Sistemas e Sinais
semana 9

Prof. Vinícius Valduga de Almeida Camargo

Amostragem

- A operação de amostragem gera um sinal de tempo discreto

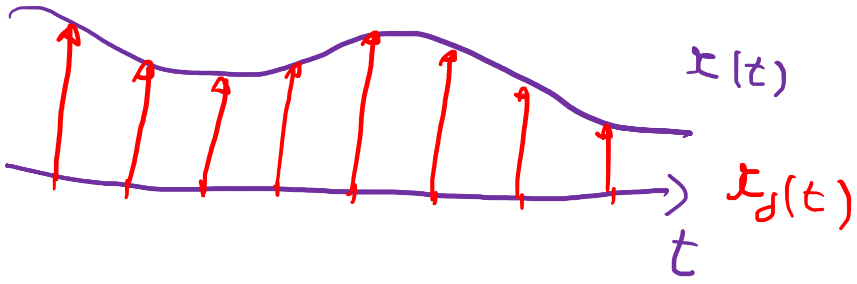
a partir de um sinal de tempo contínuo.

- Geralmente é utilizada para manipular um sinal do mundo real (analógico) com processadores digitais (microcontroladores, FPGAs, etc.)

- um sinal discreto $x[n]$ pode ser definido a partir da amostragem de um sinal contínuo da seguinte forma

$$x[n] = x(\underbrace{n\,T_s}), onde\ T_s é\ o\ período\ de\ amostragem.$$

Amostragem



- Podemos definir um sinal de tempo contínuo relacionado a

x[n] da seguinte forma:

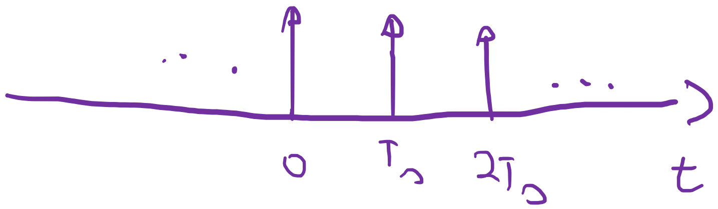
$$x_\delta(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\delta(t - nT_s)$$

$$x_\delta(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s) \cdot \delta(t - nT_s)$$

$$x_\delta(t) = x(t) \cdot \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s)}_{p(t)}$$

$p(t)$ trem de impulsos

$$x(t) \cdot \delta(t - nT_s) = x(nT_s) \cdot \delta(t - nT_s)$$



Amostragem – Domínio da Frequência

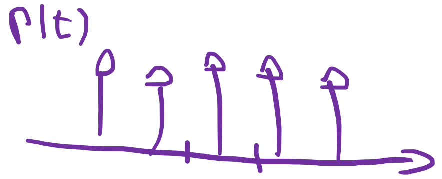
- Uma vez que $x_\delta(t)$ pode ser descrito como $x_\delta(t) = x(t)p(t)$, então podemos descrever sua transformada de Fourier como:

TF

$$X_\delta(j\omega) = \frac{1}{2\pi}\left(X(j\omega) * P(j\omega)\right)$$

$$X_\delta(j\omega) = \frac{1}{\cancel{2\pi}}\left(X(j\omega) * \frac{\cancel{2\pi}}{T_s}\cdot\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\omega - k\omega_s)\right)$$

$$X_\delta(j\omega) = \frac{1}{T_s}\cdot\sum_{k=-\infty}^{\infty} X(j(\omega - k\omega_s))$$



Série de Fourier

$$P[k] = \frac{1}{T_s}\int_{-T_s/2}^{T_s/2}\delta(t)\cdot e^{-jk\omega_s t}\,dt$$

$$P[k] = \frac{1}{T_s}e^0 = \frac{1}{T_s}$$

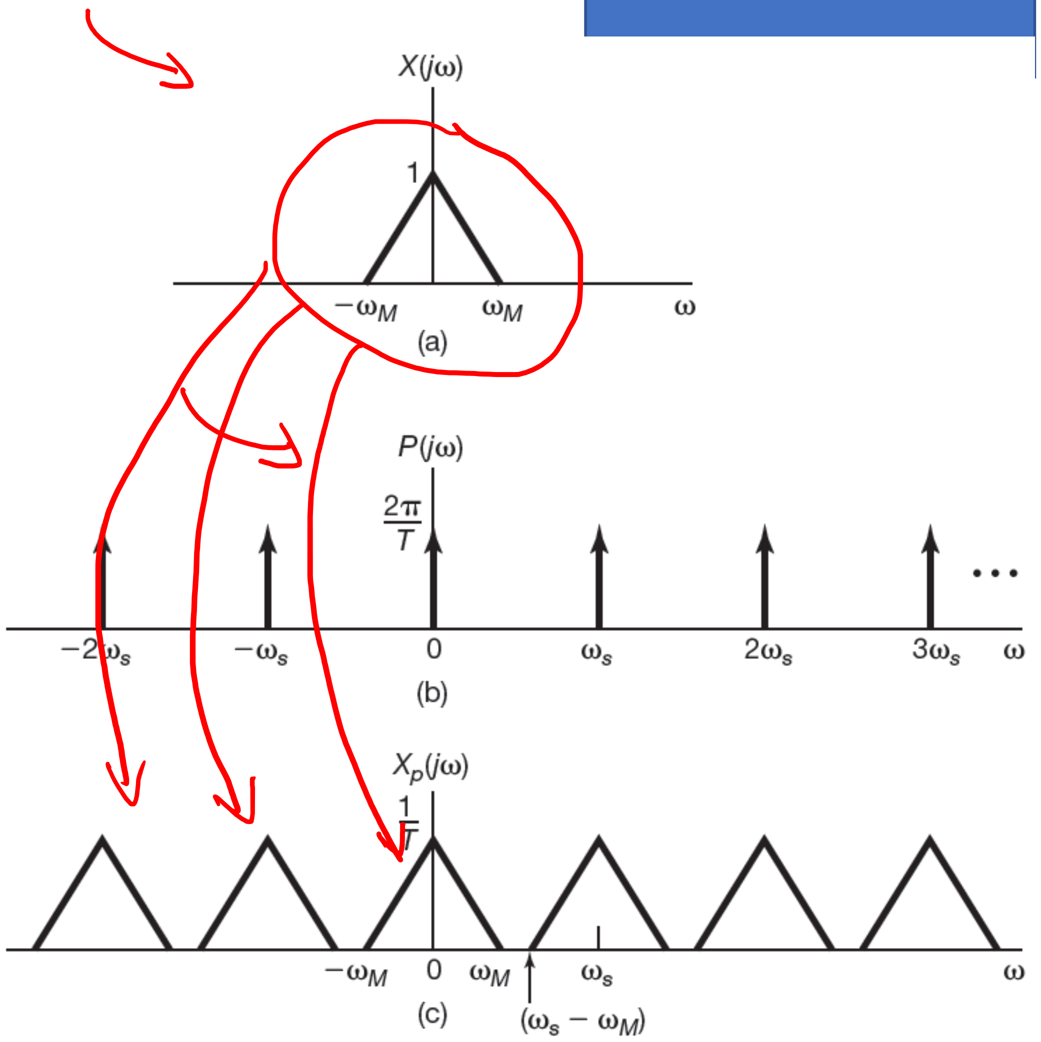
$$p(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{1}{T_s}\cdot e^{jk\omega_s t}$$

$$\Updownarrow \text{TF}$$

$$P(j\omega) = \frac{2\pi}{T_s}\cdot\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\omega - k\omega_s)$$

Amostragem – Domínio da Frequência

- Uma vez que $x_\delta(t)$ pode ser descrito como $x_\delta(t) = x(t)p(t)$, então podemos descrever sua transformada de Fourier como:



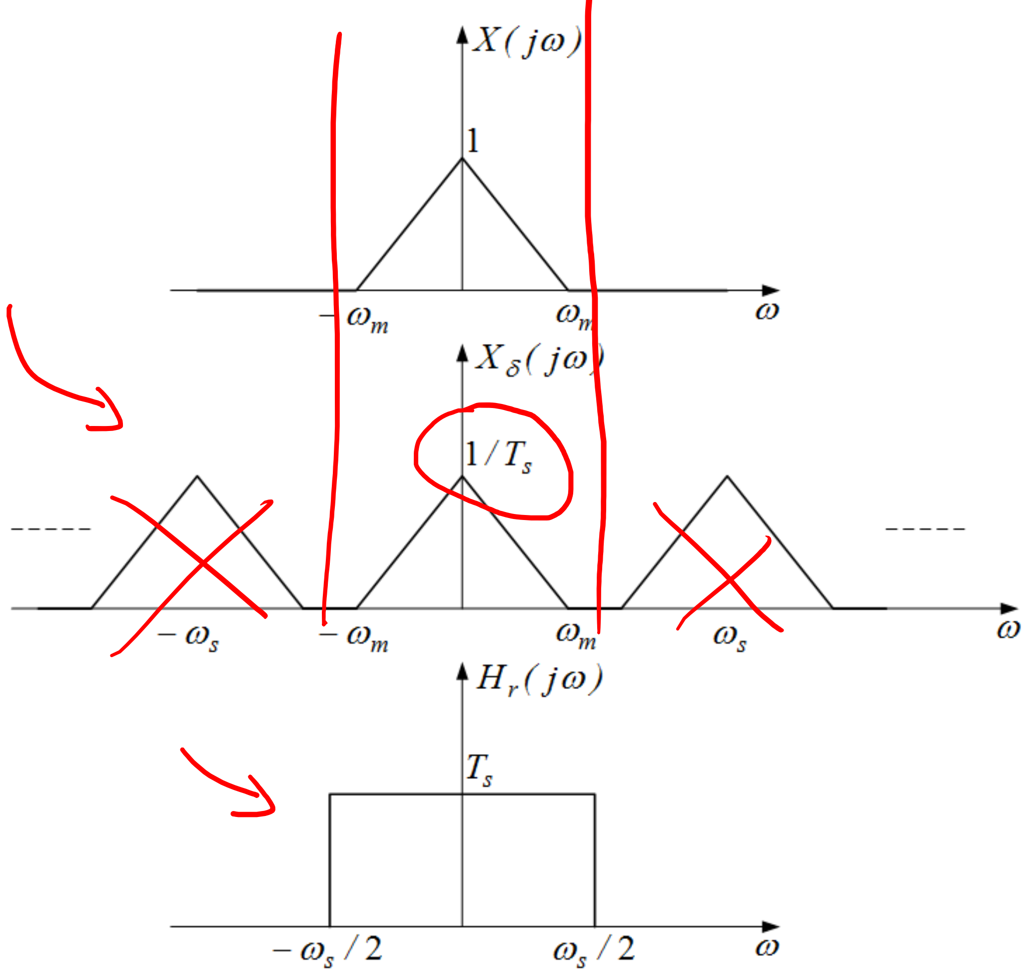
Amostragem – Reconstrução ideal

- A reconstrução ideal de um sinal amostrado pode ser feita com o auxílio de um filtro passa-baixas ideal.

$$H_r(j\omega) = \begin{cases} T_s, & |\omega| \le \omega_s/2 \\ 0, & |\omega| > \omega_s/2 \end{cases}$$

$$X(j\omega) = X_\delta(j\omega) H_r(j\omega)$$

$$x(t) = x_\delta(t) * h_r(t)$$



Amostragem – Reconstrução ideal

- Temos então

$$x(t) = h_r(t) * \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\delta(t - nT_s)$$

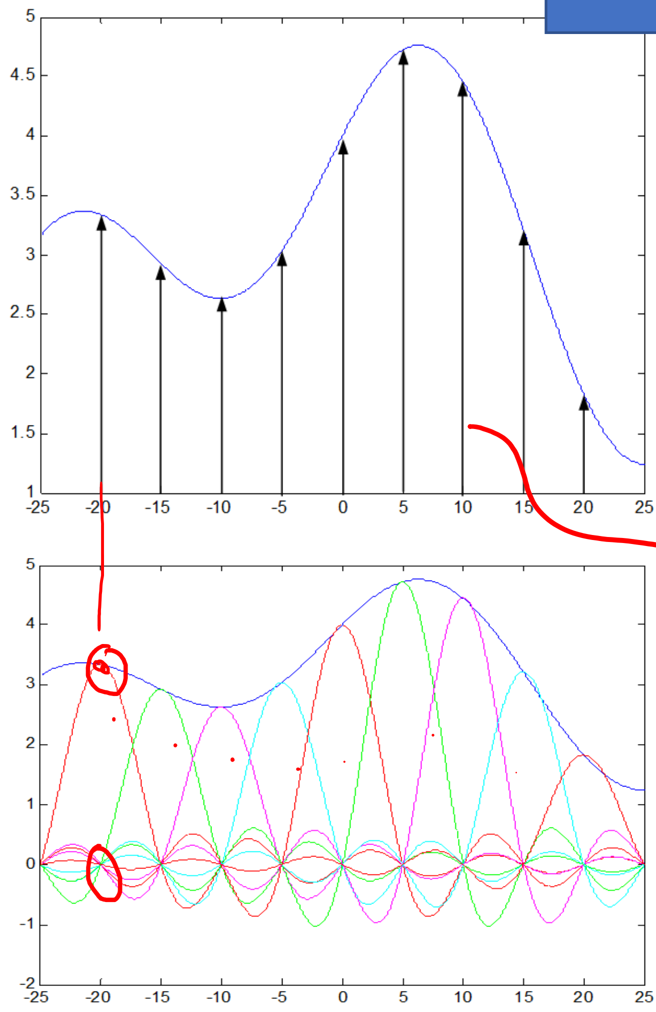
$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] h_r(t - nT_s)$$

- Uma vez que

$$h_r(t) = \frac{T_s \, sen\left(\frac{\omega_s}{2} t\right)}{\pi t}$$

Podemos escrever x(t) como

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \, sinc\left(\frac{\omega_s}{2\pi}(t - nT_s)\right)$$

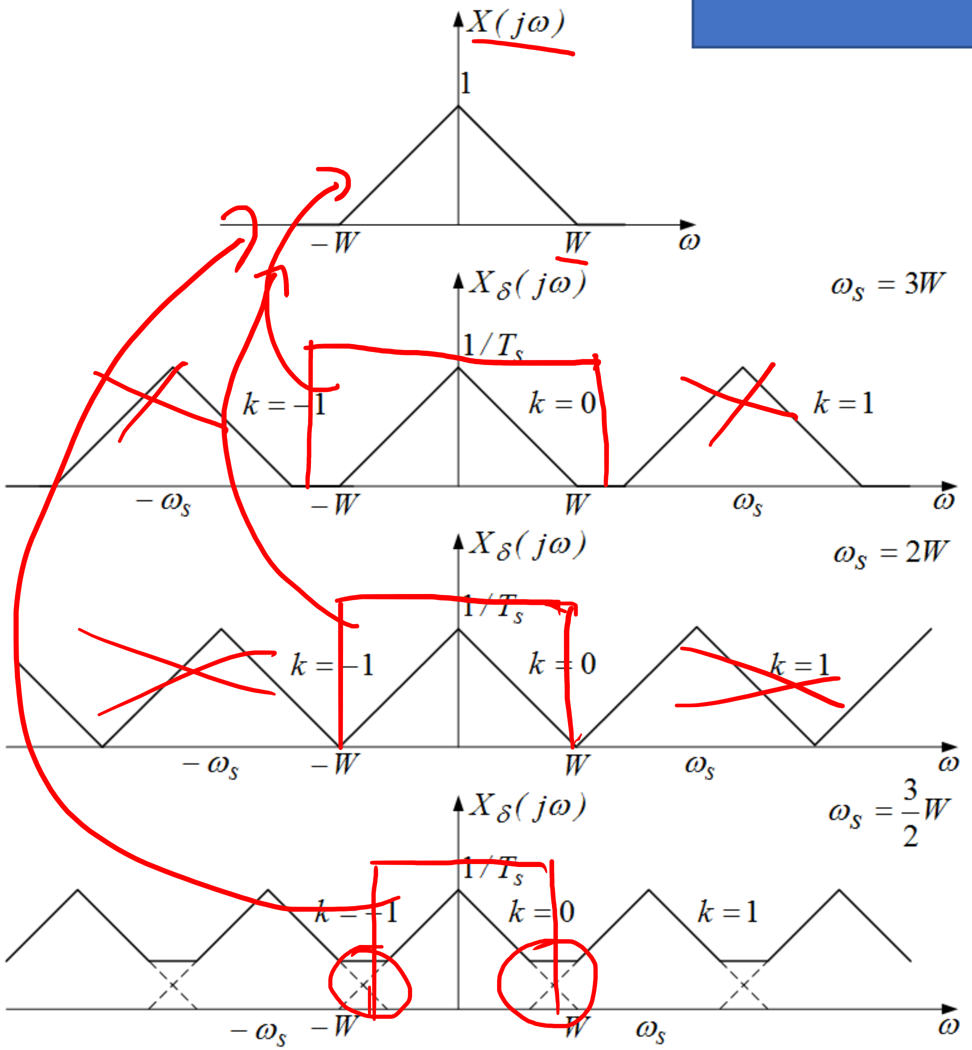


$x_\delta(t)$

Aliasing

Se a frequência de amostragem não for grande o suficiete em comparação com a extensão do espectro $X(j\omega)$, porerá haver uma sobreposição dos espectros das versões deslocadas de $X(j\omega)$.

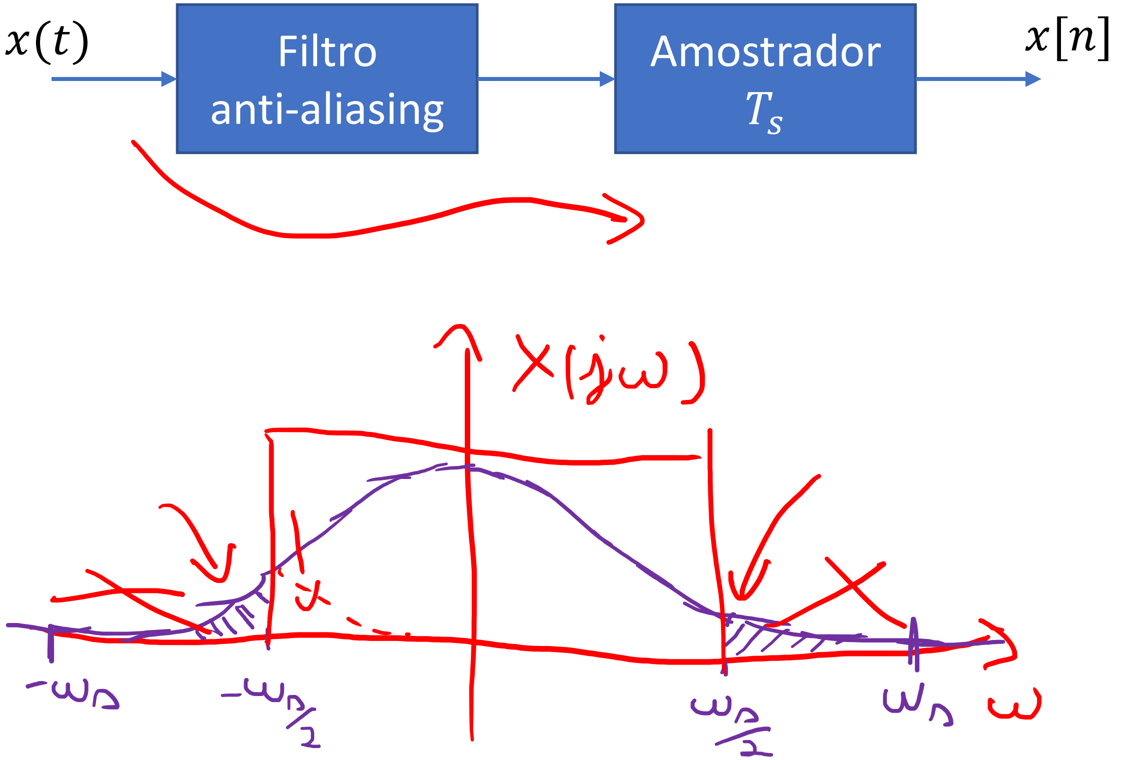
A sobreposição das réplicas deslocadas do espectro original é denominada de *aliasing*.



Aliasing

O fenômeno do *aliasing* pode ser evitado escolhendo-se um período de amostragem de forma que $\omega_s > 2W$, onde W é a frequência mais elevada do sinal.

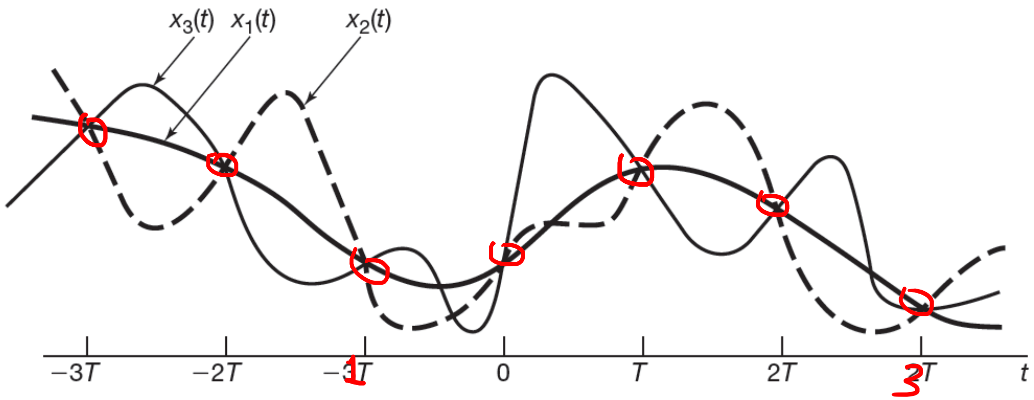
Muitas vezes o sinal tem frequência máxima tendendo a infinito, para amostrar este sinal sem sofrer com *aliasing* utilizamos um **filtro anti-*aliasing*** antes do amostrador.



Teorema da Amostragem

- Apenas com o conhecimento das amostras de um sinal não

é possível determinar o comportamento entre as amostras.



- A taxa com a qual o sinal varia no domínio do tempo está relacionada com a frequencia máxima presente no sinal. Ao limitar a frequência máxima do sinal, impedindo o *aliasing*, podemos reconstruir o sinal de maneira única.

Teorema da Amostragem

- O teorema da amostragem é formalmente definido como:

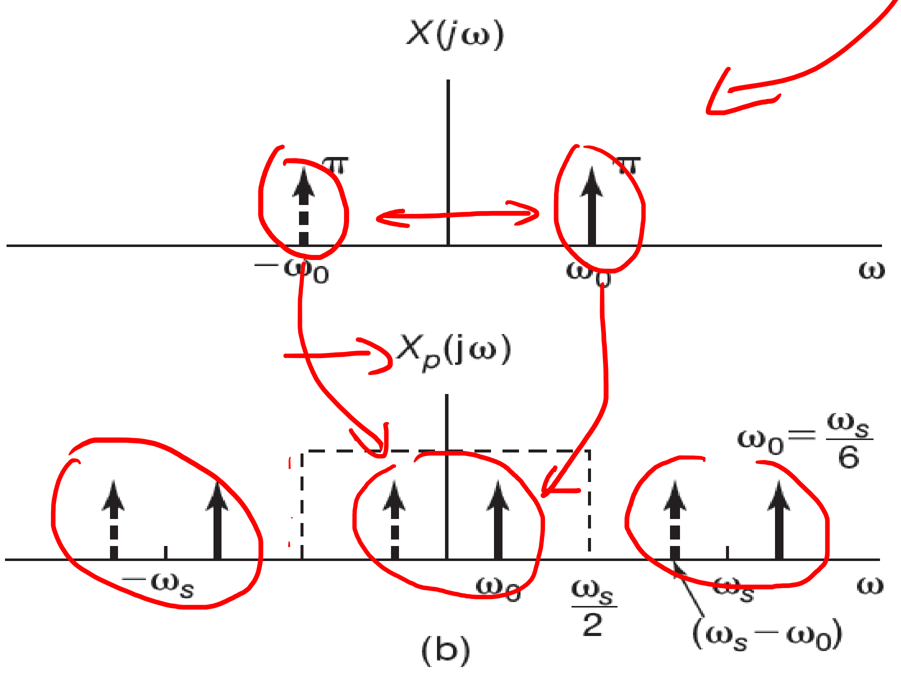
Admite-se que $x(t) \leftrightarrow X(j\omega)$ represente um sinal de faixa limitada, de forma que $X(j\omega) = 0$ para $|\omega| > \omega_m$. Se $\boxed{\omega_s > 2\omega_m,}$ em que $\omega_s = 2\,\pi/T_s$ e ω_m é a máxima frequência presente no sinal, então $x(t)$ é determinado de maneira única por suas amostras $x(nT_s)$, com $n \in \mathbb{Z}$.

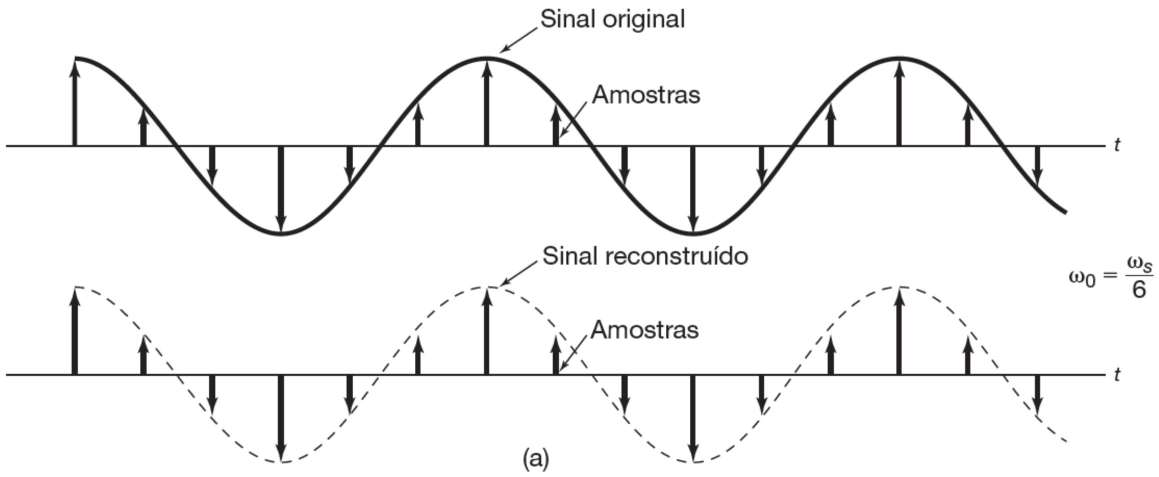
A frequência mínima de amostragem é denominada taxa de amostragem de Nyquist.

Efeito do *aliasing*

- Considere um amostrador com período de amostragem T_s utilizado para amostrar o sinal $\cos(\omega_0 t)$.

Para $\omega_0 = \omega_s/6$ temos

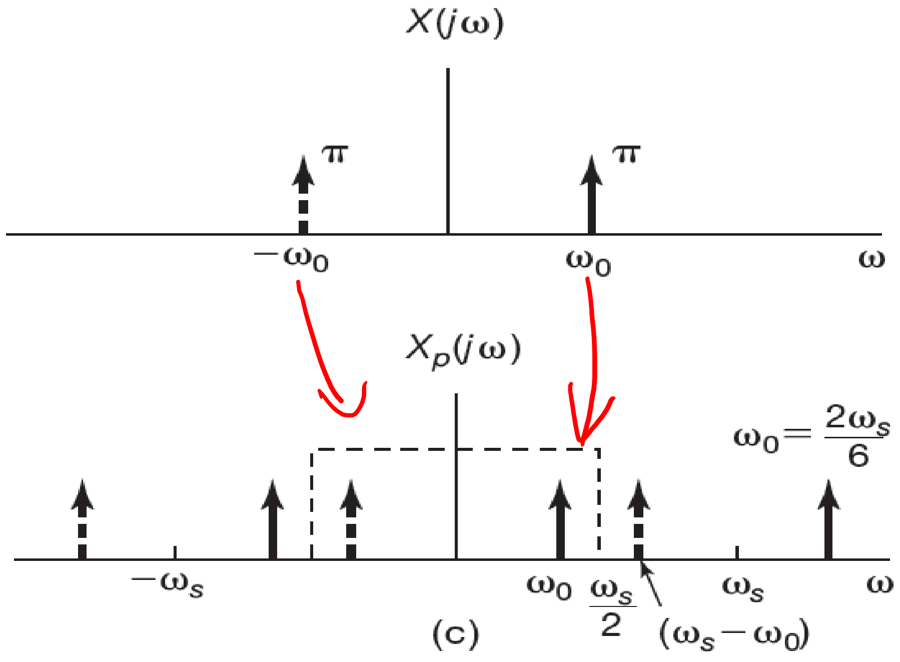


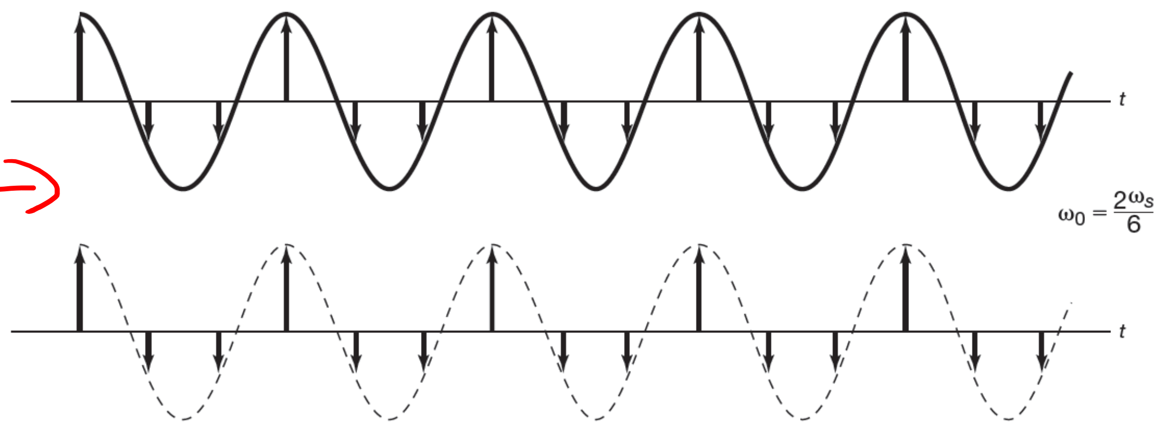


Efeito do *aliasing*

- Considere um amostrador com período de amostragem T_s utilizado para amostrar o sinal $\cos(\omega_0 t)$.

Para $\omega_0 = 2\omega_s/6$ temos

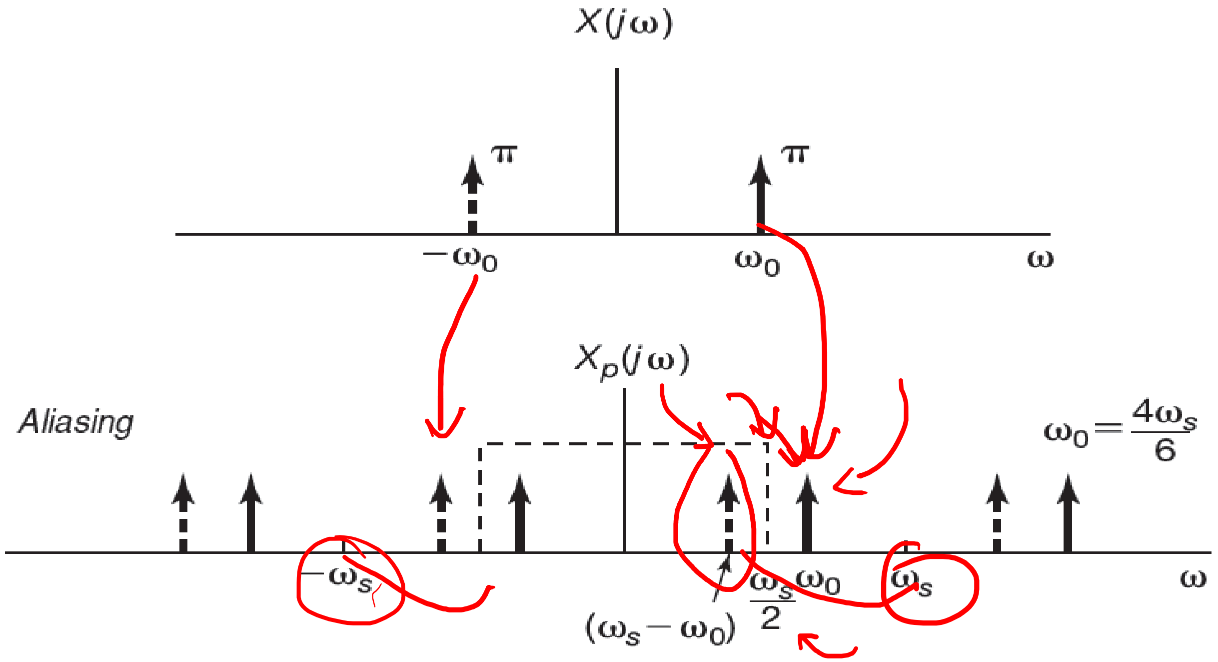


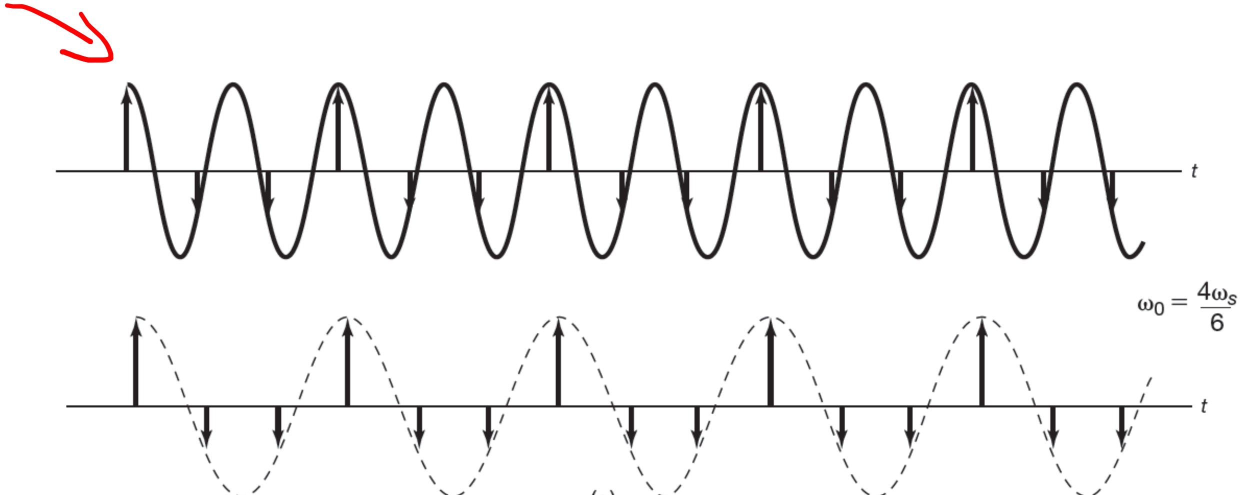


Efeito do *aliasing*

- Considere um amostrador com período de amostragem T_s utilizado para amostrar o sinal $\cos(\omega_0 t)$.

Para $\omega_0 = 4\omega_s/6$ temos



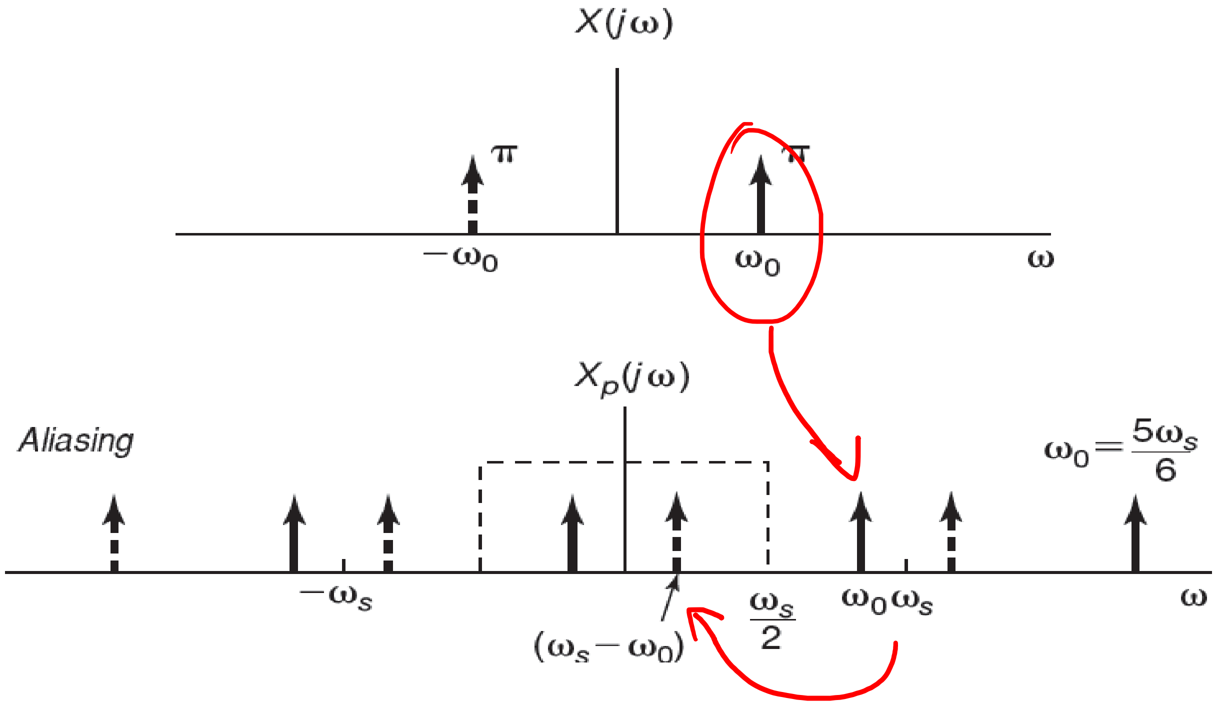


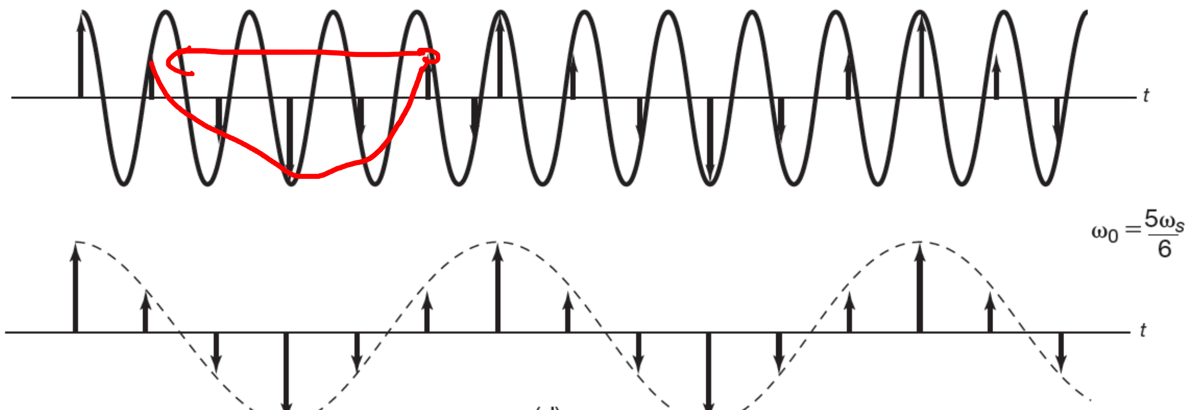
(c)

Efeito do *aliasing*

- Considere um amostrador com período de amostragem T_s utilizado para amostrar o sinal $\cos(\omega_0 t)$.

Para $\omega_0 = 5\omega_s/6$ temos

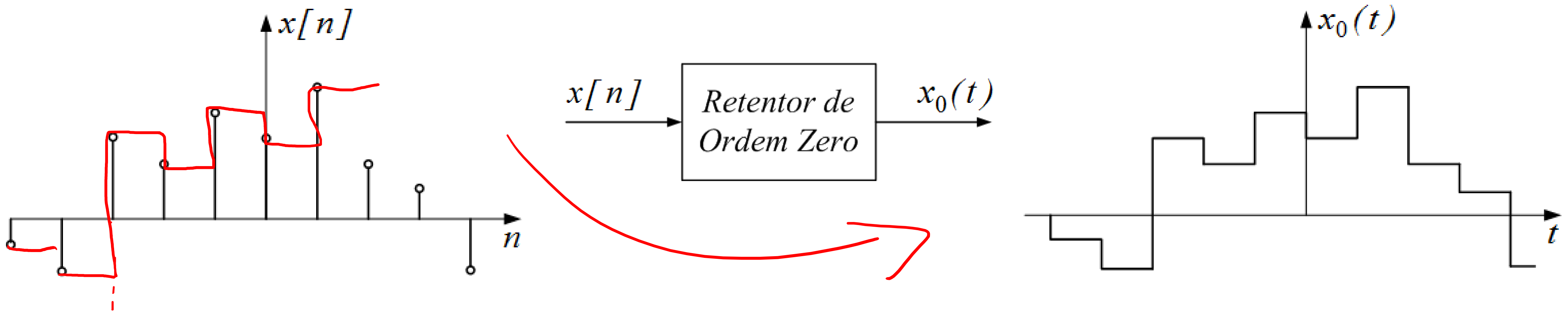




(d)

Amostragem – Reconstrução Prática

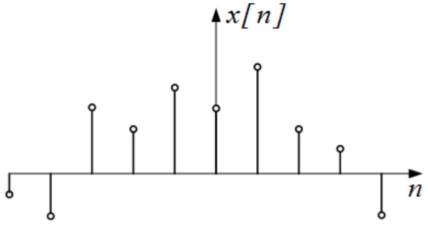
- O reconstrutor ideal apresentado na parte 1 é impossível de ser construído pois trata-se de um sistema não-causal.
- Na prática, é comum reconstruir o sinal amostrado com um sistema chamado de **retentor de ordem zero**, o qual mantém o valor de $x[n]$ por T_s segundos.

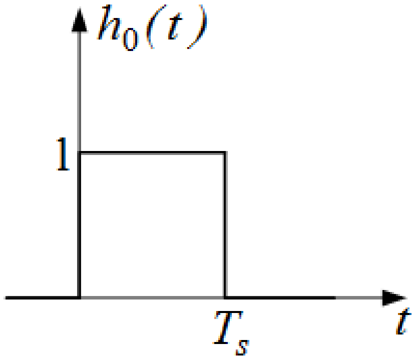


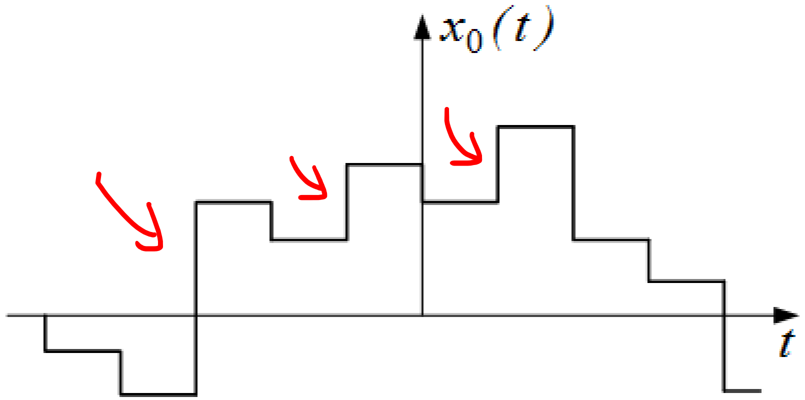
Amostragem – Reconstrução Prática

- O retentor de ordem zero pode ser descrito por sua resposta ao impulso

$$h_0(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t < T_s \\ 0, & caso\ contrário \end{cases}$$







$$x_0(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] h_0(t - nT_s)$$

Amostragem – Reconstrução Prática

$$x_0(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\, h_0(t - nT_s)$$

$$x_0(t) = h_0(t) * \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\,\delta(t - nT_s)$$

$$= \underline{h_0(t) * x_\delta(t)}$$

$$\underline{h_0(t)} * x_\delta(t) \overset{FT}{\leftrightarrow} H_0(j\omega) X_\delta(j\omega)$$

$$h_0(t) \overset{FT}{\leftrightarrow} \underline{H_0(j\omega)} = \underline{2e^{-j\omega T_s/2}}\, \frac{sen\left(\omega \frac{T_s}{2}\right)}{\omega}$$