Sistemas e Sinais
semana 7

Prof. Vinícius Valduga de Almeida Camargo

Representação de Fourier
Série de Fourier

- Representar sinais como combinação linear de sinais básicos que tenham as seguintes propriedades:

    - O conjunto de sinais básicos pode ser usado para construir uma classe ampla e útil de sinais;

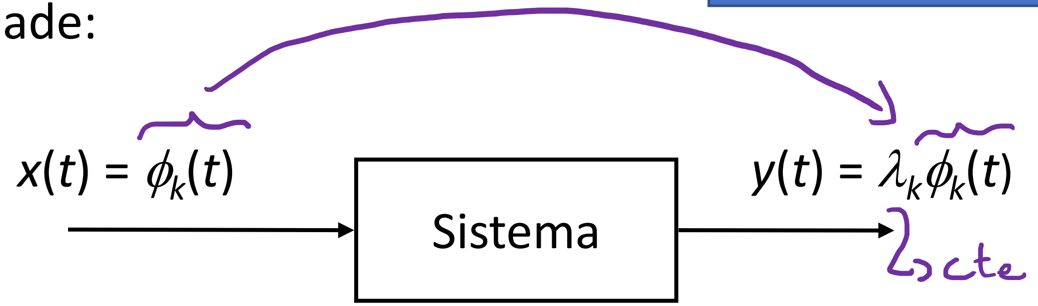
    - A resposta de um sinal a um sistema LTI deve ser simples o suficiente na sua estrutura para nos fornecer, com uma representação conveniente, a resposta a qualquer sinal construído como uma combinação linear de dois ou mais sinais básicos.

- Exponenciais complexas atendem essas propriedades!

$e^{j\omega t}$

Autofunção e Autovalor

- Para um sistema particular, onde $\phi_k(t)$ tem a propriedade:



- $\phi_k(t)$ é uma **autofunção** e λ_k e um **autovalor**

- Se um sinal de entrada pode ser decomposto em:

$$x(t) = \Sigma_k a_k \phi_k(t)$$

- A resposta a um sistema linear pode ser dada no formato:

$$y(t) = \Sigma_k a_k \lambda_k \phi_k(t)$$

Autofunção e Autovalor

- Cada sistema pode ter diferentes autofunções:
- Exemplo 1: Sistema identidade

$$x(t) \longrightarrow \boxed{\delta(t)} \longrightarrow x(t) * \delta(t) = x(t)$$

Qualquer função é autofunção para esse sistema

- Exemplo 2: Atraso

$$x(t) \longrightarrow \boxed{\delta(t-T)} \longrightarrow x(t-T)$$

Qualquer função periódica de período T

é autofunção para esse sistema

- Exemplo 3: Reflexão

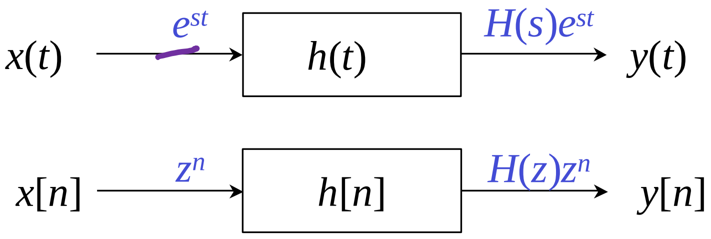
$\cos \omega t$

$$x(t) \longrightarrow \boxed{h(t) = h(-t)} \longrightarrow y(t) = \cos \omega t$$

Qualquer função par é autofunção para esse sistema

Autofunção e Autovalor

- Em sistemas LTI $\phi_k(t) = e^{st}$ onde $s \in C$, são **autofunções**.
- Exponenciais complexas são as únicas autofunções para qualquer sistema LTI



Considere o sistema LTI em TC com resposta ao impulso $h(t)$ e sinal de entrada $x(t)=\phi(t) = e^{st}$, para qualquer $s \in C$:

$$
\begin{aligned}
y(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{s(t-\tau)}d\tau \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{st}e^{-s\tau}d\tau \\
&= e^{st}\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{-s\tau}d\tau
\end{aligned}
$$

$$H(s) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{-s\tau}d\tau$$

Assumindo que a integral converge isso se torna:

$$y(t) = H(s)e^{st}$$

Portanto $\phi(t)=e^{st}$ é autofunção e $\lambda=H(s)$ autovalor.

Representação com Série de Fourier

- Ao estudar sistemas LTI vimos que um sinal pode ser representado com a combinação linear de impulsos deslocados
- Vimos agora que sinais podem ser representados como combinação linear de autofunções LTI (exponneciais imaginárias)
- Uma dessas representações é a **Série de Fourier**
- Se tratam de **sinais senoidais ponderados e deslocados (fase)**, que podem ser representados como exponenciais complexas

Representação com Série de Fourier

- Sinais periódicos atendem a condição $x(t) = x(t+T)$, onde T é o período fundamental, e $\omega_0 = 2\pi/T$ a frequência fundamental.

Periódicos e Contínuos

$$x(t) = \cos(\omega_0 t)$$

$$x(t) = e^{j\omega_0 t}$$

- Cada sinal periódico está relacionado a um conjunto de exponenciais complexas harmonicamente relacionadas:

$$\phi_k(t) = e^{jk\omega_0 t} = e^{jk(2\pi/T)t} \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

- A **Série de Fourier** tem a seguinte forma: $\longrightarrow$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk(2\pi/T)t}$$

1

a_0

  - k=0 é o componente DC (constante)
  - k=+/-1 frequência fundamental ou primeira harmônica
  - k=+/-N são as componentes da N-ésima harmônica

Representação com Série de Fourier

- Exemplo:

$$x(t)=\sum_{k=-3}^{3} a_k e^{jk2\pi t}$$

$$x(t)=\overset{\text{DC}}{1}+\overbrace{\frac{1}{4}\left(e^{j2\pi t}+e^{-j2\pi t}\right)}^{1^{a}\text{ H}}+\overbrace{\frac{1}{2}\left(e^{j4\pi t}+e^{-j4\pi t}\right)}^{2^{a}\text{ H}}+\overbrace{\frac{1}{3}\left(e^{j6\pi t}+e^{-j6\pi t}\right)}^{3^{a}\text{ H}}$$

$$\omega_0=2\pi$$

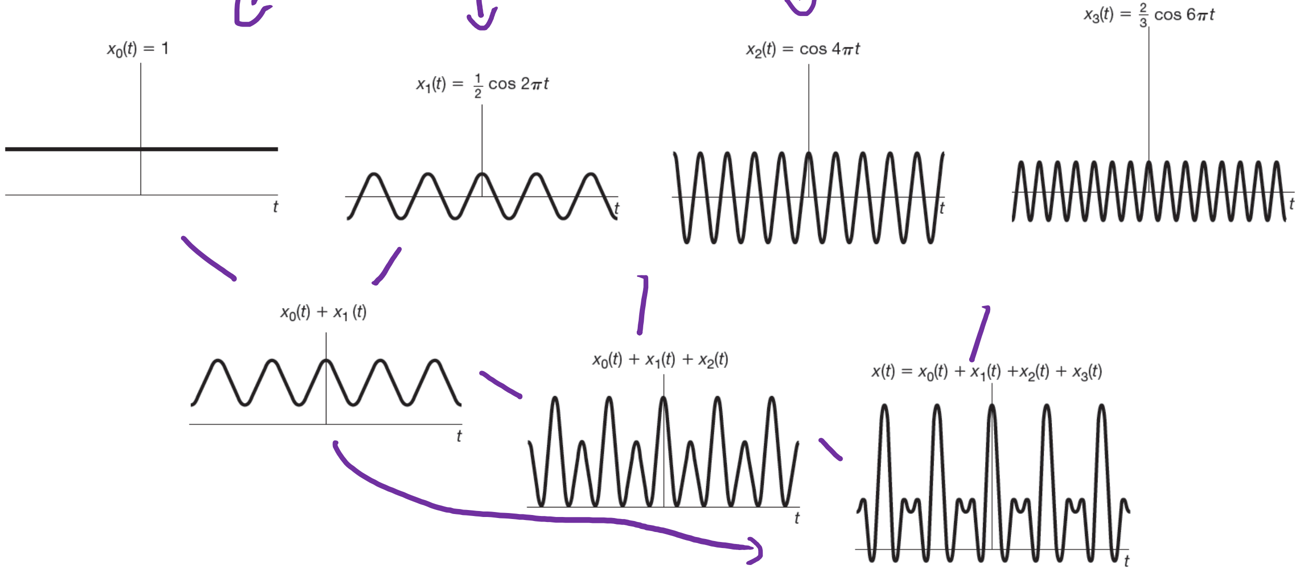
$$x(t)=1+\frac{1}{2}\cos(2\pi t)+\cos(4\pi t)+\frac{2}{3}\cos(6\pi t)$$

$$a_0=1$$

$$a_1=a_{-1}=\frac{1}{4}$$

$$a_2=a_{-2}=\frac{1}{2}$$

$$a_3=a_{-3}=\frac{1}{3}$$



Série de Fourier

- Dada a representação de Fourier é necessário um método para definir a_k.
- Iniciamos multiplicando ambos os lados por $e^{-jn\omega_0 t}$

$$x(t)e^{-jn\omega_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} e^{-jn\omega_0 t}$$

$$\int_0^T x(t)e^{-jn\omega_0 t}dt = \int_0^T \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{j(k-n)\omega_0 t}dt$$

T é o período de $x(t)$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \int_0^T e^{j(k-n)\omega_0 t}dt = a_n T$$

- Pela relação de Euler

$$\int_0^T e^{j(k-n)\omega_0 t}dt = \int_0^T \cos((k-n)\omega_0 t)dt + j\int_0^T \sin((k-n)\omega_0 t)dt$$

- Pode ser demonstrado que

$$\int_0^T e^{j(k-n)\omega_0 t}dt = \begin{cases} T & k = n \\ 0 & k \neq n \end{cases}$$

Série de Fourier

- Portanto:

$$\int_0^T e^{j(k-n)\omega_0 t}dt = \begin{cases} T & k = n \\ 0 & k \neq n \end{cases}$$

$$\int_0^T x(t)e^{-jn\omega_0 t}dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \int_0^T e^{j(k-n)\omega_0 t}dt \quad \Longrightarrow \quad a_n = \tfrac{1}{T}\int_0^T x(t)e^{-jn\omega_0 t}dt$$

- Note que podemos integrar em qualquer intervalo de duração *T*

$$a_n = \tfrac{1}{T}\int_T x(t)e^{-jn\omega_0 t}dt$$

Série de Fourier

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk(2\pi/T)t}$$

Equação de Síntese

$$a_k = \frac{1}{T}\int_T x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt = \frac{1}{T}\int_T x(t)e^{-jk(2\pi/T)t}dt$$

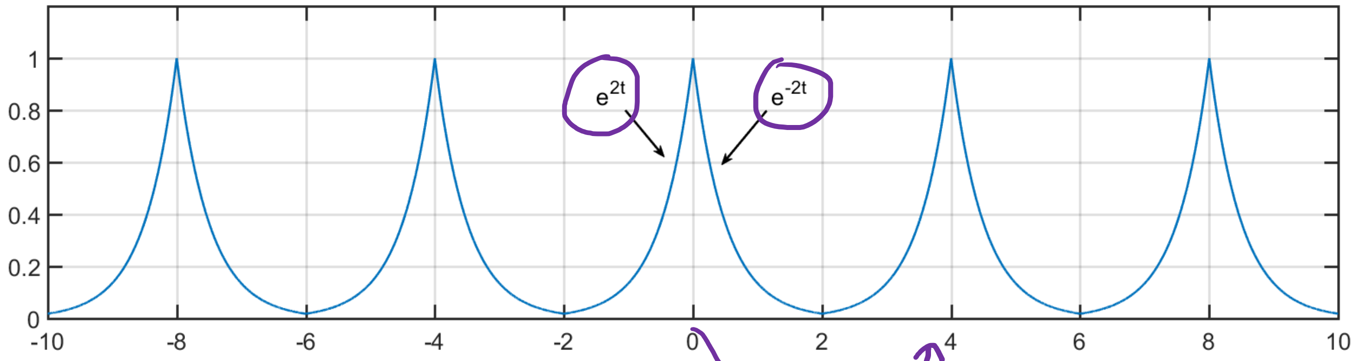
Equação de Análise

- Os coeficientes a_k são chamados de **coeficientes da Série de Fourier** ou **coeficientes espectrais** de *x(t)*
- a_0 é o componente DC de *x(t)* e corresponde ao valor médio do sinal em um período.

Exemplo

série de fourier

Considere os coeficientes de Fourier para representar o sinal periódico



$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \cdot e^{jk\omega_0 t}$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

$$a_k = \frac{1}{4} \cdot \int_{-2}^{2} x(t)\, e^{-jk\frac{\pi}{2}t}\, dt = \frac{1}{4}\left(\int_{-2}^{0} e^{2t} e^{-jk\frac{\pi}{2}t}\, dt + \int_{0}^{2} e^{-2t} e^{-jk\frac{\pi}{2}t}\, dt \right)$$

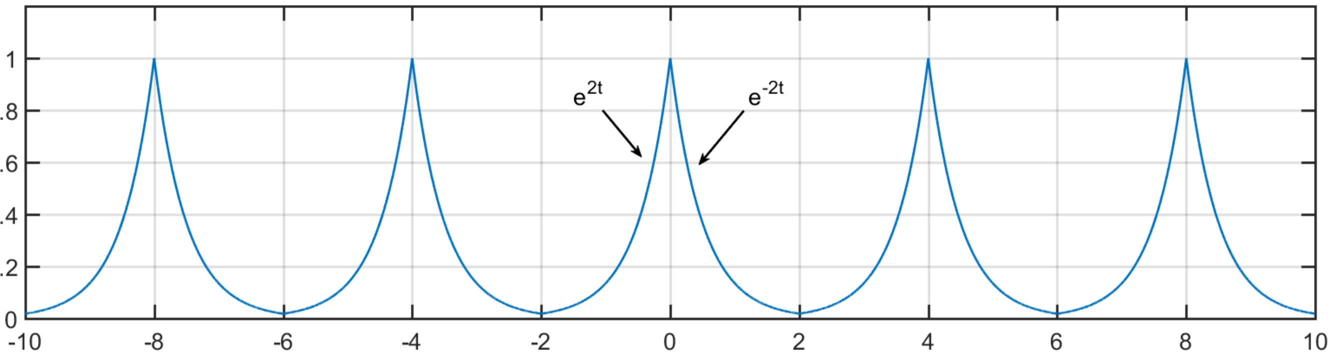
$$e^{jk\pi} = (-1)^n$$

$$e^{-jk\pi} = (-1)^n$$

$$a_k = \frac{1}{4}\left(\frac{1 - e^{-4} \cdot \cancel{e^{jk\pi}}^{(-1)^n}}{2 - k\frac{\pi}{2}j} + \frac{-e^{-4}\, \cancel{e^{-j\pi k}}^{(-1)^n} - 1}{+2 + k\frac{\pi}{2}j} \right) = \frac{1}{4}\left(\frac{2 - \cancel{k\frac{\pi}{2}j} \cdot e^{-4} \cdot (-1)^n - 2e^{-4}(-1)^n + k\frac{\pi}{2}j}{4 + k^2\pi^2/4} \right. -$$

Exemplo

Considere os coeficientes de Fourier para representar o sinal periódico



$$\frac{1}{4}\left(\frac{2 - \left(\overbrace{e^{-4}(-1)^k \cdot \left(2 + \cancel{\tfrac{k\pi}{2}}j\right)}\right) + 2 - \left(\overbrace{e^{-4}(-1)^k \cdot \left(2 - \cancel{\tfrac{k\pi}{2}}j\right)}\right)}{4 + \frac{k^2\pi^2}{4}}\right)$$

$$\frac{1}{\cancel{4}}\left(\frac{\cancel{4}^{1} - \cancel{4}^{1}e^{-4}(-1)^k}{\frac{4\cdot 4}{4} + \frac{k\pi^2}{4}}\right) = 4\left(\frac{1 - e^{-4}(-1)^k}{16 + k^2\pi^2}\right) = a_k \;//$$

Exemplo

Testando resposta no MATLAB:

```
t=-4:0.0001:4;
figure(1); hold on; grid on;
for limit=[3 5 10 100]
    x=zeros(1,length(t));
    for k=[-1*limit:limit]
    a_k=4*((1-exp(-4)*(-1)^k)/(16+(pi*k)^2));
    x=x+a_k*exp(i*k*pi*0.5.*t);
    end
    plot(t,x)
end
```