

Ю.И. Волков, А.Б. Сапожников

Сборник лабораторных работ

**Методические указания
по курсу «Теоретические основы электротехники»**

Утверждено редакционно-издательским советом университета

УДК 621.372(075)

Рецензент канд. техн. наук, проф. *А.А. Балабанов*

Волков Ю.И., Сапожников А.Б.

Сборник лабораторных работ. Методические указания по курсу «Теоретические основы электротехники». - М.: МИЭТ, 2013. - 124 с.: ил.

Рассмотрены элементы электрических цепей, основные свойства, теоремы и законы. Представлены методы расчета и исследования электрических цепей постоянного, синусоидального токов и периодических несинусоидальных ЭДС, напряжений и токов. Рассмотрены частотные характеристики и резонансные явления. Исследованы переходные процессы в электрических цепях первого, второго и выше порядков. Расчет переходных процессов в цепях первого и второго порядков выполнен классическим методом, для цепей более высокого порядка - операторным методом с использованием преобразования Лапласа. Для исследования и расчета электрических цепей используются программные приложения Multisim и Matlab, позволяющие ускорить расчеты цепей, повысить наглядность для лучшего его усвоения. Теоретические сведения сопровождаются иллюстрациями и позволяют заострить внимание студентов на важных моментах при изучении теории электрических цепей.

Для студентов факультета МП и ТК, а также всех специальностей дневного и вечернего факультетов МИЭТ.

Учебное издание

Волков Юрий Иванович

Сапожников Алексей Борисович

Сборник лабораторных работ. Методические указания по курсу «Теоретические основы электротехники»

Редактор *А.В. Тихонова*. Технический редактор *Е.Н. Романова*. Корректор *Л.Г. Лосякова*. Верстка авторов.

Подписано в печать с оригинал-макета 06.06.2013. Формат 60×84 1/16. Печать офсетная. Бумага офсетная. Гарнитура Times New Roman. Усл. печ. л. 7,19.

Уч.-изд. л. 6,2. Тираж 750 экз. Заказ 28.

Отпечатано в типографии ИПК МИЭТ.

124498, Москва, Зеленоград, проезд 4806, д. 5, МИЭТ.

Лабораторная работа № 1

Элементы и свойства линейных электрических цепей

Цель работы: исследование активных и пассивных элементов, свойств наложения, взаимности и совместно взаимности с наложением; изучение эквивалентных преобразований активных двухполюсников; исследование режимов работы источника напряжения.

Продолжительность работы - 4 ч.

Теоретические сведения

В электрических цепях с постоянными источниками напряжения E и тока J используются пассивные RLC -элементы. Все элементы имеют два вывода, поэтому называются двухполюсниками. Электрическая цепь состоит из источников и приемников, связанных между собой ветвями, в которых протекают электрические токи. Расчет токов в электрической цепи можно выполнить по уравнениям Кирхгофа. Первый закон Кирхгофа гласит: сумма токов, входящих в узел и исходящих из этого узла, равна нулю и определяется по первому закону Кирхгофа $\sum I_{\text{вх}} - \sum I_{\text{вых}} = 0$. Второй закон Кирхгофа (для замкнутого контура): сумма ЭДС контура равна сумме напряжений на всех элементах этого контура $\sum E = \sum U + \sum IR$.

Режимы работы источников. Электрическая схема (рис.1,а) состоит из реального источника напряжения E и резистора с сопротивлением R .

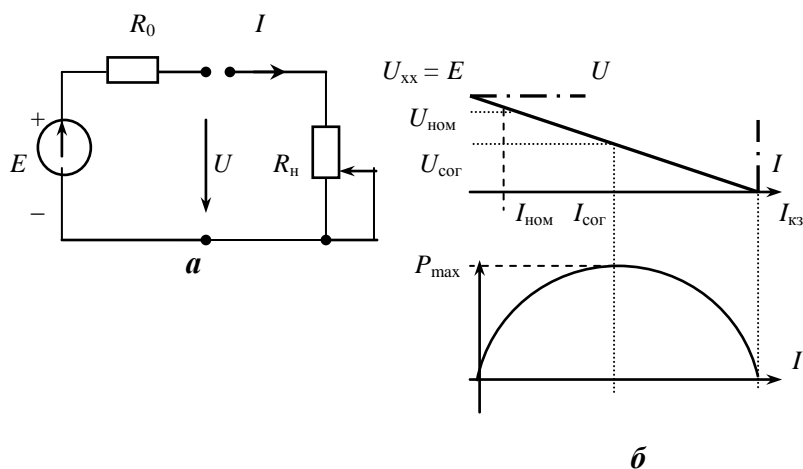


Рис.1. Электрическая схема (а), ВАХ и график мощности (б)

Величину электрического тока можно регулировать от нуля в режиме холостого хода, когда ключ разомкнут, до тока короткого замыкания (ключ замкнут, а ползун резистора находится в крайнем верхнем положении).

Линейное уравнение вольт-амперной характеристики (ВАХ) (рис.1,б) имеет вид

$$E = U + IR_0 \text{ и } U = E - IR_0.$$

Условие номинального режима работы источника напряжения заключается в том, что коэффициент полезного действия (КПД) источника находится в пределах 80 - 90%. КПД источника напряжения определяется как отношение мощности, переданной потребителю, к мощности, вырабатываемой источником:

$$\eta = \frac{P_{\text{потр}}}{P_{\text{ист}}} \cdot 100\% = \frac{UI}{EI} \cdot 100\% ,$$

где $P_{\text{потр}} = UI$ - мощность, отдаваемая источником потребителю; $P_{\text{ист}} = EI$ - мощность, вырабатываемая источником.

Основной признак наличия согласованного режима в электрической цепи заключается в том, что источник отдает потребителю максимальную мощность, а в это время сопротивление нагрузки равно внутреннему сопротивлению источника $R_n = R_0$.

Мощность, отдаваемая источником потребителю при согласованном режиме, определяется с учетом зависимости по формуле

$$P = UI = EI - I^2 R_0.$$

Взяв производную по мощности и приравняв ее к нулю, можно получить экстремальное значение, при котором возникает максимальная мощность согласованного режима:

$$\frac{dP}{dI} = E - 2IR_0 = 0 .$$

Электрический ток согласованного режима равен:

$$I_{\text{сог}} = \frac{E}{2R_0} = \frac{I_{\text{кз}}}{2} .$$

Максимальная мощность при согласованном режиме рассчитывается по формуле

$$P_{\text{max}} = \frac{E^2}{2R_0} - \frac{E^2 R_0}{4R_0^2} = \frac{E^2}{4R_0} .$$

Идеальные источники. У идеального источника напряжения E внутреннее сопротивление R_0 равно нулю, а график ВАХ становится горизонтальной линией (рис.2, кривая 2), а ЭДС равна напряжению холостого тока. Идеальный источник тока J имеет внутреннее сопротивление, равное бесконечности, а график ВАХ становится вертикальной линией, исходящей из точки J , находящейся на оси токов.

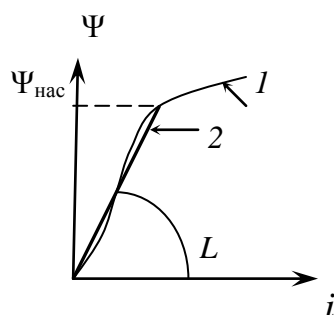


Рис.2. График зависимости потокоцепления от тока (1) и его линеаризованной зависимости (2)

Пассивные элементы электрических цепей. Резистор имеет сопротивление R , направление тока определяет направление напряжения на этом резисторе (рис.2, кривая 1). Резисторы в электрическую цепь устанавливаются не только по величине сопротивления, но и по мощности. Напряжение, ток и сопротивление резистора определяются по закону Ома. Сопротивление резистора R , мощность P и энергия W рассчитываются по формулам:

$$R = \frac{U}{I}; P = I^2 R; W_R = I^2 R t.$$

Электрическая энергия в резисторе преобразовывается в тепловую энергию согласно закону Джоуля - Ленца.

Индуктивность - это электромагнитное устройство (см. рис.2, кривая 1), состоящее из магнитопровода с катушкой, намотанной на этот магнитопровод, по которому протекает магнитный поток Φ . Индуктивность определяется делением потокоцепления на электрический ток: $L = d\Psi/di = \Psi/i$ [Гн].

Зависимость потокоцепления от тока - характеристика нелинейная (см. рис.2). Поэтому используют дифференциальную зависимость, но до точки насыщения потокоцепления $\Psi_{\text{нас}}$ эту характеристику можно линеаризовать, т.е. можно использовать линейную зависимость. Потокоцепление определяется произведением числа витков катушки w на магнитный поток $\Psi = w\Phi$ [Вб].

Изменение потокоцепления по времени называется ЭДС самоиндукции и напряжения на индуктивности, которые определяются по формулам:

$$e_L = -\frac{d\Psi}{dt} = -\frac{d\Psi}{di} \cdot \frac{di}{dt} = -L \frac{di}{dt}; u_L = -e_L = L \frac{di}{dt}.$$

Графическое изображение индуктивности с положительным направлением электрического тока, ЭДС самоиндукции и напряжения приведено на рис.3,а.

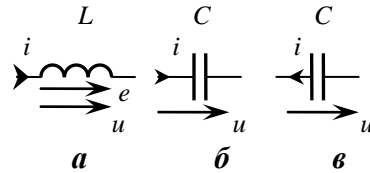


Рис.3. Изображение LC-элементов: положительные направления тока, ЭДС самоиндукции и напряжения на индуктивности (а), положительные направления напряжения и тока при зарядке конденсатора (б) и его разрядке (в)

Электрический ток, мгновенная мощность и энергия индуктивности определяются по формулам:

$$i = \frac{1}{L} \int u_L dt + i_0; \quad p_L = u_L i = Li \frac{di}{dt}; \quad W_L = \int_0^i Li \frac{di}{dt} = \frac{Li^2}{2}.$$

Конденсатор конструктивно (рис.3,б) имеет две электропроводящие обкладки, между которыми размещен диэлектрик. Емкость конденсатора равна: $C = q/u_C$ [Ф]. Электрический ток, напряжение, мгновенная мощность и энергия конденсатора определяются по формулам:

$$i = \frac{dq}{dt} = C \frac{du_C}{dt}; \quad u_C = \frac{1}{C} \int i dt + u_0;$$

$$p = u_C i = Cu_C \frac{du_C}{dt}; \quad W_C = \int_0^{u_C} Cu_C du_C = \frac{Cu_C^2}{2}.$$

Взаимная индуктивность. Явление взаимной индуктивности возникает, когда две индуктивности, расположенные друг от друга на близком расстоянии, связаны частью магнитного потока (рис.4).

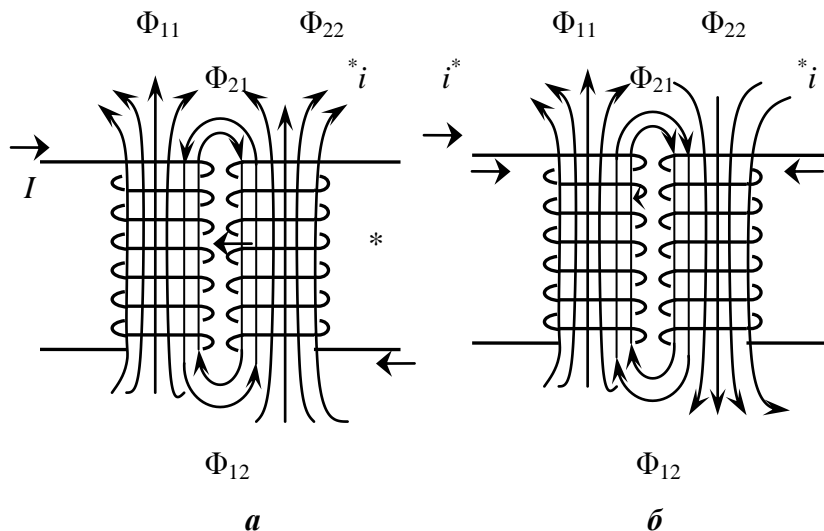


Рис.4. Две катушки индуктивности с магнитными потоками Φ_{11} , Φ_{22} , Φ_{12} и Φ_{21} , включенными встречно (а) и согласно (б)

Электрический ток первой катушки (рис.4,б) вызывает магнитный поток Φ_{11} , а ток второй катушки добавляет часть магнитного потока в первую катушку Φ_{12} . При согласном включении формируются параметры взаимной индукции: $M = \frac{d\Psi_{12}}{di_2}$, по аналогии $M = \frac{d\Psi_{21}}{di_1}$. Параметр взаимной индукции M измеряется в генри (Гн), так же как и индуктивность.

Собственное и добавочное потокоцепление должны суммироваться при согласном включении (см. рис.4,б): $\Psi_1 = \Psi_{11} + \Psi_{12}$ и $\Psi_2 = \Psi_{22} + \Psi_{21}$ или вычитаться при встречном включении (рис.4,а): $\Psi_1 = \Psi_{11} - \Psi_{12}$ и $\Psi_2 = \Psi_{22} - \Psi_{21}$. Следовательно, параметр взаимной индукции может иметь положительное и отрицательное значение ($\pm M$). В первой катушке индуктивности ЭДС самоиндукции можно определить по формуле

$$e_1 = -L_1 \frac{di_1}{dt} \mp M \frac{di_2}{dt} = e_{1L} \pm e_{1M},$$

во второй катушке -

$$e_2 = -L_2 \frac{di_2}{dt} \mp M \frac{di_1}{dt} = e_{2L} \pm e_{2M}.$$

Напряжение связанных взаимной индукцией первой и второй катушек равно:

$$u_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} \pm M \frac{di_2}{dt}, \quad u_2 = L_2 \frac{di_2}{dt} \pm M \frac{di_1}{dt}.$$

Безразмерный коэффициент всегда меньше единицы и показывает, какая часть магнитного потока общая: $k = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}}$.

При последовательном включении двух индуктивно связанных катушек можно определить энергию. Если за интервал времени t_1 значения токов изменятся от нуля до i_1 и i_2 , тогда запасенная энергия будет равна:

$$W = \frac{L_1 i_1^2}{2} + \frac{L_2 i_2^2}{2} \pm M i_1 i_2.$$

Например, расчет цепи синусоидального тока с индуктивно связанными катушками сопротивления и напряжение в комплексной форме будет иметь вид:

- в первой катушке

$$\dot{U}_1 = \dot{U}_{1L} \pm \dot{U}_{1M} = j\omega L_1 \dot{I}_1 \pm j\omega M \dot{I}_2 = jX_{1L} \dot{I}_1 \pm jX_M \dot{I}_2;$$

- во второй катушке

$$\dot{U}_2 = \dot{U}_{2L} \pm \dot{U}_{2M} = j\omega L_2 \dot{I}_2 \pm j\omega M \dot{I}_1 = jX_{2L} \dot{I}_2 \pm jX_M \dot{I}_1.$$

Основные свойства и теоремы линейных цепей. *Свойство наложения (суперпозиции).* При расчете линейных электрических цепей используется свойство наложения:

- в любой ветви электрический ток, входящий только в один контур, можно определить суммированием от действия каждого источника отдельно при наличии нескольких источников напряжения и источников тока в разветвленной электрической цепи:

$$I_k = \sum_{i=1}^n E_i g_{ki} + \sum_{d=1}^m J_d h_{kd} \text{ - в цепи постоянного тока,}$$

$$\dot{I}_k = \sum_{i=1}^n \dot{E}_i Y_{ki} + \sum_{d=1}^m \dot{J}_d h_{kd} \text{ - в цепи синусоидального тока;}$$

- потенциал любого узла ϕ_k линейной электрической цепи можно определить алгебраической суммой потенциалов, создаваемых в этом узле отдельно каждым источником напряжения или тока. Потенциалы в узлах обычно определяют методом узловых потенциалов.

Свойство линейности:

- при изменении в несколько раз ЭДС в одной ветви (единственного источника напряжения) в остальных ветвях токи и напряжения должны пропорционально измениться во столько же раз. Это подтверждает, что все элементы электрической цепи являются линейными;

- при изменении тока источника токов или сопротивления в одной ветви справедливы линейные соотношения между токами и напряжениями в любых ветвях.

Свойство взаимности: если в разветвленной электрической цепи, имеющей единственный источник напряжения E_k в ветви k , возникает электрический ток I_i в ветви i , тогда при перемещении источника напряжения из ветви k в ветвь i (E_i) в ветви k возникнет такой же электрический ток I_k , который был в ветви i ($I_i = I_k$). При этом источники напряжения E_k и E_i должны быть одинаковы по величине. В этом случае электрические токи в ветвях можно определить так: $I_i = E_k g_{ik}$; $I_k = E_i g_{ki}$. Здесь g_{ik} , g_{ki} - взаимные проводимости ветвей k и i , которые в линейных электрических цепях равны $g_{ik} = g_{ki}$. Ток называют входным или проводимость называют входной (собственной), если определяется ток в ветви, где стоит источник напряжения: $I_k = E_k g_{kk}$. Здесь g_{kk} - входная проводимость ветви k .

Входные и взаимные проводимости можно рассчитать аналитически по формуле $g_{ki} = \frac{\Delta_{ki}}{\Delta(R)}$, где $\Delta(R)$ - определитель матрицы сопротивлений, полученный методом контурных токов по правилу Крамера; Δ_{ki} - определитель алгебраического дополнения,

полученный вычеркиванием k -го столбца и i -й строки из основной матрицы сопротивлений и умноженной на $(-1)^{k+i}$. Входные и взаимные проводимости экспериментально можно определить так: $g_{ki} = \frac{I_k}{E_i}$. Если $E_i = 1$, тогда ток численно равен проводимости ($I_k = 1 \cdot g_{ki}$). Проводимости с одинаковыми индексами называют входными, или собственными, а проводимости с разноименными индексами - взаимными проводимостями.

Принцип взаимности совместно с методом наложения. Этот метод используется для определения электрического тока в любой ветви. Например, в ветви k устанавливают источник напряжения, ЭДС которого равна единице ($E_k = 1$). Предварительно установив в электрической цепи все остальные источники равными нулю, можно определить взаимные проводимости тех ветвей, в которых были источники напряжения, и входную проводимость ветви k . Используя свойство линейности и свойство наложения, можно определить электрический ток в ветви k :

$$I_k = \sum_{i=1}^n E_i g_{ki} + E_k g_{kk} + \sum_{l=1}^m J_l g_{kl}.$$

Аналитически ток в ветви k можно определить, составив уравнения методом контурных токов. Ветвь k должна быть хордой. Систему уравнений решают по правилу Крамера:

$$I_k = E_{11} \frac{\Delta_{k1}}{\Delta(R)} + E_{22} \frac{\Delta_{k2}}{\Delta(R)} + \dots + E_{nn} \frac{\Delta_{kn}}{\Delta(R)}.$$

Здесь E_{nn} - контурные ЭДС; $\Delta(R)$ - определитель матрицы сопротивлений; Δ_{kj} - определитель алгебраического дополнения, полученный из матрицы сопротивлений вычеркиванием k -го столбца и j -й строки и умноженный на $(-1)^{k+j}$.

Метод эквивалентного генератора (частный случай). Метод позволяет упростить анализ и расчет электрических цепей в том случае, когда требуется определить ток, напряжение или мощность только в одной специально выделенной ветви. Остальная часть схемы является активным двухполюсником (относительно точек присоединения этой ветви).

Частный случай метода эквивалентного генератора заключается в следующем:

- рассчитать (или измерить) напряжение холостого хода U_{xx} на выводах активного двухполюсника, которое равно ЭДС ($E_{\text{экв}} = U_{xx}$);
- рассчитать (или измерить) электрический ток короткого замыкания $I_{кз}$ и определить эквивалентное сопротивление активного двухполюсника по формуле $R_{\text{экв}} = U_{xx}/I_{кз}$.

Формула двух узлов для нескольких параллельных ветвей. Формула двух узлов применяется для замены нескольких параллельных ветвей, имеющих пассивные элементы с источниками напряжения, или ветвей с источниками токов одним эквивалентным источником напряжения $E_{\text{экв}}$ с последовательно включенным эквивалентным сопротивлением $R_{\text{экв}}$. Это позволяет упростить решение и рассчитать узловое напряжение:

$$U_{ab} = \varphi_a - \varphi_b = \frac{\sum_{k=1}^n E_k \cdot g_k + \sum_{k=1}^m J_k}{\sum_{k=1}^n g_k},$$

где $\sum_{k=1}^n E_k g_k$ - алгебраическая сумма произведений ЭДС источника напряжения на проводимость своей ветви; $\sum_{k=1}^m J_k$ - алгебраическая сумма токов источников токов; $\sum_{k=1}^n g_k$ - сумма проводимостей всех ветвей между узлами.

Преобразование резисторов. При последовательном соединении резисторов его эквивалентное сопротивление получают при сложении сопротивлений этих резисторов. При параллельном соединении резисторов можно определить эквивалентную проводимость, которая равна сумме проводимостей этих резисторов:

$$R_{\text{экв}} = R_1 + R_2 + R_3 + \dots; \quad g_{\text{экв}} = g_1 + g_2 + g_3 + \dots; \quad R_{\text{экв}} = 1/g_{\text{экв}}.$$

Преобразование соединения треугольника в звезду. Мостовую схему резисторов пассивного двухполюсника, образованную двумя треугольниками, преобразуют для удобства расчета следующим образом. Верхнее треугольное соединение преобразуют в схему соединения звездой, а номиналы его рассчитывают по формулам:

$$R_a = \frac{R_{ab} \cdot R_{ac}}{R_{ab} + R_{bc} + R_{ca}}; \quad R_b = \frac{R_{ab} \cdot R_{bc}}{R_{ab} + R_{bc} + R_{ca}}; \quad R_c = \frac{R_{ac} \cdot R_{bc}}{R_{ab} + R_{bc} + R_{ca}}.$$

Преобразование соединения звезды в треугольник. Зная проводимости резисторов, соединенных звездой, можно определить проводимости сопротивлений резисторов, соединенных треугольником, по формулам:

$$G_{ab} = \frac{G_a \cdot G_b}{G_a + G_b + G_c}; \quad G_{bc} = \frac{G_b \cdot G_c}{G_a + G_b + G_c}; \quad G_{ca} = \frac{G_c \cdot G_a}{G_a + G_b + G_c}.$$

Задание и методика выполнения работы

Задание. Исследовать элементы и свойства электрических цепей.

1. Нарисовать электрическую схему (рис.5), значения установить из табл.1:

- для экспериментального исследования электрической схемы необходимо ее собрать на рабочем поле программного приложения Multisim;
- источники и заземление можно выбрать на панели компонентов программного приложения Multisim, нажав левую кнопку на панели, а RLC -элементы - нажав на вторую кнопку слева;
- измерительные приборы (амперметры и вольтметры) можно выбрать, нажав на десятую красную кнопку «8»;
- элементы схемы следует расставлять просторно, чтобы можно было устанавливать измерительные приборы. Если в цепи используются источники постоянного тока, то приборы должны иметь режим DC (Direct Current), а если источника синусоидального тока - режим AC (Alternating Current);
- сначала необходимо соединять элементы, наиболее удаленные по контуру, затем подсоединить остальные элементы к линиям (точки соединения образуются автоматически);
- прямо на соединительные линии установить амперметры плюсом вперед для входящего тока, поворачивать элементы можно командой (Ctrl+R) или открыть меню правой кнопкой «мышки».

2. Измерить электрический ток I_1 в первой ветви, используя свойство наложения:

- измерить ток $I_1^{E_1}$ от действия источника напряжения E_1 , амперметр установить в первую ветвь так, чтобы его показание было положительным. На остальных источниках установить напряжения и токи равными нулю;
- измерить ток $I_1^{E_2}$ от действия источника E_2 , амперметр остается в первой ветви;
- измерить ток I_1^J от действия источника тока J_4 ;
- определить ток в первой ветви в виде алгебраической суммы (с учетом знака показаний амперметра), измеренный от действия каждого источника отдельно:
$$I_1 = I_1^{E_1} \pm I_1^{E_2} \pm I_1^J .$$

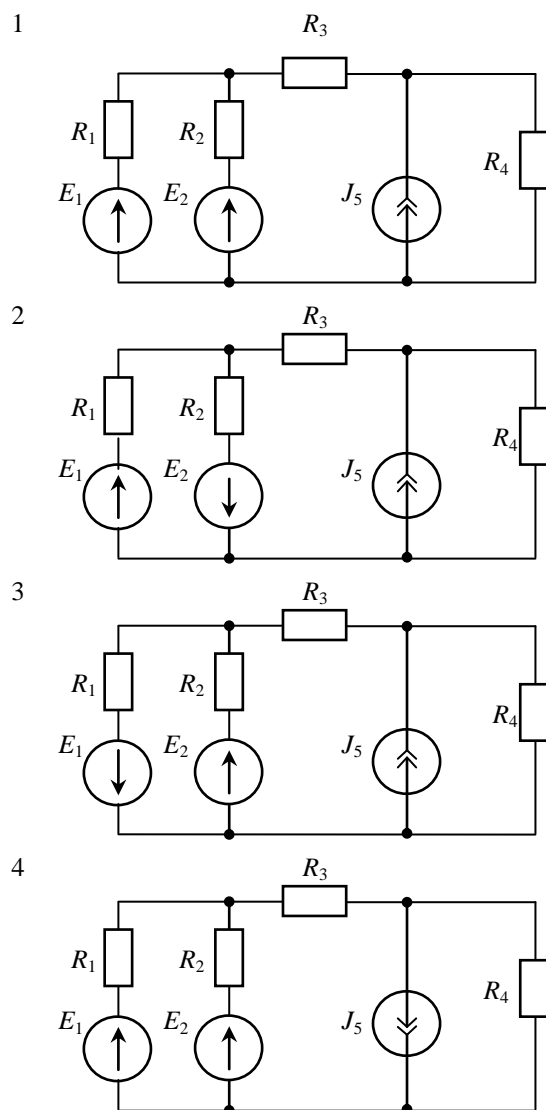


Рис.5. Варианты электрических схем для исследования методов расчета
(1 - 4 номер схемы)

Таблица 1

Варианты задания

Вариант	Номер схемы (см. рис.5)	E_1 , В	E_2 , В	J , А	R_1 , Ом	R_2 , Ом	R_3 , Ом	R_4 , Ом
1	1	10	20	1	10	15	4	10
2	2	20	30	1	20	20	10	20
3	3	12	24	1	3	6	4	6
4	4	24	12	1	2	6	0,5	2
5	1	5	10	4	5	2	2,5	5
6	2	10	20	1	10	15	4	10
7	2	40	20	1	20	30	12	20
8	4	10	20	0,5	15	10	4	10
9	1	12	24	1	3	6	4	6
10	2	24	12	1	2	6	0,5	2
11	3	10	20	1	10	15	4	10
12	4	20	30	1	20	20	10	20

13	4	12	24	1	3	6	4	6
14	3	24	12	1	2	6	0,5	2
15	2	5	10	4	5	2	2,5	5
16	1	10	20	1	10	15	4	10
17	1	40	20	1	20	30	12	20
18	2	10	20	0,5	15	10	4	10
19	3	12	24	1	3	6	4	6
20	4	24	12	1	2	6	0,5	2
21	3	10	20	1	10	15	4	10
22	4	40	20	1	20	30	12	20
23	1	10	20	0,5	15	10	4	10
24	1	12	24	1	3	6	4	6
25	4	10	20	1	10	15	4	10
26	3	40	20	1	20	30	12	20

3. Проверить свойство взаимности:

- установить $E_1 = 1$ В в первой ветви, амперметр во второй ветви и измерить ток (остальные ЭДС и источник тока равны нулю);
- установить амперметр в первой ветви, источник во второй ветви ($E_2 = 1$ В) и измерить ток при $E_1 = 0$. Источник тока должен быть равен нулю.

4. Измерить электрический ток I_2 во второй ветви, используя совместно свойство взаимности с наложением:

- во второй ветви установить ЭДС равной $E_2 = 1$ В, $E_1 = 0$ и $J = 0$, измерить электрический ток I_2 (знак должен быть положительным), который численно равен проводимости g_{22} ;
- в первой ветви установить ЭДС равной $E_1 = 1$ В, источники равны нулю ($E_2 = 0$ и $J = 0$). Измерить электрический ток I_2 во второй ветви с учетом знака, который численно равен проводимости g_{21} ;
- в ветви 5 источник тока установить равным $J = 1$ А, $E_1 = 0$, $E_2 = 0$ и измерить электрический ток I_2 с учетом знака, который численно равен передаточной характеристике h_{23} :

$$g_{21} = I_2^{(E_1=1)}; g_{22} = I_2^{(E_2=1)}; h_{23} = I_2^{(J=1)}.$$

5. Рассчитать электрический ток во второй ветви в виде алгебраической суммы с учетом знаков по формуле $I_2 = \pm g_{21}E_1 + g_{22}E_2 \pm h_{23}J$.

6. Собрать исходную схему и измерить электрические токи в первой и второй ветвях. Сравнить результаты.

7. Частный случай метода эквивалентного генератора можно использовать для определения напряжения холостого хода и тока короткого замыкания активного двухполюсника. Подключить вольтметр к линиям с точками присоединения второй ветви

и измерить напряжение холостого хода U_{xx} , затем заменить вольтметр на амперметр и измерить ток короткого замыкания $I_{кз}$. Рассчитать выходное сопротивление активного двухполюсника: $R_0 = \frac{U_{xx}}{I_{кз}}$. Установить резистор ($R_n = 100 \text{ Ом}$) прямо на линию рядом с амперметром и параллельно к резистору подключить вольтметр. Измерить ток и напряжение.

8. Заменить электрическую схему - активный двухполюсник (см. рис.5) эквивалентной схемой замещения:

- заменить двухполюсник по теореме Тевенена одной ЭДС, равной U_{xx} , и одним последовательно соединенным резистором R_0 , присоединить последовательно резистор ($R_n = 20 \text{ Ом}$) с приборами и измерить ток и напряжение на нагрузке R_n ;
- заменить двухполюсник по теореме Нортонa одним источником тока ($J = I_{кз}$) и параллельно соединенными резисторами R_0 и $R_{нагр} = 20 \text{ Ом}$ с приборами, затем измерить электрический ток и напряжение на нагрузочном резисторе;
- сравнить результаты измерений с исходной схемой.

9. Исследовать режимы работы активного двухполюсника (см. рис.1,а) на любой схеме замещения (признак согласованного режима - это передача от активного двухполюсника к нагрузке максимальной мощности);

- к выходу активного двухполюсника подключить резистор R_n , равный по номиналу внутреннему сопротивлению R_0 , измерить электрический ток и напряжение на резисторе R_n и рассчитать мощность;
- проверить, возникнет ли максимальная мощность;
- изменяя сопротивление нагрузки R_n , установить электрические токи равными $I = 0,5I_{сог}$ и $I = 1,5I_{сог}$. Измерить напряжения и рассчитать мощности;
- установить показание вольтметра равным $U_{ном} = 0,9U_{xx}$, изменяя сопротивление нагрузки R_n , и измерить напряжение и ток;
- записать в форму таблицы показания приборов: холостого хода, короткого замыкания, согласованного и номинального режима.

10. Построить графики ВАХ и мощности P при изменении тока I (см. рис.1,б). Все исследуемые схемы необходимо поместить в отчет. Записать в форму табл.2 показания приборов. Сделать выводы по работе.

Показания приборов

Параметры	U_{xx}	$I_{ном}$	$0,5I_{сог}$	$P < P_{max}$	P_{max}	$P < P_{max}$	$1,5I_{сог}$	$I_{кз}$
Напряжение U								
Ток I								
Мощность P								
Резистор R_n								

Контрольные вопросы

1. Чему равен ток в ветви с источником токов?
2. Почему нельзя рассчитывать токи и напряжения, не задав их предварительно условные направления?
3. Приведите интегрально-дифференциальные зависимости между электрическим током и напряжением для индуктивности и конденсатора.
4. Почему катушка индуктивности подобна идеальному проводнику в электрической цепи постоянного тока?
5. Почему конденсатор эквивалентен разрыву в цепи постоянного тока?
6. Поясните режимы работы источников - режим генератора и режим потребителя. Как их отличать в источниках напряжения и источниках токов?
7. Почему мощность на резисторе не может быть отрицательной?
8. Как вычислить энергию электромагнитного поля индуктивности?
9. Как вычислить энергию электрического поля конденсатора?
10. Как физически объясняется положительная и отрицательная мощность источников энергии?
11. Какие режимы работы источника напряжения используются на практике?
12. Что такое линейная цепь?
13. Что такое входное сопротивление пассивного или активного двухполюсников?
14. В чем состоит принцип суперпозиции?
15. Что такое баланс мощностей?
16. Каков алгоритм расчета цепи методом эквивалентного генератора?
17. Как можно использовать принцип взаимности для упрощения расчетов цепей с несколькими однотипными источниками?

Лабораторная работа № 2

Исследование сложных электрических цепей и методы расчета

Цель работы: исследование сложных разветвленных цепей в программном приложении Multisim; освоение методов расчета в программном приложении Matlab.

Продолжительность работы - 4 ч.

Теоретические сведения

Сложные разветвленные цепи можно рассчитать по уравнениям Кирхгофа. Сначала необходимо определить число уравнений по первому закону Кирхгофа:

$$n_1 = n_{y3} - 1,$$

где n_1 - число уравнений, которые необходимо составить; n_{y3} - число узлов в схеме. Узел - это точка соединения трех и более ветвей.

Затем по второму закону Кирхгофа определить число независимых контуров:

$$n_2 = n_b - (n_{y3} - 1) - n_T.$$

Здесь n_2 - число независимых контуров; n_b - число ветвей в электрической схеме; n_T - число источников тока, которые образуют независимые контуры с известным током. Независимый контур отличается от других контуров хотя бы одной ветвью.

Составим систему уравнений для расчета схемы (рис.1)

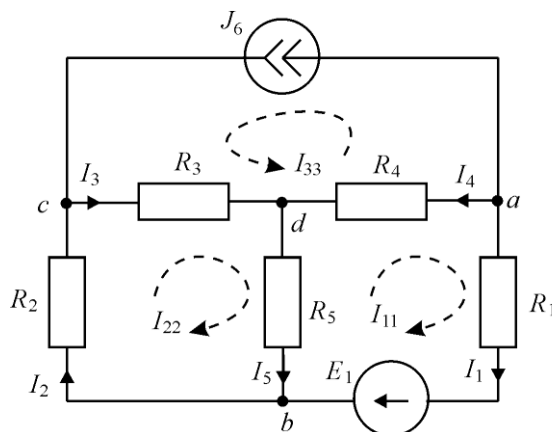


Рис.1. Электрическая схема

по первому и второму законам Кирхгофа:

$$n_1 = n_{y3} - 1 = 4 - 1 = 3;$$

$$n_2 = n_b - (n_{y3} - 1) - n_T = 6 - 3 - 1 = 2.$$

Составим систему уравнений:

$$1) -I_1 - I_4 - J_6 = 0;$$

$$2) -I_2 + I_1 + I_5 = 0;$$

$$3) -I_3 + I_2 + J_6 = 0;$$

$$4) E_1 = I_1 \cdot R_1 - I_4 \cdot R_4 - I_5 \cdot R_5;$$

$$5) I_5 \cdot R_5 + I_2 \cdot R_2 + I_3 \cdot R_3 = 0.$$

Данные в матрицу вводятся простым набором чисел или символов через пробел в строках, а сами строки матрицы отделяются точкой с запятой или нажатием на клавишу «Enter». Начало и окончание ввода матрицы ограничивается квадратными скобками. Например, $\mathbf{R} = [15 \ 10 \ 0; 10 \ 25 \ 5; 0 \ 5 \ 35]$. В результате получится матрица третьего ранга (3×3):

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 15 & 10 & 0 \\ 10 & 25 & 5 \\ 0 & 5 & 35 \end{bmatrix}.$$

С полученной матрицей можно производить некоторые операции.

1. Суммирование по столбцам выполняется функцией **sum(R)**, а результатом будет $Ans = 25 \ 40 \ 40$.

2. Суммирование по строкам выполняется функцией **sum(R')**. Апостроф обозначает, что суммирование выполняют по столбцам транспонированной матрицы \mathbf{R}' , а столбцы являются строками нетранспонированной матрицы **sum(R)**. Результатом будет $Ans = 25 \ 40 \ 40$.

Иногда необходимо обратиться к конкретному элементу матрицы k -й строки и n -го столбца $R(k,n)$, например $R(3,2)$ будет равен 5.

Можно работать как с отдельными элементами, так и с целыми строками или столбцами с помощью оператора «двоеточие», который имеет несколько назначений. Выражение 1:10 позволяет получить вектор-строку от 1 до 10:

$$1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6 \ 7 \ 8 \ 9 \ 10.$$

Можно задать шаг деления. Например, $0:pi/4:pi$ позволит получить:

$$0 \ 0.7854 \ 1.5708 \ 2.3562 \ 3.1416.$$

Двоеточие в качестве индекса позволяет выделить часть матрицы. Так, запись $R(1:3,1)$ позволяет обратиться к первому столбцу и получить вектор-столбец:

$$15$$

$$10$$

$$0,$$

а выражение $R(1:2,1:2)$ выделит подсистему:

$$\begin{array}{cc} 15 & 10 \\ 10 & 25. \end{array}$$

Для вычисления матрицы методом Крамера сначала вычисляется определитель матрицы $\det(\mathbf{R})$, который не должен быть равным нулю. В результате определитель матрицы будет равен 9250.

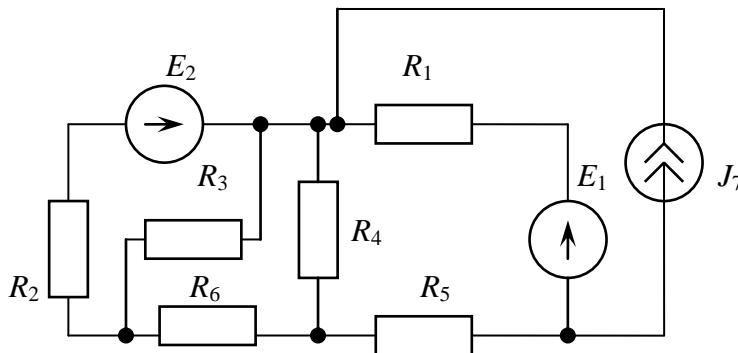
Рассчитаем электрическую схему (рис.2) методом контурных токов.

Дано: источники $E_1 = 36 \text{ В}$; $E_2 = 48 \text{ В}$; $J_7 = 2 \text{ А}$ и сопротивления ветвей $R_1 = 30 \text{ Ом}$; $R_2 = 20 \text{ Ом}$; $R_3 = 30 \text{ Ом}$; $R_4 = 20 \text{ Ом}$; $R_5 = 10 \text{ м}$; $R_6 = 4 \text{ Ом}$.

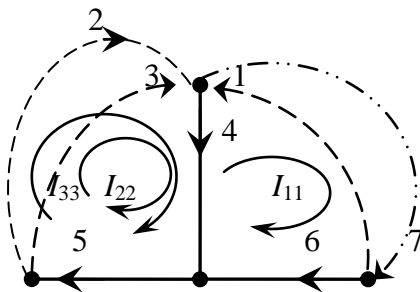
Определить токи во всех ветвях методом контурных токов. Расчет выполнить в программном приложении Matlab, результаты проверить, собрав схему с приборами в программном приложении Multisim.

Составим систему уравнений методом контурных токов для расчета электрической цепи:

$$\begin{aligned} (R_1 + R_4 + R_5) \cdot I_{11} - R_4 \cdot I_{22} - R_4 \cdot I_{33} + (R_4 + R_5) \cdot J_7 &= -E_1; \\ -R_4 \cdot I_{11} + (R_2 + R_4 + R_6) \cdot I_{22} + (R_4 + R_6) \cdot I_{33} - R_4 \cdot J_7 &= E_2; \\ -R_4 \cdot I_{11} + (R_4 + R_6) \cdot I_{22} + (R_3 + R_4 + R_6) \cdot I_{33} - R_4 \cdot J_7 &= 0. \end{aligned}$$



а



б

Рис.2. Электрическая схема (а) и ее граф-схема (б)

Программа расчета электрической цепи в Matlab (см. рис.1) методом контурных токов имеет вид:

```
>> e1=36; e2=48; j7=2; r1=30; r2=20; r3=30; r4=20; r5=10; r6=4;
>> r11=r1+r4+r5; r12=-r4; r13=-r4; r21=r12; r22=r2+r4+r6; r23=r4+r6;
>> r31=r13; r32=r23; r33= r3+r4+r6; e11=-e1-(r4+r5)*j7; e22=e2+r4*j7; e33=r4*j7;
>> R=[r11 r12 r13; r21 r22 r23; r31 r32 r33]; E=[e11;e22;e33];
>> B1=R; B1(:,1)=E; B2=R; B2(:,2)=E; B3=R; B3(:,3)=E;
>> i11=det(B1)/det(R); i22=det(B2/R); i33=det(B3/R);
```

Экспериментальное исследование электрической схемы с приборами (рис.3) выполнено в программном приложении Multisim.

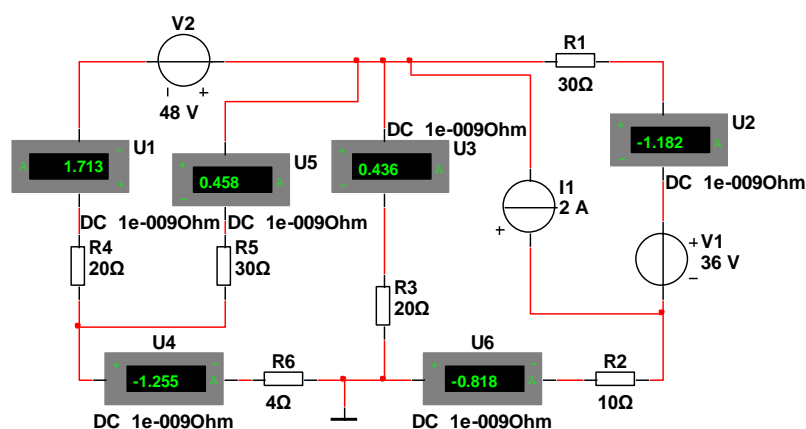


Рис.3. Электрическая схема с приборами, собранная в программном приложении Multisim

Контурные токи, А

>> i11	>> i22	>> i33
i11 = -1.1818	i22 = 1.7127	i33 = -0.4582

Токи в ветвях дерева, А

>> i4=i22+i33-i11-j7	>> i5=i11+j7	>> i6=i22+i33
i4 = 0.4364	i5 = 0.8182	i6 = 1.2545

Рассчитаем электрическую цепь (рис.4) методом узловых потенциалов.

Дано: $E_3 = 30$ В; $J_1 = 80$ мА; $R_2 = 20$ Ом; $R_4 = 40$ Ом; $R_5 = 20$ Ом; $R_6 = 40$ Ом; $R_7 = 10$ Ом; $R_8 = 50$ Ом.

Определить потенциалы во всех узлах электрической схемы (рис.4,а).

Расчет электрической схемы возможен только методом контурных токов, так как сопротивление третьей ветви равно нулю, а проводимость ее будет бесконечной

величиной. Следовательно, определитель матрицы также будет равен бесконечности. Задача не имеет решения.

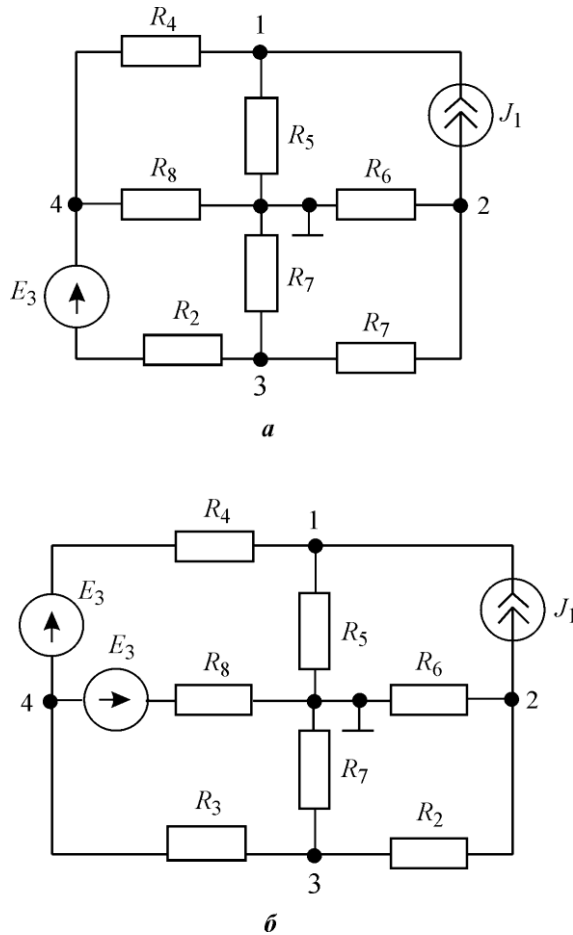


Рис.4. Электрическая схема исходная (а) и преобразованная для расчета (б)

Чтобы решить задачу, ЭДС из третьей ветви следует переместить в четвертую и восьмую ветви (рис.4,б), узлы третий и четвертый объединились, а ранг матрицы проводимости понизился на единицу. Задача теперь имеет решение.

Потенциалы в узлах преобразованной электрической схемы можно определить методом узловых потенциалов. Составим систему уравнений:

$$\begin{aligned}(g_4 + g_5) \cdot \varphi_1 - 0 \cdot \varphi_2 - g_4 \cdot \varphi_3 &= E_3 \cdot g_4 + J_7; \\ -0 \cdot \varphi_1 + (g_2 + g_6) \cdot \varphi_2 - g_2 \cdot \varphi_3 &= -J_7; \\ -g_4 \cdot \varphi_1 - g_2 \cdot \varphi_2 + (g_2 + g_4 + g_7 + g_8) \cdot \varphi_3 &= -E_3 \cdot g_4 - E_3 \cdot g_8.\end{aligned}$$

Расчет электрической схемы (см. рис.4,б) можно выполнить в программном приложении Matlab:

```
>> e3=30; j1=80e-3; r2=20; r4=40; r5=20; r6=40; r7=10; r8=50;
>> g2=1/r2; g4=1/r4; g5=1/r5; g6=1/r6; g7=1/r7; g8=1/r8;
>> g11=g4+g5; g22=g2+g6; g33=g2+g4+g7+g8; g12=0; g13=g4; g21=g12; g23=g2;
```

```

>> g31=g13; g32=g23; G=[g11 -g12 -g13; -g21 g22 -g23; -g31 -g32 g33];
>> j11=e3*g4+j1; j22=-j1; j33=-e3*g4-e3*g8; Ja=[j11;j22;j33];
>> j11=e3*g4+j1; j22=-j1; j33=-e3*g4-e3*g8; Ja=[j11;j22;j33];
>> A1=G; A2=G; A3=G; A1(:,1)=Ja; A2(:,2)=Ja; A3(:,3)=Ja;
>> f1=det(A1/G); f2=det(A2/G); f3=det(A3/G);

```

Потенциалы в узлах схемы (В) равны:

>> f1	>> f2	>> f3
f1 = 8.6174	f2 = -5.9652	f3 = -7.3478

Экспериментальные исследования выполнены в программном приложении Multisim. Для сравнения приведены две схемы: исходная схема (рис.5,а) и преобразованная (рис.5,б) для расчета методом узловых потенциалов.

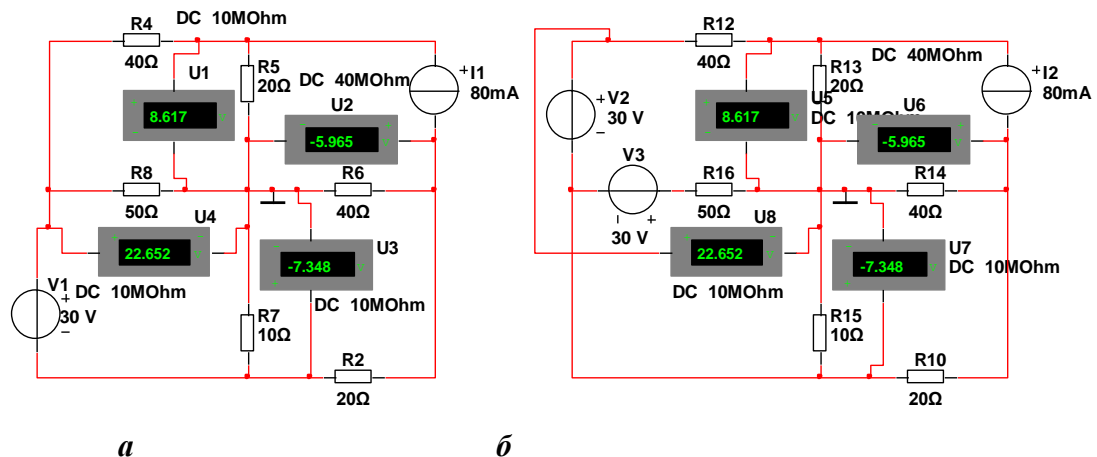


Рис.5. Электрические схемы исходная (а) и преобразованная (б), собранные в программном приложении Multisim

Задание и методика выполнения работы

Задание. Рассчитать схему методом контурных токов и узловых потенциалов.

1. Изобразить граф-схему (рис.6) и составить электрическую схему. Параметры схемы размещены в таблице.
2. Во всех ветвях рассчитать токи методом контурных токов. Расчет матриц выполнить, используя правило Крамера.
3. Рассчитать потенциалы в узлах методом узловых потенциалов.
4. Рассчитать напряжения и токи во всех ветвях, используя потенциалы узлов.
5. Определить режимы работы источников. Составить баланс мощностей.

Варианты задания

Вариант	Схема (см. рис.6)	R_1 , Ом	R_2 , Ом	R_3 , Ом	R_4 , Ом	R_5 , Ом	R_6 , Ом	E_1 , В	E_2 , В	E_3 , В	E_4 , В	J_7 , мА
1	a	56	82	30	20	50	75	24	-	-	36	90
2	b	18	62	82	16	72	62	-	36	-	12	60
3	a	36	68	56	30	75	64	-	-	12	24	70
4	b	12	70	50	18	80	68	36	12	-	-	80
5	a	20	30	60	36	62	72	12	36	-	-	10
6	b	15	40	62	12	64	75	24	-	36	-	20
7	a	24	50	68	40	68	80	12	-	-	36	30
8	b	16	56	70	56	70	82	-	36	24	-	40
9	a	30	60	72	24	75	50	-	24	12	-	50
10	b	18	62	82	16	72	62	-	36	-	12	60
11	a	36	68	56	30	75	64	-	-	12	24	70
12	b	12	70	50	18	80	68	36	12	-	-	80
13	a	40	72	40	15	82	70	24	-	36	-	82
14	b	56	82	30	20	50	75	24	-	-	36	90
15	a	20	30	60	36	62	72	12		36	-	-10
16	b	15	40	62	12	64	75		24	36	-	-20
17	a	24	50	68	40	68	80	12	-	36		-30
18	b	16	56	70	56	70	82	36		24	-	-40
19	a	30	60	72	24	75	50	24		12	-	-50
20	b	18	62	82	16	72	62	-	36	-		-60
21	a	36	68	56	30	75	64	-	-	12	24	-70
22	b	12	70	50	18	80	68	36	-	12	-	-80
23	a	40	72	40	15	82	70	-	24	36	-	-82
24	b	56	82	30	20	50	75	24	-	36	-	-90
25	a	16	56	70	56	70	82	-	36	24	-	40
26	b	30	60	72	24	75	50	-	24	12	-	50

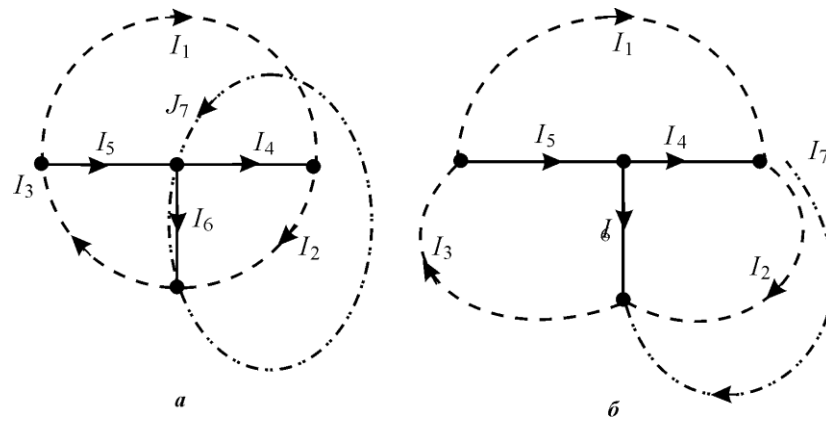


Рис.6. Направленный граф исследуемых электрических схем

6. Составить уравнения по законам Кирхгофа для расчета токов и напряжений.

7. Рассчитать ток в одной ветви связи (хорде с источником напряжения) методом эквивалентного генератора:

- удалить из цепи эту ветвь, а оставшуюся часть схемы рассмотреть как активный двухполюсник, который необходимо заменить одним эквивалентным источником напряжения и одним эквивалентным резистором;
- определить ток короткого замыкания методом контурных токов;
- определить напряжение холостого хода методом узловых потенциалов и рассчитать эквивалентное сопротивление $R_0 = U_{xx} / I_{кз}$;
- собрать схему замещения и проверить экспериментально метод эквивалентного генератора в программной среде Multisim.

8. Рассчитать и построить потенциальную диаграмму для внешнего контура схемы, начиная от заземленного узла.

9. Собрать схему в программной среде Multisim, измерить токи и узловые напряжения.

Контрольные вопросы

18. Что такое дерево граф-схемы и хорды?
19. Что такое «ветвь», «неустранимый узел», «независимый контур»?
20. Как определить число уравнений, необходимых для расчета по уравнениям Кирхгофа?
21. Как составить систему уравнений по законам Кирхгофа?
22. Какова последовательность составления системы уравнений по законам Кирхгофа?
23. Как составить уравнения методом контурных токов и его преимущества?
24. Как составить уравнения методом узловых потенциалов?
25. Как рассчитать токи в ветвях дерева, если известны контурные токи?
26. Как рассчитать токи в ветвях, если известны узловые потенциалы?
27. Что такое оптимальный метод расчета электрической цепи?
28. С какой целью составляют уравнение баланса мощности?
29. Как можно определить ток в одной отдельной ветви?
30. Как подключить ваттметр для измерения мощности на любом участке?
31. Почему ветви с источником токов нельзя включать в ветви дерева граф-схемы?
32. В каких случаях используют метод эквивалентного генератора?

Лабораторная работа № 3

Исследование электрической цепи синусоидального тока

Цель работы: исследование электрической цепи синусоидального тока; экспериментальная проверка амплитудных и фазовых соотношений.

Продолжительность работы - 4 ч.

Теоретические сведения

Периодический переменный ток, изменяющийся по синусоидальному закону со сдвигом фазы или без сдвига (рис.1), называется гармоническим током.

Мгновенное значение гармонического тока имеет следующий вид:

$$i(t) = I_m \sin(\omega t + \psi_1) = I_m \cos(\omega t + \psi_1 + 90^\circ),$$

где i - мгновенное значение электрического тока; I_m - амплитуда электрического тока; ω - угловая частота ($\omega = 2\pi f$); f - частота; ψ_1 - начальный сдвиг фазы в момент времени $t = 0$.

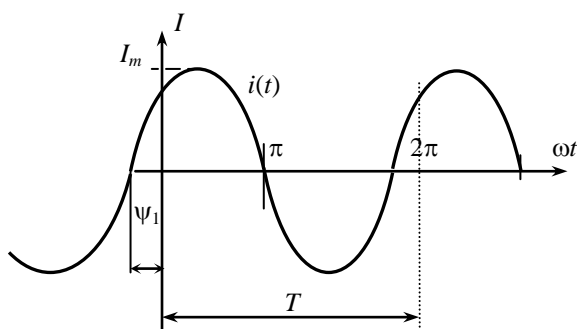


Рис.1. График синусоидального тока

Действующее значение синусоидального тока рассчитывается из условия, что энергия, выделяющаяся на резисторе в виде тепла за один период синусоидального тока, равна энергии, выделяющейся на таком же резисторе в цепи постоянного тока за время, равное одному такому же периоду. Энергия, выделяющаяся на резисторе в цепи постоянного тока за время T , определяется по формуле $W_{\text{пт}} = RI^2T$. Энергия, выделяющаяся на резисторе в цепи синусоидального тока за один период, равна:

$$W_{\text{ст}} = \int_0^T Ri^2 dt = RI_m^2 \int_0^T (\sin \omega t)^2 dt = RI_m^2 \int_0^T \frac{1 - \cos 2\omega t}{2} dt = RT \frac{I_m^2}{2}.$$

Действующее значение синусоидального тока (напряжения или ЭДС) за период T можно определить по формуле:

$$I = \frac{I_m}{\sqrt{2}}; \quad E = \frac{E_m}{\sqrt{2}}; \quad U = \frac{U_m}{\sqrt{2}},$$

а также измерить приборами.

Среднее значение синусоидального тока (напряжения или ЭДС) равно:

$$I_{\text{cp}} = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} I_m \sin \omega \cdot t \cdot dt = \frac{2}{\pi} I_m = 0,6366 \cdot I_m.$$

Коэффициент амплитуды и формы. Коэффициент амплитуды - это отношение амплитудного (максимального) значения тока (напряжения или ЭДС) к действующему значению:

$$k_a = \frac{I_m}{I} = \sqrt{2}.$$

Коэффициент формы - отношение действующего значения тока (напряжения или ЭДС) к среднему значению:

$$k_\phi = \frac{I}{I_{\text{cp}}} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} = 1,1107.$$

Вращающиеся векторы электрического напряжения и тока имеют аргумент $(\omega t + \psi)$, отсчитываемый от точки перехода функции через нуль к положительному значению. Реальному аргументу соответствуют вращающиеся векторы напряжения и тока:

$$\tilde{U} = U \cdot e^{j(\omega t + \psi_2)} = U \cdot e^{j\psi_2} \cdot e^{j\omega t} = \dot{U} \cdot e^{j\omega t};$$

$$\tilde{I} = I \cdot e^{j(\omega t + \psi_1)} = I \cdot e^{j\psi_1} \cdot e^{j\omega t} = \dot{I} \cdot e^{j\omega t}.$$

Здесь \dot{U}, \dot{I} - комплексные величины напряжения и тока; U, I - действующие значения напряжения и тока.

Комплексный метод расчета электрических цепей синусоидального тока. В электрических цепях синусоидального тока применяются комплексные (символические) величины для решения системы алгебраических уравнений: $\dot{U}, \dot{I}, Z = R + jX_p$, реактивное сопротивление $X_p = X_L - X_C$, проводимость $Y = g - jb_p$, реактивная проводимость $b_p = b_L - b_C$.

При переходе от мгновенных величин (оригиналов) к комплексным (изображениям оригиналов) в дифференциальных и интегральных уравнениях используется преобразование Лапласа:

$$\frac{di}{dt} \Rightarrow j\omega \dot{I}; \quad \int i \cdot dt \Rightarrow \frac{\dot{I}}{j\omega}.$$

Соотношения между напряжением и током на элементах имеют вид:

- индуктивность

$$u_L = L \frac{di}{dt} \Rightarrow jL\omega \dot{I} = jX_L \dot{I} = \dot{U}_L ;$$

- конденсатор

$$u_C = \frac{1}{C} \int i_C \cdot dt \Rightarrow \frac{1}{C} \cdot \frac{\dot{I}}{j\omega} = -jX_C \cdot \dot{I} = \dot{U}_C ;$$

- резистор

$$u_R = R \cdot i \Rightarrow R \cdot \dot{I} .$$

Индуктивность, конденсатор и резистор ведут себя в электрических цепях синусоидального тока по-разному (рис.2). Электрический ток, проходящий через индуктивность, отстает от напряжения на 90° (рис.2,а), а электрический ток, проходящий через конденсатор, опережает напряжение на 90° (рис.2,б). Электрический ток, проходящий через резистор, совпадает по фазе с напряжением (рис.2,в).

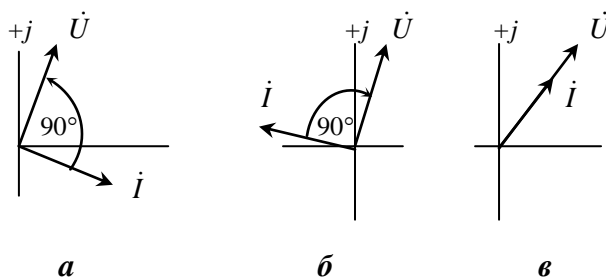


Рис.2. Векторные диаграммы напряжений и токов на элементах:
а - индуктивность; б - конденсатор; в - резистор

Мнимую величину $j = \sqrt{-1}$, $j^2 = -1$ в полярной форме (показательной) можно представить как $j = e^{j90^\circ}$, $j^2 = e^{j180^\circ}$. Умножение на j любой величины - это поворот вектора этой величины на 90° , а умножение на j^2 - это поворот вектора на 180° .

Полярная форма записи комплексного электрического тока и напряжения имеют вид $\dot{U} = U \cdot e^{j\psi_2}$, $\dot{I} = I \cdot e^{j\psi_1}$. На рис.3 изображены векторы напряжений и тока на комплексной плоскости.

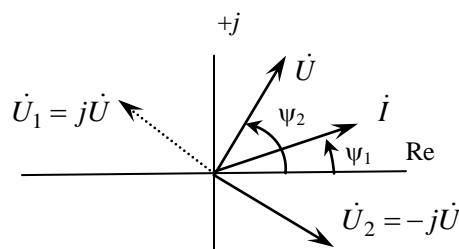


Рис.3. Векторы напряжений и тока на комплексной плоскости

Алгебраическую форму записи $\dot{U}_1 = \dot{U} \cdot j$ комплексного числа можно получить, используя формулу Эйлера: $e^{j\psi} = \cos\psi + j\sin\psi$. Комплексное напряжение в алгебраической форме имеет вид

$$\dot{U} = U \cdot \cos \psi_2 + j U \cdot \sin \psi_2 = \operatorname{Re}(\dot{U}) + j \operatorname{Im}(\dot{U}) = a + j \cdot b,$$

где $a = U \cdot \cos \psi_2$; $b = U \cdot \sin \psi_2$.

Переход от алгебраической формы записи к полярной (показательной) следующий: сначала определяется модуль действующего значения U , а затем угол сдвига фазы ψ_2 :

$$|\dot{U}| = \sqrt{a^2 + b^2}; \quad \psi_2 = \arctg \frac{b}{a} = \arctg \frac{\operatorname{Im}(\dot{U})}{\operatorname{Re}(\dot{U})}.$$

Рассмотрим закон Ома. Полное комплексное сопротивление Z можно определить, разделив комплексное напряжение на комплексный ток. Угол поворота ωt не влияет на расчет электрической цепи, а указывает, что эти векторы непрерывно вращаются. Поэтому величину $e^{j\omega t}$ не указывают при расчете схем:

$$Z = \frac{\tilde{U}}{\tilde{I}} = \frac{\dot{U} \cdot e^{j\omega t}}{\dot{I} \cdot e^{j\omega t}} = \frac{\dot{U}}{\dot{I}} = \frac{U \cdot e^{j\psi_2}}{I \cdot e^{j\psi_1}} = z \cdot e^{j\varphi} = z \cdot \cos \varphi + jz \cdot \sin \varphi = R + jX_p,$$

где z - модуль полного сопротивления.

Составные элементы полного сопротивления:

$$X_p = X_L - X_C = z \sin \varphi, \quad R = z \cos \varphi.$$

Полное сопротивление в алгебраической форме будет $Z = R + j \cdot X_L$, если электрическая цепь состоит из резистора и индуктивности, которые соединены последовательно. Их треугольник сопротивлений и проводимости изображены на рис.4,а.

Полное сопротивление будет при последовательном соединении элементов $Z = R - j \cdot X_C$, если электрическая цепь состоит из резистора и конденсатора. Их треугольник сопротивлений и проводимости изображены на рис.4,б.

Комплексную проводимость определяют зависимостью:

$$Y = \frac{1}{Z} = \frac{1}{R + jX_p} = \frac{jX_p}{R^2 + X_p^2} = g - jb_p = y \cdot e^{j\varphi},$$

где $g = \frac{R}{z^2}$, $b_p = \frac{X_p}{z^2}$; $X_p = X_L - X_C$ - реактивное сопротивление;

y - модуль полной проводимости.

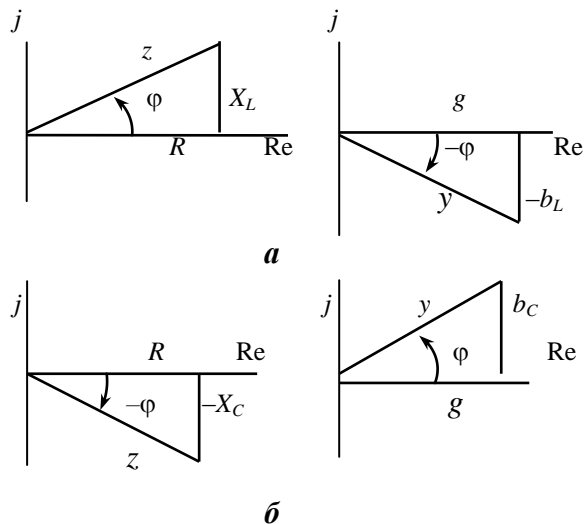


Рис.4. Треугольники сопротивлений и проводимостей:
а - активно-индуктивная нагрузка; *б* - активно-емкостная нагрузка

Законы Кирхгофа в цепях синусоидального тока. Уравнения для узла и контура электрической цепи синусоидального тока согласно первому и второму законам Кирхгофа имеют вид

$$\sum I_{\text{вх}} - \sum I_{\text{вых}} = 0; \quad \pm \sum \dot{E} = \pm \sum \dot{U} \pm \sum \dot{I} \cdot Z.$$

Здесь $\dot{E}, \dot{U}, \dot{I}$ - ЭДС, напряжение и электрический ток (комплексные величины).

Мощность в комплексной форме. Полная мощность электрической цепи синусоидального тока (рис.5,б) равна произведению комплексного значения напряжения на сопряженный комплекс тока:

$$\tilde{S} = \dot{U} \cdot \dot{I}^* = U \cdot I \cdot e^{j(\psi_2 - \psi_1)} = S \cdot e^{j\varphi} = S \cdot \cos\varphi + j \cdot S \cdot \sin\varphi = P + jQ_p,$$

где S - полная мощность, В·А; $P = S \cos\varphi$ - активная мощность, Вт; $Q = S \sin\varphi$ - реактивная мощность, Вар; \dot{I}^* - сопряженный комплекс тока.

Сопряженный комплекс тока является зеркальным отображением комплексного тока относительно вещественной оси (рис.5,а)

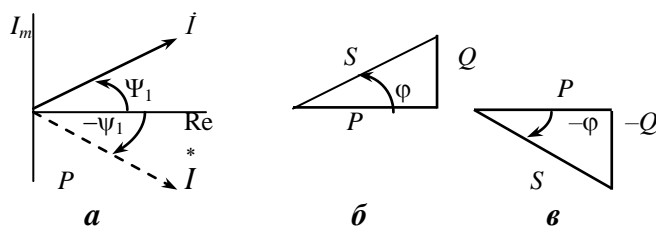


Рис.5. Сопряженный комплекс тока (*а*) и треугольники мощностей (*б*, *в*)

и отличается тем, что начальный угол сдвига фазы ψ_1 комплексного тока меняет знак на противоположный ($-\psi_1$).

Мощность в комплексных величинах определяется перемножением комплексного тока на сопряженный комплекс напряжения (рис.5,б):

$$\tilde{S} = U \cdot \dot{I}^* = U \cdot I \cdot e^{j(-\psi_2 + \psi_1)} = S \cdot e^{-j\varphi} = S \cdot \cos(-\varphi) + S \cdot \sin(-\varphi) = P - jQ.$$

В этом случае реактивная мощность ($-Q$) становится отрицательной и эта формула очень редко используется из-за смены знака реактивной мощности. Полную мощность можно вычислить, зная активную и реактивную мощности и используя треугольник мощностей:

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2}.$$

Источники и приемники. В электрических цепях синусоидального тока источники напряжения и источники тока могут работать в режиме генератора, отдавая активную энергию электрической цепи, или в режиме потребителя, потребляя активную энергию. Для определения режима работы источников недостаточно определить правильно только знак схемы. Еще необходимо учесть влияние угла сдвига фазы φ между напряжением и током. В результате вычислений получим значение мощности в виде

$$\tilde{S} = \pm P \pm j \cdot Q.$$

Здесь $+P$ означает, что источник работает в режиме генератора и отдает активную энергию электрической цепи; $-P$ - источник работает в режиме потребителя и потребляет активную энергию из электрической цепи; $+Q$ - в электрической схеме преобладает реактивная энергия индуктивности; $-Q$ - преобладает реактивная энергия емкости.

Пассивные элементы - приемники активной и реактивной энергии. Резистор является приемником активной энергии, а его мощность будет равна:

$$P = R \cdot I^2 \text{ [Вт]}.$$

Индуктивность и емкость являются приемниками реактивной энергии, их мощности будут равны:

$$Q_L = X_L \cdot I^2 \text{ [Вар]}; \quad Q_C = X_C \cdot I^2 \text{ [Вар]}.$$

Баланс мощностей в электрической цепи синусоидального тока является алгебраической суммой полной мощности всех источников, равной алгебраической сумме полной мощности всех потребителей (приемников):

$$\sum \tilde{S}_{\text{ист}} = \sum \tilde{S}_{\text{прием}}.$$

Расчет баланса мощностей можно выполнять отдельно для активных или реактивных мощностей:

$$\sum P_{\text{ист}} = \sum P_{\text{прием}}; \sum Q_{\text{ист}} = \sum Q_L - \sum Q_C.$$

Топологический метод расчета. С увеличением сложности электрических схем возникают большие трудности при составлении уравнений и их решении. Появляется потребность в расчете машинными методами и использовании методов, наилучшим образом приспособленных для решения этих задач на компьютерах при составлении матрично-топологических уравнений. Реальные электрические схемы заменяются граф-схемами, в которых сохраняются все узлы, а ветви изображаются линиями без элементов.

Направленный граф - это топографическое изображение схемы (рис.6), а на ветвях (линиях) устанавливают стрелки, указывающие направление передачи сигнала (условно-положительные направления токов и напряжений между узлами этой ветви).

Дерево графа содержит все узлы и ветви, которые не образуют замкнутые контуры. Эти ветви называются главными. Хорды или ветви связи замыкают ветви дерева и образуют независимые контуры. Хорды изображаются пунктирными линиями. Ветви с источниками тока можно рассматривать как особые хорды с известными токами, которые образуют замкнутые контуры с известным контурным током. Такие ветви никогда не используются в качестве ветви дерева.

Матрицы параметров - это матрицы сопротивлений, токов, напряжений, ЭДС и др. Матрицы сопротивлений могут быть прямоугольные и квадратные, но в матрично-топологических матрицах сопротивлений и проводимостей применяются диагональные матрицы.

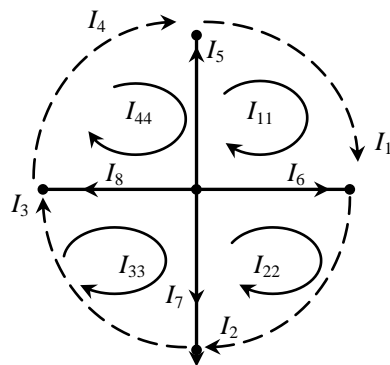


Рис.6. Граф-схема электрической цепи

Матрица контуров. Составим матрицу контур - ветвь. Можно выделить направленный граф (см. рис.6) с выбранными контурами I_{11} , I_{22} , I_{33} и I_{44} . Ветви 1 - 4 - ветви связи или хорды, а ветви 5 - 8 - ветви дерева. Тогда матрица контур - ветвь **К** будет иметь 4 строки (число контуров) 8 столбцов (число ветвей):

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0; \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0; \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1; \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Здесь $k = 1$, если направление ветви совпадает с направлением контура, $k = -1$, если направление ветви не совпадает с направлением контура, $k = 0$, если ветвь не входит в контур.

Матрица контур - ветвь, умноженная на напряжения в ветвях, равна нулю:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{matrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \\ U_6 \\ U_7 \\ U_8 \end{matrix} = \begin{bmatrix} U_1 + U_5 - U_6 \\ U_2 + U_6 - U_7 \\ U_3 + U_7 - U_8 \\ U_4 - U_5 + U_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0.$$

Доказано, что $\mathbf{K} \cdot \mathbf{U} = 0$. Можно составить сумму напряжений для контуров (см. рис.6) согласно второму закону Кирхгофа, которые будут иметь аналогичные уравнения:

$$U_1 + U_5 - U_6 = 0;$$

$$U_2 + U_6 - U_7 = 0;$$

$$U_3 + U_7 - U_8 = 0;$$

$$U_4 - U_5 + U_8 = 0.$$

Можно доказать, что транспонированная матрица контур - ветвь, умноженная на матрицу-столбец токов хорд, равна матрице-столбцу тока всех ветвей:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_1 - I_4 \\ I_2 - I_1 \\ I_3 - I_2 \\ I_4 - I_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \\ I_6 \\ I_7 \\ I_8 \end{pmatrix}.$$

Доказано, что $\mathbf{K}^T \cdot \mathbf{I}_x = \mathbf{I}$. Если известна матрица \mathbf{K} , тогда можно получить транспонированную матрицу \mathbf{K}' в программном приложении Matlab. Часто используется матрица ветвь - контур, которая равна транспонированной матрице контур - ветвь $\mathbf{C} = \mathbf{K}^T$, а транспонированная - равна матрице контур - ветвь $\mathbf{C}^T = \mathbf{K}$.

Узловая матрица. Для составления матрицы узел - ветвь не требуется выбор дерева, а достаточно выбрать только направленный граф (рис.7). Если ветвь

принадлежит узлу, а ток направлен от узла, тогда ставят единицу в узловой матрице, а если ток этой ветви направлен к узлу - ставят минус единицу. Если ветвь не присоединена к этому узлу, тогда - ноль.

Полная матрица узел - ветвь (\mathbf{A}_n) должна иметь четыре узла и шесть ветвей. Требуется доказать, что произведение полной матрицы узел - ветвь на токи всех ветвей равно нулю.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \\ I_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_1 - I_3 + I_4 \\ -I_1 + I_2 - I_5 \\ -I_2 + I_3 - I_6 \\ -I_4 + I_5 + I_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0.$$

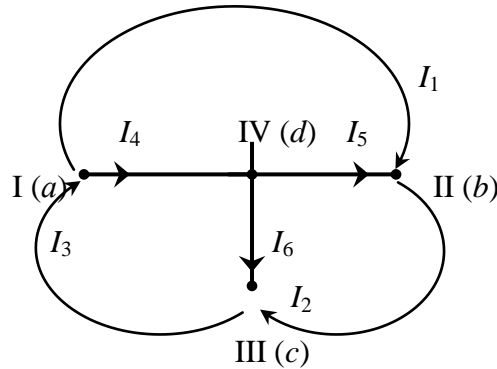


Рис.7. Направленный граф электрической схемы

Для всех узлов можно составить уравнения согласно первому закону Кирхгофа (см. рис.7). Доказано, что $\mathbf{A}_n \cdot \mathbf{I} = 0$.

По первому закону Кирхгофа число уравнений должно быть на единицу меньше числа узлов $n_1 = n_{yz} - 1$. Если один из узлов сделать базовым, т.е. потенциал этого узла принимается равным нулю ($\varphi_6 = 0$), то матрица узел - ветвь уменьшится на одну строку. Умноженный на ток всех ветвей потенциал также равен нулю $\mathbf{A} \cdot \mathbf{I} = 0$. В качестве базового узла можно выбрать узел IV (d). Транспонированную матрицу \mathbf{A} с базовым узлом можно умножить на разность потенциалов ($\varphi_i - \varphi_6$) и получить матрицу-столбец напряжений во всех ветвях:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \varphi_1 - \varphi_6 \\ \varphi_2 - \varphi_6 \\ \varphi_3 - \varphi_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_1 - \varphi_6 - \varphi_2 + \varphi_6 \\ \varphi_2 - \varphi_6 - \varphi_3 + \varphi_6 \\ -\varphi_1 + \varphi_6 + \varphi_3 - \varphi_6 \\ \varphi_1 - \varphi_6 \\ -\varphi_2 + \varphi_6 \\ -\varphi_3 - \varphi_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \\ U_6 \end{pmatrix}.$$

Доказано, что $\mathbf{A} \cdot [\varphi_i - \varphi_6] = \mathbf{U}$.

Матрица сечений. Для электрической схемы нужно построить граф-схему (рис.8), выбрать ветви дерева, хорды и направление ветвей. Затем выбираются сечения так, чтобы они пересекали только одну ветвь дерева и несколько ветвей связи (хорды).

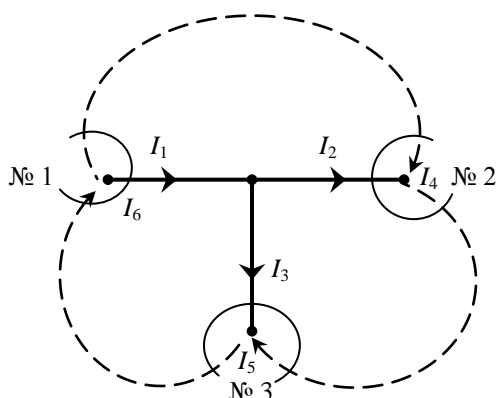


Рис.8. Граф-схема электрической цепи

Матрица сечение - ветвь состоит из единиц и нулей. Направление ветви дерева имеет всегда единицу в матрице сечения ($d_{вд} = 1$), а хорды имеют единицу только в том случае, если ее направление такое же по отношению к сечению, как и ветви дерева ($d_x = 1$). Ветвь хорды принадлежит сечению, а направление ветви хорды имеет противоположное направление по отношению к ветви дерева ($d_x = -1$). Ветвь хорды не принадлежит этому сечению ($d_x = 0$).

Необходимо доказать, что матрица сечение - ветвь, умноженная на матрицу-столбец тока всех ветвей, будет равна нулю:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \\ I_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_1 + I_4 - I_6 \\ I_2 + I_4 - I_5 \\ I_3 + I_5 - I_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0.$$

Если составить уравнения по первому закону Кирхгофа, тогда получим аналогичные уравнения. Доказано, что $\mathbf{D} \cdot \mathbf{I} = 0$.

Транспонированную матрицу сечение - ветвь можно умножить на матрицу-столбец напряжений ветвей дерева. В результате можно получить матрицу-столбец напряжений во всех ветвях:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_1 + U_2 \\ U_3 - U_2 \\ -U_1 - U_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \\ U_6 \end{pmatrix}.$$

Аналогичные уравнения можно получить, если составить уравнения по второму закону Кирхгофа для контуров. Доказано, что $\mathbf{D}^T \cdot \mathbf{U}_{\text{вд}} = \mathbf{U}$.

Ветвь с параллельно подключенным источником. Топология электрической схемы (рис.9), имеющая ветвь с сопротивлением Z , источником напряжения E и источником тока J , называется стандартной ветвью.

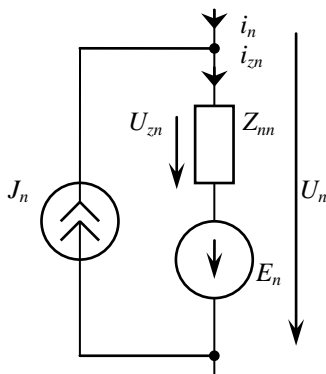


Рис.9. Стандартная ветвь

Зависимость между током и напряжением на сопротивлении Z определяется по закону Ома:

$$\begin{aligned} U_{zn} &= Z_{nn} \cdot i_{zn}; \\ i_{zn} &= Y_{nn} \cdot U_{zn}. \end{aligned}$$

Можно составить уравнения по законам Кирхгофа:

$$\begin{aligned} E_n &= U_{zn} - U_n; \\ J_n + i_n - i_{zn} &= 0. \end{aligned}$$

Для электрической схемы, имеющей большое количество ветвей, все параметры можно представить в матричной форме.

Параметры источников ЭДС, источников токов, токов в ветвях и напряжений для множества ветвей представляются в виде матриц-столбцов, которые в программном приложении Matlab получают после выполнения следующих команд: $\mathbf{Es} = [E_1 \ E_2 \ \dots \ E_n]$; $\mathbf{E} = \mathbf{Es}'$. Диагональные матрицы в программном приложении Matlab можно получить, выполнив следующие действия:

$$\mathbf{Z} = [Z_1 \ Z_2 \ Z_3 \ Z_4]; \mathbf{Z}_d = \text{diag}(\mathbf{Z}); \mathbf{Y}_d = \mathbf{Z}^{-1}.$$

Диагональные матрицы примут вид:

$$\mathbf{Z}_d = \begin{pmatrix} Z_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Z_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Z_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Z_4 \end{pmatrix}; \mathbf{Y}_d = \begin{pmatrix} Y_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Y_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Y_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Y_4 \end{pmatrix}.$$

Сначала получили матрицу-строку ЭДС, а матрицу-столбец ЭДС получим, поставив апостроф (транспонированная матрица-строка). Матрицу-столбец остальных параметров можно получить так же.

Расчет схем относительно токов хорд. Зависимость между током и напряжением на сопротивлении Z в матричной форме определяется по закону Ома:

$$\mathbf{U}_z = \mathbf{Z}_d \cdot \mathbf{I}_z; \quad \mathbf{I}_z = \mathbf{Y}_d \cdot \mathbf{U}_z.$$

Можно составить уравнения по законам Кирхгофа:

$$\mathbf{E} = \mathbf{U}_z - \mathbf{U}; \quad \mathbf{J} + \mathbf{I} - \mathbf{I}_z = 0.$$

Уравнения Кирхгофа можно преобразовать и выделить напряжение и ток на сопротивлении:

$$\mathbf{U}_z = \mathbf{E} + \mathbf{U}; \quad \mathbf{I}_z = \mathbf{J} + \mathbf{I}.$$

Расчет схем относительно токов хорд в матричной форме выполняется в следующей последовательности:

$$\mathbf{E} + \mathbf{U} = \mathbf{U}_z = \mathbf{Z}_d \cdot \mathbf{I}_z = \mathbf{Z}_d \cdot \mathbf{J} + \mathbf{Z}_d \cdot \mathbf{I}.$$

Соединим уравнение расчета схемы относительно токов хорд с топологией схемы, т.е. правая и левая часть уравнения умножается на матрицу контур - ветвь и приводится к виду

$$\mathbf{K} \cdot \mathbf{Z}_d \cdot \mathbf{I} = \mathbf{K} \cdot (\mathbf{E} - \mathbf{Z}_d \cdot \mathbf{J}) + \mathbf{K} \cdot \mathbf{U}.$$

Здесь $\mathbf{K} \cdot \mathbf{U} = 0$.

В уравнении можно выполнить следующую подстановку:

$$\mathbf{K}^T \cdot \mathbf{I}_x = \mathbf{I}.$$

Уравнение для расчета электрической схемы методом контурных токов в топологической форме принимает вид

$$(\mathbf{K} \cdot \mathbf{Z}_d \cdot \mathbf{K}^T) \cdot \mathbf{I}_x = \mathbf{K} \cdot (\mathbf{E} - \mathbf{Z}_d \cdot \mathbf{J}).$$

Токи хорд определяются так:

$$\mathbf{I}_x = (\mathbf{K} \cdot \mathbf{Z}_d \cdot \mathbf{K}^T)^{-1} \cdot \mathbf{K} \cdot (\mathbf{E} - \mathbf{Z}_d \cdot \mathbf{J}).$$

Вычисление токов хорд - это вычисление контурных токов, число которых равно числу независимых контуров электрической схемы.

Расчет схем методом узловых потенциалов в топологической форме. Уравнение составляется в следующей последовательности:

$$\mathbf{J} + \mathbf{I} = \mathbf{I}_z = \mathbf{Y}_d \cdot \mathbf{U}_z = \mathbf{Y}_d \cdot \mathbf{E} + \mathbf{Y}_d \cdot \mathbf{U}.$$

Соединим уравнение расчета электрической схемы методом узловых потенциалов с топологией схемы, т.е. правая и левая часть уравнения умножается на матрицу узел - ветвь с базовым узлом и приводится к виду

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{Y}_d \cdot \mathbf{U} = \mathbf{A}(\mathbf{J} - \mathbf{Y}_d \cdot \mathbf{E}) + \mathbf{A} \cdot \mathbf{I}.$$

Здесь $\mathbf{A} \cdot \mathbf{I} = 0$.

В уравнении можно выполнить следующую подстановку:

$$\mathbf{A}^T \cdot \boldsymbol{\varphi} = \mathbf{U}.$$

Получили уравнение для расчета потенциалов методом узловых потенциалов в топологической форме:

$$\boldsymbol{\varphi} = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{Y}_d \cdot \mathbf{A}^T)^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot (\mathbf{J} - \mathbf{Y}_d \cdot \mathbf{E}).$$

В уравнении учитываются источники напряжения, источники токов с их направлением и сопротивления всех ветвей. Число потенциалов на единицу меньше числа узлов электрической схемы. Один узел выбирается в качестве базового, а его потенциал равен нулю.

Задания и методика выполнения работы

Задание 1. Рассчитать электрическую схему (рис.10). Параметры схемы даны в табл.1 и 2. Частота переменного тока $f = 50$ Гц.

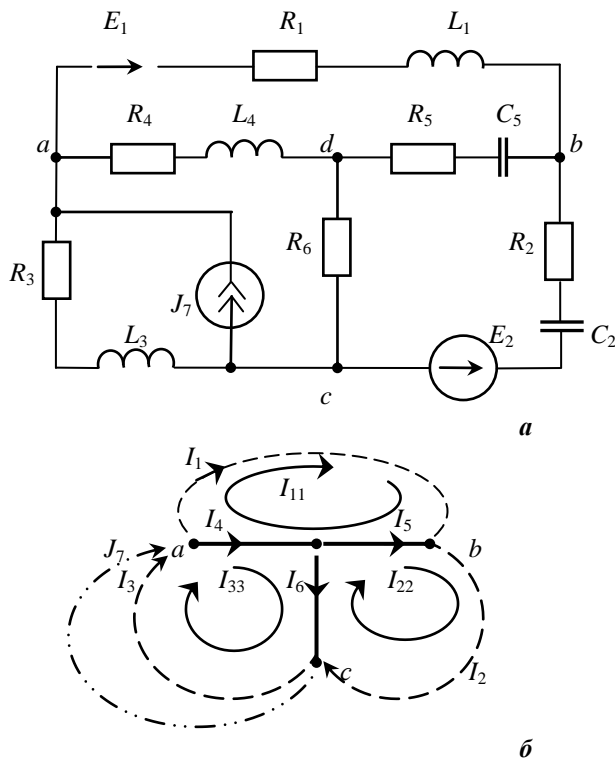


Рис.10. Электрическая схема (а) и ее граф-схема (б)

Таблица 1

Варианты заданий активной нагрузки и источников

Вариант	E_1 , В	E_2 , В	J_7 , А	R_1 , Ом	R_2 , Ом	R_3 , Ом	R_4 , Ом	R_5 , Ом	R_6 , Ом
1	36	12	1,4	10	20	5	15	5	5
2	36	12	1,4	10	20	10	10	5	10
3	36	24	1,4	10	20	20	10	5	20
4	36	24	1	20	10	20	20	10	5
5	36	30	1	20	20	10	15	10	10
6	12	36	1,2	20	20	10	10	10	20
7	15	36	1,2	10	20	10	20	10	5
8	24	36	1,2	10	10	10	10	5	10
9	24	36	0,8	10	10	10	15	5	20
10	30	36	0,8	20	10	10	10	10	5
11	30	36	0,8	20	20	10	20	10	10
12	15	36	0,8	20	20	10	10	5	20
13	48	24	1	10	10	20	10	5	5
14	48	24	1	20	20	20	20	10	10
15	36	48	0,8	10	10	20	10	10	20
16	24	15	0,8	10	10	10	10	5	10
17	12	24	0,8	20	10	10	10	10	15
18	24	24	0,8	20	20	10	10	10	5
19	48	24	0,8	20	20	10	10	5	10
20	24	36	1	10	10	20	10	5	20
21	24	36	0,8	20	10	10	10	10	5
22	30	15	0,8	20	20	10	20	10	10
23	24	36	0,8	20	20	10	10	5	20
24	36	24	1	10	10	20	10	5	5

Варианты заданий реактивной нагрузки

Вариант	L_1 , мГн	L_3 , мГн	L_4 , мГн	C_2 , мкФ	C_5 , мкФ
1	31,83	63,66	31,83	318,3	154
2	31,83	63,66	31,83	318,3	154
3	31,83	63,66	31,83	318,3	154
4	63,66	127	63,66	318,3	154
5	63,66	63,66	63,66	160	154
6	63,66	63,66	31,83	160	316
7	31,83	63,66	31,83	160	316
8	31,83	63,66	31,83	320	154
9	31,83	63,66	63,66	320	154
10	63,66	63,66	63,66	318,3	154
11	63,66	63,66	31,83	160	154
12	63,66	95,49	31,83	160	154
13	31,83	63,66	31,83	316	154
14	63,66	127,32	63,66	316	154
15	63,66	63,66	63,66	316	154
16	31,83	63,66	31,83	316	154
17	63,66	63,66	31,83	316	154
18	63,66	63,66	31,83	160	316
19	63,66	95,49	63,66	160	316
20	31,83	63,66	63,66	316	160
21	31,83	63,66	31,83	318,3	154
22	63,66	127	63,66	318,3	154
23	63,66	63,66	63,66	160	154
24	63,66	63,66	31,83	160	316

1. Записать значения источников напряжения и тока в комплексных величинах и рассчитать электрические токи в ветвях методом контурных токов:

- записать сопротивления ветвей Z_1, Z_2, Z_3, Z_4, Z_5 в алгебраической форме;
- составить уравнения методом контурных токов и рассчитать контурные токи в алгебраической форме;

- определить токи в ветвях в алгебраической и показательной формах.
- 2. Рассчитать потенциалы электрической цепи методом узловых потенциалов:
 - принять потенциал точки d равным нулю ($\varphi_d = 0$) и определить потенциалы в точках a, b, c методом узловых потенциалов;
 - определить в алгебраической и показательной форме напряжения в электрической цепи;
 - построить топографическую диаграмму.
- 3. Рассчитать баланс мощности в комплексных величинах:
 - определить режимы работы источников напряжения и источника тока;
 - составить уравнение баланса мощности: полных, активных и реактивных мощностей.

Задание 2. Исследовать электрическую схему (см. рис.10).

1. Собрать исследуемую электрическую схему на лабораторном стенде или в программном приложении Multisim:

- измерительные приборы, источники напряжения или токов необходимо переключить в режим АС (Alternating Current), а их номиналы должны быть установлены в действующих значениях при наличии обозначения rms;
- при отсутствии обозначения rms у источников следует открыть таблицу в Matlab для изменения их номиналов, обозначение 'pk' указывает, что номиналы следует установить в амплитудных величинах.

2. Исследовать электрическую схему:

- измерить действующие значения электрических токов в ветвях (амперметрами) и напряжений (вольтметрами) в режим АС;
- измерить действующие значения узловых напряжений U_{ad} , U_{bd} , U_{cd} и их углы сдвига фазы ψ_{ad} и ψ_{bd} , ψ_{cd} , используя вольтметры и фазометр (Bode Plotter);
- рассчитать мощности потребителей, используя показания приборов.

3. Сделать выводы.

Контрольные вопросы

1. Каковы основные характеристики синусоидального тока?
2. Какова связь между действующими, средними и амплитудными значениями синусоидального тока?
3. Как располагаются векторы напряжения и тока для резистора индуктивности и конденсатора?
4. В чем сущность векторного расчета цепей синусоидального тока?
5. В чем заключается символический метод расчета?
6. Как перевести комплексные числа токов и напряжений из алгебраической формы в полярную (показательную) форму?
7. Как определить комплексное сопротивление пассивного двухполюсника?
8. Какие виды мощности используются в цепях синусоидального тока?
9. Какую мощность показывает ваттметр в цепи синусоидального тока?
10. Чем отличается топографическая диаграмма от векторной?
11. Как составить матрицу контур - ветвь?
12. Как составить матрицу узел - ветвь?
13. Какие матрицы параметров применяются при топологическом методе расчета?
14. Что такое направленная граф-схема?
15. Как рассчитать схему методом контурных токов в топологической форме?
16. Как составить матрицу сечений?
17. Как рассчитать схему методом узловых потенциалов в топологической форме?
18. Как сосчитать токи ветвей через узловые потенциалы?

Лабораторная работа № 4

Резонансы в электрических цепях

Цель работы: исследование резонансных явлений в электрических цепях.

Продолжительность работы - 4 ч.

Теоретические сведения

Резонансы возникают в электрических цепях синусоидального тока, которые содержат резисторы, индуктивности и конденсаторы. Основным признаком резонансного состояния электрической цепи - совпадение по фазе входного напряжения и входного тока, а схема потребляет только активную мощность. Реактивные мощности на отдельных участках цепи присутствуют, но реактивный входной ток равен нулю. Различают два вида резонансов в электрических цепях: резонансы напряжения и резонансы токов.

Резонанс напряжения возникает в последовательной электрической цепи, содержащей последовательно включенные резистор, индуктивность и емкость. Эти три элемента можно описать уравнениями:

- конденсатор: $i = C \frac{du_C}{dt}$;
- резистор: $u_R(t) = R \cdot i = R \cdot C \frac{du_C}{dt}$;
- индуктивность: $u_L(t) = L \frac{di}{dt} = LC \frac{d^2 u_C}{dt^2}$.

Уравнение для электрической цепи (рис.1) является дифференциальным уравнением

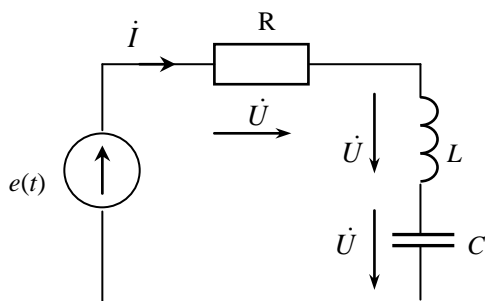


Рис.1. Электрическая цепь с последовательно соединенными RLC-элементами

второго порядка, описывающим колебательные процессы в цепи:

$$\frac{d^2 u_C}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{du_C}{dt} + \frac{1}{LC} u_C = e(t),$$

где $2n = R/L$ - демпфирующая сила, приводящая к затуханию свободных колебаний;
 $\omega_0^2 = 1/LC$ - круговая частота свободных колебаний.

Резонансную частоту ω_0 можно также определить из векторной диаграммы комплексных напряжений. При резонансе напряжение на резисторе равно напряжению сети, совпадает по фазе с входным током ($\varphi = 0$), а алгебраическая сумма реактивных напряжений равна нулю. Реактивные напряжения, показанные на рис.2,а, имеют равные модули, но направлены противоположно $|\dot{U}_L| = |\dot{U}_C|$, т.е. по модулю $X_L = X_C$. Из равенства реактивных сопротивлений можно получить формулу для определения частот при резонансе:

$$\omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C} \text{ или } \omega_0^2 = \frac{1}{LC},$$

где $\omega_0 = 2\pi f_0$ - круговая частота.

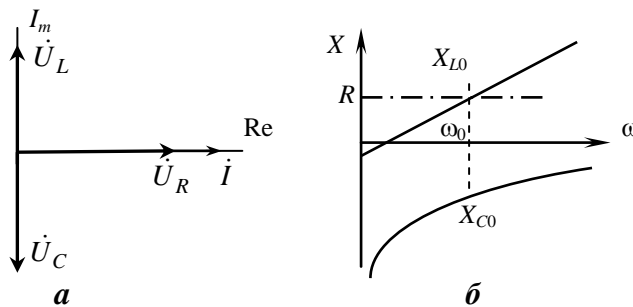


Рис.2. Векторная диаграмма (а) и графики частотной зависимости X_L , X_C и R (б)

Если круговая частота $\omega_0 = 2\pi f_0$, то формула для расчета резонансной частоты в герцах будет иметь вид

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}.$$

Реактивное сопротивление индуктивности $X_L = \omega L$ имеет линейную частотную зависимость, а емкостное сопротивление $X_C = 1/\omega C$ обратно пропорционально частоте (рис.2,б). Активное сопротивление R от частоты не зависит.

Добротность резонансного контура Q определяют как отношение реактивных напряжений к входному напряжению (ЭДС) при резонансе:

$$Q = \frac{U_{L0}}{E} = \frac{U_{C0}}{U} = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1/\omega_0 C}{R} = \frac{\sqrt{L/C}}{R} = \frac{\rho}{R},$$

где добротность показывает, во сколько раз реактивное напряжения U_{L0} или U_{C0} превышает сетевое напряжение при резонансе. Добротность может быть меньше единицы, тогда реактивные напряжения будут меньше сетевого напряжения: $R > X_{L0}$ и $R > X_{C0}$, а $X_{L0} = X_{C0}$.

Волновое сопротивление (характеристическое сопротивление) равно:

$$\rho = \sqrt{L/C}.$$

Добротность резонансного контура можно определить экспериментально по графику резонансной кривой электрического тока. Измерив величину полосы пропускания $\Delta\omega$ по графику электрического тока, полученному экспериментально, можно вычислить добротность согласно зависимости:

$$Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega} = \frac{f_0}{\Delta f}.$$

Рассмотрим амплитудно-частотную характеристику (АЧХ) и фазо-частотную характеристику (ФЧХ).

Электрический ток $I(\omega)$ последовательной цепи (рис.3,а) определяется по формуле

$$i = \frac{\dot{E}}{Z} = \frac{\dot{E}}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}} = \frac{\dot{E}}{R} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\omega_0^2 L^2}{R^2} (\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega})^2}}.$$

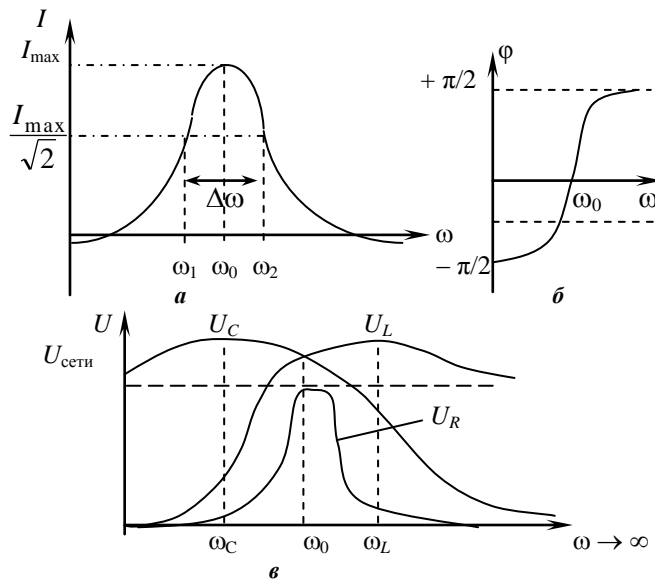


Рис.3. Резонансная кривая тока (а), ФЧХ (б) и АЧХ (в) на RLC -элементах

Затухание контура - это обратная величина добротности:

$$d = \frac{1}{Q} = \frac{R}{\rho}.$$

Граничные значения частот ω_1 и ω_2 определяются экспериментально при значении тока $\frac{I_{\max}}{\sqrt{2}}$, а также аналитически по формуле

$$\omega_{1,2} = \frac{\omega_0}{2Q} \cdot (\sqrt{1+4Q} \mp 1).$$

Напряжение на резисторе изменяется в зависимости от частоты, а максимальное его значение равно напряжению сети. График $U_R(\omega)$ (рис.3,в) по форме подобен графику изменения тока $I(\omega)$ электрической цепи.

Напряжение на индуктивности изменяется по мере изменения частоты, так как ток и индуктивное сопротивление зависят от частоты:

$$\dot{U}_L = \dot{I} \cdot \omega L = \frac{\dot{E}}{R} \cdot \frac{L\omega_0 \frac{\omega}{\omega_0}}{\sqrt{1+Q^2\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}}.$$

Характерные точки частотной зависимости напряжения на индуктивности следующие:

- при частоте $\omega = 0$ напряжение на индуктивности тоже будет равно нулю;
- при резонансной частоте $\omega = \omega_0$ напряжения на индуктивности и на емкости одинаковые и превышают сетевое напряжение в Q раз;
- при частоте $\omega = \omega_L$ напряжение на индуктивности достигнет максимального значения, а затем начнет уменьшаться до сетевого напряжения.

Напряжение на емкости изменяется в зависимости от частоты, а график частотной зависимости определяется по формуле

$$\dot{U}_C = \frac{\dot{E}}{R} \cdot \frac{\frac{1}{\omega_0 C} \cdot \frac{\omega_0}{\omega}}{\sqrt{1+Q^2\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}}.$$

Характерные точки частотной зависимости напряжения на емкости следующие:

- при частоте $\omega = 0$ напряжение на емкости равно напряжению сети, а с увеличением частоты оно будет увеличиваться;
- при частоте ω_C напряжение на емкости достигнет максимального значения, а затем начнет уменьшаться;

- при резонансной частоте $\omega = \omega_0$ напряжения на емкости и на индуктивности одинаковы и превышают напряжение сети в Q раз;
- при частоте $\omega \rightarrow \infty$ напряжение на емкости будет уменьшаться вплоть до нуля.

Взяв производную по уравнению напряжения на индуктивности и приравняв к нулю $\frac{d\dot{U}_L}{d\omega} = 0$, можно получить частоту, при которой будет максимальное напряжение на индуктивности:

$$\omega_L = \omega_0 \sqrt{\frac{2}{2 - R^2 \frac{C}{L}}}.$$

Взяв производную по уравнению напряжения на конденсаторе и приравняв ее к нулю $\frac{d\dot{U}_C}{d\omega} = 0$, можно получить формулу для определения частоты, при которой будет максимальное напряжение на емкости:

$$\omega_C = \frac{\omega_0^2}{\omega_L}.$$

ФЧХ - это угол сдвига фазы между входным вектором напряжения и вектором тока (рис.3,б) в зависимости от частоты:

$$\varphi(\omega) = \psi_u(\omega) - \psi_i(\omega).$$

Угол изменяется в пределах от $-\pi/2$ (при частоте $\omega = 0$) до $+\pi/2$ (при частоте $\omega \rightarrow \infty$), а $\varphi(\omega)$ может быть отрицательным или положительным. Уравнение ФЧХ имеет вид

$$\varphi(\omega) = \arctg \frac{\omega L - 1/\omega C}{R}.$$

Резонанс токов в параллельных RLC -ветвях. Основным признаком резонанса токов - это эквивалентная нагрузка цепи чисто активная, т.е. угол сдвига фазы между входным током и напряжением равен нулю ($\varphi = 0$). Электрическая цепь с тремя параллельными RLC -элементами изображена на рис.4. Проводимость трех ветвей с RLC -элементами равна:

$$Y = Y_1 + Y_2 + Y_3;$$

$$Y = \frac{1}{R} + \frac{1}{jX_L} - \frac{1}{jX_C} = g + j \cdot (\omega \cdot C - \frac{1}{\omega \cdot L}).$$

Здесь $b_C = j\omega C$; $b_L = -j(1/\omega L)$ - соответственно проводимости конденсатора и индуктивности.

Частотные характеристики проводимостей приведены на рис.5,а. При резонансе реактивная нагрузка должна равняться нулю:

$$b_p = b_C - b_L = \omega_{01} \cdot C - \frac{1}{\omega_{01} \cdot L} = 0.$$

Здесь ω_{01} - круговая частота при резонансе токов.

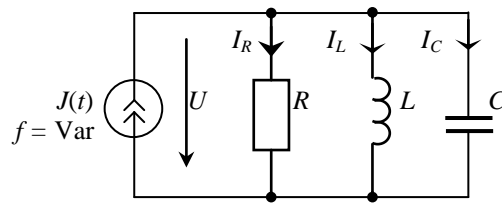


Рис.4. Параллельная цепь с RLC -ветвями

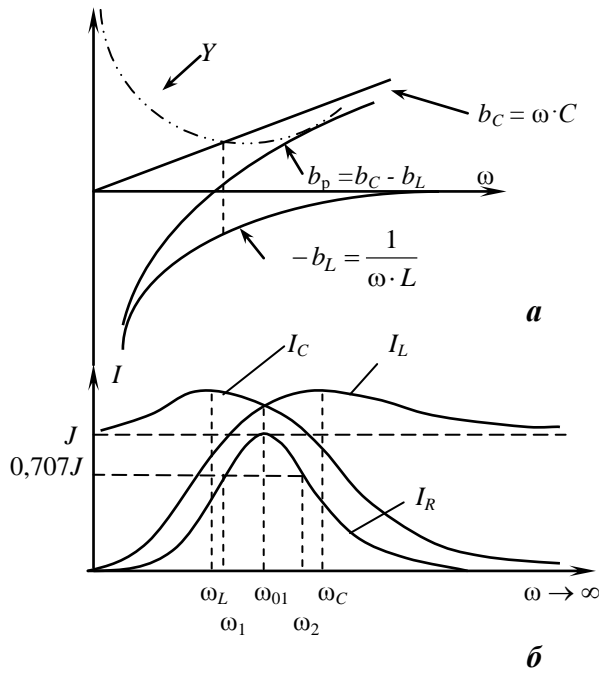


Рис.5. Частотные характеристики элементов (а) и АЧХ токов (б)

Формула для расчета резонансной частоты имеет вид

$$\omega_{01} = \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}} \text{ или } f_{01} = \frac{1}{2\pi\sqrt{L \cdot C}}.$$

АЧХ токов и напряжений строятся при изменении частоты и фиксированном значении источника тока (рис.5,б).

Волновую проводимость можно получить из формулы реактивной нагрузки при резонансе:

$$\omega_{01} \cdot C - \frac{1}{\omega_{01} \cdot L} = \sqrt{\frac{C}{L}} = \gamma.$$

Добротность колебательного контура равна:

$$Q = \frac{I_{L01}}{I_{R01}} = \frac{I_{C01}}{I_{R01}} = \frac{U \cdot \gamma}{U \cdot g} = \frac{\gamma}{g}.$$

Величину добротности можно устанавливать, изменяя сопротивление резистора R .

ФЧХ (рис.6,*а*) определяется по формуле

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\frac{1}{\omega L} - \omega C}{R}.$$

Характер нагрузки зависит от значения частоты источника:

- нагрузка будет чисто индуктивной при частоте $\omega \rightarrow 0$ ($\varphi = +\pi/2$);
- при резонансе нагрузка чисто активная, а значение угла $\varphi = 0$;
- нагрузка чисто емкостная при $\omega \rightarrow \infty$ ($\varphi = -\pi/2$).

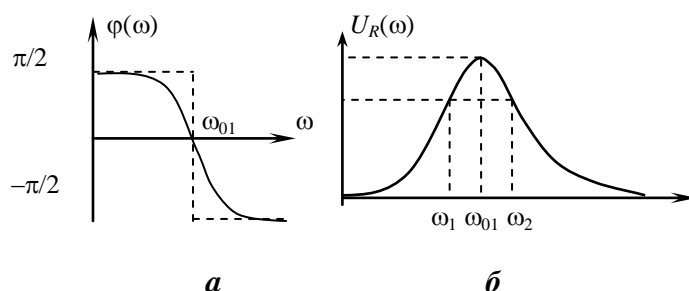


Рис.6. ФЧХ резонанса тока (*а*) и АЧХ напряжения на резисторе (*б*)

Для цепи без потерь (при отсутствии резисторов) в точке резонанса φ меняется скачком (рис.6,*а*, пунктирная линия). ФЧХ измеряется фазометром (Vode Plotter). В рассматриваемом случае диапазон изменения частоты источника следует принять от 1 Гц до 20 кГц.

Резонансную кривую напряжения на резисторе (рис.6,*б*) определяют по формуле

$$U = \frac{1}{\sqrt{g^2 + b_p^2}}.$$

Электрические токи, проходящие через резистор, конденсатор и индуктивность, определяют по формулам:

$$I_g = g \cdot U; \quad I_C = \omega C \cdot U; \quad I_L = \frac{1}{\omega L} \cdot U.$$

При изменении частоты от нуля до бесконечности АЧХ токов имеют характерные точки: при частоте $\omega \rightarrow 0$ индуктивность имеет сопротивление равное нулю, а ток индуктивности равен входному току ($I_L = I_{\text{вх}}$); при резонансе ω_{01} нагрузка чисто активная ($I_R = I_{\text{вх}}$), а реактивные токи равны ($I_{L01} = I_{C01}$); при $\omega \rightarrow \infty$ емкостное сопротивление равно нулю, а ток равен $I_C = I_{\text{вх}}$.

Задания и методика выполнения работы

Задание 1. Исследовать резонанс напряжения в электрической цепи. Дано: $E = 36 \text{ В}$; $R_1 = 140 \text{ Ом}$; $R_2 = 10 \text{ Ом}$; $L = 50 \text{ мГн}$; $C = 1 \text{ мкФ}$.

1. Собрать исследуемую схему (рис.7) в приложении Multisim, измерить ток и напряжения всех приборов.

2. Измерить резонансную частоту f_0 :

- измерить ФЧХ и резонансную частоту фазометром (прибор Bode Plotter).

Установить диапазоны измерений: градусы $\pm 90^\circ$, частотный диапазон сверху 790 Гц, снизу 650 Гц;

- установить резонансную частоту на источнике ЭДС так, чтобы напряжения на индуктивности и конденсаторе были одинаковые;

- проверить, является ли значение тока в цепи максимальным.

3. При электрическом токе $I_{\max}/\sqrt{2}$ измерить граничные частоты f_1 и f_2 :

- граничная частота f_1 меньше резонансной, f_2 больше резонансной;
- рассчитать полосу пропускания $\Delta f = f_2 - f_1$.

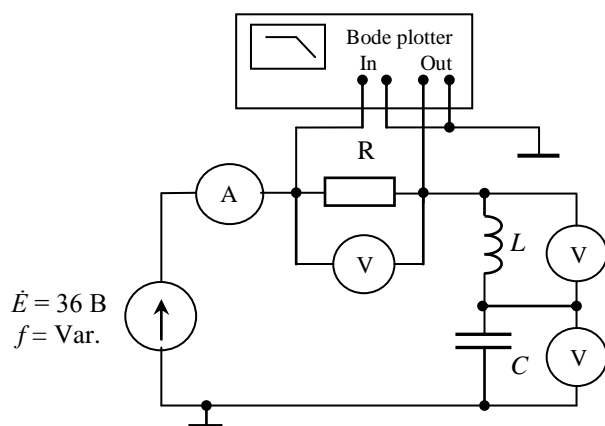


Рис. 7. Схема для проведения экспериментальных исследований

Расчетные и экспериментальные данные

Параметры		$f = 100 \text{ Гц}$	$f = 1 \text{ кГц}$	f_C	f_1	f_0	f_2	f_L	$f = 100 \text{ кГц}$
X_L	Расчет								
X_C	Расчет								
U_L	Эксперимент								
U_C	Эксперимент								
I	Эксперимент								
φ	Эксперимент								

4. Ступенчато изменяя частоту источника, найти максимальные значения:

- напряжение на индуктивности $U_{L \max}$ при частоте f_L больше резонансной;
- напряжение на конденсаторе $U_{C \max}$ при частоте f_C меньше резонансной.

5. Измерить ток I и напряжения U_R , U_L , U_C дополнительно при частотах f : 100 Гц; 10 кГц; 100 кГц. Построить АЧХ тока и напряжений.

6. Определить добротность $Q = U_{L0}/E$.

7. Подключить прибор Bode Plotter (см. рис.7) и измерить ФЧХ при диапазоне частот сверху 10 кГц, снизу 1 кГц. Построить ФЧХ в отчете.

8. Расчетные и экспериментальные параметры записать в форму табл.1. Оформить отчет.

Задание 2. Исследовать электрическую цепь с RLC -элементами.

1. Собрать электрическую схему (рис.8). Параметры схемы приведены в табл.2.

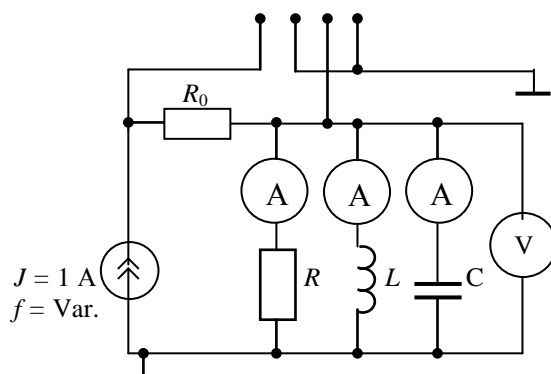


Рис.8. Параллельная цепь с RLC -ветвями

Варианты заданий

Вариант	R , Ом	R_0 , Ом	R_1 , Ом	R_2 , Ом	L , мГн	C , мкФ
1	20	5	10	8	63	38
2	30	5	8	16	32	20
3	40	5	16	10	80	38
4	20	5	4	2	20	80
5	30	5	8	12	47	30
6	40	5	8	16	20	60
7	20	5	6	10	20	50
8	30	5	12	20	50	12
9	40	5	12	16	63	20
10	20	5	8	10	32	40
11	30	5	10	5	63	38
12	40	5	10	10	32	40
13	20	5	8	10	47	50
14	30	5	12	6	86	30
15	40	5	16	8	70	60
16	20	5	4	10	20	38
17	30	5	8	4	20	80
18	40	5	8	10	30	50
19	20	5	10	8	50	40
20	40	5	16	10	63	38
21	40	5	8	16	30	60
22	20	5	6	10	40	50
23	30	5	10	20	50	12
24	40	5	12	16	63	20

2. Определить резонансную частоту f_{01} (признаки резонанса - это равенство по модулю реактивных токов $I_{L01} = I_{C01}$). Рассчитать значение R , чтобы добротность была равна $Q = 1,2 - 1,5$. Добротность рассчитать по формуле $Q = I_{L01} / J = I_{C01} / J$.

3. Определить полосу пропускания частот $\Delta f = f_2 - f_1$ при резонансе, а граничные частоты f_1 и f_2 определить при значениях $0,707 \cdot U_{\max}$ или $0,707 I_{R \max}$.

4. Определить частоты f_L и f_C при максимальном значении токов I_L и I_C .

5. Построить АЧХ параметров: $U(f)$, $I_R(f)$, $I_L(f)$, $I_C(f)$ при частотах: 10; 50; f_L ; f_1 ; f_{01} ; f_2 ; f_C ; 200; 400 Гц; 1 кГц. Заполнить форму табл.3.

6. Построить АЧХ параметров при частотах 50 - 200 Гц: $U(f)$, $I_R(f)$, $I_L(f)$, $I_C(f)$.

7. Измерить ФЧХ фазометром (Bode Plotter). Установить диапазон измеряемых частот 1 Гц - 20 кГц и диапазон $\pm 90^\circ$. Сопротивление резистора R_0 увеличить в 5 раз.

8. Рассчитать и построить графики частотных зависимостей $b_L(f)$ и $b_C(f)$. Результаты экспериментальных и расчетных данных записать в форму табл.1.

Форма таблицы 3

Расчетные и экспериментальные данные

Параметры		$f = 10$ Гц	f_L Гц	f_1 Гц	f_{01} Гц	f_2 Гц	f_C Гц	$f = 1$ кГц
$b_L(f)$	Расчет							
$b_C(f)$	Расчет							
$U_{ab}(f)$	Эксперимент							
$I_R(f)$	Эксперимент							
$I_L(f)$	Эксперимент							
$I_C(f)$	Эксперимент							

Контрольные вопросы

1. Перечислите основные признаки резонанса.
2. В каких цепях возникает резонанс напряжения и резонанс тока?
3. Приведите частотные характеристики элементов.
4. Как рассчитать резонансную частоту?
5. Поясните определения «характеристическое сопротивление» и характеристическая проводимость».
6. Как определяются добротность и затухание?
7. Какой вид имеют АЧХ напряжения на резисторе, на индуктивности и на емкости?
8. Какой вид имеют АЧХ и ФЧХ реактивного двухполюсника при резонансе напряжения или тока?
9. Как рассчитать частоту, при которой возникает максимальное напряжение на индуктивности?
10. Как рассчитать частоту, при которой возникает максимальное напряжение на конденсаторе?

11. Перечислите основные признаки резонанса токов.
12. Приведите частотные характеристики проводимостей элементов.
13. Как рассчитать резонансную частоту параллельной RLC -цепи?
14. В каких пределах изменяется ФЧХ параллельной RLC -цепи?
15. Как рассчитать частоты, при которых возникают максимальные токи на индуктивности и конденсаторе?
16. Постройте векторные диаграммы для цепи с параллельными RL - и RC -ветвями.
17. Как рассчитать резонансную частоту параллельной цепи с RL - и RC -ветвями?
18. При каких условиях резонанс возможен в электрических цепях с RL - и RC -ветвями, а при каких условиях резонанс невозможен?
19. При каких условиях будет резонанс на любой частоте?
20. Как определить полосу пропускания АЧХ?

Лабораторная работа № 5

Периодические несинусоидальные токи и напряжения в линейных электрических цепях

Цель работы: исследование периодических несинусоидальных токов и напряжений, изучение методов расчета.

Продолжительность работы - 4 ч.

Теоретические сведения

ЭДС, токи и напряжения называют периодическими несинусоидальными, если формы сигнала несинусоидальные и удовлетворяют условию Дирихле. По осциллограмме можно увидеть, что ЭДС, токи и напряжения - периодические несинусоидальные сигналы, если любые две ординаты сигнала, стоящие друг от друга на расстоянии периода T , равны:

$$f(t) = f(t+T) = f(t+n \cdot T),$$

где t - текущее время; T - период изменений формы ЭДС, тока или напряжения; n - произвольное любое целое число.

Такие функции представляют тригонометрическим рядом Фурье:

$$f(\omega t) = A_0 + \sum_{k=1}^n A_k \cdot \sin(k\omega t + \psi_k) = A_0 + \sum_{k=1}^n a_k \cos k\omega t + \sum_{k=1}^n b_k \sin k\omega t,$$

$$A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}, \quad \psi_k = \arctg \frac{b_k}{a_k}.$$

Здесь a_k - амплитуда косинусной функции; b_k - амплитуда синусной функции.

Перечислим коэффициенты тригонометрического ряда: A_0 - постоянная составляющая ЭДС, тока или напряжения; A_k - амплитуда k -й гармоники ЭДС, тока или напряжения; ψ_k - угол сдвига фазы k -й гармоники; k - любое целое число; $\omega \cdot t = 2\pi \frac{1}{T} = 2\pi f$ - угол текущей координаты с периодом 2π ; ω - круговая частота первой (основной) гармоники; f - частота первой гармоники совпадает с частотой периодического несинусоидального сигнала.

Четность и нечетность функций. Большинство периодических функций обладает симметрией. Функция может быть представлена не только суммой косинусных и синусных гармоник, но и суммой отдельных синусных или отдельных косинусных гармонических составляющих, расположенных в определенной последовательности.

Функция $f(\omega t)$ называется *четной*, если для всех рассматриваемых значений удовлетворяет условию:

$$f(\omega t) = f(-\omega t).$$

График четной функции симметричен относительно оси ординат и содержит только косинусные функции с периодом 2π :

$$f(\omega t) \approx A_0 + \sum_{k=1}^n a_k \cos k\omega t.$$

Функция $f(\omega t)$ называется *нечетной*, если для всех рассматриваемых значений ωt в пределах от $-\pi$ до π удовлетворяет условию:

$$f(\omega t) = -f(-\omega t).$$

График нечетной функции симметричен относительно оси абсцисс и содержит только синусные функции с периодом 2π :

$$f(x) \approx \sum_{k=1}^n b_k \sin k\omega t.$$

Следует обратить внимание, что обычно у нечетной функции коэффициент постоянной составляющей отсутствует.

Совокупность гармонических составляющих несинусоидальной функции называют *амплитудно-частотным спектром* (АЧС). После расчета ряда необходимо построить графики АЧС и отдельно ФЧС.

Приведем алгоритм расчета периодических несинусоидальных функций:

1. Периодическое несинусоидальное напряжение разложить в ряд Фурье.
2. Напряжение каждой гармоники записать в комплексной форме.
3. Для каждой гармоники вычислить комплексное сопротивление, учитывая, что $X_{Lk} = k\omega L$ и $X_{Ck} = 1/k\omega C$.
4. Комплексную амплитуду тока можно вычислить по формуле

$$\dot{I}_{mk} = \frac{\dot{U}_{mk}}{Z_k}.$$

5. Записать расчетные действующие значения напряжения и тока для каждой гармоники отдельно.

6. Записать мгновенные значения тока для каждой гармоники и, суммируя их, получить мгновенное значение периодического несинусоидального тока:

$$i(t) = I_0 + I_{m1} \sin(\omega t - \psi_1) + I_{m2} \sin(2\omega t - \psi_2) + \dots$$

При наличии реактивной части нагрузки обычно форма тока не совпадает с формой периодического несинусоидального напряжения. Формы тока изменяются из-за

зависимости индуктивного и емкостного сопротивлений от частоты. Напряжение и ток совпадают только при чисто активной нагрузке.

Действующие значения периодического несинусоидального тока и напряжения. Действующее значение периодического несинусоидального тока для основной (первой) гармонической составляющей определяется по формуле

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2(\omega t) \cdot dt} = \frac{I_m}{\sqrt{2}},$$

где $i(t) = I_0 + \sum_{k=1}^n I_{mk} \cdot \sin(k\omega t + \psi_k)$.

После расчета действующих значений токов всех гармонических составляющих можно определить эквивалентное действующее значение периодического несинусоидального тока:

$$I = \sqrt{I_0^2 + I_1^2 + I_2^2 + \dots + I_n^2} = \sqrt{\sum_{k=0}^n I_k^2}.$$

Эквивалентное действующее значение периодического несинусоидального напряжения определяется по формуле

$$U = \sqrt{U_0^2 + U_1^2 + U_2^2 + \dots + U_n^2} = \sqrt{\sum_{k=0}^n U_k^2}.$$

Число гармонических составляющих должно быть не менее 10, чтобы добиться достаточно полного совпадения исходной формы периодического несинусоидального сигнала с экспериментальной формой сигнала, представленного рядом Фурье.

Мощность периодического несинусоидального тока. Если известны аналитические выражения периодического несинусоидального тока $i(t)$ и напряжения $u(t)$, то активная мощность определяется по формуле

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T u(t) \cdot i(t) \cdot dt.$$

Активную мощность периодического несинусоидального тока можно определить в виде суммы активных мощностей отдельных гармоник:

$$P = U_0 I_0 + \sum_{k=1}^n U_k I_k \cos \varphi_k.$$

Реактивная мощность периодического несинусоидального тока также определяется в виде суммы реактивных мощностей отдельных гармоник:

$$Q = \sum_{k=1}^n U_k I_k \sin \varphi_k.$$

Полная мощность периодического несинусоидального сигнала равна:

$$S = U \cdot I = \sqrt{\sum_{k=0}^n U_k^2 \cdot \sum_{k=0}^n I_k^2}.$$

Сравним полные мощности, вычисленные по формуле:

$$S^2 \geq P^2 + Q^2.$$

В случае неравенства мощностей вычисляется мощность искажения

$$T = \sqrt{S^2 - (P^2 + Q^2)}.$$

Замена периодической несинусоидальной функции эквивалентной синусоидальной. Для упрощения решения задач желательно иметь дело с эквивалентными синусоидальными напряжением и током вместо периодических несинусоидальных. Но не каждое периодическое несинусоидальное напряжение можно заменить синусоидальным. Периодическое несинусоидальное напряжение, содержащее постоянную составляющую, заменяется двумя источниками напряжений: источником постоянного тока и эквивалентным источником синусоидального тока, представляющим гармонические составляющие.

Угол сдвига фазы $\varphi_{\text{экв}}$ между напряжением и током определяется по формуле

$$\cos \varphi_{\text{экв}} = \frac{P}{U \cdot I},$$

где P - активная мощность периодического несинусоидального тока;
 $S = UI$ - полная мощность периодического несинусоидального тока;
 U - периодическое несинусоидальное напряжение, равное эквивалентному синусоидальному напряжению $\sqrt{\sum_{k=0}^n U_k^2}$; I - периодический несинусоидальный ток, равный эквивалентному синусоидальному току $\sqrt{\sum_{k=0}^n I_k^2}$.

Примеры периодических сигналов. Периодические несинусоидальные сигналы имеют следующие формы:

- треугольная форма (рис.1 и 2):

$$u(t) = \frac{U_{\max}}{2} - \frac{U_{\max} \sqrt{2}}{\pi} \left(\frac{\cos \omega t}{1^2} + \frac{\cos 3\omega t}{3^2} + \sum_{k=2}^n \frac{\cos(2k+1)\omega t}{(2k+1)^2} \right),$$

$$u(t) = \frac{2U_m}{\pi} \left[\frac{\sin \omega t}{1} + \frac{\sin 3\omega t}{3^2} + \sum_{k=2}^n \frac{\sin(2k+1)\omega t}{(2k+1)^2} \right];$$

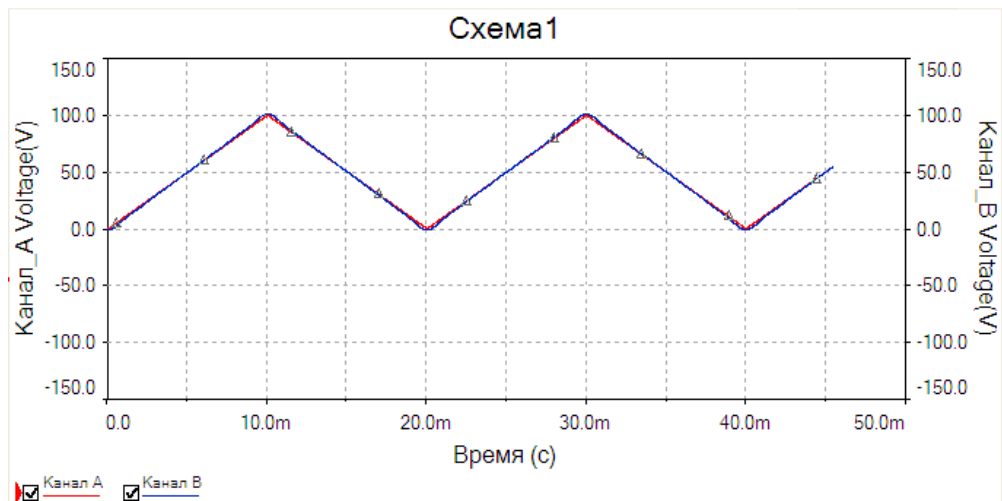


Рис.1. Осциллограмма периодического несинусоидального сигнала треугольной формы с постоянной составляющей

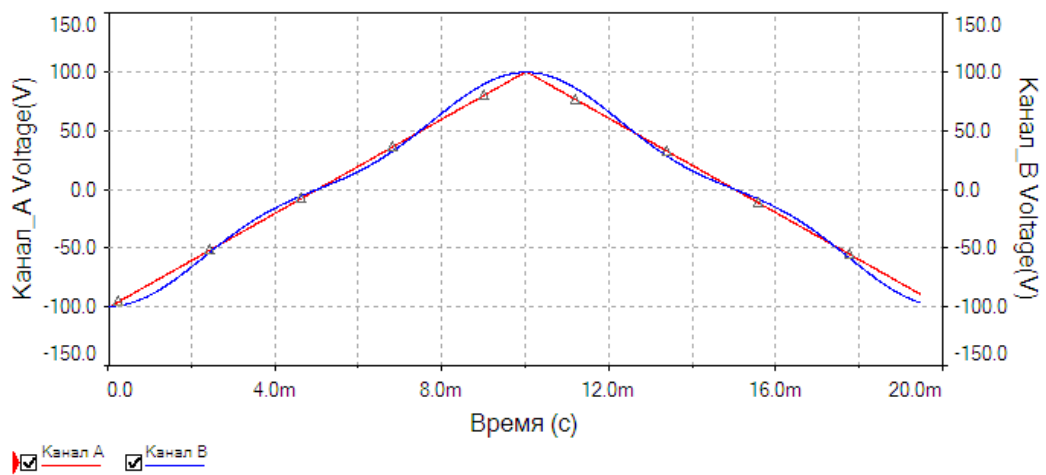


Рис.2. Осциллограмма периодического сигнала треугольной формы - пилообразная форма (рис.3):

$$u(t) = \frac{\sqrt{2}U_{\max}}{\pi} \left(\frac{\sin \omega t}{1} + \frac{\sin 2\omega t}{2} + \sum_{k=3}^n \frac{\sin k\omega t}{k} \right).$$

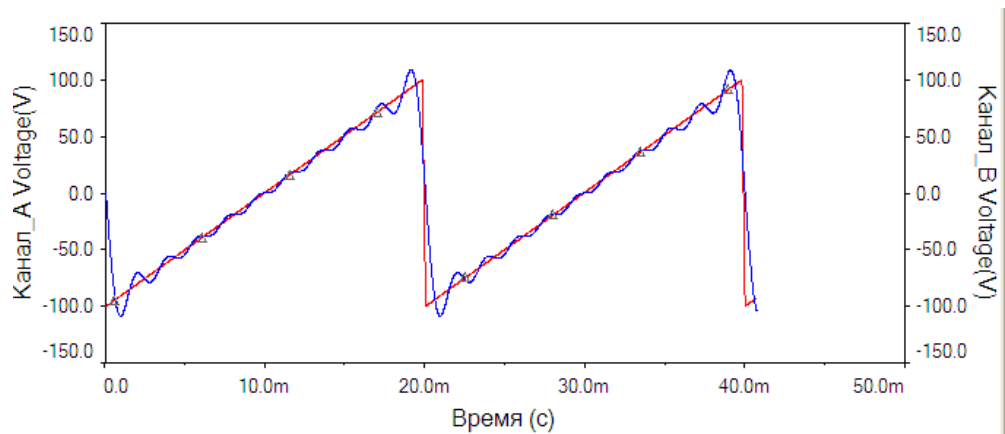


Рис.3. Осциллограмма периодического сигнала пилообразной формы

Задания и методика выполнения работы

Задание 1. Исследовать периодические несинусоидальные сигналы.

Периодический несинусоидальный сигнал имеет напряжение $U_m = 100$ В (для всех вариантов), а основная частота $f = 50$ Гц.

1. Собрать электрическую схему (рис.4) и установить на генераторе сигнал. Номер сигнала (рис.5) соответствует номеру тригонометрического ряда (табл.1). Переключить входы осциллографа в режим DC для приема постоянной и переменной составляющих сигнала. Получить на экране осциллографа периодический несинусоидальный сигнал, а на генераторе установить форму сигнала в режимах:

- длительность (Duty Cycle) 50% для вариантов 1, 2, 3, 4;
- длительность (Duty Cycle) 99% для вариантов 5, 6.

2. Записать тригонометрический ряд (см. табл.1). Рассчитать постоянную составляющую. Рассчитать амплитуды и частоты для десяти гармонических составляющих, полученных по формулам своего варианта. Записать ряд Фурье в численных величинах (табл.2).

3. Собрать схему тригонометрического ряда с заданной нагрузкой (см. рис.4):

- установить ЭДС первой гармонической составляющей и измерить амплитуду;
- установить ЭДС второй гармонической составляющей тригонометрического ряда Фурье и зарисовать осциллограмму;
- проверить сходимость осциллограммы ряда ЭДС по фазе и амплитуде с исходным сигналом функционального генератора, а если сигнал не совпадает по амплитуде и фазе, то необходимо откорректировать его.

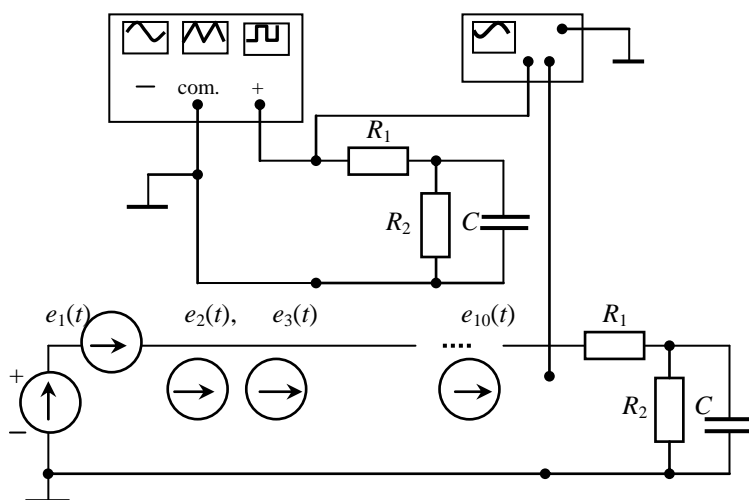


Рис.4. Схема для исследования периодических несинусоидальных ЭДС, напряжений и токов

Тригонометрический ряд сигнала

Номер п/п	Тригонометрический ряд
1	$u(t) = U_m \left[\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \left(\sin \omega t + \frac{\sin 3\omega t}{3} + \sum_{k=2}^n \frac{\sin(2k+1)\omega t}{2k+1} \right) \right]$
2	$u(t) = \frac{4U_m}{\pi} \left[\frac{\sin \omega t}{1} + \frac{\sin 3\omega t}{3} + \sum_{k=2}^n \frac{\sin(2k+1)\omega t}{(2k+1)} \right]$
3	$u(t) = \frac{2U_m}{\pi} \left[\frac{\sin \omega t}{1} - \frac{\sin 3\omega t}{3^2} + \sum_{k=2}^n (-1)^k \frac{\sin(2k+1)\omega t}{(2k+1)^2} \right]$
4	$u(t) = \frac{U_m}{2} - \frac{2U_m}{\pi} \left[\frac{\cos \omega t}{1^2} + \frac{\cos 3\omega t}{3^2} + \sum_{k=2}^n \frac{\cos(2k+1)\omega t}{(2k+1)^2} \right]$
5	$u(t) = U_m \left[\pi - \frac{2 \sin \omega t}{1} - \frac{2 \sin 2\omega t}{2} - \sum_{k=3}^n \frac{2 \sin k\omega t}{k} \right]$
6	$u(t) = 2U_m \left[\frac{\sin \omega t}{1} - \frac{\sin 2\omega t}{2} + \frac{\sin 3\omega t}{3} + \sum_{k=5}^n (-1)^{k+1} \frac{\sin k\omega t}{k} \right]$
7	$u(t) = 2 \frac{U_m}{\pi} \left[\frac{1}{2} + \frac{\pi}{4} \cos \omega t + \frac{\cos 2\omega t}{1 \cdot 3} - \frac{\cos 4\omega t}{3 \cdot 5} + \sum_{k=2}^n (-1)^{k+2} \frac{\cos 2(k+1)\omega t}{(2k+1)(2k+3)} \right]$
8	$u(t) = \frac{4U_m}{\pi} \left[\frac{1}{2} + \frac{\cos 2\omega t}{1 \cdot 3} - \frac{\cos 4\omega t}{3 \cdot 5} + \sum_{k=3}^n \frac{(-1)^{k+1} \cos 2k\omega t}{(2k-1) \cdot (2k+1)} \right]$

Таблица 2

Варианты заданий

Вариант	Номер тригонометрического ряда (см. табл.1), схема (см. рис.6)	R_1 , Ом	R_2 , Ом	L , мГн	C , мкФ
1	1, a	100	50	25	2,0
2	2, a	120	60	30	1,8
3	3, a	240	80	40	2,0
4	4, a	200	100	50	2,2
5	5, a	160	80	24	1,6
6	6, b	180	90	18	2,4
7	7, b	140	60	22	2,5
8	8, b	220	80	20	2,6
9	1, b	50	100	16	2,8
10	2, b	60	120	15	3,0
11	3, b	80	240	14	4,0
12	4, b	100	200	13	3,2
13	5, b	80	160	12	2,0
14	6, b	90	180	10	1,8
15	7, b	60	140	20	2,0
16	8, b	80	220	16	2,2
17	1, b	100	100	15	1,6
18	2, b	80	40	14	2,4
19	3, b	150	50	25	2,5
20	4, b	40	80	30	2,6
21	5, b	360	360	40	2,8
22	6, a	25	50	50	2,4
23	7, a	26	34	24	2,5
24	8, a	28	36	18	2,6
25	4, a	30	36	22	2,8
26	5, a	16	20	20	3,0
27	6, a	50	100	30	4,0

4. Установить все ЭДС ряда Фурье и зарисовать осциллограмму.

5. При знакопередающемся тригонометрическом ряде ЭДС гармонической составляющей, имеющей знак минус, установить навстречу первой (основной) ЭДС.

6. Заменить гармонический ряд одной эквивалентной синусоидой.

7. Построить АЧС напряжений и токов гармонических составляющих, а также ФЧС тока. Рассчитать и построить АЧС активной мощности.

Задание 2. Рассчитать схему с периодическим несинусоидальным сигналом. Выполнить задание, выбрав схему (см. рис.5) и периодический несинусоидальный сигнал по табл.2.

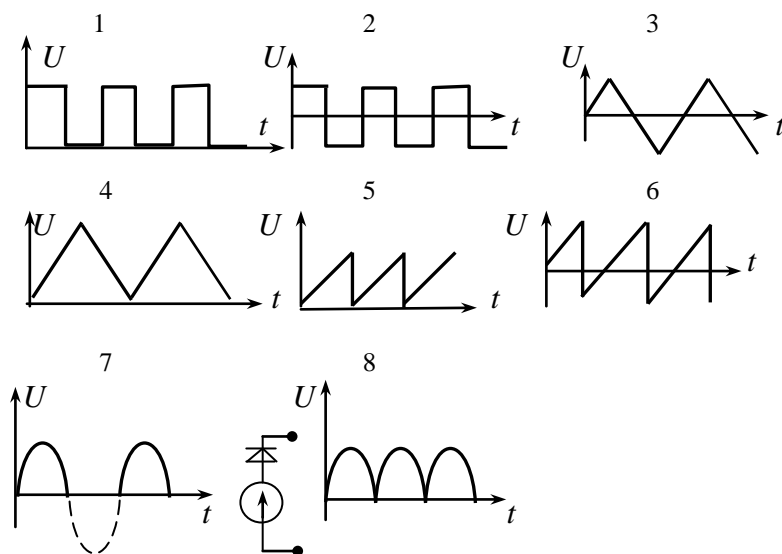


Рис.5. Периодические несинусоидальные сигналы (1 - 8 - номер сигнала)

Например, 6,в - означает: тригонометрический ряд № 6, в - схема нагрузки (рис.6).

Порядок выполнения такой же, как при выполнении лабораторной работы. Из-за наличия в нагрузке индуктивности и конденсатора форма тока не будет совпадать с формой напряжения. ФЧС не будет равен нулю. Возникнет угол сдвига фазы тока ψ_i , а между действующими значениями напряжения и тока будут присутствовать $\cos \varphi$ и $\sin \varphi$.

В отчете должны присутствовать:

- исследуемая схема периодического сигнала и тригонометрического ряда;
- осциллограммы двух гармонических составляющих и десяти;
- расчеты амплитуды, частоты, углы сдвига фазы и действующие значения следующих значений: напряжений, токов и мощностей.

1. Построить АЧС и ФЧС напряжений, токов и мощности.

2. Выполнить замену периодического несинусоидального сигнала одной эквивалентной синусоидой.

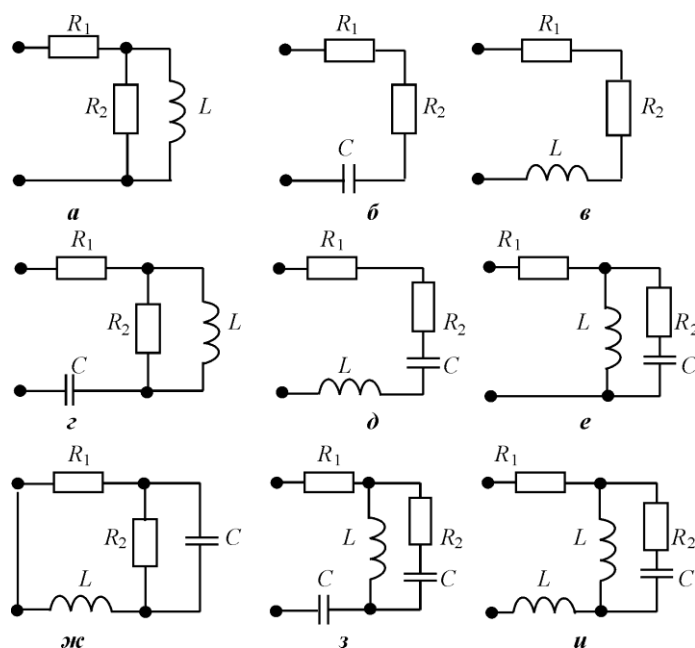


Рис.6. Варианты исследуемых схем при выполнении домашнего задания

Контрольные вопросы

1. Как можно представить периодический несинусоидальный сигнал?
2. Приведите порядок расчета электрических цепей с несинусоидальными источниками.
3. Что такое четность и нечетность функций и каковы их признаки?
4. Как для периодического несинусоидального сигнала рассчитать среднее и действующее значение?
5. Как рассчитать электрическую цепь, подключенную к ЭДС в виде гармонического ряда?
6. Почему в электрических цепях с периодическим сигналом форма тока не совпадает с формой напряжения?
7. Как рассчитать мощности в цепи периодического несинусоидального сигнала?
8. Какие коэффициенты характеризуют периодические несинусоидальные величины?
9. Как рассчитать мощность искажения?
10. Как заменить периодический несинусоидальный сигнал одной эквивалентной синусоидой?

Лабораторная работа № 6

Исследование переходных процессов в цепях с RL - и RC -элементами

Цель работы: исследование переходных процессов и их расчет классическим методом в цепях первого порядка.

Продолжительность работы - 4 ч.

Теоретические сведения

Переходный процесс - это переход от предыдущего устойчивого состояния к последующему устойчивому состоянию из-за наличия коммутации электрической цепи. При этом изменяются напряжения на элементах и токи, проходящие в ветвях. Под коммутацией понимают различные включения, выключения, переключения источников или внезапное изменение параметров цепи. Коммутация цепи происходит на порядок быстрее времени самого переходного процесса, поэтому считается, что коммутация проходит мгновенно за время $t = 0$. До коммутации время обозначается как $t = 0_-$, а после коммутации время равно $t = 0_+$, когда переходный процесс начинается. Теоретически переходный процесс оканчивается за время $t \rightarrow \infty$, а практически время переходного процесса ограничивают допустимой величиной остатка неоконченного переходного процесса. Например, если остаток неоконченного процесса 0,67% от величины переходного процесса (при $t = 5\tau$), или 0,25% при ($t = 6\tau$), то можно считать, что переходный процесс завершен. Здесь τ - постоянная времени переходного процесса. Практически переходный процесс имеет быструю сходимость, а время переходного процесса продолжается от нескольких миллисекунд до нескольких секунд.

Причина переходных процессов и законы коммутации. Накапливать энергию и отдавать ее обратно в электрическую цепь могут индуктивность и конденсатор. При прохождении электрического тока через индуктивность накапливается электромагнитная энергия W_L , а при наличии напряжения на обкладках конденсатора - электрическая энергия W_C :

$$W_L = \frac{Li^2}{2}; \quad W_C = \frac{Cu^2}{2}.$$

Накопленные энергии индуктивности и конденсатора не могут израсходоваться мгновенно, так как источников с бесконечной мощностью в природе не существует

$$p = \frac{W}{t} = \frac{W}{0} \rightarrow \infty.$$

Сформулируем законы коммутации.

1. Электрический ток, проходящий через индуктивность, не может изменить свое значение мгновенно (за исключением некорректных условий):

$$i(0_-) = i(0_+); \quad \Psi(0_-) = \Psi(0_+).$$

Магнитный поток Φ также не может измениться мгновенно в момент коммутации. Это вытекает из условия непрерывности тока i и магнитного потокоцепления Ψ , которое определяется по формуле $\Psi = Li$.

2. Напряжение на конденсаторе не может измениться мгновенно в момент коммутации (за исключением некорректных условий):

$$u_C(0_-) = u_C(0_+); \quad Q(0_-) = Q(0_+).$$

Сумма зарядов Q также не может измениться мгновенно в момент коммутации. Это вытекает из условия сохранения напряжения на конденсаторе и непрерывности суммы зарядов нескольких конденсаторов.

Уравнения и знаки схемы. Напряжение и ток индуктивности, ток, протекающий через конденсатор, и напряжение тоже имеют дифференциальную зависимость. Токи и напряжения на индуктивности и конденсаторе во время накопления энергии и ее отдачи в цепи имеют направления, показанные на рис.1.

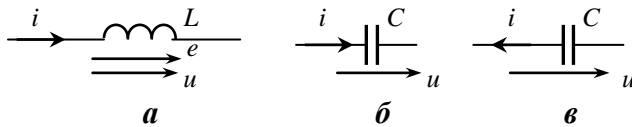


Рис.1. Направления токов и напряжений на схемах: *а* - индуктивность накапливает энергию и отдает ее; *б* - конденсатор заряжается и накапливает энергию; *в* - конденсатор заряжается и отдает энергию

Напряжение, ЭДС индуктивности и токи, проходящие через конденсатор, определяются следующими дифференциальными уравнениями:

- на индуктивности: $u_L = L \frac{di}{dt}$, $e_L = -L \frac{di}{dt}$;
- на конденсаторе при зарядке: $i_C = C \frac{du}{dt}$;
- на конденсаторе при разрядке: $i_C = -C \frac{du}{dt}$.

Независимые переменные. Электрический ток, проходящий через индуктивность, и напряжение на конденсаторе, полученные до коммутации, сохраняют свои значения и после коммутации при времени $t = 0_+$. Поэтому ток индуктивности и напряжение на конденсаторе называют независимыми переменными. Эти переменные используют для

определения начальных условий переходного процесса и для расчета постоянных интегрирования.

Зависимые переменные. На резисторах напряжение и ток, проходящий через них, могут изменять свое значение внезапно после коммутации. Значения зависимых переменных после коммутации в начале переходного периода определяют по уравнениям Кирхгофа с учетом значений независимых переменных. К зависимым переменным относятся напряжение на индуктивности и ток, проходящий через конденсатор, так как эти значения также могут изменяться внезапно при времени $t = 0_+$.

Постоянные интегрирования. Определяются по зависимым и независимым переменным для электрической цепи после коммутации в момент времени $t = 0_+$.

Если к катушке индуктивности приложить постоянное напряжение (рис.2,*а*), тогда ток будет возрастать линейно пропорционально времени до бесконечности:

$$i = \frac{1}{L} \int u \cdot dt + i_0 = \frac{u \cdot t}{L} + i_0.$$

Если через конденсатор пропустить постоянный ток (рис.2,*б*), тогда напряжение на конденсаторе будет увеличиваться линейно пропорционально времени до бесконечности:

$$u = \frac{1}{C} \int i \cdot dt + u_0 = \frac{i \cdot t}{C} + u_0.$$

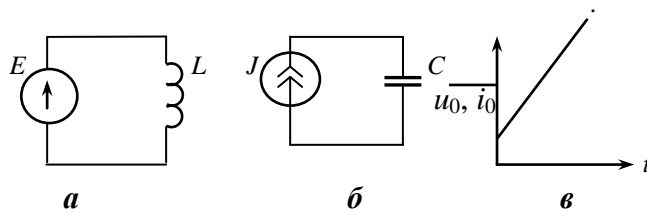


Рис.2. Предельные случаи в электрических цепях: *а* - ток индуктивности; *б* - напряжения на конденсаторе; *в* - их графики

Составление уравнений по законам Кирхгофа. Для электрической цепи (рис.3)

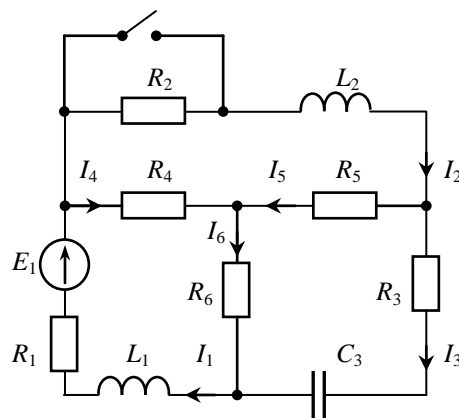


Рис.3. Электрическая цепь с коммутацией параметра

можно составить систему уравнений по законам Кирхгофа. По первому закону Кирхгофа необходимо составить три уравнения ($n_1 = n_{y3} - 1 = 4 - 1 = 3$), по второму закону тоже три ($n_2 = n_b - (n_{y3} - 1) - n_{ит} = 6 - 3 = 3$). Здесь n_{y3} - число узлов схемы, n_b - число ветвей схемы, $n_{ит}$ - число ветвей с источником тока.

Первый закон Кирхгофа используется для определения суммы входящих и выходящих токов в узел:

$$\begin{cases} i_1 - i_2 - i_4 = 0; \\ i_2 - i_3 - i_5 = 0; \\ -i_1 + i_3 + i_6 = 0. \end{cases}$$

По второму закону Кирхгофа определяется сумма напряжений для контуров:

$$\begin{cases} u_{R_1} + u_{L_1} + u_{R_4} + u_{R_6} = E_1; \\ u_{R_2} + u_{L_2} + u_{R_5} - u_{R_6} = 0; \\ u_{R_3} + u_{C_3} - u_{R_6} - u_{R_4} = 0. \end{cases}$$

Для электрической цепи (см. рис.3) можно записать интегральные и дифференциальные зависимости компонентов уравнений по первому и второму законам Кирхгофа. Первый закон Кирхгофа в интегрально-дифференциальной форме имеет вид

$$\begin{cases} \frac{1}{L_1} \int u_{L_1} dt - i_4 - \frac{1}{L_2} \int u_{L_2} dt = 0; \\ \frac{1}{L_2} \int u_{L_2} dt - i_5 - C_3 \frac{du_{C_3}}{dt} = 0; \\ -\frac{1}{L_1} \int u_{L_1} dt + i_3 + C_3 \frac{du_{C_3}}{dt} = 0. \end{cases}$$

Второй закон Кирхгофа в интегрально-дифференциальной форме имеет вид

$$\begin{cases} L_1 \frac{di}{dt} + i_1 R_1 + i_4 R_4 + i_6 R_6 = E_1; \\ L_2 \frac{di}{dt} + i_2 R_2 + i_5 R_5 - i_4 R_4 = 0; \\ i_3 R_3 - i_6 R_6 - i_5 R_5 + \frac{1}{C_3} \int i_3 dt = 0. \end{cases}$$

Порядок дифференциального уравнения определяется по числу реактивных элементов, присутствующих в электрической цепи (исключая задачи с некорректными начальными условиями).

Методом замены переменных можно получить одно дифференциальное уравнение третьего порядка, так как в электрической схеме присутствуют две индуктивности и один конденсатор. Определять постоянные интегрирования для дифференциальных уравнений третьего порядка классическим методом очень трудно. Такие задачи решают операторным

методом или методом переменных состояния, составляя систему из трех дифференциальных уравнений первого порядка.

Подключение цепи с RL -элементами к источнику постоянного напряжения. Для электрической цепи (рис.4) составим уравнение $u_L + i_1 \cdot R_1 = E$.

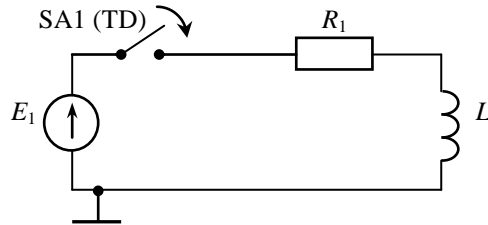


Рис.4. Электрическая схема с RL -элементами

Для вычисления тока в ветви необходимо решить дифференциальное уравнение первого порядка:

$$L \frac{di_1}{dt} + R_1 \cdot i_1 = E.$$

Электрический ток определяется в виде суммы двух составляющих:

$$i_1(t) = i_{\text{пр}} + i_{\text{св}}.$$

Здесь $i_{\text{пр}}$ - принужденный ток; $i_{\text{св}}$ - свободный ток.

Постоянная времени

$$\tau = \frac{L}{R_1} = -\frac{1}{p}.$$

Свободный ток равен:

$$i_{\text{св}} = A \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} = A \cdot e^{pt}.$$

Принужденный ток равен:

$$i_{\text{пр}} = E / R_1.$$

Значение тока в ветви можно получить из решения дифференциального уравнения:

$$i_1(t) = \frac{E}{R_1} + A \cdot e^{pt}.$$

В природе свободное напряжение или свободный ток невозможно увидеть. Свободное напряжение или ток получаются при решении дифференциального уравнения с правой частью равной нулю. Это только математический прием. На осциллограмме можно измерить напряжение или ток переходного процесса, а также до и после установившиеся значения. Свободное напряжение или свободный ток можно только вычислить.

Используя законы коммутации, найдем постоянную интегрирования:

$$i_L(0_-) = i_L(0_+) = 0,$$

тогда $i_L(0_+) = \frac{E}{R_1} + A \cdot e^0 = 0$. Отсюда $A = -\frac{E}{R_1}$.

Уравнение тока ветви, проходящей через индуктивность, имеет вид

$$i_1(t) = \frac{E}{R_1}(1 - e^{pt}).$$

Напряжение на индуктивности можно определить так:

$$U_L(t) = L \frac{di_1}{dt} = \frac{E}{R_1} L \frac{R_1}{L} e^{pt} = E \cdot e^{pt}.$$

Отключение цепи с RL -элементами от источника постоянного напряжения. При отключении катушки индуктивности с накопленной энергией на контактах выключателя возникнет электрическая дуга, что приведет к повреждению контактов. Переходный процесс пройдет очень быстро и окажется сложным из-за нелинейного сопротивления дуги. Напряжение на катушке импульсно возрастет и будет в несколько раз больше напряжения источника постоянного тока, что может привести к пробое изоляции на катушке. Для предотвращения этого индуктивность отключается на разрядное сопротивление R_p (рис.5), которое включается параллельно индуктивности.

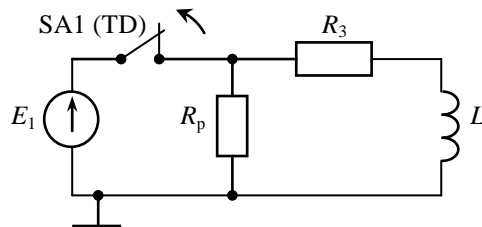


Рис.5. Отключение RL -элементов от источника постоянного тока

Запишем дифференциальное уравнение при отключении индуктивности на разрядное сопротивление R_p :

$$L \frac{di}{dt} + (R_3 + R_p) \cdot i = 0.$$

Решение этого дифференциального уравнения будет состоять только из свободного затухающего тока, так как принужденный ток равен нулю: $i(t) = i_{св} = A \cdot e^{pt}$.

Постоянная интегрирования определяется как

$$i_L(0_-) = i_L(0_+) = \frac{E}{R_3} = A \cdot e^0; \quad A = \frac{E}{R_3}.$$

Уравнение переходного процесса электрического тока определяется по формуле

$$i(t) = \frac{E}{R_3} \cdot e^{pt}.$$

Постоянная времени равна: $\tau = -\frac{1}{p} = \frac{L}{(R_3 + R_p)}$.

Напряжение на индуктивности можно определить по формуле

$$U_L(t) = L \frac{di}{dt} = \frac{E}{R_3} L p e^{pt} = \frac{E}{R_3} L \frac{R_3 + R_p}{L} e^{pt} = E \frac{R_3 + R_p}{R} \cdot e^{pt}.$$

Осциллограмма переходного процесса представлена на рис.6.

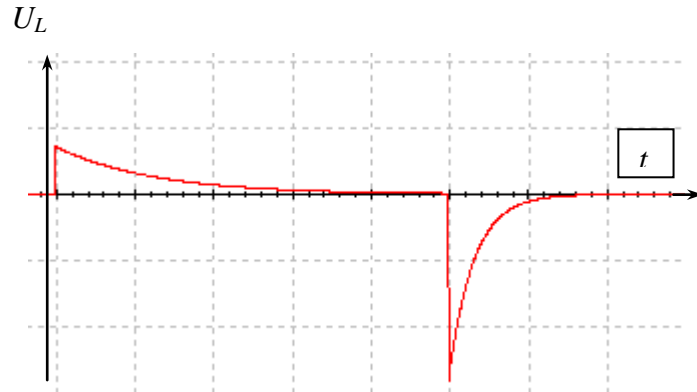


Рис.6. Осциллограмма переходного процесса напряжения на индуктивности при подключении и отключении на разрядное сопротивление цепи с RL -элементами

Переходные процессы в цепях с RC -элементами. Алгоритм решения задачи (рис.7)

сводится к следующему:

- составление системы уравнений в интегральной или дифференциальной форме по законам Кирхгофа;
- получение методом замены переменных дифференциального уравнения первого порядка, если в цепи один накопитель;
- решение уравнения.

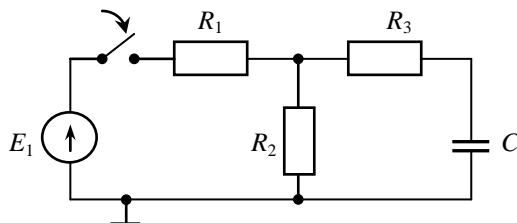


Рис.7. Электрическая схема с RC -элементами

Система уравнений для электрической цепи с RC -элементами (см. рис.7) составляется по уравнениям Кирхгофа:

$$\begin{cases} E = i_1 \cdot R_1 + i_2 \cdot R_2; \\ u_C + i_3 \cdot R_3 - i_2 \cdot R_2 = 0; \\ i_1 - i_2 - i_3 = 0. \end{cases}$$

Заменяя переменные, получим следующие уравнения:

$$\begin{cases} i_3 R_1 + i_3 (R_1 + R_2) = E; \\ i_2 = \frac{E}{(R_1 + R_2)} - i_3 \frac{R_1}{R_1 + R_2}; \\ u_C + i_3 \left(R_3 + \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} \right) = E \frac{R_3}{R_1 + R_2}. \end{cases}$$

Во второй ветви ток проходит через конденсатор и определяется дифференциальной зависимостью между током и напряжением:

$$i_3 = C \frac{du_C}{dt}.$$

Дифференциальное уравнение первого порядка с разделяющимися переменными имеет вид

$$C \cdot R_{\text{экв}} \frac{du}{dt} + u_C = E \frac{R_2}{R_1 + R_2}.$$

Здесь $R_{\text{экв}} = R_3 + \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}$; $\tau = C \cdot R_{\text{экв}}$.

Решение дифференциального уравнения как общего (правая часть равна нулю), так и частного, найдем, зная функцию правой части. Разделение на две составляющие напряжения на конденсаторе исходит только из математического решения дифференциального уравнения: $u_C(t) = u_{C,\text{пр}} + u_{C,\text{св}}$, где $u_{C,\text{св}}$ - свободное напряжение на конденсаторе, $u_{C,\text{пр}}$ - принужденное напряжение на конденсаторе

Найдем численное решение электрической схемы (см. рис.7).

Дано: $E = 60$ В; $R = 10$ Ом (все); $C = 20$ мкФ.

Определить: i , u , τ .

Численное значение переходного процесса напряжения на конденсаторе будет:

$$u_C(t) = 15(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) = 15(1 - e^{pt}),$$

где $-\frac{1}{\tau} = p$ или $-\frac{1}{p} = \tau$.

Графики переходных процессов $i_1(t)$, $i_2(t)$, $i_3(t)$, $u_C(t)$ изображены на осциллограмме (рис.8).

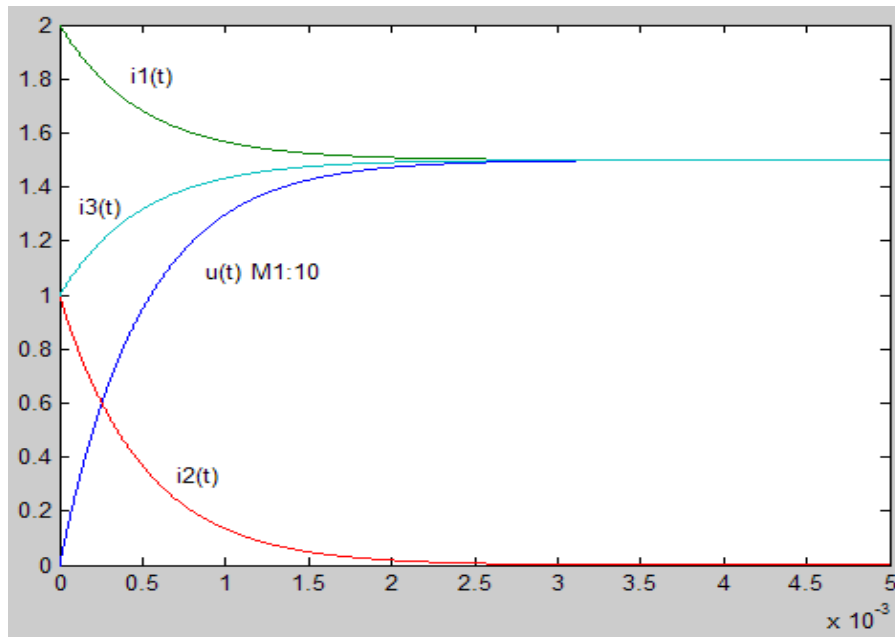


Рис.8. Графики переходного процесса напряжения на конденсаторе и токов в ветвях электрической цепи (см. рис.7), полученные в программной среде Matlab

Уравнения переходных процессов токов в ветвях имеют вид

$$\begin{cases} i_1(t) = 1,5 + 0,5e^{pt}, \text{ A;} \\ i_3(t) = e^{pt}, \text{ A;} \\ i_2(t) = 1,5 - 0,5e^{pt}, \text{ A.} \end{cases}$$

Постоянную времени можно определять, используя новую переменную ($j\omega = p$), которая такая же, как переменная сопротивления в цепи синусоидального тока:

$$Z_L = j\omega L = pL; \quad Z_C = \frac{1}{j\omega C} = \frac{1}{pC}; \quad Z_R = R.$$

При определении постоянной времени источники в электрической цепи должны быть равны нулю, при этом сохраняется их внутреннее сопротивление и конфигурация цепи. Эта схема эквивалентна той, из которой удалены источники напряжения и тока, а цепь замыкается в том месте, где удалили источник напряжения, так как внутреннее сопротивление этого источника равно нулю. Если удаляется источник тока, тогда в этом месте цепь разрывается, так как внутреннее сопротивление источника тока равно бесконечности. Ключ устанавливается в положение после коммутации. Затем определяется переменная p , а далее постоянная времени $\tau = -\frac{1}{p}$.

Включение RL -цепи на синусоидальное напряжение. Переходные процессы в электрических цепях с синусоидальным возбуждением (рис.9) происходят очень часто. Источник является синусоидальной функцией времени вида

$$e(t) = E_m \sin(\omega t + \psi),$$

где E_m - амплитуда синусоидальной функции; ω - круговая частота; ψ - угол случайного включения электрической цепи.

Дифференциальное уравнение, описывающее переходный процесс для цепи с RL -элементами, имеет вид

$$L \frac{di}{dt} + Ri = E_m \sin(\omega t + \psi).$$

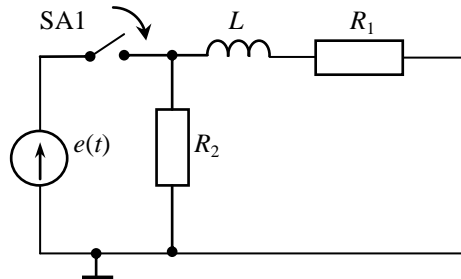


Рис.9. Включение RL -элементов на синусоидальное ЭДС

Решая уравнение, получим электрический ток:

$$i(t) = i_{\text{пр}} + i_{\text{св}},$$

где $i_{\text{св}}$ находится из общего решения дифференциального уравнения, $i_{\text{пр}}$ - из частного решения дифференциального уравнения.

На рис.10 изображены осциллограммы принужденного и переходного напряжения на резисторе, которое совмещается с принужденным напряжением после 5, 6т.

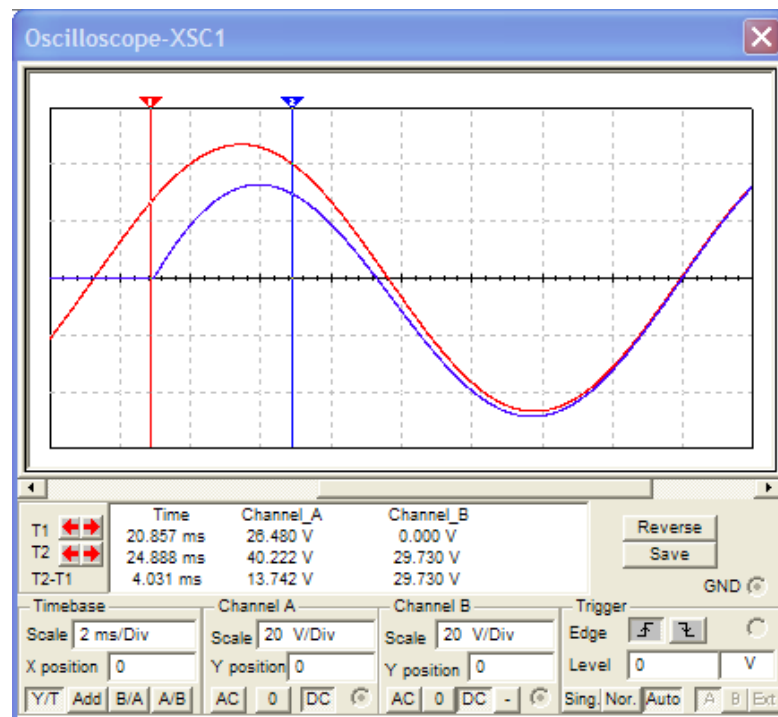


Рис.10. Осциллограммы переходного и принужденного напряжения на резисторе

Осциллограммы напряжения на резисторе переходного и свободного процесса изображены на рис.11.

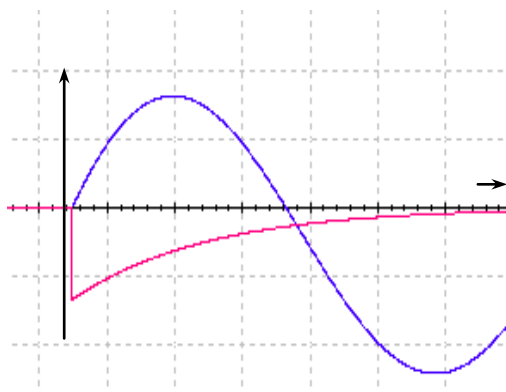


Рис.11. Осциллограммы переходных процессов, принужденного и свободного напряжения на резисторе

Уравнение электрического тока, проходящего по электрической цепи после коммутации, будет следующим:

$$i(t) = \frac{E_m}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} \sin(\omega t + \psi + \varphi) + A \cdot e^{-\frac{t}{\tau}},$$

где φ - угол сдвига фазы принужденного электрического тока напряжения; A - постоянная интегрирования; τ - постоянная времени.

Переходные процессы при некорректных начальных условиях. Коммутации индуктивностей при некорректных начальных условиях. Переходные процессы при некорректных начальных условиях возникают, когда коммутация ключа приводит к изменению параметров и соединению в одну общую ветвь накопителей с разными начальными токами, протекающими через индуктивности. Например, схема электрической цепи (рис.12) состоит из двух резисторов и двух индуктивностей,

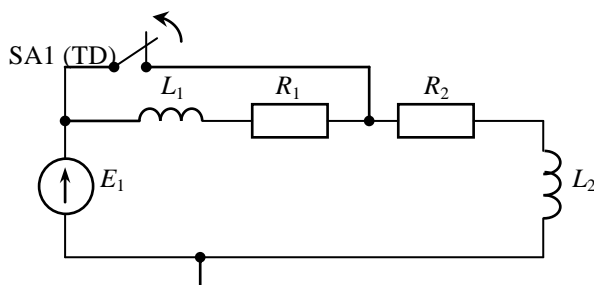


Рис.12. Схема с RL -элементами при некорректных начальных условиях

подключенных к источнику напряжения, причем резистор R_1 и индуктивность L_1 зашунтированы переключателем SA1, а до коммутации электрический ток протекает только через резистор R_2 и индуктивность L_2 .

При размыкании ключа обе индуктивности включают в одну ветвь с различными начальными значениями токов, протекающих через эти индуктивности. В этом случае применяется закон сохранения электромагнитного сцепления:

$$\sum \Psi(0_+) = \sum \Psi(0_-),$$

где $\Psi = w\Phi = Li$. Тогда закон сохранения электромагнитного потокосцепления будет иметь вид

$$\sum Li(0_+) = \sum Li(0_-);$$

$$\text{где } i(0_+) = \frac{L_2}{L_1 + L_2} i(0_-) = \frac{E}{R_2} \frac{L_2}{L_1 + L_2}.$$

Решение получим в виде

$$i(t) = \frac{E}{R_1 + R_2} + A e^{-\frac{t}{\tau}}, \quad A = E \left(\frac{L_2}{(L_1 + L_2)R} - \frac{1}{R_1 + R_2} \right).$$

На рис.13 изображена осциллограмма при размыкании ключа, когда элементы R_1 и L_1 образуют одну ветвь с элементами R_2 и L_2 .

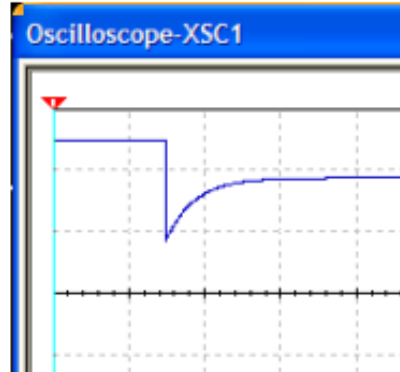


Рис.13. Осциллограмма напряжения на резисторе при некорректных начальных условиях

Коммутация емкостей при некорректных начальных условиях. Некорректность коммутации конденсаторов заключается в том, что два конденсатора, на которых имеются разные напряжения до коммутации, внезапно включают параллельно (рис.14). В этом случае для расчета цепи применяется закон сохранения заряда:

$$\sum q(0_+) = \sum q(0_-), \quad q = Cu, \quad \sum Cu(0_-) = \sum Cu(0_+).$$

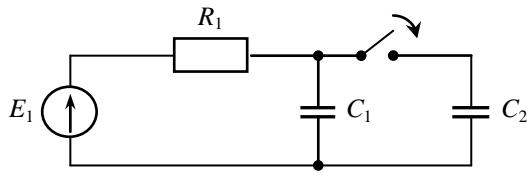


Рис.14. Схема с RC-элементами
при некорректных начальных условиях

Напряжение на конденсаторах после коммутации при $t = 0_+$ можно рассчитать по формуле

$$u_C(0_+) = \frac{C_1}{C_1 + C_2} E.$$

Уравнение переходного процесса будет иметь вид

$$u_C(t) = (E - u_C(0_+)) \cdot (1 - e^{-\frac{t}{\tau}}).$$

Осциллограмма переходного процесса представлена на рис.15.

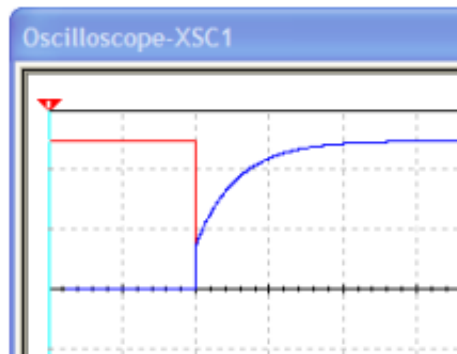


Рис.15. Осциллограммы напряжений на конденсаторах
при некорректных начальных условиях

На осциллограмме (см. рис.15) видно, что напряжение на конденсаторе C_1 в момент коммутации при $t = 0_+$ внезапно падает от значения ЭДС до $u_C(0_+)$, а напряжение на конденсаторе C_2 внезапно увеличивается от нуля до значения $u_C(0_+)$. Далее идет переходный процесс по экспоненте для обоих конденсаторов одинаково.

Задания и методика выполнения работы

Задание 1. Исследовать переходные процессы в электрической цепи (рис.16) с RL -элементами:

1. Собрать две электрические схемы, подключенные к одному четырехканальному осциллографу (см. рис.16). Параметры приведены в таблице. Режим измерения осциллографа - DC. Измерить постоянную времени τ .
2. При подключении и отключении источника измерить осциллограммы переходных процессов напряжения на индуктивности L и на резисторе R_3 (см. рис.16) в моменты времени $1\tau, 2\tau, 3\tau, 4\tau, 5\tau$.
3. Построить осциллограммы напряжений на индуктивности и резисторе R_3 , используя результаты измерений.
4. Рассчитать переходные процессы напряжений на всех элементах и токи во всех ветвях.
5. Сделать выводы по результатам исследования электрической цепи.

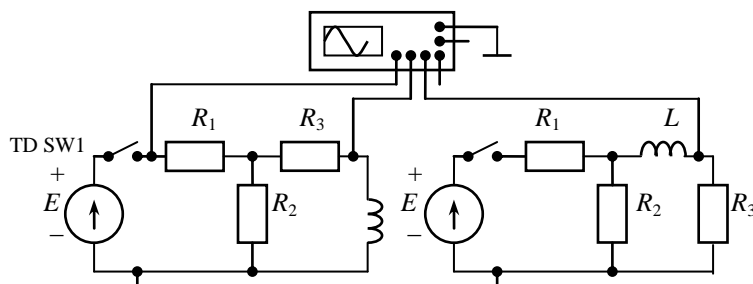


Рис.16. Электрическая схема с RL -элементами с корректными начальными условиями

Варианты заданий

Вариант	E , В	R_1 , Ом	R_2 , Ом	L , мГн	C , мкФ
1	48	20	80	60	50
2	48	30	120	40	50
3	48	30	150	40	40
4	48	40	160	40	50
5	48	50	200	60	50
6	36	20	80	60	50
7	36	30	120	40	50

8	50	30	150	40	40
9	50	40	160	40	50
10	50	50	200	60	50
11	48	20	60	20	40
12	36	20	80	72	50
13	36	30	120	72	50
14	36	30	150	50	40
15	36	40	160	72	50
16	48	50	200	60	50
17	36	50	200	60	50
18	36	40	160	40	50
19	36	20	80	80	50
20	24	10	40	40	50
21	24	4	16	40	50
22	24	6	24	40	50
23	24	8	32	40	50
24	24	6	30	40	50
25	24	5	20	40	50

Задание 2. Исследовать переходные процессы в RC -цепях.

1. Собрать электрическую схему (рис.17) и измерить постоянную времени τ . Параметры приведены в таблице.
2. При подключении и отключении источника измерить осциллограмму переходного процесса напряжения на конденсаторе C и на резисторе R_3 (см. рис.17) в моменты времени $1\tau, 2\tau, 3\tau, 4\tau, 5\tau$.

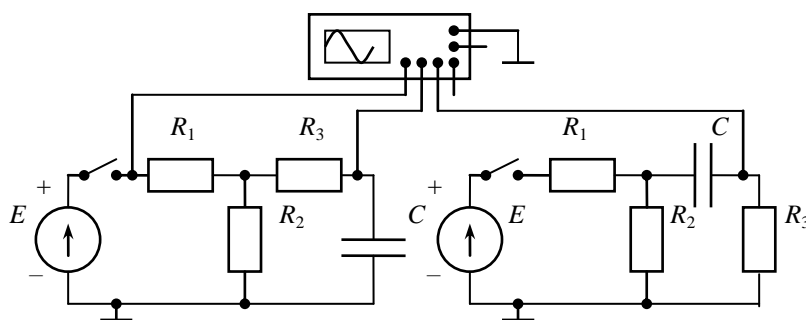


Рис.17. Электрическая схема с RC -элементами

Задание 3. Исследовать переходный процесс напряжения на резисторе и индуктивности при подключении к источнику синусоидального тока. Дано: $e(t) = 100\sqrt{2} \sin(\omega t + \psi)$; $R = 20 \text{ Ом}$; $L = 8 \text{ мГн}$; $f = 400 \text{ Гц}$.

1. Собрать две схемы (рис.18) и установить подбором времени на переключателе угол случайного включения напряжения на источнике равным $\psi = 90^\circ$. Режим измерения осциллографа - DC.

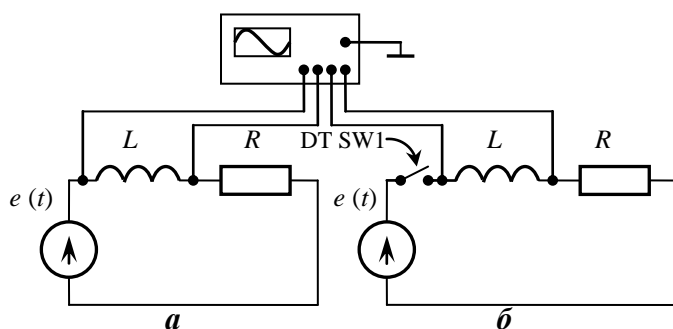


Рис.18. RL -цепь при синусоидальном воздействии: *a* - принужденный процесс; *б* - переходный процесс

2. Измерить осциллограммы напряжения на резисторе принужденного (рис.18,*a*) и переходного (рис.18,*б*) процесса. Измерить постоянную времени τ . Построить графики принужденного и переходного процесса. Рассчитать и построить график свободного напряжения на резисторе.

3. Рассчитать свободный ток.

4. Поменять местами резисторы с индуктивностями в двух схемах (см. рис.18). Измерить осциллограммы напряжения на индуктивности принужденного и переходного процесса. Построить графики принужденного, переходного и свободного напряжения на индуктивности.

Задание 4. Исследовать переходные процессы при некорректных начальных условиях.

1. Собрать электрическую схему (рис.19) и измерить постоянную времени τ после размыкания ключа.

2. Измерить осциллограмму переходного процесса напряжения на резисторе R_2 и токи, проходящие через индуктивности L_1 и L_2 . Для измерения токов можно использовать зависимые источники, которые расположены в меню (источники) с названием (Current Controlled Voltage Source). Измерить осциллограммы при отключении ключа TD SW1 в моменты времени 1τ , 2τ , 3τ , 4τ , 5τ .

Дано: $E = 50 \text{ В}$; $R_1 = 10 \text{ Ом}$; $R_2 = 30 \text{ Ом}$; $L_1 = 20 \text{ мГн}$; $L_2 = 10 \text{ мГн}$.

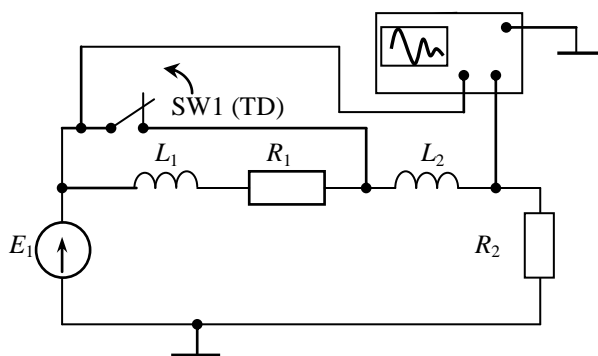


Рис.19. Электрическая схема с RL -элементами с некорректными начальными условиями

Задание 5. Исследовать цепь с двумя параллельно включенными конденсаторами (рис.20) при некорректных начальных условиях.

Дано: $E = 60 \text{ В}$; $R_1 = 20 \text{ Ом}$; $R_2 = 40 \text{ Ом}$; $C_1 = 20 \text{ мкФ}$; $C_2 = 40 \text{ мкФ}$.

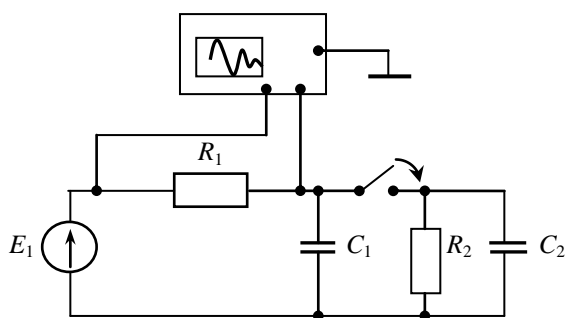


Рис.20. Электрическая схема с RC -элементами при некорректных начальных условиях

1. Собрать электрическую схему (см. рис.20) и измерить постоянную времени после включения переключателя.
2. Измерить осциллограммы переходного процесса напряжения на конденсаторах C_1 и C_2 в моменты времени 1τ , 2τ , 3τ , 4τ , 5τ .
3. Сделать выводы по результатам исследования электрических цепей.

Контрольные вопросы

1. Почему возникают переходные процессы?
2. Как используют законы коммутации при расчете электрических схем?
3. В чем причина быстрого окончания переходного процесса?
4. Как составляются уравнения для расчета переходных процессов?
5. Как рассчитать и измерить постоянные времени?
6. Как следует отключать индуктивность от источника?
7. Чем объясняется появление свободного тока или напряжения?
8. Как измерить принужденный и переходный процессы?
9. Как решать задачи с некорректными начальными значениями?
10. В каком случае используется закон сохранения электромагнитной энергии?

Лабораторная работа № 7

Исследование переходных процессов в RLC -цепях

Цель работы: исследование электрических цепей второго порядка классическим методом.

Продолжительность работы - 4 ч.

Теоретические сведения

Переходные процессы в цепях с RLC -элементами. Исследование электрических цепей и расчет переходных процессов классическим методом сопровождаются решением дифференциальных уравнений второго, третьего и выше порядков. Физика переходного процесса хорошо просматривается, но определять постоянные интегрирования весьма затруднительно. Классическим методом можно рассчитать и исследовать электрические цепи второго порядка, для третьего и более высокого порядка следует использовать другие методы расчета. Операторный метод расчета переходных процессов - механизированный, не видна физика процесса, но позволяет заменить решение дифференциальных уравнений умножением, а интегральных уравнений - делением. Расчет переходных процессов сводится к решению алгебраических уравнений. Для системы из нескольких уравнений первого порядка применяется метод переменных состояний.

Переходные процессы при разрядке конденсатора на RL -элементы. В электрической цепи (рис.1) конденсатор сначала заряжается, а затем возникает переходный процесс при разрядке конденсатора на RL -элементы. Интегрально-дифференциальное уравнение можно составить при разрядке конденсатора на RL -элементы в следующем виде:

$$Ri + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int_0^t i dt + u_C(0) = 0.$$

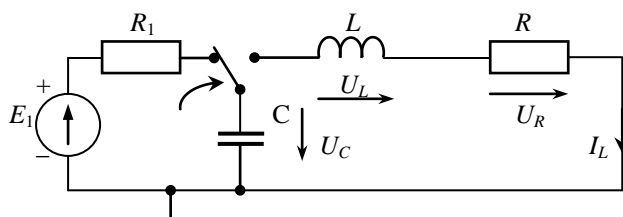


Рис.1. Подключение RL -элементов к конденсатору с напряжением U_0

Продифференцировав предыдущее уравнение, получим дифференциальное уравнение второго порядка:

$$L \frac{d^2 i}{dt^2} + R \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} i = 0.$$

Решение этого уравнения будем искать в виде суммы принужденного плюс свободного тока:

$$i(t) = i_{\text{пр}} + i_{\text{св}}.$$

Характеристическое уравнение определяется по дифференциальному уравнению в виде

$$p^2 + \frac{R}{L} p + \frac{1}{LC} = 0.$$

Корни характеристического уравнения равны:

$$p_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}.$$

Переходный процесс формируется в зависимости от вида корней характеристического уравнения:

- если корни разные и вещественные ($p_1 < 0$, $p_2 < 0$, $p_1 \neq p_2$), то свободные переходные процессы следующие:

$$i_{\text{св}} = A_1 \cdot e^{p_1 t} + A_2 \cdot e^{p_2 t};$$

- если корни равные и вещественные ($p_1 < 0$, $p_2 < 0$, $p_1 = p_2$), то свободная составляющая имеет вид

$$i_{\text{св}} = (A_1 + A_2 \cdot t) e^{p_1 t};$$

- если корни комплексно-сопряженные ($p_1 = -\delta + j\omega$ и $p_2 = -\delta - j\omega$), то свободный переходный процесс будет носить затухающий колебательный характер:

$$i_{\text{св}} = A \cdot e^{-\delta t} \sin(\omega t + \psi).$$

Разряд конденсатора на RL -элементы. Электрическая цепь (см. рис.1) при разрядке конденсатора на RL -элементы имеет начальные условия, которые определяются по законам коммутации:

$$1) i_L(0_-) = i_L(0_+) = 0;$$

$$2) u_C(0_-) = u_C(0_+) = U_0.$$

В начале переходного процесса в момент времени $t = 0_+$ определяются значения искомых величин: $U_R = i \cdot R = 0$, $U_C = -U_L = U_0$.

Переходные процессы при вещественных корнях. Аналитическое выражение этих величин имеет следующий вид:

- электрический ток при разрядке конденсатора

$$i = \frac{U_0}{L(p_1 - p_2)}(e^{p_1 t} - e^{p_2 t});$$

- напряжение на индуктивности

$$u_L = L \frac{di}{dt} = -\frac{U_0}{p_1 - p_2}(p_1 e^{p_1 t} - p_2 e^{p_2 t});$$

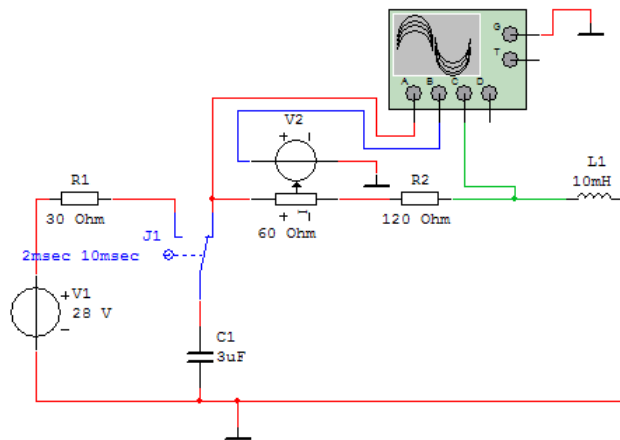
- напряжение на конденсаторе

$$u_C = \frac{U_0}{p_1 - p_2}(p_2 e^{p_1 t} - p_1 e^{p_2 t});$$

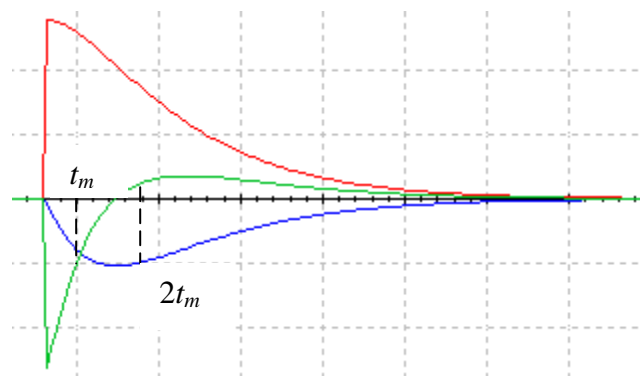
- напряжение на резисторе

$$u_R = Ri = \frac{RU_0}{L(p_1 - p_2)}(e^{p_1 t} - e^{p_2 t}).$$

Экспериментальная схема для исследования в программной среде Multisim приведена на рис.2,а. На осциллограмме (рис.2,б) представлены нисходящее напряжение на конденсаторе $u_C(t)$ и плавно изменяющееся напряжение на резисторе $u_R(t)$ (осциллограмма начинается с нуля), которое по форме совпадает с током электрической цепи, а также осциллограмма напряжения на индуктивности $u_L(t)$.



a



б

Рис.2. Электрическая цепь (а) и осциллограммы аperiodического процесса (б) при разрядке конденсатора на RL -элементы

Электрический ток (i) в цепи достигнет максимума при условии $\frac{di}{dt} = 0$, когда напряжение на индуктивности (u_L) будет равно нулю, а время t_m определяется по формуле

$$t_m = \frac{1}{p_1 - p_2} \ln \frac{p_2}{p_1}.$$

Напряжение на резисторе достигнет максимума при времени t_m , на индуктивности - при времени $2t_m$.

Переходные процессы при комплексно-сопряженных корнях. Если подкоренное выражение имеет отрицательное значение, то комплексное выражение имеет вид

$$\frac{1}{LC} > \left(\frac{R}{2L}\right)^2, \text{ тогда } \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}} = j\omega.$$

В этом случае корни равны:

$$p_{1,2} = -\delta \pm j\omega; \quad p_1 - p_2 = 2j\omega.$$

Для удобства решения задачи примем следующие обозначения:

- $\delta = \frac{R}{2L}$ - коэффициент затухания;
- $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ - резонансная частота;
- $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$ - круговая частота.

Уравнение переходного процесса электрического тока имеет вид

$$\begin{aligned} i(t) &= -\frac{U_0}{L2j\omega} [e^{(-\delta t + j\omega t)} - e^{(-\delta t - j\omega t)}] = \\ &= -\frac{U_0}{L\omega} e^{-\delta t} \frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j} = -\frac{U_0}{L\omega} e^{-\delta t} \sin \omega t. \end{aligned}$$

Напряжение на резисторе можно определить по формуле

$$u_R(t) = Ri(t) = -U_0 \frac{R}{L\omega} e^{-\delta t} \sin \omega t.$$

Взяв производную по току, определим напряжение на индуктивности:

$$u_L(t) = L \frac{di}{dt} = -\frac{U_0}{\omega} \left(-\delta e^{-\delta t} \sin \omega t + \omega e^{-\delta t} \cos \omega t \right).$$

Выражение напряжения на индуктивности получилось большое и неудобное, для его упрощения введем новые переменные:

$$\omega_0^2 = \delta^2 + \omega^2 = \frac{1}{LC}; \quad \cos \gamma = -\frac{\delta}{\omega_0}; \quad \sin \gamma = \frac{\omega}{\omega_0}.$$

Напряжение на индуктивности с учетом новых переменных можно получить в следующем виде:

$$u_L(t) = L \frac{di}{dt} \frac{\omega_0}{\omega} = -U_0 \frac{\omega_0}{\omega} e^{-\delta t} \left(-\frac{\delta}{\omega_0} e^{-\delta t} \sin \omega t + \frac{\omega}{\omega_0} e^{-\delta t} \cos \omega t \right).$$

Уравнение напряжения на индуктивности после преобразования можно представить в виде

$$u_L(t) = L \frac{di}{dt} \frac{\omega_0}{\omega} = -U_0 \frac{\omega_0}{\omega} e^{-\delta t} \sin(\omega t + \gamma).$$

Напряжение на резисторе в новых переменных будет следующим:

$$u_R(t) = Ri(t) = 2U_0 \frac{\omega_0}{\omega} \left(-\frac{R}{2\omega_0 L} \right) e^{-\delta t} \sin \omega t = 2U_0 \frac{\omega_0}{\omega} e^{-\delta t} \cos \gamma \cdot \sin \omega t.$$

Напряжение на конденсаторе можно определить по второму закону Кирхгофа:

$$\begin{aligned} u_C(t) &= u_L(t) + u_R(t) = \\ &= -U_0 \frac{\omega_0}{\omega} e^{-\delta t} \sin(\omega t + \gamma) + U_0 \frac{\omega_0}{\omega} e^{-\delta t} 2 \cos \gamma \sin \omega t. \end{aligned}$$

После преобразования этого выражения получим значение напряжения на конденсаторе:

$$\begin{aligned} u_C(t) &= U_0 \frac{\omega_0}{\omega} e^{-\delta t} (-\sin(\omega t + \gamma) + 2 \cos \gamma \sin \omega t) = \\ &= U_0 \frac{\omega_0}{\omega} e^{-\delta t} \sin(\omega t - \gamma). \end{aligned}$$

При получении уравнений в новых переменных использованы следующие преобразования:

$$-\sin(\omega t + \gamma) = -\cos \gamma \cdot \sin \omega t - \cos \omega t \cdot \sin \gamma;$$

$$2 \cos \gamma \sin \omega t - \sin(\omega t + \gamma) = \cos \gamma \cdot \sin \omega t - \cos \omega t \cdot \sin \gamma = \sin(\omega t - \gamma).$$

Осциллограмма (рис.3) показывает переходные процессы напряжений на конденсаторе (u_C) и на резисторе (u_R), а также напряжение на индуктивности (u_L). Уравнения этих напряжений и тока имеют колебательный характер и затухают по экспоненте:

- значение тока переходного процесса

$$i = -\frac{U_0}{\omega L} e^{-\delta t} \sin \omega t;$$

- напряжение на резисторе

$$u_R = Ri = -\frac{RU_0}{\omega L} e^{-\delta t} \sin \omega t;$$

- напряжение на индуктивности

$$u_L = L \frac{di}{dt} = -U_0 \frac{\omega_0}{\omega} e^{-\delta t} \sin(\omega t + \psi);$$

- напряжение на конденсаторе

$$u_C = -U_0 \frac{\omega_0}{\omega} e^{-\delta t} \sin(\omega t - \psi), \text{ где } \psi = \arctg\left(\frac{\omega}{\delta}\right).$$

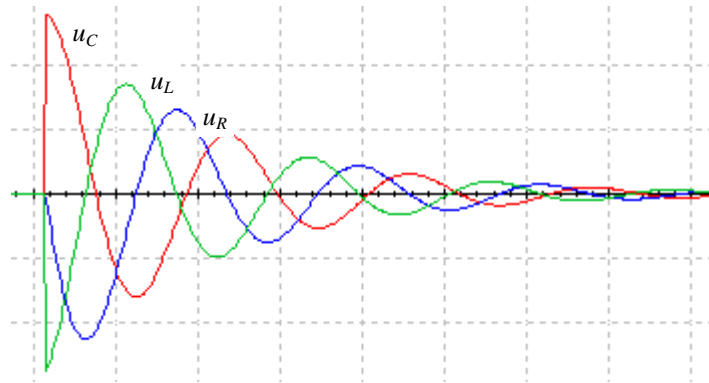


Рис.3. Осциллограммы переходного процесса электрической цепи при комплексно-сопряженных корнях

Переходные процессы при подключении к постоянному напряжению RLC -элементов. Рассмотрим электрическую цепь (рис.4) при подключении RLC -элементов к источнику постоянного тока.

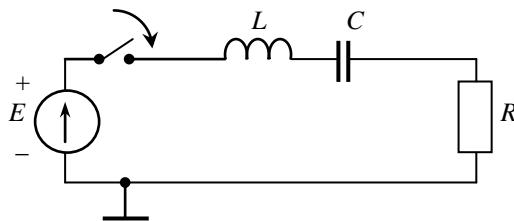


Рис.4. Подключение к постоянному напряжению RLC -элементов

При подключении RLC -элементов к постоянному напряжению дифференциальное уравнение второго порядка имеет вид

$$L \frac{d^2 i}{dt} + R \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} i = E.$$

Решение этого уравнения будем искать в виде суммы принужденного плюс свободного тока или напряжения:

$$i(t) = i_{\text{пр}} + i_{\text{св}}; u(t) = u_{\text{пр}} + u_{\text{св}}.$$

По виду дифференциального уравнения можно записать характеристическое уравнение:

$$p^2 + \frac{R}{L} p + \frac{1}{LC} = 0.$$

Корни характеристического уравнения определяются по формуле

$$p_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}.$$

В зависимости от вида корней характеристического уравнения можно определить вид свободных составляющих переходных процессов при разряде конденсатора на RL -элементы):

- корни вещественные разные

$$i_{\text{св}} = A_1 \cdot e^{p_1 t} + A_2 \cdot e^{p_2 t}; \quad u_{\text{св}} = A_1 \cdot e^{p_1 t} + A_2 \cdot e^{p_2 t};$$

- корни вещественные равные

$$i_{\text{св}} = (A_1 + A_2 \cdot t)e^{pt}; \quad u_{\text{св}} = (A_1 + A_2 \cdot t)e^{pt};$$

- корни комплексно-сопряженные

$$i_{\text{св}} = A \cdot e^{-\delta t} \sin(\omega t + \psi); \quad u_{\text{св}} = A \cdot e^{-\delta t} \sin(\omega t + \psi + \varphi).$$

Апериодический характер переходного процесса. Возникает при разных вещественных корнях. Электрический ток при апериодическом переходном процессе можно определить по формуле

$$i(t) = \frac{E}{(p_1 - p_2)L} (e^{p_1 t} - e^{p_2 t}).$$

Напряжение на резисторе имеет вид

$$u_R(t) = Ri(t) = \frac{ER}{(p_1 - p_2)L} (e^{p_1 t} - e^{p_2 t}).$$

Выражение напряжения на индуктивности следующее:

$$u_L(t) = L \frac{di}{dt} = \frac{E}{p_1 - p_2} (p_1 e^{p_1 t} - p_2 e^{p_2 t}).$$

Напряжение на конденсаторе будет следующим:

$$u_C(t) = E + \frac{E}{p_1 - p_2} (p_2 e^{p_1 t} - p_1 e^{p_2 t}).$$

По полученным формулам можно построить графики расчетных апериодических переходных процессов в программном приложении Matlab. Экспериментальным методом можно воспользоваться для получения осциллограмм апериодического переходного процесса напряжений на индуктивности, резисторе и конденсаторе (рис.5).

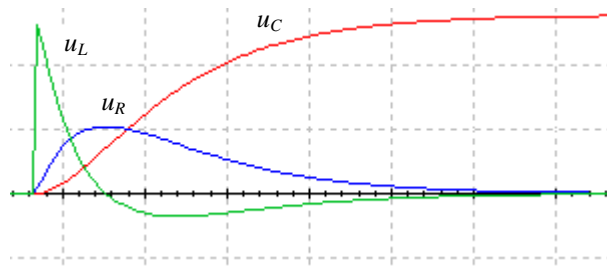


Рис.5. Подключение RLC -цепи к источнику постоянного напряжения при вещественных корнях характеристического уравнения

Периодический колебательный характер переходного процесса. Характеристическое уравнение имеет комплексно-сопряженные корни. Уравнение электрического тока при подключении RLC -элементов к источнику постоянного тока имеет вид

$$i(t) = \frac{E}{L(p_1 - p_2)}(e^{p_1 t} - e^{p_2 t}) = \frac{E}{L\omega} e^{-\delta t} \sin \omega t.$$

Напряжение на резисторе можно представить в виде

$$u_R(t) = Ri(t) = E \frac{\omega_0}{\omega} e^{-\delta t} (-2) \cos \gamma \cdot \sin \omega t.$$

При комплексно-сопряженных корнях уравнение напряжения на индуктивности определяется по формуле

$$u_L(t) = E \frac{\omega_0}{\omega} e^{-\delta t} \sin(\omega t + \gamma).$$

Напряжение на конденсаторе можно определить по закону Кирхгофа для электрической цепи (см. рис.4)

$$u_C(t) = E - (u_R(t) + u_L(t)) = E - E \frac{\omega_0}{\omega} e^{-\delta t} \sin(\omega t - \gamma).$$

Для электрического тока схемы, напряжений на резисторе, индуктивности и конденсаторе при комплексно-сопряженных корнях можно измерить осциллограммы, полученные экспериментально.

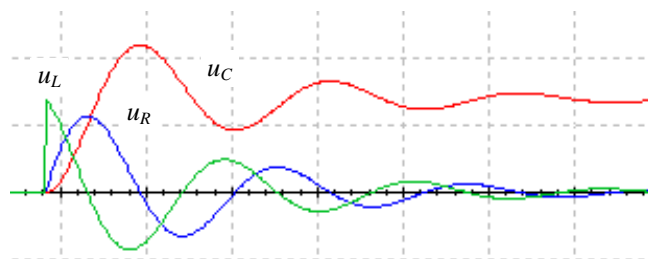


Рис.6. Подключение RLC -цепи к источнику постоянного напряжения при комплексно-сопряженных корнях характеристического уравнения

Осциллограммы затухающего колебательного процесса напряжений на индуктивности, резисторе и конденсаторе изображены на рис.6.

Задания и методика выполнения работы

Задание 1. Исследовать переходные процессы в электрической цепи (рис.7) при разрядке конденсатора на RL -элементы (варианты заданий приведены в таблице).

Варианты заданий

Вариант	E , В	C , мкФ	L , мГн	R , Ом
1	12	3	10	140
2				120
3			20	160
4				140
5	16	5	10	150
6				160
7			20	180
8				120
9	20	6	20	150
10				160
11			30	180
12				100
13	24	2	20	150
14				160
15			30	120
16				140
17	24	4	30	150
18				160
19			40	120
20				120
21	36	3	20	150
22				160
23			30	180
24				160
25	36	2	20	150
26			30	120

1. Выбрать осциллограф четырехканальный, установить режим работы осциллографа DC. На осциллографе для второго и третьего луча установить минус (рядом с кнопкой DC).

2. Исследовать аperiodические переходные процессы при подключении цепи с RL -элементами к конденсатору C , имеющему напряжение $U_C = E$:

- снять осциллограммы переходного процесса тока в цепи, используя источник напряжения, управляемый током. Зависимые источники расположены в меню источники (Current Controlled Voltage Source);

- снять осциллограммы переходного процесса напряжения на конденсаторе;
- снять осциллограммы переходного процесса напряжения на индуктивности;
- рассчитать аperiodический переходный процесс операторным методом.

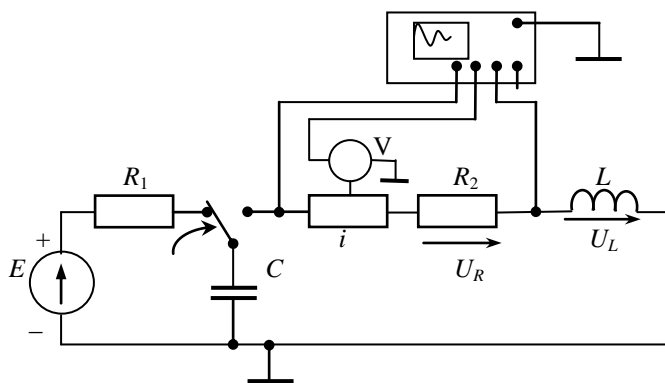


Рис.7. Подключение RL -цепи к конденсатору с напряжением $U_C = E$

3. Исследовать колебательные затухающие переходные процессы при подключении к конденсатору C цепи с RL -элементами, имеющему напряжение $U_C = E$ (см. рис.7):

- установить номинал сопротивления $R_2 = 10 \text{ Ом}$;
- снять осциллограмму переходного процесса тока в цепи с RL -элементами;
- снять осциллограмму переходного процесса напряжения на индуктивности и конденсаторе.

4. Рассчитать аperiodический и колебательный переходный процесс операторным методом.

Задание 2. Исследовать переходные процессы в электрической цепи (рис.8) при подключении к постоянному напряжению RLC -элементов. Убрать минус второго и третьего каналов на осциллографе рядом с кнопкой DC.

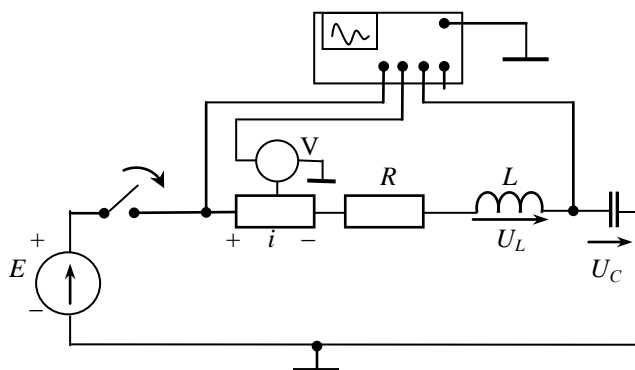


Рис.8. Подключение RLC -цепи к источнику напряжения

1. Исследовать аperiodические переходные процессы при подключении RLC -цепи к источнику напряжения E :

- снять осциллограмму переходного процесса тока с использованием зависимых источников, которые расположены в меню источники с названием (Current Controlled Voltage Source);

- снять осциллограмму переходного процесса на конденсаторе;
- снять осциллограмму переходного процесса на индуктивности.

2. Исследовать колебательные затухающие переходные процессы при подключении цепи с RLC -элементами к источнику напряжения E :

- установить номиналы сопротивлений $R = 10$ Ом. Снять осциллограмму переходного процесса тока в цепи, используя зависимый источник напряжения, управляемый током;

- снять осциллограммы переходного процесса напряжения на индуктивности и конденсаторе;

- снять осциллограммы переходного процесса напряжения на резисторе.

3. Рассчитать операторным методом аperiodический и колебательный затухающий переходные процессы при подключении RLC -элементов к источнику постоянного напряжения E .

Контрольные вопросы

1. Как определяются в цепях второго порядка постоянные интегрирования?
2. Какой вид имеют свободные составляющие при апериодическом характере переходного процесса?
3. Какой переходный процесс при комплексно-сопряженных корнях возникнет в электрической цепи?
4. Как составить систему уравнений при разрядке конденсатора на RL -элементы?
5. Можно ли измерить ток в цепи при использовании зависимых источников?
6. Как измерить напряжения на резисторе, индуктивности и конденсаторе при переходном процессе?
7. Какое напряжение появится на индуктивности при максимальном напряжении на резисторе в цепи?
8. Почему не применяется классический метод расчета для схем с тремя и более накопителями энергии?

Лабораторная работа № 8

Исследование пассивных четырехполюсников

Цель работы: аналитическое и экспериментальное исследование четырехполюсника, определение характеристических сопротивлений и постоянной передачи.

Продолжительность работы - 4 ч.

Теоретические сведения

Четырехполюсник - это электрическая схема, имеющая два входа и два выхода, используется для передачи сигнала и энергии. Направление передачи сигнала и энергии может быть от входа к выходу (*прямое включение*) или от выхода к входу (*обратное включение*). Для упрощения расчета сложные электрические схемы делят на три части: источник питания, передаточное звено (четырехполюсник) и нагрузка. В этом случае предполагается, что источник на входе и нагрузка на выходе изменяются, а передаточное звено сохраняет свои параметры. В качестве неизменяемого передаточного звена (пассивного взаимного четырехполюсника) применяются эквивалентные схемы в виде Т-образной, П-образной, Х-образной схемы замещения или мостовые схемы. Сопротивления схемы сохраняют свои значения, если частота источника синусоидального тока останется неизменной ($\omega = 2\pi f = \text{const}$).

Известны шесть форм записи основных уравнений пассивного четырехполюсника: A , B , Y , Z , H , G . Приведем основные уравнения различных форм записи:

$$\begin{array}{cc} A & B \\ \left\{ \begin{array}{l} \dot{U}_1 = A\dot{U}_2 + B\dot{I}_2; \\ \dot{I}_1 = C\dot{U}_2 + D\dot{I}_2; \end{array} \right. & \left\{ \begin{array}{l} \dot{U}_2 = B_{11}\dot{U}_1 + B_{12}\dot{I}_1; \\ \dot{I}_2 = B_{21}\dot{U}_1 + B_{22}\dot{I}_1; \end{array} \right. \\ Y & Z \\ \left\{ \begin{array}{l} \dot{I}_1 = Y_{11}\dot{U}_1 + Y_{12}\dot{U}_2; \\ \dot{I}_2 = Y_{21}\dot{U}_1 + Y_{22}\dot{U}_2; \end{array} \right. & \left\{ \begin{array}{l} \dot{U}_1 = Z_{11}\dot{I}_1 + Z_{12}\dot{I}_2; \\ \dot{U}_2 = Z_{21}\dot{I}_1 + Z_{22}\dot{I}_2; \end{array} \right. \\ H & G \\ \left\{ \begin{array}{l} \dot{U}_1 = H_{11}\dot{I}_1 + H_{12}\dot{I}_2; \\ \dot{I}_2 = H_{21}\dot{I}_1 + H_{22}\dot{I}_2; \end{array} \right. & \left\{ \begin{array}{l} \dot{I}_1 = G_{11}\dot{U}_1 + G_{12}\dot{U}_2; \\ \dot{U}_2 = G_{21}\dot{U}_1 + G_{22}\dot{I}_2. \end{array} \right. \end{array}$$

Пары параметров четырехполюсников (A и B , Y и Z , H и G) взаимнообратные (инверсные). Определители матриц параметров этих пар обратно пропорциональны:

$$\Delta(A) = \frac{1}{\Delta(B)}; \quad \Delta(Y) = \frac{1}{\Delta(Z)}; \quad \Delta(H) = \frac{1}{\Delta(G)}.$$

Расчет параметров. Параметры различных форм записи определяются следующими способами:

- с помощью уравнений, составленных по законам Кирхгофа, методом контурных токов и узловых потенциалов;
- по значениям токов и напряжений в режимах холостого хода и короткого замыкания;
- разбивкой сложного четырехполюсника на более простые, параметры которого известны;
- способом эквивалентных преобразований.

Приведем способ определения параметров по значениям напряжений и токов в режимах холостого хода и короткого замыкания.

A-параметры:

$$A = \dot{U}_1 / \dot{U}_2 \text{ при } \dot{I}_2 = 0; \quad B = \dot{U}_1 / \dot{I}_2 \text{ при } \dot{U}_2 = 0;$$

$$C = \dot{I}_1 / \dot{U}_2 \text{ при } \dot{I}_2 = 0; \quad D = \dot{I}_1 / \dot{I}_2 \text{ при } \dot{U}_2 = 0.$$

Y-параметры:

$$Y_{11} = \dot{I}_1 / \dot{U}_1 \text{ при } \dot{U}_2 = 0; \quad Y_{12} = \dot{I}_1 / \dot{U}_2 \text{ при } \dot{U}_1 = 0;$$

$$Y_{21} = \dot{I}_2 / \dot{U}_1 \text{ при } \dot{U}_2 = 0; \quad Y_{22} = \dot{I}_2 / \dot{U}_2 \text{ при } \dot{U}_1 = 0.$$

Z-параметры:

$$Z_{11} = \dot{U}_1 / \dot{I}_1 \text{ при } \dot{I}_2 = 0; \quad Z_{12} = \dot{U}_1 / \dot{I}_2 \text{ при } \dot{I}_1 = 0;$$

$$Z_{21} = \dot{U}_2 / \dot{I}_1 \text{ при } \dot{I}_2 = 0; \quad Z_{22} = \dot{U}_2 / \dot{I}_2 \text{ при } \dot{I}_1 = 0.$$

H-параметры:

$$H_{11} = \dot{U}_1 / \dot{I}_1 \text{ при } \dot{U}_2 = 0; \quad H_{12} = \dot{U}_1 / \dot{U}_2 \text{ при } \dot{I}_1 = 0;$$

$$H_{21} = \dot{I}_2 / \dot{I}_1 \text{ при } \dot{U}_2 = 0; \quad H_{22} = \dot{I}_2 / \dot{U}_2 \text{ при } \dot{I}_1 = 0.$$

Например, Y-параметры можно определить, составляя уравнения методом контурных токов и решая систему уравнений по правилу Крамера:

$$\begin{cases} \dot{I}_1 = \frac{\Delta_{11}}{\Delta} \dot{U}_1 + \frac{\Delta_{12}}{\Delta} \dot{U}_2; \\ \dot{I}_2 = \frac{\Delta_{21}}{\Delta} \dot{U}_1 + \frac{\Delta_{22}}{\Delta} \dot{U}_2, \end{cases}$$

где $Y_{11} = \frac{\Delta_{11}}{\Delta}$, $Y_{12} = \frac{\Delta_{12}}{\Delta}$, $Y_{21} = \frac{\Delta_{21}}{\Delta}$, $Y_{22} = \frac{\Delta_{22}}{\Delta}$; Δ_{ij} - алгебраическое дополнение, полученное вычеркиванием из матрицы сопротивлений i -го столбца и j -й строки и

умноженное на значение $(-1)^{i+j}$; Δ - определитель матрицы сопротивлений, которая получена методом контурных токов.

Параметры матрицы Z-параметров можно получить из обратной матрицы Y-параметров:

$$[Z] = [Y]^{-1};$$

$$Z_{11} = \frac{Y_{22} \cdot (-1)^{1+1}}{\Delta(Y)} = \frac{Y_{22}}{\Delta(Y)}; \quad Z_{21} = \frac{Y_{22} \cdot (-1)^{2+1}}{\Delta(Y)} = -\frac{Y_{22}}{\Delta(Y)};$$

$$Z_{12} = \frac{Y_{12} \cdot (-1)^{1+2}}{\Delta(Y)} = -\frac{Y_{12}}{\Delta(Y)}; \quad Z_{22} = \frac{Y_{11} \cdot (-1)^{1+1}}{\Delta(Y)} = \frac{Y_{11}}{\Delta(Y)}.$$

Основное уравнение Z-параметров в матричной форме имеет вид

$$\begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{U}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \end{bmatrix}.$$

Взаимные и симметричные четырехполюсники. Для таких четырехполюсников справедливы свойства линейности и взаимности. Если четырехполюсники взаимные, то можно использовать метод контурных токов.

Пассивные четырехполюсники имеют связь между параметрами для каждой формы:

$$Y_{12} = Y_{21}; \quad Z_{12} = Z_{21}; \quad H_{12} = -H_{21}; \quad G_{12} = -G_{21}; \quad A \cdot D - B \cdot C = 1;$$

$$B_{12} \cdot B_{22} - B_{12} \cdot B_{21} = 1.$$

Симметричные (обратимые) четырехполюсники имеют связь между параметрами для каждой формы:

$$A = D; \quad B_{11} = B_{12}; \quad Y_{11} = Y_{22}; \quad Z_{11} = Z_{22}; \quad H_{11} = H_{22}; \quad G_{11} = G_{22}.$$

В этом случае не имеет значения, какая из двух пар зажимов будет входной или выходной.

Активные четырехполюсники всегда невзаимные, несимметричные и необратимые.

Связь параметров различных форм записи. Параметры различных форм записи основных уравнений зависят от элементов схемы замещения четырехполюсников. Для одной и той же схемы можно получить уравнения различных форм. Связь параметров различных форм записи приведена в табл.1.

Связь параметров различных форм записи

A		B	Y	Z	H	G
A	$\begin{matrix} A & B \\ C & D \end{matrix}$	$\begin{matrix} D & B \\ C & A \end{matrix}$	$\begin{matrix} D & -\Delta(A) \\ -1 & A \end{matrix}$	$\begin{matrix} A & \Delta(A) \\ 1 & -D \end{matrix}$	$\begin{matrix} B & \Delta(A) \\ 1 & C \end{matrix}$	$\begin{matrix} C & \Delta(A) \\ 1 & B \end{matrix}$
		$/\Delta(A) = 1$	$/B$	$/C$	$/D$	$/A$
B	$\begin{matrix} B_{22} & B_{12} \\ B_{21} & B_{11} \end{matrix}$	$\begin{matrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{matrix}$	$\begin{matrix} B_{11} & -1 \\ -\Delta(B) & B_{22} \end{matrix}$	$\begin{matrix} B_{22} & 1 \\ \Delta(B) & B_{11} \end{matrix}$	$\begin{matrix} B_{12} & 1 \\ -\Delta(B) & B_{21} \end{matrix}$	$\begin{matrix} B_{21} & -1 \\ \Delta(B) & B_{12} \end{matrix}$
	$/\Delta(B) = 1$		$/B_{12}$	$/B_{21}$	$/B_{11}$	$/B_{22}$
Y	$\begin{matrix} -Y_{22} & -1 \\ -\Delta(Y) & Y_{11} \end{matrix}$	$\begin{matrix} -Y_{11} & -1 \\ -\Delta(Y) & -Y_{22} \end{matrix}$	$\begin{matrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{matrix}$	$\begin{matrix} Y_{22} & Y_{12} \\ -Y_{21} & Y_{22} \end{matrix}$	$\begin{matrix} 1 & -Y_{12} \\ -Y_{21} & \Delta(Y) \end{matrix}$	$\begin{matrix} \Delta(Y) & Y_{12} \\ -Y_{21} & 1 \end{matrix}$
	$/Y_{21}$	$/Y_{12}$		$/\Delta(Y)$	$/Y_{11}$	$/Y_{22}$
Z	$\begin{matrix} Z_{11} & \Delta(Z) \\ 1 & Z_{22} \end{matrix}$	$\begin{matrix} Z_{22} & \Delta(Z) \\ 1 & Z_{11} \end{matrix}$	$\begin{matrix} Z_{11} & -Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{matrix}$	$\begin{matrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \Delta(Z) & Z_{12} \\ Z_{21} & 1 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 1 & -Z_{12} \\ Z_{21} & \Delta(Z) \end{matrix}$
	$/Z_{21}$	$/Z_{12}$	$/\Delta(Z)$		$/Z_{22}$	$/Z_{11}$
H	$\begin{matrix} -\Delta(H) & -H_{11} \\ -H_{22} & -1 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 1 & H_{11} \\ H_{22} & \Delta(H) \end{matrix}$	$\begin{matrix} 1 & -H_{12} \\ H_{21} & \Delta(H) \end{matrix}$	$\begin{matrix} \Delta(H) & H_{12} \\ -H_{21} & 1 \end{matrix}$	$\begin{matrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{matrix}$	$\begin{matrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{matrix}$
	$/H_{21}$	$/H_{12}$	$/H_{11}$	$/H_{22}$		$/\Delta(H)$
G	$\begin{matrix} 1 & G_{22} \\ G_{11} & \Delta(G) \end{matrix}$	$\begin{matrix} -\Delta(G) & G_{22} \\ -G_{11} & -1 \end{matrix}$	$\begin{matrix} \Delta(G) & G_{12} \\ -G_{21} & 1 \end{matrix}$	$\begin{matrix} -1 & G_{12} \\ G_{21} & \Delta(G) \end{matrix}$	$\begin{matrix} G_{22} & -G_{12} \\ -G_{21} & G_{11} \end{matrix}$	$\begin{matrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{matrix}$
	$/G_{21}$	$/G_{12}$	$/G_{22}$	$/G_{11}$	$/\Delta(G)$	

Расчет А-параметров четырехполюсника при прямом питании для Т-образной схемы замещения. Рассчитать А-параметры можно, используя Т-образную схему замещения (рис.1) в режимах холостого хода и короткого замыкания.

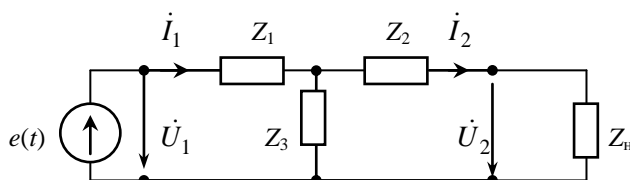


Рис.1. Т-образная схема четырехполюсника с А-параметрами

Например, в режиме холостого хода ток на выходе равен нулю ($I_2 = 0$). Тогда входное сопротивление и ток, а на выходе напряжение можно определить по формулам:

$$Z_{1x} = Z_1 + Z_3; \quad \dot{I}_{1x} = \frac{\dot{U}_{1x}}{Z_{1x}} = \frac{\dot{E}}{Z_{1x}}; \quad \dot{U}_{2xx} = \dot{I}_{1x} \cdot Z_3.$$

Параметры A и C определяются так:

$$A = \frac{\dot{U}_{1x}}{\dot{U}_{2xx}} = \frac{\dot{I}_{1x} \cdot Z_{1x}}{\dot{I}_{1x} \cdot Z_3} = 1 + \frac{Z_1}{Z_3}; \quad C = \frac{\dot{I}_{1x}}{\dot{U}_{2xx}} = \frac{\dot{I}_{1x}}{\dot{I}_{1x} \cdot Z_3} = \frac{1}{Z_3}.$$

В режиме короткого замыкания напряжение на выходе равно нулю ($U_2 = 0$). Тогда входное и выходное сопротивления и ток на выходе определяются по формулам:

$$Z_{1к} = Z_1 + \frac{Z_2 \cdot Z_3}{Z_2 + Z_3}; \quad \dot{I}_{1к} = \frac{\dot{U}_{1к}}{Z_{1к}}; \quad \dot{I}_{2кз} = \frac{\dot{I}_{1к}}{Z_2} \cdot \frac{Z_2 \cdot Z_3}{Z_2 + Z_3}.$$

Параметры B и D равны:

$$B = \frac{\dot{U}_{1к}}{\dot{I}_{2кз}} = \frac{\dot{I}_{1к}}{\dot{I}_{1к}} \cdot \frac{Z_{1к} \cdot (Z_2 + Z_3)}{Z_3} = Z_1 + Z_2 + \frac{Z_1 \cdot Z_2}{Z_3};$$

$$D = \frac{\dot{I}_{1к}}{\dot{I}_{2кз}} = \frac{\dot{I}_{1к}}{\dot{I}_{1к}} \cdot \frac{(Z_2 + Z_3)}{Z_3} = 1 + \frac{Z_2}{Z_3}.$$

Рассмотрим задачу синтеза. Зная параметры четырехполюсника, можно определить сопротивления Т-образной схемы замещения:

$$A = 1 + \frac{Z_1}{Z_3} = 1 + Z_1 \cdot C; \quad Z_1 = \frac{A-1}{C};$$

$$D = 1 + \frac{Z_2}{Z_3} = 1 + Z_2 \cdot C; \quad Z_2 = \frac{D-1}{C};$$

$$C = \frac{1}{Z_3}; \quad Z_3 = \frac{1}{C};$$

$$Z_{1x} = Z_1 + Z_3 = \frac{A-1}{C} + \frac{1}{C} = \frac{A}{C}; \quad Z_{1к} = \frac{B}{D}.$$

Расчет параметров четырехполюсника при обратном питании для Т-образной схемы замещения. Система основных уравнений четырехполюсника (рис.2) при обратном питании имеет вид

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = D\dot{U}_2 + B\dot{I}_2; \\ \dot{I}_1 = C\dot{U}_2 + A\dot{I}_2. \end{cases}$$

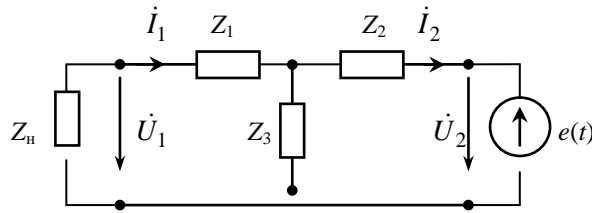


Рис.2. Схема обратного питания четырехполюсника

В режиме холостого хода ток на входе равен нулю ($I_1 = 0$). Тогда выходное сопротивление и ток, а на входе напряжение определяются по формулам:

$$Z_{2x} = Z_2 + Z_3; \quad i_{2x} = \frac{\dot{U}_{2x}}{Z_{2x}} = \frac{\dot{E}}{Z_{2x}}; \quad \dot{U}_{1xx} = i_{2x} \cdot Z_3.$$

Параметры D и C определяются в режиме холостого хода на входе:

$$D = \frac{\dot{U}_{2x}}{\dot{U}_{1xx}} = \frac{i_{2x} \cdot Z_{2x}}{i_{2x} Z_3} = 1 + \frac{Z_2}{Z_3}; \quad C = \frac{i_{1x}}{\dot{U}_{1xx}} = \frac{i_{2x}}{i_{2x} Z_3} = \frac{1}{Z_3}.$$

В режиме короткого замыкания напряжение на входе равно нулю ($U_1 = 0$). Тогда входное сопротивление и ток на выходе определяются по формулам:

$$Z_{2кз} = Z_2 + \frac{Z_1 \cdot Z_3}{Z_1 + Z_3}; \quad i_{2кз} = \frac{\dot{U}_{2кз}}{Z_{2кз}}; \quad i_{1кз} = \frac{i_{2кз}}{Z_1} \cdot \frac{Z_1 \cdot Z_3}{Z_1 + Z_3}.$$

Параметры B и A равны:

$$B = \frac{\dot{U}_{2кз}}{i_{1кз}} = \frac{i_{2кз}}{i_{2кз}} \cdot \frac{Z_{2кз} \cdot (Z_1 + Z_3)}{Z_3} = Z_1 + Z_2 + \frac{Z_1 \cdot Z_2}{Z_3};$$

$$A = \frac{i_{2кз}}{i_{1кз}} = \frac{i_{2кз}}{i_{2кз}} \cdot \frac{(Z_1 + Z_3)}{Z_3} = 1 + \frac{Z_1}{Z_3}.$$

Расчет A -параметров четырехполюсника при прямом питании для Π -образной схемы замещения. Система основных уравнений A -параметров для Π -образной схемы замещения (рис.3) имеет вид

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = A\dot{U}_2 + B\dot{I}_2; \\ \dot{I}_1 = C\dot{U}_2 + D\dot{I}_2. \end{cases}$$

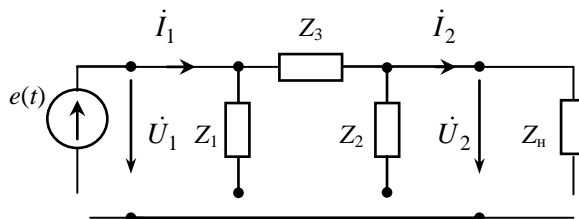


Рис.3. Π -образная схема четырехполюсника

В режиме холостого хода ток на выходе равен нулю ($I_2 = 0$). В этом случае можно определить входное сопротивление, входной ток и напряжение на выходе по формулам:

$$Z_{1x} = \frac{Z_1 \cdot (Z_2 + Z_3)}{Z_1 + Z_2 + Z_3}; \quad i_{1x} = \frac{\dot{U}_{1x}}{Z_{1x}}; \quad U_{2xx} = \frac{\dot{U}_{1x} \cdot Z_2}{(Z_2 + Z_3)}.$$

Определим параметры A и C в режиме холостого хода для П-образной схемы:

$$A = \frac{\dot{U}_{1x}}{\dot{U}_{2xx}} = \frac{\dot{U}_{1x}(Z_2 + Z_3)}{\dot{U}_{1x} \cdot Z_2} = 1 + \frac{Z_3}{Z_2}; \quad C = \frac{i_{1x}}{\dot{U}_{2xx}} = \frac{i_{1x}(Z_2 + Z_3)}{i_{1x} Z_{1x} \cdot Z_2} = \frac{Z_1 + Z_2 + Z_3}{Z_1 \cdot Z_2}.$$

В режиме короткого замыкания напряжение на выходе равно нулю ($U_2 = 0$). В этом режиме можно определить сопротивление на входе, входной ток и ток на выходе:

$$Z_{1k} = \frac{Z_1 \cdot Z_3}{Z_1 + Z_3}; \quad i_{1k} = \frac{\dot{U}_{1k}}{Z_{1k}}; \quad i_{2kk} = \frac{\dot{U}_{1k}}{Z_3}.$$

Параметры D и B в режиме холостого хода для П-образной схемы определяются по формулам:

$$D = \frac{i_{1k}}{i_{2kk}} = \frac{i_{1k} Z_3}{i_{1k} Z_{1k}} = 1 + \frac{Z_3}{Z_1}; \quad B = \frac{\dot{U}_{1k}}{i_{2kk}} = \frac{\dot{U}_{1k} \cdot Z_3}{\dot{U}_{1k}} = Z_3.$$

Входное сопротивление в режимах холостого хода и короткого замыкания определяются через A -параметры:

$$Z_{1x} = \frac{\dot{U}_{1x}}{i_{1x}} = \frac{Z_1 \cdot Z_2 \cdot (Z_2 + Z_3)}{(Z_1 + Z_2 + Z_3) \cdot Z_2} = \frac{A}{C};$$

$$Z_{1k} = \frac{\dot{U}_{1k}}{i_{1k}} = \frac{Z_1 \cdot Z_3}{Z_1 + Z_3} = \frac{B}{D}.$$

Характеристическое сопротивление и постоянная передачи. Входное сопротивление (характеристическое) определяется как отношение входного напряжения к входному току при прямом питании четырехполюсника:

$$Z_{c1} = Z_{вх1} = \frac{\dot{U}_1}{i_1} = \frac{A\dot{U}_1 + B\dot{i}_1}{C\dot{U}_1 + D\dot{i}_1} = \frac{AZ_{2н} + B}{CZ_{2н} + D} = f(Z_{2н}),$$

где $\dot{U}_2 = Z_{2н} \cdot \dot{i}_2$.

Характеристическое сопротивление определяется как отношение выходного напряжения к выходному току при обратном питании:

$$Z_{c2} = Z_{вх2} = \frac{\dot{U}_2}{i_2} = \frac{D\dot{U}_1 + B\dot{i}_1}{C\dot{U}_1 + A\dot{i}_1} = \frac{DZ_{1н} + B}{CZ_{1н} + A} = f(Z_{1н}),$$

где $\dot{U}_1 = Z_{1н} \cdot \dot{i}_1$.

При согласованном режиме характеристические сопротивления можно определить через A -параметры или используя входные (прямое питание) или выходные (обратное питание) сопротивления в режимах холостого хода и короткого замыкания:

- прямое питание $Z_{c2} = Z_{2н}$:

$$Z_{c1} = \sqrt{Z_{1х} \cdot Z_{1к}} = \sqrt{\frac{AB}{CD}};$$

- обратное питание $Z_{c1} = Z_{1н}$:

$$Z_{c2} = \sqrt{Z_{2х} \cdot Z_{2к}} = \sqrt{\frac{DB}{CA}}.$$

Постоянная передача четырехполюсника при согласованном режиме ($Z_{2н} = Z_{c2}$) будет:

$$g = \frac{1}{2} \ln \frac{\dot{U}_1 \dot{I}_1}{\dot{U}_2 \dot{I}_2} = \ln(\sqrt{AD} + \sqrt{BC});$$

$$e^g = \sqrt{AD} + \sqrt{BC} = a + jb = A \cdot e^{j\beta} = e^{\alpha} \cdot e^{j\beta}.$$

Здесь $g = \alpha + j\beta$, а $e^{\alpha} = A$.

Пассивный четырехполюсник в гиперболических функциях. Зависимость напряжений и токов можно определить при их передаче от входа к выходу через пассивный четырехполюсник. Предположим, что выполняются следующие гиперболические функции:

$$\text{ch}g = \sqrt{A \cdot D}; \quad \text{sh}g = \sqrt{B \cdot C}.$$

Проверим выполнение признака взаимности в гиперболических функциях:

$$\text{если } \text{ch}^2 g - \text{sh}^2 g = 1, \text{ то } A \cdot D - B \cdot C = 1.$$

Характеристическое сопротивление при прямом питании нужно разделить на характеристическое сопротивление при обратном питании, а затем их перемножить:

$$\frac{Z_{c1}}{Z_{c2}} = \sqrt{\frac{A \cdot B}{C \cdot D} \cdot \frac{C \cdot A}{D \cdot B}} = \frac{A}{D}; \quad Z_{c1} \cdot Z_{c2} = \sqrt{\frac{A \cdot B}{C \cdot D} \cdot \frac{D \cdot B}{C \cdot A}} = \frac{B}{C}.$$

Выполнение следующих выражений необходимо проверить в гиперболических функциях:

$$A = \sqrt{\frac{Z_{c1}}{Z_{c2}}} \cdot \text{ch}g = \sqrt{\frac{A}{D}} \cdot A \cdot D = A;$$

$$B = \sqrt{Z_{c1} \cdot Z_{c2}} \cdot \text{sh}g = \sqrt{\frac{B}{C}} \cdot B \cdot C = B;$$

$$C = \sqrt{\frac{1}{Z_{c1} \cdot Z_{c2}}} \cdot \text{sh}g = \sqrt{\frac{C}{B}} \cdot B \cdot C = C;$$

$$D = \sqrt{\frac{Z_{c2}}{Z_{c1}}} \cdot \text{ch}g = \sqrt{\frac{D}{A}} \cdot A \cdot D = D.$$

Гиперболические выражения тождественны параметрам A , B , C и D , а их замена в основных уравнениях справедлива. Основные уравнения A -параметров в гиперболических функциях имеют вид:

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = \sqrt{\frac{Z_{c1}}{Z_{c2}}} \cdot \text{chg} \cdot \dot{U}_2 + \sqrt{Z_{c1} \cdot Z_{c2}} \cdot \text{shg} \cdot \dot{I}_2; \\ \dot{I}_1 = \sqrt{\frac{1}{Z_{c1} \cdot Z_{c2}}} \cdot \text{shg} \cdot \dot{U}_2 + \sqrt{\frac{Z_{c2}}{Z_{c1}}} \cdot \text{chg} \cdot \dot{I}_2. \end{cases}$$

Эти уравнения можно преобразовать к следующему виду:

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = \sqrt{\frac{Z_{c1}}{Z_{c2}}} (\text{chg} \cdot \dot{U}_2 + Z_{c2} \cdot \text{shg} \cdot \dot{I}_2); \\ \dot{I}_1 = \sqrt{\frac{Z_{c2}}{Z_{c1}}} \left(\frac{1}{Z_{c2}} \text{shg} \cdot \dot{U}_2 + \text{chg} \cdot \dot{I}_2 \right). \end{cases}$$

При согласованной нагрузке можно считать, что характеристическое сопротивление на выходе ($Z_{\text{н}} = Z_{c2}$) равно:

$$Z_{c2} = \frac{\dot{U}_2}{\dot{I}_2}.$$

Используя эту зависимость, можно преобразовать основные уравнения в гиперболических функциях к виду

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = \sqrt{\frac{Z_{c1}}{Z_{c2}}} \dot{U}_2 \cdot (\text{chg} + \text{shg}) = \sqrt{\frac{Z_{c1}}{Z_{c2}}} \dot{U}_2 \cdot e^g; \\ \dot{I}_1 = \sqrt{\frac{Z_{c2}}{Z_{c1}}} \dot{I}_2 (\text{shg} + \text{chg}) = \sqrt{\frac{Z_{c2}}{Z_{c1}}} \dot{I}_2 \cdot e^g. \end{cases}$$

Здесь $e^g = \text{chg} + \text{shg} = \sqrt{A \cdot D} + \sqrt{B \cdot C} = a + jb = A \cdot e^{j\beta} = e^\alpha \cdot e^{j\beta}$.

Тогда можно рассчитать постоянную передачи, вычислив предварительно значения A -параметров по сопротивлениям схемы замещения четырехполюсника:

$$g = \ln(\sqrt{AD} + \sqrt{BC}) = \alpha + j \cdot \beta.$$

Зависимость между входными и выходными напряжениями или токами для несимметричного четырехполюсника имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\dot{U}_1}{\dot{U}_2} &= \sqrt{\frac{Z_{c1}}{Z_{c2}}} \cdot e^g = \sqrt{\frac{Z_{c1}}{Z_{c2}}} \cdot e^\alpha \cdot e^{j\beta}; \\ \frac{\dot{I}_1}{\dot{I}_2} &= \sqrt{\frac{Z_{c2}}{Z_{c1}}} \cdot e^g = \sqrt{\frac{Z_{c2}}{Z_{c1}}} \cdot e^\alpha \cdot e^{j\beta}. \end{aligned}$$

Здесь e^α - коэффициент ослабления амплитуды α , Нп; $e^{j\beta}$ - коэффициент фазы β , радиан.

Передача напряжения и тока пассивного четырехполюсника в действующих значениях равна:

- несимметричного:

$$\frac{U_1}{U_2} = \sqrt{\frac{Z_{c1}}{Z_{c2}}} \cdot e^{\alpha}; \quad \frac{I_1}{I_2} = \sqrt{\frac{Z_{c2}}{Z_{c1}}} \cdot e^{\alpha};$$

- симметричного:

$$\frac{U_1}{U_2} = e^{\alpha}; \quad \frac{I_1}{I_2} = e^{\alpha}.$$

Задания и методика выполнения работы

Задание 1. Рассчитать все величины в алгебраической и показательной форме (варианты заданий приведены в табл.2).

Таблица 2

Варианты заданий

Вариант, схема (см. рис.4)	Частота f , Гц	Z_1		Z_2		Z_3	
		R_1 , Ом	C_1 , мкФ	R_2 , Ом	L_2 , мГн	R_3 , Ом	L_3 , мГн
1, <i>a</i>	400	100	4	10	4	100	40
2, <i>a</i>	400	120	3,3	20	8	80	47
3, <i>б</i>	400	140	2,7	30	12	100	30
4, <i>б</i>	400	160	2,4	40	16	80	47
5, <i>a</i>	400	180	2,2	50	20	100	43
6, <i>a</i>	400	160	2	10	16	80	82
7, <i>б</i>	400	140	4	20	12	100	68
8, <i>б</i>	400	120	3,3	30	8	120	47
9, <i>a</i>	400	110	2,7	40	4	110	40
10, <i>a</i>	400	100	2,4	50	18	100	47
11, <i>б</i>	400	100	2,2	10	8	80	30
12, <i>б</i>	400	120	2	20	12	100	47
13, <i>a</i>	400	140	4	30	16	90	43
14, <i>a</i>	400	160	3,3	40	20	100	56
15, <i>б</i>	400	180	2,7	50	16	120	51
16, <i>б</i>	400	160	2,4	10	12	100	47
17, <i>a</i>	400	140	2,2	20	8	80	56

Вариант, схема (см. рис.4)	Частота f , Гц	Z_1		Z_2		Z_3	
		R_1 , Ом	C_1 , мкФ	R_2 , Ом	L_2 , мГн	R_3 , Ом	L_3 , мГн
18,а	400	120	2	30	4	100	36
19,б	400	110	3	40	18	110	43
20,а	400	100	3,6	50	12	100	40
21,б	400	100	4	10	4	100	40
22,б	400	120	3,3	20	8	80	47
23,а	400	140	2,7	30	12	100	30
24,а	400	160	2,4	40	16	80	47
25,б	400	100	3,6	50	12	100	40

1. Рассчитать токи и напряжения в режимах холостого хода и короткого замыкания на выходе.
2. Рассчитать A -параметры, используя сопротивления эквивалентной Т-образной схемы замещения (рис.4).
3. Проверить параметры на взаимность и симметричность четырехполюсника.
4. Рассчитать характеристические сопротивления: со стороны входа Z_{c1} и со стороны выхода Z_{c2} .

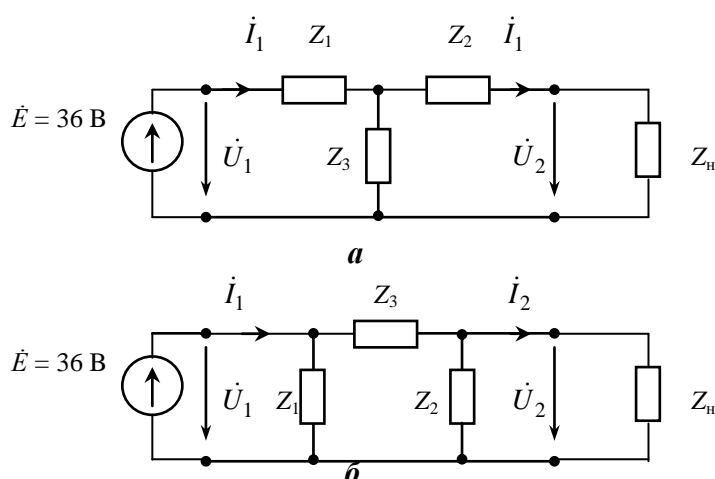


Рис.4. Исследуемые схемы четырехполюсника: а - Т-образная; б - П-образная

5. Определить передаточную характеристику четырехполюсника и коэффициенты передачи напряжения и тока.

6. Собрать схему (см. рис.1), подключить нагрузку ($Z_n = Z_{c2}$) к выходу четырехполюсника (см. табл.2) и экспериментально определить напряжение и токи. Определить отношение входного напряжения к выходному, а также отношение входного тока к выходному. Результат сравнить с расчетными данными.

7. Исследовать влияние переменной нагрузки на выходе на изменение постоянной передачи, построить графики ВАХ и изменения передаваемой мощности на выходе как функции от тока I_2 и изменяемой нагрузки $Z_n = \text{Var}$.

8. Сделать выводы по работе.

Контрольные вопросы

1. Какие формы записи четырехполюсников используют?
2. Приведите основные уравнения четырехполюсников (одну из форм записи по просьбе преподавателя).
3. Как рассчитать A -параметры по сопротивлениям Т-образной схемы?
4. Как определить взаимность, симметричность четырехполюсников?
5. Что определяют характеристические параметры четырехполюсников?
6. Как рассчитать сопротивления схемы замещения Т-образного четырехполюсника, зная A -параметры?
7. Как рассчитать постоянную передачи четырехполюсников?
8. Как определить согласованный режим работы четырехполюсника?
9. Как рассчитать постоянную передачи напряжения и тока для симметричного и несимметричного четырехполюсника?
10. Как определить регулярность составных четырехполюсников?

Литература

1. **Мурзин Ю.М., Волков Ю.И.** Электротехника: учеб. пособие. - СПб.: Питер, 2007. - 443 с.
2. **Бессонов Л.А.** Теоретические основы электротехники: Электрические цепи. - М.: Гардарики, 2001. - 536 с.
3. **Волков Ю.И., Сапожников А.Б.** Исследование электрических цепей в программных средах Multisim, Matlab и LabVIEW. Методические указания к выполнению лабораторных работ по курсу «Основы электротехники и теории цепей». - М.: МИЭТ, 2009. - 120 с.
4. **Мурзин Ю.М., Волков Ю.И.** Сборник заданий к лабораторным работам по курсу «Электротехника». - М.: МИЭТ, 2003. - 71 с.
5. **Сапожников А.Б., Сапожников Б.И.** Исследование переходных процессов в программных средах Multisim, Matlab и LabVIEW: учеб. пособие. - М.: МИЭТ, 2010. - 96 с.