

Ю.М.Мурзин, Ю.И.Волков

Электротехника

Учебное пособие

Часть 1

Допущено Министерством образования Российской Федерации в качестве учебного пособия для студентов высших учебных заведений, обучающихся по направлениям подготовки дипломированных специалистов «Информатика и вычислительная техника», «Электроника и микроэлектроника», «Проектирование и технология электронных средств».

Москва, 2005

ББК 31.2
М91
УДК 621.3(07)

Рецензенты : д.т.н. проф. *Д.И. Панфилов*
к.т.н. доц. *А.А. Балабанов*

Мурзин Ю.А., Волков Ю.И.

М91 Электротехника. Уч. Пособие Ч.1. – М.: МИЭТ, 2005. – 250с.: ил.

ISBN 5-7256-0275-8

Учебное пособие написано в соответствии с рабочей программой по курсу "Электротехника". Оно может быть использовано при изучении курсов "Электротехника", "Теоретические основы электротехники", "Теория электрических цепей" и других специальных программ.

Материал книги содержит классические разделы анализа электрических цепей на постоянном и переменном токе, анализ резонансных явлений, трёхфазные цепи, анализ переходных процессов.

Главными отличиями книги являются краткость изложения, информативность, хорошее использование математического аппарата. По каждой теме имеются контрольные вопросы и задачи, что делает книгу весьма ценной для самостоятельного изучения курса.

Освоение задач, имеющих численное решение, рекомендуется сопровождать моделированием на ЭВМ в программной среде Electronics Workbench, Multisim 7.

По материалам всего курса (лекции, практические и лабораторные занятия, курсовые и домашние задания, а так же модели электронных схем для самостоятельного изучения) подготовлен компакт диск для преподавателей, студентов и аспирантов.

ISBN 5-7256-0275-8

МИЭТ, 2005

Введение

Настоящее учебное пособие предназначено для студентов, обучающихся по специальным программам МИЭТ (ТУ). По сравнению с некоторыми традиционными учебниками отдельные разделы (теория электромагнитного поля) опущены, так как они изучаются в соответствующих разделах физики, теоретической физики, физики полупроводников и др. Такие разделы как нелинейные цепи и длинные линии отнесены к курсам радиоэлектроники и импульсной техники.

За последнее время существенно изменилась роль новых информационных технологий при изучении курса теории электрических цепей. Вследствие чего совершенно по-новому строятся практические и лабораторные занятия. Освоение новых программных средств (Electronics Workbench 5.12pro, MultiSim 2002) мы отнесли к соответствующим пособиям по семинарским занятиям и лабораторному практикуму.

Учебное пособие может служить для самостоятельного изучения отдельных разделов. В конце каждой темы помещены вопросы для самопроверки и контрольные задачи. Правильность решения в задачах с численными ответами нужно подтверждать моделируя цепь на ПВМ, получая ответы из показаний приборов.

Отбор материала проводился на протяжении многих лет практически всеми преподавателями кафедры «Электротехника». Авторы выражают им глубочайшую благодарность.

Список принятых обозначений

\vec{H} - вектор напряженности магнитного поля.

\vec{d} - вектор плотности тока.

\vec{D} - вектор электрического смещения.

\vec{E} - вектор напряженности электрического поля.

\vec{B} - вектор магнитной индукции.

\vec{P} - вектор плотности мощности.

u - мгновенное значение напряжения.

U - действующее значение напряжения.

\dot{U} - комплекс напряжения.

$i; I; \dot{I}$ - соответствующие значения токов.

$e; E; \dot{E}$ - соответствующие значения ЭДС.

$R; G$ - активные сопротивление и проводимость.

$X; B$ - реактивные сопротивление и проводимость.

$Z; \bar{Z}$ - полное и комплексное сопротивление цепи.

L - индуктивность.

C - емкость.

f - частота.

ω - круговая частота.

$I_m; U_m; E_m$ - максимальное значение тока, напряжения и ЭДС.

\bullet
 \bullet - знак соответствия.

j - мнимая единица $\sqrt{-1}$

t - текущее время.

T - период функции.

Тема 1. Основные понятия электротехники

Электротехника - обширная область практического применения электромагнитных явлений, происходящих в электротехническом устройстве.

Электротехническое устройство - система заряженных тел и проводников с током.

Для практического применения электромагнитных явлений в электротехническом устройстве необходимо по крайней мере установить связь между переменными системы (потенциалами, зарядами, токами, магнитными потоками) и параметром системы.

Переменные системы делятся на две категории: известные, независимые (сигналы) и определяемые, зависимые (реакция).

Обозначив сигналы вектором \bar{a} ; реакцию вектором \bar{b} ; параметры системы вектором \bar{c} можно сформулировать две основные задачи электротехники:

1. Анализ: Дано \bar{a} и \bar{c} ; определить \bar{b} ; т.е. при заданной системе (\bar{c}) и возмущениях (\bar{a}) в результате анализа получается реакция системы (\bar{b}).

2. Синтез: Дано \bar{a} и \bar{b} ; определить \bar{c} ; т.е. требуется определить такую систему (\bar{c}), чтобы при заданных возмущениях (\bar{a}) обеспечивала требуемую реакцию (\bar{b}).

Для решения задач электротехники (как и задач во многих других областях знаний) исходя из физических процессов в системе переходят к модельному представлению системы, т.е. к такому упрощению системы, которое с одной стороны сохраняла бы все существенные ее свойства, с другой поддавалась бы решению доступными математическими средствами.

Венцом моделирования является составление математической модели.

Наиболее полным описанием электротехнических процессов являются **уравнения Максвелла**, известные из курса физики.

$$1. \quad \text{rot } \bar{H} = \bar{J} + \frac{\partial \bar{D}}{\partial t},$$

$$2. \quad \text{rot } \bar{E} = - \frac{\partial \bar{B}}{\partial t},$$

$$3. \quad \text{div } \bar{B} = 0,$$

$$4. \quad \text{div } \bar{D} = \bar{\rho},$$

$$5. \quad \bar{\Pi} = \bar{E} \times \bar{H} \quad . \quad - \text{уравнения Умова-Пойнтинга}$$

Первое уравнение утверждает тот факт, что вектор тока (\bar{J}), равно как и ток, вызванный изменением электрического смещения ($\frac{\partial \bar{D}}{\partial t}$), вызывает появление магнитного поля.

Второе уравнение показывает связь между изменением вектора магнитной индукции ($\frac{\partial \bar{B}}{\partial t}$) и напряженностью электрического поля.

Третье уравнение утверждает, что линии магнитного поля замкнуты, т.е. не существует магнитных зарядов.

Четвертое уравнение вводит понятие электрического заряда, на котором начинаются и заканчиваются линии электрического смещения. Среда, в которой взаимодействуют переменные задается коэффициентами в соотношениях $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$; $\vec{B} = \mu \vec{H}$; $\vec{d} = g \vec{E}$.

Пятое уравнение указывает, что энергия локализуется в электрических и магнитных полях.

Если не считаться с квантовыми, статистическими процессами микромира приведенная система уравнений достаточно полно описывает все электромагнитные взаимодействия в электротехнических устройствах и в этом смысле является полной математической моделью любой системы.

Непосредственно для практического расчета целого ряда электротехнических систем уравнения Максвелла использовать затруднительно по двум обстоятельствам:

1. Сложность математического аппарата векторного анализа.
2. Громоздкость исходных данных, т.к. требуется задание параметров в виде векторных полей.

В очень многих задачах требуется знание только интегральных понятий:

$$i = \oint_S \vec{d} \vec{s} = \oint_S \vec{H} d\vec{l}$$

Ток: S

$$e = \oint_l (\vec{E}_{\text{СТОП}} + \vec{E}_{\text{ИНД}}) d\vec{l}$$

ЭДС: l

$$u = \int_A^B \vec{E} d\vec{l}$$

Напряжение: A

Эти обстоятельства возникают когда:

1. Пути тока достаточно малого сечения и ток можно считать равномерно распределенными по сечению.
2. Электрические свойства проводников и диэлектриков существенно различны (Ом и МОм).

3. В источниках и приемниках нас интересуют только интегральные эффекты.

Устройство отвечающее этим требованиям называется электрической цепью.

Следует еще остановиться на понятии мощности.

$$P = \int_S \vec{P} d\vec{s}$$

где S - сечение, где взаимодействуют электрическое и магнитное поля.

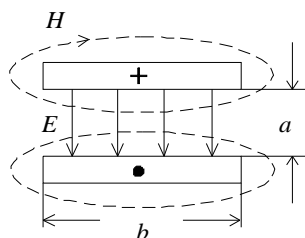


Рис. 1-1

В случае двух проводников с током I , шириной b , расположенных на расстоянии a , при разности потенциалов U получим:

$$U = aE; \quad \oint \vec{H} d\vec{l} = I \Rightarrow H_1 2b = I$$

Значит напряженность магнитного поля от двух токов:

$$H = \frac{I}{2b} \quad 2 = \frac{I}{b}$$

Вектор Пойнтинга $\vec{P} = \vec{H} \times \vec{E} = \frac{IU}{ab}$

Мощность $PS = IU$ (вектора E и H перпендикулярны).

Получаем математическое тождество, благодаря которому мощность можно рассчитывать в виде произведения тока и напряжения.

$$p = ui$$

Электрическая цепь - это система заряженных тел и проводников с током, которая с достаточной для практических целей точностью может быть описана интегральными понятиями. u, i, e, p, w .

Приведенные интегральные понятия при математическом описании системы выступают как переменные.

Часть переменных может быть независимой (заданной), называемой сигналами, а другая часть - зависимые переменные (реакция системы).

Сама система включает элементы системы, задаваемые их параметрами и характер взаимодействия (соединения) этих элементов. Физически каждый элемент может:

1. Генерировать электрическую энергию, точнее преобразовывать какой-либо вид энергии в электрическую и приносить ее в систему.
2. Рассеивать энергию т.е. необратимо превращать электрическую энергию в какой-либо другой вид энергии.
3. Накапливать и возвращать энергию электрического поля.
4. Накапливать и возвращать энергию магнитного поля.

Очевидно, простейшим элементом электрической цепи может быть **двухполюсник**, т.е. часть цепи, рассмотренная относительно двух зажимов. В качестве переменных здесь принимается ток $i(t)$ и напряжение $u(t)$. Связь между переменными - математическая модель $i = f(u)$ или $u = f(i)$.

Это означает, что двухполюсник может быть задан вольт-амперной характеристикой, которая может проходить или не проходить через начало координат. В первом случае это пассивный двухполюсник (рис.1-2,а), во втором - активный (рис. 1-2,б).

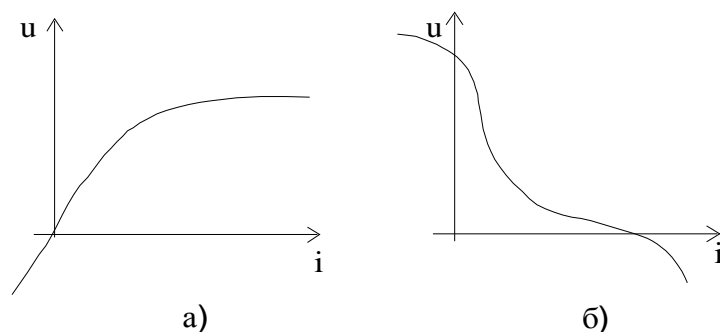


Рис. 1-2

Активный двухполюсник обязательно обладает свойством генерировать электрическую энергию.

Пассивный двухполюсник, если и содержит источники, то они так соединены и имеют такие параметры, что это не проявляется на внешних зажимах. В эксперименте легко различить активный и пассивный двухполюсники. В первом случае вольтметр включенный: на зажимы такого отдельно взятого двухполюсника покажет напряжение $u \neq 0$ (при $i = 0$), а амперметр $i \neq 0$ (при $u = 0$). В случае пассивного двухполюсника $u = 0$ (при $i = 0$) и $i = 0$ (при $u = 0$).

Двухполюсные элементы могут быть линейными и не линейными. Элемент линейный, если его вольт-амперная характеристика выражается прямой линией.

Сейчас и в дальнейшем, пока не будут сделаны оговорки, будем рассматривать **линейные элементы**. Из них состоят **линейные электрические цепи**.

Существенное упрощение математических моделей получается если различные свойства элементов можно разделить в пространстве, т.е. пользоваться элементами с **сосредоточенными параметрами**. Если это невозможно, приходится иметь дело с цепями с распределенными параметрами.

Параметры, характеризующие свойство элементов, могут зависеть или не зависеть от времени.

Из всего многообразия возможных моделей элементов пока выберем линейные элементы с сосредоточенными параметрами. Параметры пассивных элементов будем считать не зависящими от времени, параметры активных элементов (сигналы) в общем случае будем считать функциями времени.

Резюме: Электрическая цепь - такое модельное представление электрического устройства, которое использует в качестве переменных интегральные понятия о токе, напряжении, электродвижущей силе, мощности, энергии (i, u, e, p, w). Математическая модель, т.е. связь между переменными определяется на основе представления системы в виде отдельных элементов, обладающих теми или иными свойствами. Теория электрических цепей - существенная часть электротехники - решает две основные задачи: анализ и синтез.

Контрольные вопросы к теме 1

1. Какова область интересов дисциплины «Электротехника»?
2. Сформулируйте две основные задачи теории цепей.
3. Объясните качественно уравнения Максвелла.
4. В чем физический смысл уравнения Умова-Пойнтинга?
5. В чем качественная разница выражения мощности в уравнениях $\vec{P} = \vec{E} \times \vec{H}$ и $p = ui$?
6. Каково качественное соотношение между электрическим устройством и электрической цепью?
7. Каково принципиальное отличие активного и пассивного двухполюсников?
8. Что такое линейный двухполюсник?

Тема 2. Основные уравнения теории электрических цепей

2.1. Элементы электрических цепей

Для моделирования электрических цепей плодотворными оказалось применение идеальных элементов, обладающих только одним из четырех перечисленных выше свойств. При этом реальные элементы получаются как соединение идеальных элементов с различными свойствами.

А. Двухполюсные элементы

1. Идеальный источник ЭДС

Схемное изображение и вольт-амперная характеристика приведены на рис.2-1.

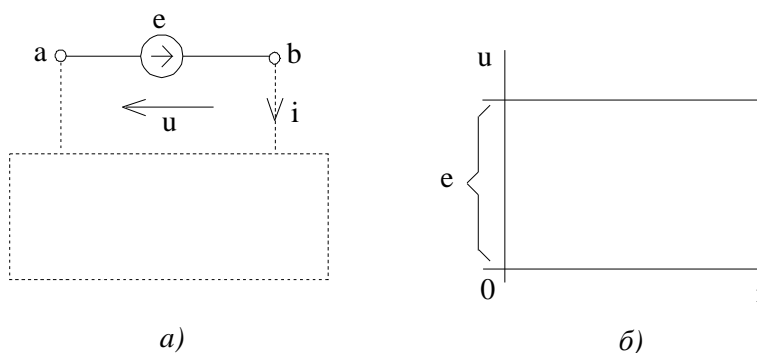


Рис.2-1.

Его единственное свойство - генерировать электрическую энергию так, что напряжение на его зажимах не зависит от протекающего через него тока. По смыслу идеализации $R_{вн}=0$. Стрелка в круге показывает направление внутренних сил, т.е. направлена в сторону точки с большим потенциалом. Напряжение с точки зрения потребителя отмечается стрелкой от точки большего потенциала к меньшему: $U = E$.

В схемах часто вместо идеального источника ЭДС просто рисуют стрелку u , как показано на рис. 2-2.

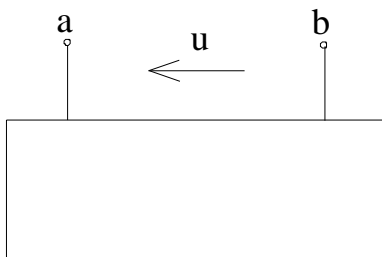


Рис. 2-2

Если ток через источник протекает согласно с направлением внутренних сил, то $p=ui < 0$.

Отрицательная мощность значит то, что источник отдает энергию в остальную часть цепи. Если направление тока таково, что $p=ui > 0$, то источник потребляет энергию (например аккумулятор в режиме заряда).

Коротко говоря, свойства идеального источника ЭДС:

Напряжение: $U = E$ - задано,

Ток: I - любой,

Сопротивление: $R_{вн}=0$.

2. Идеальный источник тока

Изображение на схеме и вольт-амперная характеристика представлены на рис. 2-3.

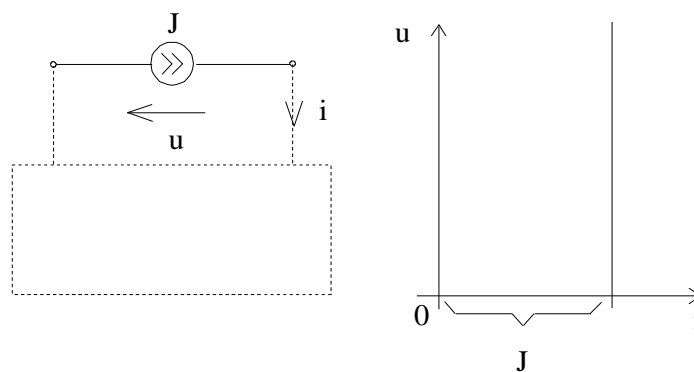


Рис. 2-3.

Его свойства можно определить:

Напряжение: u - любое,

Ток: $i = J$ - задан.

Сопротивление: $R_{вн} = \infty$

Приближенно источник тока можно себе представить как реальный источник с большим напряжением и большим внутренним сопротивлением, подключенный к потребителю с малым сопротивлением.

Так же, как и в случае источника ЭДС, если $p=ui < 0$ источник отдает энергию; $p=ui > 0$ источник потребляет энергию.

Подчеркнем еще раз, что параметры идеальных источников в общем случае могут быть функциями времени: $e(t)$; $J(t)$.

Для уяснения возможности потребления энергии источниками полезно рассмотреть две задачи (рис.2-4, а,б). (Напряжения и токи на схемах постоянны).

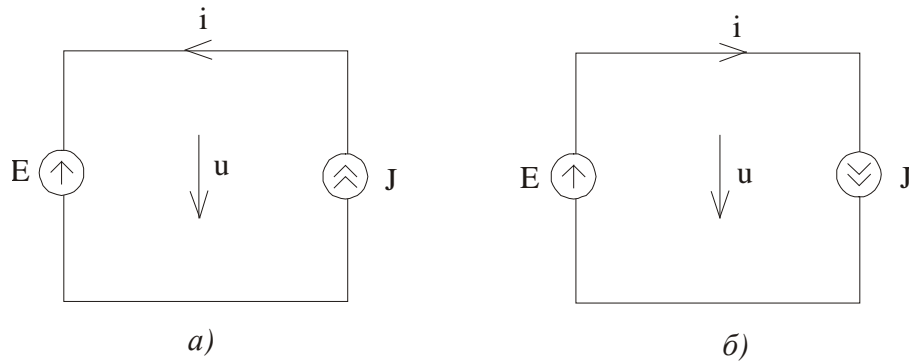


Рис. 2-4.

Очевидно при таком соединении один из источников генерирует энергию, а другой потребляет. Обозначив направления токов и напряжений в схемах, становится ясно, что для схемы рис.2-4а) в источнике ЭДС $p = ui > 0$ - потребитель, а в источнике тока $p = ui < 0$ - генератор.

В схеме рис.2-4б) - наоборот.

3. Резистор. (рис.2-5) элемент, обладающий только свойством рассеивать (потреблять) электрическую энергию.

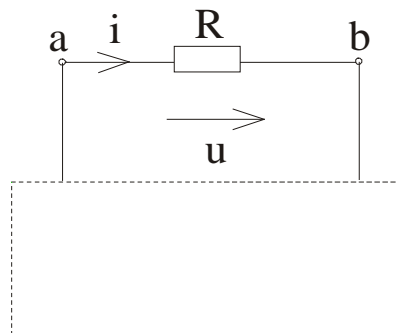


Рис.2-5.

Соотношение между током и напряжением определяется законом Ома $u = Ri$, $i = uG$ - (математическая модель R).

Направление тока и напряжения всегда совпадают, поэтому мощность всегда положительна (энергия потребляется).

$$p = ui = i^2 R = \frac{u^2}{R} = u^2 G > 0$$

Параметр R - сопротивление [Ом]. Величина обратная R - $G = \frac{1}{R}$ - проводимость.

Следует иметь ввиду, что таким же прямоугольником часто изображают любой двухполюсник.

4. Катушка индуктивности (рис.2-6) элемент, обладающий только свойством накапливать (и отдавать) энергию магнитного поля.

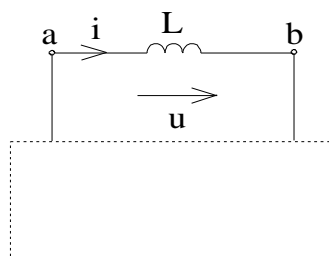


Рис.2-6.

Соотношение между током и напряжением на элементе, известное из курса физики:

$$u_L = L \frac{di}{dt}; \quad i = \frac{1}{L} \int u dt = \frac{1}{L} \int_0^t u dt + i_L(0).$$

Т.е. напряжение на зажимах элемента возникает только тогда, когда есть изменение тока. Если изменения тока нет (ток постоянный), то напряжение $U_0 = 0$ (закоротка), а

элемент накопил энергию $W = \frac{Li^2}{2}$.

В любой момент времени при $i \neq 0$ запасенная энергия $W = \frac{Li^2}{2} > 0$.

Если напряжение и ток совпадают по направлению $p = ui > 0$, то энергия запасается. В те промежутки времени, когда $p = ui < 0$ энергия возвращается в цепь.

L - параметр элемента, измеряемый в генри [Гн]. Следует обратить внимание, что элемент инерционен относительно тока, т.е. внезапное, скачкообразное изменение тока через индуктивность невозможно.

$$i_L(-t_1) = i_L(+t_1)$$

5. Конденсатором называют емкостный элемент, который обладает свойством только запасать энергию электрического поля (рис.2-7)

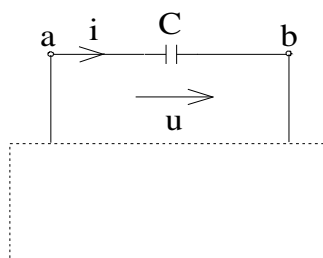


Рис.2-7.

Математическая модель:

$$i_C = C \frac{du_C}{dt}; \quad u_C = \frac{1}{C} \int i_C dt = \frac{1}{C} \int_0^t i_C dt + u_C(0).$$

Ток через конденсатор протекает в связи с изменением напряжения на его зажимах. Если изменений напряжения нет: $u = \text{Const} \neq 0$, то $i = 0$ (разрыв цепи), а элемент накопил

энергию $W_E = \frac{Cu^2}{2}$. При изменяющемся напряжении запас энергии $W = \frac{Cu^2}{2}$, а мощность

$$p = \frac{dW}{dt} = uC \frac{du}{dt} = ui$$

положительна в те промежутки времени, когда ток и напряжение совпадают по направлению. В это время энергия в конденсаторе накапливается. C - параметр, измеряемый в фарадах [Ф].

На обкладках конденсатора невозможны скачки напряжения, как невозможны в природе внезапные изменения запасенной энергии:

$$u_C(-t_1) = u_C(+t_1).$$

Некоторые авторы, чтобы подчеркнуть идеальность катушки индуктивности и емкостного накопителя употребляют жаргонные термины по наименованию параметра элемента: индуктивность (L) и емкость (C), хотя это, строго говоря, неправильно, но допустимо.

Упомянутые ситуации разрыва цепи и короткую тоже целесообразно определить как элемент цепи.

Закоротка: ток любой; напряжение $u = 0$.

Разрыв: напряжение любое; ток $i = 0$.

В некоторых случаях в радиоэлектронике применяют элементы, реальных аналогов не имеющих. Их получают как математические абстракции.

Нулятор (рис 2-8,а)- напряжение $u = 0$ и ток $i = 0$.

Норатор (рис. 2-8,б) - напряжение u - любое и ток i - любой.

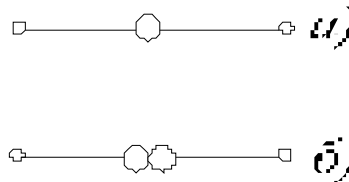


Рис.2-8.

С их помощью можно выразить короткую (рис.2-9,а) и разрыв (рис.2-9,б).

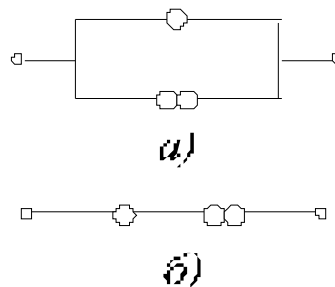


Рис.2-9.

Все перечисленные выше элементы - двухполюсники.

Б. Четырехполюсные элементы

Если напряжения (токи) между двумя узлами зависят не только от тока (напряжения) между этими узлами, а определяются токами и напряжениями на других

участках цепи, то математическое описание таких случаев требует введения четырехполюсных элементов.

1. Взаимная индуктивность

Четырехполюсным элементом, имеющим реальный прототип является взаимная индуктивность (рис.2-10).

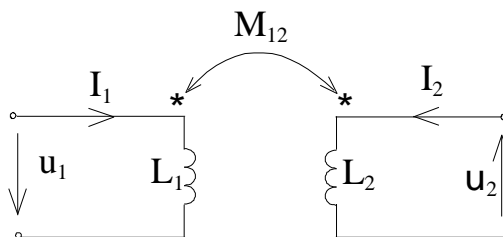


Рис.2-10.

Реально это две катушки индуктивности L_1 и L_2 , имеющие полностью или частично общий магнитный поток. Из физики известно, что напряжение на катушке определяется изменением магнитного потока. Следовательно при наличии общего магнитного потока напряжение на каждой индуктивности определится как сумма двух слагаемых:

$$u_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} \pm M_{12} \frac{di_2}{dt}$$

$$u_2 = L_2 \frac{di_2}{dt} \pm M_{21} \frac{di_1}{dt}$$

Одно из них напряжение самоиндукции, а другое напряжение взаимной индукции.

$$M_{12} = K \sqrt{L_1 L_2} = M_{21} \text{ [Гн]}$$

$0 < K < 1$ - безразмерный коэффициент, показывающий какая часть магнитного потока, является общей.

Знак “+” в уравнении ставится, если при выбранных направлениях тока магнитные потоки складываются. Для того, чтобы на схеме обозначить это обстоятельство на катушках L_1 и L_2 отмечаются начала обмоток. При этом, если токи в обеих катушках одинаково направлены относительно начал обмоток, то магнитные потоки складываются.

При $K=1$ (совершенный трансформатор).

$$u_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} \pm \sqrt{L_1 L_2} \frac{di_2}{dt} = \sqrt{L_1} \left(\sqrt{L_1} \frac{di_1}{dt} \pm \sqrt{L_2} \frac{di_2}{dt} \right)$$

$$u_2 = \pm \sqrt{L_1 L_2} \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt} = \sqrt{L_2} \left(\pm \sqrt{L_1} \frac{di_1}{dt} + \sqrt{L_2} \frac{di_2}{dt} \right)$$

Отношение:

$$\frac{u_1}{u_2} = \sqrt{\frac{L_1}{L_2}} = \frac{w_1}{w_2} = n$$

- коэффициент трансформации,

где w_1 , w_2 - соответственно числа витков катушек.

У совершенного трансформатора напряжение на вторичных зажимах не зависит от нагрузки, а определяется только первичным напряжением (u_1) и коэффициентом трансформации.

Если предположить $L_1 \rightarrow \infty$ (идеальный трансформатор), то из первого уравнения математической модели следует

$$\frac{di_1}{dt_1} = \frac{u_1}{L_1} - \frac{1}{n} \frac{di_2}{dt}$$

$$L_1 \rightarrow \infty.$$

Добавив сюда уравнение совершенного трансформатора, получим систему уравнений для идеального трансформатора:

$$\begin{cases} i_1 = -\frac{1}{n} i_2 \\ u_1 = n u_2 \end{cases}$$

$$i_1 u_1 + i_2 u_2 = 0$$

Последнее означает, что идеальный трансформатор не накапливает энергии $p_1 + p_2 = 0$. Его основное назначение - изменение масштаба тока и напряжения. В свойства идеального трансформатора входит также изменение масштаба R_1 , L_1 или C_1 , без изменения их характера.

Для пояснения этих свойств включим на выход R, L или C и рассмотрим соотношения между u_1 и i_1 на входе.

$$-\frac{u_2}{i_2} = R_2 = \frac{1}{n^2} \cdot \frac{u_1}{i_1}; \text{ т.е. } R_{1\text{Э}} = n^2 R_2, \text{ где } R_{1\text{Э}} = \frac{u_1}{i_1}.$$

Со стороны входных зажимов сопротивление R_2 трансформируется в $n^2 R_2 = R_{1\text{Э}}$,

знак (-) перед $\frac{u_2}{i_2}$ связан с “несогласованностью” между напряжением и током на вторичных зажимах.

При включении на выход катушки индуктивности

$$-\frac{u_2}{\frac{di_2}{dt}} = L_2 = \frac{\frac{1}{n} u_1}{n \frac{di_1}{dt}}; \text{ т.е. } n^2 L_2 \frac{di_1}{dt} = u_1 = L_{1\text{Э}} \frac{di_1}{dt}$$

Если включен конденсатор

$$-\frac{i_2}{\frac{du_2}{dt}} = C_2 = \frac{n i_1}{\frac{1}{n} \frac{du_1}{dt}}; \text{ т.е. } \frac{1}{n^2} C_2 \frac{du_1}{dt} = i_1 = C_{1\text{Э}} \frac{du_1}{dt}$$

2. Гиратор

Как математическую абстракцию можно представить элемент, описываемый системой уравнений:

$$i_1 = -\frac{1}{n} u_2$$

$$u_1 = n i_2$$

Он так же не накапливает энергию.

$$u_1 i_1 + u_2 i_2 = 0$$

Этот гипотетический элемент называют гиратор (рис.2-11)

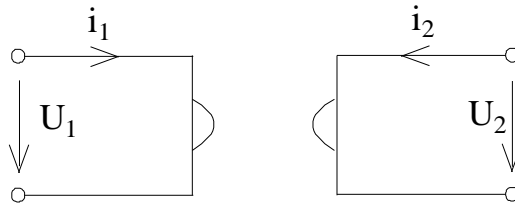


Рис.2-11

Если бы удалось реализовать элемент с такими свойствами, то получили бы замечательный результат: включение на выходе емкости со стороны входа приводит к эффекту включенной индуктивности. Действительно

$$C_2 = \frac{-i_2}{\frac{du_2}{dt}} = \frac{\frac{1}{n} u_1}{n \frac{di_1}{dt}} ; \text{ т.е. } n^2 C_2 \frac{di_1}{dt} = u_1, L_{\text{э}} = n^2 C_2.$$

В радиоэлектронике, автоматике при описании усилительных свойств приборов, наличия обратных связей используются зависимые источники, как четырехполюсные идеальные элементы.

3. Источник напряжения, управляемый напряжением (ИНУН). (рис.2-12)

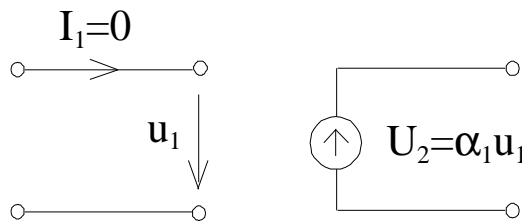


Рис.2-12.

4. Источник напряжения, управляемый током (ИНУТ). (рис.2-13)

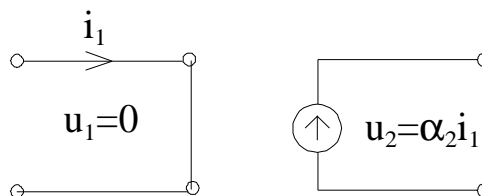


Рис.2-13.

5. Источник тока, управляемый напряжением (ИТУН). (рис.2-14)

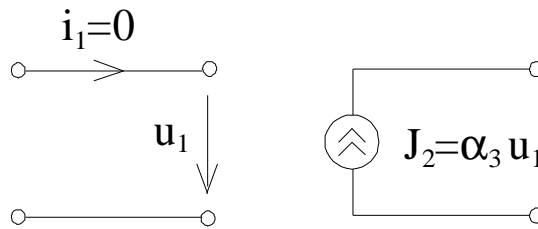


Рис.2-14.

6. Источник тока, управляемый током (ИТУТ). (рис.2-15)

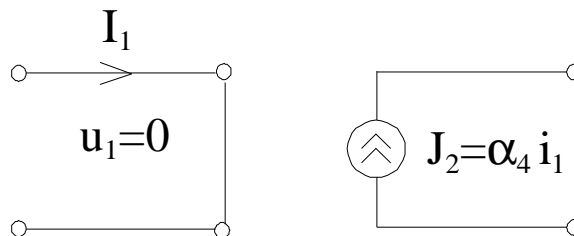


Рис.2-15.

Коэффициенты a_1, a_2, a_3 и a_4 - размерные или безразмерные количественно характеризуют управление источником со стороны тока или напряжения входных зажимов.

Если параметры R, L, C, M и т.д. постоянны, т.е. не зависят от токов и напряжений, то при этом, как мы увидим в дальнейшем, математическое описание цепи приводит к линейным уравнениям. Такие цепи называются линейными. Если хотя бы один элемент не подчиняется этому правилу, то вся цепь нелинейная.

В нашем курсе мы, если это не оговорено особо, будем иметь дело с линейными элементами. Активно будем использовать источники напряжения и тока, резистор, индуктивность, емкость и взаимную индуктивность.

Знание всех остальных элементов полезно при чтении специальной литературы.

Решение проблемы выражения всех свойств заданной реальной системы сочетанием идеальных элементов рассматривается в спецкурсах на основе анализа физических явлений заданного устройства.

Приведем некоторые примеры:

Пример 1.

В реальном источнике (химическом элементе, машинном генераторе, термопреобразователе и т.д.) часть генерированной электроэнергии теряется на неизбежно имеющихся внутренних сопротивлениях.

На рис.2-16,а показана вольт-амперная характеристика реального источника, а на рис.2-16,б - два возможных его схемных выражения.

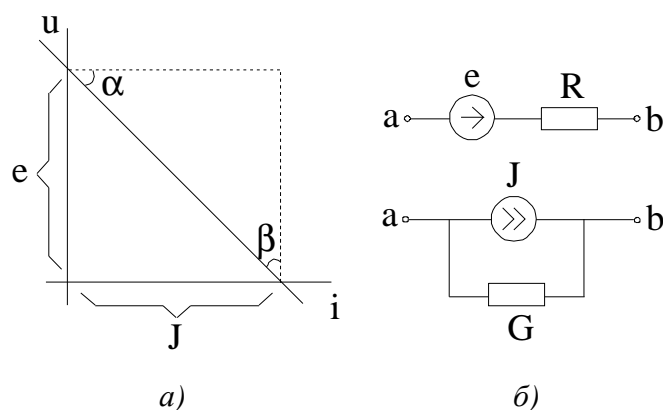


Рис.2-16.

Соотношение между током и напряжением в этих схемах:

$$u = e - iR$$

$$i = J - uG$$

Очевидно эти схемы эквивалентны, если

$$J = \frac{e}{R} \text{ или } e = \frac{J}{G} \text{ и } G = \frac{1}{R} \text{ или } R = \frac{1}{G}$$

$$R = k_1 \operatorname{tg} a ; G = k_2 \operatorname{tg} b .$$

Как видно из вольт-амперной характеристики в режиме холостого хода $u_{xx} = e$ и в режиме короткого замыкания $i_{кз} = J$.

Пример 2.

Реальная катушка с магнитным сердечником.

В первом приближении, когда существенным для анализа всей системы является только накопление энергии магнитного поля, а всеми остальными параметрами можно пренебречь катушку моделируют одной идеальной индуктивностью (рис. 2-17,а). При необходимости учесть потери на нагрев проводов применяют схему рис. 2-17,б.

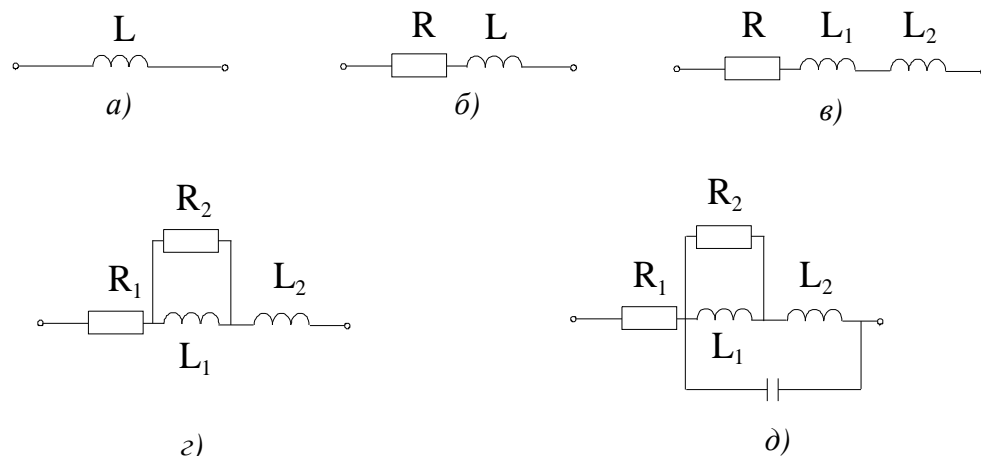


Рис.2-17.

Если требуется различить магнитные потоки, замыкающиеся по сердечнику (L_1) и по воздуху L_2 (индуктивность рассеяния), применяют схему рис.2-17,в. Учет потерь на перемагничивание сердечника требует включения параллельно L_1 сопротивления R_2 , поскольку потери в сердечнике зависят только от соответствующей части магнитного потока. Если катушка применяется при высокой частоте, может потребоваться учет межвитковой емкости, тогда применяется схема рис.2-17,д.

Ответить на вопрос какую схему применять в каждом конкретном случае без опыта нельзя. В конечном счете любая модель удовлетворительна, если результат ее применения удовлетворяет потребной точности, т.е. совпадает с экспериментальными данными.

Приведем еще два примера изображения реальных устройств в виде схем. Обоснования будут даны в соответствующих разделах.

Пример 3.

Эквивалентная схема трансформатора (рис.2-18).

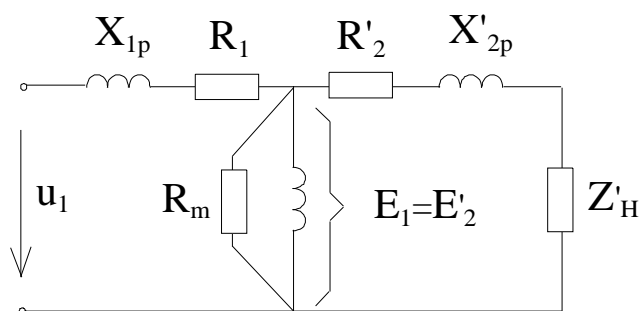


Рис.2-18.

Пример 4.

Эквивалентная схема асинхронного двигателя (рис.2-19).

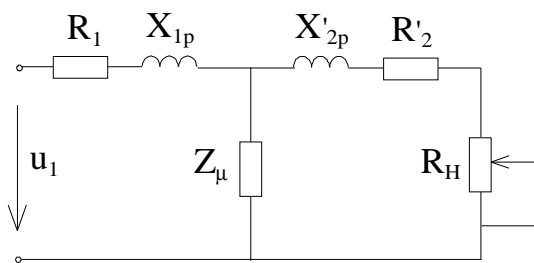


Рис.2-19.

R_H - характеризует превращение электрической энергии в механическую.

И еще один пример, обоснование которого будет дано в курсе радиоэлектроники.

Пример 5.

Эквивалентная схема транзистора (рис.2-20).

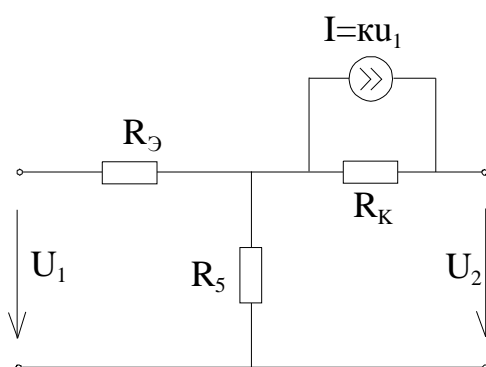


Рис.2-20.

Наличие источника тока, управляемого напряжением, отображает усилительные свойства транзистора.

Предложенная система идеальных элементов избыточна. Кроме приведенных примеров, где с помощью нулятора и норатора выражаются закоротки и разрывы можно привести еще примеры.

Возьмем схему (рис.2-21), состоящую из ИНУН и ИТУТ.

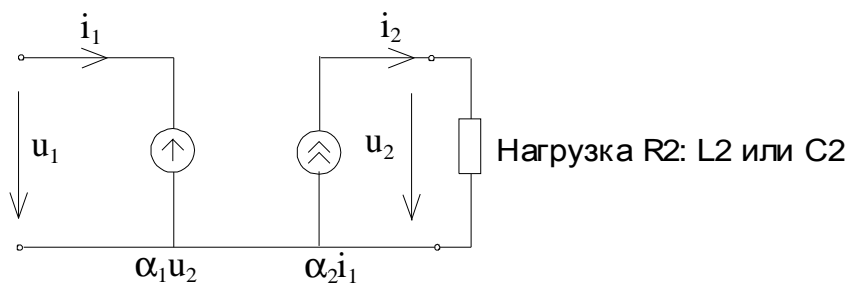


Рис. 2-21

Соотношения между токами и напряжениями на выходе схемы в случае включения резистора, катушки индуктивности и конденсатора выразятся соответственно: $u_2 = R_2 i_2$;

$$u_2 = L_2 \frac{di_2}{dt} ; \quad i_2 = C_2 \frac{du_2}{dt} .$$

Учтя зависимость $u_1 = a_1 u_2$ и $i_2 = a_2 i_1$, получим со стороны входа:

$$u_1 = a_1 a_2 R_2 i_1 = R_3 i_1 , \text{ т.е. } R_3 = a_1 a_2 R_2$$

$$u_1 = L_2 a_1 a_2 \frac{di_1}{dt} = L_3 \frac{di_1}{dt} ; \quad L_3 = a_1 a_2 L_2$$

$$i_1 = \frac{1}{a_1 a_2} C_2 \frac{du_1}{dt} = C_3 \frac{du_1}{dt} ; \quad C_3 = \frac{C_2}{a_1 a_2}$$

При соответствующем выборе α_1 и α_2 свойства такого четырехполюсника полностью совпадают со свойствами идеального трансформатора.

Нетрудно убедиться, что схема ИНУТ-ИНУТ (рис. 2-22) обладает свойствами инвертора сопротивления.

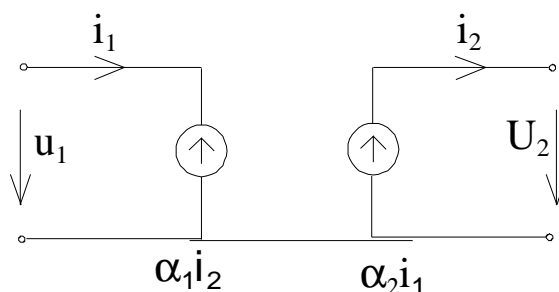


Рис. 2-22.

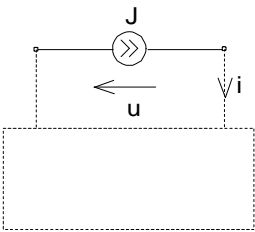
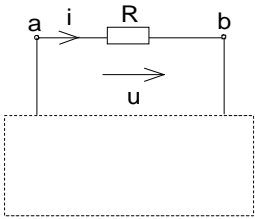
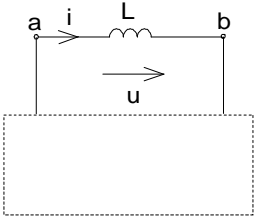
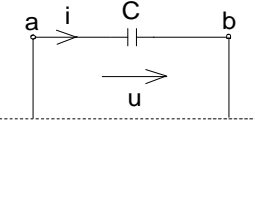

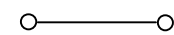
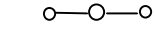
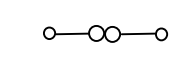
Наконец, полезно всегда иметь ввиду, что резистор можно заменить в схеме напряжением, управляемым собственным током .

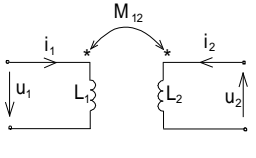
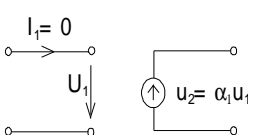
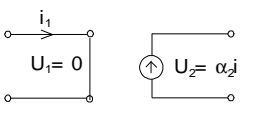
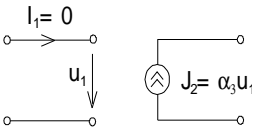
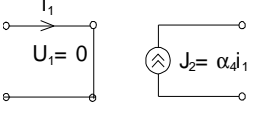
В таблице 2-1 приводятся сводные данные от идеальных элементах электрических цепей. Знаком “*” отмечены элементы, которые нужно знать свободно.

Таблица 2-1

Сводная таблица элементов

Двухполюсные			Единица измерения
* Источник ЭДС, e		$u = e$	Вольт

* Источник тока, J		$i = J ;$ u - любое	Ампер
* Резистор R, G		$u = Ri ;$ $i = Gu ; R = \frac{1}{G}$	Ом, Сим.
* Катушка индуктивности, L		$u = L \frac{di}{dt} ;$ $i = \frac{1}{L} \int_0^t u dt + i_L(0)$	Генри
* Конденсатор, C		$i = C \frac{du}{dt} ;$ $u = \frac{1}{C} \int_0^t i dt + u_C(0)$	Фарада
Разрыв		$i = 0 ;$ u - любое	
Закоротка		$u = 0 ;$ i - любой	
Нулятор		$i = 0 ; u = 0$	
Норатор		i -любой, u -любое	

Четырехполюсные			Единица измерения
* Катушки взаимной индуктивности		$u_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} + M_{12} \frac{di_2}{dt}$ $u_2 = L_2 \frac{di_2}{dt} + M_{21} \frac{di_1}{dt}$	M12=M21 - Генри при изменении направления одной из обмоток относительно тока знак меняется.
ИНУН		$\begin{bmatrix} u_1 \\ i_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ i_2 \end{bmatrix}$	α_1 и α_4 - безразмерные коэффициенты
ИНУТ		$\begin{bmatrix} u_1 \\ i_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ i_2 \end{bmatrix}$	α_2 - имеет размерность сопротивления
ИТУН		$\begin{bmatrix} u_1 \\ i_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & a_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ i_2 \end{bmatrix}$	α_2 - имеет размерность проводимости.
ИТУТ		$\begin{bmatrix} u_1 \\ i_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & L_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ i_2 \end{bmatrix}$	Матрицы коэффициентов соответствуют А-параметрам четырехполюсника.

2.2. Законы Ома и Кирхгофа

Закон Ома устанавливает соотношение между током, протекающим через какой-либо двухполюсник и напряжением на его зажимах. Для идеальных пассивных элементов мы их уже записывали:

$$u=Ri; u_L=L\frac{di}{dt}; i_C=C\frac{du}{dt}$$

Эти компонентные уравнения являются основанием для выражения соответствующих соотношений в сколь угодно сложных цепях.

I Закон Кирхгофа

Как следствие непрерывности тока, закон устанавливает, что суммарный ток, втекающий в какой-либо замкнутый объем равен суммарному вытекающему из этого

объема тока. В теории цепей под замкнутым объемом понимается узел или отсечение.

Чаще всего I закон Кирхгофа формулируют для любого узла: $\sum_K i_K = 0$

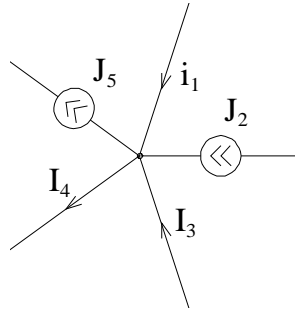


Рис. 2-23

Для узла, изображенного на рис.2-23 узловое уравнение запишется:

$$i_1 + J_2 + i_3 - i_4 - J_5 = 0$$

Иногда уравнение записывают, выделяя отдельно источники тока:

$$i_1 + i_3 - i_4 = J_5 - J_2, \text{ т.е. } \sum_K i_K = \sum_K J_K$$

Важно только соблюдать правило знаков: все истинные направления входящих токов считаются положительными, а выходящие - отрицательными. Можно считать и наоборот. Поскольку часто искомыми являются не только величины, но и направления токов, то последние до получения результатов анализа неизвестны. Практически, как это будет показано ниже, уравнения составляются относительно условных положительных направлений, которые принимаются произвольно, но одинаково во всех уравнениях. Если в результате анализа получатся отрицательные значения токов, то истинное значение будет обратным.

Аналогичные уравнения можно записать для любого отсечения. Пример приведен на рис. 2-24.

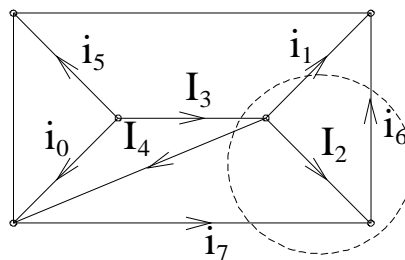


Рис. 2-24

$$i_1 + i_6 - i_3 + i_4 - i_7 = 0$$

или

$$i_5 + i_1 + i_2 + i_4 + i_0 = 0 \text{ и т.д.}$$

Решим задачу характерную для параллельного соединения резисторов (рис. 2-25) по I закону Кирхгофа.

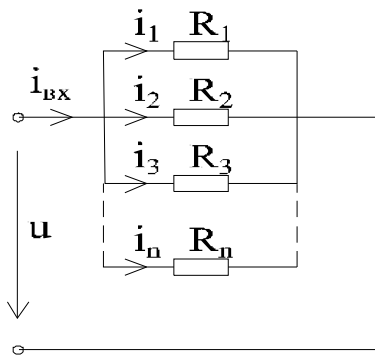


Рис. 2-25

$$\frac{u}{R_{\Sigma}} = i = \sum_1^n i_K = \sum_1^n \frac{u_K}{R_K} = u \sum_1^n \frac{1}{R_K} \quad ;$$

Значит n параллельно соединенных резисторов, с точки зрения остальной цепи, можно заменить одним в соответствии с соотношением.

$$G_{\Sigma} = \sum_1^n G_K \quad \text{или} \quad \frac{1}{R_{\Sigma}} = \sum_1^n \frac{1}{R_K}$$

Для двух резисторов часто применяется это соотношение в виде:

$$R_{\Sigma} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

Если параллельно соединены конденсаторы, то

$$i_{BX} = \sum_1^n i = \sum_1^n C_K \frac{du_K}{dt} = \left\{ \sum C_K \right\} \frac{du}{dt} ;$$

$$\text{т.е.} \quad C_{\Sigma} = \sum_1^n C_K$$

При соединении катушек индуктивности:

$$i_{BX} = \sum i = \sum \frac{1}{L_K} \int u_K dt = \sum \frac{1}{L_K} \left\{ \int u_K dt \right\}$$

получим:

$$\frac{1}{L_{\Sigma}} = \sum_1^n \frac{1}{L_K}$$

II Закон Кирхгофа

Напомним, что напряжение на двухполюсных элементах это разность потенциалов на его зажимах:

$$u = (j - j_{\text{об}})$$

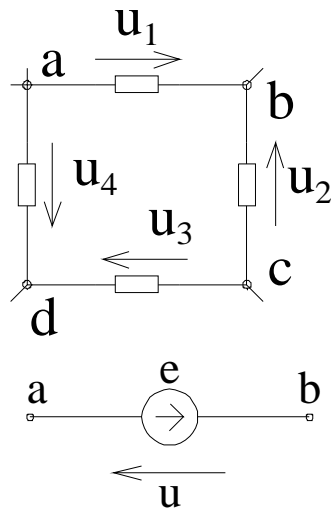


Рис. 2-26

Нетрудно убедиться, что для рис. 2-26

$$\sum u_k = j_{a \rightarrow b} u_{ab} + j_{b \rightarrow c} u_{bc} + j_{c \rightarrow d} u_{cd} + j_{d \rightarrow a} u_{da} = 0,$$

т.е. сумма напряжений на двухполюсниках любого замкнутого контура равна нулю. Конечно это будет справедливо, если соблюдать правила знаков:

$$u_1 = u_{ab} = j_{a \rightarrow b} u_{ab}$$

$$u_2 = u_{cb} = -u_{bc} \text{ и т.д.}$$

Если какие-либо из двухполюсников представляют из себя источники ЭДС, то с учетом взаимного направления e и u можно записать контурное уравнение:

$$\sum_K u_K = \sum_K e_K$$

В левой части ставятся напряжения со знаком плюс, совпадающие с направлением обхода контура, в правой - ЭДС, совпадающие с тем же направлением обхода. Для представления уравнений II закона Кирхгофа относительно тех же переменных (токов) используются приведенные выше компонентные уравнения.

Пример.

Пусть имеем систему, состоящую из последовательно соединенных резистора, конденсатора и катушки. На этот двухполюсник воздействует ЭДС $e(t)$ (рис. 2-27).

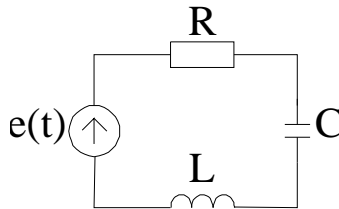


Рис. 2-27

Контурное уравнение запишется:

$$Ri + \frac{1}{C} \int i dt + L \frac{di}{dt} = e(t)$$

Поскольку через все элементы протекает один и тот же ток, то с некоторой условностью можно записать:

$Z \cdot i = e$, где оператор $Z = R + \frac{1}{C} \int (\cdot) dt + L \frac{d(\cdot)}{dt}$ имеет смысл сопротивления и характеризует среду, где действует возмущение $e(t)$. В этом смысле оператор Z выражает собственное свойство системы.

Применяя II закон Кирхгофа, легко получить выражения для эквивалентной замены последовательно соединенных резисторов, катушек индуктивностей и емкостей:

$$R_{\Sigma} = \sum_K R_K; \quad L_{\Sigma} = \sum_K L_K; \quad \frac{1}{C_{\Sigma}} = \sum_K \frac{1}{C_K}.$$

Для фрагмента некоторой цепи, изображенной на

рис.2-28, контурное уравнение можно записать, суммировав напряжение на группах однотипных элементов:

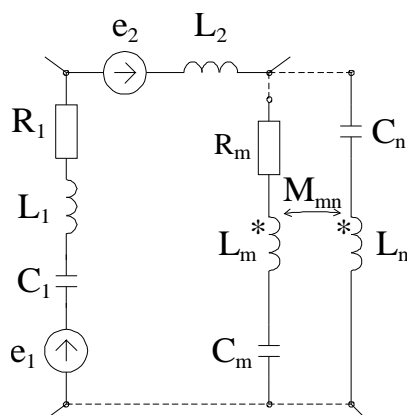


Рис. 2-28

$$\sum e_m = \sum_m i_m R_m + \sum_m \frac{1}{C_m} \int_0^t i_m dt + \sum_m u_{cm}(0) + \sum_m L \frac{di_m}{dt} + \sum_{m,n} M_{mn} \frac{di_n}{dt}$$

Суммы, конечно, везде алгебраические с учетом знаков выбранных (условных) положительных направлений токов по отношению к произвольному направлению обхода контура.

2.3. Геометрия электрической цепи

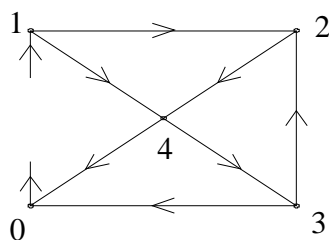
Определим ветвь, как совокупность элементов, по которым протекает один и тот же ток (последовательно соединенных). Тогда с точки зрения геометрии электрическая цепь представляет собой совокупность ветвей и узлов. Узлом назовем точку, где сходятся три и более ветвей. Иногда вводится понятие - простой узел: точка соединения двух ветвей. Математический аппарат, описывающий структуры, состоящие из ветвей и узлов излагается в теории графов.

Основные термины теории графов:

Граф схемы - совокупность узлов и ветвей.

Узел - точка, где сходятся три и более ветвей.

Ориентированный граф схемы (б)



одно из деревьев графа (в)

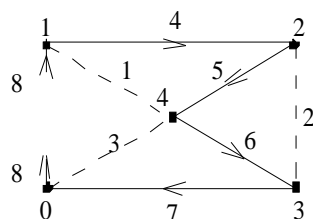


Рис. 2-29

Независимые узлы: 1, 2, 3, 4.

Независимые контуры:

I	1-4-5
II	2-5-6
III	3-6-7

Независимые сечения:

I	4-1-(8)
II	5-1-2-(8)
III	6-3-2-(8)
IV	7-3-(8)

Указание ветви, содержащей источник тока в сечении (и в узле) понадобится для учета тока источника в узловых уравнениях.

Как видно из примера система независимых контуров и сечений полностью определяется выбранным деревом графа.

Алгебраически граф может быть представлен в виде различных матриц. Рассмотрим три из них.

1. *Матрица контур-ветвь*, каждый элемент которой $K_{ij} = +1$, если i -я ветвь входит в j -й контур и направление тока в ней совпадает с направлением обхода.

$K_{ij} = -1$, если i -я ветвь входит в j -й контур и направление тока и направление обхода встречны.

$K_{ij} = 0$ - в других случаях.

Пример (рис. 2-30)

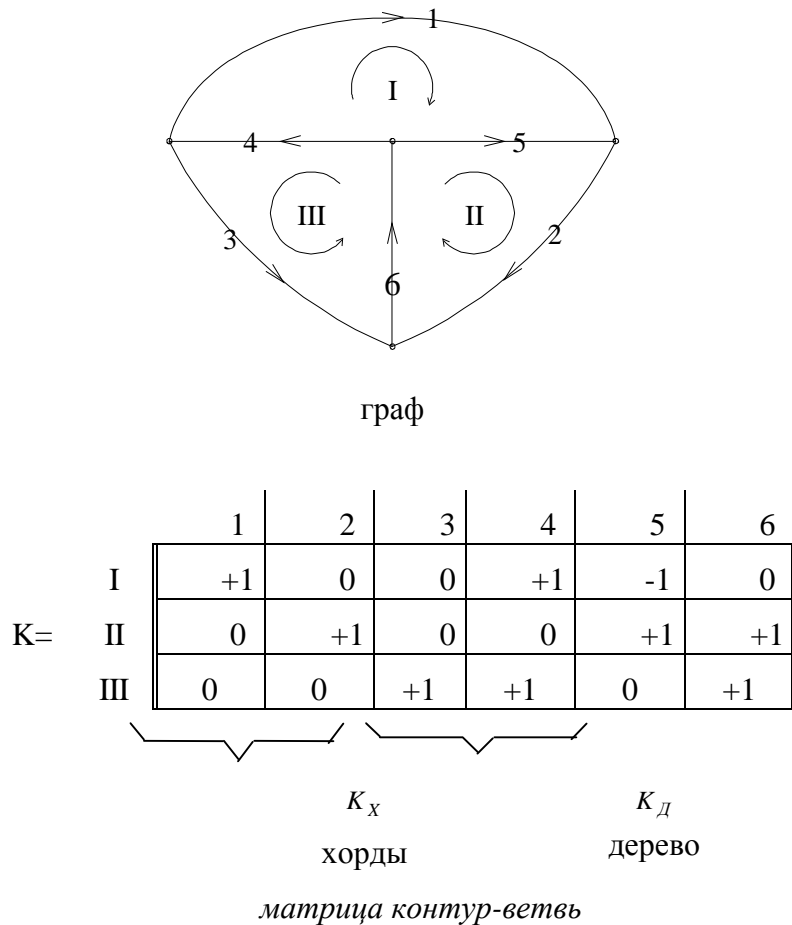


Рис. 2-30

Рассмотрение К-матрицы показывает:

1. Если номера ветвей-хорд и контуров совпадают, а направления обхода контура выбрано одинаковым с направлением токов в хордах, то выделяется единичная подматрица K_x . Это легко достигается, поскольку нумерация ветвей и условные положительные направления токов произвольны.

$$[K] = [K_x \ K_d]$$

При вводе данных и хранении информации о графе можно ограничиться информацией о $[K_d]$.

2. Каждая строка матрицы содержит информацию о ветвях, входящих в контур и знаке тока в них. Т.к. K_x - единичная диагональная матрица, то строки обязательно отличаются друг от друга хотя бы одной ветвью.

3. Количество независимых контуров равно количеству хорд.

Практически матрица очень часто разрежена и нули не пишутся.

2. Матрица сечение-ветвь

$S_{ij} = +1$, если ветвь входит в отсечение и ток направлен к отсечению.

$S_{ij} = -1$ то же, но при противоположном направлении тока.

$S_{ij} = 0$, если ветвь не входит в отсечение.

Пример (рис. 2-31)

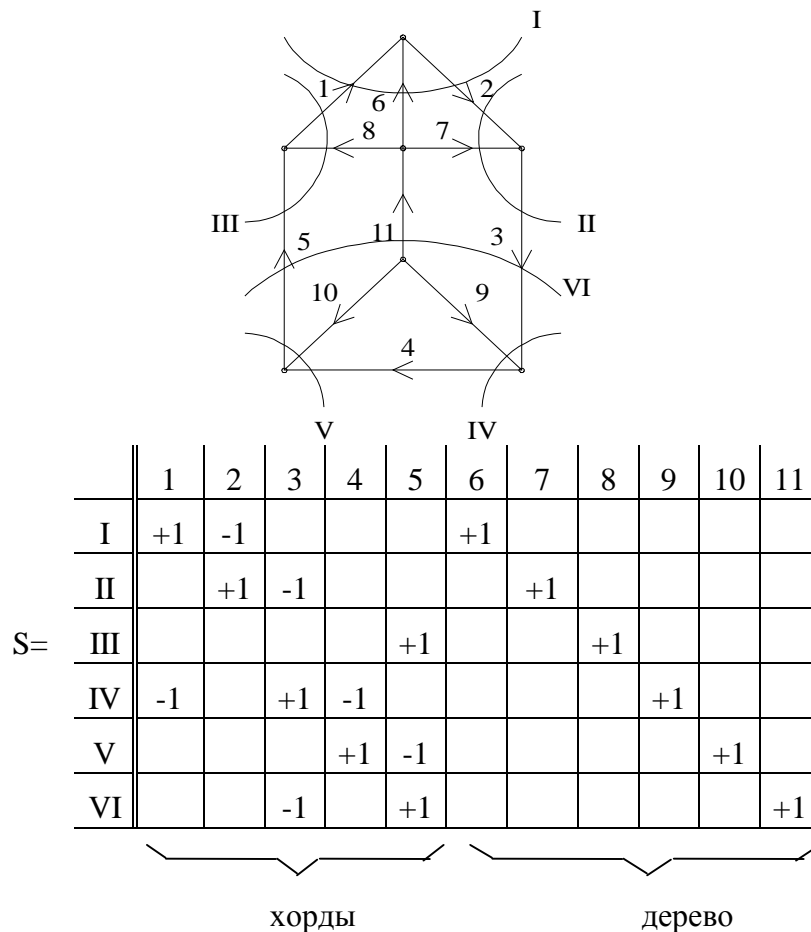


Рис. 2-31

1. Если номера отсечениям присваивать в порядке возрастания номеров ветвей дерева, то выделяется единичная подматрица, соответствующая ветвям дерева.

$$[S] = [S_x \ S_d]$$

2. Строка матрицы перечисляет ветви, входящие в отсечения. Если в подматрице дерева все элементы положительны, то легко снимается некоторая неопределенность направления “к отсечению”.

3. Количество независимых отсечений равно количеству ветвей дерева, которое в свою очередь на единицу меньше количества узлов. (доказывается по индукции).

3. Матрица узел-ветвь

$P_{ij} = +1$, если i-я ветвь входит в j-й узел

$P_{ij} = -1$, если i-я ветвь выходит из j-го узла

$P_{ij} = 0$, если i-я ветвь не включается в j-й узел

Все, что сказано о матрице Q справедливо и для матрицы P, за исключением того, что квадратную подматрицу, соответствующих ветвей не всегда удастся сделать единичной. Если одну из строк удалить (нулевой узел), то размеры матриц P и S совпадают.

Это обстоятельство не случайно, т.к. количество ветвей графа (N_B), количество независимых контуров (N_{HK}) и количество независимых узлов (N_{HY}) или сечений взаимосвязано:

$$N_B = N_{HK} + N_{HY} = N_{HK} + N_Y - 1.$$

2.4. Интегро-дифференциальные уравнения состояния

Электрическая цепь должна быть задана в виде соединенных определенным образом идеальных элементов. Для начала проводится индексация элементов и геометрический анализ.

Изобразив граф схемы, подсчитываем количество узлов схемы, нумеруем узлы, причем один из узлов из перечня независимых исключаем, присвоив ему нулевой номер. Выделяем дерево графа. Вводим номера ветвей так, что первые номера - номера хорд (дополнений), а последние номера ветвей дерева. Номера независимых контуров считаем совпадающими с номерами хорд. Проверяем соотношение $N_e = N_Y - 1 + N_{ж}$.

Вводим условные положительные направления токов в ветвях, при этом есть смысл учитывать, что направления обхода контуров будем принимать по направлению тока в хордах. Все элементы, входящие в ветвь равно как и ток этой ветви, естественно, получают индекс в виде номера ветви. Источники тока на графе отмечаются в виде подтекающих и вытекающих токов. Этим токам присваиваются индексы следующие за последним номером ветви графа.

Далее записываются уравнения по I закону Кирхгофа в виде: $\sum i = 0$ для каждого узла, или при наличии источников тока: $\sum i = \sum J$. Знаки токов ветвей в сторону от узла принимаются положительными. Токи источников токов при этом в правую часть уравнения ставятся со знаком “плюс”, если они направлены к узлу.

Составлять уравнения по I закону Кирхгофа удобно по ориентированному графу.

Уравнения по II закону Кирхгофа для каждого из независимых контуров ($\sum u = \sum e$) записывается относительно тех же неизвестных токов с использованием компонентных уравнений:

$$\pm u_R = Ri; \quad \pm u_L = L \frac{di_L}{dt}; \quad \pm u_C = \frac{1}{C} \int i_C dt + u_C(0)$$

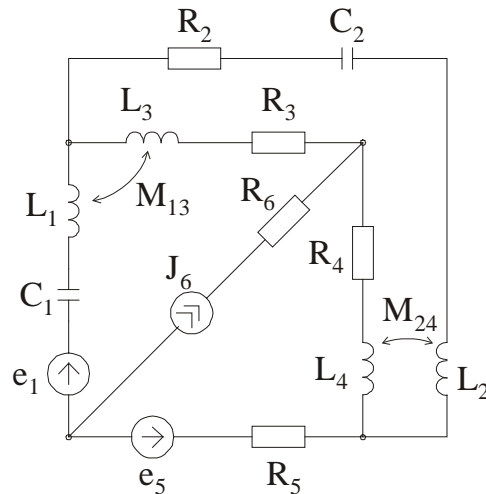
При наличии индуктивных связей между катушками m-й n-ой ветви:

$$\pm u_{Lm} = L_m \frac{di_m}{dt} \pm M_{mn} \frac{di_n}{dt}$$

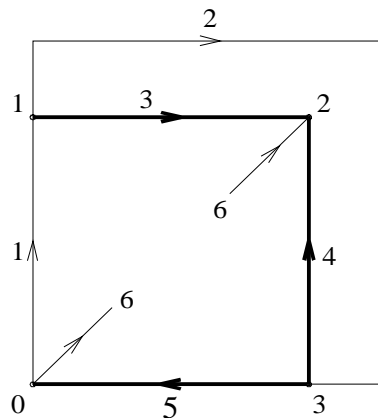
Правила знаков: соответствующее напряжение ставится со знаком “плюс”, если направление обхода контура совпадает с условным положительным направлением тока;

в противном случае ставится знак “минус”. Перед коэффициентом взаимной индукции M_{mn} ставится знак “плюс”, если выбранные условные положительные направления токов обуславливают сложение магнитных потоков в соответствующих индуктивностях; в противном случае ставится знак “минус”.

Пример (рис. 2-32)



схема



граф и дерево

Рис. 2-32

I закон Кирхгофа

1. $i_1 - i_2 - i_3 = 0$
2. $i_3 + i_4 = -J_6$
3. $i_4 + i_5 - i_2 = 0$

II закон Кирхгофа

4. $\frac{1}{C_1} \int_0^t i_1 dt + u_C(0) + L_1 \frac{di_1}{dt} - M_{13} \frac{di_3}{dt} + L_3 \frac{di_3}{dt} - M_{31} \frac{di_1}{dt} +$

$$\begin{aligned}
& + R_3 i_3 - R_4 i_4 - L_4 \frac{di_4}{dt} - M_{42} \frac{di_2}{dt} + R_5 i_5 = e_1 - e_5 \\
& 5. \quad R_2 i_2 + \frac{1}{C_2} \int_0^t i_2 dt + u_{C2}(0) + L_2 \frac{di_2}{dt} + M_{24} \frac{di_4}{dt} + L_4 \frac{di_4}{dt} + M_{42} \frac{di_2}{dt} + \\
& + R_4 i_4 - R_3 i_3 - L_3 \frac{di_3}{dt} + M_{31} \frac{di_1}{dt} = 0
\end{aligned}$$

Продифференцировав уравнения 4 и 5, получим систему из пяти независимых дифференциальных уравнений, каждое из которых не выше второго порядка. Такая система разрешима относительно токов ветвей, если известны начальные условия (токи в катушках и напряжения на обкладках конденсаторов).

Трудности решения подобной системы уравнений существенно зависят от следующих обстоятельств:

1. Линейность уравнений, если коэффициенты (параметры цепи) не зависят от токов и напряжений.
2. Параметры цепи не зависят от времени. В этом случае получаем систему интегро-дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

При этом наличие зависимых источников:

$$e_K = a_1 u_m; e_K = a_2 i_m; J_K = a_3 u_m; J_K = a_4 i_m$$

не нарушают линейность системы, если a_1, a_2, a_3, a_4 - постоянные величины.

3. В зависимости от характера функций времени независимых переменных $e(t)$ и $J(t)$, применяя тот или иной математический аппарат, можно существенно упростить получение результата анализа.

В электротехнике широкое применение находят следующие сигналы (независимые переменные):

1. Постоянные токи и напряжения $E = Const$ и $J = Const$.
2. Синусоидальные сигналы

$$e = E_m \sin(\omega t + \varphi_e); J = J_m \sin(\omega t + \varphi_i)$$

3. Периодические несинусоидальные сигналы

$$e = f(t) = f(t + kT); J = f(t) = f(t + kT)$$

4. Обобщенные переменные сигналы комплексной частоты s .

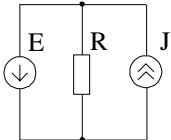
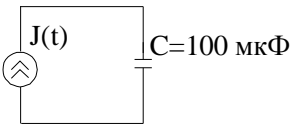
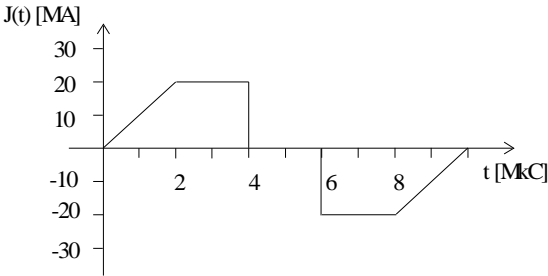
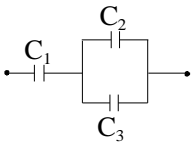
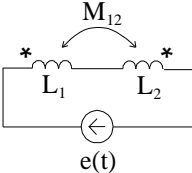
$$e = E_m e^{st}; J = J_m e^{st}$$

Приемы практического отыскания зависимых переменных, если применять соответствующий математический аппарат имеют много общего. Это будет показано при дальнейшем изложении курса.

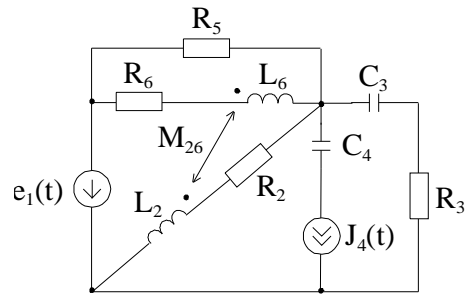
Контрольные вопросы к теме 2

1. Что такое идеальный элемент электрической цепи?
2. Перечислите идеальные двухполюсные элементы. Назовите их свойства и запишите математические модели.
3. Перечислите известные Вам четырехполюсные идеальные элементы. Запишите их математические модели.
4. Выразите условия эквивалентной замены реального источника тока на источник напряжения.
5. Приведите примеры выражения свойств реальных элементов электротехнического устройства сочетанием идеальных элементов.
6. Сформулируйте основные законы теории электрических цепей: закон Ома и законы Кирхгофа.
7. Покажите условия эквивалентной замены однородных идеальных элементов при последовательном и параллельном соединениях.
8. Можно ли соединять идеальные источники последовательно? Параллельно?
9. Каков порядок записи уравнений для мгновенных значений токов и напряжений по первому закону Кирхгофа? Как выделить из них систему независимых уравнений?
10. Каков порядок записи уравнений для мгновенных значений токов и напряжений по второму закону Кирхгофа? Как выделить систему независимых уравнений?
11. Какие Вы знаете способы выражения системы соединений двухполюсников?

Контрольные задачи к теме 2

I	<p>1. Определить мощности элементов. 2. Показать выполнение баланса мощностей в схеме.</p> <div style="text-align: center;">  </div> <p style="text-align: center;">$R=20\ \text{Ом}; E=10\ \text{В}; J=-1\ \text{А}.$</p>
II	<p>1. Построить осциллограммы $u(t)$, $i(t)$, $p(t)$, $w(t)$ реактивного элемента. 2. Проставить масштабы по осям.</p> <div style="text-align: center;">  </div> <div style="text-align: center;">  </div>
III	<p>1. Определить эквивалентную емкость при $C_1=1\ \text{мкФ},$ $C_2=2\ \text{мкФ},$ $C_3=3\ \text{мкФ}$</p> <div style="text-align: center;">  </div>
IV	<p>1. Записать уравнение по второму закону Кирхгофа.</p> <div style="text-align: center;">  </div>
V	<p>1. Определить количество уравнений по законам Кирхгофа. 2. Записать систему независимых уравнений по законам</p>

Кирхгофа.



VI 1. Восстановить схему, проставить УПН токов ветвей и напряжений источников тока.

$$\begin{cases} i_1(t) - i_2(t) - J_3(t) = 0 \\ R_1 i_1(t) + L_1 \frac{di_1(t)}{dt} - e_2(t) = - \left[\frac{1}{C_2} \int_0^t i_{C_2}(t) dt + U_{C_2}(0) \right] \\ - \left[\frac{1}{C_2} \int_0^t i_{C_2}(t) dt + U_{C_2}(0) \right] + R_3 i_3(t) = U_{J_3}(t) \end{cases}$$

Тема 3. Расчет простых цепей при постоянных токах и напряжениях

Система уравнений (дифференциальных), составленная по законам Кирхгофа является достаточной для анализа цепи при любых сигналах. Если $e(t) = E = \text{Const}$ и $J(t) = J = \text{Const}$ не зависят от времени, то и реакции цепи $i_K(t) = I_K = \text{Const}$, $u_K(t) = U_K = \text{Const}$ также будут постоянными, если речь идет об установившемся

процессе. В дифференциальных уравнениях $\frac{di_K}{dt} = 0$; $\frac{du_K}{dt} = 0$. Поскольку $u_{LK} = L \frac{di_K}{dt} \pm M \frac{di_M}{dt}$, то $u_L = 0$, т.е. любая индуктивность должна быть на схеме заменена

закороткой. $i_C = C \frac{du_C}{dt} = 0$, поэтому любая ветвь с конденсатором должна быть разомкнута. Если в результате анализа требуется определить ток через индуктивность и напряжение на конденсаторе, то надо будет искать ток, протекающий по соответствующей закоротке, и напряжение на разрыве цепи, где был конденсатор.

В результате таких схемных преобразований останутся источники ЭДС и тока и резисторы. Описание преобразованной схемы по Кирхгофу даст систему алгебраических уравнений. Процедура преобразований в схеме конечно проще, чем процедура составления дифференциальных уравнений и затем преобразования их к алгебраическим. Однако идея эквивалентных преобразований схемы имеет гораздо более широкое применение. Ниже приводится широко распространенные приемы преобразований, используемые при анализе цепей.

Последовательное соединение резисторов. (рис. 3-1)

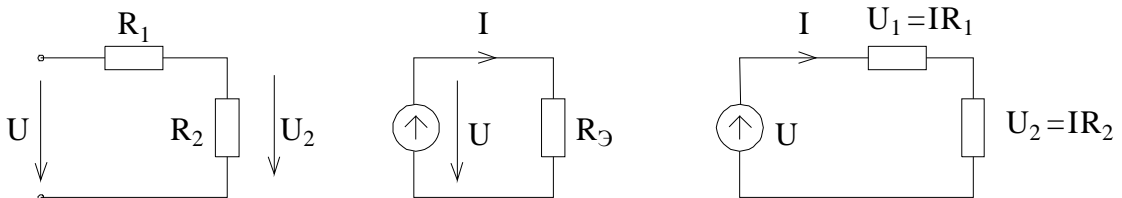


Рис. 3-1

На рисунке показана процедура анализа фрагмента цепи состоящей из двух последовательно соединенных резисторов R_1 и R_2 .

1. $R_3 = R_1 + R_2$ эквивалентная замена.

2. $I_2 = I_1 = \frac{E}{R_3}$ - закон Ома.

3. $U_1 = IR_1$, $U_2 = IR_2$ - закон Ома.

4. $U_1 = U \frac{R_1}{R_1 + R_2}$ и $U_2 = U \frac{R_2}{R_1 + R_2}$.

Конечно, практически нет необходимости так подробно это записывать. Обычно для полного анализа сразу вычисляют:

$$I = \frac{U}{R_1 + R_2}, \quad U_1 = U \frac{R_2}{R_1 + R_2} \quad \text{и} \quad U_2 = U \frac{R_1}{R_1 + R_2}$$

Последние две формулы являются формулами делителя напряжения.

Параллельное соединение элементов - делитель тока

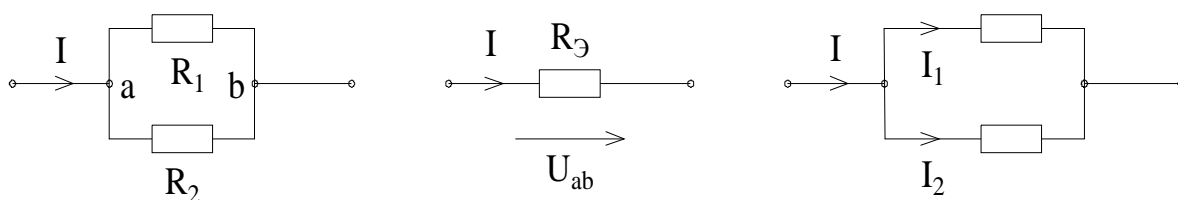


Рис. 3-2

При анализа фрагмента цепи, содержащего два параллельно соединенных резистора (рис. 3-2) можно рассуждать в следующем порядке:

1. Эквивалентная замена:

$$\frac{1}{R_3} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \quad \text{или} \quad R_3 = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2};$$

2. По закону Ома:

$$U_{ab} = I R_3;$$

3. Формулы делителя тока:

$$I_1 = \frac{U_{ab}}{R_1} = I \frac{R_1 R_2}{(R_1 + R_2) R_1} = I \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

$$I_2 = I \frac{R_1}{R_1 + R_2}$$

Используя только эти два приема, можно анализировать довольно сложные схемы.

Например, для лестничной схемы, используя несколько раз преобразования, последовательных и параллельных ветвей можно получить одно эквивалентное сопротивление, как показано на рис. 3-3.

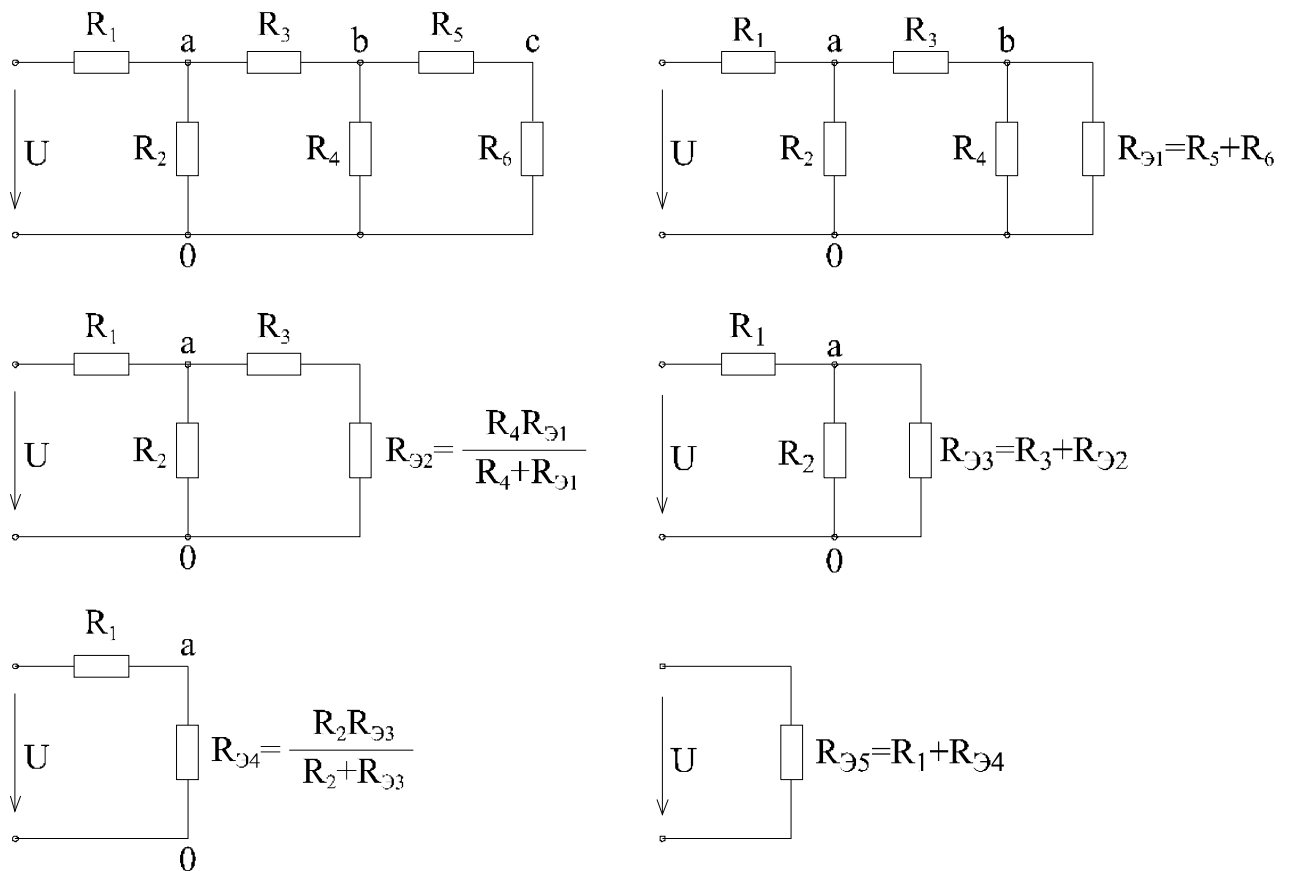


Рис. 3-3

Иногда, выразив параллельные ветви проводимостями: $G_2 = \frac{1}{R_2}$; $G_4 = \frac{1}{R_4}$ и т.д., получают ответ в виде лестничной дроби:

$$R_{Э5} = R_1 + \frac{1}{G_2 + \frac{1}{R_3 + \frac{1}{G_4 + \frac{1}{R_5 + \frac{1}{G_6}}}}}$$

Дальнейший анализ проводится в обратной последовательности:

1. Находится ток $I_1 = \frac{U}{R_{Э5}}$

2. По формуле делителя напряжения находится напряжение:

$$U_{a0} = U \frac{R_{Э4}}{R_1 + R_{Э4}}$$

3. По формуле делителя тока находятся токи:

$$I_2 = I_1 \frac{R_{Э3}}{R_2 + R_{Э3}}; \quad I_3 = I_1 \frac{R_2}{R_2 + R_{Э3}}$$

4. Продолжая подобную процедуру:

$$U_{b0} = I_3 R_{\Sigma 2}; \quad I_4 = I_3 \frac{R_{\Sigma 1}}{R_4 + R_{\Sigma 1}} \text{ и т.д. находятся все остальные токи и напряжения.}$$

При известных навыках методом преобразований легко решаются задачи анализа довольно сложных цепей с последовательно-параллельным соединением резисторов.

Существенно расширяются возможности применения метода преобразований, если освоить применение **преобразований треугольника в трехлучевую звезду**.

Например, решить задачу анализа мостовой схемы непосредственно затруднительно. Но если три сопротивления R_{12} , R_{23} , R_{31} преобразовать в сопротивления R_1 , R_2 , R_3 , то дальше задача решается просто. (См. рис. 3-4). Часто требуется и обратное преобразование:

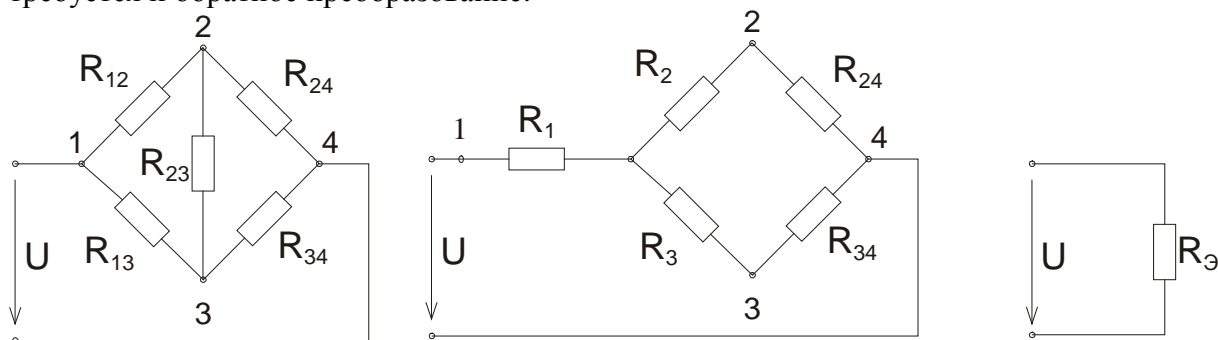


Рис. 3-4

Рассмотрим это преобразование:

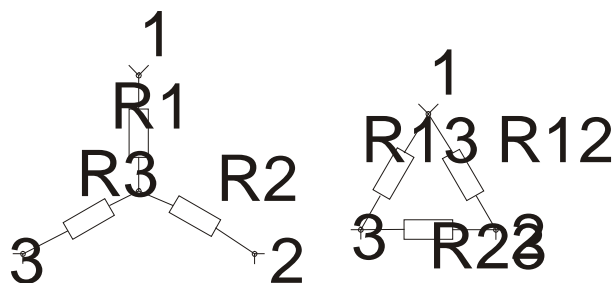


Рис. 3-5

Принцип эквивалентности требует, чтобы замена сопротивлений R_1 , R_2 , R_3 на R_{12} , R_{23} , R_{31} (рис. 3-5) во фрагменте схемы не повлияла на распределение токов и напряжений в остальной части схемы.

Рассмотрим сопротивление между точкой 2 и 3 в обеих схемах при обрыве первого резистора:

$$R_3 + R_2 = \frac{R_{23}(R_{31} + R_{12})}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}$$

при обрыве второго:

$$R_1 + R_3 = \frac{R_{31}(R_{12} + R_{23})}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}$$

при обрыве третьего:

$$R_1 + R_2 = \frac{R_{12}(R_{31} + R_{23})}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}.$$

Решая систему полученных уравнений (например сложить второе и третье уравнения и вычесть из них первое), получим:

$$R_1 = \frac{R_{12}R_{31}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}$$

Используя соображения симметрии, путем круговой замены индексов:

$$R_2 = \frac{R_{23}R_{12}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}$$

$$R_3 = \frac{R_{31}R_{23}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}$$

Если последовательно вычислить проводимости в обеих схемах при закорачивании зажимов 1-2; 2-3; 3-1, то получим подобные уравнения для проводимостей при обратном переходе от “звезды” к “треугольнику”:

$$G_{31} + G_{23} = \frac{G_3(G_1 + G_2)}{G_1 + G_2 + G_3}$$

$$G_{31} + G_{12} = \frac{G_1(G_2 + G_3)}{G_1 + G_2 + G_3}$$

$$G_{12} + G_{23} = \frac{G_2(G_1 + G_3)}{G_1 + G_2 + G_3}.$$

Далее (1+2-3)

$$G_{31} = \frac{G_1G_3}{G_1 + G_2 + G_3}; \quad G_{12} = \frac{G_1G_2}{G_1 + G_2 + G_3}; \quad G_{23} = \frac{G_2G_3}{G_1 + G_2 + G_3}.$$

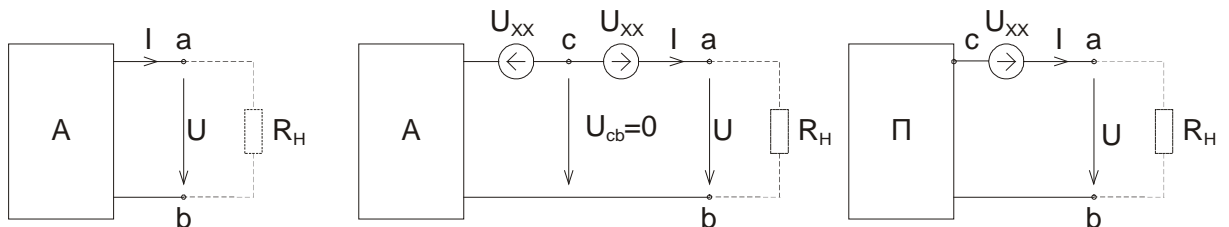
В связи с простотой получения формул преобразования из “треугольника” в “звезду” и обратно, нет особой необходимости запоминать их.

Любой пассивный двухполюсник можно представить как некоторое эквивалентное сопротивление, что с очевидностью доказывается, если представить резистор как

отношение $R_{\Sigma} = \frac{U_{\text{ВХ}}}{I_{\text{ВХ}}}$. Отсюда следует, что свертка различным образом соединенных двухполюсников в эксперименте равнозначна измерению входного тока при произвольно выбранном напряжении.

Следующим, часто применяемым преобразованием, является **метод эквивалентного генератора**.

Докажем теорему: любой активный двухполюсник можно заменить реальным источником напряжения с величиной ЭДС равной напряжению холостого хода и внутренним сопротивлением равным сопротивлению короткого замыкания.



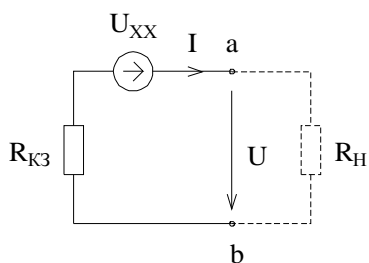


Рис. 3-6

Доказывается эта теорема показом эквивалентности изображенных на рис. 3-6 схем с точки зрения напряжения и тока нагрузки (R_H). Действительно, включение двух одинаковых идеальных источников с разнонаправленным напряжением, в частности равным напряжению холостого хода (при $R_H = \infty$) не изменит тока и напряжения нагрузки. При этом $U_{cb} = 0$, поэтому активный двухполюсник вместе со встречно направленным источником U_{XX} можно заменить пассивным двухполюсником. Последний заменяется сопротивлением короткого замыкания, названным так потому, что в эксперименте оно может быть получено, если измерить ток короткого замыкания

$$(R_H = 0) \quad R_{K3} = \frac{U_{XX}}{I_{K3}}.$$

Теорема доказана.

Преобразования источников

От реального источника ЭДС легко перейти к источнику тока (рис.3-7).

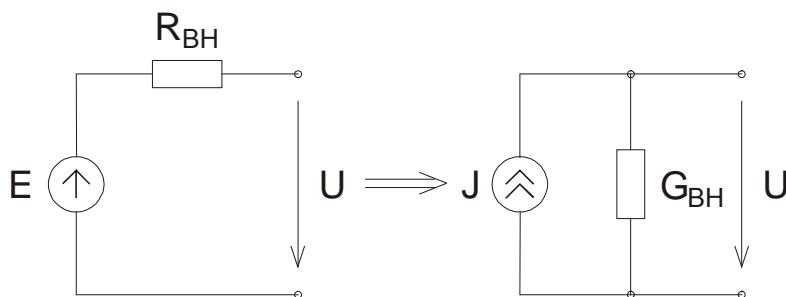


Рис. 3-7

$$J = \frac{E}{R_{ен}}; \quad G_{ен} = \frac{1}{R_{ен}}.$$

Пример:

Определить условие передачи максимальной мощности от активного двухполюсника в нагрузку.

По теореме об эквивалентном генераторе схема преобразуется к виду, изображенному на рис. 3-8.

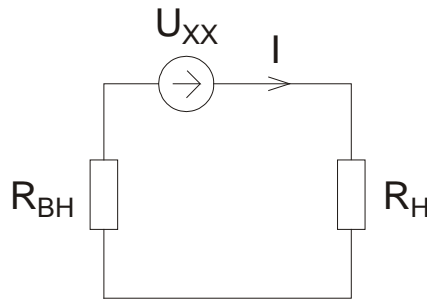


Рис. 3-8

$$I = \frac{U_{XX}}{R_{BH} + R_H}; \quad P_H = I^2 R_H = \frac{U_{XX}^2 R_H}{(R_{BH} + R_H)^2}$$

Максимум P_H при $\frac{dP_H}{dR_H} = 0$

$$\frac{dP_H}{dR_H} = U_{XX}^2 \frac{(R_{BH} + R_H)^2 - R_H 2(R_{BH} + R_H)}{(R_{BH} + R_H)^4} = 0, \quad R_H = R_{en}.$$

Максимум мощности передается в нагрузку при сопротивлении нагрузки равном внутреннему сопротивлению источника (один из вариантов согласования генератора и нагрузки).

Эквивалентные преобразования при последовательном соединении реальных источников ЭДС и параллельном соединении реальных источников тока не представляют трудностей и показаны на рис. 3-9.

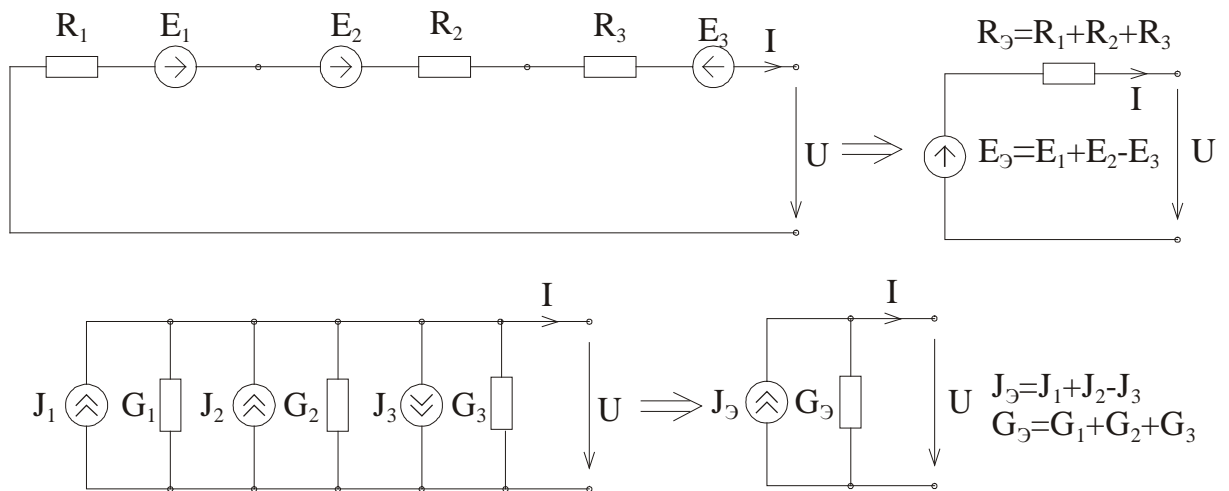


Рис. 3-9

Если же требуется, например, преобразовать схему при параллельном соединении активных двухполюсников, то здесь полезно перейти предварительно к источникам тока (рис. 3-10).

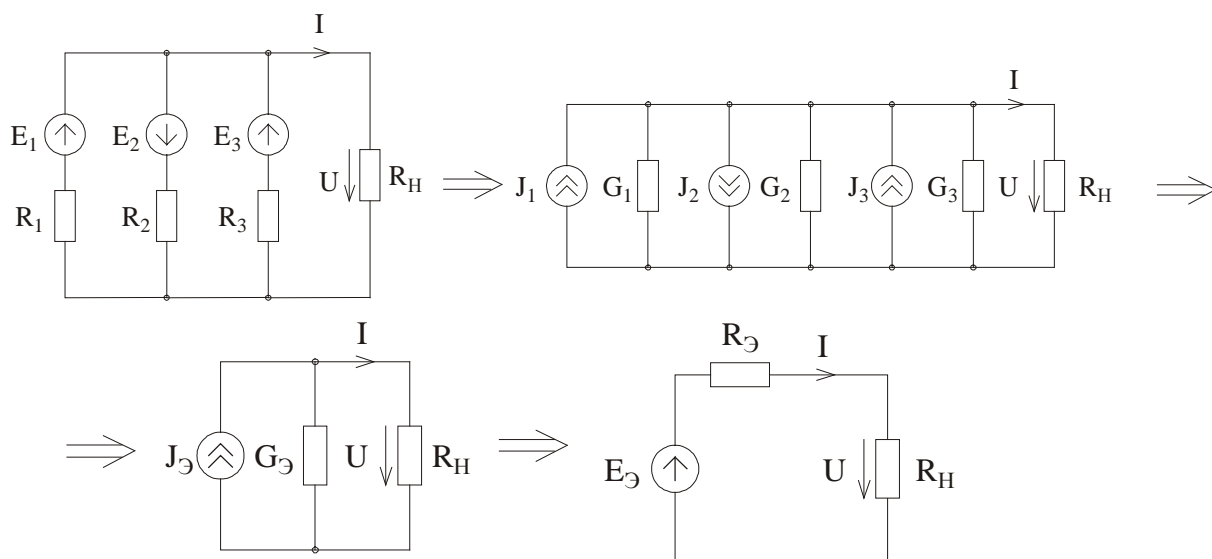


Рис. 3-10

$$J_K = \frac{E_K}{R_K}; \quad G_K = \frac{1}{R_K}; \quad J_{\Sigma} = \sum J_K; \quad G_{\Sigma} = \sum G_K$$

Наконец

$$E_{\Sigma} = \frac{J_{\Sigma}}{G_{\Sigma}}; \quad R_{\Sigma} = \frac{1}{G_{\Sigma}}.$$

Обобщения закона Ома

1. Для пассивной ветви (рис. 3-11).

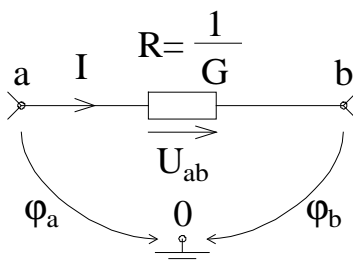


Рис. 3-11

$$I = U_{ab} G$$

или, если ввести понятие потенциал узла - напряжение между заданным узлом и узлом, потенциал которого принят за ноль:

$$I = (j_a - j_b) G$$

2. Для ветви с источником ЭДС. (рис. 3-12).

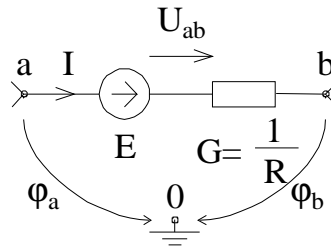


Рис. 3-12

По контуру: а-0-в-а

$$j_a - j_b \text{ }_{\text{оо}} IR = -E$$

или

$$I = [(j_a - j_b) + E] G$$

При записи требуется, конечно, обращать внимание на выбранные положительные направления токов, потенциалов и ЭДС.

3. Для ветви с источником тока. (рис. 3-13).

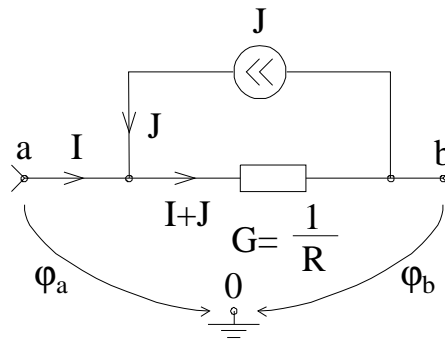


Рис. 3-13

По контуру: а-0-в-а

$$j_a - j_b \text{ }_{\text{оо}} (I + J) R = 0$$

$$I = (j_a - j_b) G - J$$

4. Для обобщенной ветви. (рис. 3-14).

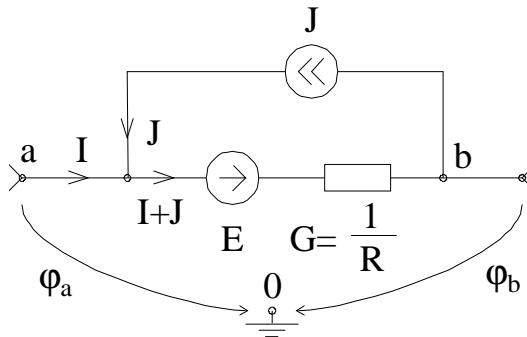


Рис. 3-14

По контуру: a-0-b-a

$$(j_a - j_b) R = -E$$

$$I = [(j_a - j_b) E] G - J$$

Метод двух узлов

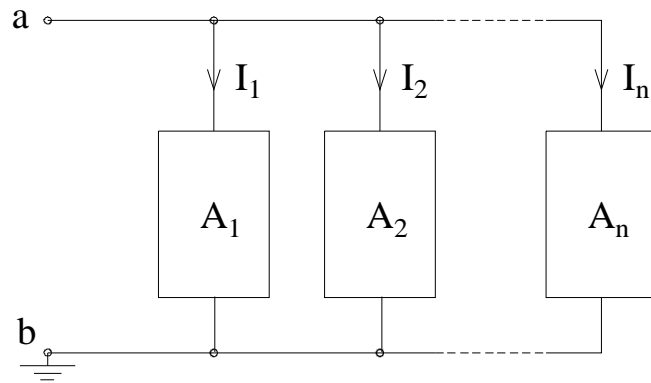


Рис. 3-15

Часто встречаются схемы, в которых все двухполюсники включены параллельно (рис. 3-15). Двухполюсники могут быть как активными, так и пассивными. В этом случае можно принять потенциал одного из узлов за ноль ($j_b = 0$) и определить потенциал j_a . Если потенциал j_a определен, то в зависимости от конкретного содержания двухполюсника, ток через него определяется по одной из форм записи закона Ома.

Для определения потенциала узла j_a , приняв в формуле для обобщенной ветви $j_b = 0$ и просуммировав все токи, получим по первому закону Кирхгофа:

$$\sum_1^n I_K = \sum_1^n [j_a + E_K] G_K - J_K = 0$$

$$j_a = \frac{-\sum_1^n E_K G_K + J_K}{\sum_1^n G_K}$$

отсюда

По этой формуле определяется потенциал узла. В литературе часто встречается формула при отсутствии источников тока в предположении, что источники ЭДС, направленные к узлам, положительны:

$$j_a = \frac{\sum_1^n E_K G_K}{\sum_1^n G_K}$$

Пример. Определить ток в R_H . (рис. 3-16)

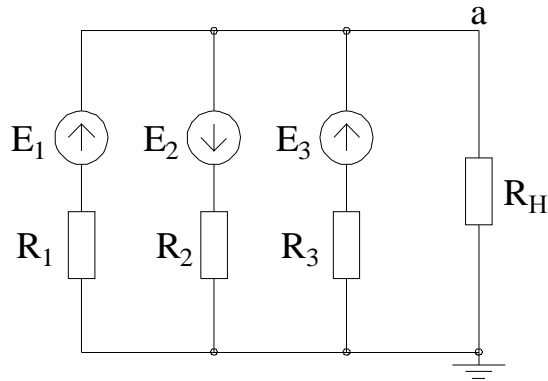


Рис. 3-16

1. Находим потенциал:

$$j_a = \frac{\frac{E_1}{R_1} - \frac{E_2}{R_2} + \frac{E_3}{R_3}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_H}}$$

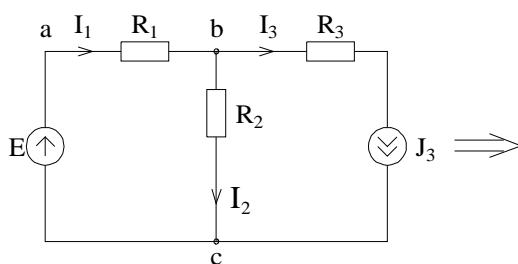
2. Находим ток I_H :

$$I_H = \frac{j_a}{R_H}.$$

Принцип наложения (суперпозиции)

Принцип наложения вытекает из физического принципа независимости действия сил в линейной системе. По этому принципу в схеме, где имеется два и более независимых источника, можно задачу анализа (поиск токов в ветвях и напряжений на элементах) искать отдельно для каждого источника, а результат алгебраически суммировать. При удалении какого-либо источника надо сохранять его внутреннее сопротивление. Это, практически, означает, что идеальный источник ЭДС закорачивается, а ветвь с идеальным источником тока разрывается.

Пример. Определить токи в ветвях (рис. 3-17).



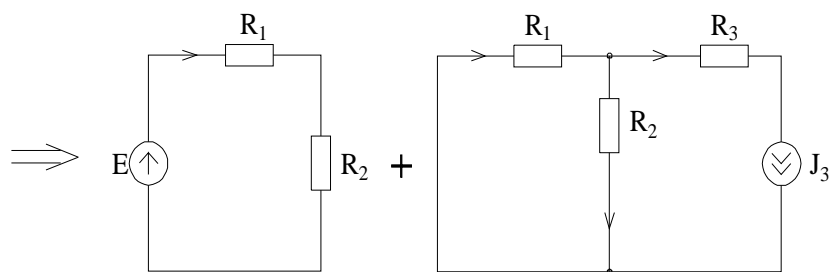


Рис. 3-17

Представляем схему, как результат “сложения” двух схем с источником ЭДС и с источником тока. Расчетные данные удобно свести в таблицу токов:

	R₁	R₂	R₃
Ток через резистор R _к от действия источника E ₁	$\frac{E_1}{R_1 + R_2}$	$\frac{E_1}{R_1 + R_2}$	0
Ток через резистор R _к от действия источника J ₃	$J \frac{R_2}{R_1 + R_2}$	$-J \frac{R_1}{R_1 + R_2}$	J
Ток через резистор R _к	$\frac{E_1 + JR_2}{R_1 + R_2}$	$\frac{E_1 - JR_1}{R_1 + R_2}$	J

Примечания:

1. Знаки токов принимаются относительно одинаково выбранных для всех схем условных направлений.
2. Квадратичные формы (мощность, энергия) рассчитываются только для суммарных токов.

Хорошей проверкой результатов анализа цепи является расчет **баланса мощности**. Как и для любой замкнутой системы $\sum P_K = 0$. Подсчитывается мощность, рассеиваемая каждым резистором $P_K = I_K^2 R_K > 0$ и каждым источником $P_K = UI$. Токи, конечно, берутся суммарные. Следует обратить внимание, что для резисторов P_K всегда положительны. Что касается мощности источника, то если истинное напряжение (а не ЭДС) и ток источника направлены встречно, то $P_K < 0$, что означает отдачу энергии цепи. Если $P_K > 0$, то источник потребляет энергию. Для определения величины и знака напряжения на источнике тока необходимо составить контурное уравнение по любому контуру, содержащему источник тока:

$$\sum U = 0.$$

Контурное уравнение наглядно можно представить на **потенциальной диаграмме**. Для ее составления по оси абсцисс откладывают сопротивления соответствующих участков цепи, а по оси ординат - потенциалы в соответствующих точках. Составим диаграмму для контура а b с а предыдущего примера (рис. 3-18).

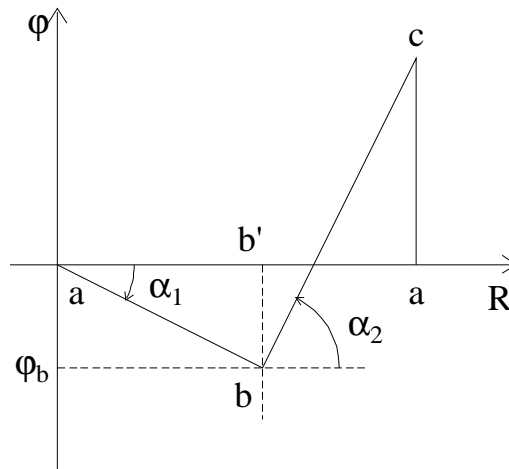


Рис. 3-18

Для точки a примем потенциал $j_a \neq 0$. Отрезок ab' равен в выбранном масштабе сопротивлению R_1 . Поскольку ток течет в направлении ab , потенциал точки b меньше, чем точки a $\phi_b < \phi_a$.

Пусть $E_1 - JR_1 < 0$, тогда потенциал точки c больше, чем b $j_c > j_b$. Величина отрезка ca соответствует $(-U_{ac})$; $k \cdot \operatorname{tg} \alpha_1 = I_1 < 0$, а $k \cdot \operatorname{tg} \alpha_2 = I_2 > 0$.

Изложенные в настоящей главе приемы расчета в различных сочетаниях, оставляя большие возможности для творчества, при известных навыках, позволяют быстро, без специальных вычислительных средств анализировать довольно сложные цепи.

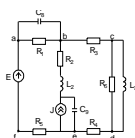
Контрольные вопросы к теме 3

1. Как преобразовать электрическую цепь, если в ней действуют постоянные токи и напряжения?
2. Запишите формулы делителя тока и делителя напряжения.
3. В чем сущность метода эквивалентных преобразований при анализе электрических цепей?
4. Как выразить эквивалентную замену треугольника в звезду и обратно?
5. Докажите теорему об эквивалентном генераторе.
6. Как проводится эквивалентная замена при различных соединениях активных двухполюсников?
7. Выразите математические соотношения для обобщенного закона Ома.
8. В чем сущность принципа наложения? Каковы ограничения для применения этого принципа?
9. Что означает отрицательная мощность для активного двухполюсника?
10. Что такое потенциальная диаграмма?

Контрольные задачи к теме 3

I

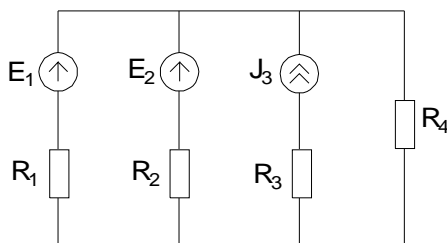
1. 1. Определить токи через резисторы (методом наложения).
2. 2. Определить напряжения на конденсаторах.
3. 3. Определить токи через катушки.
4. 4. Составить баланс мощности.
5. 5. Составить потенциальную диаграмму по контуру a, b, c, d, e, f.



$E_1=30\text{ В}$, $J=3\text{ А}$, $L_2=L_7=10\text{ Гн}$, $R_1=R_2=R_5=R_6=5\text{ Ом}$,
 $R_3=2\text{ Ом}$, $R_4=3\text{ Ом}$, $C_8=C_9=1\text{ мФ}$

II

Определить напряжение и ток резистора R_4 .

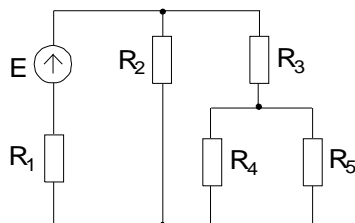


$E_1=5\text{ В}$, $E_2=10\text{ В}$, $J=1\text{ А}$, $R_1=1\text{ Ом}$, $R_2=3\text{ Ом}$, $R_3=10\text{ Ом}$, $R_4=5\text{ Ом}$

III

Определить (устно!):

2. 1. Входное сопротивление.
3. 2. Входной ток.
4. 3. Мощность источника.
5. 4. Напряжение на резисторе R_5 .



$R_1=3\text{ Ом}$, $R_2=10\text{ Ом}$, $R_3=5\text{ Ом}$, $R_4=10\text{ Ом}$, $R_5=10\text{ Ом}$,
 $E=16\text{ В}$

Тема 4. Анализ простых цепей при синусоидальных токах и напряжениях

4.1. Характеристики и свойства синусоидальных сигналов

Синусоидальный сигнал это периодические, изменяющиеся во времени ток, напряжение или ЭДС.

$$i = I_m \sin(\omega t + \varphi_i)$$

$$u = U_m \sin(\omega t + \varphi_u)$$

$$e = E_m \sin(\omega t + \varphi_e)$$

I_m ; U_m ; E_m - соответствующие амплитудные значения $\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$ - круговая частота.

f - частота

T - период.

φ_i ; φ_u ; φ_e - начальные фазы функции.

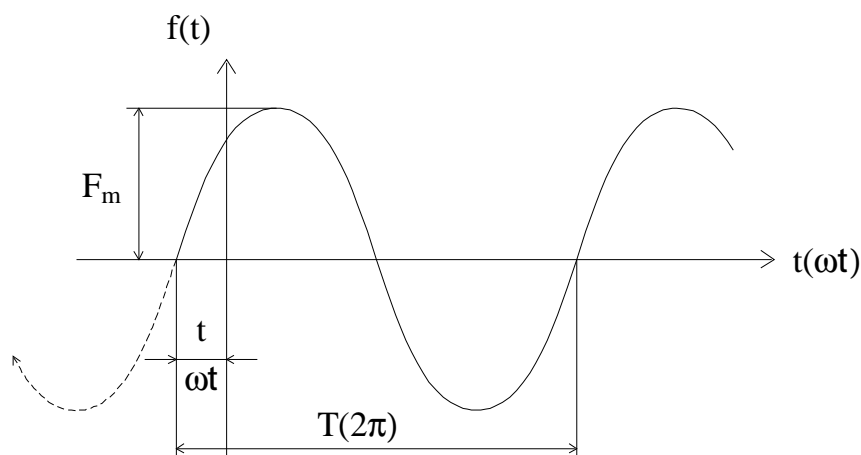


Рис. 4-1

Поскольку анализ цепи проводится в установившемся режиме, допускается, что с момента начала включения сигнала прошло времени достаточно, чтобы амплитуды токов и напряжений перестали изменяться. После этого за начало отсчета можно принять произвольный момент. Неопределенность φ_i ; φ_u ; φ_e ликвидируется тем, что одну из начальных фаз сигнала (или реакции) принимают за нулевую. Ось абсцисс градуируют либо в единицах времени t , либо в единицах углов - градусах или радианах (ωt).

Выяснение вопроса: какому постоянному току с энергетической точки зрения соответствует заданный синусоидальный ток, приводит к понятию **среднеквадратичного, эффективного значения** тока (напряжения или ЭДС).

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt} = \sqrt{\frac{1}{2p} \int_0^{2p} I_m^2 \cdot \sin^2 \omega t \cdot d(\omega t)} =$$

$$= \sqrt{\frac{I_m^2}{2p} \int_0^{2p} \frac{1}{2} (1 - \cos 2\omega t) \cdot d(\omega t)} = \frac{I_m}{\sqrt{2}} = 0,707 I_m$$

Этот ток (напряжение) имеют еще наименование **действующих** - важная характеристика синусоидального сигнала. Действующее значение принято обозначать соответствующей буквой без всякого индекса (как постоянный ток и напряжение). Говоря о величине переменного тока или напряжения, если нет специальной оговорки, имеют ввиду именно эту характеристику.

Среднее по модулю значение функции (среднее значение равно нулю):

$$I'_{CP} = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} I_m \cdot \sin \omega t dt = \frac{-2}{T} \cdot \frac{I_m T}{2p} \Big|_0^{T/2} \cos \omega t = \frac{2}{p} I_m = 0,636 I_m$$

Встречаются характеристики:

- коэффициент амплитуды: $K_a = \frac{I_m}{I} = \sqrt{2} = 1,41$
- коэффициент формы: $K_{т\text{ф}} = \frac{I}{I'_{CP}} = \frac{p}{2\sqrt{2}} = 1,11$

Из многих свойств синусоидальных функций выделим важнейшие для дальнейшего изложения:

1. Сложение двух (и более) синусоидальных функций одинаковой частоты дает также синусоидальную функцию той же частоты. Действительно, сложим, например, два тока:

$$I_{m1} \sin(\omega t + \gamma_1) + I_{m2} \sin(\omega t + \gamma_2) = I_{m1} \sin \omega t \cos \gamma_1 +$$

$$+ I_{m1} \cos \omega t \sin \gamma_1 + I_{m2} \sin \omega t \cos \gamma_2 + I_{m2} \cos \omega t \sin \gamma_2 =$$

$$= (I_{m1} \cos \gamma_1 + I_{m2} \cos \gamma_2) \sin \omega t + (I_{m1} \sin \gamma_1 + I_{m2} \sin \gamma_2) \cos \omega t =$$

$$= I_m \sin(\omega t + \gamma)$$

$$\text{где } I_m = \sqrt{(I_{m1} \cos \gamma_1 + I_{m2} \cos \gamma_2)^2 + (I_{m1} \sin \gamma_1 + I_{m2} \sin \gamma_2)^2}$$

$$\gamma = \arctg \frac{I_{m1} \sin \gamma_1 + I_{m2} \sin \gamma_2}{I_{m1} \cos \gamma_1 + I_{m2} \cos \gamma_2}$$

Заметим, что операция сложения двух токов в таком виде, хотя и доказывает выделенное свойство, оказывается очень громоздкой.

2. Дифференцирование синусоидальной функции даст синусоидальную функцию той же частоты. Если $i = I_m \sin(\omega t + \gamma_i)$, то

$$\frac{di}{dt} = \omega I_m \cos(\omega t + \gamma_i) = \omega I_m \sin\left(\omega t + \gamma_i + \frac{\pi}{2}\right) = A \cdot \sin(\omega t + \gamma)$$

где $A = \omega I_m$

$$y = \left(y_i + \frac{p}{2} \right).$$

3. Интегрирование синусоидальной функции дает синусоидальную функцию той же частоты. Для определенности вычислим напряжение на конденсаторе при синусоидальном токе.

$$\begin{aligned} U_C &= \frac{1}{C} \int_0^t i dt + u_C(0) = \frac{1}{C} \int_0^t I_m \sin(\omega t + y_i) dt + u_C(0) = \\ &= \frac{-1}{\omega C} I_m \Big|_0^t \cos(\omega t + y_i) + u_C(0) = \frac{I_m}{\omega C} \left(\sin\left(\omega t + y_i - \frac{p}{2}\right) \right) = \\ &= \frac{I_m}{\omega C} \sin(\omega t + y) \end{aligned}$$

$$\frac{I_m \cos y_i}{\omega C} + u_C(0) = 0$$

Необходимо принять , т.к. при синусоидальном токе, протекающем через конденсатор, среднее напряжение равно нулю (заряды не могут накапливаться).

Если вспомнить, что интегро-дифференциальные уравнения по Кирхгофу представляют из себя суммы синусоидальных функций их производных и интегралов, то можно сделать важный вывод: если в цепи действуют источники синусоидального тока одной и той же частоты, то все реакции будут синусоидальными токами и напряжениями той же частоты.

4.2. Изображение синусоидальных функций в виде векторов и комплексных чисел

Изображение синусоидальной функции в виде вращающегося с угловой скоростью ω вектора заложено в самом определении синуса как ординаты конца радиуса окружности единичного радиуса, проведенной через начало координат.

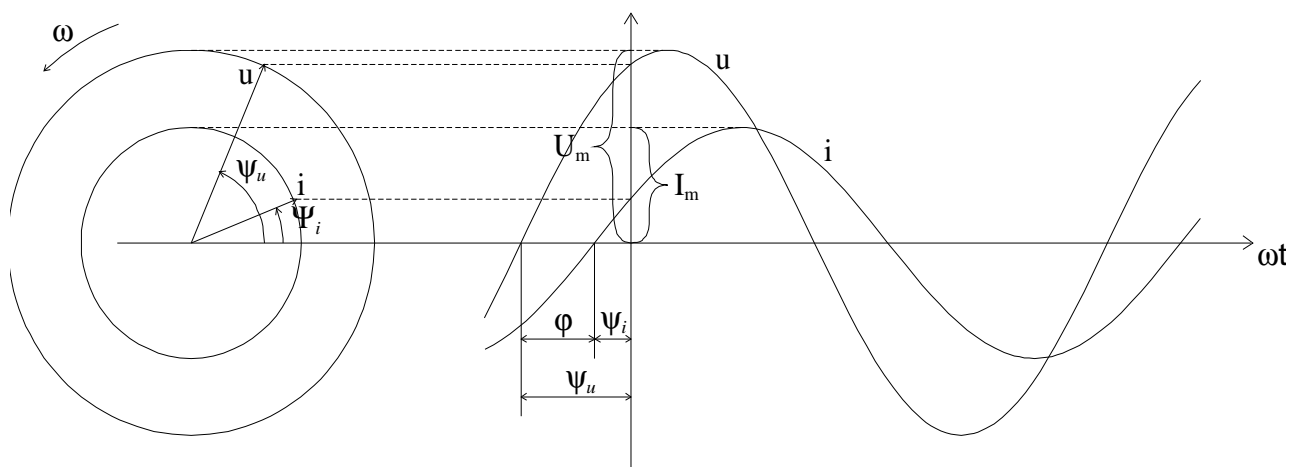


Рис. 4-2

На рис. 4-2 изображены две синусоидальные функции $u(t)$ и $i(t)$ одинаковой частоты. Слева проведены (из одного центра) две окружности радиусом I_m и U_m и обозначены вращающиеся с угловой скоростью ω два вектора с учетом начальных фаз и ψ_i . Угол между ними равен $\psi_u - \psi_i = \varphi$.

Принято $\varphi > 0$, если $\psi_u > \psi_i$. Если подразумевать, что вектора вращаются с угловой скоростью ω , то они содержат всю информацию о синусоидальных функциях $i(t)$ и $u(t)$ - их величины равны I_m и U_m , а начальные фазы - ψ_i и ψ_u .

Изобразив не величины I_m и U_m , а $\frac{U_m}{\sqrt{2}} = U$, $\frac{I_m}{\sqrt{2}} = I$, получим векторную диаграмму, т.е. относительное расположение векторов \underline{U} и \underline{I} , которое сохраняет угол φ независимо от конкретного значения t . Это называется векторной диаграммой.

Перенесем вектора на комплексную плоскость (рис.4-3).

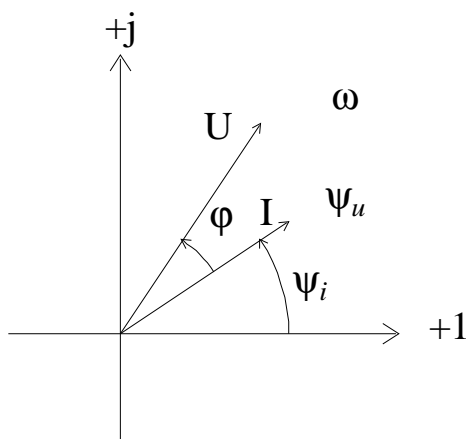


Рис. 4-3

Если иметь ввиду, что оператор e^{ja} означает поворот вектора на комплексной плоскости на угол a против часовой стрелки, то получим для тока $I \cdot e^{j(wt + \gamma_i)} = I \cdot e^{j\gamma_i} \cdot e^{j\omega t} = \mathbf{\hat{K}} e^{j\omega t}$, где $\mathbf{\hat{K}} = I \cdot e^{j\gamma_i}$,

вектор $\mathbf{\hat{K}}$ полностью сохраняет информацию о синусоидальной функции $i(t)$: $I_m = \sqrt{2}I$ - амплитуда, γ_i - начальная фаза. Это обычно записывается:

$$i(t) = I_m \sin(\omega t + \gamma_i) \cdot \mathbf{\hat{K}}$$

Множитель $e^{j\omega t}$ можно опускать т.к. эти вектора будут применяться в законах Ома и Кирхгофа (и их комбинациях), и он содержится как в левой, так и в правой части уравнений и в результате сокращения просто излишен.

В тригонометрической форме:

$$\sqrt{2} \mathbf{\hat{K}} e^{j\omega t} = I_m \left[\cos(\omega t + \gamma_i) + j \sin(\omega t + \gamma_i) \right]$$

поэтому для обратного перехода от комплексного изображения к функции времени достаточно с учетом $\sqrt{2}$ и $e^{j\omega t}$ взять коэффициент при мнимой части комплексного изображения.

Практически применяются комплексные изображения в различных формах:

$\mathbf{\hat{K}} = a + jb$ - алгебраическая,

$\mathbf{\hat{K}} = A \cdot \cos \gamma + j A \sin \gamma$ - тригонометрическая,

$\mathbf{\hat{K}} = A \cdot e^{j\gamma}$ - показательная,

где $A = \sqrt{a^2 + b^2}$; $\gamma = \arctg \frac{b}{a}$

Иногда применяют условную запись:

$\mathbf{\hat{K}} = A \angle \gamma$.

Вспомним операцию дифференцирования:

$$\frac{di}{dt} = \omega I_m \sin\left(\omega t + \gamma_i + \frac{\pi}{2}\right) \cdot \frac{\omega \mathbf{\hat{K}}_m}{\sqrt{2}} e^{j\omega t} e^{j\gamma_i} e^{j\frac{\pi}{2}},$$

с учетом того, что

$$e^{j\frac{\pi}{2}} = j$$

получим $\frac{di}{dt} = j\omega I e^{j\gamma_i} e^{j\omega t} = j\omega \mathbf{\hat{K}} e^{j\omega t}$

т.е. изображению производной на комплексной плоскости соответствует умножение на $j\omega$.

Аналогично интегрированию в области изображений соответствует деление на $j\omega$.

$$\int i dt \doteq \frac{\mathcal{E}}{j\omega}$$

Эти обстоятельства приводят к алгебраизации интегро-дифференциальных уравнений.

Решим для примера задачу нахождения тока в схеме (рис. 4-4) с применением разного математического аппарата.

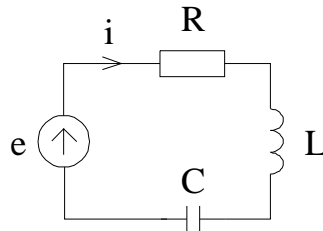


Рис. 4-4

1. Непосредственное интегрирование.

Интегро-дифференциальное уравнение

$$Ri + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int_0^t i dt + u_C(0) = E_m \sin(\omega t + \varphi_u)$$

Приняв $i = I_m \sin(\omega t + \varphi_i)$,

получим:

$$RI_m \sin(\omega t + \varphi_i) + \omega L I_m \cos(\omega t + \varphi_i) + \frac{1}{\omega C} \cos(\omega t + \varphi_i) + \frac{I_m}{\omega C} + U_C(0) = E_m \sin(\omega t + \varphi_u)$$

т.к. в правой части уравнения синусоидальная функция надо потребовать

$$\frac{I_m}{\omega C} + U_C(0) = 0$$

$$I_m \left[R \sin(\omega t + \varphi_i) + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \cos(\omega t + \varphi_i) \right] = E_m \sin(\omega t + \varphi_u)$$

Дальнейшие преобразования:

$$I_m \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2} \left[\cos \alpha \sin(\omega t + \varphi_i) + \sin \alpha \cos(\omega t + \varphi_i) \right] = E_m \sin(\omega t + \varphi_u)$$

где $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}$; $\cos \alpha = \frac{R}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}}$; $\sin \alpha = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}}$

$$I_m \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2} \sin(\omega t + \alpha + \varphi_i) = E_m \sin(\omega t + \varphi_u)$$

Из этого уравнения вытекает:

$$I_m \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2} = E_m ; \quad a + y_i = y_u ; \quad y_u - y_i = a = j$$

$$i = \frac{E_m}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}} \sin(\omega t + y_i)$$

Следовательно , если $y_u = 0$

(выбор начала отсчета времени), то

$$i = \frac{E_m}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}} \sin(\omega t - j) \quad - \text{задача решена.}$$

$$\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2} = Z \quad - \text{имеет размерность сопротивления.}$$

R - активное сопротивление.

$$X = \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \quad - \text{реактивное сопротивление.}$$

ωL и $\frac{1}{\omega C}$ - соответственно индуктивное и емкостное сопротивления.

$j = \arctg \frac{X}{R}$ - сдвиг по фазе между напряжением и током

если $\omega L - \frac{1}{\omega C} > 0$, то $j > 0$ - ток отстает от напряжения по фазе.

если $\omega L - \frac{1}{\omega C} < 0$, то $j < 0$ - ток опережает напряжение по фазе.

Комплексный метод

В интегро-дифференциальном уравнении заменим функции времени их комплексными изображениями:

$$R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} = R + j \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)$$

$$Z = \frac{E}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}} e^{-j\varphi} \quad , \text{ где } j = \arctg \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} .$$

Для принятых выше обозначений

$I(R + jX) = E$ - закон Ома в комплексной форме.

комплекс $R + jX = Z$ - комплексное сопротивление

$$\bar{Z} = Z \cdot e^{jj} = Z \cos j + jZ \sin j \quad , \text{ т.е.}$$

$$R = Z \cdot \cos \varphi ; X = Z \cdot \sin \varphi .$$

После нахождения комплекса тока \dot{I} легко выразить i , взяв мнимую часть без j (конечно с учетом множителя $e^{j\omega t}$, показывающего вращение вектора и множителя $\sqrt{2}$, если расчет велся в эффективных значениях).

$$i = \frac{E\sqrt{2}}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \sin(\omega t - \varphi)$$

Очень наглядное решение можно получить путем построения векторной диаграммы (рис. 4-5):

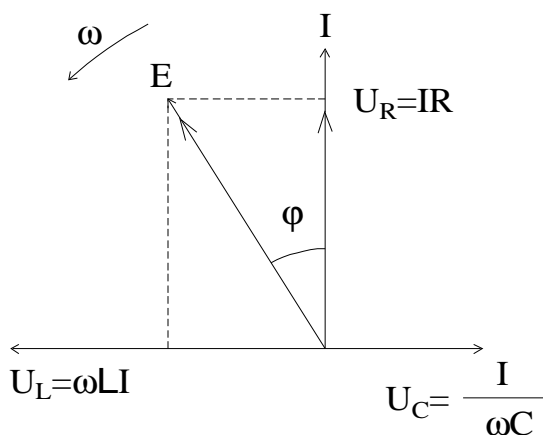


Рис. 4-5

1. Отложим вектор \dot{I} в выбранном масштабе в произвольном направлении.
2. Напряжение на активном сопротивлении $\dot{U}_R = \dot{I}R$ совпадает по фазе с током.
3. Напряжение на катушке индуктивности

$$\dot{U}_L = \dot{I}j\omega L = \omega L \dot{I} e^{j\pi/2}$$

Опережает вектор тока на $\frac{\pi}{2}$.

4. Напряжение на конденсаторе отстает от тока на $\frac{\pi}{2}$:

$$\dot{U}_C = \frac{\dot{I}}{j\omega C} = \frac{\dot{I}}{\omega C} e^{-j\pi/2}$$

5. Суммируя вектора \dot{U}_R и \dot{U}_L и \dot{U}_C получаем по закону Кирхгофа вектор \dot{E} .
6. Из геометрических соотношений получаем все приведенные выше формулы

$$\varphi = \arctg \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} ; E = I \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} ; i = \sqrt{2} E \sin(\omega t - \varphi) .$$

Рассмотрим другой пример (рис 4-6) параллельного соединения.

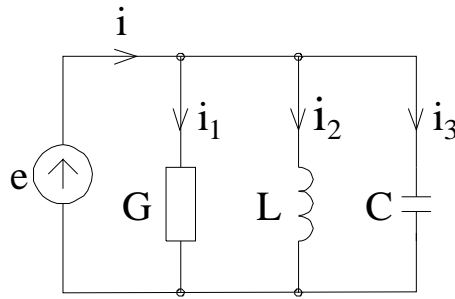


Рис. 4-6

1. Непосредственное интегрирование по первому закону Кирхгофа:

$$i = i_1 + i_2 + i_3 = e G + \frac{1}{L} \int_0^t e dt + i_L(0) + C \frac{de}{dt}$$

$$I_m \sin(\omega t + \varphi_i) = E_m \cdot G \cdot \sin(\omega t + \varphi_U) + \frac{1}{L} \int_0^t E_m \cdot \sin(\omega t + \varphi_U) dt + i_L(0) + C \frac{d[E_m \cdot \sin(\omega t + \varphi_U)]}{dt}$$

$$I_m \sin(\omega t + \varphi_i) = E_m \left[G \cdot \sin(\omega t + \varphi_U) - \frac{1}{\omega L} \cos(\omega t + \varphi_U) + \frac{1}{\omega L} + \frac{i_L(0)}{E_m} + \omega \cdot C \cdot \cos(\omega t + \varphi_U) \right]$$

Как и в предыдущем примере $i_L(0)$ такое, что $\frac{E_m}{\omega L} + i_L(0) = 0$

$$I_m \sin(\omega t + \varphi_i) = E_m \sqrt{G^2 + \left(\frac{1}{\omega L} - \omega C \right)^2} \cdot \sin(\omega t + \varphi_U - a)$$

$$a = \arctg \frac{\frac{1}{\omega L} - \omega C}{G}$$

Если $\varphi_U = 0$, $\varphi_i = -a$, т.е. ток отстает от напряжения, если $\frac{1}{\omega L} - \omega C > 0$

Здесь принята следующая терминология:

$G = \frac{1}{R}$ - активная проводимость

$\frac{1}{\omega L}$ - индуктивная проводимость

ωC - емкостная проводимость

$\frac{1}{\omega L} - \omega C = B$ - реактивная проводимость

$\sqrt{G^2 + B^2} = Y$ - полная проводимость.

В этих терминах решение задачи можно записать

$$I_m \sin(\omega t - j) = Y E_m \sin \omega t$$

т.е. $I_m = Y E_m$ и $j = \arctg \frac{B}{G}$

Решение задачи комплексным методом

Вместо интегро-дифференциального уравнения запишем алгебраическое, применив комплексный метод.

$$\begin{aligned} \dot{I} &= \dot{I}_G + \frac{\dot{I}}{j\omega L} + j\omega C \dot{I} = \dot{I} \left[G - j \left(\frac{1}{\omega L} - \omega C \right) \right] = \\ &= \dot{I} (G - jB) = \dot{I} Y e^{-j\varphi} \end{aligned}$$

$$\bar{Y} = Y e^{-j\varphi} = G - j \left(\frac{1}{\omega L} - \omega C \right) \text{ - комплексная проводимость.}$$

Получим закон Ома в комплексной форме, записанный в терминах проводимостей.

$$\dot{I} = \dot{I} \bar{Y}$$

Решение с помощью векторной диаграммы

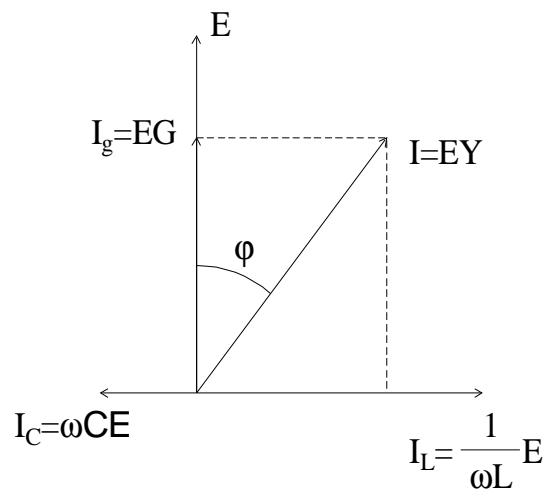


Рис. 4-7

1. За начало отсчета приняв \dot{I} , проводим этот вектор произвольно.
2. Вектор тока через активную проводимость \dot{I}_G совпадает по фазе с напряжением (ЭДС).
3. Вектор тока через катушку индуктивности отстает по фазе от напряжения на $\frac{p}{2}$.
4. Вектор тока через конденсатор опережает напряжение на $\frac{p}{2}$.
5. Суммируя токи, получаем результат. Из геометрии получаем:

$$\underline{Z} = \underline{Z}_L e^{-j\varphi}, \text{ где } \varphi = \arctg \frac{\frac{1}{\omega L} - \omega C}{G}.$$

При необходимости ток можно выразить в виде функции времени ($\varphi_U = 0$)

$$i = E_m \sqrt{G^2 + \left(\frac{1}{\omega L} - \omega C \right)^2} \cdot \sin(\omega t - \varphi)$$

Еще больший эффект от комплексного метода можно получить, если еще на уровне схемы заменить индуктивности и емкости их комплексными сопротивлениями

$$\underline{Z}_L = j\omega L; \quad \underline{Z}_C = \frac{1}{j\omega C} = -j \frac{1}{\omega C}$$

или проводимостями

$$\underline{Y}_L = \frac{1}{\underline{Z}_L} = \frac{1}{j\omega L}; \quad \underline{Y}_C = \frac{1}{\underline{Z}_C} = j\omega C.$$

4.3. Мгновенная, активная, реактивная и полная мощность

Мощность при синусоидальных токах и напряжениях может выражаться по-разному:

1. Мгновенное значение мощности.

При синусоидальных токах и напряжениях

$$p(t) = u \cdot i, \text{ как и для любой цепи.}$$

Подставив в это выражение синусоидальный ток через какой-либо участок цепи и напряжение на этом участке, получим, приняв, что ток отстает от напряжения на угол φ :

$$\begin{aligned} P &= U_m \sin \omega t \cdot I_m \sin(\omega t - \varphi) = \frac{1}{2} U_m I_m [\cos \varphi - \cos(2\omega t - \varphi)] = \\ &= UI \cos \varphi - UI \cos(2\omega t - \varphi) \end{aligned}$$

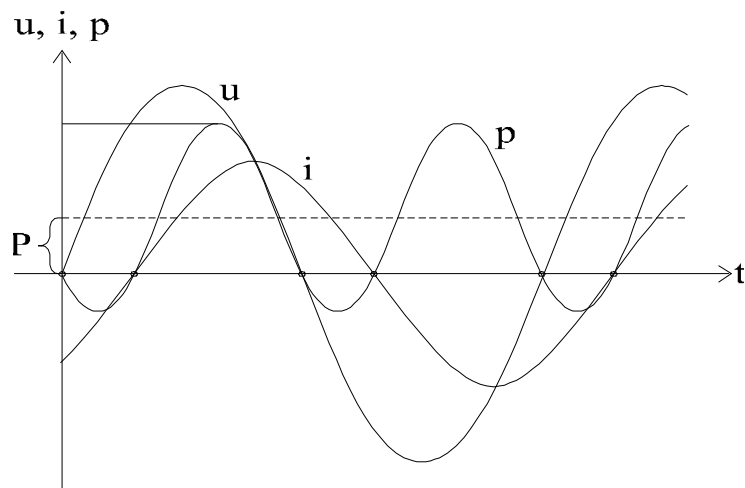


Рис. 4-8

Из формулы и осциллограммы видно, что мгновенная мощность состоит из двух слагаемых: одно, не зависящее от времени, - постоянная составляющая, а другое - синусоидальная функция времени двойной частоты. График p проходит через ноль в точках, где пересекают ось абсцисс либо ток, либо напряжение (рис. 4-8).

Интересно отметить, что если ток и напряжение сдвинуты по фазе на угол $\frac{\pi}{2}$ (чисто емкостная или чисто индуктивная цепь), то первое слагаемое равно нулю (рис. 4-9).

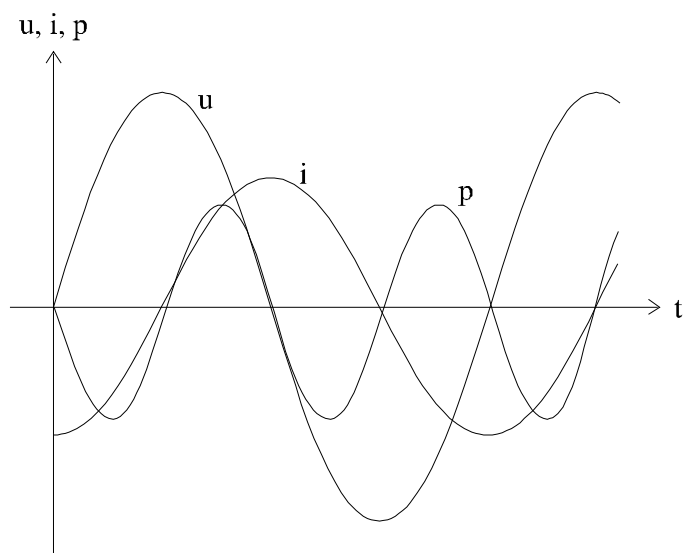


Рис. 4-9

2. Активная мощность

Это мощность (для любых периодических сигналов) определяется как среднее значение мощности за период.

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T u i dt = \frac{1}{T} \int_0^T [U I \cos j - U I \cos(2\omega t - j)] dt = U I \cos j$$

т.к. интеграл от второго слагаемого равен нулю.

На графике рис. 4-8 легко отыскать значение активной мощности. График рис. 4-9 полностью согласуется с представлением о реактивных элементах, которые не рассеивают энергии ($P=0$), а только запасают ее и отдают обратно в цепь. В те промежутки времени, когда $P > 0$ - реактивный элемент запасает энергию, а когда $P < 0$ отдает энергию обратно. Этому колебанию энергии соответствует реактивная мощность, которую можно определить чисто формально:

$$Q = U I \sin j$$

Т.к. для пассивной цепи $-\frac{\pi}{2} < j < +\frac{\pi}{2}$, то активная мощность всегда положительна:

$$P = U I \cos j = I^2 R = U^2 G.$$

Реактивная мощность может быть как положительна, так и отрицательна

$$Q = U I \sin j = I^2 X = U^2 B.$$

В соответствии с принятым ранее обозначением $Y_U - Y_i = j > 0$ - $Q > 0$ соответствует индуктивной цепи.

Реактивная мощность индуктивной катушки считается положительной, а конденсатора отрицательной. Это, в числе прочего, означает, что в одной и той же цепи, если катушка индуктивности потребляет реактивную мощность, то конденсатор ее генерирует, и лишь разница передается извне.

Так же в известной мере формально вводится понятие полной или кажущейся мощности, как параметра отражающего предельные возможности устройства по току и напряжению

$$S = UI = \sqrt{P^2 + Q^2}.$$

Все три характеристики мощности имеют одинаковую размерность (ватт), но в технике получили разное наименование:

P - выражается в ваттах (BT).

Q - в вольт-амперах реактивных (ВАР).

S - в вольт-амперах (ВА).

Поскольку в выражениях для мощности имеет значение разность фаз $Y_U - Y_i = j$ (а не сумма), в комплексной форме для получения мощности напряжение умножают на сопряженный комплекс тока:

$$U I^* = U I e^{j\varphi} = UI \cos \varphi + j UI \sin \varphi = P + jQ = S e^{j\varphi}$$

Измерение активной мощности при периодических токах и напряжениях:

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T i u dt$$

Из формулы: следует, что для измерения мощности требуется иметь прибор перемножающий две функции времени и вычисляющий среднее значение (постоянную составляющую) такой функцию.

При моделировании электрических цепей на ЭВМ в программах типа Electronics Workbench имеется элемент-перемножитель. При его использовании совместно с вольтметром (Д.С.), регистрирующим среднее значение напряжения можно получить требуемое преобразование. Возможная «схема» включения такого прибора приведена на рис. 4-10.

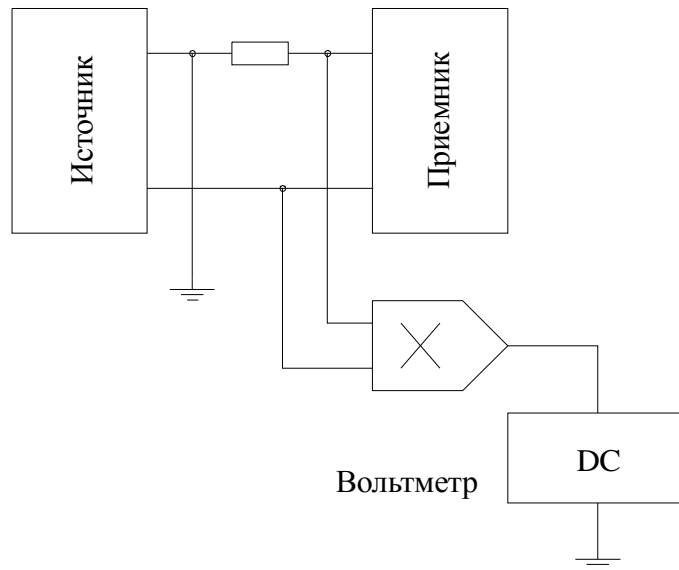


Рис. 4-10

Для измерения мощности в реальных цепях применяют электродинамические ваттметры. Они состоят из двух магнитно-связанных катушек, одна из которых может вращаться вокруг оси. С подвижной катушкой связана стрелка, показывающая на шкале угол ее отклонения от нулевого положения, которое поддерживается специальной пружинкой.

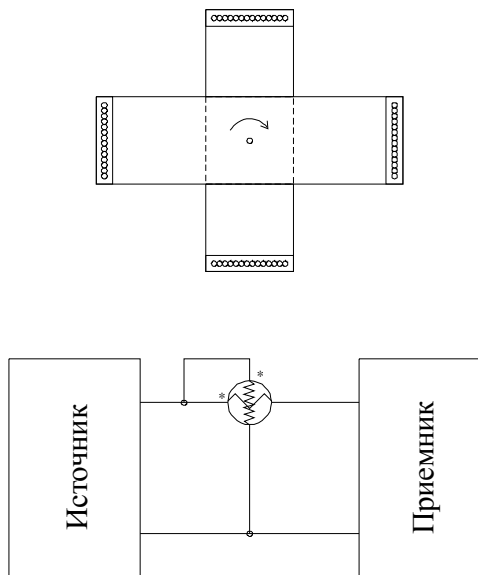


Рис. 4-11

Противодействующий момент пружинки по закону Гука пропорционален углу отклонения стрелки - a .

$$M_{np} = K_1 a$$

Вращающий момент определяется изменением энергии запасенной системой при пропускании токов через катушки при повороте подвижной катушки.

$$M_{вр} = K_2 \frac{dW}{da}$$

Равновесие достигается при $M_{\text{до}} = M_{\text{пр}}$.

$$a = \frac{K_2}{K_1} \frac{dW}{da}$$

Энергия запасенная системой двух катушек:

$$W = L_1 \frac{i_1^2}{2} + L_2 \frac{i_2^2}{2} + M_{12} i_1 i_2$$

Первые два слагаемых от угла a не зависят.

$$a = \left\{ K_3 \frac{1}{T} \int_0^T i_1 i_2 dt \right\} \frac{dM}{da}$$

Механическая инерционность системы приведет к тому, что угол отклонения стрелки будет пропорционален среднему значению момента.

Таким образом, если через одну из катушек пропускать ток пропорциональный току приемника, а через другую - пропорциональный его напряжению, получим (в

предположении $\frac{dM}{da} = \text{Const}$), что угол a будет пропорционален активной мощности

$$a = K_4 IU \cos j$$

На рис. 4-11 показана схема включения ваттметра. Точками (или звездочками) отмечены зажимы, которые следует объединить, т.к. направление вращающегося момента зависит от согласования направлений тока и напряжения.

4.4. Эквивалентные параметры пассивного двухполюсника

Если в двухполюснике неизвестна его внутренняя структура, то можно формально назвать полным эквивалентным сопротивлением отношение действующих значений напряжения и тока:

$$Z = \frac{U}{I}$$

Потребляемая активная мощность отображается наличием в двухполюснике эквивалентного резистора:

$$R = \frac{P}{I^2}$$

Реактивное сопротивление будет соответствовать:

$$X = \pm \sqrt{Z^2 - R^2}$$

При этом, если $j > 0$, то знак «плюс», а если $j < 0$, то знак «минус».

Если известна потребляемая мощность и сдвиг по фазе между током и напряжением, то

$$R = Z \cos j ; X = Z \sin j ; \operatorname{tg} j = \frac{X}{R}$$

Для того, чтобы эти соотношения соответствовали реальной схеме минимально, необходимо два элемента R и L или C, соединенных последовательно. Это и есть эквивалентная схема.

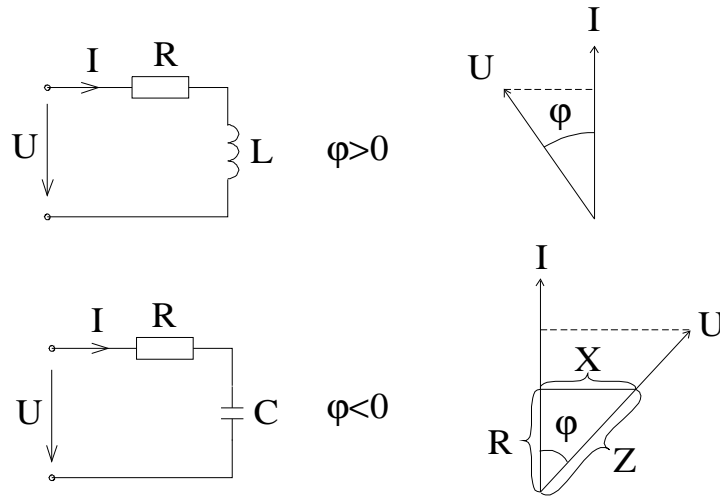


Рис. 4-12

На рис. 4-12 представлены два варианта эквивалентных схем и соответствующие векторные диаграммы.

Разложение вектора напряжения по направлению тока на два взаимно перпендикулярных дает напряжение на активном и реактивном элементе схем. Треугольник подобный треугольнику напряжения дает прямоугольный треугольник сопротивлений из которого легко можно получить все приведенные выше соотношения.

Отношение комплексов напряжения и тока дает комплекс сопротивления, содержащий всю информацию об эквивалентных параметрах двухполюсника.

$$\bar{Z} = \frac{\bar{U}}{\bar{I}} = \frac{U e^{jY_u}}{I e^{jY_i}} = Z e^{j(Y_u - Y_i)} = Z e^{j\varphi} = Z \cos \varphi + j Z \sin \varphi = R + jX.$$

Приведенные соотношения (различные формы записи комплексного числа) удобны в различных случаях:

$\bar{Z} = Z e^{j\varphi}$ - если сопротивление участвует в произведениях.

$\bar{Z} = R + jX$ - если сопротивления складываются.

$\bar{Z} = Z \cos \varphi + j Z \sin \varphi$ - для перехода от геометрической формы к алгебраической.

Из этих формул вытекают и все другие соотношения.

Заметим, что в отличие от обозначения комплексных изображений функций времени \bar{U} , \bar{I} , \bar{Z} комплексные выражения для сопротивлений обозначаются \bar{Z} , т.к. они не являются функциями времени, т.е. вращающимися векторами.

Если за основу принять отношение тока к напряжению, то получим аналогичные соотношения для проводимостей.

$$\bar{Y} = \frac{\bar{I}}{\bar{U}} = \frac{I e^{jY_i}}{U e^{jY_u}} = Y e^{-j(Y_u - Y_i)} = Y e^{-j\varphi} = Y \cos \varphi - j Y \sin \varphi = G - jB.$$

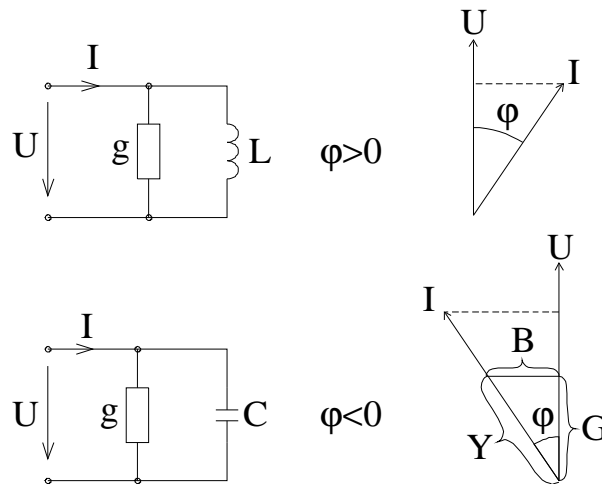


Рис. 4-13

Из этого следует:

$$Y = \sqrt{G^2 + B^2}$$

$$G = Y \cos j$$

$$B = Y \sin j$$

$$j = \arctg \frac{B}{G}$$

$$G = \frac{P}{U^2};$$

$$Y = \frac{I}{U}$$

$$B = \pm \sqrt{Y^2 - G^2}$$

Параметры параллельных эквивалентных схем удобнее выражать в виде проводимостей, т.к. в таких схемах реально разложение вектора тока по направлению напряжения на две взаимно перпендикулярные составляющие:

$$\underline{I} = I e^{jj} = I \cos j + j I \sin j = I_a + j I_p.$$

Треугольник подобный треугольнику токов называют треугольником проводимостей (рис. 4-13).

Практически можно пользоваться любой эквивалентной схемой (последовательной или параллельной) двухполюсника, если соблюдать соотношения:

$$\bar{Y} = \frac{1}{\bar{Z}}; \quad Y = \frac{1}{Z}; \quad G = \frac{R}{Z^2} = \frac{R}{R^2 + X^2}; \quad B = \frac{X}{R^2 + X^2}$$

или при переходе от проводимостей к сопротивлениям:

$$Z = \frac{1}{\bar{Y}}; \quad Z = \frac{1}{Y}; \quad R = \frac{G}{G^2 + B^2}; \quad X = \frac{B}{G^2 + B^2}.$$

4.5. Особенности расчетов электрических цепей при синусоидальных токах и напряжениях

Если в схеме элементы цепи заменить их комплексными сопротивлениями, то полученную схему всегда можно представить как соединение различных пассивных двухполюсников, характеризуемых парой чисел $\{R; X\}$ или $\{Z; Y\}$, а источник тока и напряжения выразить в комплексной форме:

$$\underline{J} = J e^{jY_i} = J_a + jJ_p; \quad \underline{E} = E e^{jY_e} = E_a + jE_p.$$

При этом, как изложено выше, сохраняются все соотношения, полученные для схем постоянного тока, но в комплексном виде:

Закон Ома $\underline{U} = \underline{E}$;

Законы Кирхгофа $\sum \underline{Z}_k \underline{I}_k = \sum \underline{E}; \quad \sum \underline{I}_k = \sum \underline{I}_k.$

Применяются также все правила знаков. Следовательно можно пользоваться и всеми приемами: преобразования цепей, делитель тока, делитель напряжения, принцип наложения, преобразование «треугольника» в «звезду», метод эквивалентного генератора и т.д. Пользуясь правилами алгебры комплексных чисел, при анализе получаются результаты так же в комплексном виде:

$$\underline{Z}_\Sigma = R_\Sigma + jX_\Sigma; \quad \underline{I}_k = I_{a_k} + jI_{p_k}; \quad \underline{U}_k = U_{a_k} + jU_{p_k}.$$

При необходимости получения результатов вычисления токов и напряжений в виде действительных функций времени записывают сигналы в показательной форме, добавляют множитель вращения вектора $e^{j\omega t}$ и, выражают комплекс в тригонометрической форме и берут коэффициент при мнимой части. Например:

$$\begin{aligned} \sqrt{2}(I_a + jI_p)e^{j\omega t} &= \sqrt{2}I e^{jY_i} e^{j\omega t} = \\ &= \sqrt{2}I \cos(\omega t + Y_i) + j\sqrt{2}I \sin(\omega t + Y_i) = \dot{I}_m \sin(\omega t + Y_i). \end{aligned}$$

Баланс мощностей подводится отдельно для активных и реактивных мощностей:

$$\sum P_k = 0 \quad \text{и} \quad \sum Q_k = 0.$$

Существенную помощь в расчетах оказывает построение векторных диаграмм, как своеобразной замены потенциальных диаграмм при постоянных токах и напряжениях.

Примеры:

I. Последовательное соединение двухполюсников

(рис. 4-14) $e = E_m \sin(\omega t + Y_e)$

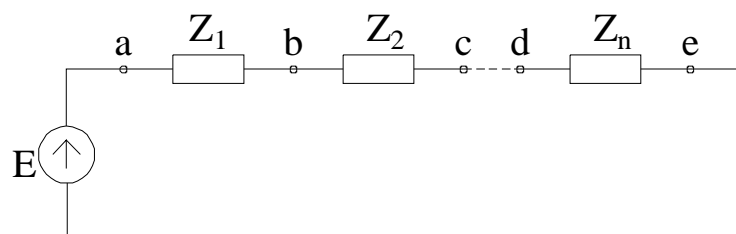


Рис. 4-14

По второму закону Кирхгофа

$$\underline{I} = \sum_1^n \underline{I}_K = \sum_1^n \underline{I}_K \bar{Z}_K = \underline{I} \sum_1^n \bar{Z}_K,$$

где $Z_K = R_K + jX_K$,

значит
$$\underline{I} = \underline{I}_K \left\{ \sum_1^n R_K + j \sum_1^n X_K \right\} = \underline{I}_K \bar{Z}_\Sigma$$
.

$$R_\Sigma = \sum_1^n R_K; \quad X_\Sigma = \sum_1^n X_K \quad (X_K - \text{берется с учетом знака}).$$

$$\underline{I} = \frac{\underline{I}}{\bar{Z}_\Sigma} = \frac{\underline{I}}{Z e^{j\varphi}} = \frac{E}{Z} e^{j(\varphi - \psi)}$$

где $\varphi = \arctg \frac{X_\Sigma}{R_\Sigma}$.

Мощности:

$$P = I^2 R_\Sigma = I^2 \sum_1^n R_K = \sum_1^n I^2 R_K = \sum P_K$$

$$Q = I^2 X_\Sigma = I^2 \sum_1^n X_K = \sum_1^n I^2 X_K = \sum Q_K.$$

Если векторную диаграмму напряжений на двухполюсниках изобразить относительно общего тока в соответствии с топологией схемы, получим т.н. топографическую диаграмму, из которой легко определить напряжения между любыми точками схемы (рис. 4-15).

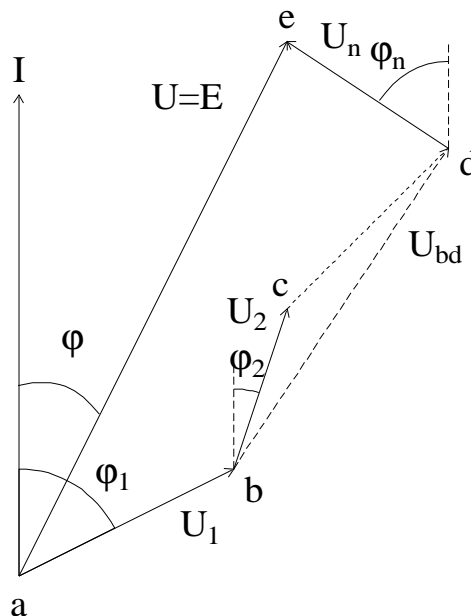


Рис. 4-15

Вычислив при произвольном токе (например $\underline{I} = I e^{j0}$) напряжения на каждом элементе $\underline{U}_K = \underline{I} \bar{Z}_K$ и построив векторную диаграмму, можно, изменив масштаб \underline{I} в соответствии с заданным, получить из геометрических соотношений решение всей задачи анализа.

II. Параллельное соединение двухполюсников
(рис.4-16).

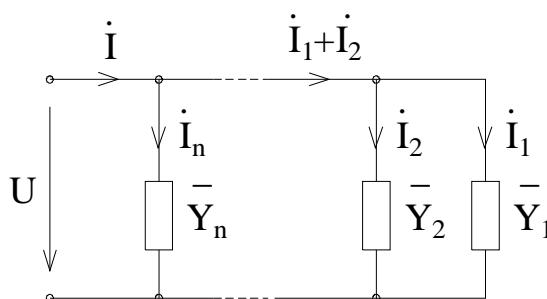


Рис. 4-16

Здесь удобно пользоваться характеристикой двухполюсников в виде проводимостей:

$$\bar{Y}_K = G_K - jB_K$$

По первому закону Кирхгофа

$$\mathcal{E} = \sum_1^n \mathcal{E}_K = \sum_1^n U \mathcal{E}_K Y_K = U \mathcal{E} \sum_1^n Y_K = U \mathcal{E} \left\{ \sum_1^n G_K - j \sum_1^n B_K \right\}$$

Напомним, что $B_K > 0$, если двухполюсник индуктивный ($j > 0$) и $B_K < 0$, если двухполюсник емкостный ($j < 0$).

Таким образом $G_{\Sigma} = \sum_1^n G_K$; $B_{\Sigma} = \sum_1^n B_K$; $j = \arctg \frac{B_{\Sigma}}{G_{\Sigma}}$.

Топографическая диаграмма токов, построенная относительно общего напряжения, представлена на рис. 4-17.

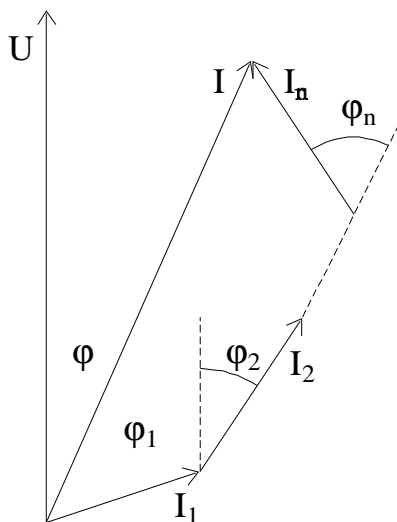


Рис. 4-17

Из топографической диаграммы удобно находить токи в соответствующих соединениях (например $\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2$).

Баланс мощности:

$$P = U^2 G_{\Sigma} = \sum_1^n U_K^2 G_K = \sum_1^n P_K$$

$$Q = U^2 X_{\Sigma} = \sum_1^n U_K^2 X_K = \sum_1^n Q_K$$

III. Смешанное соединение (рассмотрим подробнее)

(рис. 4-18) при $U = U_m \sin(\omega t + \varphi_U)$

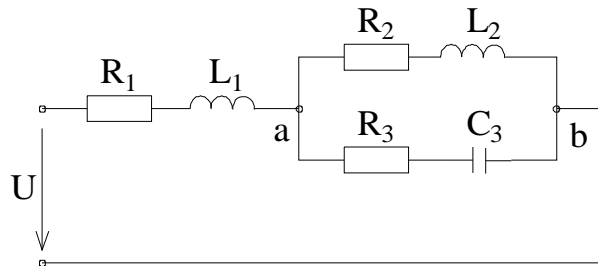


Рис. 4-18

Комплексные сопротивления двухполюсников:

$$\bar{Z}_1 = R_1 + j\omega L_1 = R_1 + jX_1$$

$$\bar{Z}_2 = R_2 + j\omega L_2 = R_2 + jX_2$$

$$\bar{Z}_3 = R_3 - j\frac{1}{\omega C} = R_3 - jX_3$$

Сопротивление двухполюсника ab:

$$\bar{Z}_{ab} = \frac{\bar{Z}_2 \bar{Z}_3}{\bar{Z}_2 + \bar{Z}_3} = \frac{(R_2 + jX_2)(R_3 - jX_3)}{R_2 + R_3 + j(X_2 - X_3)} = R_{ab} + jX_{ab}$$

Эквивалентное сопротивление всей цепи:

$$\bar{Z}_{\Sigma} = \bar{Z}_1 + \bar{Z}_{ab} = R_{\Sigma} + jX_{\Sigma}$$

Входной ток - ток через первый двухполюсник:

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{U}}{\bar{Z}_{\Sigma}} = \frac{U}{Z_{\Sigma}} e^{j(\varphi_U - \varphi)} \quad , \text{ где } \varphi = \arctg \frac{X_{\Sigma}}{R_{\Sigma}}$$

$$\dot{U}_{ab} = \dot{I}_1 \bar{Z}_{ab}; \quad \dot{I}_2 = \frac{\dot{U}_{ab}}{\bar{Z}_2}; \quad \dot{I}_3 = \frac{\dot{U}_{ab}}{\bar{Z}_3}$$

или по формуле делителя тока:

$$\dot{I}_2 = \dot{I}_1 \frac{\bar{Z}_3}{\bar{Z}_2 + \bar{Z}_3}; \quad \dot{I}_3 = \dot{I}_1 \frac{\bar{Z}_2}{\bar{Z}_2 + \bar{Z}_3}$$

Мощности:

$$P_1 = I_1^2 R_1; \quad P_2 = I_2^2 R_2; \quad P_3 = I_3^2 R_3;$$

$$Q_1 = I_1^2 X_1; \quad Q_2 = I_2^2 X_2; \quad Q_3 = -I_3^2 X_3.$$

Мощности источника U:

$$P_U = P_1 + P_2 + P_3$$

$$Q_U = Q_1 + Q_2 + Q_3$$

«Успех» построения векторной диаграммы (желательно независимо от алгебраического расчета) определяется порядком построения (рис. 4-19).

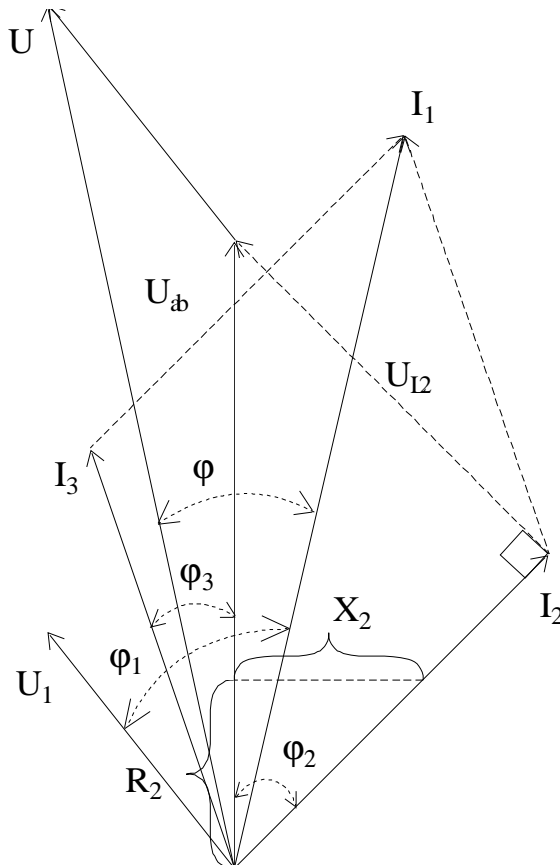


Рис. 4-19

1. Возьмем за основу вектор \vec{U}_{ab} произвольной величины.

2. Вектор тока \vec{I}_2 отстает от него на угол $j_2 = \arctg \frac{X_2}{R_2}$.

3. Вектор тока \vec{I}_3 опережает напряжение \vec{U}_{ab} на угол $j_3 = \arctg \frac{X_3}{R_3}$.

Для построения углов нет необходимости их вычислять. Достаточно построить треугольники сопротивлений. Соотношение между величинами векторов \vec{I}_2 и \vec{I}_3 надо

соблюдать в соответствии с пропорцией: $\frac{I_2}{I_3} = \frac{Z_3}{Z_2}$.

4. Сложив вектора \vec{I}_2 и \vec{I}_3 в соответствии с первым законом Кирхгофа, получим: $\vec{I}_1 = \vec{I}_2 + \vec{I}_3$.

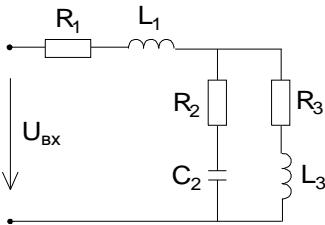
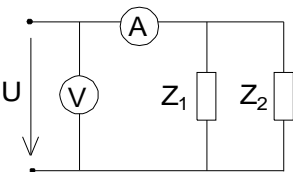
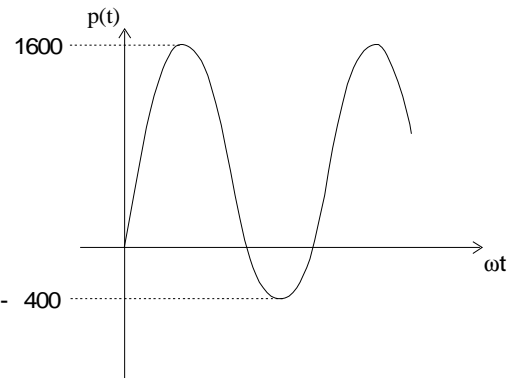
5. Угол $j_1 = \arctg \frac{X_1}{R_1}$ определит направление вектора напряжения \vec{U}_1 , относительно тока \vec{I}_1 , величина вектора U_1 определится из соотношения $\frac{U_1}{U_{ab}} = \frac{I_1 Z_1}{I_2 Z_2}$.

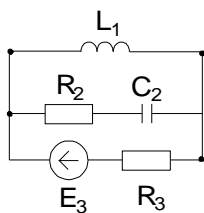
6. Геометрическим сложением определим $\vec{U} = \vec{U}_1 + \vec{U}_{ab}$, остается задаться конкретным масштабом, приравняв $U = \frac{U_m}{\sqrt{2}}$, и выбрать масштаб тока. Полученная диаграмма с точностью до геометрических построений дает ответы о всех величинах токов и напряжений и их относительных фазах. Например, перпендикуляр из конца вектора \vec{U}_{ab} на направление тока I_2 даст напряжение на катушке L_2 . Векторную диаграмму можно использовать для проверки правильности алгебраических расчетов. Например, угол j между током \vec{I}_1 и входным напряжением \vec{U}_1 должен быть равен $j = \arctg \frac{X_{\Sigma}}{R_{\Sigma}}$.

Контрольные вопросы к теме 4

1. Каковы основные характеристики синусоидальных сигналов?
2. Что такое фазовый сдвиг? Начальная фаза?
3. Какова связь между действующим, средним по модулю и амплитудным значениями синусоидальных сигналов?
4. Какие понятия выражает частота f и круговая частота ω ?
5. Как представить синусоидальный сигнал вектором? Что такое векторная диаграмма?
6. Как взаимно расположены векторы напряжения и тока при индуктивных, емкостных и резистивных цепях?
7. Сформулируйте сущность комплексного метода расчета.
8. Что такое входное сопротивление? Какие способы выражения входного сопротивления Вы знаете? Что такое входная проводимость?
9. Как по входным проводимости и сопротивлению определить сдвиг по фазе между током и напряжением?
10. Как по комплексному выражению для тока и напряжения определить синусоидальный сигнал?
11. Что такое мгновенная мощность? Как построить график мгновенной мощности по заданным напряжению и току?
12. Что такое активная мощность?
13. Что такое реактивная мощность?
14. Как устроен электродинамический ваттметр?
15. Как определяются эквивалентные параметры пассивного двухполюсника?
16. Что такое треугольник проводимости и треугольник сопротивлений?
17. Какова связь между эквивалентными сопротивлениями и проводимостями для пассивного двухполюсника?
18. Как записать законы Ома и Кирхгофа при применении комплексного метода?
19. Как построить векторную диаграмму при последовательном соединении двухполюсников? При параллельном соединении?
20. Что такое топографическая диаграмма?
21. Как провести анализ цепи при смешанном соединении двухполюсников?
22. Каков порядок построения векторной диаграммы при смешанном соединении двухполюсников?
23. Обоснуйте применимость методов расчета цепей для постоянного тока к цепям синусоидальных токов и напряжений при применении комплексного метода.

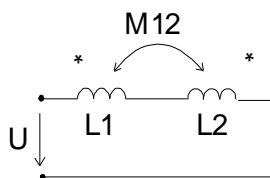
Контрольные задачи к теме 4

I	<p>Определить:</p> <ol style="list-style-type: none"> $Z_{\text{вх}}; \bar{Z}_{\text{вх}}; Y_{\text{вх}}; \bar{Y}_{\text{вх}}.$ $I_{\text{вх}}; \mathcal{R}_{\text{вх}}; i_{\text{вх}}(t).$ Построить векторную диаграмму токов и напряжений.  <p>$R_1 = R_3 = 3 \text{ Ом}, R_2 = 1 \text{ Ом}, L_1 = L_3 = 3 \text{ мГн}, C_2 = 333 \text{ мкФ}, e = 4\sqrt{2} \sin(1000t - 20^\circ)$</p>
II	<p>Включить ваттметр для определения активной мощности двухполюсника и определить его показание.</p>  <p>Показание амперметра - 10 А. Показания вольтметра - 100 В. $Z_1 = Z_2 = R + jX; R = 0,25Z_1$</p>
III	<p>Определить полную, активную и реактивную мощность.</p> 
IV	<p>Записать выражения для \mathcal{R}_L и \bar{Z}_L для определения тока в ветви L_1 методом эквивалентного генератора.</p>



V

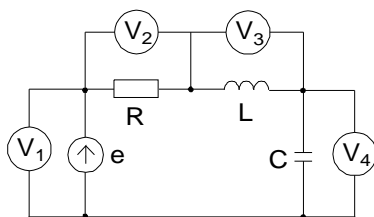
Определить $Z_{\text{вх}}$.



$$U = U_m \sin(\omega t + j)$$

VI

Определить показания электростатических вольтметров.



$$R = 1 \text{ Ом. } L = 0,01 \text{ Гн. } C = 0,005 \text{ Ф. } e = 20 \sin(100t + 10^\circ)$$

Тема 5. Анализ сложных цепей *

5.1. Топологические и компонентные уравнения

Анализ сложных цепей, как изложенные выше примы и методы расчета, основан на трех уравнениях: законе Ома, первом и втором законах Кирхгофа. По мере роста числа элементов схемы, а современные требования в области микроэлектроники требуют порой анализа схем, содержащих 10^5 элементов, сначала возникают трудности в решении систем уравнений, а затем и в их составлении. Решение столь больших систем уравнений производится на ЦВМ по стандартным программам. Здесь мы покажем приемы систематизации представления данных о схеме и формирования из этих данных систем уравнений, т.е. математических моделей схемы.

Выше было показано, что геометрию схемы можно описать в виде матриц:

К - контур-ветвь

Р - узел-ветвь

С - сечение-ветвь.

Непосредственно с помощью каждой из этих матриц можно записать оба закона Кирхгофа (см. Таблицу 1).^{**}

Таблица 1

	<i>I закон</i>	<i>II закон</i>
К -матрица	$K^t I_X = I_B$	$K U_B = E_K$
Р -матрица	$P I_B = J_y$	$P^t U_{K0} = U_B$
С -матрица	$C I_B = J_{отс}$	$C^t U_D = U_e$

В таблице обозначено K^t ; C^t ; P^t - соответственно транспонированные **К**, **С** и **Р** матрицы.

I_B ; U_B - токи и напряжения всех ветвей, сгруппированные в виде матриц-столбцов.

E_K - матрица-столбец сумм ЭДС, действующих в К-ом контуре.

J_y - матрица-столбец сумм токов источников токов, присоединенных к узлу.

U_{K0} - матрица-столбец узловых напряжений, т.е. напряжений узлов относительно “заземленного”.

I_X - матрица-столбец токов хорд (дополнений).

U_D - матрица-столбец напряжения на ветвях дерева.

$J_{отс}$ - матрица-столбец токов источников токов входящих в отсечение.

Введем матрицы параметров цепей. Для цепей постоянного тока после удаления индуктивностей и емкостей, как указано выше, и возможно некоторых эквивалентных преобразований (объединения последовательных и иногда параллельных резисторов) матрица представляет собой диагональную матрицу сопротивлений или проводимостей:

$$R = \left\| \begin{array}{cccc} R_1 & 0 & \mathbf{K} & 0 \\ 0 & R_2 & \mathbf{K} & 0 \\ \hline 0 & 0 & \mathbf{K} & R_K \end{array} \right\|; \quad G = \left\| \begin{array}{cccc} G_1 & 0 & \mathbf{K} & 0 \\ 0 & G_2 & \mathbf{K} & 0 \\ \hline 0 & 0 & \mathbf{K} & G_K \end{array} \right\|$$

* Для чтения этой темы требуются хорошие знания матричной алгебры

** Эти чисто топологические уравнения, конечно не могут быть решены т.к. не содержат связи между токами и напряжениями, т.е. не содержат информации о параметрах среды. Такую связь дают компонентные уравнения (закон Ома для участка цепи).

$$G = R^{-1}, \text{ причем вследствие диагональности } G_K = \frac{1}{R_K}.$$

При синусоидальных токах и напряжениях при отсутствии взаимных индуктивностей получаются такие же матрицы с комплексными элементами:

$$Z = \left\| \begin{array}{cccc} \bar{Z}_1 & 0 & \mathbf{K} & 0 \\ 0 & \bar{Z}_2 & \mathbf{K} & 0 \\ \hline 0 & 0 & \mathbf{K} & \bar{Z}_K \end{array} \right\|; \quad Y = \left\| \begin{array}{cccc} \bar{Y}_1 & 0 & \mathbf{K} & 0 \\ 0 & \bar{Y}_2 & \mathbf{K} & 0 \\ \hline 0 & 0 & \mathbf{K} & \bar{Y}_K \end{array} \right\|$$

$$\bar{Y} = \bar{Z}^{-1}; \quad \bar{Y}_K = \frac{1}{\bar{Z}_K}; \quad \bar{Z}_K = R + jX = R + j\omega L \quad \text{или} \quad \bar{Z} = R - j\frac{1}{\omega C}.$$

При наличии взаимных индуктивностей в матрице параметров появляются недиагональные члены: на месте пересечения m-ой строки и n-го столбца и n-й строки и m-го столбца: $jM_{mn}\omega$ и $jM_{nm}\omega$. Появление недиагональных членов несколько затрудняет вычисление обратной матрицы. Помогает делу группирование элементов со взаимной индуктивностью в начале матрицы.

Например матрица:

$$\bar{Z} = \left\| \begin{array}{cccccc} j\omega L_1 & \pm M_{12}\omega & 0 & 0 & 0 & 0 \\ jM_{21}\omega & \pm j\omega L_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{-j\omega C_5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{-j\omega C_5} \end{array} \right\|$$

относится к любой цепи, содержащей пару катушек, связанных общим магнитным потоком, пару сопротивлений и пару емкостей. Очевидно, такая матрица не содержит информации о соединениях этих элементов. Для записи компонентных уравнений эту матрицу умножают на матрицу-столбец токов и получают столбец напряжений. Запись $\bar{Z}\mathbf{I} = \mathbf{U}$ соответствует шести компонентным уравнениям:

$$1. \quad U_1 = j\omega L_1 I_1 \pm jM\omega I_2$$

.....

$$3. \quad U_3 = R_3 I_3$$

$$\begin{aligned} & \dots\dots\dots \\ & \dots\dots\dots \\ 6. \quad \mathcal{U}_6 &= -j \frac{1}{\omega C} I_6 \end{aligned}$$

Матрица проводимостей:

$$\bar{Y} = \left\| \begin{array}{ccc} [jL\omega]^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & [R]^{-1} & 0 \\ 0^K & 0 & \left[-j \frac{1}{\omega C} \right]^{-1} \end{array} \right\| = \bar{Z}^{-1}$$

служит для записи уравнений: $\bar{Y}\mathcal{U}_B = \mathcal{I}_B$.

Конечно все, что касается синусоидальных токов и напряжений требует выражения в комплексном виде не только \bar{Z}_K и \bar{Y}_K , но и токов \mathcal{I}_B и напряжений \mathcal{U}_B .

Заметим кстати, что в матрицу параметров можно вводить и другие операторы. Например, если ввести операторы дифференцирования и интегрирования, а токи и напряжения выразить в виде мгновенных значений произвольных функций времени, то получаем уравнения типа:

$$U_L = L \frac{di}{dt} \quad \text{или} \quad U_C = \frac{1}{C} \int i dt \quad \text{и т.д.}$$

Часть топологического уравнения, например уравнение

$$K^t I_X = I_B = \left\| \begin{array}{c} K_X^t \\ K_D^t \end{array} \right\| I_X = I_B$$

содержит тривиальные равенства типа $I = I$, т.к. K_X^t - единичная подматрица.

Таким образом, каждая пара уравнений таблицы 1 содержит $N_Y - 1 + N_K = N_B$ - содержательных уравнений и при включении в них компонентных уравнений ($\mathcal{U}_B = \bar{Z}_B \mathcal{I}_B$) может быть преобразована в систему независимых уравнений по количеству равных количеству неизвестных переменных.

Для схемы, содержащей только ветви с сопротивлениями (R или L), уравнения первой строки таблицы 1 можно получить, если все источники тока преобразованы в источники ЭДС.

5.2. Уравнения по методу контурных токов

$$K\mathcal{U}_B = \mathcal{I}_K \Rightarrow K\bar{Z}\mathcal{I}_B = \mathcal{I}_K \Rightarrow K\bar{Z}K^t \mathcal{I}_X = \mathcal{I}_K \Rightarrow [\bar{Z}_K] \mathcal{I}_X = \mathcal{I}_K ;$$

$$\mathcal{I}_X = \bar{Z}_K^{-1} \mathcal{I}_K$$

Получив \mathcal{I}_X - контурные токи, остальные токи можно найти:

$$K_D^t \mathcal{I}_X = \mathcal{I}_D .$$

Остановимся поподробнее на тройном матричном произведении $KZK^t = [Z_K]$ матрице контурных сопротивлений. Она обладает следующими особенностями:

1. Матрица симметрична относительно диагонали.

2. Диагональные члены матрицы Z_{KK} представляют собой сумму сопротивлений всех ветвей, входящих в к-й контур. Направление обхода контура выбирается совпадающим с направлением тока хорды, соответствующей этому контуру:

$$Z_{KK} = \sum R_K + j \sum X_K.$$

3. Недиagonalные члены матрицы - это Z_{km} сопротивления общие для к-го и m-го контуров.

$$Z_{km} = \pm(R_{km} + jX_{km}).$$

Знак “+” ставится в том случае, когда направления обхода контуров к и m в общей ветви совпадают. Если направления встречны, то ставится знак “-”.

В развернутом виде матричное уравнение, по методу контурных токов, можно записать для схемы с n независимыми контурами.

$$\begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} & \dots & Z_{1n} \\ Z_{21} & Z_{22} & \dots & Z_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Z_{n1} & Z_{n2} & \dots & Z_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \vdots \\ I_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ \vdots \\ E_n \end{bmatrix}$$

Это соответствует системе контурных уравнений:

$$Z_{11}I_1 + Z_{12}I_2 + \dots + Z_{1n}I_n = E_1$$

$$Z_{21}I_1 + Z_{22}I_2 + \dots + Z_{2n}I_n = E_2$$

$$\boxed{\phantom{Z_{n1}I_1 + Z_{n2}I_2 + \dots + Z_{nn}I_n = E_n}}$$

$$Z_{n1}I_1 + Z_{n2}I_2 + \dots + Z_{nn}I_n = E_n$$

Элементы матрицы E_K представляют собой алгебраическую сумму ЭДС источников ветвей. Со знаком “+” в суммы входят те ЭДС, направление которых совпадает с направлением обхода контура. Остальные входят со знаком “-”.

Систему уравнений можно получить и непосредственно из второго закона Кирхгофа, если ввести понятие контурного тока, как неизвестного тока, замыкающегося по контуру. Поскольку в ветви, которая отличается от всех других, в системе независимых контуров протекает только контурный ток, то понятие контурный ток и ток хорды совпадают. Во всех других ветвях (ветвях дерева) протекают два и более контурных токов. В этих терминах и формулируется второй закон Кирхгофа. Например для первого контура: первое слагаемое это сумма напряжений во всех ветвях контура от протекания контурного тока. Остальные слагаемые - это напряжения в соответствующих ветвях от действия остальных контурных токов. Если m-й и k-й контур общей ветви не имеют, то $Z_{km} = 0$.

Получив контурные токи

$I_k = I_1 \frac{\Delta_{k1}}{\Delta} + I_2 \frac{\Delta_{k2}}{\Delta} + \dots + I_n \frac{\Delta_{kn}}{\Delta}$, из уравнения $K^t I_K = I_B$ - легко получить остальные токи.

5.3. Метод узловых потенциалов

В качестве определяемых переменных часто принимают потенциалы узлов относительно "заземленного" узла, потенциал которого принят за ноль. Получим систему уравнений, которая выражает метод узловых потенциалов.

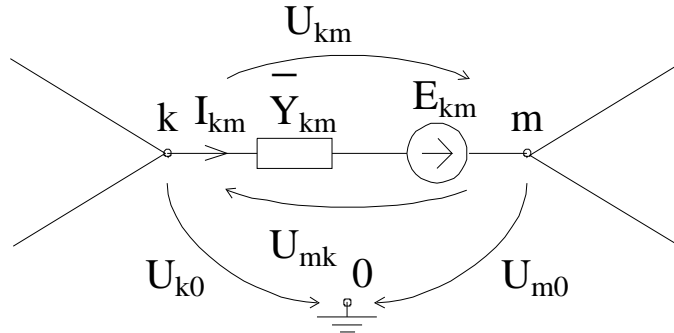


Рис. 5-1

Рассмотрим ветвь между двумя узлами "к" "м" (рис.5-1) Для определенности будем считать, что она единственная. Если это не так, то можно провести предварительные преобразования параллельных ветвей. Второй закон Кирхгофа справедлив для сумм потенциалов точек (даже если между точками нет ветвей):

$$(U_{k0} - U_{m0}) - \frac{E_{km}}{Y_{km}} = -\frac{I_{km}}{Y_{km}}.$$

Отсюда

$$I_{km} = (U_{k0} - U_{m0})Y_{km} + E_{km}Y_{km} - \text{обобщенный закон Ома.}$$

По первому закону Кирхгофа:

$$\sum_m I_{km} = 0, \text{ т.е. сумма токов всех ветвей к-го узла.}$$

Значит для каждого узла:

$$\sum_m U_{k0} Y_{km} - \sum_m U_{m0} Y_{km} = - \sum_m I_{km} Y_{km}$$

$$\text{или } U_{k0} \sum_m Y_{km} - \sum_m U_{m0} Y_{km} = I_k.$$

Поскольку U_{k0} от индекса "m" не зависит, а I_k - сумма токов всех источников тока **входящих** в узел, если источники ЭДС преобразовывать в источники тока. Получим систему уравнений для схемы с (n+1) узлами:

$$\begin{bmatrix} \bar{Y}_{11} & \bar{Y}_{12} & \dots & \bar{Y}_{1n} \\ \bar{Y}_{21} & \bar{Y}_{22} & \dots & \bar{Y}_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{Y}_{n1} & \bar{Y}_{n2} & \dots & \bar{Y}_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{10} \\ U_{20} \\ \vdots \\ U_{n0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \vdots \\ I_n \end{bmatrix}$$

или в матричном виде:

$$\bar{Y}_y U_{k0} = I_k.$$

Матрица \bar{Y} - симметричная относительно диагонали, по которой расположены суммы проводимостей всех ветвей, присоединенных к узлу:

$$\bar{Y}_{KK} = G_{KK} + jB_{KK}.$$

Все недиагональные члены матрицы отрицательны:

$\bar{Y}_{km} = -(G_{km} - jB_{km})$ и равны по величине проводимостям ветвей между k -ым и m -ым узлами.

После нахождения узловых потенциалов по обобщенному закону Ома находятся токи в ветвях. Формально систему уравнений легко получить из второй строки таблицы 1:

$$P\bar{Y}_B = \bar{Y}_y = P\bar{Y}U_B = P\bar{Y}P^t U_{K0}$$

$P\bar{Y}P^t$ и есть матрица узловых проводимостей.

Системы уравнений по методу контурных токов и узловых потенциалов применяются широко для доказательства некоторых теорем теории цепей и часто составляются непосредственно по заданной схеме.

Например, вывод формулы “двух узлов” при применении метода узловых потенциалов получается непосредственно:

$$\bar{Y}_{10} \sum \bar{Y} = \sum \bar{Y} \Rightarrow U_{10} = \frac{\sum \bar{Y}}{\sum \bar{Y}}.$$

Тому или другому методу отдается предпочтение в зависимости от того, чего больше в схеме: независимых узлов или независимых контуров.

5.4. Метод сечений при более общей модели ветви

При введении обобщенной модели ветви, содержащей и источник ЭДС и источник тока, можно получить систему уравнений без каких-либо ограничений.

Покажем это на примере применения метода сечений.

Обобщенная ветвь показана на рис. 5-2.

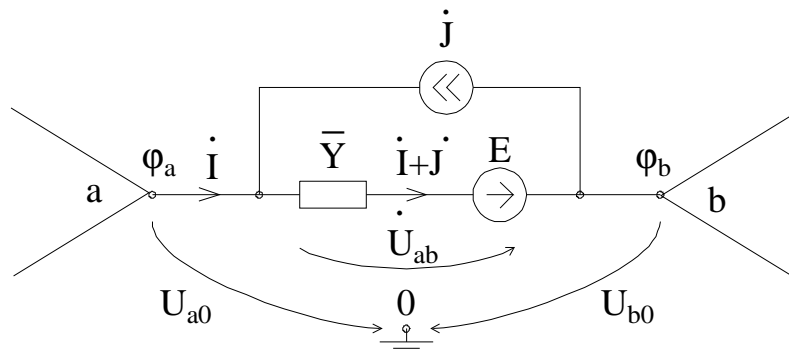


Рис. 5-2

Выражение, связывающее ток ветви с параметрами обобщенной ветви, можно получить, обойдя контур $a \rightarrow 0 \rightarrow b \rightarrow a$:

$$(j\mathbf{I}_a - j\mathbf{I}_b) = \frac{\mathbf{I}_a + \mathbf{I}_b}{Y} = -\mathbf{I}_b$$

$j\mathbf{I}_a - j\mathbf{I}_b = U_B$ - напряжение ветви.

Получим ток ветви:

$$\mathbf{I}_b = (\mathbf{I}_B + \mathbf{I})Y - \mathbf{I}_b$$

Такое же начертание формулы остается, если считать

\mathbf{I}_B - матрица-столбец токов ветвей.

\mathbf{U}_B - матрица-столбец напряжений ветвей.

\mathbf{I}_B - матрица-столбец ЭДС ветвей.

\mathbf{I}_b - матрица-столбец токов источников тока "ветвей".

Y - матрица параметров ветвей.

Конечно, при этом надо записать уравнение так, чтобы согласовать число столбцов и строк в матричных произведениях:

$$Y\mathbf{U}_B + Y\mathbf{I}_B - \mathbf{I}_b = \mathbf{I}_b$$

Умножим это уравнение (матричное) на топологическую матрицу сечение-ветвь C слева и помня, что $C\mathbf{I}_b = 0$

получим $CY\mathbf{U}_B + CY\mathbf{I}_B - C\mathbf{I}_b = 0$

подставим соотношение, $\mathbf{U}_B = C^t \mathbf{U}_d$, где \mathbf{U}_d - матрица-столбец напряжений ветвей дерева получим:

$$CYC^t \mathbf{U}_d + CY\mathbf{I}_B - C\mathbf{I}_b = 0$$

или уравнение аналогичное уравнению по методу узловых потенциалов:

$$CYC^t \mathbf{U}_d = C\mathbf{I}_b - CY\mathbf{I}_B$$

Решив уравнение относительно \mathbf{U}_d : $\mathbf{U}_d = (CYC^t)^{-1} C(\mathbf{I}_b - Y\mathbf{I}_B)$, по формуле: $\mathbf{U}_B = C^t \mathbf{U}_d$ найдем напряжение всех ветвей.

Наконец, используя уравнение для обобщенной ветви, получим токи:

$$\mathbf{I}_b = Y\mathbf{U}_B + Y\mathbf{I}_B - \mathbf{I}_b$$

При работе с массивами информации в системах машинного проектирования электронных схем достигают еще большего обобщения, вводя в модели ветви зависимые источники, это характерно для моделей транзисторов.

В учебном пособии вряд ли есть необходимость излагать эти методы, т.к. пользователь получает их вместе с соответствующими машинными программами. Если у читателя возникает необходимость в разработке или модернизации подобных программ, то придется обратиться к специальной литературе.

При наличии ветвей, состоящих только из идеальных источников тока или ЭДС в формальных методах построения уравнений приходится прибегать к специальным приемам расщепления ветви или узла. При составлении уравнений вручную можно поступать так, как показано на примерах.

Пример 1. Составить уравнение по МКТ для схемы (рис. 5-3).

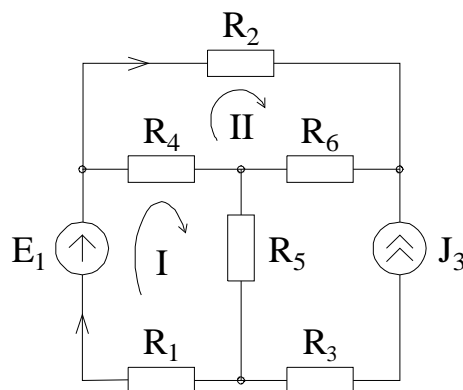


Рис. 5-3

При формировании независимых контуров, контур с источником тока считаем, как контур с известным током. Получим два уравнения. Третье уравнение составить невозможно, т.к. $R_{33} = \infty$, но в нем нет необходимости, т.к. ток J_3 известен.

$$\begin{cases} (R_1 + R_4 + R_5)I_1 - R_4I_2 + R_5J_3 = E_1 \\ -R_4I_1 + (R_2 + R_4 + R_6)I_2 + R_6J_3 = 0 \end{cases}$$

Пример 2. Составить уравнение по МУП для схемы (рис.5-4).

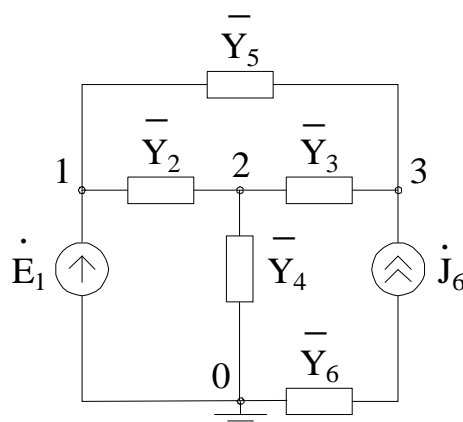


Рис. 5-4

Если заземлить один из узлов, к которому присоединен идеальный источник ЭДС, то потенциал другого сразу определится:

$$U_{10} = E_1$$

Для двух других узлов:

$$\begin{cases} -U_{10}Y_2 + U_{20}(Y_2 + Y_3 + Y_4) - U_{30}Y_3 = 0 \\ -U_{10}Y_5 - U_{20}Y_3 + U_{30}(Y_5 + Y_3) = J_6 \end{cases}$$

Первое уравнение составить не удастся, т.к. $Y_1 = \infty$, но в нем нет необходимости, т.к. в схеме только два неизвестных узловых потенциала.

Интересно, что система уравнений в первом примере не изменится, если изменить схему как показано на рис. 5-5.

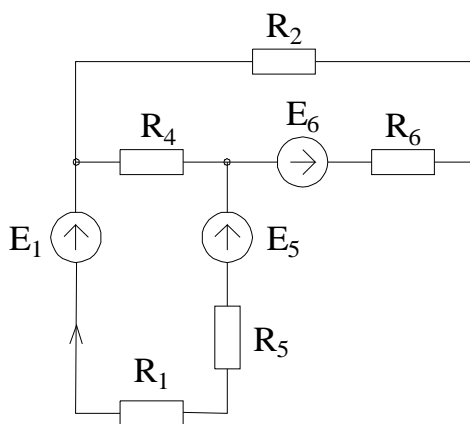


Рис. 5-5

Таким образом можно осуществить эквивалентную замену идеального источника тока на несколько источников ЭДС, расположенных в ветвях дерева, образующих с источником тока контур:

$$E_6 = R_6 J_3; \quad E_5 = R_5 J_3.$$

Образовавшиеся реальные источники $\{E_6; R_6\}$ и $\{E_5; R_5\}$ можно преобразовать и в источники тока, если в этом есть необходимость.

Во втором примере из уравнений следует возможность преобразования идеального источника ЭДС в два источника ЭДС с расщеплением узла, как показано на рис. 5-6.

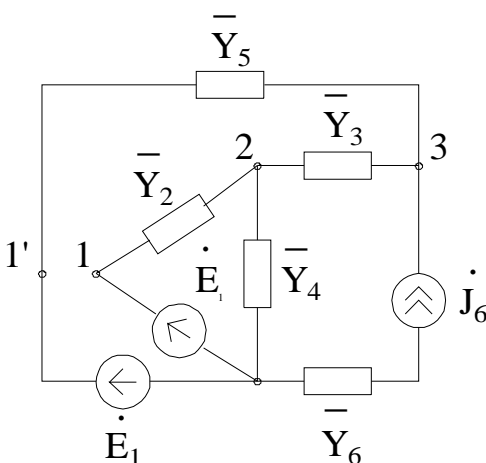


Рис. 5-6

В свою очередь образовавшиеся ветви $\{E_1; Y_2\}$ и $\{E_1; Y_5\}$ можно преобразовать в источники тока.

На основе матричных уравнений, являющихся математическими моделями электрических цепей, часто доказываются те или иные общие соотношения. Для примера рассмотрим часто применяемый в анализе линейных цепей **принцип взаимности**.

Пусть в сколь угодно сложной цепи действует единственный источник ЭДС, включенный в m -ю цепь (рис. 5-7).

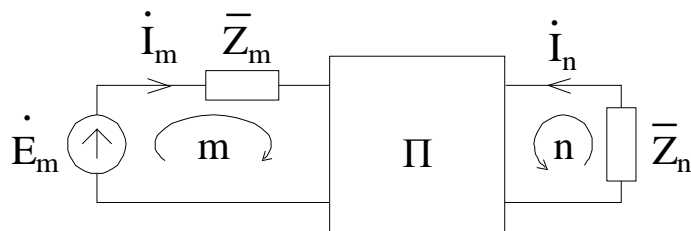


Рис. 5-7

Для нахождения тока в n-ой ветви составим уравнения по методу контурных токов, приняв m-ю и n-ю ветви за хорды.

$$\bar{Z}_K \mathcal{E}_K = \mathcal{E}_K.$$

Ток в n-ой ветви определится

$$\mathcal{E}_n = \frac{\Delta_{mn}}{\Delta} \mathcal{E}_m,$$

где Δ - определитель системы $|\bar{Z}_K|$,

$\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_K$ - поскольку источник единственный,

Δ_{mn} - дополнение определителя.

Перенесем источник в n-ю ветвь (рис. 5-8).

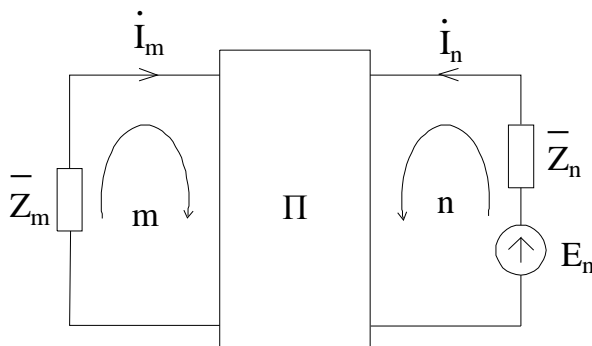


Рис. 5-8

Определим ток в m-ой ветви.

$$\mathcal{E}_m = \frac{\Delta_{nm}}{\Delta} \mathcal{E}_n.$$

Отношение токов:

$$\frac{\mathcal{E}_n}{\mathcal{E}_m} = \frac{\Delta_{mn}}{\Delta_{nm}} \cdot \frac{\mathcal{E}_m}{\mathcal{E}_n}.$$

Поскольку матрица контурных сопротивлений симметрична относительно главной диагонали

$$\Delta_{mn} = \Delta_{nm},$$

получаем

$$\frac{\mathcal{E}_n}{\mathcal{E}_m} = \frac{\mathcal{E}_m}{\mathcal{E}_n}.$$

Если источники $\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_n$ (по величине и по знаку), то

$$\mathcal{E}_n = \mathcal{E}_m.$$

Поэтому принцип взаимности можно сформулировать так. Если источник ЭДС, расположенный в m -ой ветви, создает в n -ой ток I_n , то тот же источник, перенесенный в n -ю ветвь создает в m -ой такой же ток.

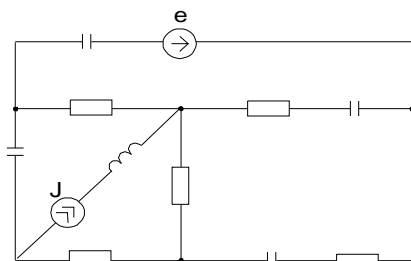
Схемы, отвечающие этому принципу, называются взаимными цепями. Все линейные цепи взаимны.

Контрольные вопросы к теме 5

1. Как записать топологические уравнения с помощью различных матриц соединений?
2. Что такое компонентные уравнения? Как записать компонентные уравнения в матричном виде?
3. Как с помощью топологических и компонентных уравнений выразить уравнения по методу контурных токов?
4. Как составить уравнения по методу контурных токов по заданной схеме?
5. Дайте ответ на вопросы 3 и 4 для метода узловых потенциалов.
6. Каков порядок представления матричных уравнений для обобщенной модели двухполюсника по методу сечений?
7. В чем особенности составления уравнений по методу контурных токов и узловых потенциалов при наличии идеальных источников тока и напряжения?

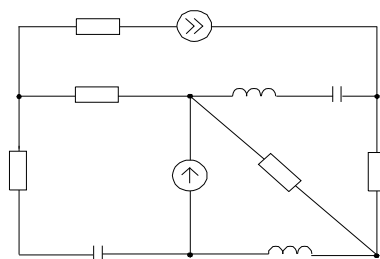
Контрольные задачи к теме 5

- I Ввести обозначения и составить систему уравнений по методу контурных токов.



$$J = I_m \cos \omega t; \quad e = E_m \sin \omega t$$

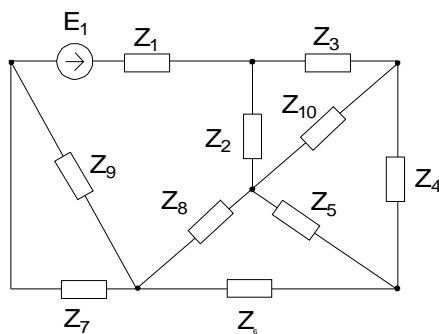
- II Ввести обозначения и составить систему уравнений по методу узловых потенциалов.



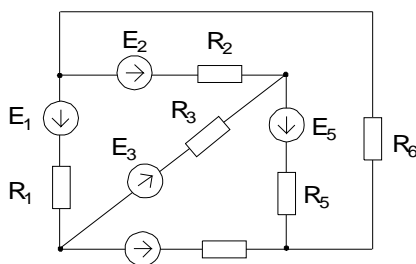
$$J = J_m \sin(\omega t + j)$$

$$\mathcal{E} = E e^{jj}$$

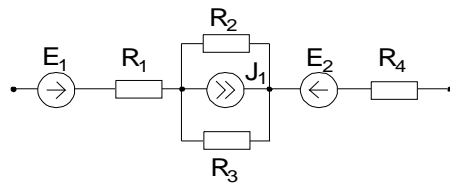
- III Составить матрицу соединений по методу сечений и записать с ее помощью первый закон Кирхгофа.



- IV Составить порядок определения тока через резистор R_6 , используя принцип взаимности и принцип наложения.



- V Записать закон Ома для данной ветви.



Тема 6. Резонанс и частотные свойства

В предыдущих главах введено понятие реактивного сопротивления конденсатора $X_C = \frac{1}{\omega C}$ и катушки индуктивности $X_L = \omega L$. Эти сопротивления зависят от величин C и L и от частоты ω . Отсюда следует, что распределение токов и напряжений электрической цепи определяется не только параметрами цепи, но и частотой возмущающего воздействия. Эти зависимости характеризуют частотные свойства электрических цепей переменного тока.

6.1. Резонанс напряжений

Рассмотрим двухполюсники, содержащие L и C . Различные сочетания индуктивностей и емкостей в цепи при заданной частоте, либо изменение частоты при заданной схеме могут привести к тому, что входная проводимость или входное сопротивление двухполюсника будут иметь чисто активный характер. При этом напряжение и ток на входе двухполюсника совпадают по фазе. Такое явление называют резонансом.

Основное определение резонанса: $j(\omega) = 0$ (на входе двухполюсника).

Рассмотрим некоторые характеристики цепи при резонансе. Для последовательной RLC-цепи (рис. 6-1) ток и сдвиг по фазе между током и напряжением равны:

$$I = \frac{U}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}};$$
$$j = \operatorname{arctg} \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}.$$

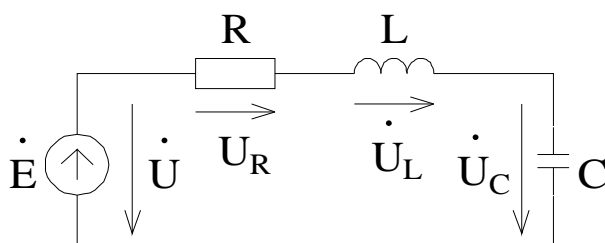


Рис. 6-1

Резонанс в цепи возникает при выполнении условий

$$\omega L = \frac{1}{\omega C} \quad \text{или} \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

Частота в этом случае называется резонансной или собственной, а ток имеет максимальное значение:

$$I = \frac{U}{R}.$$

Векторная диаграмма цепи при резонансе представлена на рис. 6-2.

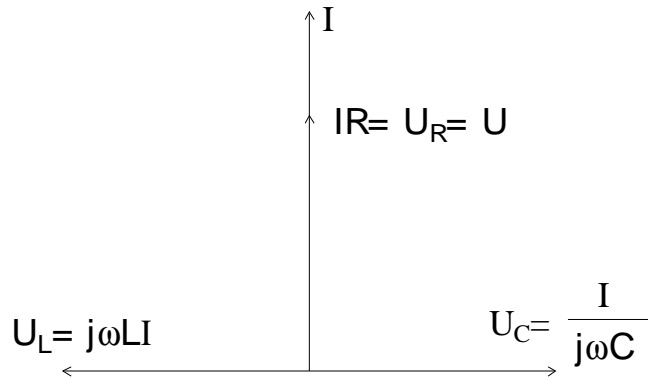


Рис. 6-2

Векторы \vec{U}_L и \vec{U}_C равны по величине и противоположно направлены. Поэтому резонанс в последовательной RLC-цепи называют также резонансом напряжений.

Условие резонанса можно записать в другой форме

$$\omega^2 LC = 1.$$

Эта формула удобна для анализа цепи, когда резонанс достигается изменением одной из трех величин: ω , L или C, т.е. при постоянстве двух величин изменяемая величина должна получить значения:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}; \quad L_0 = \frac{1}{\omega^2 C}; \quad C_0 = \frac{1}{\omega^2 L},$$

$$X_{L0} = X_{C0} = \omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C} = \sqrt{\frac{L}{C}} = r \quad \text{- волновое сопротивление.}$$

Действующее значение напряжения на реактивных элементах при резонансе

$$U_C = U_L = I \omega_0 L = \frac{I}{\omega_0 C} = \frac{\omega_0 L U}{R} = \frac{\rho}{R} U$$

может существенно превышать питающее напряжение в зависимости от добротности контура Q:

$$Q = \frac{\rho}{R}; \quad U_L = U_C = Q U.$$

$$d = \frac{1}{Q} = \frac{R}{\rho}$$

Величина, обратная добротности d - затухание контура. Для выяснения физической сущности явления резонанса рассмотрим мгновенные значения мощностей на элементах L, R, C.

$$p_R = \sqrt{2} I \sin \omega t \cdot \sqrt{2} U \sin \omega t = U I (1 - \cos 2\omega t) = I^2 R (1 - \cos 2\omega t)$$

$$p_L = \sqrt{2} I \sin \omega t \cdot \sqrt{2} U_L \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right) = I U_L \sin 2\omega t;$$

$$p_C = \sqrt{2} I \sin \omega t \cdot \sqrt{2} U_C \sin \left(\omega t - \frac{\pi}{2} \right) = -I U_C \sin 2\omega t.$$

Поскольку $U_L = U_C$, то $p_L = -p_C$. Это значит, что происходит обмен энергией между магнитным полем катушки и электрическим полем конденсатора. Источник в этом случае расходует энергию только на потери в активном сопротивлении $I^2 R$. Суммарная энергия магнитного и электрического полей:

$$W = W_L + W_C = \frac{LI_m^2}{2} \sin^2 \omega t + \frac{CU_c^2}{2} \cos^2 \omega t ;$$

учитывая, что

$$LI^2 = L \frac{U_c^2}{x_c^2} = L \frac{U_c^2}{\left(\frac{\sqrt{LC}}{C} \right)^2} = CU_c^2 ,$$

получаем

$$W = \frac{LI_m^2}{2} + \frac{CU_m^2}{2} = const ,$$

т.е. суммарная энергия полей конденсатора и катушки индуктивности остается постоянной.

6.2. Частотные свойства R, L, C двухполюсников

1. Последовательная RLC-цепочка при условии $J = const$ (рис.6-3).

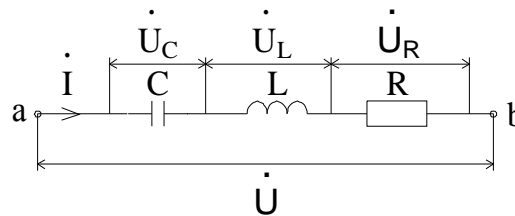


Рис. 6-3

Напряжение двухполюсника $\dot{U} = \bar{Z} \dot{I}$, где $\bar{Z} = R + j \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)$, или в действующих значениях $U = Z I$, где $Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}$.

Для каждого элемента частотные характеристики $T(\omega) = \frac{U(\omega)}{I(\omega)}$ представляют собой зависимости модуля сопротивления элемента от частоты. Для АЧХ двухполюсника $T_1(\omega) = \frac{U(\omega)}{I(\omega)}$ характер зависимости совпадает с зависимостью модуля сопротивления двухполюсника $Z = f(\omega)$, т.е. $T_1(\omega) = Z_{ab}(\omega)$.

АЧХ элемента и всего двухполюсника представлены на рис. 6-4.

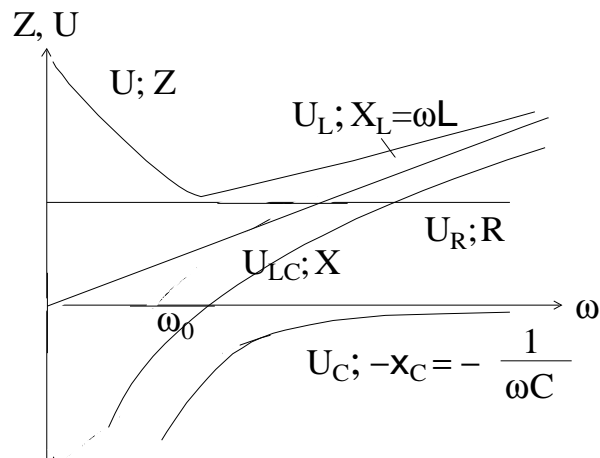


Рис 6-4

Реактивное сопротивление двухполюсника $X = X_L - X_C = \omega L - \frac{1}{\omega C} = \frac{L}{C} \left(\omega^2 - \omega_0^2 \right)$ изменяется от $-\infty$ до $+\infty$, проходя через 0 в точке ω_0 . Используя понятие нуля и полюса системной функции, заметим, что у функции $X(\omega)$ два полюса: $\omega = 0$ и $\omega = \infty$ и один нуль $\omega = \omega_0$. Характерное свойство функции $X(\omega)$ состоит в том, что $\frac{dX(\omega)}{d\omega} > 0$, так как при увеличении частоты растут (алгебраически) оба слагаемых. ФЧХ получаем из выражения:

$$U = \Re \{ j I Z e^{j \arctg \frac{\omega L - 1/\omega C}{R}} \} = U e^{j \varphi} ;$$

т.е., считая $\varphi_i = 0$, имеем

$$\varphi_u - \varphi_i = \varphi(\omega) = \arctg \left(\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} \right).$$

Зависимость $\varphi(\omega)$ показана на рис. 6-5. Если $\varphi < 0$ (при $\omega < \omega_0$), то цепь имеет емкостный характер; если $\varphi > 0$ (при $\omega > \omega_0$) - индуктивный характер.

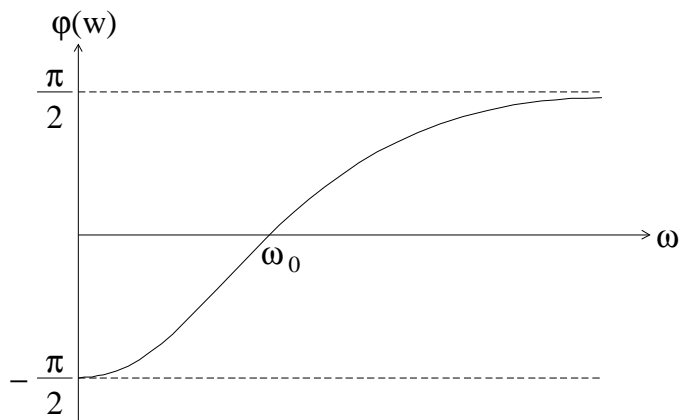


Рис. 6-5

2. 2. Последовательная RLC-цепочка; приложенное напряжение постоянно по величине $U = const$.

Ток в цепи

$$\underline{I} = \underline{U} \underline{Y} = \underline{U} \frac{1}{\underline{Z}} = \frac{1}{R + j \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)};$$

$$\underline{U}_R = R \underline{I}, \quad \underline{U}_C = \underline{Z}_C \underline{I}, \quad \underline{U}_L = \underline{Z}_L \underline{I}$$

или для действующих значений:

$$I = \frac{U}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}}; \quad U_R = \frac{UR}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}};$$

$$U_C = U \frac{1/\omega C}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}}; \quad U_L = U \frac{\omega L}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}};$$

$$U_{LC} = \frac{U \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}}.$$

При построении графиков частотных зависимостей учитывается, что при резонансе $X=0$, тогда

$$I = \frac{U}{R}; \quad U_C = \frac{U \frac{1}{\omega_0 C}}{R}; \quad U_L = \frac{U \omega_0 L}{R};$$

$$U_R = U; \quad U_L = U_C.$$

При $\omega=0$ $I=0$; $U_R=0$; $U_L=0$; $U_C=U$; $X=\infty$.

При $\omega=\infty$ $I=0$; $U_R=0$; $U_L=U$; $U_C=0$; $X=\infty$.

Зависимость тока и напряжений элементов от частоты приведены на рис. 6-6.

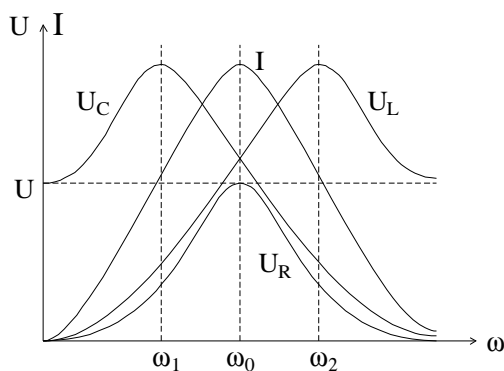


Рис. 6-6

Рассмотрим влияние частоты на проводимость данной цепи

$$\bar{Y} = \frac{1}{\bar{Z}} = \frac{1}{R + jX} = \frac{R}{Z^2} - j \frac{X}{Z^2} = G - jB$$

Предположим (цепь без потерь), тогда

$$B = \frac{X}{R^2 + X^2} = \frac{1}{X} = \frac{1}{wL - \frac{1}{wC}} = \frac{w}{L} \cdot \frac{1}{w^2 - w_0^2}$$

Функция $B(w)$ имеет два нуля $w=0$ и $w=\infty$ и один полюс $w=w_0$. Производная $\frac{dB(w)}{dw} < 0$, т.е. в цепях без потерь проводимость всегда убывает, что соответствует пунктирной кривой рис. 6-7.

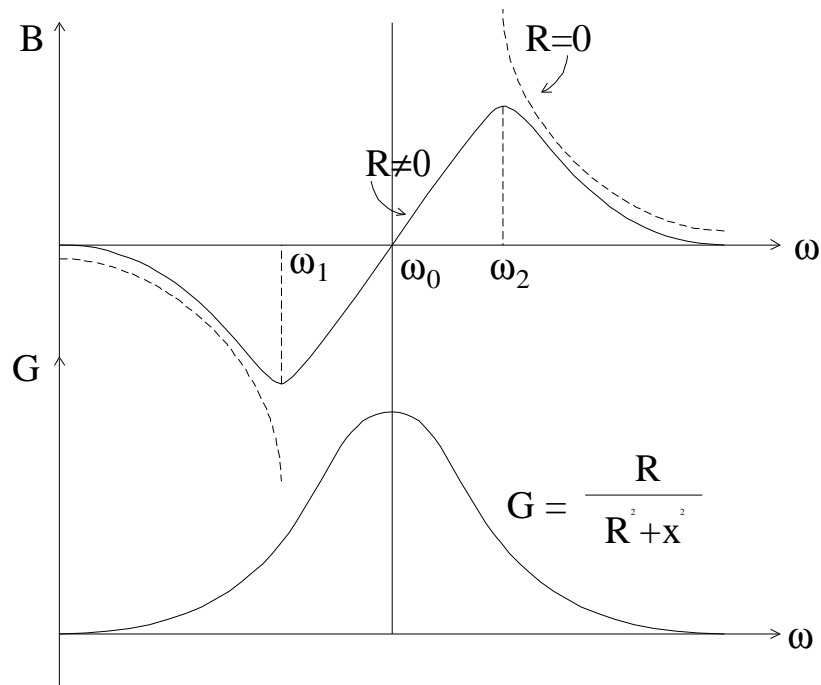


Рис 6-7

В реальной цепи сопротивление $R \neq 0$

$$B = \frac{X}{R^2 + X^2} = \frac{wL - \frac{1}{wC}}{R^2 + \left(wL - \frac{1}{wC}\right)^2}$$

Полученная зависимость предоставлена на рис. 6-7 сплошной линией. Значения

ω_1 ω_2

частот

и

можно найти из условия

$$\frac{dB(w)}{dw} = 0$$

Решение уравнений приводит к соотношению:

$$R^2 = \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2.$$

Откуда экстремальные значения $B_{\max} = -B_{\min} = \frac{1}{2R}$, а $\omega_{1,2} = \omega_0 \left(\frac{d}{2} \pm \sqrt{\frac{d^2}{4} + 1} \right)$, где $d = \frac{1}{Q}$ - затухание контура.

6.3. Резонанс токов

Рассмотрим двухполюсник, содержащий параллельно соединенные RLC (GLC) (рис. 6-8,а). Условие резонанса:

$$\omega_0^2 LC = 1 \text{ или } \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

Значение параметров при резонансе:

$$L_0 = \frac{1}{\omega_0^2 C}; \quad C_0 = \frac{1}{\omega_0^2 L}.$$

Векторная диаграмма цепи показана на рис. 6-8,б.

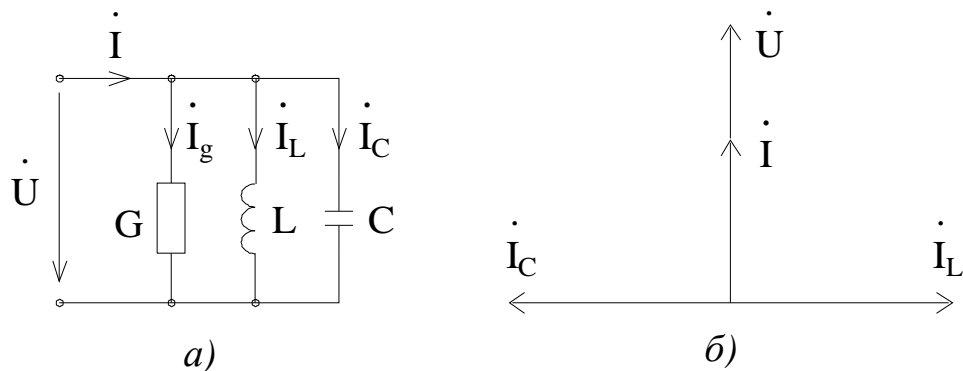


Рис. 6-8

Поскольку в данном случае равны и противоположны по фазе векторы токов, резонанс в параллельной цепи называют резонансом токов.

При резонансе реактивная проводимость двухполюсника равна нулю и полная проводимость минимальна, поэтому полный ток при резонансе минимален.

Величина

$$\omega_0 C = \frac{1}{\omega_0 L} = \sqrt{\frac{C}{L}} = \gamma \text{ называется волновой проводимостью.}$$

Если $G < \gamma$, то ток $I_L = I_C > I$.

Отношение

$$Q = \frac{I_{L0}}{I_0} = \frac{I_{C0}}{I_0} = \frac{U \omega_0 C}{UG} = \frac{\omega_0 C}{G} = \frac{\gamma}{G},$$

определяющее степень превышения тока в реактивных элементах суммарного тока при резонансе - добротность контура. $d = \frac{1}{Q}$ - затухание контура.

Энергетические процессы в параллельном контуре аналогичны процессам в последовательной RLC-цепи. В любой момент времени $P_L = -P_C$, т.е. энергия переходит из катушки в конденсатор и обратно. Источник компенсирует потери энергии в проводимости G.

6.4. Частотные свойства параллельного контура

При построении частотных характеристик параллельной цепи наглядно прослеживается принцип дуальности цепей.

1. Параллельное соединение GLC.

Величина тока $J = const$. Характеристики в этом случае дуальны последовательному соединению RLC при постоянстве приложенного напряжения $U = const$.

$$\underline{Y} = \frac{\underline{I}}{\underline{U}}; \quad \bar{Y} = G - j\left(\frac{1}{\omega L} - \omega C\right); \quad Y = \sqrt{G^2 + \left(\frac{1}{\omega L} - \omega C\right)^2}.$$

Напряжение двухполюсника (действующее значение)

$$U = \frac{I}{\sqrt{G^2 + \left(\frac{1}{\omega L} - \omega C\right)^2}}.$$

Токи элементов

$$I_{LC} = \frac{I\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)}{\sqrt{G^2 + \left(\frac{1}{\omega L} - \omega C\right)^2}}; \quad I_L = \frac{I\left(\frac{1}{\omega L}\right)}{\sqrt{G^2 + \left(\frac{1}{\omega L} - \omega C\right)^2}};$$

$$I_G = \frac{IG}{\sqrt{G^2 + \left(\frac{1}{\omega L} - \omega C\right)^2}}; \quad I_C = \frac{I\omega C}{\sqrt{G^2 + \left(\frac{1}{\omega L} - \omega C\right)^2}}.$$

При построении АЧХ следует учитывать, что для резонанса:

$$U = \frac{I}{G}; \quad I_C = \frac{I}{G}(\omega_0 C); \quad I_L = \frac{I}{G}\left(\frac{1}{\omega_0 L}\right); \quad I_G = I;$$

$$I_L = I_C; \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}; \quad \frac{1}{\omega_0 L} = \sqrt{\frac{C}{L}};$$

$$\sqrt{\frac{C}{L}} = \frac{1}{r} = g;$$

при $\omega = 0$

$$U = 0; \quad I_G = 0; \quad I_L = I;$$

при $w = \infty$

$$U = 0; I_G = 0; I_C = I.$$

График характеристик цепи представлен на рис. 6-9.

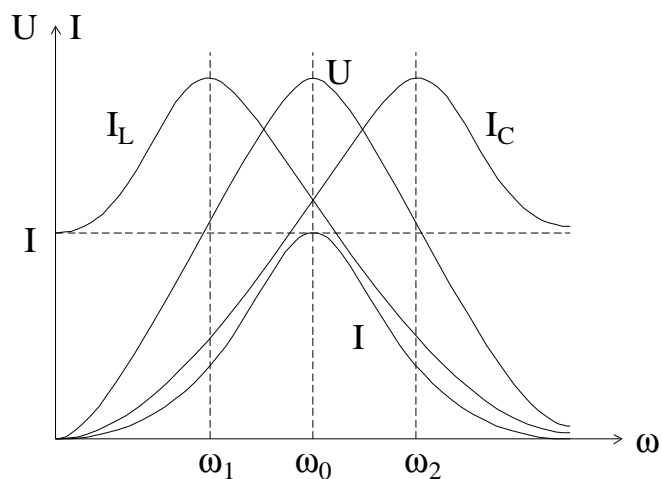


Рис. 6-9

2. 2. Параллельное соединение GLC, приложенное напряжение постоянно по величине $U = \text{const}$. Частотные характеристики дуальны характеристикам цепи с последовательным соединением RLC при $I = \text{const}$. АЧХ элементов и двухполюсника соответствуют зависимостям проводимостей элементов от частоты (рис. 6-10,а).

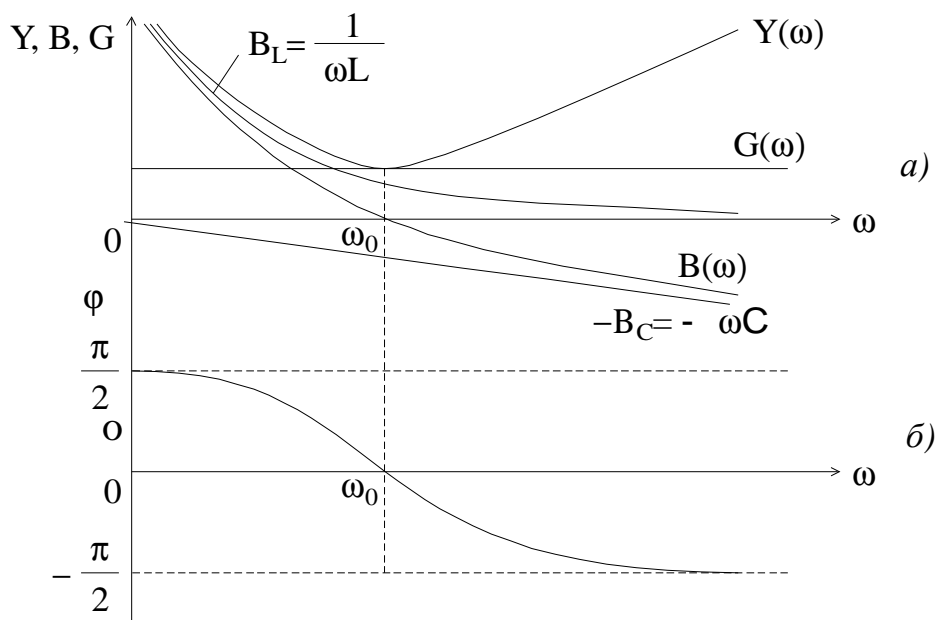


Рис. 6-10

Реактивная проводимость, равная

$$B = B_L - B_C = \frac{1}{\omega L} - \omega C = \frac{C}{\omega} (\omega_0^2 - \omega^2),$$

имеет два полюса $w=0$ и $w=\infty$ и один ноль $w=w_0$. Реактивная проводимость с увеличением частоты уменьшается:

$$\frac{dB}{dw} = -\frac{1}{w^2 L} - C < 0$$

При переходе частоты через точку резонанса изменяется характер проводимости: при $w < w_0$ проводимость имеет индуктивный характер $B > 0$; при $w > w_0$ проводимость становится емкостной $B < 0$. ФЧХ представлена на рис. 6-10,б.

Найдем характеристики сопротивления параллельно соединенных RLC. Реактивное сопротивление цепи

$$\bar{Z} = \frac{1}{\bar{Y}} = \frac{1}{G - jB} = \frac{G}{G^2 + B^2} + j \frac{B}{G^2 + B^2} = R + jX$$

Если $G=0$,

$$X = \frac{1}{B} = \frac{1}{wC - \frac{1}{wL}} = \frac{\frac{w}{C}}{w_0^2 - w^2}$$

График зависимостей $X(w)$ и $R(w)$ представлены на рис. 6-11.

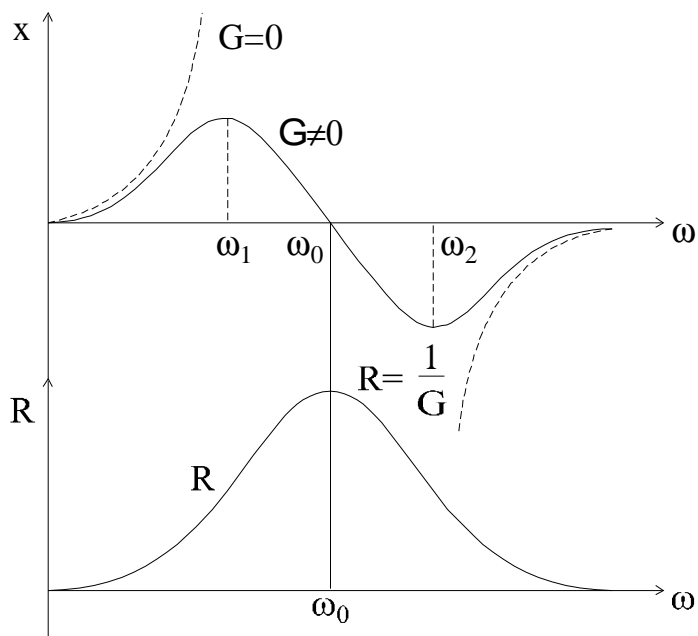


Рис. 6-11

Заметим, что при $G=0 \frac{dX}{dw} > 0$, т.е. с увеличением частоты сопротивление в цепях без потерь всегда возрастает. В момент перехода частоты через точку резонанса сопротивление становится бесконечным и изменяет свой характер от индуктивного к емкостному (пунктирная линия). При $G \neq 0$ характер зависимости X от ω показан сплошной линией. Прохождение $X(w)$ через ноль не означает, что сопротивление всей цепи равно нулю, так как активное сопротивление, зависящее в этом случае от частоты, имеет максимум в момент резонанса:

$$R = \frac{G}{G^2 + B^2} = \frac{1}{G}.$$

6.5. Резонансные эффекты в сложных цепях

В общем случае условие резонанса $X=0$ или $B=0$. Активное сопротивление зависит от частоты. Условие $X=0$ или $B=0$ в двухполюсниках произвольной сложности может привести к наличию нескольких корней ω_p . Методика отыскания этих корней остается такой же, как и в простых случаях: записывается комплексное выражение для сопротивления или проводимости, приравняется нулю коэффициент при мнимой части. По полученному уравнению отыскиваются резонансные частоты, а по виду соответствующих функций $Z(\omega)$; $R(\omega)$; $X(\omega)$ строятся частотные характеристики. Рассмотрим пример (рис. 6-12).

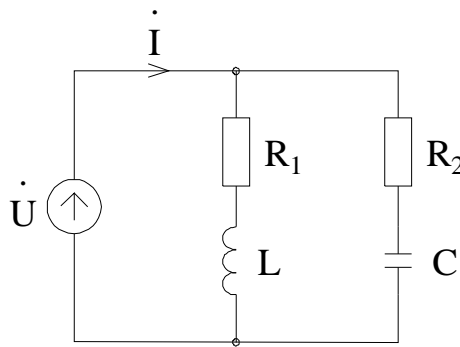


Рис. 6-12

Комплексная проводимость цепи:

$$\begin{aligned} \bar{Y} &= \bar{Y}_1 + \bar{Y}_2 = \frac{1}{R_1 + j\omega L} + \frac{1}{R_2 - j\frac{1}{\omega C}} = \\ &= \frac{R_1}{R_1^2 + \omega^2 L^2} + \frac{R_2}{R_2^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}} - j \left(\frac{\omega L}{R_1^2 + \omega^2 L^2} - \frac{\frac{1}{\omega C}}{R_2^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}} \right) = G - jB. \end{aligned}$$

Условие резонанса ($B=0$)

$$\frac{\omega L}{R_1^2 + \omega^2 L^2} = \frac{\frac{1}{\omega C}}{R_2^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}},$$

откуда

$$\omega_p = \frac{1}{\sqrt{LC}} \sqrt{\frac{\frac{L}{C} - R_1^2}{\frac{L}{C} - R_2^2}}$$

или

$$w_p = w_0 \sqrt{\frac{r^2 - R_1^2}{r^2 - R_2^2}}.$$

Рассматривая полученный результат, можно выделить три случая соотношения параметров:

$$1. \quad R_1^2 > \frac{L}{C} > R_2^2 \quad \text{или} \quad R_1^2 < \frac{L}{C} < R_2^2.$$

Подкоренное выражение отрицательно. Частота мнимая, т.е. резонанс невозможен.

$$2. \quad R_1 = R_2 \neq \sqrt{\frac{L}{C}}; \quad w_p = \frac{1}{\sqrt{LC}},$$

Частота совпадает с резонансной частотой контура LC

$$3. \quad R_1 = R_2 = \sqrt{\frac{L}{C}}.$$

Резонанс наблюдается на всех частотах, так как R не зависит от w .

Действительно, пусть $R_1 = R_2 = R$, тогда

$$\begin{aligned} \bar{Z}_\Sigma &= \frac{\bar{Z}_1 \bar{Z}_2}{\bar{Z}_1 + \bar{Z}_2} = \frac{(R + j\omega L) \left(R - j \frac{1}{\omega C} \right)}{2R + j \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)} = \frac{R^2 + \frac{L}{C} + j \left(R\omega L - \frac{R}{\omega C} \right)}{2R + j \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)} = \\ &= R \frac{2R + j \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)}{2R + j \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)} = R. \end{aligned}$$

Для цепей, являющихся пассивными двухполюсниками, без потерь можно проследить некоторые общие закономерности в частотных характеристиках.

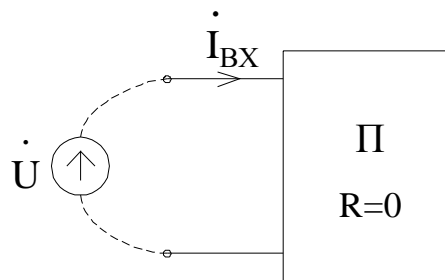


Рис. 6-13

Составляя систему контурных уравнений, можно предусмотреть, чтобы источник входил в первый контур (рис.6-13). Тогда входной ток определится

$$I_{BX} = I_1 = \frac{\Delta_{11}}{\Delta} I_{\Sigma} = \bar{Y}_{BX} U_{\Sigma} = \frac{U_{\Sigma}}{\bar{Z}_{BX}} = \frac{U_{\Sigma}}{\bar{X}_{BX}}.$$

Определитель Δ n -го порядка с элементами типа

$$\bar{Z}_{ki} = j \left(w L_{ki} - \frac{1}{w C_{ki}} \right) = j \frac{L_{ki}}{w} \left(w^2 - \frac{1}{L_{ki} C_{ki}} \right)$$

Δ_{11} - (n-1)-го порядка с такими же элементом.

В общем случае

$$X = \frac{1}{w} \cdot \frac{a_1 w^{2n} + a_2 w^{2n-2} + \dots + K + a_0}{b_1 w^{2n-2} + b_2 w^{2n-4} + \dots + K + b_0}.$$

Найдя корни полиномов числителя и знаменателя, дробь представим в виде

$$X = \frac{1}{w} \cdot \frac{(w^2 - w_1^2)(w^2 - w_3^2) \dots (w^2 - w_{2n}^2)}{(w^2 - w_2^2)(w^2 - w_4^2) \dots (w^2 - w_{2n-2}^2)}.$$

Поскольку в цепях без потерь угол сдвига фаз между током и напряжением может быть только $\pm \frac{\pi}{2}$, а в то же время при резонансе $j = 0$, так как в момент резонанса j скачком меняет свой знак (рис.6-14).

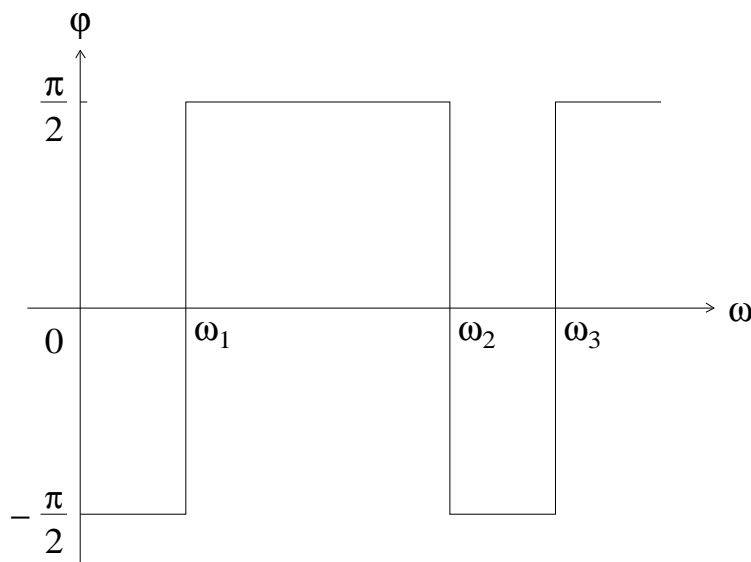


Рис. 6-14

Точками резонанса также будут значения частот $w=0$ и $w=\infty$.

Далее, поскольку, $\frac{dX(w)}{dw} > 0$, неравенство усиливается, то справедливы соотношения

$$0 < w_1 < w_2 < w_3 < \dots < w_{2n} < \infty.$$

Для любой цепи без потерь первой резонансной частотой является $w=0$ и последней $w=\infty$. Однако в зависимости от того, будет ли при этих частотах ноль или полюс функции, можно представить четыре разновидности характеристик (рис. 6-15).

1. Если в двухполюснике существует путь, проходящий только по индуктивностям, то зависимость $X(w)$ начинается с нуля (рис. 6-15,а,в).
2. При отсутствии такого пути $X(w)$ начинается с полюса (рис.6-15,б,г).
3. Если в двухполюснике существует путь, проходящий только по емкостям, то зависимость $X(w)$ заканчивается нулем (рис. 6-15,а,б).

4. При отсутствии такого пути частотная характеристика заканчивается полюсом (рис. 6-15, в, г).

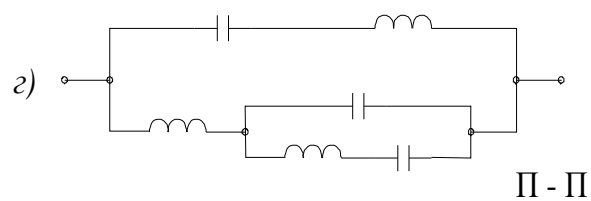
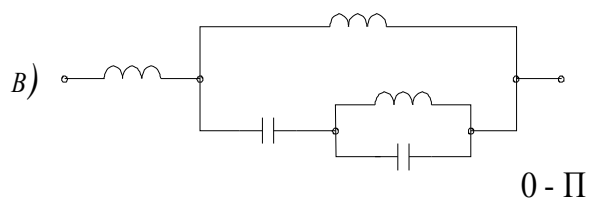
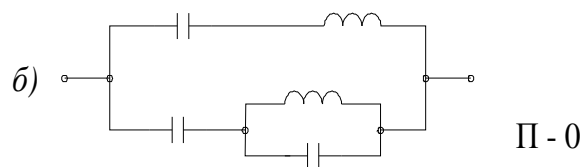
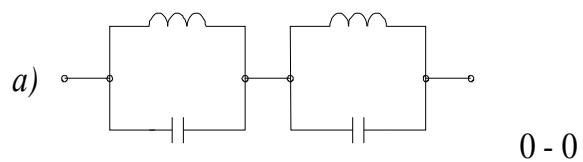
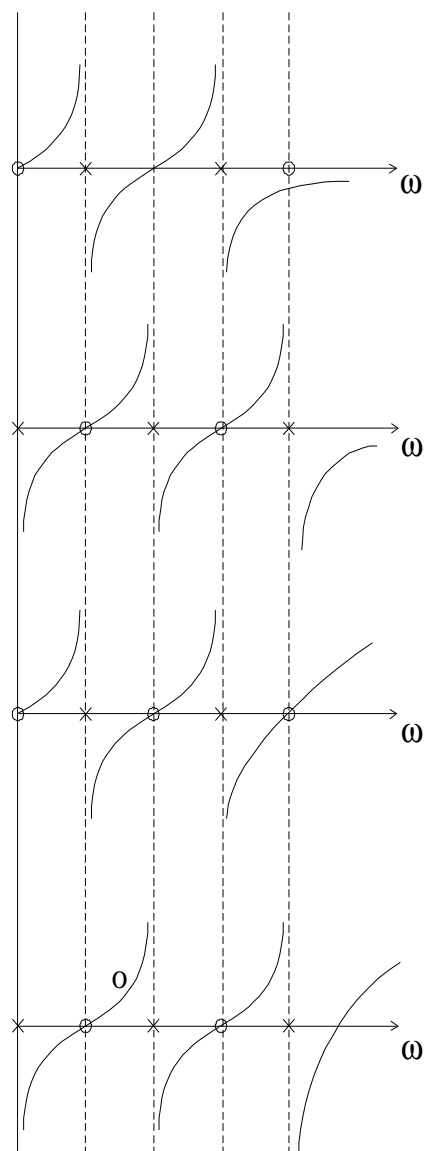
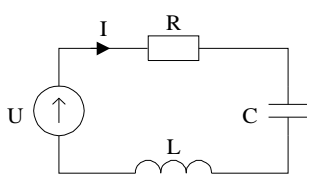
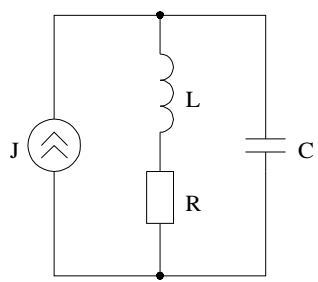
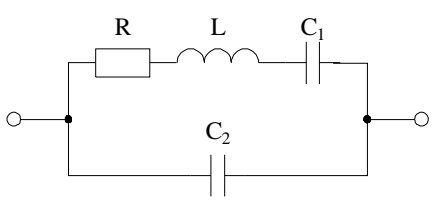
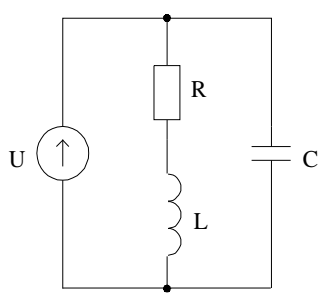


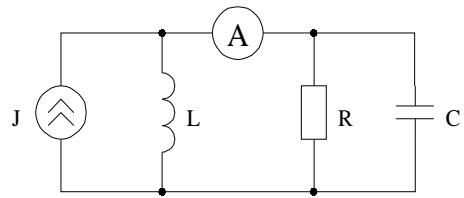
Рис. 6-15

Контрольные вопросы к теме 6

1. Каковы условия возникновения резонанса в цепи? Как подсчитать резонансную частоту?
2. Как выглядит векторная диаграмма при последовательном соединении RLC цепи? При параллельном соединении?
3. Назовите примеры использования резонансных явлений.
4. Что такое частотные характеристики?
5. Что такое амплитудно-частотная характеристика? Фазо-частотная характеристика?
6. Как экспериментально определить резонансную частоту?
7. Как изменяются частотные характеристики при изменении добротности?
8. Что такое двухполосник без потерь? Как по виду схемы качественно представить характеристики $Z(w)$ для двухполосника без потерь?

Контрольные задачи к теме 6

I	<p>Определить U_R; U_L; L; C; R при резонансе.</p>  <p>$U_C = 100 \text{ В}$; $U = 1 \text{ В}$; $\omega = 10^4 \text{ сек}^{-1}$; $I = 1 \text{ А}$.</p>
II	<p>Определить резонансную частоту и зависимости напряжения на элементах от тока источника тока.</p>  <p>$L = 1 \text{ мГн}$; $C = 0,1 \text{ мкФ}$; $R = 60 \text{ Ом}$.</p>
III	<p>Определить C_2 для достижения резонанса токов при частоте 500 кГц. Определить при этом частоту резонанса напряжений.</p>  <p>$R = 24 \text{ Ом}$; $L = 0,1 \text{ мГн}$; $C_1 = 0,1 \text{ мкФ}$.</p>
IV	<p>Определить I_L при резонансе.</p>  <p>$I_{BX} = 1 \text{ А}$; $I_C = 1 \text{ А}$.</p>
V	<p>Определить показание амперметра при резонансе.</p>



$$I_L = 5\text{ A} ; I_R = 2\text{ A} .$$

Тема 7. Расчет электрических цепей при несинусоидальных периодических токах и напряжениях

В большинстве устройств электроники, радиотехники, автоматики, вычислительной техники токи и напряжения имеют отличную от синусоидальной форму, оставаясь периодическими функциями времени. Расчет цепей при несинусоидальных периодических возмущающих воздействиях в курсе электротехники составляет самостоятельный раздел, не зависимо от того, чем вызвана несинусоидальность. Причиной несинусоидальности могут быть паразитные явления, протекающие в электротехнических установках: несимметричность генераторов, нелинейность характеристик элементов и т.д.

Широко применяются устройства, в которых несинусоидальность возмущающих воздействий создается преднамеренно и несет определенную информацию: вычислительные устройства, системы связи и т.п.

Метод расчета электрических цепей при несинусоидальных периодических токах и напряжениях основан на разложении кривой в гармонический ряд Фурье и применении принципа наложения.

7.1. Разложение несинусоидальной функции в тригонометрический ряд

Всякая периодическая функция, удовлетворяющая условиям Дирихле, т.е. имеющая на конечном интервале изменения аргумента конечное число разрывов первого рода и конечное число максимумов и минимумов, может быть разложена в тригонометрический ряд:

$$F(\omega t) = A_0 + A_1 \sin(\omega t + j_1) + A_2 \sin(2\omega t + j_2) + \dots + A_K \sin(K\omega t + j_K) \dots$$

или

$$F(\omega t) = \sum_{k=0}^{\infty} A_K \sin(K\omega t + j_K)$$

Первый член ряда называют постоянной составляющей, второй член ряда - основной синусоидальной или первой гармоникой, остальные - высшими гармониками.

Основная частота равна частоте несинусоидальной периодической функции.

Для удобства подсчета коэффициентов ряда, его обычно представляют в форме:

$$F(\omega t) = A_0 + B_1 \sin \omega t + C_1 \cos \omega t + B_2 \sin 2\omega t + C_2 \cos 2\omega t + \dots + B_K \sin K\omega t + C_K \cos K\omega t + \dots$$

Эту формулу получают, если для каждого члена ряда

$$\sin(K\omega t + j_K) = \sin K\omega t \cos j_K + \cos K\omega t \sin j_K$$

Таким образом,

$$B_K = A_K \cos j_K; \quad C_K = A_K \sin j_K;$$

$$A_K = \sqrt{B_K^2 + C_K^2}; \quad j_K = \arctg \frac{C_K}{B_K}.$$

Коэффициенты вычисляются по следующим формулам:

$$A_0 = \frac{1}{2p} \int_{-p}^p F(\omega t) d(\omega t).$$

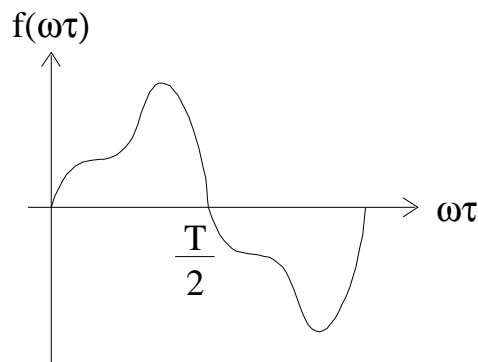
- среднее значение функции за период (постоянная составляющая тока, напряжения или ЭДС).

$$B_K = \frac{1}{p} \int_{-p}^p F(\omega t) \sin k \omega t d(\omega t);$$

$$C_K = \frac{1}{p} \int_{-p}^p F(\omega t) \cos k \omega t d(\omega t).$$

Периодические функции сигналов, используемых в электротехнике, могут обладать различными видами симметрии:

1. Симметрия относительно оси абсцисс (рис. 7-1):



$$f(\omega t) = -f\left(\omega t + \frac{T}{2}\right)$$

Рис. 7-1

Такие функции при разложении в гармонический ряд не имеют постоянной составляющей и не содержат четных гармоник.

Эти положения в математике строго доказываются.

2. Симметрия относительно оси ординат (рис 7-2).

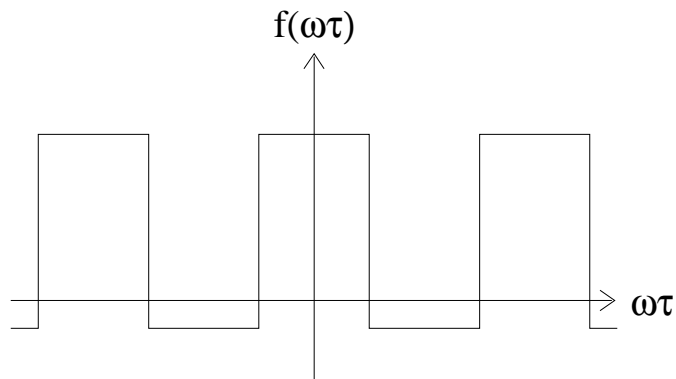


Рис. 7-2

$$f(\omega t) = -f(-\omega t)$$

В этом случае разложение не содержит синусов, так как синус - функция нечетная.

3. Симметрия относительно начала координат (рис.7-3).

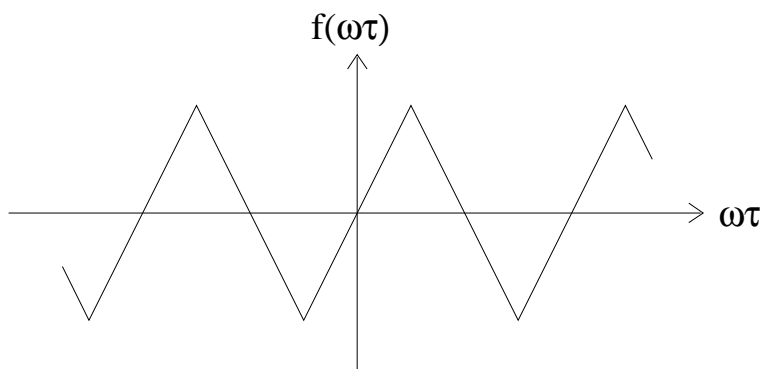


Рис. 7-3

При этом разложении функции в ряд не содержит косинусов и постоянной составляющей.

Первый вид симметрии не зависит от начала отсчета времени, т.е. является свойством самой кривой. Второй и третий связаны с началом отсчета.

Рассмотрим несколько примеров разложения.

Пример 1. Трапеция, симметричная относительно оси абсцисс и начала координат (рис. 7-4).

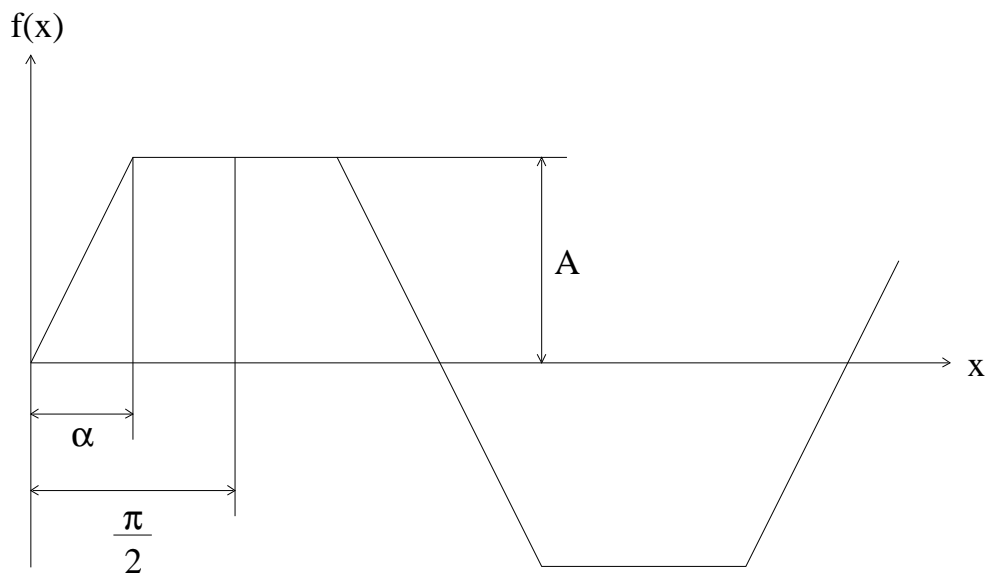


Рис. 7-4

Учитывая симметрию, можно заключить, что ряд будет состоять из нечетных синусоид. Интегрируем функцию $f(x)$ на отрезке, равном четверти периода, умножая интеграл на 4. Определим коэффициенты B_k :

$$B_K = \frac{4}{p} \int_0^{\frac{p}{2}} f(x) \sin kx dx = \frac{4}{p} \int_0^a A \frac{x}{a} \sin kx dx + \frac{4}{p} \int_a^{\frac{p}{2}} A \sin kx dx$$

Разделение интеграла на два связано с тем, что значение функции на участке от 0 до a равно $A \frac{x}{a}$; на участке от a до $\frac{p}{2}$ равно A .

По таблицам интегралов находим:

$$\int x \sin kx dx = \frac{\sin kx}{k^2} - \frac{x \cos kx}{k},$$

тогда

$$\begin{aligned} B_K &= \frac{4A}{p a} \left[\left\{ \frac{\sin kx}{k^2} - \frac{x \cos kx}{k} \right\} \right]_0^a - \int_a^{\frac{p}{2}} \frac{4A}{p k} \cos kx dx = \\ &= \frac{4A}{p a k^2} \{ \sin ka - ka \cos ka + ka \cos ka \} = \frac{4A}{p a k^2} \sin ka. \end{aligned}$$

В результате имеем ряд:

$$f(x) = \frac{4A}{p a} \left\{ \sin a \sin x + \frac{1}{9} \sin 3a \sin 3x + \dots \right\}.$$

Пример 2. Рассмотрим сигнал треугольной формы (рис.7-5)

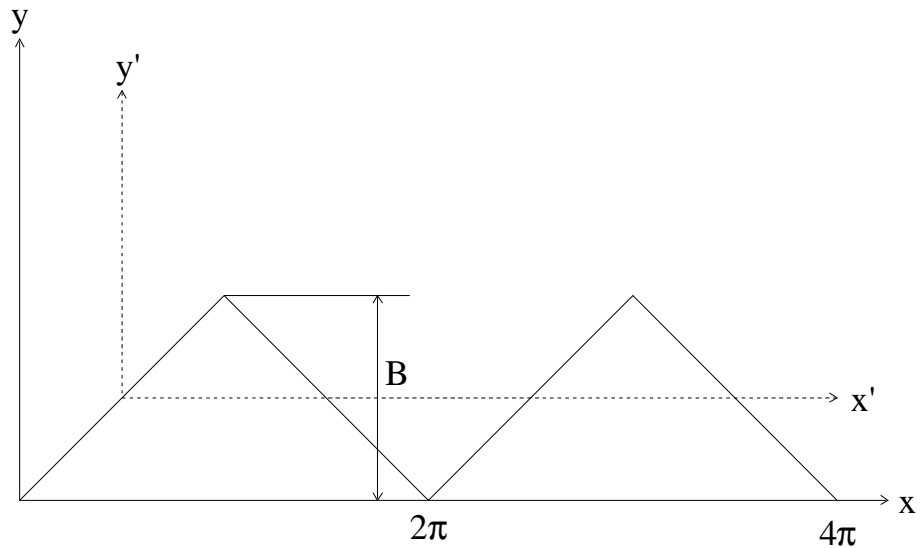


Рис. 7-5

Сместим начало координат в точку $x = \frac{p}{2}$; $y = \frac{B}{2}$ и примем $a = \frac{p}{2}$; $A = \frac{B}{2}$. Получим ряд:

$$y'(x') = \frac{4B}{p^2} \left(\sin x' + \frac{1}{9} \sin 3x' + \frac{1}{25} \sin 5x' + \dots \right).$$

Для обозначения ряда в первоначальных координатах необходимо в ряду прибавить $\frac{B}{2}$ и вместо x записать $\left(wt + \frac{p}{2} \right)$:

$$y(x) = \frac{B}{2} + \frac{4B}{p^2} \left(\cos x + \frac{1}{9} \cos 3x + \frac{1}{25} \cos 5x + \mathbf{K} \right).$$

Пример 3. Серия прямоугольных импульсов (рис. 7-6.):

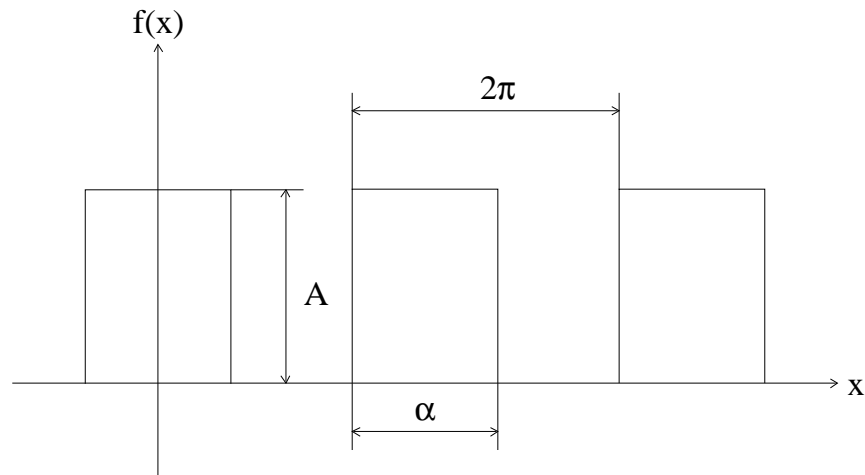


Рис. 7-6

Функция симметрична относительно оси ординат, поэтому содержит только члены ряда с косинусами.

Ряд Фурье имеет вид:

$$f(x) = Ak \frac{2A}{p} \left(\sin p k \cos x + \frac{1}{2} \sin 2p k \cos 2x + \mathbf{K} \right),$$

где $k = \frac{a}{2p}$ - коэффициент импульса.

Из приведенных примеров разложения в ряд Фурье видно, что при отсутствии постоянной составляющей функции полностью определяется величинами амплитуд соответствующих гармоник. Поэтому функцию $f(w)$ представляют амплитудно-частотным спектром (рис. 7-7).

Если добавить фазочастотный спектр, то эти две характеристики полностью определяют несинусоидальную периодическую функцию.

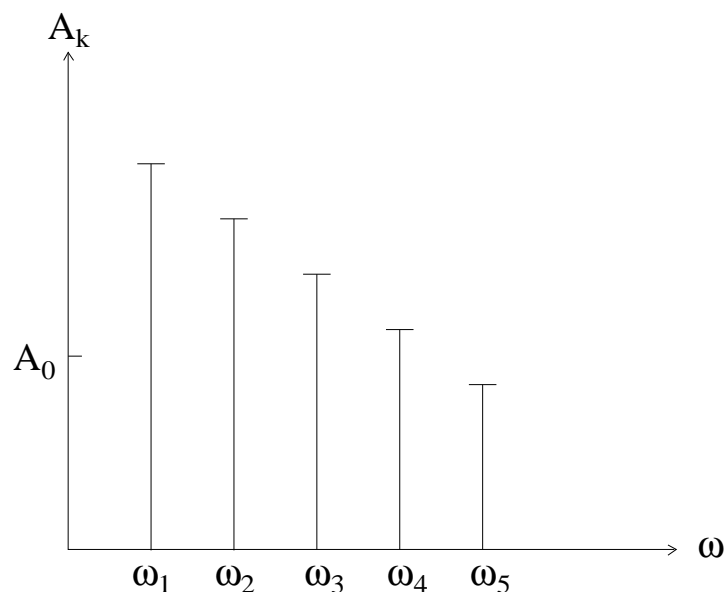


Рис. 7-7

7.2. Общие характеристики несинусоидальных токов, напряжений и ЭДС

Несинусоидальные токи, напряжения и ЭДС характеризуются следующими параметрами:

1. Максимальным значением за период:

$$I_{\max}, U_{\max}, E_{\max};$$

2. Действующим (эффективным), т.е. среднеквадратичным значением за период:

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt}; U = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T u^2 dt}; E = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T e^2 dt}.$$

После разложения в ряд (например тока) при , получим:

$$\begin{aligned} I^2 &= \frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt = \frac{1}{T} \int_0^T (i_0 + i_1 + i_2 + \mathbf{K} + i_K + \mathbf{K})^2 dt = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{T} \int_0^T i_k^2 dt + \sum_{\substack{g=0 \\ s=0 \\ g \neq s}}^{\infty} \frac{1}{T} \int_0^T i_g i_s dt = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{T} \int_0^T i_k^2 dt = \sum_{k=0}^{\infty} I_k^2 = I_0^2 + I_1^2 + I_2^2 + \mathbf{K} + I_K^2 + \mathbf{K} \end{aligned}$$

так как при $g \neq s$:

$$\begin{aligned} \int_0^T i_g i_s dt &= \int_0^T I_{gm} I_{sm} \sin(g\omega t + j_g) \sin(s\omega t + j_s) dt = \\ &= \frac{1}{2} I_{gm} I_{sm} \left\{ \int_0^T \cos[(g-s)\omega t + j_g - j_s] dt - \cos[(g+s)\omega t + j_g + j_s] dt \right\} = 0 \end{aligned}$$

тогда:

$$I^2 = \frac{1}{T} \sum_0^{\infty} i_k^2 dt = \sum_0^{\infty} I_k^2 = I_0^2 + I_1^2 + I_2^2 + \dots + I_k^2 + \dots$$

или

$$I = \sqrt{I_0^2 + I_1^2 + I_2^2 + \dots + I_k^2 + \dots}$$

Действующее значение периодического несинусоидального тока равно квадратному корню из суммы квадратов действующих значений всех гармоник и квадрата постоянной составляющей. Аналогично,

$$U^2 = \sum_0^{\infty} U_k^2 ; \quad E^2 = \sum_0^{\infty} E_k^2 .$$

3. Как указывалось выше, среднее значение равно постоянной составляющей:

$$A_{CP} = A_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt ;$$

среднее значение по модулю

$$A'_{CP} = \frac{1}{T} \int_0^T |f(t)| dt .$$

Указанные характеристики получают непосредственно из приведенных формул, содержащих интегралы, или из их разложения в ряды.

Периодические токи, напряжения и ЭДС характеризуют следующие коэффициенты:

Коэффициент формы кривой - отношение действующего значения к среднему по модулю:

$$K_{\Phi} = \frac{A}{A'_{CP}} ,$$

для синусоиды

$$K_{\Phi} = \frac{1}{\sqrt{2}} : \frac{2}{p} = \frac{p}{2\sqrt{2}} = 1,11 .$$

Коэффициенты амплитуды - отношение максимального значения к действующему:

$$K_a = \frac{A_{\max}}{A} ,$$

для синусоиды

$$K_a = 1 : \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} = 1,414 .$$

Коэффициент искажения - отношение действующего значения основной гармоники к действующему значению функции:

$$K_H = \frac{A_1}{A},$$

для синусоиды $K_H = 1$.

Коэффициент гармоник - отношение действующего значения высших гармоник к действующему значению основной гармоники

$$K_G = \frac{\sqrt{\sum_{k=2}^{\infty} A_k^2}}{A_1}.$$

Если постоянная составляющая отсутствует, то

$$K_G = \frac{\sqrt{1 - K_H^2}}{K_H},$$

для синусоиды $K_G = 0$.

7.3. Особенности измерений при несинусоидальных сигналах

Разные системы приборов переменного тока регистрируют разные величины, но шкала их отградуирована так, что при синусоидальном воздействии они показывают эффективное значение измеряемой величины.

Приборы электродинамической, электромагнитной и тепловой систем отградуированы в действующих значениях. Приборы магнитоэлектрической системы реагируют только на постоянную составляющую.

Магнитоэлектрические приборы с детекторным преобразователем реагируют на средние по модулю значения, а отградуированы на эффективные значения при синусоидальном возмущении.

Электронные амплитудные приборы регистрируют максимальные значения, а отградуированы также на эффективные значения для синусоидального возмущения.

Рассмотрим конкретные примеры.

Пусть имеем различные формы напряжений при одинаковом эффективном значении, равном 10 В.

синусоидальная (рис. 7-8,а);

прямоугольная (рис. 7-8,б);

серия импульсов при $\frac{t}{T} = 0,5$ (рис. 7-8,в).

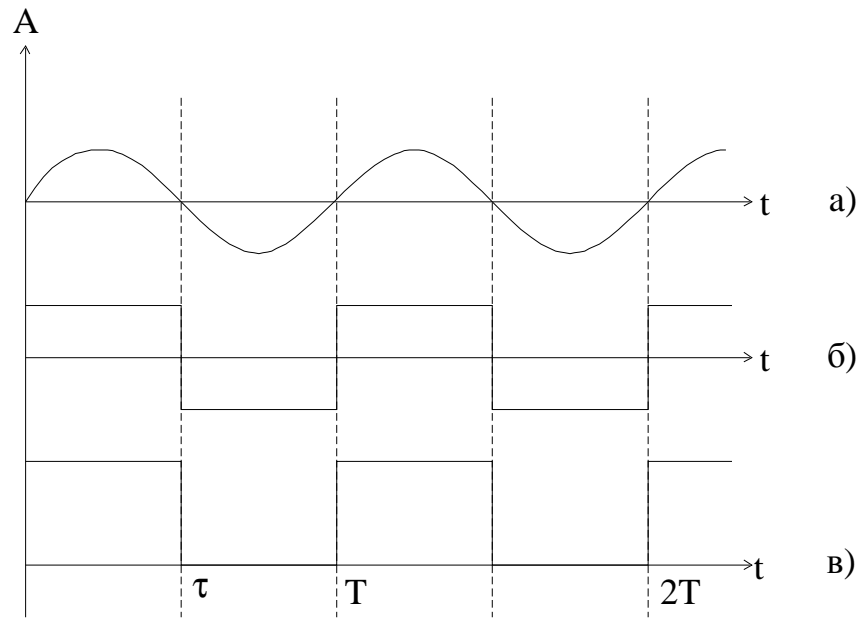


Рис. 7-8

Поскольку эффективные значения всех напряжений одинаковы, то приборы электродинамической, электромагнитной и тепловой систем покажут 10 В.

Амплитудные значения:

синусоидальная 14,1 В;

прямоугольная 10 В;

серия импульсов $x = 10 \cdot \sqrt{2} = 14,1$ В.

Амплитудные приборы, отградуированные на эффективное значение, показывают:

синусоидальная 10 В;

прямоугольная $10 / \sqrt{2} = 7,1$ В;

серия импульсов $14,1 / 1,41 = 10$ В.

Детекторные приборы реагируют на средние по модулю значения, но цена деления шкалы увеличена в 1,11:

синусоидальная 10 В;

прямоугольная $10 \cdot 1,11 = 11,1$ В;

серия импульсов $14,1 / 21,11 = 7,8$ В.

Магнитоэлектрические приборы:

синусоидальная 0;

прямоугольная 0;

серия импульсов $14,1 / 2 = 7,05$ В.

7.4. Расчет линейных цепей при несинусоидальных токах, напряжениях и ЭДС

Расчет цепей содержит следующие этапы:

1. Разложение заданных ЭДС или токов источников на гармонические составляющие.
2. Расчет токов и напряжений для каждой составляющей отдельно (на основе принципа наложения).
3. Суммирование решений для каждой составляющей.

Обычно ряды Фурье сходятся довольно быстро и в зависимости от требуемой точности решения задачи с учетом характера цепи ограничиваются определенным количеством членов разложения. Таким образом, расчет сводится к решению стольких однотипных задач, сколькими гармониками ограничиваются. При этом учитывается, что для различных частот сопротивления элементов схемы неодинаковы.

Сопротивление катушки индуктивности для постоянной составляющей $X_{L0} = 0$; сопротивление для k -й гармоники в k раз больше, чем для основной:

$$X_{LK} = k\omega L = kX_{L1}.$$

Конденсатор не пропускает постоянную составляющую ($X_{C0} = \infty$); для k -й гармоники сопротивления емкости в k раз меньше, чем для основной:

$$X_{CK} = \frac{1}{k\omega C} = \frac{1}{k}X_{C1}.$$

Активное сопротивление также зависит от частоты, возрастая с ее увеличением из-за поверхностного эффекта. Однако для цепей, рассматриваемых в электротехнике, зависимость обычно не учитывают, считая.

Вследствие зависимости реактивных сопротивлений от частоты токи и падения напряжений в цепях, содержащих емкости, имеют больший коэффициент гармоник, чем ЭДС генератора. Иными словами, отклонение от синусоиды в емкостных цепях усиливается.

В индуктивных цепях происходит обратное явление, т.е. индуктивность подавляет проявление высших гармоник.

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. В цепи с последовательно соединенными R и L подведено несинусоидальное напряжение

$$u = U_0 + U_{m1} \sin \omega t + U_{m3} \sin(3\omega t + \gamma_3),$$

Найдем мгновенное и действующее значения тока для схемы (рис.7-9.)

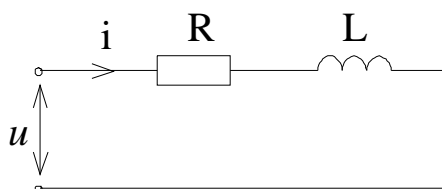


Рис. 7-9

Постоянная составляющая тока

$$I_0 = \frac{U_0}{R}.$$

Для первой гармоники:

$$i_1 = \frac{U_{m1}}{Z_1} \sin(\omega t - j_1)$$

модуль сопротивления $Z_1 = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2} = \sqrt{R^2 + X_{L1}^2}$;

фаза $j_1 = \arctg \frac{\omega L}{R} = \arccos \frac{R}{Z_1}$.

Действующее значение тока

$$I_1 = \frac{U_{m1}}{\sqrt{2} Z_1}$$
 .

Для третьей гармоники:

$$i_3 = \frac{U_{m3}}{Z_3} \sin(\omega t + \gamma_3 - j_3)$$

модуль сопротивления $Z_3 = \sqrt{R^2 + (3\omega L)^2} = \sqrt{R^2 + X_{L3}^2}$;

фаза $j_3 = \arctg \frac{3\omega L}{R}$.

Действующее значение тока

$$I_3 = \frac{U_{m3}}{Z_3 \sqrt{2}}$$
 .

Мгновенное значение общего тока

$$i(t) = I_0 + \sqrt{2} I_1 \sin(\omega t - j_1) + \sqrt{2} I_3 \sin(3\omega t + \gamma_3 - j_3)$$
 .

Действующее значение общего тока

$$I = \sqrt{I_0^2 + I_1^2 + I_3^2}$$
 .

Поскольку $Z_1 < Z_3$, относительное влияние третьей гармоники в кривой тока меньше, чем в кривой напряжения.

Пример 2. Пусть то же напряжение действует в последовательной RC-цепи (рис. 7-10).

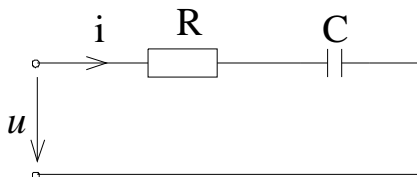


Рис. 7-10

Постоянная составляющая

$$I_0 = 0$$
 .

Для первой гармоники:

$$\text{ток } i_1 = \frac{U_{m1}}{Z_1} \sin(\omega t + j_1) ;$$

$$\text{модуль сопротивления } Z_1 = \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2} = \sqrt{R^2 + X_{C1}^2} ;$$

$$\text{фаза } j_1 = \arctg \frac{1}{\omega RC} .$$

Действующее значение тока

$$I_1 = \frac{U_{m1}}{Z_1 \sqrt{2}} .$$

Для третьей гармоники:

$$\text{ток } i_3 = \frac{U_{m3}}{Z_3} \sin(3\omega t + y_3 + j_3) ;$$

модуль сопротивления

$$Z_3 = \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{3\omega C}\right)^2} = \sqrt{R^2 + X_{C3}^2} ; \text{ фаза } j_3 = \arctg \frac{1}{3\omega CR} .$$

Действующее значение

$$I_3 = \frac{U_{m3}}{\sqrt{2} Z_3} ;$$

ток в цепи

$$i(t) = \sqrt{2} I_1 \sin(\omega t + j_1) + \sqrt{2} I_3 \sin(3\omega t + y_3 + j_3) .$$

Действующее значение тока

$$I = \sqrt{I_1^2 + I_3^2} ;$$

так как $Z_3 < Z_1$, третья гармоника в кривой тока выражена сильнее, чем в кривой напряжения.

7.5. Активная мощность при периодических несинусоидальных токах и напряжениях

Общее правило определения активной мощности Р:

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T u i dt = \frac{1}{T} \int_0^T (u_0 + u_1 + u_2 + \dots)(i_0 + i_2 + i_3 + \dots) dt .$$

После перемножения под интегралом получаем сумму произведений двух видов: $u_K i_K$ и $u_g i_s$.

Интеграл от слагаемых первого вида:

$$\frac{1}{T} \int_0^T u_K i_K dt = P_K = U_K I_K \cos j_K$$

Интегралы от слагаемых второго вида обращаются в ноль, так как они представляют собой интегралы от синусоидальных функций за целое число периодов.

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T u i dt = \sum_{K=0}^{\infty} P_K = U_0 I_0 + U_1 I_1 \cos j_1 + U_2 I_2 \cos j_2 + \dots$$

Активная мощность при периодических несинусоидальных токах и напряжениях равна сумме активных мощностей постоянной и всех гармонических составляющих тока и напряжения.

Понятие коэффициента мощности при несинусоидальных токах и напряжениях не совпадает с понятием $\cos j$:

$$\cos \alpha = \frac{P}{UI} = \frac{\sum_0^{\infty} P_K}{\sqrt{\sum_0^{\infty} U_K^2} \sqrt{\sum_0^{\infty} I_K^2}}$$

Появление высших гармоник в цепях, содержащих реактивные сопротивления, приводит к снижению коэффициента мощности, $\alpha = 1$ только при чисто резистивной цепи.

- угол сдвига фаз между эквивалентными синусоидами тока и напряжения, действующие значения которых такие же как у несинусоидальных.

7.6. Резонанс в цепи при несинусоидальных токах и напряжениях

При несинусоидальных токах и напряжениях явления резонанса значительно усложняются, так как резонанс возникает для каждой гармоники отдельно.

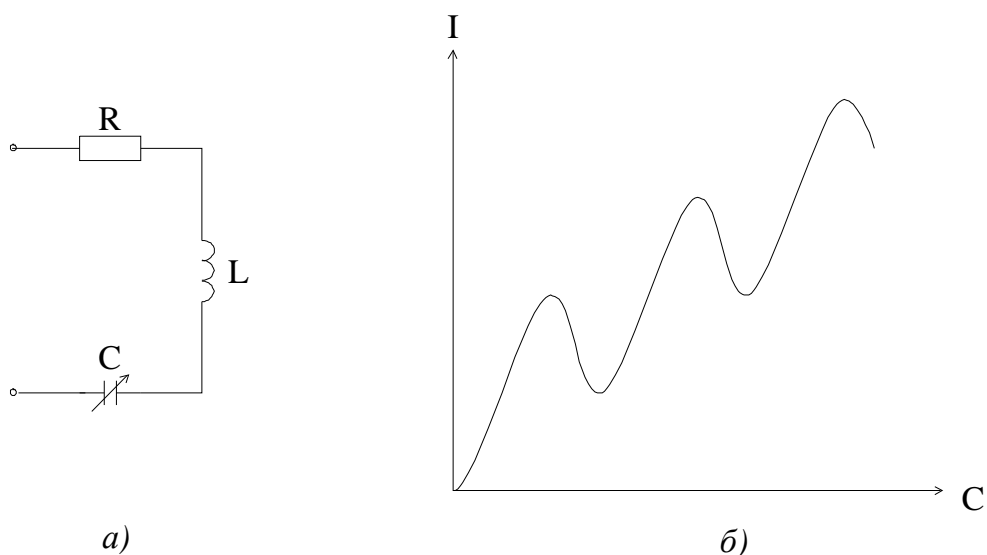


Рис. 7-11

В цепи RLC (рис. 7-11,а), например, несинусоидальное напряжение вызовет ток k -й гармоники

$$I_K = \frac{U_K}{\sqrt{R^2 + \left(k\omega L - \frac{1}{k\omega C}\right)^2}}.$$

Характер кривой $I(C)$ показан на рис. 7-11,б, причем $C_1 > C_2 > C_3$, так как $C_K = \frac{1}{k^2 \omega^2 C}$.

Аналогичные явления можно наблюдать и при параллельном соединении элементов.

Явлениями резонанса пользуются для создания фильтров, т.е. схем для выделения требуемых частот и подавления нежелательных частот.

Рассмотрим несколько конкретных схем.

4. 1. LC участок схемы рис 7-12, настроенный в резонанс на k -ю гармонику, будет оказывать сопротивление для всех гармоник, кроме k -й, и следовательно, в токе нагрузки определяющая роль принадлежит току этой гармоники.

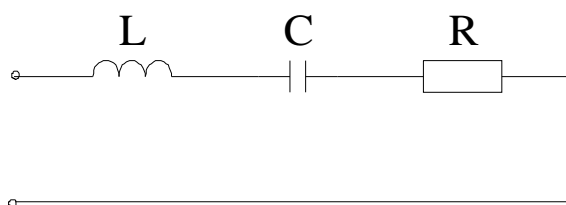


Рис. 7-12

1. 2. Если эту схему дополнить LC-цепочкой параллельно нагрузке, то она, составляя малое сопротивление для всех гармоник, кроме k -й, не пропустит в нагрузку гармоники, кроме k -й. Практически такая схема пропускает полосу частот и поэтому называется полосовым фильтром (рис. 7-13).

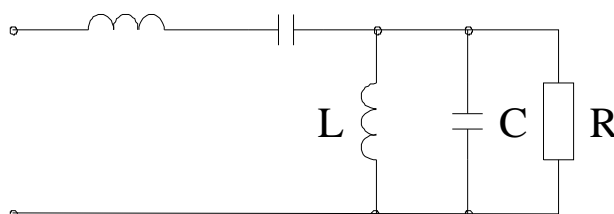


Рис. 7-13

Для уменьшения k -й гармоники в нагрузке резонансные фильтры включаются по схеме рис. 7-14.

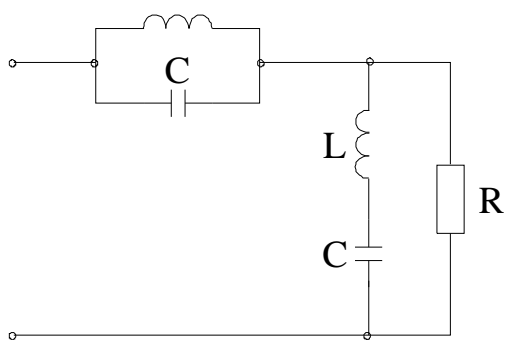


Рис. 7-14

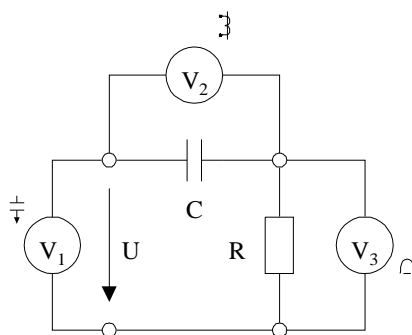
Конечно, эффект действия фильтра зависит от согласования с нагрузкой.

Контрольные вопросы к теме 7

1. Каков порядок расчета линейных цепей при несинусоидальных токах и напряжениях?
2. Как представить несинусоидальный периодический сигнал в виде суммы гармонических составляющих?
3. Каков физический смысл нулевого члена ряда Фурье?
4. Как рассчитать действующее значение несинусоидального периодического сигнала?
5. Какими коэффициентами характеризуются несинусоидальные сигналы?
6. Как рассчитать сопротивление цепи для постоянной составляющей? Для первой гармоники? Для n -ой гармоники?
7. Каковы особенности измерений при несинусоидальных сигналах приборами различных систем?
8. Какое значение несинусоидального напряжения покажет авометр магнитоэлектрической системы в режиме постоянного напряжения, переменного напряжения?

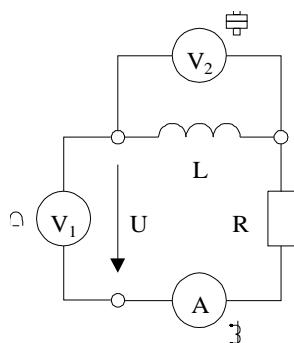
Контрольные задачи к теме 7

- I Определить показания приборов разных систем, считая a, b, d, R, C заданными.



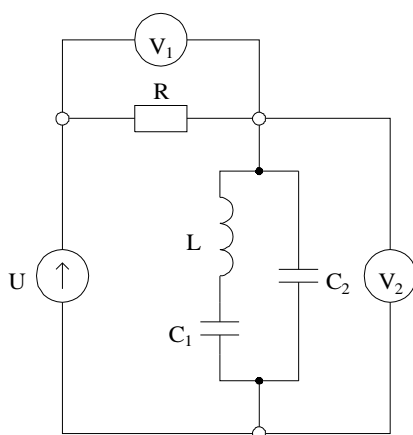
$$u = a + b \sin \omega t - d \sin(2\omega t + 9)$$

- II Определить показания приборов разных систем, считая L, R, a, b, d заданными.



$$u = a + b \sin \omega t - d \cos 5\omega t$$

- III Определить показания приборов электромагнитной системы.



$$u = 150 + 50\sqrt{2} \sin(\omega t + 45^\circ); \quad \omega L = \frac{1}{\omega C_1}$$

Примечание:

Приборы:

- | | | |
|-----|------------------------------|-------------------------------------------------------|
| - | электромагнитная система | } показывают действующее значение измеряемой величины |
| • - | электростатическая система | |
| • - | электродинамическая система | } показывают среднее значение измеряемой величины |
| • - | магнитоэлектрическая система | |

Тема 8. Общие свойства четырехполюсников

8.1. Уравнения четырехполюсников

Электротехническое устройство, служащее для передачи энергии (сигналов) и имеющие по два входных и выходных зажима, называется четырехполюсником.

Если внутри четырехполюсника нет источников энергии или они взаимно компенсируют друг друга, то такой четырехполюсник называют пассивным (рис. 8-1: а - идеальный трансформатор; б - частотный фильтр; в - мостовая схема).

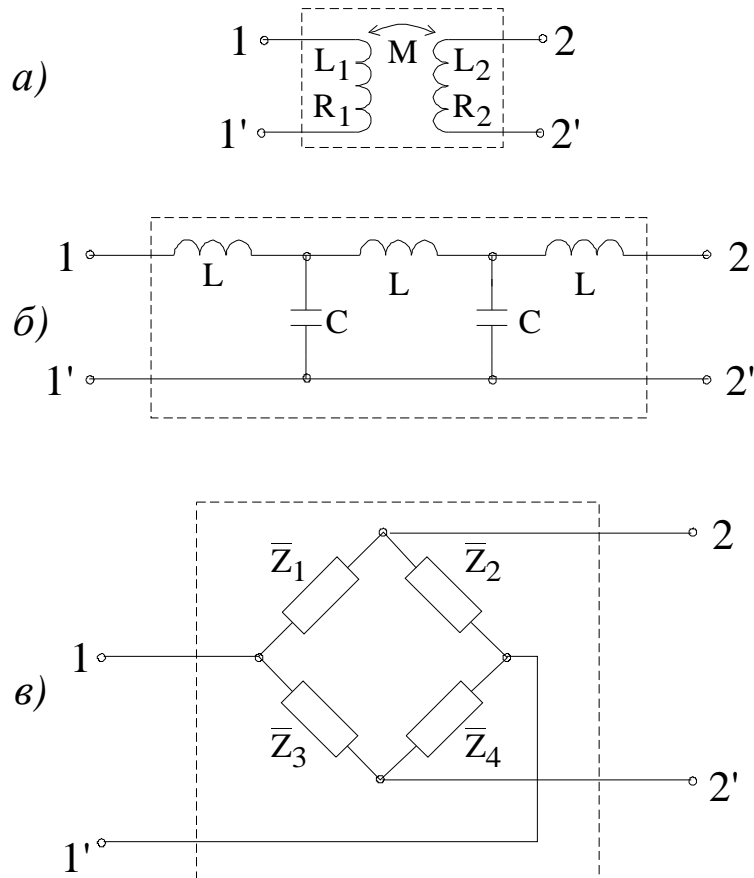


Рис. 8-1

Рассмотрим свойства четырехполюсников в установившемся режиме при периодических синусоидальных токах и напряжениях. Это позволит в дальнейшем применить полученные результаты для анализа цепей при других формах сигналов.

Для анализа свойств четырехполюсника установим зависимость между входным напряжением \dot{U}_1 и токами \dot{I}_1 и входными \dot{U}_2 и \dot{I}_2 (рис. 8-2, где П - пассивная схема).

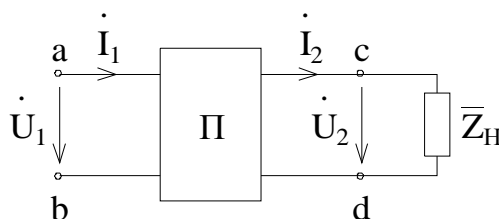


Рис. 8-2

При выборе направлений напряжений и токов, указанных на рисунке, энергия передается от входа (клемма a-b) к сопротивлению нагрузки Z_H (клеммы c-d).

Составим уравнение цепи методом контурных токов. В первый контур включим входные зажимы, во второй контур включим сопротивление нагрузки \bar{Z}_H .

$$\bar{Z}_H \mathcal{I}_1 + \bar{Z}_{12} \mathcal{I}_2 + \bar{Z}_{13} \mathcal{I}_3 + \mathbf{K} + \bar{Z}_{1n} \mathcal{I}_n = \mathcal{U}_1$$

$$\bar{Z}_{21} \mathcal{I}_1 + \bar{Z}_{22} \mathcal{I}_2 + \bar{Z}_{23} \mathcal{I}_3 + \mathbf{K} + \bar{Z}_{2n} \mathcal{I}_n = 0$$

$$\bar{Z}_{31} \mathcal{I}_1 + \bar{Z}_{32} \mathcal{I}_2 + \bar{Z}_{33} \mathcal{I}_3 + \mathbf{K} + \bar{Z}_{3n} \mathcal{I}_n = 0$$

$$\bar{Z}_{n1} \mathcal{I}_1 + \bar{Z}_{n2} \mathcal{I}_2 + \bar{Z}_{n3} \mathcal{I}_3 + \mathbf{K} + \bar{Z}_{nn} \mathcal{I}_n = 0.$$

$$\text{Обозначим } \bar{Z}_{22} = \bar{Z}'_{22} + \bar{Z}_H,$$

где \bar{Z}'_{22} - часть сопротивления второго контура, входящая в состав четырехполюсника.

Учитывая, что $\mathcal{I}_2 \bar{Z}_H = \mathcal{U}_2$:

$$\bar{Z}_{11} \mathcal{I}_1 + \bar{Z}_{12} \mathcal{I}_2 + \mathbf{K} + \bar{Z}_{1n} \mathcal{I}_n = \mathcal{U}_1$$

$$\bar{Z}_{21} \mathcal{I}_1 + \bar{Z}_{22} \mathcal{I}_2 + \mathbf{K} + \bar{Z}_{2n} \mathcal{I}_n = -\mathcal{U}_2$$

$$\bar{Z}_{31} \mathcal{I}_1 + \bar{Z}_{32} \mathcal{I}_2 + \mathbf{K} + \bar{Z}_{3n} \mathcal{I}_n = 0$$

$$\bar{Z}_{n1} \mathcal{I}_1 + \bar{Z}_{n2} \mathcal{I}_2 + \mathbf{K} + \bar{Z}_{nn} \mathcal{I}_n = 0.$$

Все остальные уравнения содержат в правой части нули, что соответствует пассивному четырехполюснику.

Решение системы уравнений:

$$\mathcal{I}_1 = \frac{\Delta_{11}}{\Delta} \mathcal{U}_1 - \frac{\Delta_{21}}{\Delta} \mathcal{U}_2;$$

$$\mathcal{I}_2 = \frac{\Delta_{12}}{\Delta} \mathcal{U}_1 - \frac{\Delta_{22}}{\Delta} \mathcal{U}_2.$$

Отношения $\frac{\Delta_{11}}{\Delta}$, $\frac{\Delta_{12}}{\Delta}$ имеют размерность проводимости.

Обозначим

$$\frac{\Delta_{11}}{\Delta} = \bar{Y}_{11}; \quad \frac{\Delta_{12}}{\Delta} = \bar{Y}_{21}; \quad -\frac{\Delta_{22}}{\Delta} = \bar{Y}_{22}; \quad -\frac{\Delta_{21}}{\Delta} = \bar{Y}_{12},$$

тогда уравнения четырехполюсника принимают вид:

$$\mathcal{I}_1 = \bar{Y}_{11} \mathcal{U}_1 + \bar{Y}_{12} \mathcal{U}_2;$$

$$\mathcal{I}_2 = \bar{Y}_{21} \mathcal{U}_1 + \bar{Y}_{22} \mathcal{U}_2.$$

В матричной форме:

$$\begin{bmatrix} \bar{Y}_{11} & \bar{Y}_{12} \\ \bar{Y}_{21} & \bar{Y}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{U}_1 \\ \mathcal{U}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{I}_1 \\ \mathcal{I}_2 \end{bmatrix},$$

или

$$\bar{Y} \mathcal{U} = \mathcal{I}.$$

Для линейных уравнений, соответствующих линейным цепям $\Delta_{12} = \Delta_{21}$, поэтому $Y_{12} = -Y_{21}$.

Указанные коэффициенты называются Y-параметрами, а матрица Y-матрицей четырехполюсника. Как видно из записи уравнений четырехполюсников в Y-параметрах с учетом уравнения $Y_{12} = -Y_{21}$, пассивный четырехполюсник характеризуется тремя независимыми параметрами. Физический смысл Y-параметров можно определить по режимам короткого замыкания на выходе ($U_2 = 0$) и на входе ($U_1 = 0$).

$$\bar{Y}_{11} = \left(\frac{\bar{Y}_1}{\bar{Y}_2} \right)_{\bar{Y}_2=0} \text{ - входная проводимость при коротком замыкании на выходе.}$$

$$\bar{Y}_{12} = \left(\frac{\bar{Y}_1}{\bar{Y}_2} \right)_{\bar{Y}_1=0} \text{ - передаточная (взаимная) проводимость при коротком замыкании на входе.}$$

$$\bar{Y}_{21} = \left(\frac{\bar{Y}_2}{\bar{Y}_1} \right)_{\bar{Y}_2=0} \text{ - передаточная проводимость при коротком замыкании на выходе.}$$

$$\bar{Y}_{22} = \left(\frac{\bar{Y}_2}{\bar{Y}_1} \right)_{\bar{Y}_1=0} \text{ - выходная проводимость при коротком замыкании на входе.}$$

Решим систему уравнений относительно напряжений:

$$\bar{Y} \bar{U} = \bar{Y}^{-1} \bar{I} = \bar{Z} \bar{I},$$

где

$$\bar{Z} = \begin{bmatrix} \bar{Z}_{11} & \bar{Z}_{12} \\ \bar{Z}_{21} & \bar{Z}_{22} \end{bmatrix} = \frac{1}{\bar{Y}_{11}\bar{Y}_{22} - \bar{Y}_{12}\bar{Y}_{21}} \begin{bmatrix} \bar{Y}_{22} & -\bar{Y}_{12} \\ -\bar{Y}_{21} & \bar{Y}_{11} \end{bmatrix}$$

Или в развернутом виде

$$\bar{U}_1 = \bar{Z}_{11} \bar{I}_1 + \bar{Z}_{12} \bar{I}_2$$

$$\bar{U}_2 = \bar{Z}_{21} \bar{I}_1 + \bar{Z}_{22} \bar{I}_2$$

Два из четырех параметров связаны между собой:

$$\bar{Z}_{12} = -\bar{Z}_{21}$$

Физический смысл Z-параметров четырехполюсника можно определить по режимам холостого хода на выходе ($\bar{I}_2 = 0$) и на входе ($\bar{I}_1 = 0$).

$$\bar{Z}_{11} = \left(\frac{\bar{U}_1}{\bar{I}_1} \right)_{\bar{I}_2=0} \text{ - входное сопротивление в режиме холостого хода на выходе.}$$

$$\bar{Z}_{12} = \left(\frac{\bar{U}_1}{\bar{I}_2} \right)_{\bar{I}_1=0} \text{ - передаточное (взаимное) сопротивление в режиме холостого хода на входе.}$$

$$\bar{Z}_{21} = \left(\frac{\bar{U}_2}{\bar{I}_1} \right)_{\bar{I}_2=0} \text{ - передаточное сопротивление в режиме холостого хода на выходе.}$$

$\bar{Z}_{22} = \left(\frac{\bar{U}_2}{\bar{I}_2} \right)_{\bar{I}_1=0}$ - выходное сопротивление зажимов 22' в режиме холостого хода на входе.

Во многих практических случаях удобно когда система уравнений решена относительно выходных напряжений и тока:

$$\bar{U}_1 = A\bar{U}_2 + B\bar{I}_2$$

$$\bar{I}_1 = C\bar{U}_2 + D\bar{I}_2$$

Параметры A, B, C, D в общем случае комплексные. Их можно выразить, например, через Z-параметры.

Решая второе уравнение Z-параметров относительно тока \bar{I}_2 , получим:

$$\bar{I}_2 = \frac{1}{\bar{Z}_{21}} \bar{U}_2 - \frac{\bar{Z}_{22}}{\bar{Z}_{21}} \bar{I}_1$$

Сопоставив со вторым уравнением в A-параметрах, получаем:

$$C = \frac{1}{\bar{Z}_{21}}; \quad D = -\frac{\bar{Z}_{22}}{\bar{Z}_{21}}$$

Подставим \bar{I}_2 в первое уравнение в Z-параметрах:

$$\bar{U}_1 = \bar{Z}_{11}\bar{I}_1 + \bar{Z}_{12}\bar{I}_2 = \frac{\bar{Z}_{11}}{\bar{Z}_{21}} \bar{U}_2 - \frac{\bar{Z}_{11}\bar{Z}_{22} - \bar{Z}_{21}\bar{Z}_{12}}{\bar{Z}_{21}} \bar{I}_1$$

Таким образом

$$A = \frac{\bar{Z}_{11}}{\bar{Z}_{21}}; \quad B = \frac{\bar{Z}_{21}\bar{Z}_{12} - \bar{Z}_{11}\bar{Z}_{22}}{\bar{Z}_{21}}$$

Нетрудно убедиться, что AD-BC=1.

Физический смысл A-параметров:

$A = \left(\frac{U_1}{U_2} \right)_{I_2=0}$ - передаточное отношение напряжений в режиме холостого хода на выходе.

$B = \left(\frac{U_1}{I_2} \right)_{\bar{U}_2=0}$ - передаточное сопротивление при коротком замыкании на выходе.

$C = \left(\frac{I_1}{U_2} \right)_{\bar{I}_2=0}$ - передаточная проводимость в режиме холостого хода на выходе.

$D = \left(\frac{I_1}{I_2} \right)_{\bar{U}_2=0}$ - передаточное отношение токов при коротком замыкании на выходе.

При обратном питании с учетом изменения знаков токов получим:

$$\begin{cases} \bar{U}_2 = D\bar{U}_1 + B\bar{I}_1 \\ \bar{I}_2 = C\bar{U}_1 + A\bar{I}_1 \end{cases}$$

При этом сохраняется соотношение

$$AD-BC=1$$

Для формирования уравнений при смешанном соединении четырехполюсников применяются еще два уравнения в Н-параметрах и G-параметрах:

$$\begin{cases} \mathcal{U}_1 = H_{11} \mathcal{I}_1 + H_{12} \mathcal{U}_2 \\ \mathcal{I}_2 = H_{21} \mathcal{I}_1 + H_{22} \mathcal{U}_2 \end{cases}$$

$$H_{12} = H_{21}$$

$$\begin{cases} \mathcal{I}_1 = G_{11} \mathcal{U}_1 + G_{12} \mathcal{U}_2 \\ \mathcal{U}_2 = G_{21} \mathcal{U}_1 + G_{22} \mathcal{I}_2 \end{cases}$$

$$G_{12} = G_{21}$$

Физический смысл предлагаем установить читателю.

8.2. Эквивалентные схемы четырехполюсника

Поскольку любая система уравнений, описывающая пассивный четырехполюсник, имеет три независимых параметра, то всякий четырехполюсник можно свести к любой из трех эквивалентных схем: Т-образной (рис. 8-3,а); П-образной (рис. 8-3,б); Х-образной (рис. 8-3,в), содержащих также три параметра: \bar{Z}_1 ; \bar{Z}_2 ; \bar{Z}_3 .

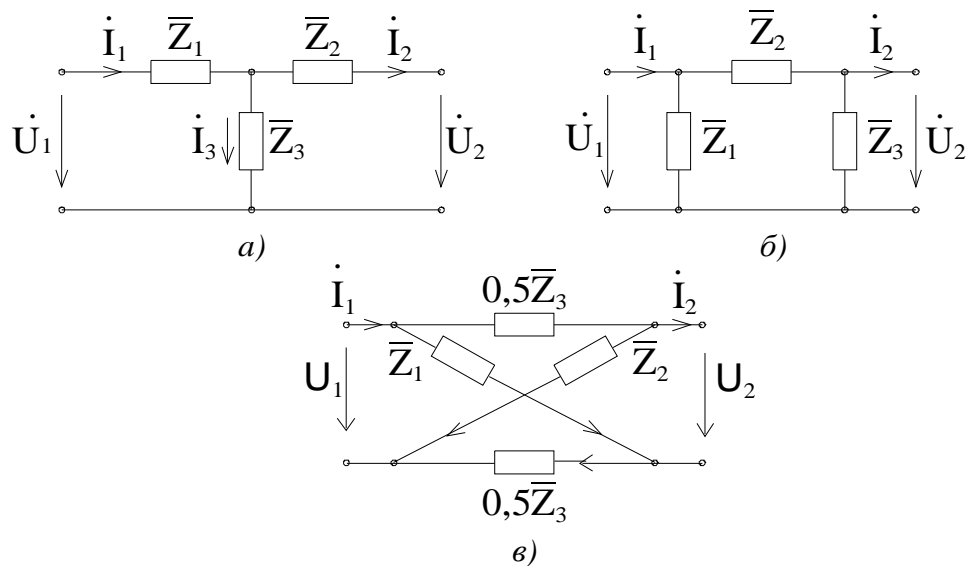


Рис. 8-3

Заметим, что переход от П-образной схемы к Т-образной осуществляется как переход от треугольника к звезде. Например:

$$\bar{Z}_1^T = \frac{\bar{Z}_1^n \bar{Z}_3^n}{\bar{Z}_1^n + \bar{Z}_2^n + \bar{Z}_3^n}.$$

Выразим элементы эквивалентных схем через параметры четырехполюсника. Например, для Т-образной схемы непосредственно из уравнений Кирхгофа следует

$$\mathcal{U}_1 = \mathcal{I}_1 \bar{Z}_1 + (\mathcal{I}_1 - \mathcal{I}_2) \bar{Z}_3$$

$$\mathcal{U}_2 = -\mathcal{I}_2 \bar{Z}_2 + (\mathcal{I}_1 - \mathcal{I}_2) \bar{Z}_3,$$

где

$$\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2 = \mathcal{E}_3$$

или

$$\mathcal{E}_1 = (\bar{Z}_1 + \bar{Z}_3)\mathcal{E}_1 - \bar{Z}_3\mathcal{E}_2$$

$$\mathcal{E}_2 = \bar{Z}_3\mathcal{E}_1 - (\bar{Z}_2 + \bar{Z}_3)\mathcal{E}_2$$

Сравнивая полученные уравнения в Z-параметрах для Т-образной эквивалентной схемы, получим

$$\bar{Z}_{11} = \bar{Z}_1 + \bar{Z}_3; \bar{Z}_{12} = \bar{Z}_3 = -\bar{Z}_{21}; \bar{Z}_{22} = -(\bar{Z}_2 + \bar{Z}_3).$$

Используя уравнения связи между А-параметрами и Z-параметрами четырехполюсника, выразим А-параметры эквивалентной Т-образной схемы:

$$A = \frac{\bar{Z}_{11}}{\bar{Z}_{21}}; B = -\frac{\bar{Z}_{11}\bar{Z}_{22} - \bar{Z}_{12}(-\bar{Z}_{21})}{\bar{Z}_{21}}; C = \frac{1}{\bar{Z}_{21}}; D = -\frac{\bar{Z}_{22}}{\bar{Z}_{21}}.$$

Откуда

$$A = \frac{\bar{Z}_1 + \bar{Z}_3}{\bar{Z}_3} = 1 + \frac{\bar{Z}_1}{\bar{Z}_3}; B = \frac{\bar{Z}_1\bar{Z}_2 + \bar{Z}_2\bar{Z}_3 + \bar{Z}_3\bar{Z}_1}{\bar{Z}_3};$$

$$C = \frac{1}{\bar{Z}_3}; D = \frac{\bar{Z}_2 + \bar{Z}_3}{\bar{Z}_3}.$$

При решении обратной задачи, т.е. по заданным А-параметрам определить сопротивления Т-образной схемы, воспользуемся следующими формулами:

$$\bar{Z}_3 = \frac{1}{C}; \bar{Z}_1 = \frac{A-1}{C}; \bar{Z}_2 = \frac{D-1}{C}.$$

Для П-образной схемы справедливы соотношения:

$$\bar{Z}_3 = B; \bar{Z}_1 = \frac{B}{D-1}; \bar{Z}_2 = \frac{B}{A-1}; A = 1 + \frac{\bar{Z}_3}{\bar{Z}_2}; B = \bar{Z}_3; C = \frac{\bar{Z}_1 + \bar{Z}_2 + \bar{Z}_3}{\bar{Z}_1\bar{Z}_2}; D = 1 + \frac{\bar{Z}_3}{\bar{Z}_1}.$$

8.3. Экспериментальное определение параметров четырехполюсника

Поскольку все параметры четырехполюсника связаны между собой, то достаточно для каждого четырехполюсника найти одну из систем параметров. Существует два способа определения параметров: расчетный, использующий схему электрической цепи и экспериментальный, рассматривающий четырехполюсник как «черный ящик» с четырьмя выводами. В первом случае не существует принципиальных различий между анализом свойств четырехполюсника на постоянном и переменном токе. Однако при экспериментальном определении параметров такие различия отмечаются.

Поскольку в каждой системе параметров только три независимых параметра, необходимо составить три уравнения для их вычисления. С этой целью используют эксперименты в режимах холостого хода (ХХ) и короткого замыкания (КЗ).

В режиме холостого хода (рис. 8-4,а) на выходе ток равен нулю $\mathcal{E}_{2\text{ХХ}} = 0$.

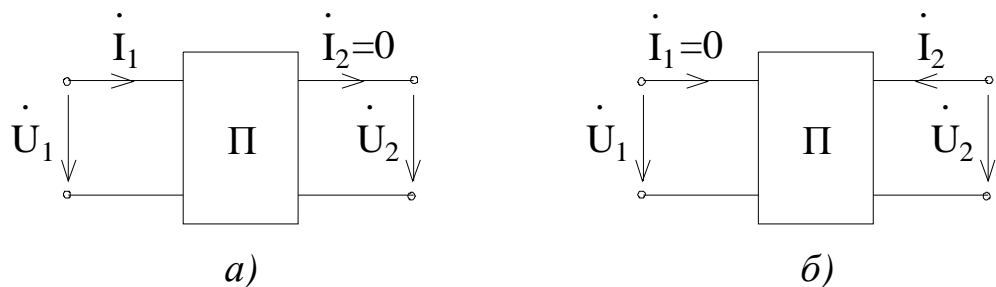


Рис. 8-4

При обратном питании в режиме холостого хода на входе четырехполюсника $\mathcal{E}_{1XX} = 0$.

При коротком замыкании на выходе или входе соответственно напряжения равны нулю $\mathcal{U}_{2K} = 0$; $\mathcal{U}_{1K} = 0$ (рис. 8-5, а - режим короткого замыкания на выходе, б - то же на входе).

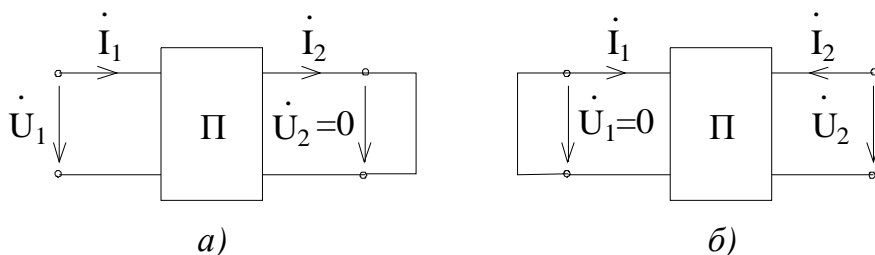


Рис. 8-5

Указанные опыты представляют частные случаи состояния четырехполюсника, которые не нарушают справедливости уравнений четырехполюсника. Этот факт позволяет достаточно просто определить параметры четырехполюсника.

Запишем уравнения в А-параметрах:

$$\mathcal{U}_1 = A\mathcal{U}_2 + B\mathcal{I}_2;$$

$$\mathcal{I}_1 = C\mathcal{U}_2 + D\mathcal{I}_2;$$

В режиме короткого замыкания на выходе четырехполюсника напряжения $U_2 = 0$, тогда

$$U_1 = BI_2;$$

$$I_1 = DI_2.$$

Откуда

$$B = \frac{\mathcal{U}_1}{I_{2K}}, \quad D = \frac{\mathcal{I}_{1K}}{I_{2K}}.$$

В режиме холостого хода на выходе четырехполюсника ток $\mathcal{I}_2 = 0$, тогда уравнения принимают вид:

$$\mathcal{U}_1 = A\mathcal{U}_2,$$

$$\mathcal{I}_1 = C\mathcal{U}_2,$$

откуда

$$A = \frac{U_1}{U_{2XX}} ; \quad C = \frac{I_{1XX}}{U_{2XX}} .$$

Любой из А-параметров четырехполюсника можно вычислить по трем другим из соотношения $AD - BC = I$.

Аналогично, проводя три эксперимента в режимах холостого хода и короткого замыкания можно определить параметры Z, Y или H. При этом необходимо помнить, что для линейных цепей U_1 - в режиме холостого хода и I_2 - в режиме короткого замыкания выбираются произвольными по величине, которая определяется мощностью рассеяния элементов. Однако, чтобы не допустить повреждений элементов и не нарушить линейный режим, в режиме холостого хода U_1 выбирают таким, чтобы $U_{2XX} = U_{2N}$, т.е. номинальному напряжению; в режиме короткого замыкания I_2 выбирают таким, чтобы $I_{2K} = I_{2N}$, т.е. номинальному току. Под номинальными значениями тока или напряжения понимают такие величины, на которые рассчитано устройство, представленное в виде четырехполюсника. Например, для трансформатора - это напряжение сети, в которую он включается, и номинальный ток нагрузки.

Пример:

Определить Z-параметры четырехполюсника, представленного на рис. 8-6. в режимах холостого хода на выходе (а) и входе (б)

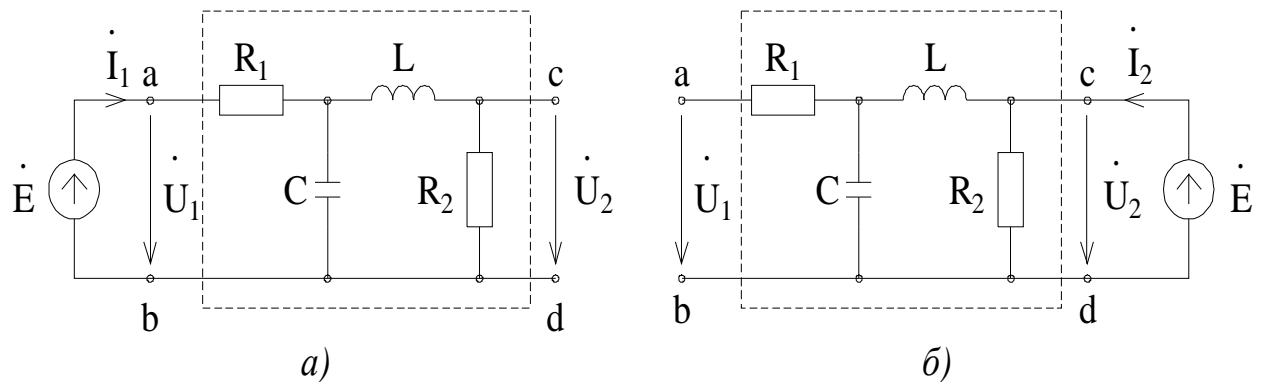


Рис. 8-6

Запишем систему уравнений

$$\begin{cases} U_1 = Z_{11} I_1 + Z_{12} I_2 \\ U_2 = Z_{21} I_1 + Z_{22} I_2 \end{cases}$$

Учитывая, что , имеем

$$Z_{11} = \frac{U_1}{I_{1XX}} ; \quad Z_{21} = \frac{U_{2XX}}{I_{1XX}} .$$

Вычислим ток I_1 , предполагая, что на входе схем действует напряжение U_1 :

$$\mathcal{R}_1 = \frac{\mathcal{U}_1}{-j\frac{1}{\omega C}(R_2 + j\omega L) + R_1 + \frac{1}{R_2 + j\omega L - j\frac{1}{\omega C}}},$$

откуда

$$\bar{Z}_{11} = R_1 + \frac{-j\frac{1}{\omega C}(R_2 + j\omega L)}{R_2 + j\omega L - j\frac{1}{\omega C}}$$

\bar{Z}_{21} определяем из выражения для U_2 , считая что на входе протекает ток \mathcal{R}_1

$$\mathcal{U}_2 = \mathcal{R}_1 \frac{-j\frac{1}{\omega C}(R_2 + j\omega L)}{R_2 + j\omega L - j\frac{1}{\omega C}} \cdot \frac{R_2}{(R_2 + j\omega L)} = \frac{-j\frac{R_2}{\omega C} \mathcal{R}_1}{R_2 + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)},$$

откуда

$$\bar{Z}_{21} = -\bar{Z}_{12} = -\frac{\frac{jR_2}{\omega C}}{R_2 + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)}.$$

Для нахождения \bar{Z}_{22} проведем расчет в режиме холостого хода на входе (рис. 8-6,б) и из второго уравнения имеем, полагая $\mathcal{R}_{XX} = 0$:

$$\bar{Z}_{22} = \frac{\mathcal{U}_2}{\mathcal{R}_{2XX}}.$$

Если к выходу четырехполюсника приложено напряжение \mathcal{U}_2 , ток определяется выражением

$$\mathcal{R}_2 = \frac{\mathcal{U}_2}{\frac{R_2\left(j\omega L - j\frac{1}{\omega C}\right)}{R_2 + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)}},$$

откуда

$$\bar{Z}_{22} = \frac{jR_2\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)}{R_2 + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)}.$$

Таким образом, принимая во внимание $\bar{Z}_{21} = -\bar{Z}_{12}$, определили все Z-параметры четырехполюсника.

Для экспериментального определения параметров четырехполюсника используются: амперметр, вольтметр, омметр, ваттметр или фазометр.

Рассмотрим сначала определение параметров четырехполюсника в режиме холостого хода на выходе и входе представлена на рис. 8-7,а,б.

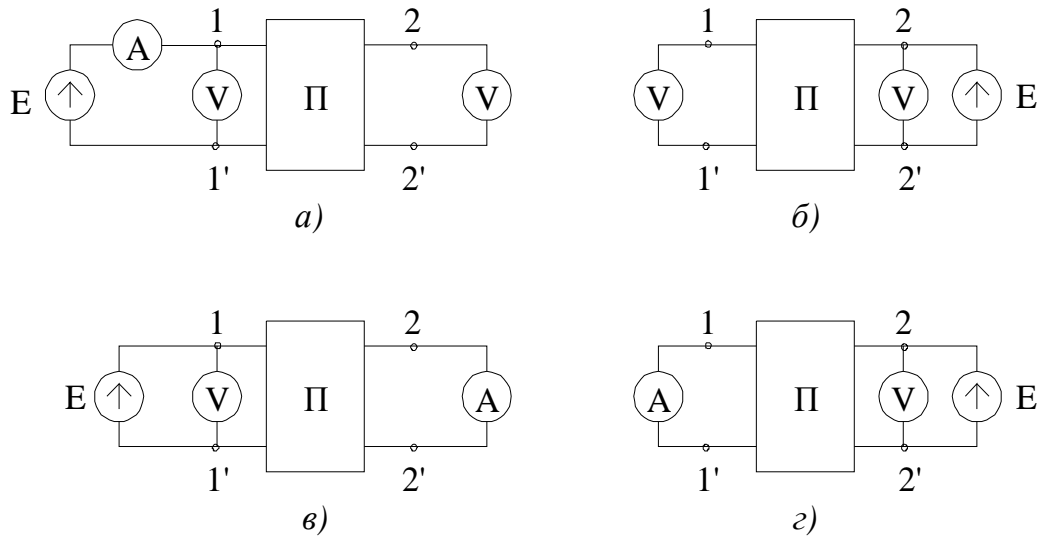


Рис. 8-7

При проведении экспериментов на постоянном токе достаточно измерить напряжение и ток.

В случае синусоидального возмущающего воздействия (на переменном токе), используя амперметр и вольтметр, можно найти только действующие значения. Для установления разности фаз между различными комплексами применяют фазометр или ваттметр.

Фазометры имеют общую точку между входом и выходом. Поэтому при их присоединении к четырехполюснику надо соблюдать правила регулярности (см. ниже).

Включить фазометр между входом и выходом, не нарушая структуры четырехполюсника, не всегда возможно. Поэтому, при экспериментальном определении параметров, исходной информацией являются входные сопротивления четырехполюсника, измеренные при холостом ходе и коротком замыкании на входе и выходе:

$$\begin{aligned}\bar{Z}_{1X} &= \frac{\mathcal{U}_{1X}}{\mathcal{I}_{1X}}; \quad \bar{Z}_{1X} = Z_{1X} e^{j\varphi_{1X}}; \quad \varphi_{1X} = \arccos \frac{P_{1X}}{U_{1X} I_{1X}}; \\ \bar{Z}_{1K} &= \frac{\mathcal{U}_{1K}}{\mathcal{I}_{1K}}; \quad \bar{Z}_{1K} = Z_{1K} e^{j\varphi_{1K}}; \quad \varphi_{1K} = \arccos \frac{P_{1K}}{U_{1K} I_{1K}}; \\ \bar{Z}_{2X} &= \frac{\mathcal{U}_{2X}}{\mathcal{I}_{2X}}; \quad \bar{Z}_{2X} = Z_{2X} e^{j\varphi_{2X}}; \\ \bar{Z}_{2K} &= \frac{\mathcal{U}_{2K}}{\mathcal{I}_{2K}}; \quad \bar{Z}_{2K} = Z_{2K} e^{j\varphi_{2K}}; \quad \varphi_{2K} = \arccos \frac{P_{2K}}{U_{2K} I_{2K}}.\end{aligned}$$

Знаки фаз устанавливают по схеме или из результатов измерений. Запишем систему уравнений в А-параметрах:

$$\begin{cases} \mathcal{U}_1 = A\mathcal{U}_2 + B\mathcal{I}_2 \\ \mathcal{I}_1 = C\mathcal{U}_2 + D\mathcal{I}_2 \end{cases}$$

Из указанной системы найдем выражения для входного и выходного сопротивлений в режимах холостого хода и короткого замыкания через А-параметры

$$\bar{Z}_{1XX} = \frac{A}{C}; \quad \bar{Z}_{2XX} = \frac{D}{C};$$

$$\bar{Z}_{1K} = \frac{B}{D}; \quad \bar{Z}_{2K} = \frac{B}{A}.$$

Или

$$\frac{\bar{Z}_{1XX}}{\bar{Z}_{2XX}} = \frac{\bar{Z}_{1K}}{\bar{Z}_{2K}}$$

Для определения параметра А запишем тождество

$$\frac{\bar{Z}_{1X}}{\bar{Z}_{2X} - \bar{Z}_{2K}} = \frac{A}{C \left(\frac{D}{C} - \frac{B}{A} \right)} = \frac{A^2 C}{C(AD - BC)} = A^2,$$

откуда

$$A = \sqrt{\frac{\bar{Z}_{1X}}{\bar{Z}_{2X} - \bar{Z}_{2K}}}.$$

После соответствующих математических преобразований получаем

$$B = A\bar{Z}_{2K}; \quad D = C\bar{Z}_{2K}; \quad C = \frac{A}{\bar{Z}_{1X}}.$$

Аналогичным образом, используя амперметр, вольтметр и ваттметр, можно определить другие параметры четырехполюсника. Если, например, известны показания приборов:

$$U_{1X} = 100B, \quad P_{1K} = 0,5 \text{ кВт},$$

$$I_{1X} = 20A, \quad U_{2K} = 56,6B,$$

$$P_{1X} = 2 \text{ кВт}, \quad I_{2K} = 8A,$$

$$U_{1K} = 70,7B, \quad j_{1K} > 0; \quad j_{2K} < 0;$$

$$I_{1K} = 10A, \quad P_{2K} = 320 \text{ кВт},$$

то можно определить

$$\bar{Z}_{1X} = \frac{U_{1X}}{I_{1X}} = 5 \text{ Ом}; \quad \cos j_{1X} = \frac{2000}{100 \cdot 20} = 1; \quad j_{1X} = 0; \quad \bar{Z}_{1X} = 50e^{j0};$$

$$\bar{Z}_{1K} = \frac{U_{1K}}{I_{1K}} = \frac{70,7}{10} = 7,07 \text{ Ом}; \quad \cos j_{1K} = \frac{P_{1K}}{U_{1K} \cdot I_{1K}} = \frac{500}{707} = 0,707;$$

$$j_{1K} = \frac{\pi}{4}; \quad \bar{Z}_{1K} = 5\sqrt{2}e^{j\frac{\pi}{4}} \text{ Ом};$$

$$\bar{Z}_{2K} = \frac{U_{2K}}{I_{2K}} = \frac{56,6}{8} = 7,07 \text{ Ом}; \quad \cos j_{2K} = \frac{320}{56,6 \cdot 8} = 0,707;$$

$$j_{2K} = -\frac{\pi}{4}; \quad \bar{Z}_{2K} = 5\sqrt{2}e^{-j\frac{\pi}{4}};$$

$$\frac{\bar{Z}_{1X}}{\bar{Z}_{2X}} = \frac{\bar{Z}_{1K}}{\bar{Z}_{2K}}; \quad \bar{Z}_{2X} = \frac{\bar{Z}_{1X} \cdot \bar{Z}_{2K}}{\bar{Z}_{1K}};$$

$$\bar{Z}_{2X} = \frac{5 \cdot 5\sqrt{2}e^{-j\frac{\pi}{4}}}{5\sqrt{2}e^{-j\frac{\pi}{4}}} = 5e^{-j\frac{\pi}{2}},$$

откуда

$$A = \sqrt{\frac{\bar{Z}_{1X}}{\bar{Z}_{2X} - \bar{Z}_{2K}}} = \sqrt{\frac{5}{-j5 - 5\sqrt{2}e^{-j\frac{\pi}{4}}}} = \sqrt{\frac{1}{-j - 1 + j}} = j$$

$$B = (5 - 5j)j = (5 + 5j) \text{ Ом}; \quad C = \frac{A}{\bar{Z}_{1X}} = \frac{j}{5} = 0,2j \text{ Ом}^{-1};$$

$$D = C\bar{Z}_{2X} = 0,2j(-5j) = 1.$$

Вспомнив, что для Т-образной эквивалентной схемы:

$$\bar{Z}_1 = \frac{A-1}{C}; \quad \bar{Z}_2 = \frac{D-1}{C}; \quad \bar{Z}_3 = \frac{1}{C}$$

получим:

$$\bar{Z}_3 = -5j; \quad \bar{Z}_1 = 5 + 5j; \quad \bar{Z}_2 = 0$$

Такой четырехполюсник изображен на рис. 8-8.

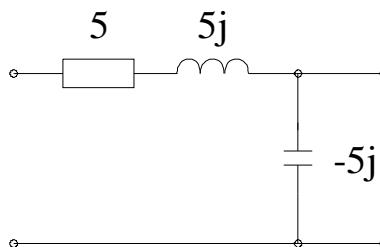


Рис. 8-8

8.4. Соединения четырехполюсников

Теория четырехполюсников позволяет представить сложную схему в виде комбинаций четырехполюсников и анализировать свойства общей схемы на основе свойств составляющих четырехполюсников.

При соединении четырехполюсников в общую схему иногда нарушаются индивидуальные свойства (регулярность) составляющих четырехполюсника, например на рис.8-9 сопротивление \bar{Z}_3'' четырехполюсника закорачивается при соединении в общую схему, что приводит к изменению его свойств.

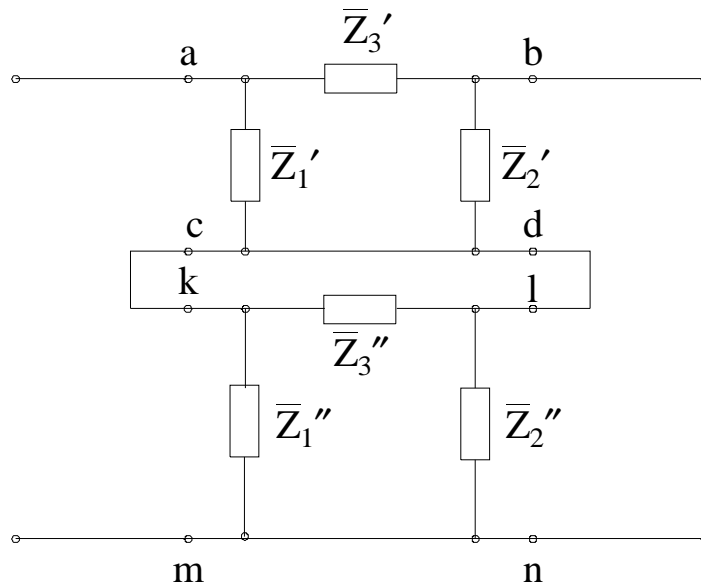


Рис. 8-9

Рассмотрим свойства схем при различных способах соединения четырехполюсников. Задача нахождения четырехполюсника, эквивалентного сложному четырехполюснику, сводится к определению параметров этого эквивалентного четырехполюсника по заданным параметрам соединенных четырехполюсников. Способы соединения четырехполюсников рассмотрим на примерах объединения двух четырехполюсников в один:

1. Последовательное соединение двух четырехполюсников (рис. 8-10).

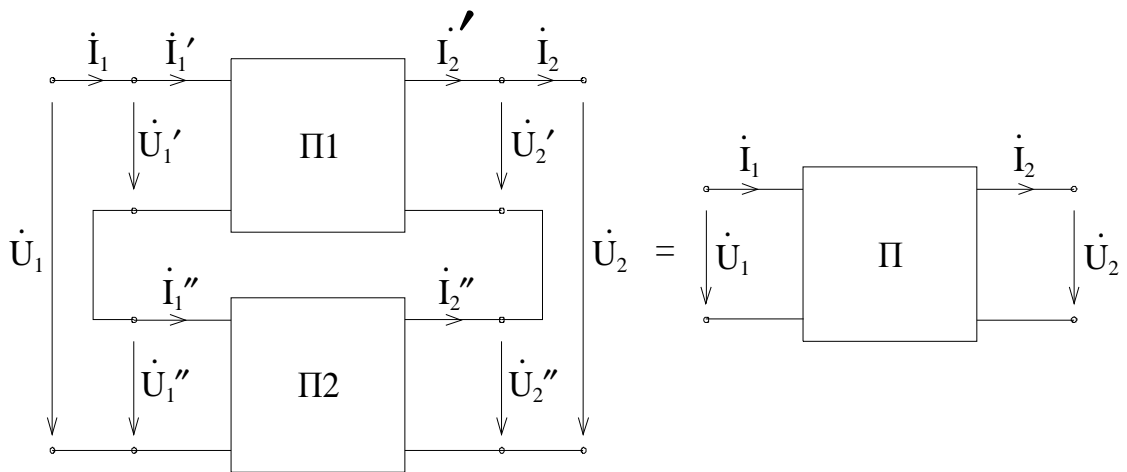


Рис.8-10

При таком соединении должны выполняться следующие соотношения (уравнения связи):

$$\left. \begin{aligned} U_1 &= U_1' + U_1'' \\ U_2 &= U_2' + U_2'' \end{aligned} \right\}, \quad \left. \begin{aligned} I_1 &= I_1' = I_1'' \\ I_2 &= I_2' = I_2'' \end{aligned} \right\}$$

Используем запись уравнений четырехполюсника в Z-параметрах:
для четырехполюсника П1

$$\mathcal{U}'_1 = \mathcal{R}'_1 \bar{Z}'_{11} + \mathcal{R}'_2 \bar{Z}'_{12};$$

$$\mathcal{U}'_2 = \mathcal{R}'_1 \bar{Z}'_{21} + \mathcal{R}'_2 \bar{Z}'_{22};$$

для четырехполюсника П2

$$\mathcal{U}''_1 = \mathcal{R}''_1 \bar{Z}''_{11} + \mathcal{R}''_2 \bar{Z}''_{12};$$

$$\mathcal{U}''_2 = \mathcal{R}''_1 \bar{Z}''_{21} + \mathcal{R}''_2 \bar{Z}''_{22}.$$

Исключим внутренние переменные \mathcal{U}'_1 ; \mathcal{U}'_2 ; \mathcal{U}''_1 ; \mathcal{U}''_2 в соответствии с уравнениями связи:

$$\mathcal{U}'_1 = \mathcal{R}'_1 (\bar{Z}'_{11} + \bar{Z}''_{11}) + \mathcal{R}'_2 (\bar{Z}'_{12} + \bar{Z}''_{12});$$

$$\mathcal{U}'_2 = \mathcal{R}'_1 (\bar{Z}'_{21} + \bar{Z}''_{21}) + \mathcal{R}'_2 (\bar{Z}'_{22} + \bar{Z}''_{22});$$

Откуда параметры общего четырехполюсника выразятся через параметры составляющих четырехполюсников:

$$\bar{Z}_{11} = \bar{Z}'_{11} + \bar{Z}''_{11}; \bar{Z}_{12} = \bar{Z}'_{12} + \bar{Z}''_{12}; \bar{Z}_{21} = \bar{Z}'_{21} + \bar{Z}''_{21}; \bar{Z}_{22} = \bar{Z}'_{22} + \bar{Z}''_{22}.$$

В матричной форме

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \mathcal{U}'_1 \\ \mathcal{U}'_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathcal{U}'_1 \\ \mathcal{U}'_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathcal{U}''_1 \\ \mathcal{U}''_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Z}'_{11} & \bar{Z}'_{12} \\ \bar{Z}'_{21} & \bar{Z}'_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{R}'_1 \\ \mathcal{R}'_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{Z}''_{11} & \bar{Z}''_{12} \\ \bar{Z}''_{21} & \bar{Z}''_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{R}''_1 \\ \mathcal{R}''_2 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \bar{Z}'_{11} + \bar{Z}''_{11} & \bar{Z}'_{12} + \bar{Z}''_{12} \\ \bar{Z}'_{21} + \bar{Z}''_{21} & \bar{Z}'_{22} + \bar{Z}''_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{R}'_1 \\ \mathcal{R}'_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\text{или } \mathcal{U} = [\bar{Z}' + \bar{Z}''] \mathcal{R}.$$

Итак, при последовательном соединении двух четырехполюсников матрица Z-параметров эквивалентного четырехполюсника равна сумме матриц Z-параметров отдельных четырехполюсников.

2. Параллельное соединение четырехполюсников (рис. 8-11).

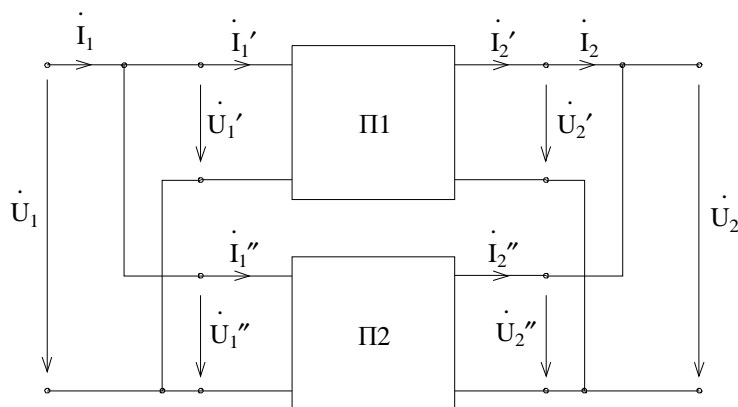


Рис. 8-11

Уравнения связи:

$$\begin{aligned}\dot{A}_1 &= \dot{A}_1 + \dot{A}_1'; \\ \dot{A}_2 &= \dot{A}_2 + \dot{A}_2'; \\ U_1 &= U_1' = U_1''; \\ U_2 &= U_2' = U_2''.\end{aligned}$$

Запишем уравнения четырехполюсников П1 и П2 в Y-параметрах:

для П1

$$\left. \begin{aligned}\dot{A}_1 &= Y_{11}' U_1' + Y_{12}' U_2' \\ \dot{A}_2 &= Y_{21}' U_1' + Y_{22}' U_2'\end{aligned} \right\}$$

Для П2

$$\left. \begin{aligned}\dot{A}_1 &= Y_{11}'' U_1'' + Y_{12}'' U_2'' \\ \dot{A}_2 &= Y_{21}'' U_1'' + Y_{22}'' U_2''\end{aligned} \right\}$$

Учтя уравнения связи:

$$\left. \begin{aligned}\dot{A}_1 &= (Y_{11}' + Y_{11}'') U_1 + (Y_{12}' + Y_{12}'') U_2 \\ \dot{A}_2 &= (Y_{21}' + Y_{21}'') U_1 + (Y_{22}' + Y_{22}'') U_2\end{aligned} \right\}$$

В матричной форме:

$$\begin{bmatrix} \dot{A}_1 \\ \dot{A}_2 \end{bmatrix} = [Y' + Y''] \begin{bmatrix} U_1' \\ U_2 \end{bmatrix}$$

Поскольку для всего четырехполюсника (рис. 8-11) справедливо уравнение $[I] = Y[U]$, то можно заключить, что $Y = Y' + Y''$.

Таким образом, матрица результирующего четырехполюсника равна сумме Y-матриц параллельно соединенных четырехполюсников.

⇒

3. Каскадное соединение (цепное соединение) (рис. 8-12).

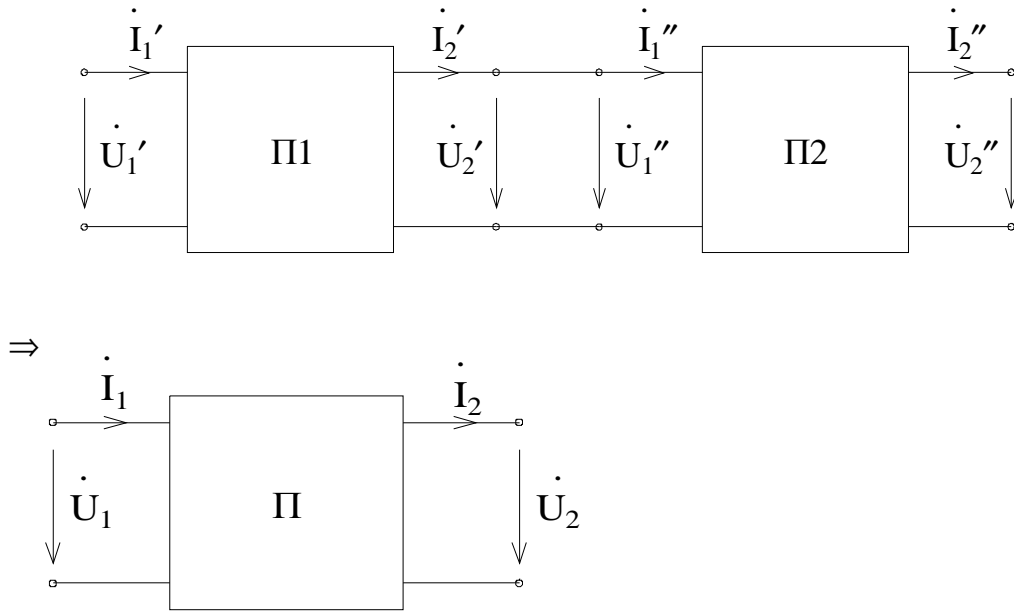


Рис. 8-12

Уравнение связи для этого соединения:

$$\mathcal{K}_2 = \mathcal{K}_1'; \quad \mathcal{U}_2' = \mathcal{U}_1''.$$

Используя запись уравнений четырехполюсника в А-параметрах для четырехполюсника П1

$$\mathcal{U}_1' = A' \mathcal{U}_2' + B' \mathcal{K}_2;$$

$$\mathcal{K}_1' = C' \mathcal{U}_2' + D' \mathcal{K}_2;$$

для четырехполюсника П2

$$\mathcal{U}_1'' = A'' \mathcal{U}_2'' + B'' \mathcal{K}_2' = \mathcal{U}_2';$$

$$I_1'' = C'' \mathcal{U}_2'' + D'' I_2'' = I_2''.$$

Исключая внутренние переменные, получаем

$$\mathcal{U}_1 = A' \left(A'' \mathcal{U}_2'' + B'' \mathcal{K}_2' \right) + B' \left(C'' \mathcal{U}_2'' + D'' \mathcal{K}_2' \right);$$

$$\mathcal{K}_1 = C' \left(A'' \mathcal{U}_2'' + B'' \mathcal{K}_2' \right) + D' \left(C'' \mathcal{U}_2'' + D'' \mathcal{K}_2' \right);$$

или

$$\mathcal{U}_1 = \left(A'A'' + B'C'' \right) \mathcal{U}_2 + \left(A'B'' + B'D'' \right) \mathcal{K}_2;$$

$$\mathcal{K}_1 = \left(C'A'' + D'C'' \right) \mathcal{U}_2 + \left(C'B'' + D'D'' \right) \mathcal{K}_2;$$

откуда

$$\begin{aligned} A &= A'A'' + B'C''; \quad B = A'B'' + B'D''; \\ C &= C'A'' + D'C''; \quad D = C'B'' + D'D''. \end{aligned}$$

Учитывая матричную форму записи для исходных четырехполюсников в соответствии с уравнениями связи, имеем

$$\begin{pmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{I}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{U}_2' \\ \dot{I}_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{U}_2'' \\ \dot{I}_2'' \end{pmatrix}$$

Принимая во внимание

$$\begin{pmatrix} \dot{U}_2' \\ \dot{I}_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A'' & B'' \\ C'' & D'' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{U}_2'' \\ \dot{I}_2'' \end{pmatrix}$$

получаем

$$\begin{pmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{I}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A'' & B'' \\ C'' & D'' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{U}_2'' \\ \dot{I}_2'' \end{pmatrix}$$

Внешние переменные сложного четырехполюсника при каскадном соединении связаны следующим уравнением:

$$\begin{pmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{I}_1 \end{pmatrix} = \mathbf{A}'\mathbf{A}'' \begin{pmatrix} \dot{U}_2'' \\ \dot{I}_2'' \end{pmatrix}$$

Раскрывая произведение матриц, получаем значения А-параметров:

$$\mathbf{A}'\mathbf{A}'' = \begin{pmatrix} A'A'' + B'C'' & A'B'' + B'D'' \\ C'A'' + D'C'' & C'B'' + D'D'' \end{pmatrix}$$

Матрица А-параметров двух и более каскадно-соединенных четырехполюсников равна произведению матриц А-параметров отдельных четырехполюсников.

⇒

4. Смешанное последовательно-параллельное соединение (рис. 8-13).

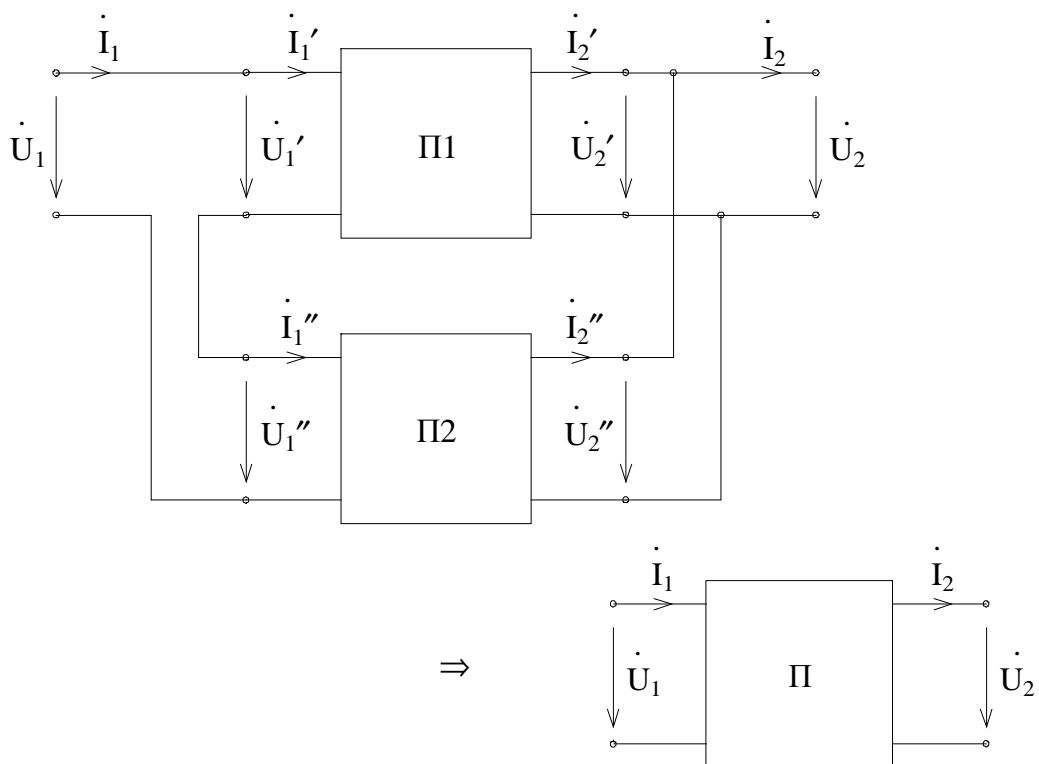


Рис. 8-13

Уравнения связи

$$\mathcal{U}_1 = \mathcal{U}'_1 + \mathcal{U}''_1,$$

$$\mathcal{U}_2 = \mathcal{U}'_2 = \mathcal{U}''_2,$$

$$\mathcal{R}_1 = \mathcal{R}'_1 = \mathcal{R}''_1,$$

$$\mathcal{R}_2 = \mathcal{R}'_2 + \mathcal{R}''_2,$$

Уравнения в Н-параметрах четырехполюсника П1

$$\begin{Bmatrix} \mathcal{U}'_1 \\ \mathcal{R}'_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} H'_{11} & H'_{12} \\ H'_{21} & H'_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathcal{R}_1 \\ \mathcal{U}_2 \end{Bmatrix},$$

четырёхполюсника П2

$$\begin{Bmatrix} \mathcal{U}''_1 \\ \mathcal{R}''_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} H''_{11} & H''_{12} \\ H''_{21} & H''_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathcal{R}_1 \\ \mathcal{U}''_2 \end{Bmatrix}.$$

Складывая эти уравнения, согласно уравнениям связи получаем

$$\begin{Bmatrix} \mathcal{U}_1 \\ \mathcal{R}_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathcal{U}'_1 \\ \mathcal{R}'_2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \mathcal{U}''_1 \\ \mathcal{R}''_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} H'_{11} + H''_{11} & H'_{12} + H''_{12} \\ H'_{21} + H''_{21} & H'_{22} + H''_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathcal{R}_1 \\ \mathcal{U}_2 \end{Bmatrix}.$$

При смешанном соединении четырехполюсников матрица Н-параметров равна сумме матриц Н-параметров исходных четырехполюсников.

При параллельно-последовательном соединении четырехполюсников используется система G-параметров.

Заметим еще раз, что все вышеизложенное справедливо, если удовлетворяются уравнения связи, т.е. четырехполюсники регулярны.

Каскадные соединения всегда регулярны.

Рассмотрим несколько примеров формирования уравнений четырехполюсников:

1. Одноэлементный (последовательный) четырехполюсник (рис.8-14).

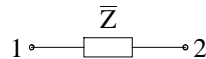


Рис. 8-14

На основе рассмотрения режимов холостого хода и короткого замыкания получим соотношения:

$$A = \frac{\mathcal{U}_{1X}}{\mathcal{U}_{2X}} = 1, \quad C = \frac{\mathcal{R}_{1X}}{\mathcal{U}_{2X}} = 0,$$

$$B = \frac{U_{1K}}{I_{2K}} = \bar{Z}, \quad D = \frac{U_{1K}}{I_{2K}} = 1.$$

В этом случае матрица А-параметров запишется:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & \bar{Z} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

2. Для четырехполюсника рис. 8-15

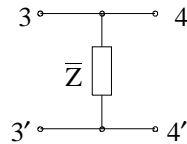


Рис. 8-15

матрица А-параметров:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{\bar{Z}} & 1 \end{bmatrix}$$

3. Составим Г-образный четырехполюсник, соединив каскадно два предыдущие четырехполюсника (рис. 8-16).

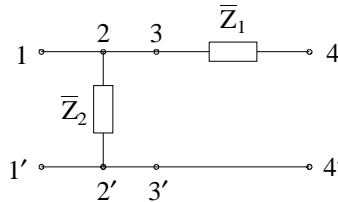


Рис. 8-16

Матрица А-параметров результирующего четырехполюсника

$$\mathbf{A} = \left\| \begin{array}{cc} 1 & 0 \\ \frac{1}{\bar{Z}_2} & 1 \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{cc} 1 & \bar{Z}_1 \\ 0 & 1 \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{cc} 1 & \bar{Z}_1 \\ \frac{1}{\bar{Z}_2} & 1 + \frac{\bar{Z}_1}{\bar{Z}_2} \end{array} \right\|$$

4. Присоединим каскадно еще один одноэлементный четырехполюсник, тогда получим схему рис. 8-17.

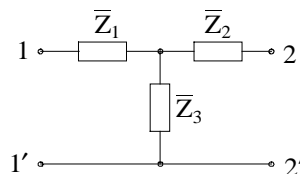


Рис. 8-17

А-матрица результирующего Т-образного четырехполюсника

$$\mathbf{A} = \left\| \begin{array}{cc} 1 & \bar{Z}_1 \\ 0 & 1 \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{cc} 1 & \bar{Z}_2 \\ \frac{1}{\bar{Z}_3} & 1 + \frac{\bar{Z}_2}{\bar{Z}_3} \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{cc} 1 + \frac{\bar{Z}_1}{\bar{Z}_3} & \bar{Z}_2 + \frac{\bar{Z}_1 \bar{Z}_2}{\bar{Z}_3} + \bar{Z}_1 \\ \frac{1}{\bar{Z}_3} & 1 + \frac{\bar{Z}_2}{\bar{Z}_3} \end{array} \right\|$$

5. Аналогично можно получить А-матрицу П-образного четырехполюсника, соединив каскадно четырехполюсники рис. 8-14 и рис. 8-15, тогда имеем схему рис. 8-18.

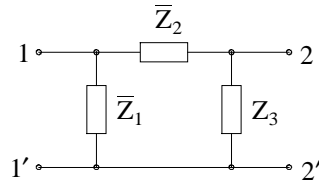


Рис. 8-18

А-матрица результирующего П-образного четырехполюсника

$$\mathbf{A} = \left\| \begin{array}{cc} 1 & \bar{Z}_2 \\ \frac{1}{\bar{Z}_1} & 1 + \frac{\bar{Z}_2}{\bar{Z}_1} \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{cc} 1 & 0 \\ \frac{1}{\bar{Z}_3} & 1 + \frac{\bar{Z}_2}{\bar{Z}_3} \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{cc} 1 + \frac{\bar{Z}_2}{\bar{Z}_3} & -\bar{Z}_2 \\ \frac{1}{\bar{Z}_1} + \frac{1}{\bar{Z}_3} + \frac{\bar{Z}_2}{\bar{Z}_1 \bar{Z}_3} & 1 + \frac{\bar{Z}_2}{\bar{Z}_1} \end{array} \right\|$$

Те же самые результаты можно получить, исследуя общий четырехполюсник в режимах холостого хода и короткого замыкания.

8.5. Активный четырехполюсник

Активным называют четырехполюсник, содержащий источники электрической энергии, причем их действия взаимно не компенсируются внутри четырехполюсника.

На рис. 8-19 изображен такой четырехполюсник. Его характерной особенностью является то, что при отсутствии внешних источников на входных и выходных зажимах будут не нулевые напряжения \dot{U}_{1X} и \dot{U}_{2X} .

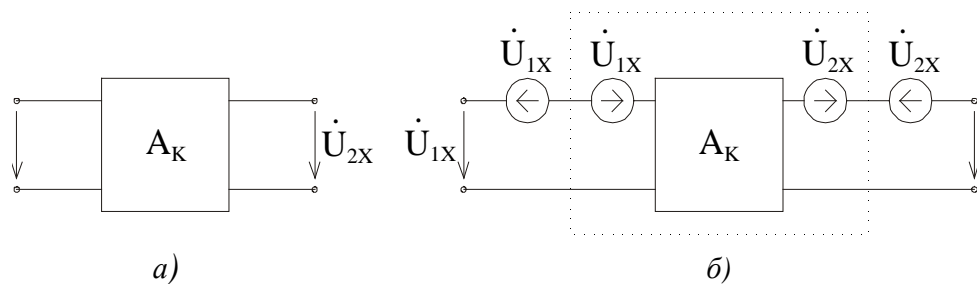


Рис. 8-19

Очевидно, что этот четырехполюсник можно заменить эквивалентным, если на входе и выходе включить соответственно по паре одинаковых источников ЭДС \mathcal{U}_{1X} и \mathcal{U}_{2X} , направленных встречно, как показано на рис. 8-19,б. При соответствующем выборе направлений, пара напряжений \mathcal{U}_{1X} и \mathcal{U}_{2X} уравнивают внутренние источники ЭДС, поэтому часть четырехполюсника, обведенная на рис. 8-19, б пунктирной линией, может быть заменена пассивным четырехполюсником, т.е. получим пассивный четырехполюсник, эквивалентный исходному, если на входе его включены соответственно источники \mathcal{U}_{1X} и \mathcal{U}_{2X} (рис. 8-20).

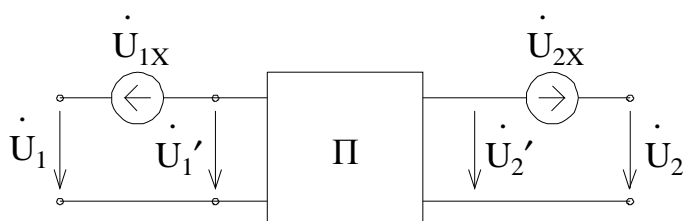


Рис. 8-20

Теорему об активном четырехполюснике можно сформулировать:

Активный четырехполюсник можно заменить пассивным четырехполюсником, который получают из данного путем удаления всех источников с сохранением их внутренних сопротивлений, с введенными во входную и выходную цепи дополнительными источниками. ЭДС последних равны напряжению на разомкнутых зажимах данного активного четырехполюсника.

Из схемы рис. 8-20 следует, что

$$\mathcal{U}_1' = \bar{Z}_{11} \mathcal{I}_1 + \bar{Z}_{12} \mathcal{I}_2,$$

$$\mathcal{U}_2' = \bar{Z}_{21} \mathcal{I}_1 + \bar{Z}_{22} \mathcal{I}_2,$$

где

$$\mathcal{U}_1' = \mathcal{U}_1 - \mathcal{U}_{1X}, \quad \mathcal{U}_2' = \mathcal{U}_2 - \mathcal{U}_{2X}.$$

Уравнения активного четырехполюсника в Z-параметрах с учетом \mathcal{U}_{1X} и \mathcal{U}_{2X} :

$$\mathcal{U}_1 = \bar{Z}_{11} \mathcal{I}_1 + \bar{Z}_{12} \mathcal{I}_2 + \mathcal{U}_{1X}$$

$$\mathcal{U}_2 = \bar{Z}_{21} \mathcal{I}_1 + \bar{Z}_{22} \mathcal{I}_2 + \mathcal{U}_{2X}.$$

8.6. Характеристические параметры четырехполюсника

На практике четырехполюсники используют для анализа передачи мощности от источника к нагрузке.

Для упрощения анализа согласованности четырехполюсников вводятся характеристические параметры.

Рассмотрим входное сопротивление четырехполюсника, нагруженного на сопротивление Z_2 (рис. 8-21).

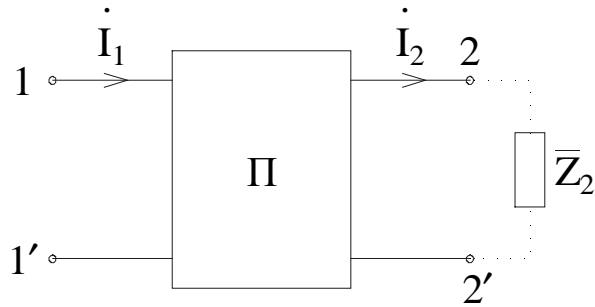


Рис. 8-21

$$\bar{Z}_{BX} = \frac{\mathcal{U}_1}{\mathcal{I}_1} = \frac{A\mathcal{U}_2 + B\mathcal{I}_2}{C\mathcal{U}_2 + D\mathcal{I}_2}$$

Если учесть, что $\bar{Z}_2 = \frac{\mathcal{U}_2}{\mathcal{I}_2}$, то

$$\bar{Z}_{1BX} = \frac{A\bar{Z}_2 + B}{C\bar{Z}_2 + D}.$$

Если на вход четырехполюсника включить нагрузку \bar{Z}_1 , изменить направление передачи мощности, внешнее напряжение \mathcal{U}_2 подать с вторичных зажимов, как показано на рис. 8-22.

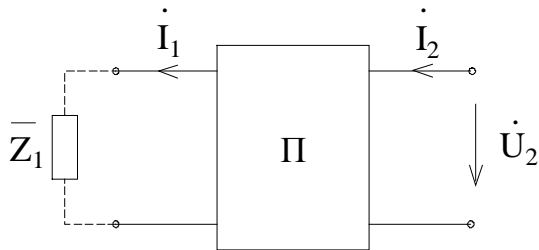


Рис. 8-22

С учетом указанных направлений токов и напряжений

$$\mathcal{U}_2 = D\mathcal{U}_1 + B\mathcal{I}_1$$

$$\mathcal{I}_2 = C\mathcal{U}_1 + A\mathcal{I}_1$$

При обратном питании получаем, что коэффициенты А и D основной системы уравнений взаимно заменяются, откуда

$$\bar{Z}_{2BX} = \frac{D\bar{Z}_1 + B}{C\bar{Z}_1 + A}.$$

Выберем сопротивления \bar{Z}_{1C} и \bar{Z}_{2C} с величинами:

$$\bar{Z}_{1BX} = \bar{Z}_{1C}, \text{ если } \bar{Z}_2 = \bar{Z}_{2C},$$

$$\bar{Z}_{2BX} = \bar{Z}_{2C}, \text{ если } \bar{Z}_1 = \bar{Z}_{1C}.$$

Входное сопротивление четырехполюсника \bar{Z}_{1BX} , нагруженного сопротивлением \bar{Z}_{2C} , равно \bar{Z}_{1C} (рис. 8-23).

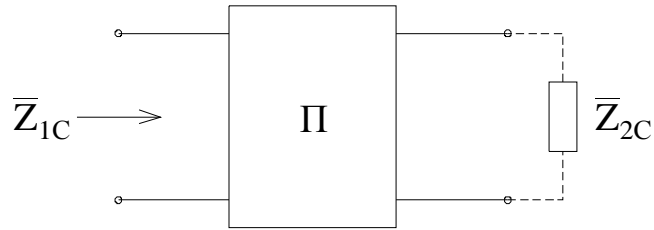


Рис. 8-23

и входное сопротивление \bar{Z}_{2BX} равно \bar{Z}_{2C} , если четырехполюсник при обратном питании нагружен сопротивлением \bar{Z}_{1C} (рис. 8-24).

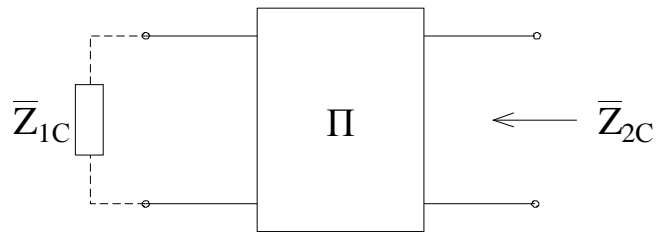


Рис. 8-24

Указанные сопротивления называются характеристическими сопротивлениями.

Условие, когда четырехполюсник нагружен характеристическим сопротивлением, называют условием согласованной нагрузки.

$$\left. \begin{aligned} \bar{Z}_{1C} &= \frac{A\bar{Z}_{2C} + B}{C\bar{Z}_{2C} + D} \\ \bar{Z}_{2C} &= \frac{D\bar{Z}_{1C} + B}{C\bar{Z}_{1C} + A} \end{aligned} \right\}$$

Решая совместно эти уравнения, получаем

$$\bar{Z}_{1C} = \frac{AD\bar{Z}_{1C} + AB + BC\bar{Z}_{1C} + AB}{CD\bar{Z}_{1C} + CB + CD\bar{Z}_{1C} + AD}.$$

После преобразования

$$\bar{Z}_{1C} = \sqrt{\frac{AB}{CD}}; \quad \bar{Z}_{2C} = \sqrt{\frac{DB}{CA}}.$$

Введем третий параметр \mathcal{g} , выражаемый по условию $chg = \sqrt{AD}$, где ch - гиперболический косинус.

Из тригонометрии известно, что $ch^2 g - sh^2 g = 1$, следовательно, $shg = \sqrt{BC}$ - гиперболический синус.

Параметр g в общем случае комплексный, его можно представить в виде:

$$g = a + jb,$$

где

g - мера передачи четырехполюсника;

a - собственное затухание четырехполюсника;

b - коэффициент фазы.

Из выражений для \bar{Z}_{1C} и \bar{Z}_{2C} можно получить

$$\frac{\bar{Z}_{1C}}{\bar{Z}_{2C}} = \frac{A}{D}; \quad \bar{Z}_{1C} \bar{Z}_{2C} = \frac{B}{C}.$$

Умножая первое равенство на chg , а второе на shg , получаем

$$A = \sqrt{\frac{\bar{Z}_{1C}}{\bar{Z}_{2C}}} chg \quad \text{и} \quad B = \sqrt{\frac{\bar{Z}_{1C} \bar{Z}_{2C}}{1}} shg.$$

Аналогично

$$D = \sqrt{\frac{\bar{Z}_{2C}}{\bar{Z}_{1C}}} chg \quad \text{и} \quad C = \frac{1}{\sqrt{\bar{Z}_{1C} \bar{Z}_{2C}}} shg.$$

Уравнения четырехполюсника запишем в гиперболической форме:

$$\begin{cases} \mathcal{U}_1 = \sqrt{\frac{\bar{Z}_{1C}}{\bar{Z}_{2C}}} \mathcal{U}_2 chg + \sqrt{\bar{Z}_{1C} \bar{Z}_{2C}} shg \mathcal{R}_2 \\ \mathcal{R}_1 = \sqrt{\frac{1}{\bar{Z}_{1C} \bar{Z}_{2C}}} \mathcal{U}_2 shg + \sqrt{\frac{\bar{Z}_{2C}}{\bar{Z}_{1C}}} chg \mathcal{R}_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathcal{U}_1 = \sqrt{\frac{\bar{Z}_{1C}}{\bar{Z}_{2C}}} (\mathcal{U}_2 chg + \bar{Z}_{2C} \mathcal{R}_2 shg) \\ \mathcal{R}_1 = \sqrt{\frac{\bar{Z}_{2C}}{\bar{Z}_{1C}}} \left(\frac{1}{\bar{Z}_{2C}} \mathcal{U}_2 shg + \mathcal{R}_2 chg \right) \end{cases}$$

При согласованной нагрузке $\bar{Z}_{2C} \mathcal{R}_2 = \mathcal{U}_2$, $\frac{\mathcal{U}_2}{\bar{Z}_{2C}} = \mathcal{R}_2$.

Следовательно,

$$\mathcal{U}_1 = \sqrt{\frac{\bar{Z}_{1C}}{\bar{Z}_{1C}}} U_2 (chg + shg) = \sqrt{\frac{\bar{Z}_{1C}}{\bar{Z}_{2C}}} U_2 e^g,$$

$$\mathcal{R}_1 = \sqrt{\frac{\bar{Z}_{2C}}{\bar{Z}_{1C}}} \mathcal{R}_2 e^g.$$

При согласованно подобранной нагрузке найдем отношение амплитуд

$$\frac{U_1}{U_2} = \sqrt{\frac{\bar{Z}_{1C}}{\bar{Z}_{2C}}} e^a ; \quad \frac{I_1}{I_2} = \sqrt{\frac{\bar{Z}_{2C}}{\bar{Z}_{1C}}} e^a ,$$

где e^a - коэффициент амплитуд.

Если углы комплексных сопротивлений \bar{Z}_{1C} и \bar{Z}_{2C} обозначить через j_{1C} и j_{2C} , то сдвиг фаз между напряжениями входа и выхода равен $B + \frac{1}{2}(j_{1C} - j_{2C})$. Сдвиг фаз между токами $B + \frac{1}{2}(j_{2C} - j_{1C})$.

При согласованной нагрузке

$$\frac{U_1 \bar{K}_1}{U_2 \bar{K}_2} = e^{2g} \quad \text{и} \quad g = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{U_1 \bar{K}_1}{U_2 \bar{K}_2} \right).$$

Для симметричного четырехполюсника $\bar{Z}_{1C} = \bar{Z}_{2C}$; откуда $U_1 = U_2 e^g$ и $\bar{K}_1 = \bar{K}_2 e^g$.

Коэффициент амплитуд

$$e^a = \frac{U_1}{U_2} \quad \text{или} \quad \frac{I_1}{I_2}.$$

Определим затухание четырехполюсника

$$a = \ln \frac{U_1}{U_2} = \ln \frac{I_1}{I_2}.$$

Затуханию в один непер соответствует уменьшение амплитуды (и действующего значения) в $e=2,718$ раза, так как

$$\ln \frac{U_1}{U_2} = 1 \quad , \quad \frac{U_1}{U_2} = 2,718.$$

В радиотехнике существует другая единица затухания. Если полная мощность на выходе в 10 раз меньше входной, то затухание равно одному белу (1 Б), если в 100 раз меньше, то 2 Б и т.д.

$$a_{\text{Б}} = \lg \frac{S_1}{S_2} = \lg \frac{U_1 I_1}{U_2 I_2}.$$

В случае согласованно нагруженного симметричного четырехполюсника

$$a_{\text{Б}} = \lg \left(\frac{U_1}{U_2} \right)^2 = 2 \lg \frac{U_1}{U_2} = 2 \lg \frac{I_1}{I_2}.$$

На практике чаще применяют децибел, единицу в 10 раз меньше.

$$a_{\text{дБ}} = 20 \lg \frac{I_1}{I_2} ; \quad \frac{I_1}{I_2} = 10^{\frac{a}{20}}$$

при

$$a_{\text{дБ}} = 1, \quad \frac{I_1}{I_2} = 10^{\frac{1}{20}} = 1,12,$$

$$a_{\partial B} = 20 \lg \frac{U_1}{U_2} = 20 \lg e^a = 20 a \lg e = 20 \cdot 0,4343 a = 8,686 a \text{ Hn}$$

$$\left. \begin{aligned} 1 \text{ Hn} &= 8,686 \partial B \\ 1 \partial B &= 0,115 \text{ Hn} \end{aligned} \right\}$$

8.7. Круговые диаграммы

При изменении одного из параметров цепи искомые величины тока, напряжения $\cos \varphi$, P , Q и т.д. можно выразить графически.

Пусть в схеме (рис. 8-25) индуктивность $X_L = \text{const}$, а сопротивление $R = \text{var}$.

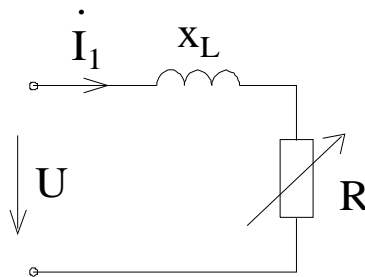


Рис. 8-25

Уравнение второго закона Кирхгофа:

$$\dot{U} = \dot{I} R + j X_L \dot{I}$$

Разделим $j X_L$ обе части уравнения:

$$\frac{\dot{U}}{j X_L} = \frac{R}{j X_L} \dot{I} + \dot{I} - j \frac{\dot{U}}{X_L} = -j \frac{R}{X_L} \dot{I} + \dot{I}$$

При $R = 0$ ток (называемый током короткого замыкания) равен:

$$\dot{I}_K = \frac{\dot{U}}{j X_L} = -j \frac{\dot{U}}{X_L}$$

Входной ток через ток короткого замыкания выразится:

$$\dot{I} = \frac{\dot{I}_K}{1 - j \frac{R}{X_L}}$$

Ток короткого замыкания:

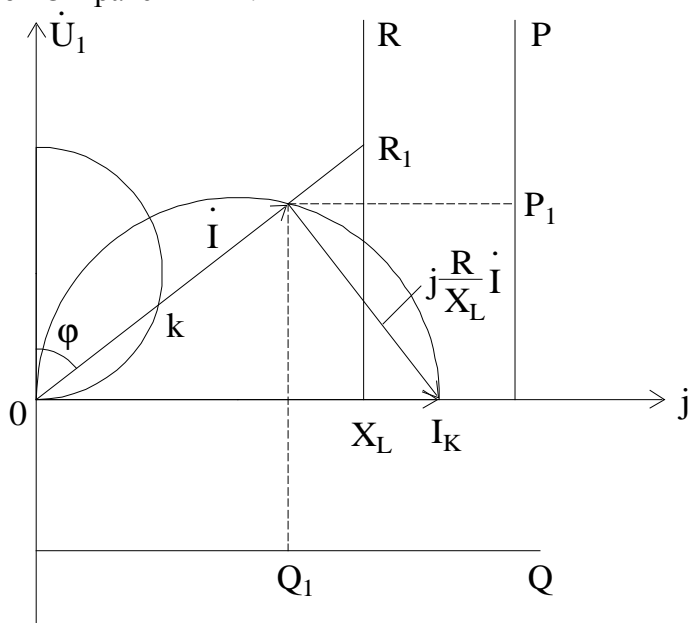
$$\dot{I}_K = \dot{I} - j \frac{R}{X_L} \dot{I}$$

Из приведенной формулы видно, что вектор тока \dot{I}_K не зависит от R и равен сумме двух взаимно перпендикулярных векторов. Это может быть только в том случае, когда конец вектора \dot{I} описывает полуокружность, диаметром которой является вектор \dot{I}_K .

Изобразим вектор \dot{U} (рис.8-26), перпендикулярно к нему (с отставанием на $\frac{\pi}{2}$) строим вектор \dot{I}_K . Принимая вектор \dot{I}_K за диаметр, опишем полуокружность, которая будет геометрическим местом конца вектора \dot{I} при изменении R от 0 до ∞ . По направлению

$$j = \operatorname{arctg} \frac{X_L}{R_1}.$$
$$P = UI \cos j$$

Если из точки О провести полуокружность на вертикальной линии (диаметром равным l), то отрезок ОК равен $\cos j$.


$$I_K = \frac{U}{jX_L}$$

Для схемы РС (рис. 8-27,а) круговая диаграмма представлена на рис.8-27,б.

Уравнение цепи

$$U = -PjX_C + R.$$

$$I_K = \frac{U}{-jX_C}$$
$$I_K = I_+ j \frac{R}{X_C} I_-$$
$$I_{-} = \frac{I_K}{1 + j \frac{R}{X_C}}$$

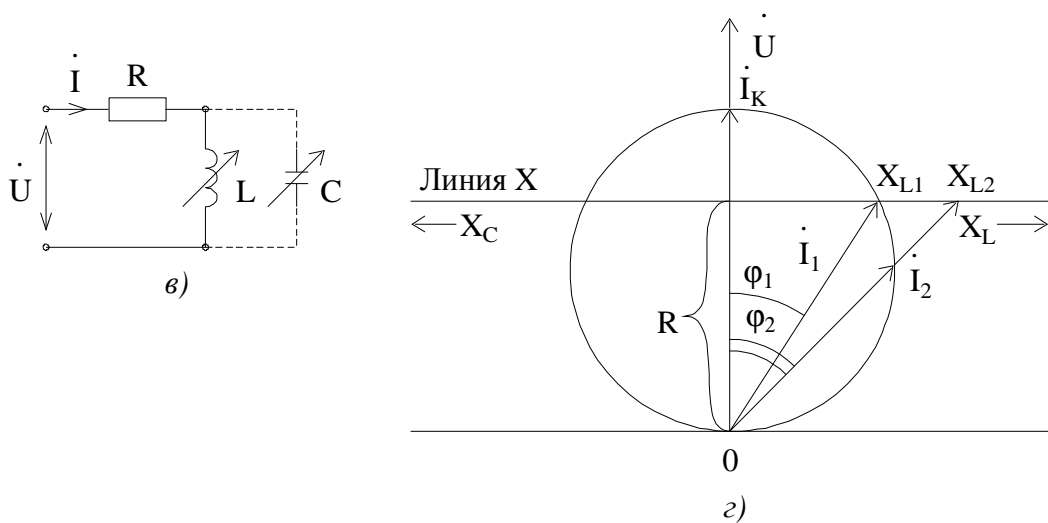
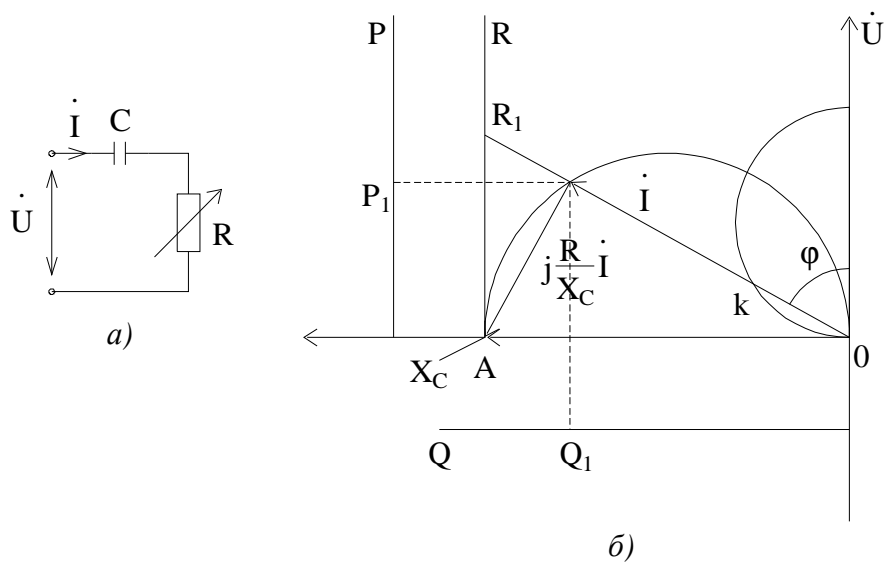


Рис. 8-27

При изменении реактивного сопротивления от 0 до (рис. 8-27,в) (что возможно при изменении C или L) из уравнения

$$\dot{U} = R\dot{I} + jX_L\dot{I}$$

получим

$$\frac{\dot{U}}{R} = \dot{I} + j\frac{X_L}{R}\dot{I}$$

или, обозначив $\frac{U}{R} = I_K$, имеем

$$\dot{I}_K = \dot{I} + j\frac{X_L}{R}\dot{I};$$

$$\dot{I} = \frac{\dot{I}_K}{1 + j\frac{X_L}{R}}.$$

Учитывая, что отрицательные X_L , равнозначны X_C , конец вектора \dot{I} при всех возможных изменениях X от $-\infty$ до $+\infty$ опишет окружность, построенную на \dot{I}_K , как на диаметре (рис. 8-27,г), причем \dot{I}_K направлен параллельно \dot{U} . Откладывая также в произвольном масштабе отрезок R и проводя перпендикулярно ему линию X при заданных значениях X_1 или X_2 , получаем ток \dot{I}_1 или \dot{I}_2 . Рассмотрим более сложную схему (рис. 8-28). Предположим, что при постоянных \bar{Z}_1 и \bar{Z}_2 меняется R .

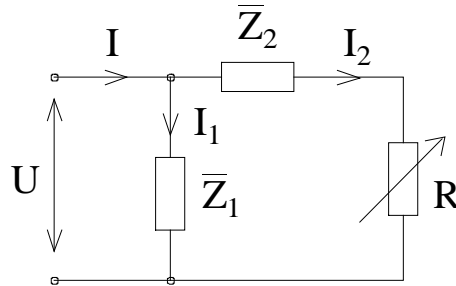


Рис. 8-28

В первой ветви протекает ток $\dot{I}_1 = \frac{\dot{U}}{\bar{Z}_1}$. Поскольку $\bar{Z}_1 = R_1 + jX_1$, то угол $\varphi_1 = \arctg \frac{X_1}{R_1}$. Во второй ветви протекает ток \dot{I}_2 , который меняется с изменением сопротивления R . Так же, как и в предыдущих случаях, найдем ток короткого замыкания

$$\dot{I}_{2K} = \frac{\dot{U}}{\bar{Z}_2}$$

и выразим через него ток \dot{I}_2

$$\dot{I}_2 = \frac{\dot{I}_{2K}}{1 + \frac{R}{\bar{Z}_2}}$$

Направление тока \dot{I}_{2K} по отношению к U (вертикали) определяется комплексом

$$\bar{Z}_2 = R_2 + jX_2.$$

Угол $\varphi_{2K} = \arctg \frac{X_2}{R_2}$ составляет $0 \leq \varphi_{2K} \leq \frac{\pi}{2}$.

Используя полученные данные, построим круговую диаграмму (рис. 8-29).

4. Установить центр окружности, который находится в точке пересечения перпендикуляра, проведенного из середины вектора $(\dot{I}_{1K} - \dot{I}_{1XX}) = \dot{I}_{2K}$, и перпендикуляра, восстановленного из конца вектора \dot{I}_{1X} к линии параметра R.

Сформулируем в более общем виде задачу для четырехполюсников.

Дан четырехполюсник с нагрузкой $\bar{Z} = Ze^{j\varphi}$ (рис. 8-30). Не рассматривая причину, определить изменение тока на выходе четырехполюсника при изменении величины сопротивления \bar{Z} ($j = const$).

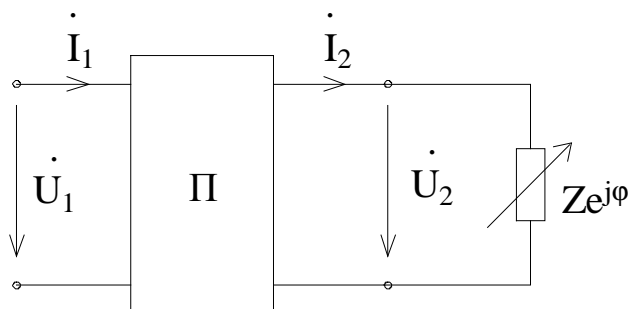


Рис. 8-30

Воспользуемся уравнениями четырехполюсника в А-параметрах

$$\dot{U}_1 = A\dot{U}_2 + B\dot{I}_2; \quad \dot{I}_1 = C\dot{U}_2 + D\dot{I}_2$$

Для нагрузки $\dot{U}_2 = \dot{I}_2 Z e^{j\varphi}$ из первого уравнения находим $\dot{U}_1 = A Z e^{j\varphi} \dot{I}_2 + B\dot{I}_2$, откуда

$$\dot{I}_2 = \frac{\dot{U}_1}{B + A Z e^{j\varphi}}.$$

Подставим это уравнение в исходные уравнения:

$$\dot{I}_1 = (C Z e^{j\varphi} + D) \frac{\dot{U}_1}{B + A Z e^{j\varphi}} = \dot{U}_1 \frac{C Z e^{j\varphi} + D + \frac{BC}{A} - \frac{BC}{A}}{B + A Z e^{j\varphi}}.$$

Окончательно

$$\dot{I}_1 = \dot{U}_1 \left[\frac{C}{A} + \frac{\frac{1}{AB}}{1 + Z e^{j\varphi} \frac{A}{B}} \right].$$

На основании режима холостого хода ($Z = \infty$) при $U_{X1} = U_1$ находим

$$\dot{U}_{X1} = \dot{U}_1 \frac{C}{A}.$$

В случае короткого замыкания ($Z=0$)

$$\frac{\dot{U}_1}{AB} = \dot{I}_K - \dot{I}_{1X},$$

тогда

$$\dot{I}_1 = \dot{I}_X + \frac{\dot{I}_{1K} - \dot{I}_X}{1 + Z e^{j\frac{A}{B}}}$$

Соотношение $\frac{B}{A}$, исходя из уравнения $\dot{U}_1 = A\dot{U}_2 + B\dot{I}_2$, можно представить как сопротивление выхода при коротком замыкании на входе ($\dot{U}_1 = 0$):

$$\frac{B}{A} = -\frac{\dot{U}_{2K}}{-\dot{I}_{2K}} = Z_{2K} e^{j\varphi_{2K}}$$

Таким образом выражение для входного тока при изменении Z :

$$\dot{I}_1 = \dot{I}_{1X} + \frac{\dot{I}_{1K} - \dot{I}_{1X}}{1 + \frac{Z}{Z_{2K}} e^{-j(\varphi_{2K} - \varphi)}}$$

Порядок построения круговой диаграммы четырехполюсника (рис.8-31) определяется этой формулой.

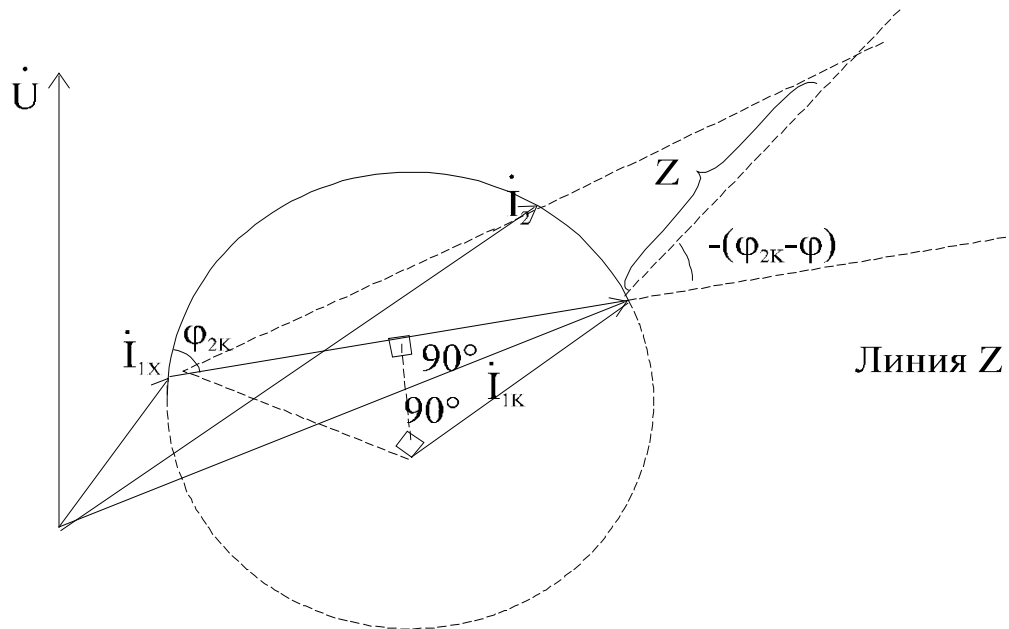


Рис. 8-31

1. Комплексы \dot{I}_{1X} и \dot{I}_{1K} строить относительно \dot{U} .
2. Построить вектор, равный $\dot{I}_{1K} - \dot{I}_{1X}$.
3. Найти фазу \bar{Z}_{2K} и под углом $(-\varphi_{2K} + \varphi)$ провести линию переменного параметра Z .
4. Определить центр окружности в точке пересечения перпендикуляра, проведенного к середине вектора $(\dot{I}_{1K} - \dot{I}_{1X})$, и перпендикуляра к линии Z , восстановленного из конца \dot{I}_{1X} .

Пример. Анализ фазовращателя.

Схема фазовращателя представлена на рис. 8-32.

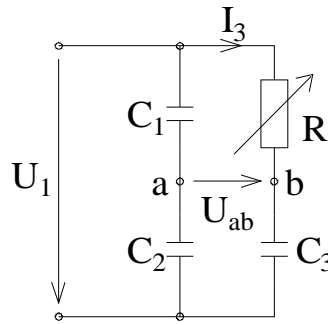


Рис. 8-32

На этой схеме $C_1 = C_2$ и переменное сопротивление изменяется от 0 до ∞ , U_1 - синусоидальное напряжение.

Требуется определить: как при таком изменении R будет меняться напряжение U_{ab} .

Для этого воспользуемся построением круговых диаграмм (рис.8-33).

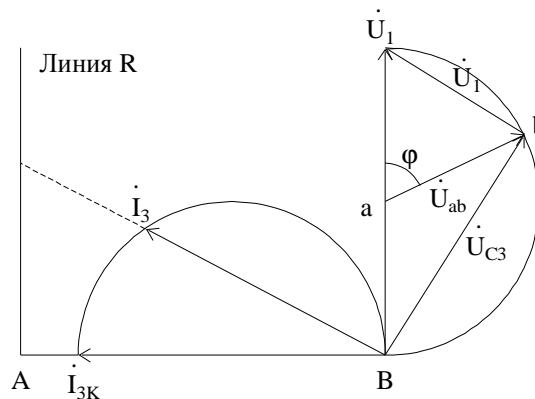


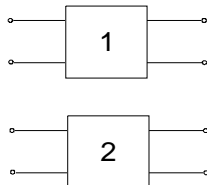
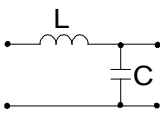
Рис. 8-33

Проведем вектор \dot{U}_1 и построим круговую диаграмму для тока \dot{I}_3 . Для этого построим \dot{I}_{3K} - ток при $R=0$. На нем как на диаметре построим полуокружность, по которой будет скользить конец вектора \dot{I}_3 . Отложив отрезок АВ, равный $X_{C3} = \frac{1}{\omega C_3}$, из точки А можно провести линию переменного сопротивления (в масштабе X_3). Напряжение \dot{U}_1 будет равно сумме двух взаимно перпендикулярных напряжений \dot{U}_{C3} и \dot{U}_R , причем \dot{U}_{C3} отстает от тока \dot{I}_3 на угол $\frac{\pi}{2}$. Это означает, что конец вектора \dot{U}_{C3} (точка b) скользит по полуокружности. В свою очередь точке «а» схемы соответствует на векторной диаграмме точка, делящая \dot{U}_1 пополам, т.к. $C_1 = C_2$. Таким образом, мы получили, что напряжение \dot{U}_{ab} будет постоянно по величине. Причем угол ϕ меняется от 0 до π при изменении R от 0 до ∞ .

Контрольные вопросы к теме 8

1. Что такое четырехполюсник?
2. Как экспериментально отличить пассивный четырехполюсник от активного?
3. Запишите все известные Вам формы уравнений четырехполюсников.
4. Каков физический смысл параметров четырехполюсников при различных формах уравнений?
5. Как записывается зависимость некоторых параметров четырехполюсника?
6. Как экспериментально определить параметры четырехполюсника на постоянном токе? На синусоидальном токе?
7. Как рассчитать параметры четырехполюсника при различных соединениях?
8. Что такое регулярное соединение?
9. Что такое характеристические параметры четырехполюсника?
10. Что такое затухание? В каких единицах выражается затухание?
11. Каковы условия согласования четырехполюсников?
12. Назовите порядок построения круговой диаграммы.

Контрольные задачи к теме 8

I	<p>1. Нарисовать схему измерения, включив необходимые приборы.</p> <p>2. Определить Z_{2KS}.</p> <p>3. Определить А-параметры четырехполюсника.</p> <p>4. Нарисовать эквивалентную схему четырехполюсника.</p> <p>В результате измерений получено:</p> $Z_{1XX} = 1410e^{-j45^0};$ $Z_{1KS} = 707e^{-j45^0};$ $Z_{2XX} = 1410e^{j45^0}.$
II	<p>Соединить четырехполюсники параллельно и найти параметры объединенного четырехполюсника. Известно, что соединение регулярно.</p> <div style="text-align: center;">  </div>
III	<p>Определить характеристические параметры четырехполюсника на частотах:</p> <p>а) $\omega = 10^4 \text{ сек}^{-1}$;</p> <p>б) $\omega = 10^4 \cdot \sqrt{3} \text{ сек}^{-1}$.</p> <div style="text-align: center;">  </div> <p>$L = 5 \text{ мГн}; C = 1 \text{ мкФ}.$</p>

Тема 9. Трехфазные электрические цепи

Трехфазные электрические цепи - это совокупность электрических цепей, в которых действуют три синусоидальные ЭДС одинаковой частоты, создаваемые одним источником, различающимся по фазе.

Эти системы получили самое широкое распространение. На их применении основано практически все энергоснабжение промышленных предприятий и быта. Такое распространение обусловлено их преимуществами перед однофазными системами электроснабжения, заключающимися в следующем:

- экономичность
- возможность получения двух номиналов напряжения
- постоянство вращающегося момента на валу генераторов и двигателей (уравновешенность)
- возможность создания вращающихся магнитных полей сравнительно простым способом
- упрощение фильтров в выпрямительных устройствах.

Следует обратить внимание на укоренившийся термин «фаза», который применяется не только как характеристика синусоидальной функции, но и обозначает все устройства, включенные в соответствующие участки цепи (фазовый выключатель, фазовый провод, фазовая обмотка и т.д.).

9.1. Образование трехфазных ЭДС и основные обозначения

Как известно из курса физики в рамке, вращающейся в равномерном магнитном поле с угловой скоростью ω индуцируется синусоидальная ЭДС. Аналогичная ЭДС возникает, если внутри катушки будет вращаться постоянный магнит. Если постоянный магнит будет вращаться внутри системы из трех одинаковых катушек, размещенных на магнитопроводе, сдвинутых одна относительно другой на угол $\frac{2}{3}\pi$, то в каждой из катушек возникнут переменные ЭДС разнящиеся по фазе на угол $\frac{2}{3}\pi$, соответствующий углу сдвига катушек в пространстве. Такое устройство и осциллограммы ЭДС показаны на

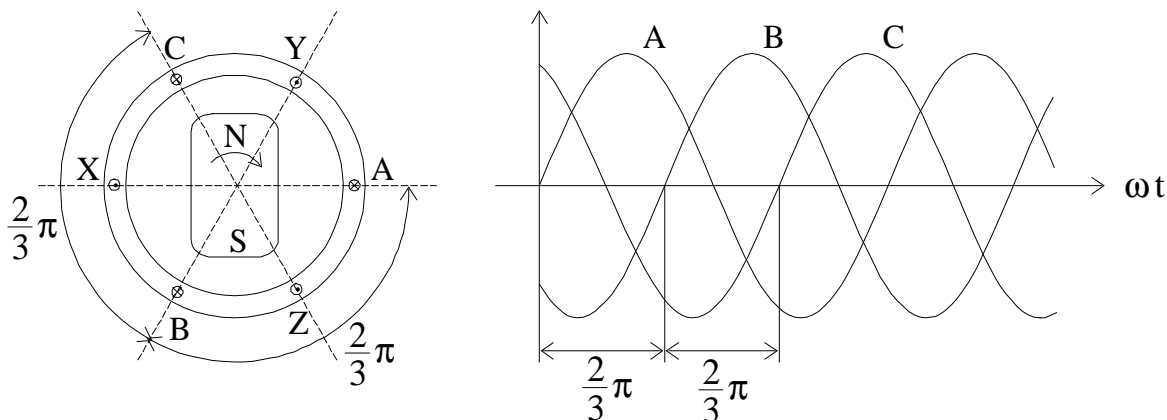


Рис. 9-1

Обычно начала обмоток разных фаз обозначаются А, В, С, а концы Х, Y, Z.

$$U_A = U_m \sin \omega t$$

$$U_B = U_m \sin \left(\omega t - \frac{2}{3} p \right)$$

$$U_C = U_m \sin \left(\omega t - \frac{4}{3} p \right) = U_m \sin \left(\omega t - \frac{2}{3} p \right)$$

В комплексной форме такую систему ЭДС можно записать:

$$\underline{E}_A = E e^{j0} = E$$

$$\underline{E}_B = E e^{-j \frac{2}{3} p}$$

$$\underline{E}_C = E e^{-j \frac{4}{3} p} = E e^{-j \frac{2}{3} p}$$

Векторная диаграмма изображена на рис. 9-2.

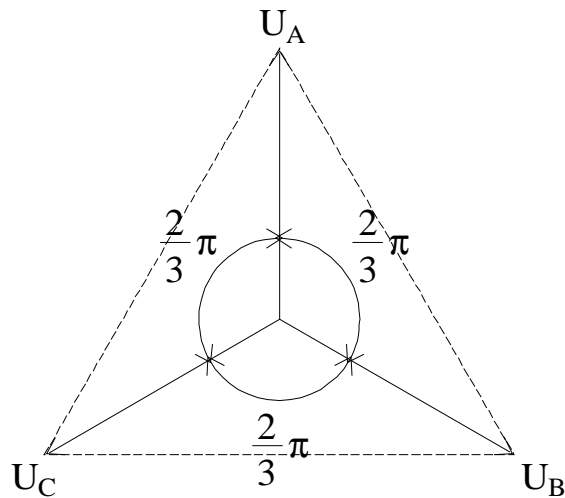


Рис. 9-2

При анализе трехфазных цепей часто пользуются оператором

$$a = e^{j \frac{2}{3} p} = -\frac{1}{2} + j \frac{\sqrt{3}}{2} .$$

Свойства оператора определяются очевидными соотношениями:

$$a^2 = -\frac{1}{2} - j \frac{\sqrt{3}}{2} = a^*$$

$$a^3 = 1$$

$$1 - a^2 = \sqrt{3} e^{j \frac{p}{6}}$$

$$a^2 - a = -\sqrt{3} j$$

$$a - 1 = \sqrt{3} e^{j \frac{5}{6} p}$$

$$1 + a + a^2 = 0 .$$

С помощью оператора a трехфазную систему можно записать:

$$\dot{U}_A = U; \dot{U}_B = U a^2; \dot{U}_C = U a$$

или

$$\dot{U}_A = \dot{U}_B a = \dot{U}_C a^2;$$

$$\dot{U}_A + \dot{U}_B + \dot{U}_C = 0.$$

В электрических машинах находит применение двухфазная система:

$$U_1 = U_m \sin \omega t$$

$$U_2 = U_m \sin \left(\omega t - \frac{\pi}{2} \right).$$

Векторная диаграмма изображена на рис. 9-3,а. Для создания мощных выпрямительных систем постоянного тока нашли применение 6-ти и 12-ти фазные системы, векторные диаграммы которых показаны на рис 9-3,б и в.

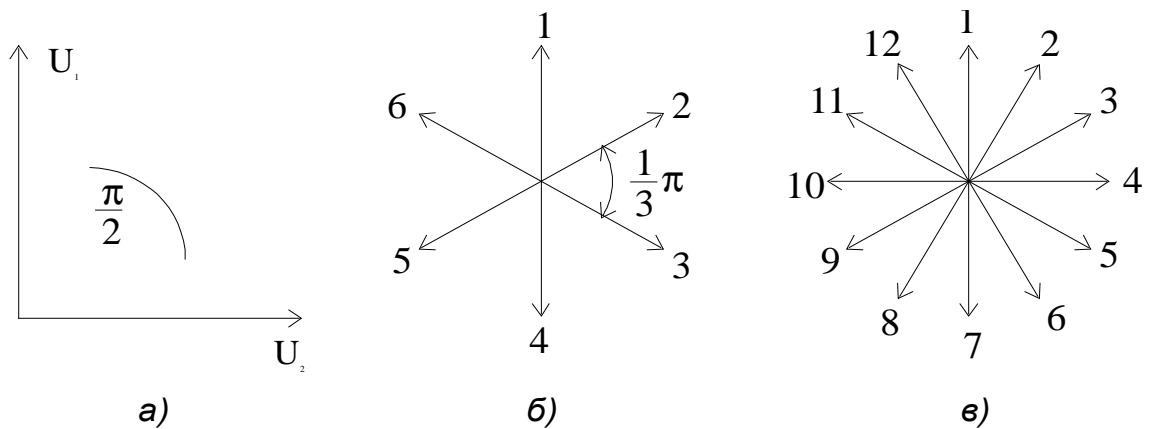


Рис. 9-3

6-ти и 12-ти фазные системы ЭДС образуются обычно статическими преобразователями (специальными трансформаторами) из трехфазных ЭДС.

9.2. Соединение трехфазной системы в звезду

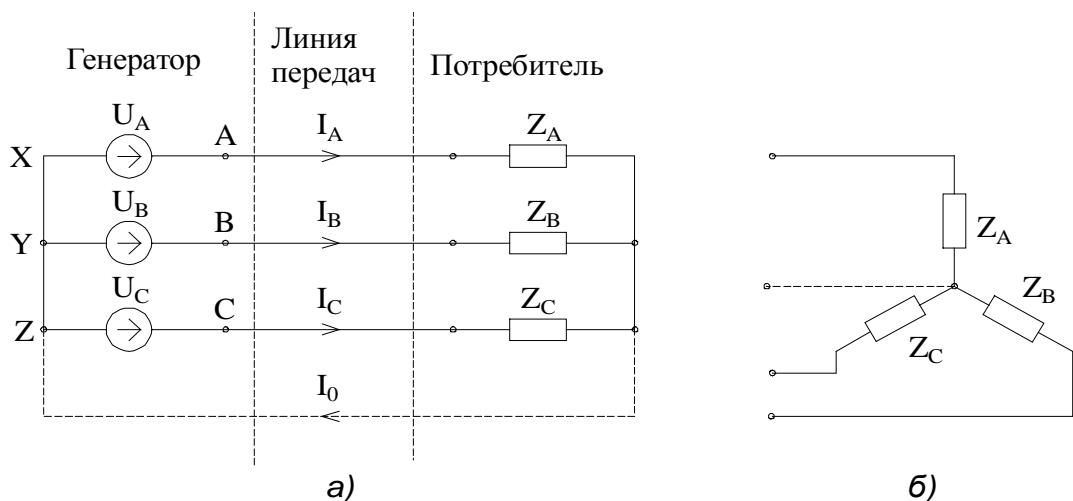


Рис. 9-4

Соединим концы катушек трехфазного генератора или соответствующие обмотки трансформатора в одну точку; так же соединим концы нагрузок как показано на рис. 9-4,а. Иногда схему изображают, как показано на рис. 9-4,б отсюда и происходит название «звезда».

При симметричной нагрузке, когда $\bar{Z}_A = \bar{Z}_B = \bar{Z}_C = \bar{Z}$ токи определяются:

$$\dot{I}_A = \frac{\dot{U}_A}{\bar{Z}} = \frac{U}{\bar{Z}}; \quad \dot{I}_B = \frac{\dot{U}_B}{\bar{Z}} = \frac{Ua^2}{\bar{Z}} = \dot{I}_A a^2; \quad \dot{I}_C = \frac{\dot{U}_C}{\bar{Z}} = \frac{Ua}{\bar{Z}} = \dot{I}_A a.$$

Значит токи образуют симметричную трехфазную систему токов.

Ток в общем (нейтральном проводе):

$$\dot{I}_0 = \dot{I}_A + \dot{I}_B + \dot{I}_C = I(1 + a + a^2) = 0 \quad (!).$$

В цепи провод, по которому ток не течет можно удалить. Получается очень своеобразная система передачи энергии, где от каждого «генератора» ЭДС энергия передается **одним** проводом. Таким образом, для передачи той же мощности экономия на проводах почти в два раза. Аналогичная экономия достигается при генерации и трансформации энергии и в электрических двигателях. Существенная экономия и предопределила широкое распространение трехфазных систем в энергоснабжении.

Нейтральный провод, обычно меньшего сечения, все же сохраняют для обеспечения равенства напряжений всех фаз при возможных несимметриях нагрузки. Напряжения между линейными проводами:

$$\dot{U}_{AB} = \dot{U}_A - \dot{U}_B = U(1 - a^2) = \sqrt{3}Ue^{j\frac{\pi}{6}}$$

$$\dot{U}_{BC} = \dot{U}_B - \dot{U}_C = U(a^2 - a) = -\sqrt{3}jU$$

$$\dot{U}_{CA} = \dot{U}_C - \dot{U}_A = U(a - 1) = \sqrt{3}Ue^{j\frac{5\pi}{6}}.$$

Эти напряжения так же образуют симметричную трехфазную систему. Напряжение фазы источника называют фазным напряжением (U_ϕ), а напряжение между линейными проводами - линейным напряжением (U_L).

По величине $U_L = \sqrt{3}U_\phi$; $I_L = I_\phi$.

Значит в одной и той же системе электроснабжения можно, при необходимости, использовать два напряжения с соотношением $\sqrt{3}$. Это соотношение и включено в стандартный ряд напряжений: 127, 220, 380, 660 В. Применяются системы 127/220 В; 220/380 В; 380/660 В.

При расчетах трехфазных цепей можно пользоваться всеми методами расчета цепей синусоидального тока. Однако удобно использовать некоторые специфические приемы. При расчете симметричных цепей при симметричных нагрузках расчет можно вести для одной фазы даже при отсутствии нейтрального провода. Для получения токов и напряжений в двух других фазах достаточно воспользоваться операторами a и a^2 .

При несимметричном режиме при учете сопротивления проводов получается расчетная схема, как показано на рис.9-5.

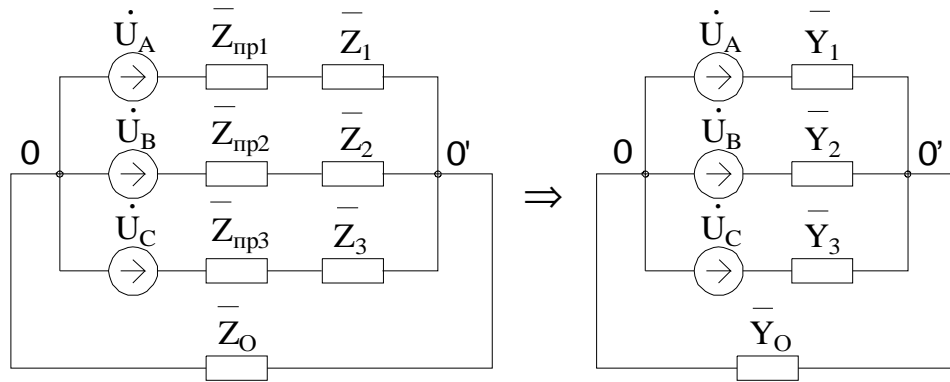


Рис. 9-5

Поскольку обычно несимметрия нагрузок практически не отражается на симметрии питающих напряжений (кроме аварийных режимов) в дальнейшем будем считать, что

$$\dot{U}_A = a \dot{U}_B = a^2 \dot{U}_C.$$

Применяя метод узловых потенциалов (метод двух узлов) получим напряжение между нейтральными точками:

$$U_{O'O} = \frac{\dot{U}_A \bar{Y}_A + \dot{U}_B \bar{Y}_B + \dot{U}_C \bar{Y}_C}{\bar{Y}_A + \bar{Y}_B + \bar{Y}_C + \bar{Y}_O}.$$

После этого легко определяются напряжения на каждой фазе нагрузки

$$\dot{U}_a = \dot{U}_A - \dot{U}_{O'O}; \quad \dot{U}_b = \dot{U}_B - \dot{U}_{O'O}; \quad \dot{U}_c = \dot{U}_C - \dot{U}_{O'O}.$$

Соответствующие фазовые токи

$$\dot{I}_A = \dot{U}_a \bar{Y}_a; \quad \dot{I}_B = \dot{U}_b \bar{Y}_b; \quad \dot{I}_C = \dot{U}_c \bar{Y}_c; \quad \dot{I}_O = U_{O'O} \bar{Y}_O.$$

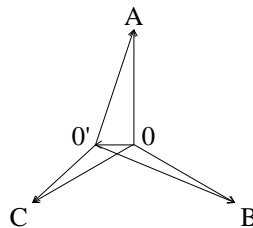


Рис. 9-6

Векторная диаграмма напряжений изображена на рис. 9-6. Из нее видно, что симметричная система напряжений (вектора OA; OB; OC) искажается наличием напряжения нейтрали $\dot{U}_{O'O}$. Соединяя точки A; B; C с точкой O' получаем напряжения на фазах нагрузки. Наибольшее искажение, при прочих равных условиях, возникает при отсутствии нейтрального провода: $Z_0 = \infty$; $Y_0 = 0$.

Если сопротивление нейтрального провода достаточно мало ($Z_0 = 0$; $Y_0 = \infty$), то искажений не возникает: $U_{O'O} = 0$.

9.3. Соединение трехфазной системы треугольником

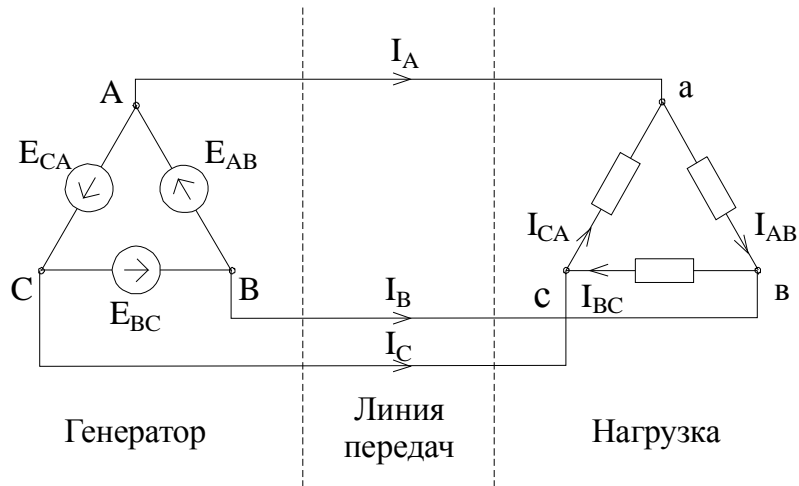


Рис. 9-7

Соединение, показанное на рис. 9-7, называют треугольником. Последовательное соединение трех источников не вызывает появления короткого замыкания, т.к.

$$\dot{U}_{AB} + \dot{U}_{BC} + \dot{U}_{CA} = 0.$$

В сопротивлениях нагрузки возникает трехфазная система токов \dot{I}_{ab} ; \dot{I}_{bc} ; \dot{I}_{ca} .

Если не учитывать сопротивление проводов, то

$$\dot{I}_{ab} = \frac{\dot{U}_{AB}}{\bar{Z}_{ab}}; \quad \dot{I}_{bc} = \frac{\dot{U}_{BC}}{\bar{Z}_{bc}}; \quad \dot{I}_{ca} = \frac{\dot{U}_{CA}}{\bar{Z}_{ca}}.$$

Линейные токи

$$\dot{I}_A = \dot{I}_{ab} - \dot{I}_{ca}; \quad \dot{I}_B = \dot{I}_{bc} - \dot{I}_{ab}; \quad \dot{I}_C = \dot{I}_{ca} - \dot{I}_{ba}.$$

Если нагрузка симметрична $\bar{Z}_{ab} = \bar{Z}_{bc} = \bar{Z}_{ca}$ эти триады токов образуют симметричные трехфазные системы. В этом случае

$$I_L = \sqrt{3} I_\phi; \quad U_L = U_\phi.$$

Вспомним, что при соединении звездой

$$I_L = I_\phi; \quad U_L = \sqrt{3} U_\phi.$$

Если сравнить экономичность соединения треугольником с соединением звездой надо учесть, что токи в линейных проводах больше в $\sqrt{3}$ раз и следовательно сечения проводов надо увеличить в $\sqrt{3}$ раз. Однако, возрастание напряжения так же в $\sqrt{3}$ приводит к тому, что мощность передается в такое же количество раз больше. Таким образом, для передачи той же мощности на проводах достигается экономия в два раза по сравнению с передачей энергии тремя однофазными системами. Переключив обмотки генератора или трансформатора с треугольника на звезду, можно получить систему распределения энергии с напряжением в $\sqrt{3}$ раз большим. Трехфазную

нагрузку (например двигатели) надо также переключить с треугольника на звезду, чтобы сохранить номинальные фазовые напряжения.

Для удобства переключения, шесть выводов трехфазных двигателей, генераторов или трансформаторов в выводных коробках располагают как показано на рис. 9-8.

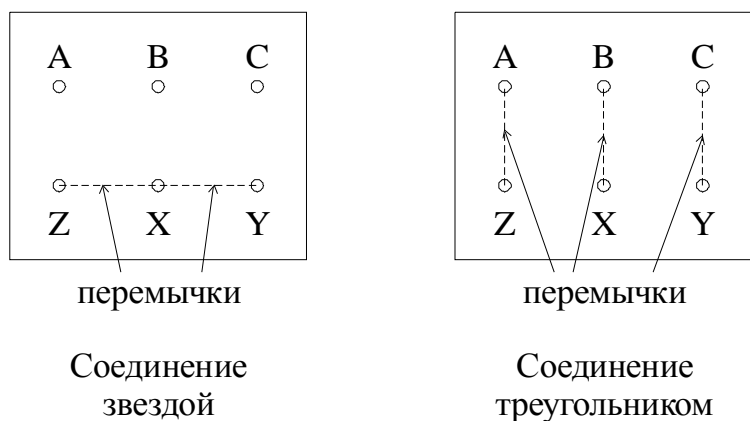


Рис. 9-8

То или иное соединение источника не определяют схему соединения приемников. Более того, различные группы приемников могут быть соединены по-разному. Рассмотрим принцип расчета такой цепи на примере рис.9-9.

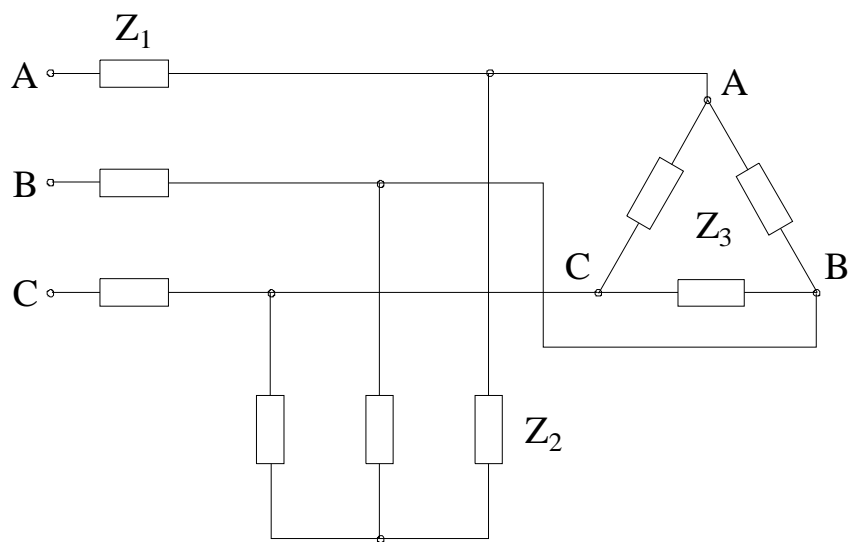


Рис. 9-9

Здесь группа сопротивлений Z_1 , соответствует сопротивлению линии передач, группа приемников Z_2 соединена звездой, а группа Z_3 соединена треугольником.

1. Преобразуем звезду Z_2 в треугольник по формуле:

$$Z_{12} = \frac{Z_1 Z_2 + Z_1 Z_3 + Z_2 Z_3}{Z_3} \quad \text{и т.д.}$$

2. Определим эквивалентные сопротивления двух треугольников.
3. Преобразуем полученный треугольник в звезду.

4. Объединив последовательные сопротивления, получим простую схему расчета, соединенную в звезду.

Последовательность преобразований показана на рис.9-10.

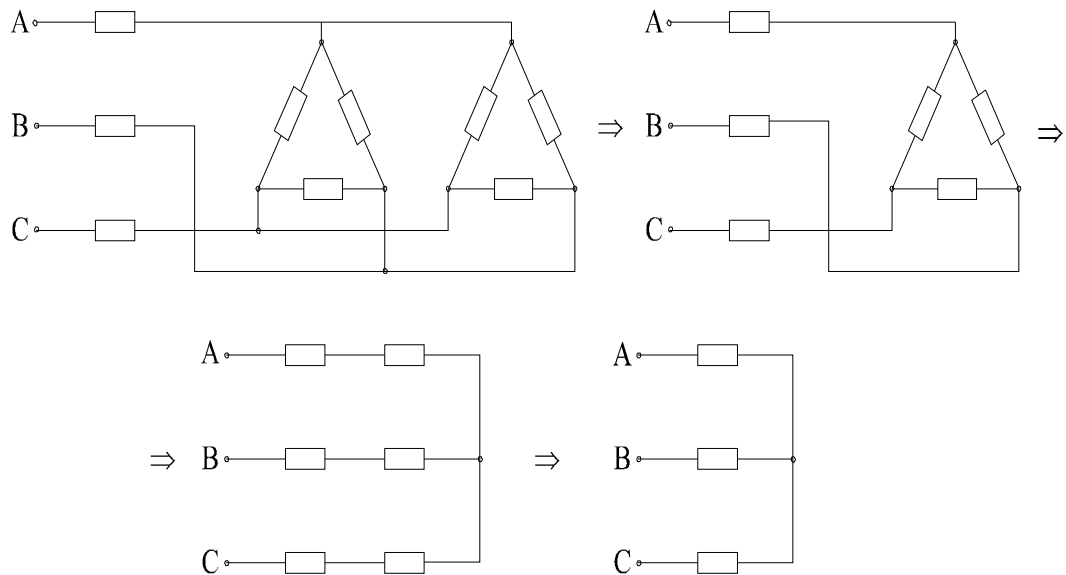


Рис. 9-10

Найдя линейные токи, определить падение напряжения на линии передач, затем линейные напряжения приемников и их токи.

9.4. Мощность в трехфазных системах

При симметричной системе мгновенная мощность каждой фазы определяется:

$$p_A = U_\phi I_\phi \cos j - U_\phi I_\phi \cos(2\omega t + j)$$

$$p_B = U_\phi I_\phi \cos j - U_\phi I_\phi \cos\left(2\omega t + j - \frac{4}{3}p\right)$$

$$p_C = U_\phi I_\phi \cos j - U_\phi I_\phi \cos\left(2\omega t + j + \frac{4}{3}p\right)$$

$$p_A + p_B + p_C = 3U_\phi I_\phi \cos j = P$$

Получили замечательный результат. Сумма мгновенных мощностей всех фаз симметричной системы не зависит от времени и равна активной мощности. Это важное свойство называют **уравновешенностью системы**.

Для двухфазной системы:

$$p_1 = UI \cos j - UI \cos(2\omega t + j)$$

$$p_2 = UI \cos j - UI \cos(2\omega t + j - p)$$

$$p_1 + p_2 = 2UI \cos j = P.$$

Двухфазная система хотя и не симметрична, но уравновешена и тоже создает постоянный момент на валу генераторов.

Если в выражение для мощности симметричной трехфазной системы подставить вместо фазных напряжений и токов линейные, то получим независимо от соединения звездой или треугольником:

$$P = 3U_{\phi} I_{\phi} \cos j_{\phi} = \sqrt{3} U_{\text{Л}} I_{\text{Л}} \cos j_{\phi} = \sqrt{3} U I \cos j_{\phi}.$$

В таком виде формула фигурирует в технической литературе. Следует иметь ввиду, что в ней j_{ϕ} - сдвиг по фазе между фазными напряжением и током.

Для измерения мощности в четырехпроводной трехфазной системе применяется очевидная схема с тремя ваттметрами (рис. 9-11,а) или одним соответствующим образом сконструированным.

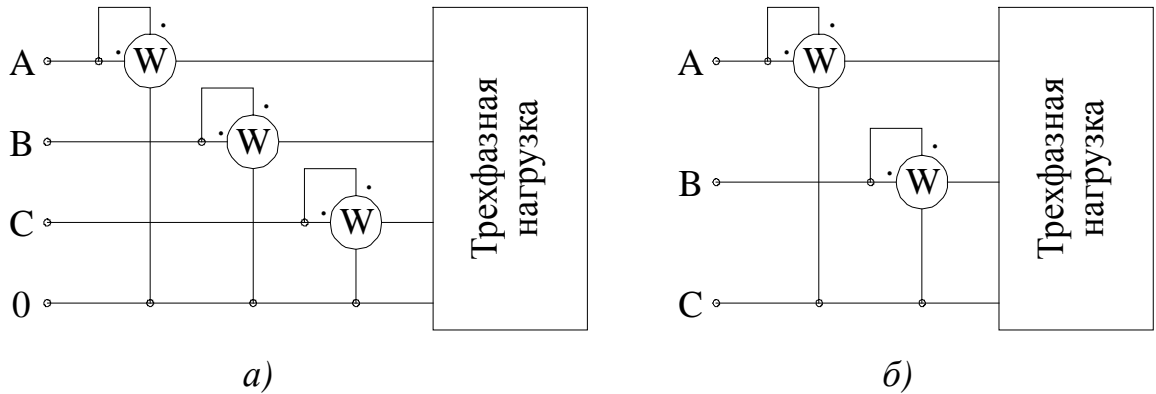


Рис. 9-11

Схема (рис. 9-11,б) с двумя ваттметрами (схема Арона) для измерения мощности двумя ваттметрами в системе без нейтрального провода требует некоторых пояснений. Как известно, ваттметр показывает действительную часть комплекса мощности. Значит сумма показаний двух ваттметров в схеме Арона составит:

$$P_1 + P_2 = \operatorname{Re} \left\{ \dot{U}_{AC}^* I_A + \dot{U}_{BC}^* I_B \right\} = \operatorname{Re} \left\{ \dot{U}_A^* I_A + \dot{U}_B^* I_B - \dot{U}_C^* (I_A + I_B) \right\}$$

Поскольку $\dot{I}_C + \dot{I}_A + \dot{I}_B = 0$, получим

$$\operatorname{Re}(\dot{U}_A \dot{I}_A + \dot{U}_B \dot{I}_B + \dot{U}_C \dot{I}_C) = P_A + P_B + P_C = P_1 + P_2$$

Сумма показаний двух ваттметров в схеме рис. 9-11 даст суммарную мощность всех трех фаз системы. Эта схема применима только в трехпроводной системе электроснабжения.

Представляет интерес схема рис. 9-12 для измерения реактивной мощности в симметричной трехфазной системе.

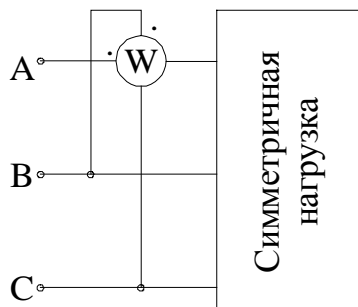


Рис. 9-12

Ваттметр покажет:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \left\{ \dot{U}_{BC}^* I_A \right\} &= \operatorname{Re} \left\{ \dot{U}_A j \sqrt{3} I_A^* \right\} = \operatorname{Re} \left\{ \sqrt{3} \dot{U}_A^* I_A e^{j \frac{p}{2}} \right\} = \\ &= \sqrt{3} U I \cos \left(j + \frac{p}{2} \right) = \sqrt{3} U I \sin j \end{aligned}$$

Значит показание ваттметра, умноженное на $\sqrt{3}$ даст реактивную мощность симметричной нагрузки.

9.5. Получение вращающегося магнитного поля

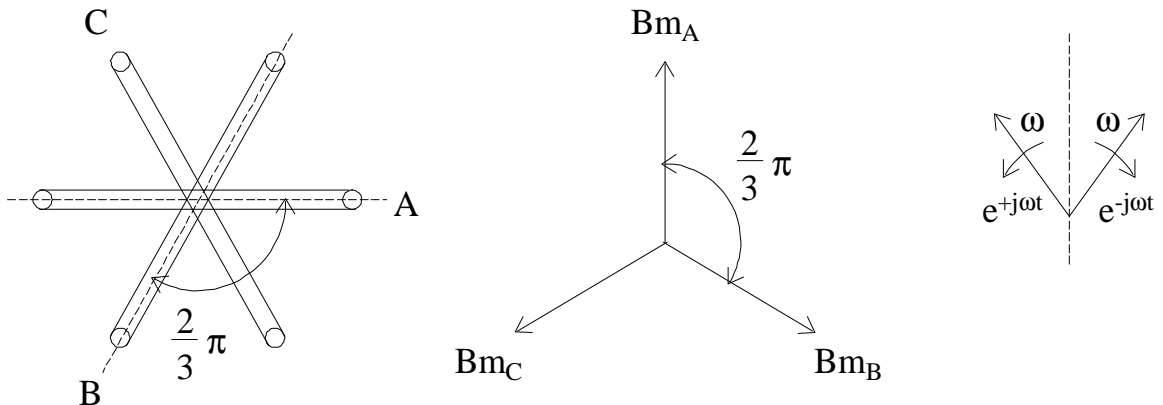


Рис. 9-13

На рис. 9-13 представлена система из трех катушек, сдвинутых в пространстве на угол $\frac{2}{3}\pi$, каждая из которых подключена к одной из фаз трехфазной системы. Магнитная индукция (V_m) направлена перпендикулярно плоскостям катушек и представляет из себя вектор, имеющий постоянное направление в пространстве и изменяющийся по величине по закону синуса. Такой вектор можно разложить на две составляющие $0,5 V_m$, вращающихся с угловой скоростью ω в разные стороны.

Вектор, вращающийся по часовой стрелке $0,5 V_m \cdot e^{-j\omega t}$ от катушки фазы А, сложим с вектором, вращающимся в ту же сторону от катушки фазы В $0,5 V_m \cdot e^{-j\omega t} \cdot a$ и с вектором от катушки фазы С $0,5 V_m \cdot e^{-j\omega t} \cdot a^2$. Множители a и a^2 учитывают разницу в направлениях в пространстве. Если учесть сдвиг по фазе токов в этих катушках соответствующими множителями 1 ; a^2 и a , то получим сумму:

$$0,5 V_m e^{-j\omega t} + 0,5 V_m a^2 \cdot e^{-j\omega t} + 0,5 V_m a \cdot e^{-j\omega t} = 1,5 V_m e^{-j\omega t}$$

Что касается слагаемых векторов, вращающихся против часовой стрелки, то для учета их взаимного направления в пространстве относительно направления вращения надо записать: $0,5 V_m \cdot e^{j\omega t}$; $0,5 V_m \cdot e^{j\omega t} \cdot a^2$; $0,5 V_m \cdot e^{j\omega t} \cdot a$. Умножая на 1 ; a^2 и a и складывая получим:

$$0,5 V_m \cdot e^{j\omega t} (1 + a^2 + a) = 0.$$

Т.е. эти составляющие пульсирующих векторов взаимно компенсируют друг друга.

Таким образом в пространстве внутри катушек получим круговое вращающееся магнитное поле.

Вращающееся магнитное поле можно получить и от двухфазной системы. Для этого рассмотрим суммарную магнитную индукцию от двух катушек, расположенных под углом $\frac{p}{2}$ и питаемых от двухфазной системы напряжений. Т.е. имеем два взаимно перпендикулярных пульсирующих вектора. Для их сложения поместим их в произвольно расположенную прямоугольную систему координат (рис.9-14).

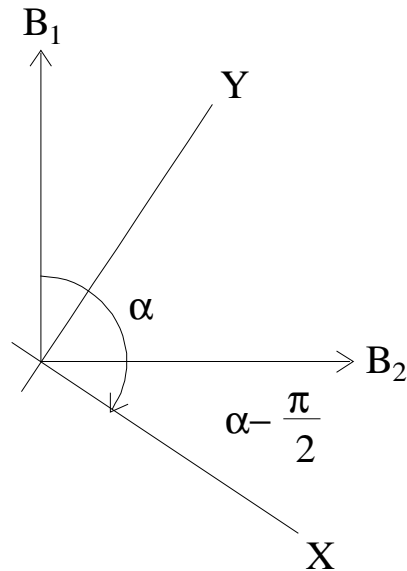


Рис. 9-14

Проекции на ось X:

$$B_x = B_1 \cdot \cos a + B_2 \cdot \cos \left(a - \frac{p}{2} \right).$$

Но

$$B_1 = B_m \cdot \sin \omega t$$

$$B_2 = B_m \cdot \sin \left(\omega t - \frac{p}{2} \right).$$

Таким образом получим

$$B_x = B_m \left[\sin \omega t \cdot \cos a + \sin \left(\omega t - \frac{p}{2} \right) \cdot \cos \left(\omega t - \frac{p}{2} \right) \right].$$

Используя соотношение:

$$\sin a \cdot \cos b = \frac{1}{2} [\sin(a - b) + \sin(a + b)],$$

получим

$$B_x = B_m \cdot \sin(\omega t - a),$$

аналогично

$$B_y = B_m \cdot \cos(\omega t - a).$$

Вектор с такими проекциями имеет постоянную величину $B = \sqrt{B_x^2 + B_y^2} = B_m$.

Что касается его расположения в системе координат, то оно определится некоторым углом b

$$\operatorname{tg} b = \frac{B_x}{B_y} = \operatorname{tg}(wt - a)$$

Если рассмотреть расположение вектора в системе координат вращающейся с угловой скоростью, т.е. $a = (wt + \gamma)$, то получим, что суммарный вектор неподвижен во вращающейся системе координат. Это значит, что в неподвижной системе координат вектор вращается. Т.е. получено круговое вращающееся поле.

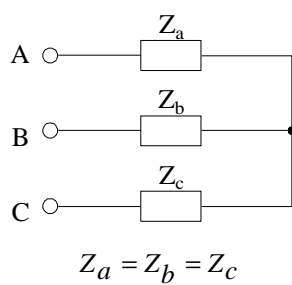
Последнее преимущество многофазных систем с точки зрения создания мощных выпрямителей будет показано при рассмотрении темы «Нелинейные цепи».

Контрольные вопросы к теме 9

1. Назовите преимущества трехфазных цепей для систем электроснабжения.
2. Как образуются трехфазные ЭДС?
3. Какие способы Вы знаете для записи трехфазных систем напряжение? Что такое оператор « a »?
4. Назовите другие многофазные системы.
5. Соединение трехфазных систем звездой и порядок расчета при таком соединении.
6. Порядок расчета при соединении треугольником.
7. Расчет цепей при смешанном соединении приемников энергии.
8. Выражения для мощности трехфазных систем. Что такое уравнивание?
9. Докажите уравнивание двухфазной системы.
10. Какие способы измерения активной и реактивной мощности в трехфазных цепях Вы знаете?
11. Как получить вращающееся магнитное поле в трехфазной системе?
12. Как получить вращающееся магнитное поле в двухфазной системе?

Контрольные задачи к теме 9

I	<p>Определить напряжение на нагрузочных сопротивлениях при обрыве фазы А:</p> <p>1) при отсутствии нулевого провода, 2) при наличии нулевого провода.</p> <p>1</p>  <p style="text-align: center;">$R_1 = R_2 = R_3; U_{\text{Л}} = 380 \text{ В.}$</p>
II	<p>Определить мощность симметричного трехфазного приемника, при измерении одним ваттметром с искусственной нулевой точкой</p> <p>2</p>  <p style="text-align: center;">$R_1 = R_2 = R_3 = 220 \text{ Ом}; U_{\text{Л}} = 380 \text{ В}; P_W = 1000 \text{ Вт.}$</p>
III	<p>Определить приемника, если через него протекает ток 2А.</p> <p>3</p>  <p style="text-align: center;">$R_1 = 100; R_2 = 200; U_{\text{Л}} = 100 \text{ В}; P_1 + P_2 = 300 \text{ Вт.}$</p>
IV	<p>Как изменится мощность при переключении симметричной трехфазной нагрузки со звезды на треугольник.</p>



Тема 10. Анализ переходных процессов в линейных цепях

10.1. Постановка проблемы переходного процесса

При анализе установившихся процессов в линейных цепях мы не отвечали на вопрос как достигнуто то или иное распределение токов и напряжений. Например, теоретически нельзя представить себе непосредственное включение источников постоянного тока на цепочках из последовательно соединенных элементов R и L (рис. 10-1,а) и параллельно соединенных R и C (рис. 10-1,б).

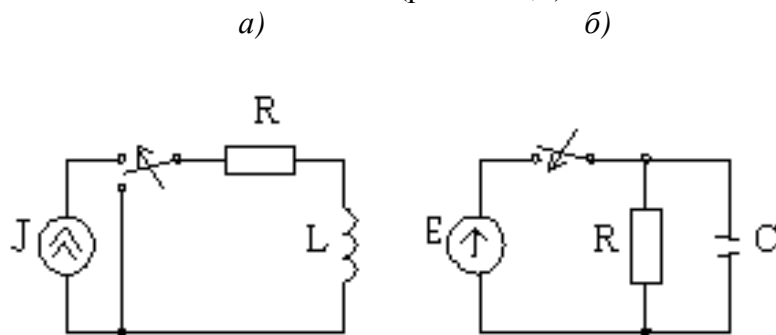


Рис. 10-1

Здесь на схеме изображен новый элемент - ключ. Смысл его заключается в том, что в заданный момент времени, обычно $t=0$ ключ меняет свое положение. Изменения в цепи, проходящие при этом, называются коммутацией. Считается, что при $t=-0$ цепь была разомкнута (или замкнута), а при $t=+0$ цепь изменила свое состояние.

$$\Delta t = t(+0) - t(-0) \rightarrow 0$$

На ключе никаких потерь энергии не допускается.

Энергия, запасенная до коммутации в индуктивности при $t < 0$ $W_L = \frac{Li^2}{2} = 0$ и в емкости $W_C = \frac{Cu^2}{2} = 0$. После коммутации: при $t \gg 0$ $W_L = \frac{Li^2}{2} > 0$ и $W_C = \frac{Cu^2}{2} > 0$.

Для изменения энергетического состояния накопителя требуется мощность:

$$p = \frac{dW}{dt};$$

$$p = L \frac{di}{dt} i; \quad p = C \frac{du}{dt} u$$

Отсюда следует, что ток J на рис. 10-1а не может сразу стать постоянным в источнике конечной мощности (конечного напряжения) и напряжение E также не может сразу стать постоянным в источнике конечной мощности. Таким образом, при любых внезапных изменениях параметров цепи, в т.ч. включении и выключении источников, энергетическое состояние накопителей энергии (катушек индуктивности и конденсаторов) не может измениться мгновенно. В свою очередь это означает, что некоторые токи и напряжения не могут претерпевать скачки, а должны изменяться только плавно. Расчет изменений токов и напряжений в цепи в процессе возможных изменений энергетического состояния накопителей называют анализом переходных процессов.

10.2. Законы коммутации

Из ограничений мощности источников в электрических цепях вытекают ограничения на токи через катушки индуктивности и напряжения на конденсаторах. Это можно записать следующим образом:

$i_L(-0) = i_L(+0)$ - первый закон коммутации,

$u_C(-0) = u_C(+0)$ - второй закон коммутации.

Возможность скачкообразного изменения тока через резисторы и емкости, а также напряжения на резисторах и индуктивностях не исключается. Не исключается также скачкообразное изменение параметров источников тока и напряжения. Конечно накопление и расходование энергии накопителями определяет изменение токов и напряжений при любых переменных токах и напряжениях. В цепях синусоидального тока это отражалось в отставании тока от напряжения в индуктивных цепях (индуктивность инерционна относительно тока). В двухполюсниках, содержащих емкость, напряжение отстает от тока, т.е. емкость инерционна относительно напряжения. При периодических токах и напряжениях инерционность учитывается соответствующими сдвигами по фазе токов и напряжений на каждой гармонике, что отображается конечно и на суммарном эффекте. При несинусоидальных сигналах применяются особые приемы, основой которых служит анализ цепей при коммутациях.

10.3. Порядок расчета переходных процессов классическим методом

Сравнительно простые цепи исследуются так называемым классическим методом. Дифференциальные уравнения по Кирхгофу для мгновенных значений токов и напряжений записывались без каких-либо ограничений на характер возмущений, в том числе и внезапных включений источников или других коммутаций. Такие уравнения описывают и переходные процессы в цепях. Для линейных цепей с сосредоточенными параметрами мы получаем систему линейных интегро-дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. После дифференцирования образуется система дифференциальных уравнений, каждое из которых не выше второго порядка. Дальнейшее решение можно было бы предоставить математике. Однако, как будет показано ниже, некоторые приемы теории цепей могут существенно облегчить поиск результатов. Заметим, что в результате дифференцирования исчезает часть информации, а именно информация о начальных условиях. Для дальнейшего решения необходимо из системы уравнений выделить одно уравнение с одним неизвестным. Эта операция может потребовать дополнительных дифференцирований и подстановок. В результате будет получено дифференциальное уравнение n -го порядка с правой частью.

$$a_n \frac{d^n x(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} x(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_0 x(t) = f(t),$$

здесь a_0, a_1, \dots, a_n - постоянные вещественные коэффициенты,

x - может быть любым током или напряжением,

n - порядок дифференциального уравнения. Ниже будет показано, что n равно количеству независимых накопителей в схеме.

Уравнение должно удовлетворяться для любого времени. В том числе оно действительно и для установившегося режима (если он существует).

$$a_n \frac{d^n x(\infty)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} x(\infty)}{dt^{n-1}} + \dots + a_0 x(\infty) = f(t)$$

Назовем свободным током или напряжением разницу между переходным током или напряжением и установившимся.

$$x_{„e}(t) = x(t) - x(\infty)$$

Вычтя одно дифференциальное уравнение из другого получим уравнение для свободной составляющей.

$$a_n \frac{d^n x_{„e}(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} x_{„e}(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_0 x_{„e}(t) = 0$$

Получим однородное уравнение (уравнение без правой части). Обратим внимание, что вся информация об источниках в цепи содержится только в правой части. Следовательно свободная составляющая определяется только собственными свойствами цепи.

Уравнение

$$x(t) = x(\infty) + x_{CB}(t)$$

соответствует искусственному разделению неизвестного на два слагаемых.

Такой прием применим только для линейных систем (принцип наложения). Этот прием соответствует утверждению, что решением линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами с правой частью является сумма двух решений: частного решения уравнения с правой частью и общего решения однородного уравнения - без правой части. В качестве частного решения выступает установившийся режим, а свободная составляющая определяется уравнением без правой части. Т.е. можно записать:

$$x = x(\infty) + \sum_1^n A_k e^{p_k t},$$

где p_k - корни характеристического уравнения:

$$a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_0 = 0$$

Это уравнение составлено из однородного заменой

$$\frac{d^m x}{dt^m} = p^m$$

После нахождения корней характеристического уравнения, для решения задачи необходимо найти постоянные интегрирования A_k . В математической трактовке для этого надо знать начальные значения функции $x(0)$ и $(n-1)$ производную в момент времени $t=+0$. Это даст n уравнений для определения A_k .

В электротехнике n уравнений получается, если через $x(t)$ будут выражены напряжения на конденсаторах $u_C(t)$ и токи через катушки индуктивности $i_L(t)$. Определив их значения до коммутации $i_L(-0)$ и $u_C(-0)$ по законам коммутации, мы определим начальные условия $i_L(+0)$ и $u_C(+0)$. Таким образом, будет получено n независимых уравнений для поиска n неизвестных A_k .

Расчет переходных процессов классическим методом определяется следующим порядком.

1. Составляется система интегро-дифференциальных уравнений по Кирхгофу.
2. Из системы, путем преобразований, выделяется одно уравнение относительно одного неизвестного.

$$x(t) = x(\infty) + \sum_1^n A_k e^{p_k t}.$$

3. Решение такого уравнения ищется в виде:

$x(\infty)$ - установившийся режим.

p_k - корни характеристического уравнения.

4. A_k - находится из знания начальных энергетических состояний всех n накопителей.

Классическим методом решают задачи анализа переходных процессов в схемах с одним и двумя накопителями в основном из-за трудностей с поиском постоянных интегрирования, который плохо формализуется. С другой стороны именно схемы с одним-двумя накопителями представляют наибольший интерес, т.к. понимание и знание характера переходных процессов в таких схемах дает возможность оценивать броски токов и напряжений, а также характер колебательных процессов во многих практически значимых случаях. Ниже будут детально рассмотрены именно такие задачи и сделаны некоторые обобщения.

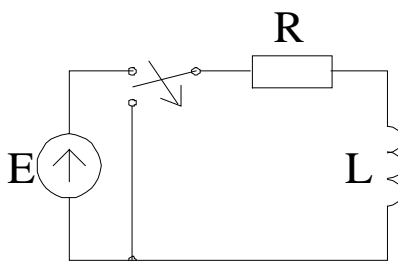


Рис. 10-2

10.4. "Разряд" катушки индуктивности на резистор

Возьмем схему, в которой до коммутации протекал ток I от источника постоянного напряжения E (рис. 10-2). При этом в магнитном поле катушки индуктивности была

запасена энергия $\frac{LI^2}{2}$. После коммутации катушка оказывается включенной на сопротивление R и запасенная энергия рассеивается на резисторе.

1. Дифференциальное уравнение: $Ri + L \frac{di}{dt} = 0$.
2. П.2 выполнять не требуется.
3. $i_L(t) = i_L(\infty) + Ae^{pt}$.

$i_L(\infty) = 0$, т.к. рано или поздно вся энергия катушки рассеивается резистором.

$R + pL = 0, \Rightarrow p = -\frac{R}{L}$. Обратим внимание, что $p_k < 0$ (в случае комплексных корней $\text{Re}\{p_k\} < 0$), т.к. свободные составляющие определяются по схеме без источников и всегда затухают со временем.

4. Из закона коммутации $i_L(+0) = i_L(-0)$. С другой стороны, $i_L(+0) = i_L(\infty) + A$; поэтому $A = i_L(-0)$. До коммутации по цепи протекал ток $I = \frac{E}{R}$, значит $i_L(-0) = \frac{E}{R}$.

Итак, получено решение:

$$i_L = \frac{E}{R} e^{-\frac{R}{L}t}$$

График представлен на рис. 10-3.

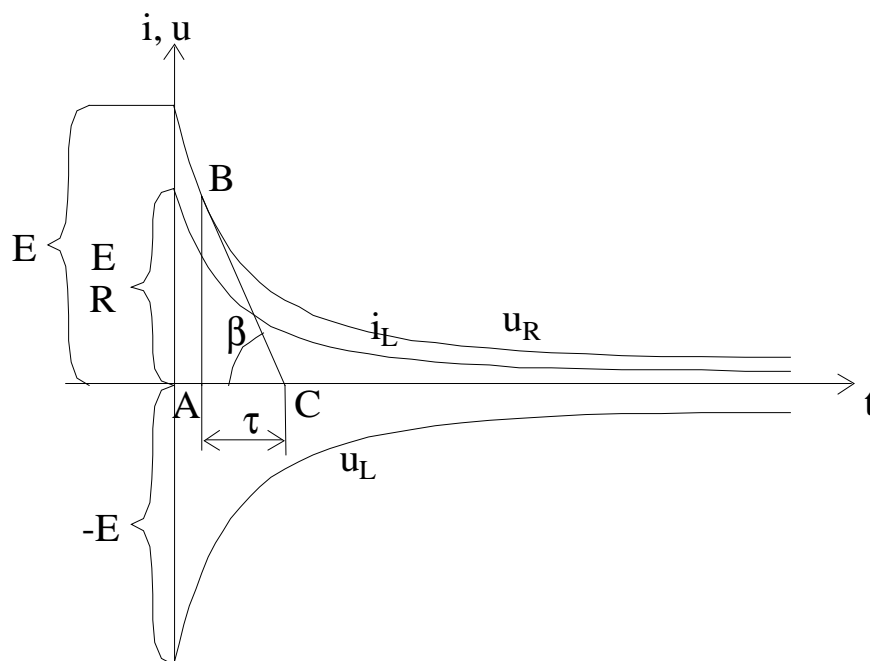


Рис. 10-3

Напряжение на резисторе повторяет форму кривой тока:

$$u_R = iR = E e^{-\frac{R}{L}t}$$

Напряжение на катушке индуктивности уравнивается напряжением на резисторе (второй закон Кирхгофа). Можно его определить и из математической модели элемента:

$$u_L = L \frac{di}{dt} = -\frac{LRE}{LR} e^{-\frac{R}{L}t} = -E e^{-\frac{R}{L}t}$$

$$u_L(t) = -u_R(t)$$

До коммутации $u_L(-0) = 0$, затем при $t=0$ скачком изменяется так, что $u_L(+0) = -E$ и по экспоненте падает до нуля.

Обычно вместо p вычисляется $t = -\frac{1}{p} = \frac{L}{R}$, имеющее размерность времени, называемое постоянной времени и ответ записывают в виде

$$i(t) = \frac{E}{R} e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Из треугольника ABC, построенного из касательной к любой точке экспоненты и перпендикуляра, опущенного на ось абсцисс, получим

$$AC = \frac{AB}{\operatorname{tg} b} = \frac{u_R}{-\frac{du_R}{dt}} = \frac{E e^{-\frac{t}{\tau}}}{\frac{1}{\tau} E e^{-\frac{t}{\tau}}} = \tau,$$

т.е. физически τ показывает крутизну экспоненты. Чем больше τ , тем медленнее затухают свободные составляющие переходного процесса.

Энергия, запасенная в катушке индуктивности, рассеивается на резисторе. Действительно

$$\int_0^{\infty} i^2 R dt = \int_0^{\infty} \left(\frac{E}{R} e^{-\frac{t}{\tau}} \right)^2 R dt = \frac{L \left(\frac{E}{R} \right)^2}{2} = \frac{L [i(-0)]^2}{2}$$

Если до коммутации протекал синусоидальный ток, то решение будет то же самое если за $i(+0)$ принять ток в момент коммутации.

10.5. Включение катушки индуктивности на постоянное напряжение

Рассмотрим схему рис. 10-4, в которой коммутация заключается во включении цепочки RL на постоянное напряжение.

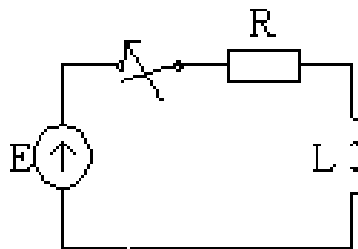


Рис. 10-4

1. Дифференциальное уравнение: $Ri + L \frac{di}{dt} = E$.
2. Преобразований не требуется.
3. Решение дифференциального уравнения: $i_L = i(\infty) + Ae^{pt}$.

Установившееся значение тока, получаемое из схемы после коммутации ($t \rightarrow \infty$):

$$i(\infty) = \frac{E}{R}$$

р получаем из характеристического уравнения: $R + pL = 0$; $p = -\frac{R}{L} = -\frac{1}{t}$. Заметим, что получили тот же результат, что и в предыдущем примере.

4. Постоянную интегрирования A находим из начальных условий: $i(\infty) + A = i_L(+0) = i_L(-0) = 0$.

Окончательное решение для тока:

$$i_L(t) = \frac{E}{R} \left(1 - e^{-\frac{t}{t}} \right)$$

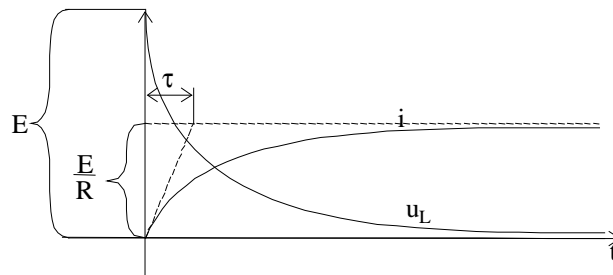


Рис. 10-5

Напряжение на катушке $u_L(t) = L \frac{di}{dt} = E e^{-\frac{t}{t}}$, показывает, что в момент включения напряжение источника уравнивается напряжением на индуктивности, т.к. ток в этот момент равен нулю и падение напряжения на резисторе отсутствует.

10.6. Включение цепочки RL на синусоидальное напряжение

Задача аналогична предыдущей (см. рис. 10-3) с той лишь разницей, что источник напряжения представляет собой синусоидальную функцию времени:

$$e = E_m \sin(\omega t + \gamma_e)$$

Дифференциальное уравнение: $Ri + L \frac{di}{dt} = E_m \sin(\omega t + \gamma_e)$

Решение уравнения:

$$i(t) = i(\infty) + A e^{-\frac{t}{t}},$$

где $t = \frac{L}{R}$ - постоянная времени, зависящая только от параметров цепи (от источника не зависит).

Под $i(\infty)$ следует понимать установившееся значение синусоидального тока, которое находится по известным правилам для схемы после коммутации:

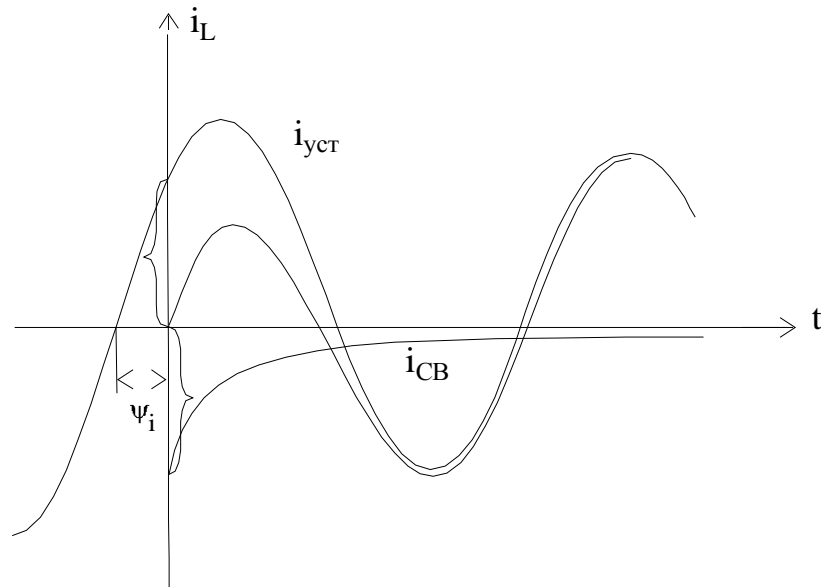
$$i(\infty) = \frac{E_m}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} \sin(\omega t + \gamma_e - j) = I_m \sin(\omega t + \gamma_i)$$

где $j = \operatorname{arctg} \frac{wL}{R}$

Решение

$$i(t) = I_m \sin(\omega t + \gamma_i) + A e^{-\frac{t}{\tau}}$$

должно удовлетворять начальным условиям $i(+0) = 0 = I_m \sin \gamma_i + A$, $\Rightarrow A = -I_m \sin \gamma_i$.



Окончательно

$$i(t) = I_m \sin(\omega t + \gamma_i) - [I_m \sin \gamma_i] e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

Рис. 10-6

Для построения осциллограммы (рис. 10-6) надо построить установившееся значение тока и экспоненту. Причем их сумма при $t=0$ должна быть равна $i_L(+0)$. Из построения осциллограммы ясно, что на характер переходного процесса влияет момент коммутации относительно начальной фазы напряжения, т.к.

$$\gamma_i = \gamma_u - j$$

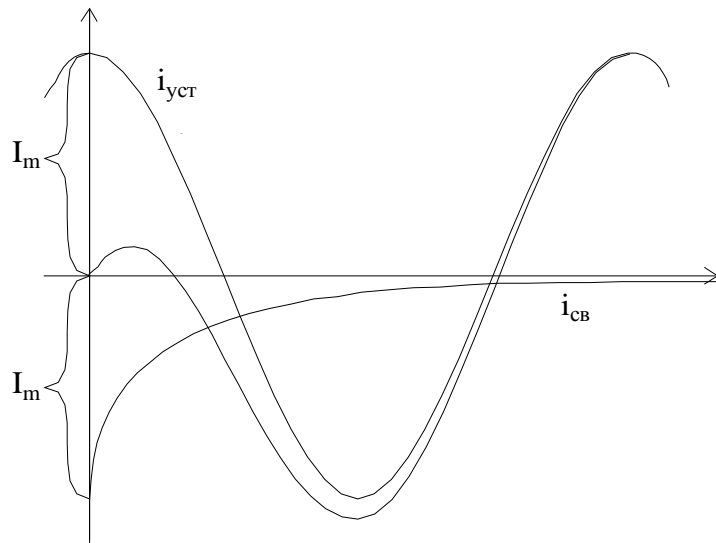


Рис. 10-7

Если коммутация происходит в момент времени, когда $i_{уст} = I_m$, то $A = I_m$ и осциллограмма будет такой как показано на рис. 10-7.

Если при этом постоянная времени относительно велика, то через половину периода синусоидального напряжения ток может достигнуть величины $i_{max} \leq 2I_m$. С этим нужно считаться при проектировании таких катушек. Если же коммутация произойдет в момент, когда $i_{уст} = 0$, то $A=0$, т.е. сразу установится синусоидальный ток и переходного процесса не будет.

10.7. Разряд конденсатора на резистор

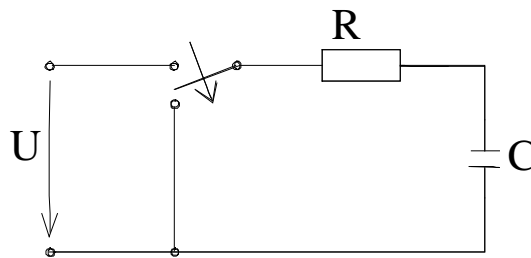


Рис. 10-8

Рассмотрим анализ переходных процессов в схемах, где в качестве накопителя выступает конденсатор. Самая простая схема, когда заряженный до напряжения U конденсатор разряжается на резистор. Проведем решение в той же последовательности.

1. Дифференциальное уравнение:
$$Ri + \frac{1}{C} \int_0^t idt + u_C(0) = 0$$

2. Преобразование уравнения относительно неизвестного $u_C(t)$: $Ri + u_C(t) = 0$ при $i = C \frac{du_C}{dt}$ получим $RC \frac{du_C}{dt} + u_C = 0$.

3. Решение: $u_C(t) = u_C(\infty) + Ae^{pt}$

4. $u_C(\infty) = 0$, т.к. энергия запасенная в конденсаторе $\left(\frac{CU^2}{2} \right)$ рано или поздно будет рассеяна на резисторе.

5. Характеристическое уравнение: $RCp + 1 = 0$, $p = -\frac{1}{RC}$.

6. Постоянная интегрирования A найдется из начальных условий и закона коммутации: $u_C(-0) = u_C(+0)$, $u_C(\infty) + A = U$, $\Rightarrow A = U$.

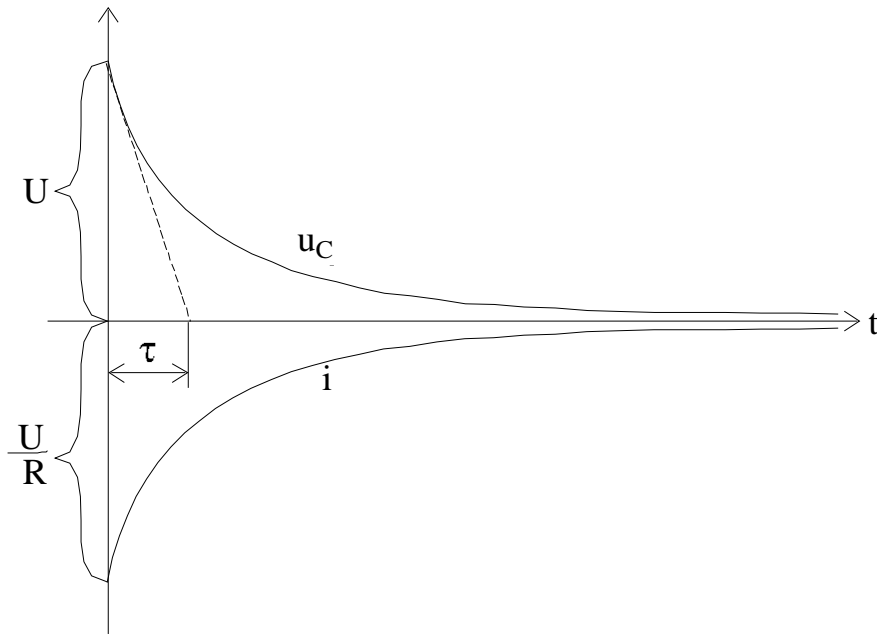


Рис. 10-9

Окончательно получаем решение в виде:

$$u_C(t) = U e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (\text{рис. 10-9}),$$

где роль постоянной времени выполняет произведение $\tau = RC$, имеющее соответствующую размерность.

Ток в цепи RC:

$$i = C \frac{du_C}{dt} = -\frac{UC}{RC} e^{-\frac{t}{\tau}} = -\frac{U}{R} e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Напряжение на резисторе по форме повторяет кривую тока, причем в любой момент времени $-u_R = u_C$ (в соответствии со вторым законом Кирхгофа).

Можно убедиться, что энергия, рассеиваемая на резисторе $\int_0^{\infty} i^2 R dt$, равна энергии, запасенной в конденсаторе $\frac{CU^2}{2}$.

10.8. Включение цепочки RC на постоянное напряжение

Схема показана на рис. 10-10.

После приобретения некоторого опыта анализа переходных процессов в схемах с одним накопителем можно отступать от классического порядка решения задачи.

Поскольку в цепи только один накопитель, дифференциальное уравнение так или иначе будет получено **первого** порядка. Его решение можно в общем виде записать сразу:

$$u_C(t) = u_C(\infty) + A e^{-\frac{t}{\tau}}$$

t - зависит только от конфигурации цепи без источника, поэтому так же как и в предыдущей задаче $t = RC$

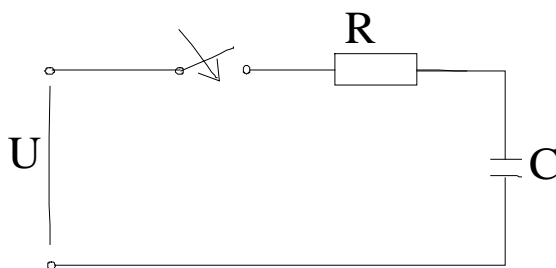


Рис. 10-10

Установившееся значение $u_C(\infty) = U$.

По закону коммутации $u_C(-0) = u_C(+0)$, поэтому $U + A = 0 \Rightarrow A = -U$.

Окончательно:

$$u_C(t) = U \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right)$$

Ток можно определить из соотношения:

$$i = C \frac{du_C}{dt} = \frac{U}{R} e^{-\frac{t}{\tau}}$$

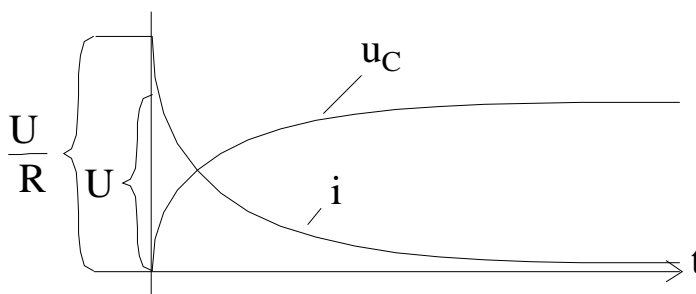


Рис. 10-11

Решение задачи можно начинать с качественного построения осциллограммы (рис. 10-11). Для данной задачи: отметив, что до коммутации напряжение на емкости было равно нулю, и учтя закон коммутации устанавливаем начальную точку осциллограммы.

Из соображения, что решение дифференциального уравнения первого порядка получается в виде экспоненты и найдя установившееся значение $u_C = U$, можно провести экспоненту. Если знать, что постоянная времени $\tau = RC$, то экспоненту можно построить точно. Для построения графика тока надо учесть, что при $t=0$ $u_C = 0$, следовательно ток через резистор должен быть таким, чтобы $u_R = U$, т.е. $i_R(0) = \frac{U}{R}$. По прошествии достаточно большого времени ток должен упасть до нуля. Этих

соображений, с учетом того, что все переходные процессы идут с одной и той же постоянной времени $t = RC$, хватает, чтобы построить осциллограмму $i(t)$.

10.9. Включение цепи RC на синусоидальное напряжение

Применим описанную выше логику для решения задачи включения цепи RC на синусоидальное напряжение $e = E_m \sin(\omega t + \varphi_e)$ (рис. 10-12).

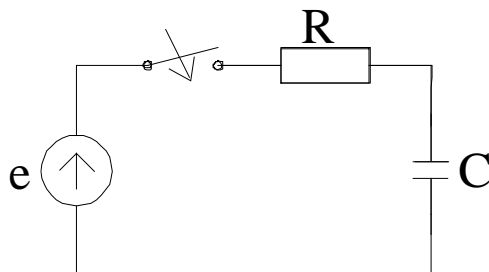


Рис. 10-12

Известно, что установившееся значение напряжения на конденсаторе будет синусоидальным:

$$u_{\text{уст}} = U_m \sin(\omega t + \varphi_u)$$

При $t=0$, т.е. в момент коммутации $u_C(0)=0$, если емкость не была заряжена. Значит

$$\left(U_m \sin(\omega t + \varphi_u) + A e^{-\frac{t}{\tau}} \right)_{\text{при } t=0} = 0$$

Значит осциллограмма, состоящая из такой суммы двух кривых: синусоиды и экспоненты, что при $t=0$ она (сумма) равна нулю (рис. 10-13).

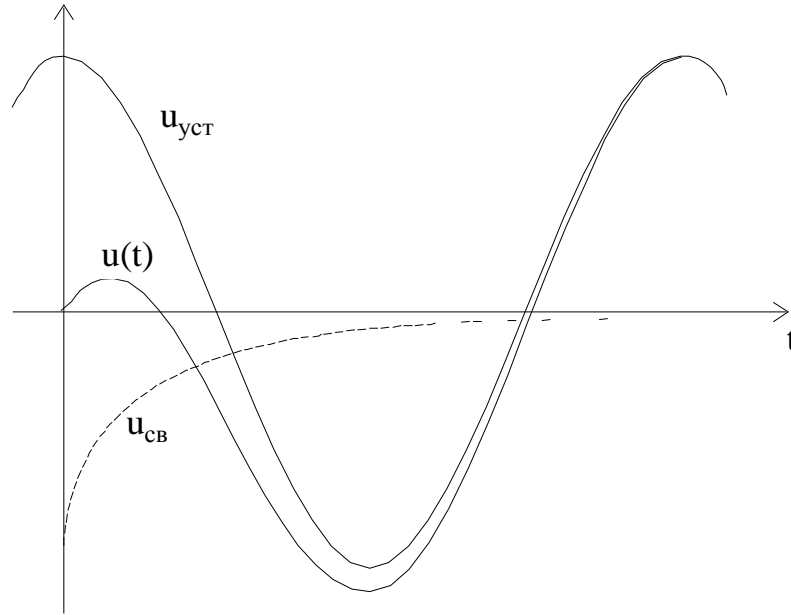


Рис. 10-13

После такого представления о процессе легко записать решение в виде (учитывая, что $t = RC$):

$$u_C(t) = U_m \sin(\omega t + \gamma_U) + (U_m \sin \gamma_U) e^{-\frac{t}{RC}}$$

Остается только тем или иным способом определить установившееся значение напряжения на емкости (U_m и γ_U) по заданным E , R и C :

$$i_{ycm} = \frac{E}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}} \sin(\omega t + \gamma_e + j)$$

где $j = \arctg \frac{1}{\omega RC}$

$$u_{Cycm} = \frac{E_m \frac{1}{\omega C}}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}} \sin\left(\omega t + \gamma_e + j - \frac{p}{2}\right)$$

Значит $U_m = \frac{E_m \frac{1}{\omega C}}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}} ; \gamma_U = \gamma_e + j - \frac{p}{2}.$

10.10. Практические приемы решения задач в схемах с одним накопителем

Рассмотрим схему с одним накопителем, но парой резисторов (рис. 10-14).

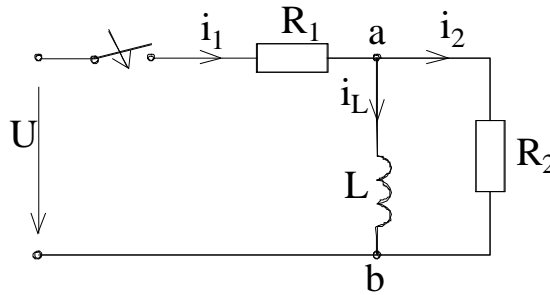


Рис. 10-14

В этом хотя и простом случае система уравнений по Кирхгофу будет включать два контурных уравнения и одно узловое:

$$i_1 = i_L + i_2$$

$$i_1 R_1 + L \frac{di_L}{dt} = U$$

$$i_2 R_2 - L \frac{di_L}{dt} = 0$$

Преобразование к одному уравнению с одним неизвестным:

$$i_L R_1 + i_2 R_2 + L \frac{di_L}{dt} = U, \Rightarrow i_L R_1 + \left(\frac{L}{R_2} \cdot \frac{di_L}{dt} \right) R_2 + L \frac{di_L}{dt} = U, \Rightarrow L \left(\frac{R_1}{R_2} + 1 \right) \frac{di_L}{dt} + R_1 i_L = U; \text{ или}$$

$$L \frac{di_L}{dt} + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} i_L = \frac{U R_2}{R_1 + R_2}$$

Характеристическое уравнение:

$$Lp + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = 0; \quad p = -\frac{R_1 R_2}{L(R_1 + R_2)}.$$

Установившийся ток - $i_{уст} = \frac{U}{R_1}$

Решение относительно тока через индуктивную катушку с точностью до постоянной интегрирования:

$$i_L = \frac{U}{R_1} + A e^{-\frac{R_1 R_2}{L(R_1 + R_2)} t}$$

Постоянная A определяется из условия $i_L(+0) = 0$.

Окончательно:

$$i_L = \frac{U}{R_1} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right), \text{ где } \tau = -\frac{1}{p} = -\frac{L(R_1 + R_2)}{R_1 R_2}.$$

$$U_L = L \frac{di_L}{dt} = U \frac{R_2}{R_1 + R_2} e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Отметим следующие не случайные обстоятельства:

1. Уравнение относительно любой переменной получается первого порядка, т.к. в схеме только один накопитель. Из этого следует, что для поиска любой переменной можно, не составляя и не преобразуя систем уравнений, сразу записать: $x = x_{уст} + Ae^{-\frac{t}{\tau}}$

2. Установившееся значение определяется из схемы **после** коммутации.

3. $\tau = \frac{L}{R_{\Sigma}}$, где $R_{\Sigma} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$. Поскольку τ определяется схемой **после** коммутации и не зависит от характера и места включения источника, то постоянная времени будет такой же, как в случае "разряда" катушки индуктивности на резистор, эквивалентный всем резисторам, включенным на зажимы катушки. В нашем примере резисторы относительно зажимов ab включены параллельно. Аналогично, в схемах с конденсатором $\tau = R_{\Sigma} C$, где R_{Σ} - эквивалентный резистор относительно зажимов конденсатора всей остальной схеме с удаленными источниками. Необходимо помнить, что удаление источника ЭДС соответствует закорачиванию соответствующего участка цепи, а удаление источника тока - разрыву этой ветви.

4. Поиск постоянной интегрирования в случае решения задачи относительно тока через индуктивность или напряжения на конденсаторе сводится к составлению уравнения: $x_{уст} + A = x(-0)$, $x(-0)$ - определяется из схемы **до коммутации**, но это относится только к тем переменным, для которых определены законы коммутации $x(+0) = x(-0)$.

Если требуется определить какую-либо переменную, которая может изменяться скачкообразно при коммутации, удобно составить эквивалентную схему для $t=0$, зафиксировав в ней докоммутационный режим накопителя. В нашем случае это схема, в которой вместо индуктивности включен источник тока с параметром, равным току до коммутации (рис. 10-15).

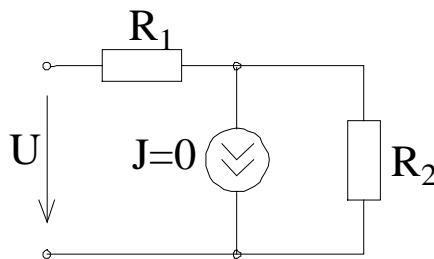


Рис. 10-15

По такой схеме легко определить начальное значение любой переменной.

Например, ток $i_2(+0) = \frac{U}{R_1 + R_2}$; если мы знаем τ , то можем сразу записать:

$$i_2(t) = \frac{U}{R_1 + R_2} e^{-\frac{t}{\tau}}$$

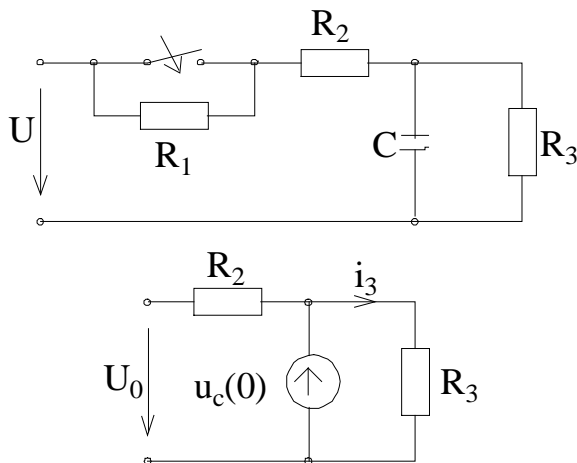


Рис. 10-16

На рис.10-16 показан пример схемы для анализа и послекоммутационной схемы для $t=0$. $u_C(0) = \frac{UR_3}{R_1 + R_2 + R_3}$ - определяется из схемы до коммутации. Пусть в этой схеме

требуется отыскать $i_3(t)$: $i_3(t) = i_{3уст} + Ae^{-\frac{t}{\tau}}$; $i_3(0) = \frac{u_C(0)}{R_3}$

$$\tau = C \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}; \quad i_{3уст} = \frac{U}{R_2 + R_3}.$$

Для определения A составим уравнение:

$$\frac{U}{R_2 + R_3} + A = \frac{U}{R_1 + R_2 + R_3}, \Rightarrow A = -U \frac{R_1}{(R_2 + R_3)(R_1 + R_2 + R_3)}.$$

Результат:

$$i_3(t) = \frac{U}{R_2 + R_3} - \frac{UR_1}{(R_2 + R_3)(R_1 + R_2 + R_3)} e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

Вышесказанное позволяет предложить следующий порядок анализа переходных процессов в цепях с одним накопителем:

1. Записываем решение: $x = x_{уст} + Ae^{-\frac{t}{\tau}}$.

2. $x_{уст}$ - определяется из схемы после коммутации.

3. τ - определяется как $\frac{L}{R_{\Sigma}}$ или CR_{Σ} , где R_{Σ} - эквивалентное сопротивление двухполюсника относительно накопителя с удаленными источниками.

4. Поиск $x(+0)$ для определения постоянной A проводится из послекоммутационной схемы для $t=0$. Эта схема отличается от схемы после коммутации тем, что в ней вместо накопителя отмечается его состояние до

коммутации. Это означает, что катушка индуктивности заменяется источником тока с током $J = i_L(-0)$, а конденсатор - источником ЭДС с $e = u_C(-0)$.

10.11. Переходные процессы в цепях с двумя накопителями

1. Разряд конденсатора на цепочку RL

Сначала рассмотрим задачи с двумя разнородными накопителями L и C. Причем, в отличие от задач с одним накопителем, задачу включения на синусоидальное

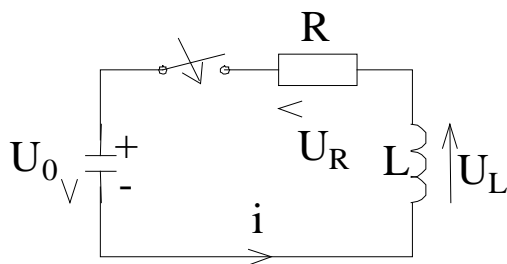


Рис. 10-17

напряжение рассматривать не будем из-за громоздкости выкладок и не наглядности результатов.

Рассмотрим задачу включения заряженного до напряжения U_0 конденсатора на цепочку R, L (рис. 10-17). После коммутации образуется одноконтурная схема с последовательно соединенными элементами R, L, C. Интегро-дифференциальное уравнение по второму закону Кирхгофа:

$$Ri + L \frac{di}{dt} + \int_0^t i dt + u_C(0) = 0$$

Продифференцировав, получаем дифференциальное уравнение второго порядка относительно тока:

$$L \frac{d^2 i}{dt^2} + R \frac{di}{dt} + \frac{i}{C} = 0$$

Заметим еще раз, что порядок дифференциального уравнения относительно любого переменного определяется количеством независимых переменных. Решение такого уравнения:

$$i = i_{уст} + A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t}$$

Рано или поздно конденсатор разрядится и энергия, запасенная в нем, рассеется на резисторе:

$$i_{уст} = 0$$

Характеристическое уравнение - квадратное:

$$p^2 + \frac{R}{L} p + \frac{1}{LC} = 0$$

Его пара корней

$$p_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}.$$

Уравнения для поиска постоянных интегрирования определим из следующих соображений.

Во-первых, из закона коммутации для индуктивности $i_L(+0) = i_L(-0) = 0$

$$(A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t})_{\text{при } t=0} = 0, \text{ т.е. } A_1 = -A_2$$

Во-вторых, при $t=+0$, когда ток и напряжение на активном сопротивлении равны нулю, должно соблюдаться равенство

$$\left(L \frac{di}{dt} \right)_{\text{при } t=0} = u_C(+0) = u_C(-0) = -U_0.$$

Эти два уравнения, с использованием двух законов коммутации, позволяют определить A_1 и A_2 :

$$L(p_1 A_1 + p_2 A_2) = -U_0; \quad A_1 = -A_2 = -\frac{U_0}{L(p_1 - p_2)}.$$

Получим выражение для тока:

$$i = -\frac{U_0}{L(p_1 - p_2)} (e^{p_1 t} - e^{p_2 t})$$

Напряжение на L:

$$u_L = L \frac{di}{dt} = -\frac{U_0}{p_1 - p_2} (p_1 e^{p_1 t} - p_2 e^{p_2 t})$$

Напряжение на C:

$$u_C = \frac{1}{C} \int_0^t i dt + U_0 = -\frac{1}{LC} \frac{U_0}{p_1 - p_2} \left[\frac{e^{p_1 t}}{p_1} - \frac{e^{p_2 t}}{p_2} \right] + U_0$$

Принимая во внимание, что $p_1 p_2 = \frac{1}{LC}$ после преобразований получим:

$$u_C = \frac{-U_0}{p_1 - p_2} (p_2 e^{p_1 t} - p_1 e^{p_2 t}).$$

В зависимости от корней характеристического уравнения возможны три варианта:

1. Корни вещественны, различны: $\frac{R^2}{4L^2} > \frac{1}{LC}$, при этом $p_1 < 0$; $p_2 < 0$; $|p_2| > |p_1|$.

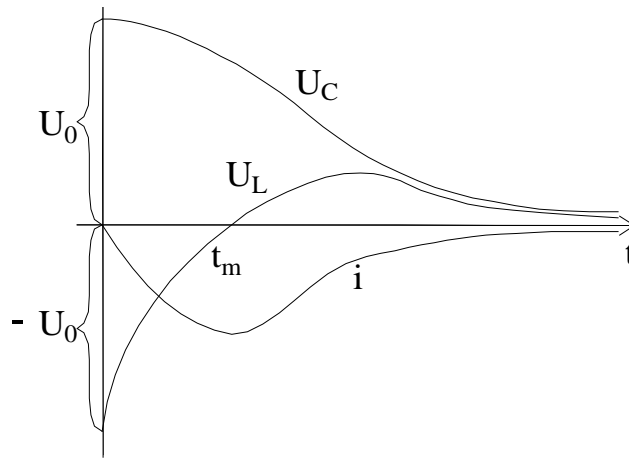


Рис. 10-18

Поэтому $(p_1 - p_2) > 0$; $(e^{p_1 t} - e^{p_2 t}) > 0$.

Из этого заключаем, что ток не меняет своего знака, оставаясь отрицательным относительно условно выбранного направления (рис.10-18). Максимум величины тока достигается при условии $\frac{di}{dt} = 0$, т.е. $p_1 e^{p_1 t} = p_2 e^{p_2 t}$, $t_m = \frac{1}{p_1 - p_2} \ln \frac{p_2}{p_1}$. При этом же условии $U_L = 0$. Можно показать, что U_L достигает максимума при $t = 2t_m$. В связи с неизменностью направления тока, напряжение на емкости все время остается положительным - емкость только разряжается. Графики изменения i , u_L и u_C , представленные на рис. 10-18, выражают т.н. апериодический процесс.

2. Корни вещественные и равные $\frac{R^2}{4L^2} = \frac{1}{LC}$. При этом выражения для i , u_L и u_C становятся неопределенными $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Для раскрытия неопределенности представим $p_2 = \text{const}$, а $p_1 \rightarrow p_2$.

Тогда

$$i = \lim_{p_1 \rightarrow p_2} \left\{ -\frac{U_0}{L(p_1 - p_2)} (e^{p_1 t} - e^{p_2 t}) \right\} = -\frac{U_0}{L} t e^{p_2 t}$$

$$u_L = L \frac{di}{dt} = -U_0 (pt + 1) e^{pt}$$

$$u_C = -U_0 (pt - 1) e^{pt}$$

Заметим, что при равных корнях всегда приходится раскрывать неопределенность и общий вид решения дифференциального уравнения второго порядка будет типа:

$$i = i_{ycm} + (B_1 t + B_2) e^{pt}$$

Вид осциллограмм такой же и носит характер предельного случая апериодического разряда. Малейшее изменение параметров, например уменьшение R , приводит к третьему варианту.

3. Корни комплексные: $p_{1,2} = -d \pm jw$.

Колебательный процесс.

Этот случай возникает при $\frac{R^2}{4L^2} < \frac{1}{LC}$. Обычно в этом случае вводят обозначения

$$d = \frac{R}{2L}; \quad \frac{1}{\sqrt{LC}} = w_0; \quad \sqrt{w_0^2 - d^2} = w.$$

В показательной форме $p_{1,2} = w_0 e^{jq}$; $\Theta = \arctg\left(-\frac{w}{d}\right)$. Поскольку $\sin \Theta = \frac{w}{w_0} > 0$, а $\cos \Theta = -\frac{d}{w_0} < 0$, то $\frac{p}{2} < \Theta < p$.

При приведенных выше обозначениях получим:

$$i = -\frac{U_0}{2jwL} \left[e^{(-d+jw)t} - e^{(-d-jw)t} \right] = -\frac{U_0}{wL} e^{-dt} \frac{e^{jwt} - e^{-jwt}}{2j}.$$

Преобразуя по формуле Эйлера, получим:

$$i = -\frac{U_0}{wL} e^{-dt} \sin wt.$$

$$\begin{aligned} u_L = L \frac{di}{dt} &= -\frac{U_0}{w} \left[-d e^{-dt} \sin wt + w e^{-dt} \cos wt \right] = \\ &= -U_0 \frac{w_0}{w} e^{-dt} \left[-\frac{d}{w_0} \sin wt + \frac{w}{w_0} \cos wt \right] = \\ &= -U_0 \frac{w_0}{w} e^{-dt} \sin(wt + \Theta) \end{aligned}$$

Приведем без вывода:

$$u_C = -U_0 \frac{w_0}{w} e^{-dt} \sin(wt - \Theta).$$

В случае комплексных корней характеристического уравнения возникает колебательный процесс. Поэтому решение можно искать в виде:

$$x(t) = x(\infty) + M e^{-dt} \sin(wt + y).$$

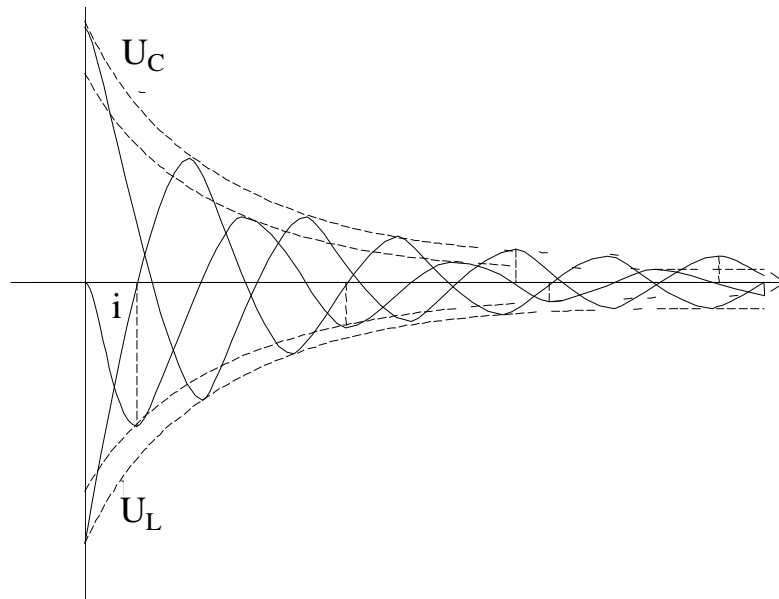
В этом случае в качестве постоянных интегрирования выступает А и У.

Можно также пользоваться выражением:

$$x(t) = x(\infty) + (M_1 \cos wt + M_2 \sin wt) e^{-dt}.$$

Из одной формулы к другой можно перейти, если учесть соотношения:

$$M = \sqrt{M_1^2 + M_2^2} \quad y = \arctg \frac{M_2}{M_1}$$



;

Рис. 10-19

Для построения осциллограммы надо учесть следующие обстоятельства:

1. Все кривые имеют форму синусоид с амплитудами, уменьшающимися по экспоненциальному закону (e^{-dt}) .

2. Ток начинается с нуля и с частотой w совершает затухающие колебания так, что огибающая является экспонентой $A = e^{-dt}$.

3. Напряжение на катушке индуктивности совершает колебания с той же частотой w и затуханием e^{-dt} , начинаясь с величины $-U_0$. При этом в те моменты времени, когда ток проходит точки экстремума, напряжение на катушке u_L проходит через ноль

$$\left(u_L = L \frac{di}{dt} \right).$$

4. В соответствии с соотношением $i = C \frac{du_C}{dt}$ в те моменты времени, когда ток проходит через ноль, напряжения на емкости достигают экстремумов.

Характер кривых показывает, что происходит колебательный обмен энергией между конденсатором и катушкой. Поскольку при этом обмене ток проходит через резистор, происходит рассеивание энергии и процесс затухает.

В предельном случае при $R=0$ (контур без потерь) такой колебательный процесс устойчив ($d=0$):

$$i = -\frac{U_0}{w_0 L} \sin w_0 t.$$

2. Включение цепи RLC на постоянное напряжение

При решении задач включения цепи RLC на постоянное напряжение интегро-дифференциальное уравнение (после дифференцирования) ничем не будет отличаться от предыдущего случая.

$$L \frac{d^2 i}{dt^2} + R \frac{di}{dt} + \frac{i}{C} = 0$$

Установившийся ток будет равен нулю.

Отличаться (только по знаку) будут постоянные интегрирования, которые находятся из системы уравнений:

$$A_1 + A_2 = 0$$

$$L(A_1 p_1 + A_2 p_2) = U \quad (\text{а не } -U_0, \text{ как в предыдущей задаче}).$$

Поэтому, не повторяя математических выкладок, можно записать:

$$i = \frac{U}{L(p_1 - p_2)} (e^{p_1 t} - e^{p_2 t})$$

$$u_L = \frac{U}{p_1 - p_2} (p_1 e^{p_2 t} - p_2 e^{p_1 t})$$

$$u_C = u_{уст} + \frac{U}{p_1 - p_2} (p_2 e^{p_1 t} - p_1 e^{p_2 t})$$

Осциллограммы токов и напряжений на емкости для аperiodического и периодического процессов приведены на рис. 10-20 а) и б).

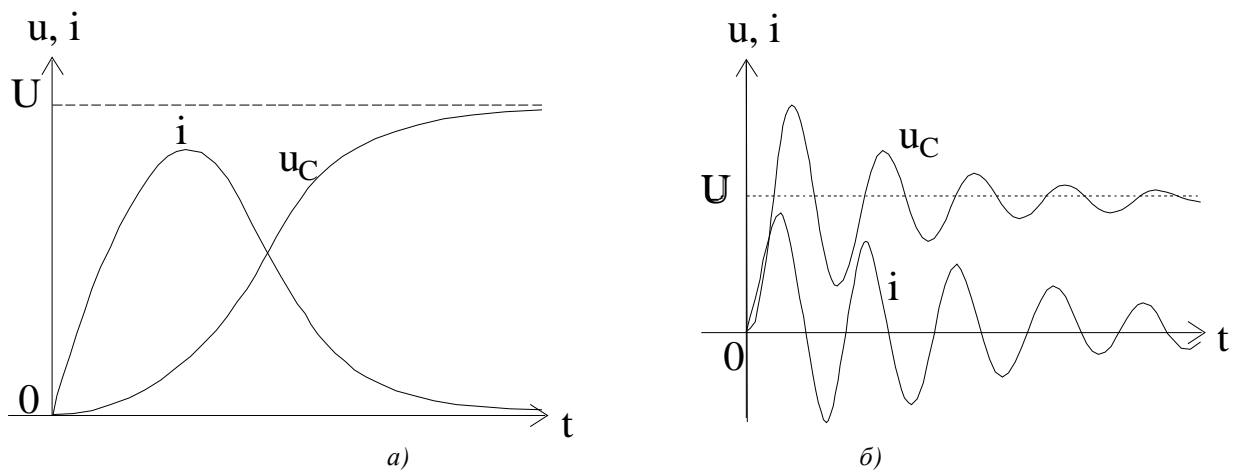


Рис. 10-20

10.12. Практические приемы решения задач анализа переходных процессов с двумя и более накопителями

При поиске переходных процессов в разветвленных цепях с двумя и более накопителями возникают очевидные сложности в выделении из системы интегродифференциальных уравнений одного уравнения с одним неизвестным и поиском постоянных интегрирования. Существует прием, позволяющий составлять характеристическое уравнение без составления и преобразования систем интегродифференциальных уравнений. Он основан на следующем. Характеристическое уравнение составляется для однородного уравнения, т.е. схемы без источников. Источниками сигналов в такой системе являются накопители с запасенной в них энергией. Поэтому такое уравнение будет одинаково для схем, которые отличаются

друг от друга только местом включения источников напряжения или источников тока. Это уравнение образуется путем замены дифференцирования умножением на оператор p . Нет препятствий для того, чтобы эту операцию проводить не после преобразования системы уравнений, а до преобразования. В такой системе дифференцирование соответствует выражению напряжения через индуктивность:

$$u_L = L \frac{di}{dt} \Rightarrow pLi$$

Интегрирование проводится там, где выражается напряжение на конденсаторе:

$$u_C = \frac{1}{C} \int_0^t i dt + u_C(0) \Rightarrow \frac{1}{pC}$$

Поскольку для образования дифференциальных уравнений производят дифференцирование, то постоянные типа $u_C(0)$ исчезают.

Вспомним, что аналогичный метод мы применяли при алгебраизации системы уравнений в обоснование комплексного метода. Вместо p там применялся множитель jw . Применение этого метода привело нас к понятию о комплексном сопротивлении $Z(jw)$ и комплексной проводимости $Y(jw)$, которыми можно характеризовать двухполюсник с точки зрения любой пары зажимов. Формирование входных сопротивлений и проводимостей заключалось в замене катушки ее сопротивлением

jwL , конденсатора - $\frac{1}{jwC}$ при оставлении резисторов R без изменения. Затем было достаточно тем или иным способом выразить эквивалентное сопротивление или проводимость. После определения $Z(jw)$ или $Y(jw)$ достаточно было составить уравнение

$$IZ(jw) = E \text{ в случае источника ЭДС}$$

или

$$EY(jw) = J \text{ в случае источника тока.}$$

В нашем случае, поскольку речь идет об однородном уравнении, уравнении без правой части, в котором источники отсутствуют, этим уравнениям соответствуют соотношения:

$$IZ(p) = 0 \text{ или } UY(p) = 0$$

При ненулевых токах или напряжениях решениями будут

$$Z(p) = 0 \text{ или } Y(p) = 0$$

Указанные обстоятельства обосновывают довольно простой способ составления характеристического уравнения непосредственно по схеме цепи. Схема должна быть изображена без источников с конфигурацией, образовавшейся после коммутации.

Относительно любых двух узлов (можно даже простых, где соединяются два двухполюсника) составляется эквивалентная комплексная проводимость, в которой jw заменяется на p и приравняется нулю $Y_{\Delta}(p) = 0$. Можно также разорвать в любом месте цепь и выразить сопротивление $Z_{\Delta}(jw)$ относительно этих двух узлов. Далее,

заменяя $j\omega = p$ получаем уравнение $Z(p)=0$. Корни этого уравнения и будут корнями характеристического уравнения. Далее можно записать решение в виде:

$$x = x_{уст} + \sum_1^n A_k e^{p_k t}$$

К сожалению, более простых способов поиска постоянных интегрирования A_k , чем изложены выше, не предложено. Приходится через найденную переменную определять начальные состояния: токи через катушки индуктивности $i_L(-0)$ и напряжения на конденсаторах $u_C(-0)$, и таким образом, пользуясь законами коммутации, составлять достаточное количество уравнений для поиска постоянных A_k . Упрощают дело только принципиально другие методы - интегральные преобразования, о которых речь пойдет ниже.

Анализ переходных процессов при внезапных изменениях параметров цепи, а не только при включении и выключении источников, практически не отличается от изложенного выше. Также анализируется несколько схем:

1. Схема до коммутации; из нее получается информация о начальных условиях.
2. Схема после коммутации, из которой рассчитывается установившийся режим.
3. Схема для $t=+0$, на которой фиксируется состояние накопителей; из нее можно рассчитать любой ток или напряжение для времени $t=+0$.
4. Составляется и решается характеристическое уравнение.

Этих данных достаточно, чтобы получить решение по любой переменной с точностью до постоянных интегрирования. Последние находятся как указано выше.

10.13. Анализ переходных процессов при некорректных коммутациях

Существуют задачи, когда коммутация заключается в изменении параметра самого накопителя.

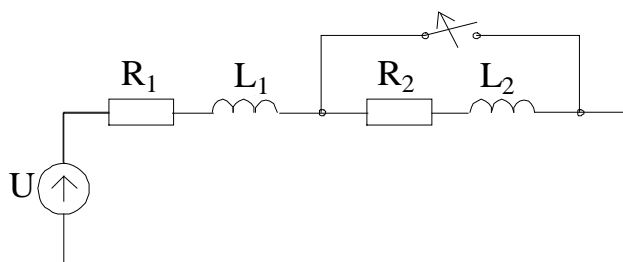


Рис. 10-21

Рассмотрим особенности решения таких задач на двух примерах.

Особенность задачи, представленной на рис. 10-21 заключается в том, что до коммутации контур содержал катушку с индуктивностью L_1 с током $i_1(-0) = \frac{U}{R_1}$, а сразу после коммутации через обе катушки протекает один и тот же ток и, очевидно, отличающийся от тока i_1 , т.к. $i_2(-0)=0$. Т.е. мы вынуждены вопреки применяемому выше закону коммутации $i_L(+0)=i_L(-0)$ допустить скачкообразное изменение тока

через катушку индуктивности. Такое допущение приводит к возникновению бесконечно больших напряжений на обеих катушках. Чтобы не погрешить против второго закона Кирхгофа мы должны предположить их равенство:

$$L_1 \frac{di_1}{dt} = -L_2 \frac{di_2}{dt}$$

Тогда эти напряжения в сумме будут уравнивать друг друга. Таким образом мы имеем дело с бесконечно большими напряжениями, которые и способны вызвать скачки тока в катушках.

В этом примере видны слабости предположения об идеальной, безыскровой коммутации. Вряд ли существует такой ключ, который способен провести размыкание при бесконечно большом напряжении на его контактах. В этом смысле термина некорректная коммутация. Но тем не менее будем решать задачу при такой идеализации.

Проинтегрируем полученное равенство для напряжений в пределах бесконечно малого промежутка времени от $t_1 = -0$ до $t_2 = +0$:

$$\int_{-0}^{+0} L_1 \frac{di_1}{dt} dt = - \int_{-0}^{+0} L_2 \frac{di_2}{dt} dt$$

Получим:

$$L_1 i_1(+0) - L_1 i_1(-0) = -L_2 i_2(+0) + L_2 i_2(-0)$$

или

$$L_1 i_1(+0) + L_2 i_2(+0) = L_1 i_1(-0) + L_2 i_2(-0).$$

Вспомнив, что произведение $Li = \Psi$ - потокосцепление катушки, получим формулировку обобщенного закона коммутации: полное потокосцепление до коммутации равно полному потокосцеплению после коммутации $\Psi(+0) = \Psi(-0)$.

Применяя обобщенный закон коммутации к нашему случаю, где $i_1(+0) = i_2(+0) = i(+0)$; $i_2(-0) = 0$ получим:

$$i(+0) = \frac{L_1}{L_1 + L_2} i_1(-0) = \frac{U}{R_1} \frac{L_1}{L_1 + L_2}.$$

Найдя $t = \frac{L_1 + L_2}{R_1 + R_2}$ и $i_{уст} = \frac{U}{R_1 + R_2}$, получим

$$i(t) = \frac{U}{R_1 + R_2} + A e^{-\frac{t}{t}},$$

где A определяется из уравнения $\frac{U}{R_1 + R_2} + A = \frac{U}{R_1} \frac{L_1}{L_1 + L_2}$.

Получим решение в виде:

$$i(t) = \frac{U}{R_1 + R_2} + U \left[\frac{L_1}{(L_1 + L_2)R_1} - \frac{1}{R_1 + R_2} \right] e^{-\frac{t}{t}}.$$

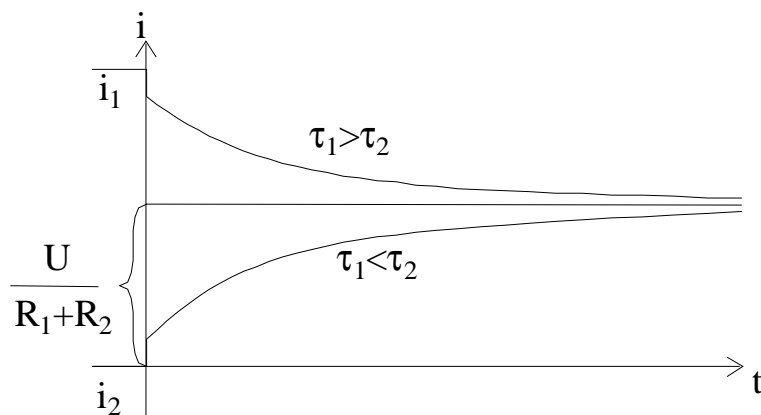


Рис. 10-22

При построении графика надо иметь в виду, что постоянная интегрирования может быть положительна, отрицательна и равна нулю в зависимости от соотношения постоянных времени двух реальных катушек:

$$t_1 = \frac{L_1}{R_1} \quad \text{и} \quad t_2 = \frac{L_2}{R_2}.$$

При $t_1 > t_2$; $A > 0$, при $t_1 < t_2$; $A < 0$.

Таким образом, в момент коммутации ток скачком меняется (для первой индуктивности снижается, а для второй увеличивается) до величины $\frac{U}{R_1} \frac{L_1}{L_1 + L_2}$, а затем, в зависимости от соотношения между t_1 и t_2 увеличивается или спадает до установившегося значения.

Рассмотрим случай некорректной коммутации в цепи с конденсатором (рис. 10-23).

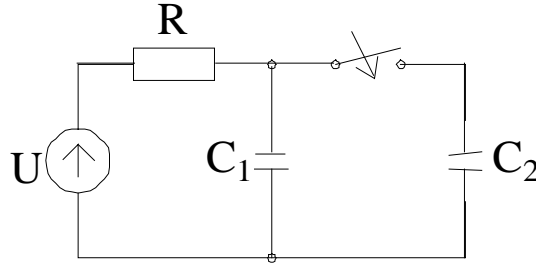


Рис. 10-23

Здесь некорректность коммутации заключается в том, что в результате замыкания ключа два конденсатора, заряженных до разных напряжений, оказываются включенными параллельно и неизбежен скачок напряжения на емкости. Такой скачок в соответствии с применяемым ранее законом коммутации возможен только при бесконечно большом токе, протекающем по ключу в момент коммутации.

$$C_1 \frac{du_1}{dt} = -C_2 \frac{du_2}{dt},$$

где u_1 и u_2 - напряжения на соответствующих конденсаторах.

Проинтегрировав их от $t_1 = -0$ до $t_2 = +0$ получим:

$$\int_{-0}^{+0} C_1 \frac{du_1}{dt} dt = - \int_{-0}^{+0} C_2 \frac{du_2}{dt} dt;$$

$$C_1 u_1(+0) - C_1 u_1(-0) = -C_2 u_2(+0) + C_2 u_2(-0)$$

или

$$(C_1 + C_2) u_c(+0) = C_1 u_1(-0) + C_2 u_2(-0),$$

где $u_c(+0)$ - общее для обоих конденсаторов напряжение после коммутации.

Получили обобщенный закон коммутации: суммарный заряд конденсаторов не может измениться мгновенно в результате коммутации.

$$q(+0) = q(-0), \text{ где } q = CU$$

Получаем:

$$u_c(+0) = \frac{C_1}{C_1 + C_2} u_1(-0) = \frac{C_1}{C_1 + C_2} U$$

$$t = R(C_1 + C_2)$$

Значит:

$$u_c(t) = U + A e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$A = \frac{C_1}{C_1 + C_2} U - U$$

Окончательно:

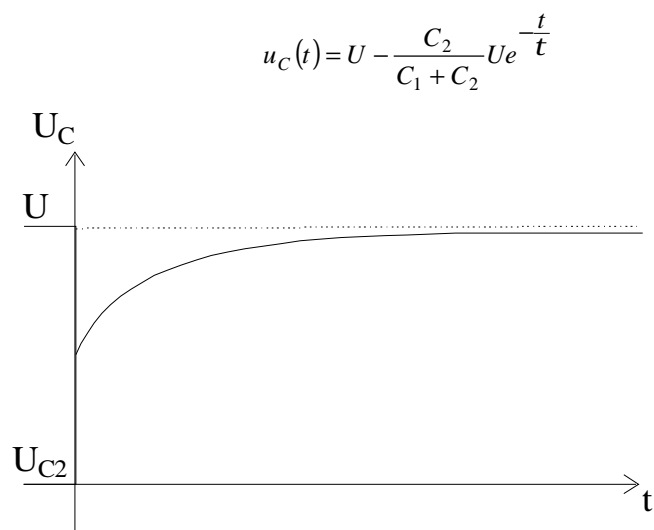


Рис. 10-24

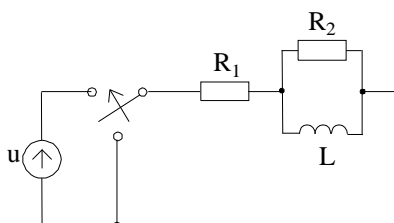
Это можно понять так, что в момент $t=+0$ напряжение на C_1 падает, а на C_2 возрастает до $U \frac{C_1}{C_1 + C_2}$ и затем напряжение, одинаковое для обоих конденсаторов, возрастает до U .

Контрольные вопросы к теме 10

1. Какова природа возникновения переходного процесса?
2. В чем сущность законов коммутации?
3. Каков порядок расчета переходных процессов?
4. Нарисуйте осциллограммы изменения тока через катушки индуктивности в простых цепях с одной индуктивностью при различных коммутациях с источником постоянного напряжения.
5. То же с источником синусоидального напряжения.
6. Каковы решения задач в простых цепях с одним конденсатором и источником постоянного напряжения? Синусоидального напряжения?
7. Как определить начальные значения любого тока или напряжения в цепях с одним накопителем?
8. Как определить постоянную времени в цепях с одним накопителем?
9. Каковы общие формулы решений задач анализа переходных процессов при различных корнях характеристического уравнения? Каковы осциллограммы?
10. Как определить корни характеристического уравнения, не составляя системы интегро-дифференциальных уравнений?
11. Каков порядок определения постоянных интегрирования?
12. Что такое некорректная коммутация? Как определять начальные условия при некорректной коммутации?

Контрольные задачи к теме 10

I Определить $i_L(t)$, построить осциллограмму.

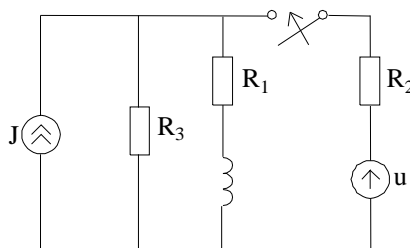


$$u = 10 \cdot \sin 200\pi t ;$$

$$R_1 = 2 \text{ Ом} ; R_2 = 6 \text{ Ом} ;$$

$$L = 4,0 \text{ мГн} .$$

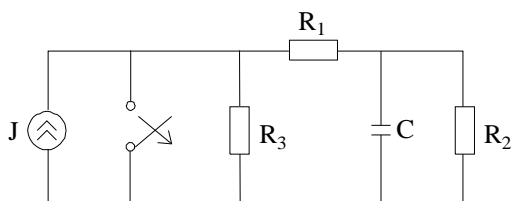
II Определить i_3 , построить осциллограмму.



$$R_1 = 8,0 \text{ Ом} ; R_2 = 10 \text{ Ом} ; R_3 = 12 \text{ Ом}$$

$$L = 8 \text{ мГн} ; u = 10 \text{ В} ; J = 1 \text{ А}$$

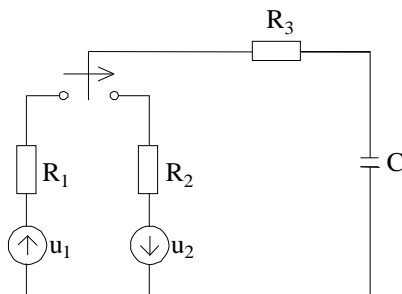
III Определить i_1 , построить осциллограмму.



$$R_1 = 30 \text{ кОм} ; R_2 = 20 \text{ кОм} ; R_3 = 40 \text{ кОм} ; C = 0,1 \text{ мкФ} ;$$

$$J = 10 \text{ мА} .$$

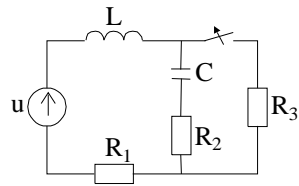
IV Определить i_2 , построить осциллограмму.



$$C = 2,0 \text{ мкФ} ; R_1 = 1 \text{ кОм} ; R_2 = 2 \text{ кОм} ; R_3 = 3 \text{ кОм} ;$$

$$U_1 = 10 \text{ В} = U_2 .$$

V | Определить i_c , построить осциллограмму.



$R_1 = R_3 = 100 \text{ Ом}$; $R_2 = 10 \text{ Ом}$; $L = 10 \text{ мГн}$; $C = 10 \text{ мкФ}$.

Тема 11. Применение интеграла Дюамеля для расчета переходных процессов

11.1. Переходные характеристики цепи

Результаты расчета переходных процессов при включении источников постоянного напряжения можно представить в виде двух сомножителей: величины напряжения источника и некоторой функции времени. Эту функцию по смыслу можно назвать переходной характеристикой.

Например при включении R, L, C цепи:

$$i(t) = U \frac{1}{L(P_1 - P_2)} \left(e^{P_1 t} - e^{P_2 t} \right) = UY(t).$$

При включении RC цепи:

$$U_c = U \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}} \right) = Uh(t),$$

где $Y(t)$ и $h(t)$ соответствующие переходные характеристики. В частном случае ($Y(t)$) такую характеристику называют переходной проводимостью. Обратим внимание, что эта функция определяется только параметрами электрической цепи. Можно сказать, что переходная характеристика есть функция времени, выражающая результат подачи на вход единичного напряжения (импульсной функции нулевого порядка):

$$1(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0 \\ 1 & \text{при } t > 0 \end{cases}.$$

Эту функцию в математике называют единичной функцией Хевисайда. Если импульс воздействует в момент времени t_1 , то это можно выразить:

$$1(t - t_1) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < t_1 \\ 1 & \text{при } t > t_1 \end{cases}.$$

Импульсную функцию первого порядка определяют как:

$$d(t) = \begin{cases} \infty & \text{при } t = 0 \\ 0 & \text{при } t \neq 0 \end{cases},$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} d(t) dt = 1$$

причем

Эта, так называемая, d -функция Дирака.

Такую функцию можно представить себе как включение бесконечно большого напряжения в момент $t = 0$ и через $\Delta t \rightarrow 0$ включение встречно такого же напряжения.

При этом величина импульса $\int_{-\infty}^{\infty} d(t) dt$ остается постоянной.

Так как $d(t)=0$ при $t < 0$, можно считать, что $i'(t)=d(t)$.

Т.е. производная единичной функции есть d -функция.

Исходя из такого понимания, расчет можно провести, найдя результат воздействия переднего фронта импульса величиной $E \rightarrow \infty$: $EY(t)$ и через $t = \Delta t \rightarrow 0$ воздействия заднего фронта импульса $-EY(t - \Delta t)$.

$$i(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} [EY(t) - EY(t - \Delta t)] = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} E\Delta t \frac{Y(t) - Y(t - \Delta t)}{\Delta t} = KY'(t),$$

где $E\Delta t = K$,

$Y'(t)$ - производная по времени переходной характеристики (проводимости) цепи.

Например для цепи RL при воздействии импульса первого порядка

$$i(t) = K \left[\frac{1}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right) \right]' = \frac{K}{L} e^{-\frac{R}{L}t}.$$

Это можно трактовать так. При воздействии переднего фронта импульса (напряжения бесконечно большой величины) скачком устанавливается ток величиной $\frac{K}{L}$ и затем после воздействия заднего фронта импульса ток спадает до нуля (рис. 11-1)

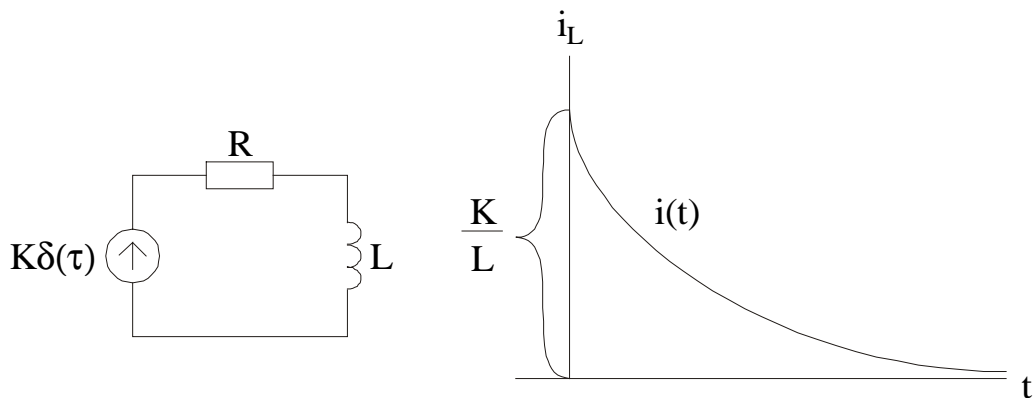


Рис. 11-1

11.2. Расчет цепей при воздействии ЭДС произвольной формы

Напряжение любой формы всегда можно приближенно выразить как последовательное включение ступенек напряжения ΔU производимое через промежутки времени Δt .

Используя понятие переходной характеристики с учетом сдвига по времени воздействия каждой ступеньки напряжения, как показано на рис. 11-2, можно любую реакцию цепи приближенно выразить:

$$f(t) = u(0)h(t) + \sum_{x=0}^t \Delta u h(t-x) = u(0)h(t) + \sum_{x=0}^t \frac{\Delta u}{\Delta x} h(t-x)\Delta x.$$

Переходя к бесконечно малым величинам $\Delta x \rightarrow 0$; $\Delta U \rightarrow 0$, получим

$$f(t) = u(0)h(t) + \int_0^t \frac{du(x)}{dx} h(t-x) dx$$

Имея ввиду, что $\frac{du}{dx} = u'(x)$, получим одну из форм интеграла Дюамеля, иначе называемого интегралом наложения:

$$f(t) = u(0)h(t) + \int_0^t u'(x) h(t-x) dx$$

Возьмем интеграл по частям:

$$\begin{aligned} \int_0^t u'(x) h(t-x) dx &= \left| h(t-x) u(x) \right|_0^t + \int_0^t u(x) h'(t-x) dx = \\ &= h(0)u(t) - h(t)u(0) + \int_0^t u(x) h'(t-x) dx \end{aligned}$$

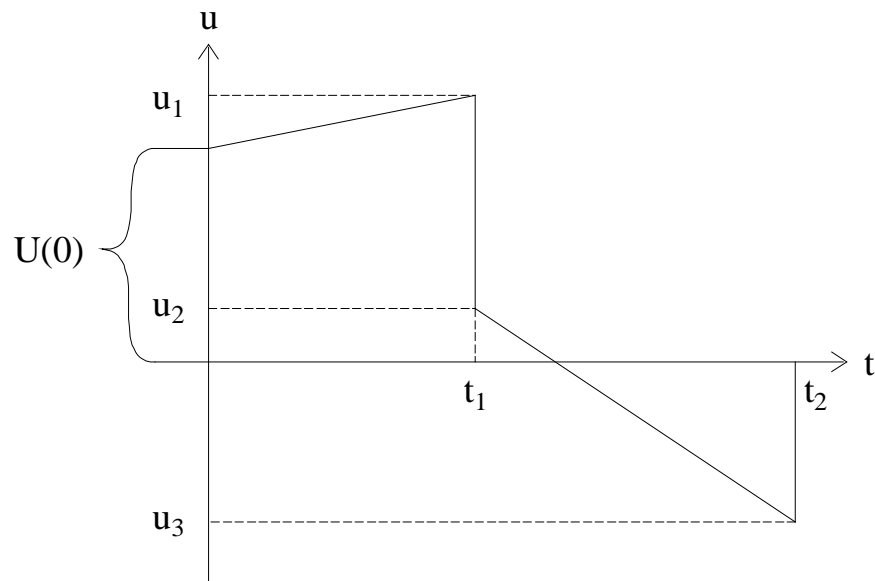


Рис. 11-2

Подставив в формулу первой формы интеграла, получим другую форму записи интеграла наложения, записанную через импульсную функцию:

$$f(t) = h(0)U(t) + \int_0^t U(x) h'(t-x) dx$$

Существуют и другие формы интеграла Дюамеля.

Применению этого метода расчета не препятствует наличие скачков напряжения в источнике. Например для импульса, показанного на рис.11-3, решение запишется в виде:

$$f(t) = u(0)h(t) + \int_0^t \frac{(u_1 - u_2)}{t_1} h(t-x) dx,$$

для $0 < t < t_1$

$$f(t) = u(0)h(t) + \int_0^{t_1} \frac{(u_1 - u_2)}{t_1} h(t-x) dx - \\ - (u_1 - u_2)h(t-t_1) - \int_{t_1}^t \frac{(u_2 - u_3)}{t_2 - t_1} h(t-x) dx,$$

для $t_1 < t < t_2$.

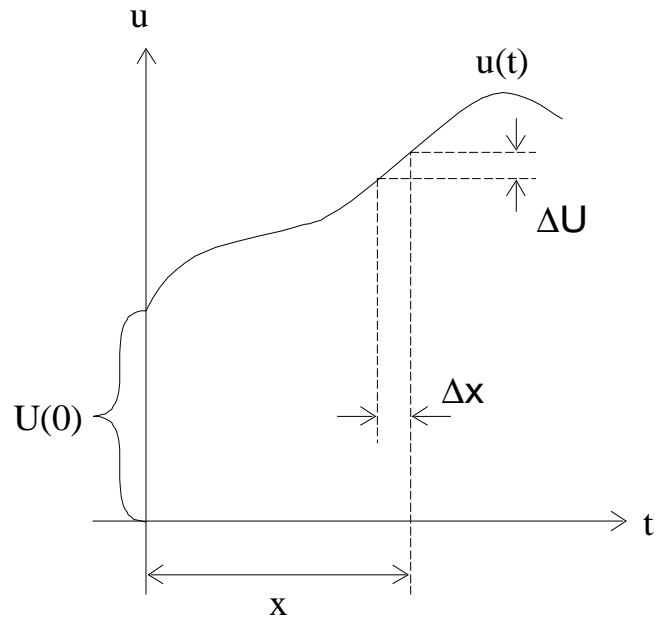


Рис. 11-3

Наконец

$$f(t) = u_0 h(t) + \int_0^{t_1} \frac{(u_1 - u_2)}{t_1} h(t-x) dx - (u_1 - u_2)h(t-t_1) - \\ - \int_{t_1}^{t_2} \frac{(u_2 - u_3)}{t_2 - t_1} h(t-x) dx + (U_3)h(t-t_2)$$

для $t > t_2$.

Для расчета реакции цепи при воздействии на нее ЭДС произвольной формы необходимо:

1. Рассчитать реакцию этой цепи при воздействии единичного напряжения, получив тем самым переходную характеристику.
2. Разбив кривую ЭДС на участки, удобные для аппроксимации, записать интеграл с учетом скачков напряжения в заданные моменты времени.

Рассмотрим поучительный пример заряда накопителя (емкости) от источника напряжения:

$$u(t) = U \left(1 - e^{-\frac{t}{T}} \right)$$

Схема и кривая напряжения изображены на рис. 11-4.

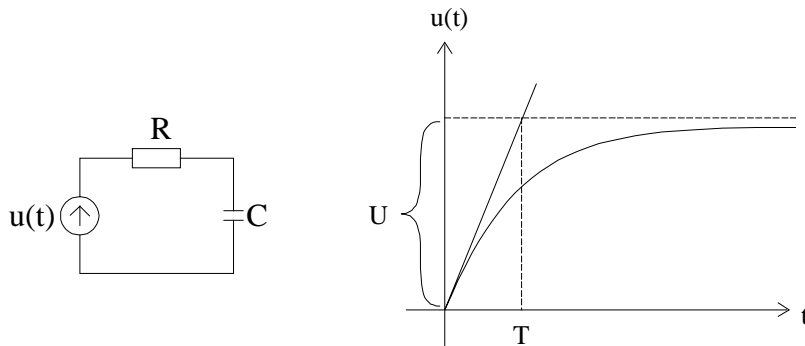


Рис. 11-4

Очевидно, что рано или поздно емкость зарядится до напряжения U . Представляет интерес КПД процесса заряда.

Определим ток, используя интеграл Дюамеля

$$u(0) = 0; \quad U'(t) = \frac{U}{T} e^{-\frac{t}{T}} \quad \text{и} \quad U'(x) = \frac{U}{T} e^{-\frac{x}{T}}$$

$$h(t) = Y(t) = \frac{1}{R} e^{-\frac{t}{T}}, \quad \text{где } t = RC; \quad h(t-x) = \frac{1}{R} e^{-\frac{t}{T}} e^{-\frac{x}{T}};$$

Получим

$$i(t) = \int_0^t \frac{1}{R} e^{-\frac{t}{T}} e^{-\frac{x}{T}} \frac{U}{T} e^{-\frac{x}{T}} dx = \frac{U}{R T} \left(e^{-\frac{t}{T}} - e^{-\frac{t}{T}} \right)$$

Потери на резисторе:

$$W_R = \int_0^\infty i^2 R dt = \frac{U^2}{R} \frac{t^2}{(T-t)^2} \int_0^\infty \left(e^{-\frac{2t}{T}} - 2e^{-\left(\frac{1}{T} + \frac{1}{t}\right)t} + e^{-\frac{2t}{t}} \right) dt = \frac{CU^2}{2} \frac{t}{t+T}.$$

КПД процесса:

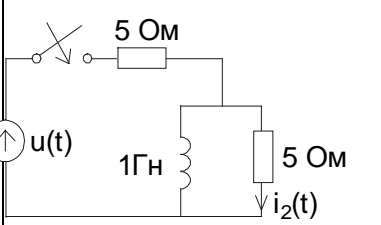
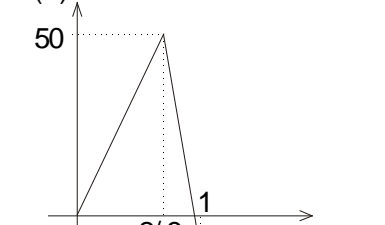
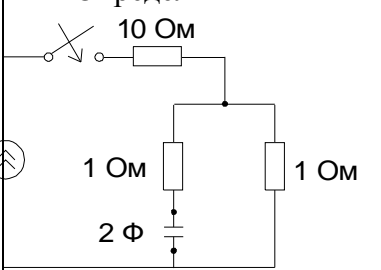
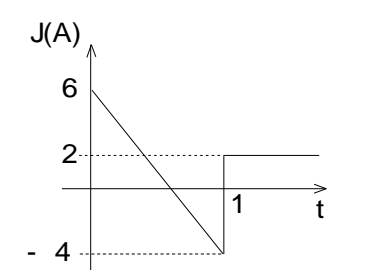
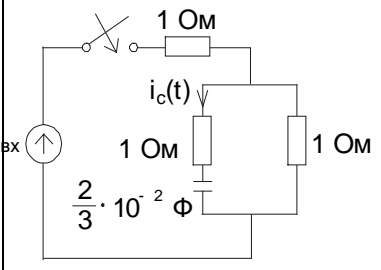
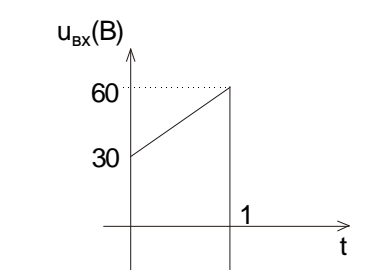
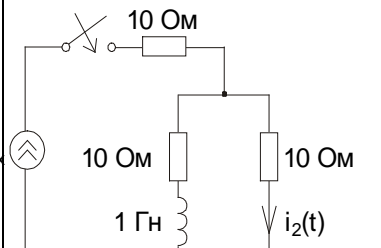
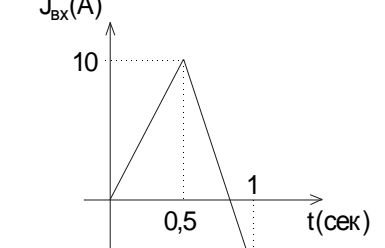
$$h = \frac{\frac{CU^2}{2}}{\frac{CU^2}{2} \left(1 + \frac{t}{t+T} \right)} = \frac{t+T}{T+2t}.$$

При $T \rightarrow 0$ - включение на постоянное напряжение $h \rightarrow 0,5$. По мере роста T процесс заряда замедляется, но КПД возрастает. К примеру при $T = t$; $h = \frac{2}{3}$; при $T = 2t$; $h = \frac{3}{4}$.

Контрольные вопросы к теме 11

1. Что такое переходная проводимость цепи? Как она определяется?
2. Что такое импульсная характеристика цепи? Как она определяется?
3. Почему при воздействии на цепь импульса напряжения первого порядка возможен скачок тока через индуктивность?
4. Запишите порядок применения интеграла Дюамеля для анализа переходных процессов. Как определяются все элементы интеграла?
5. Какому слагаемому соответствует скачок напряжения в момент времени t_1 ?
6. Как можно увеличить КПД заряда емкости?

Контрольные задачи к теме 11

<p>I</p> <p>1</p>	<p>Определить $i_2(t)$.</p> 	
<p>II</p> <p>2</p>	<p>Определить $u_c(t)$.</p> 	
<p>III</p> <p>3</p>	<p>Определить $i_c(t)$.</p> 	
<p>IV</p> <p>4</p>	<p>Определить $i_2(t)$.</p> 	

*Тема 12. Применение интегральных преобразований при расчете процессов в линейных цепях

12.1. Сущность преобразования Лапласа

Начнем с примера (рис. 12-1)

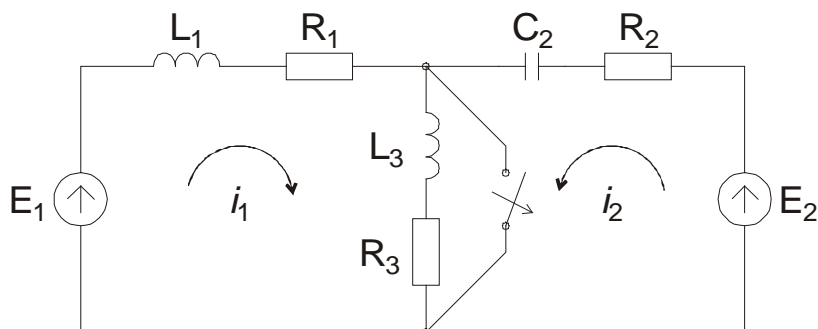


Рис. 12-1

Для решения задачи анализа переходных процессов требуется составить интегро-дифференциальные уравнения. Применив метод контурных токов, получим:

$$\begin{cases} (R_1 + R_3)i_1 + (L_1 + L_3)\frac{di_1}{dt} + R_3i_2 + L_3\frac{di_2}{dt} = e_1 \\ R_3i_1 + L_3\frac{di_1}{dt} + (R_2 + R_3)i_2 + L_3\frac{di_2}{dt} + \frac{1}{C_2}\int_0^t i_2 dt + u_C(0) = e_2 \end{cases}.$$

При решении этой системы уравнений встретятся, по крайней мере, две трудности:

Необходимо преобразовать уравнения к одному с одним неизвестным. В рассматриваемом примере это будет уравнение третьего порядка

$$a_3 \frac{d^3 x}{dt^3} + a_2 \frac{d^2 x}{dt^2} + a_1 \frac{dx}{dt} + a_0 x = b.$$

При этом из уравнения исчезает вся информация о начальных условиях.

Решение может быть получено с точностью до постоянных интегрирования

$$X = X_{уст} + A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t} + A_3 e^{p_3 t}.$$

Следует определить постоянные интегрирования A_1 ; A_2 ; A_3 .

Для этого через определяемую величину x выразить начальные состояния накопителей:

i_{L1} ; i_{L3} ; u_{C2} ; используя законы коммутации и знания о начальных токах и напряжениях накопителей, можно получить достаточное количество независимых уравнений для поиска постоянных. Понятно, что с увеличением сложности цепи (количества накопителей) трудоемкость решения существенно возрастает.

В теории функций комплексного переменного разработана такая замена функций времени их изображениями, которая позволяет избежать эти трудности. Одним из

таких преобразований является интегральное преобразование Лапласа. Здесь функции времени $f(t)$ заменяются функциями комплексного переменного $F(p)$ по формуле:

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt, \text{ где } p = \tau + j\eta.$$

Это записывается знаком « \doteq »

$$f(t) \doteq F(p) \text{ или } F(p) = L[f(t)].$$

Познакомившись со свойствами этого преобразования, мы увидим, что это дает возможность заменить систему интегро-дифференциальных уравнений алгебраическими. Кроме того в алгебраических уравнениях учитываются все начальные условия и при обратном переходе к функциям времени не требуется находить постоянные интегрирования. Правда возникает новая трудность обратного перехода от найденного изображения искомой реакции цепи к функции времени:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\tau_0 - j\infty}^{\tau_0 + j\infty} F(p) e^{pt} dp.$$

12.2. Свойства преобразования Лапласа

Существование (т.е. конечность) интеграла

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt$$

в математике доказано при условиях:

1. Функция удовлетворяет условиям Дирихле.
2. $f(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0 \\ f(t) & \text{при } t > 0. \end{cases}$
3. Функция растет не быстрее, чем показательная функция времени:
 $|f(t)| < M \cdot e^{\alpha t}$, где M и α положительные числа.

В технических приложениях и в частности в электротехнике п.п. 1 и 3 не проверяют, т.к. реальные сигналы в цепях и реакции этим условием обладают. Что касается п.2, то это как раз такие функции, которые нужны при анализе переходных процессов. Те токи и напряжения, которые существовали до момента коммутации учитываются в начальных условиях.

Очень важна взаимная однозначность прямого и обратного преобразования: если $F(p) \doteq f(t)$, то $f(t) \doteq F(p)$.

Свойство 1. Если оригинал умножается на постоянную величину, то изображение умножается на ту же постоянную. Т.е. если $f(t) \doteq F(p)$, то $Af(t) \doteq AF(p)$.

Это свойство непосредственно вытекает из свойств определенного интеграла.

Свойство 2. Изображение суммы есть сумма изображений, если $f_1(t) \stackrel{\cdot}{=} F_1(p)$ и $f_2(t) \stackrel{\cdot}{=} F_2(p)$, то

$$f_1(t) + f_2(t) \stackrel{\cdot}{=} F_1(p) + F_2(p).$$

Это свойство соответствует свойству интеграла - интеграл суммы есть сумма интегралов.

Свойство 3. Изображение постоянной есть она сама, деленная на оператор p .

Действительно:

$$F(p) = \int_0^{\infty} A \cdot e^{-pt} dt = \left\{ -\frac{A \cdot e^{-pt}}{p} \right\}_0^{\infty} = \frac{A}{p} \{1 - e^{-\infty} \cdot e^{-j\eta t}\} = \frac{A}{p}.$$

Свойство 4. Изображение производной.

Дано $f(t) \stackrel{\cdot}{=} F(p)$, найти изображение $f'(t)$. Возьмем интеграл по частям:

$$\int_0^{\infty} e^{-pt} \cdot f'(t) dt = \left\{ e^{-pt} \cdot f(t) \right\}_0^{\infty} - \int_0^{\infty} f(t) \left[-e^{-pt} \right]_0^{\infty} dt = pF(p) - f(0).$$

Последнее обусловлено тем, что e^{-pt} растет быстрее, чем $f(t)$. Многократное применение этого правила даст возможность находить преобразование n -ой производной

$$f^n(t) \stackrel{\cdot}{=} p^n \left[F(p) - \frac{f(0)}{p} - \frac{f'(0)}{p^2} - \dots - \frac{f^{(n-1)}(0)}{p^n} \right].$$

При нулевых начальных условиях

$$f'(t) \stackrel{\cdot}{=} pF(p); \quad f^{(n)}(t) \stackrel{\cdot}{=} p^n F(p).$$

Дифференцированию в области действительных функций времени соответствует умножение на оператор p в области изображений. При этом учитываются начальные значения функции:

$$f'(t) \stackrel{\cdot}{=} pF(p) - f(0).$$

Свойство 5. Изображение интеграла.

Возьмем интеграл по частям.

$$\int_0^{\infty} e^{-pt} \left\{ \int_0^t f(t) dt \right\} dt = \left\{ -\frac{e^{-pt}}{p} \int_0^t f(t) dt \right\}_0^{\infty} + \int_0^{\infty} \frac{e^{-pt}}{p} f(t) dt.$$

Подстановка обоих пределов в первое слагаемое даст нулевые результаты. Поэтому, если известно, что $f(t) \stackrel{\cdot}{=} F(p)$, то

$$\int_0^t f(t)dt \doteq \frac{F(p)}{p}.$$

Интегрированию в области функции времени соответствует деление на оператор p .

Этими свойствами далеко не ограничиваются свойства преобразования Лапласа. Но сказанного достаточно, чтобы понять, что если подвергнуть интегро-дифференциальные уравнения этому преобразованию, то оно превратится в алгебраическое.

Действительно дифференцированию в уравнениях по Кирхгофу соответствует выражение напряжения на индуктивной катушке.

$$u_L = L \frac{di}{dt}.$$

В области изображений $U_L(p) = pLI(p) - Li(0)$.

Интегрированию соответствует выражение для напряжения на конденсаторе

$$u_C = \frac{1}{C} \int_0^t i dt + u_C(0).$$

В области изображений

$$U_C(p) = \frac{I(p)}{pC} + \frac{u_C(0)}{p}.$$

В дальнейшем там, где это ясно из контекста, изображение функцией времени $E(p)$; $I(p)$; $U(p)$ будем записывать просто большими буквами: E ; I ; U .

Определим изображения наиболее часто встречающихся функций

1. Изображение экспоненциальной функции $f(t) = e^{at}$

$$F(p) = \int_0^{\infty} e^{at} e^{-pt} dt = \int_0^{\infty} \left\{ -\frac{1}{p-a} e^{-(p-a)t} \right\} = \frac{1}{p-a}$$

т.к. по условию $|f(t)| < M \cdot e^{bt}$

2. Изображение синусоиды (принимая $a = jw$)

$$\sin wt = \frac{1}{2j} (e^{jw t} - e^{-jw t}) \doteq \frac{1}{2j} \left(\frac{1}{p-jw} - \frac{1}{p+jw} \right) = \frac{w}{p^2 + w^2}$$

3. Изображение косинусоиды

$$\cos wt = \frac{1}{2} (e^{jw t} + e^{-jw t}) \doteq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{p-jw} + \frac{1}{p+jw} \right) = \frac{p}{p^2 + w^2}$$

В математических, электротехнических и радиотехнических справочниках обычно приводятся обстоятельные таблицы преобразований Лапласа. Следует только иметь ввиду, что некоторые авторы пользуются очень похожим преобразованием по Карсону, имеющим очень близкие свойства:

$$j(p) = p \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt.$$

При пользовании таблицами надо обязательно посмотреть о каком преобразовании идет речь. Таблицами преобразований по Карсону можно пользоваться, если учесть лишний множитель p

$$j(p) = pF(p).$$

Теперь можно вернуться к примеру начала предыдущего параграфа. Преобразуя по Лапласу все функции времени, получим систему алгебраических уравнений.

$$(R_1 + R_2)I_1 + pL_1I_1 - L_1i_1(0) + pL_3I_1 - L_3i_1(0) + \\ + R_3I_2 + pL_3I_2 - L_3i_2(0) = E_1$$

$$R_3I_1 + pL_3I_1 - L_3i_1(0) + (R_2 + R_3)I_2 + pL_3I_2 - L_3i_2(0) + \frac{I_2}{pc_2} + \frac{U_C(0)}{p} = E_2$$

Решая систему уравнений, получим

$$I_1 = F_1(p) \text{ и } I_2 = F_2(p)$$

Способами, которые будут изложены ниже по полученным изображениям найдем токи $i_1(t)$ и $i_2(t)$ причем сразу с учетом начальных условий.

12.3. Законы Кирхгофа и Ома в операторной форме

Основная мысль дальнейшего изложения заключается в том, что можно, хотя бы частично, перенести процедуру лапласовского преобразования на схему электрической цепи, а не преобразования уже готовых интегро-дифференциальных уравнений.

Исходя из свойств преобразования Лапласа в узловых уравнениях для мгновенных значений токов $\sum_K i_K = 0$ можно без всяких оговорок заменить функции времени их изображениями:

$$\sum_K I_K(p) = 0.$$

В принципе нет ограничений и в записи второго закона Кирхгофа в таком виде:

$$\sum_K U_K(p) = \sum_K E_K(p).$$

Здесь следует только быть внимательным при выражении напряжений через токи, т.е. в записи компонентных уравнений:

$$U_K(t) = L_K \frac{di_K}{dt} \Rightarrow U_K(p) = pL_K I_K(p) - L_K i_K(0)$$

$$U_K(t) = \frac{1}{C_K} \int_0^t i_K dt + U_{CK}(0) \Rightarrow U_K(p) = \frac{I_K(p)}{pC_K} + \frac{U_{CK}(0)}{p}.$$

При такой записи в уравнениях сохраняется вся информация о начальных условиях.

Правила знаков при составлении уравнений ничем не отличаются от тех, что применяли при составлении уравнений комплексным методом и на постоянном токе.

Пусть контур R, L, C включен на напряжение U .

Уравнение во временной области:

$$u = Ri + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int_0^t i dt + u_C(0).$$

После применения преобразования Лапласа:

$$U = RI + pLI - Li(0) + \frac{I}{pC} + \frac{u_C(0)}{p}.$$

Преобразуем к виду:

$$I \left(R + pL + \frac{1}{pC} \right) = U + Li(0) - \frac{u_C(0)}{p}.$$

Здесь $\left(R + pL + \frac{1}{pC} \right) = Z(p)$ имеет характер сопротивления. Его так и называют **операторным сопротивлением** (иногда обобщенным сопротивлением). Значит

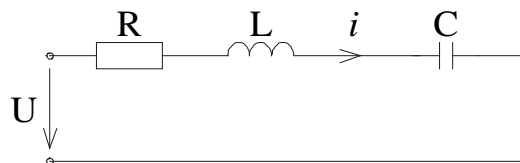
$$I = \frac{U + Li(0) - \frac{u_C(0)}{p}}{Z(p)}.$$

Структура $Z(p)$ та же, что у $Z(jw)$ - комплексного сопротивления. При нулевых начальных условиях уравнения для расчета переходных процессов полностью совпадают с комплексным методом расчета, если заменить jw на p .

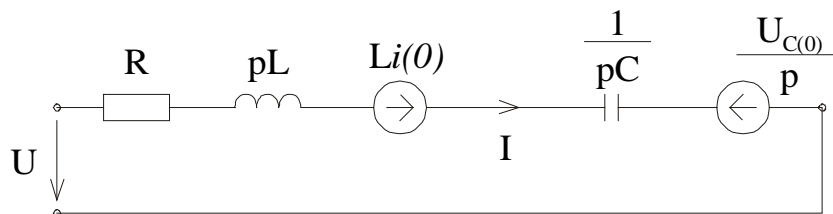
$$I = \frac{U}{Z(p)}.$$

Заметим попутно, что это можно сделать и формально математически, введя понятие комплексной частоты $w = -jt + h$. При такой частоте $jw = t + jh = p$.

При ненулевых начальных условиях при записи законов Ома и Кирхгофа каждый элемент запасующий энергию (накопитель) с учетом начальных условий выражается активным двухполюсником, что может быть отображено в виде схемы в области изображений. Например, двухполюснику RLC (рис. 12-2,а) будет соответствовать эквивалентная схема, изображенная на рис. 12-2,б.



а)



б)

Рис. 12-2

При этом надо соблюдать правило знаков:

ЭДС, учитывающая начальные условия в катушке индуктивности направляется в сторону протекающего тока, а ЭДС учитывающая начальное напряжение на конденсаторе встречно.

При последовательном соединении двухполюсников в операторной схеме замещения после переноса всех источников в правую часть уравнения можно общий ток вынести за скобки. Получим:

$$I \sum_K Z_K(p) = \sum_K U_K + \sum_K L_K i_K(0) - \sum_K \frac{U_{KK}(0)}{p},$$

т.е. при последовательном соединении операторные сопротивления складываются

$$Z_{\Sigma}(p) = \sum_K Z_K(p).$$

При параллельном соединении, например двух двухполюсников RLC, получим общий ток

$$I = I_1 + I_2 = \frac{U + L_1 i_1(0) - \frac{u_{C1}(0)}{p}}{Z_1(p)} + \frac{U + L_2 i_2 - \frac{u_{C2}(0)}{p}}{Z_2(p)}.$$

Несмотря на общее входное напряжение из-за разных начальных условий суммарное напряжение источников вынести за скобки нельзя. Поэтому не удается ввести понятие операторной проводимости. Только при нулевых начальных условиях:

$$I = I_1 + I_2 = \frac{U}{Z_1(p)} + \frac{U}{Z_2(p)} = U[Y_1(p) + Y_2(p)] = UY_{\Sigma}(p).$$

Таким образом понятием операторной проводимости

$$Y(p) = \frac{1}{Z_1(p)}$$

можно пользоваться, если до коммутации конденсаторы не были заряжены и по катушкам индуктивности не протекали токи.

В соответствии с этим после составления операторной схемы замещения можно пользоваться всеми методами составления уравнений: уравнения по Кирхгофу, МКТ. Методы, где применяются проводимости, типа МУП, надо применять с осторожностью.

12.4. Переход от изображения к оригиналу

Непосредственное применение обратного преобразования (интеграл Бромвича):

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{t_0 - j\infty}^{t_0 + j\infty} F(p) e^{pt} dp,$$

из-за его специфики применяется редко.

Обычно пользуются готовыми таблицами или теоремой разложения. Для расширения возможностей таблиц полезно знать теоремы о смещении (запаздывании).

1. Теорема запаздывания

Дано: $\dot{f(t)} \dot{=} F(p)$.

Требуется определить изображение функции:

$1(t-t_1)f(t-t_1)$, т.е. функции, совпадающей по форме с исходной, но сдвинутой во времени на t_1 (рис. 12-3).

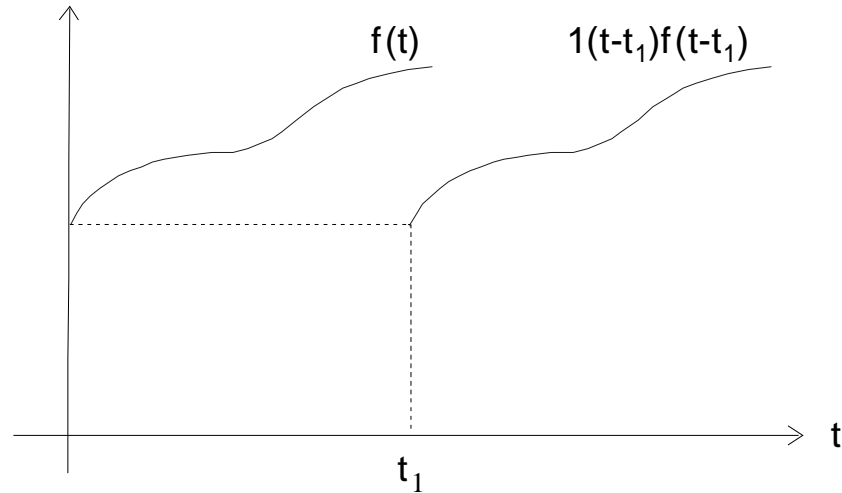


Рис. 12-3

$$F_1(p) = \int_{t_1}^{\infty} f(t-t_1)e^{-pt} dt;$$

Введем переменную $t=t-t_1$; $dt=dt$; $t=t+t_1$.

Интеграл примет вид:

$$F_1(p) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-p(t+t_1)} dt = e^{-pt_1} \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt} dt.$$

Таким образом

$$\dot{f(t-t_1)} \dot{=} e^{-pt_1} F(p).$$

Изображение функции смещенной во времени на t_1 равно изображению исходной функции, умноженной на e^{-pt_1} .

2. Обратная теорема

Дано: $\dot{f(t)} \dot{=} F(p)$.

Определить $\dot{f_1(t)} \dot{=} F(p+a)$,

т.е. смещается изображение на комплекс a

$$F(p+a) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-(p+a)t} dt = \int_0^{\infty} \left[\begin{array}{c} f(t)e^{-at} \\ f_1(t) \end{array} \right] e^{-pt} dt.$$

Отсюда видно, что изображению $F(p+a)$ соответствует оригинал:

$$f_1(t) = e^{-at} f(t).$$

Пример 1.

Через цепочку RL пропускается прямоугольный импульс (рис.12-4).

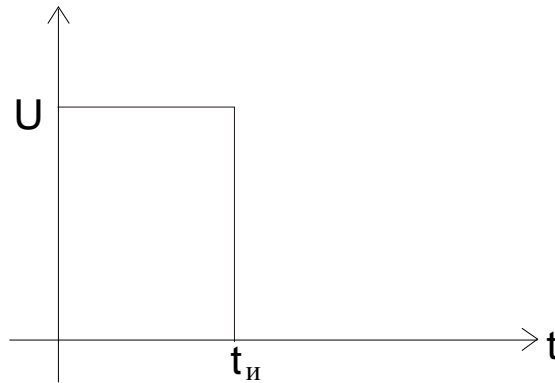


Рис. 12-4

Такой импульс можно выразить аналитически:

$$U \cdot 1(t) - U \cdot 1(t - t_u),$$

т.е. сумма напряжений одинаковой величины, но сдвинутой во времени на t_u .
Изображение такого напряжения:

$$U(p) = \frac{U}{p} - \frac{U}{p} e^{-pt_u} = U \frac{1 - e^{-pt_u}}{p};$$

Изображение тока по закону Ома:

$$I = \frac{U}{Z(p)} = \frac{U(1 - e^{-pt_u})}{p(pL + R)} = \frac{U}{p(pL + R)} - \frac{U \cdot e^{-pt_u}}{p(pL + R)}.$$

Первое слагаемое можно представить в виде:

$$\frac{U}{p(pL + R)} = \frac{U}{R} \cdot \frac{\frac{R}{L}}{p\left(p + \frac{R}{L}\right)} = \frac{U}{R} \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p + \frac{R}{L}} \right).$$

В свою очередь

$$\frac{U}{R} \cdot \frac{1}{p} = \frac{U}{R}; \quad \frac{U}{R} \cdot \frac{1}{p + \frac{R}{L}} = F\left(p + \frac{R}{L}\right) = \frac{U}{R} e^{-\frac{R}{L}t}.$$

Второе слагаемое отличается от первого множителем e^{-pt_u} , что соответствует функции $f(t - t_u)$.

Поэтому для первого слагаемого

$$i_1(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0 \\ \frac{U}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right) & \text{при } t > 0. \end{cases}$$

Для второго

$$i_2(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < t_u \\ \frac{U}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L}(t-t_u)} \right) & \end{cases}$$

Сложив оба тока $i_1(t)$ и $i_2(t)$, получим:

$$i = i_1 + i_2 = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0 \\ \frac{U}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right) & \text{при } 0 < t < t_u \\ \frac{U}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t_u} \right) e^{-\frac{R}{L}(t-t_u)} & \text{при } t > t_u \end{cases}.$$

График такой функции изображен на рис. 12-5.

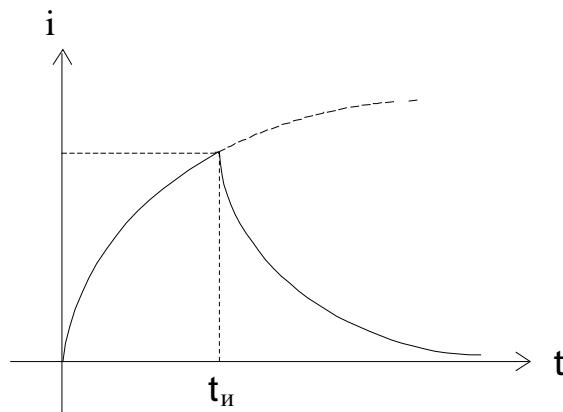


Рис. 12-5

Это можно объяснить так. После включения напряжения за время t_u ток возрастает по экспоненте до значения $\frac{U}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t_u} \right)$.

После выключения напряжения ток по экспоненте будет спадать до нуля, начиная с $\frac{U}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t_u} \right)$ при $t = t_u$.

Пример 2.

Включение цепи RLC на постоянное напряжение при нулевых начальных условиях.

По закону Ома в области изображений:

$$I = \frac{U}{pZ(p)} = \frac{U}{p \left(R + pL + \frac{1}{pC} \right)} = \frac{U}{L} \cdot \frac{1}{p^2 + \frac{R}{L} + \frac{1}{LC}}.$$

Преобразуем и обозначим $\frac{R}{2L} = d$; $\frac{1}{LC} = w_0^2$; $w_0^2 - d^2 = w^2$, получим:

$$I = \frac{U}{L} \cdot \frac{1}{\left(p + \frac{R}{2L} \right)^2 + \frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}} = \frac{U}{L} \cdot \frac{1}{w} \cdot \frac{w}{(p+d)^2 + w^2}.$$

Получим функцию, соответствующую изображению, но не от p , а от $(p+d)$.

По теореме о смещении в области изображений:

$$i(t) = \frac{U}{wL} e^{-dt} \sin wt.$$

Полезно знать формулы:

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{p \rightarrow \infty} pF(p)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{p \rightarrow 0} pF(p).$$

Первая из них служит для вычисления начального значения функции по ее изображению, а вторая для нахождения установившегося ее значения. Время $t=0$ принимается в смысле $t=+0$.

3. Теорема разложения

Докажем ее для частного случая.

Пусть в результате алгебраических преобразований получено изображение в виде рациональной дроби (т.е. степень числителя меньше степени знаменателя):

$$F(p) = \frac{G(p)}{H(p)}.$$

Предположим, что уравнение $H(p)=0$ не имеет кратных корней и корней равных корням $G(p)=0$. При этих условиях многочлен можно разложить на простейшие дроби:

$$\frac{G(p)}{H(p)} = \frac{A_1}{p-p_1} + \frac{A_2}{p-p_2} + \dots + \frac{A_n}{p-p_n} = \sum_{k=1}^n \frac{A_k}{p-p_k},$$

где n - степень полинома $H(p)$,

p_k - корни уравнения $H(p)=0$.

Умножим обе части равенства на $(p-p_k)$

$$\frac{G(p) \cdot (p-p_k)}{H(p)} = (p-p_k) \sum_{k=1}^n \frac{A_k}{p-p_k}.$$

Поскольку p_K - корень уравнения $H(p)=0$ в левой части уравнения при $p \rightarrow p_K$ получим неопределенность типа $\frac{0}{0}$; в правой части уравнения при этом все слагаемые, кроме k -го будут равны нулю. Раскрывая неопределенность, получим:

$$\frac{G(p_K)}{H'(p_K)} = A_K.$$

Таким образом, получим выражение для определения коэффициентов A_K в разложении на простые дроби. Конечно при этом сначала надо взять производную $H'(p_K)$, а затем подставить $p = p_K$.

Получим формулировку теоремы разложения:

$$F(p) = \frac{G(p)}{H(p)} = \sum_{K=1}^n \frac{G(p_K)}{H'(p_K)} \frac{1}{p - p_K};$$

Для каждой простейшей дроби получаем оригинал:

$$\frac{A_K}{p - p_K} \stackrel{\bullet}{=} A_K \cdot e^{p_K t}.$$

Значит оригинал функции $F(p)$ можно выразить:

$$f(t) = \sum_{K=1}^n \frac{G(p_K)}{H'(p_K)} e^{p_K t}.$$

Частный случай I. Пусть $p_1 = 0$, тогда

$$F(p) \stackrel{\bullet}{=} f(t) = \frac{G(p)}{H'(p)} + \sum_{K=2}^n \frac{G(p_K)}{H'(p_K)} e^{p_K t}.$$

Если в цепи включен источник постоянного напряжения или тока, то первое слагаемое выражает установившееся значение искомой реакции.

Частный случай II. Пусть $H(p)=0$ имеет пару чисто мнимых корней $p_{1,2} = \pm j\omega$, тогда:

$$f(t) = \frac{G(j\omega)}{H'(j\omega)} e^{j\omega t} + \frac{G(-j\omega)}{H'(-j\omega)} e^{-j\omega t} + \sum_{K=3}^n \frac{G(p_K)}{H'(p_K)} e^{p_K t}.$$

Если в цепи включен синусоидальный сигнал, то первые два слагаемые преобразуются в синусоиду и выражают установившееся значение реакции цепи.

Практически преобразование Лапласа применяют для анализа переходных процессов в сложных цепях. Однако, и некоторые простые задачи получают изящное решение, когда непосредственно по виду преобразований функции можно судить о реакции цепи.

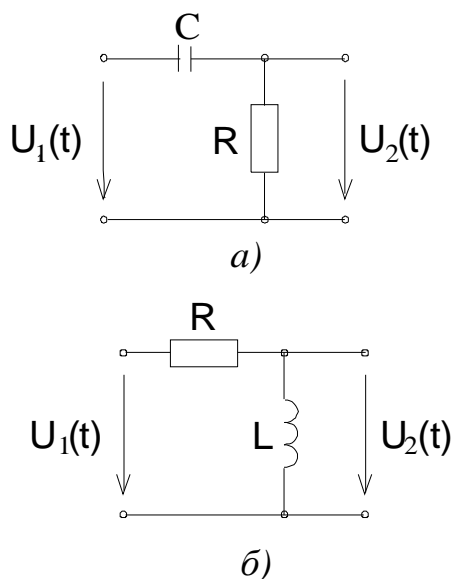


Рис. 12-6

В схемах рис. 12-6 определим изображения напряжений $U_2(p)$ по известному изображению входного напряжения $U_1(p)$

$$1) U_2(p) = \frac{U_1(p)}{R + \frac{1}{pC}} R = \frac{U_1(p)RCp}{RCp + 1}.$$

Если постоянная времени $t = RC$ достаточно мала, то RCp можно пренебречь по сравнению с единицей. Получим $U_2(p) = RCU_1(p)p$, что равнозначно операции дифференцирования в области функций времени.

2) Аналогичный результат дифференцирования получается в схеме рис.12-6,б при малых постоянных времени $t = \frac{L}{R}$

$$U_2(p) = \frac{U_1(p)}{R + pL} pL \cong p \frac{L}{R} U_1(p).$$

Интегрирующие цепи

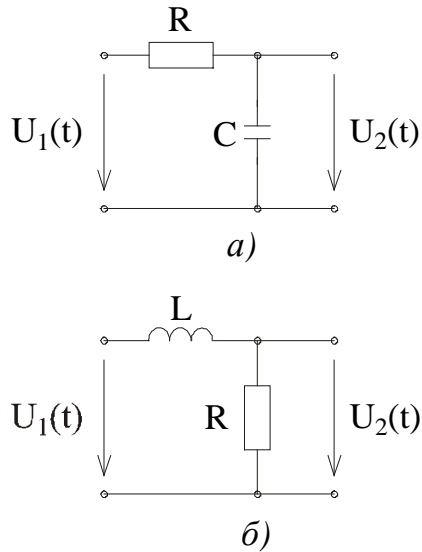


Рис. 12-7

В схеме рис. 12-7,а

$$U_2(p) = \frac{U_1(p)}{R + \frac{1}{pC}} \cdot \frac{1}{pC} = \frac{U_1(p)}{RCp + 1}$$

При больших постоянных времени

$$U_2(p) \approx \frac{U_1(p)}{RC} \cdot \frac{1}{p}.$$

В схеме рис. 12-7,б

$$U_2(p) = \frac{U_1(p)R}{R + pL}.$$

При больших постоянных времени:

$$U_2(p) = \frac{U_1(p)R}{L} \cdot \frac{1}{p}.$$

В обоих случаях получается эффект интегрирования функции времени.

Такие цепочки широко используются в аналоговых вычислительных машинах.

12.5. Особенности интегрального преобразования Фурье

Интегральное преобразование Фурье широко распространено для анализа частотно-избирательных устройств. Его можно считать частным случаем преобразования Лапласа.

Если предположить, что $p = j\omega$, такое преобразование можно выразить:

$$F(j\omega) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt.$$

При этом обратное преобразование:

$$f(t) = \frac{1}{2p} \int_{-\infty}^{\infty} F(jw) e^{jwt} dw.$$

Для существования прямого преобразования Фурье к функции $f(t)$ предъявляются более жесткие требования:

$$f(t) \rightarrow 0 \text{ при } t \rightarrow \infty,$$

что в конечном счете предопределяет конечность интеграла:

$$\int_0^{\infty} |f(t)| dt.$$

Выражаем подынтегральную функцию обратного преобразования в тригонометрической форме:

$$\begin{aligned} F(jw) e^{jwt} &= F(w) e^{ja(w)} e^{jwt} = F(w) e^{j[wt + a(w)]} = \\ &= F(w) \cos[wt + a(w)] + jF(w) \sin[wt + a(w)] \end{aligned}$$

Интегрированию первого слагаемого от $-\infty$ до $+\infty$ соответствует удвоенный интеграл от 0 до ∞ , т.к. косинус - функция четная. Интеграл от второго слагаемого, вследствие нечетности функции синуса равен нулю. Получим:

$$f(t) = \frac{1}{p} \int_0^{\infty} F(w) \cos[wt + a(w)] dw.$$

Это соответствует суммированию гармонических составляющих с бесконечно малыми амплитудами:

$$\frac{F(w)}{p} dw.$$

Такое представление преобразований по Фурье функции дает возможность получать оригинальную функцию путем численного интегрирования.

Кроме того в преобразовании Фурье фигурируют функции, которые можно получить экспериментально:

$F(w)$ - амплитудно-частотный спектр (сплошной, т.к. функция непериодическая).

$a(w)$ - фазо-частотный спектр.

Z - знакомое нам по комплексному методу расчета сопротивления:

$$Z(jw) = Z(w) e^{ja(w)},$$

с той лишь разницей, что эта функция от w , а не комплексное сопротивление цепи для конкретной фиксированной частоты.

Это все преимущества преобразования Фурье.

Недостатком является упоминавшиеся ранее дополнительные требования абсолютной интегрируемости функции $f(t)$.

Пример

Определить требования к цепи для безыскаженной передачи сигнала.

В области функции времени это означает, что возможно изменение масштаба сигнала и задержка во времени.

Обозначив входной сигнал $f_1(t)$, а входной $f_2(t)$, получим:

$$f_2(t) = k f_1(t - t_0).$$

В области изображений:

$$F_2(j\omega) = k F_1(j\omega) e^{-j\omega t_0}.$$

Передаточная функция:

$$T(j\omega) = \frac{F_2(j\omega)}{F_1(j\omega)} = k e^{j\omega t_0}.$$

Из этого соотношения можно сделать заключения:

1. Система может быть реализована на чисто резистивных цепях:

$$-1 \leq k \leq 1; t_0 = 0.$$

2. Система может быть реализована по схеме рис. 12-8, если $Z_1(j\omega) = Z_2(j\omega)$, тогда $k = \frac{1}{2}$; $t_0 = 0$.

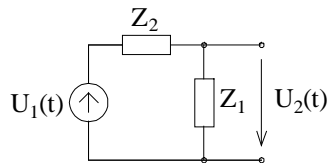


Рис. 12-8

К сожалению, в широком диапазоне частот такое согласование может быть реализовано только приблизительно.

Контрольные вопросы к теме 12

1. Что такое преобразование Лапласа?
2. Каковы основные свойства преобразования Лапласа?
3. Какие упрощения обеспечивает применение преобразования Лапласа при решении задач анализа переходных процессов?
4. Что такое операторная схема замещения? Операторное сопротивление?
5. Как учитываются начальные условия в операторных схемах замещения?
6. Как пользоваться таблицами преобразования Лапласа? В чем особенности преобразования по Карсону?
7. Как практически решается задача поиска оригинала функции по его изображению?
8. Сущность теорем о сдвиге в области функции времени и в области изображения.
9. Как применять теорему разложения?
10. Каковы преимущества и недостатки преобразования Фурье по сравнению с преобразованием Лапласа?

Контрольные задачи к теме 12

Решить задачи темы 10 операторным методом.

Тема 13. Основы синтеза линейных цепей

13.1. Проблемы синтеза

В начале курса определена задача синтеза, как поиск системы отвечающей заданному соотношению возмущение-реакция. В процессе решения задач анализа неоднократно было показано, что в зависимости от характера сигнала (возмущения) существенно меняется описание системы. Для двухполюсника при постоянном напряжении в установившемся режиме соотношение сигнал-реакция определялось эквивалентным резистором - R ; при синусоидальном воздействии - комплексом \bar{Z} , при импульсном воздействии - частотной характеристикой - $Z(j\omega)$. Аналогичная характеристика в виде линейчатого спектра применялась при периодических возмущающих воздействиях. Непериодичность функции возмущения требовала применять комплексную частоту, что приводило к преобразованию Лапласа и функция выражалась в виде $Z(p)$. Было установлено, что если иметь дело с нулевыми начальными условиями, то схему можно характеризовать проводимостью $Y(p)$. Применяя такие характеристики двухполюсника задача анализа записывалась примерно так:

$$I(p) = Y(p)U(p).$$

Следовательно задача синтеза двухполюсника может математически сформулироваться одним из выражений:

$$Y(p) = \frac{I(p)}{U(p)} = T_1(p)$$

$$Z(p) = \frac{U(p)}{I(p)} = T_2(p).$$

Если речь идет о функциях возмущения и реакции, для которых существует преобразование Фурье, то можно задавать задачу в виде требования реализовать систему, имеющую комплексное сопротивление $Z(j\omega)$ или проводимость $Y(j\omega)$, заданным в широком диапазоне частот.

Если задание на синтез сформулировано во временной области, то учитывая связь между временными характеристиками и частотными характеристиками в виде преобразований Фурье или Лапласа.

$$F(j\omega) = \int_0^{\infty} Y(t)e^{-j\omega t} dt$$

или

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt} dt.$$

При необходимости применяются и обратные преобразования.

Вместе с тем, к этой проблеме подходят и несколько с другой стороны. Вводится понятие обобщенного сигнала типа:

$$i_s = \mathcal{E}^{st} \text{ или } u_s = \mathcal{E}^{st}.$$

Здесь $\dot{\mathbf{I}}$ и $\dot{\mathbf{E}}$ - комплексы токов и напряжений, s - комплексная частота. (Сравните комплексный метод: $i = \dot{\mathbf{I}} e^{j\omega t}$; $e = \dot{\mathbf{E}} e^{j\omega t}$).

Конечно, это математическая абстракция. Но от нее, применяя обратные преобразования Фурье и Лапласа, можно всегда перейти во временную область. Линейная комбинация такого рода сигналов образует множество практически значимых функций. Например, при $s = 0$, получаем постоянные токи и напряжения. Сумма двух функций $\dot{\mathbf{E}} e^{j\omega t}$ и $\dot{\mathbf{E}} e^{-j\omega t}$ даст синусоидальную функцию и т.д.

Последовательное изложение свойств этих функций приведет нас, так же как и при комплексном методе анализа цепей к применению всех изученных методов анализа цепей (уравнения Кирхгофа, Закон Ома, методы контурных токов и узловых потенциалов и т.д.), основанных на принципах наложения (суперпозиции).

Следовательно двухполюсник можно задать в виде передаточной функции $Z(s)$ или $Y(s)$ образованной из преобразования Лапласа или даже из комплексного метода $Z(j\omega)$, придавая ω -смысл комплексной частоты. Так при последовательном соединении R , L и C элементов отношение обобщенного сигнала $(\dot{\mathbf{E}} e^{st})$ и реакции $(\dot{\mathbf{I}} e^{st})$ получится:

$$Z(s) = \frac{\dot{\mathbf{E}} e^{st}}{\dot{\mathbf{I}} e^{st}} = R + sL + \frac{1}{sC}.$$

При параллельном соединении этих элементов:

$$Y(s) = G + \frac{1}{sL} + sC.$$

Если обобщенный сигнал воздействует на сложенный двухполюсник, то выражая систему уравнений по МКТ, получим в матричном виде:

$$Z_K \dot{\mathbf{I}}_K = \dot{\mathbf{E}}_K.$$

Решение относительно входного тока при единственно входном возмущении $\dot{\mathbf{E}} e^{st}$:

$$\dot{\mathbf{I}}_{ex} = Z_K^{-1} \dot{\mathbf{E}}_{ex};$$

значит

$$T(s) = Z_K^{-1} = \frac{\Delta I_1}{\Delta} = Y(s).$$

Конечно можно задать передаточную функцию в виде $Z(s) = \frac{1}{Y(s)}$.

Так решается **первая проблема** синтеза, т.е. получен ответ на вопрос, как сформулировать задачу.

Вторая проблема заключается в вопросе: можно ли имеющимися средствами решить задачу, это, так называемая проблема реализации. В нашем случае мы ограничены в средствах: решаем задачу синтеза путем поиска схемных возможностей реализации заданной системной функции набором линейных элементов R , L , C , M . Прежде, чем приступить к решению такой задачи надо убедиться, что такое решение существует. Эту проблему называют **проблемой реализации**. Она решается на пути изучения свойств пассивных линейных двухполюсников. Сопоставив свойства реализуемых двухполюсников с заданной системной функцией, мы можем ответить на вопрос о реализуемости.

Третья проблема синтеза - это **проблема реализации**, т.е. задания такой математической процедуры, которая указала бы путь создания хотя бы одной схемы, обладающей заданной системной функцией $Z(s)$ или $Y(s)$.

Анализ линейных цепей приводит к однозначному результату, т.е. для любого реального двухполюсника при заданном возмущении существует однозначная реакция. В задачах синтеза дело обстоит по-другому.

Как правило существует множество схемных решений, приводящих к одному и тому же результату. Например, при анализе переходных процессов нам попадались интегрирующие и дифференцирующие цепочки, которые одинаково преобразуют исходную функцию при разных схемных решениях.

Отсюда возникает **четвертая проблема** синтеза - **оптимизация**, т.е. выбор решения из множества допустимых. Эта задача обычно в рамках теории цепей не решается, т.к. существенно зависит от критерия оптимизации. Можно было бы поставить и решить задачу оптимизации по критерию минимума элементов. Но этого, как правило, недостаточно и в конечном счете применяются критерии технологические и экономические.

Например, упоминаемое выше преобразование может быть решено в виде RC или RL цепи. По технологическим возможностям микроэлектроники предпочтение надо отдать R, C реализации.

Таким образом из четырех проблем синтеза:

- задание функции;
- проблема реализуемости;
- проблема реализации;
- проблема оптимизации.

Ниже будет рассмотрено две (вторая и третья) и то только для линейных пассивных цепей.

13.2. Свойства системных функций $Z(s)$ и $Y(s)$

Как указано выше, входное сопротивление и входная проводимость получаются как частное от деления двух определителей, элементами которых являются:

$$Z_K = R_K + L_K s + \frac{1}{C_K s};$$

В результате получается дробь:

$$Y(s) = \frac{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \mathbf{K} + a_1 s + a_0}{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \mathbf{K} + b_1 s + b_0} = \frac{G(s)}{H(s)} \dots\dots\dots(1)$$

Как известно из математики, такую функцию комплексного переменного S можно представить в виде:

$$Y(s) = K \frac{(s - s_{n1})(s - s_{n2})\mathbf{K}(s - s_{nm})}{(s - s_{m1})(s - s_{m2})\mathbf{K}(s - s_{mm})} \dots\dots\dots(2)$$

Здесь обозначено $K = \frac{a_n}{b_m}$ - масштабный множитель.

s_{HK} - нули функции, т.е. корни уравнения $G(s) = 0$

s_{HK} - полюсы функции, т.е. корни уравнения $H(s)=0$.

Проанализировав свойства такой функции комплексного переменного, мы сможем ответить на вопрос о реализуемости.

I. Нули и полюсы функции двухполюсника, нанесенные на комплексную плоскость, не лежат в правой полуплоскости, т.е. полученные корни $s_{HK} = s_{HK} + jh_{HK}$ и $s_{HK} = s_{HK} + jh_{HK}$ имеют $s_K \leq 0$.

Это доказывается следующим образом. Допустим, мы анализируем функцию $Z(s) = \frac{G(s)}{H(s)}$. Уравнение $G(s)=0$ является характеристическим уравнением, соответствующим дифференциальному, которое описывает переходный процесс. Корни уравнения $s_K = s_K + jh_K$ (в частности $h_K=0$) определяют свободную составляющую переходного процесса $X_c \propto \sum A_K C^{s_K t}$.

Но свободная составляющая любой пассивной цепи может только затухать. В крайнем случае, в цепях без потерь это будут незатухающие колебания. Это в свою очередь означает, что $s_K \leq 0$.

Проведя те же рассуждения для $Y(s) = \frac{H(s)}{G(s)}$, где характеристическому уравнению соответствует $H(s)=0$, мы приходим к тому же результату. Таким образом и нули и полюсы системной функции пассивного двухполюсника, которые могут быть вещественными или комплексными, обладают свойством: $\operatorname{Re}\{s_K\} \leq 0$, что доказывает выдвинутое утверждение.

II. Комплексные корни s_K попарно сопряженные.

Функцию комплексного переменного можно представить в виде $T(s) = V(s;h) + jW(s;h)$,

если $s_K = s_K + jh_K$ корень, то $V(s_K;h_K)=0$ и $W(s_K;h_K)=0$.

В то же время $T(s^*) = V(s;h) - jW(s;h)$, поэтому, если s_K - корень, то $s_K^* = s_K - jh_K$ также является корнем.

III. Чисто мнимые корни не должны быть кратными. Это следует из того, что для кратных чисто мнимых корней при решении задачи о переходном процессе появится слагаемое $At \sin wt$, т.е. синусоидальная функция с амплитудой бесконечно возрастающей во времени, что в пассивных цепях невозможно.

IV. Сопряженные корни как в числителе, так и в знаменателе дадут произведение:

$$(s - s_K + jh_K)(s - s_K - jh_K) = (s - s_K)^2 + h_K^2.$$

Наряду с утверждением, что действительные корни отрицательны, мы приходим к выводу, что в числителе и знаменателе системной функции (2) не содержится отрицательных чисел. При переходе к форме (1) это даст только положительные коэффициенты a_K и b_K (конечно при положительных R, L, C). Такие полиномы получили в математике название полиномы Гурвица.

V. Степень полинома числителя - n и степень полинома знаменателя - m не могут отличаться более чем на единицу.

Входное сопротивление образуется (по МКТ) из матрицы:

$$\begin{vmatrix} Z_{11} & Z_{12} & \dots & Z_{1n} \\ Z_{21} & Z_{22} & \dots & Z_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Z_{n1} & Z_{n2} & \dots & Z_{nn} \end{vmatrix}$$

$Z(s) = \frac{\Delta}{\Delta_{11}}$, где Δ - определитель матрицы, а Δ_{11} - дополнение этого определителя.

Значит старший член каждого определителя образуется как произведение элементов

$$Z_{KK} = R_K + L_K s + \frac{1}{sC_K} = \frac{Ls^2 + Rs + \frac{1}{C}}{s}, \text{ причем разница только на один сомножитель}$$

$$Z_{11} = \frac{L_{11}s^2 + R_{11}s + \frac{1}{C_{11}}}{s}.$$

Здесь возможны варианты:

1) $L_{11} = 0; R_{11} = 0; C_{11} \neq 0$.

Степень знаменателя на единицу больше степени числителя.

2) $L_{11} = 0$ - степень числителя и степень знаменателя одинаковы.

3) $L_{11} \neq 0$ и $R_{11} \neq 0$ - степень числителя больше степени знаменателя.

Остальные возможные варианты не дадут другого результата.

VI. Двухполюсник без потерь (т.е. состоящий только из элементов L и C) в числителе содержит только четные степени s, а в знаменателе только нечетные или наоборот.

Действительно для двухполюсника, состоящего только из реактивных элементов, входное сопротивление должно быть мнимым при $s = j\omega$.

$$Z(j\omega) = \frac{G(j\omega)}{H(j\omega)}.$$

При этом, если $G(j\omega)$ - мнимо, то $H(j\omega)$ - вещественно и если $G(j\omega)$ - вещественно, то $H(j\omega)$ - мнимо.

При $s = j\omega$ - многочлен может быть вещественным только, если все степени s - четные. Мнимым только, если все степени s - нечетные. Значит это свойство выражает признак реактивного двухполюсника.

Как следствие, надо заметить, что один из нулей или полюсов, расположенных на оси мнимых, находится в начале координат. Действительно из двухполюсника, содержащего только нечетные степени s, можно вынести s за скобки и следовательно s=0 обязательно будет корнем либо числителя (ноль), либо знаменателя (полюс).

Нули и полюсы чисто реактивного двухполюсника чередуются. Это объясняется тем, что сдвиг по фазе между током и напряжением может быть только $\pm \frac{\pi}{2}$; В каждой

точке резонанса (ноль или полюс) происходит изменение фазы от $+\frac{p}{2}$ до $-\frac{p}{2}$ или от $-\frac{p}{2}$ до $+\frac{p}{2}$;

Два нуля или два полюса подряд означают, что эта пара образует сдвиг по фазе на $\pm p$, т.е. ток и напряжение будут находиться в противофазе, что характеризует активный двухполюсник. Это противоречит свойствам пассивного двухполюсника.

VII. Если цепь содержит только один тип накопителя (цепи RC или RL), нули и полюсы лежат на отрицательной вещественной полуоси. Это объясняется невозможностью возникновения в таких цепях даже затухающих колебаний.

В математике функция, обладающая перечисленными выше свойствами получила название **“положительная_вещественная функция комплексного аргумента”**. Коротко ее свойства записываются:

$$Re\{Z(s)\} > 0 \text{ при } Re(s) > 0$$

$$Im\{Z(s)\} = 0 \text{ при } Im(s) = 0$$

Сопротивление реализуемого пассивного линейного двухполюсника должна обладать свойствами положительной вещественной функции комплексного аргумента. То же самое, как показано в п. I относится и к проводимости:

$$Re\{Y(s)\} > 0 \text{ при } Re(s) > 0$$

$$Im\{Y(s)\} = 0 \text{ при } Im(s) = 0$$

13.3. Реализация разложением на простые дроби

При выражениях системных функций с конкретными числовыми параметрами можно столкнуться с тем, что активные, емкостные и индуктивные сопротивления отличаются друг от друга на несколько порядков. Это создает определенные неудобства. Для того, чтобы избежать этого неудобства расчет ведут в относительных, нормированных величинах. Вводится нормирование по сопротивлению, т.е. все сопротивления уменьшаются R_0 раз и нормирование по частоте, увеличивающее индуктивное сопротивление в s_0 раз и уменьшающее емкостное сопротивление в s_0 раз. Если применять одновременно оба нормирования, то в формулах R, L и C будут заменены в соответствии с равенствами

$$R_H = \frac{R}{R_0}; L_H = L \frac{s_0}{R_0}; C_H = CR_0 s_0.$$

Нормированные параметры безразмерны.

Решение при этом будет получено в нормированных параметрах. Для пересчета в истинные параметры надо:

$$R = R_H R_0; L = L_H \frac{R_0}{s_0}; C = \frac{C_H}{R_0 s_0}.$$

Здесь R_H ; L_H ; C_H - соответственно нормированные сопротивления, индуктивности и емкости.

Например, если сопротивление выражено в кОМ, индуктивность в Н, емкость в мкФ, то удобно применить $R_0 = 10^3$, $s_0 = 10^3$. В этом случае для нормировки емкость

увеличится в 10^6 раз, индуктивность не изменится, а активное сопротивление уменьшится в 10^3 раз.

Метод разложения на простые дроби основывается на следующем положении:

Разбиение системной функции сопротивления на два слагаемых равнозначно последовательному соединению двух двухполюсников с соответствующими системными функциями (рис. 13-1).

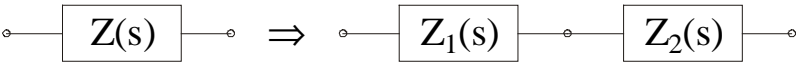


Рис. 13-1

$$Z(s)=Z_1(s)+Z_2(s)$$

Если функция выражает проводимость, то такое представление системной функции равнозначно параллельному соединению двухполюсников (рис. 13-2).

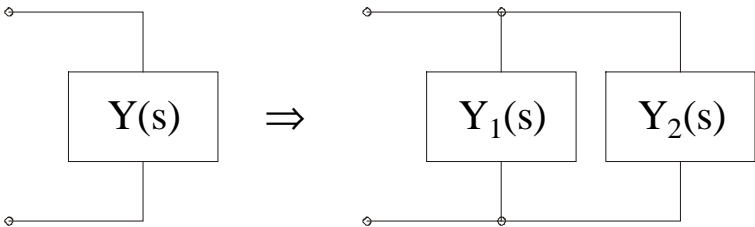


Рис. 13-2

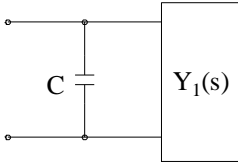
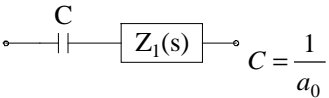
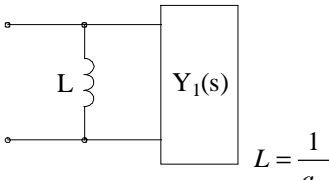
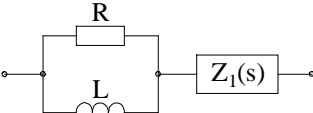
$$Y(s)=Y_1(s)+Y_2(s)$$

Простые дроби, на которые надо разбить заданную системную функцию, схемная реализация которых представляется очевидной, приведены в таблице 13-1.

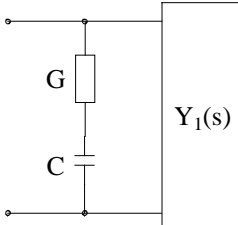
Таблица 13-1

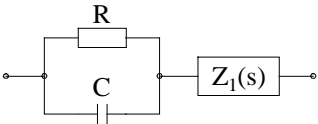
Системная функция	Реализация
$Z(s)=a+Z_1(s)$	<p>$R=a$</p>
$Y(s)=a+Y_1(s)$	<p>$G=a$</p>
$Z(s)=as+Z_1(s)$	<p>$L=a_\infty$</p>

Продолжение

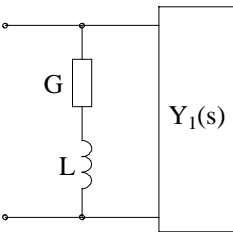
Системная функция	Реализация
$Y(s) = as + Y_1(s)$	 <p>$C = a_{\infty}$</p>
$Z(s) = \frac{a_0}{s} + Z_1(s)$ $Y(s) = \frac{a_0}{s} + Y_1(s)$	 <p>$C = \frac{1}{a_0}$</p>  <p>$L = \frac{1}{a_0}$</p>
$Z(s) = \frac{a_1 s}{a_2 + s} + Z_1(s)$	 <p> $Z = \frac{RLs}{R + Ls} = \frac{Rs}{\frac{R}{L} + s} = \frac{a_1 s}{a_2 + s}; R = a;$ $L = \frac{a_1}{a_2}$ </p>

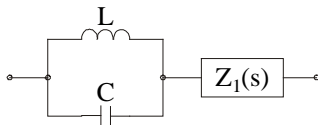
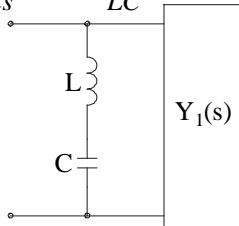
Продолжение

Системная функция	Реализация
$Y(s) = \frac{a_1 s}{a_2 + s} + Y_1(s)$	 <p> $Y = \frac{GCs}{G + Cs} = \frac{Gs}{\frac{G}{C} + s} = \frac{a_1 s}{a_2 + s}; G = a;$ $C = \frac{a_1}{a_2}$ </p>

$Z(s) = \frac{a_1}{a_2 + s} + Z_1(s)$	 $\frac{R \frac{1}{Cs}}{R + \frac{1}{Cs}} = \frac{\frac{1}{C}}{s + \frac{1}{RC}} = \frac{a_1}{a_2 + s}; C = \frac{1}{a_1};$ $R = \frac{a_1}{a_2}$
---------------------------------------	------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

Продолжение

Системная функция	Реализация
$Y(s) = \frac{a_1}{a_2 + s} + Y_1(s)$	 $\frac{G \frac{1}{Ls}}{G + \frac{1}{Ls}} = \frac{\frac{1}{L}}{s + \frac{1}{GL}} = \frac{a_1}{a_2 + s}; L = \frac{1}{s};$ $G = \frac{a_1}{a_2}$

Системная функция	Реализация
$Z(s) = \frac{a_1 s}{s^2 + a_2} + Z_1(s)$	 $\frac{\frac{1}{Cs}}{Ls + \frac{1}{Cs}} = \frac{s \frac{1}{C}}{s^2 + \frac{1}{LC}}; \quad C = \frac{1}{a_1}; \quad L = \frac{a_1}{a_2}.$
$Y(s) = \frac{a_1 s}{s^2 + a_2} + Y_1(s)$	 $\frac{\frac{1}{sL}}{Cs + \frac{1}{sL}} = \frac{\frac{1}{L} s}{s^2 + \frac{1}{LC}}; \quad L = \frac{1}{a_1}; \quad C = \frac{a_1}{a_2}$

Для определенности рассмотрим процедуру разложения на простые слагаемые системной функции реактивного двухполюсника. При изучении более сложных случаев надо обратиться к специальной литературе. Функция должна содержать в числителе только четные степени s , а в знаменателе - только нечетные или наоборот. При этом степень числителя и знаменателя отличается на единицу. Разложение такой функции будет иметь вид:

$$Z(s) = a_\infty s + \frac{a_0}{s} + \sum \frac{A_K}{s - s_K} \quad (*)$$

Коэффициенты вычисляются следующим образом:

$$a_\infty = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{Z(s)}{s}; \quad a_0 = \lim_{s \rightarrow 0} [sZ(s)];$$

$$A_K = \lim_{s \rightarrow s_K} [Z(s)(s - s_K)]$$

s_K - (по условиям задачи реализации чисто реактивного двухполюсника) чисто мнимые корни многочлена знаменателя - попарно сопряженные. Каждая пара корней даст в результате сложения:

$$\frac{A_K}{s - jh_K} + \frac{A_K}{s + jh} = \frac{2A_K s}{s^2 + h^2}.$$

Поэтому разложению (*) соответствует схема (рис.13-3):

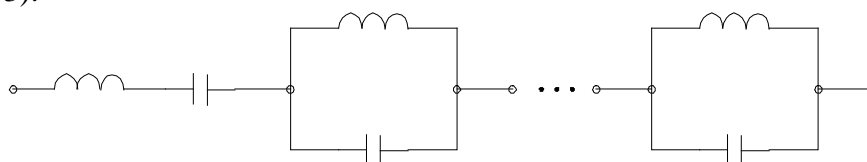


Рис. 13-3

Если степень числителя меньше, чем степень знаменателя, то $a_\infty = 0$; $a_0 = 0$, когда степень знаменателя четная.

Разложение функции на простые дроби в случае, когда двухполюсник содержит активные сопротивления приводит к появлению комплексных корней и корней на оси мнимых. Последние реализуются на RC или RL цепочками, а комплексные корни соответствуют колебательным контурам с затуханием (R L C).

Пример 1.

$$Z(s) = \frac{s^5 + 6s^3 + 8s}{s^4 + 4s^2 + 3} = \frac{s^5 + 6s^3 + 8s}{(s^2 + 1)(s^2 + 3)} = s + \frac{\frac{3}{2}s}{s^2 + 1} + \frac{\frac{1}{2}s}{s^2 + 3}.$$

В соответствии с таблицей получим схему (рис. 13-4):

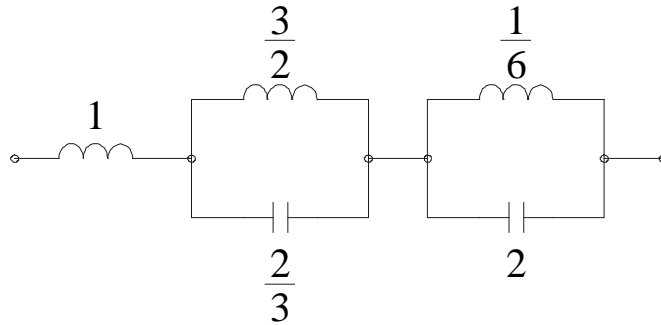


Рис. 13-4

Пример 2.

Двухполюсник с той же системной функцией, но заданный входной проводимостью.

$$Y(s) = \frac{t}{Z(s)} = \frac{s^4 + 4s^2 + 3}{s^5 + 6s^3 + 8s} = \frac{a_1}{s} + \frac{a_2 s}{s^2 + 2} + \frac{a_3 s}{s^2 + 4} = \frac{3/8}{s} + \frac{1/4 s}{s^2 + 2} + \frac{3/8 s}{s^2 + 4}.$$

Его схемная реализация (рис. 13-5):

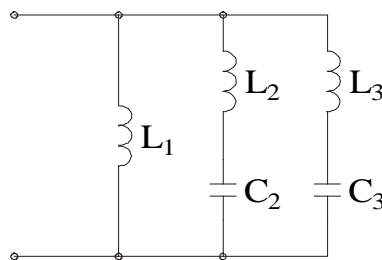


Рис. 13-5

$$L_1 = \frac{8}{3}; L_2 = 4; L_3 = \frac{8}{3}$$

$$C_2 = \frac{1}{8}; C_3 = \frac{3}{32}.$$

В литературе эти приемы реализации получили название первая и вторая формы Фостера.

13.4. Реализация по Кауэру

Эта реализация основана на представлении функции в виде непрерывной дроби. Особенно она удобна для двухполюсников без потерь.

Представим, что степень числителя больше, чем степень знаменателя. Разделив числитель на знаменатель получим частичную реализацию в виде, показанном на рис.13-6.

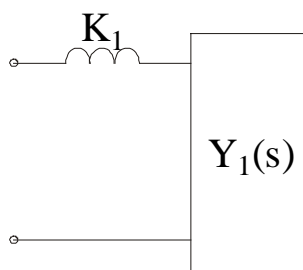


Рис. 13-6

$$Z(s) = K_1 s + \frac{1}{Y_1(s)}$$

Остаток будет иметь степень знаменателя больше, чем числитель, поэтому функция $Y_1(s) = \frac{1}{Z_1(s)}$ опять будет иметь степень числителя не единицу больше степени знаменателя и поэтому в ней путем деления многочлена на многочлен можно выделить слагаемое $K_2 s$ (см. рис. 13-7) соответствующее проводимости.

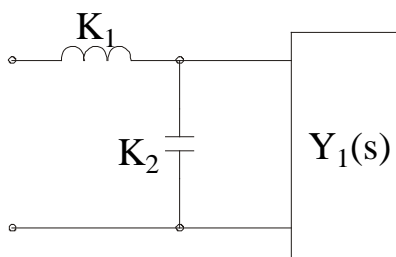


Рис. 13-7

$$Z(s) = K_1 s + \frac{1}{K_2 s + \frac{1}{Z_2(s)}}$$

Если двухполюсник без потерь, реализуемый только элементами L и C, то такая процедура должна закончиться делением без остатка, и следовательно реализацией в виде лестничной схемы.

Пример 3.

Процедуру образования непрерывной дроби можно проследить на примере. Функцию возьмем те же, что и в примере 1. Разделив числитель на знаменатель, получим s и в остатке $2s^3 + 5s$; теперь знаменатель надо разделить на остаток. Получим $\frac{1}{2}s$ и остаток. Продолжаем в удобной записи:

$$\begin{array}{r|l}
 s^5 + 6s^3 + 8s & s^4 + 4s^2 + 3 \\
 \hline
 s^5 + 4s^3 + 3s & s \quad (Z) \\
 \hline
 s^4 + 4s^2 + 3 & 2s^3 + 5s \\
 s^4 + \frac{5}{2}s^2 & \hline
 \frac{3}{2}s^2 + 3 & \frac{1}{2}s \quad (Y) \\
 \hline
 2s^3 + 5s & \frac{3}{2}s^2 + 3 \\
 2s^3 + 4s & \hline
 \frac{4}{3}s & (Z)
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l}
 \frac{3}{2}s^2 + 3 & s \\
 \hline
 \frac{3}{2}s^2 & \frac{3}{2}s \quad (Y) \\
 \hline
 s & 3 \\
 \hline
 \text{Конец} & \frac{1}{3}s \quad (Z)
 \end{array}$$

Получили дробь:

$$Z(s) = s + \frac{1}{\frac{1}{2}s + \frac{4}{\frac{1}{3}s + \frac{3}{\frac{2}{3}s + \frac{1}{\frac{1}{3}s}}}}}$$

что соответствует схемной реализации

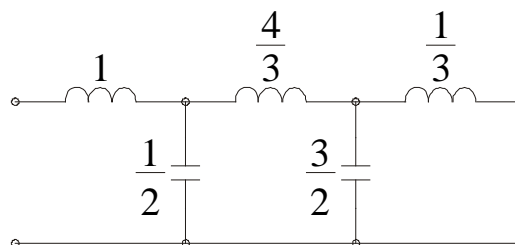


Рис. 13-8

Пример 4.

Если деление начать с младших степеней s получим:

$$\begin{array}{r}
 \frac{3}{44}s^4 \quad \left| \begin{array}{r} s^5 \\ 3 \\ \hline 44s \end{array} \right. \\
 \hline
 \frac{22}{7}s^3 + s^5 \quad \left| \begin{array}{r} \frac{3}{44}s^4 \\ \frac{22}{7}s^3 \\ \hline \frac{22 \cdot 44}{21s} \end{array} \right. \\
 \hline
 \frac{7}{4}s^2 + \frac{5}{8}s^4 \quad \left| \begin{array}{r} \frac{22}{7}s^3 + s^5 \\ \frac{7}{4}s^2 + \frac{49}{88}s^4 \\ \hline \frac{49}{88s} \end{array} \right. \\
 \hline
 8s + 6s^3 + s^5 \quad \left| \begin{array}{r} \frac{7}{4}s^2 + \frac{5}{8}s^4 \\ \frac{22}{7}s^3 + s^5 \\ \hline \frac{32}{7s} \end{array} \right. \\
 \hline
 3 + \frac{9}{4}s^2 + \frac{3}{8}s^4 \quad \left| \begin{array}{r} 8s + 6s^3 + s^5 \\ \frac{7}{4}s^2 + \frac{5}{8}s^4 \\ \hline \frac{32}{7s} \end{array} \right. \\
 \hline
 3 + 4s^2 + s^4 \quad \left| \begin{array}{r} 3 + \frac{9}{4}s^2 + \frac{3}{8}s^4 \\ 8s + 6s^3 + s^5 \\ \hline \frac{3}{8s} \end{array} \right.
 \end{array}$$

Конец

Если функция соответствует проводимости, это должна быть схема с теми же свойствами.

$$Y(s) = \frac{2}{8s} + \frac{1}{\frac{32}{7s} + \frac{1}{\frac{49}{88s} + \frac{1}{\frac{22 \cdot 44}{21s} + \frac{1}{\frac{3}{44s}}}}}$$

Схемная реализация приведена на рис. 13-9.

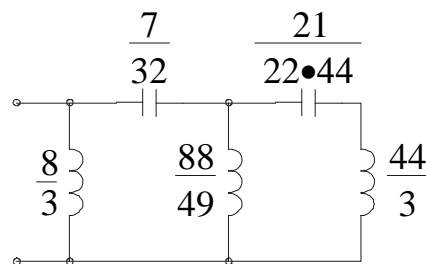


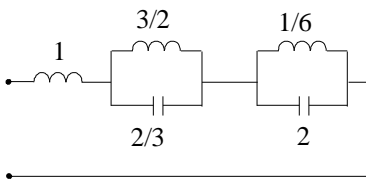
Рис. 13-9

Приведенные четыре примера разными способами осуществляли реализацию двухполюсника с одними и теми же свойствами. Из примеров видно, что любой из описанных способов реализации дает одно и то же (минимальное) количество элементов. Номиналы элементов и схемы их соединения получаются различными. Поэтому выбор решения надо искать в области конструирования (вес, габариты, стоимость) и технологии изготовления.

Контрольные вопросы к теме 13

1. Что такое системная функция?
2. Назовите главные свойства системной функции реализуемого двухполюсника.
3. Каковы признаки системной функции для двухполюсника без потерь?
4. Что такое положительная вещественная функция комплексного аргумента?
5. В чем сущность нормирования параметров?
6. Каковы системные функции для простых двухполюсников?
7. Как представить сложный двухполюсник в виде последовательного соединения простых?
8. Как представить сложный двухполюсник в виде параллельного соединения простых?
9. Как представить системную функцию в виде цепной дроби? Как использовать это представление для реализации функции?

Контрольные задачи к теме 13

I	<p>Определить системную функцию $Z(s)$.</p> 
II	<p>Проверить возможность реализации функций.</p> $Z_1(s) = \frac{s^2 + s + 2}{s + 1}$ $Z_2(s) = \frac{s^2 + 2s + 1}{s^2}$
III	<p>Реализовать функцию задачи №1 путем представления в виде цепной дроби.</p>
IV	<p>Реализовать функцию путем представления в виде суммы простых дробей.</p> $Z(s) = \frac{s^5 + 6s^3 + 8s}{s^4 + 4s^2 + 3}$