Universidade Federal de Pelotas
Curso de Engenharia de Computação
Disciplina: 22000178 – Sistemas e Sinais
Turma: 2020/1 – T52
Professor: Vinícius V. A. Camargo

Relatório da Tarefa 7: Série de Fourier.

Aluno: Mairon Schneider Cardoso. Data: 19/11/2020

1 Introdução

A representação de um sinal periódico através da série de Fourier nos oferece a possibilidade de representar uma grande gama de sinais através das somas de senoides ou exponenciais e portanto, se tornará imprescindível discutir a representação esprectral dos sinais onde, a representação espectral nada mais é que a composição de um sinal utilizando componentes (senoidais ou exponenciais) de diferentes frequências.

2 Resultados e Discussões

Como visto anteriormente, a série de Fourier nos possibilita representar um sinal empregando somente composições de sinais fundamentais, através da operação de soma desses sinais, conseguimos representar uma gama de sinais complexos, quando comparado aos componentes somados isoladamente. Para efetivamente compreendermos as equações que descrevem a série de Fourier, primeiramente precisamos aprender a representar um sinal periódico, um sinal periódico nada mais é que um sinal repetindo seu comportamento através de um determinado deslocamento(período fundamental), isso pode ser matematicamente representado por $x(t) = x(t + T_0)$.

A equação que descreve a série de Fourier pode ser divida em duas equações, uma que lista os coeficientes da série (a_k), referentes a ordem na harmônica que compõem a série chamada de equação de análise (equação 1a) e outra que é a própria série de Fourier, chamada de equação de síntese (equação 1b) que se aproveita da equação de coeficientes representar os diferentes valores da senoidal no domínio frequência.

$$a_k = \frac{1}{T}\int_T (x(t)e^{-jk(\frac{2\pi}{T})t})dt \tag{1a}$$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk(\frac{2\pi}{T})t} \tag{1b}$$

2.1 Primeira senoide

Na tentativa de descrever os mesmos sinais periódicos, ilustrado no relatório, isolando-os em uma única representação do período do sinal, é possível reconstruí-lós utilizando a função unitária, onde, no primeiro componente do primeiro sinal(figura 1) construímos uma rampa (que pode ser escrita como $t * u(t)$) empregando também o intervalo necessário para o sinal por meio do deslocamento (equação 2a), como visto na aula 1. O segundo componente (equação 2b) que também compõe o sinal final, ele servirá para subtrairmos o primeiro na tentativa de obtermos o gráfico espelhado da primeira curva, entretanto, sem uma componente que contribua na amplitude, não conseguimos chegar na amplitude requerida pelo exercício, então, fazendo uma componente que some na amplitude (equação 2c) temos que $x = x1 - x2 + x3$ conseguimos chegar em uma das representações do sinal periódico (a representação que mapeia somente o tamanho do sinal, para não errarmos o período).

$$x1 = t * (u(t) - u(t-2)) \tag{2a}$$

$$x2 = t * (u(t-2) - u(t-4)) \tag{2b}$$

$$x3 = 4 * (u(t-2) - u(t-4)) \tag{2c}$$

Para extrairmos a série de Fourier que descreve o sinal composto anteriormente, precisamos primeiramente equacionar os valores das constantes (a_k), para que possamos fazer da maneira correta, empregaremos na equação de análise 1a os mesmos intervalos de integração que foram obtidos na composição do sinal, visto anteriormente, substituindo a variável $x(t)$ apenas pela descrição do sinal, isto é, sem deslocamento, nos permitirá obter os valores de k constantes harmônicas. Tendo as contantes em mãos, precisamos apenas aplica-lás na equação de síntese 1b para extrair a série de Fourier que representa o comportamento do sinal periódico, conseguimos perceber que a série de Fourier representa o sinal no domínio frequência, visto que, no próprio somatório temos a variável e^{-jkw_0t}.

Reconstruindo o sinal com diferentes números de amostras (figura 2), percebemos que quanto maior o número de elementos na série trigonométrica, maior será a aproximação, isto é, a aproximação ira tender ao sinal original extraído quando a série for infinita, como visto anteriormente na aula, aumentamos o número de "vetores"(utilizando o video do *3Blue1Brown* como exemplo) o que nos resulta em um resultado mais sólido (figura 3).

Extraindo o módulo e fase de a_k (figura 4) conseguimos perceber que sinais triangulares tem fases diferentes, pois, há alteração no sinal.

2.2 Segunda senoide

Para conseguirmos extrair as componentes da segunda senoidal, precisamos primeiramente compreender que uma onda quadrada é composta por fórmulas de onda senoidais conseguimos observar esse comportamento justamente pelo problema de temperatura de Fourier que deu origem a série de Fourier. Para extrair as componentes nesse caso, é possível perceber que ao somar duas funções degrau unitário com os limites corretos, atingiremos no resultado a senoide que queremos. O primeiro sinal senoidal (equação 3a), vare o eixo das abscissas com amplitude 1 e um período menor que 4, já o segundo sinal senoidal (equação 3b) contribui com a soma (em relação à amplitude) somente no intervalo que vai de 1,5 a 2,5, isto é, quando fizermos $x = x1 + x2$, o sinal resultante será a composição de duas ondas senoidais (figura 5).

A extração da série de Fourier deste sinal é feito através da aplicação da equação de análise e da equação de síntese, então extraímos a_k, como feito anteriormente, após extraído, anexamos no somatório obtendo a série de Fourier que representa a aproximação em relação à equação original extraída através do deslocamento do degrau unitário.

Compondo o sinal com diferentes números na série trigonométrica (figura 6), conseguimos observar que, quando se trata de uma função senoidal com formato de um degrau a falta de somas de componentes senoidais pode descaracterizar a função, isto é, caso não seja adequado o número de elementos na série, o sinal pode demorar para amortecer, causando assim uma amplitude incorreta para o sinal (figura 7). Neste caso, o ideal é quantizar corretamente a quantidade de elementos na série para que não haja uma demora relativa ao amortecimento da senoide.

Extraindo o módulo e fase de a_k (figura 8) conseguimos perceber que no formato degrau unitário não há alteração no sinal.)

$$x1 = (u(t-0,5) - u(t-3,5)) \tag{3a}$$

$$x2 = (u(t-1,5) - u(t-2,5)) \tag{3b}$$

2.3 Terceira senoide

Através da extração das componentes senoidais para construir a terceira senoide, é semelhante ao que foi feito na primeira, entretanto, precisamos deslocar a função rampa em uma unidade para a esquerda $(t+1)$ para que consigamos mudar o sinal (equação 4a). A segunda componente senoidal é extraída através da inversão da rampa (para retirar a subtração no sinal x) para extrair o resultado exato no intervalo (equação 4b). A terceira, assim como no primeiro, ele somente aumenta a amplitude do sinal no intervalo específico (equação 4c). Para extrair o sinal resultado, apenas temos que soma-lós, obtendo $x = x1 + x2 + x3$ (figura 9).

A extração da série de Fourier é semelhante a todas as outras, é necessário somente extrair as contantes a_k e aplica-lós na equação de sintese, fazendo o somatório, conseguimos extrair o conjunto de valores que descreve a série de Fourier.

O sinal composto por diferentes amostras na série trigonométrica nos resulta em um gráfico com comportamento semelhante ao que observamos na primeira senoide (figura 10), onde, aumentando a quantidade de senoides no caso triangular, melhora a definição do sinal, onde, tender ao infinito o número de amostras significa que o sinal será exatamente igual ao original (figura 11).

Extraíndo o módulo e fase de a_k temos (figura 12).

$$x1 = (t+1) * (u(t+1) - u(t-1)) \tag{4a}$$

$$x2 = (-t) * (u(t-1) - u(t-3)) \tag{4b}$$

$$x3 = (3) * (u(t-1) - u(t-3)) \tag{4c}$$

2.4 Quarta senoide

A extração da quarta senoide é semelhante à segunda, sendo que a única diferença é ter seu período igual à metade do segundo, isto é, para implementar essa senoide, foi preciso somente dividir todos os intervalos por 2.

O resultado que temos é que a primeira componente equação 5a) terá seus intervalos iguais a 0,25 a 1,75. A segunda componente (equação 5b) terá intervalos de 0,75 a 1,25, onde, compondo os dois gráficos como $x = x1 + x2$ (figura 13).

O Fourier extraído dessa senoidal (figura 14) é semelhante ao segundo caso, onde, novamente temos o problema de amortecimento do sinal quando as amostras são insuficientemente grandes (figura 15).

Extraindo o módulo e fase de a_k temos (figura 16).

$$x1 = u(t - 0,25) - u(t - 1,75) \tag{5a}$$

$$x2 = u(t - 0,75) - u(t - 1,25) \tag{5b}$$

3 Conclusões

Portanto, conseguir representar um sinal através da soma de diversas componentes senoidais fundamentais, nos permite representar qualquer sinal mais complexo, entretanto, devemos ter cuidado na hora de escolher um número correto de elementos na série trigonométrica, caso contrário, teremos um problema na hora de extraír a correta definição do sinal na saída.

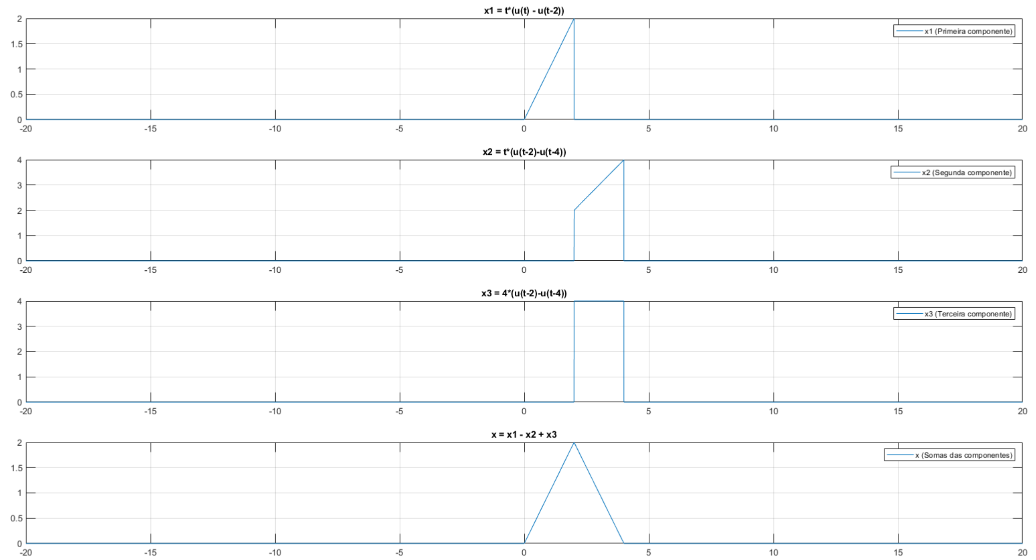

Figura 1: Descrição de um sinal que utiliza três componentes de sinais elementares.

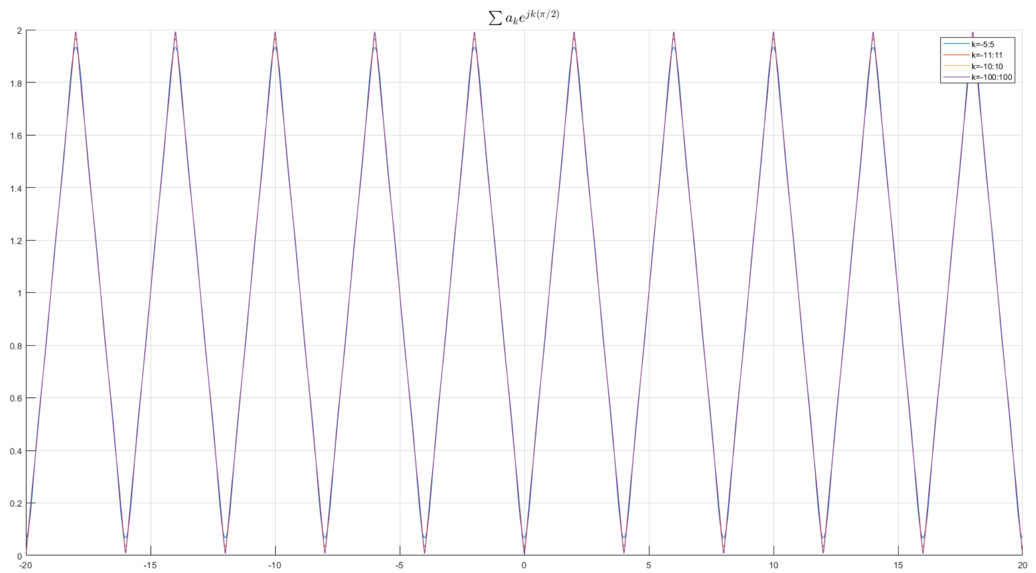

Figura 2: Série de Fourier do sinal composto anteriormente, com periodo igual T igual a 4.

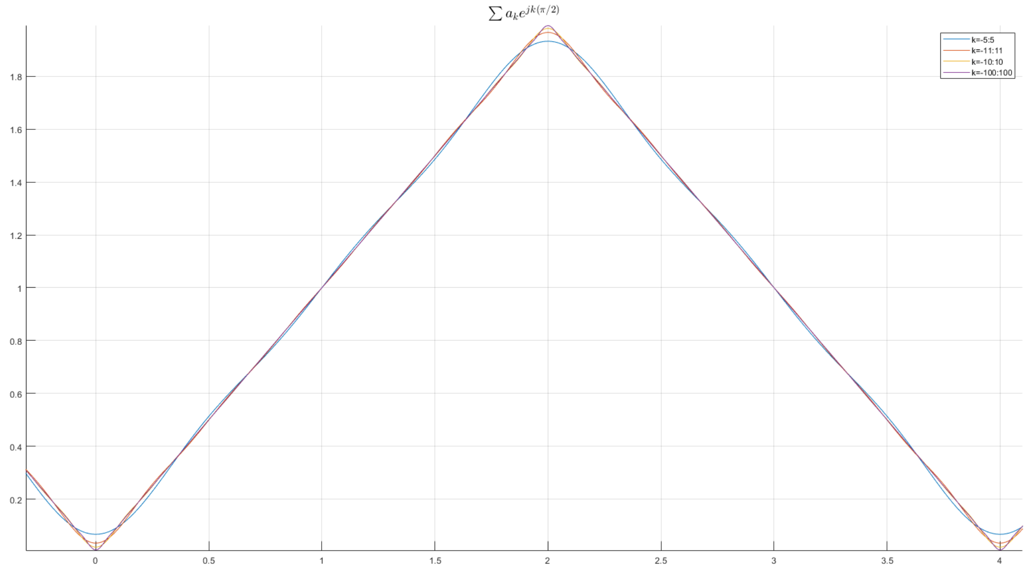

Figura 3: *Zoom* na série de Fourier extraída anteriormente.

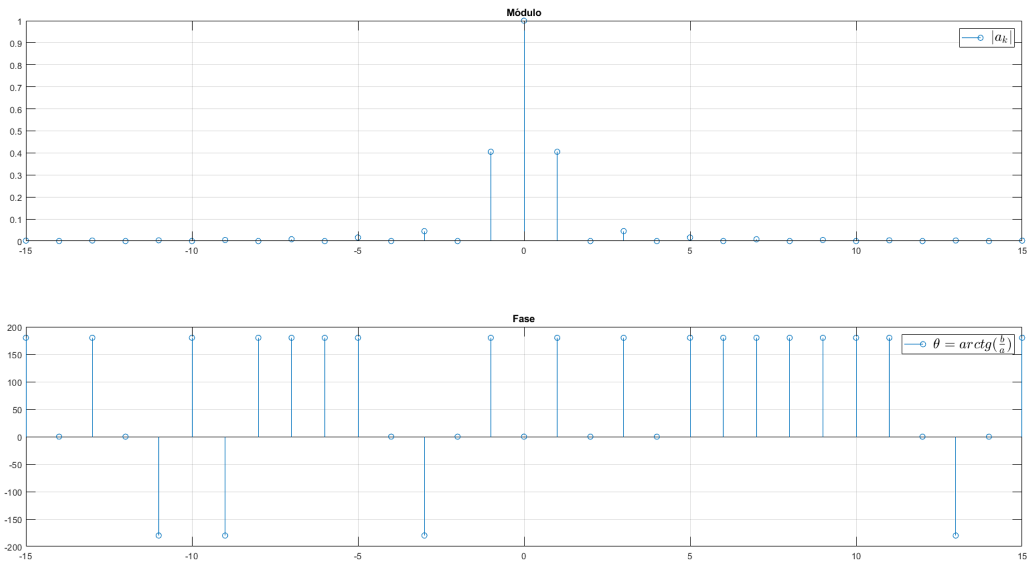

Figura 4: Módulo e fase da equação de análise que compõe a série de Fourier anterior.

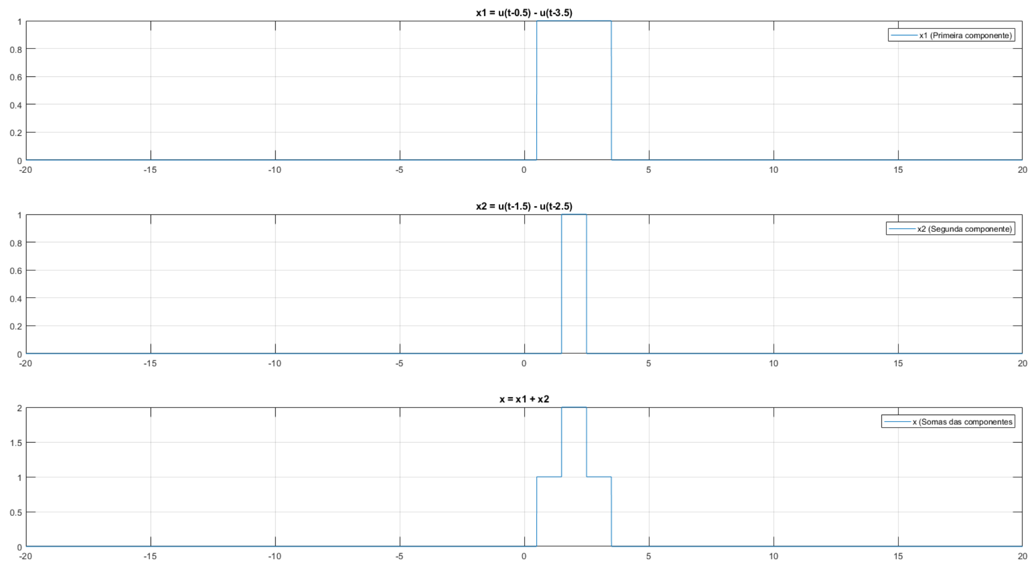

Figura 5: Descrição de um sinal que utiliza dois componentes de sinais elementares.

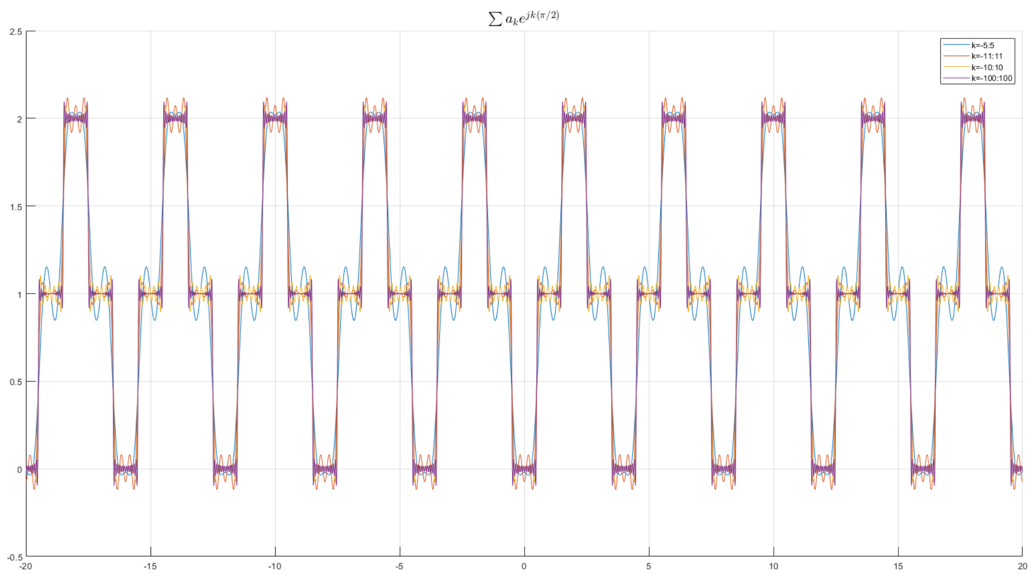

Figura 6: Série de Fourier do sinal composto anteriormente, com periodo igual T igual a 4.

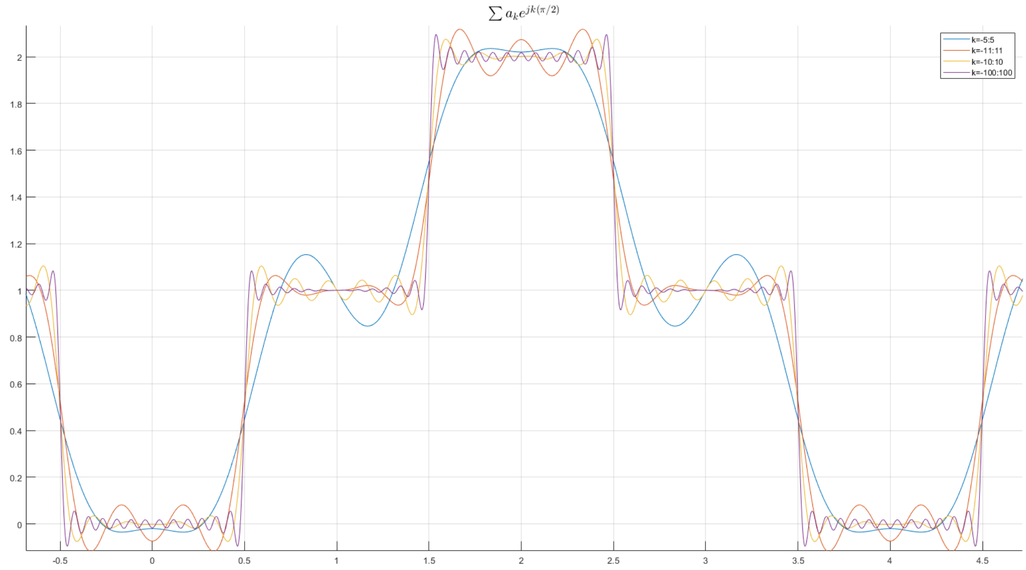

Figura 7: *Zoom* na série de Fourier extraída anteriormente.

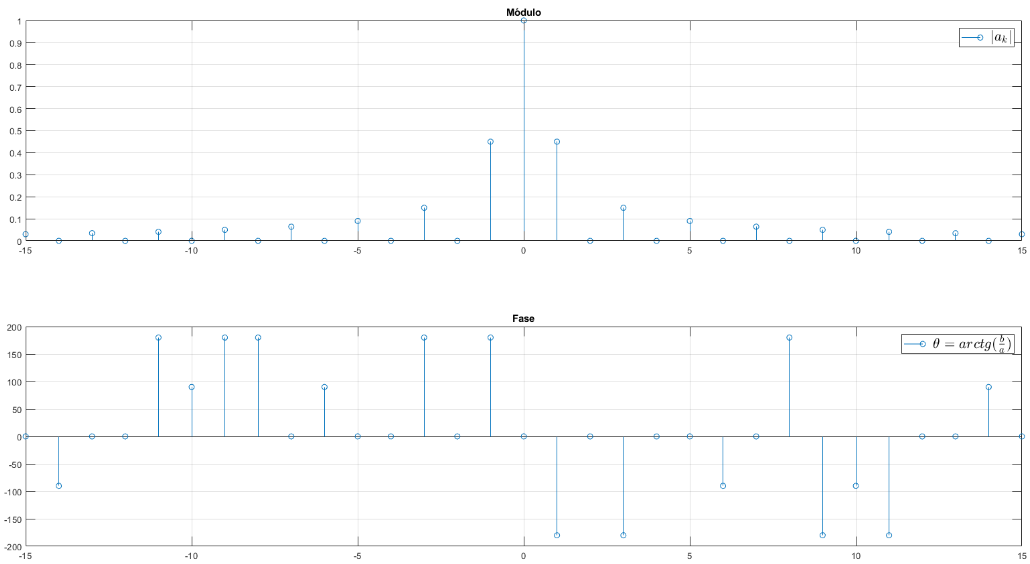

Figura 8: Módulo e fase da equação de análise que compõe a série de Fourier anterior.

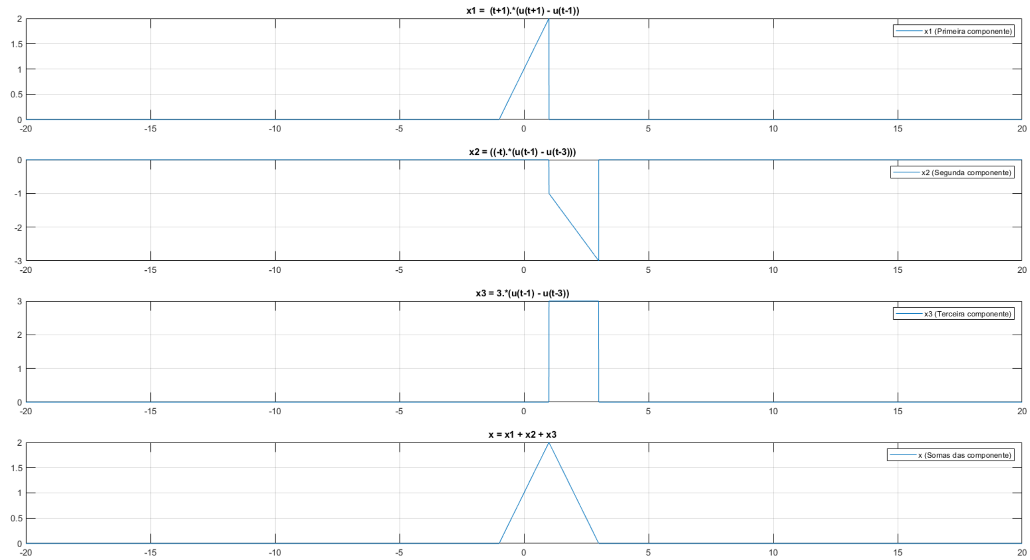

Figura 9: Descrição de um sinal que utiliza três componentes de sinais elementares.

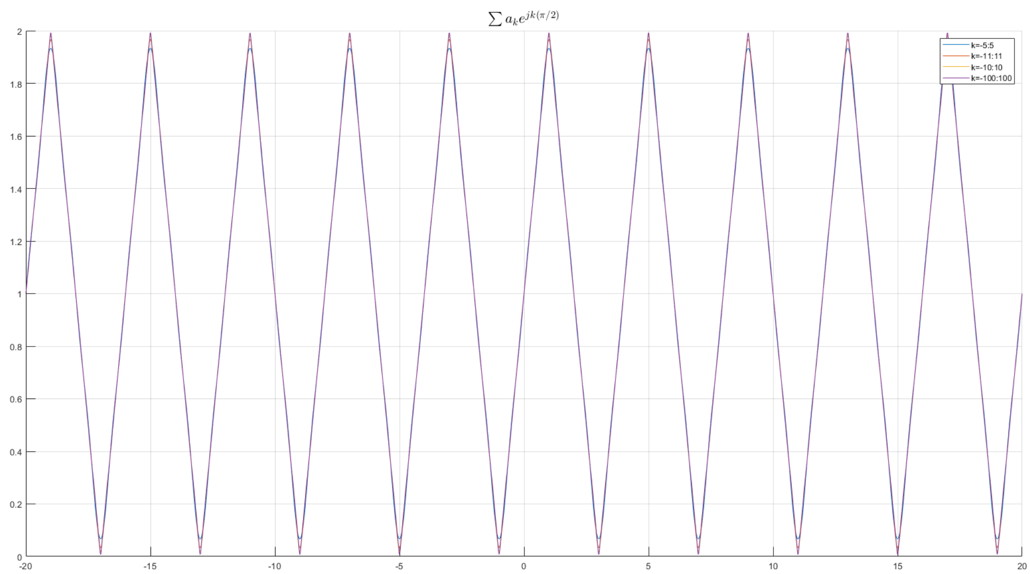

Figura 10: Série de Fourier do sinal composto anteriormente, com periodo igual T igual a 4.

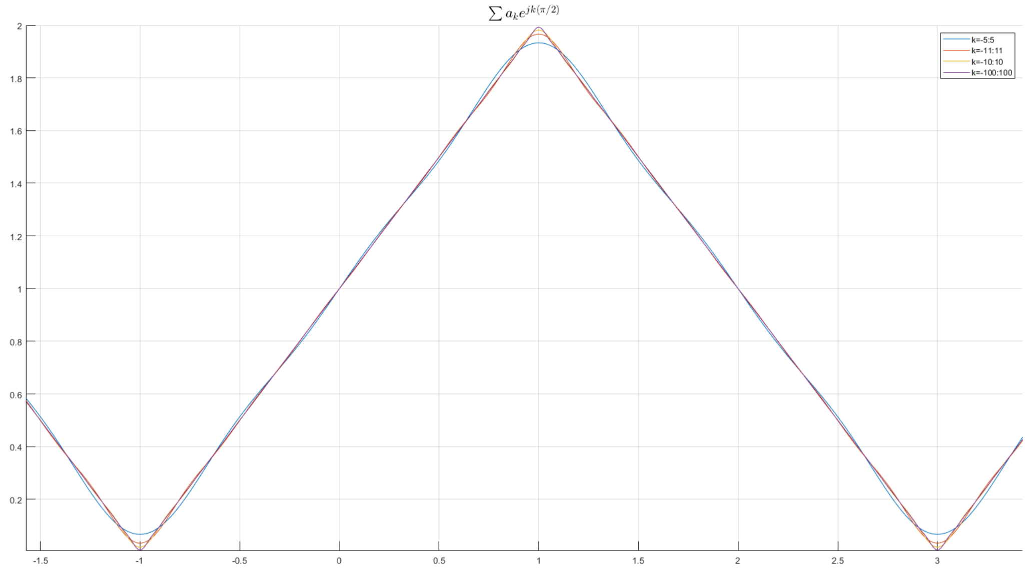

Figura 11: *Zoom* na série de Fourier extraída anteriormente.

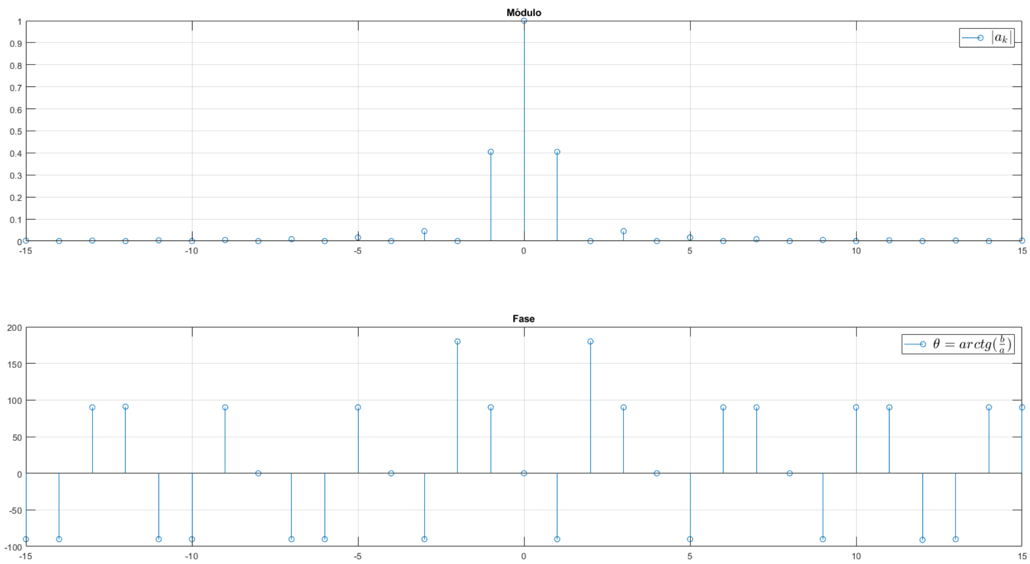

Figura 12: Módulo e fase da equação de análise que compõe a série de Fourier anterior.

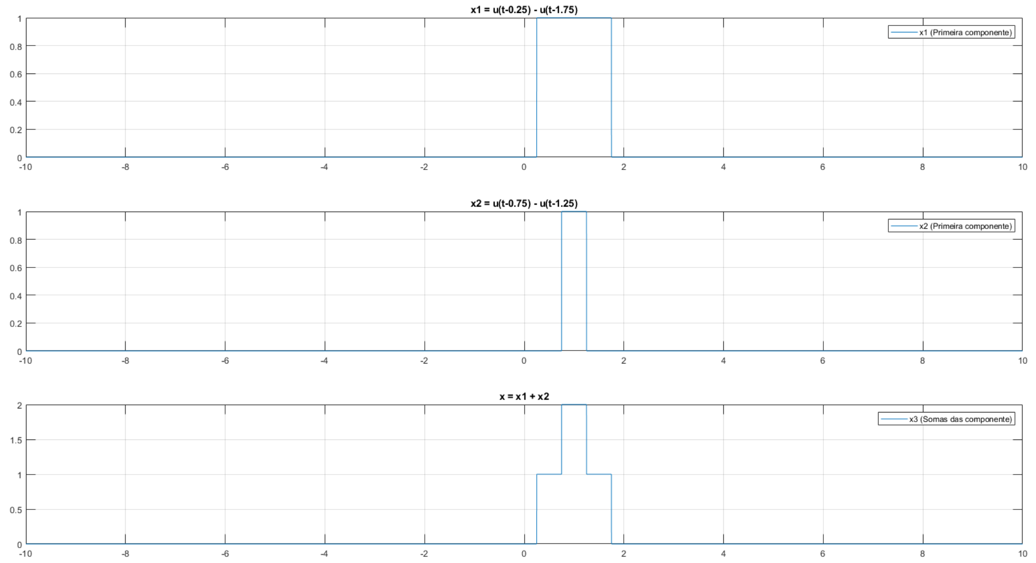

Figura 13: Descrição de um sinal que utiliza três componentes de sinais elementares.

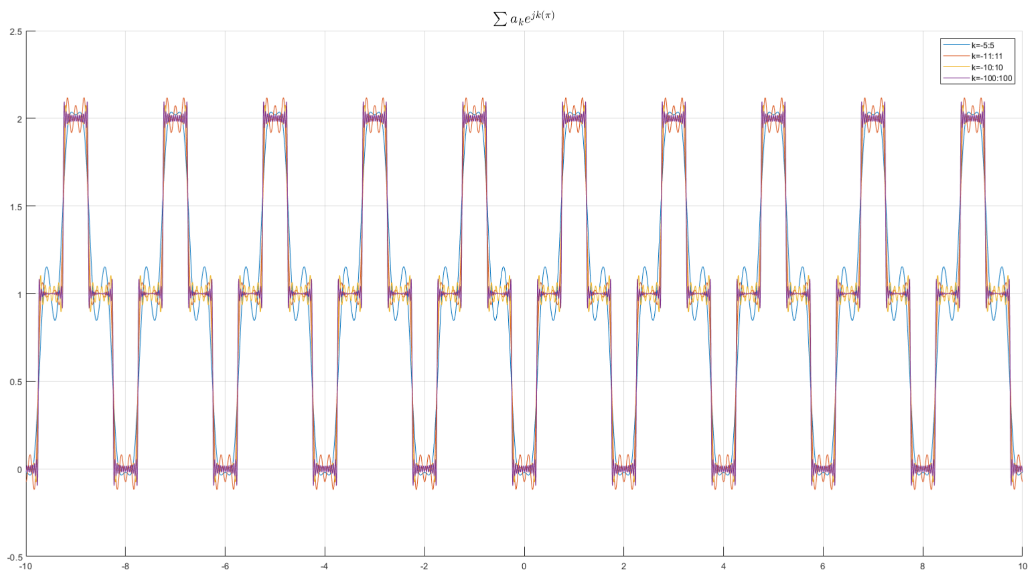

Figura 14: Série de Fourier do sinal composto anteriormente, com periodo igual T igual a 2.

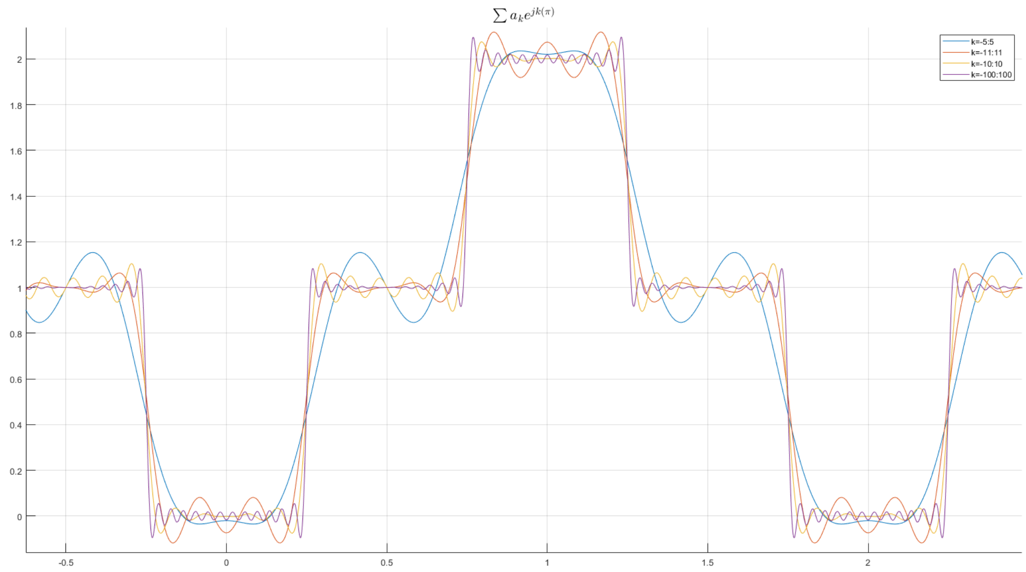

Figura 15: *Zoom* na série de Fourier extraída anteriormente.

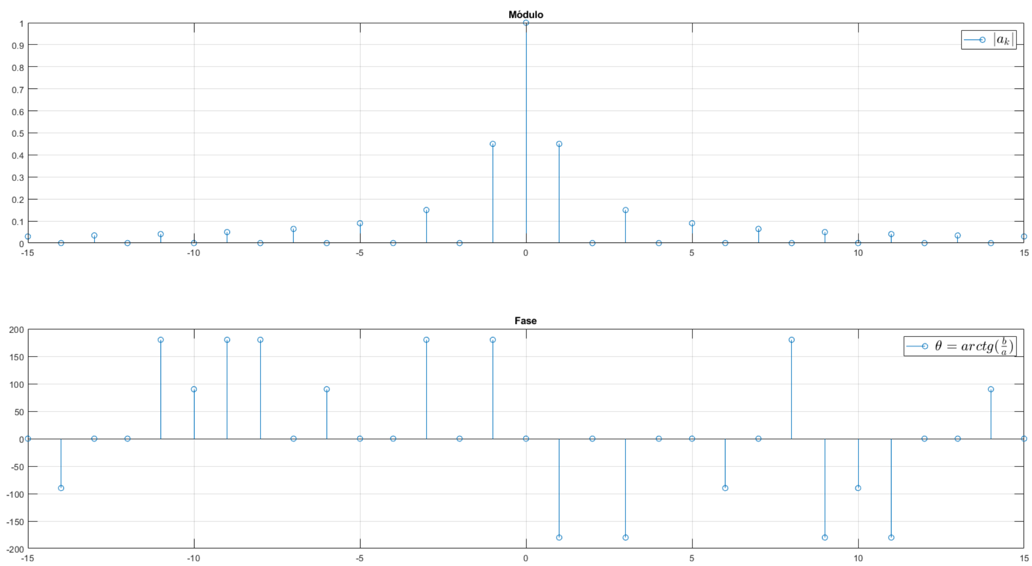

Figura 16: Módulo e fase da equação de análise que compõe a série de Fourier anterior.