Авторы: кафедра ВМ-1

Модуль 3. Кривые и поверхности второго порядка.

Оглавление

Лабораторный практикум 3.2. Кривые и поверхности второго порядка.

1. Кривые второго порядка

Матлаб обладает рядом встроенных функций для упрощенного построения графиков некоторых функций. Одна из таких функций «ezplot».

Пример 1.

```
figure, axis equal, axis([-1 1 -1 1]), grid on, hold on
ezplot('x^2+y^2=1')
```

Кроме того, данную функцию можно использовать и с символьными переменными

```
syms  x y
ezplot(x+y-1)
```

Упражнение 1.

Создать 6 графических подобластей.

```
figure
subplot(3,2,1), axis equal, axis([-1 1 -1 1]), grid on, hold on
 subplot(3,2,2), axis equal, axis([-1 1 -1 1]), grid on, hold on
итд  subplot(3,2,3), subplot(3,2,4), subplot(3,2,5), subplot(3,2,6),
```

В первой построить эллипс, a>b, отметить фокусы, директрисы, изобразить описывающий его прямоугольник,

во второй области построить эллипс, в котором b>a, отметить фокусы, директрисы,

далее гиперболу, сопряженную гиперболу, у гипербол построить асимптоты, отметить фокусы, директрисы

параболу, отметить фокус, директрису.

В шестой подобласти изобразить <u>на одном графике</u> эллипс, a>b и гиперболу, a>b.

Упражнение 2.

Для уравнения кривой второго порядка $a * x^2 + b * xy + c * y^2 = 1$ реализовать m-функцию get_canonical, которая приводит уравнение данной кривой к каноническому виду $u * x^2 + v * y^2 = 1$, используя поворот осей координат на определенный угол. Таким образом, заголовок файла «get_canonical.m» будет выглядеть примерно так:

```
function [u,v,phi]= get_canonical (a,b,c)
```

Упражнение 3.

Нарисовать кривую, заданную уравнением $x^2 + xy + 2y^2 = 1$.

С помощью реализованной ранее функции get_canonical привести уравнение данной кривой к каноническому виду, отметить фокусы, отобразить директрисы. Сравнить результат.

2. Поверхности второго порядка

MATLAB обладает мощным набором встроенных функций для построения различных поверхностей, в том числе и поверхностей второго порядка.

Эллипсоид $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$, его уравнение этой поверхности можно задать параметрически: $x=x(\theta,\varphi)$, $y=y(\theta,\varphi)$, $z=z(\theta,\varphi)$. Каждой точке на поверхности эллипсоида с координатами (x,y,z) ставится в соответствии пара чисел-координат (θ,φ) по формулам:

$$\begin{cases} x = a\cos\theta\cos\varphi \\ y = b\cos\theta\sin\varphi \\ z = c\sin\theta \end{cases}$$

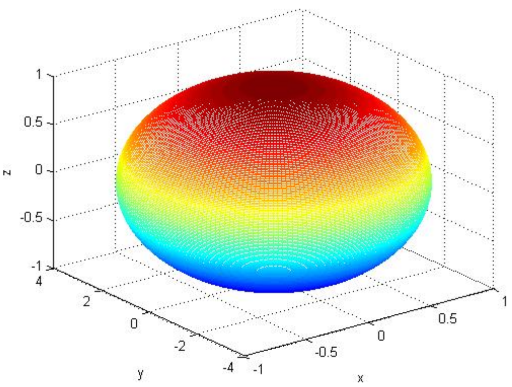
Если $\begin{cases} 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2} \\ 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2} \end{cases}$, то мы получим часть эллипсоида лежащего в первом октанте $(x \ge 0, y \ge 0, z \ge 0)$

Если $\begin{cases} 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2} \\ 0 \le \varphi \le 2\pi \end{cases}$, то мы получим верхнюю часть эллипсоида $(z \ge 0)$.

Если $\begin{cases} -\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2} \\ 0 \le \varphi \le 2\pi \end{cases}$, то мы получим весь эллипсоид.

Пример построения эллипсоида:

```
a=1;
b=4;
c=1;
theta=(-pi/2:pi/200:pi/2)';
phi=0:pi/100:2*pi;
x=a*cos(theta)*cos(phi);
y=b*cos(theta)*sin(phi);
z=c*sin(theta)*ones(size(phi));
figure ('Color','w')
mesh(x,y,z);
xlabel('x'), ylabel('y'),zlabel('z')
```



В этой программе мы транспонировали строку - массив «theta», так как для каждого аргумента функции «mesh» мы создадим квадратные матрицы mesh(x(i,j),y(i,j),z(i,j)), а при перемножении столбца на строку как раз и получается квадратная матрица.

Упражнение 4.

Используя данную программу изобразите часть эллипсоида лежащего в первом октанте $(x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0)$, верхнюю часть эллипсоида $(z \geq 0)$, изобразите также эллипсоид в декартовых координатах, используя «meshgrid» и «mesh» или «plot3». Сравните полученные результаты.

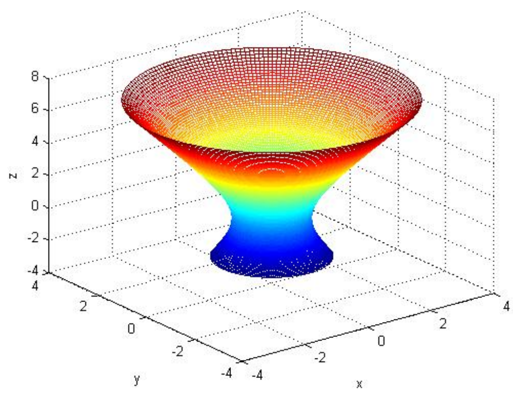
Однополостный гиперболоид $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ определяется следующей зависимостью координат точек поверхности $x = x(u, \varphi)$, $y = y(u, \varphi)$, $z = z(u, \varphi)$ от двух параметров (u, φ):

$$\begin{cases} x = a\cosh u \cos\varphi \\ y = b\cosh u \sin\varphi \\ z = c\sinh u \end{cases}$$

«$\cosh u$» и «$\sinh u$» гиперболические косинус и синус. Параметр u регулирует высоту фигуры вдоль оси OZ. Для того чтобы при подстановке этих параметрических уравнений в уравнение однополостного гиперболоида получить тождество, нужно вспомнить аналог основного тригонометрического тождества для гиперболических функций $(\cosh u)^2 - (\sinh u)^2 = 1$.

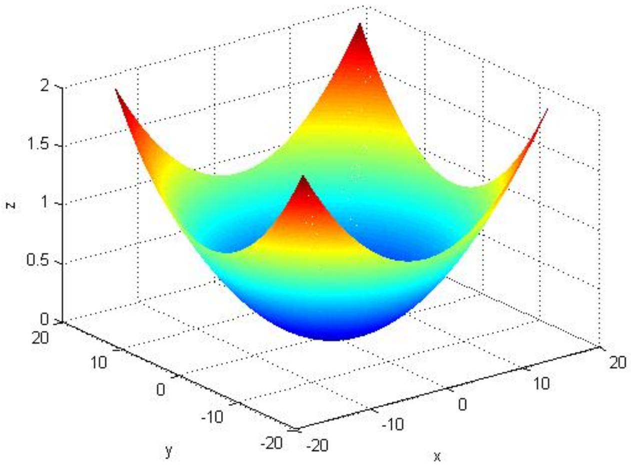
Пример построения однополостного гиперболоида:

```
a=1;
b=1;
c=2;
u=(-1:0.02:2)';
phi=0:0.01*pi:2*pi;
X=a*cosh(u)*cos(phi);
Y=b*cosh(u)*sin(phi);
Z=c*sinh(u)*ones(size(phi));
figure('Color','w')
mesh(X,Y,Z);
xlabel('x'), ylabel('y'),zlabel('z')
```



Каноническое уравнение **эллиптического параболоида** имеет вид $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=z$. Так как переменная z явно выражена через x и y , то эллиптический параболоид можно построить с помощью «meshgrid»

```
a=16;
b=16;
[X,Y]=meshgrid(-a:0.1:a,-b:0.1:b);
Z=(X.^2/a^2 +Y.^2/b^2 );
figure('Color','w')
mesh(X,Y,Z);
xlabel('x'), ylabel('y'),zlabel('z')
```



Упражнение 5.

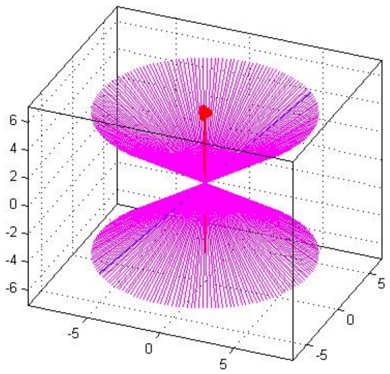
Провести исследование поверхностей второго порядка методом сечений.
Однополосного гиперболоида, двуполостного гиперболоида, гиперболического параболоида, эллиптического параболоида.
Например, по однополостному параболоиду должно быть примерно такое исследование:
разбиваем графическое окно на несколько подобластей
в первом рисуем все, что касается сечений параллельных плоскости YOX,
во втором ... ZOX,
в третьей ZOY
Прокомментировать, как получаемые сечения связаны с непосредственным названием фигуры.

3. Анимация.

Конус. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}$. Его поверхность можно полностью составить из прямых линий. Такие поверхности называются линейчатыми. Исходя из этого, образуем поверхность конуса вращением прямой – образующей конуса, которая вращается вокруг пересекающейся с ней другой прямой - осью конуса. Вращение будем осуществлять с помощью функции «rotate(L,[1 1 0],10+i)», образующая L поворачивается вокруг оси с направлением [1 1 0], на угол 10 градусов. За счет «i» создается цикл, в результате которого мы каждый раз исходную фигуру L будем поворачивать на все больший угол, пока не пройдем полный оборот 360 градусов. Команда «pause(секунды)» позволяет работать программу с задержкой, что и создает впечатление анимации.

Пример построения поверхности конуса с помощью вращения:

```
figure
grid on, hold on, box on, axis equal,view(23,29)
% Строим ось вращения: задаем прямую параметрически
% t-параметр, M-точка, V – направляющий вектор оси
 t=[-5 5]; M=[0;0;0]; V=[0;0;1];
os=M*ones(size(t))+V*t;
plot3(os (1,:), os (2,:), os (3,:),'Color','red','LineWidth',2);
plot3(os (1,2), os (2,2), os (3,2),'>r','MarkerSize',8,'LineWidth',4);
% Строим образующую L
M=[0;0;0]; V=[1;1;1];
obr=M*ones(size(t))+V*t;
L=plot3(obr (1,:), obr (2,:), obr (3,:));
for i=1:2:360, L=plot3(obr (1,:), obr (2,:), obr (3,:),'m');
rotate(L,[0 0 1],10+i),pause(0.1),end
```

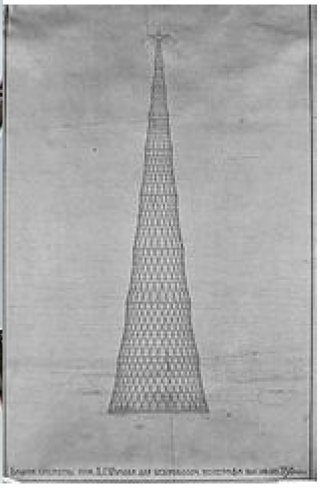


Упражнение 4.

Сделать анимацию, вращения прямой вокруг параллельной ей прямой. (Что получится?)

4. Задание на «5».

Однополостный гиперболоид $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$. Также является линейчатой поверхностью. Более того через каждую точку однополостного гиперболоида проходят две различные прямые, целиком расположенные на этой поверхности. Его поверхность можно получить, вращая прямую или даже две пересекающиеся прямые, принадлежащие поверхности параболоида вокруг скрещивающейся с ними прямой, то есть вокруг мнимой оси однополосного гиперболоида.



Задание 1. Составить уравнения двух пересекающихся прямых в пространстве, скрещивающихся с осью OZ, их вращением получить однополостный гиперболоид, с осью симметрии OZ.

Задание 2. Аналитически привести уравнение кривой к каноническом виду. Нарисовать график полученной кривой, отметить фокусы, отобразить директрисы.
а) $xy=3$
б) доказать, что уравнение $\sqrt{x}-\sqrt{y}=4$ определяет параболу, привести к каноническом виду, построить кривую, провести ось симметрии, директрису, отметить фокус.

Задание 3.
Прямая x=y=z+1 вращается вокруг оси OZ. Изобразить поверхность. Составить уравнение поверхности вращения.

На опросе помимо теоретического вопроса по теме модуля, будет задание, касающееся устройства мини-программы: построения прямой в пространстве, заданной параметрически.

```
t=[-5 5];
M=[0;0;0]; V=[1;1;0];
xyz=M*ones(size(t))+V*t;
L=plot3(xyz(1,:), xyz(2,:), xyz(3,:),'--r','LineWidth',2);
```

Нужно уметь описывать каждый объект: «`V*t`», «`size(t)`», «`ones(size(t))`», «`M*ones(size(t))`». И объяснять, что считывает `plot3`, если аргументы заданы в виде: «`xyz(1,:),xyz(2,:),xyz(3,:)`»

Читайте Кривилева стр165, 167: «Задание линии в пространстве»