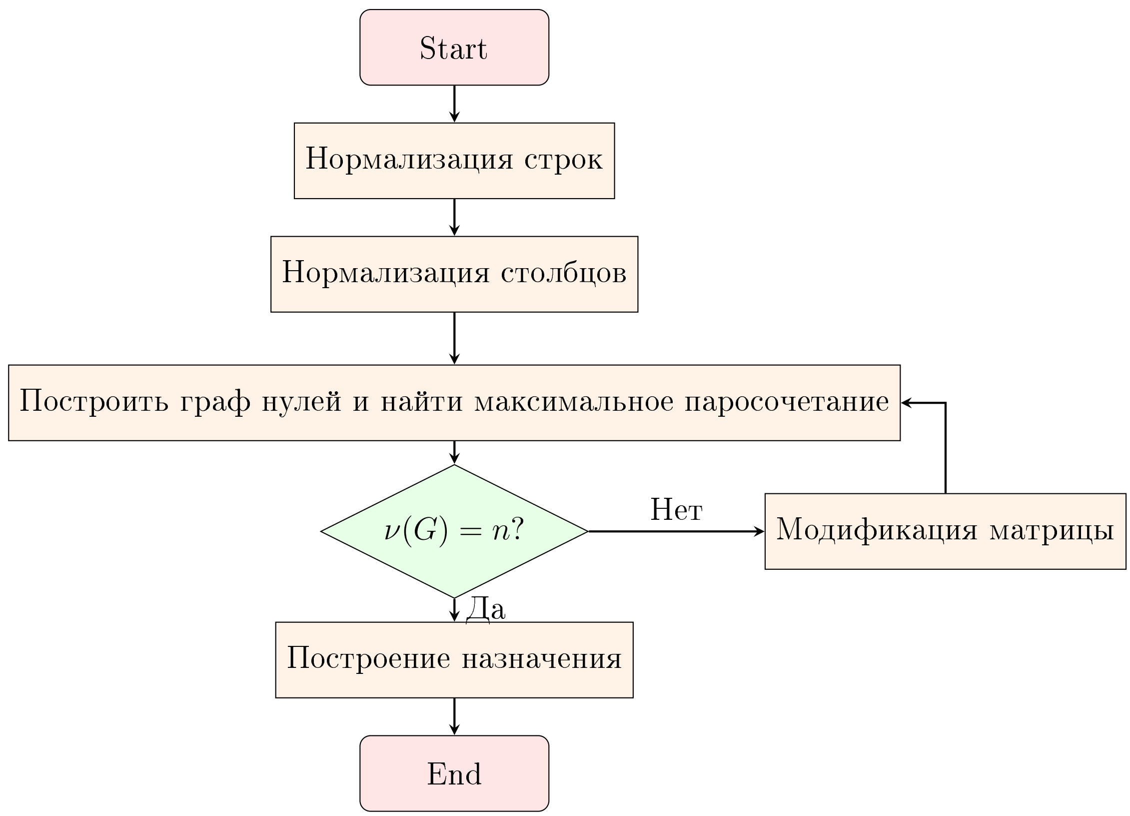
Входные и выходные данные

Венгерский алгоритм

Вход: Квадратная матрица стоимости $C = (c_{ij})$, размером $n \times n$.
Выход: Перестановка $\sigma : \{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, n\}$ (назначение задач исполнителям), минимизирующая сумму $\sum_{i=1}^{n} c_{i,\sigma(i)}$.

Блок-схема Венгерского алгоритма



Пример работы венгерского алгоритма с модификацией

Рассмотрим квадратную матрицу стоимости размера 3×3:

$$C = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 5 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Цель — найти биекцию $\sigma : \{1,2,3\} \to \{1,2,3\}$, минимизирующую $\sum_{i=1}^{3} c_{i,\sigma(i)}$.

Шаг 1. Нормализация строк

Для каждой строки вычтем её минимальный элемент:

- min в строке 1: 1 $\quad [4,1,3] \mapsto [3,0,2]$;
- в строке 2: 0 $\quad [2,0,5] \mapsto [2,0,5]$;
- в строке 3: 2 $\quad [3,2,2] \mapsto [1,0,0]$.

Новая матрица:

$$C' = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 5 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Шаг 2. Нормализация столбцов

Вычтем из каждого столбца его минимум $(1, 0, 0$ соответственно):

$$C'' = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Теперь в каждой строке и столбце есть хотя бы один ноль.

Шаг 3. Поиск максимального паросочетания

Построим двудольный граф нулей $G = (U, V, E)$, где $U = \{1,2,3\}$ (строки), $V = \{1,2,3\}$ (столбцы), и

$$E = \{(1,2), (2,2), (3,1), (3,2), (3,3)\}.$$

Алгоритм Хопкрофта–Карпа найдёт максимальное паросочетание размера $2 < 3$, например

$$M = \{(1,2),\,(3,1)\}, \quad |M| = 2.$$

Поскольку $|M| < n$, требуется модификация матрицы.

Шаг 4. Построение минимального покрытия и модификация

По теореме Кёнига минимальное покрытие нулей строится через множества достижимых вершин:

$$Z_U = \{2\}, \quad Z_V = \{2\},$$

откуда

$$R = U \setminus Z_U = \{1,3\}, \quad C = Z_V = \{2\}.$$

То есть проводим горизонтальные линии по строкам $1,3$ и вертикальную — по столбцу 2.

Найдём Δ как минимум среди непокрытых элементов:

$$\{C''_{2,1}, C''_{2,3}\} = \{1,5\}.$$

$$\Delta = 1.$$

Вычтем Δ из непокрытых и прибавим к покрытым (пересечение строк $1,3$ и столбца 2: клетки $(1,2),(3,2)$). Получаем

$$C''' = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0} & 1 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Жирным отмечены старые и новые нули.

Шаг 5. Итоговое паросочетание и назначение

Для матрицы C''' алгоритм Хопкрофта–Карпа найдёт паросочетание размера 3:

$$M^* = \{(1,2),(2,1),(3,3)\},$$

что соответствует назначению

$$\sigma(1) = 2, \quad \sigma(2) = 1, \quad \sigma(3) = 3.$$

Проверим стоимость в исходной матрице C:

$$c_{1,2} + c_{2,1} + c_{3,3} = 1 + 2 + 2 = 5.$$

Это минимальная сумма, поэтому найденное назначение оптимально.