Universidade Federal de Pelotas
Curso de Engenharia de Computação
Disciplina: 22000178 – Sistemas e Sinais
Turma: 2020/2 – T52
Professor: Vinícius V. A. Camargo

Relatório da Tarefa 8: Transformada de Fourier.

Aluno: Mairon Schneider Cardoso. Data: 26/11/2020

Número de matrícula: 17102515.

1 Introdução

Como visto no capítulo 4 do livro texto da disciplina, referente a transformada de Laplace, conseguimos representar o comportamento de um sistema ou sinal através de sua representação na frequência, expressa pela fase e magnitude. O benefício de transformar o sinal para sua representação em frequência é facilitar algumas operações que seriam complexas no domínio tempo como a convolução. A transformada de Fourier nada mais é que uma extensão da série de Fourier, vista anteriormente, entretanto, consideramos o período da função representada como um limite que tende ao infinito, isto é, isolaremos uma função inicialmente definida como periódica tendendo o período que a define ao infinito transformando ela em uma função aperiódica.

2 Resultados e Discussões

A transformada de Fourier é um caso particular da transformada de Laplace, onde em Laplace, vimos que havia uma variável que indicava a frequência da integral de Laplace, essa variável era definida como $s = \sigma + j\omega$, em Fourier, essa variável se comportará como $s = j\omega$, isto é, um caso particular onde $\sigma = 0$, precisamos ter cuidado na aplicação dessa relação, justamente por ele não ser válido em todos os casos. A equação que define a transformada de Fourier (do domínio tempo) é expressa pela integral presente na equação (1), onde, através dela, conseguimos transitar entre o domínio tempo até o domínio frequência o que possibilita representar um sinal em termos de magnitude e fase.

$$\mathcal{F}\{f(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot e^{\overbrace{-j\omega t}^{s\,\cdot\,t}} \cdot dt \tag{1}$$

2.1 Composição de sinais elementares

Quando observamos o primeiro sinal exposto através do enunciado do trabalho, conseguimos perceber que nele é possível representa-lo somente através de funções $u(t)$ e se aproveitando da propriedade de deslocamento temporal é possível reescreve-lo isolando determinados períodos. Então, para a reconstrução correta do sinal ilustrado no trabalho, o sinal foi dividido em 3 componentes diferentes, a primeira componente abrange a área delimitada por [-6, -2], ou seja, foi necessário somente deslocar a função unitária $u(t+6)$ e $u(t+2)$, a segunda componente ela abrange a área de [-2, 2], ou seja, $u(t+2)$ e $u(t-2)$, é necessário também multiplica-lá por 3 impactando assim a sua amplitude, a terceira componente cobre o restante da área do sinal, onde essa área é representada pelos limites [2, 4], isto é, $u(t-2)$ e $u(t-4)$. A representação completa do sinal pode ser descrito conforme ilustrado na equação (2) e pode ser observada através da figura 1.

$$x_1(t) = u(t+6) - u(t+2) + 3 \cdot (u(t+2) - u(t-2)) - u(t-2) + u(t-4) \tag{2}$$

O segundo sinal e o terceiro sinal diferem somente na aplicação da propriedade de deslocamento temporal, eles se comportam como um seno com frequência angular igual a 2π e de mesma fase. O segundo sinal, ele foi decomposto em duas componentes, a primeira componente é o seno com 2 vezes sua amplitude, multiplicado pelo intervalo descrito por $u(t+2)$, a segunda componente também é um seno com amplitude multiplicada por 2 e intervalo descrito por $u(t-2)$, a soma dessas duas componentes descreve o sinal requisitado. A equação que descreve tem sua representação escrita na equação (3), conseguimos observar o comportamento através da figura 2.

$$x_2(t) = 2 \cdot sin(2\pi t) \cdot (u(t+2) - u(t-2)) \tag{3}$$

O terceiro sinal, como comentado anteriormente, é descrito pela mesma frequência angular e amplitude do sinal anterior, entretanto, há uma diferença no deslocamento, isto é, o terceiro sinal ele é multiplicado por $u(t+4)$ e $u(t)$, onde, dividindo em duas componentes é possível descrever o sinal esperado. A equação que descreve o comportamento do sinal é descrita na equação (4) e sua representação pode ser observada na figura 3.

$$x_3(t) = 2 \cdot sin(2\pi t) \cdot (u(t+4) - u(t)) \tag{4}$$

2.2 Transformada de Fourier

Com as componentes necessárias, conseguimos construir os três sinais requisitados na atividade (figura 4), através destas componentes, conseguimos construir extraír o comportamento desses sinais no domínio frequência por meio da transformada de Fourier. A transformada de Fourier foi calculada através da definição (integral vista anteriormente) e por pares básicos, que nada mais é que uma tabela com algumas integrais já calculadas, neste caso dos pares básicos, também foram aplicados propriedades da transformada de Fourier. Para o calculo através da definição, precisamos lembrar que a integral que compõe a equação da transformada é uma operação linear, isto é, a integral das somas é igual à soma das integrais, isso efetivamente significa que podemos aplicar a integral da definição em diferentes componentes e soma-lás, o que facilita os cálculos para chegar no resultado final.

O calculo através da definição do $x_1(t)$ se torna extremamente simples uma vez que já conhecemos os limites de integração de cada pulso retangular que compõe o sinal final, então, através da equação (1) sabemos que o $x(t)$ será igual a amplitude daquele pulso e os limites da integral definida serão os deslocamentos temporais extraídos anteriormente, contudo, conseguimos perceber que continuaremos integrando em termos de $e^{-j\omega t}$, e isso pode se tornar complexo conforme mudamos o sinal de entrada, como será visto no sinal $x_2(t)$ e $x_3(t)$.

O cálculo utilizando a definição dos sinais $x_2(t)$ e $x_3(t)$ se torna um pouco mais complexo, justamente por $x(t) \neq Constante$, como no caso anterior, então, para facilitar a integral da definição para esses dois sinais, foi utilizado uma relação matemática que substitui o seno por uma exponencial, tal relação é descrita na equação (5), através dela, conseguimos somar os expoentes provenientes do seno, com o expoente que está presenta na integral da definição, entretanto, realizar essa integral seria bem trabalhosa sem o auxílio de alguma ferramenta computacional, isto é, apesar de estarmos acostumado a extrair a integral, visto que, visualizamos isso na série de Fourier, na transformada desses sinais com uma entrada diferente de uma constante, é conveniente aplicar um método mais simples para extrair a equação que define o sinal no espectro de frequência.

$$sinx = \frac{e^{jx} - e^{-jx}}{j2} \tag{5}$$

A extração da transformada de Fourier a partir dos pares básicos traz algumas facilidades para expressar a equação que define a transformada, entretanto, é preciso ter cuidado na hora de aplicar as propriedades, principalmente quando temos uma função retangular. Com relação ao $x_1(t)$, a extração da equação que descreve a transformada de Fourier é feita através dos pares básicos, onde, primeiramente precisamos encontrar o par básico que descreve a função retangular, sabendo que o par básico que relaciona a transformada de uma função retangular de domínio tempo para o domínio frequência é descrita na equação (6), conseguimos notar que τ é o período total da componente retangular e t_0 é o centro do deslocamento no tempo (quando t_0 é zero, não é necessário indicar o centro da função retangular, significando o alinhamento da função em zero), entretanto, percebemos que somente esse par básico não consegue descrever as outras duas componentes, justamente pelo deslocamento que acontece nelas, então, aproveitando-se das propriedades da transformada, empregando a propriedade de deslocamento no tempo deslocamos a função $sinc(x)$ multiplicando-a por $e^{-j\omega t_0}$.

$$ret\left(\frac{t+t_0}{\tau}\right) \underbrace{\Longleftrightarrow}_{\mathcal{F}\{f(t)\}} \tau sinc\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) \tag{6}$$

O $x_2(t)$ descrito por pares básicos, além de utilizar-se do par básico da função retangular vista anteriormente, utiliza-se do par básico descrito na equação (7) para representar a função obtida depois de converter o seno para exponenciais. Uma coisa importante de se notar nesse caso, é que quando aplicamos os pares básicos para construção inicial da função que será transformada, acabamos por ter uma multiplicação entre o par básico da função retangular e as exponenciais, onde, no domínio da frequência será uma convolução, o que pode ser um contra da aplicação dos pares básicos. Como comentado anteriormente, proveniente da multiplicação da transformada da função retangular e da função exponencial, precisaremos aplicar uma propriedade de convolução na frequência para que consigamos transformar o sinal $x_2(t)$, para que isso seja feito da maneira correta, utilizaremos a propriedade descrita na tabela de propriedades e conseguimos notar que o $\frac{1}{2\pi}$ que surge é justamente proveniente da propriedade do peneiramento.

$$e^{j\omega_0 t} \Longleftrightarrow 2\pi\delta(\omega-\omega_0) \tag{7}$$

A principal diferença da transformada de $x_2(t)$ em contraste com $x_3(t)$ é justamente a necessidade de deslocamento da função retangular no sinal $x_3(t)$, então, para conseguir extrair a transformada do sinal $x_3(t)$ foi necessário somente acrescentar na transformada extraída anteriormente um deslocamento no t_0 na equação (6) e também, aplicar a propriedade de convolução, assim como vimos anteriormente.

O resultado da transformada de Fourier dos três sinais podem ter sua magnitude observada através da figura 5 e sua fase por meio da figura 6, portanto, conseguimos observar no gráfico de magnitude os dois picos (em $\pm 2\pi$, justamente pela frequência angular dos senos) que descrevem o comportamento dos sinais $x_2(t)$ e $x_3(t)$ no espectro de frequência, uma coisa importante para validar nossos resultados, é justamente comparar o sinal $x_2(t)$ e $x_3(t)$ no gráfico da fase, afinal, se mexermos somente no deslocamento deles, a magnitude continuaria a mesma (afinal, a frequência no domínio tempo dos dois sinais são iguais), porém a fase sofreria mudanças, o que se confirma quando observamos os gráficos.

3 Conclusões

Portanto, conseguimos perceber através do relatório que calcular a transformada de Fourier através da definição pode se tornar complexo, caso você não tenha assistência de um *software* que calcule integral, entretanto, o cálculo através de pares básicos, pode acabar com algumas das nossas vantagens quando queremos entrar no domínio da frequência, como evitar a convolução. Observando as diferenças entre a transformada de Fourier e de Laplace, conseguimos perceber a utilizade de cada um, os gráficos obtidos que demonstram a fase e magnitude de um sinal é a grande vantagem de Fourier, isto é, analisar um sinal acaba se tornando mais simples quando utilizamos Fourier, entretanto, quando queremos analisar um sistema, Laplace em conjunto com o diagrama de Bode pode se tornar a melhor escolha para um engenheiro.

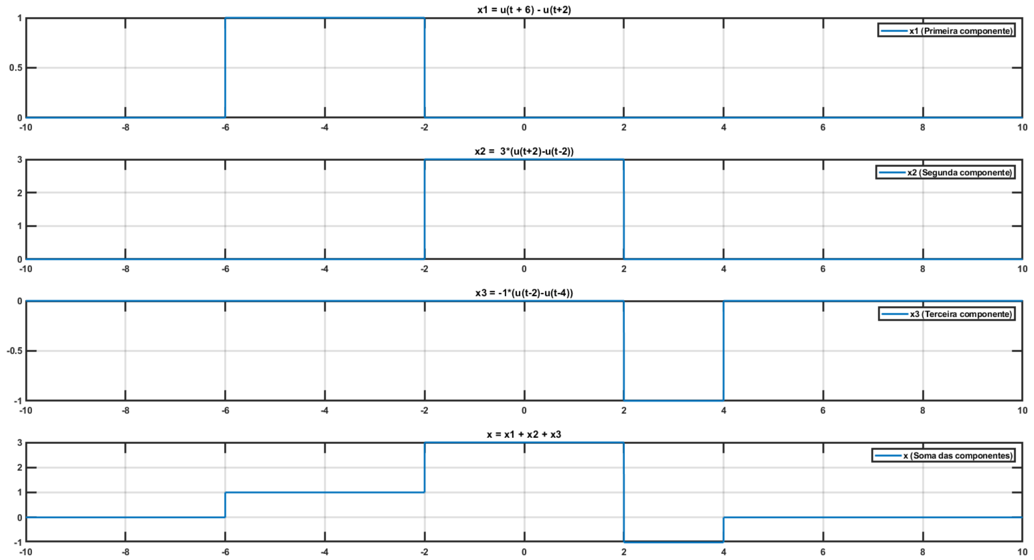

Figura 1: As componentes que resultam no sinal 1.

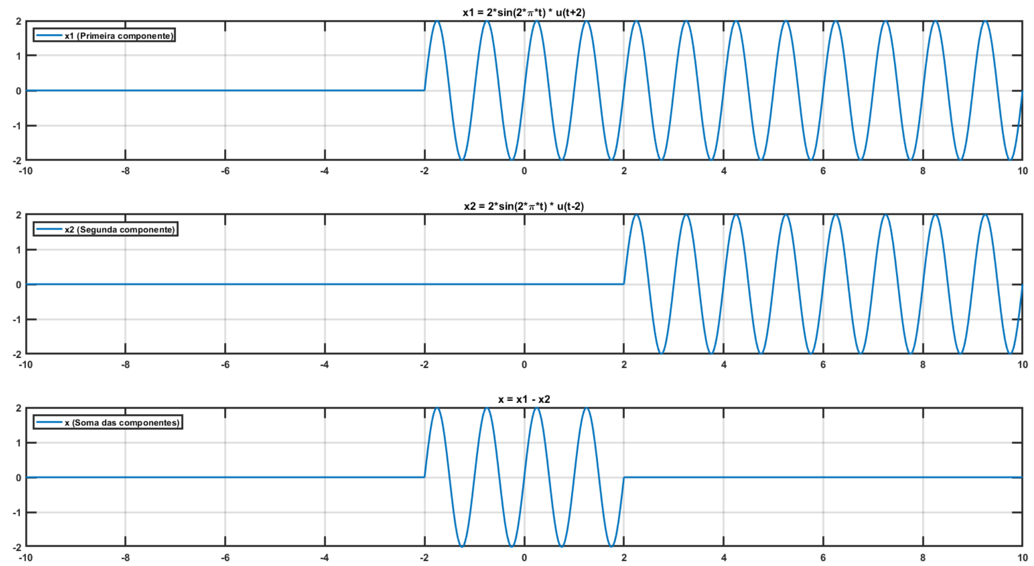

Figura 2: As componentes que resultam no sinal 2.

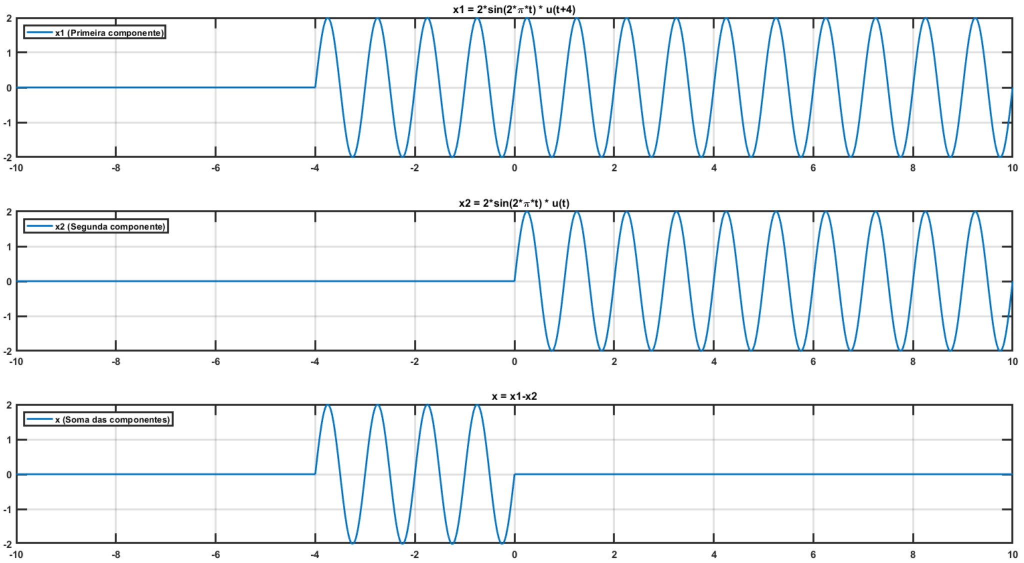

Figura 3: As componentes que resultam no sinal 3.

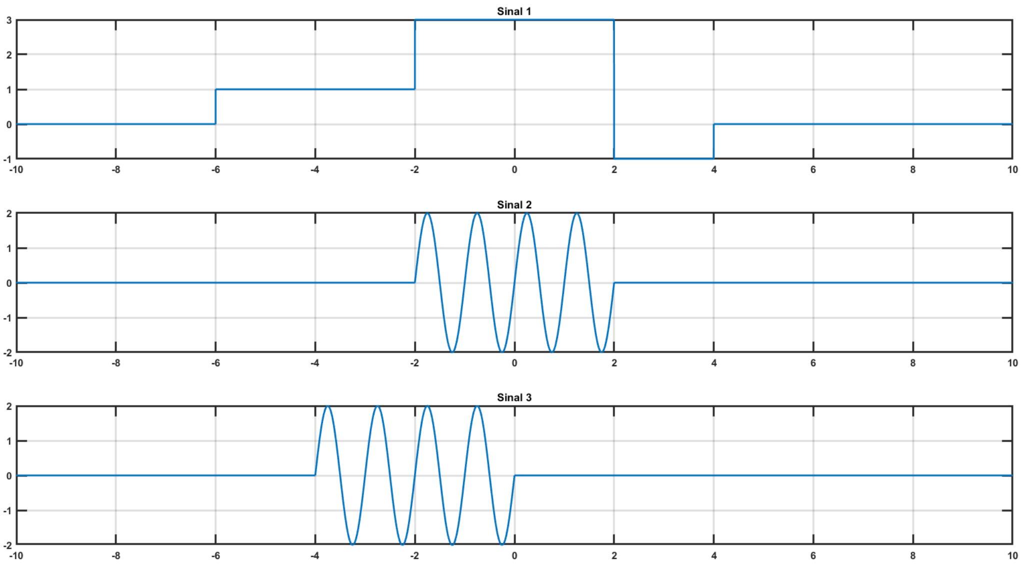

Figura 4: Os três sinais que são retratados no enunciado do exercício.

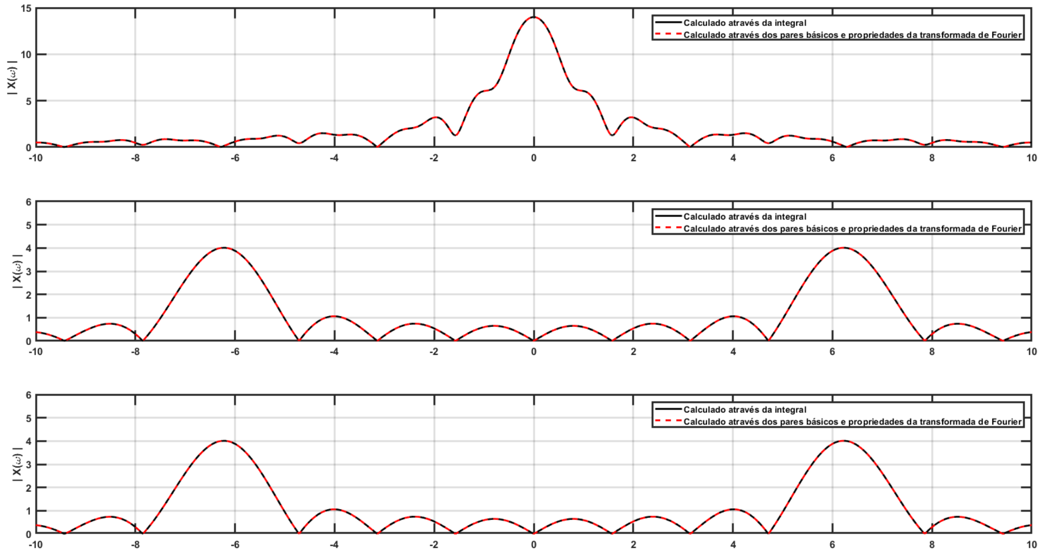

Figura 5: Magnitude calculada através dos pares básicos e da aplicação das propriedades e o valor cálculado através da integral.

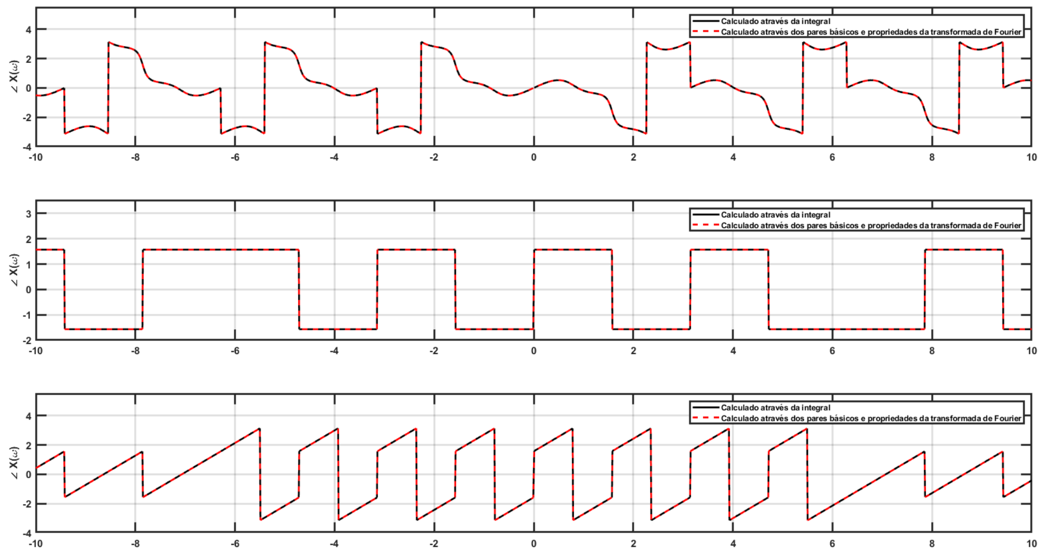

Figura 6: Fase calculada através dos pares básicos e da aplicação das propriedades e o valor cálculado através da integral.