# Sistemas e Sinais
## semana 3

Prof. Vinícius Valduga de Almeida Camargo

# Representação de Sistemas **discretos** LIT por Equações de Diferenças

- Equações de diferenças de coeficientes constantes e lineares fornecem uma representação das características entrada-saída de sistemas LIT.
- Para o caso **discreto**, a forma geral de uma equação de diferenças de coeficientes constantes e linear é a seguinte:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k]$$

$M \leq N$ <- Para causalidade

# Solução recursiva - Exemplo

- Temos um Sistema discreto definido pela equação de diferenças abaixo

$$y[n] + 2y[n-2] = x[n] + 3x[n-1]$$

Este sistema se encontra em um estado definido pelas condições iniciais

y[-1]=0,5 e y[-2]=-1

E a ele é aplicado uma entrada do tipo degrau x[n]=u[n]

$$y[n] + 2y[n-2] = x[n] + 3x[n-1]$$

$$y[n] = x[n] + 3x[n-1] - 2y[n-2]$$

$$y[0] = x[0] + 3x[0-1] - 2y[0-2]$$
$$y[0] = \quad 1 + \quad 3 \cdot \quad 0 \quad - 2 \cdot (-1)$$
$$y[0] = 3$$

$$y[1] = x[1] + 3x[1-1] - 2y[1-2]$$
$$y[1] = \quad 1 + \quad 3 \cdot \quad 1 \quad - 2 \cdot (0{,}5)$$
$$y[1] = 3$$

$$y[2] = x[2] + 3x[2-1] - 2y[2-2]$$
$$y[2] = \quad 1 + \quad 3 \cdot \quad 1 \quad - 2 \cdot (3)$$
$$y[2] = 2$$

# Respostas de sistemas LTI descritos por EDOs

**Resposta total = resposta entrada nula + resposta estado nulo**

- resposta entrada nula: é a resposta para condição de x[n] = 0

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = 0$$

- resposta estado nulo: é a resposta para y[**-1**]=0, y[**-2**]=0, etc

# Sobre exponenciais

- Temos que $e^{\lambda n} = \left(e^{\lambda}\right)^{n} = \gamma^{n}$

Com isso podemos escrever

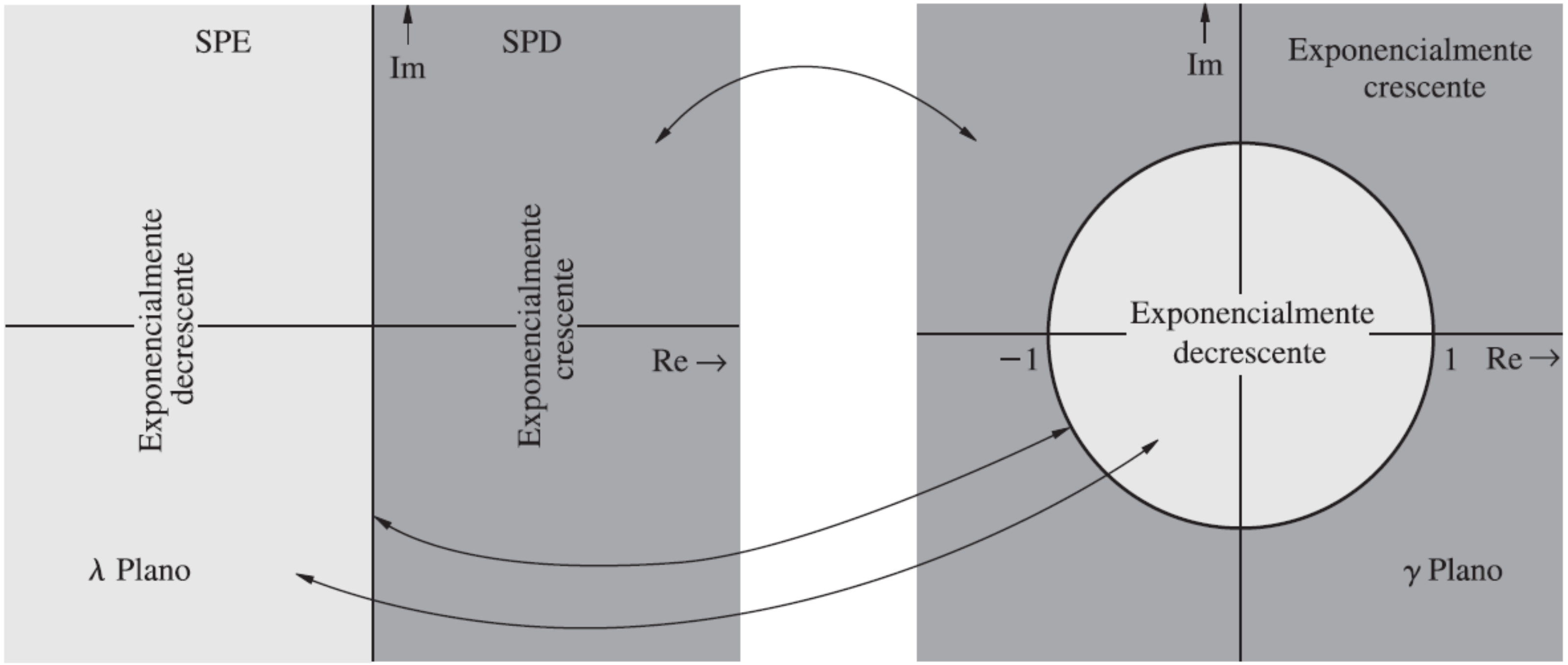
$$e^{1,386n} = 4^{n}$$

Portanto $\gamma^{t}$ é um sinal exponencial

Para $\lambda = \sigma + j\Omega$ temos $e^{\sigma n}e^{j\Omega n}$

Com isso podemos escrever

$$e^{\lambda t} = \gamma^{n}\left(\cos(\Omega n) + jsen(\Omega n)\right)$$



# Resposta para Entrada Nula (Resposta Natural)

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k]$$

- Buscamos solução do tipo:

$$y^{(n)}[n] = \sum_{i=1}^{N} c_i r_i^n$$

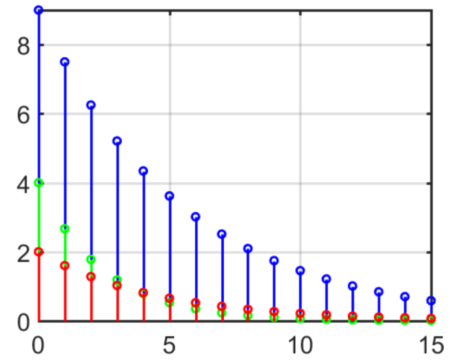
Onde $r_{\mathrm{i}}$ são as raízes da equação característica

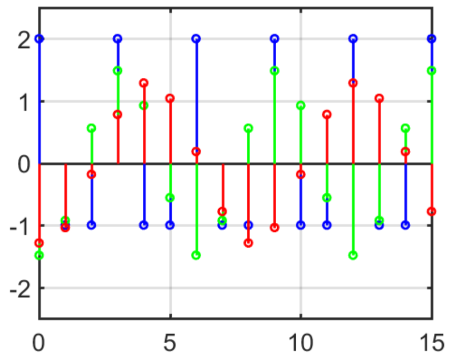
$$\sum_{k=0}^{N} a_k r^{n-k} = 0$$

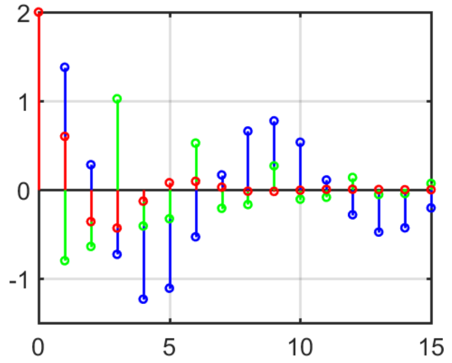
- Baseado nas condições iniciais, montamos um Sistema linear para encontrar os valores para as constantes $c_i$

# Tipos de Raízes

- Raízes múltiplas -> $c_{i_0} r_i^n, c_{i_1} n\, r_i^n, c_{i_2} n^2 r_i^n, c_{i_{p-1}} n^{p-1} r_i^n$
- Reais -> Exponenciais reais ($r_i^n$)
- Imaginárias -> Senóides
- Complexas -> Senóides com envoltória exponencial



# Resposta para Estado nulo (Resposta Forçada)

- Buscamos solução do tipo:

$$y^{(f)}[n] = y^{(p)}[n] + \sum_{i=1}^{N} c_{i_f} r_i^n$$

Onde $y^{(p)}$ é chamada de solução particular

ela é obtida admitindo que a saída do Sistema apresenta a mesma forma geral que a entrada

| *Entrada* | *Solução Particular* |
|---|---|
| $1$ | $c$ |
| $\alpha^n$ | $c\,\alpha^n$ |
| $cos(\Omega n + \phi)$ | $c_1\, cos(\Omega n) + c_2\, sen(\Omega n)$ |

# Resposta ao impulso h(t)

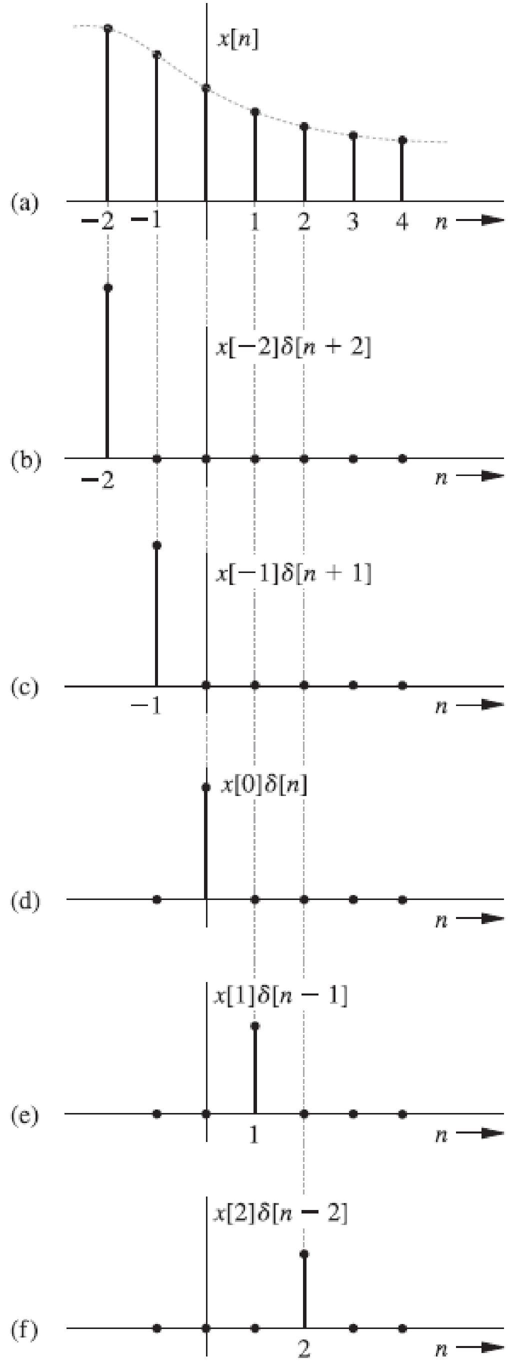
- Podemos representar um sinal como uma superposição de impulsos deslocados no tempo

$$x[n] = \sum_{i=-\infty}^{\infty} x[i]\delta(n-i)$$

Podemos escrever a resposta a este sinal como a soma ponderada das respostas dos sinais que se somam.

$$y[n] = \sum_{i=-\infty}^{\infty} x[i]h(n-i) = x[n] * h[n]$$

Damos a esta operação o nome de **soma de convolução**



# Exemplo equação de diferenças

# Exemplo - Convolução

$x[n] = n(u[n] - u[n-4])$

$h[n] = u[n] - u[n-3]$

# Exemplo - Convolução