

Relatório da Tarefa 5: Diagrama de Bode, diagrama de blocos e projeto de filtros.

Aluno: Mairon Schneider Cardoso.

Data: 06/11/2020

Número de matrícula: 17102515.

1 Introdução

Até agora, vimos que transformar um sistema para o domínio frequência oferecia ao projetista uma maneira de lidar com a função que foge das EDO's transformando-as em equações de diferenças, entretanto, sua representação ainda se limitava ao domínio tempo, necessitando da transformada inversa para observar o comportamento. Com diagrama de Bode, há uma forma de representar esses sistemas no domínio frequência, conseguindo analisar o comportamento do sistema com diversas componentes de frequência aplicados, além disso, também oferece a possibilidade de obter a fase na qual o sistema opera.

O sistema no formato polos e zeros, possibilita a construção de blocos integradores, somadores e amplificadores que servem para representar qualquer sistema, além disso, esse formato possibilita uma rápida conversão da equação algébrica em uma EDO.

2 Resultados e Discussões

A transformação de um sinal para o domínio frequência, como visto anteriormente, possibilita a simplificação de uma EDO em uma equação de diferenças, onde, nessa equação a partir de agora consideraremos também a possibilidade de variáveis $s(\sigma + jw)$ aparecerem no numerador. Consideraremos polos e zeros no formato $\frac{s-Z_1}{s-P_1} \dots \frac{s-Z_n}{s-P_n}$, onde zeros são responsáveis por zerar toda a equação e polos por tender a equação a infinito (quanto mais próximos estiverem de zero).

Conhecendo esses valores, através da função de transferência, é possível mapear todos os zeros e polos, entretanto, como vimos anteriormente, precisávamos transformar inversamente para entendermos a resposta do sistema, porém Bode propôs uma representação para caracterizar a resposta em frequência, onde representaremos as funções de transferências utilizando módulo e fase, onde o módulo é representado através de $20\log_{10}$ o que nos permitirá observar a representação do módulo da frequência através de uma simples equação de primeiro grau (quando falamos em primeira ordem) e a fase é dada pelo valor da função e da sua derivada naquele ponto.

2.1 Concepção de um filtro rejeita-faixas através de um filtro passa-baixa de segunda ordem

Antes de efetivamente concebermos o filtro rejeita-faixas, precisamos primeiro entender de onde veio a ideia de um filtro eficiente que rejeita faixas de determinadas frequências. Observando um filtro passa-baixa de segunda ordem temos a seguinte equação $H(s) = \frac{W_n^2}{(s^2 + 2zW_ns + W_n^2)}$, onde, através dela, conseguimos observar que W_n é a frequência de ressonância, também conseguimos constatar a presença dos dois polos (equação de segundo grau no denominador) e uma variável z que corresponde ao fator de amortecimento da curva.

A figura 1 é o comportamento do filtro descrito anteriormente com alteração gradativa da razão de amortecimento até alcançarmos uma razão de zero, o que percebemos quando a razão de amortecimento é zero é um comportamento de um filtro passa-baixa totalmente impraticável em uma situação real, entretanto, esse comportamento pode ser aproveitado na hora de conceber um rejeita-faixa, por exemplo, se invertermos a função com amortecimento zero, conseguimos chegar em um princípio de um filtro rejeita-faixa, para isso, inverteremos a função e consequentemente trocaremos os polos complexos

da figura 2 por zeros complexos. A inversão da função nos resulta em um gráfico quase ideal para representar um rejeita-faixa, entretanto, analisando a figura 3 percebemos que há um aumento de ganho para altas frequências, o que é indesejável para um circuito real, entretanto, conseguimos zerar o ganho adicionando polos reais (figura 4) e normalizando a função, resultando assim, em um filtro rejeita-faixas.

2.2 Características do filtro

Como visto anteriormente, o filtro rejeita-faixas ele é descrito por polos complexos e raízes complexas, como vimos no capítulo de *Background*, um número complexo pode ser escrito na fórmula de cosseno, ou seja, a fórmula que descreve a função de transferência de um filtro rejeita-faixas pode ser escrita como mostrado na equação 1, onde admitindo que a frequência de corte ω_0 é igual a 6000rad/s conseguimos obter o mesmo resultado observado anteriormente (figura 5).

$$H(s) = \frac{s^2 + \omega_0^2}{s^2 + (2\omega_0 \cos(\theta))s + \omega_0^2} \quad (1)$$

Através da equação conseguimos observar que dependendo do ângulo utilizado no cosseno, conseguimos suavizar a queda na frequência de rejeição, então, o relatório foi projetado para conseguir comparar dois ângulos diferentes, atribuindo a cor azul para a função contínua que possui 87° e a cor vermelha na função pontilhada que possui 60° de modo a observar a melhor otimização para diferentes aplicações. Para obtermos um ganho de 15dB na função, em conjunto com a frequência de rejeição igual a 6000rad/s (figura 6), fazemos a função inversa de $20\log_{10}15$, ou seja, $10^{15/20} = 5,623$ e esse ganho pode ser observado na figura 7. Além disso, conseguimos observar que os diferentes ângulos impactam nos valores complexos dos polos (figuras 8 e 9).

2.3 Equações diferenciais

Sabendo que a razão de saída e entrada é igual à função de transferência, conseguimos escrever o sistema através de uma equação diferencial, isto é, sabendo a função de transferência do filtro de 87° $H_1 = \frac{5,623s^2 + 2,2024e08}{s^2 + 628s + 3,6e07}$ conseguimos escrever o sistema relacionando o comportamento com a entrada, ou seja, $Y(s^2 + 628s + 3,6e07) = X(5,623s^2 + 2,2024e08)$ e através da propriedade da diferenciação no tempo e da transformada inversa (vista na aula anterior) conseguimos escrever o sistema como uma EDO (equação 2).

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 628\frac{dy}{dt} + 3,6e07y = 5,623\frac{d^2x}{dt^2} + 2,024e08x \quad (2)$$

A mesma coisa acontece com a função de transferência que utiliza 60° , onde $H_2 = \frac{5,623s^2 + 2,2024e08}{s^2 + 6000s + 3,6e07}$ pode ser escrito como uma EDO (equação 3).

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 6000\frac{dy}{dt} + 3,6e07y = 5,623\frac{d^2x}{dt^2} + 2,024e08x \quad (3)$$

2.4 Diagrama de blocos

Como forma de representar o circuito, utilizando somente blocos integradores, somadores e de ganho foram utilizadas primeiramente a representação mais básica da função, atribuído a H a função $\frac{b_0s^2 + b_1s + b_2}{s^2 + a_0 + a_1}$ (resultando na representação presente no arquivo **calc.pdf**), como forma de atingir um melhor resultado, foi realizado um processo de otimização do diagrama de blocos para atingir uma equação de $X(b_0 + b_1/s + b_2/s^2) - Y(a_0/s + a_1/s^2) = 1Y(s)$ o que nos resulta na figura 10, onde conseguimos simular a função de transferência através de somadores, integradores e blocos de ganho.

Na tentativa de observar o impacto de diferentes ângulos no filtro, foi criado uma composição de dois blocos que simulam cada função de transferência (figura 11) onde apenas uma das componentes são diferentes.

2.5 Comparações

Com essa diferença na composição de filtros, conseguimos observar alguns efeitos interessantes que podem ajudar na hora de escolher o filtro correto, por exemplo, para uma senoide aplicada na entrada com 10 de amplitude e 500Hz de frequência, a função que possui ângulo de cosseno igual a 87° possui um valor de pico coerente com o ganho de 15dB, no caso, $10 \cdot 5,623 = 56,23$ no seu valor de pico, já na função com ângulo de 60° a função senoide aplicado na entrada, resulta em um ganho de 4,553, além disso, percebemos que na frequência de rejeição (figura 13), cerca de 954,93Hz percebemos que ambas as funções são eficientes para rejeitar a banda passante. Essa incompatibilidade de ganho é explicada quando visualizamos o diagrama de bode das funções (figura 14), onde através dele, percebemos que na frequência de 500Hz a curva da função com ângulo 60° sofre um leve amortecimento, isto é, o ganho deixa de ser 15dB e o amortecimento será maior conforme aumentamos a frequência (até finalmente chegarmos a função de rejeição do filtro), tal comportamento pode ser visto na figura 15.

3 Conclusões

Portanto, o correto dimensionamento através da função, de um filtro rejeita-faixas deve ser cuidadosamente projetado, visto que, quando se utiliza um filtro rejeita-faixas é justamente pela necessidade de retirar a contribuição de alguma frequência que impacta no sinal, por exemplo, imaginando que em um sistema de som uma fonte de alimentação AC que trabalha entre 60Hz e 59,5Hz é utilizada, essa fonte pode adicionar algum tipo de ruído ao final do circuito, degradando o som final, uma forma de retirar essa frequência problemática é utilizar o filtro rejeita-bandas com um ângulo bem baixo (afinal, a frequência de variação da fonte é baixa) garantindo a autenticidade do som final composto pelas outras demais frequências.

Esse tipo de filtro é essencial quando temos um circuito sensível a ruídos, como sistemas de som e controle, entretanto, é necessário saber a exata faixa de variação da frequência na qual esse ruído acontece para conseguirmos ajustar o ângulo do filtro para que nenhum sinal essencial seja prejudicado, por isso, saber analisar o sinal através de um diagrama de Bode é uma ferramenta essencial para um projetista.

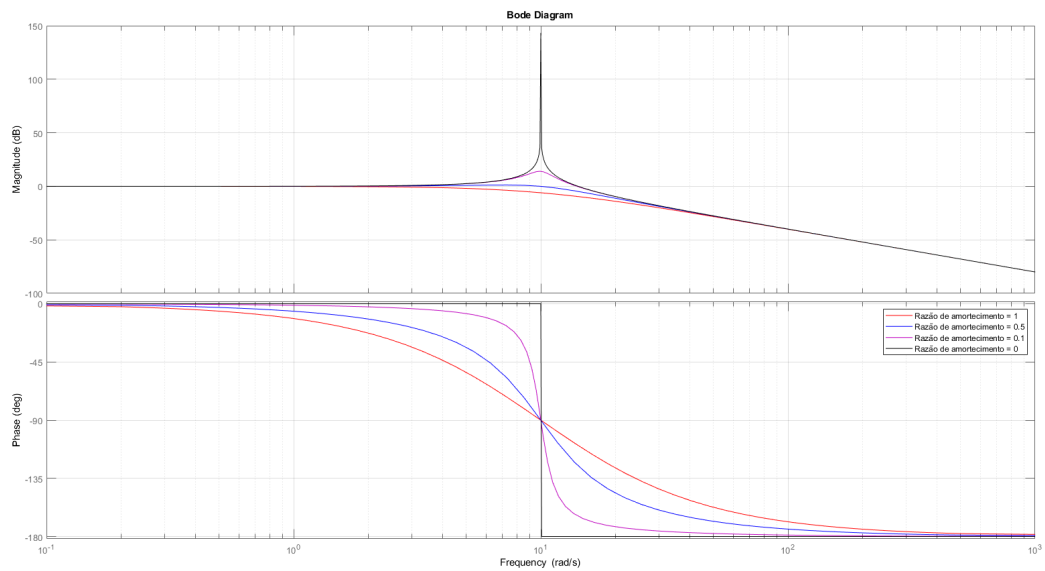


Figura 1: Filtros passa-baixa de segunda ordem variando a razão de amortecimento.

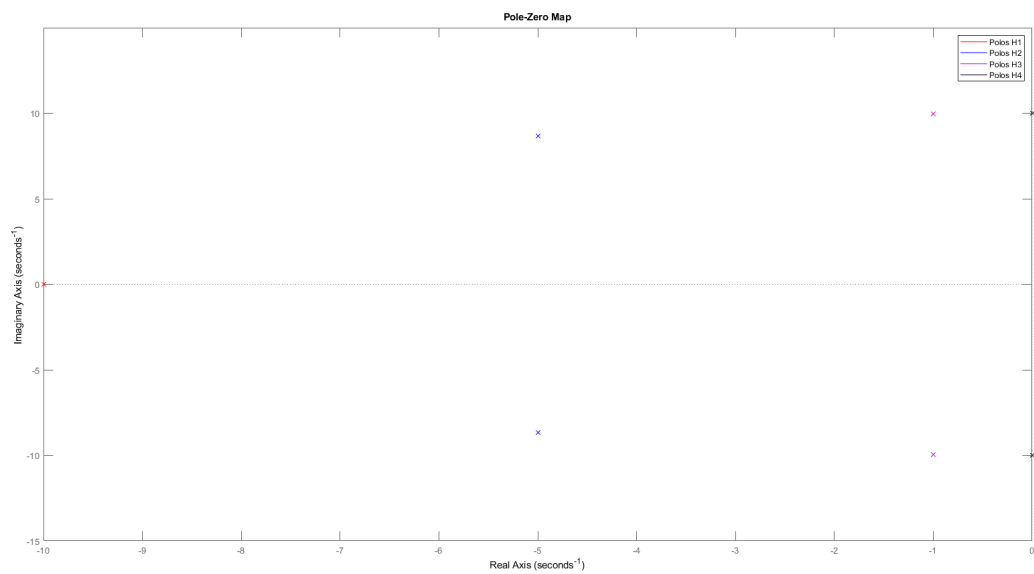


Figura 2: Comportamento dos polos das funções de transferência variando a razão de amortecimento.

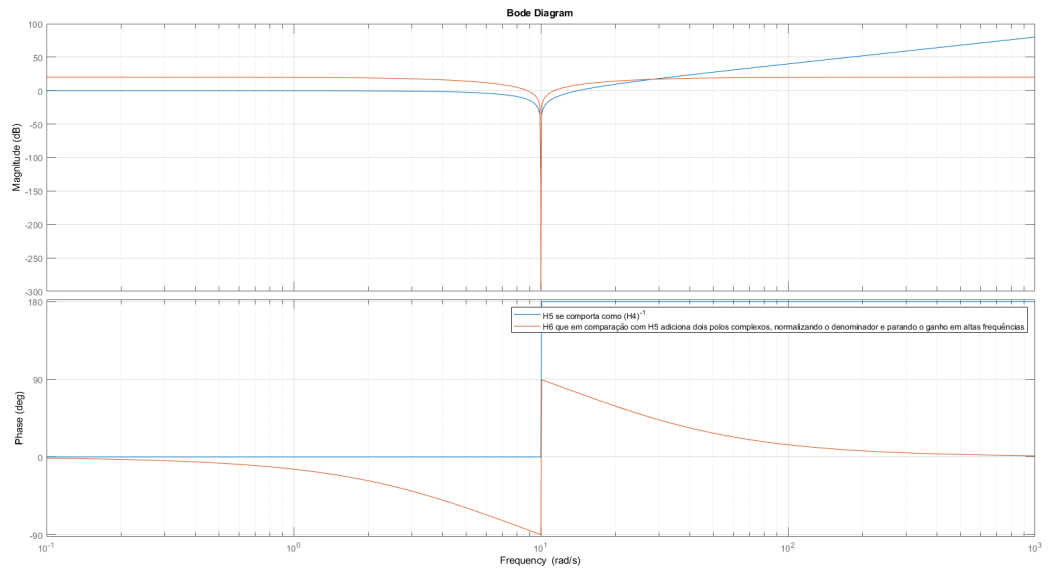


Figura 3: Inversão da equação que define a função de transferência H_5 e H_6 que define a função de transferência normalizada com a adição de dois polos complexos.

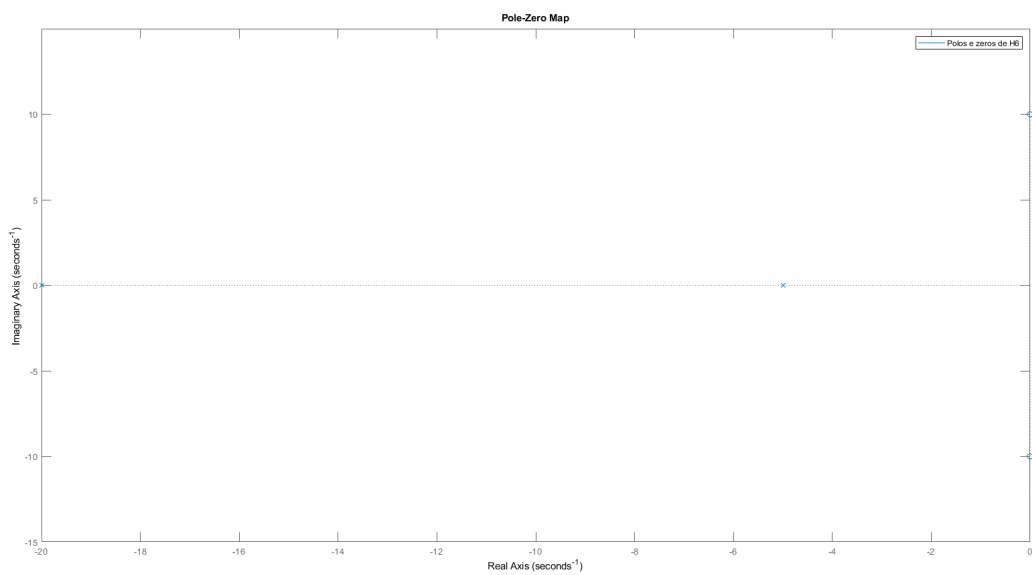


Figura 4: Polos e zeros da função de transferência H_6 normalizada.

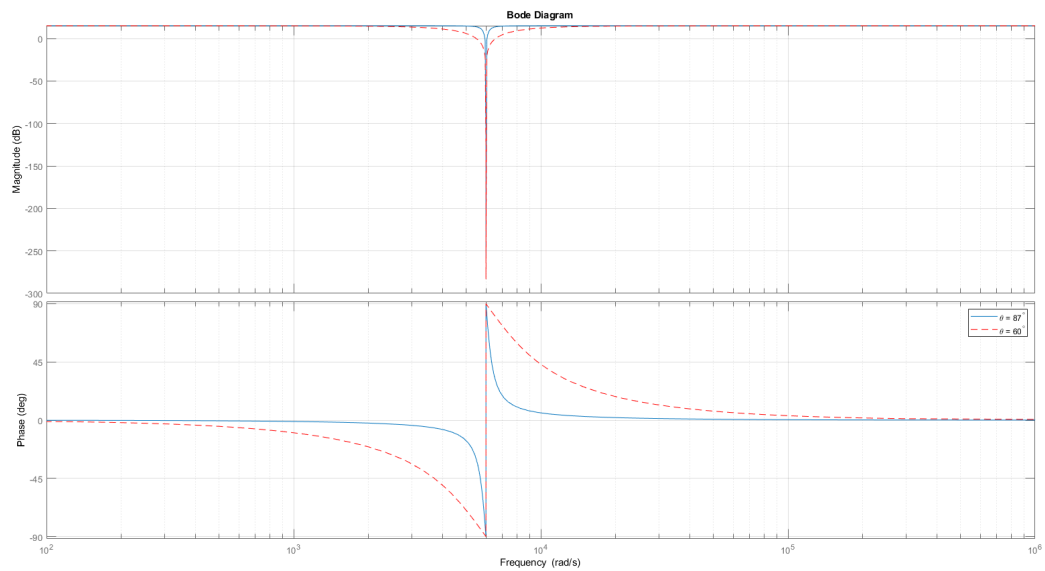


Figura 5: Funções de transferência representadas no diagrama de Bode.

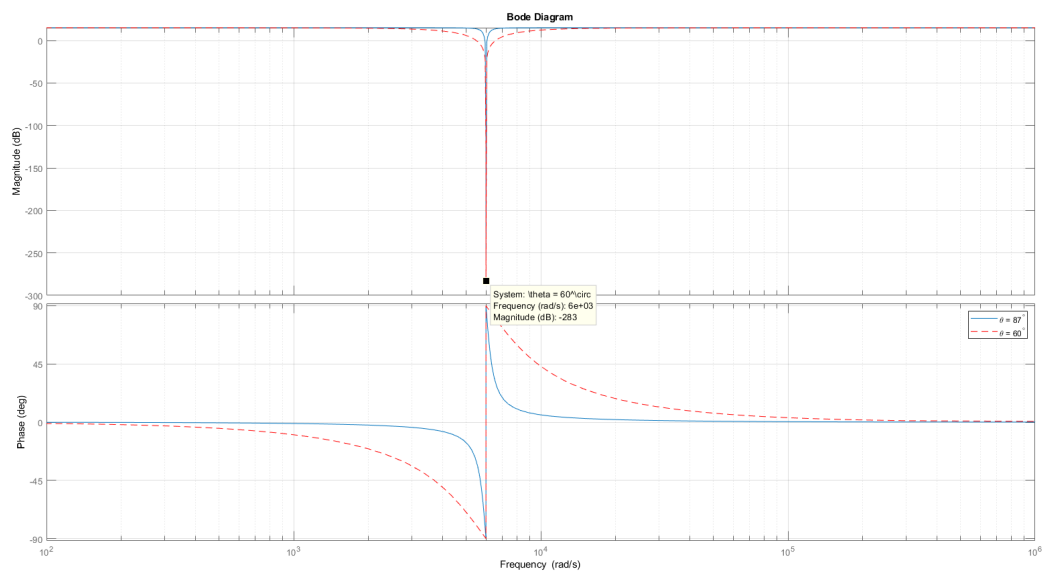


Figura 6: Frequência de rejeição das funções de transferências.

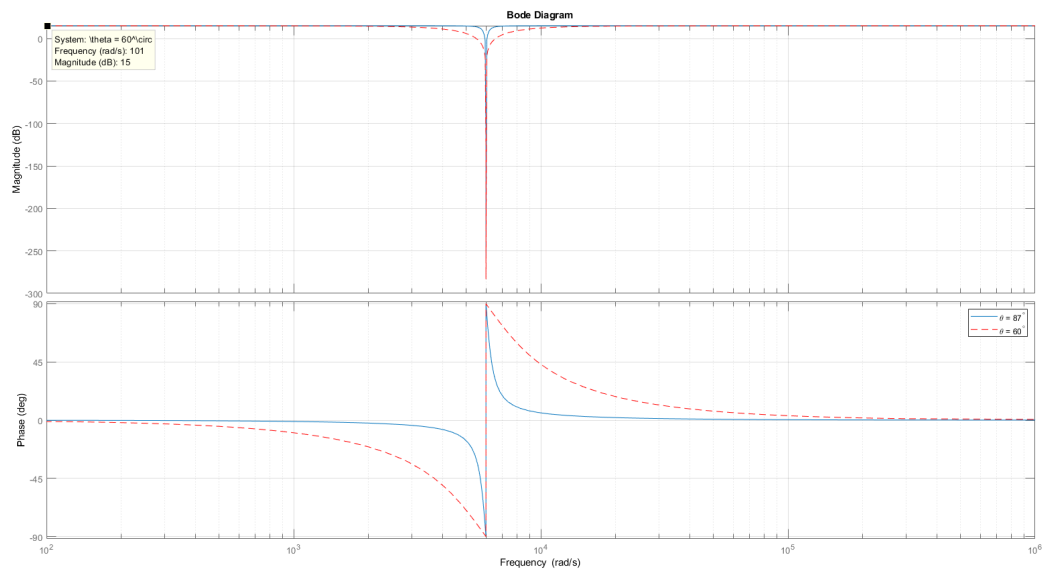


Figura 7: Ganho em magnitude das funções.

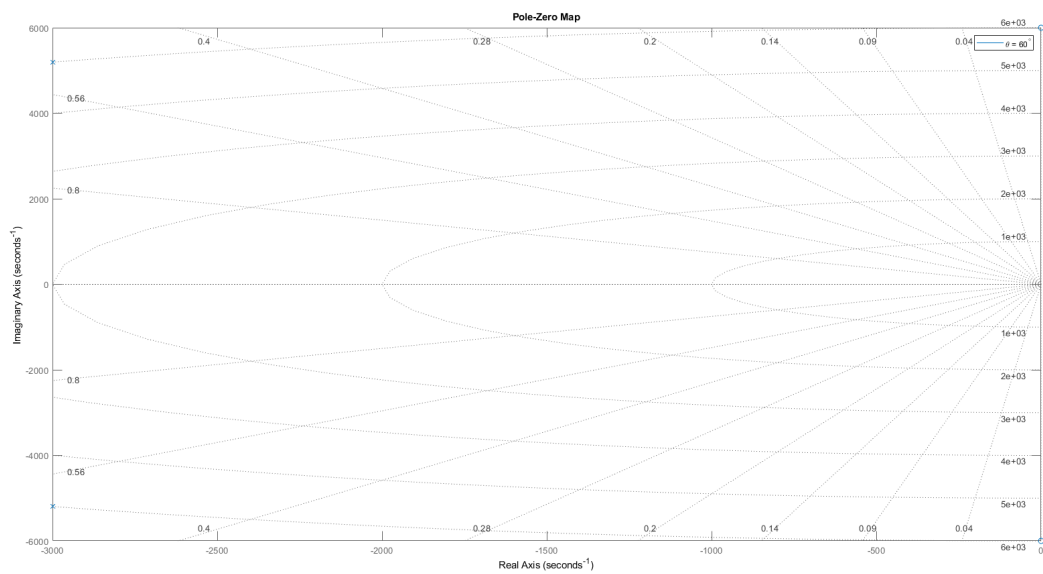


Figura 8: Diagrama dos polos e zeros do filtro com 60° .

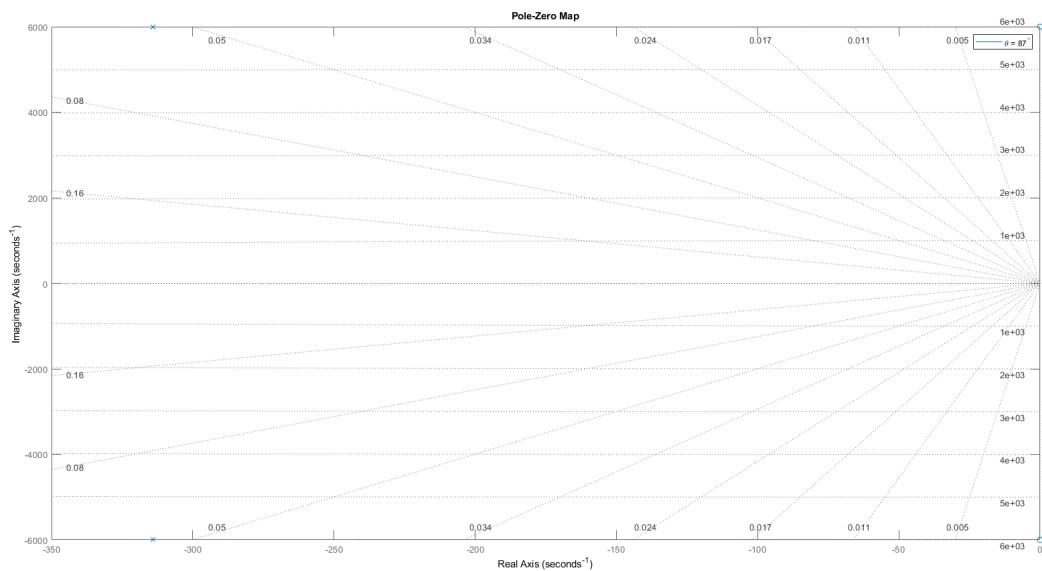


Figura 9: Diagrama dos polos e zeros do filtro com 87°.

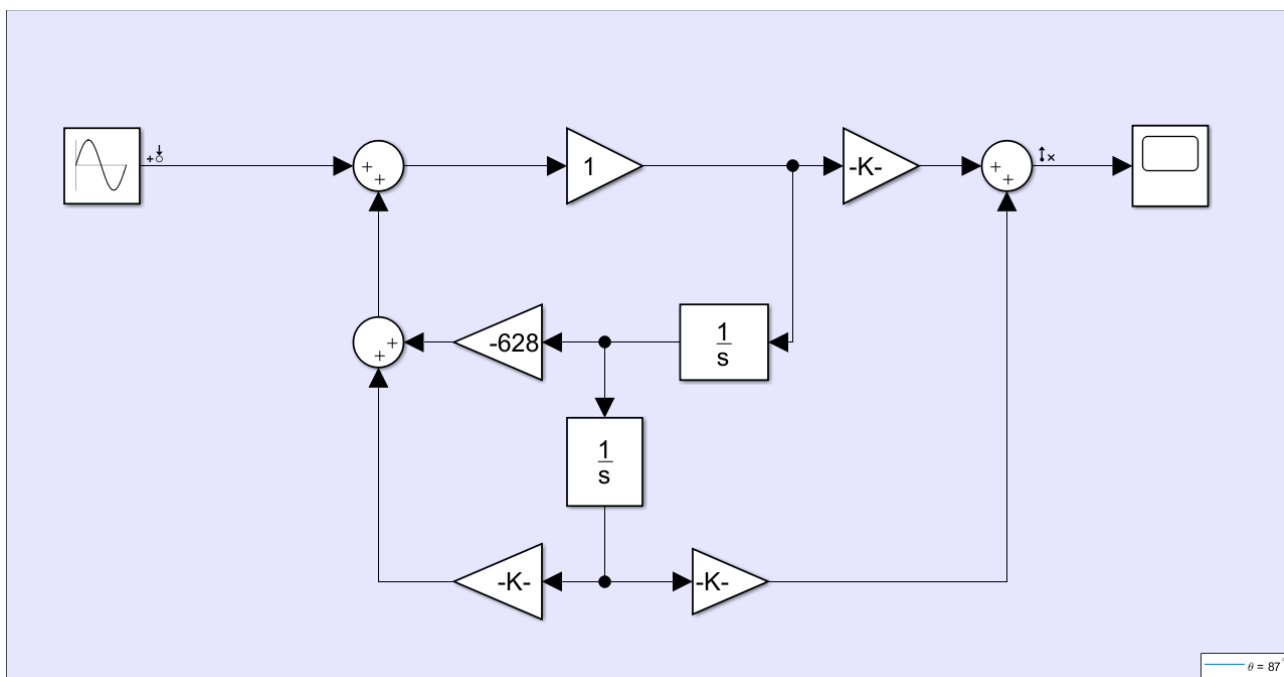


Figura 10: Diagrama de blocos: $X(b_0 + b1/s + b2/s^2) - Y(a_0/s + a1/s^2) = 1Y(s)$.

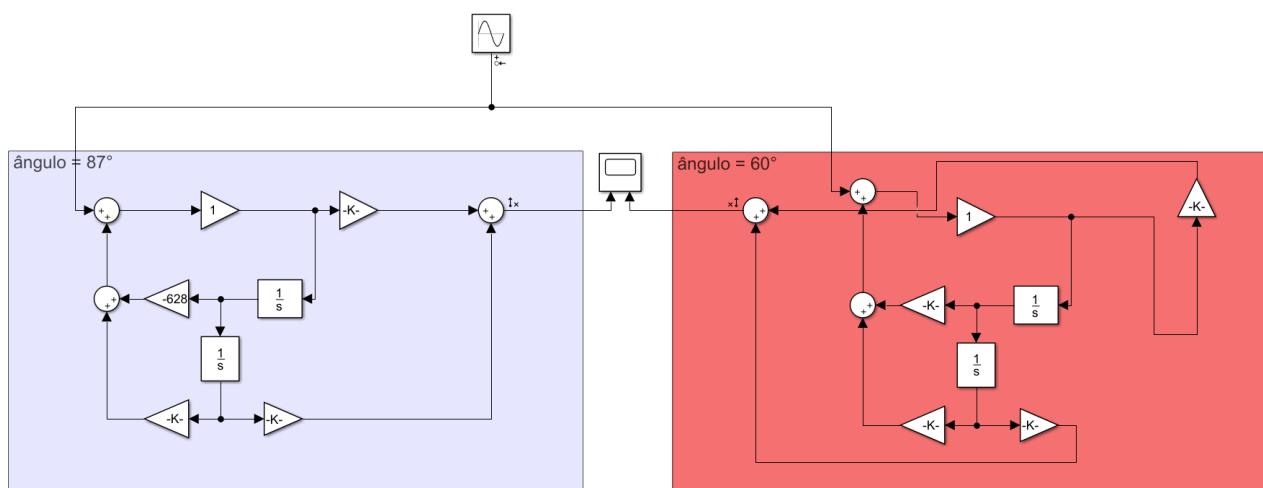


Figura 11: Diagrama de blocos: $X(b_0 + b1/s + b2/s^2) - Y(a_0/s + a1/s^2) = 1Y(s)$ e $X_1(b_0 + b1/s + b2/s^2) - Y_1(a_0/s + a1/s^2) = 1Y_1(s)$.

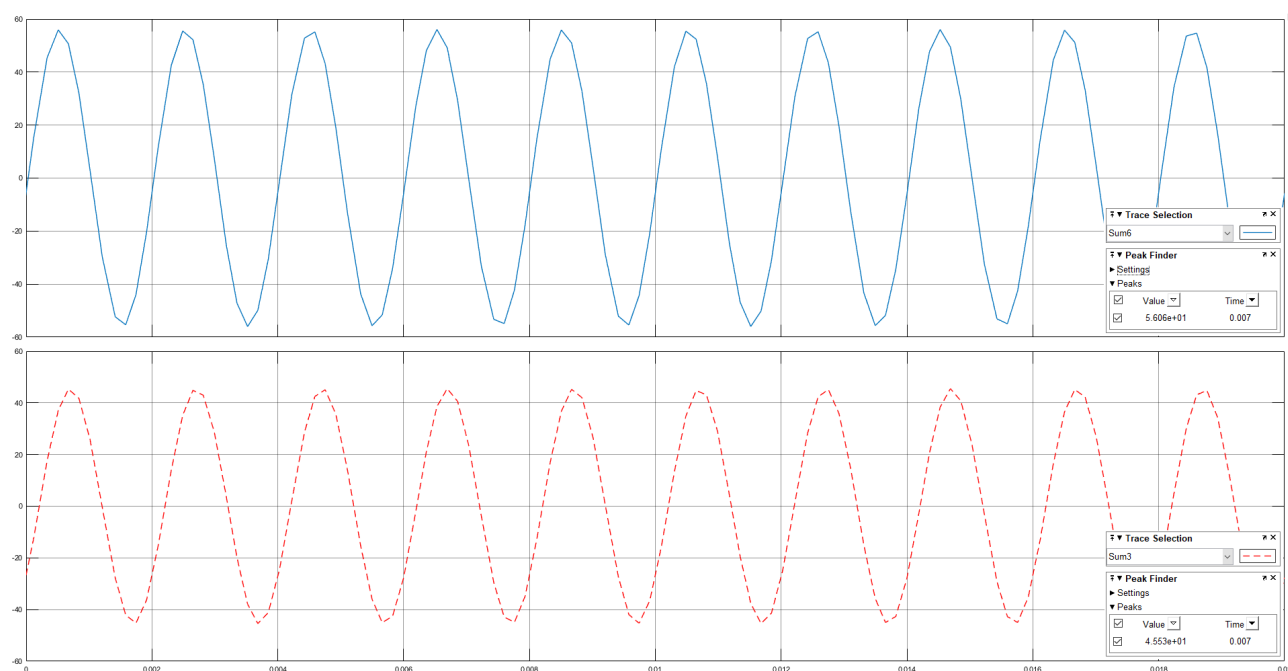


Figura 12: Comportamento dos filtros, representados através do diagrama de blocos, quando uma senoide com 10 de amplitude e 500Hz de frequência é aplicado na entrada.

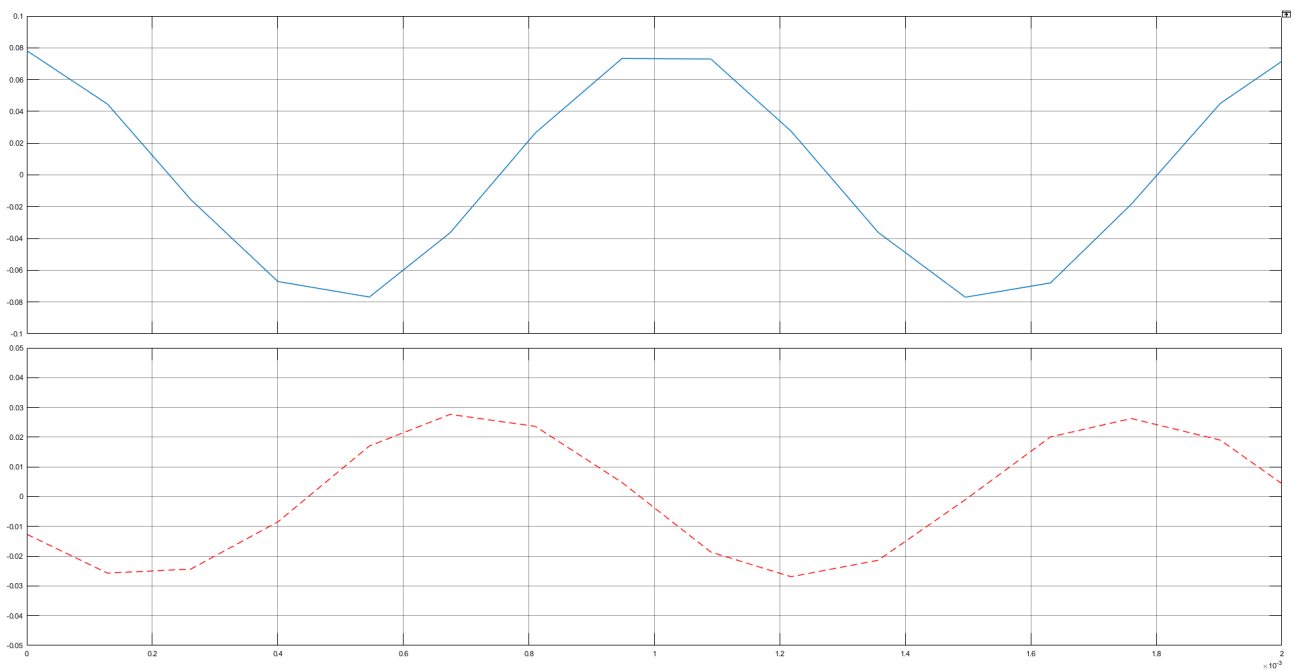


Figura 13: Comportamento dos filtros, representados através do diagrama de blocos, quando uma senoide com 10 de amplitude e 954,93Hz de frequência é aplicado na entrada.

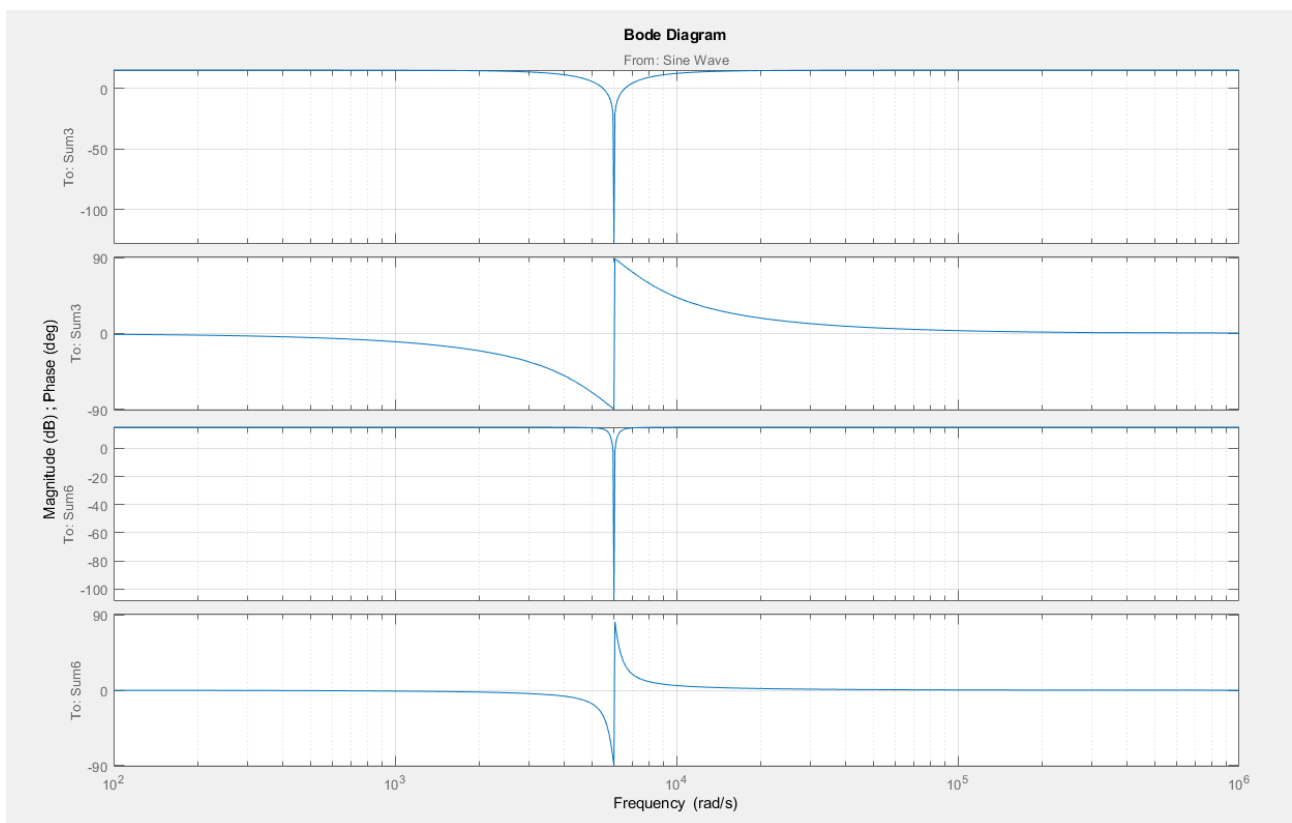


Figura 14: Diagrama de Bode extraído através do simulink.

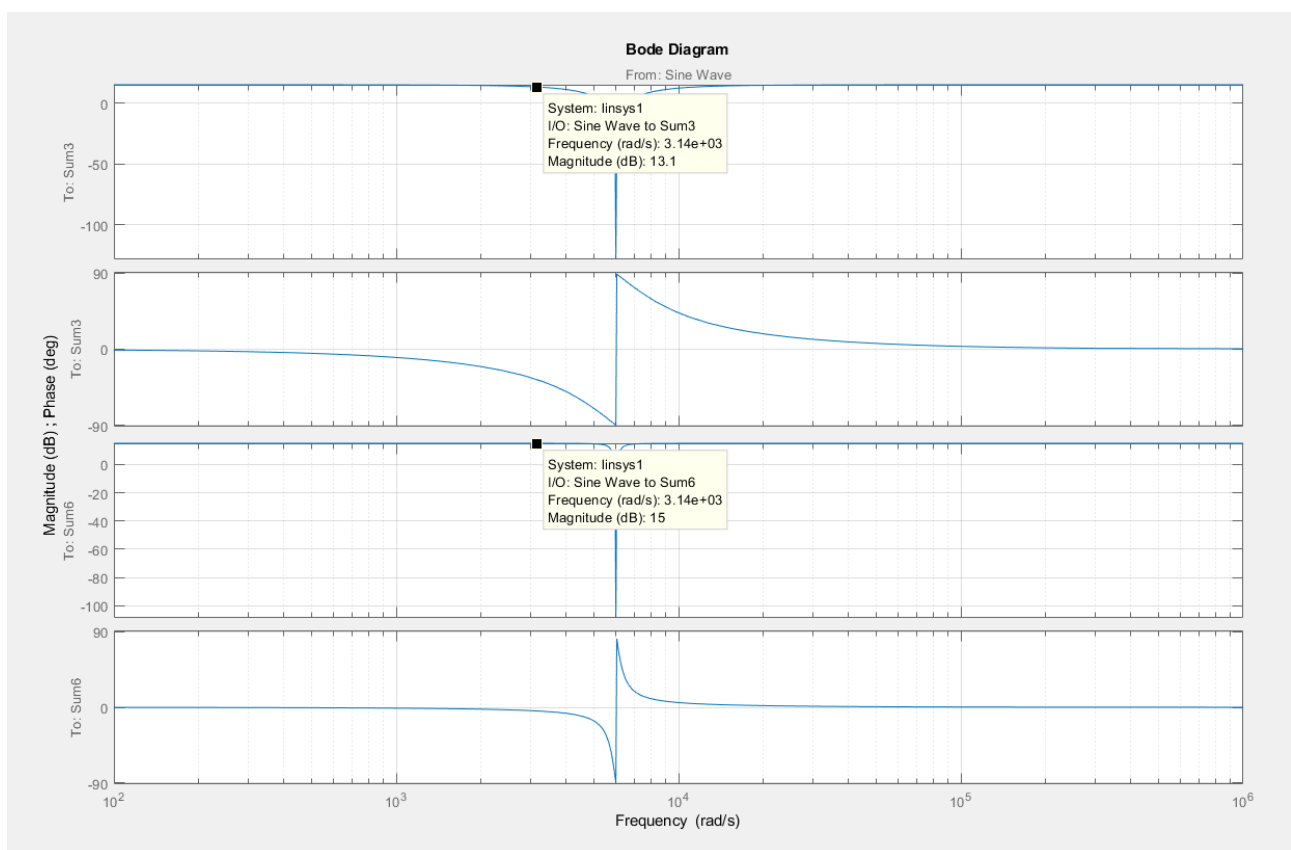


Figura 15: Fator que explica a atenuação da magnitude na função de transferência com 60° , ocorrida quando aplicada na entrada uma senoide com 10 de amplitude e 500Hz de frequência.