

Модуль 3. Кривые и поверхности второго порядка.

Оглавление

Лабораторный практикум 3.1 Системы координат. Построение линий различных порядков на плоскости. Поворот системы координат.	2
1. Системы координат.	2
2. Понятие уравнения линии.....	4
3. Построение линий различных порядков на плоскости.	6
4. Поворот системы координат.....	9
5. Задание на «5».....	13

Лабораторный практикум 3.1 Системы координат. Построение линий различных порядков на плоскости. Поворот системы координат.

1. Системы координат.

Декартовой системой координат обычно называют прямоугольную систему координат, с одинаковым масштабом по осям координат. В плоскости она задается двумя взаимно перпендикулярными осями OX (ось абсцисс) и OY (ось ординат), пересекающимися в одной точке O , называемой началом координат. Таким образом, положение любой точки M на плоскости однозначно определяется двумя числами: первое число x - величина проекции точки на первую ось (взятая с плюсом, если проекция попала на «положительную» часть оси, или с минусом, если на «отрицательную»), а второе число y - величина проекции на вторую ось. Эти числа называются декартовыми координатами точки. Запись $M(x, y)$ означает, что точка M имеет декартовы координаты на плоскости x и y .

Говорят, что на плоскости введена *полярная система* координат $\langle O, \vec{u} \rangle$, если заданы:

1. некоторая точка O , называемая полюсом;
2. некоторый луч \vec{u} , исходящий из точки O и называемый *полярной осью*.

Полярными координатами точки M называют два числа: *полярный радиус* $r(M) = |\overrightarrow{OM}|$ и *полярный угол* $\varphi(M)$ - угол, на который следует повернуть ось \vec{u} для того, чтобы ее направление совпало с направлением вектора \overrightarrow{OM} . Запись $M(r, \varphi)$ означает, что точка M имеет полярные координаты r и φ .

Пусть на плоскости введены:

правая декартова система координат OXY

(т. е. такая, что кратчайший поворот от оси OX к оси OY происходит против часовой стрелки)

и полярная система $\langle O, \vec{u} \rangle$,

причем полярная ось совпадает с положительной полуосью абсцисс. Тогда связь между декартовыми и полярными координатами произвольной точки M задается формулами

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \varphi = \arctg\left(\frac{y}{x}\right) \end{cases}$$

MATLAB имеет встроенные команды для покоординатного перевода из одной системы координат в другую. Так, например, «cart2pol» переводит из картезианской (декартовой) системы координат в полярную или цилиндрическую систему координат в зависимости от числа аргументов.

Упражнение 1.

1. Наберите в командном окне « help cart2pol »

`help cart2pol`

С помощью команды «[phi, r]=cart2pol(3,3)» мы можем получить полярные координаты некоторой точки с декартовыми (Cartesian - картезианскими) координатами (3;3).

```
[phi, r]=cart2pol(3,3)
```

```
phi =
```

```
0.7854
```

```
r =
```

```
4.2426
```

```
r=sqrt(3^2+3^2)
```

```
r =
```

```
4.2426
```

```
phi=pi/4
```

```
phi =
```

```
0.7854
```

Выводы:

Действительно, у точки с координатами (3,3) расстояние до начала координат

$r = \sqrt{3^2 + 3^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2} \approx 4.2426$, а угол отклонения $\varphi = \frac{\pi}{4} \approx 0.7854$.

2. Наберите в командном окне « help pol2cart»

```
help pol2cart
```

С помощью команды « $[x,y]=\text{pol2cart}(-\pi/4, 2*\sqrt{2})$ » мы можем получить декартовы координаты некоторой точки с полярным углом $\phi = -\frac{\pi}{4}$ и радиусом длины $r = 2\sqrt{2}$. Мы должны будем получить декартовы координаты (2, -2).

```
[x,y]=pol2cart(-pi/4,2*sqrt(2))
```

```
x =
```

```
2
```

```
y =
```

```
-2
```

Выводы:

Как и следовало ожидать точка с полярными координатами $(\phi, r) = (-\frac{\pi}{4}, 2\sqrt{2})$ будет располагаться в четвертом квадранте координатной плоскости.

2. Понятие уравнения линии

Предположим, что на плоскости задана декартова прямоугольная система координат OXY и некоторая линия L .

Рассмотрим уравнение $F(x, y) = 0$, связывающее две переменные x и y .

Уравнение $F(x, y) = 0$ называется уравнением линии L относительно заданной системы координат, если уравнению $F(x, y) = 0$ удовлетворяют координаты x и y любой точки, лежащей на линии L , и не удовлетворяют координаты x и y ни одной точки, не лежащей на линии L .

Согласно этому определению сама линия L представляет собой геометрическое место точек, координаты которых удовлетворяют уравнению $F(x, y) = 0$

Если в заданной системе координат уравнение $F(x, y) = 0$ является уравнением линии L , будем говорить, что $F(x, y) = 0$ определяет линию L .

Уравнение $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ является уравнением окружности радиуса r с центром в точке $M_0(a,b)$.

Линия L называется алгебраической, если в некоторой декартовой системе координат она определяется уравнением $F(x, y) = 0$, в котором $F(x, y)$ – алгебраический полином (т.е. сумма конечного числа слагаемых вида $a_{kl}x^k y^l$, $k, l \geq 0$ – целые, a_{kl} – некоторая постоянная).

Если при этом $F(x, y)$ – алгебраический полином порядка n , линия L называется линией порядка n .

Например, окружность – алгебраическая линия второго порядка.

$r = a * \sin(n * \varphi)$ - полярное уравнение n -лепестковой розы

При $n=3$, $a=1$ полярное уравнение трех лепестковой розы $r = \sin 3\varphi$ в декартовой системе координат представляет собой алгебраическое уравнение 4 порядка $(x^2 + y^2)^2 = y(x^2 - y^2) + 2x^2y$.

Возьмем функцию $r = \sin 3\varphi$, заданную в полярных координатах, и попытаемся представить ее в виде уравнения в декартовых координатах.

$$r = \sin 3\varphi$$

$$\sin 3\varphi = \sin(\varphi + 2\varphi) = \sin \varphi \cos 2\varphi + \cos \varphi \sin 2\varphi = \\ = \sin \varphi (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) + \cos \varphi 2 \sin \varphi \cos \varphi.$$

$$r = \sin \varphi (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) + \cos \varphi 2 \sin \varphi \cos \varphi. \quad | * r^3$$

$$\underbrace{r^4}_{(x^2+y^2)^2} = \underbrace{r \sin \varphi}_y \left(\underbrace{r^2 \cos^2 \varphi}_{x^2} - \underbrace{r^2 \sin^2 \varphi}_{y^2} \right) + \underbrace{r \cos \varphi}_x 2 \underbrace{r \sin \varphi}_y \underbrace{r \cos \varphi}_x.$$

Таким образом, получаем уравнение той же линии (трех лепестковой розы)

$$(x^2 + y^2)^2 = y(x^2 - y^2) + 2x^2y$$

Но наиболее ценным, полезным и неожиданным будет представление в декартовой системе координат одно лепестковых роз.

Упражнение 2.

Перевести полярные уравнения однолепестковых роз » $r = 4 \sin \varphi$, $r = -9 \sin \varphi$, $r = 2 \cos \varphi$, $r = -4 \cos \varphi$ в декартову систему координат, построить графики с помощью функций «ezplot» и «plot» в декартовых координатах, прокомментировать полученные результаты.

Всякая неалгебраическая линия называется трансцендентной.

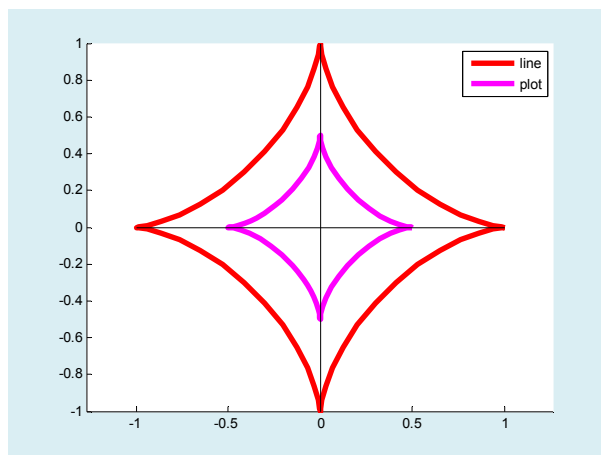
Пример. Уравнение $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ представляет собой трансцендентную кривую. Эта кривая называется астроидой.

В Википедии наберите «астроида» или пройдите по ссылке <http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%90%D1%81%D1%82%D1%80%D0%BE%D0%B8%D0%B4%D0%B0> и увидите, как получается эта линия в результате движения подвижной окружности, которая касается изнутри неподвижной окружности вчетверо большего радиуса.

3. Построение линий различных порядков на плоскости.

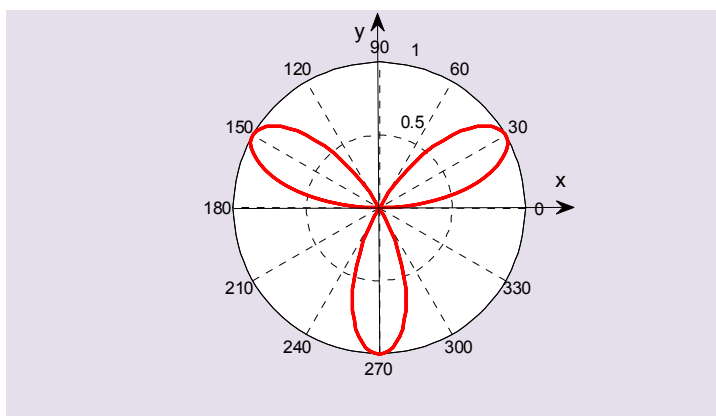
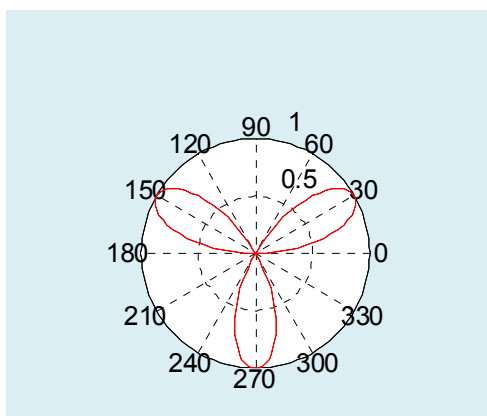
$\begin{cases} x = a \cos^3 t \\ y = a \sin^3 t \end{cases}$ – параметрическое уравнение астроиды.

```
figure
axis equal
hold on
% построение графика с помощью line
t=0:pi/30:2*pi; a=1;
x=a*(cos(t)).^3; y=a*(sin(t)).^3;
line('XData',x,'YData',y,'Color','r','LineWidth',4)
% построение графика с помощью plot
t=0:pi/30:2*pi; a=1/2;
x=a*(cos(t)).^3; y=a*(sin(t)).^3;
plot(x,y,'m','LineWidth',4)
legend('line','plot')
% построение осей координат
line([-1,0;1,0],[0,1;0,-1],'Color','black')
```



Для отображения графиков функции в полярных координатах удобно использовать команду «polar». Так, например, можно реализовать *полярную розу* $r = a * \sin(n * \varphi)$

```
n=3;  
a=1;  
polar(phi, a*sin(n*phi),'r');
```

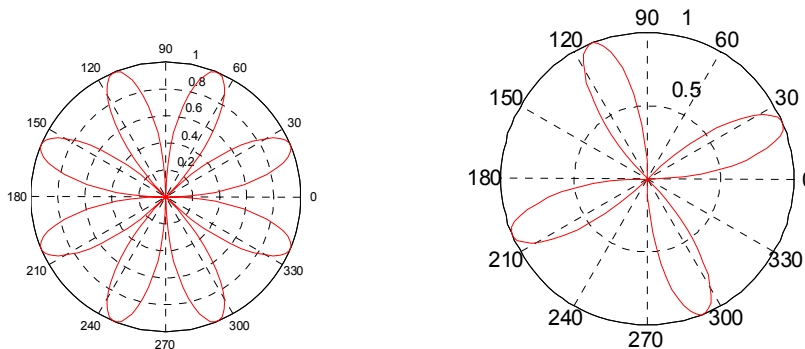


В отличие от команды «plot», в которой мы легко можем воздействовать, например, на толщину линии с помощью «LineWidth». Здесь мы лишены такой возможности. Но при желании представить график в более приятном виде, мы можем вручную изменить на картинке все, что нам нужно: толщину линии, цвет фона, подписать оси итд. Для этого на

панели инструментов нужно включить режим «Show Plot Tools and Dock Figure», нажать на той же панели инструментов стрелочку «Edit Plot», выделить нужную линию и изменить ее по своему усмотрению. Разумеется, для подобных изменений имеются более солидные приемы, относящиеся к дескрипторной графике (см. соответствующий раздел книги Кривилёв А. В. «Основы компьютерной математики с использованием системы MATLAB»)

При обращении к полярным координатам в средах MATLAB или Wolfram Mathematica, следует отметить, что в этих средах допускается отрицательность радиуса в полярной системе координат, что нарушает взаимно однозначность при сопоставлении декартовой и полярной систем координат.

Например, если мы ничего не предпримем, то в случае с четным n , например, $n=4$, мы получим 8 лепестков (а должно быть четыре).



Отрицательные значения радиуса отражаются в противоположном направлении полярной оси \vec{u} , т.к. в данных средах полярные координаты (ϕ , r) пересчитываются в декартовые через $(r \cdot \cos(\phi), r \cdot \sin(\phi))$.

Для того чтобы ограничить r , можно ввести, например, « $r = \max(0, r)$ ».

```
n=4;  
a=1;  
phi=0:pi/100:2*pi;  
r=a*sin(n*phi);  
r=max(0,r);  
polar(phi, r, 'r');
```


Но лучше написать свою программу по отбору нужных значений радиусов

Упражнение 3.

Напишите подобную программу, для $r = \cos 4\varphi$. Используйте циклы **for end; if end.**

```
n=4; a=1;
for phi=0:pi/100:2*pi;
    r=a*sin(n*phi);
    if (r>=0) действие end
polar(phi, r, 'r');
end
```

Упражнение 4.

Построить графики в полярных координатах с помощью функции «polar» $r = 4 \sin \varphi$, $r = -9 \sin \varphi$, $r = 2 \cos \varphi$, $r = -4 \cos \varphi$. Сравните полученные результаты с результатами упражнения 2.

Упражнение 5.

Построить график функции $x^2 + y^2 = 1$ в декартовой системе координат с помощью функции «plot». Перейти к полярной системе координат, построить график в полярных координатах с помощью функции «polar». Сравнить, прокомментировать полученные результаты.

4. Поворот системы координат

Пример

Для графика функции $y = 2x + 3$ произвести поворот координатных осей на $\pi/3$ против часовой стрелки. Отобразить результат с помощью функции «plot»

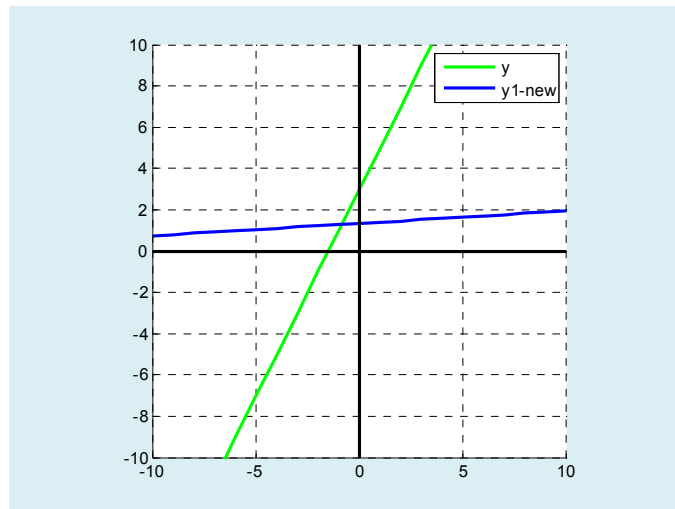
Решение

Для поворота декартовых осей используем замену

$$\begin{aligned}x &= x_1 \cdot \cos(\alpha) - y_1 \cdot \sin(\alpha) \\ y &= x_1 \cdot \sin(\alpha) + y_1 \cdot \cos(\alpha)\end{aligned}$$


```
syms x y x1 y1 alpha
x=x1*cos(alpha)-y1*sin(alpha);
y=x1*sin(alpha)+y1*cos(alpha);
f=y - 2*x - 3;
y1=solve(f,'y1');
y1 =
(2*x1*cos(alpha) - x1*sin(alpha) + 3)/(cos(alpha) + 2*sin(alpha))
% открываем графическое окно
figure
hold on
grid on
axis equal
x=-10:1:10;
y=2*x+3;
% изобразим первый график
plot(x,y,'g','LineWidth',2)
% вводим конкретный угол alpha=pi/3
alpha=pi/3;
x1=-10:1:10;
y1=(2*x1*cos(alpha) - x1*sin(alpha) + 3)/(cos(alpha) + 2*sin(alpha));
plot(x1,y1,'b','LineWidth',2);
% подписываем графики
legend ('y','y1-new')
% построение осей координат
line([-10,0;10,0],[0,10;0,-10],'Color','black','LineWidth',2)
axis([-10 10 -10 10])
```

Результат выполнения скрипта



Так как произошел поворот осей против часовой стрелки, то график функции совершил поворот по часовой стрелке.

Упражнение 6.

Создать функцию `shift_rotate` в отдельном м-файле `shift_rotate.m`, с помощью которой производится поворот графика функции $y = -3 * x + 2$ на k радиан по часовой стрелке, а также сдвиг на x_m относительно оси абсцисс и на y_m относительно оси ординат. Переменные k , x_m , y_m должны являться аргументами этой функции. Проверьте функцию на особенных значениях. Например, очевидно, что при достаточно небольшом k поворот осей координат будет практически незаметен.

Указания:

Простейший пример функции от двух аргументов (содержимое файла `add_.m`)

```
% функция add_(x,y) складывает два числа,  
% введите, например,add_(12,2)  
function r=add_(x,y)  
r=x+y;  
end
```

Пример ее использования

```
>> help add_  
функция add_(x,y) складывает два числа,  
введите, например, add_(12,2)  
>> add_(12,2)  
ans =  
14
```

5. Задание на «5»

В сборнике задач по математике для втузов под редакцией А. В. Ефимова, А. С. Поспелова. В 4 частях. Часть 1. (4-е и 5-е изд. перераб. и доп.), М., Физматлит, 2004, 2008. В главе 1, §3, п.п. 5, стр. 57. Вы можете познакомиться с основными алгебраическими и трансцендентными кривыми второго порядка. Во втором семестре в курсе математического анализа вы очень плотно будете с ними работать.

Упражнение 7.

Включить в отчет графики: спираль Архимеда, логарифмическая спираль, лемниската Бернулли, улитка Паскаля, астроида, эвольвента окружности, циклоида, полукубическая парабола, петлевая парабола, декартов лист, локон Аньези. Выведите полярное уравнение эпициклоиды в случае $a=b$ (оно тогда будет называться кардиоидой).

Впрочем для **астроиды** в Кривилеве имеется очень интересная программа, демонстрирующая ее. Эту кривую описывает точка подвижной окружности, которая касается изнутри неподвижной окружности вчетверо большего радиуса и катится по ней без скольжения.

```
t=0:pi/30:2*pi; a=1;  
x=a*cos(t).^3; y=a*sin(t).^3;  
% построение плоскости  
axes('Box','on',...  
'DataAspectRatioMode','manual',...
```

```
'DataAspectRatio',[1 1 1],...
'FontAngle','italic',...
'FontName','Times',...
'FontSize',9,...
'FontWeight','bold',...
'NextPlot','add',...
'XAxisLocation','bottom',...
'XColor',[0.5 0 0],...
'XGrid','on','XDir','reverse',...
'XLimMode','manual',...
'XLim',[-1 1],...
'XTickMode','manual',...
'XTick',[-1,-.75,-.5,-.25,0,...
0.25,0.5,0.75,1],...
'XTickLabelMode','manual',...
'XTickLabel',...
'-1|-0.5|0|0.5|1',...
'YAxisLocation','right',...
'YColor',[0.5 0 0],...
'YGrid','on','YDir','normal',...
'YLimMode','manual',...
'YLim',[-1 1],...
'YTickMode','manual',...
'YTick',[-1,-.75,-.5,-.25,0,...
.25,.5,.75,1],...
'YTickLabelMode','manual',...
'YTickLabel',...
'-1|-0.5|0|0.5|1',...
'TickDirMode','manual',...
'TickDir','out');
% обозначение оси x
```

```
text('Color', [0.5 0 0],...
'FontAngle','italic',...
'FontName','Times',...
'FontSize',12,...
'FontWeight','bold',...
'HorizontalAlignment','center',...
'Interpreter','tex',...
'Position', [0 -1.18],...
'String',...
'x=a\cdot cos^3(t), t=[0..2\pi]',...
'VerticalAlignment','middle');
% обозначение оси y
text('Color', [0.5,0,0],...
'FontAngle','italic',...
'FontName','Times',...
'FontSize',12,...
'FontWeight','bold',...
'HorizontalAlignment','center',...
'Interpreter','tex',...
'Position',[-1.2 0],...
'Rotation',90,...
'String',...
'y=a\cdot sin^3(t), t=[0..2\pi]',...
'VerticalAlignment','middle')
% построение неподвижной окружности
rectangle('Curvature', [1 1],...
'LineWidth', 1.5,...
'Position', [-1 -1 2 2])
% построение подвижной окружности
rectangle('Curvature', [1 1],...
'EdgeColor', [1 0 0],...
```

```
'FaceColor', [0.8 0.8 0.8],...  
'LineWidth', 1.5,...  
'Position', [-0.78,0.28,0.5,0.5])  
% построение графика  
line(...  
'Color',[0 0 1],...  
'LineWidth',2.5,...  
'LineStyle', '-',...  
'XData',x,...  
'YData',y)
```

Результат выполнения скрипта

