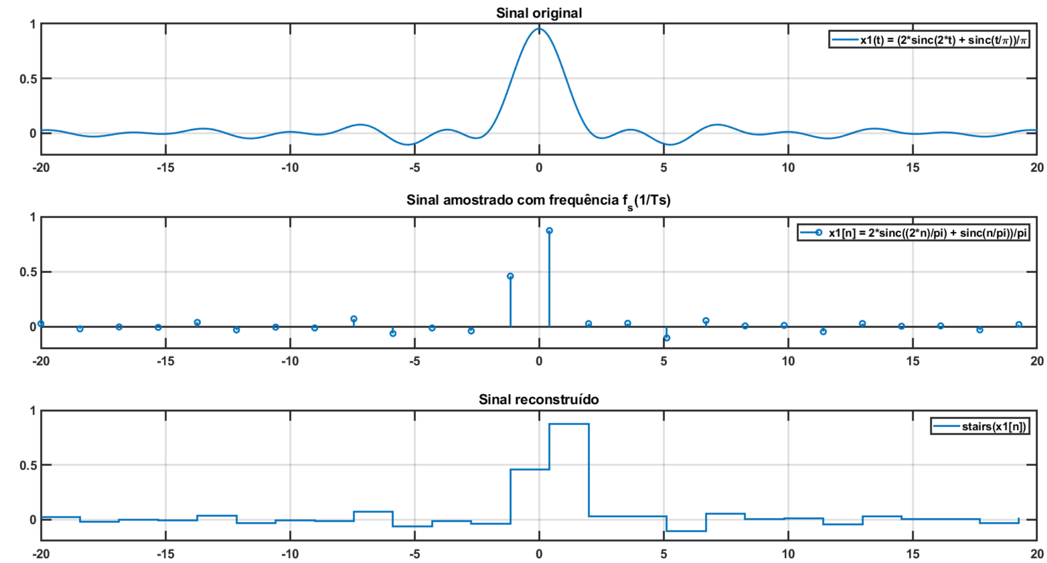

Figura 8: Sinal $x_1(t)$ reconstruído com a frequência de Nyquist.

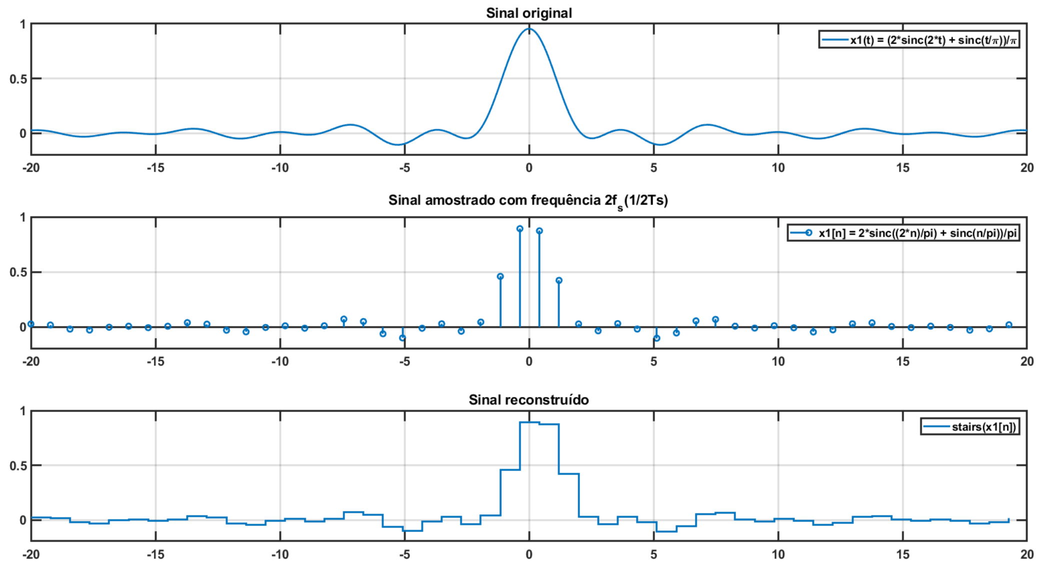

Figura 9: Sinal $x_1(t)$ reconstruído com 2 vezes a frequência de Nyquist.

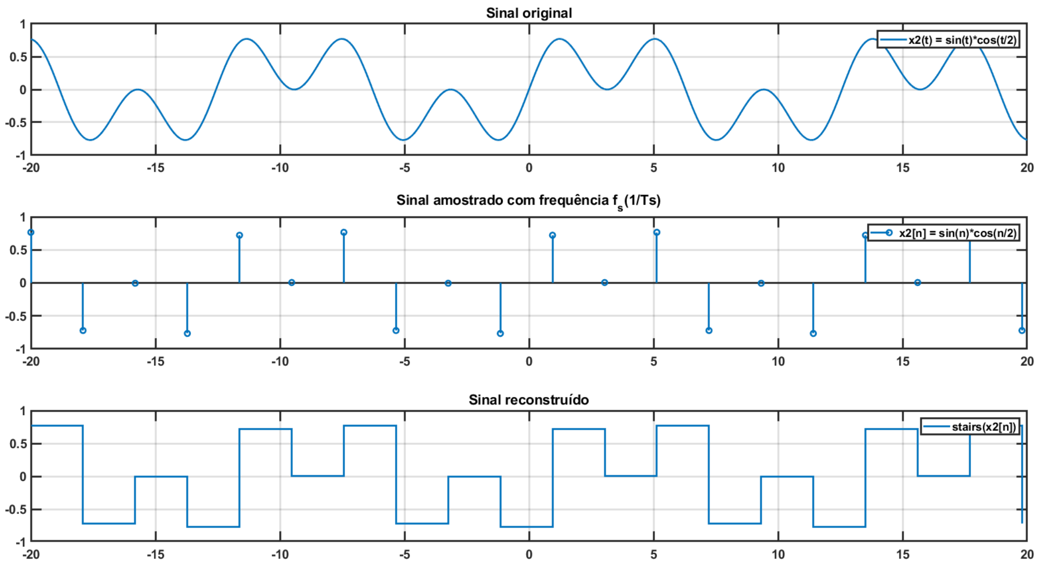

Figura 10: Sinal $x_2(t)$ reconstruído com a frequência de Nyquist.

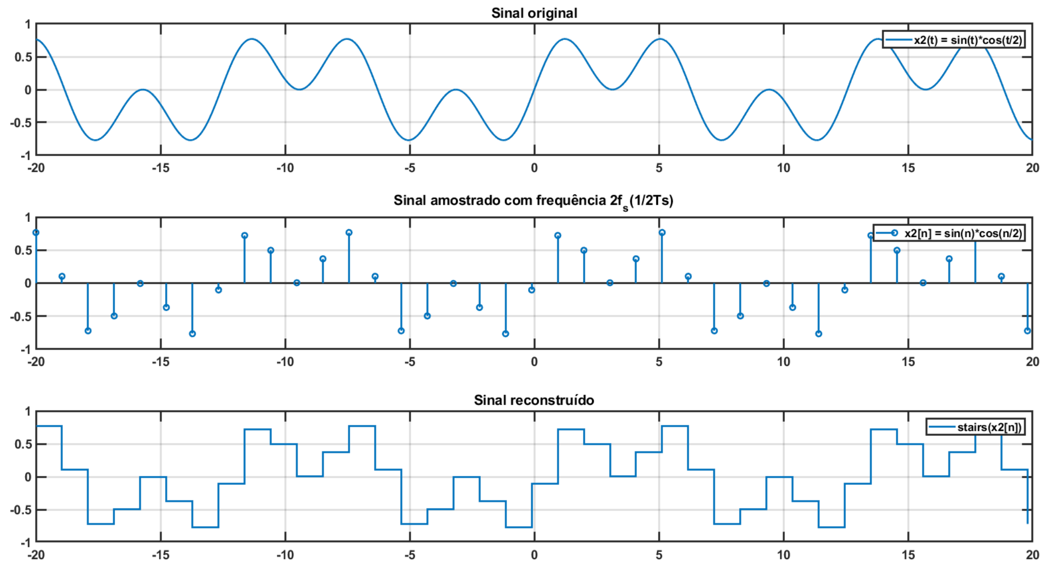

Figura 11: Sinal $x_2(t)$ reconstruído com 2 vezes a frequência de Nyquist.

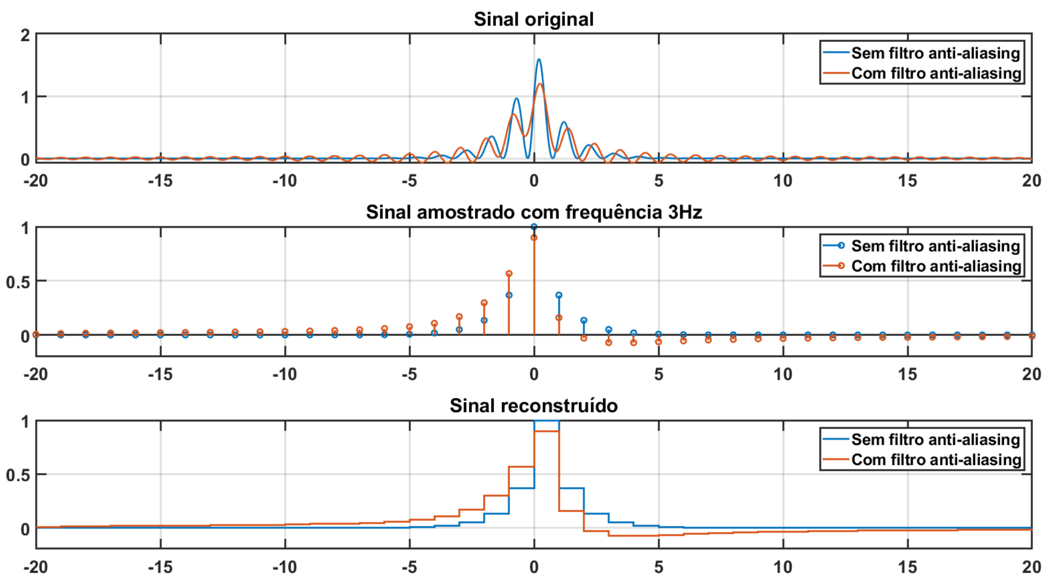

Figura 12: Filtro passa-baixa operando em 1Hz.

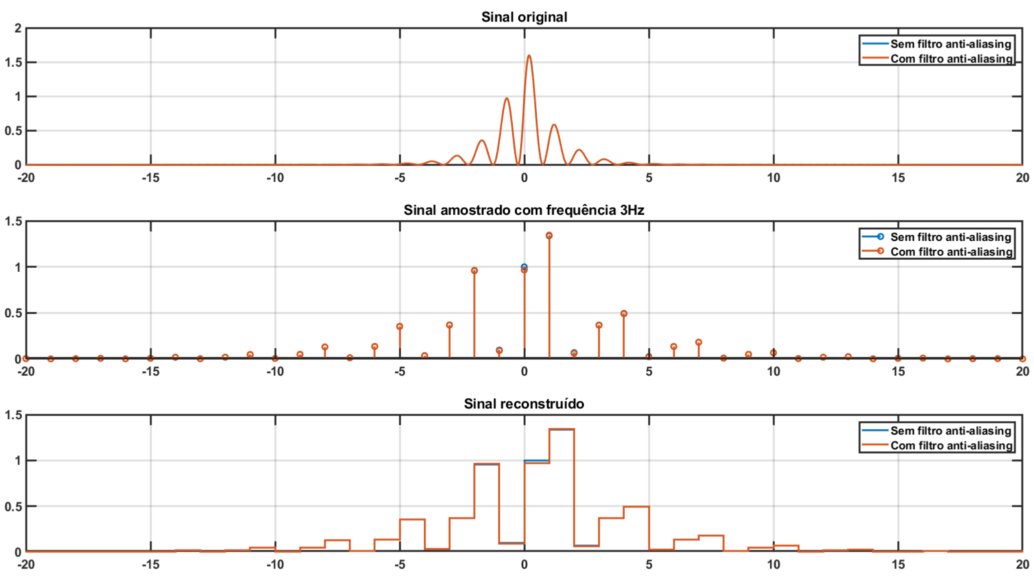

Figura 13: Filtro passa-baixa operando em 3Hz.