

## Индивидуальное задание (КМ 4)

Задание 2. Квадратичные формы. Знакоопределенность квадратичной формы. Критерий Сильвестра. Приведение квадратичной формы к каноническому виду. Ортогональное преобразование. Ортонормированный базис. Матрица перехода.

Ниже даны четыре матрицы размера 3 x 3.

1. По каждой из заданных матриц восстановить, где это возможно, квадратичную форму. Каждая ли из заданных матриц может соответствовать некоторой квадратичной форме? Почему?

Следующие задания выполнить только для тех квадратичных форм, которые удалось восстановить.

2. Установить знакоопределённость квадратичной формы двумя способами:

- 1) через собственные значения (сформулировать метод);
- 2) с помощью критерия Сильвестра (сформулировать метод).

3. Привести квадратичные формы к каноническому виду. Указать какой-либо ортонормированный базис, в котором данная квадратичная форма имеет канонический вид (обратите внимание, что здесь, возможно, снова придется применить процесс ортогонализации для нахождения ортонормированного базиса). Для получившегося базиса найти прямую и обратную матрицы переходов, записать соответствующие этим матрицам линейные преобразования. Сделать проверку полученного результата непосредственной подстановкой в квадратичную форму формул преобразования координат.

В MATLAB сделать проверку: проверить результат с помощью функции `eig()`

`>> d=eig(A)` %Функция вычисляет собственные значения матрицы A.

`>> [U,D]=eig(A)` %Матрица  $U$  состоит правых собственных векторов, удовлетворяющих соотношению  $A \cdot U = U \cdot D$ . Эти векторы нормированы так, что норма каждого из них равна единице.

### Вариант 1

$$a_1 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad a_2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$a_3 = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \quad a_4 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

### Вариант 2

$$a_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -3 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad a_2 = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$a_3 = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad a_4 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

### Вариант 3

$$a_1 = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad a_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$a_3 = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \quad a_4 = \begin{pmatrix} -3 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

### Вариант 4

$$a_1 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \\ 3 & -3 & 0 \end{pmatrix} \quad a_2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$a_3 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad a_4 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

### Вариант 5

$$a_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad a_2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$a_3 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad a_4 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -4 \\ 0 & -4 & -2 \end{pmatrix}$$

### Вариант 6

$$a_1 = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad a_2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$a_3 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \quad a_4 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

### Вариант 7

$$a_1 = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad a_2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$a_3 = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix} \quad a_4 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

### Вариант 8

$$a_1 = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad a_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$a_3 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad a_4 = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

**Вариант 9**

$$a_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad a_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$a_3 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad a_4 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

**Вариант 10**

$$a_1 = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad a_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$a_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \quad a_4 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

**Вариант 11**

$$a_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad a_2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$a_3 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad a_4 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

**Вариант 12**

$$a_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad a_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$a_3 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad a_4 = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 0 \\ -3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

**Вариант 13**

$$a_1 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad a_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$a_3 = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \quad a_4 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

**Вариант 14**

$$a_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & -3 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad a_2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 0 & 6 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$a_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \quad a_4 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

**Вариант 15**

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad a_2 = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$a_3 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad a_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

**Вариант 16**

$$a_1 = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad a_2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$a_3 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \quad a_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

**Вариант 17**

$$a_1 = \begin{pmatrix} -2 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad a_2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$a_3 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad a_4 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

**Вариант 18**

$$a_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix} \quad a_2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$a_3 = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -2 \\ 0 & -2 & -4 \end{pmatrix} \quad a_4 = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

**Вариант 19**

$$a_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad a_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$a_3 = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \quad a_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

**Вариант 20**

$$a_1 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad a_2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$a_3 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad a_4 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

**Вариант 21**

$$a_1 = \begin{pmatrix} 0 & -3 & -3 \\ -3 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad a_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$a_3 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad a_4 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

**Вариант 22**

$$a_1 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad a_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 2 \\ 0 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

$$a_3 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad a_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

**Вариант 23**

$$a_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \quad a_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$a_3 = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad a_4 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

**Вариант 24**

$$a_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad a_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$a_3 = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad a_4 = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

**Вариант 25**

$$a_1 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -3 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -1 \end{pmatrix} \quad a_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$a_3 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad a_4 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

**Вариант 26**

$$a_1 = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad a_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$a_3 = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 0 \\ 2 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad a_4 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & -4 & 2 \end{pmatrix}$$

**Вариант 27**

$$a_1 = \begin{pmatrix} -3 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad a_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$a_3 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \quad a_4 = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

**Вариант 28**

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad a_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$a_3 = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \quad a_4 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$



**Вариант 29**

$$a_1 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad a_2 = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$a_3 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad a_4 = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 0 \\ 6 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}$$

**Вариант 30**

$$a_1 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ -3 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad a_2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$a_3 = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \quad a_4 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$