Universidade Federal de Pelotas
Curso de Engenharia de Computação
Disciplina: 22000178 – Sistemas e Sinais
Turma: 2020/1 – T52
Professor: Vinícius V. A. Camargo

Relatório da Tarefa 4: Transformada de Laplace.

Aluno: Mairon Schneider Cardoso. Data: 29/10/2020

Número de matrícula: 17102515.

1 Introdução

A aquisição de uma função que descreve a resposta de um determinado sistema no domínio tempo torna-se cada vez mais complexa conforme aumentamos a quantidade de senoides e exponenciais que descrevem a curva, isto é, a operação de convolução de múltiplos sinais torna-se uma pedra no sapato no domínio tempo justamente por necessitar locomover um dos sinais a um determinado passo e calcular a integral de cada passo. De outro modo, para obter uma determinada função que descreve o comportamento de um sistema, onde, através da análise no domínio da frequência, com o auxílio da transformada de Laplace é possível obter não só as ondas senoidais (semelhante à transformada de Fourier), mas também a possibilidade de expressar a equação que descreve o comportamento do sistema através de sinais exponenciais, justamente por ser no domínio da frequência e magnitude, operações como a convolução se tornam menos complexas simplificando a análise matemática e transformando equações diferenciais em equações algébricas.

2 Resultados e Discussões

A transformada unilateral de Laplace (apenas com sinais causais) e a transformada inversa de Laplace, equação 6a e 6b respectivamente, nos permite transitar entre o domínio tempo e o domínio frequência aproveitando-se do princípio da superposição na hora de representar a equação que descreve a curva através de uma soma finita de sinais.

$$X(s) = \int_0^{\infty} x(t)e^{-st}dt \tag{1a}$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty} X(s)e^{st}ds \tag{1b}$$

As funções parciais que surgem quando convertermos um sinal em domínio frequência para domínio tempo serão resolvidas através do método das eliminações de frações, visto que, apesar de ser abordado intensamente o método de Heaviside no capítulo de *Background*, as exemplificações dos exercícios presentes no capítulo 4 ficaram mais claras utilizando apenas eliminações de frações.

2.1 Extração das raízes e constantes que descrevem a função parcial

Dado um sistema definido pela sua função de transferência $H(s) = \frac{50(s+5)}{(s+5)(s+1)}$, conseguimos notar que a sua expansão em frações parciais nos resultará em um polinômio de segundo grau ao lado esquerdo no denominador da equação, isto é, as raízes dessa função (λ_n) serão identificadas através desse polinômio e irão nos ajudar a identificar as constantes na expansão, onde, através da eliminação de frações, de modo alternado, multiplicaremos por $s_n - \lambda_n$, onde s_n será igual a λ_n. Após extraídas, as contantes e raízes serão anexadas na equação e chegaremos em algo parecido com a equação genérica 2.

$$H_n(s) = \frac{K_1}{s-\lambda_1} + \frac{K_2}{s-\lambda_2} \dots \frac{K_n}{s-\lambda_n} \tag{2}$$

A obtenção dessas raízes e constantes através de um algoritmo pode ser feito com um comando *residue*, onde através dele as raízes e constantes são anexadas em dois vetores, um vetor correspondendo as raízes e outro para as constantes. A divisão das constantes por s - raiz, resultará na mesma função encontrada utilizando apenas cálculos no papel.

2.2 Transformada inversa de Laplace

Com a função parcial que descreve $H(s)$ em mãos, precisamos apenas converter as constantes e raízes para o domínio tempo, um jeito de fazer isso é basicamente utilizar a integral da transformada inversa mostrada pela equação 6b, de outro modo, conseguimos fazer isso através da tabela de pares básicos de transformações, disponibilizada em aula, que nada mais é que algumas integrais já resolvidas para consulta rápida, e nela, percebemos que há uma equação que nos diz que a transformada inversa de $\frac{1}{s-\lambda}$ é igual a $e^{\lambda t}u(t)$ (figura 1), então, aplicando isso a toda componente extraídas pela função parcial, visto que, a transformada é uma operação linear e através do princípio da superposição, conseguimos chegar a uma equação que descreve o comportamento de uma função de transferência em domínio de tempo contínuo que é igual à equação 3.

$$h(t) = 50e^{-t} \cdot u(t) \tag{3}$$

2.3 Representação de uma função de transferência através de um algorítimo

Para representar a função de transferência vista anteriormente em um algorítimo no MATLAB®, precisamos conhecer os três modelos diferentes que constroem a função de transferência. O primeiro método utiliza-se da função *transfer function* adimitindo uma variável padrão s, esta variável, que indica a frequência de Laplace, ou seja, $s = \sigma + jw$. Neste método, é realizado o cálculo algébrico ainda no domínio tempo, isto é, para chegar no polinômio de segundo grau no denominador é preciso primeiro realizar a operação de soma do produto dessas funções no domínio tempo, e se lembrarmos do relatório 2, saberemos que a operação responsável por retornar a soma do produto de duas curvas no domínio tempo é a convolução.

O segundo método utiliza o modelo *Zero-pole-gain*(zpk), onde a representação da função de transferência é construída levando em consideração o modelo de polos e zeros, isto é, o polinômio é representado através de polos e zeros, e multiplicado por um ganho (nesse caso igual a 50), então, a função de transferência é construída a partir de $(50 * (\frac{s-Z_1}{s-P_1} \dots \frac{s-Z_n}{s-P_n})))$.

O terceiro método é semelhante ao primeiro, entretanto, há uma declaração de uma variável, o que torna viável representar a função $H(s)$ somente através das operações básicas (sem precisar representar a convolução) e com s(se s for a variável declarada), mas ainda sim, a operação é feita em cima do domínio tempo o que ainda impõe a realização da convolução nos polinômios no denominador apesar de não vermos essa operação.

2.4 Estabilidade do sistema H(s)

O sistema H(s) é BIBO estável justamente por todos os polos (raízes do denominador) se encontrarem no semi-plano esquerdo, consequentemente, exponenciais decrescentes na resposta em domínio tempo, ou seja, como visto no capítulo 2 do livro base da disciplina, a condição para que o sistema seja BIBO estável é $\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|dt < \infty$.

2.5 Obtenção de y(t)

Utilizando a transformada de Laplace para converter a resposta de um sistema definido por $x(t) = sen(t)u(t)$ conseguimos obter através da tabela de pares básicos que $X(s) = \frac{1}{s^2+1}$ (figura 2).

Para obtermos a função $Y(s)$ no domínio da frequência, $Y(s)$ será apenas a multiplicação dos polinômios definidos por $H(s) * X(s)$, obtendo um polinômio resultante (equação 4).

$$Y(s) = \frac{50s + 250}{s^4 + 6s^3 + 6s^2 + 6s + 5} \tag{4}$$

Através da extração das raízes do polinômio do denominador foi possível aplica-lás na expansão em funções parciais com a intenção de encontrar as constantes que descrevem a função, de modo a, obter a resposta $Y(s)$ no formato de funções parciais. Aplicando a transformada de Laplace inversa na função que descreve a resposta desse sistema, chegamos a uma equação em domínio tempo, equação 5.

$$y(t) = (25e^{-t} + 17,677e^{-j2,35}e^{jt} + 17,677e^{j2,35}e^{-jt}) \cdot u(t) \tag{5}$$

Na tentativa de chegar na mesma equação $y(t)$ utilizando apenas as operações no domínio tempo, foi preciso calcular a convolução entre $x(t)$ e $h(t)$. Como citado na introdução, uma operação como essa demoraria um tempo considerável, então foi obtido através do MATLAB® uma resposta igual, quando comparado com a função obtida através de funções parciais, vista anteriormente. Também foram calculadas a mão as respostas do sistema e simultaneamente colocadas em um gráfico para que facilitasse a visualização, a comparação está presente na figura 3.

2.6 Transformada apartir de uma equação diferencial

Para que consigamos aplicar a transformada de Laplace na EDO definida por $\frac{d^2y(t)}{dt} + 6\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = 0$ é preciso utilizar as propriedades de diferenciação no tempo e de multiplicação escalar (equação 6a e equação 6b, respectivamente).

$$\frac{dy}{dt} = sY(s) - y(0) \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) \tag{6a}$$

$$ky(t) \qquad <=> \qquad kY(s) \tag{6b}$$

Através das propriedades, foi possível reescrever a equação diferencial em termos de s, ou seja, no domínio frequência, o que transforma a EDO inicial em uma equação algébrica (equação 7), semelhante as outras vistas nesse relatório.

$$Y(s) = \frac{10s + 66}{s^2 + 6s + 2} \tag{7}$$

Através dessa equação, é possível extrair as raízes e constantes pela expansão das frações parciais e aplicando a transformada inversa a resposta em domínio tempo do sistema coincidirá com a mesma resposta natural obtida no relatório 2 (equação 8), é desejável observar a igualdade através da figura 4.

$$y_n(t) = (-1,8034e^{-5,6457t} + 11,8034e^{-0,3542t}) \cdot u(t) \tag{8}$$

3 Conclusões

Portanto, a transformada de Laplace pode ser uma grande ferramenta quando precisamos executar operações complexas no domínio tempo, justamente por transitar sobre o domínio de frequência e magnitude, operações como a convolução acabam se tornando uma simples multiplicação, além disso, sistemas lineares de equações que teriam que ser calculados no domínio de tempo, no domínio da frequência, acabam se tornando simples equações algébricas.

$$e^{\lambda t} u(t) \qquad \frac{1}{s-\lambda}$$

Figura 1: Relação $\frac{1}{s-\lambda}$ presente na tabela de pares básico.

$$\text{sen } bt\, u(t) \qquad \frac{b}{s^2+b^2}$$

Figura 2: Relação $\frac{b}{s^2+b^2}$ presente na tabela de pares básico.

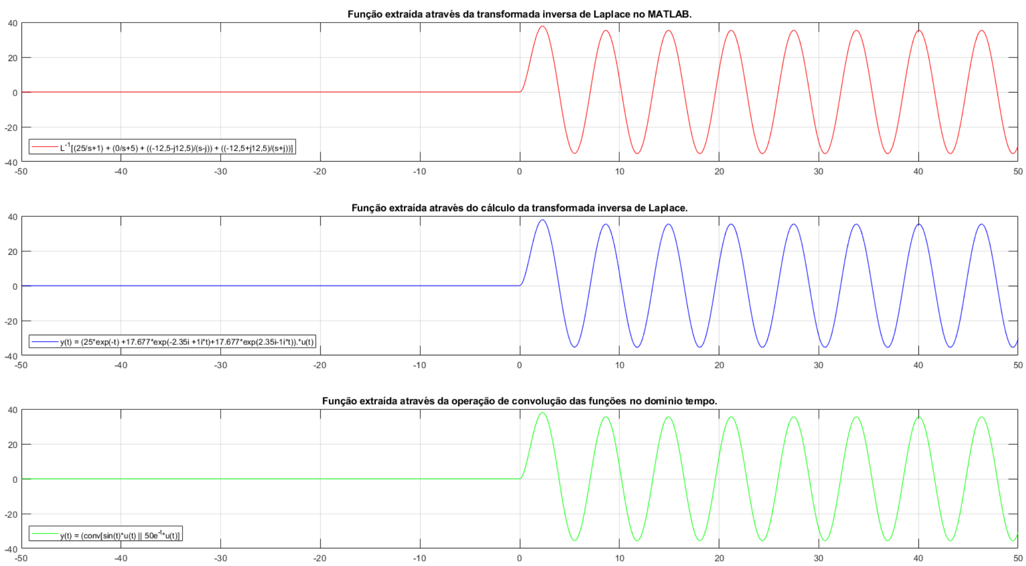

Figura 3: y(t) obtida através da transformada de Laplace, da operação de convolução e via cálculo.

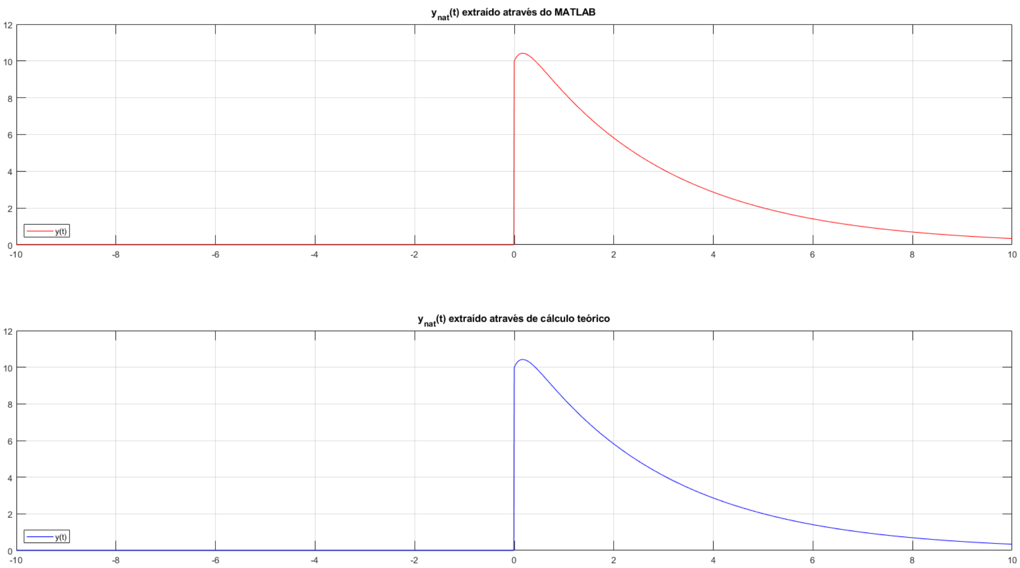

Figura 4: Resposta natural cálculada através da transformada de Laplace versus a extraída do relatório 2.