

# EESTI FÜÜSIKAOLÜMPIAADI ÜLESANDED AASTATEST 2005 – 2018

koos vihjete ja lahendustega

Koostas Taavet Kalda

2020

# Sisukord

<b>Sissejuhatus</b>	2
<b>Ülesanded</b>	3
Teema . . . . .	3
Staatika . . . . .	7
Kinemaatika . . . . .	16
Dünaamika . . . . .	27
Taevamehaanika . . . . .	49
Gaasid . . . . .	52
Vedelike mehaanika . . . . .	60
Termodünaamika . . . . .	66
Elektrostaatika . . . . .	79
Elektriahelad . . . . .	87
Magnetism . . . . .	103
Geomeetiline optika . . . . .	109
Varia . . . . .	127
Laineoptika . . . . .	133
<b>Vihjad</b>	134
<b>Lahendused</b>	172

# Sissejuhatus

Sia on koondatud 400 gümnaasiumi ülesannet Eesti füüsikaolümpiaadi piirkonnavoorudest, lõppvoorudest ja lahtistest võistlustest. Igale ülesandele on juurde kirjutatud paarilauseiline vihje. Juhul kui õpilane jäääb ülesannet lahendades top-pama, on tal võimalik vihjet lugeda ning teisele katsele minna.

Ülesanded on jaotatud teemade kaupa ning teemasiseselt raskuse järgi. Raskustaset tähistatakse kuni viie tärniga. Ülesannete lihtsamaks otsimiseks on ülesannete numbrite ette pandud „Ü“, vihjete ette „V“ ja lahenduste ette „L“. Näiteks ülesande 133 teksti number on kujul Ü133. Iga ülesande juures on kirjas ka selle autor ning olümpiaadi vooru lühinimetus, lisaks lühendid P 1, G 1 jne, kus tähed tähistavad põhikooli- ja gümnaasiumiastet. Näiteks G 9 viitab gümnaasiumiastme 9. ülesandele.

# Ülesanded

## Teema

### Ü1 Jahipüss ★

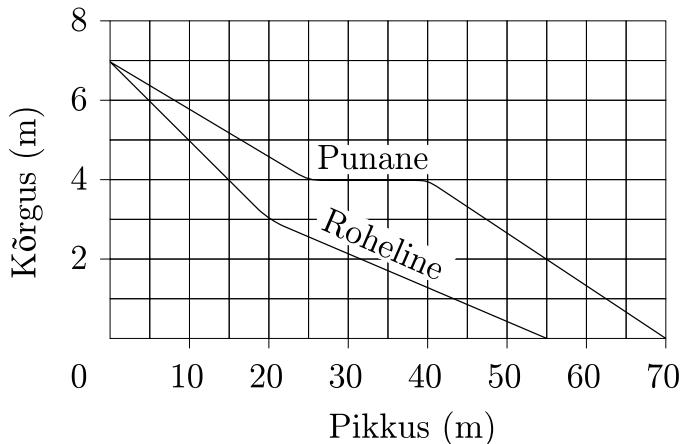
Autor: tundmatu, lõppvoor, 2004, G 1

Jahipüss massiga  $M = 3,5\text{ kg}$  ripub horisontaalselt kahe paralleelse niidi otsas. Tulistamisel kerkis jahipüss  $h = 20\text{ cm}$  võrra tagasilöögi töttu. Kuuli mass  $m = 10\text{ g}$ . Määra kuuli kiirus  $v_0$  torust väljalennu hetkel.

### Ü2 Veepark ★

Autor: tundmatu, lõppvoor, 2004, G 2

Veepargis on punane ja roheline liumägi. Joonisel on näidatud nende profiilid. Mari alustab punaselt liumäelt laskumist algkiirusega  $v_0 = 1\text{ m/s}$ . Kumma kiirus on laskumise lõpuks suurem ja mitu korda, kui Jüri kaalub  $m_j = 70\text{ kg}$  ja Mari  $m_m = 60\text{ kg}$ ? Võib eeldada, et laskumise ajal mõjub neile mõlemale konstantne takistusjõud  $F = 20\text{ N}$ .



### Ü3 Kaitsmed ★

Autor: tundmatu, lõppvoor, 2004, G 3

Rööpselt on lülitatud kaks sulavkaitset voolule  $I_{M \max} = 1\text{ A}$  ja  $I_{N \max} = 1,2\text{ A}$  takistustega vastavalt  $R_M = 1\Omega$  ja  $R_N = 2\Omega$ . Milline maksimaalne vool võib taolist süsteemi läbida? Milline oleks maksimaalne vool kui  $I_{N \max} = 1,7\text{ A}$ ?

### Ü4 Mootorratas ★

Autor: tundmatu, lõppvoor, 2004, G 4

Inimene massiga  $m_1 = 75\text{ kg}$  sõidab mootorrattaga, mille mass on  $m_2 = 150\text{ kg}$ . Mootorratturi ja mootorratta ühine masskese asub kõrgusel  $h = 0,6\text{ m}$  maapinnast ja horisontaalsihis kaugusel  $l = 0,5\text{ m}$  tagumise ratta teljest. Millise kiirendusega sõites kerkib esiratas maapinnast lahti? Kui suur peab olema hõordetegur tagaratta ja maapinna vahel, et niimoodi saaks sõita?

**Ü5 Mäed ★**

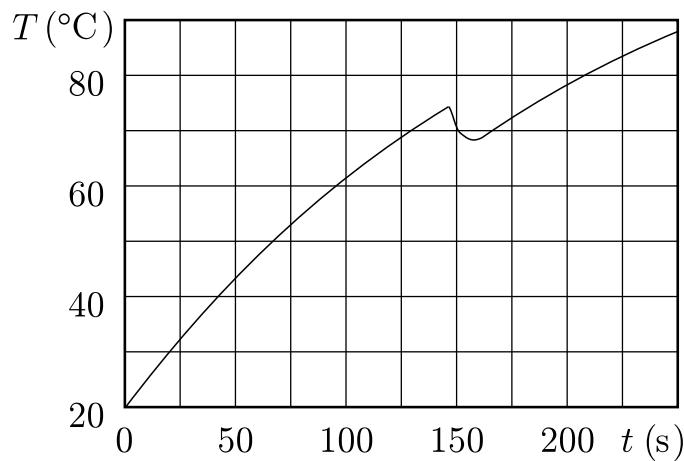
Autor: tundmatu, lõppvoor, 2004, G 5

Kahe teravatipulise lumise mäe vahel orus on keskpäeval päike seniidis. Lääne-poolse mäe kõrgus oru põhjast on  $H = 2000$  m ja idapoolse mäe kõrgus oru põhjast on  $h = 1500$  m. Mägede tippude vaheline kaugus horisontaalsihis on  $l = 5$  km ja oru põhi on mõlemast tipust võrdsel kaugusel. Mitu tundi pärast otsese päikesevalguse kadumist toimub orus järsk hämardumine? Eeldada, et taivas on pilvitu.

**Ü6 Elektrikann ★**

Autor: tundmatu, lõppvoor, 2004, G 6

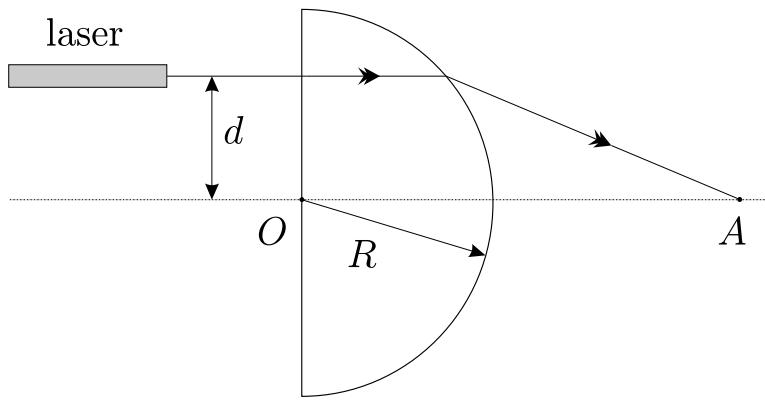
Elektrikannus soojendatakse vett. Teatud hetkel pandi kannu  $T_0 = 0^\circ\text{C}$  juures olevat jääd. Joonisel on toodud vee temperatuuri sõltuvus ajast. Kui suur oli jäää mass, kui kannu võimsus  $P = 1 \text{ kW}$ . Jää sulamissoojus on  $L = 335 \text{ kJ/K}$ . Toatemperatuur  $T_1 = 20^\circ\text{C}$ .

**Ü7 Laser ★**

Autor: tundmatu, lõppvoor, 2004, G 7

Läbipaistvast materjalist poolsilindri raadius on  $R$  ja aine murdumisnäitaja  $n$ . Laserkiir langeb risti poolsilindri tasapinnalisele küljele (vt. joonist). Leida maksimaalne kaugus  $d_{\max}$ , mille korral laserkiir veel väljub silindrilise pinna kaudu. Millistes piirides varieerub kaugus  $l$  (punkt O ning laserkiire ja optilise telje lõikepunkti A vahemaa), kui  $d_{\max} > d > 0$ .

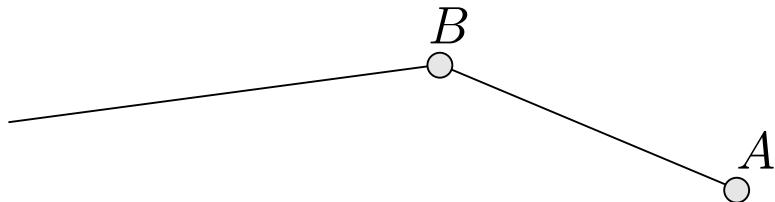
Märkus. Väikeste nurkade korral võib lugeda  $\sin \alpha \approx \tan \alpha \approx \alpha$ . Eeldatakse, et  $l$  on monotoonne funktsioon  $d$ -st.



### Ü8 Nööbid ★

Autor: tundmatu, lõppvoor, 2004, G 8

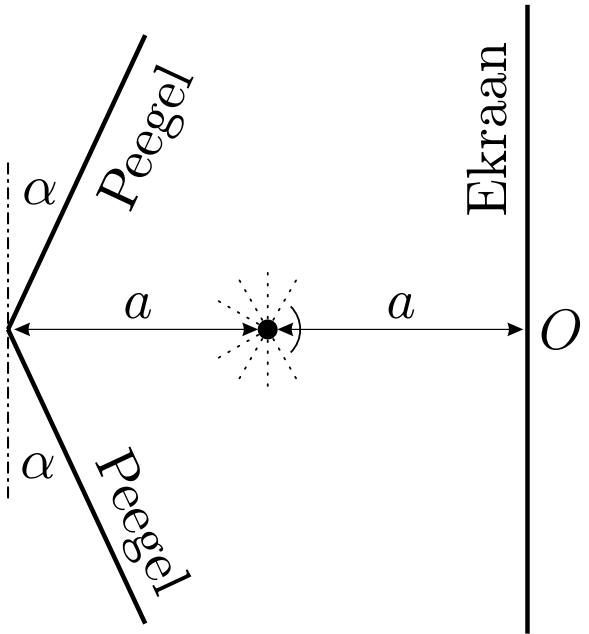
Joonisel on kujutatud pealtvaates kahte nööpi  $A$  ja  $B$ , mis on omavahel ühendatud niidiga, mille pikkus  $l = 10\text{ cm}$ . Süsteem asub pöörleval alusel. Nööpide ja aluse vaheline hõõrdetegur on  $\mu$ . Ühe nööbi külge on kinnitatud veel teine niit, mille abil hoitakse nööpe paigal (vt. joonist). On teada, et pöörlemiskese asub klotsist  $A$  kaugusel  $a = 10\text{ cm}$  ja mõlemad niidid on horisontaalsed. Kui suur on pöörlemiskeskme ja nööbi  $B$  vahekaugus ning nööbi  $B$  mass  $m_B$ ? Nööbi  $A$  mass  $m_A = 1,0\text{ g}$  ja niidid võib lugeda kaalututeks. Nööpide joonis on ära toodud ka eraldi lehel, mida võib kasutada lahenduse esitamiseks.



### Ü9 Peeglid ★

Autor: tundmatu, lõppvoor, 2004, G 9

Ekraan, kaks peeglit ning koherentse monokromaatilise kiirguse allikas (kiiratav laine pikkus  $\lambda$ ) on paigutatud nii, nagu näidatud joonisel. Valgusallikast jõuab ekraanile vaid peegeldunud valgus. Peeglite normaalide vaheline nurk on  $2\alpha$ . Peeglite puutepunkti ning valgusallika vaheline kaugus on  $a$  ning valgusallika kaugus ekraanist on samuti  $a$ . On teada, et punkti  $O$  lähepusse tekib interferentsimuster, kus järjestikuste tumedate triipude vaheline kaugus on  $d$ . Leida laine pikkus  $\lambda$ . Eeldata, et  $a \gg d$ .



### Ü10 Elektriväli ★

Autor: tundmatu, lõppvoor, 2004, G 10

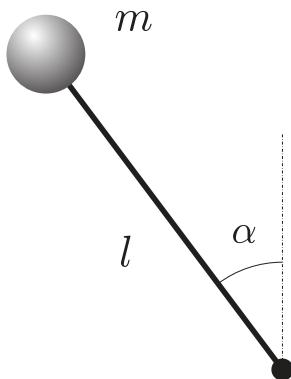
Kaks metallkuuli raadiusega  $r$  ja massiga  $m$  on joodeitud kerge metallvarda (pikkus  $l$ ) otste külge. Süsteem asub kaalutuse tingimustes homogeenses elektriväljas tugevusega  $E$ . Kui suur on varrast pingestav joud  $F$  ja süsteemi väikeste võnkumiste periood  $T$ ? Võite lugeda, et  $l \gg r$ .

## Staatika

### Ü11 Pendel ★

Autor: Mihkel Heidelberg, piirkonnavor, 2008, G 1

Otsast kinnitatud varras saab pöörelda ümber horisontaaltelje ühes tasandis. Varda otsa on kinnitatud koormis massiga  $m$ . Varda pikkus on  $l$ . Varda kinnitusele mõjub hõõrdest tingitud pidurdav jõumoment  $M$ . Millistes nurkade vahemikes võib olla varras paigal (vt joonist)? Arvestada, et  $mgl > M$ .



### Ü12 Toru ★

Autor: tundmatu, lahtine, 2007, G 2

Kaks inimest kannavad toru massiga  $m = 80\text{ kg}$  ja pikkusega  $l = 5\text{ m}$ . Esimene inimene hoiab toru kaugusel  $a = 1\text{ m}$  toru otsast, teine aga hoiab toru teist otsa. Leida jõud, mida toru avaldab kummalegi inimesele.

### Ü13 Nürinenud käärid ★

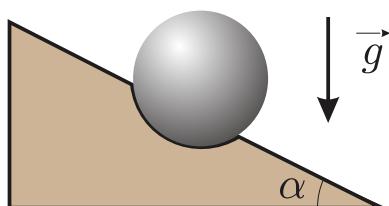
Autor: Mihkel Kree, lõppvoor, 2009, G 1

Juku asus hekkääridega õunapuult jämedat oksa lõikama. Et aga käärid olid juba ammu nürinenud, polnud neist mingit abi. Enamgi veel, oks hakkas kääride kokkuvajutamise ajal terade vahel lausa libisema. Libisemine peatus hetkel, mil terade vaheline nurk oli kahanenud  $\alpha$ -ni. Kui suur oli hõõrdetegur oksa ja nürinenud lõiketera vahel?

### Ü14 Kuul ★★

Autor: tundmatu, lahtine, 2005, G 3

Metallist kuul asetseb lauauge, mille sügavus on 2 korda väiksem kuuli raadiusest (vt joonist). Kui suure laua kaldenurga  $\alpha$  puhul kukub kuul august välja?



**Ü15 Katus ★★**

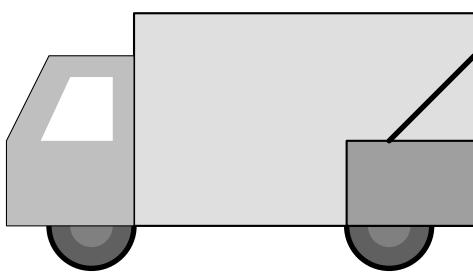
Autor: Ott Krikmann, piirkonnnavoor, 2005, G 2

Ühtlase lumekihiga kaetud katus on horisondi suhtes kaldu  $\alpha = 40^\circ$  nurga all. Katus on ristiküliku kujuiline ja laius harjast räästani mööda katuse pinda on  $L$ . Katuse ja lume vaheline hõõrdetegur on  $\mu = 1$ . Katus harjast hakkab lumekihi ja katuse vahele voolama vesi, mis muudab märja katuse ja lumekihi vahelise hõõrdeteguri nulliks. Kui vesi jõuab katuseharjast kaugusele  $l$ , hakkab lumekiht alla libisema. Leidke suhe  $l/L$ .

**Ü16 Kast kaubikus ★★**

Autor: Oleg Košik, lõppvoor, 2009, G 2

Kast massiga  $m = 15 \text{ kg}$  on kinnitatud kaubiku tagaseina külge nööriga. Leida nööri pinge minimaalne võimalik väärthus äkkpidurduse ajal, kui kiirusega  $v_0 = 45 \text{ km/h}$  sõitev kaubik jäab seisma ajaga  $t = 5 \text{ s}$ . Hõõrdetegur kasti aluse ja kaubiku põranda vahel  $\mu = 0,2$ , nurk nööri ja kaubiku tagaseina vahel  $\alpha = 45^\circ$ . Lugeda, et pidurdamine oli ühtlane ja kast püsis kogu aeg paigal.

**Ü17 Liivahunnik ★★**

Autor: Roland Matt, piirkonnnavoor, 2011, G 5

Millisele pindalale on võimalik mahutada koonusekujuline liivahunnik, kui liiva ruumala on  $V = 50 \text{ m}^3$  ja libisevate liivakihtide vaheline efektiivne hõõrdetegur  $\mu = 0,4$ ? Liivahunniku ja aluspinna hõõrdeteguri võib lugeda väga suureks.

**Ü18 Tormituul ★★**

Autor: Mihkel Kree, lõppvoor, 2011, G 3

Vaatleme tugeva külgtuule kätte jäänud veoautot lihtsustatult homogeense risttuhkana. Auto laius on  $a = 2 \text{ m}$ , kõrgus  $b = 3 \text{ m}$ , pikkus  $c = 5 \text{ m}$ . Missugune peaks olema hõõrdetegur rattaste ja maapinna vahel, et piisavalt tugev külgtuul suudaks auto tuulepoolsed rattad maast lahti kergitada?

**Ü19 Rõngas ★★**

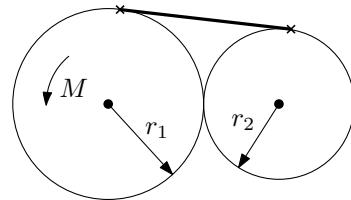
Autor: Taavi Pungas, piirkonnnavoor, 2014, G 6

Lae külge on nööriga, mille pikkus on  $L$ , kinnitatud kerge plastmassrõngas raadiusega  $R$ , mille küljes on omakorda raske metallist mutter. Mutrit saab mööda rõngast libistada. Rõnga ja mutri vaheline hõõrdetegur on  $\mu$ . Juku tahab mutrit mööda rõngast nihutades saavutada olukorda, kus mutri ja lae vahekaugus  $h$  oleks võimalikult väike, aga süsteem püsiks veel ilma välise sekkumiseta tasakaalus. Leidke vähim vahekaugus  $h_{\min}$ , mille Juku võib saavutada. Eeldage, et rõnga mass on mutri omaga võrreldes tühiselt väike.

**Ü20 Hammasrattad ★★**

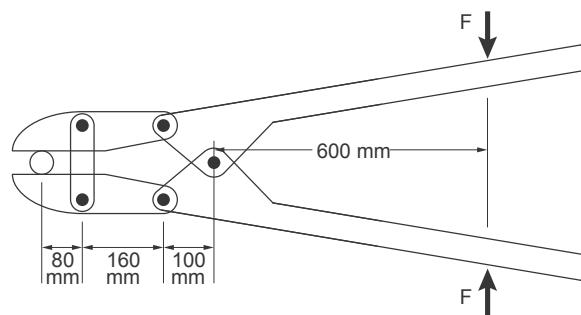
Autor: Siim Ainsaar, lõppvoor, 2010, G 4

Fikseeritud telgedega hammasrattad raadiustega  $r_1$  ja  $r_2$  hambuvad ja on ühen-datud venimatu nööriga, mis on mõlemale puutujaks. Esimest ratast pööratakse jõumomendiga  $M$ . Kui suur on nööri pinge  $T$ ?

**Ü21 Poldilõikur ★★**

Autor: Mihkel Rähn, piirkonnavoor, 2015, G 7

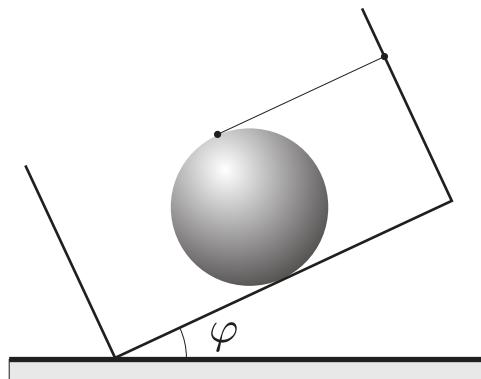
Leida, kui suurt jõudu avaldab poldilõikuri tera poldile (vt joonis), kui käepideme-tele avaldatud jõud on  $F = 90 \text{ N}$ .



**Ü22 Kuul ★★**

Autor: tundmatu, lahtine, 2006, G 7

Kasti tasasel põhjal asub kuul. Kasti põhi asub nurga all horisontaalsuuna suhtes. Kuuli hoiab tasakaalus kasti seina külge kinnitatud niit, mis on paralleelne kasti põhjaga (vt joonist). Kui suure maksimaalse nurga  $\varphi$  võrra saab kasti kallutada, et kuul oleks veel tasakaalus? Hõõrdetegur kuuli ja kasti vahel on  $\mu$ .

**Ü23 Toru ★★**

Autor: Aigar Vaigu, lõppvoor, 2010, G 5

Kareda horisontaalselt kinnitatud toru (raadius  $R$ ) peal tasakaalustatakse risttahukakujulist prussi. Leidke prussi paksus  $L$ , mille korral prussi asend torul on stabiilne.

*Märkus:* kasulikud võivad olla väikeste nurkade korral kehtivad lähendused  $\sin \alpha \approx \alpha$  ja  $\cos \alpha \approx 1 - \alpha^2/2$ , kus nurgad on radiaanides.

**Ü24 Klotsid ★★**

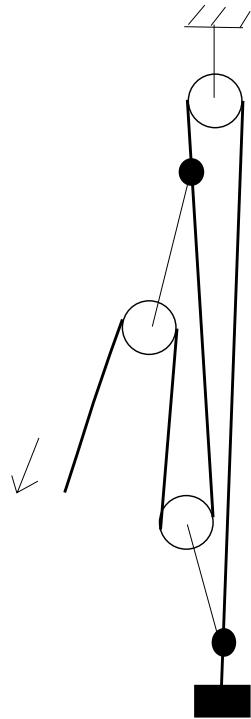
Autor: Mihkel Rähn, piirkonnavor, 2014, G 7

Horisontaalsel laual asuva klotsi massiga  $m_1$  peale on asetatud teine klots massiga  $m_2$ . Kahe klotsi vaheline seisuhõõrdetegur on  $\mu_2$ . Alumise klotsi ja laua vaheline liugehõõrdetegur on  $\mu_1$ . Leidke maksimaalne horisontaalne jõud  $F$ , millega võib alumist klotsi tõmmata, ilma et ülemine klots libiseks.

**Ü25 Polüspast ★★**

Autor: Mihkel Rähn, lõppvoor, 2014, G 6

Jäälõhesse kukkunud alpinisti väljatõmbamiseks on käepärastest vahenditest (kolm plokki ja nöörijupid) koostatud polüspast. Lihtsustatud joonisel on jämeda joonega märgitud põhiköis, mille ühes otsas on kukkunu ning teisest otsast vinnatakse. Plokid on peene joonega kujutatud nööri abil kinnitatud mittelibiseva sõlmega (joonisel täidetud ring) põhiköie külge. Leidke polüspasti ülekandetegur nii hõõrdumist arvestamata kui ka eeldusel, et hõõrdumine vähendab jõuülekannet igal plokil 35 %. Eeldage, et kõik jõud on vertikaalsed.



### Ü26 Kelk ★★

Autor: Andreas Valdmann, piirkonnavor, 2018, G 9

Juku läks sõpradega kelgutama. Teel tagasi istusid Juku kaks sõpra kelgule ja Juku üritas kelku horisontaalsel lumisel teel enda järel vedada. Kui suur on minimaalne kelgunööri nurk maapinnaga, mille korral on Jukul võimalik kelk liikuma tõmmata? Juku mass  $m_1 = 60 \text{ kg}$  ja hõõrdetegur Juku saabaste ning lume vahel  $\mu_1 = 0,30$ . Kelgu mass koos Juku sõpradega  $m_2 = 110 \text{ kg}$  ja hõõrdetegur kelgu ning lume vahel  $\mu_2 = 0,20$ .

### Ü27 Kuubik ★★★

Autor: Riho Taba, piirkonnavor, 2007, G 9

Kuubik massiga  $m = 10 \text{ kg}$  ning küljepikkusega  $a = 0,1 \text{ m}$  lebab laual. Laua ja kuubiku vaheline hõõrdetegur on  $\mu = 0,5$ . Kas kuubikut on võimalik käega teisele küljele lükata, avaldades vaid jõudu kuni  $F = 40 \text{ N}$ ? Eeldada, et hõõrdetegur käe ja kuubiku vahel on väga suur ehk käsi ei libise. Raskusjõu kiirendus on  $g = 9,8 \text{ m/s}^2$ .

**Ü28 Kuulid ★★★**

Autor: Jaan Kalda, lahtine, 2009, G 9

Kolm ühesuguse raadiusega kuuli  $A$ ,  $B$  ja  $C$  on ühendatud kergete varraste abil võrdkülgsed kolmnurgaks  $ABC$ , mis lebab siledal (kuid nullist erineva hõõrdeteguriga) horisontaalpinnal. Kuuli  $C$  lükatakse hästi aeglasedelt nii, et selle kiirusvektor on kogu aeg risti sirgega  $AC$ . Kui kuul  $A$  on piisavalt raske (st masside suhe  $M_A/M_B$  on piisavalt suur), siis jäab kuul  $A$  paigale. Millise suhte  $M_A/M_B$  puhul hakkab kuul  $A$  libisema?

**Ü29 Rõngas ★★★**

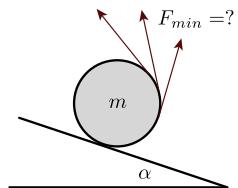
Autor: Jaan Kalda, lõppvoor, 2011, G 7

Ebaühtlase massijaotusega traadist on tehtud rõngas, mis kujutab endast ringi raadiusega  $R$ . Selle rõnga massikese asub ringi keskpunktist kaugusel  $R/2$ . Rõngas asetatakse horisontaalsele völliile rippuma. Milline peab olema rõnga ja völli vahe-line hõõrdetegur  $\mu$ , et völli aeglasel pöörlemisel rõngas völlil ei libiseks?

**Ü30 Niidirull ★★★**

Autor: Mihkel Kree, lahtine, 2013, G 8

Silinder massiga  $m$ , millele on keritud õhuke niit, asetatakse kaldpinnale nurgaga  $\alpha$ . Millise minimaalse jõuga  $F_{\min}$  tuleb nöörist hoida, et silinder paigale jäääks (vt joonist)? Hõõrdetegur pinna ja silindri vahel on nii suur, et libisemist ei toimu.

**Ü31 Jalgrattur ★★★★**

Autor: Andres Pöldaru, lahtine, 2014, G 8

Jalgrattur sõidab alla ühtlase kallakuga nõlvast. Kui ta vajutab pidureid täpselt nii kõvasti, et tagumine ratas on peaegu õhku töusmas, siis tema kiirus mäest alla sõites ei muutu. Jalgratturist ja rattast koosneva süsteemi massikese asub täpselt kahe ratta vahel kaugusel  $h$  maapinnast, rattaste telgede vahekaugus on  $d$ . Kui suur on nõlva ja horisontaalsihi vaheline nurk  $\alpha$ ? Kui suur peab olema ratta ja kaldpinna vaheline hõõrdetegur  $\mu$ , et jalgrattur saaks kirjeldatud moel pidurdada?

**Ü32 Elektriliin ★★★**

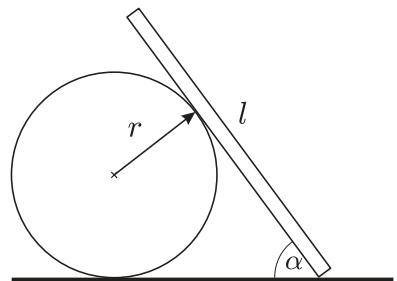
Autor: tundmatu, lahtine, 2004, G 10

Elektriülekandiini postid paiknevad üksteisest  $L = 100 \text{ m}$  kaugusel. Postide vahel rippuv traadi keskpunkt paikneb kinnituspunktidest  $H = 1 \text{ m}$  võrra madalamal. Traat on valmistatud alumiiniumist, mille tihedus on  $\rho = 2700 \text{ kg/m}^3$  ja tõmbetugevus  $100 \text{ MPa}$ . Kas traat peab mehaaniliselt pingele vastu?

**Ü33 Varras ★★★★**

Autor: Siim Ainsaar, lõppvoor, 2008, G 9

Peenike homogeenne varras toetub ühe otsaga vastu põrandat (hõõrdetegur varda otsa ja põrandaa vahel on  $\mu$ ) ning küljega vastu libedat horisontaalset silindrit (hõõrdetegur on tühiselt



väike), vt joonist. Silinder on liikumatult kinnitatud põranda külge, varras on risti silindri teljega ning moodustab põrandaga nurga  $\alpha$ . Millise varda pikkuse  $l$  korral jäääb varras sellisesse asendisse püsima?

#### Ü34 Konn ★★★★☆

Autor: Taavi Pungas, lahtine, 2010, G 9

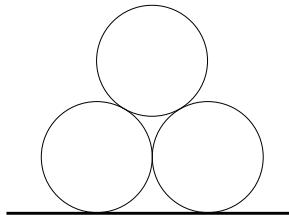
Väike puukonn suudab ronida mööda seinu ja lagedid, luues enda ja seina vahel seisneda risti oleva tömbejöö (nt iminappade tekitatud vaakumiga) ning vältides libisemist selle tagajärvel tekkiva hõõrdejöö abil. Millise nurga all maapinna suhtes peab olema sein, et tal oleks end kõige raskem pügal hoida (mil libisemise vältimiseks vajalik seinaga risti olev jõud on maksimaalne)? Hõõrdetegur sein ja konna vahel on  $\mu$ .



#### Ü35 Torud ★★★★☆

Autor: Jaan Kalda, piirkonnavor, 2010, G 10

Põrandale asetatakse kõrvuti kaks ühesugust silindrulist toru – paralleelselt ja küljeti üksteist puutuvana. Kolmas samasugune toru asetatakse nende peale – samuti paralleelselt, nõnda et see toetub kahele alumisele. Milliseid tingimusi peavad rahuldama hõõrdetegur  $\mu$  toru ja põranda vahel ning hõõrdetegur  $k$  kahe toru vahel selleks, et pealmine toru kahte alumist üksteisest eemale ei vajutaks?

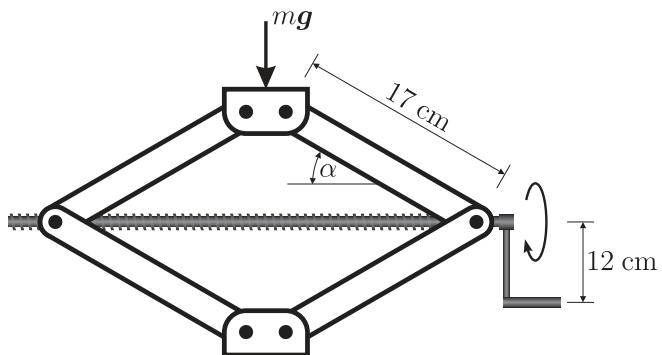


#### Ü36 Tungraud ★★★★☆

Autor: Valter Kiisk, lõppvoor, 2011, G 10

Joonisel on kujutatud lihtsa konstruktsiooniga tungraud, mille keerme samm on 3 mm. Tungrauale surub auto jõuga  $F = 5 \text{ kN}$ . Vaatleme hetke, millal  $\alpha = 40^\circ$ . Tungraua mõõtmeid vaadake jooniselt.

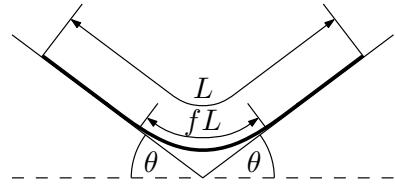
- a)** Kui suure jõuga tuleb auto töstmiseks vända käepidemele mõjuda, kui jäätta arvestamata hõõrdumine kõigi libisevate pindade vahel?
- b)** Kui hõõre oleks ka tegelikult tühiselt väike, siis ei püsiks tungraud üleskeeratud asendis: niipea kui käepidemest lahti lasta, hakkaks see auto raskuse mõjul pöörlema ja auto vajuks taas alla. Vastake eelmisele küsimusele eeldusel, et hõõrdetegur on parajasti nii suur (st mitte suurem, kui hädapärist vaja), et tungraud jäääks üleskeeratud asendisse püsima.



### Ü37 Nöör rennis ★★★★

Autor: Stanislav Zavjalov, lahtine, 2012, G 9

Kaks plaati moodustavad V-kujulise horisontaalse renni. Mõlemad plaadid on horisontaalsatapinna suhtes nurga  $\theta$  all. Renni on jupp ühtlase massijaotusega nööri pikkusega  $L$ , mis asub tervikuna renniga ristuvas tasandis nii, et mõlema plaadiga puutub kokku sama palju nööri. Renni põhja kohal ei toetu nöör enam pikkuse  $fL$  ulatuses plaatidele. Leidke  $f$ , kui nöör on libisemise piiril. Hõõrdetegur nööri ja plaatide vahel on  $\mu = 1$ .



### Ü38 Katus ★★★★

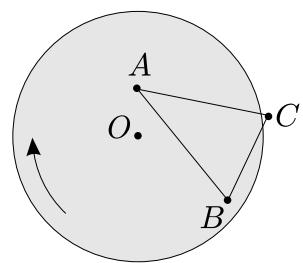
Autor: Jaan Kalda, lõppvoor, 2017, G 9

Kaks jäiaka traadijuppi pikkusega  $L$  on ühendatud otsapidi (nt niidiga seotud) nii, et nende otspunktid on kontaktis ja nende vaheline nurk saab takistuseta muutuda, moodustades V-kujulise figuuri. See traadist moodustis asetatakse horisontaalse libedapinnalise silindri peale nõnda, et tasakaaluasendis moodustub traadist „katus“ (tagurpidi „V“) tipunurgaga  $\alpha$ . Massijaotus traadis on ühtlane, hõõre traadi ja silindri vahel puudub. a) Milline on silindri raadius  $R$ ? b) Milline võrratus peab olema rahuldatud, et see asend oleks stabiilne (uurida stabiilsust vaid „katuse“ kui terviku pöördumise suhtes, eeldades et traatidevaheline nurk ei muutu)?

### Ü39 Platvorm ★★★★

Autor: Jaan Kalda, lõppvoor, 2005, G 10

Siledas põrandas on pöörlev ringikujuline platvorm (joonisel pealtvaates, hall), mis on samast materjalist nagu põrandki (joonisel valge). Põrande ja platvormi ülemine pind on samal horisontaaltasandil. Kolm ühesugust keha ühendatakse kergete varraste abil kolmnurgaks ning asetatakse sedasi, et kaks keha asuvad platvormil punktides  $A$  ja  $B$  (vt joonist). Vardad ei puuduta ei põrandat, ega platvormi.

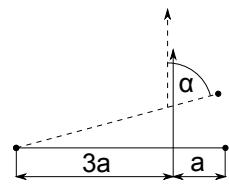


- a)** Kui kolmas keha lebaks põrandal punktis  $C$ , kas siis kolmnurk hakkaks põranda suhtes liikuma või jäeks paigale? Põhjendage vastust.  
**b)** Märkige joonisel selline punktihulk  $X$ , kus võiks asuda kolmas keha nii, et kolmnurk jäeks põranda suhtes paigale.
- Märkus: kolmnurga külgede  $AC$  ja  $BC$  pikkusi võib muuta. Seega, kui kolmas keha asub punktis  $D \in X$ , siis üldjuhul  $|AD| \neq |AC|$  ja  $|BD| \neq |BC|$ .

**Ü40 Niidiga hantel ★★★★**

Autor: Jaan Kalda, lõppvoor, 2015, G 9

Horisontaalpinnal lebab hantel, mis koosneb kaalutust var-dast pikkusega  $l = 4a$  ning selle otstete kinnitatud kahest ühesuguse massi ja hõõrdeteguriga väikesest klotsist. Varda külge kaugusele  $a$  ühest klotsist on seotud pikk niit. Algul on niidi suund horisontaalne ja risti vardaga. Niiti aeglaselt tömmates hakkab hantel pöörduma, sest alguses nihkub vaid üks klots. Milline on nurk  $\alpha$  varda ja niidi vahel siis, kui ka teine klots nihkuma hakkab?



## Kinemaatika

### Ü41 Autod ★

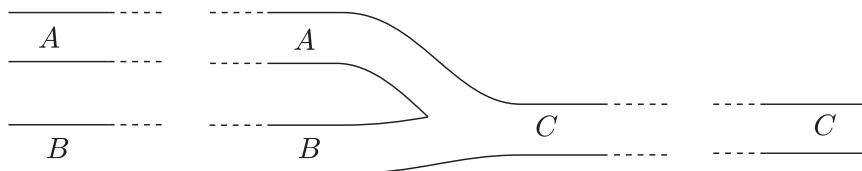
Autor: Oleg Košik, piirkonnnavoor, 2006, G 1

Tartu ja Tallinna vahemaa on  $s = 180$  km. Jalgrattur sõidab Tartust Tallinna poole kiirusega  $v_1 = 30$  km/h. Sõites luges ta kokku, et  $t_0 = 5$  min jooksul tuli talle vastu  $n_0 = 20$  autot. Mitu Tallinnast Tartusse sõitvat autot on korraga maanteel? Eeldada, et autod sõidavad võrdsete vahemaa deega kiirusega  $v_2 = 90$  km/h kogu maantee ulatuses.

### Ü42 Ummik ★

Autor: Jaan Kalda, piirkonnnavoor, 2007, G 2

Vaatleme kahe üherajalise tee,  $A$  ja  $B$ , liitumist üherajaliseks teeks  $C$ . Tipptunni ajal on kõik kolm teed täidetud autodega; kahe naaberauto keskmise vahemaa võib lugeda kõigil kolmel teel ühesuguseks. Tee  $A$  pikkus on  $L_A = 1$  km, tee  $B$  pikkus  $L_B = 3$  km ning tee  $C$  pikkus  $L_C = 2$  km. Autode keskmise kiirus teel  $A$  on  $v_A = 3$  km/h ning tee  $B$  läbimiseks kulub autol  $t_B = 36$  min. Kui kaua sõidab auto tee  $A$  algusest tee  $C$  lõpuni?



### Ü43 Auto ★

Autor: tundmatu, lahtine, 2008, G 1

Paigalseisust liikuma hakanud autol kulus teatud vahemaa läbimiseks  $t = 15$  s. Millise ajaga läbis auto viimase viiendiku sellest vahemast? Auto liikumine lugeda ühtlaselt kiirenevaks.

### Ü44 Ratturid ★

Autor: tundmatu, lahtine, 2009, G 1

Kolm ratturit sõitsid linnast  $A$  linna  $B$ . Linnast  $A$  väljusid nad üheaegselt. Esimese ratturi keskmise kiirus oli  $v_1 = 30$  km/h, teise ratturi oma  $v_2 = 20$  km/h. Esimene rattur jõudis sihpunkti kell 19.00, teine rattur kell 20.00 ning kolmas rattur kell 21.00. Milline oli kolmanda ratturi keskmise kiirus  $v_3$ ?

### Ü45 Rong ★

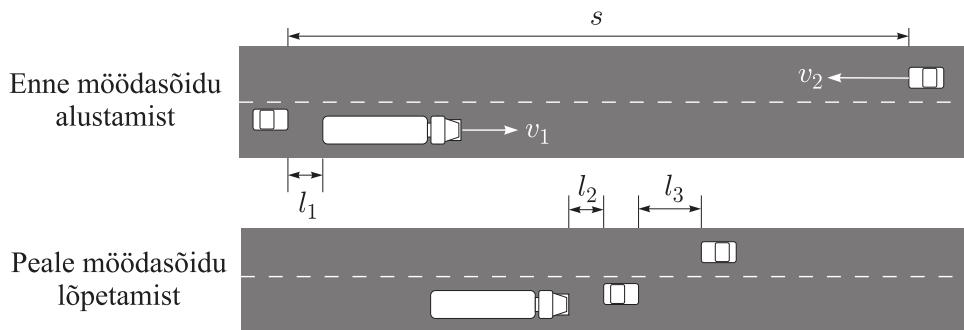
Autor: Koit Timpmann, piirkonnnavoor, 2013, G 1

Kaubarong läbis kahe jaama vahelise teelõigu keskmise kiirusega 36 km/h. Kogu sõiduajast 2/5 vältel liikus rong ühtlaselt kiirenevalt, siis 2/5 vältel liikus jääva kiirusega ning viimase 1/5 vältel pidurdas ühtlaselt aeglustuvalt. Kui suur oli rongi maksimaalne kiirus kahe jaama vahelisel teel?

**Ü46 Veok ★**

Autor: Valter Kiisk, piirkonnavor, 2005, G 1

Veok sõidab maanteel ühtlase kiirusega  $v_1 = 80 \text{ km/h}$ . Veokile järgneb  $l_1 = 10 \text{ m}$  kaugusel sõiduauto. Veoki pikkus on  $L_1 = 12 \text{ m}$ , sõiduauto pikkus  $L_2 = 4 \text{ m}$ . Sõiduauto sooritab möödasõidu ühtlase kiirendusega  $a = 2 \text{ m/s}^2$ . Möödasõit lõpeb siis, kui sõiduauto on veokist  $l_2 = 10 \text{ m}$  kaugusel. Kui pikas minimaalses ulatuses  $s$  peaks vastassuunaline rada vaba olema ohutuks möödasõiduks? Ohutuks kauguseks vastutulevast autost loetakse  $l_3 = 30 \text{ m}$ . Vastutulevad autod sõidavad kiirusega  $v_2 = 90 \text{ km/h}$ .

**Ü47 Rongiõnnetus ★**

Autor: Oleg Košik, piirkonnavor, 2011, G 4

Kehrast Aegviidi poole sõitis kiirusega  $v_1 = 63 \text{ km/h}$  kaubarong. Aegviidust hakkas Kehra poole sama teed pidi sõitma elektrirong kiirendusega  $a_2 = 0,15 \text{ m/s}^2$ . Kui rongide vahemaa oli  $s = 2750 \text{ m}$ , märkas kaubarongi vedurijuht vastusõitvat elektrirongi ning vajutas pidurile. Elektrirongi kiirus oli selleks hetkeks  $v_2 = 18 \text{ km/h}$ . Leidke rongide sõidukiirused vahetult kokkupõrke eel. Kaubarongi pidurduskiirendus on  $a_1 = -0,1 \text{ m/s}^2$ .

**Ü48 Rongivile ★**

Autor: Mihkel Kree, lahtine, 2015, G 1

Rong läheneb jaamale sirgjooneliselt ning muutumatu kiirusega. Vedurijuht laseb vilet kestusega  $t_0 = 10 \text{ s}$ , peatuses rongi ootav jaamaülem mõõdab vile kestuseks aga  $t_1 = 9 \text{ s}$ . Arvutage rongi liikumise kiirus  $v$ . Heli kiirus õhus  $c = 340 \text{ m/s}$ .

**Ü49 Kaubarong ★**

Autor: Erkki Tempel, piirkonnavor, 2015, G 1

Tavaliselt sõidab kaubarong ühtlase kiirusega  $v = 72 \text{ km/h}$ , kuid seekord hilines jaama  $\Delta t = 5 \text{ min}$ . Raudteel olid hooldetööd ning rong pidi mingi aja sõitma kiirusega  $v_h = 18 \text{ km/h}$ . Rongi kiirendus pidurdamisel oli  $a_p = 0,2 \text{ m/s}^2$  ning kiirendamisel  $a_k = 0,1 \text{ m/s}^2$ . Kui pika tee sõitis rong kiirusega  $18 \text{ km/h}$ ?

**Ü50 Kiirabiauto ★**

Autor: Sandra Schumann, lahtine, 2017, G 1

Jukust sõitis tänaval mööda kiirabiauto. Juku kuulis, et möödumisel langes kiirabiauto sireeni toon väikese terti võrra. Kui kiiresti sõitis kiirabiauto? Heli kiirus õhus Juku juures oli  $v_h = 343 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ . Eeldada, et Juku kaugus kiirabiauto sirgjoone läisest trajektoorist on tühiselt väike. Doppleri seadus annab seose sageduste ja liikumiskiiruste vahel.

$$\frac{f_v}{f_a} = \frac{v_h + v_v}{v_h + v_a},$$

kus  $f_v$  on vastuvõtja mõõdetud heli sagedus,  $f_a$  on allika tekitatud heli sagedus,  $v_v$  on heli vastuvõtja kiirus ja  $v_a$  on heliallikas liikumise kiirus.

*Vihje.* Väike tert on muusikaline intervall, mis vastab 1,5-toonisele erinevusele heli sageduses. Üks oktagon tähistab 2-kordset erinevust heli sageduses ja vastab 6 toonile. Eeldada, et toonid on jaotatud oktavis nõnda, et kui kolme helisageduse  $f_1, f_2, f_3$  jaoks kehtib  $\frac{f_2}{f_1} = \frac{f_3}{f_2}$  ja  $f_1$  ning  $f_2$  vahel on üks toon, siis on ka  $f_2$  ja  $f_3$  vahel üks toon.

**Ü51 Pidurdus ★**

Autor: Mihkel Rähn, piirkonnnavoor, 2017, G 2

Kaks autot sõidavad teineteise järel kiirustega  $v = 50 \text{ km/h}$ . Esimene auto pidurdab maksimaalselt, mida nähes tagumise auto juht samuti pidurdab maksimaalselt. Esimese auto pidurid rakenduvad samal hetkel, kui süttivad pidurituled. Tagumise auto juhil kulub eesmisse auto piduritulede süttimisest kuni oma auto pidurite rakendumiseni  $t = 1,5 \text{ s}$ . Teekatte hõõrdetegur  $\mu = 1$  ning raskuskiirendus  $g = 9,8 \text{ m/s}^2$ .

- a)** Kui suur peaks olema autodevaheline vahemaa sõidu ajal, et pidurdamisel ei toimuks tagant otsasõitu?
- b)** Kui autodevaheline vahemaa enne pidurdamist on  $l = 5 \text{ m}$ , siis kui suur on autode kiirus üksteise suhtes kokkupõrke hetkel?

**Ü52 Sonar ★★**

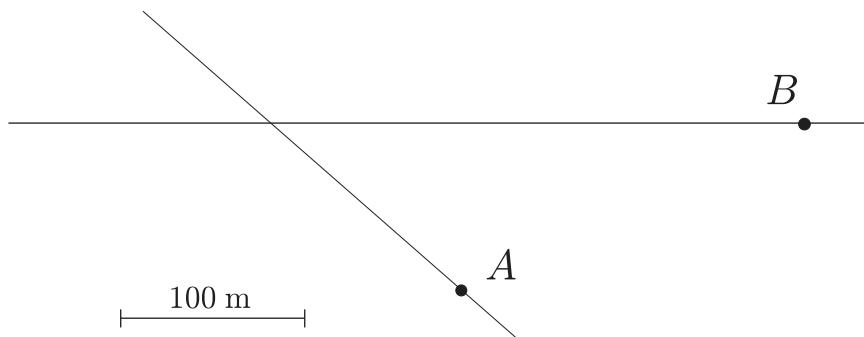
Autor: Oleg Košik, piirkonnnavoor, 2006, G 3

Vaatame laeva kiiruse määramiseks järgmist meetodit: rannikult saadetakse eemalduvale laevale ultraheli signaal sagedusega  $f_1$ . Laevalt peegeldub signaal tagasi rannikule, kus vastuvõtja fikseerib signaali sagedusega  $f_2$ . Teades, et heli kiirus õhus on  $v_h$ , määrase laeva kiirus  $v$ .

**Ü53 Autod ★★**

Autor: Jaan Kalda, piirkonnnavoor, 2008, G 2

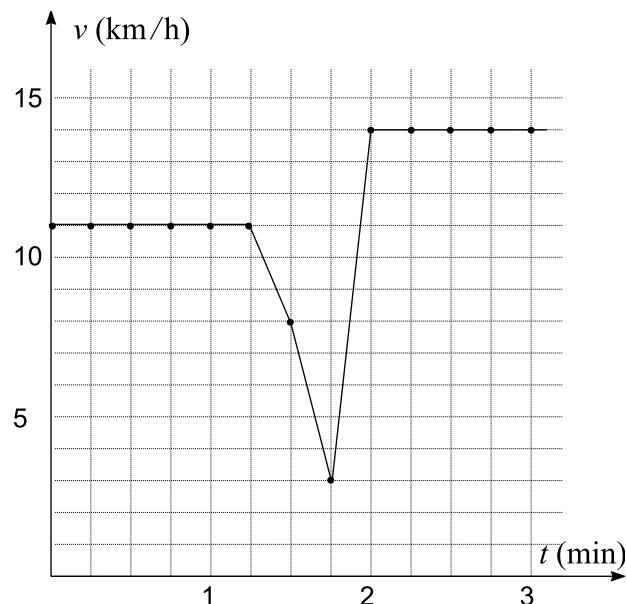
Juuresolev joonis on tehtud kõrgelt otse alla pildistatud foto põhjal, millel on jäädvustatud kaks autot (tähistatud punktidega A ja B), mis lähenevad ristmikule jäädvate kiirustega  $v_A = 40 \text{ km/h}$  ja  $v_B = 60 \text{ km/h}$ . Kasutades joonist ja sellel antud mõõtkava, leidke autode edasisel liikumisel nende vaheline minimaalne kaugus.



### Ü54 GPS ★★

Autor: Jaan Kalda, lõppvoor, 2009, G 5

Tervisesportlane kasutab GPS seadet oma jooksutreeningu tulemuste salvestamiseks. Tema GPS seade määrab iga 15 sekundi järel jooksja täpse asukoha, mille põhjal arvutab ja salvestab GPS seade viimase 15 sekundi keskmise kiiruse ning esitab saadud tulemused graafikul punktidena, mis on ühendatud sirglõikude abil. Jooksja märkas lahti läinud ketsipaelu, peatus ja sidus paelad kinni. Tänu väikesele puhkusele jätkas ta jooksmist juba kiiremini, vt juuresolevat GPS-i esitatud graafikut. Kui kaua kestis peatus? Pidurdumiseks ning puhkusjärgselt kiirendamiseks kulunud aeg lugeda tühiaks; jooksu kiirus oli konstantne nii enne peatust kui ka pärast seda.



**Ü55 Jalgrattur ★★**

Autor: Jaan Kalda, lõppvoor, 2013, G 3

Poiss mõõdab jalgrattaga sõites tuule kiirust enda suhtes: kui ta sõidab piki teed ühes suunas kiirusega  $10 \text{ km/h}$ , saab ta tulemuseks  $20 \text{ km/h}$ , ning kui ta sõidab vastassuunas kiirusega  $20 \text{ km/h}$ , siis saab ta tulemuseks samuti  $20 \text{ km/h}$ . Kui kiiresti maa suhtes puuhub tuul?

**Ü56 Viiul ★★**

Autor: Jaan Toots, lõppvoor, 2014, G 2

Viiulikeelt pikkusega  $L$  kaugusel  $\frac{3}{7}L$  ühest otsast alla vajutades ning lühemal osal poognaga tömmates kõlab mingi põhisagedusega heli. Samal kaugusel  $\frac{3}{7}L$  keelt ainult puudutades (alla vajutamata), on kõlav heli erinev. Milline on nende kahe põhisageduse suhe?

**Ü57 Pöördlava ★★★**

Autor: Taavi Pungas, piirkonnavor, 2012, G 4

Sageli on teatrilava põranda osaks pöörlev ketas. Näitleja soovib sellise ketta kõrval olevast punktist  $A$  ajaga  $t$  jõuda võimalikult kaugele mõnda teise ketta kõrval olevalle punkti. Kus asub selline kaugeim sihpunkt  $B$ ? Väljendage vastus nurgana  $\alpha = \angle AOB$ , kus  $O$  on ketta keskpunkt. Näitleja könnib kiirusega  $v$ , ketta pöörlemisperiood on  $T$  ja raadius  $r$ . Võite eeldada, et  $\alpha < 180^\circ$ .

**Ü58 Pallivise ★★★**

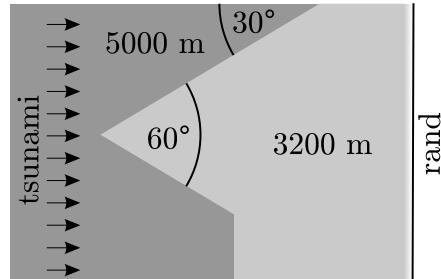
Autor: Eero Vaher, lõppvoor, 2015, G 5

Juku elab silindrikujulises kosmosejaamas, mille pöörlemine tekitab kunstliku raskusjõu. Jaama raadius on  $R$ , selle pöörlemise nurkkiirus  $\omega$ . Juku viskab palli otse üles algkiirusega  $v = \frac{\sqrt{3}}{3}\omega R$ . Kui kaugele Jukust mööda jaama pinda pall maandub?

**Ü59 Tsunami ★★★**

Autor: Jaan Kalda, lõppvoor, 2005, G 6

Joonisel onookeani kujutatud ülaltvaates ja põhja sügavus on kodeeritud halltoonidega: tumehall vastab sügavamale, helehall madalamale veele. Ookeanipõhjas on astang, kus  $h_1 = 5000 \text{ m}$  sügavune vesi läheb  $h_2 = 3200 \text{ m}$  sügavuseks; ranna läheosal toimub madaldumine väga kiiresti. Rannale läheneb tsunami nii, nagu näidatud joonisel. Tsunami liikumiskiirus  $v = \sqrt{gh}$ , kus  $g = 9,8 \text{ m/s}^2$  ja  $h$  tähistab vee sügavust. Millisesse ranna punkti jõuab kõige kõrgem laine? Põhjendage vastust.



**Ü60 Hävituslennuk ★★**

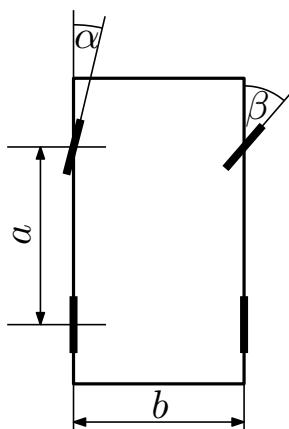
Autor: tundmatu, lahtine, 2011, G 7

Ühel ilusal augustipäeval käis Mati paraadil vaatamas NATO hävituselennukeid, mis tegid rahva kohal demonstratsioonlende. Diktor ütles valjuhääldist, et lennuk lendab horisontaalselt üle rahva kiirusega  $v = 1350 \text{ km/h}$ . Matit huvitas aga, kui kõrgel lennuk lendab. Vajalike mõõtetulemuste saamiseks seisis ta nii, et tema ja läheneva lennukiga ühele joonele jäi täpselt üks 9 meetri pikkune elektripost ning Mati ise asus teise posti juures; postide vahekaugus oli 50 m. Mati käivitas oma mobiiltelefoni stopperi just siis, kui lennuk posti ülemise otsa tagant nähtavale ilmus, ning peatas hetkel, kui käis kõva pauk ja hakkas kostuma lennuki müra. Ta sai stopperi näiduks 32,04 s. Kodus mõõtis ta üle ka enda silma kõrguse maapinnast:  $l = 1,68 \text{ m}$ . Kui kõrgel lendas lennuk? Heli kiirus õhus on umbes  $u = 330 \text{ m/s}$ . *Vihje:* kui lennuk lendab ülehelikiirusel, siis levib tema taga koonusekujuline lõökaine front, kusjuures koonuse tipus on lennuk ja selle koonuse telglõike tipunurk on  $\alpha = 2 \arcsin\left(\frac{u}{v}\right)$ .

**Ü61 Rehvid ★★**

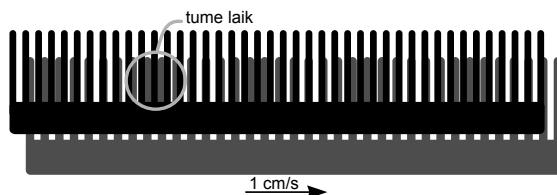
Autor: Siim Ainsaar, lõppvoor, 2012, G 5

Et autorehvid kuluksid vähimal määral, tasub auto ehitada nii, et kurvis pöörduksid esirattad eri nurga võrra. Leidke selles mõttes parim parema esiratta pöördenurk  $\beta$  paremkurvis, kus vasaku esiratta oma on  $\alpha$ . Rataste vahekaugus on pikku-pidi  $a$  ja laiupidi  $b$  (vt joonist).

**Ü62 Kammid ★★**

Autor: Jaan Kalda, lõppvoor, 2014, G 5

Kaks kammi on asetatud üks-teise taha nii, nagu näidatud joonisel. Halli kammi liigutatakse kiirusega  $v = 1 \text{ cm/s}$  ning musta kammi hoitakse paigal. Millise kiirusega ja milleses suunas liiguvad tumedad laigud?



**Ü63 Fotograaf ★★★★**

Autor: Jaan Kalda, lõppvoor, 2011, G 6

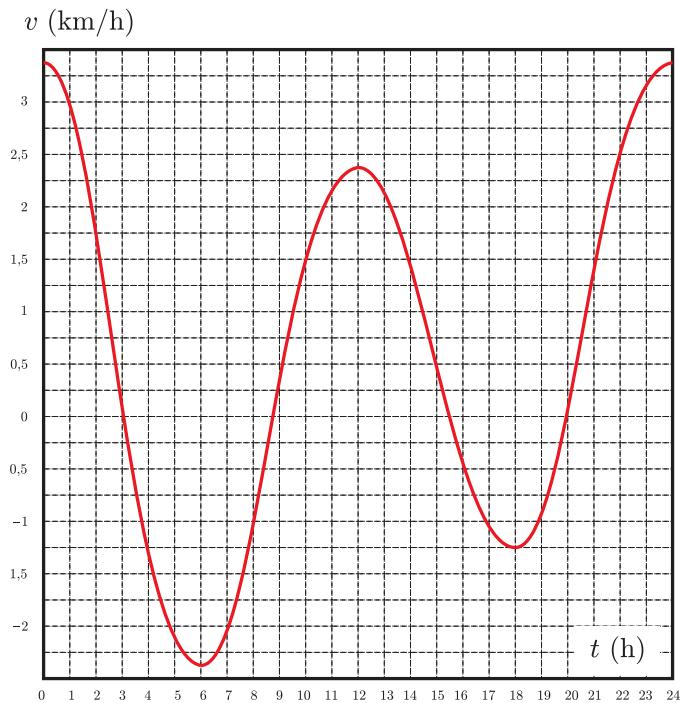
Fotograaf pildistas kõrgest joast langevat veevoolu; päikesevalguses sätendavad veepiisad venisid piltilidel vertikaalseteks triipudeks. Kui fotoaparaat oli pildistamisel normaalasendis, siis olid kõik triibud pikkusega  $l_1 = 120$  pikslit; kui fotoaparaat oli pildistamisel „jalad ülespidi“ (st seda pöörati ümber optilise telje 180 kraadi), siis oli triipude pikkuseks  $l_2 = 200$  pikslit. Kui pikad olid triibud siis, kui fotoaparaati hoiti pildistamisel „portree asendis“ (st seda pöörati ümber optilise telje 90 kraadi)? Eeldada, et säriaeg ja optilise telje suund oli kõigil juhtudel üks ja sama. Kui toodud andmete põhjal pole vastus üheselt leitav, siis andke kõik võimalikud vastused.

Vihje: fotoaparaadi põhikomponendid on objektiiv (lääts) ja katik, millest esimene tekitab digitaalsensori (või filmi) tasandile pildistatavate esemete kujutise. „Puhkeasendis“ ei lange see kujutis siiski sensorile, sest katik varjab läbi objektiivi tulnud valguse ära. Päästikule vajutamisel avaneb katik lühikeseks ajavahemikuks (säriajaks): objektide kujutis langeb nüüd töesti sensorile ning sensori iga piksel mõõdab ära kogu selle aja välitel langeva valgusenergia. Harilikult kujutab katik endast kahte „kardinat“, mis paiknevad vahetult sensori ees ja katavad selle. Alguses varjab sensorit esimene kardin, mille ülemine serv liigub päästikule vajutamisel konstantse kiirusega  $v$  ülevalt alla, avades sensori. Säriaaja lõpetab teine kardin, mille alumine serv liigub samuti ülevalt alla, samasuguse kiirusega  $v$  nagu esimenegi. Kui säriaeg on hästi lühike, siis ei jõua sensor täielikult avaneda: mölemad kardinad liiguval koos ülevalt alla ning sensor on avatud objektiivist tulevale valgusele vaid kordinate vahelise kitsa horisontaalse riba ulatuses (kusjuures see valgusele avatud riba liigub kiirusega  $v$  ülevalt alla).

**Ü64 Laev ★★★★**

Autor: tundmatu, lõppvoor, 2007, G 5

Maailmas leidub jõgesid, kus vesi tõusuude tõttu liigub kord ühes, kord teises suunas. Vaatleme laevaliiklust ühel sellisel jõel. Joonisel on antud vee liikumiskiiruse sõltuvus kellaajast. Positiivseks loetakse vee kiirus siis, kui see on suunatud punktist  $A$  punkti  $B$  poole. Leida optimaalne (lühimate sõiduaegadega) tunniplaan kau-balaeva regulaarseks liikumiseks üks kord päevas punktist  $A$  punkti  $B$  ja tagasi. Kaugus nende punktide vahel piki jõge on  $L = 20\text{ km}$ , laeva kiirus seisvas vees  $v_0 = 4\text{ km/h}$ .



### Ü65 Müra ★★★

Autor: Siim Ainsaar, lahtine, 2009, G 10

Matkaja röömustab laagriplatsil, et elektrijaama müra tuuletu ilmaga nii vaiksest temani kostab. Hiljem, kui tuul töuseb, on müra veel vaiksem. Puhub põhjatuul kiirusega  $\beta c$ , kus  $c$  on heli kiirus paigalseisvas õhus; jaam jäääb matkajast edelasse (st tuule ja jaama suundade vaheline nurk on  $\alpha = 135^\circ$ ).

- a)** Kas helisagedus on sama mis tuuleta?
  - b)** Kui tuuleta on tajutav helivõimsus  $P$  ja tuulega  $xP$ , siis kui suur on  $x$ ? Võite lugeda, et elektrijaam on punktikujuline.
- Soovitus:* uurige helifrondi levimist.

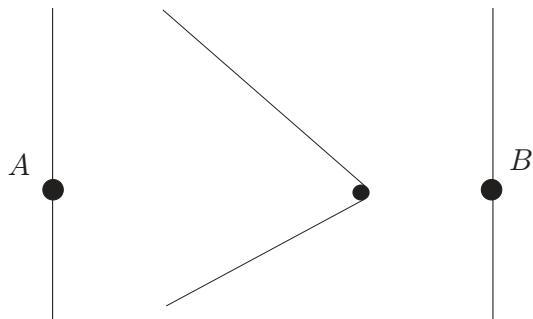
**Ü66 Kaater ★★★**

Autor: Jaan Kalda, lõppvoor, 2009, G 8

Mootorpaat sõidab jõe ühelt kaldalt punktist A teisele kaldale punkti B. Paadi kiirus on  $u = 7 \text{ m/s}$ .

a) Joonisel on näidatud paadi tekitatud veelained. Milline on jõe voolukiirus?

b) On teada, et kui vee sügavus on  $h$ , siis lained levivad kiirusega  $w = \sqrt{gh}$ , kus  $g$  on vabalangemise kiirendus. Kui sügav on jõgi?

**Ü67 Päikese pöörlemine ★★★★**

Autor: Mihkel Kree, lahtine, 2014, G 10

Maa pöörleb ümber oma telje perioodiga  $T_m \approx 24 \text{ h}$ . Ka Päike pöörleb ümber oma telje. Selles võib veenduda näiteks päikesepunktidest liikumist jälgides, aga selles ülesandes kasutame hoopis infot Päikese ketta serval paiknevatest ekvaatori punktidest A ja B kiiratud spektrite kohta. Osutub, et kui mõõdetakse naatriumi kollase neeldumisjoone lainepekkusi, siis punktidest A ja B kiiratud spektritest saadakse selle lainepekkuse jaoks veidi erinevad väärtsused. Mõõdetud lainepekkused erinevad teineteisest  $\Delta\lambda = 7,8 \text{ pm} = 7,8 \cdot 10^{-12} \text{ m}$  võrra. Naatriumi kollase neeldumisjoone laboratoorne lainepekkus on  $\lambda_0 = 590 \text{ nm}$ , valguse kiirus  $c = 3,0 \cdot 10^8 \text{ m/s}$ , Päikese raadius  $r = 700 000 \text{ km}$ . Leidke Päikese ekvatoriaalpiirkonna pöörlemisperiood  $T_p$ .

**Ü68 Traatrõngad ★★★★**

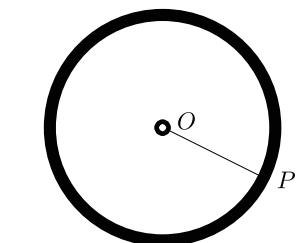
Autor: Jaan Kalda, lõppvoor, 2014, G 9

Kaks ühesugust traatrõngast raadiusega  $R$  on üksteise vahetus läheduses, rõngaste tasandid on paralleelsed ning rõngad puudutavad üksteist punktides A ja B. Kaarele AB vastav kesknurk on vaadeldaval ajahetkel  $\alpha$ . Alumine rõngas on paigal, ülemine pöörleb nurkkiirusega  $\omega$  ümber punkti A läbiva ning rõngaste tasanditega risti oleva telje. Leidke rõngaste puutepunkti B kiirus antud ajahetkel.

**Ü69 Kodarad ★★★★★**

Autor: tundmatu, lahtine, 2011, G 10

Horisontaalsel pinnal veerevast radiaalseste kodaratega rattast tehakse pilt. Fotokaamera säriaeg on mõõduka pikkusega: paigalseisvad objektid on pildil teravad, liikuvad esemed aga hägused. Muuhulgas on



ratta kodarad valdavalt hägused, kuid osade kodara-te teatud punktid on ometigi teravad. Võib eeldada, et kogu pilt on salvestatud samaaegselt.

- a)** Kopeerige juuresolev skeem lahenduslehele ning näidake konstruktsiooni teel, milline kodara  $OP$  punkt (või punktid) kujutub fotol teravalta; põhjendage vastust.
- b)** Konstrueerige köver, millel asuvad ülejää nud kodarate teravalta kujutuvad punktid.

#### Ü70 Anemomeeter ★★★★

Autor: Jaan Kalda, lahtine, 2016, G 9

Ultraheli anemomeeter mõõdab tuule kiirust sel teel, et määrab aja, mis kulub helisignaalil allikast senosoriteni jõudmiseks. Olgu heliallikas koordinaatide aluspunktis  $O = (0; 0)$  ning kolm sensorit punktides koordinaatidega  $A = (0; a)$ ,  $B = (a; 0)$  ja  $C = (-a; 0)$ , kus  $a = 211,1 \text{ mm}$  (loeme lihtsustavalta, et nii heliallikat kui ka sensorite mõõtmned on tühised). Anemomeetrit hoitakse nii, et kõik sensorid paiknevad ühes ja samas horisontaaltasandis ning helisignaali sensoriteni jõudmisse aegadeks mõõdetakse vastavalta  $t_A = 627,0 \mu\text{s}$ ,  $t_B = 625,2 \mu\text{s}$  ja  $t_C = 603,4 \mu\text{s}$ . Milline on tuule kiirus? Arvutustes võite kasutada mõistlikke lihtsustavaid lähenemusi.

#### Ü71 Kaater ★★★★

Autor: Jaan Kalda, lõppvoor, 2016, G 9

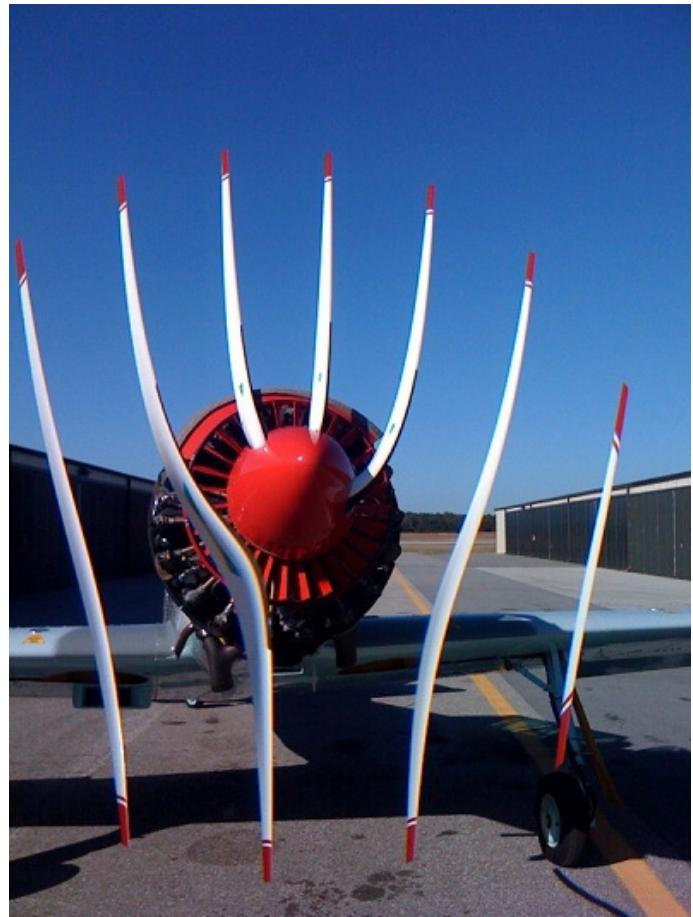
Kaater sõitis  $l = 4 \text{ km}$  kauguse sel otse lõuna suunas asuvale saarele. Alguses võeti suund esimesele meremärgile, seejärel pöörati teise suunas ning lõpuks võeti kurss otse saare peale; seega koosnes trajektoor kolmest sirglõigust. Kaatrlit mõõdeti tuule kiirust ja suunda: esimest lõiku sõideti  $t_1 = 3 \text{ min}$  ja tuule kiiruseks mõõdeti  $v_1 = 15 \text{ m/s}$  ning tajutav suund oli otse idast, teist lõiku sõideti  $t_2 = 1,5 \text{ min}$  ja tuule kiiruseks mõõdeti  $v_2 = 10 \text{ m/s}$  ning tajutav suund oli otse kagust (lõuna-ida vahelt), kolmandat lõiku sõideti  $t_3 = 1,5 \text{ min}$  ja tuule kiiruseks mõõdeti  $v_3 = 5 \text{ m/s}$  ning tajutav suund oli otse edelast (lõuna-lääne vahelt). Mis oli tegelik tuule kiirus? *Märkus.* Eri lõikudel võis paadi kiirus olla erinev, kuid iga lõigu kestel hoiti konsantne; pööramiseks ja kiirendamiseks kulunud aeg oli tühine; tuule tegelik suund ja kiirus ei muutunud.

#### Ü72 Propeller ★★★★

Autor: Andreas Valdmann, lõppvoor, 2010, G 10

See pilt pöörlevast lennukipropellerist on tehtud telefoni kaameraga, mis salvestab korraga ühe vertikaalse veeru pikselid. Pilt tekib vasakult paremale veergude kaupa skaneerides.

- a)** Mis suunas pöörleb propeller fotograafi poolt vaadatuna (päripäeva või vastupäeva)?
- b)** Mitu laba on propelleril?
- c)** Mitu pööret teeb propeller ühes minutis, kui kogu pildi tegemiseks kulunud aeg on  $1/8 \text{ sekundit}$ ?



## Dünaamika

### Ü73 Kivi ★

Autor: Aigar Vaigu, lõppvoor, 2005, G 1

Sirgjooneliselt ja jääva kiirusega  $v = 4 \text{ m/s}$  tõusva õhupalli gondlis on poiss. Mingil hetkel kukutab poiss gondlist alla kivi ning seejärel viskab kivile järgi palli, millega proovib langevat kivi tabada. Milline võib olla suurim ajavahemik kivi lahtilaskmise ja palli viskamise vahel, et see oleks veel võimalik? Maapinnal seistes suudaks poiss visata palli vertikaalselt üles kuni  $h = 20 \text{ m}$  kõrgusele. Võib eeldada, et õhupall asub piisavalt kõrgel selleks, et pall tabaks kivi enne maapinnale kukkumist. Õhutakistus lugeda tühiseks. Raskuskiirendus  $g = 9,8 \text{ m/s}^2$ .

### Ü74 Pallid ★

Autor: tundmatu, lahtine, 2007, G 1

Juku istub puu otsas ja laseb algkiirusesta lahti tema käes oleva palli. All seisab Juhani, kes samal hetkel viskab Juku pihta vertikaalselt üles täpselt samasuguse palli. Pärast pallide põrget jõuab Juku pall täpselt tema kõrgusele tagasi. Kas pall tabab Juhani enne või pärast seda, kui Juku pall jõuab Jukuni? Lugeda, et pallide põrge on absoluutsest elastne.

### Ü75 Hobune ★

Autor: Valter Kiisk, piirkonnnavoor, 2007, G 1

Puuosal istub poiss, kes soovib hüpata puu alt mööda galopeeriva hobuse selga. Hobuse kiirus on  $v = 10 \text{ m/s}$  ja puuoksa kõrgus sadula suhtes  $h = 3 \text{ m}$ . Kui suur peab olema horisontaalsihiline distants sadula ja puuoksa vahel sel hetkel, kui poiss oksast lahti laseb?

### Ü76 Eiffeli torn ★

Autor: Aigar Vaigu, piirkonnnavoor, 2010, G 1

Eiffeli torni ülemiselt vaateplatvormilt (kõrgus maapinnast  $h = 273 \text{ m}$ ) lastakse kukkuda raudkuulil. Täpselt  $t = 3$  sekundi pärast kukutatakse veel üks raudkuul. Kui suur on raudkuulide suurim kiiruste vahe langemisel? Kui suur on ajavahemik kuulide maapinnale jõudmiste vahel? Raskuskiirendus  $g = 9,8 \text{ m/s}^2$ . Katse käigus ükski külastaja viga ei saanud.

### Ü77 Kokkupõrge ★

Autor: Andreas Valdmann, piirkonnnavoor, 2011, G 1

Kaks autot massidega  $m = 1,5 \text{ tonni}$  teevad laupkokkupõrke, mille võib lugeda täielikult plastseks. Kui suur energia kulub purustuste tekitamiseks, kui:

a) mõlema auto kiirus oli  $v_a = 50 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ ;

b) üks auto seisis paigal ja teise auto kiirus oli  $v_b = 100 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ ?

Võib arvestada, et autode lohisemisel pärast põrget olulist kahju ei teki.

**Ü78 Lendav pudel ★**

Autor: Erkki Tempel, piirkonnavor, 2014, G 1

Pooleliitrides pudelis, mille põhja on tehtud  $0,4\text{ V}$  väike auk pindalaga  $S$ , on  $m$  grammi vett. Pudelil keeratakse kork pealt ning pudel visatakse õhku algkiirusega  $v$ . Kui kiiresti voolab vesi pudeli põhjas olevast august välja siis, kui pudel veel üles liigub? Kui kiiresti voolab vesi august välja sel hetkel, kui pudel alla kukub? Põhjendage.

**Ü79 Potsataja ja pähklid ★**

Autor: Erkki Tempel, piirkonnavor, 2014, G 2

Rongi viimase vaguni katusel istub Potsataja, kes loobib maha pähkleid. Potsataja viskab ühe pähkli maapinna suhtes horisontaalselt rongi liikumisega vastassuunas algkiirusega  $u$ . Samal hetkel viskab ta ka teise pähkli samuti maapinna suhtes horisontaalselt ning sama algkiirusega  $u$ , kuid risti rongi liikumise suunaga. Rong liigub ühtlaselt ja sirgjooneliselt kiirusega  $v$  ning pähklid visatakse maapinna suhtes kõrguselt  $h$ . Kui kaugel teineteisest pähklid maanduvad? Õhutakistust mitte arvestada.

**Ü80 Kurv ★**

Autor: Mihkel Rähn, lahtine, 2016, G 2

Kiirusega  $v = 90\text{ km/h}$  sõitev auto läbib kurvi raadiusega  $R = 250\text{ m}$ . Kui suur peab olema tee külgkalle (kraadides), et autos istujad ei tunneks kurvist tingitud külgsuunalist jõudu? Raskuskiirendus  $g = 9,8\text{ m/s}^2$ .

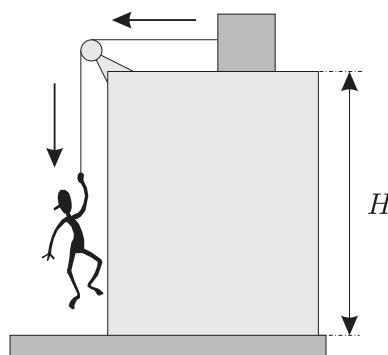
**Ü81 Viplala ★**

Autor: tundmatu, lahtine, 2004, G 1

Viplala tahab liigitada laua peal olevat klotsi. Selleks valmistab ta bloki abil süsteemi, et ära kasutada endale mõjuvat raskusjõudu ja nihutada klotsi, lastes ennast nööri otsa rippu (vt. joonist). Ta laskub põrandale kõrguselt  $H = 1\text{ m}$ . Oletame, et nöör ei veni, blokk on ideaalne ja klots jäääb tervenisti lauale.

**a)** Viplala valib liigutamiseks endast 2 korda raskema klotsi. Höördetegur laua ja klotsi vahel on  $\mu = 0,3$ . Kui kaua kestab Viplala laskumine laualt põrandani? Raskuskiirendus  $g = 10\text{ m/s}^2$ .

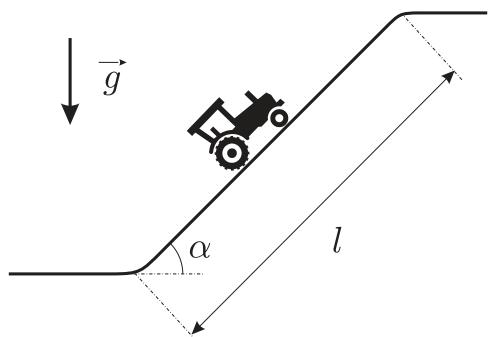
**b)** Mitu korda endast raskemat klotsi jõuaks Viplala maksimaalselt veel antud viisil nööri otsas laskudes liigitada? Eeldada, et nööri otsas sipeldes suudab ta kompenseerida suurema seisuhöördeteguri alphetkel, kui klots on paigal.



**Ü82 Tõus ★**

Autor: tundmatu, lahtine, 2005, G 2

Talvise ilmaga Tartust Tallinnasse sõitev auto peab oma teekonna alguses ületama järsu ja libeda töusu Jakobi tänaval (vt joonist). Töusu kallak horisontaalsihi suhtes  $\alpha \approx 5^\circ$ , pikkus  $l \approx 200$  m. Hinnata, kui suur on minimaalne hõõrdetegur  $\mu$  rataste ja tee vahel, mille puhul kiirusega  $v = 30$  km/h mäkke üles sõitma hakanud auto suudab veel töusu ületada?

**Ü83 Keha ★**

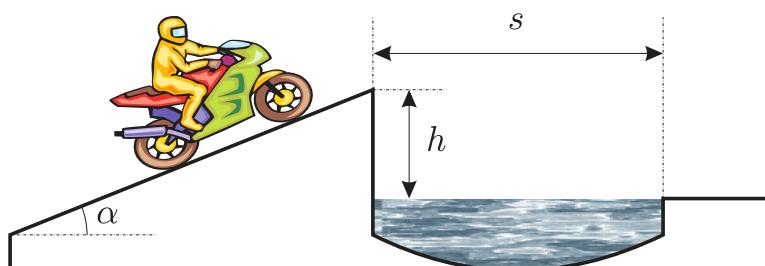
Autor: tundmatu, lahtine, 2006, G 3

Vertikaalselt üles visatud keha läbib kaks korda kõrgusel  $h$  asuvat punkti. Ajavahemik nende kahe läbimise vahel on  $\Delta t$ . Leida keha algkiirus  $v_0$  ja aeg  $\tau$  keha liikumise algusest kuni algpunkti tagasi jõudmiseni.

**Ü84 Mootorratas ★**

Autor: tundmatu, lahtine, 2007, G 5

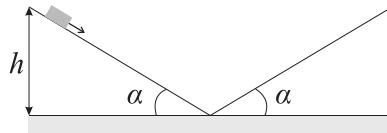
Mootorrattur tahab hüpata üle kraavi, mille mõõtmed on näidatud joonisel. Kui suur peab olema mootorratturi minimaalne kiirus  $v$  lennu alguses selleks, et tema ettevõtmine õnnestuks?

**Ü85 Kelk ★**

Autor: tundmatu, lahtine, 2008, G 2

Kelguga lastakse alla  $h = 10\text{ m}$  kõrgusest  $\alpha = 30^\circ$  kaldenurgaga orunõlvast. Kui kõrgele tõuseb kelk saadud hooga mööda sama suure kaldenurgaga vastasnõlva, kui hõõrdetegur on  $\mu = 0,1$ ?

Märkus: joonis on ligikaudne, languselt tõusule üleminek on tegelikult sujuv ja põrkega seotud kiirusekadu seal ei toimu.



### Ü86 Hantel ★

Autor: Mihkel Kree, lõppvoor, 2008, G 1

Hantel koosneb kahest võrdse massiga kerast (kumbki massiga  $m$ ) ning neid ühen-davast massitust jäigast vardast. Alguses hoitakse hantel horisontaalselt õhus paigal. Nüüd antakse ühele kuulidest hetkega vertikaalsuunaline kiirus  $v$  ning hantel hakkab vabalt liikuma. Vabalangemise kiirendus on  $g$ . Missugune on süsteemi ki-neetiline energia hetkel, mil massikese saavutab maksimaalse kõrguse?

### Ü87 Pingpong ★

Autor: Siim Ainsaar, lõppvoor, 2008, G 2

Pingpongipall kukutatakse kõrguselt  $h$  horisontaalsele lauale. Igal põrkel kahaneb palli energia  $k$  korda. Leidke palli lahtilaskmisest seisajäämiseni kuluv aeg  $t$ . Vabalangemise kiirendus on  $g$ .

### Ü88 Mürsk ★

Autor: Mihkel Kree, piirkonnavoor, 2009, G 2

Kahurist välja lennanud mürsk (massiga  $M$ ) laguneb oma lennutrajektoori kõrgeimas punktis mingi sisemise vedrumehhanismi abil kaheks võrdseks pooleks (kumbki massiga  $M/2$ ) nii, et üks osadest kukub mürsu senist trajektoori pidi liikudes täpselt kahurini tagasi. Kui kaugele kahurist maandub teine pool? Lagune-mispunkti projektsioon maapinnale asub kahurist kaugusel  $L$ .

### Ü89 Kerad ★

Autor: Valter Kiisk, lahtine, 2010, G 1

On antud kolm väliselt identset ja ühesuguse massiga kera. On teada, et üks neist keradest on homogeenne, teine on seest õõnes ja kolmas on seest vedel. Kuidas saab lihtsate võrdlevate mehaanikakatsetega kindlaks teha, milline on iga kera sisemus? Abivahendeid võib vabalt valida, aga kerasid vigastada ei tohi.

### Ü90 Sild ★

Autor: Valter Kiisk, lõppvoor, 2010, G 1

Risti üle  $l = 100\text{ m}$  laiuse jõe kulgeb kumer autoteega sild. Silla keskel on autotee kaldapealsest tasemest  $h = 5\text{ m}$  võrra kõrgemal. Silla profiliks on ringjoone kaar. Auto massiga  $m = 1000\text{ kg}$  ületab silda muutumatu kiirusega  $v = 60\text{ km/h}$ . Kui suure jõuga röhub auto silla keskkohta? Kui suure kiiruse juures hakkab kaduma kontakt rataste ja tee vahel?

**Ü91 Varras ★**

Autor: Stanislav Zavjalov, lõppvoor, 2011, G 2

Mööda liigendi abil seina külge kinnitatud väga pikka ja tühiselt kerget varrast saab libiseda väike röngas massiga  $m$ . Esialgu asub röngas liidendist kaugusel  $l$  ja varras on horisontaalne. Ajahetkel  $t = 0$  hakkab süsteem vabalt liikuma. Leidke varda ja horisontaali vahelise nurga  $\alpha$  ajaline sõltuvus. Kõik liikumised lugeda hõõrdevabaks.

**Ü92 Kadunud rahakott ★**

Autor: Eero Vaher, lahtine, 2012, G 2

Suusahüppemäe hoovõturada asub nõlval, mille tõusunurk on  $\alpha$ . Hoovõturaja almine ots on horisontaalne. Suusahüppaja alustas hoovõttu körguselt  $h$ , kuid kohe hoovõtu alguses kukkus tal rahakott taskust välja. Kui kaagele äratõukepunktist (mõöda horisontaali) rahakott lendab, kui see liigub ilma takistusesta?

**Ü93 Kivi ★**

Autor: Taavi Pungas, lahtine, 2013, G 1

Juku avastas maast välja turritamas poolkerakujulise kivi. Mõõtes mõõdulindiga selle ümbermõõdu, sai ta tulemuseks  $a = 2,4\text{ m}$ . Edasi võttis ta taskust tikutopsi ja hakkas seda poolkera tipust alates natukesehaaval allapoole liigutama, kuni lõpuks tikutops kivist maha libises. Mõõdulindiga mõöda poolkera mõõtes sai ta tipu ja libisemispaiga vaheliseks kauguseks  $b = 20\text{ cm}$ . Kui suur oli kivi ja tikutopsi vaheline hõõrdetegur?

**Ü94 Kelgutaja ★**

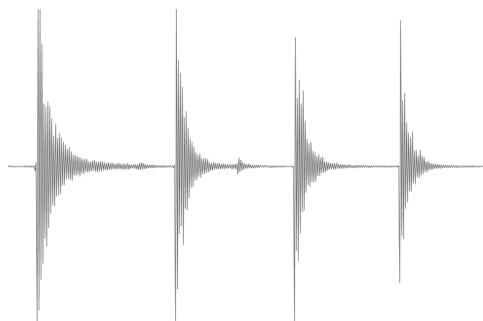
Autor: Taavi Pungas, piirkonnnavoor, 2013, G 4

Lapsel kulus ühtlase kaldega nõlvast körgusega  $h = 2,0\text{ m}$  alla kelgutamiseks  $t = 3,0\text{ s}$ . kui suur vähemalt pidi sel juhul olema nõlva kaldenurk  $\alpha$ , kui ta alustas sõitu paigalseisust?

**Ü95 Pall ★**

Autor: Taivo Pungas, lõppvoor, 2013, G 2

Madis analüüs is arvutiprogrammiga palli põrkamisest tehtud helilindistust ja sai joonisel toodud graafiku, mis näitab helisignaali kuju. Kui on teada, et pärast kolmandat põrget tösis pall täpselt  $1\text{ m}$  körgusele, leidke palli maksimaalne kõrgus pärast esimest põrget.



**Ü96 Kaubarong**

Autor: Mihkel Rähn, lahtine, 2014, G 1

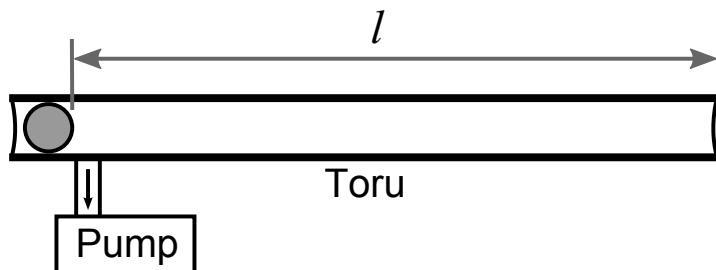
Kaubarongi massiga  $m = 5000 \text{ t}$  veab vedur võimsusega  $N = 2500 \text{ kW}$ . Veerehõõr-detegur rataste ja rööpa vahel on  $\mu = 0,002$ .

- Leidke rongi kiirus  $v_1$  horisontaalsel teel.
  - Leidke rongi kiirus  $v_2$  tõusul üks sentimeeter ühe meetri kohta.
- Õhutakistusega mitte arvestada.

**Ü97 Vaakumkahur**

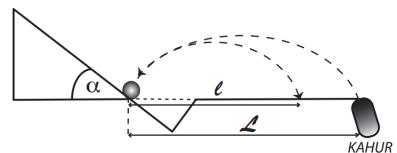
Autor: Andreas Valdmann, lahtine, 2014, G 2

Joonisel on kujutatud niinimetatud vaakumkahur. Laadimiseks pistetakse laske-moonaks olev pall vaakumkahuri toru vasakpoolsest otsast sisse. Seejärel kaetakse toru mõlemad otsad kergestirebeneva õhukindla membraaniga, näiteks fooliumiga, ning pumbatakse torust õhk välja. Nüüd on vaakumkahur laskevalmis. Tulis-tamiseks purustatakse vasakpoolne membraan, mille tagajärjel hakkab pall toru parempoolse otsa poole sööstma. Piisavalt pika toru korral purustab pall parem-poolse membraani ning lendab torust välja. Olgu palli läbimõõt võrdne toru si-seläbimõõduga  $d = 4,0 \text{ cm}$ , palli mass  $m = 24 \text{ g}$  ja asugu pall enne tulistamist  $l = 150 \text{ cm}$  kaugusel toru parempoolsest otsast. Kui suur on palli kiirus vahetult enne parempoolse membraani läbimist? Õhurõhk on  $P_0 = 100 \text{ kPa}$ . Hõordumisega pole tarvis arvestada.

**Ü98 Mängukahur**

Autor: EFO žürii, lahtine, 2016, G 1

Mängukahurist tulistatakse kummipall nii, et see põrkab risti kaldpinnaga, kahurist horisontaalkaugusele  $L$ . Pall põrkab kaldpinnast tagasi kaugusele  $l$  (vt joonis). Leidke, kui suur osa energiast neeldus põrkel. Kaldpinna kaldenurk on  $\alpha$ .

**Ü99 Köievedu**

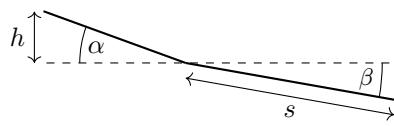
Autor: Oleg Košik, piirkonnavor, 2016, G 2

Eero ja Oleg võistlevad köieveos nii, et kogu võistluse ajal on köis horisontaalne. Eero mass  $m_1 = 110 \text{ kg}$  ja Olegi mass  $m_2 = 85 \text{ kg}$ . Hõordetegur talla ja põrandale vahel  $\mu = 0,30$  on mõlemal mehel sama. Kumb mees võidab? Millise maksimaalse kiirendusega saab võitja sundida kaotajat liikuma, nii et ta ise veel paigale jäääks? Raskuskiirendus  $g = 9,8 \text{ m/s}^2$ .

**Ü100 Vastlaliug ★**

Autor: Moorits Mihkel Muru, lõppvoor, 2017, G 1

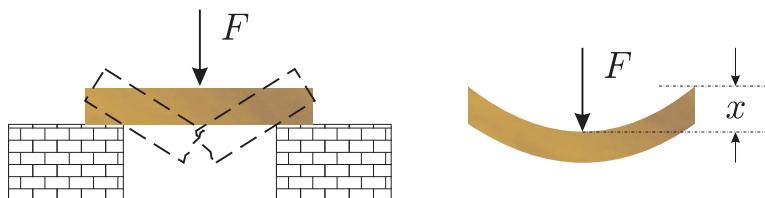
Juss leidis vastlaliu laskmiseks künka, mille läbilöige koosneb kahest sirglöigust, nagu näha joonisel, edasi on horisontaalne maa. Esimese nõlvaosa kõrgus on  $h = 2\text{ m}$  ja selle kalle  $\alpha = 20^\circ$ , teise osa pikkus on  $s = 20\text{ m}$  ja kalle  $\beta = 5^\circ$ . Jussi mass koos kelguga on  $m = 47\text{ kg}$  ja hõordetegur lume ja kelgu vahel on  $\mu = 0,08$ , raskuskiirendus  $g = 9,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ . Leidke, kui pikk on Jussi vastlaliug.

**Ü101 Karatist ★★**

Autor: tundmatu, lahtine, 2007, G 6

Hinnake, millise kiirusega  $v$  peab karatisti käsi tabama kahele kivile toetuva laaujipi keskpunkti (vt joonist), et laud murduks? Käe mass on  $m = 1,5\text{ kg}$ , laua mass  $M = 2\text{ kg}$ , laua jäikustegur  $k = 1,4 \cdot 10^5 \text{ N/m}$ , murdumiseks vajalik läbipaine (st laua keskpunkti nihe)  $d = 20\text{ mm}$ .

*Märkus:* jäikustegur  $k$  on võrdetegur laua keskpunkti rakendatud jõu  $F$  ning laua keskpunkti nihke  $x$  vahel (vt joonist).

**Ü102 Veenus ★★**

Autor: Mihkel Kree, lõppvoor, 2007, G 2

Lugegegi Maa ja Veenuse orbiidid ümber Päikese ringikujulisteks. Planeedid tiirlevad ümber Päikese samas suunas ja Veenuse maksimaalne eemaldumus (nurk Veenuse ja Päikese vahel Maalt vaadates) on 46 kraadi.

a) Leidke Veenuse ja Maa orbitide raadiuste suhe.

b) Mitu päeva jääb järjestikuste maksimaalseste eemaldumustele vaheline?

*Vihje:* Kepleri seaduse kohaselt on taevakehade tiirlenisperiode ruudud võrdlised vastavate orbiitide raadiuste kuupidega.

**Ü103 Auto ★★**

Autor: Mihkel Heidelberg, piirkonnavoor, 2009, G 5

Auto kiirendab nii, et rattad libisevad. Hetkel on auto kiirus stabiilselt  $v$ , vedavate rataste nurkkiirus  $\omega$  ja raadius  $r$ . Kui oletada, et mootori võimsus läheb ainult auto liikumisse ja vedavate rataste libisemisse, siis kui suur on kasutegur?

**Ü104 Vedru ★★**

Autor: Aigar Vaigu, piirkonnnavoor, 2010, G 4

Raske tellis kukub poole meetri kõrguselt jäigale lühikesele vedrule. Põrge on elastne ja tellis lendab peaaegu algsele kõrgusele tagasi. Kui kõrgele maast kerkib vedru pärast põrget?

**Ü105 Pendel ★★**

Autor: Taavi Pungas, piirkonnnavoor, 2011, G 7

Pendel pandi väikese amplituudiga võnkuma ning stopperiga registreeriti neid hetki, kui pendel läbis vasakult poolt tulles oma tasakaalupunkti. Kaks järjestikust sellist sündmust toimusid hetkedel  $t_1 = 3,19\text{ s}$  ja  $t_2 = 5,64\text{ s}$ . Pendlil lasti mõnda aega segamatult võnkuda, seejärel saadi kaheks järjestikuseks näiduks  $t_3 = 61,14\text{ s}$  ja  $t_4 = 63,54\text{ s}$ . Leidke võimalikult täpselt pendli vönkeperiood ning hinnake selle mõõtemääramatust.

**Ü106 Alpinist ★★**

Autor: Kaur Aare Saar, lahtine, 2013, G 3

Alpinist massiga  $m = 75\text{ kg}$  on kinnitatud elastse nööri külge pikkusega  $L = 6\text{ m}$ . Nööri teine ots on kinnitatud kalju külge. Olles roninud 6 meetri kõrgusele kinnituskohast, ta kukub. Leidke, kui suur võib olla ülimalt nööri elastsustegur  $k$ , teades, et suurim nööri tõmbejöud, mida inimene talub, on  $T = 25mg$ . Õhutakistust ärge arvestage.

**Ü107 Langevarjuhiüpe ★★**

Autor: Taavi Pungas, piirkonnnavoor, 2014, G 5

Juku massiga  $m = 60\text{ kg}$  ja tema isa Juhani massiga  $M = 90\text{ kg}$  otsustasid teha langevarjuhiüppe. Neile pandi selga ühesugused langevarjud massiga  $m_v = 10\text{ kg}$  ning nad lükati lennukist välja. Mõlema langevarjud avanesid täielikult ühesugusel kõrgusel  $h$ , pärast mida saavutasid hüppajad tühise aja jooksul konstantse kiiruse ja liuglesid sellel kiirusel maapinnani. Jukul kulus langevarju avanemisest maapinnani jõudmiseks aega  $t = 110\text{ s}$ . Kui pikk aeg  $T$  kulus selleks Juhani? Langevarju le õhu poolt mõjuv takistusjöud on võrdeline langemiskiiruse ruuduga. Lihtsuse mõttes loeme hüppajatele endile mõjuva õhutakistuse tühiselt väikeseks.

**Ü108 Kelk ★★**

Autor: Joonas Kalda, piirkonnnavoor, 2016, G 4

Juku tahab kelguga ületada jääga kaetud jõge. Ta star dib lumega kaetud kaldalt, mis on horisondiga  $\alpha = 15^\circ$  nurga all. Jõe laius  $l = 10\text{ m}$ , kelgu ja lume vaheline hõõrdetegur  $\mu_1 = 0,20$ , kelgu ja jää vaheline hõõrdetegur  $\mu_2 = 0,10$ . Kui kõrgele veepinnast peab kallas ulatuma, et Juku libiseks teise kaldani?

**Ü109 Pidurdus ★★**

Autor: Eero Vaher, lõppvoor, 2016, G 2

Auto sõidab teel, mille kõrguse muut teepikkuse kohta on  $k = \frac{1}{30}$ . Ühesuguse algkiiruse ning pidurdusjõu korral jäab auto ülesmäge liikudes seisma vahemaa  $s_1 = 25\text{ m}$  jooksul, allamäge liikudes aga vahemaa  $s_2 = 30\text{ m}$  jooksul. Mis on auto algkiiruse  $v$  väärus? Raskuskiirendus  $g = 9,8\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ .

**Ü110 Kahurikuul ★★**

Autor: Hans Daniel Kaimre, lõppvoor, 2016, G 3

Juku arvatas koolitunnis ülivõimsast kahurist otse üles lastud kuuli maksimaalseks kõrguseks  $H = 400 \text{ km}$ . Ta ei arvestanud aga seda, et sellistel kõrgustel gravitatsioonivälja muutus on juba märkimisväärne ning ei saa eeldada, et raskusjoud on konstantne. Leidke, kui kõrgele kuul tegelikult lendaks. Maa raadius  $R = 6400 \text{ km}$ . Õhutakistusega mitte arvestada.

**Ü111 Pendel ★★**

Autor: Andreas Valdmann, piirkonnnavoor, 2017, G 3

Nöörist ja koormisest koosnev pendel võngub nii, et amplituudasendis on nööri ja vertikaalsihi vaheline nurk  $\alpha = 60^\circ$ . Mitu korda erinevad võnkumise käigus suurim ja vähim pinge nööris?

**Ü112 Mäenõlv ★★**

Autor: Jonatan Kalmus, lõppvoor, 2017, G 2

Kui suure maksimaalse kaldenurgaga  $\alpha$  mäenõlvast on võimalik jalgrattaga konsantse kiirusega üles sõita? Ratturi mass on  $m$ , jalgratta mass  $M$ , pedaali vända pikkus  $r_1$ , eesmise hammasratta raadius  $r_2$ , tagumise hammasratta raadius  $r_3$ , ratta raadius  $r_4$ . Eeldada, et ratturi massikese püsib sõitmise käigus ratta suhtes paigal ja sõitja kannab kogu oma kehakaalu vajuval pedaalil. Hõõrdetegur pinna ja ratta vahel on piisavalt suur libisemise välimiseks. Mehaanilise hõõrdumisega jõuülekandes mitte arvestada ning veerehõõrdejõu võib lugeda tühiseks. Eeldada, et jalgratta keskmise kiirus püsib ligikaudselt konstante ja kiiruse suhteline muutus veerand väntamisperioodi jooksul on tühiselt väike.

*Märkus.* Ülesande teksti on olümpiaadil esineva versiooniga võrreldes kohandatud.

**Ü113 Aerud ★★**

Autor: tundmatu, piirkonnnavoor, 2005, G 6

Aerude pikkus tullist (punktist, kus aerud kinnituvad paadi kere külge) kuni käepidemeni on  $a = 1 \text{ m}$  ning tullist kuni labadeni on  $b = 1,5 \text{ m}$ . Keskmise joud, millega aerutaja tömbab kumbagi aeru, on  $F = 60 \text{ N}$ . Paadi ja vee vaheline takistusjoud on  $F_h = \alpha v^2$ , kus  $\alpha = 20 \text{ kg/m}$ . Kui suure keskmise kiirusega liigub paat? Hinnata aerutaja keskmist võimsust.

**Ü114 Kivi ★★**

Autor: tundmatu, lahtine, 2006, G 4

Paelaga lae külge kinnitatud kivi liigub mööda horisontaaltasapinnas asuvat ringjoont, mille kaugus laest  $h = 1,25 \text{ m}$ . Leida kivi tiirlemisperiood  $\tau$ .

**Ü115 Kaldpind ★★**

Autor: Mihkel Rähn, piirkonnnavoor, 2006, G 4

Pall kukub kaldpinnale ja hakkab elastselt põrkuma (st energiakadudeta). Kui kaugel on viies põrkekohat esimesest? Kaldpinna kaldenurk on  $\alpha$ , palli algkõrgus esimesest põrkekohast oli  $h$ .

**Ü116 Kuulike ★★**

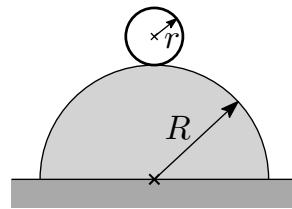
Autor: tundmatu, lahtine, 2008, G 5

Venimatu ja kaalutu niidi otsa kinnitati kuulike. Niit viidi horisontaalasendisse ja lasti lahti. Kuulikese kiiruse vertikaalne komponent hakkab esialgu suurenema, kuid teatud hetkest alates väheneb. Millise nurga moodustab niit vertikaalsihiga ajahetkel, kui kuulikese kiiruse vertikaalne komponent on maksimaalne?

**Ü117 Veerev silinder ★★**

Autor: Andres Laan, lahtine, 2010, G 3

Alusele kinnitatud poolsilindril raadiusega  $R$  lebab selle kõrgeimas punktis seest tähi silinder raadiusega  $r$ . Ühel hetkel nihkub keha veidi tasakaalust välja ja hakkab selle tulemusel libisemiseta veerema (hõõrdetegur on väga suur). Leidke, kui kõrgel aluse kohal keha poolsilindri pinnast eraldub. *Vihje:* kui veereva silindri mass on  $m$  ja ta masskese liigub kiirusega  $v$ , on ta kineetiline energia  $mv^2$  (ilma kordajata  $\frac{1}{2}$ !).

**Ü118 Veoauto ★★**

Autor: Kristian Kuppart, lahtine, 2011, G 3

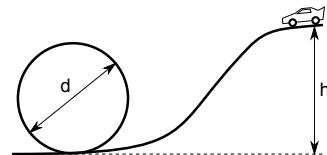
Veoauto kastis kõrgusega  $H$  on vedelik, mille pinna kõrgus kasti põhjast on  $h$ , kusjuures  $h > \frac{H}{2}$ . Kui suure kiirendusega  $a$  saab veoauto liikuda, ilma et vedelik kastist välja voolaks? Veoauto kasti pikkus on  $L$ .

*Märkus.* Auto kiirendab sujuvalt ning tänu sellele vedelik võnkuma ei hakka.

**Ü119 Surmasõlm ★★**

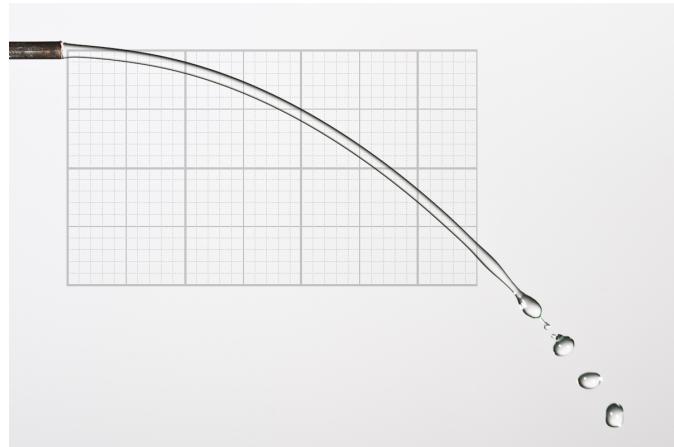
Autor: Andreas Valdmann, piirkonnavor, 2012, G 5

Mudelauto rada on kujutatud joonisel: auto alustab kaldtee tipus seisvast asendist, kogub laskumisel kiirst ja teeb silmuses surmasõlme. Mis on minimaalne kõrgus  $h$ , et auto silmuse läbimisel alla ei kukuks? Silmuse läbimõõt on  $d$ . Hõõrdumisega arvestada ei ole vaja.



**Ü120 Veejuga ★★** Autor: Mihkel Kree, lõppvoor, 2012, G 2

Pildil on foto horisontaalsest torust väljuva veejoaga ning teljestik, mille väikseim jaotis on võrdne veejoa läbimõõduga selle algkõrgusel. Ühtlase kiirusega voolava veejoa alla pandud mõõteklaas ruumalaga  $V = 150 \text{ cm}^3$  täitus ajaga  $t = 5 \text{ min}$ . Leidke toru siseläbimõõt.



**Ü121 Lasketiir ★★**

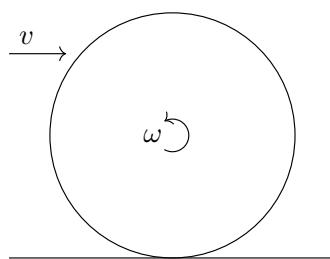
Autor: Aigar Vaigu, piirkonnnavoor, 2016, G 6

Siselasketiirus tulistatakse vintpüssist, mille kuuli kiirus  $v = 320 \text{ m/s}$ , kaugusel  $s = 30 \text{ m}$  olevat märklauda. Laskur sihib püssiga samal kõrgusel olevat märki ja tabab seda otse kümnesse. Hinnake, kui kaugele sihtmärgist satuks kuul, kui relva enne laskmist keerata ümber sihtimistelje 180 kraadi? Õhutakistusega mitte arves-tada.

**Ü122 Silinder ★★**

Autor: Kaur Aare Saar, lõppvoor, 2016, G 4

Silinder massiga  $m$  ja raadiusega  $R$  libiseb tasapinnal kiirusega  $v$  ja nurkkiirusega  $\omega$ . Kui libisemine on lõppenud, liigub silinder kiirusega  $v$  esialgsega vastupidises suunas. Leidke silindri esialgne nurkkiirus.



**Ü123 Veok ringteel ★★**

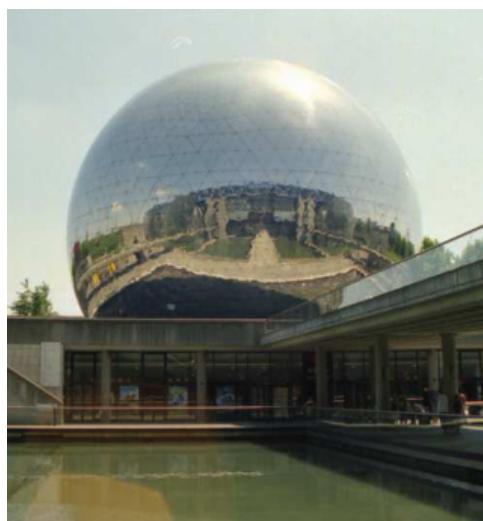
Autor: Jonatan Kalmus, piirkonnnavoor, 2018, G 5

Veok sõidab ringteel köverusraadiusega  $R$  ühtlase kiirusega. Leida veoki maksimaalne võimalik kiirus, eeldusel et hõõrdetegur on piisavalt suur libisemise vältimiseks. Veoki massikeskme kõrgus maapinnast on  $h$  ja veoki laius  $l$ . Raskuskirrendus on  $g$ .

**Ü124 Sfääär ★★★**

Autor: Andre Sääsk, lahtine, 2005, G 6

Üks osa Pariisi Cité des Sciences' teadusmuuseumi kompleksist — La Géode — kujutab endast hiigelsuurt sfääri raadiusega  $R = 18\text{ m}$ , mille sees asub maailma suurim kinoekraan (vt joonist). Hoonet väljastpoolt imetlev uudishimulik koolipoiss otsustab tabada selle hoone tipp-punkti tennisepalliga. Kui suure minimaalse kiirusega  $v$  peaks ta palli viskama, et palli liikumise trajektoor lõikuks hoone välispinnaga vaid ühes punktis — hoone tipp-punktis — ja see oleks ühtlasi ka palli liikumise trajektoori kõrgeimaks punktiks? Pall alustab liikumist kõrgusel  $h = 1,5\text{ m}$ .

**Ü125 Anum ★★★**

Autor: tundmatu, lahtine, 2005, G 7

Siledal pinnal asub kerge ristikülikuline anum, mis on täidetud vedelikuga tihedusega  $\rho_0$ , vedeliku ruumala on  $V_0$ . Anuma põhja sattunud põrnikas ruumalaga  $V$  ja tihedusega  $\rho$  hakkab anuma põhja suhtes roomama kiirusega  $u$ . Millise kiirusega hakkab anum pinnal liikuma? Anuma mass on tühine, veetase jäääb kogu aeg horisontaalseks. Eeldada, et pinna ja anuma vahel hõõre puudub.

**Ü126 Mullitaja ★★**

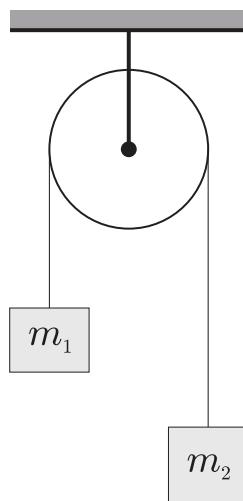
Autor: Jaak Kikas, lõppvoor, 2005, G 7

Veekogu põhjas asub mullitaja — õhuballoon väikese avausega, millest võrdsete ajavahemike  $\Delta t = 1$  s järel väljuvad õhumullid raadiusega  $R = 0,3$  mm. Taolise mullikese liikumisel vees mõjub sellele takistusjõud  $F = 6\pi\eta Rv$ , kus  $\eta$  on vedeliku voolamistakistust iseloomustav tegur ehk vedeliku viskoossus (vee korral on selle suuruse vääruseks  $1 \cdot 10^{-3}$  N s/m<sup>2</sup>) ja  $v$  on mullikese kiirus. Võite lugeda, et mullikese liikumine toimub kogu aeg kiirusega, mis on määratud tingimusega, et kõigi talle mõjuvate jõudude resultant on null. Vee tihedus  $\rho = 1000$  kg/m<sup>3</sup>, ras-kuskiirendus  $g = 9,8$  m/s<sup>2</sup>, õhurõhk  $p_0 = 100$  kPa. Mitu korda muutub vahemaa naaber-mullikeste vahel tõusul põhjast pinnale, kui veekogu sügavus on  $H = 27$  m?

**Ü127 Plokk ★★**

Autor: tundmatu, lahtine, 2006, G 5

Kui suure kiirendusega  $a_k$  ja mis suunas hakkab liikuma kahest kehast koosneva süsteemi masskese, kui kehad on seotud niidiga, mis on tömmatud üle ploki (vt joonist)? Kehade massid on  $m_1$  ja  $m_2$  ( $m_1 < m_2$ ), niit on kaalutu ja mitteelastne.

**Ü128 Kada ★★**

Autor: Oleg Košik, lõppvoor, 2006, G 3

Vaatame lihtsa kada ehk ragulka konstruktsiooni. Elastne kummipael tömmatakse kahe fikseeritud otspunkti vahelle, laskmiseks asetatakse kivi paela keskele, pael tömmatakse koos kiviga pingule ja lastakse vabaks. Kivi lastakse lendu horisontaaltasandi suhtes nurga  $\alpha = 10^\circ$  all. Leidke, kui kaugele peab laskja tömbama kivi, et tabada märki, mis asub kadast  $L = 25$  m kaugusel ning sellega samal kõrgusel. Kui suurt jõudu peab ta selleks paelale rakendama? Kummipaela pikkus pingestamata olekus on  $l = 60$  cm, mis on ühtlasi ka paela kinnituspunktide vahakaugus. Pael lugeda kaalutuks ning jäikusteguriga  $k = 50$  N/m. Kivi mass on

$m = 20 \text{ g}$ . Õhutakistusega ei ole vaja arvestada. Raskusjõu mõju kivi kiirendamisel kadas pole vaja arvestada. Raskuskiirendus on  $g = 9,81 \text{ m/s}^2$ .

**Ü129 Hooratas ★★★**

Autor: Valter Kiisk, lõppvoor, 2007, G 4

Hooratas raadiusega  $R$  pöörleb nurkkiirusega  $\omega$ . Lihtsuse huvides võib hooratast vaadelda peenikese rõngana (pöörlemistelg ühtib rõnga teljega).

a) Milline on energia salvestustihedus  $w$  (kineetiline energia massiühiku kohta) hoorattas?

b) Hooratas on valmistatud süsinikkiuga armeeritud polümeerist, mille tömbetugevus  $\sigma_{\max} = 2,4 \cdot 10^9 \text{ Pa}$  ja tihedus  $\rho = 1500 \text{ kg/m}^3$ . Hinnake energia salvestustiheduse maksimaalselt võimalikku väärust sellises hoorattas (andes numbrilise vastuse).

Vihje: tömbetugevus on maksimaalne jõud ristlõike pindala kohta, mida antud materjal talub ilma purunemata.

**Ü130 Maaler ★★★**

Autor: Valter Kiisk, lahtine, 2010, G 5

Maaler on seina ülemise osa värvimiseks roninud kõrge, peaegu vertikaalse redeeli tippu. Ettevaatamatu liigutuse tulemusena hakkab redel ümber kukkuma. Kas vähemohlik oleks redelist kohe lahti lasta või pigem klammerduda redeli külge? Põrand on lai ja tühi, nii et (redeli) kukkumist ei takista miski. Redeli alumine ots ei libise. Vihje: homogeensel vardal pikkusega  $l$  ja massiga  $m$  on ümber otsa nurkkiirusega  $\omega$  pööreledes kineetiline energia  $\frac{ml^2\omega^2}{6}$ .

**Ü131 Benji-hüpe ★★★**

Autor: Andreas Valdmann, piirkonnavoor, 2010, G 6

Benji-hüppaja massiga  $m = 80 \text{ kg}$  kasutab köit pikkusega  $l = 35 \text{ m}$ , mille jäikustegur  $k = 60 \text{ N/m}$ . Kui kõrgele maapinnast tuleks tõsta hüppeplatvorm, et jäääks ohutusvaru  $h = 5 \text{ m}$ ? Mis on suurim kiirus, mille hüppaja saavutab? Raskuskiirendus  $g = 9,8 \text{ m/s}^2$ . Hüppaja mõõtmetega arvestama ei pea.

**Ü132 Kloori molekul ★★★**

Autor: Ants Remm, lahtine, 2012, G 6

Kloori molekul, mis liigub kiirusega  $v = 600 \text{ m/s}$ , neelab footoni lainepikkusega  $\lambda = 350 \text{ nm}$  ning jaguneb kaheks aatomiks. Ühe aatomi kiiruseks mõõdetakse  $u = 1600 \text{ m/s}$ , mis on risti molekuli esialgse kiirusega. Leidke kloori molekuli seoseenergia, kui kõik osakesed olid minimaalse siseenergiaga seisundis. Plancki konstant on  $h = 6,6 \cdot 10^{-34} \text{ Js}$ , valguse kiirus on  $c = 3,0 \cdot 10^8 \text{ m/s}$ , kloori aatom-number on 35 ning Avogadro arv on  $N_A = 6,0 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$ . Footoni energia avaldub valemiga  $E = \frac{hc}{\lambda}$ . Eeldada, et footoni impuls on tühine vörreldes Kloori impulsiga.

**Ü133 Kiik ★★**

Autor: Andres Põldaru, lahtine, 2014, G 5

Kiige ühe otsa peal kaugusel  $l_1$  kiige pöörlemisteljест asub mass  $m_1$ . Kiige teise otsa peale, mis on pöörlemisteljест kaugusel  $l_2$ , kukub kõrguselt  $h$  mass  $m_2$ . Kokkupõrge on absoluutsest mitteelastne ning kiik on kokkupõrkehettel horisontaalne. Kiige mass on väga väike ja sellega ei pea arvestama. Kui kiiresti liigub esimene mass vahetult pärast kokkupõrget?

**Ü134 Vesiniku ioniseerimine ★★**

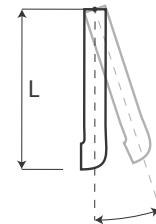
Autor: Jaan Toots, lahtine, 2015, G 6

Kui suur on vähim vesiniku aatomit ioniseerida suutva vaba prootoni kineetiline energia  $K_0$ ? Eeldage, et elektron on vesiniku aatomis paigal ning elektromagnetiline vastasmõju aatomi tuuma ja vaba prootoni vahel on tühine. Vesiniku seoseenergia  $E_0 = 13,6 \text{ eV}$ , prootoni mass  $m_p = 1,67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$  ja elektroni mass  $m_e = 9,11 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$ .

**Ü135 Veetoru ★★**

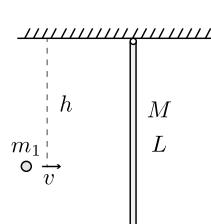
Autor: Kristian Kuppart, piirkonnavor, 2015, G 5

Veetoru pikkusega  $L$  on kinnitatud seina külge nii, et see saab vertikaaltasandis vabalt pööreda. Veetoru mass koos seda täitva veega on  $M$ . Toru ots ristlöikepindalaga  $S$  on ülejäänud toruga võrreldes 90 kraadi pööratud (vt joonist) ning sellest voolab välja vesi kiirusega  $v$  ja tihedusega  $\rho$ . Kui suure nurga all vertikaali suhtes paikneb toru telg? Raskuskiirenduse väärthus on  $g$ .

**Ü136 Põrge ★★**

Autor: Mihkel Kree, piirkonnavor, 2015, G 6

Algelt paigal olev rippuv varras massiga  $M$  ning pikkusega  $L$  on fikseeritud ülemisest otsast vabalt pöörleva kinnitusega. Varda inertsimoment otspunkti suhtes on  $I = \frac{1}{3}ML^2$ . Teras-pall massiga  $m_1$  lendab vastu varrast ning tabab seda kaugusel  $h$  riputuspunktist. Põrge on elastne, st soojuskadudeta. Huivatalv kombel jäab teraskuul pärast põrget hetkeks paigale ning hakkab seejärel vertikaalselt alla langema. Leidke kauguse  $h$  väärthus, mille korral niisugune seismajäämine võimalik on.

**Ü137 Rattur ★★**

Autor: Ardi Loot, lahtine, 2016, G 6

Rattur massiga  $m = 100 \text{ kg}$  sõidab ilma väntamata alla mäenõlvalt langemisnurgaga  $\theta_1 = 4,8^\circ$  (nurk horisondi ja mäenõlva vahel) ja märkab, et piisavalt pika nõlva korral on tema lõppkiiruseks  $v_1 = 50 \text{ km/h}$ . Kaks korda väiksema nõlva korral ( $\theta_2 = 2,4^\circ$ ) on ratturi lõppkiirus aga  $\Delta v = 15 \text{ km/h}$  võrra väiksem. Leidke, kui suur peab olema ratturi väntamise võimsus, et horisontaalsel teel hoida kiirust  $v = 20 \text{ km/h}$ . Kui suur osa võimsusest kulub tuuletakistuse ületamiseks? Eeldage, et tegemist on tuulevaikse ilmaga ja raskuskiirendus  $g = 9,8 \text{ m/s}^2$ .

*Märkus.* Arvestada tuleks nii kiirusest sõltumatu hõõrdejõuga kui ka tuuletakistusega, mis on võrdeline kiiruse ruuduga.

**Ü138 Kaks kuuli ja vedru ★★★**

Autor: Rasmus Kisel, piirkonnavor, 2017, G 7

Vedru erinevatesse otstesse on kinnitatud väikesed kuulid, millest ühe mass on  $M$  ning teise oma tundmatu. Kogu süsteem pannakse pöörlema nii, et tundmatu massi kaugus pöörlemiskeskmost on võrdne vedru esialgse pikkusega. Mis on selle pöörlemise periood, kui vedru jäikus on  $k$ ? Vedru mass on võrreldes kuulide massidega tühine.

**Ü139 Reisirong ★★★**

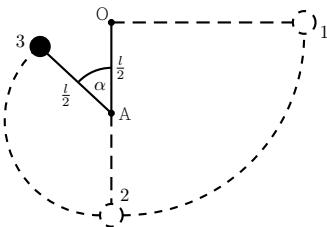
Autor: Moorits Mihkel Muru, lõppvoor, 2017, G 5

Reisirong sõidab mööda raudtee ringjoone kaarekujulist lõiku ühtlaselt aeglustudes. Lõigu pikkus on  $s$  ja rongil kulub selle läbimiseks aeg  $t$ . Pärast selle lõigu läbi mist on rongi liikumise suund muutunud nurga  $\varphi$  võrra ja lõigu alguses oli rongi kiirus  $\alpha$  korda suurem, kui see on lõigu lõpus. Leidke seos rongis istuva reisija massi  $m$  ja tema kaalu  $P$  vahel, kui reisirong on parajasti selle lõigu keskpunktis. Leidke reisija mass, kui  $P = 840\text{ N}$ ,  $s = 1,5\text{ km}$ ,  $t = 60\text{ s}$ ,  $\alpha = 1,5^\circ$ ,  $\varphi = 60^\circ$  ja  $g = 9,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ .

**Ü140 Kaheosaline pendel ★★★**

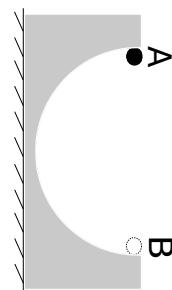
Autor: Hans Daniel Kaimre, lõppvoor, 2018, G 4

Punktis O kinnitatud niidi pikkusega  $l$  otsas ri-pub väike kuulike. Kuulike viakse kõrvale ja vabastatakse tõuketa asendist 1. Kuuli jõudes asendisse 2, kohtab niit joonise tasandiga ri-sti olevat varrast punktis A, mis asub punktist O kaugusel  $l/2$  sellega samal vertikaalil. Leida, millise nurga  $\alpha$  väärtsuse korral niidi pinge  $T = 0$  (asend 3). Õhutakistust ja hõordumist vardal arvestama ei pea.

**Ü141 Veerev pall ★★★**

Autor: Hans Daniel Kaimre, piirkonnavor, 2016, G 8

Klotsist on välja lõigatud poolsilindrikujuline tükki raadiusega  $R$ . Klots seisab siledal hõõrdevabal horisontaalsel pinnal (vaata joonist). Klotsi mass on  $M$ . Punktist A lükatakse liikuma mööda silindrikujulise väljalöike pinda väike pall raadiusega  $r$  ning massiga  $m$ . Kui palju on nihkunud klots hetkeks, mil pall jõuab punkti B?

**Ü142 Vai ★★★★** Autor: Jaak Kikas, piirkonnavor, 2006, G 10

Vertikaalset vaia pikkusega  $L$  ja massiga  $M$  lüüakse pin-nasesse nii, et tema otsa pihta lastakse körguselt  $H \gg L$  vaia otsast kukkuda koor-misel massiga  $m$ . Lööki vaia pihta võib lugeda absoluutsest mitteelastseks, st pärast raskuse ja vaia kokkupuudet liiguvad nad kui üks tervik. Pinnase takistusjõud on  $F = F_0 + kl$ , kus  $l$  on maa sees oleva vaiaosa pikkus. Kui suur on lõökide arv  $N$ , mis

on vajalik selleks, et vai täies pikkuses maasse lüüa? Võite eeldada, et ühekordse lõogi tagajärjel nihkub vai sügavamale väikese osa võrra oma pikkusest.

**Ü143 Pidurdamine ★★★★**

Autor: Tanel Kiis, lahtine, 2012, G 7

Keha massiga  $M$  kukub vabalt raskusjõu toimel kiirendusega  $g$ . Tema kiirust proovitakse muuta, tulistades maalt otse üles iga  $t$  sekundi tagant väikeseid kuulikesi massiga  $m$ , mis põrkavad elastelt otse tagasi. Kui suur peab olema kuulikeste kiirus  $u$ , et pärast iga põrget oleks langeva keha kiirus üks ja seesama  $v$ ? Võib eeldada, et väikeste kuulikeste kiiruse muut raskusjõu toimel on tühine ja  $m \ll M$ .

**Ü144 Robin Hood ★★★★**

Autor: Madis Ollikainen, piirkonnavor, 2012, G 9

Robin Hood on täpsuslaskmisvõistlustel, kus tal tuleb tabada märklauda, mis asub  $L = 200$  m kaugusel. Millise nurga  $\alpha$  all horisontaalsihi suhtes peab Robin viibust laskma, et tabada täpselt märklaua keskpunkti? Vibu vinnamisel teeb ta tööd  $A = 500$  J ning vibu kasutegur on  $\eta = 0,17$ . Noole mass on  $m = 54$  g ja see lastakse lendu märklaua keskpunktist  $h = 70$  cm võrra körgemalt. Õhutakistusega ärge arvestage. Raskuskiirenduseks lugege  $g = 9,8$  m/s<sup>2</sup>.

**Ü145 Sportauto ★★★★**

Autor: Mihkel Rähn, lõppvoor, 2014, G 7

Leidke esirattaveolise sõiduauto maksimaalne kiirendus. Auto mass on  $m$ , esi- ja tagarataste telgede vahe  $b$ , masskeskme körgus  $h$  ning masskeskme horisontaalne kaugus tagateljest  $s$ . Hõõrdetegur rataste ja maa vahel on  $\mu$ .

**Ü146 Latt ★★★★**

Autor: Kaur Aare Saar, lahtine, 2015, G 8

Pikka horisontaaltasapinnal lebavat latti lükatakse ühest otsast muutumatu kiirusega ning risti latiga. Kui kaugel sellest lati otsast asub lati pöörlemistelg? Latipikkus on  $L$ . Hõõrdetegur lati ja tasapinna vahel on köikjal ühesugune.

**Ü147 Klaaskuul ★★★★**

Autor: Aigar Vaigu, piirkonnavor, 2008, G 6

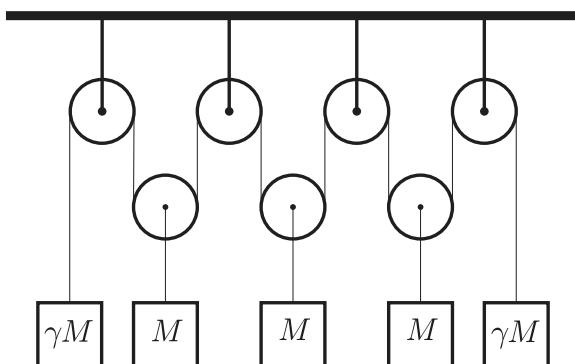
Klaaskuul kukkus vertikaalselt alla libedale horisontaalsele põrandale ning purunes kolmeks tükkiks, mis lendasid mööda põrandat laiali. Sündmus jäädvustati fotol (vt joonist). Tükkide kujutised osutusid välja venitatukks, sest säriaeg oli võrdlemisi pikk. Millised olid kuuli tükkide masside suhted? Hõõrdejõud tükkide liikumisel lugeda tühiselt väikeseks. Fotoobjektiivi optiline peatelg oli pildistamisel vertikaalne



### Ü148 Plokid ★★★

Autor: Mihkel Kree, piirkonnavor, 2008, G 9

Polüspast ehk liitplokk koosneb seitsmest plokist (vt. joonist). Koormiste massid  $M$  ja  $\gamma M$  on näidatud joonisel. Missuguse kiirendusega hakkavad liikuma äärmised koormised? Mis tingimust peab rahuldama suurus  $\gamma$ , et äärmised koormised hakaksid langema? Plokkide ja nööri mass jäätta arvestamata ning nöör lugeda venimatult.



### Ü149 Õõnes kera ★★★

Autor: Tanel Kiis, piirkonnavor, 2013, G 9

Jukul on rauast kera ( $\rho_{\text{Fe}} = 7,9 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$ ) raadiusega  $r = 10 \text{ cm}$  ja massiga  $m = 30 \text{ kg}$ . Juku teab, et kera sees on sfääriline õõnsus, mille keskpunkti kaugust  $d$  kera keskpunktist ta üritab leida. Selleks riputas ta kuuli kaks korda nööri otsa rippuma, kasutades riputuskohtadeks kera vastaspunkte. Ühel korral moodustas neid kindluspunkte ühendav telg horisondiga nurga  $\alpha = 60^\circ$ , teisel korral aga nurga  $\beta = 45^\circ$ . Leidke  $d$ .

**Ü150 Jalgpallurid ★★★★**

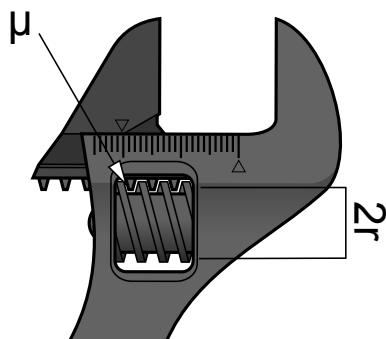
Autor: Andreas Valdmann, lõppvoor, 2013, G 9

Kaks jalgpallurit proovisid trikilööki, kus kaks palli õhus kokku põrkavad. Jalgpallurid seisid teineteisest  $d = 20\text{ m}$  kaugusel ja andsid samal ajahetkel sooritatud löögiga kumbki oma pallile algkiiruse  $v = 15\text{ m/s}$ . Mis piirkonnas võisisid pallid lennul kokku põrgata? Vastuseks tehke pealtvaates joonis, kuhu on kantud jalgpallurite asukohad ja kõik võimalike kokkupõrkepunktide piirkond. Esitage ka selle piirkonna mõõdud. Võimalike kokkupõrkepunktide körgust maapinnast pole vaja eraldi välja arvutada ega joonisele kanda. Raskuskiirendus on  $g = 9,8\text{ m/s}^2$ .

**Ü151 Mutrivõti ★★★★**

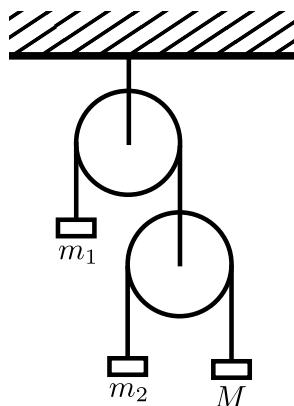
Autor: Andres Põldaru, lahtine, 2015, G 9

Kui suur peab olema reguleeritava mutrivõtme keerete arb pikkusühiku kohta  $n$ , et mutreid saaks kõvasti kinni keerata? Hõõrdetegur kokkupuutepindade vahel on  $\mu$  ja raadius reguleerija teljest kokkupuutepinnani on  $r$ .

**Ü152 Plokid ★★★★**

Autor: Taavet Kalda, lahtine, 2017, G 8

Joonisel on kujutatud kahest plokist ja kolmest raskusest, massidega  $m_1$ ,  $m_2$  ja  $M$  koosnevat süsteemi. Nöörid on venimatumad ning nööri ja plokkide massid on tühised võrreldes raskuste massidega. Hööre ploki ja nööri vahel on tühiselt väike. Missugune peaks olema  $M$  väärthus selleks, et  $M$  jäääks esialgu paigale, kui süsteem lahti lasta?



**Ü153 Mänguauto ★★★★**

Autor: Jaan Kalda, lahtine, 2017, G 9

Mänguauto telgede vaheline kaugus on  $L$  ning massikese asub võrdsel kaugusel telgedest körgusel  $h$  horisontaalpinnast. Auto esimesed rattad saavad vabalt pöörelda ja on tühiise massiga, tagumised rattad on aga jäigalt kinni kiilunud ega pöörle üldse. Auto lebab horisontaalsel pinnal, rattaste ja horisontaalpinna vaheline hõõrdetegur on  $\mu$ , raskuskiirendus on  $g$ .

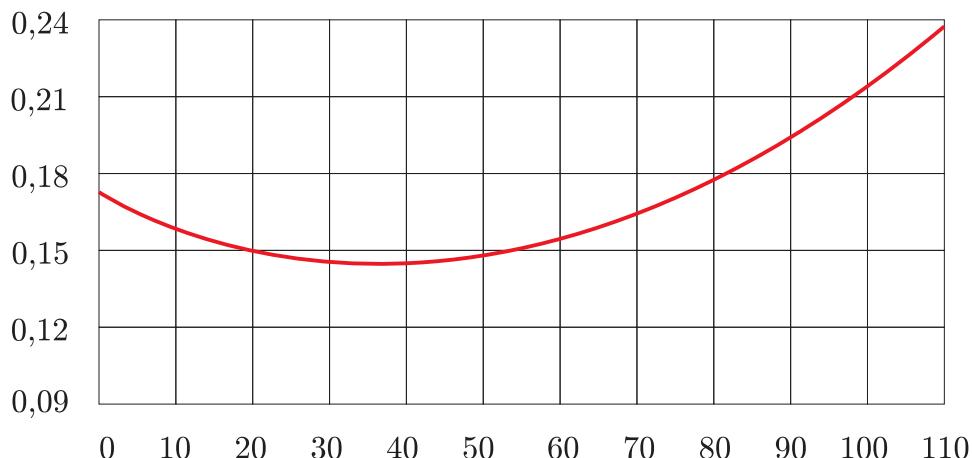
Horisontaalpinda hakatakse liigutama kõrge sagedusega horisontaalselt edasi-tagasi: ühe poolperioodi jooksul on pinna kiirusvektor suunatud auto tagaratastelt esiratastele ning teise poolperioodi jooksul on see vastassuunaline; mõlema poolperioodi jooksul püsib kiiruse moodul konstantsena; võngutamisel liigutatakse pinda nii kiiresti, et auto libiseb pinna suhtes kogu aeg kas ühes või teises suunas. Millise keskmise kiirendusega hakkab liikuma auto?

**Ü154 Rong ★★★★★**

Autor: tundmatu, lahtine, 2006, G 10

Rong sõidab kiirusega  $v = 100 \text{ km/h}$  ja pidurdab järslt (blokeerides rattad). Graafikul on toodud rongi rattaste ja rõõbaste vahelise hõõrdeteguri  $\mu$  sõltuvus kiirusest ( $\text{km/h}$ ).

- a) Kui pikk on rongi täieliku peatumiseni kulunud aeg?
- b) Kui suur on pidurdusmaa pikkus? Mõlemad vastused tuleb leida graafikualuste pindaladena sobilikult valitud teljestikes.

**Ü155 Värlinaalarm ★★★★★**

Autor: Jaan Kalda, lahtine, 2011, G 9

Uurime lihtsustatud mudeli abil kergelt kaldus pinnal asetseva mobiiltelefoni liikumist värlinaaliami töötamise ajal. Kujutagu lauale asetatud mobiil ristnahukat massiga  $M$ , mille sees liigub üles-allä väike keha massiga  $m$ . Liikugu see keha ajahetkedel  $t = 0,2\tau, 4\tau, \dots$  vahemaa  $x$  võrra hetkeliselt üles ning ajahetkedel  $t = \tau, 3\tau, 5\tau, \dots$  algasendisse tagasi. Olgu mobiiltelefoni ja laua vaheline hõõrdetegur  $\mu$  ning laua kaldenurk  $\alpha \ll 1$ . Mobiiltelefoni ja laua vahelised põrked lugege

absoluutsest plastseiks. Millise keskmise kiirusega  $u$  hakkab mobiiltelefon mööda lauda liikuma?

**Ü156 Killud ★★★★**

Autor: Jaan Kalda, lahtine, 2012, G 10

Savikuulike massiga 10 g kukkus vertikaalselt alla siledale horisontaalsele põrandale ja läks kolmeks killuks. Killud lendasid laiali ja peatusid punktides, mis on näidatud juuresoleval joonisel (üldvaade, ristiga on märgitud kukkumiskoh). Määrase kildude massid. Joonisel (lisalehel) võib teha lisakonstruktsioone ja mõõtmisi. Võite lugeda, et killud hakkasid kohe pärast kukkumist üles pörkumata libisema, õhuhõõre on tühine ja liugehõõrdetegur ei söltu kiirusest.



**Ü157 Liivakell ★★★★**

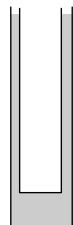
Autor: Roland Matt, lõppvoor, 2012, G 8

Uurime liivakella mudelit. Liivakell koosneb silindrilisest torust pikkusega  $L$ , mis on keskelt eraldatud ühtlaselt aukudega läbistatud plaatidega, millega liiv saab läbi voolata. Heas lähenduses ei söltu liiva aukude läbimise masskiirus  $w$  ülemises anumas olevast liivahulgast. Liivakell asetatakse kaalule töorežiimis (kui liiv voolab) ja siis, kui kogu liiv on alla voolanud. Milline on kaalunäitude vahe? Liiva tiheus on  $\rho$  ja liivakella ristlõikepindala on  $S$ . Eeldage, et hetkel kukkuva liiva mass on tühine vörreldes liiva kogumassiga.

**Ü158 Silindrilised anumad ★★★★**

Autor: Jaan Kalda, lõppvoor, 2014, G 8

Silindriline anum siseraadiusega  $R = 30 \text{ mm}$  on täidetud veega. Teine tühhi silindriline anum raadiusega  $r = 25 \text{ mm}$ , mille mass on tühiselt väike, on surutud koaksiaalselt suurema silindri sisse nii, et selle vettesukeldunud osa pikkus  $L = 300 \text{ mm}$  (vt joonist). Leidke sisemise silindri kiirendus vahetult pärast seda, kui see vabaks lastakse. Vee pindpinevuse ning viskoossusega arvestada pole tarvis.



**Ü159 Vedru ★★★★**

Autor: Mihkel Kree, lõppvoor, 2015, G 8

Kasti sees on vedru külge riputatud koormis. Nii kast kui koormis on mas-siga  $m$ . Vedru mass on tühiselt väike ning selle jäikustegur on  $k$ . Kastil lastakse kõr-guselt  $h$  vabalt maha kukkuda nii, et langemise ajal on koormis tasakaaluolekus. Kokkupõrkel pehme pinnaga jäab kast hetkeliselt paigale. Kast on piisavalt kõrge selleks, et koormis vastu kasti ei põrkaks. Vedrut ei suruta ühelgi hetkel täielikult kokku.

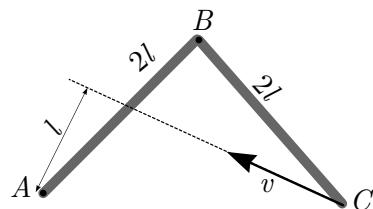
- a) Milline on vähim kõrgus  $h_m$ , millelt kukkudes hüppab kast tagasi üles?  
 b) Kastil lasti kukkuda punktis a) leitud algkõrguselt  $h \approx h_m$ . Kui pika ajavahemiku  $t$  needab kast maapinnal enne üles kerkimist?

Märkus. Pange tähele, et vabalangemises olev koormis on kaaluta olekus ning see-tõttu on vedru langemise ajal välja venitamata. Maapinnale jõudes pole koormis enam tasakaaluasendis ning hakkab seetõttu uue tasakaaluasendi ümber võnku-ma nurksagedusega  $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ .

**Ü160 Vardad ★★★★**

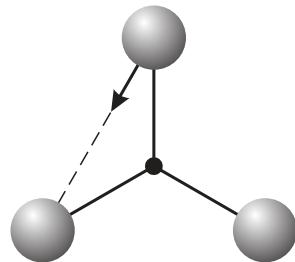
Autor: Jaan Kalda, lahtine, 2017, G 10

Juuresoleval joonisel on kujutatud kahest var-dast pikkusega  $2l$  koostatud šarniirne konstruktsioon. Ühe varda otpunkt on fikseeritud liikumatuna punkti  $A$  ning teise varda ots-punkt  $C$  liigub konstantse kiirusega  $v$  piki sihti, mis möödub punktist  $A$  kaugusel  $l$ . Leidke var-raste ühenduspunkti  $B$  kiirendus hetkel, mil punktide  $A$  ja  $C$  vahedalus on  $2l$ .

**Ü161 Kuulid ★★★★**

Autor: Jaan Kalda, lõppvoor, 2006, G 10

Joonisel kujutatud süsteem koosneb kolmest võrdkülg-se kolmnurga tippudes paiknevast kuulist massiga  $m$  ja kolmest kergest vardast pikkusega  $l$ , mis on omavahel šarniirset ühendatud (liigendiga). Süsteem lebab hõõr-devabalt siledal horisontaalpinnal. Ühte kuuli lükata-kse teatud lühiajalise jõuga nii, et see omandab kiiruse  $v_0$ , mis on suunatud naaberkuuli poole. Leidke teiste kuulide kiiruste suunad ja moodulid ning kõigi kuuli-de kiirendused vahetult peale esimese kuuli lükkamist.



## Taevamehaanika

### Ü162 Satelliit ★

Autor: Mihkel Pajusalu, piirkonnnavoor, 2011, G 2

Satelliit tiirleb ringikujulisel orbiidil (raadiusega  $r = 7000$  km) ümber maakera, kusjuures satelliidi orbiit on samas tasapinnas Maa orbiidiga ümber Päikese. Kui suure osa ajast keskmiselt veedab satelliit Maa varjus? Maa läbimõõt on  $R = 6378$  km. Päikeselt tulevad kiired võib lugeda paralleelseteks ja Maa liikumise ühe satelliidi orbiiditaalperioodi jooksul tühiseks.

### Ü163 Väike prints ★

Autor: Urmo Visk, piirkonnnavoor, 2009, G 1

Väike Prints elab sfäärilisel asteroidil B-612. Jalutades märkas väike prints, et mida kiiremini ta könnib, seda kergemaks ta muutub. Kui väike prints jooksis piki asteroidi ekvaatorit kiirusega  $v = 6$  m/s, siis muutus ta kaalutuks ja hakkas asteroidi pinna kohal hõljuma. Kui suur on asteroidi raadius  $R$ ? Eeldame, et asteroid ei pöörle. Asteroidi tihedus on  $\rho = 5200$  kg/m<sup>3</sup>, gravitatsioonikonstant  $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$  m<sup>3</sup> kg<sup>-1</sup> s<sup>-2</sup>.

### Ü164 Maa pöörlemisperiood ★

Autor: Eero Vaher, piirkonnnavoor, 2014, G 3

Keskmiseks päikeseööpäevaks ehk tavatähenduses ööpäevaks nimetatakse keskmist perioodi, mille jooksul Päike näib Maaga seotud vaatleja jaoks tegevat taivas täisringi. Keskmise päikeseööpäeva pikuseks on 24 h ehk 86 400 s. Maal kulub ühe tiiru tegemiseks ümber Päikese 365,256 keskmist päikeseööpäeva. Maa pöörlemis-suund ümber oma telje ühtib selle tiirlemissuunaga Päikese ümber. Leidke nende andmete põhjal Maa pöörlemisperiood sekundi täpsusega.

### Ü165 Eksinud satelliit ★★

Autor: tundmatu, lahtine, 2009, G 5

Sidesatelliidid paiknevad geostatsionaarsel orbiidil — st niisugusel ringorbiidil, mille raadius ja suund on sellised, et satelliit püsib maapinna suhtes kogu aeg paigal. Ühe sidesatelliidi saatmisel aga esines viga, nii et ta saavutas küll õige kõrguse, kuid ringorbiidi suund sattus juhuslik. Milline on suurim võimalik suhteline kiirus, millega võib selliselt „eksinud“ satelliit kokku põrkuda mõne teise sidesatelliidiga? Maa raadius on  $R = 6400$  km, raskuskiirendus maapinnal  $g = 9,8$  m/s<sup>2</sup>.

### Ü166 Orbiit ★★

Autor: Mihkel Pajusalu, lahtine, 2014, G 3

Taevakehad tiirlevad teatavasti elliptilistel orbiitidel. Ka Kuu orbiit ümber Maa on elliptiline. Kui Kuu kõige väiksem kaugus Maa-Kuu süsteemi massikeskmest (millega selles ülesandes võib lugeda ühtivaks Maa keskpunktiga) on  $r_1 = 360\,000$  km ja orbitaalkiirus sellel kaugusel on  $v_1 = 1,1$  km/s, siis kui suur on ligikaudu suurim kaugus Maa ja Kuu vahel? Maa massiks võtta  $M = 6,0 \cdot 10^{24}$  kg ja gravitatsioonikonstandiks  $G = 6,7 \cdot 10^{-11} \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2}$ .

**Ü167 Päikese tihedus ★★**

Autor: Eero Vaher, piirkonnavor, 2013, G 6

Leidke Päikese keskmise tiheduse  $\rho$ . Maa tiirlemisperiood on  $T = 1$  aasta, gravitatsioonikonstant  $G = 6,7 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2$ , Maa kaugus Päikesest  $R = 1,5 \cdot 10^{11} \text{ m}$ , Päikese nurk läbimõõt Maalt vaadatuna on  $\alpha = 0,54^\circ$  (see on nurk, mis moodustub kahe kiire vahel, mis on tömmatud vaatleja silma juurest Päikese diameetri otspunktide juurde).

**Ü168 Ühendatud satelliigid ★★**

Autor: Eero Vaher, piirkonnavor, 2018, G 6

Kaks satelliiti, mõlemad massiga  $m$ , tiirlevad ümber planeedi massiga  $M \gg m$  ringorbiitidel raadiustega  $R_1$  ning  $R_2 = 2R_1$ . Satelliigid on omavahel ühendatud tühise massiga pinges trossiga pikkusega  $R_1$ , mille tõttu on mõlema satelliidi tiirlemisperiood  $T$ . Mitu korda on satelliitide joonkiirused  $v_1$  ja  $v_2$  suuremad või väiksemad joonkiirustest  $v'_1$  ja  $v'_2$ , millega satelliigid tiirleksid oma orbiitidel trossi puudumisel?

**Ü169 Satelliit ★★★**

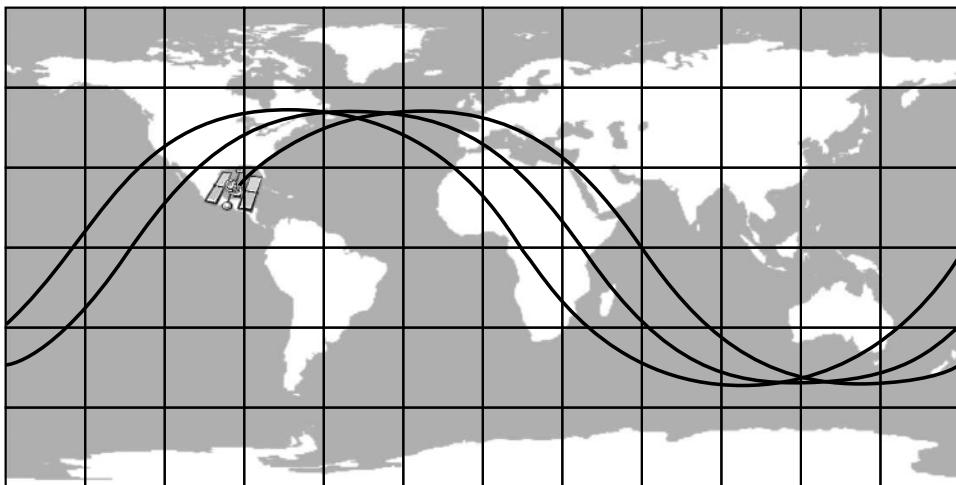
Autor: Eero Vaher, lõppvoor, 2013, G 5

Geostatsionaarseks orbiidiks nimetatakse sellist orbiiti, millel asuv satelliit Maa suhtes ei liigu. Kui suur on maa-ala, mida sellisel orbiidil olevalt satelliidilt jälgida saab? Vastuseks esitage selle maa-ala läbimõõt möödetuna mööda Maa pinda. Gravitatsioonikonstant  $G = 6,7 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2$ , Maa mass  $M = 6,0 \cdot 10^{24} \text{ kg}$ , Maa raadius  $r = 6400 \text{ km}$ , Maa pöörlemisperiood  $t = 24 \text{ h}$ .

**Ü170 Kosmosejaam ★★★**

Autor: Oleg Košik, lõppvoor, 2005, G 9

Joonisel on toodud ringorbiidil liikuva rahvusvahelise kosmosejaama trajektoor maapinna kohal (Maa keskpunktist kosmosejaamaani tömmatud sirge ja maapinna lõikepunktü jälg). Hinnake selle abil kosmosejaama kõrgust maapinnast. Maa raadius  $R = 6380 \text{ km}$ , raskuskiirendus maapinnal  $g = 9,8 \text{ m/s}^2$ .



**Ü171 Kuukaabel ★★★★**

Autor: Siim Ainsaar, piirkonnnavoor, 2009, G 10

Oletame, et Maa ja Kuu on ühendatud sirge, homogeense, mõlema suhtes radiaalse kaabliga.

- a) Mitu korda on Maa poolt kaablike avaldatav raskusjõud suurem Kuu-poolsest?
- b) Maa pinnal asuv kaabli kinnitus sellele vertikaalsihis jõudu ei avalda. Kui kõrgel Kuu kohal asub punkt, kus pisut liiga nõrk kaabel katkeks?

Lugegem taevakehad paigalseisvaiks. Maa raadius  $r_M = 6370$  km, Kuu raadius  $r_K = 1740$  km, Maa mass  $m_M = 5,97 \cdot 10^{24}$  kg, Kuu mass  $m_K = 7,35 \cdot 10^{22}$  kg, taevakehade keskmete vahekaugus  $D = 3,80 \cdot 10^5$  km.

*Abivalem.* Kui kaablit tömbaks Maa üksi ning otspunktide kaugused Maa tsentrist oleksid  $a$  ja  $b$ , mõjuks sellele raskusjõud  $Gm_M\lambda\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)$ , kus  $G$  on gravitatsioonikonstant ning  $\lambda$  kaabli joontihedus (ühikuga kg/m).

**Ü172 Satelliigid ★★★★★**

Autor: Mihkel Kree, lõppvoor, 2010, G 7

2009. aasta veebruaris põrkasid Siberi kohal 780 kilomeetri kõrguse selkokku USA ja Venemaa satelliigid. Pidades silmas, et ümber Maa tiirleb juba tuhandeid satelliite ning nende köigi orbiite pole seetõttu võimalik omavahel koordineerida, hinnake, mitme aasta tagant keskelt läbi niisugused juhuslikud kokkupõrked aset leiavad. Oma lahenduses kasutage järgmisi hinnanguid ja lähendusi: maalähedaste satelliitide arv  $N = 2500$ ; orbiidid jäävad maapinnast kõrgustesse vahemikku  $h_1 = 200$  km kuni  $h_2 = 2000$  km ning satelliigid on jaotunud selles kihis ühtlase ruumtihedusega; tüüpilise satelliidi ristlõikepindala  $S = 10 \text{ m}^2$ . Maa raadius  $R = 6400$  km, raskuskiirendus maapinnal  $g = 10 \text{ m/s}^2$ .

## Gaasid

### Ü173 Jalgpall ★

Autor: tundmatu, lahtine, 2006, G 1

Kui suure rõhuni  $p_N$  võib pumbata jalgpalli palli kolbpumbaga, kui pumpa surutakse kokku  $N = 40$  korda? Iga pumpamiskäigu jooksul võtab pump atmosfäärist õhu koguse ruumalaga  $v = 150 \text{ cm}^3$ . Atmosfääri rõhk  $p_0 = 0,1 \text{ MPa}$ , palli ruumala  $V = 31$ . Lugeda, et õhu temperatuur pallis võrdub välistemperatuuriga.

### Ü174 Allveelaev ★

Autor: tundmatu, lahtine, 2007, G 3

Mõnikord on inimesed uppuvatest allveelaevadest pääsenud avades esialgu alumiined ventiilid (mida mööda vesi sisse tungib), seejärel ülemise luugi ning siis ise koos õhumulliga veepinnale tööstes. Kui suur osa  $k$  laeva ruumalast polnud täidetud veega peale ventiilide avamist, kui laev asus sugavusel  $h = 42 \text{ m}$ ? Merevee tihedus  $\rho = 1,03 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$ . Õhu rõhk laevas alghetkel  $p_0 = 0,1 \text{ MPa}$ . Võite lugeda, et vee sisse laskmise käigus õhu temperatuur laevas ei muutu (tänu soojusvahetusle ümbritseva veega).

### Ü175 Tuukrid ★

Autor: Ott Krikmann, piirkonnavor, 2007, G 4

Tuukrid (akvalangistid) kasutavad sageli oma varustuse ja keha keskmise tiheduse ühtlustamiseks vee tihedusega (vees hõljumise saavutamiseks) õhuga täidetavat hermeetilist vesti, kuhu pumbatakse õhku hingamisaparaadist (akvalangist). Oletame, et tuuker saavutas hõljumise veepinna lähedal, pumbates teatud ruumala õhku oma vesti. Seejärel sukeldus ta  $h = 25 \text{ m}$  sügavusele. Mitu korda pidi tuuker sellel sügavusel oma vesti ruumala suurendama, et saavutada hõljumise selles sügavuses? Õhurõhk on  $p_0 = 105 \text{ kPa}$ .

### Ü176 Toaõhk ★

Autor: Mihkel Rähn, lõppvoor, 2008, G 3

Leida seos toaõhu molekulide summaarse kuligliikumise kineetilise energia ja toa-temperatuuri vahel. Õhu rõhk on  $p$  ja toa ruumala  $V$ .

### Ü177 Õhupall ★

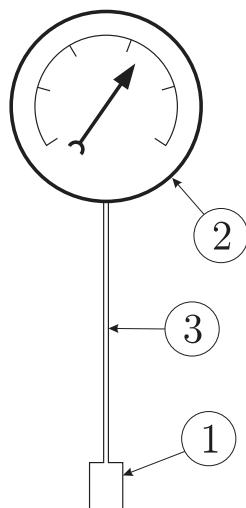
Autor: Eero Vaher, lõppvoor, 2015, G 1

Heeliumiga täidetud õhupall suudab tõsta koormist massiga kuni  $M = 200 \text{ kg}$ . Kui suur on õhupalli ruumala  $V$ ? Koormise ruumala lugeda tühiseks. Õhupalli kesta mass on arvestatud koormise massi sisse. Õhu tihedus on  $\rho = 1,2 \text{ kg/m}^3$ , õhu rõhk  $p = 100 \text{ kPa}$ , õhu temperatuur  $T = 20^\circ\text{C}$ . Heelumi molaarmass on  $\mu = 4,0 \text{ g/mol}$ , ideaalse gaasi konstant  $R = 8,3 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ .

**Ü178 Gaasitermomeeter ★★**

Autor: Valter Kiisk, piirkonnavor, 2006, G 5

Gaasitermomeeter koosneb mõõteampullist 1 ja manomeetrist 2, mis on omavahel ühenduses peenikese kapillaari 3 kaudu (vt joonist). Manomeetri ja mõõteampulli ruumalade suhe on  $\alpha = 30$ . Kapillaari ruumala võib lugeda tühiselt väikeseks. Seade täidetakse toatemperatuuril oleva gaasiga röhuni  $p_0 = 1 \text{ atm}$ . Gaasi võib lugeda ideaalseks. Manomeetrit hoitakse toatemperatuuril  $T_0 = 293 \text{ K}$ , mõõteampull asetatakse keskkonda, mille temperatuuri on tarvis määratada. Leidke keskkonna temperatuur, kui manomeetri näit on  $p = 0,7 \text{ atm}$ .

**Ü179 Tuulik ★★**

Autor: Valter Kiisk, piirkonnavor, 2007, G 5

Teatud tuuleturbiin (tiiviku diameeter  $d = 50 \text{ m}$ ) töötab maksimaalse efektiivsusega tuule kiirusel  $v = 9 \text{ m/s}$ . Sel juhul õnnestub  $\eta = 40\%$  tiiviku poolt haaratava õhuvoolu kineetilisest energiast muundada elektriks (kineetilise energia arvutamisel ei arvestata õhu pidurdumist tiivikul). Leidke nendel tingimustel tuuliku elektriline võimsus. Õhu tihedus on  $\rho = 1,3 \text{ kg/m}^3$ .

**Ü180 Rong tunnelis ★★**

Autor: Eero Uustalu, lõppvoor, 2009, G 4

Rong liikus kiirusega  $v = 54 \text{ km/h}$  läbi pika horisontaalse silindrikujulise tunneli. Kui palju tõusis tunnelis asuva õhu temperatuur? Tunneli läbimõõt oli  $d = 5 \text{ m}$ . Rongi elektrimootori tarbis tunnelit läbides võimsust  $P = 800 \text{ kW}$ . Õhu molaarmass on  $M = 29 \text{ g/mol}$ , õhurõhk tunnelis  $p = 100 \text{ kPa}$  ja algtemperatuur  $t_0 = 17^\circ\text{C}$ . Õhk lugeda kaheaatomiliseks ideaalseks gaasiks. Eeldada, et rongi liikumisest tekkinud õhuvoolude liikumisest tulenev alarõhk on atmosfäärirõhuga võrreltes tühine.

Märkus: kaheaatomilise gaasi siseenergia ühe molekuli kohta on  $5/3$  korda suurem kui samal temperatuuril oleval üheaatomilisel gaasil.

**Ü181 Õhupalli vägi ★★**

Autor: Eero Vaher, lahtine, 2013, G 4

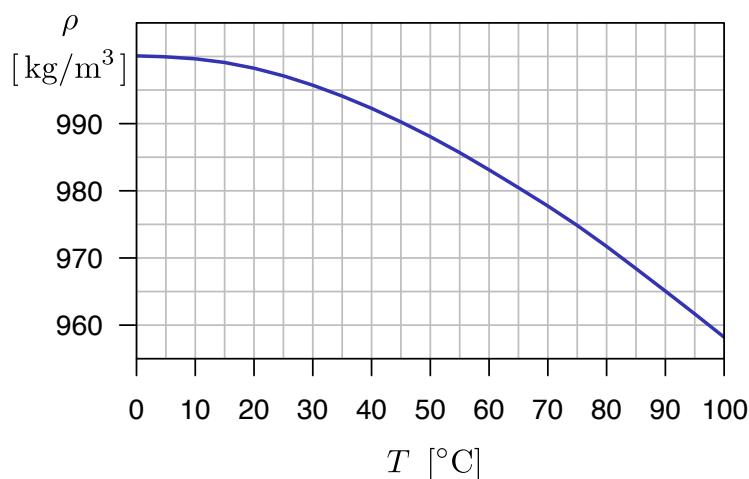
Heeliumiga täidetud õhupall suudab Maal tõsta õhku koormise massiga kuni 100 kg. Kui suure massiga koormise suudaks samasugune õhupall üles tõsta Marsil (õhupalli kesta massi loeme koormise massi hulka)? Koormise ruumala lugege tühi-seks. Õhu tihedus Maal on  $\rho_0 = 1,2 \text{ kg/m}^3$ , õhu rõhk Maal  $p_0 = 100 \text{ kPa}$ , õhu temperatuur Maal  $T_0 = 20^\circ\text{C}$ , „õhu“ tihedus Marsil  $\rho_1 = 0,015 \text{ kg/m}^3$ , „õhu“ rõhk Marsil  $p_1 = 600 \text{ Pa}$ , „õhu“ temperatuur Marsil  $T_1 = -60^\circ\text{C}$ . Heeliumi molaarmass on  $\mu = 4,0 \frac{\text{g}}{\text{mol}}$ , ideaalse gaasi konstant  $R = 8,3 \frac{\text{J}}{\text{K mol}}$ .

**Ü182 Paisupaak ★★**

Autor: Mihkel Kree, lõppvoor, 2014, G 3

Maja küttesüsteem sisaldab suurt akumulatsioonipaaki, kus hoitakse ringlevat sooj-a vett, ning paisupaaki, et kompenseerida vee soojuspaisumist. Paisupaak on fikseeritud ruumalaga anum, millega osa võtab enda alla õhk ning ülejäänu täidab küttesüsteemist pärinev vesi, mis saab vabalt süsteemi tagasi voolata. Hetkel, mil kogu vesi oli toatemperatuuril  $t_0 = 20^\circ\text{C}$ , täideti paisupaak suruõhuga nii, et õhu ruumala paagis oli  $V_1 = 0,080 \text{ m}^3$  ning rõhk  $p_1 = 1,5 p_0$ , kus  $p_0 = 0,10 \text{ MPa}$  on atmosfäärirõhk. Kogu süsteemis oleva vee ruumala toatemperatuuril on  $V_0 = 1,0 \text{ m}^3$ .

Torustikus on ka avariiventtiil, et vältida torude lõhkemist. Ventiil avaneb, kui rõhk torustikus ületab atmosfäärirõhku  $\Delta p = 1,2 p_0$  võrra. Millise temperatuurini saab vett süsteemis soojendada, ilma et avariiventtiil avaneks? Metalli soojuspaisumisega mitte arvestada. Vee tiheduse sõltuvus temperatuurist on toodud graafikul. Eeldage, et graafiku kuju ei sõltu rõhust (vaadeldavad rõhumuutused on selleks liiga väiksed). Samuti eeldage, et õhu temperatuur paisupaagis püsib toatemperatuuril  $t_0$ .



**Ü183 Balloon ★★**

Autor: Kaur Aare Saar, lahtine, 2015, G 3

Pikk silindrikujuline balloon raadiusega  $r = 0,3\text{ m}$  on tehtud terasest, mis talub pindalaühiku kohta jõudu kuni  $\sigma = 250 \text{ MPa}$ . Leidke suurim balloonis oleva gaasi rõhk, mida balloon talub. Balloon seina paksus on  $t = 2 \text{ mm}$ .

**Ü184 Saunauks ★★**

Autor: Mihkel Kree, piirkonnnavoor, 2016, G 5

Sauna leiliruumis ruumalaga  $V = 10 \text{ m}^3$  on õhu temperatuur  $t = 90^\circ\text{C}$ . Kerisele visatakse leiliks vee kogus  $m = 150 \text{ g}$ , mis koheselt aurustub. Mötleme hüpteetiliselt, et leiliruum on hermeetiliselt suletud. Missuguse jõuga peaksid saunalised ust pindalaga  $A = 2,0 \text{ m}^2$  käepidemest kinni hoidma, et see lahti ei läheks? Gaasikonstant  $R = 8,3 \text{ J}/(\text{mol}\cdot\text{K})$  ning vee molaarmass  $\mu = 18 \text{ g/mol}$ . Kui ülesande õigesti lahendate, siis küllap avastate, et leitud jõud on ebatavaliselt suur. Selgitage ühe lausega, miks tegelikult sauna ukse kinnihoidmiseks nii suurt jõudu pole vaja rakendada.

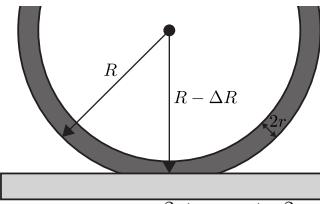
**Ü185 Rattamatk ★★**

Autor: Ardi Loot, lahtine, 2017, G 5

Juku on rattamatkal ning soovib ratta tagumist rehvi natuke rohkem täis pumbata. Et oleks lihtsam, kulutab juku palju vaeva ja pakib raske matkavarustuse pakiraamilt maha ja keerab ratta tagurpidi (rattad taeva poole). Hinnake, mitu protsendi vähem jõudu peab ta pumpamisel rakendama võrreldes olukorraga, kui tagumine ratas on koormatud?

Ratta raadius  $R = 33,0 \text{ cm}$ , rehvi raadius  $r = 2,5 \text{ cm}$ , tagumisele rattale toetuv mass (ratas koos matkavarustusega)  $m = 30 \text{ kg}$ , koormatud rehvi rõhk  $p = 150 \text{ kPa}$  (mõõdetud õhurõhu suhtes), õhurõhk  $p_0 = 100 \text{ kPa}$  ja raskuskiirendus  $g = 9,8 \text{ m/s}^2$ .

*Vihje.* Koormamata rattarehvi ruumala on antud valemiga  $V = 2\pi^2(R - r)r^2$  ning see väheneb koormamisel  $\Delta V \approx S \cdot \Delta R / 2$  võrra, kus  $S \approx 2\pi\Delta R\sqrt{Rr}$  on rehvi kokkupuutepinna suurus maaga ja  $\Delta R \ll r$  on rehvi deformatsiooni ulatus (vt joonist).

**Ü186 Silinder külmkapis ★★**

Autor: Rasmus Kisell, piirkonnnavoor, 2017, G 6

Suletud silindris sisemise raadiusega  $R$  ja sisemise kõrgusega  $h$  on vedelik, mis võtab enda alla teatud osa  $k$  silindri siseruumalast. Silinder on algsest toatemperatuuril  $T_1$ . Silinder asetatakse sügavkühlkupisse, kus on konstantne temperatuur  $T_2$ , mis on madalam silindris oleva aine sulamistemperatuurist. Teada on, et silindris oleva aine tihedus on vedelas olekus  $\rho_0$  ja tahkes olekus  $\lambda\rho_0$ . Leidke, mitu korda suureneb silindris oleva õhu rõhk võrreldes esialgsgega pärast vedeliku tahkumist. Eeldage, et vedeliku tahkumisel silindri mõõtmed ei muutu.

**Ü187 Heelium ★★**

Autor: tundmatu, lahtine, 2008, G 6

Kolme mooli heeliumi soojendamisel muutus gaasi rõhk võrdeliselt gaasi ruumalaga. Mitme kraadi võrra töüs heelumi temperatuur, kui gaasile anti soojushulk  $Q = 300 \text{ J}$ ?

**Ü188 Õhk ★★**

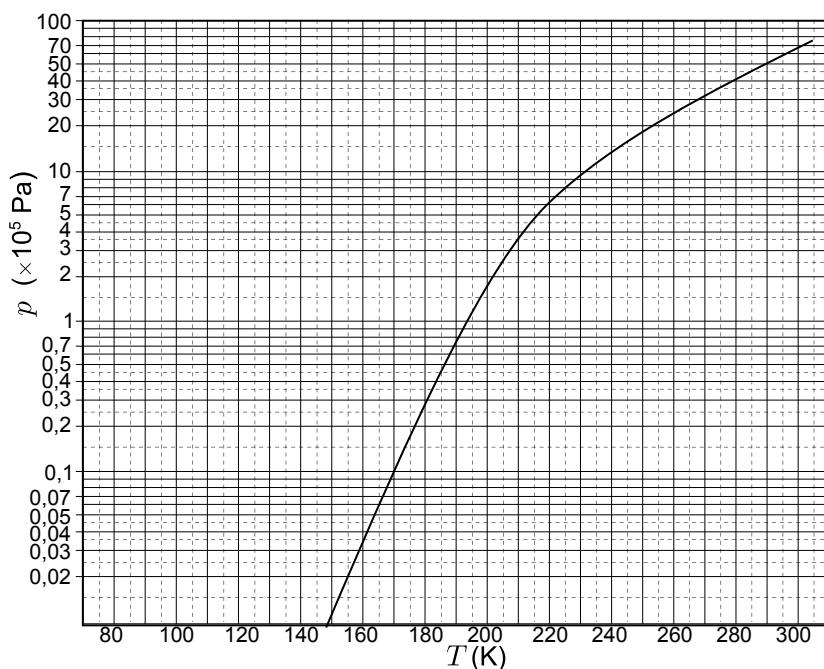
Autor: tundmatu, lahtine, 2009, G 7

Kaks anumat ruumalade suhtega  $\alpha = V_1/V_2 = 2$  on ühendatud lühikese toruga, mille keskel asub ventiil. Ventiil laseb gaasi läbi juhul kui rõhkude vahe on suurem kui  $\Delta p = 1,1p_0$ , kus  $p_0$  on atmosfäärirõhk. Temperatuuril  $t_1 = 27^\circ\text{C}$  on suuresmas anumas õhk normaalrõhul, väiksemas anumas on vaakum. Milliseks kujuneb rõhk väiksemas anumas, kui mõlemad anumad soojendada temperatuurini  $t_2 = 127^\circ\text{C}$ ?

**Ü189 Õuhohki ★★**

Autor: Mihkel Heidelberg, lõppvoor, 2010, G 6

Heast soojusuhiist plaadile asetatakse kuivast jääst (st tahkest süsihaptegaasist) kerge seib raadiusega  $r = 1 \text{ cm}$ ; seibi surutakse pealt jõuga  $F = 10 \text{ N}$ . Millise minimaalse aluse temperatuuri juures hõljub seib sublimeeruva süsihaptegaasi tekitud gaasipadjal? Aluse temperatuur lugege ühtlaseks ja samaks temaga vahetus kontaktis oleva ainekihiga. Õhurõhk  $p_0 = 100 \text{ kPa}$  ja kuiva jäää aururõhu sõltuvus temperatuurist on kujutatud graafikul.



**Ü190 Süstal ★★**

Autor: tundmatu, lahtine, 2011, G 5

Kord sooritas noor füüsik eksperimendi, et leida süstlakolvile mõjuvat hõördejõudu. Ta tömbas  $V_0 = 10 \text{ ml}$  mahuga süstlassesse  $5,0 \text{ ml}$  õhku ja sulges siis süstla otsa sõrmega. Seejärel tömbas ta süstla kolvi näiduni  $V_1 = 9,2 \text{ ml}$  ja lasi sellel seejärel aeglaselt tagasi liikuda. Kolb liikus, kuni näiduks jäi  $V_2 = 5,8 \text{ ml}$ . Mõõtmisel selgus, et süstlakolvi sisediameter oli  $d = 9 \text{ mm}$  ja kraadiklaas näitas, et ruumis oli  $t = 27^\circ\text{C}$ , õhu suhteline niiskus  $R = 30\%$  ja õhurõhk  $p_0 = 103,6 \text{ kPa}$ . Milline oli süstlakolvile mõjuv hõördejõud?

*Märkus.* Kuna tegu on praktilise probleemiga, siis ei pruugi kõik algandmed vaja likud olla.

**Ü191 Kuumaõhupall ★★**

Autor: Andreas Valdmann, piirkonnnavoor, 2012, G 6

Mis temperatuurile tuleb kuumaõhupalli sees õhk kütta, et õhupall lendu tõuseks? Välisõhu temperatuur  $t = 20^\circ\text{C}$ , õhupalli ruumala  $V = 3000 \text{ m}^3$  ja ei muutu. Õhupalli kesta ja laadungi kogumass  $m = 700 \text{ kg}$  ja õhu tihedus 20 kraadi juures  $\rho_{20} = 1,2 \text{ kg/m}^3$ .

**Ü192 Korvpall ★★**

Autor: Andreas Valdmann, lõppvoor, 2012, G 4

NBA standarditele vastava korvpalli mass on  $m = 600 \text{ g}$ , ümbermõõt  $C = 76 \text{ cm}$  ning ülerõhk palli sees  $p_1 = 55 \text{ kPa}$ . Kui sügavale vee alla tuleks korvpall suruda, et see iseenesest põhja hakkaks vajuma? Vee tihedus  $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$ , raskuskiirust  $g = 9,8 \text{ m/s}^2$  ja õhurõhk veepinnal  $p_0 = 100 \text{ kPa}$ . Võib eeldada, et sukeldamise jooksul palli sees õhutemperatuur ei muutu ja palli kesta ruumala on tühine.

**Ü193 Paisupaak ★★**

Autor: Ardi Loot, lahtine, 2016, G 7

Selleks, et vältida küttesüsteemis vee paisumise tulemusena tekkivat ülerõhku, lisatakse süsteemi paisupaak. See koosneb silindrist ruumalaga  $V$ , mis on jaotatud vabalt liikuva õhukese vaheseinaga kaheks osaks. Üks neist osadest täidetakse suruõhuga ( $T_0 = 20^\circ\text{C}$ ) röhuni  $p_0$ , võttes enda alla kogu silindri ruumala. Seejärel ühendatakse silindri teine osa küttesüsteemiga temperatuuril  $T_1 = T_0$  ning süsteem täidetakse veega, kuni saavutatakse rõhk  $p_1 = 300 \text{ kPa}$  ning vee koguruumala süsteemis  $V_s = 100 \text{ L}$ . Täitmise lõppedes on paisupaagist  $\beta = 10\%$  täidetud veega. Talvel suureneb kütmine tõttu süsteemis oleva vee ruumala  $\alpha = 1\% \text{ v}\ddot{\text{o}}rra$ , ning selle tulemusena tõuseb süsteemi rõhk  $p_2$ -ni, kusjuures paisupaagis olev õhk soojeneb temperatuurini  $T_2 = 40^\circ\text{C}$ . Leidke, kui suur peab olema paisupaagis õhu algne rõhk  $p_0$  ja minimaalne paisupaagi ruumala  $V$ , et vee paisumise tulemusena tekkiv lisarõhk  $\Delta p = p_2 - p_1$  poleks suurem kui  $50 \text{ kPa}$ .

**Ü194 Õhk ★★★**

Autor: tundmatu, lahtine, 2006, G 8

Leida niiske (suhteline niiskus  $f = 90\%$ ) ja kuiva õhu tiheduste suhe rõhu  $p_0 = 0,1 \text{ MPa}$  ja temperatuuri  $t = 27^\circ\text{C}$  juures. Küllastunud auru tihedus sellel temperatuuril on  $\rho_0 = 0,027 \text{ kg/m}^3$ . Õhu molaarmass  $\mu_1 = 0,029 \text{ kg/mol}$ , vee molaarmass  $\mu_2 = 0,018 \text{ kg/mol}$ .

**Ü195 Gaasid ★★★**

Autor: Oleg Košik, lõppvoor, 2007, G 6

Isoleeritud silindrilises anumas vabalt liikuva koormise all on vesinik ja heelium, mis on teineteisest eraldatud vabalt liikuva ja aeglaselt soojust juhtiva õhukese vaheseinaga (vt. joonist). Alguses on gaaside temperatuurid võrdsed, kusjuures vesinik hõlmab heeliumist 3 korda väiksema ruumala. Vesinikule anti teatud soojushulk, mille tulemusena nihkus koormis  $d_1 = 5,5 \text{ cm}$  võrra ülespoole. Pika aja möödudes tähdeldati, et koormis nihkus veel. Mis suunas ja kui palju see nihkus? Gaasid lugeda ideaalseteks. Vesiniku soojusmahtuvus konstantsel röhul on  $C_{\text{PH}_2} = 7R/2$  ning heeliumil  $C_{\text{PHe}} = 5R/2$ .

**Ü196 Korsten ★★★**

Autor: Jaan Kalda, piirkonnnavoor, 2009, G 9

Hinnake, milline oleks suitsu kiirus korstnast väljumisel, kui õhutakistusega (sh turbulentset liikumisest tingitud takistusega) korstnas ning ahjulõõrides mitte arvestada. Korstna kõrgus (mõõdetuna korstnajala juurest, kuhu siseneb ahjust tulev soe õhk) on  $h = 10 \text{ m}$  ja õhu keskmne temperatuur korstnas  $t = 80^\circ\text{C}$ . Lugeda, et ahju uks ja korstnajalg on samal kõrgusel. Välisõhu temperatuur on  $t_0 = 0^\circ\text{C}$ .

**Ü197 Terasanum ★★★**

Autor: Valter Kiisk, piirkonnnavoor, 2017, G 8

Sfäärilise terasanuma sisediamieter on  $d = 0,5 \text{ m}$  ja mass  $m = 25 \text{ kg}$ . Maksimaalselt mitu liitrit gaasi (arvestatuna normaalröhule) õnnestuks säilitada sellises anumas kõrge röhu all? Terase tihedus on  $\rho = 7,9 \text{ g/cm}^3$  ja maksimaalne talutav tõmbejoud pindalaühiku kohta  $\sigma = 450 \text{ MN/m}^2$ . Normaalrõhk on  $p_0 = 101,3 \text{ kPa}$ .

**Ü198 Õhupall ★★★**

Autor: Ardi Loot, lõppvoor, 2017, G 7

Juku tahab õhupalli täis pumbata. Tal on suur pump, mille otsas olev ventiil on alguses suletud. Ta paneb pumba otsa õhupalli, seejärel vajutab pumbale peale, kuni rõhk pumbas tõuseb  $p$ -ni. Kokku surumise töttu tõuseb pumbas oleva õhu temperatuur  $T$ -ni. Juku keerab ventiili lahti ja õhupall täitub aeglaselt, samal ajal vajub pumba käepide järjest allapoole. Juku vajutab kogu protsessi välitel pumbale täpselt sama suure jõuga kui alguses. Mis on õhu temperatuur õhupallis, kui see on täis pumbatud? Soojuskadudega läbi pumba ja õhupalli seinte mitte arvestada, samuti õhupalli kummi venitamisel tehtud töoga mitte arvestada. Väline õhurõhk ja temperatuur on  $p_0$  ja  $T_0$ . Õhu soojusmahtuvus konstantsel ruumalal on  $c_V$ .

**Ü199 Kuumaõhupall ★★★**

Autor: Ants Remm, piirkonnnavoor, 2014, G 10

Juku läheb lendama kerakujulise kuumaõhupalliga, mille raadius  $r = 8,7 \text{ m}$ , mass koos reisijatega  $M_0 = 390 \text{ kg}$  ning lisaks on kütusena kaasas  $M_k = 20 \text{ kg}$  propaani. Kui kaua saab kesta Juku õhupallilend?

Õhupall on kaetud kattega, mis vähendab soojusjuhtivust ning soojuskiirgust tühisteväärtusteni. Tööolukorras imbus õhk läbi õhupalli kesta kiirusega  $\lambda = 500 \text{ g/s}$ .

Õhurõhk ja temperatuur lennukõrgusel on  $p_0 = 100 \text{ kPa}$  ja  $T_0 = 10^\circ\text{C}$ . Propaan kütteväärtus  $k = 50 \text{ MJ/kg}$ . Õhu keskmene molaarmass  $\mu = 29 \text{ g/mol}$  ning soojusmahtuvus konstantsel rõhul  $C_p = 1,0 \frac{\text{kJ}}{\text{K}\cdot\text{kg}}$ . Universaalne gaasikonstant on  $R = 8,3 \frac{\text{J}}{\text{K}\cdot\text{mol}}$ .

### Ü200 Kerkiv õhupall ★★★

Autor: Jaan Kalda, lõppvoor, 2018, G 8

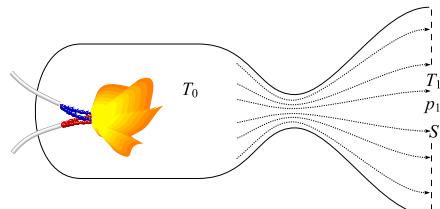
Ilusa päikeselise ilma korral on harilikult tegemist nn adiabaatilise atmosfääriga. See tähendab, et õhumassid on pidevas üles-allä liikumises. Kerkides õhk paisub ja jahtub adiabaatiliselt; pideva segunemise töttu on kerkiva õhumassi temperatuur võrdne seda antud rõgusel ümbritsevate õhumasside temperatuuriga. On võimalik näidata, et sellisel juhul kahaneb temperatuur lineaarselt rõgusega,  $T = T_0 - \frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{\mu gh}{R}$ , kus  $\gamma = 1,4$  on õhu adiabaadinitaja,  $\mu = 29 \text{ g/mol}$  — õhu keskmene molaarmass,  $g = 9,81 \text{ m/s}^2$  — vabalangemise kiirendus,  $R = 8,31 \text{ J/mol K}$  — gaasikonstant, ja  $h$  — rõhus maapinnast; õhutemperatuur maapinnal  $T_0 = 293 \text{ K}$ . Venimatust kuid vabalt painduvast nahast valmistatud õhupall mahutab maksimaalselt ruumala  $V_0$  jagu gaasi; see täidetakse sellise koguse heeliumiga, mis võtab maapinnal enda alla ruumala  $V_0/2$ . Õhupall lastakse lahti ja see hakkab aeglaselt kerkima; lugeda, et õhupallis oleva heelumi temperatuur on kogu aeg võrdne ümbritseva õhu temperatuuriga. Hinnake, millisel rõgusel  $h_1$  on õhupalli töstejoud 1% võrra väiksem kui maapinnal. Teilt oodatakse sellist hinnangut rõgusele, mille suhteline viga pole suurem ühest kümnendikust, kusjuures vea piisavat väiksust pole vaja töestada.

*Märkus.* Adiabaatilise protsessi korral kehtib seos  $pV^\gamma = \text{Const}$ , kus  $p$  tähistab gaasi rõhku ja  $V$  — ruumala.

### Ü201 Rakettmootor ★★★★

Autor: Jaan Kalda, lahtine, 2010, G 10

Vedelkütusel töötava rakettmootori skeem on toodud juuresoleval joonisel. Põlemiskambris moodustuvad põlemisproduktid (gaasid) omandavad kõrge rõhu ja temperatuuri. Seejärel väljuvad need adiabaatiliselt paisudes ja jahtudes läbi düüsi. Õigesesti konstrueeritud düüsi korral (kaela läbimõõt vastab põlemiskiirusele ja -temperatuurile) jätkub adiabaatiline paisumine ka peale düüsikaela läbimist ning suur osa soojusenergiast muundatakse gaasi jõa kineetiliseks energiaks. Leidke rakettmootori veojöud  $F$  eeldusel, et (a) on teada düüsi väljundristlõike pindala  $S$ , temperatuur põlemiskambris  $T_0$  ning gaaside temperatuur  $T_1$  ja rõhk  $p_1$  düüsist väljumise hetkel, kusjuures  $T_0 \gg T_1$ ; (b) põlemiskambris on gaaside kineetiline energia tühine vörreldes soojusenergiaga; (c) atmosfäärirõhu mõju veojöule on tühine; (d) moodustuva gaasisegu ühe mooli soojusmahtuvus konstantsel ruumalal on  $c_V = \frac{5}{2}R$ , kus  $R$  on gaasikonstant.



## Vedelike mehaanika

### Ü202 Vedelik ★

Autor: tundmatu, lahtine, 2005, G 1

Ühendatud silindrilistesse anumatesse diameetritega  $d_1$  ja  $d_2$  on valatud vedelik tihedusega  $\rho$ . Kui palju töuseb vedeliku tase anumates, kui ühte anumassee panakse ujuma vedeliku tihedusest väiksema tihedusega keha massiga  $m$ ?

### Ü203 Tünn ★

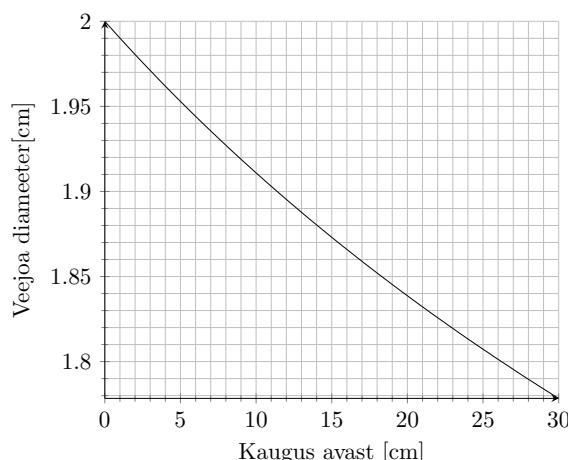
Autor: Koit Timpmann, piirkonnavor, 2012, G 3

Vees ujuva tühja tünni ruumalast on  $1/10$  vee sees. Pärast tünni täitmist tundmatu vedelikuga jäab tünni vee peale ujuma, kuid nüüd on vee sees  $9/10$  tünni ruumalast. Kui suur on tünni valatud vedeliku tihedus? Vee tihedus on  $1000 \text{ kg/m}^3$ .

### Ü204 Auk tünnis ★★

Autor: Hans Daniel Kaimre, lõppvoor, 2018, G 2

Suure vett täis tünni põhjas on auk, kust voolab vett välja. Graafikul on esitatud väljuva veejoa läbimõõdu sõltuvus kaugusest tünni põhjast  $l$ . Leidke veetaseme kõrgus tünnis.



### Ü205 Veetoru ★★

Autor: Taavi Pungas, lõppvoor, 2011, G 4

Kaks erineva diameetriga horisontaalset toru on otsapidi kokku ühendatud nii, et nende teljed ühtivad. Mööda esimest toru voolab vesi kiirusega  $v_1$ . Kummagi vee toru külge on ühendatud väike vertikaalne toruke, vedelikusamba kõrgused neis on vastavalt  $h_1$  ja  $h_2$  (toru teljest mõõtes). Leidke horisontaalsele torule diameetrite suhe. Hõõrdumist mitte arvestada.

*Vihje:* vedeliku horisontaalsel voolamisel kehtib Bernoulli seadus kujul  $\frac{\rho v^2}{2} + p = \text{Const}$ , kus  $p$  on hüdrostaatiline rõhk,  $\rho$  vedeliku tihedus ning  $v$  vedeliku kiirus.

**Ü206 Ujuv kuup ★★**

Autor: Koit Timpmann, lõppvoor, 2015, G 3

Õhukeseseinaline hermeetiline kuup ujub vee pinnal. Vee tihedus on  $\rho$ , kuubi mass koos selles oleva gaasiga  $m$  ja selle serva pikkus  $a$ . Milline on vähim gaasi algrõhk kuubis  $p$ , mille korral kuup ei upuks, kui selle põhja tekiks auk? Õhurõhk on  $p_0$ , raskuskiirendus on  $g$ .

**Ü207 Pump ★★**

Autor: Ardi Loot, piirkonnnavoor, 2018, G 4

Kaevust sügavusega  $h = 5,0\text{ m}$  tahetakse pumbata vett. Pump asub maapinnal ning selle veevõtutoru (täidetud veega) on siseläbimõõduga  $d = 16\text{ mm}$  ja pikkusega, mis on võrdne kaevu sügavusega.

- a) Kui suur peab olema pumba võimsus  $P$ , et pumbata vett vooluhulgaga  $q = 301/\text{min}$ ? Pumba kasutegur on  $\eta = 25\%$ .

- b) Missugune on maksimaalne kaevu sügavus  $h_m$ , mille korral on võimalik sellist tüüpi pumbaga kaevust vett pumbata?

Arvestada, et torus olevale veesambale mõjub lisaks teistele jõududele ka hõõrdejoud, mis põhjustab rõhu vähenemist toru pikkuse  $l$  kohta  $\Delta p = c_h q^2 l / d^5$ , kus  $c_h = 40\text{ Pa} \cdot \text{s}^2/\text{m}^2$ . Vee tihedus  $\rho = 1000\text{ kg/m}^3$ , raskuskiirendus  $g = 9,8\text{ m/s}^2$  ja õhurõhk  $p_0 = 100\text{ kPa}$ .

**Ü208 Bürett ★★★**

Autor: tundmatu, lahtine, 2004, G 5

Joonisel on kujutatud keemiku bürett tiitrimise jaoks. Selle büreti alumise osa raadius on  $r = 1\text{ mm}$ , ülemise osa raadius aga  $R = 5\text{ mm}$ . Büreti pikkus on  $H = 41\text{ cm}$ . Bürett on vertikaalses asendis. Alguses on büreti alumine ots suletud, bürett ise on täidetud teatud veekogusega. Siis suletakse ülemine ots, alumine aga lastakse lahti. Hinnata, mitu veetilka kukub büretist, kui veetase stabiliseerub tasemeel  $h = 20\text{ cm}$  büreti alumisest otsast ning pärast seda ükski tilk büretist enam ei kuku? Vee tihedus on  $\rho = 1000\text{ kg/m}^3$ , pindpinevustegur  $\sigma = 7,4 \cdot 10^5\text{ N/m}$ . Atmosfäärirõhk  $p_0 = 1 \cdot 10^5\text{ Pa}$ .

**Ü209 Veekahur ★★★**

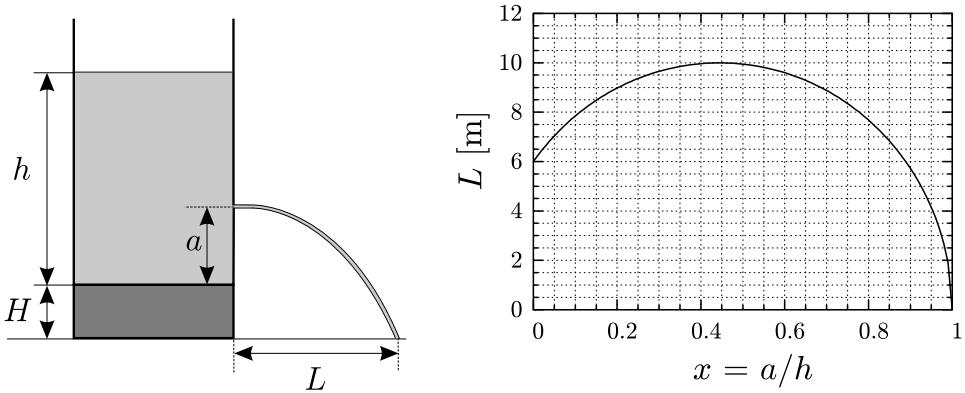
Autor: Oleg Košik, piirkonnnavoor, 2005, G 7

Veekahur tulistab veejuga, mille ristlöikepindala on  $S = 8\text{ cm}^2$  ning võimsus  $N = 6000\text{ W}$ . Millise jõuga tabab veejuga märki, kui kahur ja märk asuvad samal kõrgusel? Vee tihedus on  $\rho = 1000\text{ kg/m}^3$ , õhutakistust mitte arvestada. Märklaua ja veekahuri vahemaa on väike, st veejoa kõverdumist raskusjõu toimel ei pea arvestama.

**Ü210 Veetünn ★★★**

Autor: Mihkel Kree, lõppvoor, 2005, G 5

Silindriline veetünn, milles hoitakse muutumatut veetaset kõrgusega  $h$ , on töstetud horisontaalsele platvormile, mille kõrgus maapinnast on  $H$  (vt joonist). Tünni seina kõrgusele  $a$  selle põhjast puuritakse auk. Väljuv veejuga puudutab maapinda kaugusel  $L$  platvormi jalamist. Graafikul on kujutatud kauguse  $L$  sõltuvus augu kõrgusest  $x = a/h$ . Määrase tünni kõrgus  $h$  ning aluse kõrgus  $H$  eeldusel, et  $h > H$ .



### Ü211 Veejuga ★★

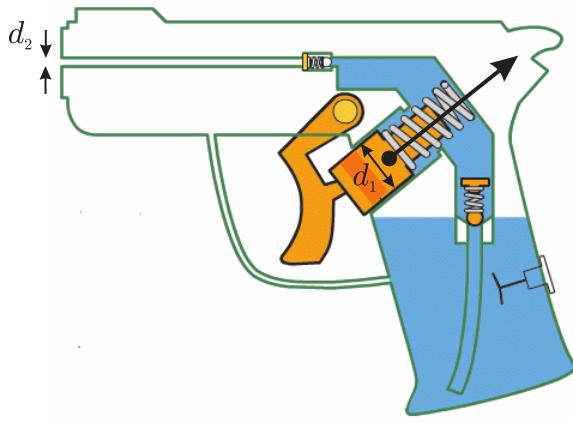
Autor: Siim Ainsaar, piirkonnavoor, 2006, G 9

Vesi voolab kraanist vertikaalselt alla purki. Nagu teada, ei ole kraanist voolav veejuga silindrilise. Joa raadius kraani otsa juures on  $r_0 = 5 \text{ mm}$ , sellest kaugusel  $h = 130 \text{ mm}$  allpool aga  $r_1 = 3 \text{ mm}$ . Leidke aeg  $t$ , mis kulub purgi täitmiseks, kui raskuskiirendus on  $g = 9,8 \text{ m/s}^2$ . Purgi ruumala  $V = 1 \text{ liter}$ . Pindpinevusest tingitud efekte pole vaja arvestada. Eeldada, et voolamiskiirus on iga ristlõike piires ühesugune ning keeriseid ei ole.

### Ü212 Veepüstol ★★

Autor: Valter Kiisk, lõppvoor, 2006, G 4

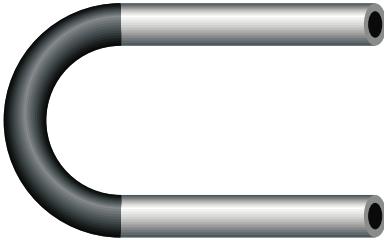
Veepüstoliga (vt joonist) tekitatakse veejuga, surudes vett läbi kitsa silindrilise suudme, mille sisediaemeeter on  $d_2 = 1 \text{ mm}$ . Päästik on ühendatud kolviga, mis saab tihedalt liikuda silindrilises torus diameetriga  $d_1 = 1 \text{ cm}$ . Oletagem, et sõrmed suruvad päästikule jõuga  $F = 20 \text{ N}$  (jõu rakenduspunkt ja suund on näidatud joonisel). Kui suure kiirusega väljub veejuga püstolist? Vee liikumise võib lugeda laminaarseks, vee viskoossust ja püstoli liikuvatele osadele mõjuvaid hõõrdejõude võib ignoreerida. Vee tihedus on  $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$



**Ü213 U-toru ★★**

Autor: tundmatu, lahtine, 2009, G 6

Teatud torustikes võib vedeliku surve olla nii tugev, et torud võivad märgatavalt deformeeruda. Vaatleme sellist deformatsiooni U-kujulises torus (vt joonist): kaks sirget terastoru pikkusega  $l$ , mille välisraadius on  $\sqrt{2}$  korda suurem si seraadiusest, on ühendatud sama sisemise raadiusega mittedeformeeruvast materjalist kaarekujulise toruga. Selles U-torus voolab vedelik tihedusega  $\rho$  ja konstantse voolukiirusega  $v$ . Vedeliku hüdrostaatiline rõhk lugeda võrdseks välsirõhuga. U-toru otsad on pinnal jäigalt kinnitatud. Leidke toru pikenemine eeldades, et õõnsa terastoru deformatsiooni jaoks toimib Hooke'i seadus, kusjuures jäikustegur avaldub kujul  $k = ES/l$  ( $E$  on terase nn Young'i konstant,  $S$  on toru ristlöike pindala ja  $l$  on deformeerimata toru pikkus).

**Ü214 Veeblaas ★★**

Autor: Siim Ainsaar, piirkonnnavoor, 2013, G 7

Silindrilisse klaasi, mille kõrgus on  $H$  ja põhja raadius  $r$ , valati vett kõrguseni  $h$ . Klaas kaeti paberilehega ja keerati tagurpidi; paber ja klaasi vahelt voolas välja veekogus ruumalaga  $V$ . Kui paberit enam kinni ei hoitud, jäi see sellegipoolest klaasi külge, ülejää nud vesi püsis klaasis. Kui suur oli maksimaalselt paberit mass  $m$ ? Õhurõhk oli  $p_0$ , raskuskiirendus  $g$  ning vee tihedus  $\rho$ . Kasutati kriitpaberit, mis vett ei imanud. Paberist lahtilaskmise hetkel olid õhu ja vee temperatuurid võrdsed.

**Ü215 Klots vedelikes ★★**

Autor: Erkki Tempel, lahtine, 2014, G 6

Silindrilises anumas põhja pindalaga  $S$  on kaks mittesegunevat vedelikku tihedustega  $\rho_1$  ja  $\rho_2$ . Anumasse asetatakse kuubikujuline klots ruumalaga  $V$  ning tihedusga  $\rho_k$  ( $\rho_1 > \rho_k > \rho_2$ ). Klots on täielikult vedelike sees ega puuduta anuma põhja.

- a)** Kui suur osa klotsist asub alumises vedelikus?
- b)** Kui palju muutub kahe vedeliku eralduspinna kõrgus pärast klotsi asetamist anumasse?

**Ü216 Kuup veega ★★**

Autor: Jonatan Kalmus, piirkonnnavoor, 2018, G 7

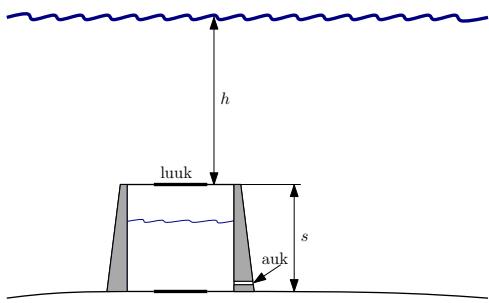
Leidke veekoguse mass, mis tuleb valada kuupi, et see oleks võimalikult stabiilne, ehk süsteemi massikese oleks võimalikult madalal. Kuubi külje pikkus on  $a$ , mass  $M$ , vee tihedus  $\rho$ . Kuubi seina paksusega mitte arvestada. Kuup on täielikult sümmeetrialine ehk sellel on olemas kõik 6 identset tahku.

**Ü217 Allveelaev ★★**

Autor: Mihkel Heidelberg, lahtine, 2012, G 5

Salaagent Bond põgeneb allveelaevalt selle torni kaudu. Tornis on algsest röhk sama mis õhuröhk vee peal:  $p_0 = 100 \text{ kPa}$ . Pärast torni ja ülejäänud allveelaeva eraldava luugi sulgemist teeb ta seina sisesse augu (vaata joonist), misjärel täitub torn osaliselt veega. Seejärel avab Bond torni laeluugi ja ujub koos vabaneva õhuga pinnale.

- a)** Kui paks on õhukiht, mis jäab torni enne torni laeluugi avamist ja pärast vee sissevooolamise lõppemist?
- b)** Kui suur ja mis suunas (üles või alla) on õhu ja vee poolt laeluugile avaldatav summaarne jõud enne avamist, kui veetase torni sees on jäänud paigale?
- Luugi pindala  $S = 0,50 \text{ m}^2$ , veetase luugi kohal  $h = 25 \text{ m}$ , torni kõrgus  $s = 2,0 \text{ m}$ . Vee tihedus  $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$ , raskuskiirendus  $g = 9,8 \text{ m/s}^2$ .



### Ü218 Ookean ★★★★

Autor: tundmatu, lahtine, 2005, G 8

Vee kokkusurutavuse tegur  $\beta = 5 \cdot 10^{-5} \text{ atm}^{-1}$ .

- a)** Hinnake ookeani keskmise sügavuse muutumist juhul, kui vesi oleks täielikult kokkusurumatu. Ookeani keskmene sügavus  $h \approx 3800 \text{ m}$ .
- b)** Hinnake vee tiheduste vahet  $\Delta\rho$  veepinnalähedasel veel ja veel ookeani süvendi põhjas sügavusel  $H = 10 \text{ km}$ .

Märkus: kokkusurutavuse tegur  $\beta$  näitab keha ühikulise ruumala vähenemist rõhu suurenemisel ühe ühiku vörra. Atmosfääär on rõhu mõõtmise ühik, mis võrdub atmosfääri normaalrõhuga merepinna kõrgusel: 1 atm = 101 325 Pa.

### Ü219 Kauss ★★★

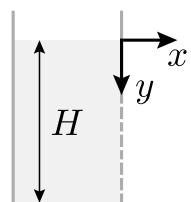
Autor: Taavi Pungas, lahtine, 2013, G 7

Silindrikujuline metallkauss massiga  $M = 1 \text{ kg}$  ja ruumalaga  $V_1 = 3 \text{ dm}^3$  ujub vannis. Mari teebs eksperimenti ja valab ühtlaselt  $t = 1 \text{ s}$  jooksul kõrguselt  $h = 1,5 \text{ m}$  kaussi kannutäie vett ruumalaga  $V_2 = 1,5 \text{ dm}^3$ . Ennustage eksperimendi tulemust: kas kauss läheb põhja või ei? Põhjendage oma ennustust arvutustega. Vee tihedus  $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$ .

### Ü220 Veejoad ★★★

Autor: Mihkel Kree, lahtine, 2015, G 7

Vertikaalse silindrilise anuma seina sisese on paljudele erinevatele kõrgustele tehtud pisikesed augud, millest voolab välja vett. Anumasse valatakse aeglasealt vett juurde nii, et veetase anumas püsib muutumatuna kõrgusel  $H$ . Leidke, millisesse ruumi piirkonda saab anumast väljuv vesi jõuda ehk avaldage veejugade mähispinna vörrand  $xy$ -teljestikus. Eeldage, et erinevad veejoad üksteist ei mõjuta.



**Ü221 U-toru ★★★** Autor: Erkki Tempel, piirkonnavor, 2016, G 9

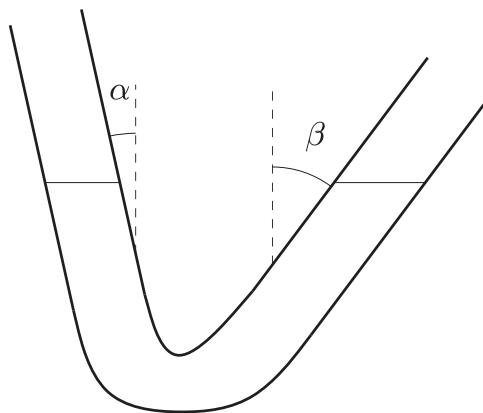
U-torusse ühtlase ristlöikepindalaga  $S$  on valatud vesi tihedusega  $\rho_v$ , nii et üle pool U-torust on veega täidetud ja kummagi täitmata osa pikkus on  $h$ . U-toru üks ots suletakse hermeetiliselt ning teise torusse valatakse aeglaselt õli kuni U-toru ülemise servani. Kui suur oli õli tihedus  $\rho_o$ , kui on teada, et lisatud õlisamba kõrgus on  $l$ ? Atmosfäärirõhk on  $p_0$ .

**Ü222 V-toru ★★★**

Autor: Mihkel Kree, lõppvoor, 2008, G 8

Toomas mängib läbipaistvast aiavoolikust tehtud U-toruga. Et seekordne U-toru polegi klaasist, painutab ta üht poolt nurga  $\alpha$  ning teist  $\beta$  võrra (vt joonist). Kas vedelikutaseme võnkesagedus on nüüd suurem või väiksem, mitu korda?

Märkus: vertikaalses U-torus on vedelikutaseme võnkumise sagedus  $f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{2S\rho g}{m}}$ , kus  $S$  on toru ristlöikepindala,  $\rho$  vedeliku tihedus ning  $m$  torus oleva vedeliku mass.



## Termodünaamika

### Ü223 Balloon ★

Autor: Jaan Susi, lõppvoor, 2005, G 3

Suletud balloon ruumalaga  $V = 101$  oli täidetud veega temperatuuril  $t_0 = 0^\circ\text{C}$ . Samal temperatuuril külmutati vesi jääks, mille tulemusena balloon kest venis välja ja vesi avaldas kogu jäätumise protsessi käigus balloonile rõhku  $p = 5 \cdot 10^7 \text{ Pa}$ . Leida balloonis olnud vee ( $\text{H}_2\text{O}$ ) siseenergia muut koos märgiga. Jää tihedus  $\rho_j = 900 \text{ kg/m}^3$  ja sulamissoojuseks antud rõhul  $\lambda = 317 \text{ kJ/kg}$ . Jää ja vee kokkusrutavust mitte arvestada.

### Ü224 Kütteklaas ★

Autor: Jaak Kikas, lõppvoor, 2007, G 1

Ruumide soojendamiseks kasutatava elektriliselt köötava klaasi pind on kaetud õhukese valgust läbilaskva elektrit juhtiva kihiga, mille vastasservadele rakendatakse elektriiline pingi (vool kulgeb mööda klaasi pinda). Kuidas suhtuvad sellisest klaasist valmistatud ristikülikukujuliselt aknalt eralduvad soojusvõimsused  $P_H$  ja  $P_V$  sama pingi rakendamisel vastavalt klaasi horisontaalsele ( $P_H$ ) ja vertikaalsele ( $P_V$ ) servade vahel? Akna horisontaalmõõde  $a = 0,5 \text{ m}$  ja vertikaalmõõde  $b = 1 \text{ m}$ .

### Ü225 Jääkuul ★

Autor: Urmo Visk, piirkonnavor, 2008, G 4

Õhukeste seintega jääst kera sees on õhk. Algelt on jääkera külmkapis temperatuuril  $t_0 = -9^\circ\text{C}$  ning õhurõhk tema sees võrdub välisrõhuga  $p_0 = 105 \text{ kPa}$ . Kera töstetakse külmkust välja tappa, kus see hakkab soojenema. Kera sein on nii õhuke, et maksimaalne ülerõhk (st. sise- ja välisrõhkude vahe), mida ta purunemata talub, on  $\Delta p = 0,2p_0$ . Mis juhtub enne: kas kera hakkab sulama või ta puruneb ülerõhu tõttu? Kuuli soojenemine lugeda nii aeglaseks, et igal ajahetkel võib lugeda õhu temperatuuri tema sees ning seinte sise- ja välispinna temperatuurid võrdseks.

### Ü226 Küttesüsteem ★

Autor: tundmatu, piirkonnavor, 2011, G 3

Küttesüsteem täidetakse  $t_1 = 10^\circ\text{C}$  temperatuuriga veega. Kui palju peab paisupaagis olema vaba ruumi, et kütmisel avatud paisupaagist vesi välja ei voolaks? Küttesüsteemis on  $V_1 = 250 \text{ liitrit}$  vett ja tööolukorras on selle keskmine temperatuur  $t_2 = 63^\circ\text{C}$ . Vee ruumpaisumistegur on  $\beta = 3 \times 10^{-4} \text{ K}^{-1}$ . Vedeliku ruumala mingil temperatuuril avaldub kujul  $V = V_0(1 + \beta t)$ , kus  $t$  on vedeliku temperatuur Celsius kraadides, ning  $V_0$  on vedeliku ruumala temperatuuril  $0^\circ\text{C}$ .

### Ü227 Vee jäätumine ★

Autor: Jaak Kikas, lahtine, 2012, G 1

0,5 kg jääkuubikuid asetati 1 l vette algtemperatuuriga  $0^\circ\text{C}$ . Milline peab olema jää algtemperatuur, et kogu vesi jäätiks? Jää sulamissoojus on  $330 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}}$ , erisoojus  $2,1 \text{ kJ/(kg }^\circ\text{C)}$ . Soojusvahetust keskkonnaga ei toimu. Vee tihedus  $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$ .

**Ü228 Veepudel ★**

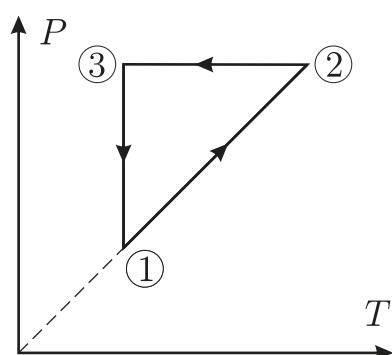
Autor: Koit Timpmann, piirkonnnavoor, 2013, G 2

Külma ilmaga oli autosse ununenud 2,0-liitrine täis veepudel. Auto juurde tulnud autojuht Koit ei uskunud oma silmi: temperatuur autos oli  $-3^{\circ}\text{C}$ , aga vesi pudelis ei olnud külmunud. Koidule tuli meelde, et ta oli kunagi kuulnud, et väga puhas vedelik võib olla vedelas olekus ka allpool tahkumistemperatuuri. Selle kontrollimiseks võttis ta pudeli ja raputas seda ning suhteliselt kiiresti muutus selles osa veest jääks. Mitu grammi jääd tekkis pudelisse? Vee erisoojus  $c = 4200 \text{ J}/(\text{kg} \cdot ^{\circ}\text{C})$  ja tihedus  $\rho = 1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ , jäää sulamissoojus  $\lambda = 340 \text{ kJ}/\text{kg}$ .

**Ü229 Ringprotsess ★**

Autor: Riho Taba, piirkonnnavoor, 2006, G 2

Kas joonisel kujutatud ringprotsessil on ideaalse gaasi töö positiivne või negatiivne? Põhjendada vastust.

**Ü230 Vedelike segamine ★**

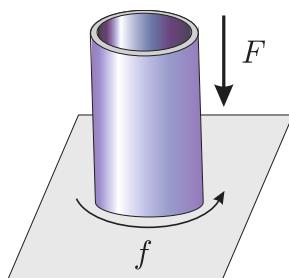
Autor: Aleksei Vlassov, piirkonnnavoor, 2007, G 3

Kahe erineva vedeliku segamisel ruumalade suhtega  $1 : 1$  tekib segu temperatuuriga  $t_3 = 42^{\circ}\text{C}$ . Milline oleks segu temperatuur, kui ruumalade suhe oleks  $2 : 1$ ? Vedelike temperatuurid on vastavalt  $t_1 = 27^{\circ}\text{C}$  ning  $t_2 = 47^{\circ}\text{C}$ .

**Ü231 Tulehõõrumine ★**

Autor: Jaak Kikas, piirkonnnavoor, 2008, G 3

Jõuga  $F$  otsapidi vastu tasast pinda surutud toru pöörleb sagedusega  $f$ . Toru läbimõõt on  $D$  ja seina paksus  $d \ll D$ . Toru otspind on risti toru teljega, hõordetegur toru ja tasapinna vahel on  $\mu$ . Kui palju soojusenergiat vabaneb ajavahemiku  $\Delta t$  jooksul?



**Ü232 Termos** ★

Autor: Urmo Visk, piirkonnavor, 2009, G 3

Termoses, mis on ümbristevatest kehadest soojuslikult isoleeritud, on  $m_1 = 300\text{ g}$  vett temperatuuriga  $t_1 = 20^\circ\text{C}$ . Sellele lisatakse  $m_2 = 600\text{ g}$  vett temperatuuriga  $t_2 = 80^\circ\text{C}$ . Pärast soojusliku tasakaalu saabumist mõõdeti vee temperatuuriks  $T_1$ . Järgmisel korral oli samas anumas alguses  $m_2 = 600\text{ g}$  vett temperatuuriga  $t_2 = 80^\circ\text{C}$  ja sellele lisati  $m_1 = 300\text{ g}$  vett temperatuuriga  $t_1 = 20^\circ\text{C}$ . Nüüd mõõdeti vee temperatuuriks soojusliku tasakaalu saabumise järel  $T_2 = T_1 + 2^\circ\text{C}$ . Kui suur on termose materjali erisoojus? Tühja termose mass on  $m = 140\text{ g}$  ja vee erisoojus  $c = 4200\text{ J/kg C}$ .

**Ü233 Rauatükk** ★

Autor: Oleg Košik, lahtine, 2010, G 2

Anumasse, milles oli  $V = 1\text{ l}$  vett temperatuuril  $t_1 = 20^\circ\text{C}$ , visati rauatükk massiga  $m = 100\text{ g}$  temperatuuril  $t_0 = 500^\circ\text{C}$ . Osa veest aurustus. Mõne aja pärast mõõdeti vee temperatuuriks  $t_2 = 24^\circ\text{C}$ . Kui palju vett aurustus? Vee erisoojus  $c_1 = 4200\text{ J/(kg} \cdot ^\circ\text{C)}$ , aurustumissoojus  $L = 2,26 \cdot 10^6\text{ J/kg}$  ja tihedus  $\rho = 1000\text{ kg/m}^3$ ; raua erisoojus  $c_2 = 460\text{ J/(kg} \cdot ^\circ\text{C)}$ . Anum on tühise soojusmahtuvusega ning välisheskkonnast hästi isoleeritud.

**Ü234 Jõhvikad** ★

Autor: Urmo Visk, piirkonnavor, 2010, G 2

Keevasse vette kallatakse külmutatud jõhvikaid. Vee temperatuur langes väärtseni  $t = 89^\circ\text{C}$ . Mitu korda oli vee mass suurem jõhvike massist? Kuna jõhvikad olid väikesed ja sulasid väga kiiresti, siis võib vee soojusvahetuse ümbristeva keskkonnaga arvestamata jäätta. Jõhvike algtemperatuur oli  $t_2 = -18^\circ\text{C}$ . Jää erisoojus  $c_j = 2100\text{ J/(kg C)}$ , vee erisoojus  $c_v = 4200\text{ J/(kg} \cdot ^\circ\text{C)}$ , jäät sulamissoojus  $L = 330\text{ kJ/kg}$ . Jõhvike suure veesisalduse tõttu võib neid käsitleda jääna.

**Ü235 Vesi** ★

Autor: Taavi Pungas, lõppvoor, 2011, G 1

Avatud termoses on vesi temperatuuril  $t_0 = 100^\circ\text{C}$ . Sellest 1 % aurustub. Hinnaata, kui palju muutub termosesse jäänud vee temperatuur  $t$ . Vee erisoojus  $c_v = 4,2\text{ kJ kg}^{-1}\text{ K}^{-1}$ , veeauru erisoojus  $c_a = 1,9\text{ kJ kg}^{-1}\text{ K}^{-1}$  ning vee aurustumissoojus temperatuuril  $100^\circ\text{C}$  on  $L = 2,26\text{ MJ/kg}$ . Eeldada, et termose seinte kaudu soojuskadusid ei ole.

**Ü236 Höördkeevitus** ★

Autor: Ants Remm, lõppvoor, 2012, G 1

Suhteliselt uus keevitustehnoloogia on höördkeevitus. See seisneb selles, et üks liidetavatest detailidest pannakse pöörlema ning surutakse vastu teist. Kui tekkinud soojus on detailid peaaegu sulamistemperatuurini kuumutanud, jäetakse pöörlev detail seisma ning suure rõhu all moodustub side. Vaatame olukorda, kus kaks vasest torujuppi tahetakse kokku keevitada. Leidke, kui suure jõuga peab pöörlemise ajal torusid kokku suruma, et tekiks piisavalt suur soojushulk  $\Delta t = 6\text{ s}$  jooksul. Toru pöörlemiskiirus on  $f = 1200$  pööret minutis. Lihtsustatult võib eeldada, et mõlema toru otsast kuumeneb ühtlaselt  $l = 0,5\text{ cm}$  pikkune jupp. Torude

diameteer on  $D = 8\text{ cm}$ , seina paksus  $d = 5\text{ mm}$ . Torud on alguses toatemperatuuril  $T_0 = 20^\circ\text{C}$ . Liitumine toimub temperatuuril  $T_1 = 810^\circ\text{C}$ . Vase hõõrdetegur iseendaga on  $\mu = 0,96$ , tihedus  $\rho = 8,9 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$  ning erisoojus  $c = 390 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot {}^\circ\text{C}}$ . Soojuskadudega ümbritsevasse keskkonda mitte arvestada.

### Ü237 Münt jäas ★

Autor: Erkki Tempel, piirkonnavor, 2015, G 3

Jäätküsi sisesse on jäätunud münt massiga  $m_m = 10\text{ g}$  ja tihedusega  $\rho_m = 8900 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ . Jäätküsi ja mündi temperatuur on  $0^\circ\text{C}$ . Jäätkuk ilma mündita kaalub  $m_j = 130\text{ g}$ . See jäätkuk visatakse anumasse, milles on  $V_v = 400\text{ ml}$  vett algtemperatuuriga  $T$ . Kui suur peab olema vee minimaalne algtemperatuur  $T$ , et jäätkuk koos mündiga vajuks pärast soojusliku tasakaalu saabumist põhja? Soojusvahetust väliskeskkonaga mitte arvestada. Vee erisoojus  $c = 4200 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot {}^\circ\text{C}}$  ning jägi sulamissoojus  $\lambda = 330 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}}$ . Jägi tihedus  $\rho_j = 900 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$  ja vee tihedus  $\rho_v = 1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ .

### Ü238 Soojusvaheti ★

Autor: Kaur Aare Saar, lõppvor, 2016, G 1

Tagasivoolu soojusvahetis jahutatakse sissetulevat naftat temperatuuriga  $T_n = 90^\circ\text{C}$  temperatuurini  $T_0 = 20^\circ\text{C}$ . Jahutusvesi liigub soojusvahetis vastupidises suunas naftaga ja siseneb soojusvahetisse temperatuuriga  $T_v = 10^\circ\text{C}$ . Vesi liigub kiirusega  $v_v = 6 \frac{\text{m}^3}{\text{min}}$  ja nafta liigub kiirusega  $v_n = 15 \frac{\text{m}^3}{\text{min}}$ . Leidke, millise temperatuuriga väljub soojusvahetist vesi? Vee erisoojus  $c_v = 4200 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot {}^\circ\text{C}}$  ja nafta erisoojus  $c_n = 1800 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot {}^\circ\text{C}}$ . Vee tihedus  $\rho_v = 1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$  ja nafta tihedus  $\rho_n = 850 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ .

### Ü239 Kastmisvesi ★★

Autor: Urmo Visk, piirkonnavor, 2008, G 5

Päikeselisel suvepäeval langeb päikesekiirtega risti olevale ühe ruutmeetrisele pinnaile ühes sekundis keskmiselt  $\varepsilon = 0,5 \frac{\text{kJ}}{(\text{s m}^2)}$  energiat. Kastmisvett soojendatakse pilgeni täis valatud õhukeseseinalises kerakujulisnes anumas raadiusega  $R = 0,5\text{ m}$ . Eeldada, et veeanum on päeva joooksul täielikult valgustatud. Kastmisvee temperatuur päikesetöusu ajal kell 4.30 oli  $t_0 = 16^\circ\text{C}$ . Kui suur on kastmisvee temperatuur päikeseloojangu ajal kell 22.30? Vee erisoojus on  $c = 4200 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot {}^\circ\text{C}}$ , tihedus  $\rho = 1 \frac{\text{kg}}{\text{dm}^3}$ . Eeldada, et anum neelab kogu pealelangeva päikesevalguuse energia ning et kogu päikesevalguse energia läheb kastmisvee soojendamiseks. Soojusvahetus kastmisvee ja keskkonna vahel lugeda tühiseks.

### Ü240 Küttessüsteem ★★

Autor: Oleg Košik, piirkonnavor, 2012, G 2

Talvel siseneb koolimaja küttessüsteemi vesi algtemperatuuriga  $t_0 = 60^\circ\text{C}$  ning väljub sealt temperatuuriga  $t_1 = 40^\circ\text{C}$ . Koolimaja soojuskadude võimsus on  $N = 100\text{ kW}$ . Kooli siseneva ja sealt väljuva veotoru sisediameteer on  $D = 100\text{ mm}$ . Leidke veevoolu kiirus neis torudes. Vee erisoojus  $c = 4200 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot {}^\circ\text{C}}$ , tihedus  $\rho = 1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ .

**Ü241 Lihvimisketas ★★**

Autor: Ott Krikmann, piirkonnavor, 2005, G 3

Detaili lihvitakse horisontaalselt pöörleva lihvimiskettaga, mille raadius on  $r = 20\text{ cm}$ . Ülekumenemise vältimiseks jahutatakse seda veega. Aja  $t = 1\text{ s}$  jooksul eraldub ketta ühelt ruutmeetritl ( $s = 1\text{ m}^2$ ) keskmiselt  $q = 10\text{ kJ}$  suurune soojus-hulk, mille neelab jahutusvesi. Jahutusvett algtemperatuuriga  $t_1 = 10^\circ\text{C}$  juhitakse ketta tsentrisse vooga  $w = 10\text{ cm}^3/\text{s}$ . Vee erisoojus  $c = 4200\text{ J}/(\text{kg K})$ . Leidke üle kettaääre voolava vee keskmise temperatuuri  $t_2$ .

**Ü242 Vee keemine ★★**

Autor: Mihkel Kree, lõppvoor, 2008, G 6

Mari keetis Mikule teed, aga vesi läks seekord keema alles  $t_0 = 105^\circ\text{C}$  juures, kui-gi toas oli normaalrõhk. Milles asi? Teatavasti hakkab vesi keema siis, kui küllastunud veeauru rõhk saab võrdseks õhurõhuga ning kogu anuma ulatuses saavad hakata paisuma küllastunud auruga täidetud mullid; tavaliselt on vees küllalda-selt tahkeid osakesi, millele tekivad piisavalt suured mullid, nii et pindpinevusega pole tarvis arvestada. Oletades aga, et seekord oli vesi haruldaselt puhas, hinnake, missugune oli mullide suurim võimalik raadius enne keemist. Vee pindpinevuseks keemistemperatuuril võib võtta  $\sigma = 58 \cdot 10^{-3}\text{ N/m}$  ning lineaarses lähenduses arvestada, et temperatuuri tõstmisel ühe kraadi võrra suureneb küllastunud veeauru rõhk  $\Delta p = 3,5\text{ kPa}$  võrra (keemistemperatuuri läheduses)

**Ü243 Vesi ja jää ★★**

Autor: Andres Laan, piirkonnavor, 2010, G 5

Kahte suurt paralleelset metallplaati hoitakse horisontaalselt vastastikku. Üks plaatidest on temperatuuril  $T_1 = -20^\circ\text{C}$  ja teine temperatuuril  $T_2 = 20^\circ\text{C}$ . Metallplaatide vahel on vesi. Ilmselgelt on külma plaadi läheduses vesi tahkes olekus. On teada, et vee tahke ja vedela kihi paksuste suhe on 4. Millisele temperatuurile tuleb soojendada teine metallplaat, et vedela kihi paksus saaks võrdseks tahke kihi paksusega?

**Ü244 Destillaator ★★**

Autor: Koit Timpmann, lõppvoor, 2010, G 2

Destillaator toodab tunnis  $V = 21\text{ l}$  puhest vett. Sisenev aur ja kondenseerunud vesi on samal temperatuuril. Auru kondenseerumisel vabanenud soojusest kulub  $\eta = 95\%$  jahutusvee soojendamiseks. Jahutussüsteem kujutab endast pikka toru, milles voolab jahutusvesi. Toru ristlöikepindala on  $S = 0,8\text{ cm}^2$ . Destillaatorisse sise-neva ja sealult väljuva jahutusvee temperatuurid erinevad  $\Delta T = 30^\circ\text{C}$  võrra. Kui kii-resti peab vesi voolama jahutussüsteemis? Vee aurustumissoojus  $L = 2300\text{ kJ/kg}$ , vee erisoojus  $c = 4,2\text{ kJ}/(\text{kg K})$  ja vee tihedus  $\rho = 1000\text{ kg/m}^3$ .

**Ü245 Veekeedukann ★★**

Autor: Erkki Tempel, lahtine, 2015, G 4

Veekeedukann küttekeha võimsusega  $N$  on täidetud veega. Kannu tila ava pindala on  $S$ . Milline on suurim joonkiirus, millega veeaur kannu avast väljub? Vee aurustumissoojus on  $L$ , ideaalse gaasi konstant on  $R$ , õhurõhk on  $p$  ning vee molaarmass on  $\mu$ . Veekeedukannu kasutegur soojuskadusid arvestades on  $\gamma$ .

**Ü246 Radiaator ★★**

Autor: Ardi Loot, piirkonnnavoor, 2018, G 3

Toas on vesiradiaator nimivõimsusega  $P_n = 2,0 \text{ kW}$ . Mis on selle radiaatori tegelik võimus ja tagasivoolava vee temperatuur, kui radiaatorit läbib küttevesi kiirusega  $q = 1,01/\text{min}$ , pealevoolava küttevee temperatuur  $T_p = 70^\circ\text{C}$  ja toatemperatuur  $T_0 = 22^\circ\text{C}$ ? Kui suur on radiaatori maksimaalne võimsus antud pealevoolu- ja toatemperatuuri korral? Vee erisoojus  $c_v = 4200 \text{ J}/(\text{kg} \cdot \text{K})$  ja tihedus  $\rho_v = 1000 \text{ kg}/\text{m}^3$ . *Märkus.* Radiaatori nimivõimuseks nimetatakse selle küttevõimust fikseeritud pealevoolu- ( $T_{pn} = 75^\circ\text{C}$ ), tagasivoolu- ( $T_{tn} = 65^\circ\text{C}$ ) ja toatemperatuuri ( $T_{0n} = 20^\circ\text{C}$ ) korral.

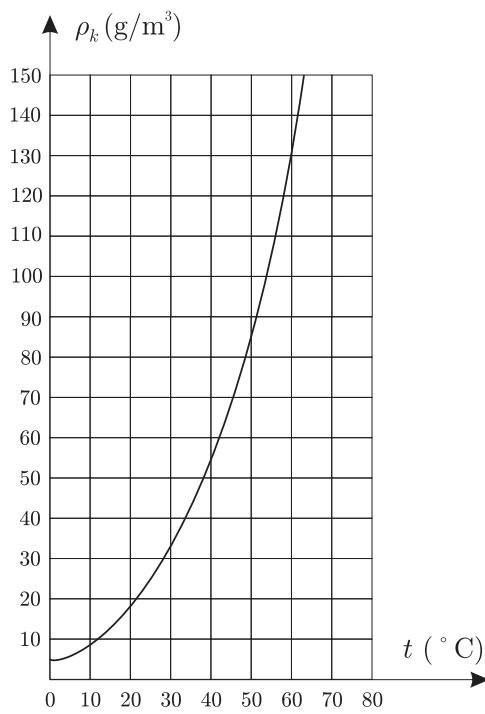
*Vihje.* Võib eeldada, et radiaatori tegelik võimus on võrdeline pealevoolu- ja tagasivoolutemperatuuride keskmise ja toatemperatuuri vahega.

**Ü247 Aurusaun ★★★**

Autor: tundmatu, lahtine, 2004, G 6

Soojuslikult isoleeritud aurusaun ruumalaga  $V = 10 \text{ m}^3$  on temperatuuril  $t = 50^\circ\text{C}$  ning suhtelise õhuniiskusega (veearu tiheduse ning küllastunud veearu tiheduste suhe)  $r = 80\%$ . Saunas lülitatakse sisse keeva veega töötav küttekeha.  $\tau = 20 \text{ min}$  möödudes hakkab saunas kondenseeruma vesi, kusjuures selleks ajaks on küttekehas aurustunud  $m = 620 \text{ g}$  vett. Vee keemissoojus on  $L = 2,3 \cdot 10^6 \text{ J/kg}$ , õhu keskmise erisoojus  $c = 1000 \text{ J kg}^{-1} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$ , tihedus  $\rho = 1,3 \text{ kg}/\text{m}^3$ . Küllastunud veearu tiheduse sõltuvus temperatuurist on toodud graafikul. Võite ignoreerida aurusauna õhuvahetuse mõju õhuniiskusele.

- a)** Mis oli sauna temperatuur hetkel, mil vesi kondenseeruma hakkas?
- b)** Missuguse kasuteguriga küttekeha vett aurustas?
- c)** Mis on küttekeha võimsus?



#### Ü248 Külmutusseade ★★

Autor: tundmatu, piirkonnnavoor, 2005, G 8

Külmutusseadme mootor teeb tööd  $A = 2 \text{ kJ}$ . Kui suur on maksimaalne külmutusseadmes kehalt ärvõetav soojushulk, kui külmutusseadme sisetemperatuur on  $t_k = -15^\circ\text{C}$  ja seadme jahutusvedeliku temperatuur on  $t_j = 10^\circ\text{C}$ ?

*Vihje.* Külmutusseadet võib vaadelda kui pööratud töotsükliga ideaalset soojusmasinat. See tähendab, et kõik tööd ja soojushulgad on vastupidise märgiga. Niisiis mootor ei tee tööd, vaid tema töös hoidmiseks on vaja teha tööd; madala temperatuuriga keskkond ei saa soojust, vaid annab soojust ära.

#### Ü249 Elektripliit ★★

Autor: tundmatu, lahtine, 2007, G 8

Elektripliid spiiali poolt ajaühikus keskkonnale üle antav soojushulk sõltub lineaarselt spiraali ja toa õhu temperatuuride vahest:  $N = \kappa(T - T_0)$ . Spiraali takistus sõltub sellest samuti lineaarselt:  $R = R_0[1 + \alpha(T - T_0)]$ , kus  $R_0$  on spiraali takistus toatemperatuuril. Kui suure temperatuuriini kuumeneb spiraal, kui seda läbib vool tugevusega  $I$ ?

**Ü250 Õhuaken ★★★**

Autor: Jaan Kalda, lõppvoor, 2009, G 6

Tuba köetakse elektriradiaatoriga, mille võimsus on  $P = 1 \text{ kW}$ . Välistemperatuur on  $t_0 = 0^\circ\text{C}$ , toas püsib ühtlane temperatuur  $t_1 = 20^\circ\text{C}$ . Nüüd avatakse õhuaken ning õueõhku tuleb tappa kiirusega  $v = 201 \text{ sekundis}$ . Milliseks kujuneb toatemperatuur? Õhu võib lugeda ideaalseks gaasiks, mille soojusmahtuvus konstantsel rõhul ühe mooli kohta on  $c_P = \frac{7}{2}R$ . Eeldada, et soojuskaod läbi seinte on võrdlised sise- ja välistemperatuuride vahega.

**Ü251 Kasvuhooneefekt ★★★**

Autor: Kristian Kuppart, lahtine, 2017, G 6

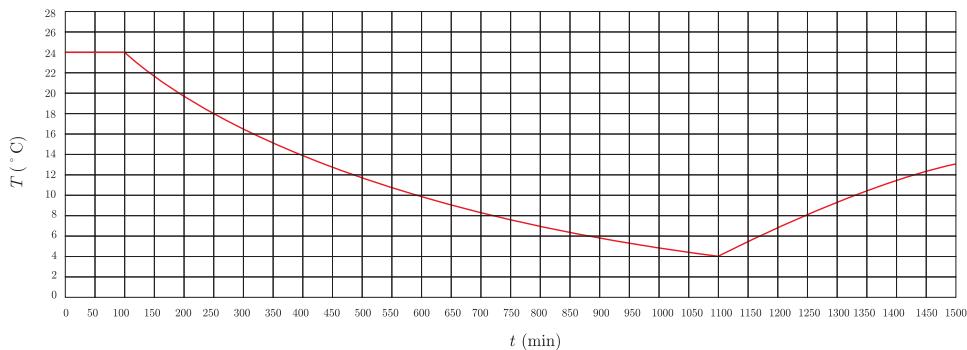
Vaatleme järgnevat Maa atmosfääri lihtsustatud mudelit, kus Maad ümbritsev atmosfäärikiht a) peegeldab kosmosesse tagasi  $\mu = 30\%$  pealelangevast päikesekiirgusest ning ülejäänu laseb läbi ilma kiirust neelamata; b) neelab täielikult kogu maapinnalt tuleva infrapunakiirguse. Päikeselt tulev kiiritustihedus on  $w_0 = 1400 \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$ . Leidke maapinna keskmise temperatuuri.

*Vihje.* kehtib Stefan-Boltzmanni seadus – musta keha poolt kiiratav võimsus pindalaühiku kohta avaldub kui  $w = \sigma T^4$ , kus  $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot \text{K}^4}$ . Eeldada, et maapind kiirgab ainult infrapunakiirgust, ning et teda saab selle jaoks lugeda absoluutelt mustaks kehaks. Samuti neelab maapind kogu temani jõudva päikesevalguse.

**Ü252 Tuba ★★★**

Autor: Oleg Košik, lõppvoor, 2006, G 7

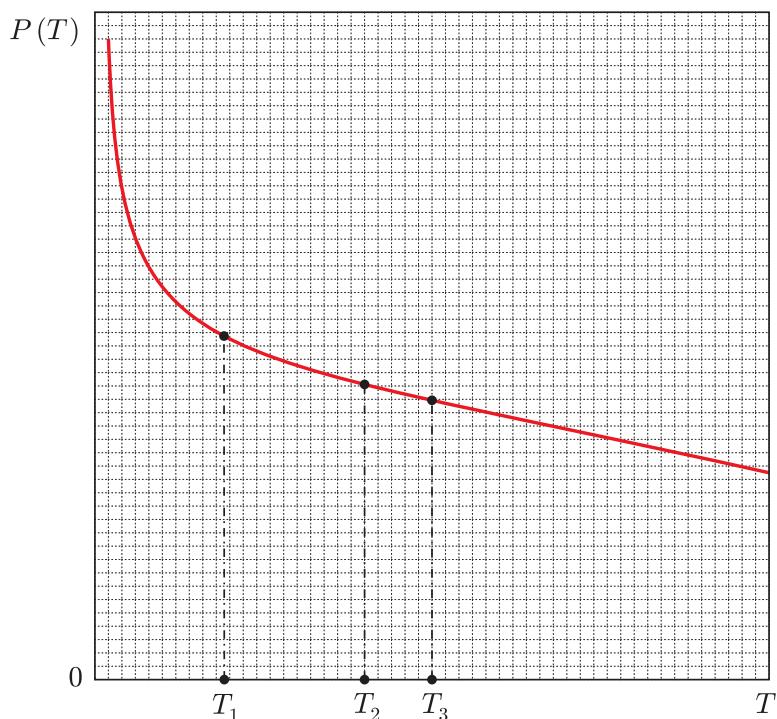
Külma töltu läks küttesüsteem rikki ja toatemperatuur hakkas langema. Ühel hetkel pandi tööle ajas muutumatu võimsusega töötav soojapuhur ning toatemperatuur hakkas taas tõusma. Graafikul on toodud toatemperatuuri sõltuvus ajast. Leidke toatemperatuur pika aja möödumisel. Protsessi välitel välitingimused ei muutunud. Seinte ja toas olevate esemete soojusmahtuvusega mitte arvestada. Soojuvahetuse kiirus väliskeskkonnaga ei ole võrdeline temperatuuride vahega.



**Ü253 Küttekeha ★★★**

Autor: Mihkel Heidelberg, lõppvoor, 2007, G 7

Teatud ruumi köetakse sellise küttekehaga, mille võimsus  $P$  sõltub ruumi temperatuurist, nagu on näidatud joonisel. Kui välistemperatuur on  $T_1$ , siis ruumi temperatuur stabiliseerub  $T_2$  juures (need temperatuurid on märgitud graafikul). Millise temperatuurini tõuseb toatemperatuur, kui välistemperatuur tõuseb  $T_3$ -ni (leida see temperatuur graafilise konstrueerimise abil)? Soojusvahetus keskkonnaga on võrdeline temperatuuride vahega.

**Ü254 Kauplus ★★★★**

Autor: Oleg Košik, lõppvoor, 2013, G 8

Suuremate hoonetel on sageli eeskojad. Miks? Vaadelgem kauplust, millele ehitati nii kitsas eeskoda, et läbi kaupluse seinte toimuvaid soojuskadusid see juurdeehitis ei mõjuta. Kaupluse ukse avamisel vahetub läbi avatud ukse teatud kogus õhku. Lugegem õhk kõikjal hästi seguneneks, st läbi lahtise ukse läheb õuest eeskotta õuetemperatuuril õhk; kõigi uste jaoks teeme analoogilised eeldused. Samuti eeldame, et ühe ukseavamisega vahetuv õhu hulk ei sõltu temperatuuride vahest ning et uste ja eeskaja seinte soojusuhtivusest tingitud soojuskaod on tühised võrreldes õhu vahetumisest tingitutega.

Vaatleme olukorda enne eeskaja ehitamist. Jahedal aprillipäeval oli kaupluse lähtoleku aegne välistemperatuur stabiilselt  $T_1 = 4^\circ\text{C}$ . Öösel, kui kauplus on kinni, oli välistemperatuur stabiilselt  $T_2 = 0^\circ\text{C}$ . Kaupluse elektriradiaatorite tööd juhib

termostaat, mis hoiab sisetemperatuuri püsivalt  $T_0 = 20^\circ\text{C}$  juures. Öösel oli radiatorite keskmise võimsuse  $P_2 = 5,0 \text{ kW}$  ning päeval  $P_1 = 4,6 \text{ kW}$ . Päeval toimib kaks efekti: (a) inimesed avavad aeg-ajalt ust; (b) inimeste kehasoojus ning kaupluse valgustid panustavad kütmisse teatava lisavõimsusega.

Pärast eesruumi ehitamist selgus, et sama välistemperatuuri ning külastajate arvu juures vähenes radiatorite päevane keskmise võimsus  $P_3 = 3,8 \text{ kW}$ -ni. Millist võimsust toodavad kaupluses olevad inimesed ja valgustid, kui eeldada, et soojust-vahetuse võimsus on võrdeline temperatuuride vahega?

#### Ü255 Küttesüsteem ★★★★

Autor: Taavi Pungas, piirkonnavor, 2014, G 9

Vaatleme kortermaja küttesüsteemi lihtsustatud mudelit. Kahekordse maja kummalgi korrusel on üks koter. Loeme koterid täiesti ühesugusteks. See tähendab, et katus ja põrandad on hästi soojustatud ning soojskadusid arvestame ainult läbi maja seinte.

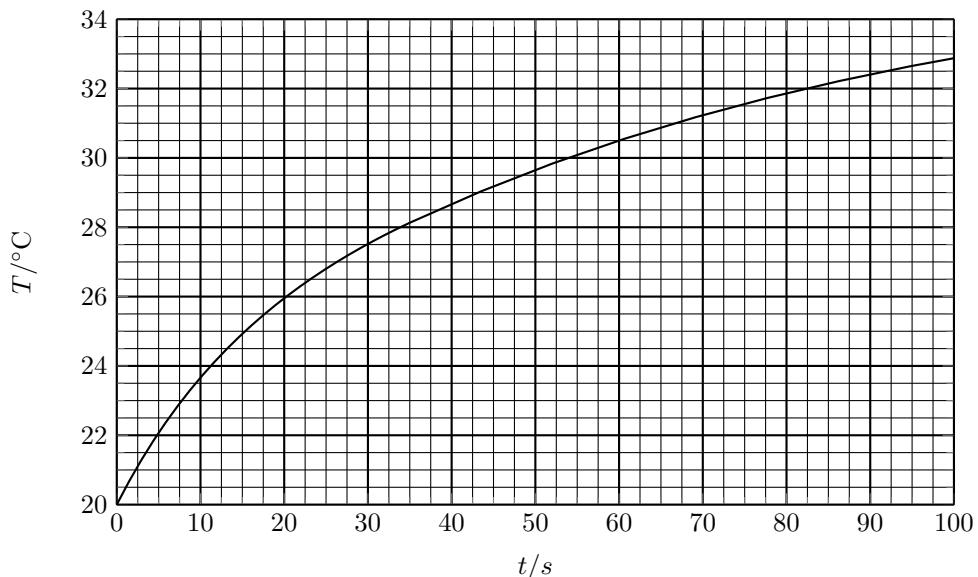
Keldris asub katel, mis kütab vee temperatuurini  $t_1 = 68^\circ\text{C}$ . Vesi liigub kõigepealt ülemisse koterisse ning läbib seal 10 ribiga radiaatori. Seejärel juhitakse vesi alumiisse koterisse, kus see läbib 11 ribiga radiaatori. Pärast seda liigub vesi tagasi katlassesse ning sinna jõudses on vee temperatuur  $t_2 = 60^\circ\text{C}$ . Eeldame, et vesi jahutub ainult radiaatorites. Küttesüsteem on ehitatud nii, et mölemas koteris oleks täpselt sama sisetemperatuur  $t$ . Leidke temperatuur  $t$ .

*Teadmiseks:* soojskadu läbi mingi seina on võrdeline selle pindalaga ja temperatuuride vahega seespool ja väljaspool seina. Eeldage, et mööda radiaatorit liikudes langeb vee temperatuur lineaarselt läbitud vahemaaga.

#### Ü256 Veesoojendi ★★★★

Autor: Andres Pöldaru, piirkonnavor, 2016, G 10

Veesoojendis võimsusega  $P = 2,0 \text{ kW}$  on algsest vesi massiga  $m_0$  temperatuuril  $T_0 = 20^\circ\text{C}$ . Soojendisse voolab ühtlasel kiirusel juurde vett temperatuuril  $T_0$  nii, et ajaühikus lisanduvaa vee mass  $\mu = \text{Const}$ . Soojendi saab täis ja vett hakkab üleval olevast avast välja voolama. Temperatuur jätkab töusmist, stabiliseerudes  $36^\circ\text{C}$  juures. Soojendis oleva vee temperatuurigraafik on toodud allpool. Leidke  $m_0$  ja  $\mu$ . Eeldage, et peale väljavoolava vee muid soojskadusid pole ja soojendis olev vesi on alati ühtlase temperatuuriga. Vee erisoojus  $c = 4,2 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}\cdot\text{K}}$ .

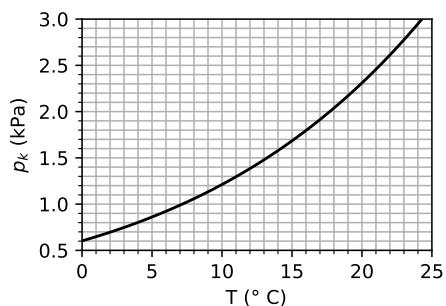


### Ü257 Soojustus ★★★★

Seina soojustus koosneb sisemisest (soojusjuhtivus  $k_1 = 0,07 \text{ W}/(\text{m} \cdot \text{K})$ ) ja välimisest kihist (soojusjuhtivus  $k_2 = 0,05 \text{ W}/(\text{m} \cdot \text{K})$ ). Nende kihtide vahel on kile, et takistada õhu liikumist läbi seina. Millist tingimust peab rahuldamma sisemise soojustuskihi pakus  $L_1$ , et vältida veeauru kondenseerumist seinas? Seina paksus  $L = L_1 + L_2 = 30 \text{ cm}$ ,  $L_2$  on välimise soojustuskihi paksus, toa temperatuur  $T_1 = 20^\circ\text{C}$ , suhteline õhuniiskus toas  $\eta_1 = 60\%$  ja välis-temperatuur  $T_2 = -20^\circ\text{C}$ . Küllastunud veeauru osarõhu sõltuvus temperatuurist on toodud joonisel.

Märkus. Eeldada, et temperatuur muutub soojustuskihis lineaarselt kaugusega ja muutuse kiirus on poördvordeline soojsujuhtivusega.

Autor: Ardi Loot, lõppvoor, 2018, G 5



### Ü258 Soojuskiirgus ★★★★

Autor: Valter Kiisk, lõppvoor, 2006, G 8

Veeldatud gaaside säilitamisel on tarvis palju tähelepanu pöörata anuma soojustisolatsioonile. Olulise osa soojusvahetusest moodustab soojuskiirgus. Oletagem, et anumal on kahekordsed seinad, mille kiirgusvoimsus pinnaühiku kohta on  $\varepsilon \sigma T^4$ , kus Stefan-Boltzmanni konstant  $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W}/(\text{m}^2 \text{ K})$  ja seinte kiirgamisvõime  $\varepsilon$  loeme temperatuurist sõltumatuks ja võrdseks 0,1-ga. Vedela lämmastikuga kokkupuutes oleva siseseina temperatuur on  $T_s = 77 \text{ K}$ , toaõhuga kokkupuutes

oleva välisseina temperatuur aga  $T_v = 293 \text{ K}$ .

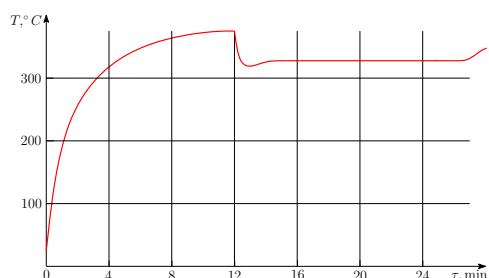
- a)** Leidke soojuskiirgusest tingitud soojusvoog läbi  $S = 1 \text{ cm}^2$  suuruse seinapinna.
- b)** Soojusvoo vähendamiseks asetatakse sise- ja välisseina vahel  $N$  õhukest ekraani, mille pind on kaetud samasuguse materjaliga nagu anuma seinad. Mitu korda väheneb selle tulemusena soojusvoog? Põhjendage vastust.

*Märkus:* kehtib Kirchhoffi seadus — keha neelamisvõime, mis näitab, kui suur osa aine pinnale langevast kiirgusest neeldub, on alati võrdne tema kirgamisvõimega  $\varepsilon$ .

### Ü259 Ahi ★★★★

Autor: Stanislav Zavjalov, lõppvoor, 2012, G 7

Väikese metallisulatusahju kütteelemendi võimsus on  $P_0 = 50 \text{ W}$ . Toa-temperatuuril olev ahi lülitakse sisse ja umbes 12 minuti pärast, kui selle temperatuur praktiliselt enam ei kasva, pannakse ahju mitu eelsoojendatud pliitükikest summaarse massiga  $m = 265 \text{ g}$ . Juuresoleval graafikul (suuremalt lisalehel) on toodud ahju temperatuuri sõltuvus ajast. Leidke selle põhjal plii sulamissoojus  $\lambda$ .



### Ü260 Gaasiküte ★★★★

Autor: Ardi Loot, piirkonnavoor, 2017, G 10

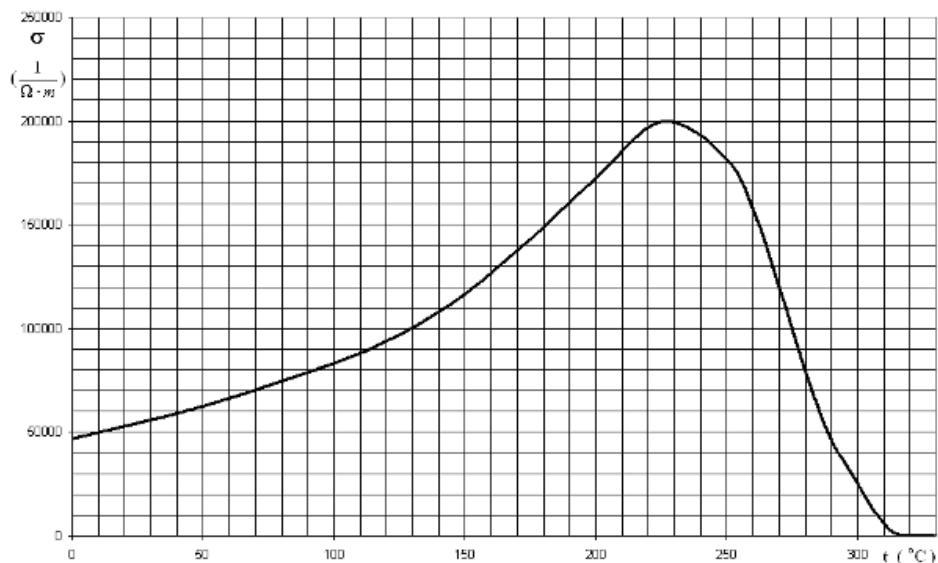
Poolsfäärikujulist telki raadiusega  $R = 4 \text{ m}$  köetakse gaasipuhuriga. Seinte soojusuhtivus on  $U = 3 \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K})$ . Ühe massiühiku gaasi pöletamisel eraldub  $D = 2,25 \text{ g}$  massiühikut vett. Gaasi kütteväärthus on  $k = 40 \text{ MJ/kg}$ . Välisõhu temperatuur on  $T_0 = -10 {}^\circ\text{C}$  ja õhuniiskus  $\eta_0 = 50 \%$ . Kui suur peab olema gaasikütte võimsus  $P$  ja telgi ventileerimise õhuruumala  $Q$  ajaühikus, et hoida telgis temperatuuri  $T_1 = 15 {}^\circ\text{C}$  ja õhuniiskust  $\eta_1 = 80 \%$ ? Kui suur osa küttevõimuses kulub ventileeritava õhu soojendamiseks ja mitu korda tunnis vahetub telgi õhk? Õhu tihedus  $\rho_\text{o} = 1,2 \text{ kg/m}^3$  ja soojusmahtuvus  $c_\text{o} = 1,0 \text{ kJ/(kg} \cdot \text{K)}$ . Temperatuuril  $T_0 = -10 {}^\circ\text{C}$  mahub õhu ruumalaühikusse maksimaalselt  $G_0 = 2,3 \text{ g/m}^3$  veeauru ning temperatuuril  $T_1 = 15 {}^\circ\text{C}$  vastavalt  $G_1 = 12,8 \text{ g/m}^3$ . Eeldada, et soojakaod läbi telgi põranda puuduvad.

### Ü261 Pooljuht ★★★★★

Autor: tundmatu, lahtine, 2008, G 10

Graafikul on antud pulgakujulise keraamilisest pooljuhist (nn. PTC takisti) soojendi materjali erijuhtivuse  $\sigma$  ( $1/(\Omega \text{ m})$ ) sõltuvus temperatuurist  $t({}^\circ\text{C})$ . Erijuhtivuseks nimetatakse eritakistuse pöördväärtust. Leida, millise temperatuurini kuumeneb avatud ruumis paiknev selles materjalist soojendi, kui tema otstele rakendatakse pingi  $U_1 = 60 \text{ V}$ . Milliseks kujuneb soojendi temperatuur, kui otstele rakendatud pingi on  $U_2 = 36 \text{ V}$ ? On teada, et kui soojendi otstele rakendatakse pingi

$U_0 = 30 \text{ V}$ , siis soojendi temperatuuriks kujuneb  $t_0 = 70^\circ\text{C}$ . Välisõhu temperatuur on  $t_v = 20^\circ\text{C}$ .



### Ü262 Must kuup ★★★★

Autor: Mihkel Pajusalu, lahtine, 2014, G 9

Olgu väga hea soojusuhtivusega materjalist absoluutsest must kuup paralleelses valgusvihus, mille intensiivsus (võimsus ristlõikepindala kohta) on  $I$ . Milline on maksimaalne ja minimaalne stabiilne temperatuur  $T_{\max}$  ja  $T_{\min}$ , mille kuup saabutab sõltuvalt selle asendist kiirguse leviku suuna suhtes?

## Elektrostaatika

### Ü263 Kondensaator ★

Autor: Madis Ollikainen, lahtine, 2012, G 3

Füüsikatudeng leidis vanade demonstratsioonideks mõeldud eksperimentaalseadmete hulgast ühe plaatkondensaatori. Noore füüsikuna tundis ta kohe hirmsat soovi sellega veidi mängida. Ta mõötis kondensaatori plaatide vahekauguseks  $d$  ning seejärel laadis kondensaatori pingeni  $U$ . Nüüd asetas ta kondensaatori plaatide vahele ühe kuulikese, mis kukkus alumise plaadi peale ja siis hakkas uuesti ülespoole töusma. Kuulikesel kulus alumiselt plaadilt ülemiseni jöudmiseks aeg  $t$ . Leidke kuulikese massi ja alumiselt plaadilt saadud laengu suhe.

### Ü264 Juhe ★★

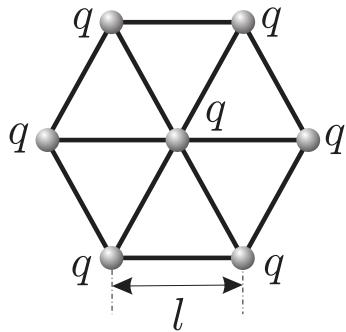
Autor: tundmatu, lahtine, 2005, G 5

Sirgjooneline juhe asub sügaval maa all ühtlases pinnases. Lekkevool ühikulise pikkusega juhtmest on  $i$ . Leidke lekkevoolu tihedus ( $\text{A/m}^2$ ) kaugusel  $r$  juhtmest. Juhtme pikkus on palju suurem kui  $r$ . Lekkevool on konstantne piki juhet. Märkus: lekkevooluks nimetatakse voolu, mis levib isolatorites.

### Ü265 Kuulikesed ★★

Autor: tundmatu, lahtine, 2005, G 4

Seitse ühesugust laetud kuulikest laenguga  $q$  on seotud omavahel samast materjalist võrdse algpikkusega elastsete niitidega ja saavad liikuda vaid ühes fikseeritud tasapinnas (vt joonist). Vahemaa kahe suvalise naaberkuulikese vahel tasakaalu olekus on  $l$ . Leidke tömbepinged niitides.



### Ü266 Tolmukübe ★★

Autor: Aigar Vaigu, piirkonnavor, 2006, G 8

Tolmukübe massiga  $m = 1 \cdot 10^{-9} \text{ g}$  on kondensaatori horisontaalsete plaatide vahel tasakaalus. Laengu pindtihedus kondensaatori plaatidel  $\sigma = 2,6 \cdot 10^{-5} \text{ C/m}^2$ . Kui suur on tolmukübeme elektrilaeng? Millise kiirendusega hakkaks tolmukübe langema, kui kondensaatori polaarsus muuta vastupidiseks? Eeldada, et elektriväli kondensaatori plaatide vahel on homogeenne. Õhutakistust mitte arvestada. Elektriline konstant  $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ F/m}$ , õhu dielektriline läbitavus  $\epsilon \approx 1$ .

**Ü267 Kuulikesed ★★**

Autor: tundmatu, lahtine, 2007, G 7

Kaks ühesugust kuulikest, millest kumbki kannab laengut  $q$ , asuvad vertikaalsihis kaugusel  $H$  üksteisest. Alumine kuulike on jäigalt kinnitatud, ülemine aga hakkab liikuma vertikaalselt alla suunatud algkiirusega  $v$ . Kui suur on minimaalne kaugus  $h$  alumise kuulikeseni, millele suudab läheneda ülemine kuulike? Ülemise kuulikesi mass on  $m$ . Raskuskiirendus on  $g$ .

**Ü268 Laetud röngas ★★**

Autor: tundmatu, lahtine, 2009, G 4

Peenikesest traadist röngas raadiusega  $R$  on ühtlaselt laetud negatiivse laenguga  $Q$ . Elektron massiga  $m$  ja laenguga  $e$  läheneb röngale mööda sirget, mis on risti rönga tasandiga ning läbib rönga keskpunkti. Millist tingimust peab rahuldama elektroni kiirus punktis, mis asub kaugusel  $d = R\sqrt{3}$  rönga keskpunktist, et elektron saaks röngast läbi lennata?

**Ü269 Ioonmootor ★★**

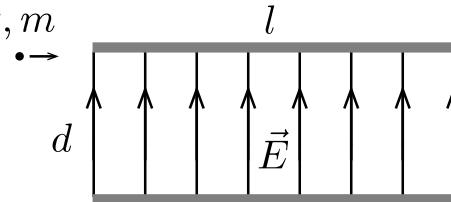
Autor: Mihkel Pajusalu, lahtine, 2010, G 6

Kosmosesond on varustatud lihtsa ionomootoriga, mis koosneb ksenooni ionide  $\text{Xe}^+$  allikast ja kahest elektroodist, mille vahele rakendatakse pinge  $U$  ja mille vahel maad läbides ioone kiirendatakse. Kui suurt kogust (mass) ksenooni on vaja, et selle mootoriga sondi kiirust tõsta  $\Delta v = 1 \text{ km/s}$  võrra? Ksenooni aatommass  $\mu = 131,29 \text{ g/mol}$ , kosmosesondi mass  $M = 1000 \text{ kg}$ , kiirendav pinge  $U = 100 \text{ kV}$ , elementaarlaeng  $e = 1,60 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ , Avogadro arv  $N_A = 6,02 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$ .

**Ü270 Elektron ★★**

Autor: Mihkel Kree, lahtine, 2017, G 3

Elektron liigub vaakumis ning siseneb paralleelse plaatide vahel paiknevasse ruumi piirkonda selle ülemisest servast nii, et elektroni kiirusvektor on paralleelne plaatidega (vt joonist). Kui suur on elektroni minimaalne võimalik kiirus  $v_{\min}$  plaatide vahelisest ruumi piirkonnast väljumisel? Plaatide pikkus on  $l$  ja nende vahekaugus  $d$ . Plaatide vahel on ühtlane elektriväli  $\vec{E}$  ning äärefektidega pole vaja arvestada. Elektroni laeng on  $q$  ning mass  $m$ . Gravitatsioonijöuga pole vaja arvestada.

**Ü271 Laetud numbrilaud ★★★**

Autor: tundmatu, lahtine, 2004, G 7

Kella numbrilauale on fikseeritud punktlaengud suurusega  $q, 2q, 3q, \dots, 12q$  ( $q > 0$ ), mis paiknevad vastavatel tunnijaotistel. Millist aega nätab tunniosuti hetkel, kui ta on paralleelne ja samasuunaline nende laengute poolt tekitatud resultantväljatugevuse vektoriga numbrilaua tsentris?

**Ü272 Lendav elektronkahur ★★**

Autor: Siim Ainsaar, lõppvoor, 2006, G 6

Jaan Tatikal tuli järjekordne lennumasinaidee, mida ta kohe realiseerima töötas. Nimelt ehitas ta palkidest platvormi, mille alla kinnitas telerist välja lõhutud elektronkahuri koos vajaliku elektroonika ja akuga. Elektrone kiirendav pinge on  $U$ , voolutugevus elektronkiires  $I$ . Leidke, kui suurt tõstejõudu  $F$  suudab see seade tekitada. Missugust tingimust peaksid  $U$  ja  $I$  rahuldama, et taoline lennumasin suudaks leiduri õhku tõsta? Kas see on ka realistiklik (televiisorites  $U \approx 30\text{ kV}$ ,  $I \approx 100\text{ }\mu\text{A}$ )? Relativistlikke efekte pole vaja arvestada; elektroni algkiirus katoodi juures on 0. Eeldage, et kiir üldse moodustub (õhu olemasoluga ärge arvestage). Tatika mass koos platvormi ja seadmega on  $m_T \approx 150\text{ kg}$ , raskuskiirendus  $g \approx 9,8\text{ m/s}^2$ . Elektroni laengu ja massi suhe  $k = e/m_e \approx 1,76 \cdot 10^{11}\text{ C/kg}$ .

**Ü273 Elektronkiir ★★**

Autor: tundmatu, lahtine, 2008, G 7

Kitsas elektronkiir läbib vaakumis tasaparalleelse plaatide vahelise pilu ja langeb seejärel fluoresceeruvale ekraanile, mis asub plaatide ekraanipoolsemast servast kaugusel  $l = 15\text{ cm}$ . Kui plaatidele antakse pinge  $U = 50\text{ V}$ , nihkub helendav punkt ekraanil endisest asukohast kaugusele  $s = 21\text{ mm}$ . Plaatidevaheline kaugus  $d = 18\text{ mm}$ , plaatide mõõtmed elektronide liikumise suunas on  $b = 6\text{ cm}$ . Milline on elektronide algkiirus plaatide vahele sattumisel? Elektroni laengu ja massi suhe  $e/m \approx 1,76 \cdot 10^{11}\text{ C/kg}$ .

**Ü274 Kuup ★★**

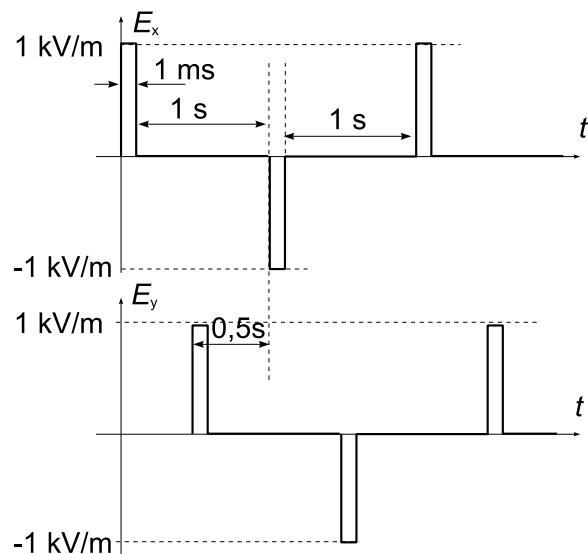
Autor: Jaan Kalda, piirkonnnavoor, 2008, G 7

Õhukesest elektrit mittejuhtivast materjalist on valmistatud kuup küljepikkusega  $a$ . Kuubil on elektrilaeng ühtlase pindtihedusega  $\sigma$  (pindtihedus on laeng pinna-ühiku kohta). Ühe tahu keskkoha lõigatakse väike ruudukujuline auk mõõtmetega  $b \times b$  ( $b \ll a$ ). Leida elektrivälja tugevus kuubi keskpunktis.

### Ü275 Liikuv laeng ★★

Autor: Jaan Kalda, piirkonnavor, 2009, G 6

Laetud osake laengu ja massi suhtega  $q/m = 1 \text{ C/kg}$  seisab algsest paigal. Seejärel hakkab ta liikuma  $x$ - ja  $y$ -telje sihis toimivate elektrivälja impulsside mõjul. Elektrivälja vastavate komponentide  $E_x$  ja  $E_y$  sõltuvus ajast on toodud graafikul (graafiku mastaap ei ole korrektne, juhenduda tuleb graafikul näidatud numbritest impulsi kestvuse  $\tau = 1 \text{ ms}$  ja amplituudi  $E_0 = 1 \text{ kV/m}$  ning perioodi  $T = 2 \text{ s}$  jaoks). Visandage osakese trajektoor ja leidke keskmise kiiruse (visandi tegemisel ja arvutustes võib lugeda ajavahemiku  $\tau = 1 \text{ ms}$  jooksul toimuvalt muutused hetkelisteks).



### Ü276 Sfäärid ★★

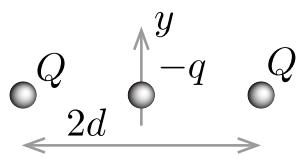
Autor: Kristian Kuppart, lahtine, 2011, G 8

Kaks juhtivast materjalist sfääri raadiustega  $R_1$  ja  $R_2$  on ühendatud pika juhtmega. Ühele sfääridest antakse mingi laeng. Leidke suhe  $\frac{E_1}{E_2}$ , kus  $E_1$  ja  $E_2$  on elektrivälja tugevused vastavate sfääride pinnal. Eeldage, et juhtme mahtuvus on tühine ning juhtme pikkus on oluliselt suurem sfääride raadiustest.

### Ü277 Laengud ★★

Autor: Mihkel Kree, piirkonnavor, 2017, G 9

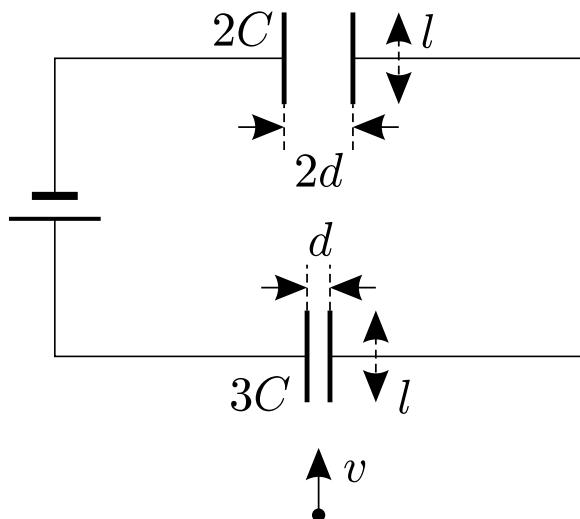
Kaks kera, kumbki laenguga  $Q$ , on liikumatult fikseeritud nii, et nende keskpunktid kaugus on  $2d$ . Täpselt nende kerade keskele paigutatakse kolmas kera laenguga  $-q$  ning massiga  $m$ , mis saab liikuda ainult mööda  $y$ -telje (vt joonis). Leidke selle kolmanda kera väikeste  $y$ -suunaliste võnkumiste periood  $T$ .



### Ü278 Kondensaatorid ★★★

Autor: Oleg Košik, lõppvoor, 2005, G 8

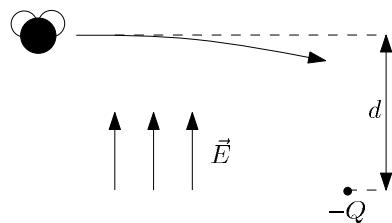
Kondensaatorid mahtuvustega  $2C$  ja  $3C$  on ühendatud pingeallikaga, mille pinge on  $U$ . Osake massiga  $m$  ning laenguga  $q$  lendab algkiirusega  $v$ , mis on suunatud paralleelselt kondensaatorite plaatidega (vt joonist). Osake lendab mõlema kondensaatori plaatide vahelt läbi. Mõlema kondensaatori plaatide pikkus on  $l$  ning plaatide vahelised kaugused on vastavalt  $2d$  ja  $d$ . Leidke nurk, mille võrra kalldub osake vörreldes esialgse trajektooriga, kui ta väljub joonisel ülemisest kondensaatorist. Eeldada, et see nurk on väike.



### Ü279 Kärbes ★★★

Autor: Stanislav Zavjalov, lahtine, 2010, G 7

Kärbes otsustas lennates püsida ainult elektrivälja ekvipotentsiaalpindade peal. Ta lendab sisse ruumi, mis on täidetud homogeensel elektriväljaga  $\vec{E}$ , välja jõujoontega risti. Elektriväljas hoitakse paigal ka laengut  $-Q$  nii, et kärbse trajektoori esialgse puutuja ja laengu vahemaa on  $d$  (vt. joonist;  $-Q < 0$ ). Kui lähedale kärbes laengule jõub? Eeldage, et  $Q \leq \pi\epsilon_0 Ed^2$ .



**Ü280 Pendel ★★★★**

Autor: Jonatan Kalmus, lõppvoor, 2018, G 6

Elektriliselt isoleeritud metallkuul massiga  $M$  ja laenguga  $Q > 0$  ripub vertikaalse vedru otsas jäikusega  $k$  tasakaaluasendis gravitatsiooniväljas  $g$ . Nüüd tekitatakse vertikaalne elektriväli tugevusega  $E$ , mis on esialgu suunatud alla ning edaspidi alati kuuli liikumise suunas. Eeldada, et elektriväli muutub hetkeliselt. Leida kuuli kaugus algsest asukohast ajahetkel  $t = 7\pi\sqrt{\frac{M}{k}}$ .

**Ü281 Laetud kLOTSID ★★★★**

Autor: tundmatu, lahtine, 2006, G 9

Horisontaalsel siledal dielektrilisel pinnal asuvad kaks laetud kLOTSI massidega  $m$  ja samanimeliste laengutega  $q$ . Alghetkel on vahemaa nende vahel  $l$ . Mis tingimusel hakkavad kLOTSID liikuma ja kui suur on vahemaa  $L$  nende vahel, kui liikumine lõppeb? Höördetegur kLOTSIDE ja pinna vahel on  $\mu$ . KLOTSIDE mõõtmeid ja liikuvate laengute elektromagnetkiirgust mitte arvestada. Pinna dielektriline läbitavus on 1.

**Ü282 Kosmoseprügi ★★★★**

Autor: Siim Ainsaar, lõppvoor, 2009, G 9

Kosmoses hõljuvad vabalt kaks ühesugust elektriliselt laetud kuuli, mis on ühen-datud ideaalse nööriga. Kummagi kera laeng on  $q$  ja mass  $M$ , nööri pikkus on  $l$ . Ootamatult lendab nööriga risti selle keskkoha pihta kosmoseprügi tükk massiga  $m$  ja kiirusega  $v$  ning jääb nööri külge kinni. Millisele vähimale kaugusele  $d$  lä-henevad teineteisele kuulid? Eeldada, et kuulikeste diameetrid on väiksemad kui otsitav kaugus  $d$ .

**Ü283 Koonus ★★★★**

Autor: Stanislav Zavjalov, piirkonnavoor, 2012, G 10

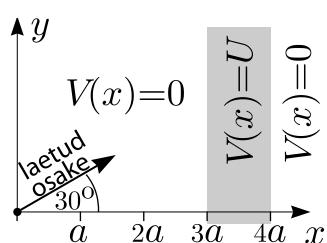
Ühtlaselt laetud koonus kõrgusega  $H$  tekitab oma tipus  $S$  potentsiaali  $\varphi_0$ . Sellest lõigatakse ära väiksem koonus kõrgusega  $h$ , mis on suure koonusega sarnane, ka-he koonuse tipud ühtivad. Seejärel eemaldatakse väiksem koonus lõpmatusesse. Milline on uus potentsiaali väärthus punktis  $S$ ?

**Ü284 Laengud ★★★★**

Autor: Jaan Kalda, lõppvoor, 2012, G 9

Positiivselt laetud osake kiirendatakse koordinaatide alguspunktis pinge  $4U$  (kus  $U > 0$ ) abil teatud kiiruseni, mis lebab  $x - y$  tasandis 30-kraadise nurga all  $x$ -telje suhtes, vt joonist. Elektriline potentsiaal  $V(x, y) \equiv V(x)$  sõltub ainult  $x$ -koordinaadist: kui  $3a < x < 4a$ , siis  $V(x) = U$  ning vastasel korral  $V(x) = 0$ ; peale elektrostaatilise jõu osakesele min-geid muid jõude ei mõju ning  $a > 0$ .

a) Visandage laengu trajektoor  $x - y$ -tasandis (geo-meetrilisi mõõtmeid ja nurki pole vaja märkida).



**b)** Nüüd on laetud osakeste allikaks koordinaatide alguspunktis asuv koaksiaalne vaakumdiood, mistõttu pingi  $4U$  abil kiirendatud osakesi liigub isotroopselt (võrdsel hulgal) kõigis  $x - y$ -tasandi suundades;  $z$ -suunaline kiiruskomponent on kõigil osakestel 0. Milline osa kõigist kiiratud osakestest jõub ruumipiirkonda  $x > 4a$ ?

### Ü285 Kondensaator ★★★★

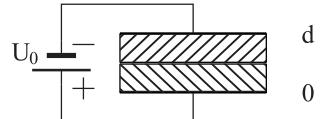
Autor: Stanislav Zavjalov, lõppvoor, 2013, G 10

Ruudukujuliste plaatidega kondensaator plaadi pindalaga  $S$  ning plaatidevahelise kaugusega  $d \ll \sqrt{S}$  on laetud pingeni  $U_0$  ning seejärel patareist lahti ühendatud. Kondensaatori sisse viakse ruudukujuline juhtiv plaat, samuti pindalaga  $S$  ning paksusega  $d/2$ , kuni plaat on täielikult kondensaatori sees. Protsessi jooksul plaat ei puutu kokku kondensaatori plaatidega ning on nendega paralleelne. Kui palju tööd tehti plaadi sisseviimisel? Selgitage, kas plaat tömbus ise sisse või pidid välisjoud selle sisse lükkama. Servaeakte pole vaja arvesse võtta. Vaakumi dielektriline läbitavus on  $\epsilon_0$ .

### Ü286 Kondensaator ★★★★

Autor: Jaan Kalda, lahtine, 2017, G 7

Plaatkondensaator mahtuvusega  $C$  omab plaatidevahelist kaugust  $d$ . Plaatide vaheline asetatakse kaks dielektrilist plati paksusega  $d/2$ . Ühe plaatide dielektriline läbitavus on  $\epsilon$ , teisel  $2\epsilon$ . Milline on nüüd kondensaatori mahtuvus? Milline laeng on plaatide eralduspinnal, kui kondensaatorile rakendatakse pingi  $U_0$ ?



### Ü287 Laengutega pulk ★★★★★

Autor: Jaan Kalda, piirkonnnavoor, 2015, G 10

**a)** Dielektrikust pulk massiga  $m$  ja pikkusega  $L$  kannab kummaski otsas positiivset laengut  $q$  (keskosa on laenguta, seega kogulaeng on  $2q$ ). Piirkonnas  $x < 0$  on  $x$ -telje sihiline elektriväli tugevusega  $E_0$  ja piirkonnas  $x > 0$  — sama tugev  $x$ -teljega antiparalleelne elektriväli. Pulga keskpunkt on koordinaatide alguspunktis ja pulk on paralleelne  $x$ -teljega. Pulgale antakse  $x$ -telje sihiline algiirus  $v$ . Leidke võnkumiste periood. Pulk on paigaldatud nii, et see ei saa pööreda, vaid üksnes liikuda  $x$ -telje sihis.

**b)** Leidke väikeste võnkumiste periood siis, kui konfiguratsioon on muus osas sama, kuid punktlaengute asemel on kogulaeng  $Q$  jaotunud ühtlaselt üle terve pulga.

### Ü288 Kuulid ★★★★★

Autor: Jaan Kalda, lahtine, 2016, G 10

Kaks metallkuulikest raadiusega  $R$  on ühendatud peenikese metalltraadi abil ja asuvad homogeenses elektriväljas tugevusega  $E$ . Metalltraadi pikkus on  $l$ , kusjuures  $l \gg R$ . Süsteem on tasakaalus. Leidke mehaaniline pingi  $T$  traadis.

**Ü289 Kaks kuuli ★★★★**

Autor: Jaan Kalda, lõppvoor, 2018, G 10

Kaks ühesugust metallkuuli raadiusega  $R$  ja massiga  $m$  on ühendatud peenikese terastraadiga pikkusega  $L \gg R$ . Piirkonnas  $x \geq 0$  on elektriväli tugevusega  $E$ , mis on suunatud piki  $x$ -telge; piirkonnas  $x < 0$  elektriväli puudub. Alhetkel on kuulid paigal ja üksteisest kaugusel  $L$ , nii et traat on pingul ning paralleelne  $x$ -teljega; ühe kuuli keskpunkt asub punktis  $x = R$  ning teine kuul — piirkonnas  $x < 0$ . Visandage kvalitatiivselt kuulide kiiruse graafik sõltuvuses ajast (kvantitatiivset ajaskaalat ei ole vaja) ning leidke nende kiirus punkti  $x = 2L$  läbimisel. Terastraadi mahtuvus lugeda tühiselt väikeseks.

**Ü290 Kolm kuuli ★★★★**

Autor: Jaan Kalda, lõppvoor, 2016, G 10

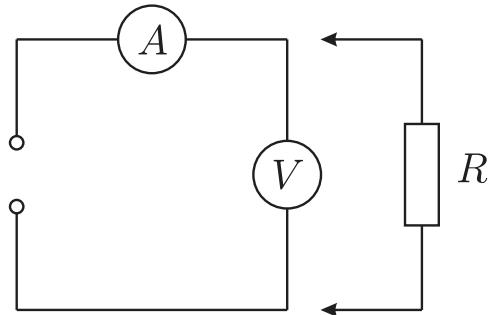
Kolm väikest kuuli massiga  $m$  kannavad ühesuguseid elektrilaenguid  $q$  ning on ühendatud isoleerivast materjalist niitide abil võrdhaarseks kolmnurgaks  $ABC$ , kus  $\angle BAC = 120^\circ$  ning selle nurga tipus asuva kuuli  $A$  vastaskülje niidi pikkus  $|BC| = L$ . Niit  $BC$  lõigatakse katki. Leidke **a**) kuuli  $A$  maksimaalne kiirus edasise liikumise käigus ning **b)** kuulikeste kiirendused vahetult pärast niidi läbi lõikamist. Gravitatsioonilise vastasmöjuga mitte arvestada.

## Elektriahelad

### Ü291 Mõõteriistad ★

Autor: Koit Timpmann, lõppvoor, 2006, G 1

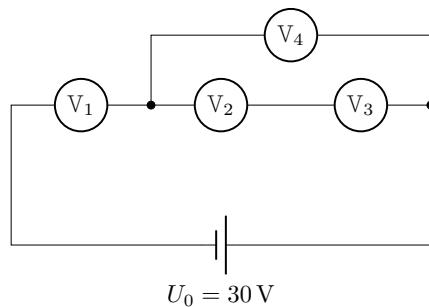
Vooluringis on ampermeeter ja voltmeeter ühendatud jadamisi. Klemmidole on rakendatud pinge  $U = 9\text{ V}$ . Kui voltmeetriga ühendada rööbiti takisti  $R$ , väheneb voltmeetri näit kaks korda, ampermeetri näit aga suureneb kaks korda. Kui suurt pinget näitas voltmeeter enne ja pärast takisti ühendamist?



### Ü292 Voltmeetrid ★

Autor: Eero Vaher, piirkonnavoor, 2016, G 1

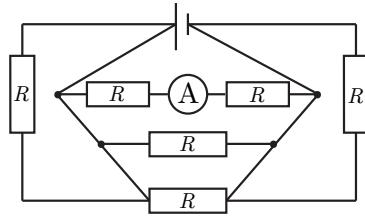
Elektriskeemis on pingearvutus pingega  $U_0 = 30\text{ V}$  ning neli ühesugust voltmeetrit. Kui suur on iga voltmetri näit?



### Ü293 Voltmeeter ★

Autor: Erkki Tempel, piirkonnavoor, 2017, G 1

Joonisel näidatud elektriskeemis on ideaalne ampermeeter, mis näitab voolutugevust  $I$ . Ampermeeter asendatakse ideaalse voltmeetriga. Kui suur on voltmetri näit? Kõikide takistite takistus on  $R$ .

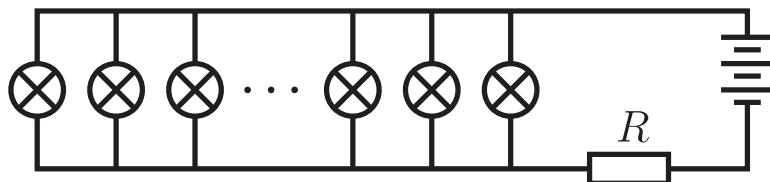


### Ü294 Elektriküünlad ★

Autor: Valter Kiisk, piirkonnnavoor, 2009, G 4

Jõulukaunistuse valmistamiseks otsis Juku välja 10 taskulambipirni (nimipinge 3 V, võimsus 0,6 W) ja alaldi klemmipingega 5 V. Seejärel koostas ta skeemi, mis on kujutatud joonisel.

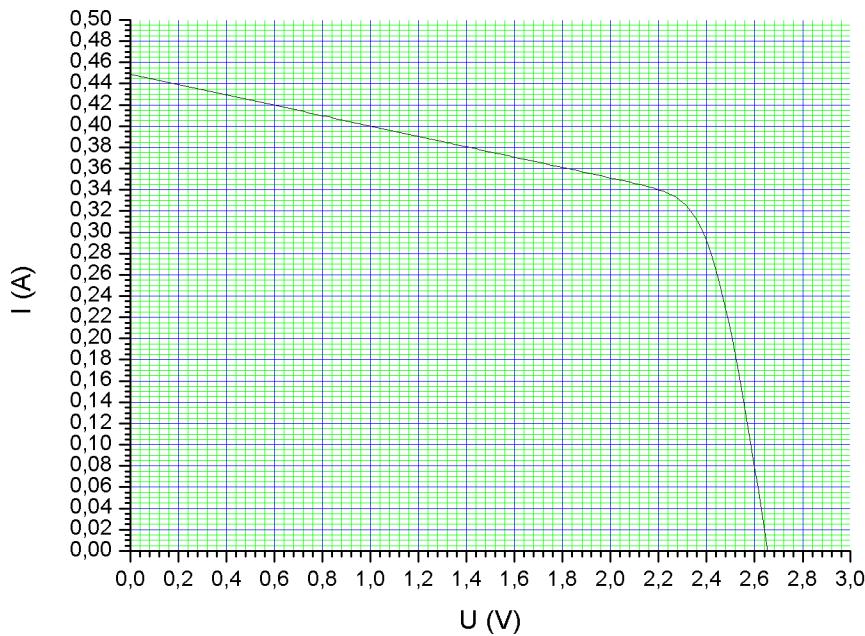
- a)** Kui suur peab olema takisti  $R$  takistus, et pinge lampidel ei ületaks nimipinget?
- b)** Skeemi sisselülitamisel avastas Juku, et lambid põlevad oodatust tuhmimalt. Selgus, et alaldi klemmipinge oli koormusega langenud 4 V-ni ning pinge lampidel 2,3 V-ni. Kui suur tuleks valida takisti  $R$  väärus, et lambid põleksid normaalsete heledusega?



**Ü295 Päikesepaneel ★**

Autor: Mihkel Pajusalu, lõppvoor, 2010, G 3

Joonisel on kujutatud päikesepaneeli läbiva voolu sõltuvus klemmpingest. Määrase paneeli klemmidega ühendatud koormise takistus, mille korral on koormisel eralduv võimsus maksimaalne.

**Ü296 Lambid ★**

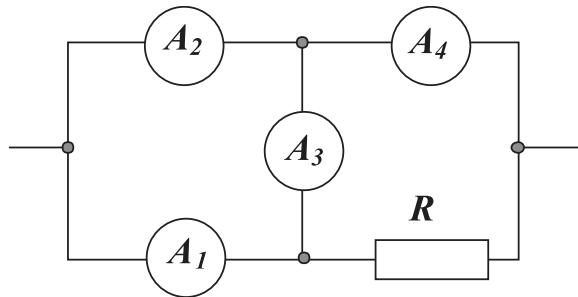
Autor: Mihkel Kree, piirkonnnavoor, 2015, G 2

Pingeallikaga on rööbiti ühendatud kaks lampi, kusjuures üks lampidest põleb  $k$  korda suurema võimsusega kui teine. Seejärel ühendatakse need lambid sama pingallikaga jadamisi. Mitu korda muutub lampidel eralduv koguvõimsus? Kas see muutub suuremaks või väiksemaks?

**Ü297 Ampermeetrid ★★**

Autor: tundmatu, lahtine, 2008, G 4

Vooluahelasse on ühendatud neli ühesugust ampermeetrit, igaüks sisetakistusega  $r$ , ja takisti  $R$ . Esimese kahe ampermeetri näidud on  $I_1 = 3 \text{ A}$  ja  $I_2 = 5 \text{ A}$ . Leida takistuste suhte  $R/r$  arvuline väärus.

**Ü298 Patarei ★★**

Autor: Taavi Pungas, piirkonnavor, 2011, G 6

Patarei ühendatakse jadamisi takistiga takistusega  $R$  ja ampermeetriga, mis näitab voolutugevuseks  $I_1$ . Kui lisada jadamisi veel üks takisti takistusega  $R$ , näitab ampermeeter voolutugevuseks  $I_2$ . Leidke, mis vahemikku jääks suhe  $I_2/I_1$ , kui vooluallika sisetakistus  $r$  oleks

- a)** väiksem kui  $R$ ,
- b)** suurem kui  $R$ .

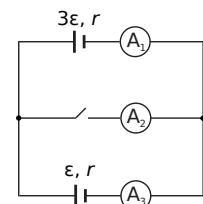
**Ü299 Elektriskeem ★★**

Autor: Oleg Košik, piirkonnavor, 2013, G 5

Joonisel toodud skeemil on ampermeetrid ideaalsed; patareide elektromotoorjööd ja sisetakistused on märgitud nende juurde. Leidke ampermeetrite näidud, kui

- a)** lülitili on suletud;
- b)** lülitili on lahti.

Märkus. praktikas tohib sellist skeemi kasutada vaid siis, kui ollakse veendunud, et tekkivad voolud jäävad ampermeetrite mõõtepiirkonda!

**Ü300 Tetraeder ★★**

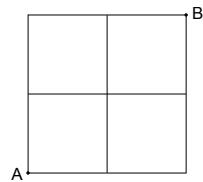
Autor: Eero Vaher, lahtine, 2014, G 4

Tetraeedri (neljast võrdkülgsest kolmnurgast koosneva püramiidi) servadeks on ühesugused takistid takistusega  $R$ . Leidke tetraeedri kahe tipu vaheline takistus.

**Ü301 Ruudustik ★★**

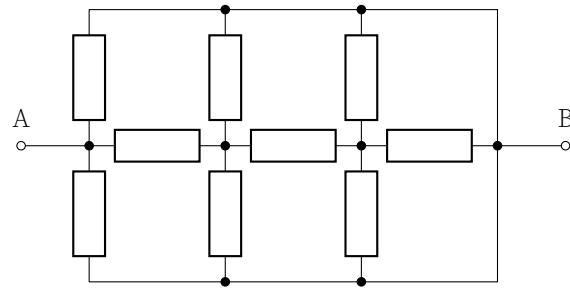
Autor: Taavi Pungas, lõppvoor, 2014, G 1

Traadist on valmistatud  $2 \times 2$  ruudustik (vt joonist), iga väikese ruudu külje takistus on  $r = 1 \Omega$ . Leidke punktide A ja B vaheline takistus.

**Ü302 Takistid ★★**

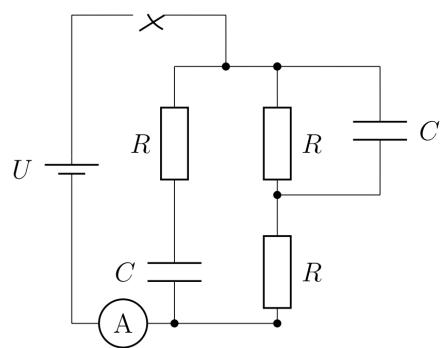
Autor: Hans Daniel Kaimre, lahtine, 2015, G 2

Leidke ühesugustest takistitest koosneva ahela kogutakistus  $R_{AB}$ . Iga takisti takistus on  $R$ .

**Ü303 Elektriskeem ★★**

Autor: Kristian Kuppart, lahtine, 2016, G 3

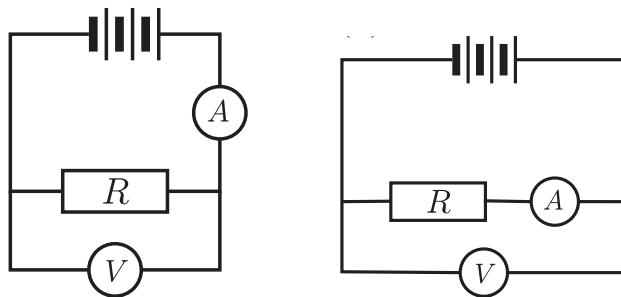
Leidke juuresoleval skeemil voolutugevus  $I$  läbi ampermeetri kahel juhul: vahetult pärast lülitit sulgemist ja pika aja möödumisel. Eeldada, et kondensaatorid on enne lülititi sulgemist laadimata. Patarei lugeda ideaalseks.



**Ü304 Vooluring** ★★

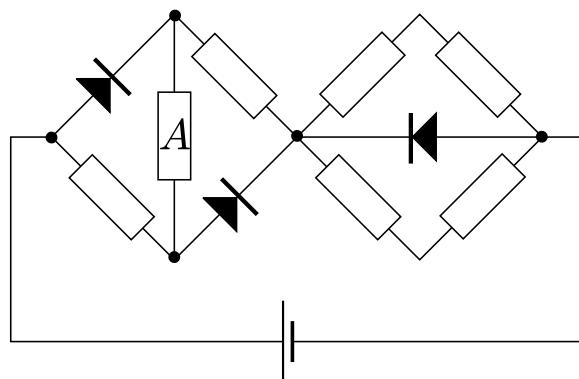
Autor: Valter Kiisk, piirkonnnavoor, 2005, G 4

Takisti takistuse määramiseks koostati kaks erinevat vooluringi kasutades voltmeetrit, ampermeetrit ja vooluallikat (vt joonist). Leidke avaldis takistuse  $R$  arvutamiseks, kui vasakpoolse skeemi järgi mõõtes saadi voltmeetri näiduks  $U_1$  ja ampermeetri näiduks  $I_1$  ning parempoolse skeemi järgi mõõtes vastavalt  $U_2$  ja  $I_2$ . Vooluallika elektromotoorjõud on muutumatu ning sisetakistus tühine. Mõõteriistade sisetakistused ei ole teada.

**Ü305 Takistid** ★★

Autor: Aigar Vaigu, lõppvoor, 2005, G 4

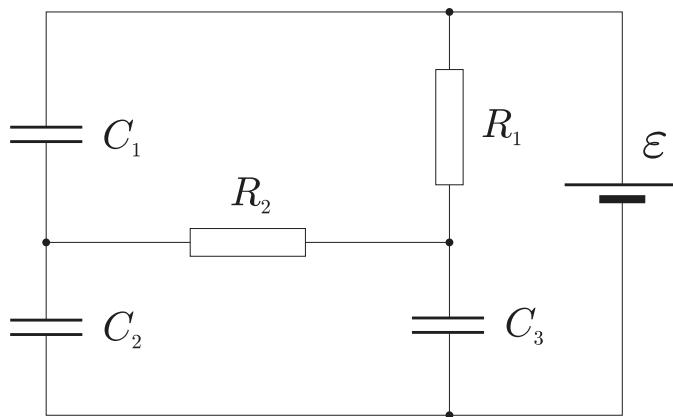
Mitu korda muutub joonisel kujutatud ahelas takistil  $A$  eralduv võimsus, kui vahele alalispingeallika polaarsust? Kõik takistid on võrdse takistusega.



### Ü306 Elektriskeem ★★

Autor: tundmatu, lahtine, 2006, G 2

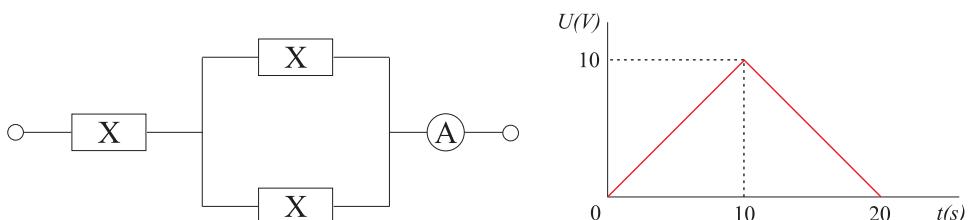
Leida laengud  $q_1$ ,  $q_2$  ja  $q_3$  kõikidel skeemil toodud kondensaatoritel.



### Ü307 Skeem ★★

Autor: tundmatu, lahtine, 2009, G 3

Elemendi  $X$  takistus muutub sõltuvalt selle pingest. Kui  $U_X \leq 1$  V, siis selle takistus on  $R_1 = 1 \Omega$ , kui aga  $U_X > 1$  V, siis on takistus  $R_2 = 2 \Omega$ . Kolm elementi  $X$  ühendatakse ideaalse ampermeetriga, nagu näidatud joonisel. Väljundklemmidel rakendatakse pinge, mille ajaline sõltuvus on toodud graafikul. Joonestage ampermeetri näidu ajalise sõltuvuse graafik.



### Ü308 Must kast ★★

Autor: Kristian Kuppart, lõppvoor, 2013, G 4

Joonisel näidatud musta kasti kõik klemmid ühendatakse korras kokku. Seejärel, kui klemmid A ja B külge ühendada patarei pingega  $U$  ja klemmid C ja D külge voltmeeter, on voltmeetri näit alghetkel  $U$ . Mõõtmise järel ühendatakse kõik klemmid veel korras kokku. Kui ühendada sama patarei klemmid C ja D külge ning voltmeeter klemmid A ja B külge, on voltmeetri näit alghetkel  $\frac{U}{2}$ . Teades, et mustas kastis on ainult identsed kondensaatorid, joonistage musta kasti skeem.

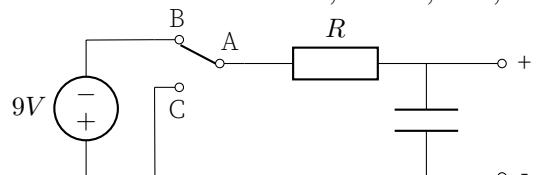


### Ü309 Elektroonikaskeem ★★

Joonisel on antud teatud elektroonikaseadme ühe osa skeem, mis koosneb 9 V vooluallikast, takistist ja kondensaatorist koosnevast filtriist, väljundklemmidest ja lülitist. Lülitit kaks võimalikku asendit on „sees“ (ühendatud on A ja B) ning „väljas“ (ühendatud on A ja C). Antud olukorras ei ole väljundklemmide külge midagi ühendatud.

Kui toodud skeemis viia lülti asendist „sees“ asendisse „väljas“ (st lülitada seade välja) ja muuta seejärel vooluallika polaarsus vastupidiseks, siis töötab elektroonikaseade pärast sisselülitamist endiselt. Kui aga vooluallika polaarsust muuta ilma seadet välja lülitamata, siis põleb takisti  $R$  läbi. Eeldusel, et takisti põleb läbi nii peaa, kui sellel eralduv võimsus ületab 0,25 W, leia  $R$  minimaalne ja maksimaalne võimalik väärus.

Autor: Sandra Schumann, lahtine, 2017, G 4



### Ü310 Takisti ★★

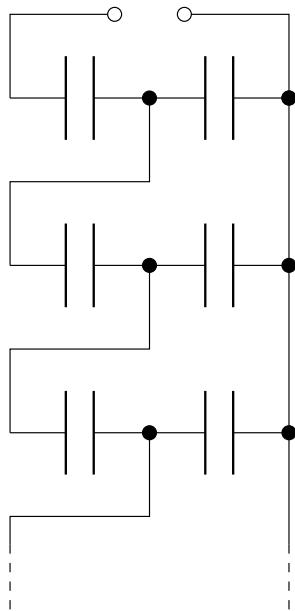
Autor: Jaan Kalda, piirkonnavor, 2007, G 7

On vaja teha taksisti takistusega  $R = 1 \Omega$ , mille takistuse temperatuurisõltuvus oleks toatemperatuurile lähedastel temperatuuridel võimalikult väike. Kasutada on raudtraat ristlöikepindalaga  $s = 0,030 \text{ mm}^2$  ja grafitpulk ristlöikepindalaga  $S = 3,0 \text{ mm}^2$ . Kuidas valmistada soovitud takistit ja kui pikki grafitpulga ning terastraadi juppe tuleb seejuures kasutada? Graafidi ja raua eritakistused on vastavalt  $\rho_g = 3,0 \cdot 10^5 \Omega \text{ m}$  ning  $\rho_r = 9,7 \cdot 10^{-8} \Omega \text{ m}$ ; takistuse temperatuurikoeffi tsiedid (suhtelised muutused  $\Delta R/R$  temperatuuri kasvamisel ühe kraadi võrra) on  $\alpha_g = -5,0 \cdot 10^{-3} \text{ K}^{-1}$  ning  $\alpha_r = 6,41 \cdot 10^{-3} \text{ K}^{-1}$

**Ü311 Kondensaatorireidel ★★**

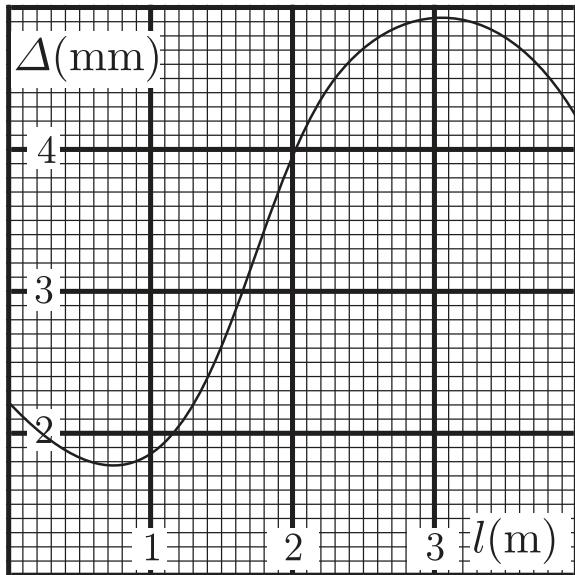
Autor: Siim Ainsaar, piirkonnnavoor, 2007, G 8

Ühesugustest kondensaatoritest mahtuvusega  $C$  on koostatud joonisel näidatud lõpmatu ahel. Leidke ahela kogumahtuvus  $C_k$ .

**Ü312 Traat ★★**

Autor: Jaan Kalda, lõppvoor, 2008, G 7

Ühtlase ristlõikega traati (ristlõike pindala  $S = 1 \text{ mm}^2$ ) venitati nii, et tema erinevad lõigud venisid erinevalt. Enne venitamist oli traadile märgitud jooned iga millimeetri tagant. Joonisel on toodud nende joonte vahekaugused  $\Delta$  pärast venitamist sõltuvana kaugusest traadi ühest otsast  $l$  ( $l$  on mõõdetud pärast venitamist). Leidke selle nüüdseks 4 meetri pikkuse traadi takistus, arvestades, et traadi materjali tihedus ja eritakistus  $\rho = 1 \cdot 10^{-6} \Omega \text{ m}$  venitamise tagajärjel ei muutunud.



### Ü313 Kondensaator ★★

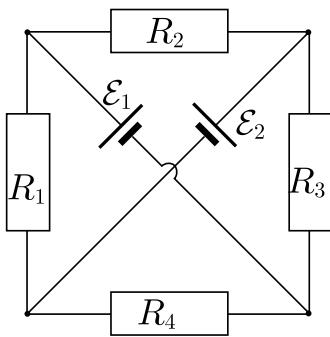
Autor: Aigar Vaigu, piirkonnavor, 2010, G 7

Muudetava mahtuvusega kondensaator on ühendatud patareiga, mille klemmide pingi on  $U$ . Kondensaatori mahtuvust muudetakse laadimisel nii, et kondensaatori laadimise vool  $I$  on konstantne. Leidke patarei võimsus ja kondensaatori laadimisel energia salvestamise kiirus. Põhjendage võimalikku erinevust.

### Ü314 Elektriline sild ★★

Autor: Jaan Kalda, lõppvoor, 2012, G 3

Joonisel toodud skeemis on tegemist ühesuguste takistitega takistustega  $R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = R$  ning ühesuguste ideaalse idealeidega elektromotoorjõududega  $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_2 = \mathcal{E}$ . Leidke voolutugevused takistites (st  $I_1, I_2, I_3$  ja  $I_4$ ) avaldised suurustele  $R$  ja  $\mathcal{E}$  kaudu.



**Ü315 Must kast** ★★★

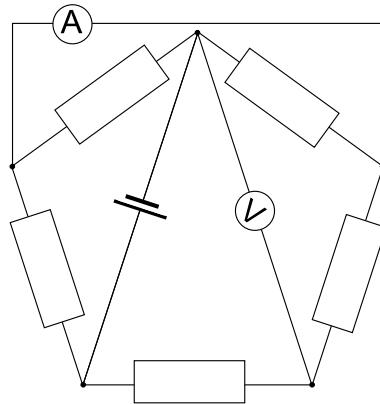
Autor: Jaan Kalda, lõppvoor, 2015, G 4

Mustas kastis on kolmest takistist ja ideaalsest ampermeetrist koosnev skeem. Lisaks on mustal kastil kolm väljundklemmi  $A$ ,  $B$  ja  $C$ . Kui rakendada pingi  $U = 12\text{ V}$  klemmidale  $A$  ja  $B$  vahelle, siis on ampermeetri näit  $I_{AB} = 2\text{ A}$ . Klemmidale  $A$  ja  $C$  puhul on lugem  $I_{AC} = 4\text{ A}$  ning klemmidale  $B$  ja  $C$  puhul  $I_{BC} = 6\text{ A}$ . Joonistage mustas kastis olev skeem ning märkige sellele takistite takistused.

**Ü316 Viisnurk** ★★★

Autor: Jaan Kalda, lõppvoor, 2017, G 6

Leidke joonisel toodud skeemis ampermeetri ja voltmeetri näidud. Kõik takistid on takistusega  $R = 1\Omega$ , pinge patarei klemmidel  $U = 7\text{ V}$ .

**Ü317 12 lampi** ★★★

Autor: Valter Kiisk, piirkonnnavoor, 2018, G 8

Juku käsutuses on 12 ühesugust taskulambipirni ning patarei, mille klemmipingi on täpselt 5 korda suurem pirni nimipingest. Lisaks leidis ta juhtumisi takisti, mille takistus on parajasti pool lambi hõogniidi takistusest töorežiimis (viimase sai ta teada jagades lambi soklile kirjutatud nimipinge ja -voolu omavahel).

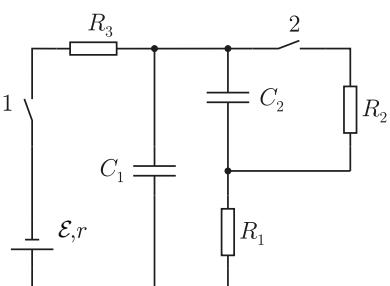
- a)** Kuidas tuleb ühendada nimetatud komponendid elektriahelasse, et kõik 12 pirni põleksid normaalheledusega?
- b)** Mitu korda kasvab (või kahaneb) lampide koguvõimsus, kui üks lampidest läbi põleb? Lampide takistuse sõltuvust temperatuurist võib jäätta arvestamata.

**Ü318 Kondensaatorid** ★★★

Autor: Mihkel Rähn, piirkonnnavoor, 2006, G 7

Joonisel toodud elektriskeemil on vooluallikas elektromotoorjõuga  $\mathcal{E}$  ja sisetakistusega  $r$ , kolm takistustakistustega  $R_1 = R_2 = R_3 = R$  ning kondensaatorid mahtuvustega  $C_1$  ja  $C_2$ . Arvutage, kui suured on elektrilaengud kondensaatoritel pärast pika aja möödumist, kui:

- a)** lülit 1 on suletud, lülit 2 on avatud;

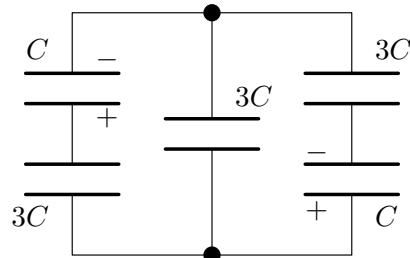


- b)** mõlemad lülitid on suletud;  
**c)** eelmisest seisust avatakse mõlemad lülitid üheaegselt.

**Ü319 Kondensaatorid ★★**

Autor: Mihkel Kree, lõppvoor, 2009, G 3

Kondensaatorite süsteem koosneb viiest kondensaatorist. Alghetkel on kolm neist laenguta ning kahel paikneb laeng  $q$  (vt joonist). Missugune laeng koguneb keskmisele kondensaatoriile, kui süsteem on jõudnud tasakaaluolekusse?



**Ü320 Elektriahela energia ★★**

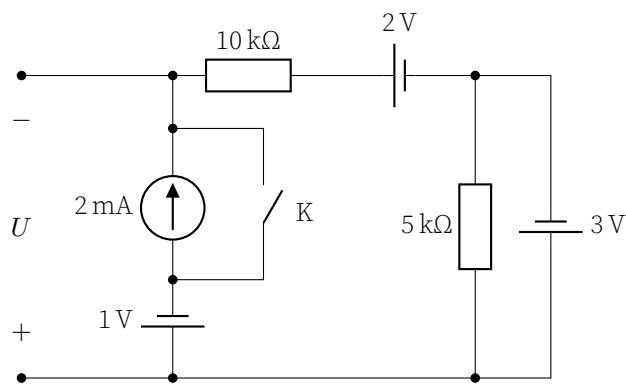
Autor: Eero Vaher, piirkonnnavoor, 2014, G 8

Suletud elektriahelas on jadamisi ühendatud takisti takistusega  $R = 100 \Omega$ , kondensaator mahtuvusega  $C = 200 \text{ nF}$ , tühise aktiivtakistusega induktiivpool induktiivusega  $L = 10 \text{ mH}$  ning sobivalt ühendatud ideaalsed mõõtseadmed. Hetkel  $t_0$  mõõdeti voolutugevuseks läbi kondensaatori  $I = 300 \text{ mA}$  ning pingeks poolil  $U = 50 \text{ V}$ . Teada on, et mõõtmise hetkel on vool poolis suunatud kõrgema potentsiaaliga piirkonnast madalamana potentsiaaliga piirkonda. Kas mõõtmise hetkel  $t_0$  oli rohkem energiat poolil või kondensaatoriil?

**Ü321 Vooluallikad ★★**

Autor: Sandra Schumann, lõppvoor, 2016, G 7

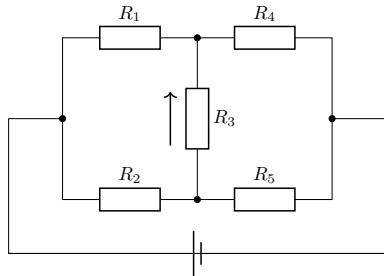
Vaatleme joonisel näidatud elektriskeemi, kus noolega tähistatud skeemielement on konstantse voolu allikas voolutugevusega  $I = 2 \text{ mA}$  noolega tähistatud suunas. Leidke pingi  $U$  väljundklemmid ja voolutugevus läbi takisti  $R = 10 \text{ k}\Omega$  kahe juhu jaoks: **a)** kui lülit K on suletud ja **b)** kui lülit K on avatud.



### Ü322 Takistuste tuvastamine ★★

Autor: Eero Vaher, lõppvoor, 2018, G 7

Vooluallikaga on ühendatud viis takistit. Neist kolme takistus on  $1\Omega$ , ülejäänud kaks on tundmatu, kuid ühesuguse takistusega. Vooluallika pingi  $U_0 = 14\text{ V}$  ning voolutugevus selles  $I_0 = 10\text{ A}$ . Pingi ja voolutugevus kolmandal takistil on vastavalt  $U_3 = 2\text{ V}$  ning  $I_3 = 2\text{ A}$ . Joonisel on märgitud elektrivoolu suund takistis  $R_3$ . Määrake kõigi takistite takistused.

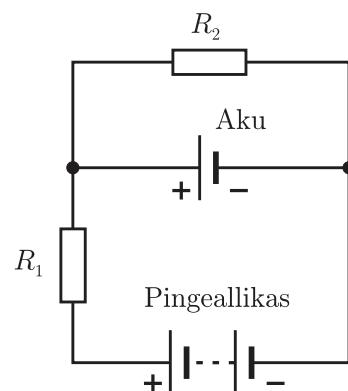
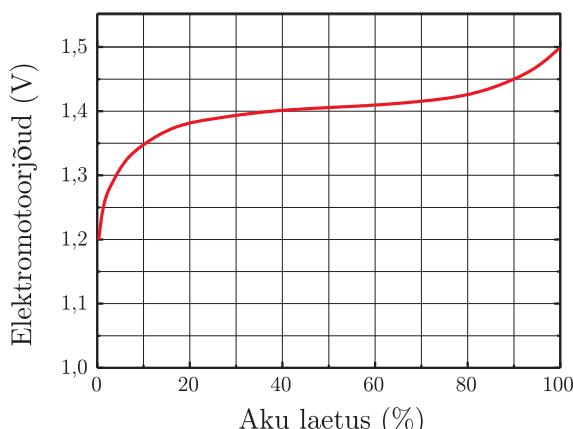


$$U_0 = 14\text{ V}, I_0 = 10\text{ A}$$

### Ü323 Aku laadimine ★★★

Autor: Valter Kiisk, piirkonnnavoor, 2008, G 8

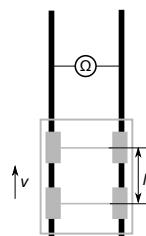
Teatava akumulaatori elektromotoorjööd kasvab laadimise käigus nõnda, nagu kujutatud joonisel. Samas on toodud ka elektriskeem, mida Juku kavatseb kasutada sellise akumulaatori laadimiseks. Pingeallika klemmidel on pingi 6V. Nii pingegällika kui ka aku sisetakistust võib lugeda tühiseks. Kuidas peaks Juku valima takistite  $R_1$  ja  $R_2$  väärtsused, kui ta soovib, et maksimaalne laadimisvool ei ületaks 100 mA ja laadimisvool muutuks nulliks, kui akumulaator on täielikult laetud?



### Ü324 Raudtee ★★★★

Autor: Mihkel Pajusalu, piirkonnnavoor, 2012, G 8

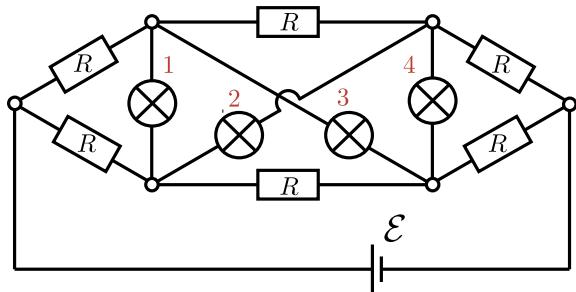
Mõõdame raudteel elektritakistust kahe kõrvutise rööpa vahel nii, nagu joonisel. Rööbastel sõidab vagun kiirusega  $v$ . Olgu vagunil kaks rattapaari, mille vahekaugus on  $l$ . Joonistage graafik takistuse muutumisest ajas alates hetkest, kui vaguni esimene rattapaar on mõõtepunkti ees sellest kaugusel  $l/2$ , kuni ajani, kui tagumine rattapaar on mõõtepunkti taga sellest kaugusel  $l/2$ . Mõlema rattapaari takistuseks olnu  $r$  ja rööpa takistus pikkusühiku kohta  $\rho$ .



### Ü325 Lambid ★★★

Autor: Mihkel Kree, lahtine, 2013, G 9

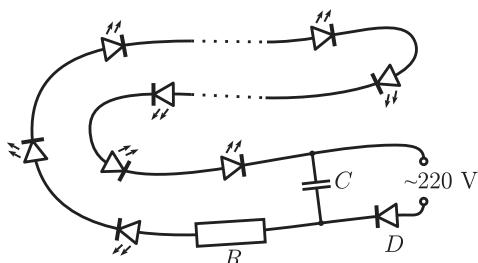
Juku ehitas kodus niisuguse elektriskeemi nagu joonisel näidatud, kasutades selleks kuut ühesugust takistit takistusega  $R = 10\Omega$ , nelja ühesugust lampi takistusega  $r = 20\Omega$  ning pingearvutat elekromotoorjõuga  $\mathcal{E} = 5\text{ V}$ . Arvuta ge igas lambis (joonisel tähisid 1, 2, 3, 4) eralduv võimsus. Pingearvutat ka sisetakistustega mitte arvestada.



### Ü326 Jõulukaunistus ★★★

Autor: Valter Kiisk, lõppvoor, 2010, G 8

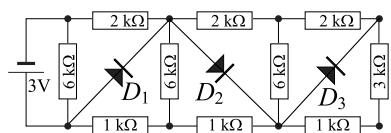
Soodsa jõulukaunistuse valmistamiseks otsustas Juku ühendada jadamisi kokku 50 valgusdioodi ja toita seda ahelat läbi alaldusdioodi  $D$  otse võrgupinge (vt joonist). Voolu piiramiseks on ahelasse lülitatud takisti ning voolu pulsatsiooni väljasilumiseks kondensaator. Pinge alaldusdioodil on tühine, igal valgusdioodil aga  $U_d = 3\text{ V}$ . Kui suure takistusega  $R$  ja maksimumvõimsusega  $N$  tuleks valida takisti, kui valgusdioodid taluvad voolu kuni  $I = 20\text{ mA}$ ? Kui suure mahtuvusega  $C$  kondensaator kindlustab, et voolutugevuse pulsatsioon jäääb  $\alpha = 5\%$  piiresse? Võrgupinge sagedus on  $f = 50\text{ Hz}$  ning amplituudväärus  $U_0 = 311\text{ V}$ .



### Ü327 Dioodid ★★★

Autor: Jaan Kalda, lahtine, 2012, G 8

Millised võimsused eralduvad skeemil märgitud dioodidel? Dioodide voolu võib lugeda nul-liks kõikide vastupingete jaoks ning samuti ühest voldist väiksemate pärpingete jaoks; suvalise pärivoolu puhul on dioodi ping 1,0 V.

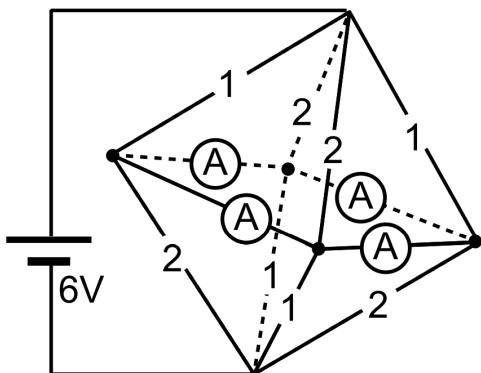


Takistite takistused ja elektromotoorjõu väärus on toodud joonisel. Dioodi skeemitaahise noole suund näitab pärivoolu suunda.

### Ü328 Oktaeeder ★★★★

Autor: Jaan Kalda, lahtine, 2016, G 8

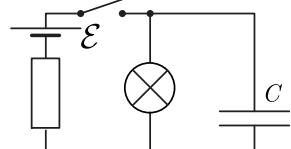
Juuresolev skeem kujutab traadist oktaeedrit, iga traadi juurde on kirjutatud selle takistus oomides. Ampermeetriteid ühendavad traadid on tühiselt väikese takistusega. Leidke ampermeetrite näidud.



### Ü329 Kondensaator ★★★★

Autor: Jaan Kalda, lõppvoor, 2018, G 9

Vaatleme joonisel kujutatud elektriskeemi, mis koosneb kondensaatorist mahtuvusega  $C$ , patareist elektromotoorjõuga  $\mathcal{E}$ , takistist ja hõõglambist, mida võib lugeda mittelineaarseks takistiks (pinge sõltub voolust mittelineaarselt). Algselt oli kondensaator laenguta ja lülitili avatud. Seejärel suleti lülitili lühikeseks ajaks, misjärel see avati uuesti ning hoiti lahtisena seni, kuni kondensaator oli täielikult tühjenenud. Selle aja jooksul, mil lülitili oli suletud, eraldus kogu skeemil soojushulk  $Q_1$ ; lülitili avamise järel eraldus täiendavalts veel soojushulk  $Q_2$ . Leidke laeng, mis läbis hõõglambi sel perioodil, kui lülitili oli suletud.



### Ü330 Närvirakk ★★★★★

Autor: Andres Laan, lõppvoor, 2011, G 9

Närviraku membraani võib vaadelda kui õhukest kilet mahtuvusega  $C$ , mida läbivad ioonkanalid, mis võimaldavad laengutel liikuda läbi membraani. Närviraku elektrilise tasakaalu seisukohast on oluliseks ioonideks naatrium ja kaalium. Kui naatriumioon (laenguga  $+e$ ) läbib ioonkanali (sisenedes närvirakku), siis sooritavad keemilised jõud töö  $e\mathcal{E}_{Na}$ , st võib öelda, et naatriumioonidele möjub ioonkanalis elektromotoorjõud  $\mathcal{E}_{Na}$ . Kaaliumioonide puhul on kanali läbimise protsess täpselt samasugune, kuid efektiivne elektromotoorjõud on sel puhul  $\mathcal{E}_K$  ( $\neq \mathcal{E}_{Na}$ ). Peale

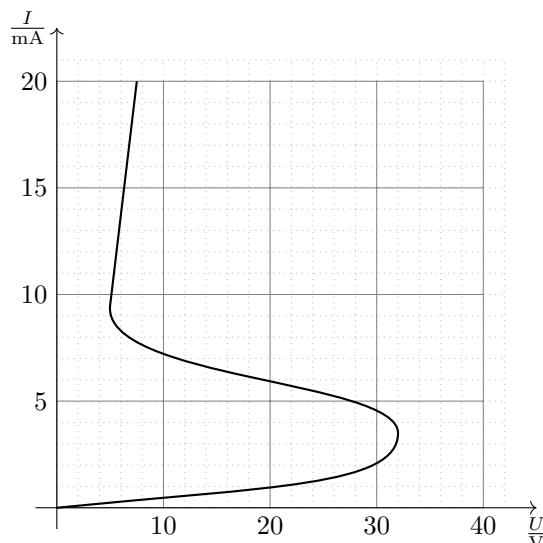
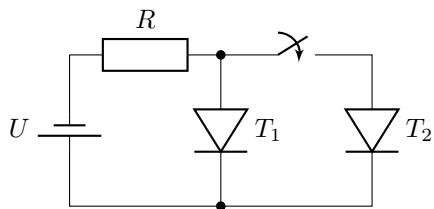
keemiliste jõudude töö toimivad laengu liikumisel ioonkanalis ka hõõrdejõud, mida saab kirjeldada elektrilise takistuse abil: naatriumioonide jaoks on membraani elektriline takistus  $R_{\text{Na}}$  ja kaaliumioonide jaoks  $R_{\text{K}}$ . Millise laengu omandab närviraku membraan elektrilise tasakaalu saabudes?

### Ü331 Türistor ★★★★

Autor: Jaan Toots, lõppvoor, 2015, G 10

Türistori (dioodisarnase elemendi) volt-amper karakteristik on juuresoleval graafikul. Kaks sellist türistori on ühendatud pingeallika ja takistiga kõrvalolevasse skeemi. Takistus  $R = 2 \text{ k}\Omega$ .

- a)** Alguses on lülitid avatud. Pingeallika pinget suurendatakse lineaarselt  $t = 42 \text{ s}$  jooksul väärtsusest  $U_0 = 0 \text{ V}$  kuni väärtsuseni  $U_a = 42 \text{ V}$ . Skitseerige ahelet läbiva voolutugevuse  $I(t)$  sõltuvus ajast. Milline on voolutugevuse lõppväärtus  $I_a$ ?
- b)** Leidke lõppvoolutugevused mõlemas türistoris, kui lülitid suletakse ilma ahele rakendatud pinget  $U_a$  muutmata.

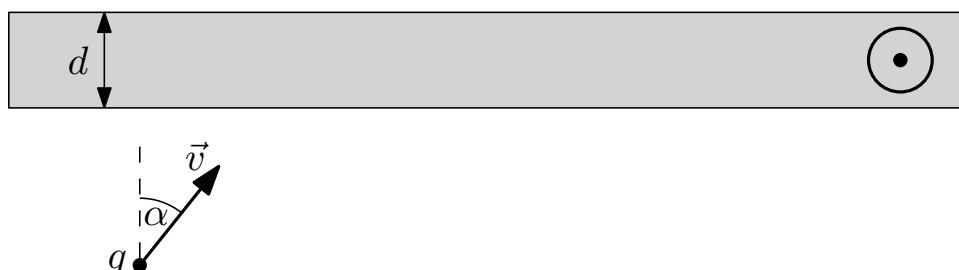


## Magnetism

### Ü332 Magnetpeegel ★★

Autor: Kristian Kuppart, lahtine, 2013, G 2

Positiivse laenguga  $q$  ja kiirusega  $v$  osake liigub ristkülikukujulise riba poole nii, et tema kiirusvektor moodustab riba normaaliga nurga  $\alpha$ . Riba paksus on  $d$  ja seal paikneb homogeenne  $z$ -telje suunaline magnetvälgi induktsiooniga  $B$  (paberit sandist meie poole suunatud). Millise maksimaalse langemisnurga  $\alpha_{\max}$  korral osake veel läbib magnetvälja? On teada, et ribaga risti sellesse sisenev osake läbiks riba.



### Ü333 Solenoid ★★

Autor: Andres Laan, lõppvoor, 2011, G 5

Õhksüdamikuga solenoidis (pikas silindrilises poolis) on vool  $I$ . Solenoidi sisemuses liigub elektron, mille trajektoor kujutab endast sellist kruvijoont, mille keerdude arv on võrdne solenoidi keerdude arvuga. Leidke selle elektroni kiiruse teljesihiline komponent. Võib eeldada, et elektroni kiiruse teljega risti olev komponent on piisavalt väike, et kokkupõrkeid solenoidi seinaga ei toimu. Elektroni mass on  $m$  ja laeng  $e$ .

*Vihje:* solenoidi sees on homogeenne magnetvälgi induktsiooniga  $B = \mu_0 n I$ , kus  $n$  on solenoidi traadi keerdude arv pikkusühiku kohta,  $I$  selles olev vool ja  $\mu_0$  vaakumi magnetiline läbitavus.

### Ü334 Generaator ★★

Autor: Andreas Valdmann, lahtine, 2013, G 5

Teatud tüüpi elektrigeneraatoris pöörleb väljundiga ühendatud juhtmekontuur püsilmagnetitega tekitatud magnetväljas, muutes mehaanilise töö elektrienergiaks. Sellise generaatori külge oli tarbijana ühendatud elektrilamp. Esialgu aeti generaatorit ringi nurkkiirusega  $\omega_0$ , mille tulemusel eraldus lambis võimsus  $P_0$ . Mingil hetkel suurendati generaatori pöörlemissagedust 2 korda.

- a) Kui suur oli lambis eralduv võimsus pärast pöörlemissageduse suurendamist?
- b) Kui suur oli generaatori ringiajamiseks tarvilik jõumoment enne ja pärast pöörlemissageduse suurendamist?

Võib eeldada, et generaator töötas kadudeta ehk kogu tema ringiajamisel tehtav töö kandus üle tarbijale. Ühtlase sagedusega pöörlemisel on generaatorit ringiajav jõumoment konstantne. Samuti võib eeldada, et lambi takistus ei sõltu teda läbiva voolu tugevusest.

**Ü335 Tiirlev kuulike ★★**

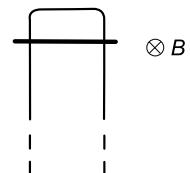
Autor: Eero Vaher, lahtine, 2013, G 6

Olgu meil positiivselt laetud kuulike massiga  $m$ . On teada, et kui kuulike liiguks kiirusega  $v$  sellega ristuvas magnetväljas induktsiooniga  $B$ , siis oleks selle trajektooriks ringjoon raadiusega  $r$ . Kui suure laenguga  $q$  peab olema teine sama massiga kuulike, et esimene kuulike liiguks teise kuulikese elektriväljas sama kiirusega samal trajektooril? Eeldage, et kahe kuulikese süsteemile ei mõju väliseid jõude. Kõiki liikumisi vaadeldakse laboratoories taustsüsteemis.

**Ü336 Langev takisti ★★★**

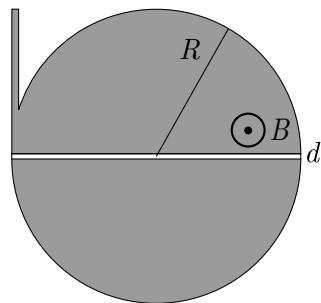
Autor: Andres Laan, piirkonnnavoor, 2011, G 8

Joonisel on kujutatud Maa gravitatsiooniväljas vertikaalselt paiknevale juhtivale traadile kinnitati takisti nii, et see võib piiki traati vabalt libiseda. Teades, et magnetinduktsioon oli  $B$  ja traadi harude vaheline kaugus  $d$ , leidke, millise lõppkiirusega hakkab takisti langema. Takisti mass on  $m$  ja takistus  $R$ .

**Ü337 Tsüklotron ★★★**

Autor: Kristian Kuppart, piirkonnnavoor, 2018, G 10

Vaatleme tsüklotroni – teatud tüüpi osakestekirrendi toimimist. Tsüklotron koosneb silindrikujuisest piirkonnast raadiusega  $R$ , kus on homogeene magnetvälja tugevusega  $B$ , ning õhukesest ribakujulisest piirkonnast laiusega  $d$ , kus on homogenne ribaga risti olev elektriväli tugevusega  $E$ . Elektrivälja suunda muudetakse perioodiliselt vastasuunaliseks nii, et osakeste igal riba läbimisel on elektrivälja suund osakeste kiirusvektoriga sama-suunaline. Samuti on tsüklotroni ühes ääres osakeste tsüklotronist väljumiseks kitsas kanal. Alustagud osakesed liikumist tsüklotroni keskelt tühiselt väikse algkiirusega. Mitu täisringi  $n$  teevad osakesed tsüklotronis enne väljumist? Osakeste laeng on  $q$  ja mass  $m$ . Eeldada, et  $n \gg 1$ .

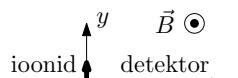
**Ü338 Laengud ★★★★**

Autor: Jaan Kalda, lahtine, 2011, G 6

Kaks osakest laenguga  $q$  stardivad koordinaatide alguspunktist kiirusega  $v$ : üks  $x$ -telje sihis, teine  $y$ -telje sihis. Liikumine toimub homogeenses  $z$ -telje sihilises magnetväljas induktsiooniga  $B$ ; osakeste omavahelise elektrostaatilise vastasmöjuga ärge arvestage. Milline on osakeste vahelise kauguse maksimaalväärust  $l_{\max}$  edasise liikumise käigus?

**Ü339 Mass-spektromeeter ★★★★** Autor: Kristian Kuppart, piirkonnnavoor, 2013, G 10

Laboris oli uurimiseks hulk mingit atomaarset ainet, mille molaarmassiks mõõdeti  $\mu_1$ . Ühekordsest ioniseeritud ainet (iga aatom oli kaotanud ühe elektroni) kiirendati elektriväljas potentsiaalide vahega  $U$  ja suunati magnetvälja induktiooniga  $B$  (vaadake joonist). Magnetinduktsioon oli joonise tasandiga risti, ioonide algkiirus oli  $y$ -telje suunaline, magnetvälji asus piirkonnas  $y > 0$  ning aine sisenes magnetvälja punktis  $(0, 0, 0)$ .



Täheldati, et väike kogus ainet langes  $x$ -teljel asuvale detektorile kauguse  $d$  võrra kaugemal kohast, kuhu langes põhiosa ainest. Sellest järelldati, et aine hulgas oli väike osa isotoopi erineva molaarmassiga. Leidke selle isotoobi molaarmass  $\mu_2$ . Avogadro arv on  $N_A$  ja elektroni laeng on  $-e$ .

**Ü340 Magnetväli ★★★★**

Autor: Jaan Kalda, piirkonnavoor, 2015, G 9

Piirkonnas  $0 < y < a$  on  $z$ -teljega paralleelne homogeenne magnetväli induktiooniga  $B$ ; piirkondades  $y < 0$  ja  $y > a$  magnetväli puudub. Osake massiga  $m$  ja laenguga  $q$  siseneb kiirusega  $v$  magnetväljaga piirkonda paralleelselt  $y$ -teljega üle joone  $y = 0$ . Visandage osakese kiirusvektori ja  $y$ -telje vaheline nurk pärast seda, kui osake on piirkonnast  $0 < y < a$  väljunud funktsionina kiirusest  $v$ .

**Ü341 Traat ★★★★★**

Autor: Jaan Kalda, lõppvoor, 2007, G 10

Horisontaalsel libedal pinnal on fikseeritud kaks klemmi, mille vahekaugus  $a$  on väiksem neid ühendava hästi painduva sõlmevaba traadi pikkusest  $L$ . Süsteem asub vertikaalses homogeenses magnetväljas tugevusega  $B$ , traati läbib vool tugevusega  $I$ . Joonistage, millise kuju võtab traat. Kirjutage välja võrrandid, kust saab leida mehaanilise pingi  $T$  traadis. Leidke selle väärthus eeldusel, et  $L \gg a$ .

**Ü342 Pool ★★★★★**

Autor: Siim Ainsaar, lõppvoor, 2008, G 10

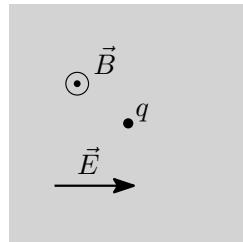
Libedale klaaspulgale on pehmest traadist tihedasti keritud solenoid pikkusega  $\ell$ , keerdude arvuga  $N$  ja ristlõikepindalaga  $S$ . Selles hoitakse konstantset voolu tugevusega  $I$ . Millist jõudu  $F$  oleks vaja rakendada pooli otstesse südamiku sihis, et venitada seda pisutki pikemaks, kui kehtiks eeldus, et venitamisel suurenevad kõigi naaberkeerdude vahekaugused võrdselt? Võite lugeda, et klaasi magnetiline läbitavus  $\mu = 1$ .

*Vihje:* tiheda solenoidi südamikus on homogeenne magnetinduktsioon  $B = \mu_0 I N / \ell$ .

**Ü343 Laeng ★★★★★**

Autor: Oleg Košik, lahtine, 2010, G 8

Ruudukujulise ristlõikega ruumipiirkond on täidetud homogeense magnetväljaga  $B$  ning selle keskel asub osake massiga  $m$  ja laenguga  $q$ , mis on alghetkel paigal. Alates alghetkest iga ajavahemiku  $T = \frac{\pi m}{qB}$  tagant lülitub selles piirkonnas lühiajaliselt sisse elektriväli  $E$  (kestusega  $\tau \ll T$ ), mis on suunatud risti magnetväljaga. Elektriväli võib muutuda kahes režiimis: (i) olles iga kord suunatud joonisel näidatud suunas; (ii) olles suunatud vaheldumisi kord joonisel näidatud suunas, kord vastupidises suunas.



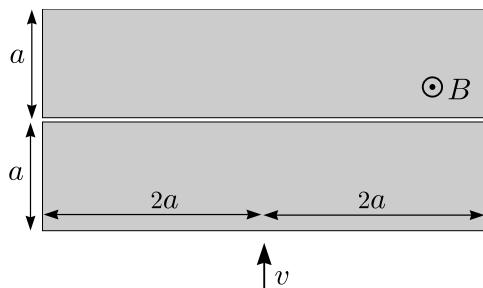
**a)** Skitseerige osakese trajektoor mõlema režiimi korral.

**b)** Kumma režiimi korral väljub osake magnetväljaga piirkonnast kiiremini? Mitu korda kiiremini? Eeldage, et väljumisaeg on mõlemal juhul palju suurem kui  $T$ . Põhjendage vastust.

**Ü344 Magnetväli ★★★★☆**

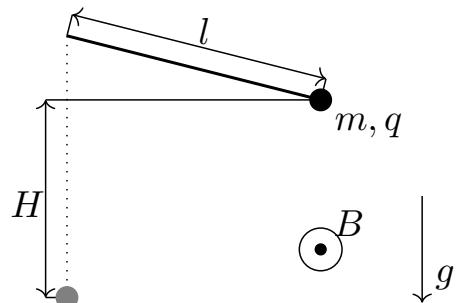
Autor: Jaan Kalda, piirkonnnavoor, 2010, G 9

Magnetväli induktsiooniga  $B$  täidab joonisel kujutatud mõõtmetega ristnahukakujuist ruumipiirkonda, välja arvatud väga kitsas magnetväljata pilus. Joonisel näidatud suunas lendab kiirusega  $v$  elektron (massiga  $m$  ja laenguga  $e$ ). Arvutage ja visandage graafikul, kuidas sõltub elektroni kõrvalekaldenurk (st nurk tema kiirusvektorite vahel enne magnetvälja sisenemist ja pärast seal lõplikku väljumist) elektroni algkiirusest  $v$ ; piirduge väärustega  $v < 2aBe/m$ .

**Ü345 Laetud pendel ★★★★☆**

Autor: Eero Vaher, lahtine, 2015, G 10

Väike laetud kuulike massiga  $m$  ja laenguga  $q$  ripub venimatu pikkusega  $l$  niidi otas magnetväljas induktsiooniga  $B$ . Kuulike viiakse niiti sirgena hoides kõrgusele  $H = \frac{7}{8}l$  ning lastakse siis lahti. Raskuskiirendus on  $g$  ning magnetvälja suund on risti pendli võnketasandiga. Samuti on teada, et kehtib  $q^2B^2l = \frac{3}{4}m^2g$ . Milline on kuulikese trajektoor?

**Ü346 Silinder ★★★★☆**

Autor: tundmatu, lahtine, 2007, G 10

Pika ühtlase mittejuhtiva silindri pinnal on ühtlaselt jaotatud laeng pindtihedusega  $\sigma$ . Alguses asub silinder välises homogeenses magnetväljas induktsiooniga  $B$ , mis on suunatud piki silindri telge; silinder on paigal. Seejärel lülitatakse magnetvälja välja. Kui suure pöörlemise nurkkiiruse omandab selle tulemusel silinder? Silindri aine tihedus on  $\rho$ , silindri raadius on  $r$ .

*Märkus:* pöörleva silindri poolt tekitatav magnetvälja lugeda tühiselt väikseks võrreldes välise väljaga

**Ü347 Elektronid ★★★★**

Autor: Jaan Kalda, lõppvoor, 2017, G 10

Ruumipiirkonnas  $x > -a$  ( $a > 0$ ) on homogeenne  $z$ -telje sihiline magnetväli induktsooniga  $B$ . Koordinaatide alguspunktis on elektronide allikas, mis kiirgab elektrone võrdsel arvul kõikidesse suundadesse (üle ruuminurga  $4\pi$ ). Kõikide elektronide kiirus on  $v$ . Tasandis  $x = -a$  on ekraan. Kui elektronid laenguga  $e$  ja massiga  $m$  pörkuvad vastu ekraani, siis on kokkupörkepunktis näha helendust. Leidke helenduva laigu  $y$ -telje sihiline läbimõõt tasandil  $z = 0$  eeldusel, et vähemalt osa elektronidest jõuavad ekraanini. Samal tasandil leida, kus kohas on laigu helen-duse intensiivsus kõige suurem. Milline on selle laigu  $z$ -telje sihiline pikkus tasandil  $y = 0$ ?

## Geomeetriline optika

### Ü348 Päikeseloojang ★

Autor: tundmatu, lahtine, 2004, G 2

Ühel päeval märkas Juku, et kell 13.00 on Päike täpselt pea kohal, sama päeva õhtul aga lesis ta rannal ning tähdas Päikese loojumist sekundi täpsusega kell 18.59:55. Seejärel töosis Juku püsti ning märkas, et Päike polegi veel täielikult loojunud. Juku ootas ära ka oma „teise“ päikeseloojangut sel päeval, mis toimus kell 19.00:05. Teades oma silmade kõrgust ( $h = 170$  cm), arvatas Juku koduteel Maa raadiuse välja. Mis ta tulemuseks sai?

*Vihje.* Tehkem eeldus, et lesides olid ta silmad veepinnaga peaegu ühel tasemel ning meri oli hästi tasane. Väikeste nurkade korral kehtib lähendus  $\cos \alpha \approx 1 - \alpha^2/2$ .

### Ü349 Kiil ★

Autor: Valter Kiisk, lõppvoor, 2007, G 3

Laserkiire teele asetatakse enam-vähem risti õhuke klaasplaat (klaasi murdumisnäitaja  $n = 1,5$ ). Selle tulemusena nihkub  $L = 2$  m kaugusel ekraanil olev laserkiire kujutis  $d = 5$  mm võrra. Järeldatakse, et plaat on kergelt kiilukujuline. Leidke selle kiilu tipunurk  $\alpha$ .

*Vihje:* väikeste nurkade  $\varphi$  puhul  $\sin \varphi \approx \tan \varphi \approx \varphi$ .

### Ü350 Lääts ★

Autor: tundmatu, lahtine, 2009, G 2

Lääts tekitab esemest  $d = 24$  cm kaugusele ekraanile kujutise, mis on esemest 3 korda suurem. Leidke läätse fookuskaugus.

### Ü351 Kuirtekimbu laiendi ★

Autor: Koit Timpmann, piirkonnavoor, 2010, G 3

Kaks ühise optilise peateljega läätse moodustavad seadme, millega saab paralleelist valgusvihust moodustada esialgsest laiema või kitsama paralleelse valgusvihu. Kasutatava seadme esimese läätse optiline tugevus on  $-20$  dpt. Kui kaugemale esimesest läätsest tuleks paigutada teine lääts, et laiendada seadmele langev valgusvihk 2,5-kordseks?

### Ü352 Segadus optikalaboris ★

Autor: Roland Matt, lahtine, 2011, G 1

Optik koristas vana laborit ja leidis seal ühe markeerimata nõgusläätse ja ühe kumerläätse. Nende optiliste tugevuste määramamiseks paigutas ta läätsed üksteise taha ja lasi neist läbi kaks paralleelset laserkiirt, mille vahekaugus oli  $x_1 = 1,0$  cm. Ta muutis läätsede vahekaugust seni, kui süsteemist väljunud kiired olid jällegi paralleelsed (seda kontrollis ta, määrates nende vahekaugust paberilehekesega erinevatel kaugustel), nüüd oli kiirte vahekauguseks  $x_2 = 26$  mm. Sellises olukorras oli läätsedevaheliseks kauguseks  $d = 32$  cm. Millise optilise tugevusega olid läätsed?

**Ü353 Lääts ★**

Autor: Koit Timpmann, piirkonnavor, 2016, G 3

Punkt  $A$  ja selle tõeline kujutis  $A'$  asuvad läätse optilisest peateljest vastavalt  $4\text{ cm}$  ja  $1\text{ cm}$  kauguse sel. Punktist  $A$  kuni selle kujutiseni  $A'$  on otsejoones  $15\text{ cm}$ . Kui suur on läätse fookuskaugus?

**Ü354 Valgusallika kujutis ★**

Autor: EFO žürii, lahtine, 2017, G 2

Sama suure fookuskauguse absoluutväärtsusega  $f$  kumer- ja nõguslääts asuvad nii, et nende fookused ning optilised peateljed ühtivad. Läätsede ees optilisel peateljal kumerläätset kaugusel  $1,5f$  asub punktvalgusallikas  $A$ . Leidke punktvalgusallika kujutise asukoht läbi kahe läätse. Tehke joonis.

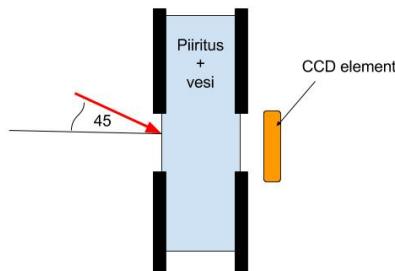
**Ü355 Piiritusetehas ★**

Autor: Aigar Vaigu, piirkonnavor, 2017, G 4

Piiritusetehases mõõdetakse piirituse ja vee segus oleva piirituse mahuprotsenti joonisel näidatud optilise seadme abil, kus segu paikneb kanalis laiusega  $d = 1\text{ cm}$ . Kui suure vahemaa võrra muutub seadme fototundlikul elemendil kiire asukoht, kui piiritus mahuprotsendiga  $40\%$  asendada piiritusega mahuprotsendiga  $85\%$ ? Võib eeldada, et segu murdumisnäitaja  $n_{\text{segu}}$  on lineaarne kombinatsioon vee ja piirituse murdumisnäitajatest

$$n_{\text{segu}} = Xn_{\text{piiritus}} + (1 - X)n_{\text{vesi}},$$

kus  $X$  on piirituse mahuline sisaldus vahemikus  $0 - 1$  ja  $n_{\text{piiritus}} = 1,3615$  ning  $n_{\text{vesi}} = 1,3330$ .

**Ü356 Kaks valgusallikat ★**

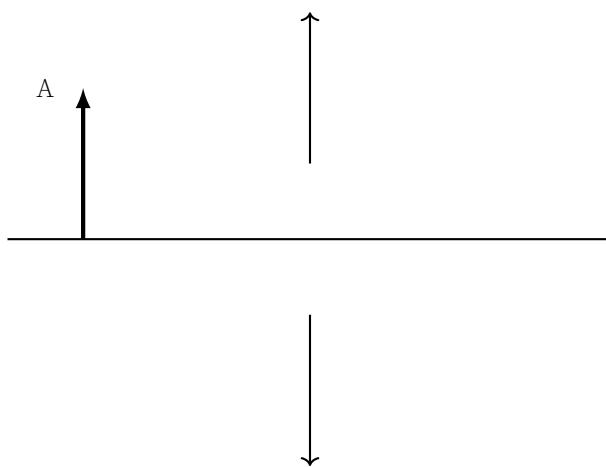
Autor: EFO žürii, piirkonnavor, 2018, G 2

Kaks punktikujulist valgusallikat asuvad kumerläätse optilisel peateljal erinevates punktides. Nendest valgusallikatest läätse abil tekitatud kujutised kattuvad. On teada, et üks valgusallikas asub läätse keskpunktist  $a = 18\text{ cm}$  kaugusel. Kui kaugel sellest valgusallikast asub teine valgusallikas? Lääts fookuskaugus  $f = 9\text{ cm}$ .

**Ü357 Poolitatud lääts ★**

Autor: Hans Daniel Kaimre, lõppvoor, 2018, G 1

Kersti paneb kokku optilise skeemi, nii et koondav lääts on objektist ja ekraanist, kuhu terav kujutis tekib, võrdsel kaugusel. Ta jätab objekti ja ekraani asukohta sammaks, kuid lõikab läätse optilise peateli ja peateli juurest pooleks ning nihutab kaks tekinud poolikut läätse optilisest peateljest eemale. Joonistage lisalehel uue skeemi jaoks kiirte käik. Objekt on tähistatud A-ga.

**Ü358 Taskulamp ★★**

Autor: tundmatu, lahtine, 2004, G 3

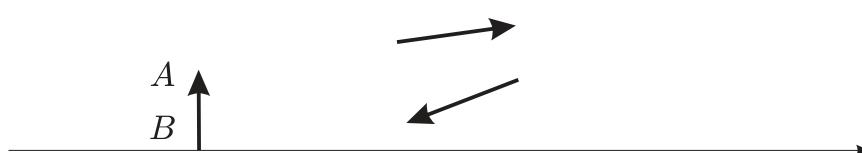
Taskulamp valgustab vee kogu tasast põhja vee pinnaga risti suunatud paralleelse valgusvihu. Kui valgusvihu teel kaugusele  $H = 120$  cm vee kogu põhjast paigutada lääts optilise tugevusega  $D = 2$  dptr (lääts asub vee kohal nii, et läätse tasand on vee pinnaga paralleelne), siis põhja valgustatud ala pindala ei muudu. Leia vee taseme kõrgus antud vee kogus. Vee murdumisnäitaja on  $n = 1,33$ . On teada, et valgusvihu diameeter on palju väiksem läätse fookuskaugusest.

Vihje. Väikeste nurkade puhul kehtib ligikaudne võrdlus  $\sin \alpha \approx \tan \alpha$ .

**Ü359 Nõnguspeegel ★★**

Autor: EFO žürii, lõppvoor, 2006, G 2

On teada esemelt lähtunud ühe kiire suund enne ja pärast peegeldumist sfääri-liselt nõnguspeeglilt. Teades eseme  $AB$  ja optilise peateli asukohta, konstrueeri ge eseme kujutis ja tähistage nõnguspeegli fookuse asukoht. Ignoreerida sfäärilisi aberratsioone.



**Ü360 Plaat ★★**

Autor: tundmatu, lahtine, 2007, G 4

Tasaparalleelsel plaadil paksusega  $d = 5\text{ cm}$  on alumine pind hõbetatud. Valguskiir langeb plaadi ülemisele pinnale nurga  $\alpha = 30^\circ$  all, osaliselt peegeldub sellet ning osaliselt murdub plaadi sisse. Seejärel peegeldub murdunud kiir plaadi alumiselt pinnalt ning murdub teist korda, väljudes tagasi õhku. Leidke plaadi materjal murdumistegur  $n$ , kui kaugus esimese peegeldunud ja teise murdunud kiire vahel  $l = 2,5\text{ cm}$ .

**Ü361 Kärbes ★★**

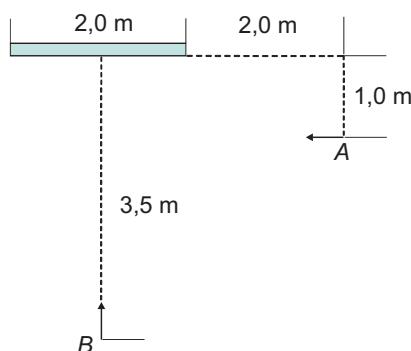
Autor: Taavi Pungas, lahtine, 2012, G 4

Kumerläätse optilisel peateljel, kaugusel  $a$  läätsest, lendab kärbes. Kärbse kiirus on  $v$  ning tema suund on risti optilise peateljega. Leidke kärbse kujutise kiirus (nii suund kui väärthus). Läätsse fookuskaugus on  $f < a$ .

**Ü362 Peegel ★★**

Autor: Oleg Košik, piirkonnavor, 2012, G 1

Suure ruumi seinal on  $2,0\text{ m}$  laiune peegel. Peegli kõrval  $2,0\text{ m}$  kaugusel peeglist ja  $1,0\text{ m}$  kaugusel seinast seisab inimene, kes hakkab liikuma paralleelselt peegliga kiirusega  $1,0\text{ m/s}$ . Samal hetkel hakkab minema mööda peegli keskjoont peegli poole kiirusega  $1,0\text{ m/s}$  tema tuttav, kes alghetkel seisab  $3,5\text{ m}$  kaugusel peeglist. Millise aja pärast märkavad tuttavad teineteist peeglisi?

**Ü363 Läätsed ★★**

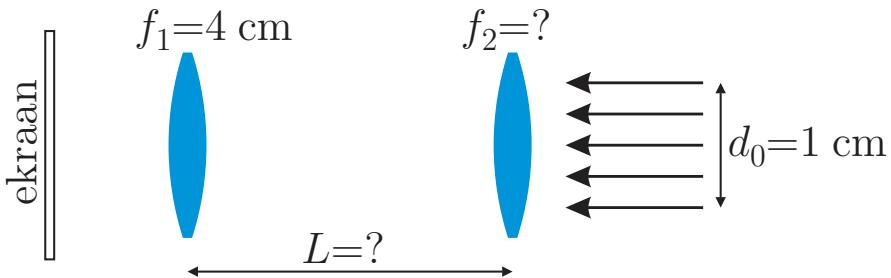
Autor: Tanel Kiis, lõppvoor, 2013, G 1

Jukul on suur hulk nõgusläätzi, mille fookuskauguste leidmiseks ta konstrueeris lihtsa süsteemi. Ta suunas optilise peateljega paralleelse laserikiire läbimõõduga  $2R$  tuntud fookuskaugusega  $f_1$  koondava läätse keskpunkti, pärast mida koonitus laserkiir ekraanil ühte punkti. Kui nüüd panna fookuskaugusega  $f_2$  nõgusläätzi võrdsele kaugusele koondavast läätsest ja ekraanist, on laserkiire läbimõõt ekraanil  $2r$ . Leidke  $f_2$  eeldusel, et  $2f_2 < f_1$ .

**Ü364 Valgustamine ★★**

Autor: Valter Kiisk, lõppvoor, 2015, G 2

Lääts fookuskaugusega  $f_1 = 4\text{ cm}$  on paigutatud nii, et läätsele suunatud paralleelse valguskiirte kimp diameetriga  $d_0 = 1\text{ cm}$  koondub ekraanil ühte punkti. Mõnikord on tarvis valgustada ekraanil suuremat ala, kuid läätse nihutamine või valgusallika vahetamine pole võimalik. Kui suur peab olema olemasolevast läätest paremale paigutatava lisaläätsesse fookuskaugus  $f_2$ , et ekraanil tekiks ühtlaselt valgustatud laik diameetriga  $d = 2\text{ cm}$ , kui läätsede vahekauge on  $L$ ?

**Ü365 Valgusvihk ★★**

Autor: Mihkel Kree, piirkonnavoor, 2005, G 5

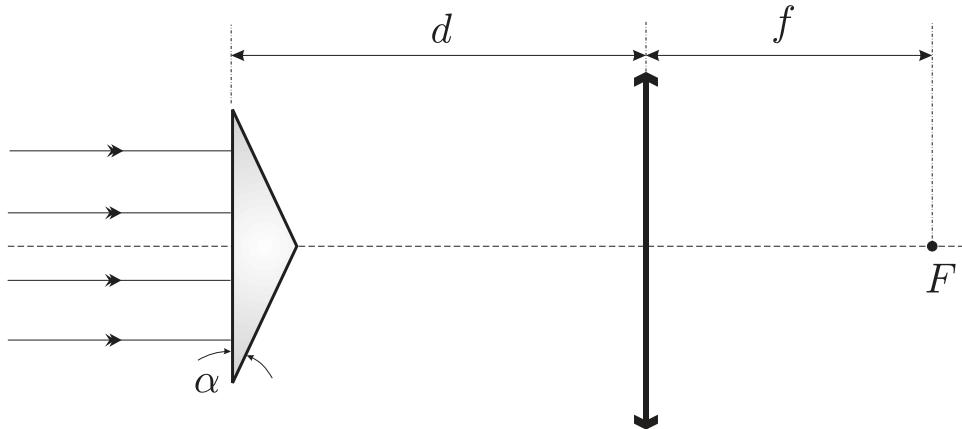
On antud ülesanne muuta kitsas paralleelne valgusvihk võimalikult laiaks paralleelseks valgusvihuks. Kasutada saab vaid kahte läätse etteantud kolmest: kumerlääts (fookuskaugus  $f_1 = 20\text{ cm}$ ), kumerlääts ( $f_2 = 40\text{ cm}$ ) ning nõguslääts ( $f_3 = -10\text{ cm}$ ). Kuidas tuleb toimida ning mitu korda laiemaks valgusvihk sel juhul muutub? Eeldage, et läätsede mõõtmed on oluliselt suuremad valgusvihu laiusest.

**Ü366 Biprisma ★★**

Autor: Mihkel Kree, piirkonnnavoor, 2006, G 6

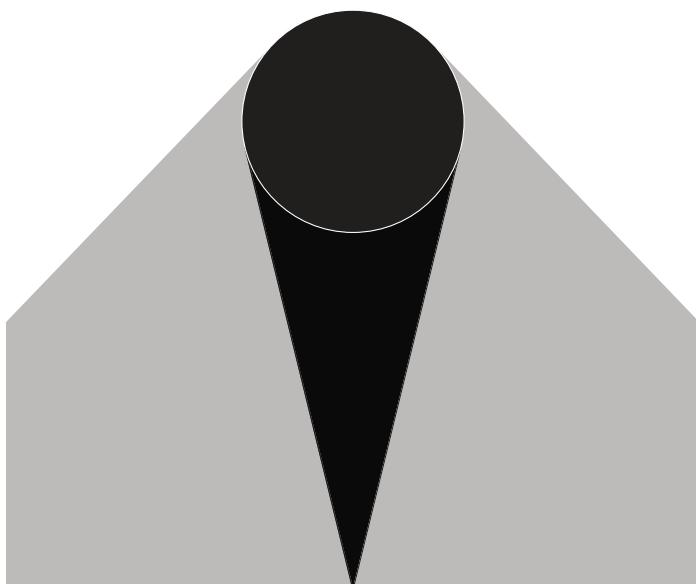
Paralleelne kiirtekimp langeb võrdhaarsel kolmnurksele prismale risti prisma ta-huga (vt joonist). Prisma teravnurgad on väikesed, suurusega  $\alpha$ . Prisma materjali murdumisnäitaja on  $n$ . Prismast kaugusel  $d$  paikneb koondav lääts fookuskaugusega  $f$ . Lääts optiline peatelg on paralleelne kiirtekimbu esialgse sihiga ning läbib prisma tipunurka. Missugune pilt tekib läätse fokaaltasandis asuvale ekraanile? Leida pilti iseloomustavad parameetrid. Kuidas sõltub pilt kaugusest  $d$ ?

Märkus: väikeste nurkade korral kehtib lähendus  $\tan \alpha \approx \sin \alpha \approx \alpha$ .

**Ü367 Varjud ★★**

Autor: Jaak Kikas, piirkonnnavoor, 2007, G 6

Läbipaistmatut kera valgustab kerakujuline valgusallikas. Joonisele on kantud läbipaistmatu kera poolt tekitatud täis- ja poolvarju koonuste lõiked joonise tasandiga (keras keskpunkt asub samas tasandis). Konstrueerige valgusallika lõige joonise tasandiga. Valgusallika keskpunkt asetseb samuti joonise tasandis.



### Ü368 Veealune valgus ★★

Autor: Jaak Kikas, lõppvoor, 2008, G 5

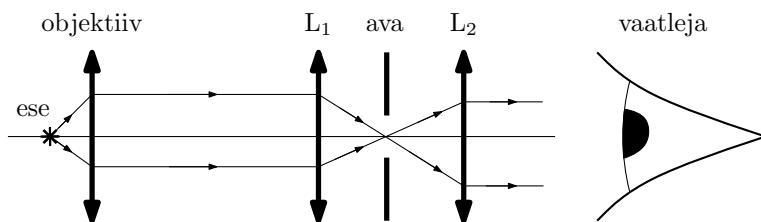
Kas basseini kohal rippuv punktvalgusallikas, mida vaadeldakse basseini põhjast, on heledam siis, kui bassein on veest tühi, või siis, kui ta on veega täidetud ja kagus silmast veepinnani võrdub valgusallika kõrgusega veepinna kohal? Mitu korda? Veepinnalt peegeldub tagasi  $r = 2\%$  valgust, vee murdumisnäitaja on  $n = 1,33$  ja neeldumine vees on tühine. Allika heledus on võrdeline silmaavasse sattuva val-

guse energiaga, silmaava läbimõõdu loeme samaks kõigis vaatlustingimustes ja väikeseks võrreldes vaatleja sügavusega.

### Ü369 Konfokaalne mikroskoop ★★

Autor: Mihkel Rähn, lõppvoor, 2009, G 7

Harilikest mikroskoopidest parema ruumilise lahutuse saamiseks kasutatakse konfokaalseid mikroskoope. Juuresoleval joonisel on kujutatud konfokaalse mikroskoobi põhielemendid: objektiiv, läätsed  $L_1$  ja  $L_2$  ning nende ühisest fokaaltasandis asuv väike ringikujuline ava. Joonisel on samuti esitatud optilisel peateljel asuvast väikesest uuritavast esemest lähtuvate kiirte käik. Objektiivi fokaaltasandist kau-gemal ja lähemal olevatest objektidest lähtuvad kiiret ei läbi enamuses ava, vaid neelduvad ava servadel. Kõrvalnähtusena vaateväli kitseneb. Kui kaugel optilisest peateljest võib olla objektiivi fokaaltasandis olev ese, et see oleks veel nähtav? Läätsede  $L_1$ ,  $L_2$  ja objektiivi fookuskaugused on vastavalt  $f_1$ ,  $f_2$  ja  $f_{\text{obj}}$ , ava läbimõõt  $d$ .



### Ü370 Klaaskuullike ★★

Autor: Jaan Kalda, lahtine, 2010, G 4

Paljudes helkurmaterjalides kasutatakse valguse tagasisuunamiseks tillukesि klaaskuulikesi, mis kantakse tiheda kihina materjali pinnale. Uurime, milline peaks olema selliste klaaskuulikeste murdumisnäitaja. Teeme järgmised eeldused: (a) klaaskuulile langeb valguskiir nii, et valguskiire ja pinnanormaali vaheline nurk  $\alpha$  on väike ( $\alpha \ll 1$  rad); (b) valguskiir murdub klaasi pinnal, peegeldub ühekordsett kuuli sisepinnalt ja väljub seejärel kuulist (murdudes teistkordsett kuuli pinnal). Millise murdumisnäitaja  $n$  korral suundub selline valguskiir täpselt tagasi? Tehke kiirtekäigu joonis ja põhjendage vastust. *Abivalem:* väikese  $\alpha$  korral radiaanmõõdus  $\sin \alpha \approx \alpha$ .

### Ü371 Optiline kiud ★★

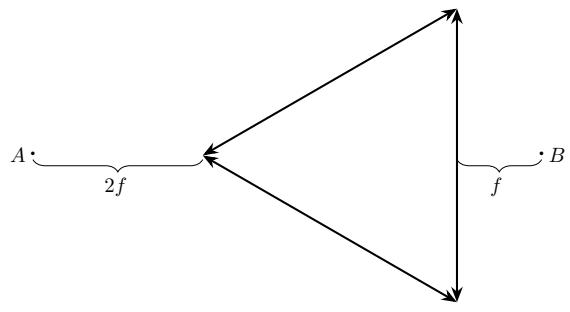
Autor: Andreas Valdmann, lahtine, 2016, G 4

Optiline kiud koosneb silindrikuulisest klaassüdamikust murdumisnäitajaga  $n_1 = 1,46$  ja seda toruna ümbritsevast kattest murdumisnäitajaga  $n_2 = 1,44$ . Leidke pi-kast optilisest kiust väljuva valguskoonuse tipunurk, lähtudes klassikalisest opti-kast.

### Ü372 Kolmlääts ★★

Autor: Andres Pöldaru, lahtine, 2016, G 5

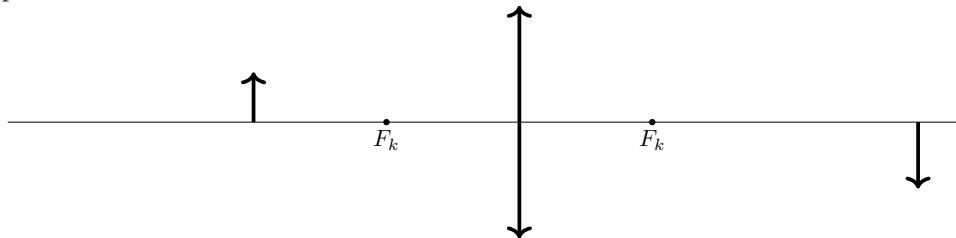
Kolm läätse on kokku pandud nii, et nendest tekib võrdkülgne kolmnurk. Läätsedel on üks ühine fookus. Punktvalgusallikas pannakse punkti A, mis on kolmnurga tipust kaugusel  $2f$ , kus  $f$  on läätsede fookuskaugus. Põhjendada konstueerimise teel, kas osa valgusest jõuab punkti B.



### Ü373 Puuduv lääts ★★

Autor: Eero Vaher, piirkonnnavoor, 2017, G 5

Esemelt lähtuv valgus läbib esmalt nõgusläätse ning seejärel kumerläätse. Joonisel on kujutatud eseme, kumerläätse ning lõpuks tekkiva kujutise asukohad ning kumerläätse fookused  $F_k$ . Konstrueerige lisalehel nõgusläätse ning selle esemepoolse fookuse  $F_n$  asukohad.

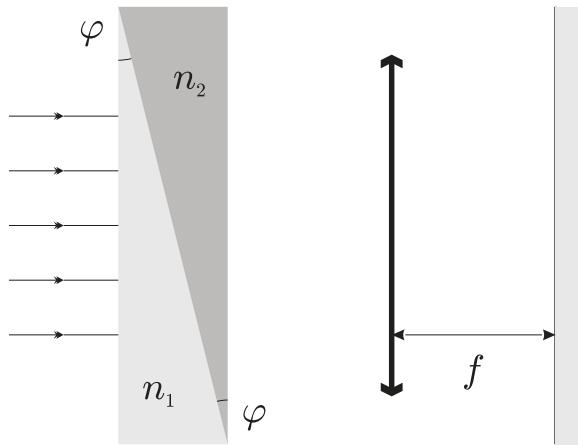


### Ü374 Kiilud ★★★

Autor: tundmatu, lahtine, 2006, G 6

Tasaparalleeline plaat koosneb kahest klaaskiilust väikse nurgaga  $\varphi \ll 1$  (vt joonist). Kiilude murdumisnäitajad on  $n_1$  ja  $n_2$  ( $n_2 > n_1$ ). Plaadi risti tema pinnaga langeb paralleelne valgusvihk. Plaadi taga asub koondav lääts fookuskaugusega  $f$ . Lääts fokaaltasandis asub ekraan. Joonistage kiirte käik süsteemis. Kui palju nihkub valguslaik ekraanil, kui me eemaldame plaadi?

Vihje: väikeste nurkade puhul kehtib ligikaudne võrdus  $\tan \varphi \approx \sin \varphi \approx \varphi$ .



### Ü375 Klaaskuup ★★

Autor: tundmatu, piirkonnnavoor, 2009, G 7

Klaaskuubi neli tahku on värvitud mustaks nõnda, et värvimata jää nud tahud paiknevad kõrvuti (omavad ühist serva). Missugune peab olema klaasi murdumisnäitaja  $n$ , et ka värvimata tahud paistaksid mustadena?

### Ü376 Peeglid ★★

Autor: Jaan Kalda, piirkonnnavoor, 2009, G 8

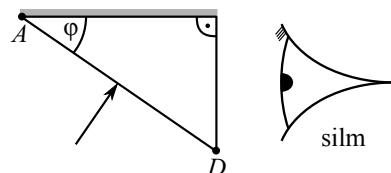
Kui paigutada kaks tasapeeglit nii, et nende tasapinnad moodustavad nurga  $\alpha < 180^\circ$  ning peegeldavad pinnad on vastamisi, siis peeglite vahele paigutatud asjadest võib tekkida mitu kujutist: lisaks peegeldustele veel peegelduse peegeldused jne. Joonisel on kujutatud valgusallika  $S$  kaks peegeldust ning üks peegelduse peegeldus ülalvaates (st peeglite tasapindade lõikejoone sihis). Leida konstruktsiooni abil peeglite ning valgusallika asukohad. Peeglitel on ainult üks peegeldav külg.



### Ü377 Periskooppillid ★★

Autor: Andreas Valdmann, lõppvoor, 2014, G 4

Kui liiga kaua järjest raamatut lugeda, võib kael pikast allapoole vaatamisest ära väsida. Selle vältimiseks on välja mõeldud erilised prillid, mille abil saab pead kallutamata alla vaadata. Prilliide põhiliseks elemendiks on joonisel kujutatud



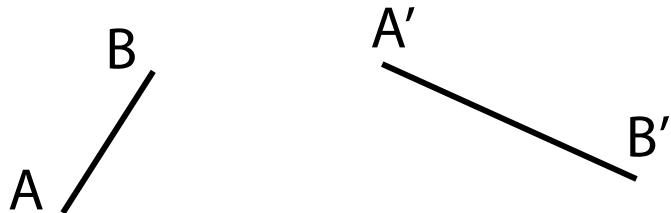
prisma, mille pealmine tahk on kaetud valgust peegeldava materjaliga. Prisma tipunurk  $\varphi$  on valitud selliselt, et kui prismaasse sisenev valguskiir on pinnaga risti, siis on seda ka väljuv kiir. Prisma on tehtud materjalist murdumisnäitajaga  $n = 1,5$ .

- a)** Lõigul  $AD$  on punktid  $B$  ja  $C$ , mis jagavad selle kolmeks piirkonnaks:  $AB$ ,  $BC$  ning  $CD$ . Sõltuvalt sellest, millisele piirkonnale kiir langeb, on kiire käiguks prisma kolm põhimõtteliselt erinevat võimalust. Tehke joonis kiirte käigust kõigi juhtude jaoks.
- b)** Leidke nurga  $\varphi$  väärthus.
- c)** Olgu külje  $AD$  pikkus  $l$ . Kui kaugel asuvad punktid  $B$  ja  $C$  tipust  $A$ ?
- d)** Miks on prillides üldsegi vaja kasutada suhteliselt keerulist prismaga süsteemi, selle asemel et kiirte kallutamiseks kasutada ühte tasapeeglit?

### Ü378 Lääts ★★

Autor: Mihkel Kree, lahtine, 2015, G 5

Joonisel on kujutatud objekt  $AB$  ning sellest kumerläätses tekkinud tõeline kujutis  $A'B'$ . Leidke konstrueerimise teel läätse keskpunkti ning fookuse asukoht.



### Ü379 Peegelpõhi ★★

Autor: Sandra Schumann, lõppvoor, 2018, G 3

Peegelpõhjaga tühja anumasse paigutatakse koondav klaaslääts nii, et läätse optiline peatelg on risti anuma põhjaga. Läätse kaugus anuma põhjast on  $l = 10\text{ cm}$ . Läätsele suunatakse paralleelne valgusvihk, mis koondub pärast läätse läbimist mingis punktis  $A$ . Siis valatakse anum vett täis (lääts jäab vee alla). Valgusvihk koondub endiselt samas punktis  $A$ . Leidke läätse fookuskaugus  $f$  õhus.

Klaasi murdumisnäitaja  $n_k = 1,49$ , vee murdumisnäitaja  $n_v = 1,33$ , õhu oma  $n_0 = 1,0$ . Murdumisnäitaja näitab, kui mitu korda on valguse kiirus vaakumis suurem kui aines.

Märkus. Läätse fookuskauguse  $f_v$  leidmiseks vees kehtib valem

$$f_v = f \cdot \frac{n_k n_v - n_0 n_v}{n_k n_0 - n_0 n_v}.$$

**Ü380 Kapillaartoru ★★★**

Autor: tundmatu, lahtine, 2009, G 8

Klaasist kapillaartoru on sisemise raadiusega  $r$  ja välimise raadiusega  $R$ . Millist tingimust peavad rahuldama  $r$ ,  $R$  ja klaasi murdumisnäitaja  $n$ , et küljelt vaadates paistaks, et kapillaartoru seinapaksus on null?

**Ü381 Fookuskaugus ★★★**

Autor: Eero Vaher, piirkonnavor, 2015, G 8

Õhukese tasanoogusa läätse parem külg on hõbetatud. Kui suur on sellise optilise elemendi fookuskaugus  $f$  vasakult langeva valguse jaoks? Lääts nõgusa osa kõverusraadius on  $R$ , läätse materjali murdumisnäitaja ümbrisseva keskkonna suhtes on  $n$ .

**Ü382 Lääts ★★★★**

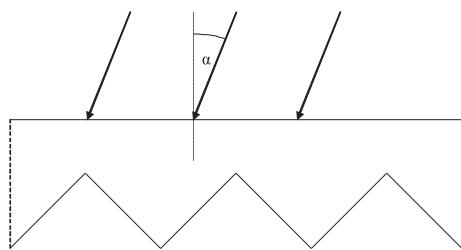
Autor: tundmatu, lahtine, 2007, G 9

Teritamata pliiatsi telg ühtib koondava läätse peateljega. Mitu korda on pliiatsi kujutise pikkus tema enda pikkusest erinev, kui pliiatsi ühe otsa kujutise diameetri ja pliiatsi diameetri suhe on  $k_1$  ning teise otsa jaoks on see suhe  $k_2$ ? Pliiatsi mõlemad otsad asuvad läätsest kaugemal kui on läätse fookuskaugus.

**Ü383 Hajuti ★★★★**

Autor: Andreas Valdmann, piirkonnavor, 2010, G 8

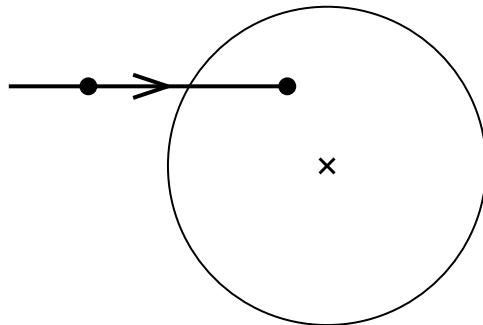
Mõnedes valgustites kasutatakse valguse hajutamiseks joonisel kujutatud ristlöökega pleksiklaasist plati. Valgus langeb selle siledale poolele ja läbib hajuti vaid juhul, kui langemisnurk on suurem kriitilisest nurgast  $\alpha_{kr}$ . Leidke nurga  $\alpha_{kr}$  väärustus. Pleksiklaasi murdumisnäitaja  $n = 1,5$ . Kõik sakilise poole tahud on sileda poole suhtes 45-kraadise nurga all.



**Ü384 Nõguslääts eestvaates ★★★**

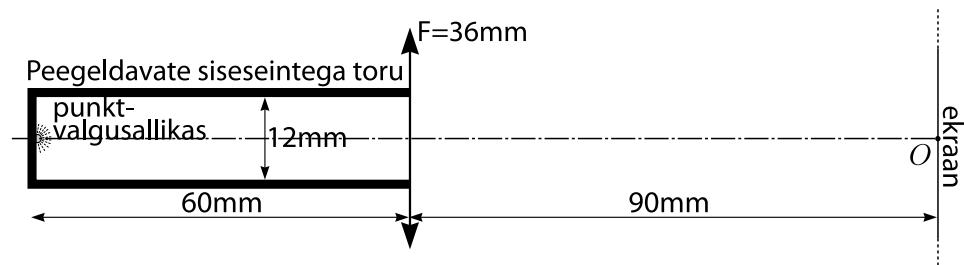
Autor: Siim Ainsaar, piirkonnavoor, 2011, G 10

Joonisel on kujutatud eestvaates nõguslääts, mille optiline peatelg on joonise ta-sandiga risti ja lõikub läätsega punktis  $O$ . Antud on ka üks horisontaalne valguskiir ning selle lõikepunktid eesmisse fokaaltasandi ning läätsega (vastavalt punktid  $K$  ja  $L$ ). Joonestage antud vaates lisalehel kiire edasine käik ning lõikepunkt tagumise fokaaltasandiga. Põhjendage lahendust.

**Ü385 Toru ★★★**

Autor: Jaan Kalda, lõppvoor, 2012, G 6

Peegeldavate siseseintega toru põhjas on punktvalgusallikas, vt joonist. Toru si-sediameter on  $d = 12\text{ mm}$ , toru pikkus  $l = 60\text{ mm}$ . Vastu toru lahtist otsa on paigutatud koondav lääts fookuskaugusega  $F = 36\text{ mm}$  ning toru otsast kaugusele  $L = 90\text{ mm}$  ekraan, millele kinnitatud millimeeterpaberile on märgitud lõikepunkt optilise peateljega  $O$ . Visandage kujutis, mida võib näha ekraanil.

**Ü386 Mikroskoop ★★★**

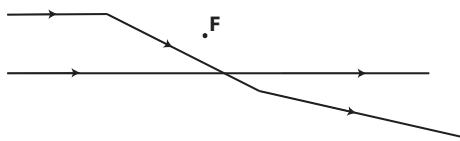
Autor: Valter Kiisk, lõppvoor, 2013, G 7

Nn digitaalne mikroskoop koosneb piki optilist peatelge nihutatavast läätsest (objektiivist), mis tekitab vaadeldavast esemest töelise kujutise elektroonilise maat-rikssensori pinnale. Terav kujutis tekib objektiivi kahe erineva asendi korral. Vas-tavate joonsuurenduste suhteks määratigi 25. Kummas asendis ja mitu korda on sen-sori pinnaühikule langev kiirgusvöimsus suurem? Võib eeldada, et läätse mõöt-med on palju väiksemad tema kaugusest objektist.

**Ü387 Optiline skeem ★★★**

Körvaloleval joonisel on kujutatud kahe algsele paralleelsele kiire käik läbi kahe ühesuguse kumerläätse, mis ei asetse paralleelselt. Läätsede fookused ühtivad ning asuvad punktis F. Konstrukueerige skeemile läätsed koos optiliste peatelgedega.

Autor: Erkki Tempel, lahtine, 2014, G 7

**Ü388 Luup ★★★**

Autor: Valter Kiisk, lõppvoor, 2016, G 6

Kui asetada poolkera-kujuline klaaskeha (lääts) tasapinnalise poolega vastu paberit, on võimalik vähemalt läätse keskosa ümbruses näha paberi pinna suurendatud kujutist. Kui mitmekordne kujutis saadakse, vaadeldes kauguselt, mis on hulga suurem läätse mõõtmetest? Klaasi murdumisnäitaja  $n = 1,5$ .

**Ü389 Gravitatsioonilääts ★★★**

Autor: Mihkel Kree, piirkonnnavoor, 2007, G 10

Üldrelatiivsusteooria ennustab, et mustast august möödumisel kaldub valguskiir gravitatsiooni töltu kõrvale oma esialgsest liikumissuunast nurga  $\varphi = 4GM/c^2r$  võrra, kus  $M$  on musta augu mass ning  $r$  trajektoori lähima punkti kaugus selleni. Oletame, et must auk satub täpselt vaatleja ja tähe vahele nii, et kaugus vaatlejast musta auguni on  $L_1$  ning mustast august täheni  $L_2$ . Missugune on tähe kujutis vaatleja jaoks (põhjendage oma vastust kiri käigu visandi abil) ning kui suur on kujutise nurkläbimõõt? Kuna vaatlejani jõudvate kiri jaoks on  $r$  palju väiksem tähe kaugusest, võib kasutada väikeste nurkade lähendust  $\sin \alpha \approx \tan \alpha \approx \alpha$ .

**Ü390 Nurgapeegel ★★★**

Autor: Andreas Valdmann, lõppvoor, 2016, G 8

Jukul oli katsetamiseks kolm ruudukujulist tasa-peeglit. Ühte peeglisse vaadates ja paremat silma kinni pigistades nägi ta endast joonisel kujutatud peegelpilti. Järgmisena paigutas Juku kolm peeglit sedasi, et need moodustasid kuubi kolm tahku, millel on üks ühine tipp. Sealjuures jäid peegelpinnad kuubi sisemisse poolele. Joonistage peegelpilt, mida paremat silma kinni pigistav Juku endast otse nurgapeegli nurka vaadates nägi ja põhjendage tulemust konstrukueerimise teel.



**Ü391 Akvaarium ★★★★☆**

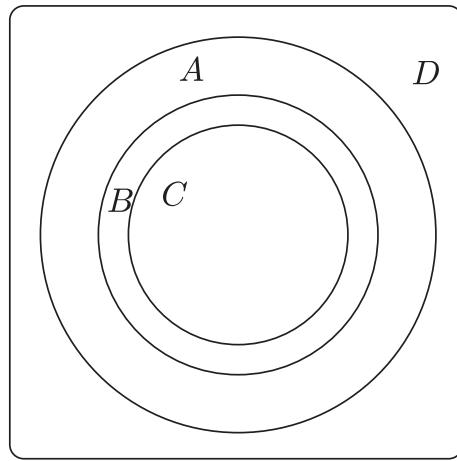
Autor: tundmatu, lahtine, 2005, G 10

Leidke maksimaalne suurendus  $k$ , mille tekitab sfäääriline akvaarium, kui vaadata väljastpoolt selles ujuvat kala. Suurenduse all mõistame siin kala kujutise ja tegeliku kala suuruste suhet. Vee murdumisnäitaja  $n = 1,3$ . Väikeste nurkade puhul kehtib ligikaudne võrdus  $\sin \alpha \approx \alpha$ .

**Ü392 Kuup ★★★★☆**

Autor: Jaan Kalda, lõppvoor, 2007, G 8

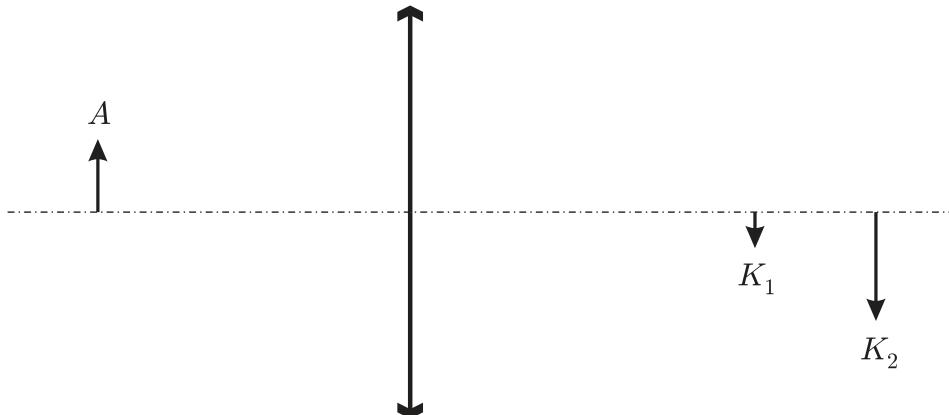
Läbipaistvast klaasist tehtud kuubis on suur kerakujuline õönsus, mis on täidetud sinist värviga gaasiga. Kuup lebab kollaste seintega toas valgel põrandal. Juuresolev kuubi joonis on tehtud kuubi kohalt pildistatud foto põhjal, millelt on eemaldatud kõik värvid ning jäetud alles selgeltnähtavad kontuurid ja erivärviliste piirkondade eraldusjoonid (joonte kujud ja mõõtmed on täpselt sellised nagu fotol). Kuubi mõõtmest lugeda hulga väiksemateks põrandada mõõtmestest ning kõrgusest, millelt on tehtud joonise aluseks olnud foto. Millistele värvidele vastavad tähed  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$ ? Pöhjendage vastust. Leidke klaasi murdumisnäitaja.



**Ü393 Nõguspeegel ★★★★**

Autor: Mihkel Kree, lõppvoor, 2007, G 9

Optiline süsteem koosneb kumerläätsest ja nõguspeeglist, mille optilised peatuled ühtivad. Kumerpeegli asukohta pole joonisel märgitud. On teada, et objektist  $A$  tekib teisele poole läätse kaks kujutist  $K_1$  ja  $K_2$ . Konstrueerige kumerpeegli köveruskeskpunkt  $O$  ja kumerpeeglis objektist  $A$  tekinud näiv kujutis  $A'$ . Eeldada, et optilises süsteemis on nurgad piisavalt väiksed, et sfäärilisi aberratsioone ei teki.

**Ü394 Kärbes ★★★★**

Autor: Aigar Vaigu, piirkonnavoor, 2008, G 10

Kärbes on merevaigutükis, mille murdumisnäitaja on  $n = 1,6$ . Tüki üks pinnaosa on sfääriline köverusaadiusega  $r = 3 \text{ mm}$ . Kui vaadata kärbse pead läbi selle pinnaosa, siis näib pea asuvat köveruskeskpunkt läbival sirgel  $k = 5 \text{ mm}$  sügavusel merevaigus. Kui sügaval on kärbse pea tegelikult?

*Märkus:* kasutada väikeste nurkade lähendust  $\tan \alpha \approx \sin \alpha \approx \alpha$ , kus  $\alpha \gg 1$  on väike nurk mõõdetuna radiaanides.

**Ü395 Punktallikad ★★★★**

Autor: Jaan Kalda, lõppvoor, 2010, G 9

Juuresoleval joonisel on neli punkti, millest kaks on valgusallikad ja kaks nende tõelised kujutised, mille on tekitanud õhuke lääts. Leidke konstrueerimise teel läätse tasand ja optiline peatulg. Kui võimalusi on rohkem kui üks, siis leidke need kõik.

**Ü396 Optiline süsteem ★★★★☆**

Autor: Andreas Valdmann, lõppvoor, 2011, G 8

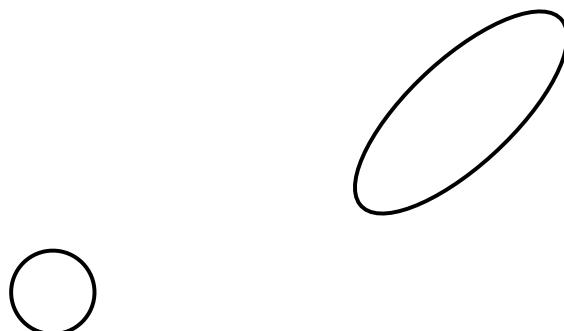
Klaasist murdumisnäitajaga  $n$  on valmistatud õhuke kaksikkumer lääts, mille mõlema pinna köverusraadius on  $r$  (läätse paksus  $d \gg r$ ). Läätse üks pind kaetakse peegeldava metallikihiga. Leidke kumerläätsest ja nõguspeeglist tekinud optilise süsteemi fookuskaugus.

Vihje: fookuskauguse leidmiseks võib vaadelda optilise peatelje lähedasi kiiri, mis levivad selle suhtes väikese nurga all. Sel juhul saab rakendada väikeste nurkade valemit  $\sin \alpha \approx \tan \alpha \approx \alpha$ , kus  $\alpha$  on radiaanides.

**Ü397 Ring ja ellips ★★★★☆**

Autor: Jaan Kalda, lõppvoor, 2015, G 7

Juuresoleval joonisel on kujutatud ring ja sellest koondava läätse poolt tekitatud kujutis. Leidke läätse keskpunkt, optiline peatulg ja fookus.

**Ü398 Kaamera ★★★★☆**

Autor: Ardi Loot, lõppvoor, 2017, G 8

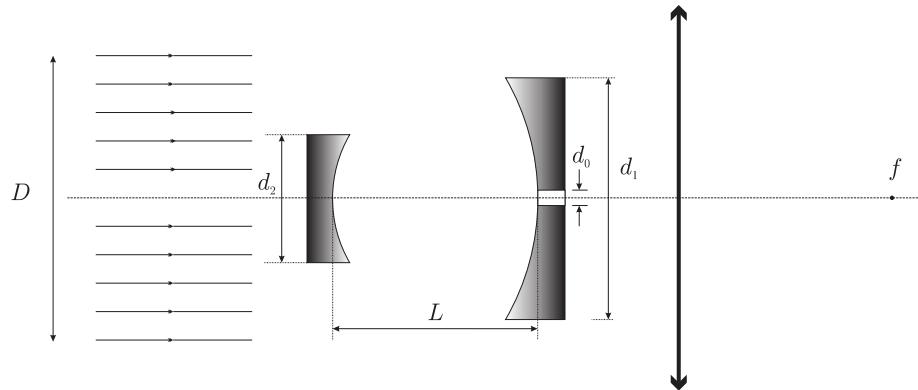
Juku pildistab virmalisi isehitatud kaameraga, mis koosneb ruudukujulisest valgustundlikust elemendist küljepikkusega  $2h = 2,0\text{ cm}$  ja kumerläätsest fookuskaugusega  $f = 14\text{ cm}$ . Jukule ei meeldi, et kaamera on niivõrd suur ja ta tahab, et kaamera oleks maksimaalselt  $L_m = 7,0\text{ cm}$  pikk (kaamera pikkus on kaugus valgustundlikust elemendist välimise läätseni). Selleks paigaldab ta vana kumerläätse asemel uue kumerläätse fookuskaugusega  $f_2 = 3,0\text{ cm}$  valgustundlikust elemendist kaugusele  $L_m$ . Kui suure fookuskaugusega ja kaugele kumerläätsest peaks Juku süsteemi lisama ühe nõgusläätse, et säiliks kaamera esialgne vaatenurk?

**Ü399 Sähvatus ★★★★☆**

Autor: Mihkel Kree, lõppvoor, 2006, G 9

Optiline süsteem koosneb kahest nõguspeeglist ja kumerläätsest (vt joonist), mille optilised peateljad ühtivad. Ringikujulise ristlöikega valgusimpulss siseneb süsteemi optilise peatelje sihis ning valgusviihu telg ühtib sellega. Peeglite köverusraadiused on  $R_1 = 8\text{ m}$  ja  $R_2 = 4\text{ m}$  ning peeglite vahekaugus  $L = 6\text{ m}$ . Peeglite läbimõõdud on  $d_1 = 160\text{ mm}$  ja  $d_2 = 96\text{ mm}$ . Kiire läbimõõt on  $D = 192\text{ mm}$ .

Läätse läbimõõt on suurem valgusvihu omast. Suurema peegli keskel on ava läbimõõduga  $d_0 = 1 \text{ mm}$ . Joonistage valguse intensiivsuse ajaline kulg kumerläätse fookuses  $f$ . Eeldage, et süsteemi saabuva impulsi kestvus  $\tau \ll L/c$ . Valguse kiirus  $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$ .



#### Ü400 Klaassilinder ★★★★

Autor: Jaan Kalda, lõppvoor, 2014, G 10

Klaassilindri välispinnal märgitakse markeriga punkt. Kui seda silindrit vaadata suurelt kauguselt (hulga suuremalt kui silindri raadius) nii, et punkt paistab läbi silindri selle sümmeetriateljel olevat, siis on lisaks näha veel kahte punkti kujutist. Üks kujutis on näha ühel ja teine teisel pool sümmeetriatelge. Kui silindrit keerata ümber oma sümmeetriatelje, siis teatud hetkel sulavad kaks punkti kujutist kokku ning kaovad ära. Kolmas kujutis jäääb alles. Kui silindrit edasi keerata, siis hetkel, kui selle pöördenurk algasendi suhtes on  $15^\circ$ , kaob ka kolmas kujutis, nõnda et markeriga tehtud punkti polegi enam näha. Kui suur on klaasi murdumisnäitaja?

## Varia

- Ü401 Kontraktsioon ★** Autor: EFO žürii, piirkonnnavoor, 2018, G 1
- Omavahel segatakse  $V_v$  liitrit vett ja  $V_p$  liitrit piiritust nii, et tekkinud lahuse ruumala  $V = 1 \text{ dm}^3$  ning lahuses on massi järgi  $p = 44,1\%$  piiritust. Leidke omavahel segatud vee ja piirituse ruumalad  $V_v$  ja  $V_p$ . Lahuste kokkuvalamisel esineb  $\gamma = 6\%$ -line kontraktsioon – saadud lahuse ruumala on 6% väiksem kui vee ja piirituse ruumalade summa. Vee tihedus  $\rho_v = 1000 \text{ kg/m}^3$  ning piirituse tihedus  $\rho_p = 790 \text{ kg/m}^3$ .
- Ü402 Tunnel ★** Autor: Jaan Kalda, lahtine, 2008, G 3
- Rong, mis sõidab kiirusega  $v = 50 \text{ km/h}$ , sisenes hästi pikka tunnelisse. Nii rongi kui tunneli ristlõiget lugeda ruuduks küljepikkusega vastavalt  $a = 4 \text{ m}$  ja  $b = 6 \text{ m}$ . Hinnake, milline on tuule kiirus rongi aknast mõõdetuna.
- Ü403 Mobiililaadija ★★** Autor: Mihkel Kree, piirkonnnavoor, 2014, G 4
- Leiutajad on pakkunud välja toreda seadme matkainimestele oma telefoni laadimiseks. Ühe saapa talla sisse pannakse mehhanism, mis toimib amortisaatorina. Iga kord kui kannale toetutakse, muundatakse mehaaniline töö väikese elektrigeneraatori abil elektrienergiaks. Oletame, et matkaja mass  $m = 60 \text{ kg}$  ja ühe sammu ajal vajub tald kokku  $h = 5 \text{ mm}$  võrra. Antud seadme kasutegur  $\eta = 0,2$ . Matkaja keskmiseks sammupaa pikkuseks ehk kahe järjestikuse samale kannale astumise vahemaaks võtame  $d = 1,5 \text{ m}$ . Nüüd tuleb vaid ühendada telefon juhtmega saapa külge jaaku laadimine võib alata.
- Arvestage, et tüüpilises nutitelefonis on liitium-polümeeraku, mis töötab pingel  $U = 3,7 \text{ V}$ . Samuti arvestage, et kui telefon töötaks keskmisel voolutugevusel  $I_k = 130 \text{ mA}$ , suudaksaku vastu pidada  $T = 10 \text{ tundi}$ . Arvutage, kui pika maa peab matkaja maha kõndima, et tühi telefoniaku uuesti täis laadida.
- Ü404 Laser ★★** Autor: Valter Kiisk, lõppvoor, 2017, G 3
- Laserkiir ühtlase diameetriga  $d = 1 \text{ mm}$  langeb risti kiilukujulise klaasplaadi esimesele pinnale (pindade vaheline nurk  $\varphi = 2^\circ$ ). Laserkiire koosseisus on monokromaatased komponendid laineplikkustega  $\lambda_1 = 355 \text{ nm}$  ja  $\lambda_2 = 532 \text{ nm}$ . Klaasi murdumisnäitajad nendel laineplikkustel on vastavalt  $n_1 = 1,48$  ja  $n_2 = 1,46$ . Leidke kaugus  $l$  klaasplaadist, kus erineva laineplikkusega valguskiired on teineteisest täielikult eraldunud.
- Ü405 Kaubaauto ★★** Autor: tundmatu, lahtine, 2004, G 4
- Kaubaauto, pikkusega  $l = 10 \text{ m}$ , möödub kiirusega  $v = 92 \text{ km/h}$  paigalseisvast pilukatikuga varustatud fotoaparaadist. Fotoaparaat teeb kaubaautost pildi, kusjuures säriaeg on  $t_s = 1/1500 \text{ s}$ . Negatiivil on kaubaauto kujutise pikkus  $d = 32 \text{ mm}$ . Negatiivi suurus on  $36 \times 24 \text{ mm}$ . Kui palju lühem või pikem oleks kaubaauto kuju, kui oleks pildistatud paigalseisvat autot? Aeg, mille jooksul katik läbib kaadri,

on  $t_k = 1/30$ s. Kui suure pildi saab sellest negatiivist valmistada, kui me tahame, et hõguste piirjoonte laius pildil ei ületaks  $\delta = 0,1$  mm?

Vihje. pilukatikuks nimetatakse varje-ekraani, milles on kindla laiusega (kitsas) pilu (kasutatakse peegelkaamerates). See pilu liigub filmi pinna vahetus läheduses kujutise eest läbi. Seega langeb negatiivi igale punktile valgust ainult siis, kui pilu on antud punktiga kohakuti. Säriaeg (aeg, mille jooksul antud punkt saab valgust) sõltub pilu laiusest ja liikumiskiirusest. Eeldagem, et tegemist on horisontaalse pilukatikuga, s.t. pilu liigub kas vasakult paremale või paremalta vasakule

#### Ü406 Kuu ★★

Autor: Urmo Visk, lõppvoor, 2006, G 5

Peegeldusteguriks nimetatakse pinnalt peegeldunud ja pinnale langenud valgusvõimsuste suhet. Säriaeg on ajavahemik, mille välitel langeb fotoaparaadis objektivi läbinud valgus filmilindile. Päikeselisel sügispäeval on mingi objekti pildistamisel optimaalne säriaeg  $t_1 = 1/8000$  s. Sama objekti pildistamisel öösel, kui paistab täiskuu, on optimaalne säriaeg  $t_2 = 160$  s. Mõlema pildi tegemisel on erinev vaid säriaeg. Hinnake Kuu pinna kesknist peegeldustegurit. Kuu kaugus Maast  $R = 384\,000$  km ja Kuu raadius  $r = 1740$  km. Kvaliteetse pildi saamiseks peab filmile langev valgusenergia pääval ja öösel olema sama väärtsusega ehk fotografeerimisel võib valgustatuse ja optimaalse säriaaja lugeda pöördvõrdeliseks.

#### Ü407 Pindpinevus ★★

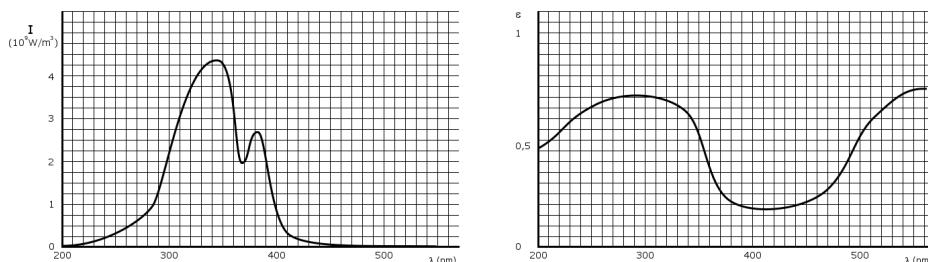
Autor: Koit Timpmann, lahtine, 2011, G 2

Klaastoru (raadius  $r_1$ ) asetatakse jämedama klaastoru sisse nii, et nende teljed ühtivad. Seejärel pannakse mõlemad püsti vette. Leidke, kui suur peaks olema jämedama toru siseraadius  $r_2$ , et veetase oleks mõlemas klaastorus sama. Eeldage, et torude seinad on tühiselt õhukesed.

#### Ü408 Smurf solaariumis ★★

Autor: Ants Remm, lahtine, 2011, G 4

Smurf veetis solaariumi lampide all ajavahemiku  $t = 10$  min. Kui suure soojushulga  $Q$  sai Smurf? Joonistel on toodud Smurfile langenud valguse spekter  $I$  (intensiivsus lainepikkuse kohta sõltuvalt valguse lainepikkusest, ühik  $10^9 \text{ W/m}^3$ ) ning Smurfi neeldumisspekter  $\varepsilon$  (neelatud ja peale langenud valguse intensiivsuste suhte sõltuvus valguse lainepikkusest). Smurfi efektiivne pindala, kuhu langeb valgus, on  $S = 0,1 \text{ m}^2$ .



**Ü409 Valgustid ★★**

Autor: Valter Kiisk, piirkonnnavoor, 2016, G 7

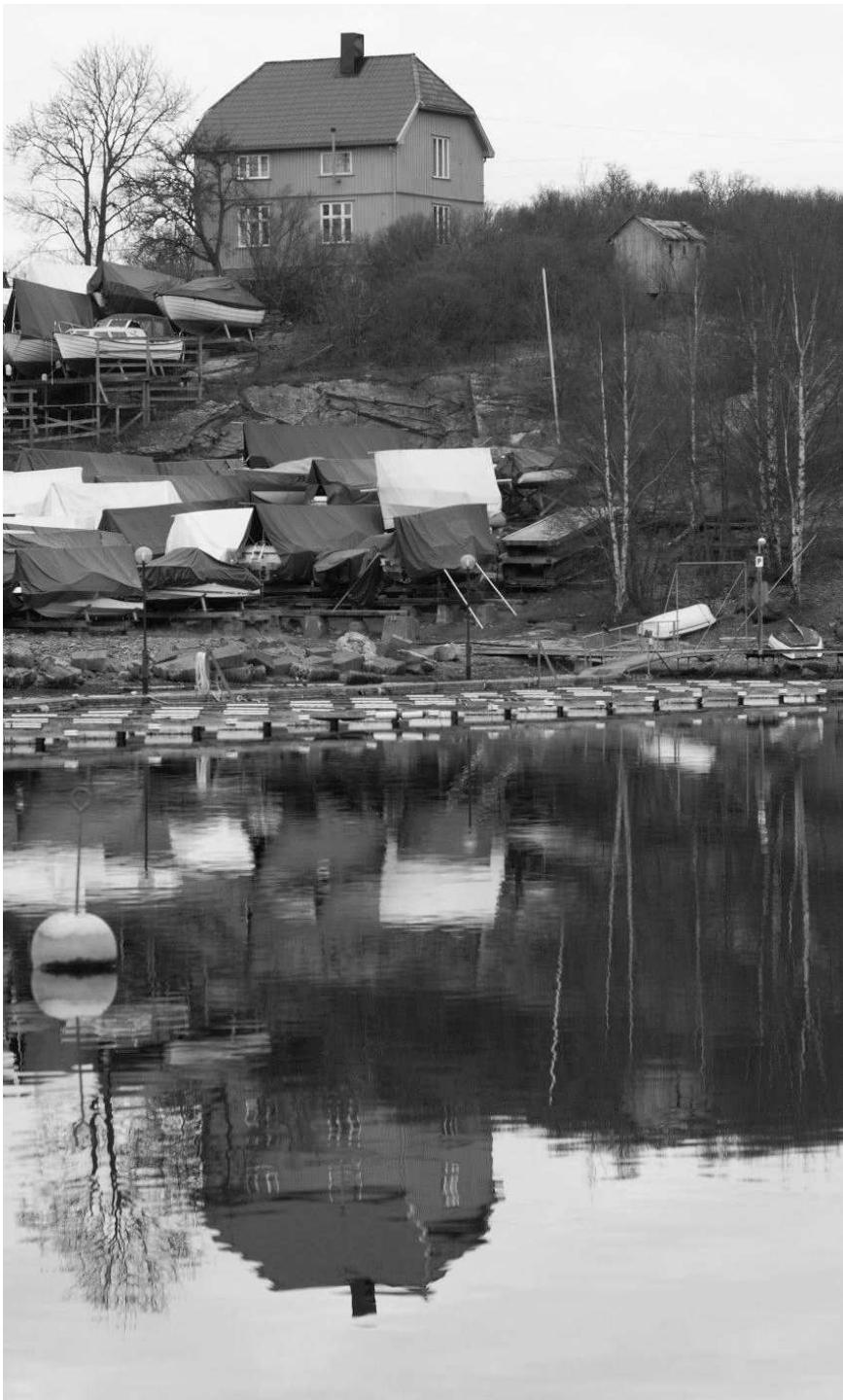
Luminestsentstorust kaugusel  $l_1 = 15\text{ cm}$  mõõdeti valgustatuseks  $L_1 = 8400\text{ lx}$ . Luminestsentstoru võib lugeda hulga pikemaks kaugusest  $l_1$ . Seevastu üksikust LED-pirnist kaugusel  $l_2 = 30\text{ cm}$  mõõdeti valgustatuseks  $L_2 = 2600\text{ lx}$ . Kontoriruumis kulgevad luminestsentstorud ühe sirge katkematu rivina üle kogu ruumi, paiknedes töötasapinnast körgusel  $h_1 = 1,8\text{ m}$ . Laualambi LED-pirn paikneb körgusel  $h_2 = 40\text{ cm}$  laua pinnast. Kui suur valgustatus saavutatakse otse valgusti all eraldi üldvalgustuse ja kohtvalgustuse kasutamisel?

*Märkus.* valgustatus iseloomustab ajaühikus pinnaühikule langevat valgusenergiat.

**Ü410 Maja ★★★**

Autor: Jaan Kalda, lõppvoor, 2008, G 4

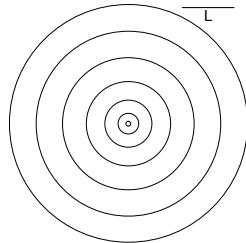
Fotol kujutatud maja alumise korruse körgus (mõõdetuna esimese korruse akna alumisest servast teise korruse akna alumise servani) on 3 meetrit. Kui kõrgel vee-pinnast on maja (täpsemalt, tema vundamendi ülemine serv)?



**Ü411 Tiik ★★**

Autor: Taavi Pungas, lõppvoor, 2013, G 6

Vaatleme tiiki visatud kivi ümber tekkinud lainetust. Kui kivi kukub vette, tekib suur hulk erinevate lainepekkustega häiritusi, millest igaüks levib omaette kiirusega. Nende liitumisel moodustub lainehari, mille liikumist saame vaadelda. Joonisele (suuremalt lisalehele) on iga kindla ajavahemiku järel kantud selle laineharja asukoht, mõõtkavaks sirglöök pikkusega  $L$ . Laineharja kiirus  $v$  sõltub seda parajagu moodustavate komponentide lainepekkustest  $\lambda$  ja vee sügavusest  $h$ . Kui kivi vettekukkumisest möödunud aeg  $t$  on väike, siis koosneb lainehari lainepekkustest  $\lambda \ll h$  ning laineharja kiirus sõltub ajast seose  $v \approx \frac{gt}{\pi}$  järgi. Kaugemal, kus laineharja moodustavad häiritud lainepekkusega  $\lambda \gg h$ , liigub see kiirusega  $v \approx \sqrt{hg}$ . Hinnake sügavust  $h$  eeldusel, et see oli terve tiigi ulatuses sama. Vastus andke suhtena  $h/L$ .

**Ü412 Radoon ★★**

Autor: Mihkel Kree, lõppvoor, 2016, G 5

Graptoliitargilliit (tuntud ka diktüoneemakilda nime all) on Põhja-Eestis paljanduv setteline savikivim, mis sisaldab hulgaliselt haruldasi elemente, muu hulgas uraani. Üks tonn kivimit sisaldab 300 g uraan-238 isotoopi. Uraani levinuima isotooli, aatommassiga 238, poollestusaeg  $\tau_U = 4,5$  miljardit aastat ning selle lagunemisahela vaheetapiks on radioaktiivne element radoon, aatommassiga 222 ning poollestusajaga  $\tau_{Rn} = 3,8$  päeva. Radoon on gaas, mida peetakse kopsuvähi tekijataks, sest sissehingamisel satuvad organismi selle radioaktiivsed laguproduktid. Seetõttu sättestavad vastavad normatiivid, et hoonete ruumiõhus peab radooni aktiivsus olema väiksem kui  $200 \text{ Bq/m}^3$ , kus Henri Becquereli järgi nimetatud ühik Bq tähistab üht tuuma lagunemist sekundis.

Matkaja tõi matkalt pahaaimamatult koju kaasa ühe graptoliitargilliidi tükkise massiga  $m$  ning paigutas selle magamistuppa kapi peale. Arvestage lihtsustatult, et magamistoas ruumalaga  $V = 25 \text{ m}^3$  õhuvahetust ei toimu ning et kogu tekkiv gaasiline radoon väljub kivimist. Leidke kivimitükkise suurim ohutu mass  $m$ , nii et sellest tingitud radooni aktiivsus jäääks veel lubatud normidesse, kui kivimit hoida pikka aega toas.

Märkus. aatommassiühik  $u = 1,7 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$ .

**Ü413 Vihmasadu ★★★**

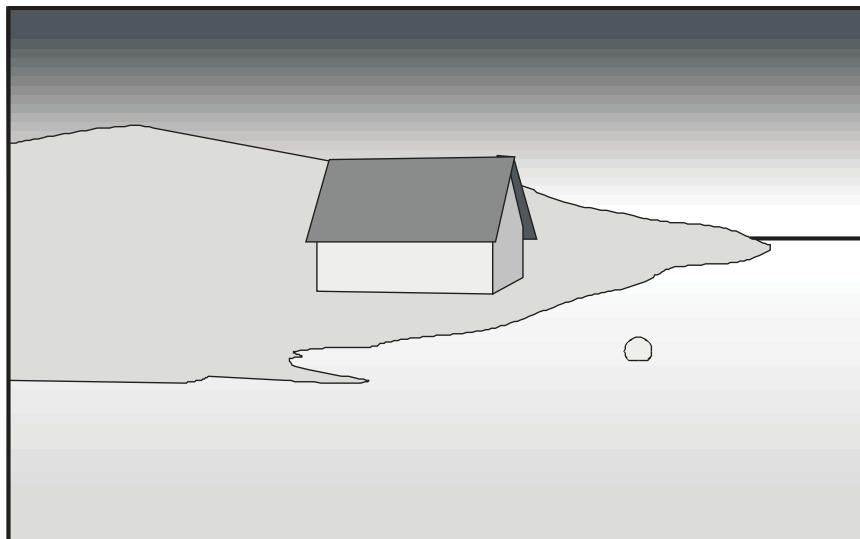
Autor: Jaan Kalda, piirkonnavoor, 2012, G 7

Viilkatusega maja katus on peegelsümmeetriiline: vertikaalne sümmeetriatasand on ida-läänesuunaline ning katuse põhja- ja lõunaküljed on omavahel risti. Mölemal katusepoolel on vihmaveerenn, mis kogub katusele langeva vee ning suunab selle tünni. Sajab vihma ning puuhub lõunatuul  $u = 6,0 \text{ m/s}$ ; lõunaküljel paiknev tünn täitub 2,0 korda kiiremini kui põhjaküljel paiknev tünn; võib lugeda, et katuse läheduses piiskade langemissuund oluliselt ei muutu. Milline on piiskade langemise keskmine kiirus (st kiiruse vertikaalkomponent)?

**Ü414 Maja ★★★★**

Autor: Jaan Kalda, lahtine, 2008, G 9

Juuresolev joonis on tehtud foto põhjal. Pildistamise hetkel asus fotoaparaat 2 m kõrgusele veepinnast. Kasutades antud joonist ja joonlauda määrake nii täpselt kui võimalik vees ujuva poi läbimõõt!

**Ü415 Lööklaine ★★★★**

Autor: Jaan Kalda, lõppvoor, 2015, G 6

Elektrostaatilist lööklainet, mis levib kiirusega  $w$  piki  $x$ -telge, võib kirjeldada elektrilise potentsiaali abil:  $U = 0$  kui  $x < wt$  ning  $U = U_0$  kui  $x > wt$ . Millise kiiruse  $v$  omandab lööklaine mõjul algsest paigal seisnud osake massiga  $m$  ning laenguga  $q$ ? Vastus andke sõltuvana potentsiaalbarjääri kõrgusest  $U_0$ . Pöörake tähelepanu asjaolule, et see, kummale poole barjääri osake jääb, sõltub  $U_0$  väärustest.

**Ü416 Õhupalli vari ★★★★★**

Autor: Jaan Kalda, lahtine, 2013, G 10

Päikesepaistisel päeval hõljub õhus kerakujuline läbipaistmatu õhupall, mis jätab horisontaalsele maapinnale varju, kusjuures poolvarju pikkus on 5,0 m ja laius 2,5 m ning täisvarju pikkus 1,0 m. Kui suur on palli läbimõõt ja kui kõrgel see on maapinnast? Päikese näiv nurkläbimõõt (see on nurk, mis moodustub kahe kire vahel, mis on tömmatud vaatleja silma juurest Päikese diameetri otspunktide juurde) oli sel päeval  $\alpha = 0,53^\circ$ .

## Laineoptika

### Ü417 Kile ★★★★

Autor: Jaan Kalda, lahtine, 2008, G 8

Selleks et vähendada peegeldusi optilistelt klaasidelt, kaetakse nende pinnad õhukese läbipaistva kilega. Leida, millise paksusega peaks olema selline kile, kui klaasi murdumisnäitaja on  $n_0 = 1,5$  ja kile oma  $n_1 = 1,3$ . Eeldada, et kile on optimeeritud risti langeva rohelise valguse jaoks lainepeikkusega  $\lambda = 530 \text{ nm}$ .

### Ü418 Kunstinäitus ★★★★★

Autor: Jaan Kalda, lõppvoor, 2009, G 10

Kunstinäituse saal kujutab endast valgete seintega suurt tuba, mida valgustatakse monokromaatilise rohelise valgusega (lainepeikkus  $\lambda = 550 \text{ nm}$ ). Sellel toal on siledast klaasist põrand; klaasi alumine pind on värvitud mustaks, ülemine pind on aga kaetud õhukese läbipaistva värvitu kilega. Keset tuba seisev näituseküllastaja näeb enda ümber põrandal heledaid ja tumedaid ringikujulisi vööte, kusjuures ta ise asub nende ringide keskpunktis — sõltumata sellest, kus kohas ta parajasti seisab. Näituseküllastaja uurib asja lähemalt: kükitab ja vaatab kaugemale, seejärel püüab vaadata otse alla. Maksimaalselt õnnestub tal loendada  $N = 20$  heledat vööt. Kui paks on klaasi kattev kile? Klaasi murdumisnäitaja  $n_0 = 1,6$ , seda katva kile oma  $n_1 = 1,4$ .

# Vihjad

**V1**

**V2**

**V3**

**V4**

**V5**

**V6**

**V7**

**V8**

**V9**

**V10**

**V11** Kangi kriitilise nurga korral kehtib varda jaoks jõumomentide tasakaal.

**V12** Kehtib Newtoni II seadus ning jõumomentide tasakaal (näiteks ühe toru otspunkt suhtes).

**V13** Tooreaktsiooni käärude telje sihiline komponent peab olema tasakaalustatud hõõrdejõu poolt.

**V14** Kuuli hoiab augus või „lükkab“ august välja üks ja sama jõud — kuulile mõjuv raskusjõud, mis on suunatud vertikaalselt alla. Kuul on augus, kui raskusjõu vektor läbib augu põhja, ja kukub, kui see väljub sellest.

**V15** Libisemise piiril tasakaalustab lund katuselt alla lükkavat raskusjõudu hõõrdejõud, kusjuures hõõrdejõud mõjub vaid lume kuivale osale.

**V16** Koheldes hõõrdejõudu tundmatuna, võime kasti jaoks kirja panna Newtoni II seaduse nii  $x$ - kui ka  $y$ -telje jaoks. Hõõrdejõu maksimaalne väärthus on  $F_\mu = N\mu$ , kus  $N$  on tooreaktsioon.

**V17** Liivahunniku maksimaalse kõrguse saavutamiseks peavad pindmised liivakihid olema libisemise äärel. Seega tasub vaadelda jõudude tasakaalu pindmiste liivaterade jaoks.

**V18** Kriitilise hõõrdeteguri väärtsuse korral kehtib jõumomentide tasakaal tuulepoolsete rataste telje suhtes.

**V19** Selleks, et süsteem oleks tasakaalus, peab mutter asuma täpselt nööri kinnituspunkt all.

**V20** Kuna nöör on venimatu, on mõlemad hammasrattad paigal ja seega tasakaalus. Kehtib nii jõudude kui ka jõumomentide tasakaal. Antud juhul on kõige mugavam vaadelda jõumomentide tasakaalu hammasrataste keskpunktide suhtes.

- V21** Jõu ülekanne toimub kangi põhimõttel, kus summaarne jõumoment pöördtelje suhtes on võrdne nulliga. Vastavad jõumomentide tasakaalu saab kirja panna nii käepideme kui ka lõiketerade jaoks.
- V22** Kuulile mõjub raskusjõud, niidi pinge, tooreaktsioon ning hõõrdejõud kuuli ja kassti vahel. Süsteemi lahendamise standardmeetod on rakendada Newtoni II seadust nii  $x$ - kui ka  $y$ -telje jaoks ning jõumomentide tasakaalu tingimust. Elu teeb lihtsamaks tähelepanek, et hõõrdejõu ja tooreaktsiooni võib kombineerida üheks jõuks, mille nurk kasti vertikaali suhtes on kuni  $\arctan \mu$ , ning seejärel täheldada, et tasakaalu korral peavad kuulile mõjuvad kolm jõudu lõikuma ühes punktis.
- V23** Prussi asend on stabiilne, kui väikse kõrvalekalde korral muutub prussi potentsiaalne energia suuremaks. Teisisõnu peab massikese kõrgemale tõusma.
- V24** Ülemine klots ei libise, kui kiirendusest põhjustatud jõud ei ületa seisuhõõrdejõudu. Kui ülemine klots ei libise, võib kahte klotsi käsitleda ühtse kehana, mille kiirendus võib maksimaalselt olla  $\mu_2 g$ .
- V25** Hõõrdevaba ploki korral on pinge põhiköies jäav, muutub vaid selle suund. Lisaks peab tasakaalutingimuse rahuldamiseks ploki kinnituse pingे olema võrdne plokki läbiva põhiköie pingete summaga. Lahendamise jaoks on mugav alustada päastja poolsest otsast ning öelda, et vastav tõmbejõud on  $F$ .
- V26** Möistlik on nööri pingi jaotada horisontaalseks ja vertikaalseks komponendiks  $T_x$  ja  $T_y$ . Sellisel juhul kasvab Juku saabastele mõjuv tooreaktsioon  $T_y$  vörra ning kelgule mõjuv tooreaktsioon kahaneb  $T_y$  vörra. Minimaalse kelgunööri nurga puhul on Jukust tulenev hõõrdejõud võrdne kelgu hõõrdejõuga.
- V27** Ülesande lahendamiseks tuleb küsida: (a) kas antud jõust piisab üle serva kantimiseks; (b) ega klots seejuures libisema ei hakka? Mõlema küsimuse analüüsimeeks on mugav rakendada jõumomentide tasakaalu. Lisaks on kasulik teada, et hõõrdejõu ja tooreaktsiooni resultantjõu maksimaalne nurk vertikaali suhtes on  $\arctan \mu$ .
- V28** Et kuuli  $C$  kiirusvektor on risti sirgega  $AC$ , siis hetkeline pöörlemiskese asub sellel sirgel. Seega, kui kuul  $A$  hakkab libisema, siis on selle kiirusvektor samuti (ning järelikult ka hõõrdejõu vektor) risti sirgega  $AC$ . Piirjuhtumil, kui kuulide masside suhe on selline, et kuul  $A$  hakkab vaevu liikuma, on hetkeline pöörlemiskese väga läheidal punktile  $A$ .
- V29** Kehtib nii jõudude kui ka jõumomentide tasakaal. Ülesandes on kolm huviväärset punkti: rõnga keskpunkt, massikese ning völli ja rõnga puutepunkt.

- V30** Silindril peab kehtima nii jõudude kui ka jõumomentide tasakaal. Jõumomentide tasakaalu on mugav vaadelda telje suhtes, mis läbib toetuspunktit, sest siis on hõõrdejõu ja tooreaktsiooni jõuõlg 0.
- V31** Kuna tagumine ratas on õhku tõusmas, siis sellele jõude ei rakendu. Ainsad jalgrattale mõjuvad jõud on raskusjõud ning jõud esiratta ja maapinna kontaktpunktis. Lisaks on teada, et peab kehtima nii jõudude kui jõumomentide tasakaal iga punkti suhtes.
- V32** Ülesande geomeetriat lihtsustab oluliselt  $H \ll L$ . Lisaks kehtib süsteemis mehaaniline tasakaal. Selle jaoks on mugav vaadelda liini ühe poole jõudude/jõumomendi tasakaalu.
- V33** Pulgale mõjuvad neli erinevat jõudu: silindri ja pulga vaheline tooreaktsioon, raskusjõud, maa ja pulga vaheline tooreaktsioon ning hõõrdejõud. Pulga asend on stabiilne, kui jõudude ja jõumomentide tasakaalu tingimustest avaldatav hõõrdejõud ei ületa maksimaalset seisuhõõrdejõudu ning kui varda alaots ei töuse õhku. Mõlemat tingimust väljendavad erinevad võrratused, mis peavad samaaegselt kehtima.
- V34** Konnale mõjub kolm jõudu: raskusjõud, rõhumisjõu ja hõõrdejõu resultant ning iminapa tekitatud tõmbejõud. Rõhumisjõu ja hõõrdejõu resultandi nurk pinna normaali suhtes on kriitilisel juhul  $\arctan \mu$ . Tasakaalu korral peavad antud jõud üksteist tasakaalustama, ehk moodustuma kolmnurga.
- V35** Tasakaalu korral peab iga toru jaoks kehtima jõudude ning jõumomentide tasakaal. Alumiste torude jaoks on jõumomentide tasakaalu kõige mugavam vaadelda maapinna puitepunkti suhtes, sest sellisel juhul on maapinna hõõrdejõu panus 0. Lisaks paneme tähele, et kahe alumise silindri vahel rõhumisjõudu ei ole, sest see kaob niipea, kui alumised silindrid natukeneagi üksteisest eemalduvad.
- V36** **a)** Jõu määramiseks on vajalik leida, kui palju muutub tungraua kõrgus ühe vända täispöördega. Selle jaoks võib rakendada Pythagorase teoreemi tungraua pikkuse jaoks ja seda diferentseerida.  
**b)** Selleks, et tunraud oleks ilma väntamiseta hõõrdejõu tõttu tasakaalus, peab hõõrdejõud täpselt komponeerima eelnevatas alamülesandes leitud väntamiseks kuluva jõu.
- V37** Nöörile mõjuvad kolm jõudu: raskusjõud, nööri tooreaktsioon ning hõõrdejõud. Selleks, et tasakaalutingimusi kirja panna on mugav vaadelda õhus rippuvat osa ja plaadil lebavat osa eraldi. Seejuures peab arvestama ka nööri ja plaudi kokkupuutepunktis mõjuva nööri pingega.

- V38** Traadile mõjuvad kolm jõudu: raskusjõud ja traatide kontaktpunktis ning traadi ja silindri puutepunktis mõjuvad rõhumisjõud. Selleks, et traat tasakaalus oleks, peavad nende jõudude pikendused lõikuma ühes punktis (vastasel korral mõjuks kahe jõu lõikumispunkti suhtes kolmas jõud traadile nullist erineva jõumomendi-ga ja traat hakkaks liikuma).  
Stabiilsuse analüüs saab tähele panna, et kui „katus“ pöörleb tervikuna, siis selle massikese liigub mööda ringjoont.
- V39** Tasakaalu korral peab kehtima jõumomentide tasakaal. Kuna kehade süsteemile mõjuvad kolm jõudu, peavad jõudude pikendused lõikuma samas punktis, sest vastasel juhul saaksime valida kahe jõu pikenduse lõikepunktia ning selle punkti suhtes mõjuks kolmanda punkti poolt nullist erinev jõumoment. Lisaks paneme tähele, et kehadele  $A$  ja  $B$  mõjuvad sama absoluutväärtusega jõud (mõlemad on libisemise äärel) ning nende suunad on teada.
- V40** Pulgale mõjuvad kolm jõudu. Kuna niiti tömmatakse aeglaselt, võib eeldada, et süsteemis kehtib nii jõudude kui ka jõumomentide tasakaal. Jõumomentide tasakaalu tõttu peavad jõudude rakendussirged lõikuma ühes punktis.
- V41** Ratta liikumist on mugavam vaadelda autodega seotud süsteemis.
- V42** Autode hulga pidevuse tõttu on lõigul  $C$  teatud punkti ajaühikus läbivate autode arv võrdne lõikude  $A$  ja  $B$  vastavate arvude summaga.
- V43** Lihtsam on leida, kui palju aega kulus autol esimese  $4/5$  läbimiseks ning seejärel võtta  $t$  ja leitud aja vahe.
- V44** Ratturite sõiduaeg on leitav asjaolust, et esimene ja teine rattur läbisid sama pika vahemaa.
- V45** Kiirendamise ning pidurdamise käigus on rongi keskmise kiirus  $v_{\max}/2$ .
- V46** Möödasõidu käigus avaldub sõiduauto läbitud vahemaa ühtlase kiirenduse vale-miga  $x = vt + \frac{at^2}{2}$ .
- V47** Kuna rongid kiirenevad konstantse kiirendusega, saame avaldada läbitud vahemaa liikumisvõrandist  $s(t) = vt + \frac{1}{2}at^2$ . Lisaks peab mõlema rongi kokkupõrkeni läbitavate vahemaade summa olema  $s = 2750$  m.
- V48** Tasub vaadata, kuidas heli poolt läbitav vahemaa muutub vile laskmise alguses ja lõpus.
- V49** Peale teejupi, kus rong sõidab kiirusega 18 km/h, tulevad rongil ajakaod ka teelõi-kudel, kus rong pidurdab ja kiireneb.

- V50** Nii kiirabiauto lähenemise kui ka kaugenemise jaoks saab kirja panna Doppleri seaduse. Lisaks on sageduste suhe üheselt määratud asjaoluga, et kiirabiauto sireeni toon langes väikese tertsi võrra.
- V51** **a)** Kõige suurem kokkupõrke oht on siis, kui esimene on jõudnud täielikult seis-kuda (selles saab veenduda, kui liikuda tagumise autoga kaasa liukuvasse taustsüsteemi).  
**b)** Kahe liikuva objekti suhtelist liikumist on kasulik uurida liukuvas taustsüsteemis.
- V52** Löppsageduse avaldamiseks esialgse sageduse kaudu võib Doppleri seadust kaks korda järjest kasutada.
- V53** Ülesannet on mugavam vaadelda emma-kumma autoga seotud taustsüsteemis.
- V54** Graafikult on näha, et ainult kahel mõõdetud ajahetkel oli sportlase kiirus keskmisest madalama väärtsusega. See tähendab, et peatus mahtus täielikult antud kahe perioodi sisse.
- V55** Vaadeldes tuule ja jalgratturi kiirusi vektoritena, on võimalik geomeetriliselt konstrueerida vastavad tekstis toodud tingimused ning geomeetria põhjal tuule kiirus välja arvutada.
- V56** Tekkival seisulainel peavad olema sõlmed mölemas keele võnkuva osa otspunktis. Viiuli keelt puudutades peab ka keele puutepunkt sõlmpunkt olema.
- V57** Näitleja liikumist on mugav vaadelda kettaga seotud taustsüsteemis. Sellisel juhul pöörleb maapind nurkkiirusega  $\frac{2\pi}{T}$  ning näitleja könnib ketta peal kiirusega  $v$ .
- V58** Palli lendu on mugav vaadelda laboratoories taustsüsteemis. Sellisel juhul liigub pall pärast viset ühtlaselt ning sirgjooneliselt, kusjuures selle kiiruse vertikaalsihiline komponent on  $v$  ning horisontaalsihiline komponent  $\omega R$ .
- V59** Laine levik toimub geomeetrilise optika seaduste kohaselt. Kehtib  $\sin \alpha_1 / \sin \alpha_2 = v_1/v_2$ , kus  $v_i$  ja  $\alpha_i$  on vastavalt keskkonna  $i \in \{1, 2\}$  laine leviku kiirus ja langemisnurk eralduspinna normaal suhtes.
- V60** Ülesande geomeetria ning lööklaine koonuse nurga kaudu on võimalik avaldada lennuki koordinaadid stopperi käivitamise ja peatamise hetkedel. Leitud nihke kaudu on lennukiirus lihtsasti leitav.
- V61** Selleks, et autorehvaid kuluksid vähimal määral, peavad rattad pöörama ühtse kehana. Kuna rattad ei libise, asub pöörlemiskese rataste teljel.

- V62** Kui hall kamm liigub ühe pii võrra, on uus pilt identne esialgsega ning järelikult on tume laik liikunud ühe „lainepekkuse“ võrra.
- V63** Antud ülesandes on kolm tundmatut: pilu laius, katiku kiirus ja piisa kujutise kiirus sensori tasandis. Lisaks kirjeldati kahte olukorda, mis seovad antud tundmatuid. Selgub, et nendest piisab, et määrata kolmandas olukorras triibu pikkust.
- V64** Liikudes  $B$  suunas on laeva kiirus  $v_0 + v(t)$  ning liikudes  $A$  suunas on kiirus  $-v_0 + v(t)$ . Võimalik on näidata, et kahe punkti vahelise sõiduaja minimeerimiseks peavad voolukiirused alguses ja lõpus olema võrdsed. Vastasel juhul saaks valida veel väiksema sõiduajaga plaani nihutades stardiaega emmas-kummas suunas.
- V65** Ülesannet on mugavam vaadelda õhu taustsüsteemis, sest siis on helilainefrondid kiirusega  $c$  kasvava raadiusega ja paigaloleva keskmega poolsfäärid. Helivõimsus jaotub ühtlaselt üle terve frondipinna, seega on tajutav võimsus pöördvõrdeline frondi pindalaga ehk frondi raadiuse ruuduga.
- V66** Olukorda on mugavam vaadelda veega seotud taustsüsteemis, sest siis liiguvalt lained paadi trajektoori suhtes sümmeetriselt (lainefrondid on paadi varasematest asukohtadest eemalduvad ringid).
- V67** Mõõdetud lainepekkuste erinevus tuleneb mõõdetud punktide kiiruste vahest vaatleja suhtes. Kui Päikesel pöörlemise nurkkiirus ekvaatoril on  $v$ , siis üks ekvaatori ots eemaldub vaatlejast kiirusega  $v$  ja teine läheneb kiirusega  $v$ . Antud kiirusele vastav lainepekkuse muut on leitav Doppleri nihkest.
- V68** Liikudes süsteemi, mis pöörleb nurkkiirusega  $\omega/2$ , on võimalik olukorra sümmeetriat ära kasutada.
- V69** Pildistamise hetkel pöörleb kogu ratas ümber hetkelise pöörlemistelje, mis läbib ratta ja maa puutepunkti. See tähendab, et ratta iga osake liigub mööda ringjoone kaart, mille keskpunktiks on ratta ja maa puutepunkt.
- V70** Leviaegade suhtelised erinevused on väikesed, seega võib lugeda, et helikiirus on hulga suurem tuule kiirusest. Heli levikut on kasulik vaadata tuulega seotud taustsüsteemis.
- V71** Ülesandes antud algandmed kirjeldavad kaatri liikumist tuule suhtes. Seega tasub olukorda vaadelda tuulega kaasa liikuvas taustsüsteemis.
- V72** **a)** Vastavalt sellele, kas labad liiguvalt salvestatakavatele pikslite veergudele vastu või eemale, on labade kujutiste tihedus vastavalt suurem või väiksem.  
**b)** Vaadeldes pildil ühte vertikaalset pikslite veergu ei ole moonutusi näha. Seega tasub uurida, kui palju labasid erinevatel pikslite veergudel näha on.  
**c)** Teades labade arvu on võimalik vaadelda täpselt, kui palju üks laba salvestamise käigus liigub.

- V73** Maksimaalse viivituse korral on palli kiirus vaevu kivi omast suurem. Selles on võimalik veenduda liikudes vabalt langevasse taustsüsteemi. Seal liiguvalt vabalt langevad kehad konstantse kiirusega ning selleks, et pall ja kivi kokku põrkaksid, peaks nende suhteline kiirus olema negatiivne.
- V74** Kuna pallid on samasuguse massiga ja tegu on elastse kokkupõrkega, vahetavad pallid oma kiirusvektorid. Seega võime sama hästi öelda, et pallid lähevad üksteistest vabalt läbi.
- V75** Langemise aeg on avaldatav valemi  $s = \frac{at^2}{2}$  kaudu.
- V76** Kukkumise käigus kiirenevad mõlemad kuulid sama kiirusega. Seega on nende suhteline kiirus muutumatu.
- V77** **a)** Energia jäÄvuse seaduse kohaselt kulub purustuse tekitamiseks esialgse ja pÄrastise kineetiliste energiate vahe.  
**b)** Taustsüsteemide vahetamine lihtsustab olukorda oluliselt.
- V78** Nii pudelile kui veele mõjuvad täpselt samad jõud ning neid visatakse sama algkiirusega.
- V79** Antud olukorda on mugavam vaadelda rongiga kaasa liikuvas taustsüsteemis.
- V80** Autos istujad ei tunne külgsuunalist jõudu siis, kui summaarne jõud on tee pinnaaga risti.
- V81** Kuna plokk on paigal ja nöör on venimatu, hakkavad Viplala ja klots vordse kiiruse ja vordse kiirendusega liikuma. Edasi tasub Viplala ja klotsi jaoks Newtoni teise seaduse kirja panna.
- V82** Mäe tippu jõudmiseks peab esialgne kineetiline energia olema suurem kui hõõrdejõu ja raskusjõu ületamiseks vajalik töö.
- V83** Üles visatud keha vertikaalne koordinaat avaldub vastavalt liikumisvõrrandile kui  $h = v_0 t - \frac{gt^2}{2}$ . Kuna tegu on ruutvõrrandiga, leidub fikseeritud  $h$  jaoks kaks ajahetke, mil keha sellel kõrgusel on.
- V84** Tegu on suhteliselt sirgjoonelise ballistiklike probleemiga. Mootorratturi kiirus peab olema selline, et mootorratturi paraboolne trajektoor läbiks kraavi vastasnurka.
- V85** Kehtib energia jäÄvuse seadus. Koguenergiate vahe alg- ja lõppseisu vahel kulus hõõrdejõu ületamiseks vajalikuks tööks mõlemal mäenõlval.
- V86** Massikeskme kuligliikumise energia muundub maksimaalsele kõrgusele jõudes täielikult potentsiaalseks energiaks.

- V87** Palli koguenergia vastab geomeetrilisele jadale, sest iga järgmise põrke energia on eelnevast  $k$  korda väiksem. Saame sarnase jada, kui avaldame kahe järjestikuse põrke vahelise aja summaarse energia kaudu.
- V88** Vedrumehhanismi vallandumisel muutub osa vedrudesse salvestatud potentsiaali-sest energiast kineetiliseks energiaks – seega kineetilise energia jäävus ei kehti. See-eest kehtib impulsi jäävuse seadus, sest lagunemise käigus ei mõju mürsule väliseid jõude (eeldusel, et mürsk laguneb hetkeliselt).
- V89** Õõnes ja homogeenne kera erinevad nende intertsimomentide poolest. Vedeliku sisaldaaval keral toimub sees paratamatult hõordumine ning seega energia kadu vedeliku erinevate kihtide vahel.
- V90** Silla kõverusraadius on leitav Pythagorase teoreemist. Autole mõjub silla peal kaks jõudu: raskusjõud ja röhumisjõud. Antud jõudude resultant annab kesktõmbekii-renduse.
- V91** Ülesanne näeb keerulisem välja, kui see tegelikult on. Olukorda lihtsustab oluliselt asjaolu, et varras on tühiselt kerge ja libisemised hõördevabad.
- V92** Hoovõturaja alumises otsas on rahakott omandanud teatud horisontaalse kiiruse. Edasi hakkab rahakott liikuma mööda paraboolset trajektoori, kuni see taas vastu määe nõlva kukub.
- V93** Tikk hakkab poolkera pealt maha libisema siis, kui raskusjõu pinnaga paralleelne komponent ületab hõördejõu.
- V94** Fikseeritud  $h$  ja  $t$  puhul on nõlva kalle vähim siis, kui hõördejõud puudub.
- V95** Palli lennu kõrgus sõltub vastavale kõrgusele jõudmise aja ruudust.
- V96** **a)** Horisontaalsel teel peab kaubarong ületama takistava hõördejõu.  
**b)** Lisaks hõördejõule peab rong nüüd ületama ka raskusjõu.
- V97** Pall jaotab kahuritoru kaheks kambriks. Pärast vasakpoolse membraani purustamist hakkab vasakpoolses kambbris olev gaas palli paremale poole suruma.
- V98** Kuna pall maandub kaldpinnale risti, siis liigub pall sellel hetkel nurgaga  $\alpha$  vertikaali suhtes. Seega tulistatakse pall kahurist välja samuti nurga  $\alpha$  all vertikaali suhtes ning pall põrkab kaldpinnalt tagasi sama nurga all.
- V99** Vastavalt Newtoni III seadusele on nööri tõmme mõlema mehe jaoks sama suur, kuid vastupidises suunas. Lisaks nööri tõmbele mõjub kummalegi mehele vastasuunas hõördejõud.

- V100** Hõõrdejõu tõttu kulutatud energia sõltub läbitud teepikkusest ja selle kaldest, potentsiaalse energiavahe sõltub kõrguse muudust.
- V101** Löögi hetkel kehtib impulsi jäävus, aga energia ei säili. See-eest säilib mehaaniline energiapaarast põrget toimuval liikumisel.
- V102** **a)** Maksimaalse eemaldumise korral moodustub Maast, Veenusest ja Päikesest täisnurkne kolmnurk, mille täisnurga tipp on Veenus.  
**b)** Maa ja Veenuse suhtelise nurga (Päikeselt vaadatuna) muutus on avaldatav planeetide nurkkiiruste vahe kaudu.
- V103** Nii auto liikumisse kui ka mootori tööse minevad võimsused on avaldatavad rataste ja maa vahelise hõõrdejõu kaudu.
- V104** Tellise eemaldumise hetkel on vedru alumine ots paigal, aga ülemine ots liigub tellisega sama kiirusega üles.
- V105** Pendli perioodi leidmiseks on võimalik teha esialgne hinnang, mis põhineb järjestikustel mõõtmistel. Täpsema hinnangu jaoks võib kasutada esialgset hinnangut ja pikemat ajavahemikku, et määräta täpselt mitu võnget antud ajavahemiku sisse mahub.
- V106** Jõudes kukkumise madalaimasse punkti, on alpinisti potentsiaalne energia läinud üle vedru potentsiaalseks energiaks. Pannes vastava seose kirja, on võimalik leida nööri pikenemise  $x$ .
- V107** Nii Jukule kui ka Juhanile mõjub sama koefitsiendiga õhu hõõrdejõud, mis on raskusjõu poolt täielikult tasakaalustatud.
- V108** Piirjuhul läheb kogu Juku potentsiaalne energia hõõrdejõu poolt eraldatud soojusenergiaks.
- V109** Auto kineetiline energia kulub pidurdusjõu ületamiseks ning potentsiaalse energiamuuduks.
- V110** Selleks, et leida tegelikku kuuli kõrgust Maa pinnast, võib rakendada energiäävvuse seadust kuuli laskmise hetkel ja trajektoori kõrgeimas punktis.
- V111** Koormisele mõjuvad kolm jõudu: niidi pinge, raskuskiirendus ja kesktõmbekiriendus. Lisaks peab resultantjõud olema risti nööriga, sest vastasel juhul peaks koormise kiirenemisel nöör venima või lüheneama.
- V112** Poole pedaalipöörde jooksul peab ratturi poolt tehtav töö kompenseerima rattamassikeskme tõusmisest kaasneva potentsiaalse energiamuudu.

- V113** Aerulabadele mõjuv keskmise jõud on leitav jõumomentide tasakaalust tullide suhtes. Keskmise kiirusega liikuva paadi puhul kehtib jõudude tasakaal aerulabadele mõjuva jõu ja takistusjõu vahel.
- V114** Kivile mõjuva paela tõmbepinge  $T$  ja raskusjõu  $mg$  resultant on kesktõmbejõuks, mis on suunatud horisontaaltasapinnas sisepoolle.
- V115** Ülesannet on mugavam vaadelda  $x$ - $y$  teljestikus, mis kulgeb vastavalt piki ja risti kaldpinda. Sellisel juhul muutub peale igat põrget kiiruse  $y$ -komponent vastupidiseks.
- V116** Kuulikese kiirus on leitav energia jäÄvuse seadusest. Edasi taandub ülesanne ekstreemumpunkti leidmisele.
- V117** Eraldumiskõrgust on kõige mugavam leida jõudude tasakaalust silindri keskpunkti radiaalsihis. Lisaks kehtib energia jäÄvuse seadus.
- V118** Veepind võtab asendi, mis on risti sellele mõjuva resultantjõuga. Liikudes veoautoga seotud süsteemi, näeme, et resultantkiirendus on  $\vec{g} - \vec{a}$ .
- V119** Autole mõjuvad raskusjõud ja tee tooreaktsioon. Silmuses püsimiseks ei tohi tooreaktsioon kaduda. Kriitiline olukord tekib silmuse ülemises punktis, sest siis on auto kiirus vähim ning raskusjõud tõmbab autot maksimaalselt teest eemale.
- V120** Torust väljuv vesi liigub nagu vabalt langev keha horisontaalsuunalise algkiirusega  $v$ . Seega on veejuga parabooli kujuga, mille parameetrid saab jooniselt mõõta.
- V121** Kuul liigub mööda paraboolse trajektoori, kusjuures kiiruse horisontaalne komponent püsib konstantne, st  $v_x = \text{Const} = v \cos \alpha$ , ning vertikaalne komponent on ühtlaselt kiirenev  $v_y = v \sin \alpha - gt$ .
- V122** Silindri impulsimoment ei muudu telje suhtes, mis läbib silindri ja pinna kontakt punkte, sest hõõrdejõul puudub jõuõlg selle telje suhtes.
- V123** Liiga suure kiiruse korral hakkab veok tsentrifugaaljõu tõttu väliskurvis oleva serva suhtes ümber pöörama. Seega peab piirjuhul antud telje jaoks kehtima jõumomentide tasakaal.
- V124** Kriitilise kiiruse korral on palli trajektoori köverusraadius sfääri tipp-punktis võrdne sfääri raadiusega. See tähendab, et pallile mõjuva raskuskiirenduse tasakaalus tab kesktõmbe kiirendus  $v^2/R$ .

- V125** Kui põrnikas (massiga  $\rho V$ ) roomab mööda anuma põhja, siis selle peale liigub ka põrnikat ümbritsev vedelik. Põrnika liikumist võib mugavuse mõttes ette kujutada virtuaalse põrnika liikumisega, mille tihedus on  $\rho - \rho_0$ . Sellisel juhul liigub virtuaalne põrnikas vedelikku tõrjumata ning ülesanne taandub mugavamale dünaamika ülesandele.
- V126** Arvestades mullide arvu jäädvust on ruumiline vahemaa nende vahel võrdeline mullikeste kiirusega. Viimane on leitav võrdsustades takistus- ja üleslükkejõu ning arvestades mullikese ruumala muutust rõhu tõttu.
- V127** Ülesandes ei ole niidi pinge  $T$  teada, aga see on leitav pannes plokkide jaoks kirja Newtoni teise seaduse ning niidi venimatuse tingimuse. Massikeskme kiirenduse avaldamine plokkide kiirenduste kaudu on analoogne massikeskme koordinaadi avaldamisega plokkide koordinaatide kaudu.
- V128** Ragulkas salvestunud potentsiaalne energia muundub täielikult kivi kineetiliseks energiaks. Kummipaelale rakendatav jõud on leitav kummipaela pinge projektsoonist kivi lennu sihilisele teljele.
- V129** Mehaaniline pinge röngas on määratud tsentrifugaaljõu poolt, millega röngast radialselt väljapoole tiritakse. Pingे täpseks määramiseks on mugav vaadelda väikest rönga juppi ning sellele mõjuvate jõudude tasakaalu.
- V130** Maalri asendi ohtlikkust võib hinnata tema kiirusega vahetult enne maapinnaga kokkupuutumist. Vastavad kiirused on leitavad energia jäädvuse seadusest.
- V131** Hüppe käigus säilib energia ehk hüppaja kineetilise energia ning hüppaja ja köie potentsiaalse energiate summa on konstantne. Hüppaja kiirus on maksimaalne, kui talle mõjuv summaarne jõud on null, sest see vastab kiirenemise ja pidurdamise üleminiku punktile.
- V132** Jagunemise käigus peab säilima summaarne impulss ning energia. Osakeste kiirusi on mugavam vaadelda komponentide kaupa. Selleks võib võtta, et  $x$ -telg on molekuli esialgse suunaga paralleelne ning  $y$ -telg sellega risti.
- V133** Kokkupõrke käigus kehtib mõlema massi jaoks kangireegel. Lisaks kehtib kokkupõrge seni, kuni massid pöörlevad ümber kiige sama nurkkiirusega.
- V134** Vesiniku aatomi ioniseerimiseks peab elektroni kineetiline energia olema suurem kui  $E_0$ . Elektroni ja prootoni kokkupõrke käigus säilib nii summaarne kineetiline energia kui ka impulss.
- V135** Toru lõpus järslt pöörav vesi surub toru teatud jõuga külgsuunas. Antud jõud on leitav, kui vaadelda ajaühikus väljuva veehulga impulsimuutu siseneva veega võrreldes.

- V136** Kuna põrge on elastne, säilib põrke käigus kineetiline energia. Impulsi kohta sama aga ei saa öelda, sest põrke ajal mõjuvad kinnituspunktile jõud. Küll aga säilib süsteemis summaarne impulsimoment kinnituspunkt suhtes, sest põrke ajal on kinnituspunktile mõjuvate jõudude õlad nullid ning põrge toimub nii kiiresti, et raskusjõuga pole vaja arvestada.
- V137** Ratturile mõjuvad laskumisel kolm jõudu: mäest allaviiv raskusjõud, takistav hõõrdejõud ning tuuletakistus. Rattur on saavutanud lõppkiiruse, kui need jõud on tasakaalustunud.
- V138** Vaatamata sellele, et tundmatu kuuli mass ja vedru jäikus pole teada, võib neid ikkagi tundmatutena kasutada ning loota, et need lõppvastuses välja taanduvad.
- V139** Reisijale mõjud kolm omavahel ristiolevat kiirendust: raskuskiirendus, kesktõmbekiirendus ja joonkiirendus.
- V140** Niidis kaob tömbnejõud, kui raskusjõu niidisunaline komponent saab võrdseks tsentrifugaaljõuga. Kuuli kiirus asendis 3 on leitav energia jäävuse seadusest.
- V141** Märkame, et kuna hõõrdejõud puudub, ei mõju süsteemile summaarset jõudu. Seega jäääb klotsi ja palli summaarne massikese paigale.
- V142** Ühe põrke käigus kehtib impulsi jäävus, aga mitte energia jäävus. Selle põhjal on võimalik määrrata hõõrdejõu ületamiseks kulunud töö ühe põrke jooksul ning saadud avaldis summeerida kogu vaia ulatuses.
- V143** Kuna suur keha liigub kahe põrke vahel teatud vahemaa võrra allapoole, ei toimu kokkupõrked iga  $t$  tagant vaid natukene tihedamalt. Selleks, et leida, missuguse impulsi kuulike suurele kehale üle kannab, tasub kokkupõrget vaadelda suure keha süsteemis. Eelduse  $m \ll M$  kohaselt on kokkupõrge vörreldav seinaga kokku põrkamisega.
- V144** Noole algkiirus on leitav lähteandmetest. Edasi peab nool tabama punkti koordinaatidega ( $200\text{ m}$ ;  $-0,7\text{ m}$ ) alguspunkti suhtes. Selle jaoks saab kirja panna liikumisvõrandi nii  $x$ - kui ka  $y$ -koordinaadi jaoks.
- V145** Olukorda on mugav vaadelda autoga kaasa kiirenevas tastsüsteemis. Sellisel juhul rakendub autole kuus jõudu ning peab kehtima jõudude ning jõumomentide tasakaal.
- V146** Latile mõjud igas punktis hõõrdejõud, mis on vastupidine selle punkti liikumis suunale. Kogu mingile osale mõjuv hõõrdejõud on seega võrdeline selle osa pikusega. Lisaks on teada, et hõõrdejõud üritavad takistada nii lati kulgliikumist kui ka selle pöörlemist.

- V147** Tükikeste trajektooride järgi saab võrrelda kiiruste suundi ja suuruseid, sest  $s = vt_s$ , kus  $t_s$  on säriaeg. Lisaks kehtib impulsi jäävus. Kuna klaaskuul kukkus otse alla, peab summaarne põrandaga paralleelne impuls olema 0.
- V148** Ülesandes on kolm tundmatut: keskmiste plokkide kiirendused, äärmiste plokkide kiirendused ning niidi pingi. Vastavate tundmatute leidmiseks on vaja kolme võrrandit: kaks tulenevad Newtoni II seadusest ning üks tuleb niidi venimatuse tingimusest.
- V149** Õõnsusega kera saab vaadelda positiivse tihedusega täidetud kera ja õõnsuse suuruse negatiivse tihedusega kera superpositsioonina. Sellisel juhul saab mugavalt kirja panna jõumomentide tasakaalu mõlema stsenaariumi jaoks.
- V150** Lihtsuse huvides tasub pallide kiirusi komponentide järgi vaadelda. Vertikaalne komponent  $v_z$ , horisontaalkomponent pikki jalgpallureid ühendavat sirget  $v_y$  ning risti selle sirgega  $v_x$ . Kokkupõrke hetkel peab risti jalgpallureid ühendava sirgega läbitud vahemaa mõlemal pallil sama olema.
- V151** Esimesena on vaja leida, missugune on keermete pinnanormaali ja pöörlemistelje vaheline nurk  $\alpha$ . Selleks on mugav vaadelda mutriivõtme pinna jaotust. Selleks, et mutreid saaks kövasti kinni keerata, peab hõõrdejõud tasakaalustama keermete suunas mõjuva jõu komponendi.
- V152** Paneme tähele, et niidi pingi alumises nööris on kaks korda väiksem kui ülemises nööris. Selles saab veenduda, kui vaadelda alumisele plokile mõjuvaid jõudusid. Lisaks saab mõlema nööri jaoks kirja panna nende venimatuse tingimuse.
- V153** Auto taustsüsteemis mõjub auto massikeskmele jõud  $Ma$ , kus  $a$  on auto kiirendus. Lisaks mõjub tagaratastele hõõrdejõud ning mõlemale rattale tooreaktsioon. Ülesande eelduste kohaselt peab mõlema poolperioodi jooksul kehtima jõudude ja jõumomentide tasakaal.
- V154** Otsitavate suuruste jaoks on kasulik vaadelda lühikest ajavahemikku  $\Delta t$ , mille jooksul on rongi kiirus, ja seega hõõrdetegur, ligikaudu konstantsed. Seejärel saab saadud ajavahemikke summeerida terve graafiku ulatuses. Selle jaoks peab vajadusel konstrueerima uued graafikud teistsuguste telgedega.
- V155** Väikse keha hetkelise liikumise käigus püsib mobiil+keha massikese paigal. Seega liigub mobiil iga  $\tau$  tagant sarnaselt kehaga hetkeliselt üles või alla. Iga kord kui mobiil üles liigub, nihkub ta gravitatsiooni töttu ka veidike laua sihis edasi.
- V156** Kildude koguimpulss on null, seega moodustavad impulsivektorid kolmnurga, milles sarnasustegurid on võimalik kildude liikumissuundadest taastada. Sarnaselt saab toimida kildude kineetilise energi ja libisemiskaugustega.

- V157** Juhul, kui süsteemi massikeskme kõrgus on  $x(t)$ , siis Newtoni II seaduse kohaselt  $M\ddot{x}(t) = F - Mg$ , kus  $M$  on süsteemi kogumass ja  $F$  kaalu näit. Seega taandub ülesanne  $x(t)$  leidmisele liivakella töörežiimis.
- V158** Üks võimalus sisemise silindri kiirenduse leidmiseks on rakendada virtuaalse nihke meetodit. Selle jaoks tuleb vaadelda, kuidas muutub süsteemi kineetiline ja potentsiaalne energia siis, kui sisemine silinder kerkib vahemaa  $x$  võrra. Olles avaldanud süsteemi koguenergia  $x$  kaudu, võib sellest tuletise võtta ning võrdsustada selle 0-ga.
- V159** Vastu maapinda kukkudes jäääb kast hetkeliselt paigale ning koormis hakkab võnkuma ümber uue tasakaaluasendi ehk ümber punkti, kus vedru pinge tasakaalustab koormisele mõjuva raskusjõu. Järgneva liikumise käigus on kõige kriitilisem punkt see, kus koormis on kõige kõrgemas punktis. Sellisel juhul on kastile mõjuva vedru joud maksimaalne.
- V160** Punkt  $B$  kiirust on võimalik leida, kasutades varraste venimatust ning asjaolu, et  $A$  on fikseeritud. Punkt  $B$  kiirenduse  $AB$ -sihilist komponenti saab leida kesktõmbekiirenduse kaudu ning kiirenduse suuna määramiseks on kasulik minna kiirusega  $\vec{v}$  liikuvasse tastsüsteemi.
- V161** Teisest ja kolmandast kuulist koosnevale süsteemile mõjus esimese kuuli lükkamise ajal esimese varda sihiline joud, sest teatavasti mõjuvad kergetele varrastele vaid varda sihilised pinged. Lisaks peab esimese kuuli lükkamise ajal kehtima varraste venimatuse tingimus. Kiirenduse leidmiseks on süsteemi mugav vaadelda šarniirse ühenduspunktiga kaasa likuvas ja kiirenevas tastsüsteemis ning seejärel rakendada Newtoni II seadust.
- V162** Ringikujulisel orbiidil on satelliidi kiirus kogu orbitaalperioodi jooksul konstantne ja seetõttu on varjus veedetud osa ajast võrdne orbiidi varjus oleva osa pikkuse ja kogu orbiidi pikkuse suhtega.
- V163** Kui väike prints kõnnib piki asteroidi ekvaatorit, mõjub talle gravitatsioonijoud, normaaljoud ning ringjoonelisest trajektoorist tingitud kesktõmbekiirendus. Hõljamata hakates normaaljõudu ei mõju ning kehtib jõudude tasakaal.
- V164** Maa tiirlemise tõttu erineb Maa täispöörte arv aastas keskmiste päikeseööpäevade arvust ühe võrra.
- V165** Sidesatelliidil kõrgus on leitav ringorbiidil mõjuva gravitatsioonijõu ja tsentrifugaaljõu tasakaalust.
- V166** Peale energia jäävuse kehtib ka impulsimomendi jäävus Maa keskpunkti suhtes.

- V167** Maa jõudude tasakaalust on võimalik avaldada Päikese mass ning Päikese nurk-diametrist Päikese raadius.
- V168** Kasutades trossi pinget tundmatuna, saab mõlema satelliidi jaoks kirja panna jõudude tasakaalu.
- V169** Geostatsionaarse orbiidi raadius on leitav jõudude tasakaalust ning orbiidi perioodist.
- V170** Kosmosejaama trajektoori nihked on põhjustatud maa pöörlemisest ümber oma telje, kusjuures ühele öopäevale vastava kosmosejaama nihke ja Maa ekvaatori pikkuse suhe on otseses sõltuvuses kosmosejaama ja maa pöörlemise nurkkiiruste suhtega.
- V171** **a)** Kuu ja Maa poolt avaldatavad jõud on otseselt leitavad abivalemi kaudu.  
**b)** Kaabli katkemispunktis on pinge maksimaalne. Pinge on leitav jõudude tasakaalust.
- V172** Satelliidi tüüpiline kiirus on vörreldav esimese paokiirusega, sest satelliitide orbitaalaradiused ei erine üksteisest märkimisväärtselt. Ülesande eelduste kohaselt liiguvalt satelliidid sarnaselt molekulidega gaasis. Gaasis molekulid vaba tee hindamisel arvestatakse, et molekul liigub ilma põrgeteta ligikaudu aja jooksul, mil tema kokkupõrke ristlõige on katnud ruumala, milles asub tüüpiliselt üks osake.
- V173** Pumpamise käigus kehtib ideealse gaasi olekuvõrrand.
- V174** Ideaalse gaasi olekuvõrandist on võimalik leida seos esialgse ja pärastise õhu ruumala vahel.
- V175** Kõrgusega  $h$  veesamba lisarõhk on  $\rho gh$ . Sukeldumise käigus kehtib ideaalse gaasi olekuvõrrand.
- V176** Ühe molekuli keskmene kineetiline energia temperatuuril  $T$  avaldub kui  $\langle E_m \rangle = \frac{3}{2}kT$ .
- V177** Suurima võimaliku koormise massi korral on õhupalli keskmene tihedus võrdne õhu tihedusega.
- V178** Kuna manomeeter ja mõõteampull on kapillaari kaudu ühenduses, siis nende gaasirõhud on isegi temperatuuride erinedes ühesugused.
- V179** Kui ajavahemiku  $\Delta t$  jooksul kandub tiivikust läbi õhumass kineetilise energiaga  $\Delta E$ , siis sellele vastav võimsus on  $P = \frac{\Delta E}{\Delta t}$ .

- V180** Ülesannet on mugav lahendada uurides ajavahemikku  $\Delta t$  ning vaadeldes, kuidas rongist eraldunud võimsus soojendab rongist möödunud õhu molekule.
- V181** Nii Maal kui ka Marsil peab õhupallile mõjuv üleslükkejõud kompenseerima koorimise raskusjõu. Üleslükkejõud sõltub õhu tihedusest ning õhu tihedus on leitav ideaalse gaasi olekuvõrrandist.
- V182** Ideaalse gaasi olekuvõrrandiga on võimalik määrata, mis õhu ruumalaga avariiventtiil avaneks. Õhu ruumala muudust on aga võimalik avaldada vajaliku vee tiheduse muudu.
- V183** Kuna balloon on silindrikujuline, on pinged selle telje sihis ning sellega ristvas sihis erinevad. Mõlemal juhul peab balloonit seinas olev jõud tasakaalustama balloonisisesse gaasi rõhu põhjustatud jõu.
- V184** Kerisele visatud vee tekitatud lisarõhk on leitav ideaalse gaasi olekuvõrrandist. See rõhk mõjub ühtlaselt üle kogu ukse laiuse, seega tuleb uksele mõjuva jõumomendi arvutamisel võtta jõu õlaks pool ukse laiusest.
- V185** On selge, et rehvi pumpamisel on rakendatav jõud võrdeline rehvis oleva rõhuga (õhurõhu suhtes). Rakendades jõudude tasakaalutingimust rehvi kokkupuutepinnaale maaga, on võimalik leida kokkupuutepinna pindala, milles saab omakorda avaldada rehvi deformatsiooni ning rattarehvi ruumala muudu. Rattarehvi ruumala muudust tingitud rehvi siserõhu muutu on võimalik avaldada ideaalse gaasi-võrrandiga.
- V186** Enne ja pärast jäää sulamist saab kasutada ideaalse gaasi olekuvõrrandit. Lisaks saab aine massi jäävusest leida gaasi ruumalamuudu.
- V187** Paisumisel gaasi poolt tehtud tööd on kõige lihtsam leida  $p - V$  graafikult protsessi aluseala pindalana. Lisaks tuleb kasuks termodünaamika I seadus.
- V188** Temperatuuri kasvades hakkab esimese anuma rõhk  $p_1$  suurenema ning mingil hetkel ületab see ventili kriitilise rõhu  $\Delta p$ . Sellest hetkest alates hakkab ventiil õhku läbi laskma nõnda, et edaspidi anumate rõhud  $p_1$  ja  $p_2$  rahuldavad tingimust  $p_1 - p_2 = \Delta p$ .
- V189** Seibi alumise külje läheduses surub süsihappegaas teatud rõhuga seibi üles. Vastav jõud on ülemiselt küljelt tasakaalustatud nii õhurõhu, kui ka surumisjõu poolt.
- V190** Kolvit lõppasendis tasakaalustab kolvile mõjuv hõördejõud rõhkude vahest tekitud rõhumisjõu.
- V191** Õhupalli lendu tõusmise piiril peab kuumaõhupalli keskmise tiheduse olema võrdne välisõhu tihedusega.

- V192** Sügavale vee alla sukeldamisel surub veesamba rõhk palli kokku. Pall hakkab ise põhja vajuma, kui tema ruumala väheneb nii palju, et pallile mõjuv üleslükkejõud saab väiksemaks raskusjõust ehk palli keskmise tihedus muutub väiksemaks vee tihedusest.
- V193** Antud ülesandes on kolm tundmatut: paisupaagis oleva õhu moolide arv, paagi esialgne rõhk ning ruumala. Lisaks on tekstis kirjeldatud kolme tingimust, mida paak täitma peab; igaühe jaoks saab kirja panna ideaalse gaasi olekuvõrrandi.
- V194** Niiske õhu puhul on veeauru ja normaalse õhu rõhkude summa võrdne atmosfäärirõhuga, kusjuures veeauru rõhk on leitav küllastunud veeauru tihedusest.
- V195** Esialgu on vesinik teatud temperatuurivahe võrra soojem kui heelium, kuid pika aja möödudes on mölemad soojuslikus tasakaalus. Koormise nihe ongi põhjustatud gaaside soojenemisest tulenevast paisumisest.
- V196** Korstna sees voolav õhk tekitab alarõhu, mis on avaldatav Bernoulli võrrandist. Rõhu langub korstna sees ja väljas peavad olema võrdsed.
- V197** Anuma tugevuse määrab ilmselt seina paksus. Gaasi rõhust tingitud mehaaniline tömbepinge anuma seintes ei tohi ületada väärust  $\sigma = 450 \text{ MPa}$ . Tömbepinge leidmiseks tasub anum mötteliselt jaotada kaheks poolsfääriks ning vaadelda neile mõjuvate jõudude tasakaalu.
- V198** Tasub vaadata, kuidas muutub õhupalli temperatuur, kui sinna teatud ruumala  $V$  õhku sisse pumbata. Temperatuuri leidmiseks saab rakendada termodünaamika esimest seadust.
- V199** Selleks, et kuumaõhupall õhuks püsiks, peab sees olev õhk olema piisavalt madala tihedusega, et üleslükkejõud tasakaalustaks kuumaõhupalli raskusjõu. Kui õhupalli sees on õhk temperatuuril  $T$ , siis õhupalli pooridest imibub välja soe õhk temperatuuril  $T$ , samas kui õhupalli siseneb õhk temperatuuril  $T_0$ . Propaani põletamine peab vastava soojuskao kompenseerima.
- V200** On võimalik näidata, et seni, kuni helium pole võtnud enda alla veel kogu õhupalli ruumala, püsib tõstejõud konstante.
- V201** Adiabaatilisel paisumisel muutub gaasi siseenergia  $c_V T_0$  osaliselt joa kineetiliseks energiaks  $\mu v^2/2$ . Düüsis peab kehtima energia jäävus. Seega, ajaühikus siseneval gaasihulgal on sama energia kui ajaühikus väljuval gaasil.
- V202** Kuna anumad on ühendatud, on rõhud mölemas anumas samal kõrgusel samad ja anumate vedelikutasemed võrdsed.

- V203** Tünnile mõjuv üleslükkejõud peab olema võrdne raskusjõuga.
- V204** Väljuva veejoa kiirus on leitav Bernoulli seadusest või energia jäävusest. Lisaks on väljuvas joas vooluhulk igas ajaühikus sama, st  $Av = \text{Const}$ , kus  $A$  ja  $v$  on vastavalt joa ristlõikepindala ja kiirus.
- V205** Torudes oleva vee rõhk on avaldatav vedelikusammaste kõrguste kaudu. Lisaks kehtib mõlemas torus Bernoulli seadus ning vee pidevustingimus, st sama aja jooksul läbib mõlemat toru sama kogus vett.
- V206** Kuubi vettevajumisel on kõige kriitilisem hetk see, kui kuubi ülemine tahk on parajasti vee alla vajunud, sest siis hakkab kuubile mõjuma suurim üleslükkejõud.
- V207** **a)** Torus olevale veesambale mõjub raskusjõud, takistusjõud ning pumba poolt avaldatud jõud. Ühtlase pumpamise korral kehtib jõudude tasakaal.  
**b)** Pump paneb vee alarõhku tekitades liikuma. Kuna pump asub maapinnal, tekib minimaalne alarõhk juhul, kui pump tekitab vaakumi.
- V208** Tasakaalu korral on rõhk büreti alumise otsa mingis punktis (just väljaspool vee alumist kontaktpinda õhuga) võrdne õhurõhuga. Samas on büreti alumise otsa rõhk veesamba rõhu  $\rho gh$ , pindpinevuse rõhu ning büreti sees oleva õhurõhu  $P$  kogusumma. Pindpinevuse rõhk alumisel pinnal avaldub kujul  $2\sigma/r$ .
- V209** Õhutakistuse puudumisel jõuab veejuga märgini sama kiirusega nagu väljudes (energia jäävusest tulenevalt). Jõu leidmiseks voib vaadelda ajavahemikku  $\Delta t$  ning selle jooksul üle antavat vee impulssi.
- V210** Veejoa väljumise kiirus on leitav energia jäävuse seadusest või alternatiivselt impulsi jäävusest. Mõlemad lähenemised on korrektsed, aga annavad numbrilise konsandi võrra erineva vastuse, mis on tingitud jäävusseaduste kehtivuse eelduste erinevusest. Tünni ja aluse kõrgused on leitavad valides graafikult kaks (või vajadusel rohkem) punkti ja lahendades tekkinud võrrandisüsteemi.
- V211** Kuna veejuga kiireneb ühtlaselt, kehtib energia jäävuse seadus. Lisaks kehtib vee massi jäävus ristlõigete ulatuses.
- V212** Kolbile mõjuv jõud tekitab kolvi sees lisarõhu  $F/S$ . Kuna tegu on laminaarse voga, kehtib Bernoulli seadus. Alternatiivselt võib rakendada energi jaävust kolvi ees ja suudme juures.

- V213** Sirges torus voolav vesi piki-sihilisi deformatsioone ei tekitata. Kaarekujulise osa juures aga survestab vesi väliskülge rohkem kui sisekülge ning tekitab piki-sihilisi pingeid. Pinge täpse suuruse määramiseks on mugav vaadelda kaarekujulist osa tervikuna ning uurida, kuidas vee impuls muutub kaarekujulisesse osa sisenedes ja väljades.
- V214** Klaasi sees olevate õhu molekulide arv jäääb samaks, aga ruumala suureneb. Seega tekib klaasi sees veepinna kohal alarõhk. Teisest küljest väheneb paberi kohal veesamba kõrgus, mis vähendab hüdrostaatilist rõhku. Tekkinud summaarne alarõhk peab kompenseerima paberi raskusjõu.
- V215** Kuna kLOTS on tasakaalus, peab kuubile mõjuv summaarne üleslükkejõud olema võrdne gravitatsioonijõuga. Selle jaoks on mugav võtta alumisse vedelikku jäänud kuubi osa ruumala tundmatuna.
- V216** Süsteemi massikese on võimalikult madalal siis, kui veesamba kõrgus ühtib süsteemi massikeskme kõrgusega. Selles saab veenduda, kui vaadelda, mis juhtub väikese veekoguse lisamisel või eemaldamisel.
- V217** **a)** Vee sissevoolu lõppedes on hüdrostaatilised rõhud vees torni sees ja väljas tasakaalus. Õhurõhk torni sees vee kohal on võrdne hüdrostaatilise rõhuga samal tasemel tornist väljas.  
**b)** Luugile mõjub altpool torni sees oleva õhu rõhk ning ülevalt vee hüdrostaatiline rõhk.
- V218** **a)** Juhul kui ookeani keskmine tihedus ning lisarõhk on vastavalt  $\rho$  ja  $p$ , kehtib ülesandes mainitud kokkusurutavuse seos  $\rho \approx \rho_0(1 + \beta p)$ . Lisaks on vee rõhud ookeani põhjas kokkusurumatud ja kokkusurutud juhtudel võrdsed.  
**b)** Tasub vaadelda väikest vee kogust massiga  $m$  ning selle ruumala muute sügavusel  $H$  võrreldes pinnapealse olukorraga.
- V219** Kausile mõjub valamise käigus raskusjõud, üleslükkejõud ning vee sissekukkumisest tulenev rõhumisjõud. Rõhumisjõud on leitav vaadeldes, missuguse impulsi  $\Delta p$  kukkuv vesi ajavahemiku  $\Delta t$  jooksul kausile üle annab. Sellisel juhul on rõhumisjõud  $F = \frac{\Delta p}{\Delta t}$ .
- V220** Selleks, et määräta, mis ruumipiirkonda vesi jõuab, võib vaadelda punkti koordinaatidega  $(x, y)$  ning üritada määräta, missuguselt algkõrguselt peaks veejuga alguse saama, et sellesse punkti jõuda. Kui lahendit ei ole, antud ruumipunkti vesi ei jõua.
- V221** Õli valamise tulemusena langeb vee tase  $l - h$  vörra selles torus, kuhu õli kallati, ning töuseb sama taseme vörra teises torus. Kuna süsteem on tasakaalus, peavad mõlemad vedelikusambad U-toru alumises punktis sama rõhku avaldama.

- V222** Omavõnkesageduse leidmiseks on harilikult kõige mugavam vaadelda väikest hälvet tasakaaluasendist ning uurida, kuidas süsteem edasi käitub. Ülesande kontekstis võib oletada, et õhuke veekiht ühes toru harus kandub teisele toru poolele. See põhjustab lisarõhu toru teises poolnes, mis üritab süsteemi tasakaaluasendisse tagasi viia.
- V223** Termodünaamika I seaduse kohaselt  $\Delta U = Q - A$ , kus  $Q$  on süsteemi antud soojushulk ning  $A$  on välisjõudude vastu tehtud töö. Antud üesande kontekstis on  $Q$  negatiivne ja  $A$  positiivne.
- V224** Kahe vastasserva vaheline takistus on  $R = \frac{\rho L}{S}$ , kus  $L$  on servade vaheline kaugus ja  $S$  ristlõikepindala.
- V225** Jääkera sees tekib ülerõhk, sest õhu soojenedes rõhk tõuseb. Seega on kõige kriitilisem moment vee sulamise temperatuuril.
- V226** Küttesüsteemis oleva vee ruumala esialgses olukorras ja töörežiimis on avaldatavad ülesandes antud valemiga.
- V227** Vee jäätumisel eralduv soojushulk peab täpselt ära kuluma jäää soojendamiseks.
- V228** Vee jäätumisel eraldunud soojushulk kulub alajahtunud vee soojendamiseks jäätumistemperatuurini.
- V229**  $P$ - $V$  teljestikus avaldub gaasi tehtud töö tsükli aluse pindalana. Alternatiivselt võib iga tsükli etapil tehtud töö leidmiseks rakendada termodünaamika esimest seadust.
- V230** Mõlema olukorra jaoks kehtib energia jäävuse seadus, kusjuures vedelike tiheused ning erisoojused on tundmatud.
- V231** Varda pöörlemise käigus muutub hõõrdejõu  $F_h$  ületamiseks kulutatud töö soojuseks. Töö on leitav hõõrdejõu ja läbitud tee pikkuse korruutisena.
- V232** Ülesandes on kaks tundmatut: vee lõpptemperatuur ja termose erisoojus. Need on leitavad, kui panna süsteemi jaoks kirja soojusliku tasakaalu võrrandid.
- V233** Energia jäävuse seaduse kohaselt peab rauatükist eraldunud soojusenergia minema vee soojendamiseks ja aurustumiseks.
- V234** Energia jäävuse seaduse kohaselt peab jõhvikate soojendamiseks kuluv soojushulk tulema vee jahtumise arvelt.

- V235** Vee aurustumise käigus kehtib energia jäÄvuse seadus. Seega tuleb väikese veeko-guse aurustumiseks vajalik soojushulk järelejäändud vee temperatuuri langemise arvelt.
- V236** Ühest küljest on hõõrdumisest tekkiv soojushulk hõõrdejõu ja toru ääre poolt lä-bitud vahemaa korrutis. Teisest küljest on soojushulk avaldatav toru soojusmah-tuvusest ja lõpptemperatuuri ning algtemperatuuri vahest.
- V237** Jäätkuk koos mündiga hakkab uppuma siis, kui selle keskmine tihedus on võrdne vee tihedusega. Jää sulamiseks vajaminev energia saadakse vee jahtumisel eraldu-nud energiast.
- V238** Nafta jahtumisel eraldunud soojus kulub vee soojendamiseks.
- V239** Kastmisvee anuma taha tekib kiirtega ristuvale tasandile ringikujuline vari. Sa-masugune vari tekiks ka ringist, mis paikneb risti päikesekiirtega. Seega neelavad võrdse raadiusega kera ja kiirtega risti olev ring valgust võrdselt, sõltumata päike-sevalguse langemise nurgast.
- V240** Aja  $\Delta t$  jooksul peab koolimajja siseneva ja väljuva vee soojushulkade vahe olema võrdne soojuskadudega läbi seinte.
- V241** Kehtib soojusbilanss lihvimise käigus eralduva soojuse ning sisse ja välja voolava vee soojusvoo vahel. Mugavuse mõttes võib vaadelda ajavahemikku  $\Delta t$  ning selle jooksul lihvil eralduvat ning vee poolt äraantavat soojushulka.
- V242** Enne keema hakkamist pidid vees olevad mullid olema nii väiksed, et pindpine-vuse poolt tekitatud lisarõhu ja õhurõhu summa jäi suuremaks kui küllastunud veeauru röhk.
- V243** Soojusvoog läbi kihi paksusega  $d$ , pindalaga  $S$ , temperatuuride vahega  $\Delta T$  ja soo-jusuhtivuskoefitsiendiga  $D$  on  $Q = D \frac{S\Delta T}{d}$ . Statsionaarses olekus tasakaalustab jäää ja vee eralduspinnal ühe plaadi poolt tulev soojusvoog teiselt poolt tuleva soo-jusvoo täielikult ära.
- V244** Süsteemis kehtib energia jäÄvuse seadus. Nimelt ühe tunni jooksul läheb 95 % ka-he liitri aurustumisel eraldunud energiast tundmatu massiga jahutusvee soojen-damiseks  $\Delta T$  võrra. Jahutusvee kiirus on leitav toru massivoo ja ristlõike pindala kaudu.
- V245** Suurima kiiruse saavutab veeaur siis, kui vesi on kuumutatud keemistempera-tuurini. Sellisel juhul kulub kogu küttekeha võimsus vee aurustamiseks.

- V246** Vesiradiaatori soojusvahetust toaga kirjeldavat võrdtegurit on võimalik leida nimivõimsuse kaudu. Lisaks soojusvahetusele saab radiaatori võimsust siduda radiaatorit läbiva vee siseenergia kaoga.
- V247** **a)** Kuna ülesandes eeldatakse, et aurusauna õhuvahtetus ei mõjuta õhus olevat niiskust, kehtib vee massi jäävus. Esialgne absoluutne vee tihedus saunaas on leitav algandmetest (ja graafikult lugedes) ning vee tiheduse muut on antud aurustuva vee massi kaudu.  
**b) c)** Kehtib energia jäädvuse seadus. Küttekeha soojus läheb nii eksisteeriva õhu soojenemisesse kui ka vee keetmisesse.
- V248** Ideaalse soojusmasina kasutegur avaldub kujul  $\eta = \frac{T_j - T_k}{T_j}$ , kus  $T$  on temperatuur kelvinites. Kasutegur on samas tehtud töö ja jahtusvedelikult võetud soojushulga suhe.
- V249** Spiraal kuumeneb temperatuurini, mil tekib soojuslik tasakaal spiraali ja ümbritseva keskkonna vahel. Teisisõnu, spiraali takistil eralduv võimsus peab olema võrdne soojusvooga spiraalist toa õhku.
- V250** Soojusliku tasakaalu tingimuse kohaselt kulub radiaatori võimsus sissetuleva õhu soojendamiseks ja seinte soojuskadude kompenseerimiseks. Seinte soojuskaod on leitavad akna avamise eelsest tasakaalutingimusest.
- V251** Lisaks läbi atmosfääri tulevale päikesekiirgusele tuleb arvestada atmosfääri poolt kiiratava võimsusega. Juhul, kui Maa pinnalt jõuab atmosfääri kiirgus võimsusega  $P_m$ , siis atmosfääri kiirgab Maast välja ja Maale sisse kiirgust võimsusega  $\frac{P_m}{2}$ .
- V252** Temperatuuri kasvu või langemise kiirus on võrdeline tappa siseneva summaarise soojusliku võimsusega. Sellele vastab graafiku puutuja tõus. Soojapuhuri sisse lülitamise ajahetkel oli graafiku tõusu muut võrdeline soojapuhuri võimsusega.
- V253** Tasakaalulises olukorras on ruumist eemalduv soojuse hulk võrdne küttekeha poolt toodetud soojusega. Selle põhjal saab leida esialgsest olukorrast keskkonna ja ruumi vahelise soojusvahetuse võrdelisusteguri ning saadud tulemust kasutada hilisema tasakaalulise temperatuuri leidmiseks.
- V254** Soojusvahetus eesruumi ja õue vahel peab olema sama suur kui soojusvahetus eesruumi ja kaupluse vahel. Seega püsib päeval ajal eesruumis temperatuur  $\frac{T_0 + T_1}{2} = 12^\circ\text{C}$  ning eesruumi ehitusega vähenesid ukse lahtikäimisest tingitud soojuskaod 2 korda.

- V255** Et korterid on identsed ning nende sisetemperatuurid on samad, peavad ka soojuskaod läbi nende seinte olema võrdsed. Seega annab katlast tulev kuum vesi poole oma soojusest ära ülemises korteris ja poole alumises. Lisaks on radiaatori poolt ära antav soojusvõimsus võrdeline torude keskmise temperatuuriga ning radiaatori ribide kogupindalaga.
- V256** Alguses on lisanduva vee temperatuur võrdne soojendis oleva vee temperatuuriga ja vett välja ei voola; seega muutub vee temperatuur ainult soojendilt saadava soojuse töttu. Stabiilsel temperatuuril on ajaühikus väljavoolava vee soojendamiseks kulunud energia võrdne soojendi võimsusega.
- V257** Selleks, soojustuskihtide vahel oleval kilel vältida kondenseerumist, ei tohi kile asukohas temperatuur langeda alla kastepunkti. Kastepunkt on leitav graafikult, leides veeauru osaröhu toatemperatuuril ning seejärel leides sellele vastava kastepunkti.
- V258** **a)** Kehtib soojuslik tasakaal sise- ja välisseina vahel. Nimelt on soojusvoog siseseinalt välisseinale võrdne siseseinalt kiirgava soojusvoo ja välisseinalt saabunud kiirguse peegeldunud osa summaga. Välisseina jaoks kehtib analoogne tasakaalutingimus.  
**b)** Nüüd kehtivad sarnased voo tasakaalud iga seinapaari vahel, aga õnneks on eelmine osa tulemus üldistatav ka mitme seina jaoks.
- V259** On teada, et hetkeline efektiivne soojusvõimsus on võrdeline temperatuuri ja aja graafiku puutuja töüsuga. Enne pliitüki lisamist on ainsad soojuskaod läbi seinte; mida suurem on ahju temperatuur, seda suuremad on kaod. Pärast pliitüki lisamist läheb osa ahju võimsust veel plii sulatamiseks.
- V260** Telk peab olema soojuslikus ja niiskuslikus tasakaalus. Peale soojakadudele läbi seinte läheb osa soojusest kaotsi ventileeritava õhuga.
- V261** Kütteelement on soojuslikus tasakaalus ümbritseva keskkonnaga ning kaod kesk-konda on võrdelised sise- ja välistemperatuuride vahega. Soojusliku tasakaalu temperatuur on määratav nn graafilise meetodiga, mis seisneb  $\sigma(t)$  ja teatud funktsiooni pingest lõikepunktide leidmises.
- V262** Soojustasakaalu korral kiirgab kuup sama palju kui see neelab. Kiiratav võimsus on leitav Stefan-Boltzmanni seadusest ning neelatav võimsus kuubi projektsiooni pindalast kiirguse leviku suunaga risti oleval tasandil. On selge, et maksimaalse temperatuuriga peab kuubi projektsiooni pindala olema maksimaalne ja minimaalse temperatuuriga minimaalne.
- V263** Kuulikesele mõjud nii raskusjoud kui ka elektrostaatiline joud. Nende tulemusena hakkab kuul konstantse kiirendusega vertikaalselt üles liikuma.

- V264** Kehtib laengute jäävus — valides suvalise suletud pinna, peab pinda läbiv vool olema võrdne pinna sisse jääva summaarse lekkevooluga.
- V265** Sümmeetria tõttu mõjuvad kõikidele kuulidele radiaalsed sama väwärtusega elektrostaatilised jõud, mis on niitide pingete poolt tasakaalustatud. Lisaks paneme tähele, et kuna niigid on identsed ning sama palju veninud, peavad kõikide niitide pinged võrdsed olema.
- V266** Tolmukübemel kehtib jõudude tasakaal raskusjõu ja elektrostaatilise jõu vahel.
- V267** Kehtib energia jäävuse seadus, kus peame arvestama nii gravitatsioonilise kui ka elektrilise potentsiaalse energiaga.
- V268** Põhimõtteliselt on võimalik leida elektroni kiirendus rönga poolt tekitatud elektriväljas ning seda integreerida, aga märgatavalt lihtsam on rakendada energia jäävuse seadust ning kasutada rönga poolt tekitatud potentsiaalset energiat. Punktläengu  $q$  poolt tekitatud potentsiaal kaugusel  $r$  on  $k \frac{q}{r}$ .
- V269** Ioonide kiirus on leitav energia jäävusest. Sondi ja ionide kiiruse sidumiseks on kõige mugavam rakendada impulsi jäävust.
- V270** Plaatide vahel mõjub elektronile elektrivälja poolt allapoole suunatud kiirendus. Seega on elektroni kiirus plateide vahelisest ruumist väljumisel minimaalne siis, kui elektroni trajektoor möödub alumise plaadi parema otsa lähedalt.
- V271** Paneme tähele, et summaarne laengute poolt tekitatud elektriväli on individuaalsete laengute tekitatud elektriväljade summa (kus elektriväljad on vektoriaalselt kokku liidetud). Ülesannet lihtsustab oluliselt laengute kokku liitmise järjekord, näiteks on mugav laengute panuseid diagonale järgi paarikaupa kokku arvestada.
- V272** Elektronkahurist aja  $\Delta t$  jooksul eralduva elektronide kogumi summaarne impuls on võrdne impulsi jäävusest elektronkahurile mõjuva jõu ja  $\Delta t$  korrustisega. Individuaalse elektroni impuls on leitav energia jäävuse seadusest.
- V273** Selleks, et siduda elektronide kiirust ekraani-sihilise nihkega, tasub ülesanne jagada kaheks eraldi osaks: elektronide viibimine plateide vahel ning plateide ja ekraani vahelises ruumis. Esimeses osas mõjub elektronile ühtlane kiirendus, teises osas liigub elektron sirgjooneliselt.
- V274** Kasulikuks võib osutada superpositsooniprintsiip, mille kohaselt võib välja lõigatud ruutu tekitatud välja leida kui  $+ ja -$  laenguga ruutude väljade summana.

- V275** Osakese asukohta on mugavam leida vaadeldes eraldi osakese  $x$ - ja  $y$ -koordinaate. Laengu keskmise kiirus on leitav perioodi jooksul sooritatud nihke ja perioodi suhtena.
- V276** Kuna sfäärid on traadiga ühendatud, peavad need sama potentsiaaliga olema.
- V277** Väikeste  $y$ -suunaliste võnkumiste jaoks on kasulik vaadata, missugune jõud kerale mõjub, kui seda väikse distantsi  $y$  võrra tasakaaluasendist eemale nihutada.
- V278** Kondensaatorid on pingeallikaga ühendatud jadamisi ning kondensaatorite  $C_1$  ja  $C_2$  kogutakistus jadamisi on  $(1/C_1 + 1/C_2)^{-1}$ . Kuna osakesele mõjuvad elektrijõud on esialgse liikumissuunaga risti, kulub mõlemal kondensaatori läbimiseks sama aeg, kusjuures kondensaatorite vahel mõjub osakesele konstantne kiirendus.
- V279** Kärbse potentsiaali on mugav avaldada  $x - y$  koordinaadistikus. Ülesande sümmeetriast on suhteliselt lihtne näha, et kärbse kaugus laengust on minimaalne siis, kui ta asub otse laengu kohal.
- V280** Elektrivälja lisamisel nihkub kuuli tasakaaluasend kas üles või alla, sõltuvalt elektrivälja suunast. Seega on igat poolperioodi mõistlik eraldi vaadata, sest selle raames liigub kuul ümber fikseeritud tasakaaluasendi.
- V281** Klotside läbitav vahemaa on leitav energia jäätuse seadusest. Nimelt on klotsid paigal nii alg- kui ka lõppasendis ning ainus viis soojuse eraldumiseks on hõördejõu kaudu, mis on omakorda avaldatav alg- ja lõppasendi potentsiaalse energiate vahest.
- V282** Hetkel, mil kuulide vahekaugus on minimaalne, peab massikeskme taustsüsteemis mõlemad kuulid ja kosmoseprügi paigal olema. Vastasel korral ei oleks kuulide vahekaugus minimaalne, sest kuulid liiguksid üksteise suhtes.
- V283** Vastuse leidmiseks ei pea leidma täpset avaldist koonuse tipu potentsiaali jaoks, vaid piisab võrdelisuse seaduse leidmisest koonuse laengu ja lineaarmõõtme suhtes. Potentsiaalide jaoks kehtib ka superpositiooniprintsiip ehk lõplik potentsiaal on esialgse koonuse potentsiaali ja äralöigatud koonuse potentsiaali vahe.
- V284** Kuivõrd potentsiaal sõltub ainult  $x$ -koordinaadist, on elektriväli kõikjal  $x$ -telje sihiline ning impulsi  $y$ -komponent säilib. Täielik „sisepeegeldus“ toimub siis, kui positiivse  $x$ -suunaga seotud kineetiline energia on suurem kui  $qU$ .
- V285** Metallplaati sisse viies kondensaatori plaatide laeng säilib, aga pinge muutub. Kuna metallplaadi sees elektrivälja ei ole, on pingelang üle kondensaatori kaks korda väiksem, sest elektriväljaga täidetud piirkond väheneb  $d/2$  võrra.

- V286** Mahtuvuse leidmiseks võib kondensaatorit vaadelda kui kahte jadamisi ühendatud dielektrikuga kondensaatorit. Selleks asetame mõttelise metallplaadi dielektrilise kihi eralduspinna laengu leidmiseks võib rakendada Gaussi teoreemi mõttelise „karbi“ jaoks, mis hõlmab piirpinda.
- V287** **a)** Seni kuni üks laeng on piirkonnas  $x > 0$  ning teine piirkonnas  $x < 0$ , on pulgale mõjuv summaarne jõud 0; see tähendab, et pulp liigub konstantse kiirusega. Kui mõlemad laengud on piirkonnas  $x > 0$ , mõjub pulgale elektrivälja poolt summaarne konstante jõud.  
**b)** Antud juhul sõltub pulgale mõjuv jõud lineaarselt pulga nihkest  $x$ .
- V288** Metallkeradele indutseeritakse elektrivälja poolt võrdsed ja vastasmärgilised laengud  $\pm q$ ; kuivõrd traat on peenike, siis võime ignoreerida sellel olevaid laenguid. Kuna metallkuulid käituvald nagu elektriline dipool, on süsteem tasakaalus siis, kui metalltraat on paralleelne elektriväljaga. Et traat on juhtivast materjalist, siis on süsteem ekvipotentsiaalne.
- V289** Elektriväli indutseerib kuulidele vastasmärgilised laengud, mis tagavad, et kuulide potentsiaalid on võrdsed.
- V290** **a)** Kuulide ruutkeskmene kiirus on maksimaalne siis, kui elektriline potentsiaalne on minimaalne, st siis, kui nööride vahel on sirgnurk. Rakendades sümmeetriaat ja impulsi ning energia jäävust, on võimalik antud olukorras kuulide kiirused leida.  
**b)** Paneme tähele, et  $A$  kiireneb sümmeetria töttu vertikaalselt. Peale kuulide vahelise tõukejõu tuleb arvestada ka niidi pingega.
- V291** Ampermeetri ja voltmeetri pingete summa peab olema võrdne klemmidele rakenetava pingega nii enne kui ka pärast takisti ühendamist.
- V292** Kuna voltmeetrit on ühesugused, võib need asendada takistustega  $R$ .
- V293** Jooniselt näeme, et äärmised takistid on lühistatud, mistõttu need mõõteriistade näitu ei mõjuta.
- V294** **a)** Takisti peab tagama selle, et lampide pingi ei ületaks nominaalpinget ükskõik missuguse lambi sisetakistuse väärtsuse korral  
**b)** Lampide oodatavast tuhmimalt põlemine on põhjustatud alaldi sisetakistusest.
- V295** Koormisel eralduv võimsus on pingi ja voolu korrelatsioon. Seega on vaja graafikult leida  $x$ - ja  $y$ -koordinaadi korrelatsiooni maksimum.
- V296** Kuigi pingearallika pingi ja lampide takistused pole teada, võib neid kasutada muutujatena ja vaadata, kas need taanduvad lõppvastuses välja.

- V297** Mõlema kontuuri jaoks saab rakendada Ohmi või Kirchhoffi seadusi.
- V298** Otsitav suhe  $I_2/I_1$  on mugavalt avaldatav Ohmi seadusest, ülejää nud on võrratus-tega manipuleerimine.
- V299** Mõlema kontuuri jaoks saab rakendada Ohmi seadust või Kirchhoffi seadusi.
- V300** Takistuse leidmiseks tasub tetraeedri pinna jaotus joonistada ning ära kasutada sümmeetria.
- V301** Sümmeetria kaalutlustel saab skeemis sama potentsiaaliga punkte kokku ühenda da.
- V302** Kogutakistuse määramist lihtsustab skeemi kavalam ümber joonistamine.
- V303** Kuna kondensaatorid on enne lülitit sulgemist laadimata, on ka pingi nende klemmidel 0.  
Pärast pika aja möödumist on kondensaatorite laeng jõudnud stabiliseerida ehk vool läbi kondensaatorite on 0. Teisisõnu võib kondensaatorid efektiivselt skeemist lahti ühendada.
- V304** Ülesandes on neli tundmatut: vooluallika pingi, takisti takistus ning ampermeetri ja voltmeetri sisetakistused. Nelja tundmatu jaoks on vaja nelja võrrandit ning need tulenevad ülesandes antud ampermeetri ja voltmeetri näitudest.
- V305** Teades, et päripidise voolu korral võib dioodi klemmid lugeda lühistatuks ning vastu voolu korral isoleerituks, võib koostada esialgse skeemi asemel mõlema po laarsuse korral dioodideta ekvivalentset skeemid.
- V306** Kuna süsteemi stabiilses olekus on kondensaatorite pingi konstantne, ei läbi neid ka vool.
- V307** Süsteem saab töötada kolmes erinevas režiimis. Esiteks, kui pingi on piisavalt madal või kõrge, on kõikide elementide takistus vastavalt  $1\Omega$  või  $2\Omega$ . Vahepealse pingi väärtsuse korral on vasakpoolse elemendi takistus  $2\Omega$  ja parempoolsetel  $1\Omega$ . Teisi režiime ei ole, sest vasakpoolse takisti pingi on alati suurem kui parempoolsetel ning seega ei saa vasaku takisti takistus olla väiksem kui parempoolsetel.
- V308** Asjaolu, et voltmeeter näitab  $\frac{U}{2}$ , vihjab kondensaatorite jadaühendusele  $C$  ja  $D$  vahel.

- V309** Esimesel tekstis kirjeldatud juhul on kondensaatori pinge elektriskeemi sisselülitamise hetkel 0 V, sest lülit „väljasasendis“ on takisti ja kondensaator jadamisi ühendatud. Teisel juhul on kondensaatori pinge koheselt pärast vooluallika polaarsuse muutmist 9 V. Nende teadmistega saab leida takisti pinge mölemal juhul ja kirja panna vastavad tingimused takisti läbipõlemise ja mitte läbipõlemise jaoks.
- V310** Mõlemat tüüpi traadijuppide pikkused peavad olema sellised, et 1) summaarne takistus on  $1 \Omega$ ; 2) temperatuurist sõltuvus oleks võimalikult väike. Temperatuurist sõltuvuse leidmiseks tuleb kasutada ülesandes antud temperatuurikofitsente.
- V311** Lõpmatust ahelast ühe lüli eemaldamisega summaarne mahtuvus ei muudu.
- V312** Kõigepealt tasub leida lühikese traadijupi takistus ning seejärel üritada saadud avaldist summeerida terve traadi ulatuses.
- V313** Patarei tehtud töö ajaühikus  $\Delta t$  on  $UI\Delta t$ . Kondensaatorisse salvestatava energia muutumise kiirus on leitav võttes kondensaatori siseenergiast  $\frac{CU^2}{2}$  aja järgi tuleti-se.
- V314** Peegelsümmeetria tõttu ülemises ja alumises takistis ( $R_2$  ja  $R_4$ ) vool puudub.
- V315** Takistid saavad omavahel olla kas kolmnurk- või tähtühenduses. Ampermeeter ei saa olla väljundklemmide vahele lülitatud, sest siis põleks see vastavale klemmipaarile pinge rakendamisel läbi. Samuti ei saa see olla ühegi takistiga rööbiti lülitatud, sest siis ei läbis vastavat takistit kunagi vool ning sisuliselt tähendaks see takisti asendamist null-takistusega.
- V316** Elektriskeemi käitumisest arusaamiseks tasub skeem selgemalt ümber joonistada, nii et ampermeeter on asendatud juhtmega ja voltmeeter lihtsalt körvaldatud.
- V317** Eesmärk on leida elektriskeem, kus igale lambile langeb viienda klemmipingest. Möistlik on kõigepealt proovida võimalikult lihtsaid korrapäraseid lampide konfiguratsioone. Näiteks saab lambid asetada rööpühendusse, kus igas harus on kas 1, 2, 3, 4, 6 või 12 lampi.
- V318** **a)** Peale pikka aega on kondensaatoreid läbiv vool null, sest nende pinged, ja seega laengud, on stabiliseerunud. Seega võib kondensaatorid efektiivselt süsteemist välja lõigata.  
**b)** Elimineerides süsteemist vooluallika, peab kehtima laengu jäädvuse seadus.
- V319** Süsteemis kehtib laengu jäädvus, st alamsüsteemis, mis koosneb ülemisest sõlmpunktist ja sellega ühendatud kolmest kondensaatori plaatist peab alati olema summaarse laenguga  $-q$ . See kehtib sellepärast, et laengud saavad liikuda ainult mööda metalli ning ei saa eelmainitud alamsüsteemist õhu kaudu lahkuda.

- V320** Kuna tegemist on jadaühendusega, siis on voolutugevus läbi kõikide vooluelementide sama. Lisaks peab pingelang üle kõikide vooluelementide olema 0.
- V321** Kuna elektriskeemis on mitu patareid ja vooluallikat, tuleb Kirchhoffi seadused ettevaatlikult iga kontuuri jaoks kirja panna. Juhul, kui lülitit on suletud, on vooluallikas efektiivselt lühistatud ning ülejäänud süsteemi järelikult ei mõjuta.
- V322** Takistuste leidmiseks tasub kõik  $1 \Omega$  takistuste kombinatsioonid läbi vaadata ning süstemaatiliselt valed konfiguratsioonid elimineerida.
- V323** Mõlema ülesandes antud tingimuse jaoks on võimalik kirja panna vastav võrrand (kasutades näiteks Kirchhoffi seadusi) ning saadud võrrandisüsteemi lahendid peaksid ki olema  $R_1$  ja  $R_2$ .
- V324** Ülesandes peab käsitlema kahte juhtu: a) kui mõõtepunkt ei asu vaguni rataste vahel ja b) kui mõõtepunkt asub vaguni rataste vahel. Mõlemal juhul käitub tekkiv elektriskeem isemoodi.
- V325** Paneme tähele, et sümmeetria tõttu on lampide 1 ja 4 otspunktide potentsiaalid võrdsed.
- V326** Nominaalses töörežiimis on iga valgusdioodi ping  $U_d$  ja vool maksimaalselt  $20 \text{ mA}$ . Teades võrgupinge maksimaalset pinget on võimalik leida takisti takistus ja maksimumvõimsus. Ühe täisperioodi jooksul tuleb pingelanguse muut kondensaatoril takisti arvelt. Seejuures on kondensaatori plaatide laengumuut leitav täisperioodi pikkukest ja ahela voolutugevusest.
- V327** Oluline on tähele panna, et dioodidel saab pärivoolu korral pingeks olla ainult  $1,0 \text{ V}$ . Tasub vaadata, kas rohkem kui ühel dioodil saab üldse vastava skeemi korral selline ping olla.
- V328** Et ampermeetrite sisetakistus on 0, siis võime need lühistada: kõigis nendes tippudes, kuhu viivad ampermeetrid, on potentsiaalid võrdsed. Sümmeetria tõttu peab see potentsiaal jääma täpselt patareiklemmide potentsiaalide vahepeale, seega on igale takstile rakendatud ping  $3 \text{ V}$ .
- V329** Pärast lülitit avamist eraldub kogu energia kondensaatorilt lambis soojusena. Lisaks on kogu vabanev soojusenergia võrdne patarei kogutööga.
- V330** Ülesande peamine raskus on korrektselt määrata ülesande tekstiga ekvivalentne elektriskeem. Peale elektriskeemi määramist taandub ülesanne stabiilse režiimi leidmisele. See on tehtav näiteks Kirchhoffi seadustega.

- V331** Kirchhoffi esimese seaduse põhjal peab suvalise pinge ja voolutugevuse korral kehtima  $V = U - IR$ , kus  $V$  on pinge türistoril. Kandes vastava funktsiooni volt-amperkarakteristikule on näha, et mingi pinge  $U$  korral on  $I$  ja  $V$  jaoks kuni kolm lahendit, kusjuures negatiivse töösuga punkt ei ole stabiilne, kuna vastaks negatiivsele takistusele. Antud informatsiooniga on võimalik määrata, kuidas türistorit läbiv vool muutub pingeallika pinge tõstmisel.
- V332** Magnetväljas hakkab osake liikuma mööda ringjoont, mille raadius on leitav jõudude tasakaalust. Maksimaalse nurga korral väljub osake magnetribast eraldusjoonega paralleelselt.
- V333** Elektron sooritab solenoidi teljega risti tasandis ringliikumist. Antud ringliikumise periood on leitav kasutades Lorentzi ja tsentrifugaaljõu tasakaalutingimust.
- V334** Elektrivoool generaatori mähises (juhtmekontuuris) tekib elektromagnetilise induktiooni toimel ning seda protsessi kirjeldab Faraday seadus  $\varepsilon = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$ , kus  $\varepsilon$  on voltides mõõdetav elektromotoorjõu suurus ning  $\Delta\Phi$  on juhtmekontuuri läbiva magnetvoo muutus, mis toimub ajavahemiku  $\Delta t$  jooksul.
- V335** Magnetväljas ringliikumisel käitub Lorentzi jõud kesktõmbejõuna. Analoogselt on teisel juhul kesktõmbejõud kuloniline jõud kahe kuuli vahel, kusjuures peab tähelepanu pöörاما sellele, et kuulid tiirlevad ümber ühise massikeskme.
- V336** Raamis indutseeritakse vool, sest takisti kakkudes suureneb raami läbiv magnetvoog, mis omakorda tekitab Faraday seaduse kohaselt raamis elektromotoorjõu ja voolu. Seega on stabiilses režiimis raskusjõud ning takistit läbiva voolu poolt tekitatud Lorentzi jõud tasakaalus.
- V337** Osakesed hakkavad tsüklotronis liikuma päripäeva mööda järjest suureneda raadiusega poolringjooni. Osake väljub tsüklotronist, kui tema trajektoori raadius kasvab sama suureks tsüklotroni raadiusega  $R$ .
- V338** Lorentzi jõu tõttu liiguvald mölemad osakesed mööda ringjoont, kusjuures mölema osakese kiirusvektorite pöörlemise nurkkiirused on samad.
- V339** Osakete kiirus magnetvälja sisenedes on avaldatav energia jäätusest. Magnetväljas algab ringliikumine, kusjuures detektorini jõutakse pärast poole ringjoone läbimist. Teisisõnu on detekteeritud  $x$ -koordinaat  $2R$ , kus  $R$  on ringjoone raadius.
- V340** Laeng sooritab magnetväljas ringliikumist; mida suurem on magnetvälja, seda suurem on ringi raadius. Enne ja pärast ringliikumist on osakese trajektoor sirge, kusjuures ülemine ringjooneks on ilma murdepunktita, st sirgjooned on ringjoone puutujaks.

- V341** Traat võtab kaare kuju (sest Ampere'i jõud mõjub analoogselt täispuhutud palli puul pallikestale ülerõhu poolt mõjuva jõuga: lühikesele mõttelisele traadijupile mõjuv jõud on risti traadijupiga). Pinge leidmiseks on mugav vaadelda lühikest traadijupi lõiku ning kirja panna jõudude tasakaalu tingimus.
- V342** Selleks, et venitada pooli väikse vahemaa  $\Delta\ell$  võrra pikemaks, on vaja teha tööd, millest osa kulub magnetväljas salvestatud energia suurendamiseks ning teine osa kulub vooluallika poolt tehtud töö kompenseerimiseks. Magnetväljas salvestatud energia leidmiseks võib kasutada kas pooli koguenergia valemit  $\frac{LI^2}{2}$  või magnetvälja energiatihedust  $w = \frac{B^2}{2\mu_0}$ .
- V343** Magnetväljas liiguvalt osakesed mööda ringjoont kiirusest sõltumatu perioodiga  $t = \frac{2\pi m}{qB}$ . Näeme, et ülesandes antud ajavahemik  $T$  vastab poolele täistuurule. Antud tähelepanek võimaldab olukorra mugavamat skitseerimist. Iga kord kui elektriväli sisse lülitatakse, antakse osakesele väike elektriväljasihiline impuls.
- V344** Magnetväljas hakkab osake liikuma mööda ringjoont. Ringjoone raadius on avaldatav Lorentzi jõu ja kesktõmbekiiruse võrdsusest. Märkame, et kui ringjoone raadius on piisavalt väike, väljub elektron tuldud suunas tagasi. Ringjoone suurenedes väljub elektron lõpuks vasakust küljest.
- V345** Kuulikesele mõjuvad raskusjõud, niidi pinge ning Lorentzi jõud. Kuulike püsib ringjoone kaare kujulisel trajektooril seni, kuni Lorentzi jõud ja niidi pingे ületavad ülejäänud jõudude niidisihilise komponendi. Vastav kriitiline nurk on leitav energia jäätuse seadusest ning jõudude tasakaalust.
- V346** Magnetvälja väljalülitamise käigus muutub magnetvoog läbi silindri ristlõike, mis indutseerib Faraday seaduse kohaselt keeris-elektrivälja. Keeris-elektriväli mõjub omakorda silindri pinnal olevatele laengutele teatud jõuga ning paneb silindri pöörlema. Silindri pöörlemise kiiruse leidmiseks on mugav vaadelda lühikest ajavahe-mikku  $\Delta t$ , mille jooksul väheneb magnetvälgi  $\Delta B$  võrra.
- V347** Elektronid hakkavad liikuma mööda  $z$ -teljelist heeliksi, kusjuures heeliksi raadius on võrdeline  $x - y$  suunalise kiirusega. Seega liiguvalt kõik elektronid  $x - y$  tasandis mööda ringjoont.
- V348** Oluline on teha selge ülesannet kirjeldav joonis ning aru saada millal täpselt päikeseloojang toimub ning kuidas püstti tõusmine seda mõjutada saab.
- V349** Laserkiire kõrvalekalde nurk on leitav Snelli seaduse ja kiilu geometria rakendamisest.
- V350** Tasub teha selge joonis ning kasutada sarnaseid kolmnurki.

- V351** Selleks, et sisenev kiirte kimp oleks ka peale teise läätse läbimist paralleelne, peavad läätsede fookused ühtima.
- V352** Selleks, et kiirtekimp laieneks ja jäeks paralleelseks, pidi optik paigutama nõgusläätse kumerläätse ette niimoodi, et läätsede fookused ühtiksid nõgusläätse ees. Fookuste ühtimises saab veenduda, kasutades läätse valemit ning arvestades, et paralleelse kiirtekimbu kujutis asub lõpmatuses.
- V353** Pärast selge joonise joonestamist taandub ülesanne geomeetria peale.
- V354** *A* asukoha leidmiseks võib kasutada läätsevalemist.
- V355** Ainus muutus kiire teekonnas toimub segu sees. Murdumisnäitaja muutuse tõttu hakkab kiir segus teise nurga all liikuma. Vastavat nurga muutust ning seejärel ka *y*-suunalist nihet on võimalik leida Snelli seaduse abil.
- V356** Selleks, et kaks valgusallikat sama kujutise annaksid, peab üks olema näiline ja teine tegelik.
- V357** Objekti kaugus läätsest on üheselt ära määratud sellega, et lääts on objektist ja kujutisest ühel kaugusel. Kiirte edasise käigu jaoks tuleb mõlemat läätse poolt eraldi vaadata.
- V358** Selleks, et põhja valgustatud ala pindala ei muutuks, peab äärmine kiir kalduma valgusvihi diameetri võrra horisontaalses suunas kõrvale. Kõrvalekaldumise määr on kõige mugavam arvutatav kasutades väikeste nurkade lähendust ning jaotades kõrvalekalde kaheks osaks; enne ja pärast vette sisenemist.
- V359** Nõguspeegli pinnalt peegeldunud kiirte nurgapoolitajad läbivad peegli kõverus-raadiuse keskpunkti.
- V360** Tasub koostada selge joonis ning murdumisnäitaja leidmiseks kasutada täisnurksete kolmnurkade omadusi ja Snelli seadust.
- V361** Kärbse kiiruse leidmiseks on kasulik vaadelda, kuidas kärbse poolt aja *t* jooksul läbitud lõik pikkusega *vt* läbi läätse välja venib.
- V362** Tuttavad märkavad üksteist sellel hetkel, kui kiir, mis saab alguse ühest inimesest ning põrkab vastu peegli paremat nurka, jõuab teise inimeseni. Antud olukorra jaoks saab koostada joonise ning vastavad tingimused kirja panna.
- V363** Ülesande lahendamiseks tasub vaadelda kõige äärmist kiirt, mis kumerläätse sise- ne, ning abijoontega määaratleda, kuidas vastav kiir optilist süsteemi läbib. Seejärel saab ära kasutada sarnaseid kolmnurki.

- V364** Antud juhul tasub vaadelda kõige äärmisi süsteemi sisenevaid kiiri.
- V365** Ülesande lahendamisel osutub tarvilikuks teadmine, et läätsele selle optilise teljega paralleelselt langevad kiired (või murtud kiirte pikendused nõgusa läätse puuhul) koonduvad fookuses punktiks. Seega on ainus moodus kahe läätse abil saada süsteem, mis teisendab paralleelse kimbu uesti paralleelseks kimbuks selline, et läätsede fookused ühtivad.
- V366** Valguskiir siseneb prismasse murdumata, sest kiir on normaali sihiline. Küll aga toimub murdumine prismast väljades. Kuna terve tahu ulatuses on langemisnurk sama, tekib üks tahk paralleelse kuirtekimbu. Kuna meil on kaks murdvat tahku, on esialgne kuirtekimp pärast prisma läbimist jagunenud kaheks.
- V367** Nii täis- kui poolvarjude piirjoonte pikendused on valgusallika puutujad.
- V368** Allika heledus on ligikaudselt võrdeline vaatleja silmaava nurkläbimõõdu ruuduga allika asukohast vaadatuna.
- V369** Piisab kahe ettevaatlikult valitud kuirte käikude vaatlemisest.
- V370** Ülesande mugavamaks lahendamiseks tuleb teha selge joonis ning rakendada väikeste nurkade lähendust. Lisaks, kiire ja kuuli puutepunkti pinnanormaal ühtib kuuli raadiusega.
- V371** Pikas optilises kius jäävad levima vaid sellised kiired, mille jaoks toimub südamiku ja katte lahtutuspinnal täielik sisepeegeldumine.
- V372** Pärast mõningast geomeetriat selgub, et  $A$  on kahe vasakul oleva läätse fookuses; seega on punktist  $A$  tulevad kiired pärast vastavate läätsede läbimist paralleelsed.
- V373** Nõguslääts tekib esemest näiva kujutise ning kumerlääts tekib näivast kujutisest töelise kujutise. Kuna kumerläätse asukoht on teada, saab tagurpidi lähenedes rekonstrueerida näilise kujutise asukoha.
- V374** On lihtne näha, et plaadist väljub endiselt paralleelne valgusvihk. Küll aga on selle levimise suund muutunud. Valguslaigu nihke leidmiseks on mugav vaadelda kiirt, mis läbib läätse optilist keskpunkti.
- V375** Mustaks värvitud tahkudelt valgus peegelduda ei saa, toimub neeldumine. Ülesande tingimus on täidetud, kui värvimata tahust kuupi sisenev valgus ei saa väljuda läbi kõrvaltahu (toimub sisepeegeldus).

- V376** Joonisel on kaks peegeldust ja üks peegelduse peegeldus. Sellele vastab kolm võimalikku punktide konfiguratsiooni ning eeldatavasti on võimalik paari kavala ar gumendi põhjal osad konfiguratsioonid elimineerida (näiteks peab valgusalikas olema mõlema peegli vahel).
- V377** Nurga  $\varphi$  leidmiseks tuleb vaadelda kiirt, mis siseneb lõiku  $AB$ .
- V378** Läätsse asukoha leidmiseks tasub vaadata geomeetriselt omapäraseid kiiri ja kuidas need läbi läätse murduvad. Selleks sobivad näiteks kiired  $AB$ ,  $AA'$  ja  $BB'$ .
- V379** Paneme tähele, et valemi järgi keskkonna murdumisnäitaja suurenedes, kuid läätse murdumisnäitaja samaks jäädes läätse fookuskaugus suureneb. Seega on ainus viis, kuidas valguskiired saaksid ka pärast anuma vett täis valamist samas punktis koonduda, see, kui vees peegelduksid valguskiired põhjas olevalt peeglilt ja seejärel koonduksid samas punktis, kus enne.
- V380** Selleks, et kapillaari sein paistaks null paksusega, peab kapillaarile puutujana langenud kiir napilt puudutama sisemist õönsust. Sellisel juhul ei leidu ühtegi kiirt, mis läbiksid kapillaari seina ilma sisemise õönsuse piirpinnale langemata.
- V381** Läätsse fookuskauguse leidmiseks tasub vaadelda valguskimpu, mille suund on paralleelne optilise peateljega. Sellisel juhul tekitavad kiired näilise kujutise läätse fookusesse.
- V382** Suhteliselt kindel meetod on avaldada kõik ülesandes antud ja otsitavad muutujad võimalikult mugavate jooniselt leitavate suuruste kaudu ning loota, et saadud võrranditest on lihtne näha, kuidas lõppvastus avaldub  $k_1$  ja  $k_2$  kaudu. Kehvemal juhul tuleb lahendada kolmest võrrandist koosnev võrrandisüsteem ( $k_1$ ,  $k_2$  ning otsitava suhte jaoks). Silmas peab pidama, et jooniselt validud muutujad peavad ülesande geomeetria üheselt ära defineerima. Selleks sobivad näiteks läätse fookuskaugus ning pliatsi mõlema otsa kaugused läätsest.
- V383** Kriitilise langemisnurga all on valgus sakilisel poolel täieliku sisepeegeldumise piiril. Selleks, et antud tingimust langemisnurgaga siduda, on kasulik joonestada suur ja selge joonis.
- V384** Kui nõgusläätsele langevad paralleelsed kiired, lõikuvad murdunud kiirte pikenedused eesmisel fokaaltasandil.
- V385** Kui peegeldavate silindriliste seinte asemel oleks kaks tasapeeglit, siis tekiks optilise peateljega risti punktallika kujutiste lõpmatu jada (peegeldus, peegelduse peegeldus jne). Iga peegeldus tekitaks läbi läätse ekraanil uue kujutise. Tasapeeglite juhu on võimalik ka silindrilise peegli peale laiendada.

- V386** Mõlemad teravustatavuse asendid on üksteise suhtes sümmeetrilised. See tähendab seda, et kui esimeses asendis on läätse kaugus esemest  $a$  ja sensorist  $b$ , siis teises asendis on vastavad kaugused ümber vahetatud.
- V387** Algselt paralleelsed kiired koonduvad pärast läätse läbimist fokaaltasandis. Seega on võimalik esimese läätse fokaaltasand rekonstrueerida, teades fookuse asukohta ja kahe kiire lõikepunktia.
- V388** Poolkera kumera pinna keskosa võib vaadelda omaette õhukese läätsena, mille fookuskaugus ja kaugus paberit pinnast määradavad kujutise suurenduse. Läätsse fookuskauguse leidmiseks on kasulik vaadelda valguskiirt, mis liigub paralleelselt optilise peateljega. Pärast läätses murdumist koondub kiir fookusesse.
- V389** Kuna silmani jõudvate kiirte jaoks kehtib  $r \ll L$  ning trajektoori kõverdumine toimub musta augu lähiümbruses, võib vaadelda kiire teekonda lihtsustatult: kiire liikumine musta auguni, hetkeline nurga muutus musta augu juures ning edasi sirge tee vaatlejani.
- V390** Juku näo kujutise leidmiseks tasub kõigepealt vaadelda, kuidas Juku silmad peeglitest kujutisi tekitavad. Kuna peeglid on üksteise suhtes täisnurga all, on selge, et otse nurgapeegli nurka vaadates on näha kolmandat järku kujutis.
- V391** Sfäärilist akvaariumit saab vaadelda kui õhukest tasakumerat läätse, mis on surutud tasase küljega vastu sirge seinaga akvaariumi. Lisaks peab arvestama, et läätses lõplikku kujutist tekitav kala ei vasta tegelikule kala asukohale, vaid akvaariumis murdumise töttu asuvale kujutisele, mis on tegelikust kala asukohast  $n$  korda lähemal.
- V392** Kera ääres toimub pinnalt täielik sisepeegeldumine, kus peegeldunud kiired saavad alguse kas põrandalt või seinalt (ja olles seega kas valget või kollast värv). Murdumisnäitaja määramiseks on vaja jooniselt uurida sisepeegeldumise piirjuhtu.
- V393** Kahe kujutamise tekkeks peab kumerpeegel asuma objektist  $A$  vasakul.  $A'$  leidmiseks peab määrama läätse fookuse, aga selleks peab silmas pidama asjaolu, et pole teada, kumb kujutistest  $K_1$  ja  $K_2$  kuulub objektile  $A$ .
- V394** Kärbsse näiline asukoht vastab kärbsest alguse saanud klaasist väljunud murdunud kiirte pikenduste lõikepunktile. Selle jaoks tasub vaadelda kahte kiirt: mõlemad saavad alguse kärbsest, aga üks väljub merevaigutükist pinnaga risti ja teine väikse nurga all. Edasi tuleb kiirte geomeetriat ettevaatlikult uurida ning rakendada Snelli seadust.

- V395** Allikat ja kujutist ühendav sirge läheb läbi läätse keskpunkti, kusjuures läätse keskpunkt peab jäama allika ja kujutise vahele, sest tegu on tõelise kujutisega. Lisaks teame, et sirge kujutis on sirge, kusjuures need kaks sirget löikuvad läätse tasandis.
- V396** Lisaks väikeste nurkade lähendusele lihtsustab ülesande geomeetriat võimalikult sümmeetrislike kiirte käikude uurimine. Näiteks on mugav vaadelda kiiri, mis pereelduvad risti peegli pinnaga.
- V397** Esimesena tuleks alustada läätse keskpunkti leidmisega, seejärel paika panna läätse orientatsioon ning fookus. Keskpunkti leidmiseks tasub vaadata kiiri, mis puutuvad nii ringi kui ka ellipsit.
- V398** Tekitagu lõpmatuses asuv objekt läbi kumerläätse ja nõgusläätse vastavalt kujutised  $A'$  ja  $A$ . Kaamera vaatenurk on leitav, vaadates olukorda, kus  $A$  asub valgus-tundliku elemendi ääres. Sellisel juhul on kaamera vaatenurk  $A'$  poolt kaetav nurk kumerläätse keskpunktist vaadatuna.
- V399** Ülesandes on arvandmed valitud nõnda, et peeglite fookused ühtiksid. Töepooltest, nõguspeeglite fookuskaugus on pool raadiusest ja peeglite vahemaa on võrdne peeglite fookuskauguste summaga. See tähendab, et peale igat edasi-tagasi peegeldumist püsivad valguskimbu kiired paralleelselt, kusjuures kimp muutub 2 korda kitsamaks (sest fookuskauguste suhe on 2).
- V400** Tähistame märgitud punkti  $A$ -ga ja silindri keskpunkti  $O$ -ga. Antud ülesande kontekstis tasub vaadelda funktsiooni  $f(\alpha) = \delta$ , mis kirjeldab punktist  $A$  alguse saanud kiire silindrast väljumise nurka  $\delta$  kiire  $AO$  suhtes funktsionina stardinurgast  $\alpha$  kiire  $AO$  suhtes. Silindri algasendit kirjeldab  $f(\alpha) = 0$  kolme lahendiga. Lisaks on teada, et  $f(\alpha) = 15^\circ$  on lahenditeta.
- V401** Esialgu võib leida piirituse ja vee massid ning nende kaudu vastavad ruumalad.
- V402** Rongi taustsüsteemis on rong paigal ning õhk uhab mööda kiirusega  $v$ , kusjuures õhu jaoks kehtib massi jäÄvuse seadus.
- V403** Algandmetest on võimalik leida, kui palju energiat ühe sammu tegemine genererib ning kui palju energiat telefoni aku hoiustab. Nende suhe määrab vajalike sammude arvu.
- V404** Eri värvil komponendid on täielikult eraldunud juhul, kui plaadist väljuvate laserkiirte tsentrite vaheline kaugus distantsil  $l$  saab võrdseks kiire diameetriga.
- V405** Auto liigub negatiivil kiirusega  $(d/l)v$  ning katik läbib auto kujutise ajaga  $dt_k/36$  mm.

- V406** Lihtsuse mõttes võib eeldada, et Kuu pinnale jõudev summaarne valgusvoog Päikeselt peegeldub ühtlaselt poolsfääriile, mille keskpunktiks on Kuu ja pinna peal asub Maa.
- V407** Reservuaari veetasemest ülespoole jääva vee kaalu peab tasakaalustama kapillaarjoud vee ja klaasi kontaktjoonel.
- V408** Kuna kogu Smurfile langenud valgusest  $I$  neeldub Smurfil vaid  $I \cdot \varepsilon$ , kujutab  $I \cdot \varepsilon$  graafik Smurfil neeldunud valguse intensiivsust lainepekkuse kohta sõltuvalt lainepikkusest. Graafiku alune pindala annabki Smurfil neeldunud soojushulga.
- V409** Kirjeldatud eeldustel luminestsentstoru (ja nendest moodustatud rivi) võib vaadelda lõpmata pika joonvalgusallikana, mille valgusvoog jaotub ühtlaselt silinderpinnaile, mille pindala on võrdeline silindri raadiusega. Kuna kogu energia jaguneb silindri pinna peale, siis valgustatus on pöördvõrdeline kaugusega. Sarnase argumentatsiooniga saab ka leida LED-lambi valgustatuse sõltuvuse kaugusest.
- V410** Maja teatud punkt ja tema peegelkujutis mere pinnalt paiknevad sümmeetriliselt mere tasandiga võrreldes. See võimaldab vee tasandi leidmist.
- V411** Jooniselt on võimalik mõõta ringide läbimõõdud. Kasutades lühikese lainepekkusega lainete kiiruse valemit, on esimeste ringide raadiuste põhjal võimalik arvutada kulunud ajavahemikud.
- V412** Iga lagunev uraani tuum jõuab oma lagunemisahelas radoonini. Tasakaalulisel juhul tähendab see, et ajaühikus lagunevate uraani tuumade arv on võrdne ka nii ajaühikus tekkivate kui ka lagunevate radooni tuumade arvuga.  
Lagunevate uraani tuumade arv on leitav, kui uurida uraani tuumade koguarvu avaldist  $N_U(t) = N_0 2^{-\frac{t}{\tau}}$ . Diferentseerides saame, et ajaühikus lagunevate uraani tuumade arv on  $\frac{\Delta N_U(t)}{\Delta t} = \frac{N_0 \ln 2}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} = \frac{N_U(t) \ln 2}{\tau}$ .
- V413** Horisontaalsuunalise tuule töttu langevad vihmapiisad teatud nurga all vertikaali suhtes. Kuna lõunaküljel olev tünn täitub kaks korda kiiremini, siis lõunakatuse ristlõikepindala peab langevate piiskade risttasandis olema kaks korda suurem kui põhjaküljel.
- V414** Kõik objektid, mis ületavad fotol horisonti, peavad olema vähemalt sama kõrgel kui fotoaparaat.
- V415** Osakese energia säilib vaid lööklaine taustsüsteemis. Seega tasub vaadelda liikumist vastavas taustsüsteemis.

- V416** Kuna täisvari on poolvarjust märksa väiksem ja Päikese nurkläbimõõt on ka väike, peab õhupall maapinnast suhteliselt kaugel olema. Seega võib maapinna läheduses lugeda varju koonuseid ligikaudu silindriteks. Paneme tähele, et poolvarju koonuse läbimõõt maapinna läheduses on 2,5 m, sest poolvarju laius (väikseim mõõde) vastab koonuse läbimõõdule. Analoogselt on täisvarju koonuse läbimõõt  $1,0 \text{ m} \cdot \frac{2,5 \text{ m}}{5,0 \text{ m}} = 0,5 \text{ m}$ .
- V417** Valgus peegeldub tagasi kile ülemiselt ja alumiselt pinnalt. Peegeldus on minimaalne, kui vastavad kiired liituvad vastasfaasides. Selleks, et määrrata mitu täislainepekkust optiliste teede vahesse mahub, tuleb vaadelda, kuidas minimeerida peegeldunud valguse hulka punase ja sinise valguse jaoks.
- V418** Heledad vöödid vastavad ülemiselt ja alumiselt pinnalt peegeldunud kiirte liitumisele samas faasis. Vaadates põrandat erinevate nurkade alt, muutub kiirte optiliste teekondade vahe piisavalt palju, et see vastaks 20-le lainepekkusele. Vastav optiliste teekondade vahe vahemik on leitav põranda geomeetriast.

# Lahendused

## L1 Jahipüss ★

Autor: tundmatu, lõppvoor, 2004, G 1

Püssi kiiruse  $u_0$  vahetult peale tulistamist saame leida impulsi jäävuse seadusest:  $Mu_0 = mv_0$ , kus  $v_0$  on otsitav kuuli algkiirus. Peale tulistamist alustab püss niidi otsas pendlisarnasat liikumist. Oma algse kineetilise energiaga  $Mu_0^2/2$  kulutab püss tõusmiseks kõrgusele  $h$ , kus tema potentsiaalne energia on  $Mgh$ . Energia jäävuse tõttu:

$$\frac{1}{2}Mu_0^2 = Mgh \Rightarrow u_0 = \sqrt{2gh}.$$

Sit

$$v_0 = \frac{Mu_0}{m} = \frac{M}{m}\sqrt{2gh} \approx 693 \text{ m/s.}$$

## L2 Veepark ★

Autor: tundmatu, lõppvoor, 2004, G 2

Nii Jüri kui ka Mari puhul peab kehtima energia jäävuse seadus:

$$\frac{1}{2}mv_0 + mgh = \frac{1}{2}mv + Fs,$$

kus  $v_0$  on algkiirus,  $h$  - mäe korgus,  $v$  - lõppkiirus ja  $Fs$  - töö takistusjõu vastu. Avaldis lõppkiiruse jaoks saab kuju

$$v = \sqrt{v_0^2 + 2gh - 2Fs/m}.$$

Jooniselt leiame, et  $h = 7 \text{ m}$ .  $s$  määramiseks leiame teepikkuse iga sirge lõigu jaoks ning liidame kokku. Jüri läbis teepikkuse

$$s_j = \sqrt{20^2 + 4^2} + \sqrt{35^2 + 3^2} = 55,5 \text{ m}$$

ning Mari teepikkus oli

$$s_m = \sqrt{25^2 + 3^2} + 15 + \sqrt{30^2 + 4^2} = 70,4 \text{ m}$$

Lõppkiiruse väärtsuseks saame nüüd Mari jaoks

$$v_m = \sqrt{0 + 2 \cdot 9,8 \cdot 7 - \frac{2 \cdot 20 \cdot 70,4}{60}} \approx 9,5 \text{ m/s}$$

ning Jüri jaoks

$$v_j = \sqrt{1 + 2 \cdot 9,8 \cdot 7 - \frac{2 \cdot 20 \cdot 55,5}{70}} \approx 10,3 \text{ m/s}$$

Seega Jüri on lõpus 1,08 korda kiirem kui Mari.

**L3 Kaitsmed**

Autor: tundmatu, lõppvoor, 2004, G 3

Kuna ülesande tingimuste kohaselt vool läbi kaitsme  $M$  on alati suurem kui vool läbi kaitsme  $N$  (kui kumbki kaitsmetest ei ole veel läbi põlenud), siis kogu voolu kasvades põleb esmalt läbi kaitse  $M$ . Kogu voolu väärthus on siis  $(1 + R_M/R_N) I_{Mmax} = 1,5 \text{ A}$ . Pärast kaitsme  $M$  läbipõlemist läbib kogu vool kaitset  $N$  ja võib omandada maksimaalse väärthus 1,2 A. Kuna see väärthus on väiksem kui 1,5 A, on maksimaalne võimalik voolu väärthus 1,5 A (või matemaatiliselt täpne olles - sellele väärusele kuitahes lähedane väiksem väärthus). Juhul, kui  $I_{Nmax} = 1,7 \text{ A}$  saavutab vool oma maksimaalväärthus 1,7 A alles pärast kaitsme läbipõlemist.

**L4 Mootorratas**

Autor: tundmatu, lõppvoor, 2004, G 4

Kuna mootorratas ei pöörle, siis mootorrattale mõjuvate jõumomentide summa mistahes punkti, näiteks masskeskme, suhtes peab olema null ehk  $F_h h = Nl$ , kus  $N$  on tagarattale mõjuv maapinna normaalreaktsioon ja  $F_h$  – tagarattale mõjuv hõõrdejõud. Kuna  $N$  kompenseerib mootorratta kaalu,  $F_h$  aga annab kiirenduse  $a$ , siis  $N = mg$  ja  $F_h = ma$ , kus  $m = m_1 + m_2$ . Seega  $a = lg/h \approx 8,2 \text{ m/s}^2$ . Kui tagumine ratas on libisemise piiril, siis  $\mu = F_h/N = l/h \approx 0,83$ .

**L5 Mäed**

Autor: tundmatu, lõppvoor, 2004, G 5

Lumised mägede tipud toimivad hajusate valguskiirguritena seni, kuni otsene päikesevalgus paistab mägede tippudele. Seega läheb orus pimedaks, kui päike ei paista üle läänepoolse mäe enam idapoolse mäe tippu. Selleks peab Maa pöörama mägede tippe ühendava ja läänepoolse mäe tippu oru põhja keskpunktiga ühendava sirgete vahelise nurga  $\alpha$  võrra:

$$\alpha = \arctan \frac{H}{l/2} - \arctan \frac{H-h}{l} = 32,9^\circ.$$

Kuna ööpäeva pikkus on 24 tundi, siis pöörleb Maa ühe tunniga

$$\frac{360^\circ \cdot 1 \text{ h}}{24 \text{ h}} = 15^\circ$$

võrra. Seega pöörab Maa nurga  $\alpha$  võrra ajaga

$$\frac{32,9^\circ}{15^\circ} \cdot 1 \text{ h} = 2 \text{ h} 12 \text{ min}$$

## L6 Elektrikann ★

Autor: tundmatu, lõppvoor, 2004, G 6

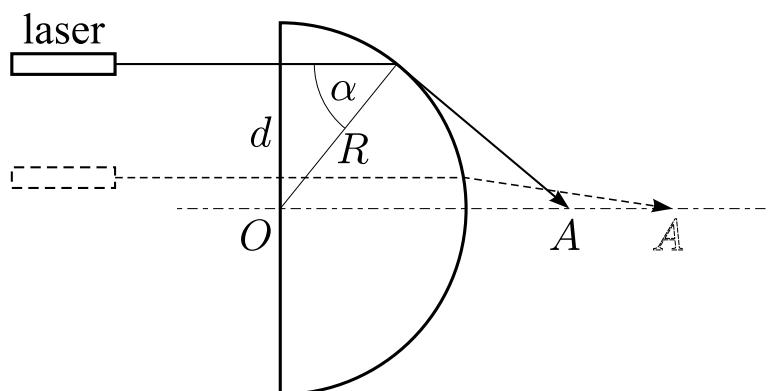
Vee temperatuur langeb jää sulamise tõttu. Kui jää on sulanud ja temperatuur anumas on uhtlustunud, hakkab vee temperatuur uesti tõusma. Selleks hetkeks kui veele on antud soojushulk, mis on vajalik lisatud jää sulatamiseks, saab vee temperatuur uesti võrdseks vee temperatuuriga enne jää lisamist. Temperatuuri  $T_1$  juures kulub kogu kannu võimsus vee soojendamiseks,  $T > T_1$  puhul aga tekitavad vee ja toatemperatuuri erinevusest tingitud soojuskaod kannust õhku, mistõttu vee temperatuuri kasvu kiirus aeglustub (vt. graafikut). Vee soojendamise kiirus on võrdeline  $\frac{dT}{dt}$ , s.t. graafiku tõusunurga tangensiga. Temperatuuril  $70^\circ\text{C}$  on see võrdne  $P' = P \tan \alpha' / \tan \alpha$ . Jooniselt leiame  $\alpha \approx 0,5$  ja  $\alpha' \approx 0,25$ , seega  $P' = 500 \text{ W}$ . Samuti näeme, et vee temperatuur  $T_3 = 75^\circ\text{C}$  taastub aja  $\Delta t \approx 37 \text{ s}$  jooksul. Seega jää sulatamiseks ja temperatuurini  $T_3$  soojendamiseks kulub soojushulk  $Q = P' \Delta t \approx 18,5 \text{ kJ}$ . Jääa mass

$$m = \frac{Q}{L + c(T_3 - T_0)} \approx 28 \text{ g.}$$

## L7 Laser ★

Autor: tundmatu, lõppvoor, 2004, G 7

$d$  maksimaalse väärtsuse määrab piirjuht, kus laserkiir langeb tagumisele pinnale täieliku sisepiegelduse piirnurga all, s.t.  $\sin \alpha = 1/n$ . Teiselt poolt,  $\sin \alpha = d_{\max}/R$ , seega  $d_{\max} = R/n$ .



Kui  $d = d_{\max}$ , siis väljuv laserkiir on silinderpinnale puutujaks. Seega

$$\begin{aligned} l &= R \cos \alpha + d_{\max} \tan \alpha = R \left[ \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} + \frac{1}{n} \frac{\sin \alpha}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}} \right] \\ &= R \left[ \sqrt{1 - 1/n^2} + \frac{1}{n} \frac{1/n}{\sqrt{1 - 1/n^2}} \right] = \frac{nR}{\sqrt{n^2 - 1}} \end{aligned}$$

Kui  $d \rightarrow 0$ , siis laserkiir langeb tagumisele pinnale nurga all  $\alpha \approx d/R$ . Murdumisnurk on  $\beta = n\alpha = nd/R$ . Pinnanormaali kaldenurk on samuti  $\alpha$ , seega väljunud

kiire kaldenurk on  $\gamma = \beta - \alpha = (n - 1)d/R$ . Nüüd saame

$$l = R + \frac{d}{\gamma} = R + \frac{R}{n - 1} = \frac{nR}{n - 1}.$$

### L8 Nööbid ★

Autor: tundmatu, lõppvoor, 2004, G 8

Klotsile  $A$  mõjuva hõõdejõu kompenseerib nööri pinge, sestap on need kaks jõudu samasihilised ning klotsi  $A$  juures peab põörleva aluse kiirusvektor olema nööri sihiline. Põörlemiskese peab lebama punktist  $A$  tömmatud lõigu  $AB$  ristsirgel, põörlemiskeskme  $O$  leiame tingimusest  $|OA| = |AB|$ . Edasi on jooniselt lihtne mõõta  $|OB|$  ning leida  $b = a|OB|/|OA| = 14\text{ cm}$ . Klotsile  $B$  mõjub hõõrdejõud, mille siht on risti sirgega  $OB$ . Samuti mõjub talle mõlema niidi pinged, mis on paralleelsed vastavate niitidega. Märgime punkti  $C$  teisel niidil ning jagame vektori  $\overrightarrow{BC}$  (mis kujutab teatud mõõtkavas selle niidi pinget) kaheks komponendiks, mis on paralleelsed kahe ülejäänuud jõuga,  $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BE}$ . Siinjuures lõik  $BD$  on risati lõiguga  $OB$  ja lõik  $BE$  on paralleelne lõiguga  $AB$ . Et niidi  $AB$  pinge on võrdne klotsile  $A$  mõjuva hõõrdejõuga ja hõõrdejõudude suhe annab masside suhte, siis  $m_B = m_A|BD|/|BE|$ . Jooniselt leiame  $m_B = 1,8\text{ g}$

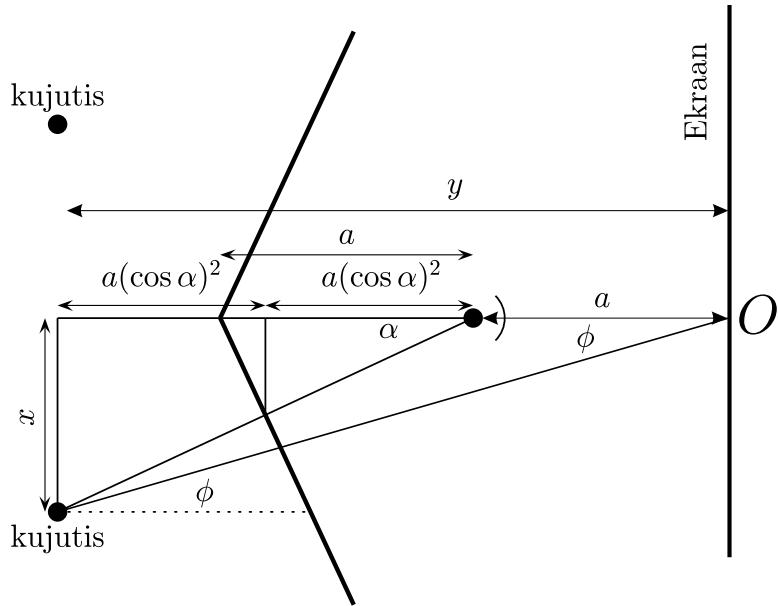
## L9 Peeglid ★

Autor: tundmatu, lõppvoor, 2004, G 9

Leiame valgusallika kujutised peeglites. Punkt O ümbrusse langevat valgust võime siis vaadelda kujutistest kiiratud valguse superpositsioonina. Leiame järgnevalt sin φ. Antud geomeetrilisest konstruktsioonist saame:

$$x = 2a \cos \alpha \sin \alpha, \quad y = 2a \cos \alpha \cos \alpha + a$$

$$\tan \phi = \frac{x}{y} = \frac{2a \cos \alpha \sin \alpha}{2a \cos \alpha \cos \alpha + a}, \quad \sin \phi = \frac{1}{\sqrt{1+(\cot \phi)^2}}, \quad \sin \phi = \left[ 1 + \left( \frac{2a \cos \alpha \cos \alpha + a}{2a \cos \alpha \sin \alpha} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} = \\ \left[ 1 + \left( \frac{\cos \alpha + 1/(2 \cos \alpha)}{\sin \alpha} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} = \frac{\sin \alpha}{\sqrt{\sin^2 \alpha + (\cos \alpha + 1/(2 \cos \alpha))^2}} = \frac{\sin \alpha}{\sqrt{2+1/(4 \cos^2 \alpha)}} = \frac{\sin 2\alpha}{\sqrt{8 \cos^2 \alpha + 1}}$$



Olgu punkti O läheduses mingis punktis M interferentsi miinimum. Kui liiguksime sellest punktist d vörra ülespoole, siis alumisest kujutisest tuleva valguse tee kond pikeneb  $d \sin \phi$  vörra ning ülemisest kujutisest tuleva valguse tee kond lüheneb  $d \sin \phi$  vörra. Seega saame punktiga M vörreldes käiguvahe  $2d \sin \phi$ . Sellele vastab miinimum juhul kui  $\lambda = 2d \sin \phi$ . Seega saamegi vastuseks

$$\lambda = \frac{2d \sin 2\alpha}{\sqrt{8 \cos^2 \alpha + 1}}$$

**L10 Elektriväli ★**

Autor: tundmatu, lõppvoor, 2004, G 10

Kuulidele indutseeritakse sellised laengud  $\pm q$ , et kuulide vaheline pinge oleks null,

$$U = El - 2kq(r^{-1} - l^{-1}) = 0 \Rightarrow q \approx \frac{Elr}{2k}$$

varrast pingestav jõud on

$$F = qE = \frac{E^2 lr}{2k}.$$

Väikeste võnkumiste puhul on tegemist matemaatilise pendliga, kus raskusjõu asemel on elektrivälja jõud  $F$  ning pendli pikkuseks  $l/2$  (võnkumine toimub massikeskme ümber). Seega

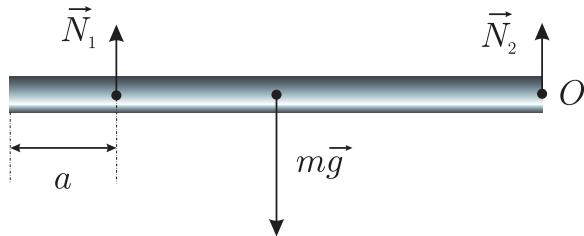
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{ml}{2F}} = \frac{2\pi}{E}\sqrt{\frac{mk}{r}}.$$

**L11 Pendel ★**

Autor: Mihkel Heidelberg, piirkonnavoor, 2008, G 1

Koormisele mõjub raskusjõu moment  $mgl \sin \alpha$ . Kang püsib paigal, kui see on väiksem hõördejõu momendist  $M$ , seega  $mgl \sin \alpha < M$ , milles  $\sin \alpha < \frac{M}{mgl}$ .**L12 Toru ★**

Autor: tundmatu, lahtine, 2007, G 2

Newtoni kolmanda seaduse kohaselt on toru tooreaktsioonid  $N_1$  ja  $N_2$  suuruse poolest võrdsed otsitavate rõhumisjõududega (vt joonist).

Kuna jõudude summa peab tasakaalu asendis olema võrdne nulliga, siis

$$N_1 + N_2 - mg = 0.$$

Jõumomentide võrrand punkti O suhtes (võib valida suvalist punkti) on

$$N_1(l-a) = \frac{mgl}{2},$$

kust saame

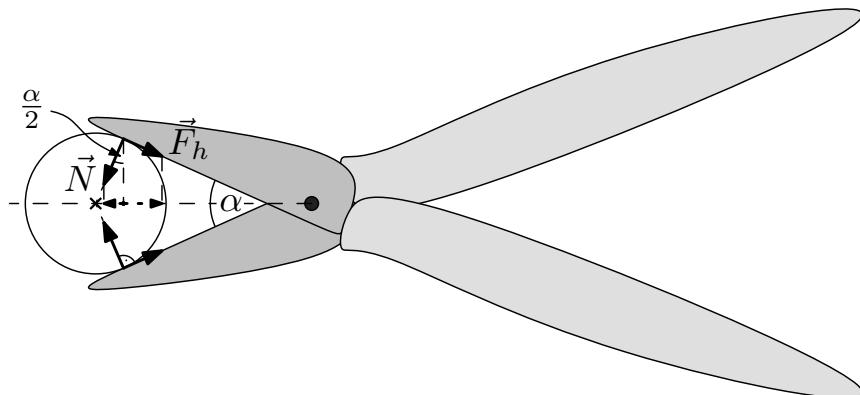
$$N_1 = \frac{mgl}{2(l-a)} = \frac{80 \cdot 9,8 \cdot 5}{2 \cdot (5-1)} = 490 \text{ N}.$$

Asendades  $N_1$  esimesesse võrrandisse, saame avaldise  $N_2$  jaoks:

$$N_2 = \frac{mg(l-2a)}{2(l-a)} = \frac{80 \cdot 9,8 \cdot (5-2 \cdot 1)}{2 \cdot (5-1)} = 294 \text{ N}.$$

**L13 Nürinenud käärid ★**

Autor: Mihkel Kree, lõppvoor, 2009, G 1



Hõõrdejõud peab tasakaalustama toereaktsiooni kääride telje sihilise komponendi (joonis). Lihtsast geomeetriast saame, et  $\mu = \tan \frac{\alpha}{2}$ .

**L14 Kuul ★★**

Autor: tundmatu, lahtine, 2005, G 3

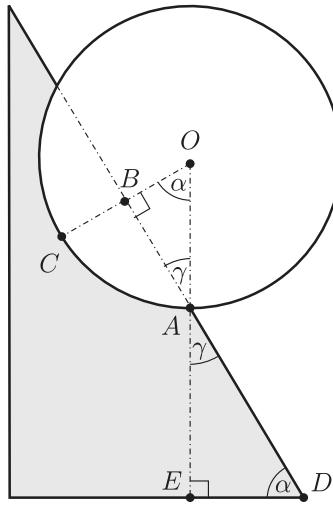
Kuuli hoiab augus või „lükkab“ august välja üks ja sama jõud — kuulile mõjuv raskusjõud, mis on suunatud vertikaalselt alla. Kuul on augus, kui raskusjõu vektor läbib augu põhja, ja kukub, kui see väljub sellest. Esimesel juhul on raskusjõu moment suunatud augu poole, teisel juhul august välja. Piirjuhul on kuul tasakaalus, toetudes vaid punktile  $A$  (vt joonist). Sellel juhul on kuulile mõjuv raskusjõud suunatud otse punkti  $A$  poole, jõuõlg ning järelikult ka jõumoment on võrdne nulliga. Vaatleme piirjuhu (vt joonist). Kuna lauaaugu sugavus  $|BC|$  on 2 korda väiksem, kui kuuli raadius  $r$ , saame kolmnurga  $AOB$  kohta kirjutada järgneva tingimuse:

$$\sin \gamma = \frac{r/2}{r} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \gamma = \arcsin \frac{1}{2} = 30^\circ.$$

Kuna punkti  $A$  tipunurgad on võrdsed, siis ka täisnurkse kolmnurga  $ADE$  üksnurkadest on  $30^\circ$ . Järelikult

$$\alpha = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ.$$

Kui laua kaldenurk ületab  $60^\circ$ , kukub kuul lauaaugust välja.



### L15 Katus ★★

Autor: Ott Krikmann, piirkonnnavoor, 2005, G 2

Vaatleme lund katusel kui kahte vastasmõjus olevat keha: üheks kehaks on lumi, mille all on vesi ning millele hõõrdejõud ei mõju, ja teiseks kehaks kuival katusel olev lumi. Nende kahe osa vahel mõjuva jõu  $F$  võime lugeda katuse sihiliseks (selle sihi valime  $x$ -teljeks,  $y$ -telg on katuse sihiga risti). Arvestame, et lumi on ühtlase paksusega ja seega osade massid on võrdelised nende pikkustega:

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{l}{L-l}.$$

$y$ -telje sihiline tasakaaluvõrrand kuiva osa jaoks:

$$N_2 = m_2 g \cos \alpha,$$

kus  $N_2$  on kuivale osale mõjuva katuse rõhumisjõud.  $x$ -telje sihiline tasakaaluvõrrand vesise ja kuiva osa jaoks:

$$F = m_1 g \sin \alpha,$$

$$\mu N_2 = F + m_2 g \sin \alpha.$$

Elimineerides kahest viimastest võrrandist  $F$ -i leidame

$$\mu N_2 = (m_1 + m_2) g \sin \alpha.$$

Asendades siia  $N_2$  leidame

$$m_2 \mu g \cos \alpha = (m_1 + m_2) g \sin \alpha.$$

Jagades läbi  $m_2 g$ -ga ja asendades esimesest võrrandist suhte  $m_1/m_2$ , saame

$$\frac{L}{L-l} = \mu \cot \alpha,$$

mildest

$$\frac{l}{L} = 1 - \mu^{-1} \tan \alpha \approx 0,16.$$

#### *Alternatiivne lahendus*

Vaatleme lund katusel tervikliku süsteemina. Valime  $x$ -teljeks katuse sihi,  $y$ -telg olgu katuse sihiga risti. Lumekihile mõjuvad järgnevad jõud: raskusjõud  $mg$ , katusepinna tooreaktsioonijõud  $N$  ning hõördejõud

$$F_h = \frac{L-l}{L} \mu N.$$

Kordaja  $(L-l)/L$  tuleb sellest, et hõördejud mõjub vaid  $(L-l)$ -pikkusel katuseosal. Tasakaaluvõrand  $y$ -telje jaoks on

$$N = mg \cos \alpha,$$

$x$ -telje jaoks aga

$$mg \sin \alpha = F_h = \frac{L-l}{L} \mu N.$$

Elimineerides kahest viimastest võrrandist  $N$ -i leidame

$$mg \sin \alpha = \mu mg \cos \alpha \frac{L-l}{L}.$$

Saame, et

$$\frac{L-l}{L} = \frac{\tan \alpha}{\mu}.$$

Seega

$$\frac{l}{L} = 1 - \frac{\tan \alpha}{\mu} \approx 0,16.$$

#### **L16 Kast kaubikus ★★**

Autor: Oleg Košik, lõppvoor, 2009, G 2

Kaubiku kiirendus on  $a = v_0/t = 2,5 \text{ m/s}^2$ . Newtoni II seaduse põhjal

$$\vec{N} + \vec{T} + \vec{F}_h + m\vec{g} = m\vec{a}.$$

Nööri pingi on minimaalne, kui hõördejud  $F_h$  saavutab maksimaalse väärtsuse  $\mu N$ . Projektsioon  $x$ -teljele:

$$T \sin \alpha + \mu N = ma;$$

$y$ -teljele:

$$N + T \cos \alpha - mg = 0.$$

Lahendades süsteemi leidame, et

$$T = m \frac{a - \mu g}{\sin \alpha - \mu \cos \alpha} \approx 14 \text{ N}.$$

**L17 Liivahunnik ★★**

Autor: Roland Matt, piirkonnnavoor, 2011, G 5

Liivahunniku maksimaalse kõrguse saavutamiseks peavad pindmised liivakihid olema libisemise äärel ehk kehtib  $\tan(\alpha) = \frac{h}{R} = \mu$ , kus  $\alpha$  on nurk maa ja koonuse moodustaja vahel,  $R$  hunniku aluse raadius ja  $h$  hunniku kõrgus. Liiva ruumala on

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 h = \frac{1}{3}\pi R^3 \mu,$$

millega

$$R = \sqrt[3]{\frac{3V}{\pi\mu}}$$

ning seega hunniku aluse pindala on

$$S = \pi R^2 = \sqrt[3]{9\pi \left(\frac{V}{\mu}\right)^2} \approx 76,2 \text{ m}^2.$$

**L18 Tormituul ★★**

Autor: Mihkel Kree, lõppvoor, 2011, G 3

Tuule poolt avaldatav horistonaalsuunaline jõud  $F$  peab olema niisugune, et selle poolt tekitatud jõumoment  $Fb/2$  ületab raskusjõu poolt tekitatud jõumomendi  $Mga/2$ . Jõumomentide võrdsuse korral  $F = Mga/b$ . Et niisugune jõud autot libisema ei paneks, peab hõõrdejõud  $F_h = \mu Mg$  selle tasakaalustama, millega saame nõutud tingimuseks:  $\mu > a/b = 2/3$ .

**L19 Rõngas ★★**

Autor: Taavi Pungas, piirkonnnavoor, 2014, G 6

Et süsteem oleks tasakaalus, peab mutter asuma täpselt nööri kinnituspunkti all. Teiseks: maksimaalse mutri kõrguse korral on rõnga kaldenurk mutri asukohas  $\alpha$ , kus  $\tan \alpha = \mu$  - siis on mutter täpselt libisemise piiril. Sel juhul on ka mutrini tõmmatud raadiuse ja vertikaali vahel nurk  $\alpha$ . Tekkinud kolmnurgast näeme, et

$$h = L + 2R \cos \alpha = L + \frac{2R}{\sqrt{1 + \mu^2}}.$$

**L20 Hammasrattad ★★**

Autor: Siim Ainsaar, lõppvoor, 2010, G 4

Kasutame virtuaalse nihke meetodit: oletame, et nöör pole siiski päris venimatu ning saame esimest ratast pöörata väikese nurga  $\alpha$  vörra. Hõõre puudub, mistõttu salvestub kogu välise jõumomendi töö nööri elastsusjõu potentsiaalseks energiaks. Välisjõumomendi töö on  $M\alpha$  (kui jõumomenti avaldab üks joud õlaga  $\tilde{\alpha}$  ja suurusega  $M/\tilde{\alpha}$ , siis nihkub ta rakenduspunkt  $\alpha\tilde{\alpha}$  vörra ja töö on  $\alpha\tilde{\alpha}M/\tilde{\alpha} = M\alpha$ ). Väikesel nihkel ei jõua  $T$  oluliselt muutuda, seega peab nööri venitamise töö olema  $Ts$ , kus  $s$  on nööri pikenemine. Hambumusse jäavate hammasrataste pinnapunktide läbitavad teepikkused on võrdsed – mõlemal  $\alpha r_1$ , järelikult  $s = 2\alpha r_1$  ja  $M\alpha = 2\alpha r_1 T$ , kust  $T = \frac{M}{2r_1}$ .

*Alternatiivne lahendus*

Ratastele mõjuvad jõud ja jõumomendid on tasakaalus. Lihtsaim on kirjutada jõumomentide tasakaalud rattaste tsentrite suhtes, kuna siis on võllide poole avaldatava tundmatute jõudude õlad nullid. (Muidu saame lahenduse, kui avaldame need jõud jõudude tasakaaluvõrranditest.) Rattad mõjutavad teineteist puutujasihilise jõuga; kui teine ratas avaldab esimesele jõudu  $\vec{F}$ , siis avaldab Newtoni III seaduse järgi esimene teisele  $-\vec{F}$ . Jõumomentide tasakaal esimesele rattale on nii  $M = (F + T)r_1$  ning teisele  $T = F$ , sestap  $T = \frac{M}{2r_1}$ .

**L21 Poldilõikur ★★**

Autor: Mihkel Rähn, piirkonnnavoor, 2015, G 7

Jõu ülekandmine toimub kangi põhimõttel, kus jõumoment pöördtelje suhtes summaarselt on võrdne nulliga. Käepideme korral

$$600 \text{ mm} \cdot 90 \text{ N} - 100 \text{ mm} \cdot F_k = 0 \quad \Rightarrow \quad F_k = 540 \text{ N},$$

kus  $F_k$  on käepidemetelt lõiketeradele mõjuv jõud. Analoogselt lõiketerade korral

$$160 \text{ mm} \cdot F_k - 80 \text{ mm} \cdot F_l = 0 \quad \Rightarrow \quad F_l = 2F_k,$$

kus  $F_l$  on lõikuri poolt poldile avaldatud jõud.

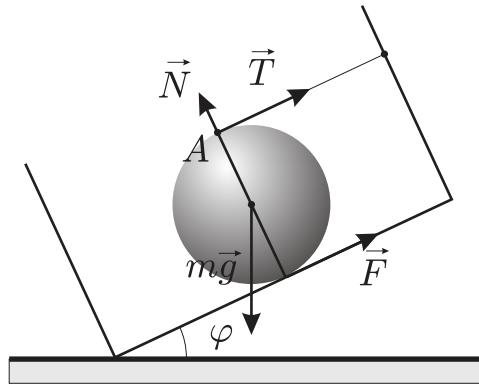
Nendest võrranditest saame leida lõiketeradele mõjuva jõu  $F_l$

$$F_l = 1080 \text{ N}.$$

## L22 Kuul ★★

Autor: tundmatu, lahtine, 2006, G 7

Kõigepealt uurime kuulile mõjuvate jõudude projektsioone kasti põhjaga risti olevale teljele (vt joonist).



Nende projektsioonide summa peab olema võrdne nulliga. Projektsioone sellele teljele omavad vaid raskusjõud  $m\vec{g}$  ja kasti põhja tooreaktsioon  $\vec{N}$ . Järelikult  $N = mg \cos \varphi$  ja hõõrdejõud

$$F \leq \mu mg \cos \varphi. \quad (1)$$

Kuuli tasakaal sõltub selle võrratuse täitumisest.

Nüüd tuleb valida punkt, mille suhtes me hakkame määrama jõumomente. Valime punkti nii, et hõõrdejõu moment selle suhtes oleks nullist erinev, aga niidi tõmbepinge  $T$  moment oleks võrdne nulliga (niidi pinge arvutamise välimiseks). Sellele tingimusele vastab punkt  $A$ , milles niit kinnitub kuuli külge. Selle punkti suhtes on hõõrdejõu õlg  $2r$  (kus  $r$  on kuuli raadius), raskusjõu õlg  $l = r \sin \varphi$ , ning jõudude  $N$  ja  $T$  õlad võrdsed nulliga. Jõumomentide summa on tasakaalu puhul võrdne nulliga, järelikult

$$2rF - mgr \sin \varphi = 0 \Rightarrow F = \frac{mg \sin \varphi}{2}.$$

Arvestades võrratust (1) leiate, et tasakaalu puhul

$$\mu mg \cos \varphi \geq \frac{mg \sin \varphi}{2} \Rightarrow \tan \varphi = 2\mu,$$

ehk

$$\varphi = \arctan(2\mu).$$

**L23 Toru ★★★**

Autor: Aigar Vaigu, lõppvoor, 2010, G 5

Prussi võnkumine torul on stabiilne, kui prussi kõrvalekallutamisel väikese nurga  $\alpha$  vörra prussi massikese tõuseb kõrgemale kui alguses. Esialgne prussi massikeskme kõrgus on  $R + L/2$ . Massikeskme kõrgus kõrvalekallutamisel on

$$\left( R + \frac{L}{2} \right) \cos \alpha + R\alpha \sin \alpha,$$

ning peab kehtima

$$\left( R + \frac{L}{2} \right) \cos \alpha + R\alpha \sin \alpha > R + \frac{L}{2}.$$

Kuna kõrvalekalde nurk on väike, siis võime arvestada, et  $\sin \alpha \approx \alpha$  ja  $\cos \alpha \approx 1 - \alpha^2/2$ . Lihtsustades ning avaldades  $L$ -i, saame, et võnkumised on väikste kõrvalekalllete korral stabiilsed, kui

$$L < 2R.$$

**L24 Klotsid ★★★**

Autor: Mihkel Rähn, piirkonnnavoor, 2014, G 7

Ülemine klots ei libise, kui kiirendusest põhjustatud jõud ei ületa seisuhõõrdejõudu. Ülemise klotsi jaoks saab avaldada maksimaalse kiirenduse, mille korral klots veel ei libise, Newtoni teisest võrrandist  $a_2 = \mu_2 g$ . Kui ülemine klots ei libise, siis võib kahte klotsi käsitleda ühe kehana. Newtoni teine võrrand klotsisüsteemi kohata on

$$(m_1 + m_2)a_{12} = -\mu_1(m_1 + m_2)g + F.$$

Piirjuhul on kiirendused  $a_{12}$  ja  $a_2$  võrsed. Asendades eelnevalt leitud kiirenduse  $a_2$  võrrandisse liikmena  $a_{12}$ , saame

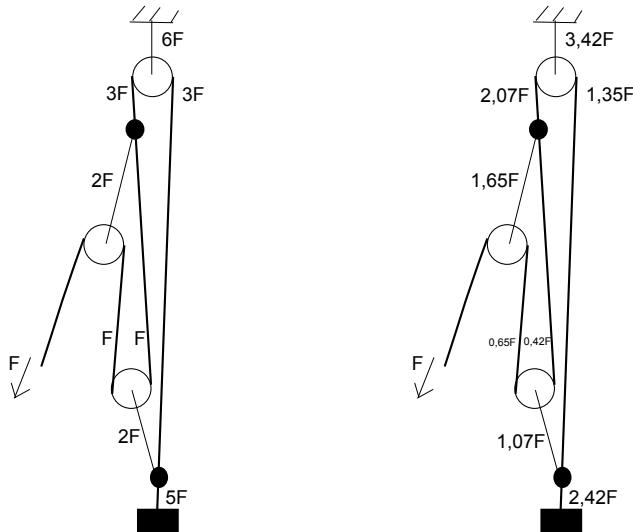
$$F = (m_1 + m_2)(\mu_1 + \mu_2)g.$$

Ülesannet võib lahendada ka koostades Newtoni teise võrrandi alumise klotsi kohata, võttes arvesse mõlemad hõõrdejõud.

**L25 Polüspast ★★★**

Autor: Mihkel Rähn, lõppvoor, 2014, G 6

Hõõrdevaba ploki korral on pinge põhiköies jäav, muutub vaid selle suund. Hõõrdega ploki korral osa põhiköie pingest kandub plokile, kusjuures esmases lähenuduses alla ja ülesse suunatud hõõrdejõud kompenseerivad üksteist. Tasakaalutin-gimuse rahuldamiseks peab ploki kinnituse pinge olema võrdne plokki läbiva põhiköie pingete summaga. Mittelibisevate sõlmede korral peab alla ja üles suunatud pingete vahel valitsema tasakaal. Lahendamist on mugav alustada, kui määraata päastjapoolseks tõmbejõuks  $F$  ning alustada sellest otsast polüspasti läbimist. Hõõrdevabal juhul on jõuülekanne  $\frac{5}{1}$ , hõõerde korral  $\frac{2,4}{1}$ .



### L26 Kelk ★★★

Autor: Andreas Valdmann, piirkonnavor, 2018, G 9

Esiteks näeme, et kui Juku tõmbaks kelgunööri horisontaalselt, siis ei hakkaks kelk liikuma ükskõik kui suure tõmbejõu korral, sest Jukule möjuv hõõrdejõud on väiksem kui kelgu liikumapanemiseks vajalik jõud:

$$\mu_1 m_1 g < \mu_2 m_2 g.$$

Esimesena hakkavad libisema hoopis Juku tallad.

Kui Juku tõmbab nööri teatud nurga all ülespoole, siis tekib nööris vertikaalne jõu komponent  $F_v$ , mis töstab kelku ülespoole ja surub Jukut allapoole. Seega möjud Jukule tema libisemise piiril hõõrdejõud  $F_{h1} = \mu_1 (m_1 g + F_v)$  ja kelgule tema libisemise piiril hõõrdejõud  $F_{h2} = \mu_2 (m_2 g - F_v)$ . Kuna küsiti minimaalset nurka, siis peab kelk olema libisemise piiri napilt ületanud ja Juku sellele napilt alla jäama ehk piirjuhul  $F_{h1} = F_{h2} = F_h$ , kus  $F_h$  tähistab nööris tekkiva jõu horisontaalset komponenti. Jõudude tasakaalu võrrandist

$$\mu_1 (m_1 g + F_v) = \mu_2 (m_2 g - F_v)$$

saame avaldada nööris tekkiva jõu vertikaalse komponendi:

$$\mu_1 m_1 g + \mu_1 F_v = \mu_2 m_2 g - \mu_2 F_v,$$

$$F_v (\mu_1 + \mu_2) = g (\mu_2 m_2 - \mu_1 m_1),$$

$$F_v = g \frac{\mu_2 m_2 - \mu_1 m_1}{\mu_1 + \mu_2}.$$

Jõu horisontaalkomponendi leidmiseks asendame saadud tulemuse näiteks Jukule mõjuva hõõrdejõu võrrandisse

$$F_h = \mu_1 \left( m_1 g + g \frac{\mu_2 m_2 - \mu_1 m_1}{\mu_1 + \mu_2} \right)$$

ja avaldame:

$$\begin{aligned} F_h &= g\mu_1 \frac{m_1(\mu_1 + \mu_2) + \mu_2 m_2 - \mu_1 m_1}{\mu_1 + \mu_2} = \\ &= g\mu_1 \frac{\mu_2 m_1 + \mu_2 m_2}{\mu_1 + \mu_2} = g\mu_1 \mu_2 \frac{m_1 + m_2}{\mu_1 + \mu_2}. \end{aligned}$$

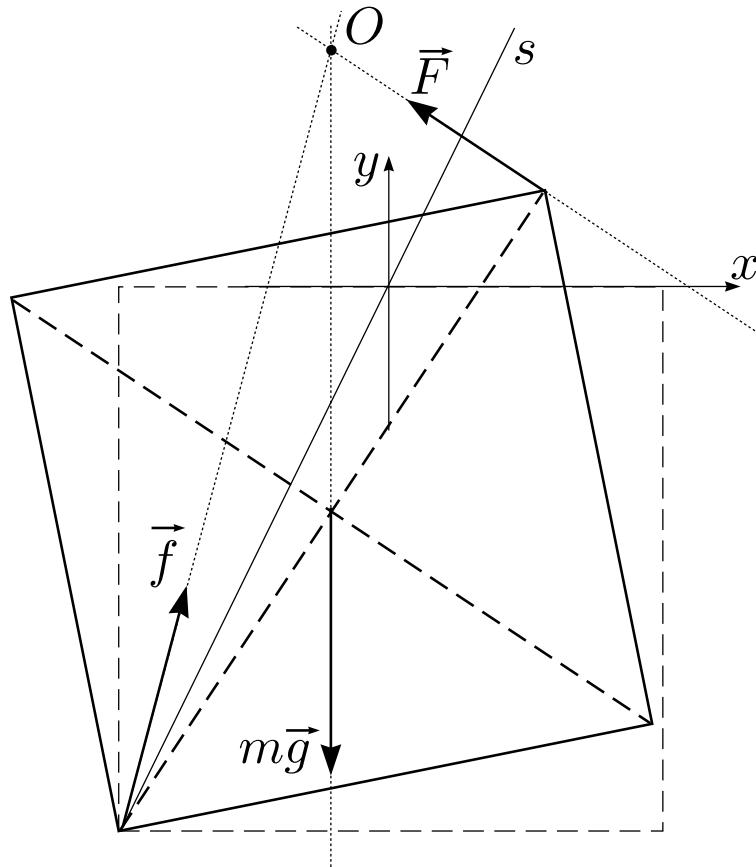
Nurk kelgunööri ja maapinna vahel on

$$\alpha = \arctan \left( \frac{F_v}{F_h} \right) = \arctan \left( \frac{\mu_2 m_2 - \mu_1 m_1}{\mu_1 \mu_2 (m_1 + m_2)} \right) = 21^\circ.$$

**L27 Kuubik ★★★**

Autor: Riho Taba, piirkonnnavoor, 2007, G 9

Ülesande lahendamine jaguneb kaheks osaks: (a) kas antud jõust piisab üle serva kantimiseks; (b) ega kLOTS seejuures libisema ei hakka. Analüüsides oletame, et kLOTS on juba kallutatud teatud nurga  $\varphi$  ( $0 \leq \varphi \leq 45^\circ$ ) võrra; seejuures selgub, et  $\varphi = 0$  on köige ohtlikum olukord. Alternatiiv oleks väita intuiiivselt, et ohtlikuim on olukord  $\varphi = 0$  ning uurida ainult seda juhtumit;



(a) Vaatleme jõumomentide tasakaalu toetava nurga suhtes. Kompenseerimist vajab raskusjõu moment  $M_{1\max} = Fa \cos(45^\circ) \cos(\varphi + 45^\circ)$ , mille maksimaalväärtus on

$$M_{1\max} = \frac{mga}{2}, \quad M_{1\max} = \frac{10 \cdot 9,8 \cdot 0,1}{2} = 4,9 \text{ N m.}$$

Rakendatav jõud annab seda suurema momendi, mida suurem on õlg; õla maksimaalne pikkus ei sõltu nurgast  $\varphi$  ning on alati  $l = a\sqrt{2}$ . See väärtus saavutatakse siis, kui jõud on rakendatud maha toetuva serva suhtes vastasserva külge ning on risti ruudu diagonaaliga. Seega on antud jõu abil alati võimalik tekitada raskusjõu-

du kompenseeriv moment väärtsusega kuni

$$M_2 = Fl = Fa\sqrt{2} = 5,6 \text{ N m.}$$

Näeme, et  $M_{1\max} < M_2$ , st antud jõud on piisav kuubi keeramiseks.

(b) Vaatleme jõudude tasakaalu raskusjõu  $m\vec{g}$  ja rakendatud jõu  $\vec{F}$  pikenduste lõikepunktiga  $O$  suhtes, vt joonist. Aeglasel pööramisel on jõud tasakaalus, st hõördejõu ja toereaktsiooni resultantjõud  $\vec{f}$  peab minema samuti läbi selle punkti. Et hõördetegur  $\mu = 0,5$ , siis nurk toetuspinna normaali (st vertikaalsihi) ja jõu  $\vec{f}$  vahel ei tohi olla suurem, kui  $\arctan \mu$ , st jõud  $\vec{f}$  ei tohi olla vähem püstine, kui sirges. Nii see ka töepooltest on, sest punkt  $O$  jäab alati piirkonda  $x \leq 0$  ja  $y > 0$ .

*Alternatiivne lahendus osa (b) jaoks*

Meil on vaja tõestada, et aeglasel pööramisel kehtib kogu aeg võrratus

$$|F_x| = F \cos(45^\circ - \varphi) \leq N\mu,$$

kus  $N$  on laua toereaktsioon. Paneme tähele, et vertikaalsest tasakaalutingimusest

$$N = mg - |F_y| = mg - F \sin(45^\circ - \varphi).$$

Me kasutame osast (a) teada olevat asjaolu, et kui hõordumist ei oleks, siis tasakaalu tagava jõu jaoks kehtib võrratus  $F < F_{\max}$ , seda asjaolu kasutame alljärgnevalt võrratuste ümber kirjutamisel.

Meile piisaks, kui suudaksime tõestada, et

$$\mu[mg - F_{\max} \sin(45^\circ - \varphi)] \geq F_{\max} \cos(45^\circ - \varphi), \quad (1)$$

sest sellisel juhul

$$\begin{aligned} N\mu &= \mu[mg - F \sin(45^\circ - \varphi)] \geq \mu[mg - F_{\max} \sin(45^\circ - \varphi)] \geq \\ &\geq F_{\max} \cos(45^\circ - \varphi) \geq F \cos(45^\circ - \varphi) = |F_x|. \end{aligned}$$

Töepooltest,  $N\mu \geq |F_x|$ . Võrratuse (1) tõestamiseks kirjutame selle ümber ekvivalentset kujul

$$1 \geq \frac{F_{\max}}{\mu mg} [\mu \sin(45^\circ - \varphi) + \cos(45^\circ - \varphi)],$$

mis töepooltest kehtib, sest

$$\begin{aligned} \frac{F_{\max}}{\mu mg} [\mu \sin(45^\circ - \varphi) + \cos(45^\circ - \varphi)] &= \\ &= \frac{F_{\max} \sqrt{\mu^2 + 1}}{\mu mg} \sin(45^\circ - \varphi + \arcsin[(\mu^2 + 1)^{-1}]) \leq \\ &\leq \frac{F_{\max} \sqrt{\mu^2 + 1}}{\mu mg} = \frac{40 \text{ N} \cdot \sqrt{5/4}}{49 \text{ N}} \approx 0,91 < 1. \end{aligned}$$

**L28 Kuulid ★★★**

Autor: Jaan Kalda, lahtine, 2009, G 9

Et kuuli  $C$  kiirusvektor on risti sirgega  $AC$ , siis hetkeline pöörlemiskese  $O$  asub sellel sirgel. Seega, kui kuul  $A$  hakkab libisema, siis on selle kiirusvektor samuti (ning järelikult ka hõõrdejõu vektor) risti sirgega  $AC$ . Piirjuhtumil, kui kuulide masside suhe on selline, et kuul  $A$  hakkab vaevu liikuma, on punkt  $O$  väga lähdal punktile  $A$  ning seega on punkti  $B$  kiirusvektor (ja hõõrdejõu suund) risti sirgega  $AB$ . Hõõrdejõudude jõumomentide summa punkti  $C$  suhtes peab olema null; et punkti  $A$  rakendatud hõõrdejõu õlg on  $|AC|$  ning punkti  $B$  puhul on õlg  $|AC|/2$ , saame kriitiliseks masside suhteks  $1/2$ , st kuul  $A$  jäääb paigale, kui  $M_A/M_B > 1/2$ . *Märkus.* Uurides olukorda edasi ja vaadeldes üha lähenevaid  $M_A$  väärtsusi (alustades  $M_B/2$ -st ja lõpetades tühiselt väikeste massidega) paneme tähele, et punkt  $O$  nihkub piki sirget  $AC$ , alustades punkti  $A$  juurest, üha kaugemale punktidest  $A$  ja  $C$  ning läheneb piiril  $M_A \rightarrow 0$  punktile  $D$ , mis asub punktist  $A$  kaugusel  $|AC| - nõnda$ , et kolmnurk  $BCD$  on täisnurkne ning seetõttu punkti  $B$  rakendatud hõõrdejõu õlg läheneb nullile.

**L29 Rõngas ★★★**

Autor: Jaan Kalda, lõppvoor, 2011, G 7

Olgu rõnga keskpunkt  $O$  ja massikese  $M$  ning völli ja rõnga puutepunkt  $P$ . Vaadeldes jõumomentide tasakaalu punkti  $P$  suhtes näeme, et raskusjõud peab andma sarnaselt kõigi teiste jõududega null-momendi, st lõik  $PM$  peab olema vertikaalne. Toereaktsiooni  $\vec{N}$  ja hõõrdejõu  $\vec{F}_h$  resultant peab kompenseerima raskusjõu ja olema samuti vertikaalne. Pinnanormaali ja nimetatud resultantjõu vaheline nurk ei saa olla suurem kui  $\arctan \mu$ , vastasel korral algaks libisemine. Et pinnanormaaliks on sirge  $OP$ , siis

$$\angle OPM \leq \arctan \mu.$$

Rõnga pöörlemise käigus  $|OP| = R$  ja  $|OM| = R/2$ ; seega moodustub kolmnurk  $OPM$  lõikudest pikkusega  $R$  ja  $R/2$  ning järelikult on tipu  $P$  juures olev nurk maksimaalne, kui tipu  $M$  juures on täisnurk. Sel juhul

$$\mu = \tan \angle OPM = |MO|/|MP| = \frac{R}{2} / \sqrt{R^2 - \frac{1}{4}R^2} = 1/\sqrt{3} \approx 0,58.$$

**L30 Niidirull ★★★**

Autor: Mihkel Kree, lahtine, 2013, G 8

Vaatleme silindrile mõjuvate jõumomentide tasakaalu telje suhtes, mis läbib toetuspunkti. Pinna toereaktsiooni ja hõõrdejõu vektorid läbivad toetuspunkti, mistõttu need jõumomenti ei tekita. Jõumomendi tekitavad kaks jõudu: silindri keskele rakendatud raskusjõud  $mg$  ja nööri tõmbejõud  $F$ . Arvutades lihtsast kolmnurgast raskusjõu õla, saame jõumomendiks  $\tau = mgr \sin \alpha$ . Tasakaalu korral tekitab tõmbejõud  $F$  sama suure, kuid vastassuunalise jõumomendi  $-\tau$ . Minimaalsele jõule peab vastama maksimaalne jõuõlg. Veendume, et kui jõud  $F$  rakendada

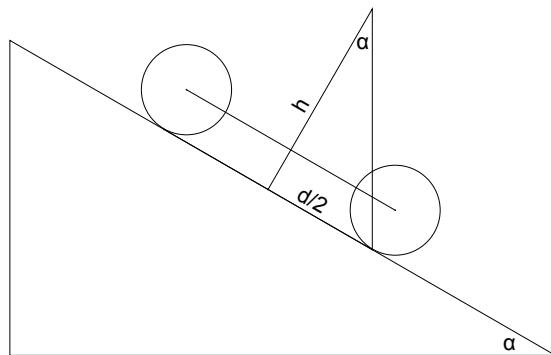
toetuspunktist diametraalselt vastas olevasse punkti, saame maksimaalse õla  $2r$ , millele vastab minimaalne tõmbejõud

$$F_{\min} = \frac{\tau}{2r} = \frac{mg \sin \alpha}{2}.$$

### L31 Jalgrattur ★★★★

Autor: Andres Põldaru, lahtine, 2014, G 8

Kuna tagumine ratas on õhku tõusmas, siis sellele jõude ei rakendu. Ainsad jalgrattale mõjuvad jõud on raskusjõud ning jõud esiratta ja maapinna kontaktpunktis. Kuna jalgratas liigub ütlase kiirusega ning ei hakka pöörlema ega ümber kukuma, peab jalgrattast ja ratturist koosnevale süsteemile mõjuvate jõudude summa ja ka jõumoment iga punkti suhtes olema null. Raskusjõu tugevus ja suund on teada. Teine jõud peab olema sama suur ja vastassuunaline, et raskusjõudu tasakaalustada. Lisaks peavad jõud paiknema ühel sirgel, et jalgratas koos ratturiga ei hakkaks pöörlema. Järelkult peab massikese olema esiratta ja maapinna kontaktpunkti kohal ning hõördejõu ja tooreaktsooni summa on vertikaalne. Lihtsast geomeetriast saame  $\alpha = \arctan\left(\frac{d}{2h}\right)$  ja  $\mu \geq \frac{d}{2h}$ .



### L32 Elektriliin ★★★★

Autor: tundmatu, lahtine, 2004, G 10

Leiame pingi traadis. Teatavasti painduvates ahelates mõjub tõmbejõud piki ahela puutujat. Et  $H \ll L$ , siis traadi kaldenurk on kõikjal väga väike. Jõu horisontaalsihilis komponendi tasakaalust järeldub siis, et pingsus on traadi kõikides punktides praktiliselt ühesugune. Selle jõu mooduli leidmiseks analüüsime näiteks liini parema poole mehaanilist tasakaalu (vt joonist). Kirjutame välja jõumomentide tasakaalutingimus parempoolse kinnituspunkt suhtes:

$$\frac{m}{2}g \frac{L}{4} = F_1 H \quad \Rightarrow \quad F_1 = \frac{mgL}{8H}.$$

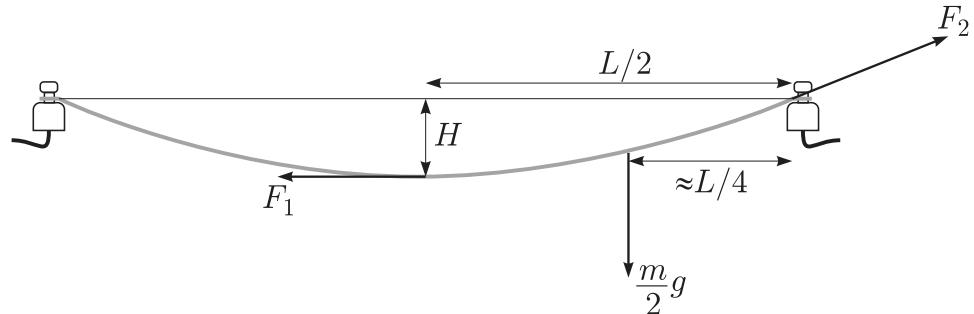
Siin  $m$  on traadi mass. Olgu traadi ristlõige  $S$ , siis

$$m = LS\rho \quad \Rightarrow \quad F_1 = \frac{SgL^2\rho}{8H}$$

ja pinge traadis

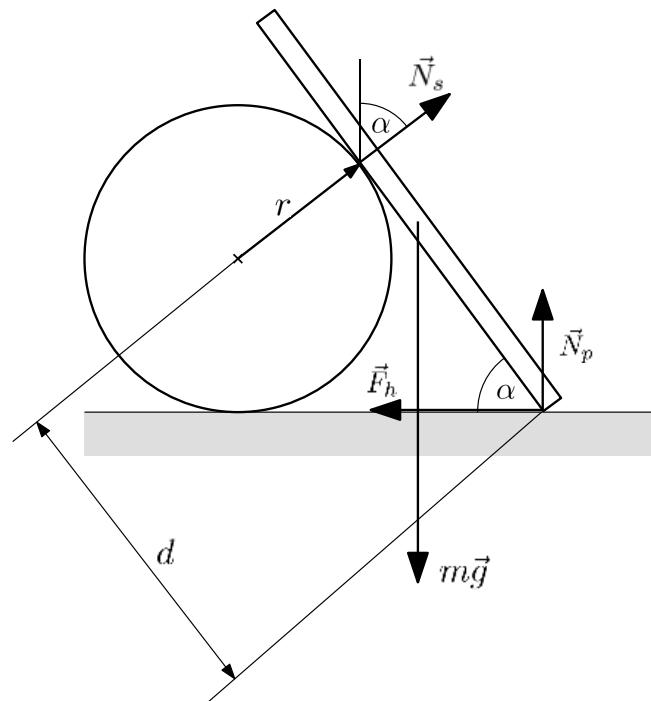
$$\frac{F_1}{S} = \frac{gL^2\rho}{8H} \approx 30 \text{ MPa},$$

mis ei ületa traadi tõmbetugevust.



### L33 Varras ★★★★

Autor: Siim Ainsaar, lõppvoor, 2008, G 9



Vardale mõjuvad põranda ja silindri toereaktsioonid (vastavalt  $\vec{N}_p$  ja  $\vec{N}_s$ ), hõõrdejõud  $\vec{F}_h$  ja raskusjõud  $m\vec{g}$  (vt ülemist joonist). Asend on stabiilne, kui jõudude ja jõumomentide tasakaalu tingimustest avaldatav hõõrdejõud ei ületa maksimaalset seisuhõõrdejõudu:

$$F_h \leq \mu N_p \quad (1)$$

ja varda alaots ei töuse õhku:

$$N_p \geq 0. \quad (2)$$

Sin ja edaspidi võiksime sama hästi rangeid võrratusi kasutada, täpne libisemise piir on realselt saavutamatu.

Jõudude tasakaal horisontaalsihis:

$$F_h = N_s \sin \alpha \quad (3)$$

ja varda sihis (võinuksime soovi korral valida ka muu sihi):

$$N_p \sin \alpha + F_h \cos \alpha = mg \sin \alpha. \quad (4)$$

Olgu  $d$  kaugus varda alaotsast toetuspunktini. Jõumomentide tasakaal varda alumiise otsa suhtes annab (jällegi oleksid muud punktid võrdväärselt kasutatavad):

$$mg \frac{\ell}{2} \cos \alpha = N_s d. \quad (5)$$

Avaldame jõud ja asendame võrratustesse:

$$(5), (3) \implies F_h = \frac{mg\ell}{2d} \sin \alpha \cos \alpha, \quad (6)$$

$$(6) \rightarrow (4) \implies N_p = mg \left( 1 - \frac{\ell}{2d} \cos^2 \alpha \right), \quad (7)$$

$$\begin{aligned} (6), (7) \rightarrow (1) &\implies \frac{\ell}{2\mu d} \sin \alpha \cos \alpha \leq 1 - \frac{\ell}{2d} \cos^2 \alpha \implies \\ &\implies \ell \leq \frac{2\mu d}{\cos \alpha (\sin \alpha + \mu \cos \alpha)}, \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} (7) \rightarrow (2) &\implies 1 - \frac{\ell}{2d} \cos^2 \alpha \geq 0 \implies \\ &\implies \ell \leq \frac{2d}{\cos^2 \alpha} = \frac{2\mu d}{\mu \cos^2 \alpha}. \end{aligned} \quad (9)$$

(9) on leebem võrratus kui (8), mis on niisiis  $\ell$  ülempiiriiks (paremal nimetas on selleks positiivne liige,  $\sin \alpha$ , juures). Kuna rangemat alampiiri ei ole, jäääb selleks  $d$ .

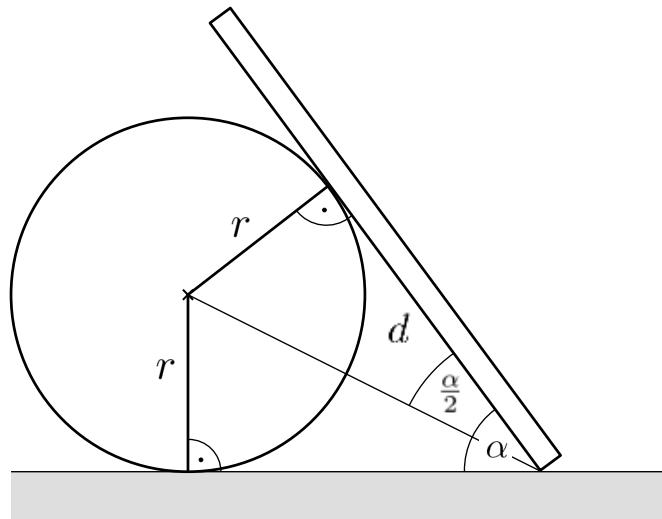
$d$  leidmiseks ühendame varda alaotsa silindri teljega (joonis 2). Tekib kaks võrdset kolmnurka, millest:

$$d = \frac{r}{\tan \frac{\alpha}{2}} = \frac{r \sin \alpha}{1 - \cos \alpha}, \quad (10)$$

$$(10) \rightarrow (8) \implies \ell \leq \frac{2\mu r}{(\sin \alpha + \mu \cos \alpha) \cos \alpha \tan \frac{\alpha}{2}} = \\ = \frac{2\mu r}{(1 + \mu \cot \alpha)(1 - \cos \alpha) \cos \alpha}.$$

Kokkuvõttes

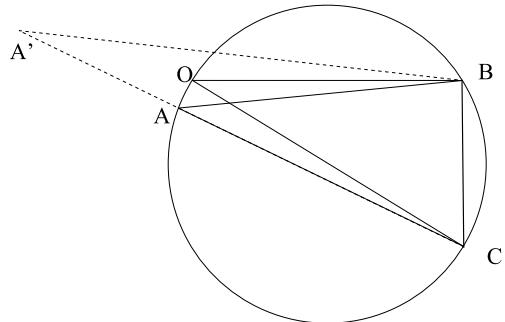
$$\frac{r \sin \alpha}{1 - \cos \alpha} \leq \ell \leq \frac{2\mu r}{(1 + \mu \cot \alpha)(1 - \cos \alpha) \cos \alpha}.$$



### L34 Konn ★★★★

Konnale mõjub kolm jõudu: raskusjõud  $m\vec{g} = \vec{BC}$ , mis on suunatud vertikaalselt alla, jõud  $\vec{F} = \vec{CA'}$ , mis on suunatud kälpinna pinnanormaaliga sihis (pinna sisse), ning rõhumisjõu ja hõõrdejõu resultant  $\vec{A'B}$ , mille nurk pinnanormaaliga  $\alpha = \angle CA'B$  ei ületa väärust arctan  $\mu$ . Need kolm vektorit moodustavad tasakaalu korral joonisel toodud kolmnurga  $A'BC$ . Joonisel on ilmne, et antud kaldenurga ( $A'C$  sihi) puhul saab konn minimeerida vajalikku jõudu (st lõigu  $A'C$  pikkust) suurendades nurga  $\alpha$  maksimaalse võimaliku vääruseni  $\alpha = \arctan \mu$  (mil  $A' = A$ ). Kui nüüd muuta pinna kaldenurka, siis joonistab punkt  $A$  ringjoone kaare (sest punktid  $B$  ja  $C$  on fikseeritud ning  $\angle BAC$  on konstantne ( $\arctan \mu$ )). Vajalik jõud (lõik  $AC$ ) on maksimaalne, kui lõik  $AC$  on ringi diameetriks  $OC$ , st pinnanormaal moodustab horisondiga nurga  $\arctan \mu$  (sest

Autor: Taavi Pungas, lahtine, 2010, G 9



$\angle OBC = 90^\circ$ ). Seega, sein on vertikaali suhtes kaldus  $\arctan \mu$  võrra, moodustades põrandaga teravnurga.

#### *Alternatiivne lahendus*

Olgu iminapa tekitatud tõmbejõud  $F$ , hõõrdejõud  $F_h$  ja normaaljõud  $N$ . Jõudude tasakaalu tingimusest saame  $F_h = mg \sin \theta$  ja  $F = N + mg \cos \theta$ . Kui konn rakendab minimaalset tarvilikku jõudu, siis

$$F_h = \mu N = mg \sin \theta,$$

ehk

$$N = \frac{mg \sin \theta}{\mu}.$$

Niisiis,

$$F = N + mg \cos \theta = \frac{mg \sin \theta}{\mu} + mg \cos \theta = mg \left( \frac{\sin \theta}{\mu} + \cos \theta \right).$$

Nüüd on vaja leida, millise  $\theta$  korral on  $F$  maksimaalne. Selleks katsume siinuse ja koosinuse summa avaldada ühe siinusena.

Otsime A ja B nii, et kehtiks võrdus

$$A \sin(\theta + B) = \frac{\sin \theta}{\mu} + \cos \theta.$$

Kuna

$$A \sin(\theta + B) = A \sin \theta \cos B + A \sin B \cos \theta,$$

siis  $A \sin B = 1$  ja  $A \cos B = \frac{1}{\mu}$ . Siit saame  $\tan B = \mu$  ja

$$A = \sqrt{\frac{1}{\mu^2} + 1} = \frac{1}{\mu} \sqrt{1 + \mu^2}.$$

Seega

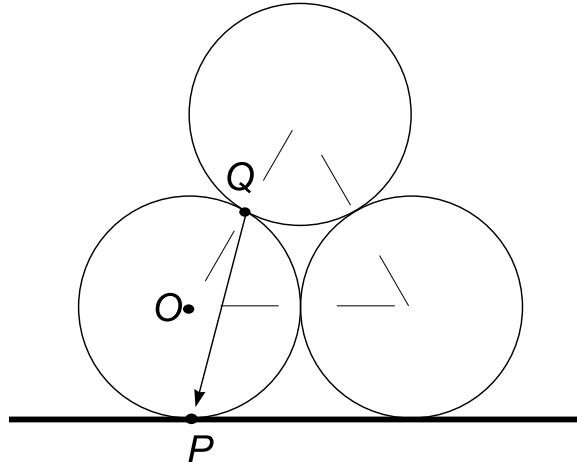
$$F = \frac{mg}{\mu} \sqrt{1 + \mu^2} \sin(\theta + \arctan \mu).$$

Siinuse suurim võimalik väärthus on  $\sin(90^\circ) = 1$ , ehk  $\theta + \arctan \mu = 90^\circ$ . Seega on otsitav nurk  $\theta = 90^\circ - \arctan \mu$ .

### L35 Torud ★★★★

Autor: Jaan Kalda, piirkonnavaor, 2010, G 10

Kõigepalt paneme tähele, et põhimõtteliselt võiks antud süsteemis toimida röhumisjõud kahe alumise silindri vahel, kuid see kaob niipea, kui alumised silindrid natukeneigi üksteisest eemalduvad; niisiis võime sellega mitte arvestada.



Esmalt oletame, et  $\mu$  on piisavalt suur, nii et vastu põrandat toetuvad torud pigem veerevad kui libisevad (kui  $k$  pole piisavalt suur). Vaatleme vastu põrandat toetuvale torule mõjuvate jõumomentide tasakaalu tingimust toru ja põranda kontakt punkti  $P$  suhtes. Põranda röhumis- ja hõõrdeju õlg on null; ka raskusjõud  $mg$  õlg on null. Vaadeldavale torule mõjub veel vaid üksainus jõud — ülemise toru põhjustatud hõõrde- ja röhumisjõu resultant, mis on rakendatud puutepunkti  $Q$  (vt joonist) ja kui tegemist on libisemise piirjuhuga (st veidigi väiksem hõõrdetegur  $k$  viiks libisemisele), siis moodustab see vektor pinnanormaaliga nurga  $\arctan k$  (sest antud vektor moodustub üksteisega risti olevate röhumisjõu  $N$  ja hõõrdejõu  $F_h$  vektorite resultandina ning nurga tangens on  $F_h/N = k$ ). Et ülejää nud jõudu de moment oli null, siis peab ka selle jõu moment olema null, st jõu vektor peab olema suunatud punkti  $P$ . Et kolmnurk  $OQP$  on võrdhaarne (vt joonist), siis

$$k \geq \tan 15^\circ \approx 0,27.$$

Nüüd oletame, et  $k \geq \tan 15^\circ$  ning vaatleme libisemise piirjuhu punktis  $P$ . Selleks vaatleme jõumomentide tasakaalu punkti  $Q$  suhtes. Silindrile mõjuv raskusjõud  $mg$  ning punktis  $P$  toimiv röhumisjõud  $\frac{3}{2}mg$  (mis kompenseerib poolteise silindri raskusjõu) on rakendatud sirge  $OP$  sihis ning nende summaarne jõumoment  $\frac{1}{4}mgR$  (kus  $R$  on silindri raadius) tasakaalustab hõõrdejõu momendi

$$\frac{3}{2}mg\mu(R + R\sin 60^\circ).$$

Sinjuures arvestasime, et punktis  $P$  toimiv hõõrdejõud on  $\mu$ -kordne röhumisjõud

$\frac{3}{2}mg$  ning on horisontaalne ja omab seetõttu õlga  $R + R \sin 60^\circ$ . Seega,

$$\mu \geq \frac{1}{6(1 + \sin 60^\circ)} = \frac{1}{6\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)} \approx 0,09.$$

**L36 Tungraud ★★★★☆**

Autor: Valter Kiisk, lõppvoor, 2011, G 10

**a)** Olgu  $a$  tungraua vertikaalne ja  $b$  horisontaalne diagonaal; Pythagorase teoreemi põhjal  $a^2 + b^2 = \text{Const}$ , millest diferentseerides saame

$$2a\Delta a + 2b\Delta b = 0 \Rightarrow \Delta a = \frac{-b\Delta b}{a} = -\cot \alpha \Delta b.$$

Sinjuures  $\Delta a$  ja  $\Delta b$  on tungraua kõrguse ja laiuse väikesed muutused. Vändaga ühe täispöörde tegemisel  $\Delta b = -3 \text{ mm}$ . Võrrutades tehtud töö  $2\pi l F_k$  (kus  $l$  on vända pikkus) potentsiaalse energiaga  $F\Delta a$ , saame

$$F_k = \frac{F \cot \alpha \Delta b}{2\pi l} \approx 24 \text{ N}.$$

*Alternatiivne lahendus*

Kui vändale rakendatakse pöördmomenti  $M$ , siis keerates seda väikese nurga  $\Delta\Phi$  võrra tehakse tööd  $M\Delta\Phi$ . Kuivõrd hõordumine puudub, siis see töö peab olema sama mis  $F\Delta H$ , kus  $\Delta H$  on tungraua kõrguse muutus. Niisiis

$$M = F \frac{dH}{d\phi} = F \times \frac{dH}{d\alpha} \times \frac{d\alpha}{dL} \times \frac{dL}{d\phi},$$

kus  $L$  on tungraua äärmiste šarniirsete kinnituste vahekaugus. Ilmselt  $H = 2a \sin \alpha$ , kus  $a = 17 \text{ cm}$ . Seega  $dH/d\alpha = 2a \cos \alpha$ . Teiselt poolt,  $L = 2a \cos \alpha$ , milles  $dL/d\alpha = -2a \sin \alpha$ . Vända üks täispööre tingib  $L$  muutuse kruvikeerme sammu  $h$  võrra:  $\Delta L = -(\Delta\Phi/2\pi)h$ . Kokkuvõttes

$$M = F \times (2a \cos \alpha) \times \frac{1}{-2a \sin \alpha} \times \frac{-h}{2\pi} = \frac{Fh \cot \alpha}{2\pi}.$$

Tähistades vända õla pikkuse  $l$ , saame avaldada otsitava jõu:

$$F_k = \frac{M}{l} = \frac{Fh \cot \alpha}{2\pi l} \approx 24 \text{ N}.$$

**b)** Kui hõordumist ei ole, siis läheb vändast pööramisel tehtav töö puhtalt auto potentsiaalse energia kasvatamiseks. Kui hõordumine on olemas tekstis kirjeldatud määral, siis vastupidises suunas pööramisel ei ole jõudu peaaegu vaja rakendada (tungraud püsib libisemise piiri peal) ja seega on potentsiaalse energiaga muut oma moodulilt võrdne hõõrdejõudude tööga. Kui vändata päripidi (auto kergitamiseks), siis hõõrdejõu töö ei muutu (võrreldes sama nurga vastupidi pööramisega) ja on seetõttu endiselt võrdne potentsiaalse energiaga muuduga. Niisiis tuleb võrreldes hõõrdevaba pööramisega sooritada kaks korda suuremat tööd, st rakendatav jõud peab olema täpselt kaks korda suurem, kui esimeses osas. Seega  $F_1 = 2F = 48 \text{ N}$ .

**L37 Nöör rennis ★★★★**

Autor: Stanislav Zavjalov, lahtine, 2012, G 9

Olgu kogu nööri mass  $m$ . Vaatleme nööri paremat poolt. Nööri pingे vertikaalkomponent nööri ja plaadi kokkupuutepunktis,  $T \sin \theta$ , peab tasakaalustama õhus rippuva osa kaalu  $\frac{f}{2}mg$ . Nüüd vaatleme plaadil lebavat osa, selle mass on  $\frac{1-f}{2}m$ . See-ga nii tooreaktsioon kui ka maksimaalne hõördejõud (kuna  $\mu = 1$ ) on  $\frac{1-f}{2}mg \cos \theta$ . Hõördejõud peab olema tasakaalus raskusjõu komponendiga piki nööri,  $\frac{1-f}{2}mg \sin \theta$ , ning pingega  $T = \frac{fmg}{2 \sin \theta}$ :

$$\frac{fmg}{2 \sin \theta} + \frac{1-f}{2}mg \sin \theta = \frac{1-f}{2}mg \cos \theta.$$

Siit saame avaldada vastuse

$$f = \frac{1 - \tan \theta}{1 + \tan \theta} \tan \theta.$$

**L38 Katus ★★★★**

Autor: Jaan Kalda, lõppvoor, 2017, G 9

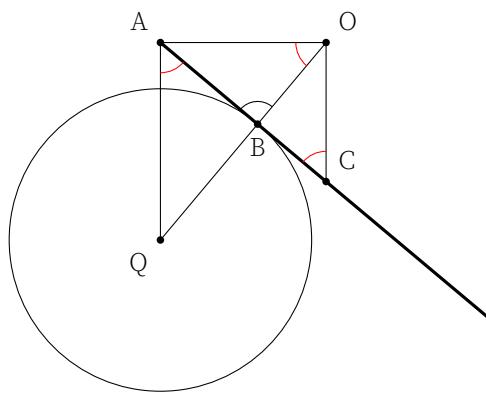
Kahe traadi kontaktpunktis  $A$  (vaata joonist allpool) mõjutavad traadid sümmeetria ja Newtoni III seaduse tõttu üksteist horisontaalseste vastassuunaliste jõududega; traadi ja silindri puutepunktis  $B$  mõjub traadile rõhumisjõud, mis on traadiga risti ning seetõttu läbib selle jõu pikendus silindri telge  $Q$ . Raskusjõud on raken-datud traadi keskpunkti  $C$ . Et traat on tasakaalus ja talle mõjuvad kolmes punktis jõud, siis nende jõudude pikendused peavad lõikuma ühes punktis  $O$  (vastasel korral mõjuks kahe jõu lõikumispunkti suhtes kolmas jõud traadile nullist erineva jõumomendiga ja traat hakkaks liikuma). Niisiis peavad punktist  $A$  tömmatud horisontaal, punktist  $C$  tömmatud vertikaal ning sirge  $QB$  pikendus kõik lõikuma ühes punktis. Paneme tähele, et  $\angle ACO = \alpha/2$  ja  $\angle AOB = \alpha/2$ , seetõttu

$$|AO| = |AC| \sin(\alpha/2) = (L/2) \sin(\alpha/2),$$

$$|AB| = |AO| \sin(\alpha/2) = (L/2) \sin^2(\alpha/2)$$

ning

$$R = |QB| = |AB| \tan(\alpha/2) = (L/2) \sin^3(\alpha/2)/\cos(\alpha/2).$$



Stabiilsuse analüüsjuures paneme tähele, et kui „katus“ pöörleb tervikuna, siis massikese liigub mööda ringjoont ning küsimus on vaid selles, kas see on kõrgeimal või madalamal kui silindri telg  $Q$ ; viimasel juhul on massikese algasendis madalaimas positsioonis ning süsteem on stabiilne. Seega on stabiilsuse tingimuseks

$$|AQ| < |AC| \cos(\alpha/2).$$

Kui sellesse võrratusse asendame

$$|AQ| = |AB| / \cos(\alpha/2) = (L/2) \sin^2(\alpha/2) / \cos(\alpha/2)$$

ja

$$|AC| \cos(\alpha/2) = (L/2) \cos(\alpha/2),$$

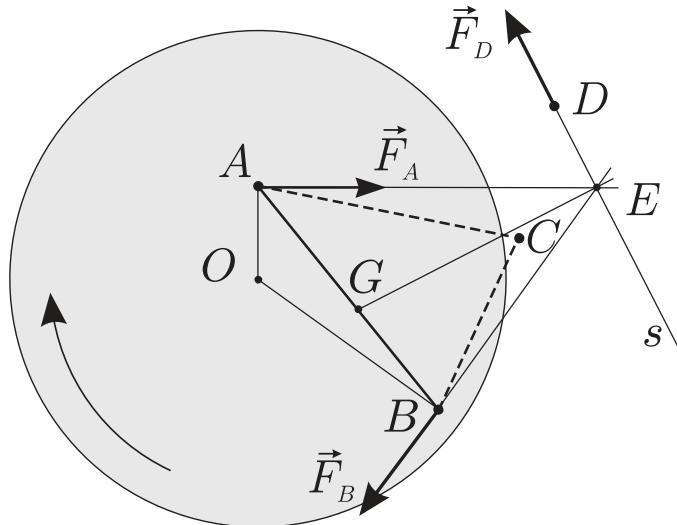
siis saame, et  $\sin^2(\alpha/2) < \cos^2(\alpha/2)$ . Kuna katuse korral peab kehtima  $0 < \frac{\alpha}{2} < 90^\circ$ , siis nii sin kui cos on positiivsed ja võime võtta mõlemalt poolt ruutjuure. Saame tingimuse  $\sin(\alpha/2) < \cos(\alpha/2)$ , mis kehitib kui  $\alpha < \pi/2$ . Paneme tähele, et viimast tingimust võib esitada erinevatel viisidel, kasutades  $R$ ,  $L$  ja  $\alpha$  vahelist seost.

**L39 Platvorm ★★★★**

Autor: Jaan Kalda, lõppvoor, 2005, G 10

**a)** Kolmnurk hakkab põranda suhtes liikuma, sest summaarne jõumoment punkti  $C$  suhtes koosneb kahest liidetavast, mis omavad ühte ja sama märki ning on nul-list erinevad. Selles veendumiseks tuleb tömmata punktidesse  $A$  ja  $B$  rakendatud hõõrdejõudude pikendused  $AE$  ja  $BE$  ( $E$  on nende pikenduste lõikepunkt), mis on risti vastavalt raadiustega  $OA$  ja  $OB$  (vt joonist).

**b)** Süsteemile mõjub kolm horisontaalsuunalist jõudu. Jõumomentide tasakaalu tingimusest järeltub et nende jõudude pikendused peavad lõikuma ühes punktis  $E$ . Olgu kolmas keha punktis  $D$ . Siis punkti  $D$  rakendatud hõõrdejõud peab olema suunatud piki sirget  $ED$ . Teisest küljest, jõudude tasakaalu tingimusest lähtuvalt peavad hõõrdejõudude vektorid moodustama võrdhaarse kolmnurga  $\vec{F}_A + \vec{F}_B + \vec{F}_C = 0$  (võrdhaarse, sest punktidesse  $A$  ja  $B$  rakendatud jõud on moodulilt võrdsed,  $|\vec{F}_A| = |\vec{F}_B|$ ).



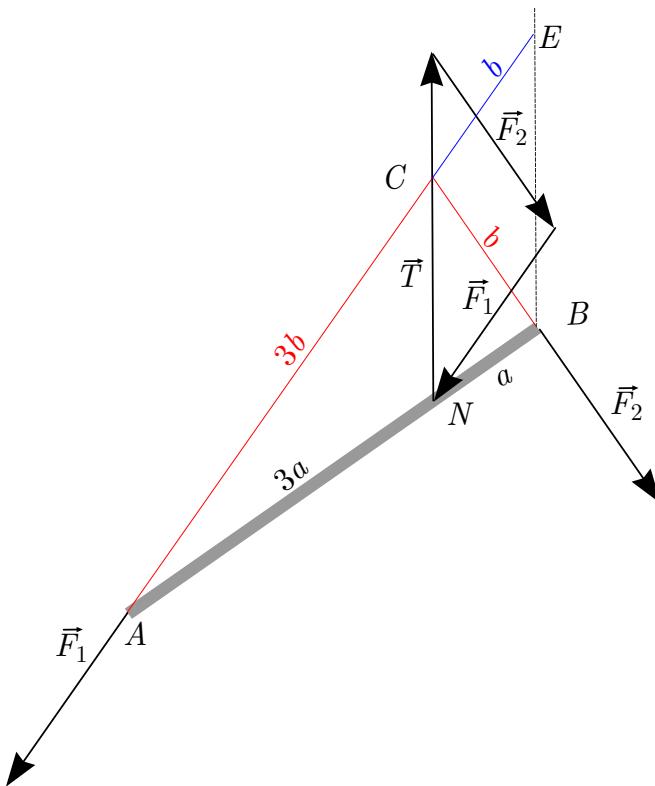
Selletõttu peab vektorite  $\vec{F}_A$  ja  $\vec{F}_D$  vaheline nurk võrduma vektorite  $\vec{F}_D$  ja  $\vec{F}_B$  vahelise nurgaga. Niisiis peab sirge  $ED$  ristuma nurga  $\angle AEB$  poolitajaga  $EG$ . See tähendab, et punktihulgaks  $X$  on sirge  $s$ , mis ristub nurga  $\angle AEB$  poolitajaga  $EG$ . Lõpetuseks paneme tähele, et hõõrdejõud  $\vec{F}_D$  peab olema moodulilt väiksem, kui  $\vec{F}_A$  ja  $\vec{F}_B$ , sest muidu toimuks kolmanda keha juures libisemine. Nii ka on, sest nurk  $\angle AEB$  on väiksem kui  $60^\circ$  ( $60^\circ$ , st võdkülgse kolmnurga puhul oleks jõudu-de kolmurgas  $\vec{F}_A + \vec{F}_B + \vec{F}_C = 0$  kõik külgede võrdsed,  $60^\circ$  väiksemate nurkade puhul aga oleks vektor  $\vec{F}_C$  oma moodulilt teistest väiksem).

**L40 Niidiga hantel ★★★★**

Autor: Jaan Kalda, lõppvoor, 2015, G 9

Pulgale mõjuvad kolm jõudu. Jõumomentide tasakaalu tõttu peavad nende jõudude rakendussirged lõikuma ühes punktis, olgu see punkt  $C$ . Olgu niidi rakenduspunkt  $N$  ja pulga otspunktid  $A$  ning  $B$ , vt joonis. Kuna enne klotsi  $A$  paigalt nihkumist pöörleb pulk ümber selle, siis punkti  $B$  kiirusvektor on risti  $AB$ -ga, sama kehtib punkti  $B$  rakendatud hõõrdejõu vektori jaoks; sestap  $\angle ABC = \frac{\pi}{2}$ . Et nihku ma hakkamise hetkel on hõõrdejõud võrdsed, siis jõudude kolmnurk  $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{T}$  on võrdhaarne, järelikult on võrdhaarne ka jõudude kolmnurgaga sarnane kolmnurk  $CBE$  (sirge  $BE$  on tömmatud paralleelsena  $\vec{T}$ -ga ja  $E$  asub  $\vec{F}_1$  rakendussirgel, vt joonis). Olgu  $|CB| = b$ ; siis ka  $|CE| = b$ . Seetõttu kolmnurkade  $ANC$  ja  $ABE$  sarnasuse põhjal  $|AC| = 3b$ . Pythagorase teoreemist kolmnurga  $ABC$  jaoks  $9b^2 = b^2 + 16a^2$ , st  $b = \sqrt{2}a$ . Seetõttu otsitav nurk

$$\angle BNC = \arctan \frac{b}{a} = \arctan \sqrt{2} \approx 0,96 \text{ rad} \approx 55^\circ.$$



**L41 Autod ★**

Autor: Oleg Košik, piirkonnnavoor, 2006, G 1

Vaatleme jalgratturi liikumist talle vastu sõitvate autode suhtes. Tema kiirus autode süsteemis on  $v = v_1 + v_2 = 120 \text{ km/h}$ . Seega katavad  $n_0 = 20$  autot vahemaa  $vt_0 = 10 \text{ km}$  ning terve maantee ulatuses on autosid

$$n = n_0 \frac{s}{vt_0} = 360.$$

**L42 Ummik ★**

Autor: Jaan Kalda, piirkonnnavoor, 2007, G 2

Lõigul  $C$  on teatud punkti ajaühikus läbivate autode arv  $N_C$  võrdne lõikude  $A$  ja  $B$  vastavate arvude summaga:  $N_C = N_A + N_B$ . Olgu autode vahemaa  $a$  ja vaadeldav ajavahemik  $\tau$ . Siis  $N_i = v_i \tau / l$ , ehk

$$\frac{v_C \tau}{l} = \frac{v_A \tau}{l} + \frac{v_B \tau}{l} \Rightarrow v_C = v_A + v_B.$$

Et  $v_B = L_B / t_B$ , siis toodud arvude põhjal leiame

$$v_B = \frac{3 \text{ km}}{36 \text{ min}} = 5 \text{ km/h}$$

ning seega  $v_C = 8 \text{ km/h}$ . Lõpetuseks,  $t_A = L_A / v_A = 20 \text{ min}$  ja  $t_C = L_C / v_C = 15 \text{ min}$ . Niisiis kulub autol aega  $T = t_A + t_C = 35 \text{ min}$ .

**L43 Auto ★**

Autor: tundmatu, lahtine, 2008, G 1

Olgu  $s$  läbitud vahemaa,  $a$  auto kiirendus ning  $\tau$  aeg, millega auto läbis esimese  $4/5$  teest. Kehtivad võrdused

$$s = \frac{at^2}{2}, \quad \frac{4}{5}s = \frac{a\tau^2}{2}.$$

Sit  $\tau = 2t/\sqrt{5} \approx 13,4 \text{ s}$ . Seega otsitav ajavahemik on  $t - \tau \approx 1,6 \text{ s}$ .

**L44 Ratturid ★**

Autor: tundmatu, lahtine, 2009, G 1

Olgu esimese ratturi sõiduaeg tundides  $t$ , siis teise ratturi sõiduaeg on  $t + 1$  ning kolmenda ratturi oma  $t + 2$ . Et esimene ja teine rattur sõitsid läbi sama pikka vahemaa, saame võrrandi

$$30t = 20(t + 1),$$

kust saame  $t = 2$  tundi. Järelikult linnade  $A$  ja  $B$  vaheline kaugus on  $s = 302 = 60 \text{ km}$  kilomeetrit. Kolmenda ratturi keskmne kiirus oli seega

$$v_3 = \frac{s}{t + 2} = 15 \text{ km/h}.$$

**L45 Rong ★**

Autor: Koit Timpmann, piirkonnnavoor, 2013, G 1

Olgu rongi maksimaalne kiirus  $v$  ning kogu sõiduaeg  $t$ . Kiirendamise jooksul on keskmene kiirus  $v/2$  ning sellele kulub aega  $\frac{2t}{5}$ . Pidurdamine võtab aega  $\frac{t}{5}$  ning ka selle jooksul on keskmene kiirus  $v/2$ . Kogu sõidu keskmene kiirus on seega

$$v_k = \frac{\frac{2t}{5} \frac{v}{2} + \frac{2t}{5} v + \frac{t}{5} \frac{v}{2}}{t} = \frac{7}{10} v.$$

Kokku,

$$v = \frac{10}{7} v_k \approx 51 \text{ km/h.}$$

**L46 Veok ★**

Autor: Valter Kiisk, piirkonnnavoor, 2005, G 1

Tähistagu  $x$  teepikkust, mille sõiduauto läbib möödasõidu lõpuks (vt joonist) ja olgu  $t$  möödasõiduks kuluv ajavahemik. Vahemaa  $x$  läbib sõiduauto ühtlase kiirendusega  $a$ , alustades algkiirusega  $v_1$ , seega

$$x = v_1 t + \frac{at^2}{2}.$$

Teiselt poolt, veoauto liikumise põhjal

$$x = v_1 t + L_1 + L_2 + l_1 + l_2.$$

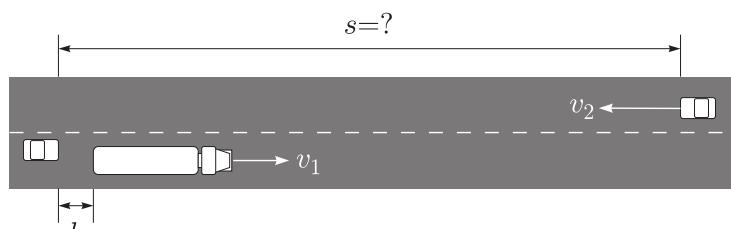
Kahe viimase avaldise võrdsustamisel saame

$$\frac{at^2}{2} = L_1 + L_2 + l_1 + l_2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2(L_1 + L_2 + l_1 + l_2)}{a}} \Rightarrow$$

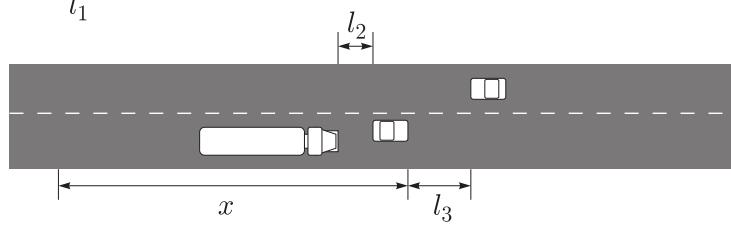
$$s = v_1 t + L_1 + L_2 + l_1 + l_2 + v_2 t + l_3$$

$$s = (v_1 + v_2) \sqrt{\frac{2(L_1 + L_2 + l_1 + l_2)}{a}} + L_1 + L_2 + l_1 + l_2 + l_3 \approx 349 \text{ m}$$

Enne möödasõidu  
alustamist



Peale möödasõidu  
lõpetamist



### *Alternatiivne lahendus*

Kasutame möödasõidu aja leidmiseks veoauto taustsüsteemi, kus möödasõitva auto algkiirus on  $u = 0$ :

$$\frac{at^2}{2} = L_1 + L_2 + l_1 + l_2.$$

Selle aja jooksul lähenevad veoauto ja vastutulev auto vahemaa

$$s_1 = (v_1 + v_2)t$$

võrra, mis tähendab, et möödasõitja algvahemaa on

$$s = s_1 + L_1 + L_2 + l_1 + l_2 + l_3,$$

st (asendades  $s_1$  ja  $t$  eelnevatest võrranditest)

$$s = (v_1 + v_2) \sqrt{\frac{2(L_1 + L_2 + l_1 + l_2)}{a}} + L_1 + L_2 + l_1 + l_2 + l_3 \approx 349 \text{ m.}$$

### **L47 Rongiõnnetus ★**

Autor: Oleg Košik, piirkonnavoor, 2011, G 4

Teisendades kiirusühikuid, saame  $v_1 = 17,5 \text{ m/s}$  ning  $v_2 = 5 \text{ m/s}$ . Olgu  $t$  aeg, mis mööodus kokkupõrkeni. Kaubarong läbis teepikkuse  $s_1 = v_1 t + \frac{1}{2} a_1 t^2$ . Elektrirong läbis teepikkuse  $s_2 = v_2 t + \frac{1}{2} a_2 t^2$ . Kuna  $s = s_1 + s_2$ , siis

$$s = (v_1 + v_2) t + \frac{1}{2} (a_1 + a_2) t^2.$$

Lahendades ruutvõrrandi, leiame  $t = 109 \text{ s}$ . Seega kaubarongi kiirus oli kokkupõrke hetkel  $v_k = v_1 + a_1 t = 6,6 \text{ m/s}$  ehk  $24 \text{ km/h}$ , elektrirongi oma  $v_e = v_2 + a_2 t = 21,4 \text{ m/s}$  ehk  $77 \text{ km/h}$ .

### **L48 Rongivile ★**

Autor: Mihkel Kree, lahtine, 2015, G 1

Tähistagu  $L$  veduri kaugust jaamaülemast hetkel, mil vedurijuht alustab vile laskmisenega. Heli levimiseks jaamaülemani kulub sel juhul aeg  $\tau_A = L/c$ . Vile lõppedes on veduri kaugus jaamaülemast  $L - vt_0$ , kus  $v$  on rongi liikumise kiirus. Heli levimiseks sellelt kauguselt kulub aeg  $\tau_B = (L - vt_0)/c$ . Alustagu vedurijuht vile laskmisenega hetkel  $\tau_0$  ning lõpetagu hetkel  $\tau_0 + t_0$ . Jaamaülem kuuleb vile algust hetkel  $\tau_0 + \tau_A$  ning vile lõppu hetkel  $\tau_0 + t_0 + \tau_B$ . Nende ajahetkede vahe  $t_1$  on mõistagi jaamaülema mõõdetud vile kestus. Seega saame

$$t_1 = t_0 + \tau_B - \tau_A = t_0 - \frac{v}{c} t_0,$$

millega

$$v = \frac{t_0 - t_1}{t_0} c = 34 \text{ m/s.}$$

**L49 Kaubarong ★**

Autor: Erkki Tempel, piirkonnnavoor, 2015, G 1

Leiame ajad, mille jooksul rong pidurdas ning kiirendas:

$$t_p = \frac{v - v_h}{a_p}, \quad t_k = \frac{v - v_h}{a_k}.$$

Rong läbis selle ajaga vahemaa

$$s_p = \frac{v^2 - v_h^2}{2a_p}, \quad s_k = \frac{v^2 - v_h^2}{2a_k}.$$

Sõites ühtlaselt 72 km/h, oleks rong läbinud selle vahemaa ajaga

$$t_{py} = \frac{s_p}{v}, \quad t_{ky} = \frac{s_k}{v}.$$

Seega aja kaotus pidurdamisel ning kiirendamisel on

$$\Delta t_p = t_p - t_{py}, \quad \Rightarrow \quad \Delta t_p = \frac{(v - v_h)^2}{2va_p} = 28,125 \text{ s},$$

$$\Delta t_k = t_k - t_{ky}, \quad \Rightarrow \quad \Delta t_k = \frac{(v - v_h)^2}{2va_k} = 56,25 \text{ s}.$$

Kuna rong hilines aja  $\Delta t$ , siis saame leida aja  $\Delta t_h$ , mille rong kaotas ühtlaselt sõites:

$$\Delta t_h = \Delta t - \Delta t_p - \Delta t_k = 215,625 \text{ s}.$$

Kui rong läbis aeglaselt (18 km/h) sõites vahemaa  $s_h$ , siis kulus tal selleks aega

$$t_h = \frac{s_h}{v_h}.$$

Sõites kiirusega 72 km/h oleks ta selle vahemaa läbinud ajaga

$$t_{hy} = \frac{s_h}{v}.$$

Teades, et  $\Delta t_h = t_{hy} - t_h$ , saame avaldada teepikkuse  $s_h$ :

$$s_h = \frac{vv_h\Delta t_h}{v - v_h} = 1437,5 \text{ m} \approx 1,4 \text{ km}.$$

**L50 Kiirabiauto ★**

Autor: Sandra Schumann, lahtine, 2017, G 1

Olgu kiirabiauto kiirus  $v$  ja auto poolt tekitatava heli sagedus  $f_0$ . Rakendame valemit kahel juhul: auto lähenemisel ja eemaldumisel.

Auto lähenemisel:

$$f_1 = \left( \frac{v_s}{v_s - v} \right) f_0.$$

Auto eemaldumisel:

$$f_2 = \left( \frac{v_s}{v_s + v} \right) f_0.$$

Kuna helisageduste erinevus kuue tooni võrra vastab kahekordsele erinevusele sagudustes, siis vastab ühetoonine erinevus  $2^{\frac{1}{6}}$ -kordsele erinevusele ja pooleteise-toonine erinevus  $(2^{\frac{1}{6}})^{\frac{3}{2}} = 2^{\frac{1}{4}}$ -kordsele erinevusele. Seega saame:

$$2^{\frac{1}{4}} = \frac{f_1}{f_2} = \frac{\left( \frac{v_s}{v_s - v} \right) f_0}{\left( \frac{v_s}{v_s + v} \right) f_0} = \frac{v_s + v}{v_s - v},$$

$$\begin{aligned} v_s + v &= 2^{\frac{1}{4}} v_s - 2^{\frac{1}{4}} v, \\ (2^{\frac{1}{4}} + 1)v &= (2^{\frac{1}{4}} - 1)v_s, \end{aligned}$$

$$v = \frac{2^{\frac{1}{4}} - 1}{2^{\frac{1}{4}} + 1} v_s = \frac{2^{\frac{1}{4}} - 1}{2^{\frac{1}{4}} + 1} \cdot 343 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 29,64 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 107 \frac{\text{km}}{\text{h}}.$$

Saame vastuseks  $107 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ .

**L51 Pidurdus ★**

Autor: Mihkel Rähn, piirkonnavor, 2017, G 2

**a)** Kuna autod pidurdavad maksimaalselt, siis on nende aeglustused võrdsed ning pidurdamise teepikkused on sama pikad. Seega, kui tagumise auto nina on pidurite rakendumisel samas kohas, kus eesmisse auto saba oli piduritulede süttides, siis sellel piirjuhul veel otsasõitu ei toimu. Leiame vahemaa, millal see täpselt nii on:

$$s = vt = 50 \frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot 1,5 \text{ s} = 20,8 \text{ m.}$$

**b)** Vaatleme liikumist taastsüsteemis, mis liigub kiirusega  $v$  autodega samas suunas. Selles taastsüsteemis on autode esialgne kiirus null ja esimese auto piduramisel hakkab ta selle taastsüsteemi suhtes ühtlaselt kiirenema kiirendusega, mis on leitav seosest  $F = ma$ , kus  $F = \mu mg$ , seega  $a = \mu g$ . Esmalt tuleb kindlaks teha, kas kokkupõrge leiab aset enne või pärast tagumise auto pidurite rakendumist. Kui kokkupõrge toimuks enne tagumise auto pidurdama hakkamist, siis kehtiks kokkupõrke ajal  $l = at^2/2$ , millest

$$t = \sqrt{2l/\mu g} = 1,0 \text{ s.}$$

Kuna see on väiksem kui 1,5 sekundit, siis toimub autode kokkupõrge enne teise auto pidurite rakendumist autodevahelise kiirusega  $\Delta v = at = 36 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ .

## L52 Sonar ★★

Autor: Oleg Košik, piirkonnnavoor, 2006, G 3

Sonarist saadetakse välja heli lainepekkusega  $\lambda_1 = v_h/f_1$ . Helilaine läheneb laevaale kiirusega  $v_h - v$ , seega jõuab laevani helisignaal sagedusega

$$f_L = \frac{v_h - v}{\lambda_1} = f_1 \frac{v_h - v}{v_h}.$$

Peegeldudes laevalt tagasi, liigub helisignaal laeva suhtes kiirusega  $v_h + v$ . Kuna laevalt peegeldunud kiirt saab vaadelda kui kiirt, mis on alguse saanud laeva pardal olevalt signaaliallikalt sagedusega  $f_L$ , on signaali lainepekkus  $\lambda_2 = (v_h + v)/f_L$ . Sonari vastuvõtjasse rannikul jõuab signaal sagedusega

$$f_2 = \frac{v_h}{\lambda_2} = f_L \frac{v_h}{v_h + v} = f_1 \frac{v_h - v}{v_h + v}.$$

Avaldame viimasesest võrdusest  $v$ :

$$v = v_h \frac{f_1 - f_2}{f_1 + f_2}.$$

*Alternatiivne lahendus*

Kasutame Doppleri valemit

$$f_2 = f_1 \frac{1 + v_2/v_h}{1 + v_1/v_h},$$

kus saatja ja vastuvõtja lähenevad üksteisele kiirustega vastavalt  $v_1$  ja  $v_2$ .

Kui signaal jõuab rannikult laevani, siis antud olukorras on saatja kiirus  $v_1 = 0$  ja vastuvõtja kiirus  $v_2 = -v$ , sest vastuvõtja (laev) kaugeneb saatjast. Doppleri valemit saab sel juhul kuju

$$f_L = f_1 \frac{v_h - v}{v_h},$$

kus  $f_1$  on laevani jõudva signaali sagedus.

Olukorras, kus signaal läheb laevalt tagasi rannikule, on saatja kiirus  $v_1 = -v$ , sest saatja (laev) kaugeneb vastuvõtjast (rannikult). Vastuvõtja kiirus on aga  $v_2 = 0$ . Vastavalt Doppleri valemile jõuab sonari vastuvõtjasse rannikul signaal sagedusega

$$f_2 = f_L \frac{v_h}{v_h + v} = f_1 \frac{v_h - v}{v_h + v}.$$

Avaldame viimasesest võrdusest  $v$ :

$$v = v_h \frac{f_1 - f_2}{f_1 + f_2}.$$

*Märkus:* kui võrd iga realistliku laeva kiiruse puhul  $v \ll v_h$ , siis on lubatud kasutada ligikaudset Doppleri valemit

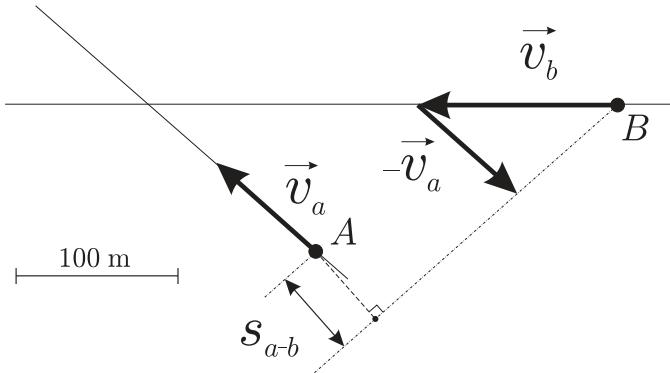
$$f \approx f_0 \left( 1 + \frac{v}{v_h} \right).$$

Sama lähendust saab kasutada ka esimese lahenduse puhul.

**L53 Autod ★★**

Autor: Jaan Kalda, piirkonnnavoor, 2008, G 2

Kanname joonisele autode  $A$  ja  $B$  kiirusvektorid suvalises mõõtkavas (st vektorite moodulid suhtuvad nagu 40:60). Leiame nende vektorite vahe, see on autode suhteline kiirus. Tõmmates ühe auto juurest selle vektori sihilise sirge leiame tema trajektoori teise autoga seotud süsteemis. Teise auto kaugus sellest sirgest annabki vastuse. Mõõtkava arvestamine ja mõistlik numbriline tulemus annab 60 m.



**L54 GPS ★★**

Autor: Jaan Kalda, lõppvoor, 2009, G 5

Ajahetkel  $t_1 = 75$  s tervisesportlane veel jooksis, sest eelmise perioodi keskmine kiirus polnud veel alanenud ( $v_0 = 11$  km/h); et ajahetkeks  $t_2 = 90$  s oli keskmine kiirus langenud kiiruseni  $v_1 = 8$  km/h, siis oli ta seisnud juba ajavahemiku  $\tau_1$ , kus  $v_1 T = v_0(T - \tau_1)$  ning  $T = 15$  s. Seega,

$$\tau_1 = \left(1 - \frac{v_1}{v_0}\right) T.$$

Analoogselt, pärast ajahetke  $t_2$  seisis sportlane veel ajavahemiku  $\tau_2$ , kus  $v_2 T = v_3(T - \tau_2)$  ning  $v_2 = 3$  km/h ja  $v_3 = 14$  km/h. Seega,

$$\tau_2 = \left(1 - \frac{v_2}{v_3}\right) T$$

ning kogu peatusaeg

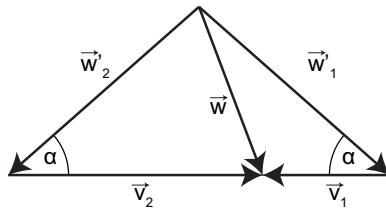
$$\tau = \tau_1 + \tau_2 = T \left(2 - \frac{v_1}{v_0} - \frac{v_2}{v_3}\right) \approx 16 \text{ s.}$$

### L55 Jalgrattur ★★

Autor: Jaan Kalda, lõppvoor, 2013, G 3

Jalgratturi mõõdetav tuul  $\vec{w}'$  on tuule kiirusvektori  $\vec{w}$  ja jalgratturi kiirusvektori  $\vec{v}$  vahe  $\vec{w}' = \vec{w} - \vec{v}$ . Olgu jalgratturi kiirusvektorid  $\vec{v}_1$  ja  $\vec{v}_2$  ning tuule kiirusvektorid  $\vec{w}'_1$  ja  $\vec{w}'_2$  vastavalt ühele ja teisele poole sõites.

Antud juhul teame ainult kiirusi, mitte nende suundi. Teades eelnevalt, et mõõdetud tuule kiirus on sama suur mõlemas suunas liikudes, saab kiirusvektorid esitada võrdhaarse kolmnurgana. (Kolmnurga mõlemad pooled vastavad erinevas suunas sõitmisele ning vastavad ülal mainitud valemile. Kuna tuule vektor on mõlemal juhul sama ja kiirused paralleelsed, saab selle konstrueerida nagu joonisel.)



Koosinusteoreemist:

$$\begin{cases} |\vec{w}|^2 = |\vec{w}'_1|^2 + |\vec{v}_1|^2 - 2|\vec{w}'_1||\vec{v}_1| \cos \alpha \\ |\vec{w}|^2 = |\vec{w}'_2|^2 + |\vec{v}_2|^2 - 2|\vec{w}'_2||\vec{v}_2| \cos \alpha. \end{cases}$$

Teades, et  $|\vec{v}_2| = 2|\vec{v}_1|$  ja et  $|\vec{w}'_1| = 2|\vec{w}'_2|$ , saame esimese võrrandi korrutada kahega ja teise sellest lahutada.

$$|\vec{w}|^2 = |\vec{w}'_1|^2 - 2|\vec{v}_1|^2.$$

Ehk tuule tegelik kiirus on:

$$|\vec{w}| = \sqrt{|\vec{w}'_1|^2 - 2|\vec{v}_1|^2} \approx 14 \text{ km/h.}$$

### L56 Viul ★★

Autor: Jaan Toots, lõppvoor, 2014, G 2

Tekkival seisulainel peavad olema sõlmed mõlemas keele võnkuva osa otspunktis, seega võngub alla vajutades osa pikkusega  $\frac{3}{7}L$ , millele vastab laine pikkus  $\lambda_0 = \frac{6}{7}L$ . Puudutades võngub kogu keel ning on kolm tingimust: sõlmpunktid on mõlemas otsas ning lisaks puudutatavas punktis. Seega peab sellest punktist mõlemale poolle mahtuma täisarv poolaineepikkusi. Võnkuvate osade suhe on  $\frac{3/7}{1-3/7}$  ehk  $\frac{3}{4}$ . 3 ja 4 on ühistegurita. Seega peab jäätma võnkuvatele pooltele vastavalt 3 ja 4 poolaineepikkust. Vaadeldes pikkusega  $\frac{3}{7}L$  keele poolt, taipame et  $\lambda = \frac{2L}{7}$  ning

$$\frac{\nu}{\nu_0} = \frac{\lambda_0}{\lambda} = 3.$$

**L57 Pöördlava ★★★**

Autor: Taavi Pungas, piirkonnavor, 2012, G 4

Kettaga kaasapöörlevas taustsüsteemis peab näitleja liikuma mööda sirgjoont (et maksimeerida vahemaa). Aja  $t$  jooksul liigub ketas edasi nurga  $360^\circ \frac{t}{T} = 2\pi \frac{t}{T}$  võrra. Ketta peale astudes ja mööda seda kõndides saab näitleja ise edasi liikuda nurga  $2 \arcsin \frac{vt}{2r}$  võrra (näitleja peab jõudma tagasi ketta äärele ja sestap moodustab tema trajektoor ketta kõõlu). Kokku saame, et

$$\alpha = 360^\circ \frac{t}{T} + 2 \arcsin \frac{vt}{2r} = 2\pi \frac{t}{T} + 2 \arcsin \frac{vt}{2r}.$$

**L58 Pallivise ★★★**

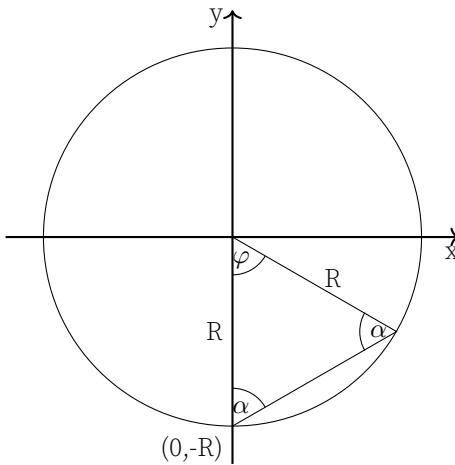
Autor: Eero Vaher, lõppvoor, 2015, G 5

Vaatleme palli lendu jaama teljega seotud inertsiaalses taustsüsteemis. Olgu Juku koordinaadid palli viskamise hetkel  $(0, -R)$ . Sellisel juhul liigub pall pärast viset ühtlaselt ning sirgjooneliselt, kusjuures selle kiiruse vertikaalsihiline komponent on  $v$  ning horisontaalsihiline komponent  $\omega R$ . Järelkult  $\tan \alpha = \frac{\omega R}{v}$ , millest saame  $\alpha = \frac{\pi}{3}$ . Kuna kehtib  $\varphi = \pi - 2\alpha$ , siis saame järeldada, et ka  $\varphi = \frac{\pi}{3}$  ning pall läbib enne jaama pinnani jõudmist teepikkuse  $R$ . Palli kiirus on

$$\sqrt{v^2 + \omega^2 R^2} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \omega R,$$

seega on pall õhus aja  $t = \frac{\sqrt{3}}{2\omega}$ , mille jooksul jõuab jaam pöörduda nurga  $\theta = \omega t = \frac{\sqrt{3}}{2}$  võrra. Järelkult näeb Juku otse üles visatud palli maanduvat enda ees kaugusele

$$(\varphi - \theta) R = \left( \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) R.$$



### L59 Tsunami ★★

Autor: Jaan Kalda, lõppvoor, 2005, G 6

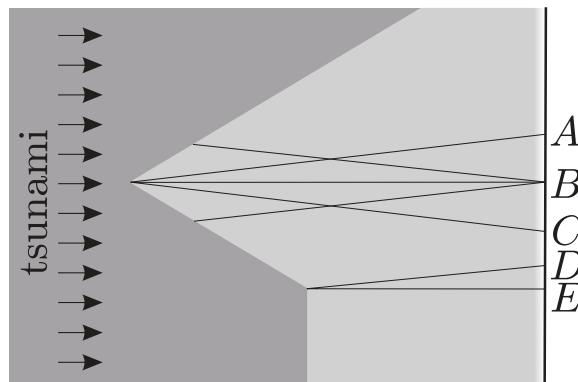
Laine levik toimub geomeetrilise optika seadustest kohaselt: astangu juures on laine langemisnurga ja murdumisnurga suhe

$$\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{\sqrt{gh_1}}{\sqrt{gh_2}} = \sqrt{\frac{h_1}{h_2}} \Rightarrow \alpha_2 = \arcsin \left( \sin \alpha_1 \sqrt{\frac{h_2}{h_1}} \right).$$

Seal astangu osas, kus langemisnurga on  $0^\circ$ , murdumist ei toimu. Seal aga, kus  $\alpha_1 = 60^\circ$ , on murdumisnurga

$$\alpha_2 = \arcsin \left( \sin 60^\circ \sqrt{\frac{3200}{5000}} \right) \approx 44^\circ.$$

Seega kaldub laine esialgsest levimissuunast kõrvale nurga  $\beta = \alpha_1 - \alpha_2 = 16^\circ$  võrra. Niisiis jõuab rannalõigule  $AC$  kaks lainet ning rannalõigule  $DE$  ei jõua üldse lainet. Punktide  $B$  jõuavad mõlemad lained üheaegselt (sümmetria tõttu) ning seal ongi laine kõige kõrgem.



### L60 Hävitusalennuk ★★

Autor: tundmatu, lahtine, 2011, G 7

Olgu hetkel, mil Mati käivitab stopperi, lennuki horisontaalsuunaline kaugus temast  $x_1$ . Tähistame lennuki lennukõrguse  $H$ , posti pikkuse  $h$  ja kauguse  $L$ . Tekib kaks kujutletavat täisnurkset sarnast kolmnurka, mille ühise nurga tipus asub Mati. Nendest saame (kasutades eeldust, et ilmselt  $l \ll H$ ):

$$\frac{H-l}{x_1} \approx \frac{H}{x_1} = \frac{h-l}{L}.$$

Kui lennuk on jõudnud üle Mati pea, jõuab temani lööklaine hetkel, mil lennuki horisontaalkaugus  $x_2$  Matist on

$$x_2 = \frac{H}{\tan \left( \frac{\alpha}{2} \right)} = \frac{H}{\tan \left( \arcsin \left( \frac{u}{v} \right) \right)} = \frac{H}{u} \sqrt{v^2 - u^2}.$$

Olgu  $\tau$  mõõdetud aeg. Stopperi käivitamise hetkest seiskamiseni liikus lennuk vahemaa

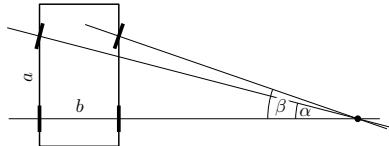
$$x_1 + x_2 = H \left( \frac{\sqrt{v^2 - u^2}}{u} + \frac{L}{h-l} \right) = v\tau \Rightarrow H = \frac{v\tau}{\left( \frac{\sqrt{v^2 - u^2}}{u} + \frac{L}{h-l} \right)} \approx 1630 \text{ m.}$$

### L61 Rehvid ★★★

Autor: Siim Ainsaar, lõppvoor, 2012, G 5

Rattad tuleb pöörata suunda, mis ühtib nende liikumissuunaga. Ilmselt asub auto pöörlemistelg tagarataste telgedega samal sirgel. Samas asub see optimaaljuhul ka nii vasaku kui ka parema esiratta teljel. Seega otsitav nurk

$$\beta = \operatorname{arccot} \left( \frac{a \cot \alpha - b}{a} \right) = \operatorname{arccot} \left( \cot \alpha - \frac{b}{a} \right).$$



### L62 Kammid ★★★

Autor: Jaan Kalda, lõppvoor, 2014, G 5

Kui hall kamm liigub ühe pii võrra, on uus pilt identne esialgsega ning järelikult on tume laik liikunud ühe „lainepekkuse“ võrra. Ühe laikude „lainepekkuse“ kohata tuleb 7 halli kammi piide „lainepekkust“, seega liiguvad hallid laigud 7 korda kiiremini kui hall kamm:  $v = 7 \text{ cm/s}$ .

### L63 Fotograaf ★★★★

Autor: Jaan Kalda, lõppvoor, 2011, G 6

Olgu pilu laius  $d$ , katiku kiirus  $u$  ja piisa kujutise kiirus sensori tasandis  $v$ . Katiku taustsüsteemis liigub piisa kujutis kiirusega  $u \pm v$ ; kui fotoaparaat on päripidi, siis tuleb võtta märk „+“ ja kui tagurpidi, siis „–“. Seega on piisa jälje tekkimise aeg  $d/|u \pm v|$  ning jälje pikkus  $l = vd/|u \pm v|$ . Olgu  $u \geq v$ ; siis

$$l_1 = \frac{vd}{u+v}, \quad l_2 = \frac{vd}{u-v}.$$

Jagades teise võrrandi esimesega saame

$$\frac{u+v}{u-v} = \frac{l_2}{l_1} = \frac{5}{3},$$

millega

$$3u + 3v = 5u - 5v,$$

ehk

$$u = 4v.$$

Kui fotoaparaat on portreeasendis, siis viibib piisa kujutis pilus ajavahemiku  $d/u$  jooksul ja jälje pikkus on seega

$$l_3 = vd/u.$$

Esimese võrrandiga läbi jagades leiame, et  $l_3/l_1 = 1 + \frac{v}{u} = \frac{5}{4}$  ning

$$l_3 = \frac{5}{4}l_1 = 150 \text{ pikselit.}$$

Kui  $u < v$ , siis muutub ainult teine võrrand,

$$l_2 = \frac{vd}{v-u},$$

mistõttu  $3u + 3v = 5v - 5u$  ja  $u = v/4$ , mistõttu

$$l_3 = 5l_1 = 600 \text{ pikselit.}$$

*Märkus 1:* ülesande teksti põhjal on see üks kahest võimalikust vastusest; reaal-selt, arvestades tüüpilist katku liikumiskiirust (18 mm läbimisaeg  $\frac{1}{125}\text{s} \implies u = 2,25 \text{ m/s} \implies v = 4u = 9 \text{ m/s}$ ), on siiski üsna raske saavutada, et  $v = 4u$ : pil-distamine peaks toimuma ohtlikult lähedalt. Kui joa kõrgus oleks nt 100 m, siis vabalangenuud piisa kiirus oleks ca 44 m/s, mistõttu pildistamiskauguse ja objektiivi fookuskauguse suhe (st suurendustegur) tuleks  $44/9 \approx 5$  ning isegi teleobjektiivi (nt  $f = 300 \text{ mm}$ ) korral peaks fotograaf olema joast vaid 1,5 m kaugusel.

*Märkus 2:* eeldusest, et „pilu laius on  $d$ “ võib jäada mulje, justkui eeldanuks me vaimisi, et sensor ei jõua säritatmise ajal täielikult avaneda. Ometigi kehtib lahendus ka siis, kui säriaeg on nii pikk, et sensor jõuab täielikult avaneda: piltlikult võib ette kujutada, et ikkagi mölemad kardinad liiguavad samamaagsest, kuid pilu laius on suurem sensori kõrgusest, st esimene kardin jõuab sensori kohalt eemale minna enne teise kardina saabumist.

#### L64 Laev ★★★★

Autor: tundmatu, lõppvoor, 2007, G 5

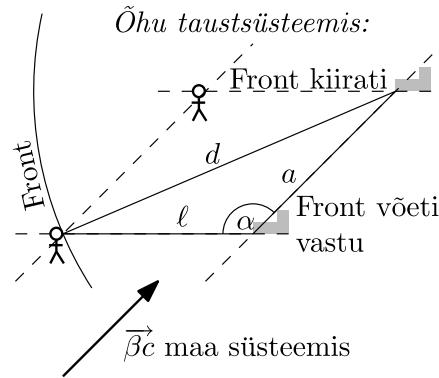
Näitame, et laev peab sõitma nii, et voolukiirused stardihetkel  $t_s$  ja finišihetkel  $t_f$  on võrdsed,  $v(t_s) = v(t_f)$ . Teeme seda vastuväiteliselt. Vaatleme konkreetse mõttes liikumist  $B$  suunas, mil laeva kiirus kalda suhtes on  $v_0 + v(t)$ . Sellisel juhul on läbitud vahemaa  $L$  graafiku  $v(t)$  ja joone  $v = -v_0$  vahelise piirkonna pindala. Nihutame stardi ja finišiaega väikese ajavahemiku  $\Delta t$  vörra. Läbitav vahemaa muutub seejuures  $\Delta t(v_f - v_s)$  vörra. Kui  $v(t_s) \neq v(t_f)$ , siis saame valida  $\Delta t$  märgi selliselt, et  $\Delta t(v_f - v_s) > 0$ , st sama aja jooksul läbitud vahemaa kasvab saades suuremaks  $L$ . Seega saaks sõiduaega vähendada ning stardihetk polnud optimaalne.

Eelpool selgitatud tingimustele (stardi- ja finišihetke kiirused on võrdsed, graafiku ja joone  $v = -v_0$  vaheline pindala võrdub 20 km-ga) vastavad stardiajad punktist  $A$  22.20 ja punktist  $B$  04.20.

### L65 Müra ★★★

Autor: Siim Ainsaar, lahtine, 2009, G 10

Õhu taustsüsteemis on helilainefrondid kiirusega  $c$  kasvava raadiuse ja paigaloleva keskmega poolsäärid. Helivoimsus jaotub ühtlaselt üle terve frondipinna, see-ga on tajutav võimsus pöördvõrdeline frondi pindalaga ehk pöördvõrdeline frondi raadiuse ruuduga. Lisaks on võimsus ka võrdeline frontide vastuvõtmise sagedusega ehk võrdeline helisagedusega, aga nagu peagi leiame, on sagedus konstant. Õhu taustsüsteemis liiguvalt nii matkaja kui ka jaam vastu esialgsel tuule suunale kiirusega  $\beta c$ . Järelikult kui front oli vastuvõtmise hetkeks raadiusega  $d = ct$ , siis selle kiirgamise alguspunkt oli liikunud jaama suhtes allatuult kaugusele  $a = (\beta c)t = \beta d$ . Et see kaugus on kõigile frontidele ühesugune, on sama ka frontide teeloleku aeg ning aeg kahe frondi kiirgamise vahel võrdub ajaga nende vastuvõtmise vahel. Seega helisagedus ei muudu. Olgu jaama kaugus  $\ell$ . Rakendame tekinud kolmnurgale koosinusteoreemi:



$$d^2 = a^2 + \ell^2 - 2a\ell \cos \alpha.$$

Kuna  $x = \left(\frac{\ell}{d}\right)^2$  ja  $\cos 135^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ , saame  $\sqrt{x}$  leidmiseks ruutvõrrandi, kusjuures  $\ell$  taandub välja (karakteristlik pikkusmõõde puudub).

$$\begin{aligned} \frac{\ell^2}{x} &= \frac{\beta^2 \ell^2}{x} + \ell^2 + \frac{\sqrt{2}\beta\ell^2}{\sqrt{x}} \\ x + \sqrt{2}\beta\sqrt{x} + \beta^2 - 1 &= 0 \\ x = \left( \frac{-\sqrt{2}\beta \pm \sqrt{2\beta^2 - 4\beta^2 + 4}}{2} \right)^2 &= \frac{(-\beta \pm \sqrt{2-\beta^2})^2}{2} = 1 \mp \beta\sqrt{2-\beta^2}. \end{aligned}$$

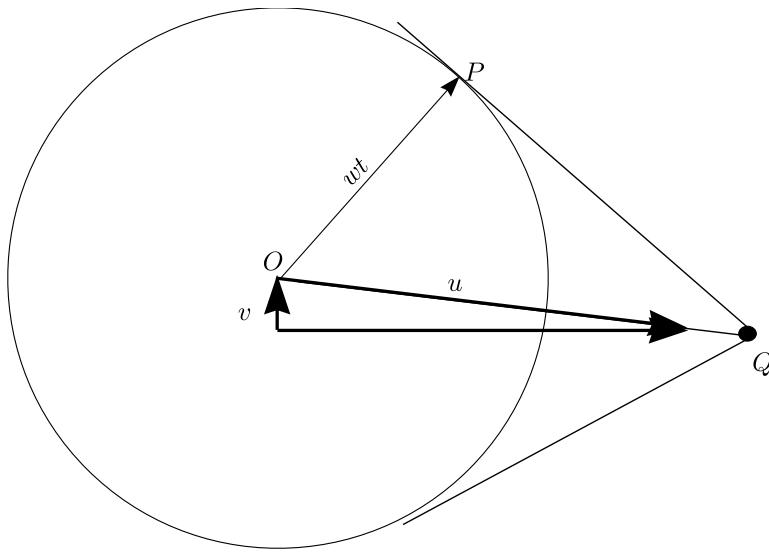
Heli jääb vaiksemaks, mistõttu  $x < 1$  ja peame valima miinusmärgiga lahend

$$x = 1 - \beta\sqrt{2 - \beta^2}.$$

### L66 Kaater ★★★

Autor: Jaan Kalda, lõppvoor, 2009, G 8

a) Veega seotud taustsüsteemis liiguvalt lained paadi trajektoori suhtes sümmeetriselt. Seega, veega seotud taustsüsteemis on paadi trajektoor lainetest moodustatud nurga poolitaja. Paadi kiirusest  $\vec{u}$ , jõe voolukiirusest  $\vec{v}$  ja paadi kiirusest maa suhtes moodustub kiiruste kolmnurk, vt joonis. Joonisel mõõdame selle kolmnurga teravama nurga siinuse,  $\sin \alpha = v/u = 0,26$ , millest  $v = 1,8 \text{ m/s}$ .



**b)** Kui paat tekitas teatud punktis häirituse, siis levis see ajaga  $t$  kaugusele  $wt$  (nähtavaks paadilaineks on selliste ringide mähisjoon), paat aga liikus kaugusele  $ut$ . Seega leiame jooniselt pikkuste suhte abil  $w/u = |OP|/|OQ| = 0,64$ , millest  $w = 4,5 \text{ m/s}$ . Järelikult on vee sügavus  $h = w^2/g = 2 \text{ m}$ .

**L67 Päikese pöörlemine ★★★**

Autor: Mihkel Kree, lahtine, 2014, G 10

Olgu Päikese pöörlemise joonkiirus ekvaatoril  $v$ . Kuna punktid A ja B lähenevad meile ja kaugenevad meist kiirusega  $v$ , siis mõõdetavad lainepekkused  $\lambda_A$  ja  $\lambda_B$  erinevad algsest lainepekkusest  $\lambda_0$  Doppleri nihke töttu. Punktist A näib kiirguvat lühem lainepekkus  $\lambda_A = \lambda_0(1 - v/c)$  ning punktist B pikem  $\lambda_B = \lambda_0(1 + v/c)$ .

Kes Doppleri valemit peast ei tea, võib arutleda ka järgnevalt. Liikugu kiirguse allikas meie poole kiirusega  $v$ . Lainepekkusele  $\lambda_0$  vastava laine sagedus on  $f_0 = \frac{c}{\lambda_0}$ , järelikult võime mõelda, et lainehari kiiratakse iga intervalli  $\tau = 1/f_0 = \lambda_0/c$  järrel, mis vastab laine perioodile. Kiiratagu mingil hetkel esimene lainehari. Ühe perioodi jooksul liigub see kaugusele  $x = c\tau$ ; allikas ise liigub aga selle aja jooksul meile lähemale  $\Delta x = v\tau$  võrra ja kiirgab sealjärgmisse laineharja. Niisiis tundub meile kui vaatlejale, et kahe laineharja vaheline kaugus ehk lainepekkus on

$$\lambda' = x - \Delta x = (c - v)\tau = \lambda_0(1 - v/c).$$

Punktidest A ja B mõõdetud lainepekkuste erinevus avaldub niisiis kui

$$\Delta\lambda = \lambda_B - \lambda_A = 2\lambda_0 v/c,$$

kust saame lihtsalt avaldada joonkiiruse  $v = c\Delta\lambda/2\lambda_0$  ning selle abil ka pöörlemisperioodi:

$$T_p = \frac{2\pi r}{v} = \frac{4\pi r \lambda_0}{c \Delta\lambda} = \frac{4 \cdot 3.14 \cdot 7 \cdot 10^8 \cdot 5.9 \cdot 10^{-7}}{3 \cdot 10^8 \cdot 7.8 \cdot 10^{-12}} \text{ s} \approx 26 T_m.$$

Päike ei ole tahke keha, selle erinevad laiuskraadid pöörlevad erineva nurkkiirusega. Pooluselähedastel piirkondadel kulub ühe täispöörde tegemiseks umbes 34 päeva.

### L68 Traatrõngad ★★★★

Autor: Jaan Kalda, lõppvoor, 2014, G 9

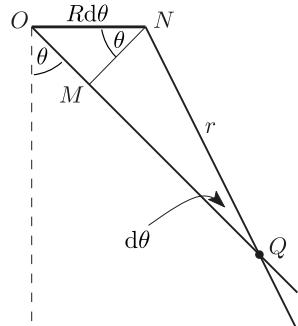
Läheme süsteemi, mis pöörleb nurkkiirusega  $\omega/2$ ; seal on näha, et lõikepunkt ei pöörle, vaid liigub radiaalselt. Seega, laboratoories süsteemis on selle nurkkiirus  $\omega/2$ ; sellise nurkkiirusega pöörleb kõõl  $AB$ ; et kesknurk on kahekordne piirde-nurk, siis raadius  $OB$  (kus  $O$  on seisva rönga keskpunkt) pöörleb nurkkiirusega  $\omega$  ning järelikult on lõikepunkt kiirus samaselt võrdne  $\omega R$ -ga.

### L69 Kodarad ★★★★★

Autor: tundmatu, lahtine, 2011, G 10

Kodara antud punkt näib kujutisel terav, kui selle kiirusvektor on suunatud pikki kodarat, st antud punktis kodar ei liigu enese ristihis.

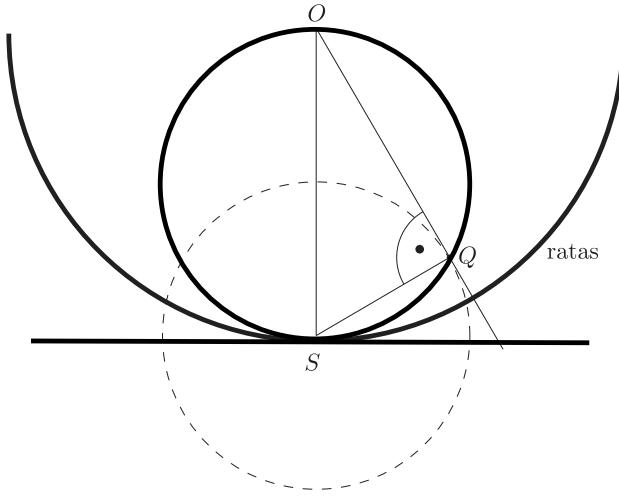
Olukorda võib selgitada juuresoleva joonise abil. Olgu  $R$  ratta raadius ja olgu selle keskpunkt  $O$ . Kui kodara pöördenuurk on  $\theta$  ning see nurk muutub pildistamise jooksul nurga  $d\theta$  võrra, siis  $O$  on läbinud teatud vahemaa ( $R d\theta$ ), aga kodar on samuti pöördunud sama nurga ( $d\theta$ ) võrra. Jooniselt on näha, et uuel ja vanal kodara asendil on üks ühine punkt, olgu see punkt  $Q$ . Nii pildistamise alg- kui ka lõpphetkel asus selles punktis kodar, mistõttu kujutisel jäab see punkt selgelt näha (erinevalt teistest punktidest, kus kodar viibis vaid lühiajaliselt).



Kasutades eeltoodud joonist (kus tähistasime  $OQ = r$ ) võime avaldada lõigu  $MN$  pikkuse kahel viisil:  $R d\theta \cos \theta = r d\theta$ , kus paremal pool kasutasime väikese nurga lähendust  $\sin d\theta \approx d\theta$ . Seega  $R \cos \theta = r$ , mis tähdab, et (a) punkt  $Q$  on leitav kodara lõikepunktina ratta ja maa kontaktpunktist  $S$  kodarale tömmatud ristsirgega (vt järgnev joonis); (b) vaadeldes seda võrdust kui raadiuse  $r$  sõltuvust polaarnurgast  $\theta$  näeme, et ülejää nud kodarate teravalt kujutuvad punktid asuvad ringjoonel, mille diameetriks on ratta raadius  $OS$ .

#### Alternatiivne lahendus

Pildistamise hetkel pöörleb kogu ratas ümber hetkelise pöörlemistelje, mis läbib ratta ja maa puutepunkti  $S$  (vt. joonist). Sellel hetkel liigub iga ratta osake mööda ringjoone kaart, mille keskpunkiks on  $S$ . Kui ühe sellisel moel liikuva punkti kiirus on mööda kodarat ( $OP$ ), siis see punkt kujutub fotol selgena. Seega me otsime selliseid punkte  $Q$ , mille juures  $\angle OQS$  on täisnurk. Piirdenurga omaduse põhjal peab selline punkt  $Q$  lebama ringjoonel, mille diameetriks on  $OS$  – sõltumata kodara kaldenurgast  $\theta$ .



### L70 Anemomeeter ★★★★

Autor: Jaan Kalda, lahtine, 2016, G 9

Leviaegade suhtelised erinevused on väikesed, seega võime lugeda, et helikiirus on hulga suurem tuule kiirusest. Vaatleme heli levikut õhuga seotud taustsüsteemis, kus sensorite suhtelise nihke  $x$ - ja  $y$ -telje sihilised komponendid ( $s_x = u_x \frac{a}{c_s}$  ja  $s_y = u_y \frac{a}{c_s}$ ) on samuti väikesed:  $s_x, s_y \ll a$ ;  $u_x$  ja  $u_y$  tähistavad tuule kiiruse komponente ning  $c_s$  - heli kiirust. Rangelt võttes pidanuksid siin valemeis olema täpsed lennuajad  $t_A$ ,  $t_B$  ja  $t_C$ , kuid nihked ise on väikesed ning leviaegade väikeste vahede tõttu tuleb viga juba tühiselt väike. Niisiis saame leviaegade jaoks avaldised:

$$\begin{aligned} t_A &= \frac{1}{c_s} \left( a + u_y \frac{a}{c_s} \right), \\ t_B &= \frac{1}{c_s} \left( a + u_x \frac{a}{c_s} \right) \text{ ja} \\ t_C &= \frac{1}{c_s} \left( a - u_x \frac{a}{c_s} \right), \end{aligned}$$

millega  $\frac{a}{c_s} = \frac{1}{2}(t_B + t_C)$ ,

$$u_x = \frac{c_s^2}{a} \left[ t_B - \frac{1}{2}(t_B + t_C) \right] = c_s \frac{t_B - t_C}{t_B + t_C} = 2a \frac{t_B - t_C}{(t_B + t_C)^2} \approx 6,1 \text{ m/s}$$

ning

$$u_y = \frac{c_s^2}{a} \left[ t_A - \frac{1}{2}(t_B + t_C) \right] = 2a \frac{2t_A - t_B - t_C}{(t_B + t_C)^2} \approx 7,1 \text{ m/s.}$$

Seega on tuule kiirus  $u = \sqrt{u_x^2 + u_y^2} \approx 9,4 \text{ m/s.}$

**L71 Kaater ★★★★**

Autor: Jaan Kalda, lõppvoor, 2016, G 9

Vaatleme kaatri liikumist õhu suhtes: alguses  $l_1 = t_1 v_1 = 2700 \text{ m}$  itta, siis  $l_2 = t_2 v_2 = 900 \text{ m}$  kagusse ning lõpuks  $l_3 = t_3 v_3 = 450 \text{ m}$  edelasse. Kokkuvõttes nihkuti lõunasuunas

$$L_S = \frac{l_2 + l_3}{\sqrt{2}} \approx 955 \text{ m}$$

ning idasuunas

$$L_E = l_1 + \frac{l_2 - l_3}{\sqrt{2}} \approx 3018 \text{ m},$$

maa suhtes aga nihkuti  $l$  võrra lõunasse. Seetõttu pidi õhk liikuma  $L_E$  võrra läände ning  $l - L_S$  võrra lõunasse. Siit saame tuule tugevuseks

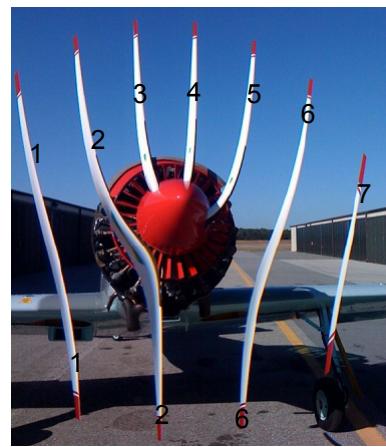
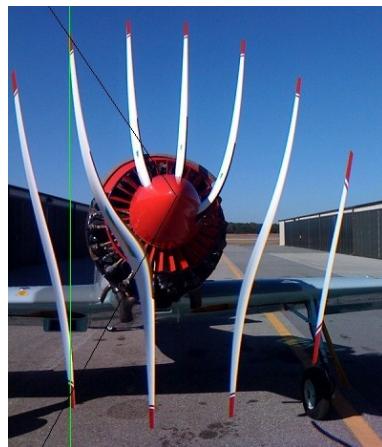
$$v_t = \frac{\sqrt{L_E^2 + (l - L_S)^2}}{t_1 + t_2 + t_3} \approx 11,9 \text{ m/s} \approx 12 \text{ m/s}.$$

**L72 Propeller ★★★★**

Autor: Andreas Valdmann, lõppvoor, 2010, G 10

**a)** Propeller pöörleb vastupäeva, sest pildi ülaosas liiguvald labad vastu parajasti salvestatavale pikseliveerule ja seetõttu paiknevad seal labade kujutised tihedamalt.

**b)** Vasakpoolsel joonisel on ülalt alla tömmatud üks veerg millel on korraga peal maksimaalset 2 laba. Kui labasid oleks 2, peaks veerus paistma korraga vaid üks laba. Labad ise on kantud joonisele mustaga. Näha on, et labade vaheline nurk on suurem kui 90 kraadi ja seega on propelleril kolm laba.

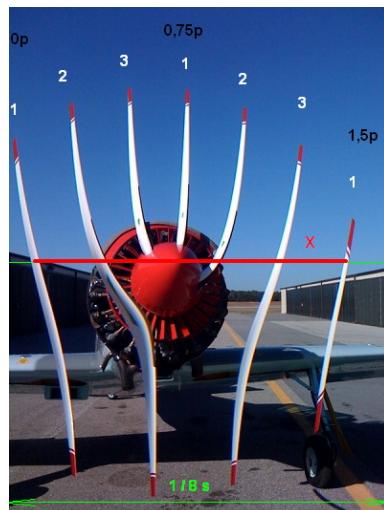


*Alternatiivne lahendus*

Tähistame labade tekitatud jooned numbritega 1 kuni 7, nii nagu näidatud parempoolsel joonisel. Joonise alumises servas eelneb joon 2 joonele 6. See tähendab, et

joonele 2 vastav laba peab eelnema joonele 6 vastavale labale. Joonise ülemise serva põhjal võime analogselt väita, et joonele 5 vastav laba peab eelnema joonele 6 vastavale labale. Järelikult peavad jooned 5 ja 2 vastama samale labale. Ülemises servas jäääb joonte 5 ja 2 vahele veel 2 joont, st sellele labale vastavad jooned korduvad perioodiga 3 joont. See periood peab olema propelleri labade arvu  $n$  kordne. Et 3 on algarv, siis ainus variant on  $n = 3$ .

c) Iga kolmas triip pildil kujutab sama propellerilaba. Järgneval joonisel on valgega nummerdatud labad; propelleri telje kõrgusel on tömmatud joon mille kogupikkus moodustus pildistamise aja jooksul ehk kogupikkus on  $1/8$  s. Punasega on märgitud aeg millega laba number üks jõudis liikuda 1,5 pööret. Punase osa pikkus moodustab ligikaudu  $4/5$  pildi kogulaiusest. Seetõttu moodustab ka nende punktide ajaline intervall  $4/5$  pildi tegemise koguajast. Selle aja jooksul teeb propeller poolteist pööret. Ühes sekundis teeb propeller  $1,5/(1/8 \cdot 4/5) = 15$  pööret ja ühes minutis  $15 \cdot 60 = 900$  pööret.



### L73 Kivi ★

Autor: Aigar Vaigu, lõppvoor, 2005, G 1

Läheme üle vabalt langevasse taustsüsteemi. Selles süsteemis liiguvad vabalt langevad kehad konstantse kiirusega. Kivi saavutab langevas süsteemis palli viskamise hetkeks,  $\Delta t$ , õhupalli suhtes suhtelise kiiruse  $u = g\Delta t$ ; see ei tohi olla suurem, kui maksimaalne viskekiirus  $v_{\max}$ . Seega

$$\Delta t \leq \frac{v_{\max}}{g}.$$

Avaldame palli viskekiiruse energia jäävuse seadusest:

$$\frac{mv_{\max}^2}{2} = mgh \quad \Rightarrow \quad v_{\max} = \sqrt{2gh}.$$

Maksimaalne viivituse aeg on seega

$$\Delta t_{\max} = \frac{v_{\max}}{g} = \sqrt{\frac{2h}{g}} \approx 2 \text{ s.}$$

**L74 Pallid ★**

Autor: tundmatu, lahtine, 2007, G 1

Ühesuguse massiga pallide elastse kokkupõrke tulemusena vahetavad nad oma kiirusevektorid (järeldub lihtsalt impulsi ja energia jäädvusest massikeskme süsteemis vaadatuna). Seega võime sama hästi öelda, et pallid lähevad üksteisest vabalt läbi, kusjuures ühe palli algkiirus ja teise palli lõppkiirus on võrdsed nulliga. Kui Juku istub kõrgusel  $h$ , siis saame mõlema vabalt liikuva palli jaoks lennuajaks  $t = \sqrt{2h/g}$ . Seega tabavad pallid viskajaid üheaegselt.

*Alternatiivne lahendus*

Kui Juku visatud pall jõuab täpselt tagasi oma algkõrgusele, siis peab tema kiiruse absoluutväärtus vahetult kokkupõrke eel ja vahetult kokkupõrke järel olema sama. Elastse kokkupõrke korral kehtib energiäärvus, järelikult võrdub ka Juhani palli kiiruse absoluutväärtus vahetult kokkupõrke eel kiiruse absoluutväärtusega vahetult kokkupõrke järel. Seega liigub kumbki pall tuldud suunas tagasi nii, et liikumise ajagraafik on peegelsümmeetiline pörkehetke suhtes. Seega, kui nad startisid samaaegselt, siis nad ka finišeerivad samaaegselt.

**L75 Hobune ★**

Autor: Valter Kiisk, piirkonnnavoor, 2007, G 1

Vaba langemise aeg

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 3}{9,81}} \approx 0,78 \text{ s}$$

Seega otsitav kaugus on  $s = vt = 10 \text{ m/s} \cdot 0,78 \text{ s} = 7,8 \text{ m}$ .

**L76 Eiffeli torn ★**

Autor: Aigar Vaigu, piirkonnnavoor, 2010, G 1

Kontrollime, kui kaua kukub raudkuul ülemiselt vaateplatvormilt  $h = 273 \text{ m}$  maapinnale.

$$h = \frac{gt^2}{2} \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2h}{g}} \approx 7,5 \text{ s.}$$

Alates hetkest, kui mõlemad kuulid langevad, on nende suhteline kiirus muutumatud, sest mõlemad kuulid on siis vabalt langevas taustsüsteemis paigal. Leiame esimese kuuli kiiruse teise kuuli kukutamise hetkel.

$$v = gt \approx 29,4 \text{ m/s.}$$

Ajavahemik kuulide maapinnale jõudmisel on sama mis kuulide kukutamiselgi ehk  $t = 3 \text{ s}$ .

**L77 Kokkupõrge ★**

Autor: Andreas Valdmann, piirkonnnavoor, 2011, G 1

**a)** Autode kiirused on võrdsed ja vastassuunalised. Seetõttu on koguimpulss võrdne nulliga ja autod jäavad pärast kokkupõrget paigale. Kogu esialgne kineetiline energia kulub purustuste tekitamiseks. Selleks on  $2 \frac{mv_a^2}{2} = mv_a^2$ . Autode kiirused on  $50 \text{ km/h} = 13,9 \text{ m/s}$  ja koguenergia on  $289 \text{ kJ}$ .

**b)** Minnes üle massikeskme taustsüsteemi näeme, et olukord taandub eelmiseks olukorraks, seega kokkupõrke koguenergia on  $289 \text{ kJ}$ .

**L78 Lendav pudel ★**

Autor: Erkki Tempel, piirkonnnavoor, 2014, G 1

Mõlemat juhtu, millal pudel liigub üles ning pudel liigub alla, võib vaadelda kui vabalangemist. Kuna pudelile ja veele mõjuvad jõud on vabalangemise korral samasugused, siis vesi ei voola pudelist välja kummalgi juhul. Seega vee väljavoolu kiirus on  $0 \text{ m/s}$ .

**L79 Potsataja ja pähklid ★**

Autor: Erkki Tempel, piirkonnnavoor, 2014, G 2

Lahenduse lihtsustamiseks läheme üle rongiga seotud taustsüsteemi. Sellisel juhul võib rongi liikumise jäätta arvestamata ning vaadelda pähklite loopimist seisvalt rongilt. Pähklite liikumisel vaatleme kahte komponenti: vertikaalne kukkumine kiirendusega  $g$  ning ühtlane horisontaalne liikumine kiirusega  $u$ . Pähklid jõuavad maapinnani ajaga  $t = \sqrt{2h/g}$ . Sama ajaga liigub kumbki pähkel horisontaalselt vahemaa  $s = u\sqrt{2h/g}$  vörra. Pealtvaates on pähklite trajektoorid täisnurkse võrdhaarse kolmnurga kaatetiteks. Pähklite omavaheline kaugus  $l$  maandumishetkel on võrdne kolmnurga hüpotenuusi pikkusega, mille leiame Pythagorase teoreemist:

$$l = \sqrt{2s^2} = 2u\sqrt{\frac{h}{g}}.$$

**L80 Kurv ★**

Autor: Mihkel Rähn, lahtine, 2016, G 2

Olgu auto külgkalle  $\alpha$  ning autole mõjuv summaarne jõud  $N$ . Kuna autos olijad ei tunne külgsuunalist jõudu, on  $N$  teega risti ja seega nurga  $\alpha$  all vertikaali suhtes. Jõu võrrandid maaga seotud teljestikus on:

$$\begin{aligned} mg &= N \cos \alpha, \\ N \sin \alpha &= \frac{mv^2}{R}. \end{aligned}$$

Lahendades võrrandisüsteemi, saame

$$\alpha = \arctan \left( \frac{v^2}{Rg} \right) = 14^\circ.$$

**L81 Viplala ★**

Autor: tundmatu, lahtine, 2004, G 1

Olgu Viplala mass  $m$ , klotsi mass on seega  $2m$ . Viplala tömbab allapoole raskusjoud  $mg$  ja ülesse nööri tömbejoud  $T$ . Klotsi paneb liikuma nööri tömbejoud  $T$  ja takistab liikumist hõõrdejoud  $2\mu mg$ . Saame kirja panna võrrandiste süsteemi:

$$mg - T = ma, \quad T - 2\mu mg = 2ma.$$

Lahendades võrrandisüsteemi, saame

$$mg - 2\mu mg = 3ma \Rightarrow a = \frac{(1 - 2\mu)g}{3}.$$

Aja  $t$  jooksul läbib Viplala tee  $S = at^2/2$ , seega laskumiseks kulub aeg

$$t = \sqrt{\frac{2S}{a}} = \sqrt{\frac{2S \cdot 3}{(1 - 2\mu)g}} \approx 1,2 \text{ s.}$$

Viplala saab laskuda, kui kiirendus on minimaalselt null ehk toimub ühtlane liikumine. Seega

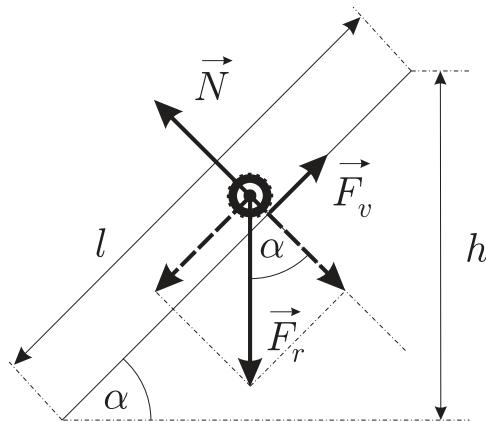
$$mg = M\mu g \Rightarrow \frac{M}{m} = \frac{1}{\mu} \approx 3,3.$$

See tähendab, et Viplala saab liigutada klotsi, mis on temast 3,3 korda raskem.

**L82 Tõus ★**

Autor: tundmatu, lahtine, 2005, G 2

Autole mõjuv veojoud on määratud tee ja rataste vahelise hõõrdeteguriga. Antud juhul hõõrdumine ei takista liikumist, vaid vastupidi, on liikumise aluseks. Kui hõõrdetegur oleks võrdne nulliga, siis ei saaks auto üldse edasi liikuda. Kanname joonisele kõik autole mõjuvad jõud (vt joonist): raskusjõu  $F_r = mg$ , tooreaktsiooni  $N = mg \cos \alpha$  ja hõõrdejõuga võrdse veojõu  $F_v = \mu mg \cos \alpha$ .



Paneme kirja energia miinimumitingimuse mäkke tõusu jaoks:

$$E_h = E_0 + A,$$

kus  $E_h = mgh = mgl \sin \alpha$  on auto potentsiaalne energia mää tipus,  $E_0 = mv^2/2$  on auto kineetiline energia mää jalamil ning  $A = F_v l = \mu mgl \cos \alpha$  on auto mäkke vedamiseks hõõrdejõu poolt tehtud töö. Saame

$$mgl \sin \alpha = \frac{mv^2}{2} + \mu mgl \cos \alpha.$$

Sellest võrrandist saame avaldada otsitava hõõrdeteguri:

$$\mu = \tan \alpha - \frac{v^2}{2gl \cos \alpha} = \tan 5^\circ - \frac{(30 \cdot 1000/3600)^2}{2 \cdot 9,8 \cdot 200 \cdot \cos 5^\circ} \approx 0,07.$$

Arvestades, et libedal jääl võib hõõrdetegur langeda alla 0,05, võib meie auto teoreetiliselt koju jäada, kui tee on libe, seda pole õigeaegselt liivatatud ja autol pole naastrehve all.

### L83 Keha ★

Autor: tundmatu, lahtine, 2006, G 3

Üles visatud keha koordinaadi leiame võrrandist:

$$h = v_0 t - \frac{gt^2}{2}.$$

Iga antud  $v_0$  ja  $h$  jaoks annab see võrrand kaks  $t$  väärust:

$$t_{1,2} = \frac{v_0 \pm \sqrt{v_0^2 - 2gh}}{g}.$$

Nende kahe vääruse vahe on ajavahemik, mis möödub kõrguse  $h$  kahe läbimise vahel keha poolt:

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{2\sqrt{v_0^2 - 2gh}}{g}. \quad (1)$$

Sit saame, et

$$v_0 = \sqrt{2gh + \frac{g^2 \Delta t^2}{4}}.$$

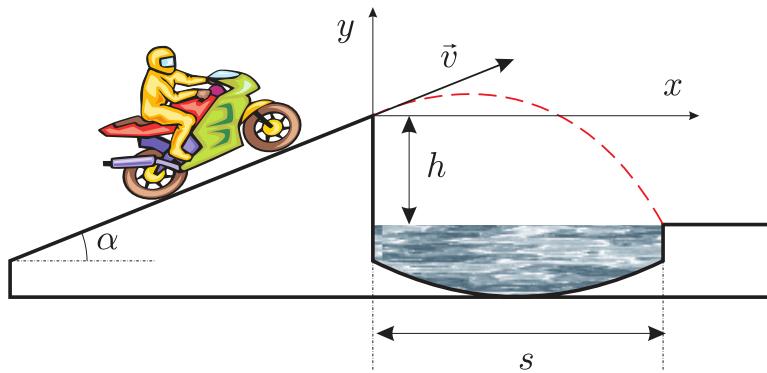
Kui valemis (1) võtta  $h = 0$ , siis saame ajavahemiku, mis möödub liikumise algust kuni jõudmiseni tagasi algpunkt:  $\tau = 2v_0/g$ . Asendades siia varem saadud  $v_0$  vääruse, saame:

$$\tau = 2\sqrt{\frac{2h}{g} + \frac{\Delta t^2}{4}}.$$

### L84 Mootorratas ★

Autor: tundmatu, lahtine, 2007, G 5

Suuname koordinaatteljed nii, nagu näidatud joonisel.



Mootorratturi liikumist kirjeldavad seosed

$$x = vt \cos \alpha, \quad y = vt \sin \alpha - \frac{gt^2}{2},$$

kust saame

$$y = x \tan \alpha - \frac{gx^2}{2v^2 \cos^2 \alpha}.$$

See on parabooli võrrand. Asendades siia mootorratturi langemiskoha koordinaatid  $x = s$  ja  $y = -h$ , leiame minimaalse kiiruse

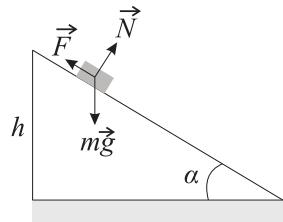
$$\begin{aligned} -h &= s \tan \alpha - \frac{gs^2}{2v^2 \cos^2 \alpha} \Rightarrow \frac{gs^2}{2v^2 \cos^2 \alpha} = h + s \tan \alpha \Rightarrow \\ \Rightarrow \quad 2v^2 \cos^2 \alpha &= \frac{gs^2}{h + s \tan \alpha} \quad \Rightarrow \quad v^2 = \frac{gs^2}{2 \cos^2 \alpha (h + s \tan \alpha)} \quad \Rightarrow \\ v &= \frac{s}{\cos \alpha} \sqrt{\frac{g}{2(h + s \tan \alpha)}}. \end{aligned}$$

### L85 Kelk ★

Autor: tundmatu, lahtine, 2008, G 2

Kehtib energia jäävuse seadus. Algul on kelk kõrgusel  $h$  ja omab potentsiaalset energiat  $mgh$ . See energia kulutatakse hõõrdejõu ületamise tööks mölemal mäenõlval ja kelgu uueks tõusuks vajaliku potentsiaalse energi peale. Energia jäävust väljendab valem

$$mgh = A_1 + A_2 + mgh_2, \quad (1)$$



kus  $h_2$  on kelgu lõppkõrgus. Hõõrdejõud mõlemal nõlval avaldub kujul  $F = \mu N = \mu mg \cos \alpha$ . Teepikkus laskumisel on  $s_1 = h / \sin \alpha$  ning tõusul  $s_2 = h_2 / \sin \alpha$ . Seega tehtud töö hõõrdejõu ületamiseks on

$$A_1 = Fs_1 = \mu mgh / \tan \alpha$$

ja

$$A_2 = Fs_2 = \mu mgh_2 / \tan \alpha.$$

Asendades saadud seosed valemissesse (1) saame

$$h_2 = \frac{1 - \mu / \tan \alpha}{1 + \mu / \tan \alpha} h \approx 7 \text{ m.}$$

### L86 Hantel ★

Autor: Mihkel Kree, lõppvoor, 2008, G 1

Kehale antakse energia  $E_k = \frac{mv^2}{2}$ . Massikese saab impulsi  $p_c = mv$  ning hakkab vertikaalsuunas liikuma kiirusega

$$v_c = \frac{p_c}{m+m} = \frac{v}{2}$$

ning süsteemi kuligliikumise energia on seega

$$E_v = \frac{v_c^2(m+m)}{2} = \frac{mv^2}{4}.$$

Kui keha saavutab maksimaalse kõrguse, on tema kuligliikumise energia täielikult muutunud potentsiaalseks energiaks ning süsteemi kineetiline energia on nüüd

$$E = E_k - E_v = \frac{mv^2}{4}.$$

### L87 Pingpong ★

Autor: Siim Ainsaar, lõppvoor, 2008, G 2

Kui pall töuseb kahe järjestikuse põrke vahel (pärast i-ndat põrget) kõrgusele  $h_i$ , saame nende põrgete vahelise ajavahemiku  $t_i$ :

$$h_i = \frac{g \left( \frac{t_i}{2} \right)^2}{2} \implies t_i = 2 \sqrt{\frac{2h_i}{g}}.$$

Igas lennu haripunktis on palli kiirus ja ka kineetiline energia null ning koguenergia  $E_i$  potentsiaalne. Kui palli mass on  $m$ , siis  $E_i = mgh_i$  ja on võrdeline haripunkti kõrgusega  $h_i$ . Seega ka haripunkti kõrgus kahaneb pärast igat põrget  $k$  korda:  $h_{i+1} = \frac{h_i}{k}$ . Ilmselt selles seoses  $h_0 = h$ .

Kukkumise aeg enne esimest põrget:

$$t_0 = \frac{2h}{g}.$$

Nii saamegi koguaja:

$$\begin{aligned} t &= t_0 + t_1 + t_2 + \dots = \sqrt{\frac{2h}{g}} + 2\sqrt{\frac{2h}{gk}} + 2\sqrt{\frac{2h}{gk^2}} + 2\sqrt{\frac{2h}{gk^3}} + \dots = \\ &= \sqrt{\frac{2h}{g}} + 2\sqrt{\frac{2h}{gk}} \left[ 1 + \left( \frac{1}{\sqrt{k}} \right)^1 + \left( \frac{1}{\sqrt{k}} \right)^2 + \left( \frac{1}{\sqrt{k}} \right)^3 + \dots \right] = \\ &= \sqrt{\frac{2h}{g}} + \sqrt{\frac{2h}{gk}} \frac{1}{1 - \frac{1}{\sqrt{k}}} = \sqrt{\frac{2h}{g}} + 2\sqrt{\frac{2h}{g}} \frac{1}{\sqrt{k}-1} = \\ &= \sqrt{\frac{2h}{g}} \left( 1 + \frac{2}{\sqrt{k}-1} \right) = \frac{\sqrt{k}+1}{\sqrt{k}-1} \sqrt{\frac{2h}{g}}. \end{aligned}$$

### L88 Mürsk ★

Autor: Mihkel Kree, piirkonnavor, 2009, G 2

Tähistame mürsu kiiruse lagunemishetkel  $v$ -ga. Vahetult pärast lagunemist peab ühe poole kiirus olema samuti  $v$ , kuid vastassuunaline. Olgu teise osa kiirus sel hetkel  $u$ . Impulsi jäävuse tõttu

$$Mv = \frac{M}{2}u - \frac{M}{2}v,$$

millega  $u = 3v$ . Vahetult pärast lagunemist kuulidel vertikaalne kiiruskomponent puudub, seetõttu võtab kummagi tüki langemine võrdselt aega. Teine tükki maandub kahurist kaugusele  $L + 3L = 4L$ .

### L89 Kerad ★

Autor: Valter Kiisk, lahtine, 2010, G 1

Õõnes ja homogeenne kera eristuvad selle poolest, et esimese inertsimoment on suurem, sest mass on koondunud pöörlemistsentrist kaugemale, st sama nurkkirusega pööreldes on pöörlemisega seotud kineetiline enregia suurem. Niisiis võrdse kineetilise energiaga omadamisel (näiteks sama kalpinda mööda alla veeredes) saavutab õõnes kera väiksema kiiruse (sest pöörlemisega seotud energia on suurem).

Vedeliku sisaldava kera korral kulub aga osa liikumise energiast paratamatult vedeliku sisehöördumise ületamiseks, seetõttu mehaanilise energia jäävus on katsetes rikutud (näiteks lükkame kerad veerema; vedeliku sisaldav kera pidurdub iseenesest).

**L90 Sild ★**

Autor: Valter Kiisk, lõppvoor, 2010, G 1

Olgu silla kõverusraadius  $r$ . Pythagorase teoreemist

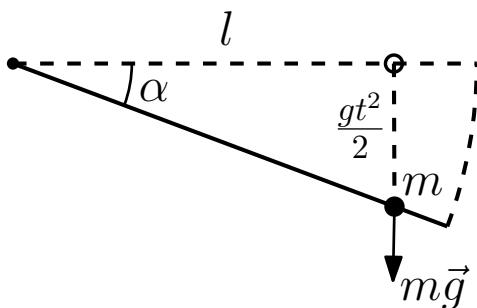
$$r^2 = (l/2)^2 + (r - h)^2 \implies 0 = l^2/4 - 2rh + h^2.$$

Kuna  $h \ll l$  ja seega  $h \ll r$ , siis  $h^2$  võib ära jäätta ja  $r = l^2/8h = 250$  m. Auto ras-kusjõu  $mg$  ja tooreaktsiooni  $N$  resultant annab kesktõmbekiirenduse  $v^2/r$ . Seega  $N = mg - mv^2/r \approx 8700$  N.

Kontakt rataste ja maapinna vahel hakkab kaduma, kui  $N = 0$ . Seega  $v = \sqrt{gr} \approx 180$  km/h.

**L91 Varras ★**

Autor: Stanislav Zayjalov, lõppvoor, 2011, G 2



Kuna varras on kaalutu, peab sellele mõjuv summaarne jõud olema 0. Vastasel korral mõjuks sellele Newtoni III seaduse kohaselt lõpmatu jõud, mis pole füüsikaline. Sellest saab järeltada, et massile mõjuv normaaljõud on null ning hõõrdeta libisemise tõttu on ka vardaga paralleeline jõukomponent null. Seega ei mõju massile varda poolt ükski jõud ning mass on vabalanguses.

Aja  $t$  jooksul jõuab mass langeda vahemaa  $\frac{gt^2}{2}$  ning varda ja horisontaali vaheline nurk avaldub kui (vt joonist)  $\tan \alpha = \frac{gt^2}{2l}$ .

**L92 Kadunud rahakott ★**

Autor: Eero Vaher, lahtine, 2012, G 2

Hoovõturaja alumise otsani jõudes on rahakott omandanud kineetilise energia  $E = \frac{mv^2}{2} = mgh$ , kusjuures algkiirus  $v = \sqrt{2gh}$  on horisontaalne. Kui valime koordinaatide alguspunktiks hoovõturaja alumise otsa, määrvavad rahakoti lennutrajektoori võrrandid  $x = vt$  ja  $y = -gt^2/2$ . Rahakott maandub siis, kui selle trajektoor ja nõlva kirjeldav joon  $y = -x \tan \alpha$  lõikuvad. Seega

$$-gt^2/2 = -vt \tan \alpha,$$

$$t = \frac{2v \tan \alpha}{g},$$

ehk

$$x = 4h \tan \alpha.$$

**L93 Kivi ★**

Autor: Taavi Pungas, lahtine, 2013, G 1

Olgu libisema hakkamise hetkel pinna kaldenurk  $\alpha$ . Mõtleme esmalt, kuidas on seotud see  $\alpha$  väärthus hõõrdeteguriga  $\mu$ . Topsile mõjuva raskusjõu  $mg$  jagame pinnaga risti olevaks komponendiks  $F_{\perp} = mg \cos \alpha$  ning pinnaga paralleelseks komponendiks  $F_{\parallel} = mg \sin \alpha$ . Kivi pind avaldab topsile toereaktsiooni  $N = F_{\perp}$  ning maksimaalset hõõrdejõudu  $F_h = \mu N$ . Tops libiseb maha, kui  $F_{\parallel} > F_h$ . Kriitilisel hetkel saame võrrandi  $F_{\parallel} = F_h$  ehk

$$\mu \cos \alpha = \sin \alpha, \quad \text{millega} \quad \tan \alpha = \mu.$$

Kaldenurk  $\alpha$  on ühtlasi võrdne vertikaali ja kivi keskpunktist libisemispaika tõmmatud joone vahelise nurgaga ja suhtub täisringi  $360^\circ$  samuti kui kaarepiikkus  $b$  suhtub ümbermõõtu  $a$ ,  $\alpha = 360^\circ \cdot b/a$ . Seega  $\mu = \tan(360^\circ \cdot b/a)$  ning arvuliseks vastuseks saame

$$\mu = \tan(30^\circ) = \frac{1}{\sqrt{3}} \approx 0,58.$$

**L94 Kelgutaja ★**

Autor: Taavi Pungas, piirkonnavor, 2013, G 4

Laps kelgutas vahemaa  $l = h / \sin \alpha$ . Fikseeritud  $h$  ja  $t$  puhul on nõlva kalle vähim siis, kui hõõrdejõud puudub. Sel juhul on raskusjõu ja toereaktsiooni resultantjõu suund mööda nõlva alla ning see annab kelgule kiirenduse  $a = g \sin \alpha$ . Kiirendus on konstantne, seega  $l = \frac{at^2}{2}$ . Asendades vahemaa ja kiirenduse avaldised, saame

$$\frac{h}{\sin \alpha} = \frac{gt^2 \sin \alpha}{2},$$

millega saame

$$\alpha = \arcsin \left( \sqrt{\frac{2h}{gt^2}} \right).$$

Kasutades ülesandes toodud lähteandmeid, saame arvuliseks vastuseks  $\alpha = 12^\circ$ .

**L95 Pall ★**

Autor: Taivo Pungas, lõppvor, 2013, G 2

$h \propto t^2$ , kus  $h$  on maksimaalse töusu kõrgus ja  $t$  on sellele kõrgusele töusmiseks kulunud aeg.

Olgu  $t_i$  aeg, mis kulus pallil pärast  $i$ -ndat põrget maksimaalsele kõrgusele töusmiseks. Kuna iga piik graafikul tähistab üht põrget, siis võime mõõta graafikult 3. ja 4. põrke alguste vahelise kauguse  $d_3$ , kusjuures  $t_3 = kd_3$  (kus  $k$  on mingi vörde tegur), ning 1. ja 2. põrke alguste vahelise kauguse  $d_1$ , kusjuures  $t_1 = kd_1$ . Seega  $\frac{t_1}{t_3} = \frac{d_1}{d_3}$ , kust

$$h_1 = h_3 \left( \frac{t_1}{t_3} \right)^2 = h_3 \left( \frac{d_1}{d_3} \right)^2 \approx 1,7 \text{ m.}$$

**L96 Kaubarong ★**

Autor: Mihkel Rähn, lahtine, 2014, G 1

Jagades tuntud töö valemi  $A = Fs + \Delta E$  ajaga, saame võimsuse jaoks võrrandi

$$N = Fv + \frac{\Delta E}{t},$$

mille kohaselt veduri võimsus on tasakaalustatud takistusjoudude ja kiiruse korrutise ning potentsiaalse energia  $E$  muutumise kiiruse summaga. Hõõrdejoud on  $F = \mu mg$ . Horisontaalsel teel potentsiaalne energia ei muudu ning avaldades saame

$$v_1 = \frac{N}{\mu mg} = 92 \text{ km/h}.$$

Tõusul toimub potentsiaalse energia  $E = mgh$  suurenemine, kus  $h = s \sin a$  ning  $\sin a = \frac{1 \text{ cm}}{100 \text{ cm}}$ . Seega

$$\frac{\Delta E}{t} = \frac{smg}{t} \sin a = mgv \sin a.$$

Seega teisel juhul

$$N = umgv_2 + mgv_2 \sin a,$$

millega

$$v_2 = \frac{N}{mg(u + \sin a)} = 15 \text{ km/h}.$$

**L97 Vaakumkahur ★**

Autor: Andreas Valdmann, lahtine, 2014, G 2

Pall jaotab kahuritoru kaheks kambriks. Enne tulistamist on mõlemas kambris röhk võrdne nulliga. Vasakpoolse membraani purustamisel täitub vasak pool torust välisõhuga ning palli poolte vahel tekib röhkude vahe  $\Delta P = P_0 - 0 = P_0$ . Pallile hakkab mõjuma joud, mis on võrdne palli ristlöikepindala ja röhkude vahe korrustisega:  $F = P_0 \pi d^2 / 4$ . Newtoni 2. seaduse abil saame leida palli kiirenduse  $a = F/m$ . Ühtlaselt kiireneva liikumise korral kehtib seos

$$l = \frac{v^2 - v_0^2}{2a},$$

kus  $l$  on läbitud vahemaa ning  $v_0$  ja  $v$  on vastavalt alg- ja lõppkiirus. Kuna palli algkiirus on võrdne nulliga ning tahame leida lõppkiirust, siis avaldame

$$v = \sqrt{2la} = \sqrt{\frac{2lP_0\pi d^2}{4m}} = d\sqrt{\frac{lP_0\pi}{2m}}.$$

Kasutades ülesandes antud arvväärtusi, saame palli kiiruseks vahetult enne parempoolse membraani läbimist  $v = 130 \text{ m/s}$ . Membraani purustamiseks kulub energiat ning seetõttu on palli väljumiskiirus sellest veidi väiksem, kuid võite isegi ette kujutada, et õhuke fooliumileht ei takista  $470 \text{ km/h}$  kihutava palli lendu just märkimisväärsetlt.

**L98 Mängukahur ★**

Autor: EFO žürii, lahtine, 2016, G 1

Kuna pall maandub kaldpinnale risti, siis liigub pall sellel hetkel nurga  $\alpha$  all vertikaali suhtes. Seega tulistatakse pall kahurist välja ka nurga  $\alpha$  all vertikaali suhtes ning pall põrkab kaldpinnalt tagasi ka sama nurga all. Palli horisontaalne kiiruse komponent on  $v \sin(\alpha)$  ja vertikaalne komponent on  $v \cos(\alpha)$ . Trajektoori kõige ülemises punktis on vertikaalne kiiruse komponent null ja on kulunud pool kogu liikumise ajast  $t$ . Aja  $t/2$  jooksul muutub kiirus raskuskiirenduse tõttu  $gt/2$  võrra, seega  $gt/2 = v \cos(\alpha)$ , millest  $t = 2v \cos(\alpha)/g$ . Horisontaalne kiirus ei muutu liikumise jooksul. Horisontaalselt läbitud vahemaa on

$$s = vt \sin(\alpha) = \frac{2v^2 \cos(\alpha) \sin(\alpha)}{g} = \frac{v^2 \sin(2\alpha)}{g}.$$

Seega kahurist tulistades oli palli algkiirus  $v_1$ , kus

$$v_1^2 = \frac{Lg}{\sin(2\alpha)},$$

ning tagasipõrkel  $v_2$ , kus

$$v_2^2 = \frac{lg}{\sin(2\alpha)}.$$

Tulistamise ja tagasipõrkamise hetkel oli pallil ainult kineetiline energia:

$$E_1 = \frac{mv_1^2}{2} = \frac{mLg}{2 \sin(2\alpha)}, \quad E_2 = \frac{mv_2^2}{2} = \frac{mlg}{2 \sin(2\alpha)}.$$

Seega põrkel kaduma läinud energia osakaal on

$$\frac{E_1 - E_2}{E_1} = \frac{L - l}{L}.$$

**L99 Köievedu ★**

Autor: Oleg Košik, piirkonnavor, 2016, G 2

Olgu nööri tõmme  $T$ . Vastavalt Newtoni III seadusele on nööri tõmme mõlema mehe jaoks sama suur, kuid vastupidises suunas. Lisaks nööri tõmbele mõjub kummalegi mehele vastassuunas hõõrdejõud, mille maksimaalne väärthus on võrdeline raskusjõuga. Seetõttu hakkab esimesena liikuma kergem mees, kelleks on Oleg.

Vaatame, millise maksimaalse kiirendusega hakkab Oleg liikuma. Jõudude tasakaal Eero jaoks:

$$T - \mu m_1 g = 0.$$

Olegi puhul kehtib aga Newtoni II seadus:

$$T - \mu m_2 g = m_2 a.$$

Avaldades esimesest võrrandist  $T = m_1 g$  ja asendades teise võrrandisse, leiate

$$a = \frac{m_1 - m_2}{m_2} \mu g \approx 0,86 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

**L100 Vastlaliug ★**

Autor: Moorits Mihkel Muru, lõppvoor, 2017, G 1

Hõõrdejõu tõttu kulutatud energia sõltub läbitud teepikkusest ja selle kaldest, potentsiaalse energiavahesõltub kõrguse muudust. Esimesel lõigul vabaneb potentsiaalne energia  $E_1 = mgh$  ja hõõrdejõu mõjul liikumiseks kaotatakse energia

$$A_1 = \mu \cdot mg \cos \alpha \cdot \frac{h}{\sin \alpha} = \mu mgh \cot \alpha.$$

Teisel lõigul vabaneb potentsiaalne energia  $E_2 = mgs \sin \beta$  ja hõõrdejõu tõttu kaotatakse energia

$$A_2 = \mu \cdot mg \cos \beta \cdot s = \mu mgs \cos \beta.$$

Seega nõlvale lõppedes on kelgutajal alles kineetiline energia

$$\begin{aligned}\Delta E &= E_1 - A_1 + E_2 - A_2 = \\ &= mgh(1 - \mu \cot \alpha) + mgs(\sin \beta - \mu \cos \beta) = 787,4 \text{ J}.\end{aligned}$$

Tasase maa peal enam potentsiaalset energiat ei vabane, aga kineetiline energia väheneb hõõrdumise tõttu. Kelk libiseb tasase maa peal

$$l = \frac{\Delta E}{F_h} = \frac{\Delta E}{\mu mg} = 21,4 \text{ m}.$$

Seega kogu vastlaliu pikkus on

$$\frac{h}{\sin \alpha} + s + l = 47,2 \text{ m}.$$

**L101 Karatist ★★**

Autor: tundmatu, lahtine, 2007, G 6

Laua paindumist käsiteleme sarnaselt vedru paindumisega. Laua elastsusenergia enne purunemist on  $E = kx^2/2$ . Eeldame, et pärast plastset põrget toimuval liikumisel on mehaaniline energia jäav ning lauajupp ja käsi peatuvad vahetult pärast lööki. Käe ja laua kokkupõrge – löök – on täielikult mitteelastne. Seega peab pärast lööki laua ja rusika kineetilisest energiast

$$W = \frac{(m+M)u^2}{2}$$

piisama laua deformeerimiseks.

$$E = W \Rightarrow u = \sqrt{\frac{kd^2}{m+M}},$$

kus  $u$  on laua ja käe kiirus pärast lööki. Löögi hetkel kehtib impulsijäävus

$$(m+M)u = mv \Rightarrow v = \frac{m+M}{m}u.$$

Kokkuvõttes saame

$$v = \frac{m+M}{m} \sqrt{\frac{kd^2}{m+M}} = \sqrt{\frac{kd^2(m+M)}{m^2}},$$

$$v = \sqrt{\frac{1,4 \cdot 10^5 \cdot 0,02^2 \cdot (1,5+2)}{1,5^2}} \approx 9,3 \text{ m/s.}$$

### L102 Veenus ★★

Autor: Mihkel Kree, lõppvoor, 2007, G 2

**a)** Maksimaalse eemaldumise korral moodustub Maast, Veenusest ja Päikesest täisnurkne kolmnurk, mille täisnurga tipp on Veenus. Siit saame Veenuse ja Maa orbitaalraadiuste suhte

$$\alpha = \sin 46^\circ = 0,72.$$

**b)** Veenuse tiirlemisperioodi saame Kepleri seadusesest

$$T_V = T_M \sqrt{\alpha^3}.$$

Maa tiirlemise nurkkiirus  $\omega_M = \frac{2\pi}{T_M}$  ning Veenuse tiirlemise nurkkiirus  $\omega_V = \frac{2\pi}{T_V}$ . Nende suhtelise liikumise nurkkiirus

$$\Delta\omega = \omega_V - \omega_M = \omega_M \left( \frac{1}{\sqrt{\alpha^3}} - 1 \right)$$

ning suhtelise liikumise periood on

$$T_s = \frac{T_M}{\frac{1}{\sqrt{\alpha^3}} - 1} = 570 \text{ päeva.}$$

Järjestikuste eemaldumiste vaheline jäab Päikeselt vaadatuna nurk  $2 \cdot (90^\circ - 46^\circ) = 88^\circ$  või  $360^\circ - 88^\circ = 272^\circ$  ehk päevades

$$T_s \frac{88}{360} = 140 \text{ päeva.}$$

ja

$$T_s \frac{272}{360} = 430 \text{ päeva.}$$

### L103 Auto ★★

Autor: Mihkel Heidelberg, piirkonnavoor, 2009, G 5

Vedavate rataste ja maa vahel mõjub mingi horisontaalsihiline hõõrdejõud  $F$ . Jõust ja kiirusest saame auto liikumisse mineva võimsuse  $N_l = Fv$ . Ratastele mõjub jõumoment  $Fr$ , mille tõttu mootori võimsus  $N_m = \omega Fr$ .

Kasutegur on niisiis

$$\nu = \frac{N_l}{N_m} = \frac{Fv}{F\omega r} = \frac{v}{\omega r}.$$

**L104 Vedru ★★**

Autor: Aigar Vaigu, piirkonnnavoor, 2010, G 4

Hetkel, mil tellis vedrust eemalduma hakkab, liigub vedru ülemine ots koos tellisega kiirusega  $v$  üles. Tellise kiirus on piisav, et kerkida tagasi esialgsele kõrgusele  $H \propto v^2$ . Eeldame, et vedru on pikisunus ühtlane, sellisel juhul liigub vedru massikese ülemise ja alumise otsa keskmise kiirusega ülesse. Niisiis,  $v_{\text{vedru}} = v/2$ . Seega töuseb vedru massikese kõrgusele  $h \propto v_{\text{vedru}}^2 = v^2/4$ , ehk

$$h = \frac{H}{4}.$$

**L105 Pendel ★★**

Autor: Taavi Pungas, piirkonnnavoor, 2011, G 7

Esialgse hinnangu perioodile,  $\tau = 2,425$  s, saame  $\tau_1 = t_2 - t_1$  ja  $\tau_2 = t_4 - t_3$  keskmisest. Seda kasutades näeme, et  $t_1$  ja  $t_3$  vahel pidi toimuma täpselt 24 võnget, samamoodi  $t_2$  ja  $t_4$  vahel. Saame kaks sõltumatut mõõtmist 24 võnke kestuse kohta:  $\tau'_1 = (t_3 - t_1)/24 = 2,4146$  s ja  $\tau'_2 = (t_4 - t_2)/24 = 2,4125$  s. Nende keskmne annab meie hinnangu pendli perioodi kohta,  $\tau' = 2,4135$  s  $\approx 2,414$  s.

**L106 Alpinist ★★**

Autor: Kaur Aare Saar, lahtine, 2013, G 3

Alpinist kukub  $2L + x$  võrra, kus  $x$  on nööri pikenemine. Jõudes kukkumise kõige madalamasse punkti, kus kineetiline energia puudub, on gravitatsiooniline potentsiaalne energia  $mg(2L + x)$  üle läinud vedru potentsiaalseks energiaks  $kx^2/2$ . Seega energia jäävuse seadus väljendub kujul

$$mg(2L + x) = \frac{kx^2}{2}.$$

Maksimaalse nööri pinge seoses  $T = kx = 25mg$  avaldame  $x = 25mg/k$  ning asendades selle eelnevasse võrrandisse, saame

$$4mgL + \frac{50m^2g^2}{k} = \frac{25^2m^2g^2}{k}.$$

Lihtsustamiseks korrutame võrrandit  $k$ -ga ning jagame  $4mgL$ -ga, saame

$$k = \frac{(25^2 - 50)mg}{4L} \approx 18 \text{ kN/m.}$$

(Huvitav on ka pikenemine  $x$  välja arvutada, saame  $x \approx 1$  m.)

**L107 Langevarjuhüpe ★★**

Autor: Taavi Pungas, piirkonnnavoor, 2014, G 5

Kui Juku kiirus oli konstantne ( $v$ ), tasakaalustusid temale mõjuv raskusjõud ja õhu hõõrdejõud:  $(m + m_v)g = kv^2$ , kus  $k$  on mingi koefitsient. Ka Juhanile mõjuvad jõud olid konstantse kiirusega  $u$  langedes tasakaalus,  $(M + m_v)g = ku^2$ . Neist kahest võrrandist saame seose

$$\frac{m + m_v}{M + m_v} = \frac{v^2}{u^2}.$$

Teisalt  $v = h/t$  ja  $u = h/T$ , seega  $v/u = T/t$ . Siit

$$\frac{T^2}{t^2} = \frac{m + m_v}{M + m_v},$$

$$T = t \cdot \sqrt{\frac{m + m_v}{M + m_v}} = 92 \text{ s}.$$

**L108 Kelk ★★**

Autor: Joonas Kalda, piirkonnnavoor, 2016, G 4

Olgu jõe ületamiseks vajalik kõrgus  $h$  ja Juku mass koos kelguga  $m$ . Startides on Jukul potentsiaalne energia  $E_{\text{pot}} = mgh$ , mis muundub kelgu liikumisel soojuseks hõõrdejõu kaudu. Kaldal tuleb Jukul läbida distants  $s = h/\sin(\alpha)$ . Hõõrdejõu väärustus kaldpinnal on  $F_h = \mu_1 mg \cos(\alpha)$ . Hõõrdejõu poolt tehtud töö on  $A_1 = F_h s = \mu_1 mgh / \tan(\alpha)$ . Jää peal tuleb läbida distants  $l$  ja hõõrdejõu poolt tehtud töö on  $A_2 = \mu_2 mgl$ . Piirjuhul läheb kogu potentsiaalne energia soojusenergiaks:

$$E_{\text{pot}} = A_1 + A_2,$$

$$h = \frac{\mu_1 h}{\tan(\alpha)} + \mu_2 l,$$

$$h \cdot \left(1 - \frac{\mu_1}{\tan(\alpha)}\right) = \mu_2 l,$$

$$h = \frac{\mu_2 l \tan(\alpha)}{\tan(\alpha) - \mu_1} \approx 3,9 \text{ m}.$$

**L109 Pidurdus ★★**

Autor: Eero Vaher, lõppvoor, 2016, G 2

Olgu auto mass  $m$  ning pidurdusjõud  $F$ . Auto kineetiline energia kulub pidurdusjõu ületamiseks ning potentsiaalse energi muuduks. Ülesmäge sõites

$$\frac{mv^2}{2} = Fs_1 + mg\Delta h_1.$$

Kõrguse muut ning auto poolt läbitud teepikkus on omavahel seotud avaldisega  $\Delta h_1 = ks_1$ , seega

$$\frac{mv^2}{2} = (F + mgk)s_1.$$

Allamäge sõites kehtib analoogiliselt

$$\frac{mv^2}{2} = (F - mgk)s_2.$$

Vasakute poolte võrdsusest järeltäpsustatakse paremate poolte võrdsus

$$(F + mgk)s_1 = (F - mgk)s_2$$

ehk

$$F = \frac{s_2 + s_1}{s_2 - s_1}mgk.$$

Kiiruse jaoks saame energi jäätumisest avaldised

$$v = \sqrt{2gks_1 \left( \frac{s_2 + s_1}{s_2 - s_1} + 1 \right)}$$

või

$$v = \sqrt{2gks_2 \left( \frac{s_2 + s_1}{s_2 - s_1} - 1 \right)}.$$

Mõlemad saab ümber kirjutada kujule

$$v = \sqrt{4gk \frac{s_1 s_2}{s_2 - s_1}} = 14 \text{ m/s} = 50,4 \text{ km/h}.$$

### L110 Kahurikuul ★★

Autor: Hans Daniel Kaimre, lõppvoor, 2016, G 3

Lähtume sellest, et kehtima peab energia jäävuse seadus. Kui laskmise hetkel on kuuli kiirus  $v$ , siis on alghetkel energia  $E_1 = mv^2/2 - GMm/R$ , kus  $M$  on Maa mass ja  $m$  kuuli mass. Kõige kõrgemal olles on kuuli vertikaalne kiirus 0, seega energia avaldub kui  $E_2 = -GMm/(R + h)$ , kus  $h$  on kuuli kõrgus Maa pinnast. Energia jäävuse seadusest lähtuvalt peavad need energiad olema võrdsed:

$$E_1 = E_2 \rightarrow \frac{mv^2}{2} - \frac{GMm}{R} = -\frac{GMm}{R+h}.$$

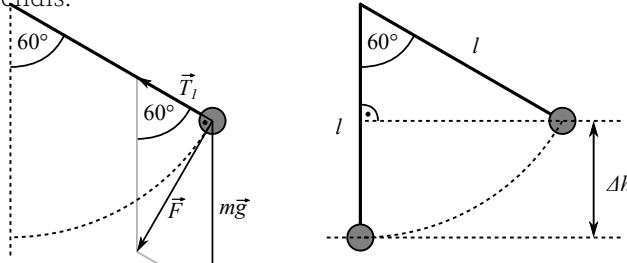
On öeldud, et juhul kui gravitatsioonivälja tugevus oleks igas punktis kuuli trajektooril võrdne raskuskiirendusega Maa pinnal, lendaks kuul kõrgusele  $H$ . Ehk  $mv^2/2 = mgH$  ja asendades  $g = GM/R^2$  saame  $v^2/2 = GMH/R^2$ . Asendades selle ülapool olevasse võrdusesse, saame:

$$\begin{aligned} \frac{GMm}{R^2}H - \frac{GMm}{R} &= -\frac{GMm}{R+h} \rightarrow \frac{H}{R^2} - \frac{1}{R} = -\frac{1}{R+h}, \\ h &= \frac{R^2}{R-H} - R = \frac{RH}{R-H} \approx 427 \text{ km}. \end{aligned}$$

### L111 Pendel ★★

Autor: Andreas Valdmann, piirkonnnavoor, 2017, G 3

Olgu pendli pikkus  $l$  ja koormise mass  $m$ . Amplituudiasendis (joonisel vasakul) on pendel paigal ja koormisele mõjuvad raskusjoud  $m\vec{g}$  ning nööri pinge  $\vec{T}$ . Nende jõudude summa  $\vec{F}$  on suunatud piki koormise trajektoori ehk on risti nööriga (resultantjõul  $\vec{F}$  ei saa olla piki nööri suunatud komponendi, sest vastasel korral peaks koormise kiirendamisel nöör pikeneda või lüheneda). Täisnurksest kolmnurgast leiame, et amplituudiasendis on pinge nööris  $T_1 = mg \cos(60^\circ) = mg/2$ . Amplituudiasendist eemaldumisel toimub kaks muutust: nurk  $\alpha$  väheneb ja koormisele hakkab mõjuma kesktõmbekiirendus, mis on nööri pingega vastassuunaline. Kuna mõlemad muutused suurendavad pinget nööris, siis on pinge vähim just amplituudiasendis.



Eelnevale argumendile toetudes on pinge nööris suurim pendli tasakaaluasendis:  $T_2 = m(g + a)$ , kus  $a = v^2/l$  on koormisele mõjuv kesktõmbekiirendus ja  $v$  koormise kiirus. Kiiruse  $v$  leidmiseks kasutame energia jäävuse seadust, mille kohaselt on koormise potentsiaalse energia muut tasakaaluasendi ja amplituudiasendi vahel võrdne kineetilise energiaga tasakaaluasendis:  $mg\Delta h = mv^2/2$ . Parempoolselt jooniselt näeme, et kõrguste erinevus  $\Delta h = l[1 - \cos(60^\circ)] = l/2$ . Seega

$a = 2g\Delta h/l = g$  ja  $T_2 = 2mg$ . Niisiis erinevad suurim ja vähim pinge nööris  $T_2/T_1 = 4$  korda.

### L112 Mäenõlv ★★

Autor: Jonatan Kalmus, lõppvoor, 2017, G 2

Vaatleme poole pedaalipöörde jooksul toimuvat protsessi. Selle käigus liigub vahuv pedaal ratturi taustsüsteemis  $2r_1$  võrra allapoole, st ratturi poolt tehtud töö pooleperioodi jooksul on  $A = 2mgr_1$ . Teisest küljest peab ratturi poolt tehtud töö kompenseerima massikeskme potentsiaalse energia kasvu  $\Delta E_P = (M+m)gh$ , kus  $h$  on ratta vertikaalne nihe.

Poole pedaalipöörde jooksul liigub ratsas pikki mäenõlva väntmehhanismi ülekanrete tõttu vahemaa  $l = \frac{\pi r_2 r_4}{r_3}$ . Massikeskme vertikaalne nihe on seega  $h = l \sin \alpha$ . Niisiis, kriitilise kaldenurgaga kehtib  $A = \Delta E_P$ , ehk

$$2mgr_1 = (M+m)g \frac{\pi r_2 r_4}{r_3} \sin \alpha.$$

Seega

$$\alpha = \arcsin \left( \frac{2\pi mr_1 r_3}{(M+m)r_2 r_4} \right).$$

### L113 Aerud ★★

Autor: tundmatu, piirkonnavoor, 2005, G 6

Jõumomentide tasakaalu tingimus aeru jaoks tullide suhtes annab aerulabadele mõjuva keskmise jõu:  $F_l = Fa/b$ .

Tasakaalutingimus süsteemi paat+aerutaja+aerud jaoks annab võrrandi:

$$\frac{2Fa}{b} = \alpha v^2,$$

millest

$$v = \sqrt{\frac{2Fa}{\alpha b}} = 2 \text{ m/s}.$$

Kui aerulabad püsiksid tõmbamise ajal vee suhtes paigal, siis oleks võimsus

$$P = \frac{2vFa}{b} = 160 \text{ W}.$$

Et aga aerulabad nihkuvad ilmselt veidi tagasi, siis on tegelik võimsus mõnevõrra suurem.

**L114 Kivi ★★**

Autor: tundmatu, lahtine, 2006, G 4

Kivile mõjuvaks kesktõmbejõuks on paela tömbepinge  $T$  projektsioon tiirlemise tasapinnale  $F = T \sin \varphi$  (vt joonist), kus  $\varphi$  on nurk paela ja vertikaalsihi vahel. Newtoni teine seadus kivi liikumise jaoks mööda ringjoont raadiusega  $R$  näeb välja:

$$m\omega^2 R = T \sin \varphi, \quad (1)$$

kus  $\omega = 2\pi/\tau$  — kivi nurkkiirus ja  $m$  — kivi mass. Kuna vertikaalsuunas kivil kii rendus puudub, järelikult kivile mõjuvate jõudude projektsioonid vertikaalteljele annavad summas nulli:

$$T \cos \varphi = mg. \quad (2)$$

Jagades valemi (1) valemiga (2), saame

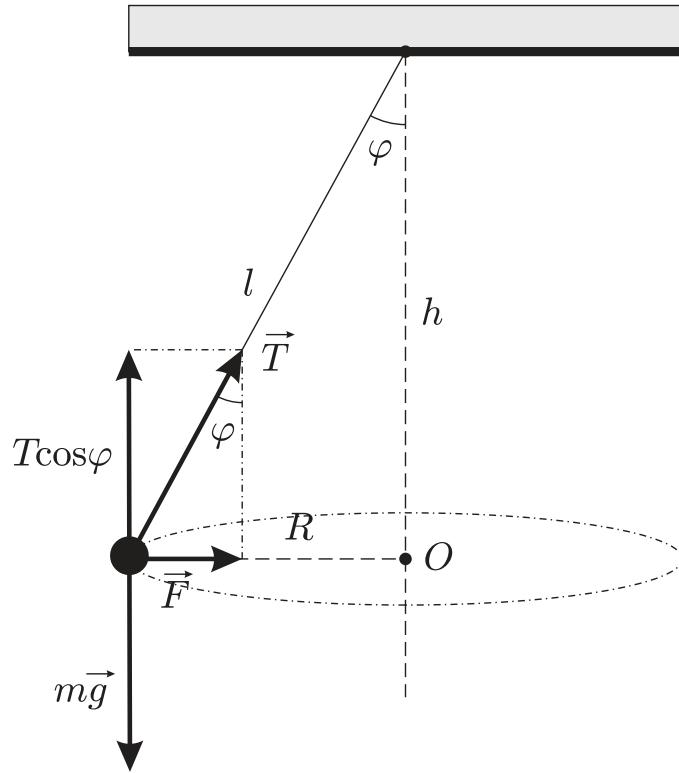
$$\tan \varphi = \frac{\omega^2 R}{g}.$$

Arvestades, et  $\tan \varphi = R/h$ , saame

$$\frac{\omega^2 R}{g} = \frac{R}{h} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{g}{h}},$$

ehk

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{h}{g}} = 2 \cdot 3,14 \cdot \sqrt{\frac{1,25}{9,81}} \approx 2,24 \text{ s.}$$



### L115 Kaldpind ★★

Autor: Mihkel Rähn, piirkonnnavoor, 2006, G 4

Esimeseks põrkeks kogub pall kiiruse  $v = \sqrt{2gh}$ . Valime  $x$ -telje piki kaldpinda ja  $y$ -telje risti kaldpinnaga. Seega mõjub pallile  $x$ -suunaline kiirendus  $a_x = g \sin \alpha$  ja  $y$ -suunaline kiirendus  $a_y = -g \cos \alpha$ . Märkame, et palli  $y$ -suunaline liikumine on efektiivselt sama nagu nõrgemas raskusväljas põrkumine ehk pall hakkab kindla perioodiga üles-allu põrkuma. Põrge vaheline aeg avaldub kui

$$\tau = \frac{2v_{0y}}{|a_y|} = \frac{2\sqrt{2gh} \cos \alpha}{g \cos \alpha} = \sqrt{8h/g},$$

kus  $v_{0x} = \sin \alpha \sqrt{2gh}$  ja  $v_{0y} = \cos \alpha \sqrt{2gh}$  on palli esimese põrke järgsed kiiruskomponendid.

$x$ -telje suunaline liikumisvõrrand avaldub kui

$$x = v_{0x} t + \frac{a_x t^2}{2}.$$

Peale viienda põrget, ajahetkel  $t = 4\tau$ , on palli  $x$ -koordinaat

$$x = \sin \alpha \sqrt{2gh} \cdot 4 \sqrt{\frac{8h}{g}} + \frac{g \sin \alpha}{2} \cdot 16 \frac{8h}{g} = 80h \sin \alpha.$$

**L116 Kuulike ★★**

Autor: tundmatu, lahtine, 2008, G 5

Olgu  $\alpha$  nurk vertikaali ja varda vahel ning  $l$  niidi pikkus. Energia jäävuse seadusest  $v^2 = 2gl \cos \alpha$ , millest kiiruse vertikaalkomponendi ruut

$$v_y^2 = 2gl \cos \alpha \sin^2 \alpha = 2gl \cos \alpha (1 - \cos^2 \alpha).$$

Tähistades  $\cos \alpha = y$ , saame  $v_y^2$  maksimumi tingimuse, kui võtame sellest tuletise  $y$  järgi:

$$\frac{dv_y^2}{dy} = 2gl (1 - 3y^2) = 0,$$

millest  $y = 1/\sqrt{3}$  ja  $\alpha = \arccos(1/\sqrt{3}) \approx 55^\circ$ .

*Alternatiivne lahendus*

Ülesandes on öeldud, et kuulikese kiiruse vertikaalne komponent hakkab esialgu suurenema, kuid teatud hetkest alates vähenema. See tähendab seda, et kuulikese kiirenduse vertikaalne komponent oli alguses positiivne ning pärast muutus negatiivseks. Järelikult hetkel, kui kiiruse vertikaalne komponent on maksimaalne, on kiirenduse vertikaalne komponent null. Seega vaadeldaval hetkel võrdub kuulikese raskusjõu ja niidi tõmbejõu vertikaalsete projektsioonide summa nulliga ehk siis

$$mg = T \cos \alpha. \quad (1)$$

Kuuli kesktõmbekiirendus on  $a_n = v^2/l$ , kus  $l$  on niidi pikkus. Seega Newtoni II seaduse põhjal

$$m \frac{v^2}{l} = T - mg \cos \alpha. \quad (2)$$

Energia jäävuse seadusest

$$v^2 = 2gl \cos \alpha. \quad (3)$$

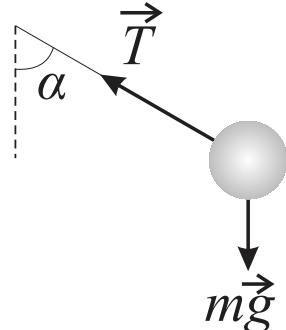
Asendades võrdusesesse (2) avaldised  $T$  ja  $v^2$  jaoks võrdustest (1) ja (3) saame

$$\frac{m \cdot 2gl \cos \alpha}{l} = \frac{mg}{\cos \alpha} - mg \cos \alpha,$$

millest

$$\frac{1}{\cos \alpha} - \cos \alpha = 2 \cos \alpha \Rightarrow \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Sit  $\alpha = \arccos(1/\sqrt{3}) \approx 55^\circ$ .



**L117 Veerev silinder ★★**

Autor: Andres Laan, lahtine, 2010, G 3

Eraldumiskõrgust on kõige lihtsam arvutada kasutades jõudude tasakaalu. Nii kaua kui veerev keha on alusega kontaktis, mõjub talle tooreaktsioon. Pinnalt eraldumise punktis muutub tooreaktsioon nulliks ja raskusjõu raadiusesihiline komponent saab võrdseks kesktõmbekiirendusega. Seega

$$\frac{mv^2}{R+r} = mg \cos \alpha,$$

kus  $\alpha$  on pinna kaldenurk eraldumispunktis (mis asub kõrgusel  $H = (r+R) \cos \alpha$ ). Vastav kiirus on leitav energia jäävuse seadusest ehk võrdsustades gravitatsiooni-energia muudu kulg- ja pöördliikumise kineetilise energiaga:

$$mg(R+r-H) = mv^2.$$

Elimineerides eelnevaist võrrandeist  $\cos \alpha$ , saame tulemuseks  $H = (r+R)/2$ .

**L118 Veoauto ★★**

Autor: Kristian Kuppart, lahtine, 2011, G 3

Läheme veoautoga seotud taustsüsteemi, mis liigub kulgevalt kiirendusega  $\vec{a}$ . Selles süsteemis mõjub kehadele lisaks raskusjõule veel inertsijõud  $-m\vec{a}$ , mis on olemuselt identne raskusjõuga. Seega võtab veepind asendi, mis on risti inertsijõu ja raskusjõu resultandiga,  $m(\vec{g} - \vec{a})$ . Olgu vedelikupinna algasendi keskpunkt  $O$  ja parempoolne otspunkt  $A$  ning uue asendi parempoolne otspunkt  $B$ . Sellisel juhul on kolmnurk  $OAB$  sarnane vektoritele  $-\vec{a}$  ja  $\vec{g}$  ehitatud täisnurkse kolmnurgaga (nurkade võrdsuse töttu):  $|AB| = |OA| \cdot a/g$ . Maksimaalse kiirenduse korral ühtib punkt  $B$  kasti ülemise servaga, st  $|AB| = H - h$ . Niisiis

$$a = g \frac{|AB|}{|OA|} = 2g \frac{H-h}{L}.$$

**L119 Surmasõlm ★★**

Autor: Andreas Valdmann, piirkonnavor, 2012, G 5

Autole mõjuvad raskusjõud ja tee tooreaktsioon. Silmuses püsimiseks ei tohi tooreaktsioon kaduda. Nende jõudude resultandi silmuse keskele suunatud komponent moodustab kesktõmbejõu. Selle suurus sõltub auto kiirusest:

$$F_c = m \frac{v^2}{R},$$

kus  $R$  on silmuse raadius. Kriitiline olukord tekib silmuse ülemises punktis, kus auto kiirus on vähim ja raskusjõud tõmbab autot risti teest eemale. Piirjuhul seal tooreaktsioon puudub ning raskusjõud on ise kesktõmbejõud:

$$mg = \frac{mv^2}{d/2},$$

kus  $m$  on auto mass ja  $v$  kiirus. Energia jäävuse seaduse kohaselt on auto kõrgus ja kiirus otseselt seotud:

$$mgh' = \frac{mv^2}{2},$$

kus  $h'$  on algpunkt ja uuritava punkti kõrguste vahe. Saadud võrrandit eelmisega läbi jagades saame vajaliku kõrguste erinevuse algpunkti ja silmuse haripunkti vahel:

$$h' = \frac{d}{4}.$$

Otsitud kogukõrgus on silmuse läbimõõdu võrra suurem ja

$$h = h' + d = 1,25d.$$

### L120 Veejuga ★★

Autor: Mihkel Kree, lõppvoor, 2012, G 2

Vaatleme torust väljuvat veeosakest kui vabalt langevat keha horisontaalsuunalise algkiirusega  $v$ , mille horisontaalsuunaline kaugus kasvab ajas lineaarselt  $s = vt$ , vertikaalsuunaline aga kui  $h = \frac{1}{2}gt^2$ . Järelikult  $h \sim s^2$  ning veejoa kuju on matemaatiliselt kirjeldatav parabooli võrrandiga  $y = kx^2$ , kus  $x$  ja  $y$  on veejoa koordinaadid joonisel toodud teljestiku ühikutes (nullpunktiks valime teljestiku ülemise vasakpoolse nurga,  $x$ -telg olgu suunatud paremale ning  $y$ -telg alla). Määramaks joonise abil võrdetegurit  $k$ , valime mõned täisarvuliste koordinaatiga punktid  $(x, y)$ , millest juga läbi läheb, näiteks  $(19,5)$ ,  $(24,8)$  ja  $(34,16)$ . Arvutades iga punkti jaoks suhte  $x^2/y$ , leiame et  $k = 0,014$ .

Arvestades järgnevalt, et teljestiku ühikule vastab füüsikaline pikkus  $d$  (veejoa läbimõõt, mille loeme võrdseks toru sisediametriga), võime teisendada kaugused  $s$  ja  $h$  teljestiku ühikutesse:

$$x = \frac{s}{d} = \frac{vt}{d}, \quad \text{ja} \quad y = \frac{h}{d} = \frac{gt^2}{2d} = \frac{gd}{2v^2} \frac{v^2 t^2}{d^2} = \frac{gd}{2v^2} x^2,$$

mildest saame kiirust ja diameetrit omavahel siduva võrrandi

$$k = \frac{gd}{2v^2} \quad \text{ehk} \quad \frac{v^2}{d} = \frac{g}{2k}. \quad (1)$$

Nüüd arvestame aja  $t$  jooksul torust läbi voolanud vee ruumalaks  $Svt$ , kus  $S$  on toru sisepindala, mildest saame teise kiirust ja diameetrit sisaldava võrrandi

$$V = \frac{\pi d^2}{4} vt \quad \text{ehk} \quad vd^2 = \frac{4V}{\pi t}. \quad (2)$$

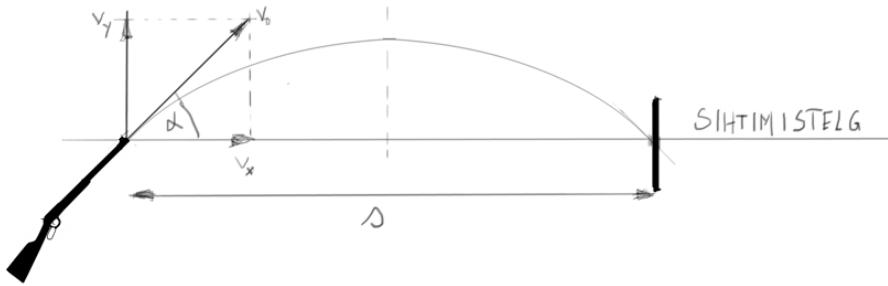
Võttes võrrandi (2) ruutu ning jagades läbi võrrandiga (1), taandub kiirus välja ning alles jäääb

$$d^5 = \frac{16V^2}{\pi^2 t^2} \frac{2k}{g}, \quad \text{mildest} \quad d = \left( \frac{32V^2 k}{\pi^2 t^2 g} \right)^{\frac{1}{5}} = 1 \text{ mm}.$$

### L121 Lasketiir ★★

Autor: Aigar Vaigu, piirkonnnavoor, 2016, G 6

Vastavalt ülesande tekstile ei arvesta me õhutakistust. Esmalt tuleb leida, missuguse nurga  $\alpha$  all on relva vintraud suunatud ülespoole, et tabada märklaua keskmesse ehk „kümnesse“ vintpüssi normaalse asendi korral. Kuuli trajektoor on sümmeetiline, seega kuuli kogu lennuaeg  $t$  on kaks korda suurem kui aeg  $t_{\text{tipp}}$ , mis kulub trajektoori kõrgeimasse punkti jõudmiseks (vt joonis).



Järgnevalt kirjeldame kuuli liikumist liikumisvõrranditega horisontaalse liikumise jaoks

$$s = v_x t$$

ja vertikaalse liikumise jaoks

$$v_y - g t_{\text{tipp}} = v_y - g \frac{t}{2} = 0,$$

kus  $g$  on raskuskiirendus  $9,81 \text{ m/s}^2$ ,  $s$  märklaua kaugus  $30 \text{ m}$  ning  $v_x$  ja  $v_y$  vastavalt horisontaal- ja verikaalsuunaline algkiirus.

Neid kahte võrrandit kombineerides saame leida nurga  $\alpha$ :

$$s = v_x t \Rightarrow t = \frac{s}{v_x},$$

$$v_y - g \frac{t}{2} = 0,$$

$$v_y - g \frac{s}{2v_x} = 0,$$

$$2v_x v_y = gs.$$

Avaldame viimses reas  $v_x$  ja  $v_y$  algkiiruse  $v_0$  ja trigonomeetrliste funktsioonide kaudu ning kasutame kahekordse nurga siinuse valemit  $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$ . Saame, et

$$2v_x v_y = gs,$$

$$2v_0^2 \sin \alpha \cos \alpha = gs,$$

$$v_0^2 \sin 2\alpha = gs,$$

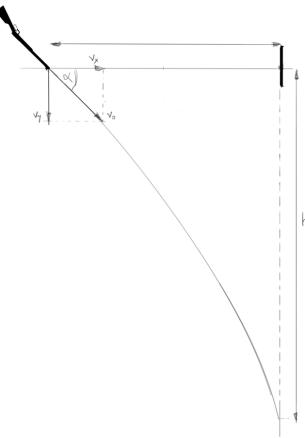
$$\sin 2\alpha = \frac{gs}{v_0^2}.$$

Kui nüüd keerata relva ümber sihtimistelje 180 kraadi, siis kui enne oli relvatoru nurga  $\alpha$  võrra suunatud üles, on relvatoru nüüd sama nurga jagu suunatud alla (vt joonis), seega jäavat kuuli horisontaal- ja vertikaalsuunalised kiirused oma arvväärtuselt samaks. Kuuli märklaua tabamise koha leiate kuuli vertikaalsuunalisest liikumisvõrrandist, arvestades et kuuli lastakse allapoole:

$$h = v_y t + \frac{gt^2}{2}.$$

Asendame liikumisvõrrandisse kuuli lennuaja  $t$  ja vertikaalsuunalise kiiruse  $v_y$  horisontaalsuunalise kiiruse  $v_x$  kaudu vastavalt  $t = s/v_x$  ja  $v_y = gs/2v_x$ . Saame:

$$\begin{aligned} h &= v_y \frac{s}{v_x} + \frac{gs^2}{2v_x^2}, \\ h &= \frac{gs}{2v_x} \frac{s}{v_x} + \frac{g}{2} \left( \frac{s}{v_x} \right)^2, \\ h &= \frac{gs^2}{v_x^2}, \\ h &= \frac{gs^2}{v_0^2 \cos^2 \alpha}. \end{aligned}$$



Kuna nurk  $\alpha$  on meil teada, saame arvutada koha, kus kuul märklauda tabab. Võib aga kasutada trigonomeetria seoseid. Saame:

$$\begin{aligned} h &= \frac{gs^2}{v_0^2 \cos^2 \alpha} \\ &= \frac{gs^2}{v_0^2} \frac{2}{1 + \cos 2\alpha} \\ &= \frac{gs^2}{v_0^2} \frac{2}{1 + \sqrt{1 - \sin^2 2\alpha}} \\ &= \frac{gs^2}{v_0^2} \frac{2}{1 + \sqrt{1 - \left(\frac{gs}{v_0}\right)^2}} \\ &= \frac{2gs^2}{v_0^2 + \sqrt{v_0^4 - (gs)^2}}. \end{aligned}$$

Rehkendus annab tulemuseks:

$$h = \frac{2 \cdot 9,81 \text{ m/s}^2 \cdot (30 \text{ m})^2}{(320 \text{ m/s})^2 + \sqrt{(320 \text{ m/s})^4 - (9,81 \text{ m/s}^2 \cdot 30 \text{ m})^2}} \approx 8,6 \text{ cm.}$$

**L122 Silinder ★★**

Autor: Kaur Aare Saar, lõppvoor, 2016, G 4

Silindri impulsimoment ei muutu telje suhtes, mis läbib silindri ja pinna kontakt-punkte, sest hõõrdejõul puudub moment selle telje suhtes. Olgu esialgne nurkkii-rus  $\omega$ . Esialgne impulsimoment on seega

$$h_1 = -mvR + I\omega = -mvR + mR^2\omega,$$

kus seest tühja silindri jaoks  $I = mR^2$ . Pärast libisemist on nurkkiirus  $\frac{v}{R}$ . Seega impulsimoment on

$$h_2 = mvR + I\frac{v}{R} = 2mvR.$$

Impulsimomendi jäädvusest  $h_1 = h_2$  saame, et  $\omega = \frac{3v}{R}$ .

Märkus. Võis lahendada ka seest täis silindri jaoks. Siis  $I = \frac{mR^2}{2}$  ja saame  $\omega = \frac{5v}{R}$ .

**L123 Veok ringteel ★★**

Autor: Jonatan Kalmus, piirkonnavoor, 2018, G 5

Kui veok libisema ei hakka, piirab tema maksimaalset kiirust tsentrifugaaljoud, mis võib veoki külili lükata. Veoki masskeskmelte mõjub horisontaalselt raskus-joud  $F_R = mg$  ning vertikaalselt tsentrifugaaljoud  $F_T = m\frac{v^2}{R}$ . Vaatleme veoki projektsiooni vertikaalsele laiusega paralleelsele tasandile. Saame kirja panna kangireegli veoki väliskurvis oleva alumise nurga jaoks (välimise punkti ja maa kontakt), mille ümber tsentrifugaaljöö jõumoment veokit keerama hakkab. Ümber selle punkti keerab veokit ühttpidi raskusjöö jõumoment  $\tau_R = F_R \frac{l}{2}$  ning teistpäri tsentrifugaaljöö jõumoment  $\tau_T = F_T h$ . Piirjuhul on need jõumomendid võrdsed ning saame võrrandi

$$mg \frac{l}{2} = \frac{mv^2}{R} h,$$

kust saame avaldada maksimaalse kiiruse:

$$v = \sqrt{\frac{Rgl}{2h}}.$$

**L124 Sfääär ★★★**

Autor: Andre Sääsk, lahtine, 2005, G 6

Kuna küsitakse ainult minimaalset vajalikku kiirust (arvväärtust), siis ei pea me leidma ei viske nurka ega viske kohta. Vertikaalsuunalise kiiruse komponendi viske hetkel leiame energia jäädvuse seadusest:

$$\frac{mv_{y0}^2}{2} = mg\Delta h = mg(2R - h) \quad \Rightarrow \quad v_{y0} = \sqrt{2g(2R - h)}.$$

Horisontaalsuunalise kiiruse komponendi leiame tingimusest, et sfääri ülemises punktis peab olema pallile mõjuv kesktõmbe kiirendus  $v^2/R$  võrdne pallile mõjuva raskuskiirendusega. Kuna sfääri ülemises punktis on  $v_y = 0$ , siis  $v = v_x$ . Kuna õhu

takistust me ei arvesta, siis  $v_x = v_{x0}$  (kiiruse horisontaalsuunaline komponent ei muutu lennu ajal). Seega

$$\frac{v_{x0}^2}{R} = g \quad \Rightarrow \quad v_{x0} = \sqrt{gR}.$$

Teades kahte kiiruse komponenti, on lihtne leida kogu kiiruse viske hetkel:

$$v = \sqrt{v_{x0}^2 + v_{y0}^2} = \sqrt{gR + 2g(2R - h)} = \sqrt{g(5R - 2h)} \approx 29 \text{ m/s}.$$

#### *Alternatiivne lahendus*

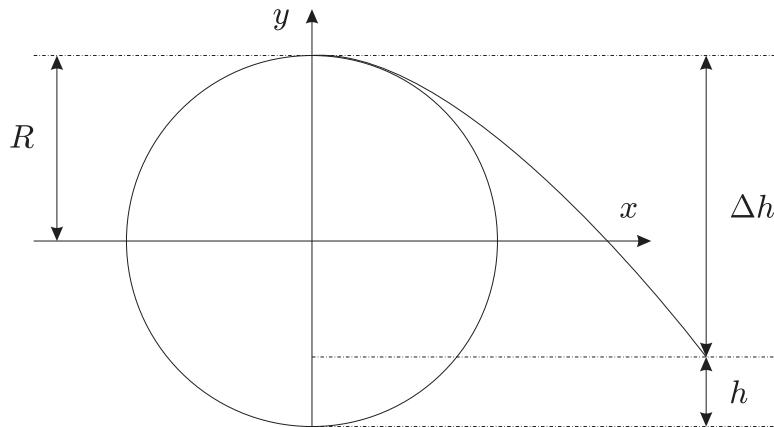
Läheneme ülesandele matemaatiliselt. Meil on ringjoon, parabool ning nende puutepunkt. Lahendades nende võrrandid puutepunkti leidmiseks peame saama ainult ühe lahendi, sest visatud pall ei tohi läbida kuplit. Koordinaatide alguspunkti paneme kera keskpunkti,  $y$ -talg on suunatud vertikaalselt üles,  $x$ -talg — horisontaalselt viske suunas.

Ringjoone võrrand

$$x^2 + y^2 = R^2.$$

Parabooli võrrand

$$y = ax^2 + bx + c.$$



Sümmetriast  $y$ -telje suhtes on  $b = 0$ , palli ja kupli kokkupuutepunkti teades on  $x = 0$  puhul  $y = R$  (vt joonist). Seega  $c = R$  ja parabooli võrrand omandab kuju:

$$y = ax^2 + R.$$

Nüüd tuleb ühest võrrandist tundmatu asendada teise. Olgu selleks parabooli võrrandi  $y$ , mille asendamise ringjoone võrrandisse:

$$x^2 + (ax^2 + R)^2 = R^2,$$

$$x^2 + a^2x^4 + 2aRx^2 + R^2 = R^2,$$

$$x^4 + \left(\frac{2aR+1}{a^2}\right)x^2 = 0.$$

Lahendades selle võrrandi, saame kolm lahendit:

$$x = 0, \quad x = \pm \sqrt{-\frac{2aR+1}{a^2}}.$$

Meile sobib ainult esimene lahend, sest teised kaks on imaginaarsed. Seega

$$2aR+1=0 \Rightarrow a=-\frac{1}{2R}.$$

Nüüd on paras aeg analüüsida kiiruse komponente. Vaatleme kõigepealt kiiruse vertikaalset komponenti. Energia jäävuse seadusest teame, et palli kineetiline energia viske alguses muundub palli potentsiaalseks energiaks trajektoori tippunktis:

$$\frac{mv_{0y}^2}{2} = mg\Delta h = mg(2R - h) \Rightarrow v_{0y} = \sqrt{2g(2R - h)}.$$

Teisest küljest, kiiruse võrrandist teame, et

$$v_{0y} = g\Delta t \Rightarrow \Delta t = \frac{v_{0y}}{g} = \frac{\sqrt{2g(2R - h)}}{g}.$$

Seega lennuaeg on paika pandud viskekohta arvestamata. Analüüsime parabooli võrrandit viskekohas

$$-R + h = ax^2 + R \Rightarrow x^2 = \frac{h - 2R}{a}.$$

Lennuaeg on juba määratud, seega mida väiksem on  $x$ , seda väiksema kiirusega võib pall läbida vahemaa viskekohast nullpunktini vaadelduna  $x$ -teljel. Seega peab  $a$  olema võimalikult suur. Asendades suurima  $a$  saab

$$x = \sqrt{\frac{h - 2R}{-1/2R}} = \sqrt{2R(2R - h)}.$$

Kiiruse  $x$ -teljeline komponent teepikkuse ja aja suhtena on

$$v_{0x} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{g\sqrt{2R(2R - h)}}{\sqrt{2g(2R - h)}} = \sqrt{\frac{g^2 R}{g}} = \sqrt{gR}.$$

Liites komponendid saame minimaalse viske kiiruse:

$$v = \sqrt{v_{0x}^2 + v_{0y}^2} = \sqrt{gR + 2g(2R - h)} = \sqrt{g(5R - 2h)} \approx 29 \text{ m/s.}$$

Antud lahendus on hea näide sellest, kui pikk ja keeruline võib olla ülesande matemaatiline lahendus võrreldes füüsikalisega.

**L125 Anum ★★**

Autor: tundmatu, lahtine, 2005, G 7

Vaatame algul liikuva anumaga seotud taustsüsteemi. Kui põrnikas (massiga  $\rho V$ ) roomab mööda anuma põhja, siis selle peale liigub ka põrnikat ümbritsev vedelik. Põrnika liikumist võib mugavuse mõttes ette kujutada virtuaalse põrnika liikumi-sega, mille tihedus on  $\rho - \rho_0$ . Sellisel juhul liigub virtuaalne põrnikas vedelikku tõrjumata ning ülesanne taandub mugavamale dünaamika ülesandele.

Liigume nüüd põrandaga seotud taustsüsteemi. Vastavalt impulsi jäävuse seadusele on põrnika ja anuma koguimpulss kogu aeg konstantne (sest põrnika+anuma süsteemile ei mõju väliseid jõude). Kuna see oli alguses 0, on põrnika ja anuma impulsid vastassuunalised ning absoluutväärtsuse poolest võrdsed. Olgu anuma kiirus põranda suhtes  $v$ . Siis põrnika kiirus põranda suhtes on  $u - v$ . Impulsi jäävuse seadusest tulenevalt

$$\rho_0(V_0 + V)v = (\rho - \rho_0)V(u - v),$$

ehk

$$v = \frac{V(\rho_0 - \rho)}{\rho V + \rho_0 V_0} u.$$

**L126 Mullitaja ★★**

Autor: Jaak Kikas, lõppvoor, 2005, G 7

Arvestades mullide arvu jäävust on ruumiline vahemaa nende vahel võrdeline mullikeste kiirusega. Viimase leiame võrdsustades takistus- ja üleslükkejõu ning arvestades mullikese ruumala muutust rõhu muutumisel sügavuse vähenemisel.

Mullikesele möjuvad vee takistusjõud  $F$  ja üleslükkejõud  $F_A$ . Nende võrdusest

$$6\pi\eta Rv = g(\rho - \rho_{hk})V,$$

kus  $V$  on mullikese ruumala. Kuna ülesande tingimuste kohaselt  $\rho \ll \rho_{hk}$  ja tähistades indeksitega „H“ ja „0“ vastavalt situatsioone veekogu põhjas ja pinna läheidal saame

$$6\pi\eta R_H v_H = g\rho V_H, \quad (1)$$

$$6\pi\eta R_0 v_0 = g\rho V_0. \quad (2)$$

Võrrandeid 1 ja 2 omavahel jagades ning kasutades seost  $V_i = (4/3)\pi R_i^3$ , saame mullikeste vahekauguse suhte

$$\frac{L_0}{L_H} = \frac{v_0}{v_H} = \frac{V_0 R_H}{V_H R_0} = \left( \frac{V_0}{V_H} \right)^{2/3}.$$

Kuna  $V_0 p_0 = V_H p_H$  ja  $p_H = p_0 + g\rho H$ , siis

$$\frac{L_0}{L_H} = \left( 1 + \frac{\rho g H}{p_0} \right)^{2/3} = 2,4,$$

st mullikeste vahemaa suureneb 2,4 korda.

**L127 Plokk ★★**

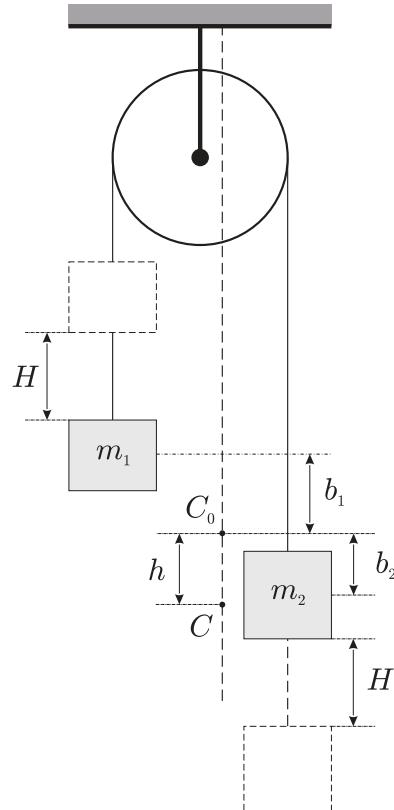
Autor: tundmatu, lahtine, 2006, G 5

Kuna raskem keha hakkab liikuma allapoole ja kergem ülespoole, siis on selge, et süsteemi massikese hakkab liikuma allapoole.

Olgu süsteemi massikese alghetkel punktis  $C_0$  (vt joonist). Kehade massikeskmeste kaugused süsteemi massikeskmest leiame tingimusest:

$$m_1 b_1 = m_2 b_2. \quad (1)$$

Aja  $t$  jooksul liigub raskem keha allapoole ja kergem liigub ülespoole kauguse  $H$  võrra:



$$H = at^2/2, \quad (2)$$

kus  $a$  on kehade kiirendus. Süsteemi masskese liigub sama aja jooksul kauguse  $h$  võrra, mille määrab tingimus:

$$m_2(H + b_2 - h) = m_1(H + b_1 + h).$$

Siit, arvestades valemeid (1) ja (2), leiame, et:

$$h = \frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1} H = \frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1} \frac{at^2}{2}. \quad (3)$$

Kiirenduse  $a$  leiame võrrandisüsteemist:

$$m_2 a = m_2 g - T, \quad m_1 a = T - m_1 g,$$

kus  $T$  on niidi tõmbepinge. Avaldades  $a$  võrrandisüsteemist, saame

$$a = \frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1} g.$$

Asendades leitud väärtsuse valemisse (3), saame:

$$\begin{aligned} h &= \left( \frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1} \right)^2 \frac{gt^2}{2} = \frac{a_k t^2}{2} \Rightarrow \\ \Rightarrow \quad a_k &= \left( \frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1} \right)^2 g. \end{aligned}$$

### L128 Kada ★★★

Autor: Oleg Košik, lõppvoor, 2006, G 3

Olgu kivi kiirus lasu järel  $v$ . Kiiruse horisontaalsuunaline komponent on  $v_x = v \cos \alpha$  ja vertikaalsuunaline komponent  $v_y = v \sin \alpha$ . Kivi lennuaeg on

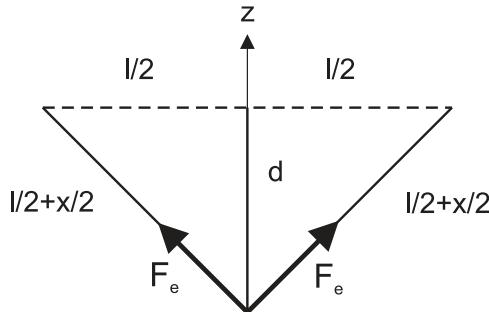
$$t = 2 \frac{v_y}{g} = 2 \frac{v \sin \alpha}{g}$$

ja lennukaugus

$$L = v_x t = \frac{2v^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g} = \frac{v^2 \sin 2\alpha}{g}.$$

Siit

$$v^2 = \frac{gL}{\sin 2\alpha}.$$



Kivi saavutab algkiiruse tänu kumminööri elastsele energiale. Kui nööri pikenemine võrreldes algolekuga on  $x$ , siis energia jäävuse seadusesest saame

$$\frac{kx^2}{2} = \frac{mv^2}{2},$$

kust

$$x^2 = \frac{mv^2}{k} \Rightarrow x = \sqrt{\frac{mgL}{k \sin 2\alpha}} = 53,6 \text{ cm.}$$

Uurides ragulka geomeetria näeme, et moodustuva täisnurkse kolmnurga hüpotenuus on  $l/2 + x/2$ . Otsitav kaugus, millele tuleb nööri tömmata, on seega

$$d = \sqrt{(l/2 + x/2)^2 - (l/2)^2} = 48,2 \text{ cm.}$$

Kumminööris tekib elastsusjõud  $F_e = kx$ . Jõud, millega tuleb nööri tömmata, võrdub selle jõu kahekordse projektsiooniga  $z$ -teljele:

$$F = 2kx \frac{d}{l/2 + x/2} \approx 46 \text{ N.}$$

### L129 Hooratas ★★★

Autor: Valter Kiisk, lõppvoor, 2007, G 4

- a) Hooratta kineetiline energia on  $K = \frac{1}{2}M\omega^2R^2$ , seega energia salvestustihedus  $w = E/M = \frac{1}{2}\omega^2R^2$ .
- b) Olgu rönga raadius  $r$  ja mass  $m$ . Mehaaniline pinge röngas ( $\sigma$ ) on määratud tsentrifugaaljõuga, millega kahte rönga poolt üksteisest eemale tõugatakse. Vaatleme ühe rönga poole väikest lõiku pikkusega  $\Delta l$ . Selle mass on  $\Delta m = (\Delta l/2\pi r)m$  ja sellele mõjub tsentrifugaaljõud suurusega  $\Delta F = \Delta m\omega^2r$ , kus  $\omega$  on pöörlemise nurkkiirus. Selle jõu projektsioon vertikaalsihile on (vt joonist)

$$\Delta F_{\parallel} = \Delta F \cos \alpha = \frac{m\omega^2}{2\pi} \Delta l \cos \alpha.$$

Ent  $\Delta l \cos \alpha$  on lõigu  $\Delta l$  projektsioon horisontaalsihile. Järelikult summaarne jõud, mis mõjub ühele rönga poolele, avaldub kui

$$F = \sum \Delta F_{\parallel} = \frac{m\omega^2}{2\pi} 2r = \frac{m\omega^2 r}{\pi}.$$

Teiselt poolt,  $F = 2\sigma S$ , kus  $S$  on rönga ristlõige. Viimase asendame seosest

$$m = \rho V = \rho(2\pi r S) \Rightarrow S = \frac{m}{2\pi r \rho}.$$

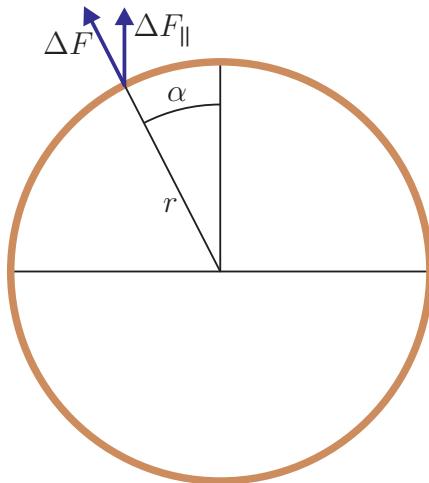
Kokkuvõttes saame

$$\sigma = \frac{F}{2S} = \omega^2 r^2 \rho.$$

Rõnga kineetiline energia

$$E = \frac{mv^2}{2} = \frac{m\omega^2 r^2}{2} = \frac{m\sigma}{2\rho},$$

millega  $E/m = \sigma/2\rho$ . Võttes  $\sigma = \sigma_{\max}$ , saame  $E/m = 800 \text{ kJ/kg}$ .



### L130 Maaler ★★

Autor: Valter Kiisk, lahtine, 2010, G 5

Selgitame välja, kummal juuhul on maaga kokku puutudes inimese kiirus väiksem. Lihtsuse huvides vaatleme redelit ühtlase homogeense vardana (pikkus  $L$ , mass  $M$ ) ning inimest punktmassina  $m$ , mis on kinnitunud redeli ülemise otsa külge. Kui maaler laseks kohe redelist lahti, oleks tema kiirus maaga kokkupuute hetkel  $\sqrt{2Lg}$ . Kui aga maaler klammerdub redeli külge, tuleb lõppkiiruse  $v$  arvutamisel arvesse võtta ka redeli pöördliikumise tekitamiseks kuluvat energiat. Pikka ühtlast redelit võib esimeses lähenduses vaadelda kui homogeenset varrast, mis pöörleb ümber alumise otsa. Selleks hetkeks kui redel on jõudnud horisontaalasendisse, on tema nurkkiirus  $\omega = v/L$ . Niisiis redeli pöördliikumise energia sel hetkel avaldub  $ML^2\omega^2/6 = Mv^2/6$ . Nüüd energia jäävuse seadus annab

$$mgL + Mg\frac{L}{2} = \frac{mv^2}{2} + \frac{Mv^2}{6},$$

millega

$$v = \sqrt{\frac{3Lg(2m + M)}{3m + M}} = \sqrt{gL} \sqrt{2 + \frac{M}{3m + M}}.$$

Saadud tulemus ei ole ühelgi tingimusel väiksem kui  $\sqrt{2Lg}$ , nii et selles mõttes on kasulikum kohe redelist lahti lasta.

**L131 Benji-hüpe ★★★**

Autor: Andreas Valdmann, piirkonnnavoor, 2010, G 6

Hüppe madalaimas punktis on hüppaja kiirus ja seetõttu ka kineetiline energia võrdne nulliga. Gravitatsioonivälja potentsiaalse energi muutus torni tipust selle punktini on võrdne köies tekinud elastsusjõu energiaga:

$$mg(l + \Delta l_1) = \frac{k\Delta l_1^2}{2},$$

kus  $\Delta l_1$  on köie pikenemine. Lahendades ruutvõrrandi  $\Delta l_1$  suhtes ja ignoreerides negatiivset lahendit, saame

$$\Delta l_1 = \frac{mg + \sqrt{m^2g^2 + 2mgkl}}{k}.$$

Platvormi kõrgus on  $h_1 = l + \Delta l_1 + h$ . Arvuliselt,  $h_1 \approx 86$  m. Suurima kiiruse leidmisel lisandub energia võrandisse kineetiline energia:

$$mg(l + \Delta l_2) = \frac{k\Delta l_2^2}{2} + \frac{mv^2}{2}.$$

Kiirendus muudab märki, kui elastsusjõud saab võrdseks gravitatsioonijõuga. See tõttu on suurima kiiruse tingimuseks

$$mg = k\Delta l_2 \Rightarrow \Delta l_2 = \frac{mg}{k}.$$

Asetades antud tingimuse energia võrandisse ja lahendades selle  $v$  suhtes, saame

$$v = \sqrt{\frac{g(gm + 2kl)}{k}} \approx 29 \text{ m/s.}$$

**L132 Kloori molekul ★★★**

Autor: Ants Remm, lahtine, 2012, G 6

Siin ülesandes saab lähtuda energia jäävusest: kloori molekuli seoseenergia  $E_s$  on võrdne vahega, kus footoni energiast  $\frac{hc}{\lambda}$  ja esialgsest mehaanilisest energiast  $E_0 = 2m_{\text{Cl}} \frac{v^2}{2}$  on maha lahutatud kloori aatomite mehaaniline energia pärast jagunemist

$$E_s = m_{\text{Cl}} \frac{v_1^2}{2} + m_{\text{Cl}} \frac{v_2^2}{2}.$$

Olgu  $x$ -telg paralleeline molekuli esialgse liikumisega. Teame, et üks aatomitest liikus pärast jagunemist risti  $x$ -teljega. See tähendab, et  $v_{1x} = 0$  ning  $v_{1y} = u$ . Impulsi jäävuse seadusest saame ka teise aatomi kiiruse komponendid  $v_{2x} = 2v$  ja  $v_{2y} = -u$ . Nüüd saab panna kirja energia jäävuse:

$$\frac{hc}{\lambda} + m_{\text{Cl}}v^2 = E_s + m_{\text{Cl}} \frac{u^2}{2} + m_{\text{Cl}} \frac{4v^2 + u^2}{2} = E_s + 2m_{\text{Cl}}v^2 + m_{\text{Cl}}u^2.$$

Sealt saab avaldada  $E_s$ , arvestades, et  $m_{\text{Cl}} = \frac{\mu_{\text{Cl}}}{N_A}$ , kus  $\mu_{\text{Cl}} = 35 \cdot 10^{-3} \text{ kg/mol}$ .

$$E_s = \frac{hc}{\lambda} - m_{\text{Cl}}v^2 - m_{\text{Cl}}u^2 = \frac{hc}{\lambda} - \frac{\mu_{\text{Cl}}}{N_A}(v^2 + u^2) = 4,0 \cdot 10^{-19} \text{ J} = 2,5 \text{ eV.}$$

**L133 Kiik ★★**

Autor: Andres Põldaru, lahtine, 2014, G 5

Massi  $m_2$  kiirus kokkupõrkehetkel on  $v_0 = \sqrt{2gh}$ . Kokkupõrke ajal avaldab pealekukkuv mass jõudu kiigele ning kiik omakorda esimesele massile. Nende jõudude jaoks kehtib kangireegel:  $F_1l_1 = F_2l_2$ . Lisaks kehtib Newtoni teine seadus  $F_1 = m_1a_1$  ja  $F_2 = m_2a_2$ . Kokku saame  $m_1a_1l_1 = m_2a_2l_2$ . Kuna kiirendus on kiiruse muutus, siis  $m_1l_1\Delta v_1 = m_2l_2\Delta v_2$ . Mitteelastne kokkupõrge kestab seni, kuni massid pöörlevad ümber kiige telje sama nurkkiirusega (kui pealekukkuv mass liigub suurema nurkkiirusega, painutaks ta kiike ja kiirendaks esimest massi kuni nurkkiirused on ühtlustunud) ehk  $\frac{v_1}{l_1} = \frac{v_2}{l_2}$ , millest saame  $\frac{\Delta v_1}{l_1} = \frac{v_0 - \Delta v_2}{l_2}$ . Asendades  $\Delta v_2$  eelnevalt saadud võrrandist ja arvestades, et esimene mass oli alguses paigal ehk kiiruse muut võrdub lõppkiirusega, saame

$$v_1 = \frac{l_1l_2m_2v_0}{m_1l_1^2 + m_2l_2^2} = \frac{l_1l_2m_2\sqrt{2gh}}{m_1l_1^2 + m_2l_2^2}.$$

Teine lahenduskäik kasutab impulsi jäävust pöörlemistelje suhtes. Kuna kiige ja masside süsteem saab vabalt ümber telje pöorelda ja väliseid jõumomente selle punkti suhtes pole, on impulsimoment jääv. Kui valiksime mingi muu punkti, peaksime arvestama maapinna ja kiige vahelisi jõude. Nurkkiiruste võrdsuse tingimus jäääb samaks, mis eelmise lahenduse puhul. Saame võrrandisüsteemi, mille lahend on ülalt juba tuttav.

$$m_2v_0l_2 = m_1v_1l_1 + m_2v_2l_2,$$

$$\frac{v_1}{l_1} = \frac{v_2}{l_2}.$$

**L134 Vesiniku ioniseerimine ★★**

Autor: Jaan Toots, lahtine, 2015, G 6

Käsitleme prootoni ja elektroni interaktsiooni elastse kokkupõrkena. Olgu proootoni algkiirus  $\vec{u}$ , lõppkiirus  $\vec{v}$  ning elektroni kiirus vahetult pärast põrget  $\vec{w}$ . Esialgu võime eirata elektroni kuulumist vesiniku aatomisse. Energia jäävusest

$$\frac{1}{2}m_p u^2 = \frac{1}{2}m_p v^2 + \frac{1}{2}m_e w^2$$

ning impulsi jäävusest

$$m_p \vec{u} = m_p \vec{v} + m_e \vec{w}.$$

Viimase võrrandi mõlema poole skalaarkorrutisest iseendaga saame

$$m_p^2 u^2 = m_p^2 v^2 + m_e^2 w^2 + 2m_p m_e \vec{v} \cdot \vec{w}.$$

Asendame  $u$  energia jäävusest.

$$m_p(m_p v^2 + m_e w^2) = m_p^2 v^2 + m_e^2 w^2 + 2m_p m_e \vec{v} \cdot \vec{w},$$

järelikult

$$(m_p - m_e)w^2 = 2m_p \vec{v} \cdot \vec{w} = 2m_p v w \cos \theta,$$

kus  $\theta$  on vektorite  $\vec{v}$  ja  $\vec{w}$  vaheline nurk. Elektroni eemaldamine vesiniku aatomist on võimalik, kui elektroni koguenergia  $E > 0$ . Seega üritame maksimeerida elektroni kineetilist energiat ning ühtlasi ka kiirust  $w$  kokkupõrke tagajärjel.

$$W = \max \left( \frac{2m_p v}{m_p - m_e} \cos \theta \right) = \frac{2m_p v}{m_p - m_e}.$$

Energia võrrandist saame

$$K_0 = \frac{1}{2} m_p u^2 = \frac{1}{2} m_p \left( \frac{(m_p - m_e)W}{2m_p} \right)^2 + \frac{1}{2} m_e W^2 = \frac{(m_p + m_e)^2}{8m_p} W^2.$$

Ioniseerimiseks  $K_e = \frac{1}{2} m_e W^2 > E_0$  ehk

$$K_0 > \frac{E_0 (m_p + m_e)^2}{4m_p m_e} = 6,25 \text{ keV}.$$

### L135 Veetoru ★★★

Autor: Kristian Kuppart, piirkonnnavoor, 2015, G 5

Kui toru otsast voolab välja vesi kiirusega  $v$ , siis ajaühikus torust väljunud vee hulk on  $\frac{\Delta m}{\Delta t} = \rho S v$ . Paneme kirja Newtoni II seaduse torust väljunud veehulga jaoks:

$$F = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{\Delta(mv)}{\Delta t} = v \frac{\Delta m}{\Delta t}.$$

Kuna vesi saab ajaühikus sellise impulsi, peab järelikult Newtoni III seaduse tõttu mõjuma torule sama suur ja vastassunaline jöud. Paneme kirja jöumomentide tasakaalu võrrandi toru kinnituskoha suhtes:

$$\frac{MgL \sin \alpha}{2} = FL.$$

Asendades sisse  $\frac{\Delta m}{\Delta t}$  ning avaldades  $\alpha$ , saame

$$\alpha = \arcsin \left( \frac{2\rho v^2 S}{Mg} \right).$$

**L136 Põrge ★★**

Autor: Mihkel Kree, piirkonnnavoor, 2015, G 6

Elastse põrke korral säilib kineetiline energia. Teisalt ei saa me aga rääkida impulsi jäävusest, sest põrke ajal mõjuvad ka kinnituspunktis suured jõud. Küll aga säilib süsteemi summaarne impulsimoment kinnituspunkti suhtes, sest põrke ajal kinnituspunktis mõjuvate jõudude õlad on siis nullid ning põrge toimub nii kiiresti, et raskusjõuga pole vaja arvestada.

Paneme esmalt kirja energia jäävuse seaduse. Algsest on kuulil kineetiline energia  $E_k = m_1 v^2/2$ . Pärast põrget on vardal kineetiline energia  $E_v = I\omega^2/2$ , kus  $\omega$  on lati pöörlemise nurkkiirus. Niisiis,

$$\frac{m_1 v^2}{2} = \frac{I\omega^2}{2}.$$

Asume nüüd impulsimomendi seadust avaldama. Enne põrget on likuva kuuli impulsimoment kinnituspunkti suhtes  $L_k = m_1 vh$  ning vahetult pärast põrget on pöörleva varda impulsimoment  $L_v = I\omega$ . Niisiis,

$$m_1 vh = I\omega.$$

Nüüd on jäänud veel lahendada neist kahest võrrandist koosnev süsteem ning avaldada otsitav kõrgus  $h$ . Võib lahendada asendusvõttega, aga võime ka näiteks võtta teise võrrandi mõlemad pooled ruutu ning jagada läbi esimese võrrandiga, saades

$$m_1 h^2 = I, \quad \text{millest} \quad h = \sqrt{\frac{I}{m_1}} = \sqrt{\frac{M}{3m_1}} L.$$

**L137 Rattur ★★**

Autor: Ardi Loot, lahtine, 2016, G 6

Ratturile mõjuvad laskumisel kolm jõudu: mäest allaviiv raskusjõud ( $F_a = mg \sin(\theta)$ ) ning takistavad hõõrdejõud ( $F_h \cos(\theta)$ , väikese nurga tõttu võib  $\cos(\theta)$  ära jäätta) ja tuuletakistus ( $F_t = cv^2$ , kus  $c$  on kordaja). Rattur on saavutanud lõppkiiruse, kui need jõud on tasakaalustunud. Kuna lõppkiirus on teada kahe eri langemisnurga korral, on võimalik kirja panna võrrandisüsteem hõõrdejõu  $F_h$  ja tuuletakistuskordaja  $c$  leidmiseks ( $v_2 = v_1 - \Delta v$ )

$$\begin{cases} mg \sin(\theta_1) &= F_h \cos(\theta_1) + cv_1^2 \\ mg \sin(\theta_2) &= F_h \cos(\theta_2) + cv_2^2. \end{cases}$$

Lahendades süsteemi saab avaldada:

$$F_h = mg \cdot \frac{v_1^2 \sin(\theta_2) - v_2^2 \sin(\theta_1)}{v_1^2 \cos(\theta_2) - v_2^2 \cos(\theta_1)} \approx 1,7 \text{ N},$$

$$c = mg \cdot \frac{\sin(\theta_1) \cos(\theta_2) - \sin(\theta_2) \cos(\theta_1)}{v_1^2 \cos(\theta_2) - v_2^2 \cos(\theta_1)} \approx 0,42 \text{ kg/m}.$$

Kasutades saadud tulemusi on lihtne arvutada ratturile mõjuvad takistusjõud ja sellele ületamiseks kuluv võimsus horisontaalsel teel kiirusega  $v$ :

$$F = F_h + cv^2 \approx 14,5 \text{ N},$$

$$P = Fv = mgv \cdot \frac{\sin(\theta_1) (v^2 \cos(\theta_2) - v_2^2) - \sin(\theta_2) (v^2 \cos(\theta_1) - v_1^2)}{v_1^2 \cos(\theta_2) - v_2^2 \cos(\theta_1)},$$

$$P \approx 80,8 \text{ W}.$$

Tuuletakistuse ületamiseks kulub  $cv^2/F = 88,5\%$  koguvõimsusest.

### L138 Kaks kuuli ja vedru ★★★

Autor: Rasmus Kiseli, piirkonnnavoor, 2017, G 7

Olgu tundmatu mass  $m$ , vedru algne pikkus  $l$  ning vedru pikkus pöörlemise ajal  $d$ . Ülesandes oli antud, et massi  $m$  kaugus pöörlemiskeskmost on pöörlemise ajal  $l$ . Massi  $M$  kaugus pöörlemiskeskmost on seega  $d - l$ . Kuna vedru pikenes  $d - l$  jagu, siis tekib vedrus pinge  $F = k(d - l)$ . Selle pinge peab vedru mõlemas otsas tasakaalustama vastava kuuli tsentrifugaaljõud. Vaatleme jöudude tasakaalu tuntud massil  $M$ :

$$M\omega^2(d - l) = k(d - l),$$

kus  $M\omega^2(d - l)$  on massile  $M$  mõjuv tsentrifugaaljõud. Siit järeldamene, et  $\omega^2 = \frac{k}{M}$ . Seega on pöörlemise periood:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{M}{k}}.$$

### L139 Reisirong ★★★

Autor: Moorits Mihkel Muru, lõppvoor, 2017, G 5

Reisijale mõjub kolm omavahel ristolevat kiirendust: raskuskiirendus, kesktõmbekiirendus ja joonkiirendus. Leiame kõigepealt, kui suur on rongi liikumissuunaline kiirendus. Olgu rongi algkiirus  $v_a$  ja lõppkiirus  $v_l$ . Sellisel juhul kehtib seos  $v_a/v_l = \alpha \Rightarrow v_a = \alpha v_l$ . Kuna kiirus muutub ühtlaselt (lineaarselt), siis avaldub keskmise kiirus koguteepikkuse ja aja jagatisena ning samuti alg- ja lõppkiiruse keskmisena.

$$\frac{v_a + v_l}{2} = \frac{(\alpha + 1)v_l}{2} = \frac{s}{t} \Rightarrow v_l = \frac{2s}{(\alpha + 1)t}.$$

Liikumissuunaline kiirendus on

$$a_t = \frac{v_a - v_l}{t} = \frac{(\alpha - 1)v_l}{t} = \frac{2(\alpha - 1)s}{(\alpha + 1)t^2}.$$

Järgmiseks uurime kesktõmbekiirendust. Selle jaoks on vaja leida trajektoori raadius, mis ringi korral on  $r = s/\varphi$ , sest liikumissuuna muutus on võrdne ringjoonel

läbitud nurgaga. Leiame kiiruse  $v_k$  trajektoori keskpunktis. Selleks kasutame üldist ühtlaselt kiireneval/aeglustuval liikumisel kehtivat valemit  $d = (v_2^2 - v_1^2)/(2a)$ , mis meie uuritaval juhul tuleb

$$\frac{s}{2} = \frac{v_k^2 - v_a^2}{2a_t}.$$

Sellest avaldame

$$\begin{aligned} v_k &= \sqrt{v_a^2 + a_t s} = \sqrt{\left(\frac{2\alpha s}{(\alpha+1)t}\right)^2 + \frac{2(\alpha-1)s^2}{(\alpha+1)t^2}} = \\ &= \sqrt{\frac{4\alpha^2 s^2 + 2(\alpha-1)(\alpha+1)s^2}{(\alpha+1)^2 t^2}} = \\ &= \frac{s}{(\alpha+1)t} \sqrt{6\alpha^2 - 2}. \end{aligned}$$

Seega kesktõmbekiirendus on

$$a_r = \frac{v_k^2}{r} = v_k^2 \frac{\varphi}{s} = \frac{2s\varphi}{(\alpha+1)^2 t^2} [3\alpha^2 - 1].$$

Viimane kiirendus on raskuskiirendus ja selle tähistame  $g$ -ga. Kuna kõik kiirendused on risti, siis resultantkiirenduse leidmiseks tuleb liita kiirenduste ruudud ja võtta sellest ruutjuur.

$$\begin{aligned} a &= \sqrt{g^2 + a_t^2 + a_r^2} = \\ &= \sqrt{g^2 + \left(\frac{2(\alpha-1)s}{(\alpha+1)t^2}\right)^2 + \left(\frac{2s\varphi}{(\alpha+1)^2 t^2} [3\alpha^2 - 1]\right)^2}. \end{aligned}$$

Kaalu ja massi vahel kehtib seos

$$P = ma \Rightarrow m = \frac{P}{a}.$$

Kui sisestame antud väärised valemisse, saame reisija kiirenduseks  $a \approx 9,83 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$  ja massiks  $m \approx 85,4 \text{kg}$ .

**L140 Kaheosaline pendel ★★★**

Autor: Hans Daniel Kaimre, lõppvoor, 2018, G 4

Niidis kaob tõmbejöud, kui raskusjõu niidisunaline komponent saab võrdseks tsentrifugaaljöuga. Märgistame nurga niidi ning horisontaaljoone vahel  $\theta$ -ga. Tsentrifugaaljöud avaldub kui  $F_t = mv^2/r = 2mv^2/l$  ning raskusjõu niidisunaline komponent  $F_r n = mg \sin \theta$ . Need peavad võrduma, seega:

$$\frac{2mv^2}{l} = mg \sin \theta \Rightarrow v^2 = \frac{gl \sin \theta}{2}.$$

Võttes potentsiaalse energia nivoo nullpunktiks asendi 2, saame et kuuli energia asendis 1 on  $E_1 = mgl$ . Asendis 3 on aga kuulikese energia  $E_3 = mv^2/2 + mg(1 + \sin \theta)l/2$ . Kuna kehtib energia jäädvuse seadus, peab kehtima  $E_1 = E_3$ :

$$mgl = \frac{mv^2}{2} + mg(1 + \sin \theta) \frac{l}{2} \Rightarrow v^2 = gl(1 - \sin \theta).$$

Pannes kaks avaldist  $v^2$  jaoks omavahel võrduma, saame:

$$\frac{gl \sin \theta}{2} = gl(1 - \sin \theta) \Rightarrow \frac{3}{2} \sin \theta = \frac{3}{2} \cos \alpha = 1 \Rightarrow \alpha = \arccos \frac{2}{3}.$$

**L141 Veerev pall ★★★**

Autor: Hans Daniel Kaimre, piirkonnavoor, 2016, G 8

Olgu  $x$ -suunaline kiirus pallil  $v_{x1}$  ning klotsil vastassuunas  $v_{x2}$ . Kuna hõõrdejöud pinnaga puudub, siis süsteemile horisontaalseid jõude ei mõju ja kehtib horisontaalse impulsi jäädvuse seadus  $mv_{x1} = Mv_{x2}$ , kust  $\frac{v_{x1}}{v_{x2}} = \frac{M}{m}$ . Kuna see peab kehtima igal ajahetkel, siis järelikult kehtib ka  $\frac{s_{x1}}{s_{x2}} = \frac{M}{m}$ , kus  $s_{x1}$  ja  $s_{x2}$  on vastavalt palli ja aluse horisontaalsuunas läbitud vahemääd. Kui pall on jõudnud teise otsa, siis palli nihe klotsi suhtes on  $2(R - r)$  (vahemaa palli keskmest punktis A palli keskmeni punktis B), seega

$$s_{x1} + s_{x2} = 2(R - r).$$

Avaldades  $s_{x1} = s_{x2} \frac{M}{m}$  ja asendades eelmisesse võrrandisse, saame

$$s_{x2} = 2(R - r) \frac{m}{M + m}.$$

**L142 Vai ★★★★**

Autor: Jaak Kikas, piirkonnnavoor, 2006, G 10

Olgu raskuse kiirus enne lõöki vaia pihta  $v$  ja raskuse ning vaia kiirus vahetult pärast lõöki  $v'$ . Lõögi jooksul säilib impuls (aga mitte energia)

$$p = mv = (m + M)v'.$$

Kiiruse  $v$  või impulsi  $p$  saame energia jäätusest, näiteks kujul

$$\frac{p^2}{2m} = mgH.$$

Niisiis on peale lõöki süsteem vai+raskus omandanud kiiruse  $v'$ . Hõõrdejõudude toimel peatuvad need teatava teepikkuse  $x$  jooksul, kusjuures tingimuste kohaselt lõökide arv  $N \gg 1$  ning seega  $x \ll L$ . Hõõrdejõudude töö on seejuures võrdne energia muuduga.

Eelpooltoodu võib kirja panna kujul

$$(F_0 + kl)x = (M + m)gx + \frac{p^2}{2(m + M)},$$

kuid lõppvastuse leidmise seisukohast on meil lihtsam võrrutada summaarne hõõrdejõudude töö (mis on leitav nt graafiku  $F(l)$  aluse pindalana),

$$A_h = F_0L + \frac{kL^2}{2}.$$

summaarse dissipeeruva energiaga

$$E = \frac{Np^2}{2(m + M)} + (M + m)gL.$$

Võrdusest  $A_h = E$  saame (arvestades eelpooltoodud avaldisi  $A_h$ ,  $E$  ja  $p^2/2m$  jaoks)

$$N = \left( F_0 + \frac{kL}{2} - Mg - mg \right) \frac{(m + M)L}{m^2 g H}.$$

**L143 Pidurdamine ★★★★**

Autor: Tanel Kiis, lahtine, 2012, G 7

Kaks naaberkuulikest lendavad üksteisest kaugusel  $ut$ . Hetkest, mil neist esimene põrkab suure kehaga, kulub teise kuulikese põrkeni aega  $T = \frac{ut}{u+v}$ . Liikudes suure massi süsteemi, näeme et enne kokkupõrget läheneb väike kuul kiirusega  $v + u$ . Pärast kokkupõrget lahkub väike kuul vastassuunas samasuguse kiirusega. Seega on kokkupõrke jooksul üle kantud impuls  $\Delta p = 2m(v + u)$ . Antud impuls peab tasakaalustama langevat keha kiirendava raskusjõu:

$$F = \frac{\Delta p}{T} = \frac{2m(v + u)}{T} = \frac{2m(v + u)^2}{ut} = Mg.$$

Lihtsustame antud avaldist ning leiame  $u$ :

$$u^2 + u \left( 2v - \frac{Mgt}{2m} \right) + v^2 = 0,$$

$$u = \frac{Mgt}{4m} - v \pm \sqrt{\frac{Mgt}{4m} \left( 2v - \frac{Mgt}{4m} \right)}.$$

Näeme, et  $u$  jaoks on kaks lahendit. Seega ongi  $u$  jaoks kaks võimalikku väärust.

#### L144 Robin Hood ★★★★

Autor: Madis Ollikainen, piirkonnnavoor, 2012, G 9

Kõigepealt leiame noole algkiiruse. Selle leiame noolele antud kineetilise energiakaudu.

$$E_K = \frac{mv^2}{2},$$

$$E_K = \eta A \Rightarrow$$

$$v = \sqrt{\frac{2\eta A}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 0,17 \cdot 500}{0,054}} \approx 56,1 \text{ m/s.}$$

Paneme tähele, et noole kiiruse horisontaalne komponent on

$$v_{\text{horisontaal}} = v \cdot \cos \alpha.$$

ja vertikaalne komponent on

$$v_{\text{vertikaal}} = v \cdot \sin \alpha.$$

Kui nool lendab aja  $t$ , siis

$$v \cos \alpha \cdot t = L,$$

$$v \sin \alpha \cdot t - \frac{gt^2}{2} = -h.$$

(Kuna nool lastakse lendu märklaua keskpunktist h võrra kõrgemalt.) Nüüd avaldame ülemisest võrrandist sin  $\alpha$ :

$$\cos \alpha = \frac{L}{vt} \Rightarrow \sin \alpha = \sqrt{1 - \left( \frac{L}{vt} \right)^2} = \sqrt{\frac{v^2 t^2 - L^2}{v^2 t^2}}.$$

Asendame selle alumisse võrrandisse

$$vt \cdot \sqrt{\frac{v^2 t^2 - L^2}{v^2 t^2}} = \frac{gt^2}{2} - h \Rightarrow$$

$$v^2 t^2 - L^2 = h^2 - hgt^2 + \frac{g^2 t^4}{4} \Rightarrow$$

$$\frac{g^2}{4} \cdot t^4 - (hg + v^2) \cdot t^2 + (h^2 + L^2) = 0.$$

Lahendame ruutvõrrandi  $t^2$  suhtes:

$$t_{1,2}^2 = \frac{(hg + v^2) \pm \sqrt{(hg + v^2)^2 - 4 \cdot \frac{g^2}{4} (h^2 + L^2)}}{2 \cdot \frac{g^2}{4}} \Rightarrow$$

$$t_1^2 = 117 \text{ s}^2 \Rightarrow t_1 = \pm \sqrt{116} = \pm 10,8 \text{ s},$$

$$t_2^2 = 14,3 \text{ s}^2 \Rightarrow t_2 = \pm \sqrt{14,3} = \pm 3,77 \text{ s}.$$

On selge, et negatiivne aeg ei oma antud juhul füüsikalist tähendust. Tuleb välja, et Robin võib noolt lasta kahe erineva nurga,  $\alpha_1$  ja  $\alpha_2$  all:

$$\alpha_1 = \arccos \frac{L}{vt_1} = \arccos \frac{200}{56 \cdot 10,8} \approx 71^\circ,$$

$$\alpha_2 = \arccos \frac{L}{vt_2} = \arccos \frac{200}{56 \cdot 3,78} \approx 19^\circ.$$

#### L145 Sportauto ★★★★

Autor: Mihkel Rähn, lõppvoor, 2014, G 7

Minnes üle autoga seotud mitteinertsiaalsesse taustsüsteemi, tuleb lisada veojõule  $F_v$  vastassuunaline arvväärtuselt võrdne inertsiaaljoud  $F_i$ , mis rakendub masskeskmele. Olgu tooreaktsionid esiteljal  $N_1$  ja tagateljal  $N_2$ . Jõudude võrrandid:

$$\begin{aligned} F_v &= \mu N_1, \\ F_v &= F_i, \\ N_1 + N_2 &= mg, \\ ma &= F_v. \end{aligned}$$

Saame kirja panna ka jõumomentide võrrandi tagatelje jaoks

$$F_i h + N_1 b - mgs = 0.$$

Lahendades võrrandisüsteemi, saame

$$a = \frac{gs}{h + \frac{b}{\mu}}.$$

**L146 Latt ★★★**

Autor: Kaur Aare Saar, lahtine, 2015, G 8

Olgu lati mass  $m$ , raskuskiirendus  $g$  ning hõõretegur  $\mu$ . Latile mõjub igas punktis hõõrdejõud, mis on vastupidine selle punkti liikumissuunale. Kogu mingile osale mõjuv hõõrdejõud on seega võrdeline selle osa pikkusega. Lati lükatavast otsast kaugemale osale mõjuv hõõrdejõud mõjub siis samas suunas rakendatavale jõule ning lati lähemas otsas mõjub hõõrdejõud sellele vastu. Hõõrdejõud üritavad ta-kistada nii lati kulgliikumist kui ka selle pöörlemist. Kui latti pidevalt otsast lüka-takse, peab tekkima olukord, kus lisaks lükkava jõu ning hõõrdejõudude tasakaalule kehtib ka nende jõudude momentide tasakaal. Need momendid peavad olema tasakaalus suvalise punkti suhtes. Otstarbekas on vaadelda jõumomente lati lüka-tava otsa suhtes, sest seal on lükkava jõu moment null. Olgu lati pöörlemistelje kaugus lükatavast otsast  $x$ . Saame

$$\mu mg \cdot \frac{x}{L} \cdot \frac{x}{2} = \mu mg \cdot \frac{L-x}{L} \cdot \left( x + \frac{L-x}{2} \right)$$

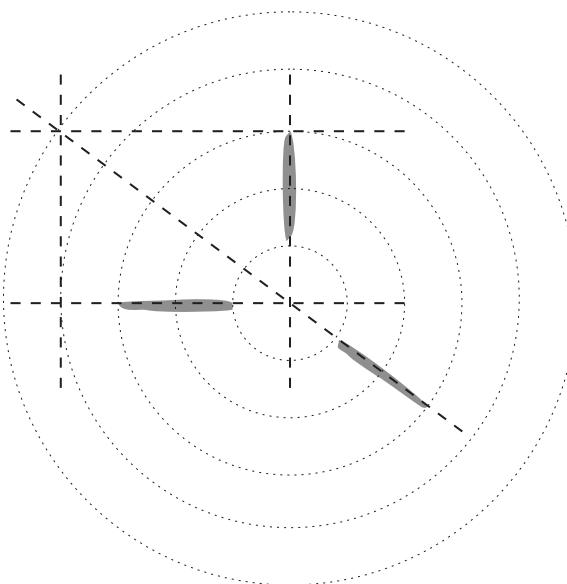
ning

$$x = \frac{\sqrt{2}}{2} L.$$

**L147 Klaaskuul ★★★**

Autor: Aigar Vaigu, piirkonnnavoor, 2008, G 6

Tükkikeste trajektooride järgi saab võrrelda kiiruste suundasid ja suuruseid, sest  $s = vt_s$ , kus  $t_s$  on säriaeg (alternatiivselt võib kasutada kaugust kukkumispunktist  $S = vt_S$ , kus  $t_S$  on ajavahemik mahakukkumishetkest säriaja lõpuni). Seega on jälgede pikkuste suhe (või jälgede lõpp-punktide kauguste suhe kukkumispunktist) võrdne kiiruste suhtega. Fotolt saame, et  $s_1 \approx s_2 \approx s_3$ , st  $v_1 \approx v_2 \approx v_3$ . Kuna kiiruste suunad on teada, siis on teada ka impulsside  $\vec{p}_1 = m_1 \vec{v}_1$ ,  $\vec{p}_2 = m_2 \vec{v}_2$  ja  $\vec{p}_3 = m_3 \vec{v}_3$  suunad. Kuna  $\vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3 = 0$ , siis moodustavad need vektorid kolmnurga. Et selle kolmnurga külgade suunad on teada, siis on teada selle kolmnurga nurkade suurused ning kolmnurk määratud sarnasusteguri täpsusega (et meid huvitavad külgede pikkuste suhted, siis sellest täpsusest piisab). Niisiis konstrueerime fotole kolmurga, mille külgid on vastavalt paralleelsed kolme kuulikillu jälgiga. Jooniselt leiate, et  $p_1 : p_2 : p_3$  suhtuvad kui  $3 : 4 : 5$ . Kombineerides seda nüüd eelmise tulemusega  $v_1 \approx v_2 \approx v_3$  saame, et  $m_1 : m_2 : m_3$  suhtuvad kui  $3 : 4 : 5$ .

**L148 Plokid ★★★**

Autor: Mihkel Kree, piirkonnnavoor, 2008, G 9

Rakendades Newtoni II seadust näeme, et kõik kolm keskmist koormist hakkavad liikuma võrdse kiirendusega  $a_0$ :

$$Ma_0 = 2T - Mg,$$

kus  $T$  on niidi pingi. Rakendades Newtoni II seaduste äärmiste koormiste jaoks saame

$$\gamma Ma_1 = T - \gamma Mg,$$

kus  $a_1$  on äärmiste koormiste kiirendus. Elimineerides niidi pinge  $T$  saame

$$2\gamma a_1 - a_0 = g - 2\gamma g.$$

Nööri venimatus avaldub kujul  $a_1 = -3a_0$ , millest tulenevalt

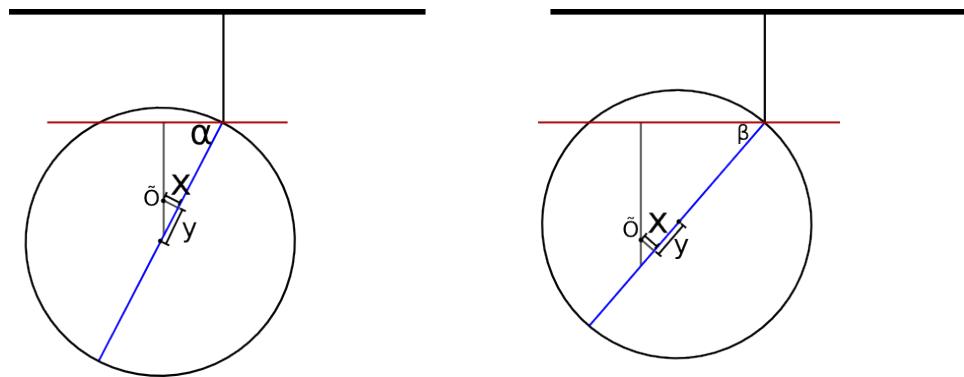
$$-2\gamma a_1 - \frac{a_1}{3} = (2\gamma - 1)g \quad \Rightarrow \quad a_1 = \frac{1 - 2\gamma}{2\gamma + 1/3}g.$$

Äärmised koormised hakkavad langema, kui  $a_1$  on negatiivne. Selle jaoks peab kehtima

$$1 - 2\gamma < 0 \quad \Rightarrow \quad \gamma > \frac{1}{2}.$$

#### L149 Õõnes kera ★★★★

Autor: Tanel Kiis, piirkonnavor, 2013, G 9



Kui tegemist poleks õõnsa keraga, oleks selle mass  $M = \frac{4}{3}\pi r^3 = 33$  kg. Mudelname õõnsusega kera kui tervet kera, mille sees on negatiivse massiga  $m' = 3$  kg kera. Kera pöörab ennast nii, et tema masskese jäääks kinnituspunkti alla. Olge õõnsuse keskpunkti ( $\tilde{O}$ ) asukoha koordinaadid kera keskpunkti suhtes  $x$  ja  $y$ . Nende leidmiseks kasutame jõumomentide tasakaalu nööri kinnituspunkti suhtes. Saame võrrandisüsteemi:

$$Mr \cos \alpha = m'(r - y + x \tan \alpha) \cos \alpha,$$

$$Mr \cos \beta = m'(r + y + x \tan \beta) \cos \beta.$$

Õõnsuse ja kera keskpunktide vaheline kaugus on  $d = \sqrt{x^2 + y^2}$ ,

$$d = \frac{2r(\frac{M}{m'} - 1)}{\tan \alpha + \tan \beta} \sqrt{1 + \frac{1}{4}(\tan \alpha - \tan \beta)^2} = 0,8 \text{ cm}.$$

**L150 Jalgpallurid ★★★**

Autor: Andreas Valdmann, lõppvoor, 2013, G 9

Vaatame pallide algkiiruse komponentide kaupa. Olgu 1. palli algkiiruse vertikaalkomponent  $v_{1\text{vert}}$  ning horisontaalkomponent pikki jalgpallureid ühendavat sirget  $v_{1\text{piki}}$  ja risti selle sirgega  $v_{1\text{risti}}$ . Teise palli jaoks on vastavad komponendid  $v_{2\text{vert}}$ ,  $v_{2\text{piki}}$  ja  $v_{2\text{risti}}$ . Kokkupõrke hetkel peavad mõlemad pallid olema läbinud ristsuunas võrdse vahemaa. Kuna pallide ristsuunaline kiirus ei muutu, siis peab kehtima  $v_{1\text{risti}} = v_{2\text{risti}}$ .

Kokkupõrkeks peavad pallid olema jõudnud ka samale kõrgusele. See tingimus on ilmselt täidetud, kui pallide algsed vertikaalkiirused on võrdsed, mille korral on pallid igal ajahetkel samal kõrgusel. Oletame, et pallid võiksid teatud hetkel samale kõrgusele jõuda ka juhul, kui näiteks esimese palli algne vertikaalkiirus on väiksem. Pallide töösuaeg on arvutatav valemis  $t = v_{\text{vert}}/g$ . Seega pöördub esimene väiksema vertikaalsuunalise algkiirusega pall varem tagasi. Kui teine pall lõpuks laskuma hakkab, siis liigub esimene pall juba maa poole. Kuna mõlemad pallid kirenevad võrdsest raskuskiirendusega, siis on laskumisel esimese palli kiirus alati suurem ja teine pall ei jõua selle pallide õhusoleku ajal järele. Seega pole kokkupõrge erinevate vertikaalkiiruste korral võimalik ja peab kehtima  $v_{1\text{vert}} = v_{2\text{vert}}$ . Kuna algkiirused olid moodulilt võrdsed ja  $v^2 = v_{\text{vert}}^2 + v_{\text{piki}}^2 + v_{\text{risti}}^2$ , siis peavad ka algkiiruste pikikomponendid olema absoluutväärtselt võrdsed. Võimalikud kokkupõrkekohad on mõlemast jalgpallurist võrdsel kaugusel ja nende punktihulk moodustab maapinna tasandile projekteerituna sirge, mille otspunktide kaugus mõlemast jalgpallurist on määratud palli maksimaalse lennukaugusega. Selle leidmiseks avaldame näiteks lennuaja, mis on võrdne kahekordse ajaga, mis kulub raskusjõu mõjul vertikaalkiiruse kahanemiseks nullini

$$t = 2 \frac{v_{\text{vert}}}{g}.$$

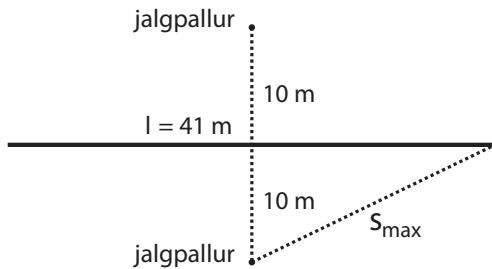
Selle ajaga liigutakse horisontaalsihis vahemaa

$$s = v_{\text{hor}} t = 2 \frac{v_{\text{hor}} v_{\text{vert}}}{g}.$$

Suurim lennukaugus saavutatakse, kui  $v_{\text{vert}} = v_{\text{hor}} = v/\sqrt{2}$  ja seega  $s_{\max} = v^2/g$ . Täisnurksest kolmnurgast leiame kokkupõrkepunktide piirkonna pikkuse

$$l = 2\sqrt{s_{\max}^2 - (d/2)^2} = 2\sqrt{\frac{v^4}{g^2} - \frac{d^2}{4}},$$

mille arvväärtus on 41 m.



### L151 Mutrivõti ★★★★

Autor: Andres Põldaru, lahtine, 2015, G 9

Kui keermed on liikunud piki regulaatori telge teepikkuse  $x$  võrra, on need pöördu nud nurga  $\varphi = 2\pi nx$  võrra ning liikunud teljega risti teepikkuse  $y = \varphi r = 2\pi nxr$  võrra. Olgu  $\alpha$  nurk pinnanormaali ja pöörlemistelje vahel. Saame

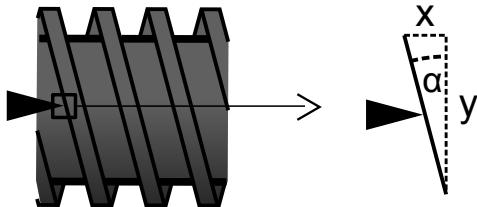
$$\tan(\alpha) = \frac{x}{y} = \frac{x}{2\pi nxr} = \frac{1}{2\pi rn}.$$

Mõjugu keermetele regulaatori telje suunaline jõud  $F$ . Keermete suunas mõjuv jõu komponent on  $F \sin \alpha$ , mille peab tasakaalustama hõõrdejõud suurima võimaliku väärtsusega  $\mu F \cos \alpha$ . Saame

$$\mu \geq \tan \alpha = \frac{1}{2\pi rn}$$

ehk

$$n \geq \frac{1}{2\pi r \mu}.$$



**L152 Plokid ★★★**

Autor: Taavet Kalda, lahtine, 2017, G 8

Olgu ülemisele ja alumisele plokile toetuvalt nööride pinged vastavalt  $T_1$  ja  $T_2$  ning raskuste  $m_1$ ,  $m_2$  ja  $M$  kiirendused vastavalt  $a_1$ ,  $a_2$  ja  $a$  (gravitatsiooniga samasuu-nalised). Kuna raskus  $M$  peab alguses paigal olema, st  $a = 0$ . Nööride venimatus annab kaks lisatingimust. Esiteks, ülemise nööri venimatusest peab alumise ploki kiirendus olema  $-a_1$ . Teiseks, alumise nööri venimatusest saab järel dada, et alumine plokk liigub kiirendusega  $\frac{a_2+a}{2} = \frac{a_2}{2} = -a_1$ , sest  $m_2$  ja  $M$  liiguvad keskmiselt sama palju kui alumine plokk. Kuna nöörid on kaalutud, on nende pinged punktis sama. Paneme alumise ploki ja iga raskuse jaoks Newtoni 2. seaduse kirja:

$$0 = 2T_2 - T_1, \quad \text{- alumine plokk} \quad (1)$$

$$m_1a_1 = m_1g - T_1, \quad \text{- esimene raskus} \quad (2)$$

$$m_2a_2 = m_2g - T_2, \quad \text{- teine raskus} \quad (3)$$

$$0 = Mg - T_2, \quad \text{- uuritav raskus} \quad (4)$$

$$\frac{a_2}{2} = -a_1. \quad \text{- nööride venimatus} \quad (5)$$

Tekkinud võrrandisüsteemis on 5 võrrandit ja 5 tundmatut. Seega on  $M$  üheselt määratud.

(1) ja (4) annavad  $T_2 = Mg$  ja  $T_1 = 2Mg$ . Asendame (5) ja saadud seosed võrranditesse (2) ja (3):

$$m_1a_1 = m_1g - 2Mg, \quad (6)$$

$$-2m_2a_1 = m_2g - Mg. \quad (7)$$

Liidame (6) ja (7) kokku kaaludega  $\frac{2}{m_1}$  ja  $\frac{1}{m_2}$ :

$$0 = 2g - 4\frac{Mg}{m_1} + g - \frac{Mg}{m_2},$$

ehk

$$M = \frac{3}{\frac{4}{m_1} + \frac{1}{m_2}} = \frac{3m_1m_2}{4m_2 + m_1}.$$

**L153 Mänguauto ★★★**

Autor: Jaan Kalda, lahtine, 2017, G 9

Vaatleme auto taustsüsteemis tasakaalutingimusi: tagumiste rattaste ja maapinna suhtes välja kirjutatud jõumomentide tasakaalu tingimus:

$$\frac{MgL}{2} = N_e L \pm Ma_h,$$

millega

$$N_e = \frac{M}{2}g \pm Ma \frac{h}{L}.$$

Seega hõõrdejõud

$$F_h = (Mg - N_e)\mu = \left( \frac{M}{2}g \mp Ma\frac{h}{L} \right) \mu = Ma,$$

kusjuures pluss ja miinus vahelduvad üle poolperioodi. Siit saame avaldada

$$a = \frac{\mu g}{2(1 \pm \mu h/L)}.$$

Seega keskmise kiirenduseks

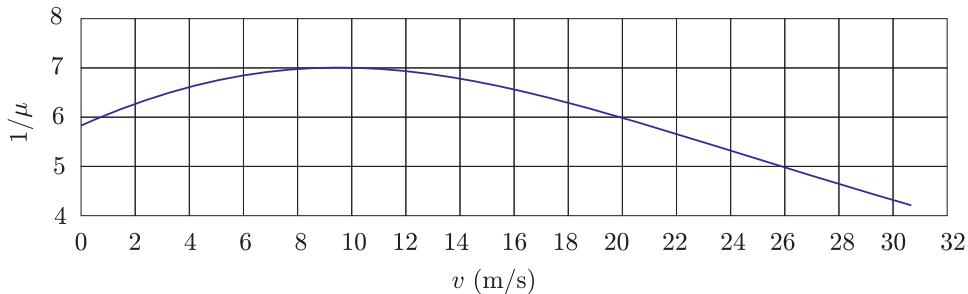
$$\langle a \rangle = \frac{g\mu^2 h}{2L(1 - \mu^2 h^2/L^2)}.$$

#### L154 Rong ★★★★☆

Autor: tundmatu, lahtine, 2006, G 10

**a)** Vaatame väikest kiiruste vahemikku  $\Delta v$ , mille sees võib kiirust  $v$  ja järelikult ka hõõrdetegurit  $\mu(v)$  lugeda konstantseks. Kiirendus on selle liikumisfaasi jooksul siis  $a = \mu(v)g$  ning kiiruse vähenemiseks kuuluv aeg

$$\Delta t = \frac{\Delta v}{a} = \frac{\Delta v}{\mu(v)g}.$$

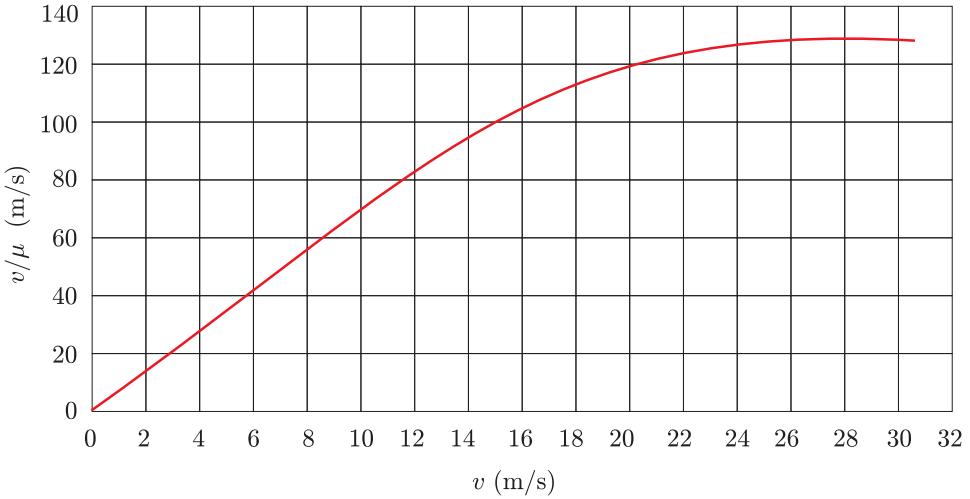


Summaarne aeg oleks summa üle kõigi selliste väikeste kiirusemuutustele. Konstrueerime esialgsest graafikust lähtudes suuruse  $1/\mu(v)$  sõltuvuse kiirusest  $v$  (vt joonist). Siis pidurdamiseks kuuluv aeg on selle sõltuvuse graafikualune pindala (kiirusest 0 kuni 100 km/h), jagatud  $g$ -ga. Seejuures peame silmas, et kiirus  $x$ -teljel peab olema meetrites sekundis (m/s). Vastuseks saame ligikaudselt 18 s.

**b)** Vaatame samasugust kiiruste vahemikku  $\Delta v$  nagu esimeses osas. Ajaga  $\Delta t$ , mille jooksul kiirus selle võrra väheneb, läbib rong teepikkuse

$$\Delta s = v\Delta t = \frac{v\Delta v}{\mu(v)g}.$$

Summaarne pidurdusmaa oleks summa üle kõigi selliste teepikkustele. Konstrueerime esialgsest graafikust lähtudes suuruse  $v/\mu(v)$  sõltuvuse kiirusest  $v$  (vt joonist). Siis pidurdusmaa on selle sõltuvuse graafikualune pindala (kiirusest 0 kuni 100 km/h), jagatud  $g$ -ga. Kiirus  $x$ -teljel on samuti meetrites sekundis (m/s). Vastuseks saame ligikaudselt 235 m.



Märkus. Integraalne avaldis pidurdusaja jaoks on kujul

$$t = \int_0^{v_0} \frac{dv}{\mu(v)g} = \frac{1}{g} \int_0^{v_0} \frac{dv}{\mu(v)},$$

kus  $v_0$  on rongi algkiirus. Avaldis pidurdusmaa pikkuse jaoks on aga

$$s = \int_0^{v_0} \frac{vdv}{\mu(v)g} = \frac{1}{g} \int_0^{v_0} \frac{vdv}{\mu(v)}.$$

### L155 Värinaalarm ★★★★

Autor: Jaan Kalda, lahtine, 2011, G 9

Kuivõrd väike keha liigub alla hetkeliselt, siis süsteemi mobiil+keha masskese püsib paigal, mistõttu mobiil kerkib lauapinnast kõrgusele  $h = x \frac{m}{M}$ . Edasi hakkab mobiil raskusjõu toimel langema; lauapinnale jõudmiseks kuluv aeg  $t = \sqrt{2h/g}$ . Hõördejõud peatab mobiili ilma libisemata, kui  $\mu > \tan \alpha$ ; et  $\alpha \ll 1$ , siis võime eeldada, et see nii ka juhtub. Kui  $t = \sqrt{2h/g} < \tau$ , siis jõuab mobiil liikuda langemise jooksul lauapinna sihis vahemaa  $\delta = h \sin \alpha \approx h\alpha$ , mis annab keskmiseks kiiruseks

$$u = \frac{xm\alpha}{2\tau M}.$$

Kui  $\sqrt{2h/g} < \tau$ , siis ei jõua mobiil lõpuni langeda, vaid väikese keha kerkimine surub mobiili ennatlikult vastu lauda tagasi. Mobiil jõuab langeda vahemaa  $H = g\tau^2/2$  võrra, mis annab keskmiseks kiiruseks

$$u = \frac{H\alpha}{2\tau} = \frac{1}{4}g\tau\alpha.$$

Kokkuvõtlikult võib vastuse anda kujul

$$u = \min \left( \frac{xm\alpha}{2\tau M}, \frac{1}{4}g\tau\alpha \right).$$

**L156 Killud ★★★★**

Autor: Jaan Kalda, lahtine, 2012, G 10

Kildude koguimpulss on null, seega moodustavad impulsivektorid kolmnurga, mille saame sarnasusteguri täpsusega taastada kildude liikumissuundade abil. Sellest kolmnurgast saame küljepikkuste suhete mõõtmise abil teada algimpulsside suhted  $p_1 : p_2 : p_3 = 72 : 24 : 59$  (need numbrid on kolmnurga külgede pikkused millimeetrites). Kildude libisemiskaugused suhtuvad kui algkiiruste ruudud — mõõtmiste abil saame teada

$$v_1^2 : v_2^2 : v_3^2 = 72 : 30 : 21$$

ning ruutjuure võtmise järel ka kiiruste suhted

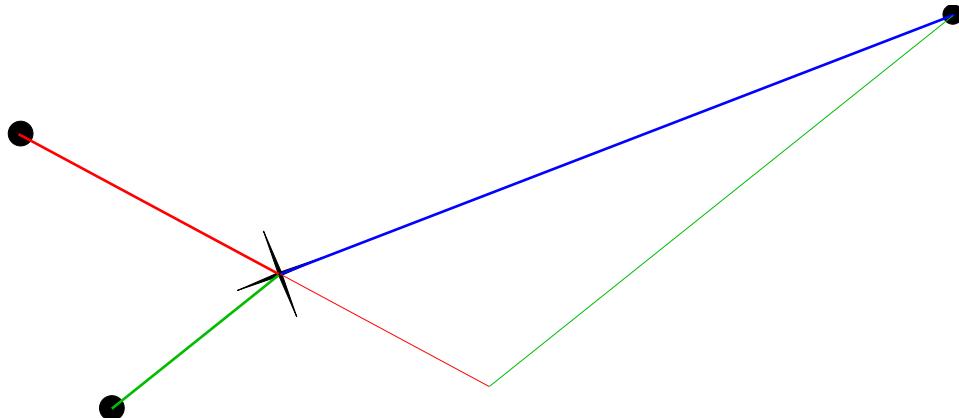
$$v_1 : v_2 : v_3 = 8,5 : 5,5 : 4,6.$$

Jagades impulsside suhted kiiruste suhtega, saame teada masside suhted

$$m_1 : m_2 : m_3 = 8,5 : 4,4 : 12,8$$

ning teades kogumassi ka massid eraldi võetuna,

$$m_1 = 10 \text{ g} \cdot \frac{8,5}{8,5 + 4,4 + 12,8} = 3,3 \text{ g}, m_2 = 10 \text{ g} \cdot \frac{4,4}{25,7} = 1,7 \text{ g}, m_3 = 10 \text{ g} \cdot \frac{12,8}{25,7} = 5,0 \text{ g}.$$



**L157 Liivakell ★★★★☆**

Autor: Roland Matt, lõppvoor, 2012, G 8

Olgu kogu liovahulga kõrgus  $H$  ja liiva kõrgus alumises anumas  $h$ . Alumisse anumasse voolab liiv masskiirusega  $w$ .

Paneme kirja liivakella masskeskme koordinaadi:

$$x = \frac{\frac{h}{2}hS\rho + (\frac{L}{2} + \frac{H-h}{2})(H-h)S\rho}{HS\rho} = \frac{2h^2 + LH - Lh + H^2 - 2Hh}{2H}.$$

Kui liivakella masskese omab kiirendust, peab masskeskme koordinaadi teine tulist aja järgi olema nullist erinev. Järeldusena Newtoni II seadusest võib õelda, et liivakellale peab mõjuma masskeskme kiirendusele vastav lisajõud – see ongi kaalu näidu muutus, mida otsime. Võtame nüüd masskeskme koordinaadist kaks korda järjest ajalist tuletist, pidades meeles, et liivataseme kõrguse  $h$  tulist aja järgi (muutumiskiirus) on seotud otseselt liiva voolu masskiirusega  $v$  järgnevalt:

$$w = S\rho\dot{h}.$$

Täpiga suuruse peal tähistame vastavat ajalist tuletist. Peame meeles, et  $h$  muutumise kiirendus (teine tulist aja järgi) peab võrduma nulliga ning et  $L$  ja  $H$  on konstantsed suurused, mistõttu nende tuletised on nullid.

$$\dot{x} = \frac{4h\dot{h} - L\dot{h} - 2H\ddot{h}}{2H}.$$

Võtame veelkord tuletist:

$$a = \ddot{x} = \frac{4h\ddot{h} + 4\dot{h}^2 - L\ddot{h} - 2H\ddot{h}}{2H} = \frac{2\dot{h}^2}{H} = \frac{2w^2}{HS^2\rho^2}.$$

Kogu liivakellas oleva liiva mass on  $m = SH\rho$ . Liivakellale mõjuv täiendav jõud (kaalu näidu muutus):

$$F = ma = \frac{2w^2}{S\rho}.$$

**L158 Silindrilised anumad ★★★★☆**

Autor: Jaan Kalda, lõppvoor, 2014, G 8

Kui tühi anum kerkib vahemaa  $x$  vörra, siis tema all vabaneb ruumala  $\pi r^2 x$ , mille täidab silindritevahelisest ruumist pärit vesi. Vajugu nivoo vahemaa  $y$  vörra; ruumalade võrdsuse tõttu  $\pi r^2 x = \pi(R^2 - r^2)y$ , seega

$$y = x \frac{r^2}{R^2 - r^2}.$$

Kui  $x \ll L$ , siis süsteemi potentsiaalne energia väheneb vee ülevallt alla ümberpaitumise tõttu suuruse

$$E_p = g\rho\pi r^2 x L$$

võrra. Energia balansis võime ignoreerida sisemise silindri otsa juures toimuva vee liikumise kineetilist energiat, kuna selles osaleva vee hulk on väga väike võrreldes langeva vee hulgaga. Seetõttu vee kineetiline energia

$$E_k = \frac{1}{2} \rho \pi (R^2 - r^2) L \dot{y}^2,$$

kus  $\dot{y}$  tähistab  $y$  tuletist aja järgi. Võttes energia jäävuse seadusest  $gr^2 x = \frac{1}{2}(R^2 - r^2)\dot{y}^2$  tuletise aja järgi, leame

$$gr^2 \dot{x} = (R^2 - r^2) \dot{y} \ddot{y}.$$

$x$  ja  $y$  vahelise seose tõttu kehtib võrdus  $r^2 \dot{x} = (R^2 - r^2) \dot{y}$ , mistõttu

$$\ddot{y} = g \Rightarrow \ddot{x} = g \frac{R^2 - r^2}{r^2} \approx 4,3 \text{ m/s}^2.$$

### L159 Vedru ★★★★☆

Autor: Mihkel Kree, lõppvoor, 2015, G 8

a) Hetkeks, mil kast maapinnale jõuab, on koormis omandanud kiiruse  $v_i = \sqrt{2gh}$ . Seejärel hakkab vedru võnkuma ümber uue tasakaaluasendi ehk ümber punkti, kus vedru pingi tasakaalustab koormisele mõjuva raskusjõu:  $ky_0 = mg$ . Tasakaaluasendisse jõudmiseks peab koormis veel täiendavalt läbima kauguse  $y_0 = \frac{mg}{k}$ . Olgu vedru võnkumise amplituud  $A$ . Köige ülemises punktis jäab koormis hetkeks seisma ning kokkusurutud vedru avaldab nii koormisele kui kastile jõudu  $k(A - y_0)$ . Kast hüppab üles tingimusel  $mg = k(A - y_0)$ , milleg

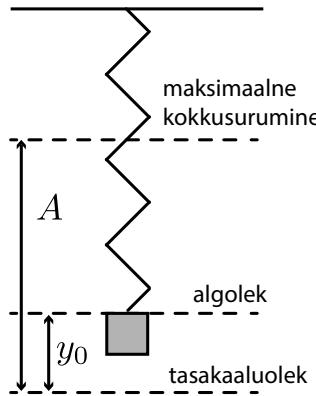
$$A = \frac{mg}{k} + y_0 = 2y_0.$$

Rakendame nüüd energi jäävust. Võnkumise ülemises punktis on kineetiline energia muutunud gravitatsiooni ja vedru potentsiaalseks energiaks.

$$mgh = \frac{mv_i^2}{2} = mg(A - y_0) + \frac{1}{2}k(A - y_0)^2 = \left(1 + \frac{1}{2}\right)mg y_0 = \frac{3}{2}mg y_0,$$

millest saame otsitavaks kõrguseks

$$h_{\min} = \frac{3}{2}y_0 = \frac{3mg}{2k} = \frac{3g}{2\omega^2}.$$



**b)** Teisele küsimusele vastates lähtume harmoonilise võnkumise omadustest. Veenidume esmalt, et konstantse jõu  $mg$  lisamine nihutab tasakaaluasendit, kuid jätab võnkumist kirjeldava võrrandi samaks. Tõepoolest, lugedes koordinaadi  $y$  alguspunktiiks uue tasakaaluasendi, on meie vedru võnkumine kirjeldatav võrrandiga

$$ma = m\ddot{y} = -k(y - y_0) - mg = -ky.$$

Sellise võnkumise nurksagedus on muidugi  $\omega = \sqrt{k/m}$  ning periood  $T = \frac{2\pi}{\omega}$ . Kui hakkaksime aega lugema hetkest, mil koormis läbib tasakaaluasendit, siis kuliks vedru maksimaalselt kokku surumiseks kolm veerandperioodi ( $\frac{3}{4}T$ : kast liigub alla, tagasi tasakaaluasendisse ja üles), sest langemiskõrguse  $h = h_{\min}$  korral saab kast hüpata vaid koormise kõige ülemises asendis. Paraku ei alusta me aja arvestamist mitte tasakaaluasendist, vaid hetkest, mil vedru on välja venitamata. Peame seega arvesse võtma lisaaega  $\Delta t$ , mis kulub koormisel vahemaa  $y_0$  läbimiseks. Kuuna koormis ei liigu konstantse kiirendusega, siis seos  $s = at^2/2$  siin ei kehti.  $\Delta t$  leidmiseks lähtume harmoonilise võnkumise faasist  $\varphi$ , mis kulub algasendist tasakaaluasendisse jõudmiseks. Seda faasi on lihtne avaldada koordinaatide abil, piidades silmas, et amplituud  $A$  vastab koordinaadi faasinhikkele  $\pi/2$  tasakaaluasendi suhtes. Nimelt  $y_0 = A \sin \varphi$ , millega

$$\varphi = \arcsin(y_0/A) = \arcsin(1/2) = \frac{\pi}{6}.$$

Faasi  $\varphi$  läbimiseks kuluv aeg on

$$\Delta t = \frac{\varphi}{\omega} = \frac{1}{12}T.$$

Järelikult veedab kast maapinnal kuni üles kerkimiseni aja

$$t = \frac{3}{4}T + \Delta t = \frac{5}{6}T = \frac{5\pi}{3\omega}.$$

**L160 Vardad ★★★★**

Autor: Jaan Kalda, lahtine, 2017, G 10

Vaadeldaval hetkel on kiirusvektori ja  $AC$  vahelise nurga siinus  $\frac{1}{2}$ , st nurk ise on  $30^\circ$  ja seetõttu  $AB$  on risti kiirusvektoriga. Järelikult on punkti  $B$  kiirusvektori suund sama, mis  $\vec{v}$ . Varda  $BC$  venimatuse tõttu peavad otspunktide kiirusvektoreite projektsioonid varda sihile olema võrdsed. Et nurgad nende kiirusvektorite ja varda sihiga on võrdsed, siis peavad ka kiiruste moodulid olema võrdsed. Niisiis punkti  $B$  kiirus on  $\vec{v}$ . Seetõttu on punkti  $B$  kesktõmbekiirendus  $v^2/2l$ . Punktil  $B$  võib olla veel mõni tangentsiaalkiirendus, hetkel me teame vaid kogukiirenduse projektsiooni  $AB$  sihile. Läheme näüd kiirusega  $\vec{v}$  liikuvasse taustsüsteemi, kus punkt  $C$  on kogu aeg paigal ja punkt  $B$  on hetkeliselt paigal. Et  $B$  on hetkeliselt paigal, siis selle kesktõmbekiirendus pöörlemisel ümber  $C$  on antud hetkel null, st  $B$  kiirenduse vektor on risti  $BC$ -ga. Seega me teame kiirenduse suunda ja projektsiooni  $v^2/2l$  sihile  $AB$  (mis moodustab vektori suunaga nurga  $30^\circ$ ). Selle põhjal saame avaldada kiirenduse mooduli

$$a = \frac{v^2}{2l \cos 30^\circ} = \frac{v^2}{\sqrt{3}l}.$$

**L161 Kuulid ★★★★**

Autor: Jaan Kalda, lõppvoor, 2006, G 10

Teisest ja kolmandast kuulist koosnevale süsteemile mõjus sel ajal, kui esimest kuuli lükati, esimese varda sihilise jõud, sest teatavasti mõjuvad kergetele varastele vaid varda sihilised pinged. Seega nihkus šarniirne ühenduspunkt esimese varda sihiliselt ning teine ja kolmas kuul omandasid sümmeetria tõttu ühesugused kiirused. Šarniirse ühenduspunkti kiirus on  $v_s = v_0 \cos 30^\circ$ , sest esimese varda pikkus ei muutu. Et nii teisele kui kolmandale kuulile mõjud ainult varda sihilise jõud, siis nende kiirus on ka varda sihilise; varda venimatusest juhtivalt  $v_2 = v_3 = v_s \cos 60^\circ = v_0 \sqrt{3}/4$ .

Pinged varastes on võrdsed, sest šarniirse ühenduspunkti massi võime lugeda nulliks ning talle mõjuv resultantjõud peab olema 0 ja jõudude tasakaalust tuginevalt peab varraste pingetest moodustuma võrdkulgne kolmnurk. Olgu varraste pingi  $T$ . Seega on köigi kuulikeste kiirendused võrdsed,  $a_k = T/m$ . Läheme šarniirse ühenduspunkti seotud kulgevalt liikuvasse taustsüsteemi, mis liigub kiirendusega  $\vec{a}$ . Selles süsteemis on esimese kuuli kiirus  $u_1 = v_0/2$  ning teiste kiirus  $u_2 = v_s \sin 60^\circ = \frac{3}{4}v_0$ . Selles süsteemis liiguvad kuulid ringjoont mööda. Iga kuuli jaoks saame välja kirjutada jõudude tasakaalu tingimuse projekteerituna vastava varda sihile (siis kaob vajadus teada kuulikes ringliikumise tangentsiaalkiirendust, sest see on teljega risti). Teise ja kolmanda kuuli tasakaalutingimusi võrreldes selgub, et inetrtsijõu  $-m\vec{a}$  projektsioon kummalegi teljele peab olema üks ja sama, st  $\vec{a}$  peab olema esimese varda sihilise. Seega saame kaks võrrandit:

$$\begin{aligned} mu_1^2/l + a &= T, \\ mu_2^2/l - a/2 &= T. \end{aligned}$$

Elimineerides neist võrrandeist  $a$ , saame

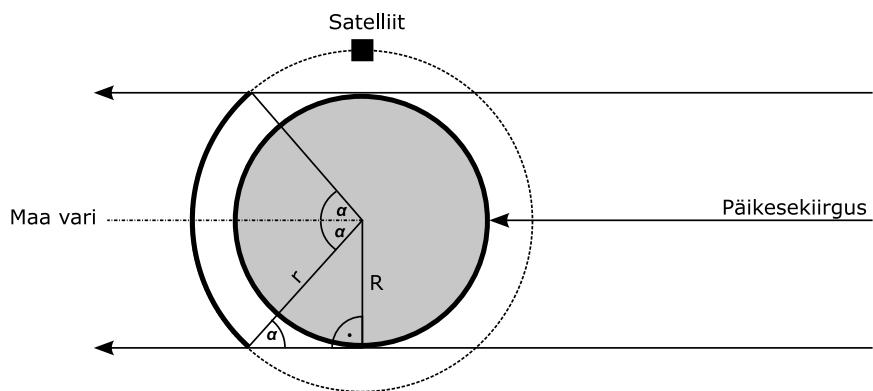
$$T = \frac{1}{3} \frac{m}{l} (u_1^2 + 2u_2^2)$$

ning otsitava kiirenduse

$$a_k = T/m = (u_1^2 + 2u_2^2) 3l = \frac{11}{24} v_0^2/l.$$

### L162 Satelliit ★

Autor: Mihkel Pajusalu, piirkonnavor, 2011, G 2



Ringikujulisel orbiidil on satelliidi kiirus kogu orbitalperioodi jooksul konstantne ja seetõttu on varjus veedetud osa ajast võrdne orbiidi varjus oleva osa pikkuse ja kogu orbiidi pikkuse suhtega, mis on ülal toodud jooniselt leitav kui

$$k = \frac{2\alpha r}{2\pi r} = \frac{\arcsin(\frac{R}{r})}{\pi} = 36,5\%$$

### L163 Väike prints ★

Autor: Urmo Visk, piirkonnavor, 2009, G 1

Kui väike prints könnib piki asteroidi ekvaatorit, mõjub talle gravitatsioonijoud, mis põhjustab kesktömbekiirendust. Kaalugu väike prints  $m$  kilogrammi. Newtoni II seaduse põhjal

$$m \frac{v^2}{R} = G \frac{mM}{R^2} \Rightarrow v^2 = \frac{GM}{R}.$$

Asteroidi mass pole teada, kuid teada on asteroidi tihedus. Kui asteroidi raadius on  $R$ , siis on asteroidi ruumala  $V = \frac{4}{3}\pi R^3$  ja mass

$$M = \rho V = \frac{4}{3}\pi \rho R^3.$$

Asendades massi esialgsesse avaldisse saame

$$v^2 = \frac{GM}{R} = \frac{G}{R} \cdot \frac{4}{3}\pi\rho R^3 = \frac{4}{3}\pi\rho G R^2.$$

Sit avaldame asteroidi raadiuse:

$$R = v \sqrt{\frac{3}{4\pi\rho G}} = \frac{v}{2} \sqrt{\frac{3}{\pi\rho G}} = 5 \text{ km.}$$

#### L164 Maa pöörlemisperiood ★

Autor: Eero Vaher, piirkonnavor, 2014, G 3

Päikese näivat liikumist taevas põhjustavad nii Maa pöörlemine kui ka tiirlemine. Maa tiirlemise töttu erineb Maa täispöörte arv aastas ühe võrra keskmiste päikeseoüpäevade arvust. Kuna Maa tiirlemise suund ühtib Maa pöörlemise suunaga, teeb Maa ühe aasta jooksul ühe täispöörde rohkem. Seega on Maa pöörlemisperioodiks

$$P = \frac{365,256}{366,256} \cdot 86\,400 \text{ s} = 86\,164 \text{ s} = 23 \text{ h}56 \text{ min}4 \text{ s}.$$

*Alternatiivne lahendus*

Päike teeb täistiiru taevas sagedusega  $f_k = \frac{1}{86\,400 \text{ s}}$ . Maa tiirlemise sagedus on  $f_t = \frac{1}{365,256 \cdot 86400 \text{ s}}$ . Kuna Maa pöörlemis- ja tiirlemissuunad ühtivad, siis kehtib võrrand  $f_k = f_p - f_t$ , kus  $f_p$  on Maa pöörlemise sagedus. Siit saame avaldada Maa pöörlemisperioodi

$$P = \frac{1}{f_p} = \frac{1}{f_k + f_t} = 86\,164 \text{ s} = 23 \text{ h}56 \text{ min}4 \text{ s}.$$

*Märkused.*

- Nimetuse keskmise päikeseoüpäev tingib asjaolu, et Maa elliptilise orbiidi töttu on Päikese näiv nurkkiirus taevas veidi muutlik.
- Maa tiirlemisperioodi nimetatakse ka sideeriliseks aastaks.
- Enamasti mõistetakse aastana troopilist, mitte sideerilist aastat, mis on defineeritud pöörripäevade kordumise põhjal. Troopilise ning sideerilise aasta erinemise põhjustab Maa telje pretsessioon. Igapäevaelus ei ole olulised mitte Maa pöörlemine ning tiirlemine vaid hoopis Päikese ööpäevane liikumine taevas ning aasta-aegade kordumine, mistõttu laialdaselt kasutatavad ööpäeva ning aasta mõisted erinevadki Maa pöörlemis- ning tiirlemisperioodidest.

**L165 Eksinud satelliit ★★**

Autor: tundmatu, lahtine, 2009, G 5

Leiame geostatsionaarse orbiidi raadiuse, olgu see  $r$ . Sellel orbiidil on satelliidi tiirlemise periood  $T = 24\text{ h} = 86\,400\text{ s}$  ning nurkkiirus  $\omega = \frac{2\pi}{T} = 7,27 \cdot 10^{-5}\text{ s}^{-1}$ . Olgu satelliidi mass  $m$  ja Maa mass  $M$ . Satelliit liigub kekstõmbekiirendusega  $a = \omega^2 r$  ning talle mõjub gravitatsioonijõud

$$F_G = G \frac{Mm}{r^2}.$$

Newtoni II seaduse põhjal

$$G \frac{Mm}{r^2} = m\omega^2(R + h) \Rightarrow r^3 = \frac{GM}{\omega^2}.$$

Raskuskiirendus maapinnal võrdub  $g = G \frac{M}{R^2}$ , kust saame avaldada  $GM = gR^2$ . Saame nüüd asendada

$$r^3 = \frac{gR^2}{\omega^2} \Rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{gR^2}{\omega^2}} \approx 42\,300\text{ km}.$$

Satelliidi orbitaaliikumise kiirus on seega  $v_0 = \omega r = 3,08\text{ km/s}$ . Põrkekiirus on maksimaalne siis, kui „eksinud“ satelliit tiirleb samal ringorbiidil mis teised side-satelliidid, kuid liikumise suund on vastupidine. Sel juhul

$$v = 2v_0 = 6,16\text{ km/s}.$$

**L166 Orbiit ★★**

Autor: Mihkel Pajusalu, lahtine, 2014, G 3

Selles ülesandes kasutame lähendust, et väikese massiga (olgu selleks  $m$ ) punkt-mass Kuu tiirleb ümber suure punktmassi Maa. Paneme tähele, et Kuu gravitatsioonilise potentsiaalse energi ja kineetilise energia summa on jäav.

$$\frac{mv_1^2}{2} - G \frac{Mm}{r_1} = \frac{mv_2^2}{2} - G \frac{Mm}{r_2}.$$

Samuti on kõigil orbiitidel liikuvatel kehadel muutumatu impulsimoment. Kuna orbiidid on ellipsoidid, siis suurimal ja vähimal kaugusel Maast on Kuu orbitaalkiirus risti Kuud Maaga ühendava sirgega. Seega saab kirjutada impulsimomendi jäavuse seaduse suurima ja vähimma kauguse jaoks kujul

$$mv_1 r_1 = mv_2 r_2.$$

Kuu mass taandub mõlemast jäävusseadusest välja. Saame süsteemi

$$\frac{v_1^2}{2} - G \frac{M}{r_1} = \frac{v_2^2}{2} - G \frac{M}{r_2}, \\ v_1 r_1 = v_2 r_2.$$

Süsteemi lahenditeks on  $r_2 = r_1$ , mis ei vasta elliptilisele orbiidile, ja

$$r_2 = \frac{1}{\frac{2GM}{r_1^2 v_1^2} - \frac{1}{r_1}} \approx 430\,000\text{ km}.$$

**L167 Päikese tihedus ★★**

Autor: Eero Vaher, piirkonnavor, 2013, G 6

Päikese raadius on  $r = R \sin \alpha/2$  ja ruumala  $V = 4\pi r^3/3$ . Maa joonkiirus oma orbiidil ümber Päikese on  $v = \frac{2\pi R}{T}$ . Et Maa püsiks oma orbiidil, peab sellele mõjuma kesktõmbejöud  $F = \frac{mv^2}{R}$ , kus  $m$  on Maa mass. See kesktõmbejöud on teadagi Maa ja Päikese vaheline gravitatsioonijöud  $G \frac{mM}{R^2}$ , kus  $M$  on Päikese mass, seega

$$\frac{mv^2}{R} = G \frac{mM}{R^2}.$$

Saame

$$M = \frac{Rv^2}{G}.$$

Päikese tihedus avaldub seosest  $\varrho = \frac{M}{V}$ ,

$$\varrho = \frac{Rv^2}{G} \frac{3}{4\pi r^3} = \frac{24\pi R^3}{GT^2 \sin^3 \alpha} = 1,4 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3.$$

**L168 Ühendatud satelliigid ★★**

Autor: Eero Vaher, piirkonnavor, 2018, G 6

Trossi puudumisel peab satelliidile mõjuv kesktõmbejöud olema võrdne sellele mõjuva raskusjöuga. Esimese satelliidi jaoks

$$\frac{mv_1'^2}{R_1} = G \frac{Mm}{R_1^2},$$

millega järeltuleb

$$v_1' = \sqrt{\frac{GM}{R_1}}$$

ning analoogiliselt

$$v_2' = \sqrt{\frac{GM}{R_2}}.$$

Kuna satelliigid on trossiga ühendatud, siis seesmissele satelliidile mõjuv kesktõmbejöud peab olema sellele mõjuva raskusjöu ning trossi pingi vahe ning välimisele satelliidile mõjuv kesktõmbejöud peab olema sellele mõjuva raskusjöu ning trossi pingi summa. Niisiis

$$\begin{cases} \frac{mv_1'^2}{R_1} = G \frac{Mm}{R_1^2} - T, \\ \frac{mv_2'^2}{R_2} = G \frac{Mm}{R_2^2} + T. \end{cases}$$

Kuna  $v_1 = 2\pi R_1/P$  ning  $v_2 = 2\pi R_2/P$ , siis saame kirjutada

$$\frac{4\pi^2}{P^2} (R_1 + R_2) = GM \frac{R_2^2 + R_1^2}{R_1^2 R_2^2}.$$

Tehes asenduse  $R_2 = 2R_1$ , saame

$$\frac{2\pi R_1}{P} = \sqrt{\frac{5GM}{12R_1}},$$

ning asendusest  $R_1 = \frac{R_2}{2}$  järeltub

$$\frac{2\pi R_2}{P} = \sqrt{\frac{10GM}{3R_2}}.$$

Sisemine satelliit tiirleb niisiis trossi tõttu  $\sqrt{12/5}$  korda väiksema ning välimine  $\sqrt{10/3}$  korda suurema joonkiirusega.

### L169 Satelliit ★★

Autor: Eero Vaher, lõppvoor, 2013, G 5

Satelliidile orbiidil möjuv kesktõmbejöud on Maa poolt satelliidile avaldatav gravitatsioonijöud. Saame

$$\frac{mv^2}{R} = G \frac{Mm}{R^2},$$

kus  $m$  on satelliidi mass ja  $R$  orbiidi raadius. Kuna geostatsionaarne satelliit Maa suhtes ei liigu, peab selle tiirlemisperiood olema samuti 24 h. Saame  $v = \frac{2\pi R}{t}$ . Neist võrranditest saame

$$4\pi^2 R^3 = GM \Rightarrow R = \sqrt[3]{\frac{GMt^2}{4\pi^2}} = 42\,400 \text{ km}.$$

Maa keskpunkt, satelliit ning satelliidilt nähtava maa-ala serval asetsev suvaline punkt moodustavad täisnurkse kolmnurga, mille hüpotenuusiks on satelliidi orbiidi raadius ning üheks kaatetiks Maa raadius. Maa keskmes asuvaks nurgaks saame  $\alpha = \arccos \frac{r}{R}$ , kuid kuna meid huvitab satelliidilt nähtava ala läbimõõt, peame leidma nurga  $2\alpha$ . Sellele nurgale vastav kaare pikkus Maa pinnal on  $d = 2r\alpha$  (kui nurk on radiaanides). Lõppvastuseks saame

$$d = 2r \arccos \left( \frac{r}{\sqrt[3]{\frac{GMt^2}{4\pi^2}}} \right) = 18\,000 \text{ km}.$$

**L170 Kosmosejaam ★★★**

Autor: Oleg Košik, lõppvoor, 2005, G 9

Maa pöörlemise tõttu ümber oma telje tekivad trajektoori nihked. Mõõdame nihke pikkuse ekvaatoril  $\Delta l$  ning ekvaatori pikkuse (ehk kogu kaardi lause)  $l$ . Nende suhe määrab kosmosejaama nurkkiiruse  $\omega_J$  ja maa pöörlemise nurkkiiruse  $\omega_M$  suhte:

$$\alpha = \frac{l}{\Delta l} = \frac{\omega_J}{\omega_M} \approx 15,7.$$

Arvestades, et maa pöörlemise nurkkiirus on  $\omega_M = 2\pi/T$ , kus  $T$  on ööpäeva pikkus ehk 86 400 s, leiate

$$\omega_J = \alpha \omega_M = \frac{2\pi\alpha}{T}.$$

Kosmosejaamale mõjuv gravitatsioonijõud määrab kesktõmbekiirenduse:

$$mg' = m\omega_J^2 r = m\omega_J^2(R + h),$$

kus  $g'$  on raskuskiirendus kõrgusel  $h$  maapinnast. Gravitatsiooniseadusest teame, et raskuskiirendus on pöördvõrdeline kauguse ruuduga, milles

$$g' = g \left( \frac{R}{r} \right)^2 = g \left( \frac{R}{R+h} \right)^2.$$

Kombineerides kaks viimast võrrandit, saame

$$\omega_J^2(R + h) = g \left( \frac{R}{R+h} \right)^2,$$

kust ostitav kõrgus on

$$h = \sqrt[3]{\frac{gR^2}{\omega_J^2}} - R = \sqrt[3]{\frac{gR^2 T^2}{4\pi^2 \alpha^2}} - R \approx 359 \text{ km}.$$

*Märkus:* tegelik kõrgus varieerub 350 ja 365 km vahel (Maa raadius ei ole kõikjal ühesugune). Siin  $\alpha$  väärus oli mõõdetud suhteliselt täpsete arvutigraafika vahenditega, joonlauga joonise mõõtmise korral esinevate ebatäpsuste tõttu võib vastus erineda tegelikust kuni 200 kilomeetri võrra.

**L171 Kuukaabel ★★★★**

Autor: Siim Ainsaar, piirkonnnavoor, 2009, G 10

a) Maa avaldab kaablile jõudu

$$F_M = Gm_M\lambda \left( \frac{1}{r_M} - \frac{1}{D-r_K} \right),$$

analoogiliselt Kuu,

$$F_K = Gm_K\lambda \left( \frac{1}{r_K} - \frac{1}{D-r_M} \right).$$

Suhe on seega

$$\frac{F_M}{F_K} = \frac{m_M \left( \frac{1}{r_M} - \frac{1}{D-r_K} \right)}{m_K \left( \frac{1}{r_K} - \frac{1}{D-r_M} \right)} \approx 21,9.$$

b) Leiame kaablit pingutava jõu  $T(x)$  Kuu keskmest mingil kaugusel  $x$ . Sellest kau- gusest Maa-poolset kaabliosa mõjutavad kolm jõudu: kaabli pinge  $T(x)$  ning Maa ja Kuu poolt avaldatavad raskusjõud. ( $x$ -st Kuu-poolset osa mõjutab ka otsa Kuu küljes hoidev jõud, selle arvutamiseks pole tarividust.) Nimetatud jõud on tasakaalus, mistõttu

$$T(x) = G\lambda m_M \left( \frac{1}{r_M} - \frac{1}{D-x} \right) - G\lambda m_K \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{D-r_M} \right).$$

Kaabel katkeks seal, kus pinge on tugevaim, seega lahendame ekstreemumüles- ande ja leiame  $T(x)$  maksimumi. Seal tuletis  $T'(x) = 0$ . Kui saame ainult ühe mõistliku lahendi, pole ekstreemumi liigi määramiseks teist tuletist vajagi: teame, et kosmoses on  $T$  suurem kui kaabli otstes (taevakeha pinnalt kaabliosade eral- duspunkti eemaldudes kasvab lähema keha tõmmme alumisele kaablipoolle ilm- selt kiiremini kui kahaneb teise keha tõmmme ülemisele; osade suhtelised massid muutuvad oluliselt erineva kiirusega), tänu millele (vähemalt) üks maksimum ek- sisteerib.

$$T'(x) = -\frac{G\lambda m_M}{(D-x)^2} + \frac{G\lambda m_K}{x^2} = 0 \implies x = \frac{D}{1 \pm \sqrt{\frac{m_M}{m_K}}}.$$

Miinusmärgiga lahend on negatiivsena mittefüüsikaline, seega otsitavaks kõrgu- seks osutub

$$h = \frac{D}{1 + \sqrt{\frac{m_M}{m_K}}} - r_K \approx 36\,200 \text{ km.}$$

## L172 Satelliidid ★★★★

Autor: Mihkel Kree, lõppvoor, 2010, G 7

Lähtume analoogiast molekulaarfüüsikaga, kus ühe molekuli vaba tee hindamisel arvestatakse, et molekul liigub ilma põrgeteta tüüpiliselt aja jooksul, mil tema kokkupõrke-ristlõige on katnud ruumala, milles asub tüüpiliselt üks osake (see ruumala avaldub kui anuma ruumala jagatud osakeste arvuga). Kokkupõrke-ristlõige pole päris identne osakese enda ristlõikega – vaatleme näiteks kera-kujulisi osakesi raadiusega  $r$ , osakesed põrkuvad, kui nende tsentrid ei ole teineteisest kaugemal kui  $2r$ , niisiis on ühe osakese kokkupõrke-ristlõige neli korda suurem tema ristlõkest.

Satelliidid liiguvalt ruumiosas ruumalaga

$$V = \frac{4\pi}{3} [(R + h_2)^3 - (R + h_1)^3] \approx 1,2 \cdot 10^{12} \text{ km}^3.$$

Liikumisruum ühe satelliidi kohta on seega  $V/N$  (niisuguse ruumalaga suvaliselt valitud ruumiosast leidame tüüpiliselt ühe satelliidi).

Aja  $t$  jooksul katab ühe satelliidi kokkupõrke-ristlõige ruumala

$$V_t = 4Svt,$$

kus  $v$  on tüüpiline satelliidi liikumise kiirus. Me ei tee suurt viga, võttes  $v$  väärtsuseks esimese kosmilise kiiruse (kiirus sõltub raadiuse ruutjuurest ning suhteline viga oleks ainult  $\sqrt{\frac{6400+2000}{6400}} \approx 1,15$ ):

$$\frac{v^2}{R} = \frac{GM}{R^2} = g.$$

Niisiis,

$$V_t = \sqrt{gR}4St.$$

Eelneva arutluse kohaselt arvestame, et ühel satelliidil tuleb kokkupõrget oodata niisugune ajavahemik  $t$ , et  $V_t = V/N$ . Et meil on aga  $N$  satelliiti, siis esimese niisuguse kokkupõrkeni kulub  $N$  korda vähem aega. Seega,

$$\Delta t = \frac{V}{N^2 4S\sqrt{gR}} = \frac{1,2 \cdot 10^{12} \cdot 10^9}{4 \cdot 2,5^2 \cdot 10^6 \cdot 10 \cdot \sqrt{10 \cdot 64 \cdot 10^2 \cdot 10^3}} s = 6 \cdot 10^8 \text{ s},$$

ehk

$$\Delta t = \frac{6 \cdot 10^8}{3600 \cdot 24 \cdot 365} \approx 19 \text{ a.}$$

**L173 Jalgpall ★**

Autor: tundmatu, lahtine, 2006, G 1

Iga pumpamiskäigu alguses täidab atmosfääri õhk röhuga  $p_0$  pumba siseruumi ruumalaga  $v$ . Pumpamiskäigu lõpus on see õhk pallis, kus ta ruumala on  $V$  ja osaröhk  $p$ . Viimase saame leida Boyle-Mariotte'i seadusest:

$$p = \frac{p_0 v}{V}.$$

Pärast  $N$  pumpamiskäiku on röhk pallis võrdne osaröhkude summaga:

$$p_N = Np = \frac{Nv p_0}{V} = \frac{40 \cdot 150 \cdot 0,1}{3000} = 0,2 \text{ MPa.}$$

**L174 Allveelaev ★**

Autor: tundmatu, lahtine, 2007, G 3

Kuna temperatuur on jäav, kehtib seos  $pV = \text{Const}$ . Olgu laeva ruumala  $V$  ning õhu ruumala laevas peale ventiilide avamist  $v$ . Siis

$$p_0 V = (p_0 + \rho gh) v,$$

$$k = \frac{v}{V} = \frac{p_0}{p_0 + \rho gh} = \frac{0,1 \cdot 10^6}{0,1 \cdot 10^6 + 1,03 \cdot 10^3 \cdot 9,8 \cdot 42} \approx 0,19.$$

**L175 Tuukrid ★**

Autor: Ott Krikmann, piirkonnavor, 2007, G 4

Oletame, et tuuker pumpas pinna lähedal vesti õhku, mille ruumala oli  $V_0$ . Vee pinna lähedal oli röhk võrdne välisröhuga. Sukeldudes 25 m sügavusele, suureneb röhk  $\Delta p = \rho gh$  vörra. Summaarne röhk sellel sügavusel on seega

$$p = p_0 + \Delta p = p_0 + \rho gh$$

Võrdusest  $pV = p_0 V_0$  leiame, et

$$\frac{V_0}{V} = \frac{p}{p_0} = \frac{p_0 + \rho gh}{p_0} = 3,33.$$

Seega, vestis oleva õhu ruumala väheneb endisega võrreldes 3,33 korda. Järelikult on vaja sellel sügavusel suurendada õhu ruumala 3,33 korda, et saavutada hõlju mine.

**L176 Toaõhk ★**

Autor: Mihkel Rähn, lõppvoor, 2008, G 3

Summaarne kineetiline energia on  $E = N \cdot \langle E_m \rangle$ , kus  $N$  on toas oleva gaasi molekulide arv ja  $\langle E_m \rangle$  ühe molekuli gaasi keskmise kineetiline energia. Kehtib

$$\langle E_m \rangle = \frac{3}{2}kT.$$

Ideaalse gaasi võrrandist saab avaldada toas olevate molekulide arvu  $N = pV/(kT)$ . Pannes need kokku,  $E = \frac{3}{2}pV$ . Kuna toas on õhurõhk võrdne välisrõhuga, ei sõltu toas olevate õhumolekulide summaarne kineetiline energia temperaturist.

**L177 Šupall ★**

Autor: Eero Vaher, lõppvoor, 2015, G 1

Suurima võimaliku koormise massi korral on ūupalli keskmise tiheduse võrdne õhu tihedusega ehk  $\rho = \frac{m+M}{V}$ , kus  $m$  on ūupallis oleva gaasi mass. Siit saame avaldada  $m = \rho V - M$ . Lisaks kehtib ideaalse gaasi seadus  $pV = \frac{m}{\mu}RT$ , milles saame  $m = \frac{pV\mu}{RT}$ . Nende kahe võrrandi põhjal saame kirjutada

$$\frac{pV\mu}{RT} = \rho V - M$$

ehk

$$V = \frac{M}{\rho - \frac{p\mu}{RT}} = 193 \text{ m}^3.$$

**L178 Gaasitermomeeter ★★**

Autor: Valter Kiisk, piirkonnavoor, 2006, G 5

Olgu mõõteampulli ruumala  $V$  ning manomeetri ruumala  $V_m$ . Kui toatemperatuuril  $T_0$  täideti seade  $n$  mooli gaasiga, siis ideaalse gaasi olekuvõrandi põhjal

$$\frac{p_0 V}{T_0} + \frac{p_0 V_m}{T_0} = nR.$$

Kuna manomeeter ja mõõteampull on kapillaari kaudu ühenduses, siis nende gaastrõhud on isegi temperatuuride erinedes ühesugused. Kui mõõteampull on temperatuuril  $T$ , siis (gaasi koguhulk jäab samaks)

$$\frac{pV}{T} + \frac{pV_m}{T_0} = nR.$$

Elimineerides  $n$  ja asendades  $V_m/V = \alpha$ , saame

$$T = \frac{pT_0}{p_0 + (p_0 - p)\alpha} \approx 20,5 \text{ K}.$$

**L179 Tuulik ★★**

Autor: Valter Kiisk, piirkonnnavoor, 2007, G 5

Tiiviku poolt haaratav pindala on

$$S = \frac{\pi d^2}{4},$$

Ajavahemikus  $\Delta t$  kandub läbi selle pinna õhumass  $\Delta m = vS\rho\Delta t$ , mille kineetiline energia on

$$\Delta E = \frac{\Delta mv^2}{2} = \frac{S\rho\Delta tv^3}{2},$$

millele vastab võimsus  $P_0 = S\rho v^3/2$ . Elektriks õnnestub muundada osa  $\eta$  sellest:

$$P = \eta P_0 = \frac{\eta S\rho v^3}{2} = \frac{\eta \pi d^2 \rho v^3}{8} \approx 370 \text{ kW}.$$

**L180 Rong tunnelis ★★**

Autor: Eero Uustalu, lõppvoor, 2009, G 4

Õhu temperatuur tunnelis kasvab, kuna mootor soojendab tunneli läbimisel selles elevat õhku. Vaatleme rongi liikumist ajavahemiku  $\Delta t$  jooksul. Selle ajaga läbib rong vahemaa  $s = v\Delta t$  ja rongist mööduva õhu ruumala on  $\Delta V = \pi d^2 s/4$ . Õhu mass on  $m = \Delta V \rho$  ja moolide arv on

$$N = \frac{m}{M} = \frac{\Delta V \rho}{M} = \frac{\pi d^2 v \Delta t \rho}{4M}.$$

Ideaalse gaasi olekuvõrrandist  $pV = \frac{m}{M}RT$  saame avaldada  $\rho = \frac{m}{V} = \frac{pM}{RT}$ . Rongi mootoris eraldub samal ajal soojushulk  $Q_1 = P\Delta t$ .

Üheaatomilise gaasi erisoojus jääval ruumalal on  $C_1 = 3/2R$ . Seega on kaheatomilise gaasi erisoojus  $C_2 = 5/3 \cdot 3/2R = 5/2R$ . Gaasi erisoojus jääval röhul on seega  $C = 5/2R + R = 7/2R$ . Õhu soojendamiseks  $\Delta T$  võrra kulub soojushulk  $Q_2 = NC\Delta T$ . Võrdsustame soojushulgad  $Q_1$  ja  $Q_2$ .

$$NC\Delta T = P\Delta t.$$

Asendades leitud avaldised  $N$  ja  $C$  jaoks saame pärast teisendusi

$$\Delta T = \frac{8PT}{7\pi d^2 vp} = 2,25 \text{ K}.$$

### L181 Õhupalli vägi ★★

Autor: Eero Vaher, lahtine, 2013, G 4

Õhupallile mõjub Maal üleslükkejõud  $F = \rho_0 V g$ , kus  $V$  on õhupalli ruumala ning  $g$  raskuskiirendus. Piirjuhul peab see olema võrdne koormisega õhupallile mõjuva raskusjõuga  $F_g = (M_0 + m)g$ , kus  $m$  on õhupalli gaasi mass ning  $M_0$  maksimaalne koormise mass Maal. Saame  $M_0 + m = \rho_0 V$ . Ideaalse gaasi seadusest saame

$$V = \frac{mRT_0}{\mu p_0},$$

seega

$$M_0 = m \left( \frac{\rho_0 RT_0}{\mu p_0} - 1 \right).$$

Marsil annaks analoogiline mõttækäik maksimaalseks koormise massiks

$$M = m \left( \frac{\rho_1 RT_1}{\mu p_1} - 1 \right),$$

seega

$$M = \frac{\left( \frac{\rho_1 RT_1}{\mu p_1} - 1 \right)}{\left( \frac{\rho_0 RT_0}{\mu p_0} - 1 \right)} M_0 \approx 160 \text{ kg}.$$

*Kui õpilane tõlgendas sõnapaari "samasugune õhupall" nii, et õhupalli ruumala peab samaks jäama, loetakse õigeks ka järgnev lahendus.*

Õhupallile mõjuva üleslükkejõu peab piirjuhul tasakaalustama õhupallile mõjuv raskusjõudu, seega  $\rho_0 V = M_0 + m_0$ , kus  $V$  on õhupalli ruumala ning  $m_0$  õhupallis oleva heeliumi mass. Õhupalli massi saame leida ideaalse gaasi seadusest

$$m_0 = \frac{V \mu p_0}{RT_0}.$$

See annab meile ruumala jaoks võrrandi

$$V = \frac{M_0}{\rho_0 - \frac{\mu p_0}{RT_0}}$$

ning suurimaks Marsil õhku töstetavaks massiks

$$M + m_1 = \frac{M_0 \rho_1}{\rho_0 - \frac{\mu p_0}{RT_0}},$$

kus  $M$  on koormise mass ning  $m_1$  õhupalli sees oleva heeliumi mass Marsil. Õhupalli sees oleva heeliumi massi saame leida ideaalse gaasi seadusest. Saame

$$M = \frac{M_0}{\rho_0 - \frac{\mu p_0}{RT_0}} \left( \rho_1 - \frac{\mu p_1}{RT_1} \right) \approx 1,3 \text{ kg}.$$

**L182 Paisupaak ★★**

Autor: Mihkel Kree, lõppvoor, 2014, G 3

Et avariiventil avaneks, peab rõhk süsteemis kasvama vääruseni  $p = p_0 + \Delta p = 2,2p_0$ . Paisupaagis olev rõhk on seega kokku pressitud ruumalale  $V_2 = V_1 p_1 / p$  (gaasi olekuvõrrandist konstantsel temperatuuril), mis tähendab, et vesi sai paisuda ruumala  $\Delta V = V_1 - V_2 = \frac{7}{22}V_1$  võrra. See aga moodustab

$$\alpha = \frac{\Delta V}{V_0} = \frac{7}{22} \frac{V_1}{V_0} \approx 0,025 = 2,5\%$$

vee algsest ruumalast. Et vee mass jäääb samaks, tähendab see tiheduse kahanemist vääruseni

$$\rho' = \left( \frac{1}{1 + \alpha} \right) \rho_0 \approx (1 - \alpha) \rho_0 = 975 \text{ kg/m}^3.$$

Temperatuuri ja tiheduse sõltuvuse graafikult loeme, et see vastab temperatuurile  $t_{\max} = 75^\circ\text{C}$ .

**L183 Balloon ★★**

Autor: Kaur Aare Saar, lahtine, 2015, G 3

Kuna balloon on silindrikujuline, on pinged selle telje sihis ning sellega ristuvas sihis erinevad. Mõlemal juhul peab balloonit seinas olev jõud tasakaalustama balloonisisese gaasi rõhu põhjustatud jõu. Teljesihilise pingega jaoks saame võrrandi  $\pi r^2 p_1 = 2\pi r t \sigma$  ehk  $p_1 = \frac{2t\sigma}{r}$ . Pinge balloonit teljega ristuvas sihis leiate silindrit poolitavat mõttelist ristkülikukujulist lõiget vaadeldes. Jõudude tasakaalust saame  $2r h p_2 = 2ht\sigma$ , kus  $h \gg r$  on balloonit kõrgus, ehk  $p_2 = \frac{t\sigma}{r}$ . Balloonit poolt talutav rõhk on neist kahest väiksem ehk

$$p = \frac{t\sigma}{r} = 16,7 \text{ bar.}$$

**L184 Saunauks ★★**

Autor: Mihkel Kree, piirkonnavoor, 2016, G 5

Kerisele visatakse  $n = m/\mu$  mooli vett, mis aurustudes tekitaks hermeetiliselt sulitud ruumis lisarõhu, mis on leitav gaasi seadusest:  $\Delta p = nRT/V$ . See rõhk avaldab uksele jõudu  $F = \Delta p A$ . See jõud mõjub ühtlaselt üle kogu ukse pinna, niisiis tuleb uksele mõjuva jõumomendi arvutamisel võtta jõu õlaks pool ukse laiusest. Et aga üst kinni hoides rakendaksid saunalised oma jõu  $F_1$  käepidemele, kus jõu õlaks on terve ukse laius, siis saame öelda, et saunalised peaksid ukse kinnihoidmiseks rakendama jõudu

$$F_1 = \frac{F}{2} = \frac{mRTA}{2\mu V} = 2500 \text{ N.}$$

Leitud jõud on töepooltest ebaloomeilikult suur. Lisaküsimuse vastuseks võime öelda, et kerisel aurustunud sadakond liitrit veeauru surub üleliigse õhu igasugustest piludest kiiresti välja ja seetõttu märkimisväärset ülerõhku uksele ei avaldugi.

**L185 Rattamatk ★★**

Autor: Ardi Loot, lahtine, 2017, G 5

Koormatud rehvi kokkupuutepinnale maaga mõjuvad ühelt poolt rehvi sees oleva suruõhu poolt jõud  $(p_0 + p) S$  ning teiselt poolt õhurõhu poolt tekitatud jõud  $p_0 S$  ja maapinna reaktsioonijõud  $mg$ . Nende jõudude tasakaalutingimus annab meile võrrandi  $(p_0 + p) S = p_0 S + mg$ . Kasutades avaldist rehvi kokkupuutepinna suuruse  $S \approx 2\pi\Delta R\sqrt{Rr}$  sõltuvusest deformatsioonist  $\Delta R$ , saame leida, et rehv on deformeeritud

$$\Delta R = \frac{mg}{2\pi p\sqrt{Rr}} \approx 3,4 \text{ mm} \quad (1)$$

võrra.

Rehvilt koormuse eemaldamise tulemusena suureneb selle ruumala  $\Delta V \approx S \cdot \Delta R / 2 \approx 3,4 \text{ cm}^3$  võrra ja seetõttu väheneb suruõhu rõhk rehvis  $\Delta p$  võrra. Kasutades ideaalse gaasi võrrandit, saame tingimuse

$$(p_0 + p)(V - \Delta V) = (p_0 + p - \Delta p)V$$

ja selle lahendamisel

$$\Delta p = (p_0 + p) \frac{\Delta V}{V} \approx 224 \text{ Pa.} \quad (2)$$

On selge, et rehvi pumpamisel on rakendatav jõud võrdeline rehvis oleva rõhuga (õhurõhu suhtes) ja seega peab ta rakendama vaid

$$\frac{\Delta p}{p} = \frac{(p + p_0) m^2 g^2}{8\pi^3 p^3 (R - r) r^2 \sqrt{Rr}} \approx 0,15 \%$$

võrra vähem jõudu võrreldes olukorraga, kui rehv on koormatud.

**L186 Silinder külmkapis ★★**

Autor: Rasmus Kiseli, piirkonnavoor, 2017, G 6

Oletame, et silindris oleva õhu rõhk oli algsest  $p_0$ . Kuna aine mass jäääb samaks, siis kui tihedus läheb  $\lambda$  korda suuremaks, peab aine ruumala minema  $\lambda$  korda väiksemaks. Seega pärast tahkumist täidab tahkis silindrist osa  $k' = \frac{k}{\lambda}$ . Leiame pärastise õhurõhu  $p_2$ . Ideaalse gaasi olekuvõrrandi kohaselt  $pV = nRT$  ning seega kehtivad algse ja pärastise seisus kohta järgmised võrrandid:

$$p_0 V_0 = nRT_1,$$

$$p_2 V_2 = nRT_2.$$

Sitleiame, et

$$p_2 = p_0 \frac{V_0 T_2}{V_2 T_1},$$

kus  $V_0$  on gaasi esialgne ruumala ning  $V_2$  gaasi ruumala hiljem. Teame aga, et  $V_0 = (1 - k)V_{\text{kogu}}$  ja  $V_2 = (1 - k')V_{\text{kogu}}$  ning seega saame õhurõhu pärast tahkumist:

$$p_2 = p_0 \frac{T_2 \lambda (1 - k)}{T_1 (\lambda - k)}.$$

Pärastise ja esialgse rõhu suhe on seega:

$$\frac{p_2}{p_0} = \frac{T_2\lambda(1-k)}{T_1(\lambda-k)}.$$

### L187 Heelium ★★

Autor: tundmatu, lahtine, 2008, G 6

Käsiteleme heeliumit üheaatomilise ideaalse gaasina. Paneme kirja olekuvõrrandid alg- ja lõppseisundi jaoks:

$$p_1 V_1 = nRT_1, \quad p_2 V_2 = nRT_2.$$

Paisumisel tehtav töö võrdub graafikul halliks värvitud trapetsi pindalaga:

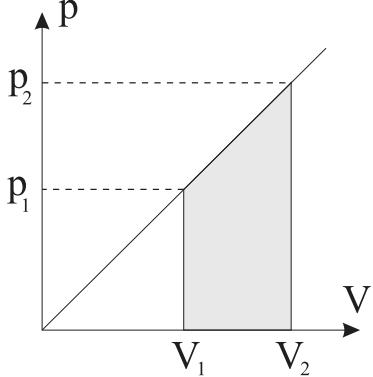
$$A = \frac{1}{2}(p_2 V_2 - p_1 V_1) = \frac{1}{2}nR(T_2 - T_1).$$

Termodünaamika I seaduse kohaselt

$$Q = A + \Delta U = \frac{1}{2}nR(T_2 - T_1) + \frac{3}{2}nR\Delta T = 2nR\Delta T.$$

Sit

$$\Delta T = \frac{Q}{2nR} \approx 6 \text{ K}.$$



### L188 Õhk ★★

Autor: tundmatu, lahtine, 2009, G 7

Temperatuuri kasvades hakkab esimese anuma rõhk  $p_1$  suurenema ning mingil hetkel ületab see ventili kriitilise rõhu  $\Delta p$ . Sellest hetkest alates hakkab ventiil õhku läbi laskma nõnda, et edaspidi anumate rõhud  $p_1$  ja  $p_2$  rahuldavad tingimust  $p_1 - p_2 = \Delta p$ . See tingimus jäab edaspidi alati täidetuks, sest ei saa tekkida olukorda, kus väiksema rõhuga anumas kasvaks rõhk kiiremini kui suurema rõhuga anumas. Korrektse lahenduse huvides peame siiski ka veendumata, kas rõhk üldse kasvab piisavalt suureks, et ventiil avaneeks. Selleks peaks rõhk kasvama 10 % võrra, milleks omakorda peab temperatuuri tõstma vähemalt 10 % võrra – töepooltest, see on kooskõlas ülesandes antud arvudega:  $t_2 - t_1 > 30^\circ\text{C}$ . Algne gaasi hulk (moolides)

$$n = \frac{p_0 V_1}{R t_1}$$

on jäav suurus ning jaotub hiljem anumate vahel osadeks  $n_1$  ja  $n_2$  nõnda, et  $n = n_1 + n_2$ , ehk

$$\frac{p_0 V_1}{R t_1} = \frac{(p_2 + \Delta p) V_1}{R t_2} + \frac{p_2 V_2}{R t_2}.$$

Asendades  $\alpha = V_1/V_2$ , saame

$$p_0 \alpha \frac{t_2}{t_1} - \Delta p \alpha = p_2(\alpha + 1), \Rightarrow \\ p_2 = \frac{\alpha}{\alpha + 1} \left( p_0 \frac{t_2}{t_1} - \Delta p \right).$$

Kasutades arvutustes absoluutühikutesse teisendatud temperatuuride väärtsusi  $t_1 = 300\text{ K}$  ja  $t_2 = 400\text{ K}$ , saame vastuseks

$$p_2 = \frac{2}{3} \left( \frac{4}{3} - 1,1 \right) p_0 \approx 0,16 p_0.$$

### L189 Õhuhoki ★★★

Autor: Mihkel Heidelberg, lõppvoor, 2010, G 6

Olukorras, kus aluse temperatuur on minimaalne, on röhk seibi alumise külje vahetus läheduses võrdne süsihaptegaasi aururöhuga. Seibi surutakse alla jõuga  $F$  ja kuna seibi pindala on  $\pi r^2$ , peab surumist tasakaalustav röhk olema  $p = \frac{F}{\pi r^2}$ . Vaadeldes röhkude tasakaalu seibi ülemise ja alumise pinna läheduses, saame et kuiva jäää aururöhk on

$$p_{\text{kuiv}} = p + p_0 = p_0 + \frac{F}{\pi r^2} = 131,8 \text{ kPa}.$$

Sellele vastab graafiku põhjal temperatuur  $\sim 195\text{ K}$ .

### L190 Süstal ★★★

Autor: tundmatu, lahtine, 2011, G 5

Kirjutame ideaalse gaasi olekuvõrrandi süstla jaoks vahetult peale sõrmega sulgemist:

$$p_0 V = n R T.$$

Peale kolvi välja tömbamist ja vabastamist:

$$p_2 V_2 = n R T \Rightarrow p_2 = p_0 \frac{V}{V_2}.$$

Kui kolb (ristlõikepindalaga  $S = \frac{\pi d^2}{4}$ ) peale vabastamist seiskub, siis on kolvi hõõrdejõud  $F_h$  tasakaalustanud röhkude vahest tekitatud jõu:

$$F_h = S(p_0 - p_2) = S p_0 \left( 1 - \frac{V}{V_2} \right) = \frac{\pi d^2}{4} p_0 \left( 1 - \frac{V}{V_2} \right) \approx 3,6 \text{ N}$$

**L191 Kuumaõhupall ★★**

Autor: Andreas Valdmann, piirkonnavoor, 2012, G 6

Õhupallile mõjub ühes suunas üleslükkejõud, mis võrdub väljasurutud külma õhu kaaluga  $\rho_{20}Vg$ . Vastassuunas mõjub raskusjõud nii kestale ja laadungile ( $mg$ ) kui ka kuumale õhule õhupalli sees ( $\rho_kVg$ , kus  $\rho_k$  on kuuma õhu tihedus). Õhupall tõuseb lendu, kui üleslükkejõud saab võrdseks raskusjõuga:

$$\rho_{20}Vg = mg + \rho_kVg,$$

millest avaldub

$$\rho_{20} = \rho_k - \frac{m}{V}.$$

Õhu tihedus väheneb temperatuuri kasvamisel vastavalt ideaalse gaasi olekuvõrrandile

$$pV = \frac{m}{M}RT.$$

Avaldades õhu tiheduse, saame

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{pM}{RT}.$$

Õhupall on alt lahti ja õhurõhk palli sees on võrdne välisõhu rõhuga. Seetõttu on ülaltoodud võrrandis  $p$ ,  $M$  ja  $R$  konstantsed ning kahe erineva temperatuuri jaoks kirjapandud võrrandeid läbi jagades näeme, et

$$\frac{\rho_{20}}{\rho_k} = \frac{T_k}{T_{20}}.$$

Avaldades  $T_k$  ja kasutades lendutõusmise tingimust, saame:

$$T_k = \frac{\rho_{20}T_{20}}{\rho_k} = \frac{\rho_{20}T_{20}}{\rho_{20} - \frac{m}{V}} = \frac{T_{20}}{1 - \frac{m}{\rho_{20}V}}.$$

Ülaltoodud valemis tuleb kasutada absoluutset temperatuuri (kelvinites). Null kraadi Celsius skaalas on 273 K ja välisõhu temperatuur on seega  $20^\circ\text{C} = 20\text{ K} + 273\text{ K} = 293\text{ K}$ . Nüüd saamegi välja arvutada temperatuuri õhupalli sees, milleks on  $T_k = 364\text{ K} = 91^\circ\text{C}$ .

**L192 Korvpall ★★**

Autor: Andreas Valdmann, lõppvoor, 2012, G 4

Sügavale vee alla sukeldamisel surub veesamba rõhk palli kokku. Pall hakkab ise põhja vajuma, kui tema ruumala väheneb nii palju, et pallile mõjuv üleslükkejõud saab väiksemaks raskusjõust ehk palli keskmise tihedus muutub väiksemaks vee tihedusest. Kriitilisel sügavusel  $\rho = m/V$ , kus  $V$  on kokkusurutud korvpalli ruumala. Lõpptulemusena otsime vedelikusamba kõrgust, mis tekitab piisava rõhu, et palli ruumala väheneks väärtsuse  $V = m/\rho$ . Seepärast leiame esmalt pallis oleva õhu rõhu ja ruumala vahelise seose. Sukeldamata pallis on rõhk võrdne õhurõhu ja palli kestas tekkivast elastsusjõust tingitud rõhu summaga:  $p_0 + p_1$ . Kriitilisel sügavusel moodustab palli ruumala alla 10 % oma esialgsest väärtsusest, mis tähendab,

et pall on lömmi vajutatud ja elastsusjõud enam rolli ei mängi. Rõhk pallis on siis võrdne vedelikusamba rõhu ja õhurõhu summaga:  $p_v + p_0$ . Boyle'i-Mariotte'i seadusest on teada, et konstantse temperatuuri juures on ideaalse gaasi rõhk ja ruumala pöördvõrdelises sõltuvuses ehk

$$\frac{p_0 + p_1}{p_0 + p_v} = \frac{V_0}{V}.$$

Sellest valemist saame avaldada vedelikusamba kriitilise rõhu:

$$p_v = (p_0 + p_1) \frac{V_0}{V} - p_0.$$

Teades, et vedelikusammas kõrgusega  $h$  tekitab rõhu  $p_v = \rho gh$ , leiate samaväärse avaldise kriitilise sügavuse jaoks:

$$h = \frac{(p_0 + p_1) \frac{V_0}{V} - p_0}{\rho g}.$$

Nüüd tuleb veel palli alg- ja lõppruumala avaldada ülesandes etteantud suuruste kaudu. Lõppruumala on juba lahenduse alguses leitud ( $V = m/\rho$ ). Algruumala jaoks kasutame ringi ümbermõõdu ja kera ruumala valemeid

$$C = 2\pi r \text{ ja } V_0 = \frac{4}{3}\pi r^3,$$

millest saame, et  $V_0 = C^3/6\pi^2$  ning lõpuks

$$h = \frac{(p_0 + p_1) \frac{C^3 \rho}{6\pi^2 m} - p_0}{\rho g}.$$

Kriitilise sügavuse arvuline väärus on  $h = 190$  m.

### L193 Paisupaak ★★★

Autor: Ardi Loot, lahtine, 2016, G 7

Juhul, kui paisupaak pole veel küttesüsteemiga ühendatud, on terve paisupaak täidetud õhuga. Seega saab kirja panna ideaalse gaasi olekuvõrrandi:

$$p_0 V = n R T_0, \quad (1)$$

kus  $n$  on paagis oleva õhu moolide arv ja  $R$  universaalne gaasikonstant. Teisalt on nõutud, et juhul, kui süsteem täidetakse rõhuni  $p_1$ , peab olema paisupaagist osa  $\beta$  täidetud veega; seega osa  $\gamma = 100\% - \beta$  on täidetud õhuga. Kuna vahesein on vabalt liikuv, siis peavad silindris asuva vee ja õhu rõhud olema võrdsed. Seega saab kirja panna teise olekuvõrrandi:

$$p_1 \gamma V = n R T_0. \quad (2)$$

Lahendades võrranditest (1) ja (2) tekkinud süsteemi, saame

$$p_0 = \gamma p_1 = 270 \text{ kPa}.$$

Paisupaagi minimaalse ruumala  $V$  leiame tingimusest, et  $\Delta p \leq 50 \text{ kPa}$ . On selge, et kui vee ruumala suureneb  $\Delta V = \alpha V_s = 1 \text{ L}$  võrra, siis paagis oleva õhu ruumala väheneb sama palju. Seega saame kirja panna

$$p_2 (\gamma V - \Delta V) = nRT_2. \quad (3)$$

Lahendades võrranditest (1) ja (3) tekkinud süsteemi, saame

$$p_2 = p_0 \frac{V}{\gamma V - \Delta V} \cdot \frac{T_2}{T_0}$$

ning tingimus paisupaagi ruumala jaoks avaldub seega

$$V \geq \frac{(p_1 + \Delta p) T_0}{(p_1 + \Delta p) T_0 - p_1 T_2} \cdot \frac{\Delta V}{\gamma} \approx 13,2 \text{ L}.$$

#### L194 Õhk ★★★

Autor: tundmatu, lahtine, 2006, G 8

Kuiva õhu tihedus

$$\rho_1 = \frac{\mu_1 p_0}{RT}.$$

Suhtelise niiskusega  $f$  auru tihedus

$$\rho' = f \rho_0 = \frac{\mu_2 p_2}{RT},$$

kus  $p_2$  on auru osarõhk. Siit:

$$p_2 = \frac{\rho_0 f RT}{\mu_2}.$$

Kuna niiske õhu rõhk on õhu ja auru osarõhkude  $p_1$  ja  $p_2$  summa, siis

$$p_1 = p_0 - p_2 = p_0 - \frac{\rho_0 f RT}{\mu_2}.$$

Õhu tihedus (ilma auruta) sellel osarõhul

$$\rho'' = \frac{\mu_1 p_1}{RT} = \frac{\mu_1 p_0}{RT} - \frac{\mu_1 f \rho_0}{\mu_2}.$$

Niiske õhu tihedus

$$\rho_2 = \rho' + \rho'' = \frac{\mu_1 p_0}{RT} - \left( \frac{\mu_1}{\mu_2} - 1 \right) f \rho_0.$$

Niiske ja kuiva õhu tiheduste suhe on seega

$$\begin{aligned} \frac{\rho_2}{\rho_1} &= 1 - \frac{(\mu_1 - \mu_2) f \rho_0 RT}{\mu_1 \mu_2 p_0} \\ &= 1 - \frac{(0,029 - 0,018) \cdot 0,9 \cdot 0,027 \cdot 8,31 \cdot 300}{0,029 \cdot 0,018 \cdot 10^5} \approx 0,987. \end{aligned}$$

**L195 Gaasid ★★★**

Autor: Oleg Košik, lõppvoor, 2007, G 6

Kogu protsessi jooksul on mõlema gaasi rõhud võrdsed ja konstantsed. Olgu vesini-ku moolide arv  $n_0$ . Kuna alguses on ka temperatuurid võrdsed, siis valemi  $n = \frac{pV}{RT}$  põhjal näeme, et heeliumi moolide arv peab olema  $3n_0$ . Konstantsel rõhul avaldub molaarne erisoojus kui  $C_P = (\frac{i}{2} + 1) R$  (see valem on tuletatav ka teistest rohkem tuntud valemitest). Vesinik on kaheaatomiline gaas, heelium aga üheaatomiline, seega  $i_{H_2} = 5$ ,  $i_{He} = 3$  ning järelikult  $C_{PH_2} = 7/2R$  ja  $C_{PHe} = 5/2R$ . Omandagu vesinik vahetult peale soojendamist temperatuuri, mis on algtemperatuurist  $\Delta T_1$  võrra kõrgem, ning olgu terve süsteemi tasakaaluline lõpptemperatuur algtemperatuurist  $\Delta T_2$  võrra suurem. Heelium saab temperatuuride ühtlustumise ajal soojushulga  $3n_0 C_{PHe} \Delta T_2$ , mis peab võrduma vesiniku poolt ära antava soojushulgaga:

$$n_0 C_{PH_2} (\Delta T_1 - \Delta T_2) = 3n_0 C_{PHe} \Delta T_2,$$

ehk

$$\frac{7}{2} (\Delta T_1 - \Delta T_2) = 3 \cdot \frac{5}{2} \Delta T_2,$$

kust

$$\Delta T_2 = \frac{7}{22} \Delta T_1.$$

Kuna protsess on isobaariline ja nii alguses kui ka lõpus on gaaside temperatuurid võrdsed, siis kehtivad võrdused  $pV_{H_2} = n_{H_2} RT$ ,  $p(V_{H_2} + V_{He}) = (n_{He} + n_{H_2}) RT = 4n_0 RT$ . Siit tulenevalt kehtib ka

$$p\Delta V_{H_2} = n_0 R \Delta T_1,$$

$$p\Delta(V_{H_2} + V_{He}) = 4n_0 R \Delta T_2.$$

Järelikult

$$\frac{d_2}{d_1} = \frac{\Delta(V_{H_2} + V_{He})}{\Delta V_{H_2}} = \frac{4\Delta T_2}{\Delta T_1} = \frac{28}{22}.$$

Seega lõpus on koormus algusega vörreldes  $d_2 = \frac{28}{22} d_1 = 7 \text{ cm}$  kõrgemal, järelikult ta nihkub täiendavalt  $\Delta d = d_2 - d_1 = 1,5 \text{ cm}$  ülespoole.

**L196 Korsten ★★★**

Autor: Jaan Kalda, piirkonnavoor, 2009, G 9

Ahjusuusse siseneva õhu rõhk  $p_1$  on võrdne õhurõhuga ahjusuu kõrgusel ning korstnast väljuva õhu rõhk  $p_2$  on võrdne õhurõhuga korstnasuu kõrgusel. Seega,  $p_2 = p_1 - \rho_0 gh$ , kus  $\rho_0$  tähistab välisõhu tihedust. Bernoulli seaduse kohaselt kehtib seos

$$p_1 = p_2 + \rho g h + \rho \frac{v^2}{2} = p_1 - \rho_0 g h + \rho g h + \rho \frac{v^2}{2},$$

kus  $\rho = T\rho_0/T_0$  on õhu tihedus korstnas ning  $v$  on otsitav kiirus. Seega,

$$v = \sqrt{2 \left( \frac{T}{T_0} - 1 \right) gh} \approx 3,5 \text{ m/s.}$$

*Märkus:* ahjusuhu voolava õhu kiiruse võib lugeda tühiselt väikseks, sest voolava õhuga piirkonna ristlõike pindala on ilmselt hulga suurem korstna ristlõikepind-alast.

Bernoulli seaduse võib tuletada ka energia jäädvuse seadusest. Samuti lugeda õigeks impulsibalansi abil saadav tulemus (mis tuleb  $\sqrt{2}$  korda väiksem), sest nõuti vaid hindamist.

### L197 Terasanum ★★★

Autor: Valter Kiisk, piirkonnavor, 2017, G 8

Anuma tugevuse määrab ilmselt seina paksus  $h$ . Selle leiame terase ruumala  $V_t$  abil, mille omakorda leiame anuma massi  $m$  ja terase tiheduse  $\rho$  kaudu. Eeldades, et  $h$  on hulga väiksem anuma raadiusest  $r$ , siis  $V_t \approx 4\pi r^2 h$ , seega  $m = \rho V_t \approx 4\pi r^2 h \rho$ , millest  $h \approx m/(4\pi r^2 \rho) \approx 4 \text{ mm}$ , mis kinnitab meie lähendi  $h \ll d$  kehtivust. Gaasi rõhust tingitud mehaaniline tömbepinge  $\sigma_1$  anuma seintes ei tohi ületada väärust  $\sigma = 450 \text{ MPa}$ .  $\sigma_1$  leidmiseks löikame anuma mõtteliselt kaheks poolsfääriks. Gaasi rõhk  $p$  tekitab kummalegi poolsfääriile teatud summaarse rõhumisjõu  $F$ , mis surub neid poolsfääre üksteisest eemale.  $F$  leidmiseks jaotame sfääri mõtteliselt kaheks eraldiseisvaks poolsfääri kujuliseks kinniseks piirkonnaks. Kumbagi piirkonda võime vaadelda tasaakaalus kinnise süsteemina ja seega on tema sisemised rõhu poolt tekitatud jõud tasakaalus. Sellest järeldamine, et poolsfäärilise osa ringikujulisele põhjale pindalaga  $\pi r^2$  mõjub sama summaarne jõud sisemise rõhu poolt, mis poolsfääri pinnale. Kuna need jõud on võrdsed, siis mõjub poolsfääriile summaarne jõud sisemise rõhu poolt  $\pi r^2 p$  ja arrestades ka välist rõhku  $F = \pi r^2(p - p_0)$ , kus  $p_0$  on välisrõhk (101,3 kPa). Kuna anuma seina ristlõike-pindala on  $S = 2\pi rh$ , siis  $\sigma = F/S = r(p - p_0)/2h$ . Siit  $p = 2\sigma h/r + p_0 \approx 14,61 \text{ MPa}$ . Eeldades, et tegemist on ideaalse gaasiga, siis anumas oleva gaasi ruumala, kui ta oleks samal temperatuuril, aga normaalrõhul, leib valermi  $p_0 V = pV_a$  abil, kus  $V_a = \frac{4}{3}\pi r^3$  on anuma ruumala. Saame

$$V = \frac{p}{p_0} V_a \approx 9400 \text{ L.}$$

### L198 Õhupall ★★★

Autor: Ardi Loot, lõppvoor, 2017, G 7

Enne ventili avamist oli õhk temperatuuril  $T$  ja õhu rõhk oli  $p$ . Lisaks tähistame, et õhu ruumala oli enne ventili avamist  $V$  ja moolide arv oli  $n$ . Gaasil oli soojusenergia  $E_1 = c_V n T$ . Kui kolvi pindala on  $S$  ja kolvi liikumise amplituud on  $L$ , siis Juku teeb konstantsel  $F$  kolvi lõpuni alla vajutades tööd:

$$A_1 = FL = \frac{F}{S} SL = pV.$$

Analoogselt kehtib üldisemalt  $\Delta A = p\Delta V$ . Olgu pärast õhupalli täitumist õhupalli ruumala  $V_2$  ja gaasi temperatuur selles  $T_2$ . Kuna õhupalli kummi pinget lugesime tühiseks, siis on rõhk palli sees kogu aeg võrdne välise rõhuga  $p_0$  (välja arvatud vahetult ventili lächedal, kust õhk sisse voolab ja rõhk muutub läbi ventili minekul,

aga vaatleme röhku ventiilist eemal, õhupalli pinna lähedal). Et suruda õhupallist väljaspool olevat õhku eemale, teeb õhupallis olev gaas tööd  $A_2 = p_0 V_2$ , arvestades seda, et röhk õhupalli seinte lähedal on konstantsest väline õhuröhk  $p_0$ . Lõppolekus on täidetud õhupallis soojuslik energia  $E_2 = c_V n T_2$ . Energia jäätuse töttu peab soojusenergiate vahe võrduma summaarse tööga

$$E_2 - E_1 = A_1 - A_2 \rightarrow c_V n T_2 - c_V n T = pV - p_0 V_2.$$

Töö märgid valisime arvestades seda, et Juku tehtud töö  $A_1$  andis gaasile soojusenergiat jurde, aga gaas ise tegi töö  $A_2$ , mis võttis soojusenergiat vähemaks. Nii alg- kui lõppolekus kehtib ideaalse gaasi seadus, vastavalt  $pV = nRT$  ja  $p_0 V_2 = nRT_2$ . Nende abil saame energia jäätuse seadusest kirjutada

$$c_V n T_2 - c_V n T = nRT - nRT_2 \rightarrow n(c_V + R)(T_2 - T) = 0.$$

Viimasesest seosest saame  $T_2 = T$ . Õhutemperatuur ei muutunud.

### L199 Kuumaõhupall ★★★★

Autor: Ants Remm, piirkonnavor, 2014, G 10

Ideaalse gaasi seadusest avaldub õhu tihedus sõltuvalt temperatuurist kujul  $\rho = \frac{p\mu}{RT}$ . Raskusjõu ning üleslükkejõu tasakaalust saame

$$Mg = Vg(\rho_0 - \rho) = \frac{p\mu Vg}{R} \left( \frac{1}{T_0} - \frac{1}{T} \right),$$

kus  $M = M_0 + \frac{1}{2}M_k$  on õhupalli keskmise mass lennu välitel ning  $V = \frac{4}{3}\pi r^3$  on õhupalli ruumala. Kuna õhupalli pooridest imbul välja soe õhk temperatuuril  $T$ , kuid sisenev õhk on väliskeskonna temperatuuril  $T_0$ , tuleb sees olevat õhku pidevalt soojendada võimsusega

$$P = \lambda C_p(T - T_0).$$

Selle võimsuse saavutamiseks tuleb põletada propaani kiirusega  $\frac{P}{k}$  ning kütuse lõppemiseks kuluv aeg on

$$t = \frac{M_k k}{P} = \frac{M_k k}{\lambda C_p(T - T_0)} = \frac{M_k k(p\mu V - MRT_0)}{\lambda C_p MRT_0^2} = 15 \text{ h.}$$

**L200 Kerkiv õhupall ★★★**

Autor: Jaan Kalda, lõppvoor, 2018, G 8

Seni, kui heelium pole võtnud enda alla veel kogu õhupalli ruumala, püsib tõstetõud konstante. Töepooltest,  $F = \rho_a g V_p$ , kus  $\rho_a$  on õhu tihedus ja  $V_p$  — pallis oleva gaasi ruumala. Paneme tähele, et seni kuni palli nahk ei ole pinguldunud, on pallis oleva gaasi rõhk ja temperatuur võrdsed antud hetkel palli ümbritseva õhu rõhu ja temperatuuriga. Et  $\rho_a = p\mu/RT$ , kus  $p$  ja  $T$  tähistavad rõhku ja temperatuuri antud kõrgusel, ja samal ajal  $V_p = \frac{mRT}{p\mu_p}$  (kus  $\mu_p$  tähistab heeliumi molaarmassi ning  $m$  selle kogumassi), siis üleslükkejõud

$$F = \rho_a V_p g = mg \frac{\mu}{\mu_p}.$$

Üheprotsendiline vähenemine on nii väike, et me võime lugeda otsitava kõrguse võrdseks kõrgusega, kus eelpooltoodud tulemuseni jäoudmiseks tehtud eeldus heeliumi ruumala kohta enam ei kehti, st see võrdsustub  $V_0$ -ga. Gaasi olekuvõrand ütleb, et  $V \propto T/p$  ( $\propto$  tähistab võrdelisust); arvestades, et pallis oleva heeliumi ja ümbristeva õhu temperatuurid ja rõhud on võrdsed, võime järeltada, et see on kõrgus, mille juures on õhu jaoks suhe  $T/p$  kasvanud 2 korda vörreldes maapinanalähedase olukorraga.

Mõttelise õhuruumala  $V$  jaoks on suhe  $T/p$  võrdeline  $V$ -ga. Seega peab mõttelise õhuruumala kerkimisel maapinnalt antud kõrguseni selle ruumala kasvama kaks korda. Et tegemist on adiabaatilise atmosfääriga, siis õhuruumala  $V$  kerkimisel järgivad selle karakteristikud adiabaadiseadust  $pV^\gamma = \text{Const}$ ; kombineerides seda ideaalse gaasi seadusega  $pV/T = \text{Const}$  saame  $V^{\gamma-1}T = \text{Const}$ . Et  $V$  peab kasvama 2 korda, siis  $T$  peab kahanema  $2^{\gamma-1} = 2^{0.4}$  korda. Seega

$$\frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{\mu g h}{R} = T_0 (1 - 2^{-0.4}),$$

millega

$$h = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{R}{\mu g} T_0 (1 - 2^{-0.4}) \approx 7250 \text{ m}.$$

**L201 Rakettmootor ★★★★**

Autor: Jaan Kalda, lahtine, 2010, G 10

Adiabaatilisel paisumisel muutub gaasi sisenergia  $c_V T_0$  osaliselt joa kineetiliseks energiaks  $\mu v^2/2$  (avaldised on siin ühe mooli gaasi jaoks); energia jäävuse seaduses tuleb siiski arvestada ka põlemiskambris juurde tekkivate gaaside poolt tehtavat tööd  $p_0 V_0$  ning ärvavolavate gaaside pidurdavat tööd  $p_1 V_1$ , mis on olekuvõrandi tõttu vastavalt võrdsed  $RT_0$ -ga ja  $RT_1$ -ga. Seega,

$$c_V T_0 + RT_0 = c_V T_1 + RT_1 + \mu v^2/2 \Rightarrow v^2 = 7R(T_0 - T_1)/\mu.$$

Veojõud on võrdne ajaühikus eemalduva gaasijoa impulsiga,

$$F = \dot{m}v = (\rho_1 S v) \cdot v = \rho_1 S v^2 = 7S \frac{R\rho_1 T_1}{\mu} \left( \frac{T_0}{T_1} - 1 \right).$$

Arvestades gaasi olekuvõrrandit ja lähendust  $T_0 \gg T_1$  saame lõpptulemuseks

$$F = 7Sp_1T_0/T_1.$$

### L202 Vedelik ★

Autor: tundmatu, lahtine, 2005, G 1

Kuna anumad on ühendatud ning vedelikes antakse röhk igas suunas võrdsesti edasi, on mõlemas anumas röhud samal kõrgusel võrdsed. Järelikult võib antud anumaid vaadelda ühe anumana, mille pindala on

$$S = \pi \left( \frac{d_1}{2} \right)^2 + \pi \left( \frac{d_2}{2} \right)^2 = \frac{\pi (d_1^2 + d_2^2)}{4}.$$

Väljasurutud vedeliku mass on võrdne lisatava ujuva keha massiga. Seega on lisanduva vedeliku ruumala  $\Delta V = m/\rho$  ning kõrguse muut avaldub kui

$$\Delta h = \frac{\Delta V}{S} = \frac{4m}{\pi \rho (d_1^2 + d_2^2)}.$$

### L203 Tünn ★

Autor: Koit Timpmann, piirkonnavoor, 2012, G 3

Tühja tünni korral kehtib seos

$$mg = \frac{1}{10} \rho_v V g.$$

Vedelikku täis tünni korral kehtib seos

$$(m + \rho V)g = \frac{9}{10} \rho_v V g.$$

Taandades ruumala  $V$  ja  $g$ , saame

$$\frac{1}{10} \rho_v + \rho = \frac{9}{10} \rho_v,$$

millega

$$\rho = \frac{8}{10} \rho_v = 800 \text{ kg/m}^3.$$

**L204 Auk tünnis ★★**

Autor: Hans Daniel Kaimre, lõppvoor, 2018, G 2

Veepiiril elevat vett saame vaadelda kui vedelikku vett körgusel  $h$ , mille kiirus on null ning kus rõhk peab olema võrdne õhurõhuga. Tünni põhjast väljuv juga ava juures on  $h$  võrra madalamal, rõhk peab samamoodi olema võrdne õhurõhuga, kuid juga liigub kiirusega  $v$ . Bernoulli seadusest saame kirja panna, et  $\rho gh = \rho v^2/2$ , kust saame et  $v^2 = 2gh$ . Alternatiivselt saame kirja panna energia jäädvuse seaduse väikese veekoguse  $\Delta m$  jaoks, mille kaugus anuma põhjast on  $h$ :  $gh\Delta m = \Delta m \frac{v^2}{2}$ , kus oleme arvestanud, et vedeliku ülemisel piiril on vee voolamiskiirus praktiliselt 0, ning et energiakadudega ei arvesta.

Väljuvas joas peab vooluhulk ajaühikus olema sama, mis tähendab, et kehtib  $A_1 v_1 = A_2 v_2$ , kus  $A$  ja  $v$  on vastavalt joa ristlõikepindala ja kiirus. Kuna  $A = \pi d^2/4$ , saame seose ümber kirjutada kujule  $v_2 = (d_1^2/d_2^2)v_1$ . Raskuskiirendusega likuva keha läbitud teepikkus alg- ja lõppkiiruste kaudu avaldub kui:

$$l = \frac{v_2^2 - v_1^2}{2g} \Rightarrow l = \frac{\frac{d_1^4}{d_2^4} v_1^2 - v_1^2}{2g} \Rightarrow v_1^2 = \frac{2gl}{\frac{d_1^4}{d_2^4} - 1}.$$

Vaatleme juhtu, kus  $v_1 = v$  on kiirus kohe ava juures. Sel juhul saame kaks avaldist  $v^2$  jaoks võrduma panna:

$$2gh = \frac{2gl}{\frac{d_1^4}{d_2^4} - 1} \Rightarrow h = \frac{l}{\frac{d_1^4}{d_2^4} - 1}.$$

Veejoa läbimõõdu ava juures leiame graafikult punktist  $l = 0$ , teise punkti valime ise suvaliselt: Valides selleks  $(28,1,79)$ , saame vastuseks  $h = 28/(2^4/1,79^4 - 1) = 50$  cm.

**L205 Veetoru ★★**

Autor: Taavi Pungas, lõppvoor, 2011, G 4

Bernoulli seadusest saame seose

$$\frac{\rho v_1^2}{2} + p_1 = \frac{\rho v_2^2}{2} + p_2.$$

Rõhu torudes leiame veesamba körguse järgi,  $p_1 = p_0 + \rho gh_1$  ja  $p_2 = p_0 + \rho gh_2$ , kus  $p_0$  on atmosfäärirõhk. Asendades  $p_1$  ja  $p_2$  esimeses seoses, saame vee kiiruse teises torus:

$$v_2 = \sqrt{v_1^2 + 2g(h_1 - h_2)}.$$

Et torud on ühendatud, peab läbi nende voolama sama aja jooksul sama kogus vett,  $v_1 S_1 = v_2 S_2$ . Kuna toru ristlõikepindala on  $S = \pi d^2/4$ , saame  $v_1 d_1^2 = v_2 d_2^2$ . Kokku,

$$\frac{d_1}{d_2} = \sqrt{\frac{v_2}{v_1}} = \left(1 + \frac{2g(h_1 - h_2)}{v_1^2}\right)^{1/4}.$$

**L206 Ujuv kuup ★★**

Autor: Koit Timpmann, lõppvoor, 2015, G 3

Vaatleme olukorda, kus kuup on sellesse sisenenud vee tõttu parajasti veepinna alla vajunud, sest siis hakkab kuubile mõjuma suurim üleslükkejõud. Piirjuhul on kuubile mõjuv üleslökkejõud ja raskusjõud tasakaalus ehk  $F_r = F_y$ . Olgu kuupi tunganud vee mass  $M$ , mis avaldub kuubis oleva vee kõrguse  $h$  kaudu kui  $M = \rho a^2 h$ . Jõudude tasakaalu põhjal

$$F_r = F_y \Rightarrow (m + \rho a^2 h)g = \rho g a^3,$$

seega

$$h = \frac{\rho a^3 - m}{\rho a^2} = a - \frac{m}{\rho a^2}.$$

Vesi ei tungi enam kuupi, kui õhu rõhk kuubis tasakaalustab vee rõhu ehk  $p_0 + \rho g(a - h) = p_2$ , kus  $p_2$  on õhu rõhk kuubis. Saame

$$p_2 = p_o + \rho g \left( a - a + \frac{m}{\rho a^2} \right) = p_o + \frac{gm}{a^2}.$$

Õhu ruumala kuubis on

$$V_2 = a^3 - a^2 h = a^3 - a^2 \left( a - \frac{m}{\rho a^2} \right) = \frac{m}{\rho}.$$

Enne augu tekkimist oli rõhu ruumala  $V = a^3$ . Kuna õhu temperatuur ei muudu, siis  $pV = p_2 V_2$  ning algne rõhk  $p$  kuubis oli

$$p = \frac{p_2 V_2}{V} = \frac{\left( p_o + \frac{gm}{a^2} \right) \cdot \frac{m}{\rho}}{a^3} = \frac{m(p_0 a^2 + gm)}{a^5 \rho}.$$

**L207 Pump ★★**

Autor: Ardi Loot, piirkonnavoor, 2018, G 4

a) Torus olevale veesambale mõjub raskusjõud  $F_r$ , takistusjõud  $F_h$  ja pumba poolt avaldatav jõud  $F_p$ . Ühtlase pumpamise korral kehtib jõudude tasakaal  $F_r + F_h = F_p$ . Raskusjõud on arvutatav leides torus oleva vee massi

$$F_r = mg = \rho Shg \approx 9,85 \text{ N},$$

kus toru ristlõikepindala  $S = \pi d^2/4$ . Hõördejõu, mis on tingitud vee liikumisest torus, leiame ülesande tekstis antud rõhulangu valemiga, kui korrutame selle toru ristlõikepindalaga.

$$F_h = \Delta p S = c_h Q^2 h S / d^5 \approx 9,59 \text{ N}.$$

Pumba võimsus on antud valemiga  $P = F_p v/\eta$ , kus  $v = Q/S$  on vee liikumise kiirus torus. Jõudude tasakaalust saame

$$P = (F_r + F_h) \frac{Q}{S\eta} = \frac{Qh}{d^5 \eta} (\rho g d^5 + c_h Q^2) \approx 193 \text{ W}.$$

**b)** Kuna pump asub maapinnal, siis peab pump tekitama vee liigutamiseks alarõhu. Maksimaalne alarõhk on juhul, kui pump tekitab vaakumi. Sellisel piirjuhul surub õhurõhk veesammast ülespoole jõuga  $p_0S$  ja pumba töötamiseks peab see joud olema vähemalt sama suur kui veesambale mõjuv raskusjõud  $p_0S = \rho Sh_{mg}$ . Maksimaalne kaevu sügavus on seega  $h_m = p_0 / (\rho g) \approx 10,2 \text{ m}$ .

**L208 Bürett ★★**

Autor: tundmatu, lahtine, 2004, G 5

Kui tekib tasakaal, siis rõhk büreti alumise otsa mingis punktis (just väljaspool vee alumist kontaktpinda õhuga) peab võrduma atmosfäärirõhuga. Büreti rõhk alumise otsa punktis on veesamba rõhu  $\rho gh$ , pindpinevuse rõhu ning büreti sees oleva õhurõhu  $P$  kogusumma. Seejuures pindpinevuse rõhk on miinusmärgiga ning sisaldab kahte komponenti  $2\sigma/r$  ja  $2\sigma/R$  (vastavalt veesamba alumine ja ülemine pind). Alumise pinna köverusraadius on just  $r$ , sest see vastab tilga läbisurumise kriitilisele hetkele (mil tilga köverusraadius on minimaalne). Büreti õhurõhu saame leida Boyle-Mariotte'i seadusest, eeldades, et temperatuur ei muudu. Olgu alguses veesamba kõrgus  $h_0$ , siis saame

$$P_0(H - h_0) = P(H - h) \Rightarrow P = P_0 \frac{H - h_0}{H - h}.$$

Tasakaalu tingimus saab seega kuju

$$P_0 = \rho gh - \frac{2\sigma}{r} - \frac{2\sigma}{R} + P_0 \frac{H - h_0}{H - h},$$

teisendades, leiame, et

$$h_0 - h = \left( \rho gh - 2\sigma \left( \frac{1}{R} + \frac{1}{r} \right) \right) \frac{H - h}{P_0} = 3,74 \text{ mm}.$$

Kukkunud tilkade kogumass siit on

$$M = \pi R^2 (h_0 - h) \rho.$$

Ühe tilga massi leiame tilgale mõjuva raskusjõu ning pindpinevusjõu võrdusest:

$$mg = 2\pi r\sigma \Rightarrow m = \frac{2\pi r\sigma}{g}.$$

Tilkade arvuks saame nüüd

$$\frac{M}{m} = \frac{R^2 (h_0 - h) \rho g}{2r\sigma} \approx 6.$$

**L209 Veekahur ★★**

Autor: Oleg Košik, piirkonnavor, 2005, G 7

Olgu veejoa kiirus kahurist väljades  $v$ . Et märk ja kahur asuvad samal kõrgusel ning õhutakistus puudub, siis märgini jõuab veejuga samuti kiirusega  $v$ . Aja  $t$  jooksul väljub kahurist vesi massiga  $m = \rho Svt$ . Väljuva vee kineetiline energia on  $E = mv^2/2$  ning asendades massi leiame

$$E = \frac{\rho S v^3 t}{2}.$$

Seega saame avaldada kahuri võimsuse

$$N = \frac{E}{t} = \frac{\rho S v^3}{2} \Rightarrow v = \sqrt[3]{\frac{2N}{\rho S}}.$$

Jõud, millega veejuga tabab märki, on määratud vee impulsiga:

$$F = \frac{mv}{t} \Rightarrow F = \frac{\rho S v^2 t}{t} = \rho S v^2.$$

Asendades  $v$  saame

$$F = \sqrt[3]{4N^2\rho S} \approx 490 \text{ N}.$$

**L210 Veetünn ★★**

Autor: Mihkel Kree, lõppvoor, 2005, G 5

Leiame esmalt veejoa väljumise kiiruse. Kiiruse avaldis on tuntud Torricelli seadusena, kuid selle leidmiseks võime arutleda nõnda: avast väljuv juga omab kineetilist energiat  $mv^2/2$ , teisalt peab see olema võrdne potentsiaalse energiaga, mis saadakse vee ülemiselt pinnalt kuni auguni langedes:  $mg(1-x)h$ . Seega väljumiskiirus avaldub

$$v = \sqrt{2g(1-x)h}.$$

*Märkus:* impulsi jäätusest saaksime (võrreldes tünni vasakule ja paremale seinalle möjuvate rõhumisjöudude vahe avaldist ning veejoa impulsist) tulemuse  $v = \sqrt{g(1-x)h}$ . See avaldis kehtib siis, kui vee liikumine tünnis pole laminaarne ning energia ei säili (läheb veekeeristesse). Laminaarse (energiakadudeta) voolu korral tuleks rõhumisjöudude vahe leidmisel arvestada Bernoulli seadusest tingitud rõhu muutust, mistõttu impulsi jäätusest tuletatud vastus ei kehti. Kuivõrd antud ülesandes on voolu laminaarsuse küsimus jäetud täpsustamata, siis on mõlemad meetodid korrektsed.

Et veejal vertikaalset kiiruskomponenti esialgu pole, kulub langemiseks aeg

$$\tau = \sqrt{\frac{2(H+xh)}{g}}.$$

Selle ajaga liigub aga veejuga horisontaalsihis kaugusele  $L = v\tau$  ehk:

$$L = 2\sqrt{(1-x)h(H+xh)},$$

mida aga ongi antud graafikul kujutatud.

Seega piisaks  $H$  ja  $h$  leidmiseks kahe joone punkti koordinaatide määramisest ning tekkiva võrrandisüsteemi lahendamisest. Et aga võimalikult lihtsalt tulemuseni jõuda, kasutame tähelepanekut, et  $x = 0$  korral  $L = 2\sqrt{hH}$ . Võtame graafikult lugemi punktis  $x = 0$  ning saame esimese võrrandi:  $hH = 9 \text{ m}^2$ .

Nagu öeldud, võib teise võrrandi saada suvalise punkti abil, kuid uurime natuke ekstreemumtingimust. Tähistame esmalt  $\alpha = H/h$ ,  $L$  avaldub seega kui

$$L = 2h\sqrt{(1-x)(\alpha+x)}.$$

Kui võtame  $L$ -ist  $x$ -i järgi tuletise, näeme, et  $L$  omab ekstreemumväärust  $x = (1-\alpha)/2$  korral. Selle tulemiseni võib jõuda ka arutledes nõnda:  $y = (1-x)(\alpha+x)$  kujutab endast allapoole suunatud parabooli nullkohtadega 1 ja  $-\alpha$ , ekstreemumväärust on seega nende vahel ehk kohal  $x = (1-\alpha)/2$ . Asendame selle  $L$ -i avaldisse:

$$L = 2h\sqrt{\left(1 - \frac{1-\alpha}{2}\right)\left(\alpha + \frac{1-\alpha}{2}\right)} = 2h\frac{1+\alpha}{2} = h+H.$$

Seega saame teise võrrandi  $L$ -i maksimumväärust kasutades:

$$H+h = 10 \text{ m}.$$

Nendest kahest lihtsast võrrandist tekkiva võrrandisüsteemi lahendamisel (viies need näiteks ruutvõrrandi kujule) leiate väärused:  $h = 9 \text{ m}$  ja  $H = 1 \text{ m}$ .

### L211 Veejuga ★★★

Autor: Siim Ainsaar, piirkonnavor, 2006, G 9

Leidmaks purgi täitumise aega, on meil vaja teada veevoolu kiirust mingil kõrgusel. Olgu see kiirus kraanitoru otsa juures  $v_0$  ning kaugusel  $h$  (seal, kus raadius on  $r_1$ )  $v_1$ . Kuna vool kiireneb ühtlaselt, siis

$$v_1^2 - v_0^2 = 2gh.$$

Ajaga  $\Delta t$  läbib iga veejoa ristlõiget sama kogus vett, sest seda ei kao kuhugi ega tule ka juurde:

$$\pi r_0^2 v_0 \Delta t = \pi r_1^2 v_1 \Delta t.$$

Seega

$$v_1 = v_0 \left( \frac{r_0}{r_1} \right)^2,$$

mille asetame avaldisse  $v_1^2 - v_0^2 = 2gh$ :

$$\begin{aligned} \left[ v_0 \left( \frac{r_0}{r_1} \right)^2 \right]^2 - v_0^2 &= 2gh \quad \Rightarrow \quad v_0^2 \left[ \left( \frac{r_0}{r_1} \right)^4 - 1 \right] = 2gh \quad \Rightarrow \\ \Rightarrow \quad v_0 &= \sqrt{\frac{2gh}{\left( r_0/r_1 \right)^4 - 1}} \end{aligned}$$

Ajaga  $t$  voolab purki vee kogus, mille ruumala on

$$V = \pi r_0^2 v_0 t.$$

Avaldame viimasesest võrrandist aja  $t$ :

$$t = \frac{V}{\pi r_0^2 v_0} = \frac{V}{\pi r_0^2} \sqrt{\frac{(r_0/r_1)^4 - 1}{2gh}} = \frac{V}{\pi \sqrt{2gh}} \sqrt{\frac{1}{r_1^4} - \frac{1}{r_0^4}} \approx 21 \text{ s}.$$

### L212 Veepüstol ★★★

Autor: Valter Kiisk, lõppvoor, 2006, G 4

Kuna me ei arvesta dissipatiivseid efekte, siis peab kehtima mehaanilise energi jaävus. Liikugu kolb jõu  $F$  toimel kiirusega  $v_1$  ja olgu vee kiirus suudmes  $v_2$ . Kuna vee koguruumala ei muutu, siis  $v_1 S_1 = v_2 S_2$ . Ajavahemiku  $t$  väitel läbib kolb vahemaa  $x = v_1 t$  tehes tööd  $A = Fx$ . Vaatame, milline on sellele liikumisele vastav vee summaarne kineetiline energia muut. Ühelt poolt kolvi eest „kaob ära“ vee-hulk  $m = S_1 x \rho$ , mille kiirus oli  $v_1$ , teiselt poolt ilmub suudmesse sama kogus vett liikudes kiirusega  $v_2$ . Energia jaävus annab

$$A + \frac{mv_1^2}{2} = \frac{mv_2^2}{2}$$

ehk peale asendamist ja  $v_1$  elimineerimist

$$\frac{F}{S_1} + \frac{\rho v_2^2}{2} \frac{S_2^2}{S_1^2} = \frac{\rho v_2^2}{2}.$$

Aga  $d_2 \ll d_1$  ja  $S \propto d^2$ , seega ammugi  $S_2^2 \ll S_1^2$  ning teise liikme vasakul pool võrdusmärki võib ära jäätta. Avaldame  $v_2$ :

$$v_2 = \frac{1}{d_1} \sqrt{\frac{8F}{\pi \rho}} \approx 22,6 \text{ m/s.}$$

*Märkus:* Bernoulli seadusele tuginedes oleks saanud ülesande lahendada ka lühemalt:

$$p + \frac{\rho v^2}{2} = \text{Const},$$

mille me lahendamise käigus sisuliselt tuletasime.

**L213 U-toru ★★**

Autor: tundmatu, lahtine, 2009, G 6

Olgu U-toru siseraadius  $r$  ja välisraadius  $R = \sqrt{2}r$ . Vaatleme eraldi U-toru kaarekujulist osa. Aja  $\Delta t$  jooksul siseneb sinna kiirusega  $v$  vee kogus massiga  $\Delta m = \rho \Delta V = \rho \pi r^2 vt$ , ning samasugune vee kogus voolab seal sama kiirusega välja, seeaga summaarne vee impulsi muutus aja  $\Delta t$  jooksul on  $\Delta p = 2\rho \pi r^2 v^2 t$ , ning jõud, millega vesi mõjud sellele toru osale, on Newtoni teise seaduse põhjal

$$F = \Delta p / \Delta t = 2\rho \pi r^2 v^2.$$

Kaarekujuline toru osa on liikumatu, nii et vee poolt rakendatud jõud on tasakaalustatud kahe terastoru elastsusjõuga. Kui terastoru jäikusteguriks võtame  $k$ , siis on selge, et kehtib võrdus

$$F = k\Delta l + k\Delta l = 2k\Delta l,$$

kus  $\Delta l$  on ühe terastoru pikenemine. Teguri  $k$  avaldame ülesande tekstis toodud seose kaudu kui  $k = ES/l = E\pi(R^2 - r^2)/l = E\pi r^2/l$  (kogu ristlöike pindalast panustab jäikustegurisse ainult materjaliga kaetud osa) ning seega

$$2\rho \pi r^2 v^2 = 2E\pi r^2 \Delta l/l.$$

Sit saame ühe toru pikenemiseks  $\Delta l = \rho v^2 l/E$  ning kogu U-toru pikenemiseks

$$2\Delta l = 2\rho v^2 l/E.$$

**L214 Vee klaas ★★**

Autor: Siim Ainsaar, piirkonnavor, 2013, G 7

Õhu ruumala klaasis enne vee väljavoolamist on  $V_0 = \pi r^2(H - h)$ . Pärast väljavoolamist oli õhu ruumala  $V_1 = V_0 + V$  ja vee ruumala  $V_2 = \pi r^2 h - V$ . Veesamba kõrgus  $h_2 = \frac{V_2}{\pi r^2}$ , nii et vee kaalust tingitud lisarõhk põhjale

$$p_2 = \varrho g h_2 = \frac{\varrho g V_2}{\pi r^2}.$$

Õhurõhk vee kohal tuleneb isotermi olekuvõrandist,  $p_1 = \frac{p_0 V_0}{V_1}$ . Paberilehele mõjuvad jõud on tasakaalus:

$$mg + \pi r^2(p_1 + p_2) = \pi r^2 p_0.$$

Kõik kokku pannes

$$m = \frac{\pi r^2 p_0}{g} - \frac{\pi r^2 p_0 (H - h)}{g(H - h + \frac{V}{\pi r^2})} - \varrho (\pi r^2 h - V) = \frac{p_0 V}{g(H - h + \frac{V}{\pi r^2})} + \varrho (V - \pi r^2 h).$$

**L215 Klots vedelikes ★★★**

Autor: Erkki Tempel, lahtine, 2014, G 6

Kuna klotsi tihedus on ülemisest vedelikust suurem ning alumisest vedelikust väiksem, jäab klots kahe vedeliku piirpinnale ujuma. Klotsile mõjub sellisel juhul klotsi raskusjöud  $F_r = m_{\text{klots}}g = \rho_k V g$ , ning vedelike üleslükkejöud

$$F_y = F_{y1} + F_{y2} = \rho_1 g V_x + \rho_2 g (V - V_x),$$

kus  $V_x$  on alumises vedelikus oleva klotsi ruumala ning  $V - V_x$  on ülemises vedelikus oleva klotsi ruumala. Raskusjöud ja üleslükkejöud on võrdsed, seega saame võrrandi

$$\rho_k V g = \rho_1 g V_x + \rho_2 g (V - V_x).$$

Sellest saab avaldada

$$V_x = \frac{V(\rho_k - \rho_2)}{\rho_1 - \rho_2}.$$

Alumise vedeliku nivoo tõuseb ruumala  $V_x$  võrra. Kuna anuma põhjapindala on  $S$ , siis tõuseb vedelike eraldusnivoo  $\Delta h$  võrra, kusjuures

$$\Delta h = \frac{V_x}{S}.$$

Asendades siia  $V_x$ , saame

$$\Delta h = \frac{V(\rho_k - \rho_2)}{S(\rho_1 - \rho_2)}.$$

**L216 Kuup veega ★★★**

Autor: Jonatan Kalmus, piirkonnavor, 2018, G 7

*Esimene lahendus*

Tähistame otsitava vee massi  $m$ , veesamba kõrguse  $h$  ning süsteemi massikeskme kõrguse  $l$ . Kuna kuup on sümmeetriseline, asub selle massikese kõrgusel  $\frac{a}{2}$ . Vee massikese asub vee koguse keskel ehk kõrgusel  $\frac{h}{2}$ . Kui kuup on tühi, siis ühtib süsteemi massikese kuubi massikeskmega ehk  $l = \frac{a}{2}$  ning veesamba kõrgus  $h = 0$ . Kui nüüd kuubi põhja aeglaselt vett valada, hakkab veesamba kõrgus  $h$  kasvama ning süsteemi massikeskme kõrgus  $l$  vähenema, kuna kogu lisatud vesi asub algsest süsteemi massikeskmest all pool. Süsteemi massikeskme kõrgus  $l$  ei saa vee lisamisega enam alaneda, kui see ühtib veesamba kõrgusega  $h$ , sest kui selles olukorras vett juurde lisada, oleks äsja juurde lisatud vee kogus eelnevast süsteemi massikeskmest kõrgemal ning süsteemi massikeskme kõrgus hakkaks kasvama. Seega, massikese on võimalikult madalal olukorras, kui süsteemi massikeskme kõrgus ühtib veesamba kõrgusega ehk  $l = h$ . Rakendades kangi reeglit saame:

$$M\left(\frac{a}{2} - l\right) = m\left(l - \frac{h}{2}\right).$$

Teades seost  $l = h$  ja vee massi  $m = \rho a^2 h$  ning asendades need eelnevasse võrranisse:

$$M\left(\frac{a}{2} - h\right) = \rho a^2 h \left(h - \frac{h}{2}\right).$$

Sit saame  $h$  jaoks ruutvõrrandi:

$$\rho a^2 h^2 + 2Mh - Ma = 0,$$

$$h = \frac{-2M \pm \sqrt{4M^2 + 4\rho a^3 M}}{2\rho a^2}.$$

Kuna negatiivne lahend ei sobi, saame

$$h = \frac{M(\sqrt{1 + \frac{\rho a^3}{M}} - 1)}{\rho a^2}.$$

Otsitav vee koguse mass on seega

$$m = \rho a^2 h = M\left(\sqrt{1 + \frac{\rho a^3}{M}} - 1\right).$$

#### *Teine lahendus*

Minimaalsele süsteemi massikeskmele vastavat veesamba kõrgust on võimalik leida ka tuletise abil. Kuubi sümmeetria tõttu asub selle massikese kõrgusel  $\frac{a}{2}$  ning vee massikese kõrgusel  $\frac{h}{2}$ . Rakendades kangi reeglit saame:

$$M\left(\frac{a}{2} - l\right) = m\left(l - \frac{h}{2}\right).$$

Sellest tuleb avaldada süsteemi massikeskme kõrgus  $l$  ning otsida  $h$ -d, kui  $\frac{dl}{dh} = 0$ . Teades, et vee mass on  $m = \rho a^2 h$ :

$$l = \frac{Ma + \rho a^2 h^2}{2(M + \rho a^2 h)},$$

$$\frac{dl}{dh} = \frac{4\rho a^2 h(M + \rho a^2 h) - 2\rho a^2(Ma + \rho a^2 h^2)}{4(M + \rho a^2 h)^2} = 0.$$

Sit saame lihtsustades ning  $\rho a^2$ -ga läbi jagades  $h$  jaoks ruutvõrrandi:

$$\rho a^2 h^2 + 2Mh - Ma = 0.$$

See on identne eelnevalt saadud ruutvõrandiga ning seega on ka saadav vastus on sama:

$$m = M\left(\sqrt{1 + \frac{\rho a^3}{M}} - 1\right).$$

**L217 Allveelaev ★★★**

Autor: Mihkel Heidelberg, lahtine, 2012, G 5

Vee sissevoolu lõppedes on hüdrostaatilised rõhud vees torni sees ja väljas tasakaalus, samuti on õhu temperatuur võrdsustunud vee omaga (vahepeal võib õhu temperatuur kokkusurumise tõttu veidi tõusta). Õhurõhk torni sees on võrdne hüdrostaatilise rõhuga tornis vee piiril. Rõhkude tasakaalust saame avaldada õhukihi paksuse:

$$\begin{aligned} \rho g(h+d) + p_0 &= p_0 \frac{s}{d}, \\ d^2 \rho g + d(p_0 + h\rho g) - sp_0 &= 0, \\ d &= \frac{(\pm\sqrt{(p_0 + h\rho g)^2 + 4s\rho g p_0} - p_0 - h\rho g)}{2\rho g}. \end{aligned}$$

Lähteülesandele vastab positiivne lahend  $d \approx 57$  cm. Kuna luugile mõjub altpoolt torni sees oleva õhu rõhk, mis vastab hüdrostaatilisele rõhule sügavusel  $d+h$ , saame et summaarne jõud mõjub ülespoole:

$$F = A(\rho g(d+h) + p_0 - \rho gh - p_0) = A\rho gd \approx 2800 \text{ N}.$$

Kui Bond torni vett sisse ei laseks, oleks vee ja õhu poolt summaarne luugile mõjuv jõud allapoole  $A\rho gh \approx 120 \text{ kN}$ . Eeldusel, et luuk avaneb väljapoole, seda inimjoul lahti ei saa.

**L218 Ookean ★★★★**

Autor: tundmatu, lahtine, 2005, G 8

a) Tähistame vedeliku keskmise tiheduse pinnast sügavuseni  $h$  kui  $\rho$ . Kuna vedeliku mass on kokkusurumatu ja kokkusurutud olukordades võrdne, siis

$$\rho_0 h_0 = \rho h.$$

Kui tiheduse muut on väike, saab tiheduse avaldada kujul

$$\rho = \rho_0(1 + \beta p_{\text{keskm}}),$$

kus  $p_{\text{keskm}}$  on keskmine veele mõju rõhk. Vee rõhk sügavusel  $h'$  on  $p(h') = \rho gh'$ , ehk keskmine rõhk avaldub kui  $p_{\text{keskm}} = p(h' = h/2) = \rho gh/2$  ning

$$\rho = \rho_0 \left(1 + \frac{\beta \rho gh}{2}\right) = \frac{\rho_0 h_0}{h} \Rightarrow h \left(1 + \frac{\beta \rho gh}{2}\right) = h_0,$$

Viimastest valemist saame avaldada sügavuste vahe  $\Delta h$ :

$$\Delta h = h_0 - h = \frac{\beta \rho gh^2}{2} \approx 36 \text{ m}.$$

b) Sügavusel  $H = 10\,000 \text{ m}$  on lisarõhk ligikaudu  $p \approx \rho g H$ . Sellele vastab ruumala muutus (ühe kuupmeetri kohta):

$$\delta = \frac{\Delta V}{V} = \beta \rho g H \approx 0,0484.$$

Kui veepinnal on ruumalaga  $V$  vee mass  $\rho V$ , siis sama vee massi ruumala sügavusel  $H$  on ligikaudu  $V(1 - \delta)$  ja tihedus seega:

$$\rho_H V(1 - \delta) = \rho V \Rightarrow \rho_H = \frac{\rho}{1 - \delta}.$$

Seega sellel sügavusel on vee tiheduse muutus:

$$\Delta\rho = \rho_H - \rho = \frac{\rho}{1 - \delta} - \rho = \frac{\rho\delta}{1 - \delta} \approx 51 \text{ kg/m}^3.$$

### L219 Kauss ★★★★

Autor: Taavi Pungas, lahtine, 2013, G 7

Olgu mingil hetkel kausis oleva vee mass  $m$ . Siis mõjuvad kausile raskusjöud  $(M + m)g$ , üleslükknejöud  $F$  ja vee sissekukkumisest tulenev rõhumisjöud  $F$ . Kõrguselt  $h$  kukkudes saavutab vesi kiiruse  $v = \sqrt{2gh}$ , ajavahemiku  $\Delta t$  jooksul jõuab kaussi veekogus massiga

$$\Delta m = \frac{\rho V_2 \Delta t}{t}.$$

Seega kannab kaussi langev vesi kausile ajavahemikus  $\Delta t$  üle impulsi  $\Delta p = \Delta mv$ , mistõttu mõjub kausile jõud

$$F = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{\Delta mv}{\Delta t} = \frac{\rho V_2 \sqrt{2gh}}{t}.$$

Et kauss ei läheks põhja, peab üleslükknejöud teised kaks jõudu tasakaalustama. Maksimaalne võimalik üleslükknejöud on  $\rho V_1 g$  ehk 29 N, samas kui teised kaks jõudu annavad kokku maksimaalselt

$$(M + \rho V_2)g + \frac{\rho V_2 \sqrt{2gh}}{t} = 33 \text{ N}.$$

Näeme, et maksimaalne üleslükknejöud jäab liiga väikseks, et kaussi ujumas hoida, seega läheb kauss põhja.

### L220 Veejoad ★★★★

Autor: Mihkel Kree, lahtine, 2015, G 7

Vaatleme veejuga, mis väljub anumast asukohast  $y = h$ . Selle kohal oleva veesamba kõrgus on  $h$  ning energia jäävusest saame avaldada väljuva joa algkiiruse  $v = \sqrt{2gh}$ . Vabalt langev veejuga on parabool, kusjuures ühe osakese ajalist liikumist saame kirjeldada võrranditega  $x = vt$  ja  $y = h + gt^2/2$ . Pärast esimesest võrrandist aja avaldamist saame teisest parabooli võrrandi

$$y = h + \frac{gx^2}{2v^2} = h + \frac{x^2}{4h}.$$

Mõtiskleme nüüd, kuidas määrata kindlaks ruumipiirkonda, millesse saavad langevad veejoad jõuda. Voiksime valida ruumipunkti  $(x, y)$  ning küsida, milliselt algkõrguselt  $h$  alustades on võimalik sinna jõuda. Sobiva algkõrguse  $h$  leidmiseks tuleks lahendada ruutvõrrand  $h^2 - yh + x^2/4 = 0$ . Kui selle võrrandi diskriminant on

positiivne, leidub  $h$  jaoks kaks erinevat lahendit ning punkti  $(x, y)$  on võimalik jõuda kaheks algkõrguselt. Kui diskriminant on negatiivne, puuduvad reaalarvulised lahendid ning punkti  $(x, y)$  pole võimalik jõuda. Neid kahte juhtu eraldab piirjoon, kus diskriminant on null ehk  $y^2 - x^2 = 0$ , millest saame avaldada piirjoone ehk veejugade mähispinna võrrandi  $y = x$ .

### L221 U-toru ★★★

Autor: Erkki Tempel, piirkonnavor, 2016, G 9

Pärast õli kallamist torusse langeb vee tase  $\Delta h$  võrra selles torus, kuhu kallati õli, ning teises torus veetase tõuseb  $\Delta h$  võrra. Õli ja vee piirpinna kõrgusel on röhk mõlemas U-toru harus sama. Õliga täidetud harus avaldab õli vee ja õli piirpinnale röhku

$$p_1 = \rho_{\text{o}} g l + p_0.$$

Teises (suletud) U-toru harus tekitab kokkusurutud õhk röhu  $p_{\text{o}h}$ . Õhu kokkusrumist võime vaadelda isotermilise protsessina, kus  $pV = \text{Const}$ . Seega

$$p_0 \cdot Sh = p_{\text{o}h} \cdot S(h - \Delta h) \Rightarrow p_{\text{o}h} = \frac{p_0 h}{h - \Delta h}.$$

Vee ja õli nivoo kõrgusel avaldavad teises harus vesi ja õhk röhku

$$p_2 = \rho_v g(2\Delta h) + p_{\text{o}h}.$$

Röhud  $p_1$  ja  $p_2$  on võrdsed ning  $\Delta h = l - h$ , seega saame kirja panna seose

$$\rho_{\text{o}} g l + p_0 = \rho_v g 2(l - h) + \frac{p_0 h}{h - (l - h)}.$$

Avaldades viimasesest seosest õli tiheduse  $\rho_{\text{o}}$ , saame

$$\rho_{\text{o}} = \frac{l - h}{l} \left( 2\rho_v + \frac{p_0}{g(2h - l)} \right).$$

### L222 V-toru ★★★

Autor: Mihkel Kree, lõppvoor, 2008, G 8

Oletame, et vesi on tasakaalust hälbinud nii, et veekiht, mille kõrguse projektsioon toru sihis on  $\delta x$ , on kandunud nurga  $\alpha$  all olevast toru poolest teise. Veetaseme kõrguste erinevus toru kahe poole vahel on  $\delta h = \delta x(\cos(\alpha) + \cos(\beta))$ , mis tekitab lisaröhu  $\delta P = \rho \delta h g$ . Lisaröhk mõjub vedelikule jõuga, mille toru sihiline komponent on

$$F = \delta P S = \rho \delta x (\cos(\alpha) + \cos(\beta)) g S.$$

See valem on sarnane vedruppendli valemiga  $F = k \delta x$ , kus

$$k = \rho (\cos(\alpha) + \cos(\beta)) g S.$$

Sellise pendli omavõnkesagedus avaldub kui

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\rho(\cos(\alpha) + \cos(\beta))gS}{m}}.$$

Seega võime öelda, et toru pooli painutades väheneb vedeliku võnkumise sagedus

$$\sqrt{\frac{1}{2}(\cos \alpha + \cos \beta)}$$

korda.

### L223 Balloon ★

Autor: Jaan Susi, lõppvoor, 2005, G 3

Termodünaamika I seaduse kohaselt  $\Delta U = Q - A$ , kus  $Q$  on süsteemi antud soojushulk ning  $A$  on välisjöudude vastu tehtud töö. Antud ülesande kontekstis on  $Q$  negatiivne ja  $A$  positiivne ning  $A = p\Delta V$  ja  $Q = -\lambda\rho_v V$ . Niisiis,

$$\Delta U = -\lambda\rho_v V - p \left( \frac{V\rho_v}{\rho_j} - V \right) = -\rho_v V [\lambda + p (\rho_j^{-1} - \rho_v^{-1})].$$

Paneme tähele, et avaldis nurksulgudes peaks kujutama endast sulamissoojust normaaltingimustel (sest vee võib viia samasse lõppolekusse ka teisel viisil — muutes ta jäeks normaaltingimustel ning seejärel viies rõhu etteantud vääruseni; et jäää loeme kokkusurumatuks, siis rõhu tõstmisel tööd ei tehta). Paistab, et tegemist pole siiski päris harilikku veega, sest

$$\lambda + p (\rho_j^{-1} - \rho_v^{-1}) = 323 \text{ kJ/kg} \neq \lambda_0 = 334 \text{ kJ/kg}.$$

Arvandmete asendamisel leiame  $\Delta U = -3,23 \text{ MJ}$ .

### L224 Kütteklaas ★

Autor: Jaak Kikas, lõppvoor, 2007, G 1

Kehtivad valemid

$$P = \frac{U^2}{R}, \quad R = \frac{\rho L}{S},$$

kus  $\rho$  on kattekihi eritakistus. Seega vastavalt orientatsioonile  $R_H = \rho b / da$  ja  $R_V = \rho a / db$ , kus  $d$  on kattekihi paksus. Niisiis,

$$P_H/P_V = a^2/b^2 = 0,25.$$

**L225 Jääkuul ★**

Autor: Urmo Visk, piirkonnnavoor, 2008, G 4

Rõhk kuuli sees kasvab seetõttu, et õhk kuulis soojeneb. Ülesande teksti põhjal võime eeldada, et õhu temperatuur kuuli sees on võrdne tema seinte temperatuuriga. Meie ülesandeks on kontrollida, kui palju on rõhk kasvanud selleks hetkeks, kui seinad hakkavad sulama, st on saavutanud temperatuuri  $t_1 = 0^\circ\text{C}$ . Eeldame, et kera soojuspaisumine on tühine. Siis on õhu ruumala keras konstantne. Isohoorilises protsessis kehtib seos

$$\frac{p_1}{T_1} = \frac{p_0}{T_0}.$$

Tähistame indeksiga „0“ gaasi omadusi külmikus ja indeksiga „1“ omadusi temperatuuril, mille juures seinad hakkavad sulama. Niisiis

$$p_1 = p_0 \frac{T_1}{T_0}.$$

Kasutades seda tulemust saame avaldada rõhu suhtelise muutuse

$$\frac{\Delta p}{p_0} = \frac{p_1 - p_0}{p_0} = \left( \frac{T_1}{T_0} - 1 \right).$$

Leiame selle avaldise numbrilise väärtsuse:

$$\frac{\Delta p}{p_0} \approx 0,034 = 3,4 \text{ \%}.$$

See on selgelt väiksem kui kuuli seinte purunemispiir, st kuul hakkab enne sulama (kuid puruneb ilmselt ülerõhu töltu enne lõplikku ära sulamist).

*Märkus:* alternatiivse ja võrdväärse lahendusena võib leida, millise õhutemperatuuri juures saavutaks suhteline ülerõhk väärtsuse 20 % (selleks tuleb 317 K ehk  $44^\circ\text{C}$ ) ja vörrelda seda jää sulamistemperatuuriga.

**L226 Küttesüsteem ★**

Autor: tundmatu, piirkonnnavoor, 2011, G 3

Paisumisel lisanduva ruumala jaoks peab olema paisupaagis piisavalt lisaruumi. Vajalik ruumala on

$$V - V_1 = V_0 (1 + \beta t_2) - V_0 (1 + \beta t_1) = \frac{V_1 \beta}{1 + \beta t_1} (t_2 - t_1).$$

Vajalik vaba ruum paisupaagis on seega  $V - V_1 \approx 4,01$ .

**L227 Vee jäätumine ★**

Autor: Jaak Kikas, lahtine, 2012, G 1

Vee jäätumisel eralduv soojushulk  $m_{\text{vesi}}\lambda$  peab täpselt ära kuluma jää soojendamiseks:

$$m_{\text{vesi}}\lambda = c_j m_j(t - t_0),$$

kus  $\lambda$  on jää sulamissoojus,  $t = 0^\circ\text{C}$  on jää lõpptemperatuur ja  $t_0$  on otsitav jäältemperatuur. Vee massi saame selle ruumalast,  $m_{\text{vesi}} = \rho V_{\text{vesi}}$ . Nendest kahest seosest saame avaldada

$$t_0 = t - \frac{\rho V_{\text{vesi}}\lambda}{c_j m_j} = -314^\circ\text{C}.$$

Ehk jää temperatuur peaks olema alla absoluutse nulli ja seega pole võimalik selle koguse jääkuubikutega kogu vett jääks muuta.

**L228 Veepudel ★**

Autor: Koit Timpmann, piirkonnavor, 2013, G 2

Vesi jäätub temperatuuril  $0^\circ\text{C}$ . Vee jäätumisel eraldunud soojushulk läheb alajahutunud vee soojendamiseks jäätumistemperatuurile. Niisiis,

$$cm\Delta t = \lambda m_j$$

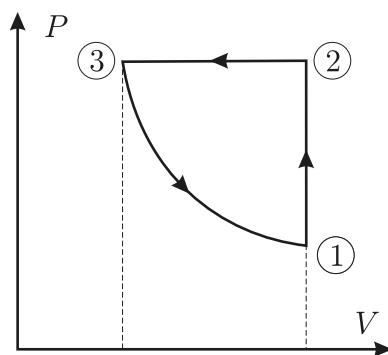
ja

$$m_j = \frac{4200 \text{ J/kgK} \cdot 2 \text{ kg} \cdot 3^\circ\text{C}}{340\,000 \text{ J/kg}} = 74 \text{ g.}$$

**L229 Ringprotsess ★**

Autor: Riho Taba, piirkonnavor, 2006, G 2

Antud joonise saab teisendeda telgedega  $P$  ja  $V$  graafikuks, kus iga tsükli osa töö on arvuliselt võrdne antud graafiku osa alla jäava pindalaga (sest tehtud töö on  $P\Delta V$ ). Ideaalse gaasi töö protsessi osal  $1 \rightarrow 2$ :  $A_{1 \rightarrow 2} = 0$ , protsessi osal  $2 \rightarrow 3$ :  $A_{2 \rightarrow 3} < 0$  ning protsessi osal  $3 \rightarrow 1$ :  $A_{3 \rightarrow 1} > 0$ , kuid  $|A_{2 \rightarrow 3}| > |A_{3 \rightarrow 1}|$ , seega  $A_{1 \rightarrow 2 \rightarrow 3} < 0$ , ehk gaasi tehtud töö on negatiivne.



**L230 Vedelike segamine ★**

Autor: Aleksei Vlassov, piirkonnnavoor, 2007, G 3

Olgu vedelike tihedused vastavalt  $\rho_1$  ja  $\rho_2$  ning erisoojused  $c_1$  ja  $c_2$ . Olgu otsitav temperatuur  $t_4$ . Paneme kirja energia jäävuse võrrandid mõlema segu jaoks:

$$\begin{cases} \rho_1 V c_1 (t_3 - t_1) = \rho_2 V c_2 (t_2 - t_3) \\ 2\rho_1 V c_1 (t_4 - t_1) = \rho_2 V c_2 (t_2 - t_4) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \rho_1 c_1 (t_3 - t_1) = \rho_2 c_2 (t_2 - t_3) \\ 2\rho_1 c_1 (t_4 - t_1) = \rho_2 c_2 (t_2 - t_4). \end{cases}$$

Korrutame esimese võrrandi vasaku poole läbi teise võrrandi parema poolega:

$$\rho_1 c_1 \rho_2 c_2 (t_3 - t_1) (t_2 - t_4) = 2\rho_1 c_1 \rho_2 c_2 (t_4 - t_1) (t_2 - t_3).$$

ehk

$$(t_3 - t_1) (t_2 - t_4) = 2(t_4 - t_1) (t_2 - t_3).$$

Sit avaldame  $t_4$ :

$$t_4 = \frac{t_1 t_2 + t_2 t_3 - 2t_1 t_3}{2t_2 - t_1 - t_3} = 39^\circ\text{C}.$$

**L231 Tulehõõrumine ★**

Autor: Jaak Kikas, piirkonnnavoor, 2008, G 3

Varda pöörlemisel käigus muutub hõõrdejõu ületamiseks tehtud töö soojuseks. Toru otspinna ja aluse vahel mõjub hõõrdejõud  $F_h$ , mis võrdub pinnaga ristuva rõhumisjõu ja hõõrdeteguri korruisega. Rõhumisjõuks on joud  $F$ , millega surutakse toru vastu alust. Seega  $F_h = \mu F$ . Kui toru teeb ühe põörde, siis läbib toru sein tee-pikkuse  $L = \pi D$ . Hõõrdejõu ületamiseks tehti ühe põörde läbimisel töö  $A = F_h L$ . Kui toru põörleb sagedusega  $f$ , siis aja  $t$  jooksul teeb toru  $N = ft$  põöret. Kokku eraldub toru pöörlemisel soojushulk

$$Q = AN = \mu F \pi D f \Delta t.$$

**L232 Termos ★**

Autor: Urmo Visk, piirkonnnavoor, 2009, G 3

Olgu  $c_x$  otsitav erisoojus.

Vaatleme esimest juhtu, kus termoses oli algsest külmem vesi. Kuna külmem vesi oli termosega soojuslikus tasakaalus, siis oli ka termose temperatuur  $t_1$ . Temperatuuride ühtlustumisel annab soojem vesi energiat ära. Külmem vesi ja termos saavad energiat juurde. Paneme kirja soojusliku tasakaalu võrrandi:

$$m_1 c (T_1 - t_1) + mc_x (T_1 - t_1) = m_2 c (t_2 - T_1). \quad (1)$$

Vaatleme teist juhtu, kus termoses oli algsest soojem vesi. Kuna soe vesi oli termosega soojuslikus tasakaalus, siis oli ka termose temperatuur  $t_2$ . Temperatuuride ühtlustumisel annavad termos ja soojem vesi energiat ära. Külmem vesi saab energiat juurde. Kirjutame soojusliku tasakaalu võrrandi:

$$m_1 c (T_2 - t_1) = m_2 c (t_2 - T_2) + mc_x (t_2 - T_2). \quad (2)$$

Lahutame teineteisest võrrandid (2) ja (1).

$$m_1c(T_1 - T_2) + mc_x(T_1 - t_1) = m_2c(T_2 - T_1) - mc_x(t_2 - T_2).$$

Tähistame  $T_2 - T_1 = \Delta T$ . Allpool on toodud  $c_x$  tuletuskaik eelnevast valemist.

$$\begin{aligned} -m_1c\Delta T + mc_x(t_2 - t_1) &= m_2c\Delta T + mc_x\Delta T \implies \\ -\Delta T c(m_2 + m_1) &= mc_x(\Delta T + t_1 - t_2) \implies \\ c_x &= -\frac{\Delta T c(m_2 + m_1)}{m(\Delta T + t_1 - t_2)} = 930 \text{ J/kg C}. \end{aligned}$$

### L233 Rauatükk ★

Autor: Oleg Košik, lahtine, 2010, G 2

Algne vee mass on  $M = \rho V = 1000 \text{ g}$ . Olgu väljaaurustunud vee mass  $m_0$ . Selle soojendamiseks keemistemperatuurini  $t = 100^\circ\text{C}$  ning aurustamiseks läheb vaja energiat

$$Q_1 = m_0(c_1(t - t_1) + L).$$

Ülejää nud vee soojendamiseks temperatuurini  $t_2$  läheb energiat

$$Q_2 = (M - m_0)c_1(t_2 - t_1).$$

Raua jahtumisel eraldub energia  $Q_3 = mc_2(t_0 - t_2)$ . Energia jäävuse seaduse kohaselt  $Q_1 + Q_2 = Q_3$ , ehk

$$m_0(c_1(t - t_1) + L) + (M - m_0)c_1(t_2 - t_1) = mc_2(t_0 - t_2).$$

Sit

$$m_0 = \frac{mc_2(t_0 - t_2) - Mc_1(t_2 - t_1)}{c_1(t - t_2) + L} \approx 2 \text{ g}.$$

### L234 Jõhvikad ★

Autor: Urmo Visk, piirkonnavor, 2010, G 2

Vee algtemperatuur oli  $t_1 = 100^\circ\text{C}$ . Olgu vee ja jõhvikate massid vastavalt  $M$  ja  $m$ . Jõhvikate soojendamiseks kuluv soojushulk tuleb vee jahtumise arvelt. Vee jahtumisel eralduv soojushulk oli

$$Q_j = Mc_V(t_1 - t).$$

Jõhvikate soojendamise käigus tuli 1) soojendada külmunud jõhvikad sulamistemperatuurini, 2) sulatada külmunud jõhvikad ja 3) soojendada sulanud jõhvikad vee temperatuurini. Leiame igas etapis kulunud soojushulga:

$$\begin{aligned} Q_{s1} &= mc_j(0 - t_2) = -mc_jt_2, \\ Q_{s2} &= mL, \\ Q_{s3} &= mc_v(t - 0) = mc_vt. \end{aligned}$$

Liidame jõhvikate soojendamiseks kulunud soojushulgad ja võrdsustame saadud summa vee jahtumisel eraldunud soojushulgaga. Saadud võrrandist avaldame vee ja jõhvikate masside suhte:

$$-mc_j t_2 + mL + mc_v t = Mc_V(t_1 - t),$$

kust

$$\frac{M}{m} = \frac{-c_j t_2 + L + c_v t}{c_V(t_1 - t)}.$$

Arvuliseks vastuseks saame 16.

### L235 Vesi ★

Autor: Taavi Pungas, lõppvoor, 2011, G 1

Energia jäävusest teame, et väikese koguse vee aurustumiseks kuluv soojushulk tuleb järelejäändud vee temperatuuri langemise arvelt.

Kuigi aurustumise alghetkel tekib veeaur temperatuuriga  $100^\circ\text{C}$ , on hiljem nii vee kui tekkiva veeauru temperatuur veidi madalam. Uuel temperatuuril aga ei ole enam väikese koguse vee aurustumiseks kuluv soojushulk otseselt arvutatav vee aurustumissoojusest temperatuuril  $100^\circ\text{C}$  (ülesandes antud  $L$ ).

Seega teeme lihtsustuse, et vee aurustumissoojus on selles temperatuurivahemikus kogu aeg  $L$ . Olgu esialgsest termoses oleva vee mass  $m$ . Saame  $0,01mL = 0,99mc_v\Delta t$ , mis annab vastuseks

$$\Delta t = \frac{1}{99} \frac{L}{c_v} = 5,4^\circ\text{C}.$$

### L236 Hõõrdkeevitus ★

Autor: Ants Remm, lõppvoor, 2012, G 1

Hõõrdumisest tekkiv soojushulk

$$Q = F_h \Delta s = F \mu \Delta s = \pi f D \Delta t.$$

Teiselt poolt on torude soojendamiseks vaja minev soojushulk

$$Q = 2mc\Delta T = 2\rho V c \Delta T,$$

kus  $m$  ja  $V$  on ühe toruotsa soojeneva osa mass ja ruumala. Kuna toru seinad on diameetril kordades õhemad, võib hinnata ruumalaks  $V = \pi D dl$ . Kokkuvõttes saame, et

$$F \mu \pi f D \Delta t = 2\pi D dl \rho c (T_1 - T_0),$$

$$F = \frac{2dl \rho c (T_1 - T_0)}{\mu f \Delta t} \approx 1200 \text{ N}.$$

**L237 Münt jääs ★**

Autor: Erkki Tempel, piirkonnavor, 2015, G 3

Jäätko koos mündiga hakkab uppuma siis, kui sellele mõjub raskusjõud on võrdne üleslükkejõuga. Tähistame uppumise hakkamise hetkel mündi ümber oleva jää massi  $m$  ning ruumala  $V$ . Sellisel juhul mõjub jäätükile enne uppuma hakkamist raskusjõus  $F_r = (m_m + m)g$  ning üleslükkejõud

$$F_y = \rho_v g(V + V_m) = \rho_v g \left( \frac{m}{\rho_j} + \frac{m_m}{\rho_m} \right).$$

Kuna raskusjõud ja üleslükkejõud on uppumise hakkamise hetkel võrdsed, saame avaldada mündi ümber olnud jää massi  $m$ :

$$m = \frac{\rho_j m_m (\rho_m - \rho_v)}{\rho_m (\rho_v - \rho_j)} = 79,9 \text{ g.}$$

Sulanud jää mass  $m_s$  on seega

$$m_s = m_j - m = m_j - \frac{\rho_j m_m (\rho_m - \rho_v)}{\rho_m (\rho_v - \rho_j)}.$$

Jää sulamiseks vajaminev energia  $Q = \lambda m_s$  saadakse vee jahtumisel eraldunud energiast  $Q = cm_v \Delta T$ . Võrdsustades viimased avaldades  $\Delta T$ , saame

$$\Delta T = \frac{\lambda m_s}{cm_v}.$$

Asendades siia sulanud jää massi  $m_s$ , saame temperatuuri muutuseks

$$\Delta T \approx 9,8^\circ\text{C}.$$

Kuna vee lõpptemperatuur pärast soojusvahetuse lakkamist on  $0^\circ\text{C}$ , peab vee algtemperatuuri olema  $9,8^\circ\text{C}$ .

**L238 Soojusvaheti ★**

Autor: Kaur Aare Saar, lõppvoor, 2016, G 1

Nafta jahtumisel eraldunud soojus kulub vee soojendamiseks:  $Q_{\text{nafta}} = Q_{\text{vesi}}$ ,

$$\begin{aligned} m_n c_n \Delta t_n &= m_v c_v \Delta t_v \quad \Rightarrow \\ \rho_n v_n c_n \Delta t_n &= \rho_v v_v c_v \Delta t_v \quad \Rightarrow \quad \Delta t_v = \frac{\rho_n v_n c_n \Delta t_n}{\rho_v v_v c_v} \approx 64^\circ\text{C}. \end{aligned}$$

Seega väljub vesi soojusvahetist temperatuuril  $T = 64^\circ\text{C} + 10^\circ\text{C} = 74^\circ\text{C}$ .

**L239 Kastmisvesi ★★**

Autor: Urmo Visk, piirkonnnavoor, 2008, G 5

Kastmisvee anuma taha tekib kiirtega ristuvale tasandile ringikujuline vari. Samasugune vari tekiks ka ringist, mis paikneb risti päikesekiirtega. Seega neelavad võrdse raadiusega kera ja kiirtega risti olev ring valgust võrdselt, sõltumata päike-sevalguse langemise nurgast. Järelikult on veeanuma poolt ühes sekundis neelatav soojushulk  $P = \varepsilon\pi R^2$ . Päeva jooksul saadav soojushulk on  $Q = P\tau$ , kus ajavahe-mik

$$\tau = 22,5 \text{ h} - 4,5 \text{ h} = 18 \text{ h} = 64800 \text{ s.}$$

Teisest küljest kulub see soojus vee soojendamisele, st  $Q = C\Delta t$ , kus  $\Delta t$  on vee temperatuuri muutus ja vee soojusmahtuvus  $C = mc$ . Siinjuures vee mass  $m = (4/3)\pi R^3\rho$ . Niisiis

$$\pi R^2 \cdot \varepsilon\tau = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho c \Delta t,$$

millega

$$\Delta t = \frac{3\varepsilon\tau}{4c\rho R}$$

ja järelikult lõpptemperatuur on

$$t = t_0 + \frac{3\varepsilon\tau}{4c\rho R};$$

numbriliselt  $t \approx 28^\circ\text{C}$ .**L240 Küttessüsteem ★★**

Autor: Oleg Košik, piirkonnnavoor, 2012, G 2

Mingi ajavahemiku  $\Delta t$  jooksul kaotab koolimaja väliskeskonna soojust  $Q_1 = N\Delta t$ , sama palju soojust peavad andma selle aja jooksul talle radiaatorid. Toru ristlõike pindala on  $S = \frac{\pi D^2}{4}$ . Aja  $\Delta t$  jooksul küttessüsteemi siseneva ja ühtlasi sellest väljuva vee ruumala on seega  $V = Sv\Delta t$ , kus  $v$  on otsitav veevoolu kiirus, ning mass  $m = \rho V = \rho S v \Delta t$ . Radiaatorites eraldub soojushulk  $Q_2 = mc(t_0 - t_1)$ . Kuna  $Q_1 = Q_2$ , saame võrrandi

$$N\Delta t = \rho \frac{\pi D^2}{4} v \Delta t c (t_0 - t_1),$$

millega

$$v = \frac{4N}{\pi D^2 \rho c (t_0 - t_1)} = 0,15 \text{ m/s.}$$

**L241 Lihvimisketas ★★**

Autor: Ott Krikmann, piirkonnnavoor, 2005, G 3

Kettal aja  $t = 1\text{ s}$  jooksul eralduv soojushulk on

$$Q = \frac{\pi r^2 q}{s}.$$

Sama aja jooksul voolab vesi massiga

$$m = wt\rho.$$

Et jahutusvesi kannab ära kogu eralduva soojuse, siis võib koostada soojusbalansi võrrandi aja  $t = 1\text{ s}$  jaoks:

$$\frac{\pi r^2 q}{s} = wt\rho c(t_2 - t_1).$$

Sit võrrandist avaldame  $t_2$ :

$$t_2 = t_1 + \frac{\pi r^2 q}{swt\rho c} \approx 40^\circ\text{C}.$$

**L242 Vee keemine ★★**

Autor: Mihkel Kree, lõppvoor, 2008, G 6

Leiame pindpinevuse tõttu mullis tekkiva lisarõhu. See on teatavasti  $P = \frac{2\sigma}{r}$ .

Seda saab mitmel moel tööstada. Üks võimalus on vaadelda mulli keskpunkti läbi-vat tasandit, mis jaotab kera kaheks poolkeraks. Poolkerasid tömbab kokku pind-pinevusjoud  $F = 2\pi r\sigma$ . Jöudude tasakaalust peab see olema võrdne lisarõhu poolt tekitatud jöuga  $F = \pi r^2 \cdot P$ . Seega tekib pindpinevus mullis lisarõhu  $P = \frac{2\sigma}{r}$ . Samale tulemusele võiksime jõuda ka järgnevalt. Pindpinevuse pinnaenergia avaldub teatavasti kui  $E = \sigma 4\pi r^2$ . Suurendades raadiust väikese  $\Delta r$  võrra, on energia muut

$$\Delta E = 4\pi\sigma((r + \Delta r)^2 - r^2) \approx 8\pi\sigma r \Delta r.$$

Samas avaldub energia muut rõhu kaudu

$$A \approx pS\Delta r = 4\pi r^2 p \Delta r.$$

Kuna  $A = \Delta E$ , siis  $p = \frac{2\sigma}{r}$ .

Kuni 105 kraadini ei toimunud keemist, seega pidid mullid olema nii väiksed, et pindpinevuse poolt tekitatud lisarõhu ja õhurõhu summa jäi suuremaks kui kül-lastunud veeauru rõhk:  $p_0 + \frac{2\sigma}{r} > p_{\text{aur}} = p_0 + 5 \cdot 3,5\text{ kPa}$ , siit

$$r = \frac{2\sigma}{5 \cdot 3,5 \text{ kPa}} = 6,6 \mu\text{m}.$$

**L243 Vesi ja jää ★★**

Autor: Andres Laan, piirkonnnavoor, 2010, G 5

Soojusvoog läbi vee kihi on määrtud valemiga

$$Q = D \frac{S \Delta T}{l},$$

kus  $S$  on kihi pindala,  $l$  selle paksus,  $\Delta T$  kihi ülemise ja alumise pinna temperatuuride vahe ning  $D$  vastava vee faasi soojsuhtivuskoeffitsient. Vaatleme vedela ja tahke faasi piirpinda. Antud pinna temperatuur on  $0^\circ\text{C}$ . Tahkest pooltest tulev soojsusvoo võimsus on  $Q_t = D_t S T_1 / l_t$  ja vedelast faasist tuleva voo võimsus on  $Q_v = D_v S T_2 / l_v$ . Statsionaarses olukorras, kus piirpinna asukoht ei muutu, tasakaalustavad antud vood üksteist ära. Arvestades, et mõlema faasi pindalad on võrdsed, saame

$$\frac{D_t T_1}{l_t} = -\frac{D_v T_2}{l_v}.$$

Kasutame ära asjaolu, et tahke ja vedela kihi paksuste suhe oli alguses 4:

$$\frac{D_t}{D_v} = -\frac{T_2 l_t}{T_1 l_{v1}} = -\frac{-20 \cdot 4}{20 \cdot 1} = 4,$$

Teisel juhul

$$T'_2 = -\frac{D_t}{D_v} \frac{l'_v}{l'_t} T_1 = -4 \frac{l'_v}{l'_t} T_2 = 80^\circ\text{C}.$$

**L244 Destillaator ★★**

Autor: Koit Timpmann, lõppvoor, 2010, G 2

Kahe liitri vee mass on  $m = 2\text{ kg}$ . Kondenseerudes eraldub soojushulk  $Q = Lm$ . 95% eraldunud soojushulgast läheb jahutusvee soojendamiseks. Seosest  $\eta Lm = c M \Delta T$  saame jahutusvee massi

$$M = \frac{\eta Lm}{c \Delta T}.$$

Jahutusvee massi saame avaldada tiheduse ja ruumala kaudu ning ruumala oma-korda toru ristlõikepindala, voolu kiiruse ja aja kaudu:

$$M = \rho V = \rho Sl = \rho Svt.$$

Viies kokku need kaks võrrandit, saame avaldada kiiruse:

$$v = \frac{\eta Lm}{c \Delta T \rho St} \approx 0,12 \text{ m/s}.$$

**L245 Veekeedukann ★★**

Autor: Erkki Tempel, lahtine, 2015, G 4

Suurima kiiruse saavutab veeaur siis, kui vesi on kuumutatud keemistemperatuurini  $T = 100^\circ\text{C} = 373\text{ K}$ . Veekeedukannu tehtud töö  $A = \gamma Nt$  läheb siis vee aurustamiseks ehk  $A = Q = Lm$ . Seega aja  $t$  jooksul aurustunud vee mass on

$$m = \frac{\gamma Nt}{L}$$

ning ruumala

$$V = \frac{\gamma NtRT}{Lp\mu}.$$

Kuna veeaur pääseb välja avast pindalaga  $S$ , siis peab aja  $t$  jooksul eraldanud veeaur läbima vahemaa  $s = V/S$  ning veeauru väljumise kiiruseks saame

$$v = \frac{s}{t} = \frac{\gamma NtRT}{Lp\mu S}.$$

**L246 Radiaator ★★**

Autor: Ardi Loot, piirkonnnavoor, 2018, G 3

Leiame radiaatorit kirjeldava võrdeteguri  $c_r$ . Kuna radiaatori väljundvõimus on võrdeline pealevoolu- ja tagasivoolutemperatuuride keskmise ja toatemperatuuri vahega, siis

$$P_n = c_r \left( \frac{T_{pn} + T_{tn}}{2} - T_{0n} \right)$$

ja võrrandit lahendades saame

$$c_r = \frac{2P_n}{T_{pn} + T_{tn} - 2T_{0n}} = 40\text{ W/K}.$$

Nüüd paneme kirja võrrandisüsteemi radiaatori tegeliku võimuse ja tagasivoolu-temperatuuri jaoks

$$\begin{cases} P = c_r \left( \frac{T_p + T_t}{2} - T_0 \right) \\ P = \Gamma c_v \rho_v (T_p - T_t). \end{cases}$$

Esimene kirjeldab radiaatori väljundvõimust ja teine peale- ja tagasivoolutemperatuuride vahest tingitud energiaülekannet. Lahendades võrrandid saame

$$\begin{aligned} P &= \frac{2\Gamma c_v \rho_v c_r (T_p - T_0)}{2\Gamma c_v \rho_v + c_r} \approx 1,49\text{ kW} \\ T_t &= \frac{2\Gamma T_p c_v \rho_v + c_r (2T_0 - T_p)}{2\Gamma c_v \rho_v + c_r} \approx 48,7^\circ\text{C}. \end{aligned}$$

Radiaatori maksimaalne võimsus on võimalik leida piirjuhuna, kui radiaatorit läbiv vooluhulk  $\Gamma$  kasvab väga suureks. Või veelgi lihtsamalt: kui mõista, et sellisel

juhul saab tagasivoolutemperatuur võrdseks pealevoolutemperatuuri ning maksimaalne võimsus avaldub

$$P_{max} = c_r (T_p - T_0) \approx 1,92 \text{ kW}.$$

### L247 Aurusaun ★★★

Autor: tundmatu, lahtine, 2004, G 6

Graafikult loeme, et  $t = 50^\circ\text{C}$  juures on küllastatud auru tihedus  $\rho_k = 85 \text{ g/m}^3$ . Seega on absoluutne õhuniiskus sauna

$$f = r\rho_k = 68 \text{ g/m}^3.$$

Kui ruumis ruumalaga  $V$  aurustub vesi massiga  $m$ , siis tõuseb absoluutne niiskus

$$\Delta f = \frac{m}{V} = \frac{620}{10} = 62 \text{ g/m}^3$$

võrra ja on kokku

$$f' = f + \Delta f = 130 \text{ g/m}^3.$$

Kuna ruumis hakkab kondenseeruma vesi, siis järelikult on aur ruumis küllastunud, seega absoluutne niiskus  $f'$  on ühtlasi ka küllastunud auru tihedus sellel temperatuuril:  $f' = \rho'_k$ . Kuna igale temperatuurile vastab ainult üks kindel küllastunud auru tiheduse väärtsus (mida körgem on temperatuur, seda tihedam on küllastunud auru tihedus), siis tihedam küllastunud aur tähendab ühtlasi ka kõrgemat temperatuuri ruumis. Graafikult leiate, et sellise küllastunud auru tiheusele vastab temperatuur  $t' = 60^\circ\text{C}$ . Temperatuuri muut on  $\Delta t = 10^\circ\text{C}$ . Kokku kulub sooja  $Mc\Delta t + mL$ , millest aurustumiseks kulub  $mL$ . Siin  $M$  on õhu mass, mille me leiate valemist  $M = \rho V$ , kus  $V$  on sauna ruumala. Seega on küttekeha kasutegur aurustumise suhtes

$$\eta = \frac{mL}{mL + \rho V c \Delta t} \approx 91,6 \%$$

ning küttekeha võimsus on

$$P = \frac{mL + \rho V c \Delta t}{\tau} \approx 1300 \text{ W}.$$

**L248 Külmutusseade ★★**

Autor: tundmatu, piirkonnavor, 2005, G 8

Külmutusseadme korral on tegu pööratud soojusmasinaga, ideaalse soojusmasina puhul kehtib seos

$$\frac{A}{Q_j} = \frac{T_j - T_k}{T_j},$$

kus mootori tehtud töö on leitav energia jäävusest

$$A = Q_j - Q_k.$$

Siinjuures  $Q_j$  ja  $Q_k$  on vastavalt jahutusvedelikule ära antud ja jahutatavalta kehalt ära võetud soojushulk. Elimineerides mittevajaliku suuruse  $Q_j$  saame

$$1 + \frac{Q_k}{A} = \frac{T_j}{T_j - T_k},$$

millega

$$Q_k = \frac{AT_k}{T_j - T_k} = 22,6 \text{ kJ}.$$

**L249 Elektripliit ★★**

Autor: tundmatu, lahtine, 2007, G 8

Spiraal kuumeneb temperatuurini, mil tekib soojslik tasakaal spiraali ja ümbritseva keskkona vahel. Kuna spiraalil eraldub võimsus  $P = I^2R$ , peab kehtima  $P = N$  (soojsuskadusid arvestamata) ehk

$$\kappa(T - T_0) = I^2 R_0 [1 + \alpha(T - T_0)].$$

Avaldades  $T$ , saame

$$T = T_0 + \frac{I^2 R_0}{\kappa - \alpha I^2 R_0}.$$

Kui  $\kappa \leq \alpha I^2 R_0$  suureneb temperatuur lõpmatuseni ning pliit põleb läbi.

**L250 Õhuaken ★★**

Autor: Jaan Kalda, lõppvoor, 2009, G 6

Soojusvahetuskiirus läbi seinte jms on

$$P_s = \alpha(t - t_0) = P \frac{t - t_0}{t_1 - t_0}.$$

Peale selle toimub soojusvahetus sissetuleva õhu abil  $P_1 = \dot{\nu} \frac{7}{2} R(t - t_0)$ , kus ajaühi  $\dot{\nu}$  on sisenevate moolide arv,  $v$  on õhu kiirus ja mooli ruumala  $V = RT/p_0 = 22,4 \text{ l/mol}$ . Seega soojsliku tasakaalu tingimuse saab kirja kujul

$$P = P \frac{t - t_0}{t_1 - t_0} + c_p \frac{v}{V}(t - t_0),$$

millega

$$t = t_0 + \frac{P}{\frac{P}{t_1 - t_0} + c_p \frac{v}{V}} \approx 13,2^\circ\text{C}.$$

**L251 Kasvuhooneefekt ★★★**

Autor: Kristian Kuppart, lahtine, 2017, G 6

Päikselt jõuab maale koguvõimsus  $P_p = w_0 (1 - \mu) \pi R^2$ , kus  $R$  on maa raadius. Kuна atmosfääär on maalt tuleva kiurguse jaoks läbimatu, peab tasakaalu korral atmosfääär väljapoole kiirgama selle sama võimsuse:  $P_p = P_a$ , kus  $P_a$  on atmosfääri poolt väljapoole kiiratav võimsus. Maalt kiiratav võimsus avaldub kui  $P_m = 4\pi R^2 \sigma T_m^4$ , kus  $T_m$  on maapinna temperatuur. Tasakaalu korral on see võrdne Päikeselt ja atmosfäärist tagasi kiirgunud võimsuste summaga:

$$P_m = P_p + P_a = 2P_p.$$

Maakera temperatuur avaldub kui:

$$T_m = \sqrt[4]{\frac{w_0 (1 - \mu)}{2\sigma}} = 303 \text{ K}.$$

**L252 Tuba ★★★**

Autor: Oleg Košik, lõppvoor, 2006, G 7

Temperatuuri kasvu või langemise kiirus on võrdeline tappa siseneva summaarise soojusliku võimsusega. Sellele vastab graafiku puutuja tõus. Ajahetkeni  $t = 1100 \text{ min}$  läheb soojus toast välja, peale seda lisandub kaotatavale võimsusele soojapuhuri võimsus. Soojapuhuri võimsusele vastab puutuja tõusu muut mingil temperatuuril. Näiteks hetke  $t = 1100 \text{ min}$  jaoks saame, et puutuja tõusu muut on (ligikaudu)  $8/1000 + 10,2/400 \approx 0,036 \text{ }^\circ\text{C/min}$ . Graafiku abil leiame nüüd temperatuuri, mille korral soojuskadude võimsus võrdub soojapuhuri võimsusega. Selle jaoks võib kasutada joonlarda tõusuga  $0,036 \text{ }^\circ\text{C/min}$  ning määrrata punkt graafikus, mis puutub antud sirget. Graafiku esimeses osas on selline punkt umbes temperatuuril  $T = 20 \text{ }^\circ\text{C}$ . Seega toatemperatuur pika aja möödumisel on  $T = 20 \text{ }^\circ\text{C}$ .

**L253 Küttekeha ★★★**

Autor: Mihkel Heidelberg, lõppvoor, 2007, G 7

Et ruumist eemalduva soojuse hulk on stabiilses olukorras võrdne küttekeha poolt toodetud soojusega, siis  $P(T_2) = k(T_2 - T_1)$ ,  $k = \frac{P(T_2)}{T_2 - T_1}$ . Teisel juhul jäääb  $k$  samaks:

$$P(T_4) = \frac{P(T_2)}{T_2 - T_1} (T_4 - T_3),$$

kust on näha, et punkt  $(T_4, P(T_4))$  peab asetsema sirgel, mis läbib punkti  $(T_3, 0)$  ja on sama tõusuga ( $k$ ), kui punkte  $(T_2, P(T_2))$  ja  $(T_1, 0)$  ühendav sirge. Joonistades sellise sirge, saame graafikute lõikepunktist vastuse.

**L254 Kauplus ★★★**

Autor: Oleg Košik, lõppvoor, 2013, G 8

Soojusvahetus eesruumi ja õue vahel peab olema sama suur kui soojusvahetus eesruumi ja kaupluse vahel. Seega püsib päeval ajal eesruumis temperatuur  $T_4 = \frac{T_0+T_1}{2} = 12^\circ\text{C}$  kraadi ning eesruumi ehitusega vähenesid ukse lahtikäimisest tingitud soojuskaod 2 korda. See vähenemine oli  $\Delta P = P_1 - P_3 = 0,8 \text{ kW}$ , seega enne eesruumi ehitamist olid vastavad soojuskaod

$$P_0 = 2\Delta P = 1,6 \text{ kW}.$$

Päeval ajal on temperatuuride vahe õuega  $\Delta T_1 = 16^\circ\text{C}$  ning öisel ajal  $\Delta T_2 = 20^\circ\text{C}$ . Seega, kui päeval oleks kauplus kinni, siis kaupluse radiaatorid peaks töötama võimsusega

$$P'_1 = P_2 \frac{\Delta T_1}{\Delta T_2} = 4,0 \text{ kW}.$$

Kaupluse lahtioleku tõttu kütavad inimesed ja valgustid võimsusega  $P_x$  ja uksest läks kaduma  $P_0$ . Seega saame võrduse

$$P'_1 = P_1 + P_x - P_0,$$

kust leiame  $P_x = 1,0 \text{ kW}$ .

**L255 Küttesüsteem ★★★**

Autor: Taavi Pungas, piirkonnavoor, 2014, G 9

Et korterid on identsed ning nende sisetemperatuurid on samad, peavad ka soojuskaod läbi nende seinte olema võrsed:  $N_{k1} = N_{k2}$ . Seega annab katlast tulev kuum vesi poole oma soojusest ära ülemises korteris ja poole alumises, mistõttu kahe korteri vahelises torus on vee temperatuur  $t_{\text{toru}} = (t_1+t_2)/2$ . Et korterite temperatuur on ajas konstantne, on mõlemas korteris soojuskaod läbi seinte võrsed radiaatori küttevõimsusega. Ülemises korteris on radiaatori küttevõimsus

$$N_{k1} = k[\frac{1}{2}(t_1 + t_{\text{toru}}) - t],$$

kus  $k$  on mingi koefitsent ja  $\frac{1}{2}(t_1 + t_{\text{toru}})$  on radiaatori keskmise temperatuuri. Sarnaselt on alumises korteris radiaatorite küttevõimsus kokku

$$N_{k2} = 1,1k[\frac{1}{2}(t_{\text{toru}} + t_2) - t],$$

kus kordaja 1,1 tuleb sellest, et radiaatori pindala on 1,1 korda suurem. Kokku

$$k[\frac{1}{2}(t_1 + t_{\text{toru}}) - t] = 1,1k[\frac{1}{2}(t_{\text{toru}} + t_2) - t],$$

$$t = 5(\frac{11}{10}t_2 - t_1 + \frac{1}{10}t_{\text{toru}}) = \frac{1}{4}(23t_2 - 19t_1) = 22^\circ\text{C}.$$

**L256 Veesoojendi ★★★★**

Autor: Andres Põldaru, piirkonnnavoor, 2016, G 10

Alguses on lisanduva vee temperatuur võrdne soojendis oleva vee temperatuuriga ja vett välja ei voola; seega muutub vee temperatuur ainult soojendilt saadava soojuse tõttu:  $\Delta Q = cm_0\Delta T = P\Delta t$ . Kui ajahetk  $\Delta t$  on piisavalt väike, saame tõusu  $\Delta T/\Delta t \approx 0,45 \frac{\text{°C}}{\text{s}}$ , mis tuleb graafikult mõõta ajahetkel  $t = 0$ . Tõusu saab leida, tömmates graafikul puutuja ajahetkel  $t = 0$ , mis läbib ligikaudu punkti  $T = 24,5 \text{ °C}$  ja  $t = 10 \text{ s}$ . Massiks saame:

$$m_0 = \frac{P}{c \frac{\Delta T}{\Delta t}} \approx \frac{2000 \text{ W}}{4200 \frac{\text{J}}{\text{kg} \text{ °C}} \times 0,45 \frac{\text{°C}}{\text{s}}} \approx 1,1 \text{ kg.}$$

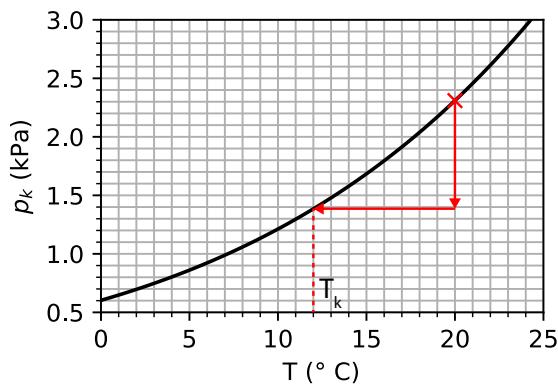
Stabiilne temperatuur saavutatakse siis, kui ajaühikus väljavoolava vee soojendamiseks kulunud energia on võrdne soojendi võimsusega. Sellest saame seose  $P = \mu c(T - T_0)$ , kust võttes stabiilseks temperatuuriks  $T = 36 \text{ °C}$ , saame voolukiiruseks:

$$\mu = \frac{P}{c(T - T_0)} \approx \frac{2000 \text{ W}}{4200 \frac{\text{J}}{\text{kg} \text{ °C}} \times 16 \text{ °C}} \approx 0,03 \frac{\text{kg}}{\text{s}} = 30 \frac{\text{g}}{\text{s}}.$$

**L257 Soojustus ★★★★**

Autor: Ardi Loot, lõppvoor, 2018, G 5

Toas oleva niiske õhu levikut piirab soojustuskihtide vahel olev kile. Selleks, et vältida kondenseerumist, ei tohi kile asukohas temperatuur langeda alla kastepunkti. Kastepunkti saame leida graafiku alusel, leides alguses küllastunud veeauru osarõhu toatemperatuuril, arvutades sellest  $\eta_1 = 60 \%$  ja seejärel leides sellele vastava kastepunkti  $T_k = 12,0 \text{ °C}$ .



Järgmiseks on vaja leida avaldis temperatuuri jaoks kile asukohas ( $T$ ). Eeldades, et temperatuur muutub soojustuskihis lineaarselt kaugusega ja muutuse kiirus on pöördvõrdeline soojsujuhtivusega, saame liikudes seest välja kirja panna kaks võrrandit:

$$\begin{cases} T = T_1 - \frac{\alpha}{k_1} L_1 \\ T_2 = T - \frac{\alpha}{k_2} L_2, \end{cases}$$

kus  $\alpha$  on tundmatu võrdetegur. Nende võrrandite lahendamine annab

$$T = \frac{k_2 T_2 L_1 + k_1 T_1 L_2}{k_2 L_1 + k_1 L_2}.$$

Ja lõpetuseks, tuleb leida sisemise soojustuskihi paksus  $L_1$  piirjuhul, kui kile temperatuur võrdub kastepunktiga

$$L_1 = L \frac{k_1 (T_1 - T_k)}{k_1 T_1 - k_2 T_2 - (k_1 - k_2) T_k} \approx 7,8 \text{ cm}$$

ja kondenseerumise vältimiseks peab sisemise soojustuskihi paksus olema sellest väiksem.

### L258 Soojuskiirgus ★★★★

Autor: Valter Kiisk, lõppvoor, 2006, G 8

**a)** Tähistame  $j_{s \rightarrow v}$  abil soojusvoogu pindalaühiku kohta, mis on suunatud siseseinalt välisseina poole. Vastassuunalist soojusvoogu tähistame  $j_{v \rightarrow s}$ ,  $j_{s \rightarrow v}$  on tingitud siseseina kiirgusest ja  $j_{v \rightarrow s}$  osalisest peegeldumisest. Analoogiliselt,  $j_{v \rightarrow s}$  on tingitud välisseina kiirgusest ja  $j_{s \rightarrow v}$  osalisest peegeldumisest. Seega siis

$$\begin{aligned} j_{s \rightarrow v} &= \varepsilon \sigma T_s^4 + (1 - \varepsilon) j_{v \rightarrow s} \\ j_{v \rightarrow s} &= \varepsilon \sigma T_v^4 + (1 - \varepsilon) j_{s \rightarrow v}, \end{aligned}$$

millest

$$j_{s \rightarrow v} = \sigma \frac{T_s^4 + (1 - \varepsilon) T_v^4}{2 - \varepsilon}, \quad j_{v \rightarrow s} = \sigma \frac{T_v^4 + (1 - \varepsilon) T_s^4}{2 - \varepsilon}.$$

Summaarne soojusvoog on

$$P = S j = S (j_{v \rightarrow s} - j_{s \rightarrow v}) = S \varepsilon \sigma \frac{T_v^4 - T_s^4}{2 - \varepsilon} \approx 22 \text{ W}.$$

**b)** Eelmise punkti vastusest selgub, et kahe seina vahel toimuv soojusvoog on võrdeline vahega  $T_2^4 - T_1^4$ . Seega on siin täielik analoogia elektriahelate teooriaga, kui  $T^4$  tölgendada pingena, soojusvoogu voolutugevusena ning  $(2 - \varepsilon)/(\sigma \varepsilon)$  takistusevana. Viimane ei sõltu seinte vahekaugusest. Paigutades sise- ja välisseina vahele  $N$  ekraani, on tegemist  $N + 1$  ühesuguse takisti järestikühendusega. Järelikult soojusvoog kahaneb  $N + 1$  korda.

**L259 Ahi ★★★★**

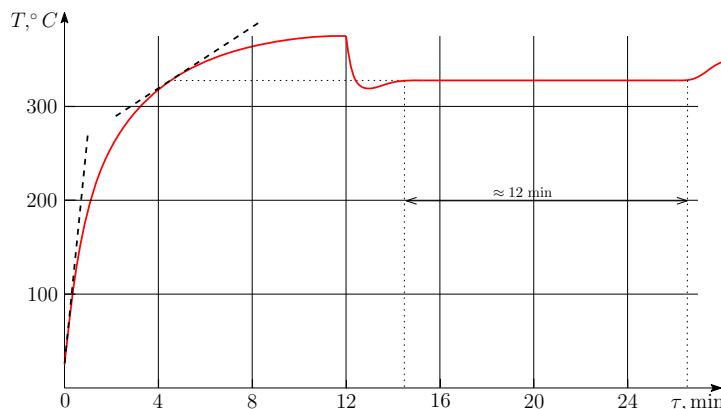
Autor: Stanislav Zavjalov, lõppvoor, 2012, G 7

On teada, et hetkeline efektiivne soojsusvõimsus on võrdeline temperatuuri ja aja graafiku puutuja tõusuga (ja võrdelisuskonstandiks on ahju soojsusmahtuvus). Ku na esialgu on ahi toatemperatuuri juures, soojsuskadusid esimestel hetketel peaaegu ei esine ja tiigli soojsusvõimsusele  $P_0 = 50 \text{ W}$  vastab puutuja tõus  $\approx 250 \frac{\text{°C}}{\text{min}}$  (vt. joonist). On aga selge, et pika aja möödumisel tuleb soojsuskadudega arvestada – see ongi põhjas, miks ahju temperatuuri kasv kahaneb. Kui ahju sisse pannakse plii, langeb temperatuur kuni plii sulamistemperatuurini,  $\approx 327^\circ\text{C}$  – ahju kogu efektiivne võimsus kulub plii sulatamiseks (sest selle enda temperatuur ei muutu). Graafiku vasakult poolelt leiame, et temperatuuri  $\approx 327^\circ\text{C}$  juures puutuja tõusuks oli  $\approx 45 \frac{\text{°C}}{\text{min}}$ , seega selle temperatuuri juures efektiivne võimsus on

$$\frac{45}{250} P_0 \approx 0,18 P_0.$$

Sellise võimsuse juures kuulub massi  $m$  plii sulatamiseks  $\Delta\tau \approx 12 \text{ min}$  aega (mille leiame graafikult). Seega,  $0,18 P_0 \Delta\tau = \lambda m$ , kust

$$\lambda = \frac{0,18 P_0 \Delta\tau}{m} = \frac{0,18 \cdot 50 \text{ W} \cdot 12 \cdot 60 \text{ s}}{0,265 \text{ kg}} = 24,5 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}}.$$

**L260 Gaasiküte ★★★★**

Autor: Ardi Loot, piirkonnnavoor, 2017, G 10

Telk peab olema soojslikus ja niiskuslikus tasakaalus. Telk kaotab sooja läbi telgi seinte soojsujuhtivuse tõttu:

$$P_s = SU\Delta T \approx 7,54 \text{ kW},$$

kus  $S = 2\pi R^2 \approx 100,5 \text{ m}^2$  ja  $\Delta T = T_1 - T_0 = 25^\circ\text{C}$ , ning telgi ventileerimise tõttu:

$$P_v = Q\rho_{\tilde{o}}c_{\tilde{o}}\Delta T \approx Q \cdot (30,0 \text{ kW} \cdot \text{s/m}^3).$$

Soojsliku tasakaalu korral

$$P_p = P_s + P_v \approx 7,54 \text{ kW} + (Q \cdot 30,0 \text{ kW} \cdot \text{s/m}^3). \quad (1)$$

Niiskusliku tasakaalu jaoks peab ventileerimine telgist välja viima samapalju niiskust kui gaasi põletamisel tekib. Sooja õhu väljaviskel viiakse ajaühikus telgist välja niiskust  $\Gamma_v = QG_1\eta_1 \approx Q \cdot (10,2 \text{ g/m}^3)$  ning külma õhu sissevooluga siseneb telki ajaühikus  $\Gamma_s = QG_0\eta_0 \approx Q \cdot (1,15 \text{ g/m}^3)$  niiskust. Võimsusega  $P_p$  gaasiküte eraldab ajaühikus  $\Gamma_p = D \cdot P_p/k \approx P_p \cdot (10^{-5} \cdot 5,63 \text{ kg/(kW} \cdot \text{s)})$  niiskust. Tasakaalu korral

$$\Gamma_p = \Gamma_v - \Gamma_s$$

ehk

$$P_p \cdot (10^{-5} \cdot 5,63 \text{ kg/(kW} \cdot \text{s)}) \approx Q \cdot (9,09 \text{ g/m}^3). \quad (2)$$

Lahendades tasakaaluvõranditest (1) ja (2) tekkinud süsteemi saame

$$\begin{aligned} Q &= \frac{SU\Delta T}{\gamma K/D - \rho c_o \Delta T} \approx 206 \text{ m}^3/\text{h} \\ P_p &= \frac{Q\gamma k}{D} \approx 9,26 \text{ kW} \\ \gamma &= G_1\eta_1 - G_0\eta_0 \approx 9,09 \text{ g/m}^3. \end{aligned}$$

Ventileerimisele kulub  $P_v/P_p \approx 18,6\%$  küttevõimsusest ja telgis vahetub õhk  $Q/V \approx 1,54$  korda tunnis ( $V = \frac{2}{3}\pi R^3$ ).

### L261 Pooljuht ★★★★

Autor: tundmatu, lahtine, 2008, G 10

Kütteelemendi takistus on

$$R = \frac{\rho L}{S} = \frac{L}{\sigma S},$$

kus  $\rho$  on eritakistus,  $L$  elemendi pikkus,  $S$  elemendi ristlõikepindala ja  $\sigma$  erijuhtivus. Elemendil eralduv võimsus on

$$N = \frac{U^2}{R} = \frac{S}{L} U^2 \sigma.$$

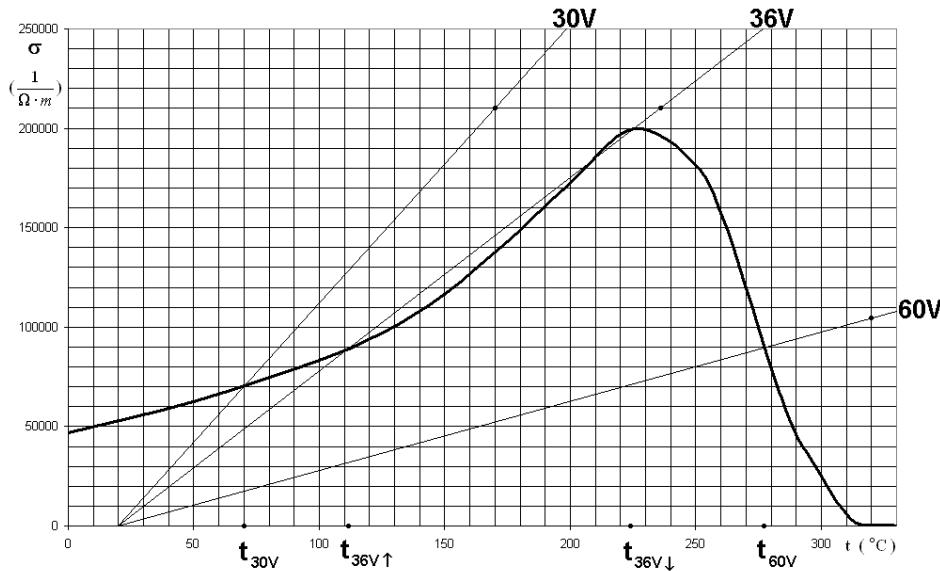
Võimsus, millega keha annab soojust ümbrissevale keskkonnale, on võrdeline temperatuuride vahega ja tasakaalulise temperatuuri puhul peab võrduma kehal eralduva võimsusega. Seega

$$N = k\Delta t = \frac{S}{L} U^2 \sigma.$$

Sit näeme, et

$$\frac{\sigma}{\Delta t} \cdot U^2 = k \frac{L}{S} = \text{Const}, \quad (1)$$

kus aga  $\frac{\sigma}{\Delta t}$  on sirge tõus erijuhtivuse graafikul, kus algpunktiks on  $t_v = 20^\circ\text{C}$  ja  $\sigma = 0$ .



Algtingimusi silmas pidades on pinge  $U_0 = 30 \text{ V}$  juures see tõus  $\left(\frac{\sigma}{\Delta t}\right)_{30} = \frac{7}{5}$  ning arvestades valemit (1) saame

$$\left(\frac{\sigma}{\Delta t}\right)_{30} \cdot U_0^2 = \left(\frac{\sigma}{\Delta t}\right)_{60} \cdot U_1^2 = \left(\frac{\sigma}{\Delta t}\right)_{36} \cdot U_2^2.$$

Sit

$$\left(\frac{\sigma}{\Delta t}\right)_{60} = \frac{U_0^2}{U_1^2} \left(\frac{\sigma}{\Delta t}\right)_{30} = \frac{7}{20},$$

$$\left(\frac{\sigma}{\Delta t}\right)_{36} = \frac{U_0^2}{U_2^2} \left(\frac{\sigma}{\Delta t}\right)_{30} = \frac{35}{36}.$$

Kanname vastavad sirged (alguspunktiga  $t = 20^\circ\text{C}$  ja  $\sigma = 0$ ) graafikule ja loeme vastavad tasakaalulised temperatuurid.

Saame  $U_1 = 60 \text{ V}$  puhul  $t_1 = 277^\circ\text{C}$ .

Tekib huvitav nähtus, et tänu mittelineaarsusele on  $U_2 = 36 \text{ V}$  puhul pingे tõstmisel ja langetamisel tasakaalulised temperatuurid erinevad, vastavalt pinge tõusu  $t_2 = 112^\circ\text{C}$  ja langetamisel  $t'_2 = 224^\circ\text{C}$ .

Paneme tähele,  $36 \text{ V}$  puhul on graafikult loetavaid lahendeid justkui kolm, aga keskmise lahend  $207^\circ\text{C}$  on ebastabiilne. Nimelt olukorras, kus küttekeha on selles temperatuuril, viib väikenegi küttekeha temperatuuri tõus võimsuse suureneniseni ja langus vastavalt võimsuse vähenemiseni, seega temperatuur kas kasvab temperatuurini  $224^\circ\text{C}$  või langeb temperatuurini  $112^\circ\text{C}$ .

## L262 Must kuup ★★★★

Autor: Mihkel Pajusalu, lahtine, 2014, G 9

Ülesandes esitatud tingimuste kohaselt on see kuup musta keha kiirgur ja see neelab kõik sellele langenud kiurguse. Olenemata asendist on kuubi poolt kiiratud koguvõimsus sõltuv ainult kuubi temperatuurist ja selle küljetahu pindalast  $A$ . Kuubil on teatavasti 6 tahku. Seega on kuubi kiiratav koguvõimsus Stefani-Boltzmanni seaduse järgi

$$P = 6A\sigma T^4.$$

Tasakaaluolukorras on kuubi poolt neelatav võimsus ja kiiratav võimsus võrdsed. Kuubi poolt neelatav võimsus on võrdeline kuubi projektsiooniga valguskiirtega risti olevale tasandile. Selle projektsiooni suurus sõltub kuubi asendist valguskiirte suhtes. Olgu  $\alpha$  tegur, mis näitab kui palju on kuubi projektsioon suurem selle küljepindalast. Sellel juhul saame tasakaaluolukorra

$$6A\sigma T^4 = \alpha AI,$$

millest saame tasakaalulise temperatuuri sõltuvuse kuubi asendist.

$$T(\alpha) = \sqrt[4]{\frac{\alpha I}{6\sigma}}.$$

Nüüd tuleb leida kõrgeim ja madalaim temperatuur. Selleks on vaja leida suurim ja vähim  $\alpha$ . Vaadates kuubi geomeetriat, on üsnagi lihtne järelleda, et minimaalne võimalik  $\alpha$  on 1. See vastab olukorrale, kus kuubi üks külg on valgusvooga risti.

$$T_{\min} = \sqrt[4]{\frac{I}{6\sigma}}.$$

Maksimaalse juhu leidmine on aga keerukam. Selleks leidub geomeetrilisi meetodeid, kuid üks lihtsaim meetod on kasutada teadmist, et pinnaühiku projektsioon pinnale on võrdeline selle pinnanormaali  $\vec{n}$  ja valgusvoo suuna  $\vec{i} = \vec{I}/I$  vahelise nurga koosinusega. Ühikvektorite korral

$$A_{\text{projektsioon}} = A\vec{n} \cdot \vec{i} \Rightarrow \alpha = \Sigma \vec{n} \cdot \vec{i}.$$

Kuubil saavad olla valgusvoo suunas kõige rohkem kolm tahku korraga. Tähistame need kui  $x$ ,  $y$  ja  $z$  ning nende pinnanormaalid kui  $\vec{n}_x$ ,  $\vec{n}_y$  ja  $\vec{n}_z$ . Seega

$$\alpha = (\vec{n}_x + \vec{n}_y + \vec{n}_z) \cdot \vec{i}.$$

Kui me defineerime taustsüsteemi, kus kuubi küljed on risti vastavate telgedega, siis lihtsustub antud valem  $\vec{i}$  komponentide summaks

$$\alpha = i_x + i_y + i_z.$$

Kuna  $\vec{i}$  on ühikvektor, siis

$$i_x^2 + i_y^2 + i_z^2 = 1.$$

On näha, et  $\alpha$  on maksimaalne kui kuubi diagonaal on suunatud valgusvoo suunas ehk kõikide külgede komponendid on võrdsed. Seega

$$\begin{aligned}\alpha_{\max} &= 3i_x \\ 3i_x^2 &= 1 \Rightarrow \alpha_{\max} = \sqrt{3}.\end{aligned}$$

Järelikult

$$T_{\max} = \sqrt[4]{\frac{\sqrt{3}I}{6\sigma}}.$$

ehk temperatuur varieerub  $\sqrt[8]{3} \approx 1,15$  korda.

### L263 Kondensaator ★

Autor: Madis Ollikainen, lahtine, 2012, G 3

Kuulikesele mõjub nii raskusjõud  $mg$  kui ka elektrostaatiline jõud  $QE = QU/d$ . Nendest leiame kiirenduse  $a$ :

$$F = QE - mg \Rightarrow a = \frac{F}{m} = \frac{U}{d} \frac{Q}{m} - g.$$

Konstantse kiirendusega liikudes on plaatidevahelise kauguse ja selle läbimiseks kuluva aja seos  $d = \frac{at^2}{2}$ . Niisiis

$$d = \frac{\left(\frac{U}{d} \frac{Q}{m} - g\right) t^2}{2} \Rightarrow \frac{2d}{t^2} = \frac{U}{d} \frac{Q}{m} - g.$$

Sit saame massi ja laengu suhteeks

$$\frac{m}{Q} = \frac{t^2 U}{(2d + gt^2) d}.$$

### L264 Juhe ★★

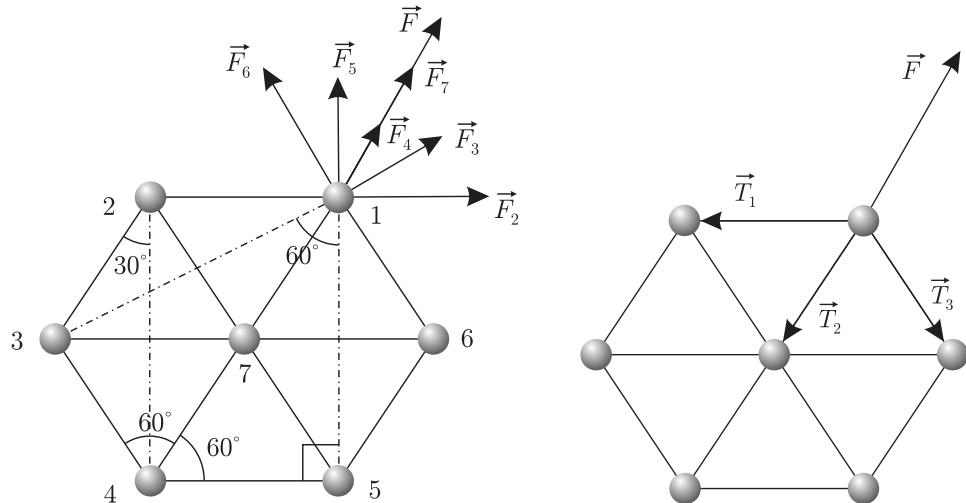
Autor: tundmatu, lahtine, 2005, G 5

Valime mõttelise ühikulise pikkusega silindrilise kontuuri, mille raadius on  $r$ . Selle pindala on  $S = 2\pi r$ , sellest voolab läbi vool  $i$ . Voolutihedus tuleb seega

$$j = \frac{i}{2\pi r}.$$

**L265 Kuulikesed ★★**

Autor: tundmatu, lahtine, 2005, G 4



Kõigepealt teeme kaks olulist tähelepanekut, lähtudes sümmeetria kaalutlustest:

- 1) Keskmise kuul jäab paigale.
- 2) Kõik 6 kuuli servades on samaväärsed, neile mõjuvate jõudude suurused on samad, kuid jõudude suunad on erinevad — nad langevad kokku sirgetega, mis ühendavad vastava kuulikesese keskmise kuulikesega, ning kuna laengud on sama-märgilised, on suunatud keskmisest kuulikesest eemale.

Märgime joonisel ühele äärminele kuulikesele mõjuvad jõud (vt joonist). Leidame jõudude väärtsused. Jõud  $F_2$ ,  $F_6$  ja  $F_7$  mõjuvad kuulikesele 1, vastavalt kuulikeste 2, 6 ja 7 poolt:

$$F_2 = F_6 = F_7 = \frac{kq^2}{l^2}.$$

Jõud  $F_4$  mõjub kuulikesele 1 kuulikesese 4 poolt:

$$F_4 = \frac{kq^2}{(2l)^2} = \frac{kq^2}{4l^2}.$$

Jõud  $F_3$  ja  $F_5$  mõjuvad kuulikesele 1, vastavalt kuulikeste 3 ja 5 poolt:

$$F_3 = F_5 = \frac{kq^2}{(2l \sin 30^\circ)^2} = \frac{kq^2}{(2l \cdot \sqrt{3}/2)^2} = \frac{kq^2}{3l^2}.$$

Summaarse jõu leiame projitseerides jõud radiaalsele teljele:

$$\begin{aligned}
 F &= F_7 + F_4 + 2F_2 \cos 60^\circ + 2F_3 \cos 30^\circ \\
 &= \frac{kq^2}{l^2} + \frac{kq^2}{4l^2} + 2 \cdot 0,5 \cdot \frac{kq^2}{l^2} + 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{kq^2}{3l^2} = \frac{kq^2}{l^2} \left( 1 + \frac{1}{4} + 1 + \frac{\sqrt{3}}{3} \right) \\
 &= \frac{kq^2}{l^2} \left( \frac{27 + 4\sqrt{3}}{12} \right).
 \end{aligned}$$

Kuna tegu on ühesuguste niitidega, mis venisid sama palju (niitide alg- ja lõpppik-kused on ühesugused), siis pinged kõigis niitides on võrdsed:

$$\vec{F} = \vec{T}_1 + \vec{T}_2 + \vec{T}_3, \quad |\vec{T}_1| = |\vec{T}_2| = |\vec{T}_3|.$$

Sit:

$$F = T + 2T \cos 60^\circ = T(1 + 2 \cdot 0,5) = 2T.$$

Seega niitides on pinge

$$T = \frac{F}{2} = \frac{kq^2}{l^2} \left( \frac{27 + 4\sqrt{3}}{24} \right).$$

### L266 Tolmukübe ★★

Autor: Aigar Vaigu, piirkonnnavoor, 2006, G 8

Olgu plaatide pindala  $S$ , plaatide vaheline kaugus  $d$ , kondensaatori mahtuvus ja pinge vastavalt  $C$  ja  $U$ . Avaldame elektrivälja tugevuse kondensaatori plaatide vahel:

$$C = \frac{\epsilon\epsilon_0 S}{d} \quad \text{ja} \quad C = \frac{q}{U},$$

kust

$$E = \frac{q}{\epsilon\epsilon_0 S}.$$

Arvestades, et pindtihedus  $\sigma = q/S$ , saame

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon\epsilon_0}.$$

Tolmukübemele mõjub raskusjõud  $mg$  ja elektrostaatiline jõud  $Eq$ . Tasakaalu korral  $mg = Eq$ . Tolmukübeme laeng on seega

$$q = \frac{mg}{E} = mg \frac{\epsilon\epsilon_0}{\sigma} \approx 0,33 \cdot 10^{-17} \text{ C}.$$

Kui polaarsust muuta, siis mõjub tolmukübemele jõud

$$F = mg + Eq = 2mg.$$

Kiirendus, millega tolmukübe hakkab langema, on  $a = 2g$ .

**L267 Kuulikesed ★★**

Autor: tundmatu, lahtine, 2007, G 7

Energia jäävuse seaduse kohaselt

$$mgH + \frac{mv^2}{2} + \frac{kq^2}{H} = mgh + \frac{kq^2}{h},$$

kus peale gravitatsioonilise potentsiaalse energia arvestasime ka elektrilise potentsiaaliga. Niisiis

$$\begin{aligned} h - \frac{v^2}{2g} - H - \frac{kq^2}{mgH} + \frac{kq^2}{mgh} &= 0, \\ h^2 - \left( \frac{v^2}{2g} + \frac{kq^2}{mgH} + H \right) h + \frac{kq^2}{mg} &= 0. \end{aligned}$$

Lahendades saadud ruutvõrrandi, saame

$$h = \frac{1}{2} \left( \frac{v^2}{2g} + \frac{kq^2}{mgH} + H \right) - \sqrt{\frac{1}{4} \left( \frac{v^2}{2g} + \frac{kq^2}{mgH} + H \right)^2 - \frac{kq^2}{mg}}.$$

Lahend „+“-märgiga ruutjuure ees oleks kaugusest  $H$  suurem ja vastaks maksimaalsele kõrgusele, mille saavutaks kuulike, kui ta saaks samasuguse kuid ülespoole suunatud algkiiruse.

**L268 Laetud röngas ★★**

Autor: tundmatu, lahtine, 2009, G 4

Punktis, mis asub rönga teljel kaugusel  $d$  rönga keskpunktist on rönga poolt tekitatud välja potentsiaal

$$\phi_1 = k \frac{Q}{\sqrt{R^2 + d^2}} = k \frac{Q}{2R}.$$

Rönga keskpunktis on rönga poolt tekitatud välja potentsiaal

$$\phi_2 = k \frac{Q}{R}.$$

Et elektron saaks röngast läbi lennata, peab tema kineetiline energia olema piisav potentsiaalide vahe  $U = \phi_2 - \phi_1$  läbimiseks. Piirjuhul saame

$$\frac{mv^2}{2} = e \left( k \frac{Q}{R} - k \frac{Q}{2R} \right) = k \frac{eQ}{2R}.$$

Sit

$$v_{\min} = \sqrt{k \frac{eQ}{mR}}.$$

**L269 Ioonmootor ★★**

Autor: Mihkel Pajusalu, lahtine, 2010, G 6

Ioonide kiiruse leiame energia jäävuse seadusest:

$$mu^2/2 = Ue \Rightarrow u = \sqrt{2Ue/m},$$

kus  $m = \mu/N_a$ . Impulsi jäävuse seadusest süsteemi „laev+kiirendatud kütus“ jaoks saame (eeldusel, et  $M \gg m_k$ )

$$m_k u = Mv \Rightarrow m_k = Mv/u = Mv\sqrt{\mu/2N_A U e} = 2,61 \text{ kg}.$$

Näeme, et tehtud eeldus  $m_k \ll M$  tõepoolest kehtib.

**L270 Elektron ★★**

Autor: Mihkel Kree, lahtine, 2017, G 3

Elektriväljas liikuvalle elektronile mõjub allapoole suunatud vertikaalne jõud  $qE$ , millele vastab elektroni kiirendus  $a = qE/m$ . Seega võime elektroni liikumist analüüsida analoogiliselt õhku visatud kivi liikumisega: a) elektron liigub mööda parabolisekt trajektoori; b) elektroni kiiruse horisontaalkomponent  $v_0$  ei muutu; c) elektroni kiiruse vertikaalkomponent kasvab ajas kujul  $v_y = at$ ; d) elektroni horisontaalne nihe kasvab ajas  $x = v_0 t$ ; e) elektroni vertikaalne nihe kasvab ajas kujul  $y = at^2/2$ .

Elektroni kiirus plaatide vahelisest ruumist väljumisel on minimaalne siis, kui elektroni trajektoor möödub alumise plati parema otsa lähedalt. Sellest väiksema kiiruse korral lendaks elektron vastu alumist plati ning ei pääseks seetõttu plaatide vahelisest ruumist välja.

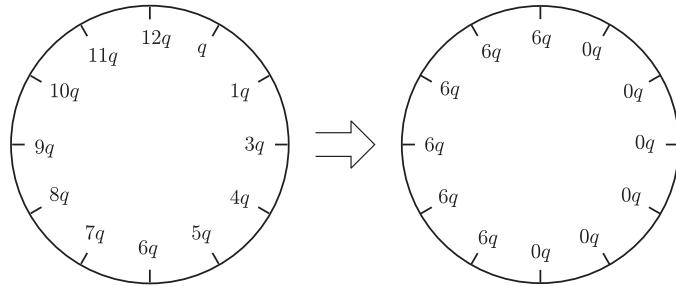
Olgu elektroni algkiirus  $v_0$ . Elektronil kulub plaatide vahelise ruumi läbimiseks aeg  $t = l/v_0$ , mille jooksul peab vertikaalne nihe olema võrdne plaatide vahelise kaugusega  $d = at^2/2$ . Siit saame avaldada elektroni plaatide vahel liikumise aja  $t = \sqrt{2d/a}$ , elektroni vertikaalse kiiruse plaatide vahelisest ruumist väljumisel  $v_y = at = \sqrt{2ad}$  ning elektroni minimaalse vajaliku algkiiruse  $v_0 = l/t = \sqrt{al^2/2d}$ . Nüüd saame avaldada otsitava minimaalse lõppkiiruse mooduli:

$$v_{\min} = \sqrt{v_y^2 + v_0^2} = \sqrt{2ad + \frac{al^2}{2d}} = \sqrt{\frac{qE(4d^2 + l^2)}{2md}}.$$

**L271 Laetud numbrilaud ★★★**

Autor: tundmatu, lahtine, 2004, G 7

Iga laeng  $nq$  tekib numbrilaaua tsentris välja, mille moodul on võrdeline  $nq$ -ga ja mis on suunatud radiaalselt laengust eemale. Vektorite liitmise järjekord pole oluline, seega võime sümmeetria töltu esmalt liita paarikaupa samal diagonaalil paiknevate laengute väljad. Sellest ideest lähtuvalt näeme, et algne konfiguratsioon on ekvivalentne laengute lihtsama paigutusega (vt. joon. 2). Nüüd on sümmeetria põhjal kerge näha, et resultantvälja vektor osutab kellaajale 3.30.



### L272 Lendav elektronkahur ★★

Autor: Siim Ainsaar, lõppvoor, 2006, G 6

Olgu elektroni laengu absoluutväärtus  $e$  ja mass  $m_e$ . Ajaga  $t$  lahkub katoodilt hulk elektrone kogulaengu absoluutväärtusega  $q = It$ . Elektronide arv, mis selle ajaga lendu läheb, on siis  $N = \frac{q}{e} = \frac{It}{e}$  ja mass  $m = Nm_e = \frac{Itm_e}{e}$ . Leiame ka, kui kiiresti need elektronid liiguvad. Üks elektron saab elektronkahuris kineetilise energiia  $E = Ue$ . Samas  $E = \frac{m_e v^2}{2}$ , seega

$$v = \sqrt{\frac{2E}{m_e}} = \sqrt{\frac{2Ue}{m_e}}.$$

Ajaga  $t$  lendu läinud elektronide koguimpulss

$$p = mv = \frac{Itm_e}{e} \sqrt{\frac{2Ue}{m_e}} = It \sqrt{2U \frac{m_e}{e}}.$$

Et elektronkahur muudab aja  $t$  jooksul elektronide impulssi  $p$  võrra, siis mõjub temale keskmiselt jõud

$$F = \frac{p}{t} = I \sqrt{2U \frac{m_e}{e}} = I \sqrt{\frac{2U}{k}}.$$

Tõstmaks masinat õhku, peab see  $F$  ületama masinale (koos Tatikaga) mõjuva rasusjõu  $m_{Tg}$ , st  $F \geq m_{Tg}$  ehk

$$I \sqrt{U} \geq m_{Tg} \sqrt{\frac{k}{2}} \approx 4,3 \cdot 10^8 \text{ A} \sqrt{\text{V}}.$$

Ilmselt peavad  $I$  ja  $U$  olema ebarealistlikult suured, sest televiisori puhul

$$I \sqrt{U} \approx 0,017 \text{ A} \sqrt{\text{V}}.$$

Seega pole Tatikal lootustki sellise masinaga lennata.

*Märkus:* erirelatiivsusteooriat arvestades sama arutluskäiku läbi tehes saaksime, et täpsem valem on

$$F = I \sqrt{\frac{2U}{k} + \frac{U^2}{c^2}},$$

kus  $c \approx 3,0 \cdot 10^8$  m/s on valguse kiirus vaakumis. Seega võime relativistlikud efektid arvestamata jäätta vaid siis, kui

$$\frac{U^2}{c^2} \ll \frac{2U}{k}$$

ehk

$$U \ll \frac{2c^2}{k} \approx 1,0 \cdot 10^6 \text{ V}.$$

Arvestades vajalikku  $I\sqrt{U}$  suurusjärku, peab Tatikas niisiis kardetavasti ka relatiivsusteooriat uurima... Lendu tõusta ei suudaks ta aga sellegipoolest.

### L273 Elektronkiir ★★

Autor: tundmatu, lahtine, 2008, G 7

Olgu  $v_0$  elektronide algkiirus plaatide vahelise sattumisel. Aeg, mille jooksul üks elektron viibib plaatide vahel, on  $t = \frac{b}{v_0}$ .

Plaatide vahel on elektriväli tugevusega  $E = \frac{U}{d}$ . Newtoni II seadusest  $eE = ma$  leiate, et elektron liigub plaatide vahel kiirendusega  $a = \frac{eU}{md}$ . Läbides plaatide vahelise tee, kalduvad elektronid vahemaa  $s_0$  esialgsest trajektoorist kõrvale, kus

$$s_0 = \frac{at^2}{2} = \frac{Ueb^2}{2dmv_0^2}.$$

Elektronide liikumise kiirus  $v$  plaatide vahelisest ruumist väljudes koosneb kahest komponendist:

- paralleelsest ekraaniga  $v_y = at = \frac{eUb}{mdv_0}$ ,
- risti ekraaniga  $v_x = v_0$ .

Seega veedavad elektronid plaatidest ekraanini aja  $t' = \frac{l}{v_x} = \frac{l}{v_0}$ . Selle aja jooksul lisandub täiendav ekraaniga paralleelne nihe

$$s' = v_y t' = \frac{eUbl}{mdv_0^2}.$$

Kogu nihe on niisiis

$$s = s_0 + s' = \frac{eUb}{mdv_0^2} \left( \frac{b}{2} + l \right).$$

Seega

$$v_0 = \sqrt{\frac{e}{m} \frac{Ub}{ds} \left( \frac{b}{2} + l \right)} \approx 1,58 \cdot 10^7 \text{ m/s}.$$

Sooritame kontrolli, kas elektri nihe plaatide vahel on väiksem kui plaatide vaheline kaugus:

$$s_0 = \frac{Ueb^2}{2dmv_0^2} = \frac{bs}{2l+b} = 3,5 \text{ mm} < d.$$

**L274 Kuup ★★★**

Autor: Jaan Kalda, piirkonnnavoor, 2008, G 7

Kui auku ei oleks, oleks väljatugevus sümmeetria tõttu 0. Antud olukord on ekvivalentne auguta kuubi ja negatiivse pindlaenguga  $b \times b$  ruudu superpositsiooniga. Negatiivne ruut moodustab laengu  $q = -\sigma b^2$  ning tekitab kuubi keskel väljatugevuse

$$E = \frac{\sigma b^2}{4\pi\epsilon_0 \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{\sigma b^2}{\pi\epsilon_0 a^2}.$$

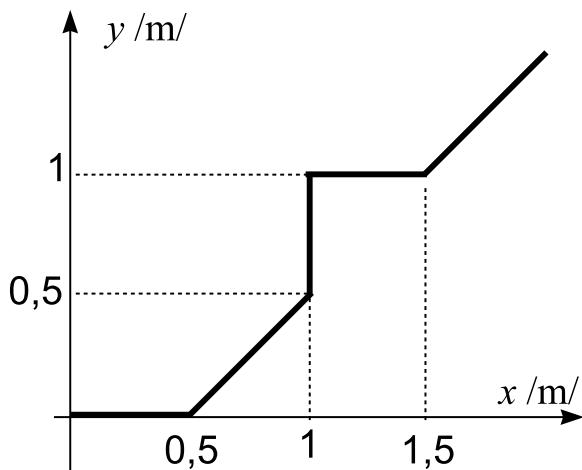
**L275 Liikuv laeng ★★★**

Autor: Jaan Kalda, piirkonnnavoor, 2009, G 6

Esimene impulss annab alguses laengule  $x$ -suunalise impulsi  $mv_x = qE_x\tau$ , milles

$$v_x = \frac{q}{m} E_x \tau = 1 \text{ m/s}.$$

Ajavahemiku  $t_1 = T/4$  jooksul kuni järgmise impulsini jõub osake liikuda sirgjooneliselt piki  $x$ -telge kaugusele  $s_x = v_x T/4 = 0,5 \text{ m}$ . Seejärel saab ta impulsi  $y$ -telje sihis, mistõttu omandab ka kiiruse  $y$ -komponent samasuguse väärtsuse:  $v_y = v_x = 1 \text{ m/s}$ , mistõttu ta liigub 45-kraadise nurga all, sooritades kuni järgmisse impulsini nii  $x$ - kui  $y$ -telje sihis nihke  $s_x = s_y = 0,5 \text{ m}$ . Järgmine impulss peatab  $x$ -telje sihilise (kuid muutmata  $y$ -sihilist) liikumise, nii et osake nihkub nüüd piki  $y$ -telge kaugusele  $s_y = 0,5 \text{ m}$ . Järgmine impulss peatab ka  $x$ -suunalise liikumise, nii et osake jääb paigale. Edasi kordub protsess otsast peale. Eelpooltoodud tulemuste põhjal saame juuresoleva trajektoori.



Keskmise kiiruse leidme perioodi jooksul sooritatud nihke  $s = \sqrt{1+1} \text{ m}$  perioodi  $T = 2 \text{ s}$  suhtena,  $v \approx 0,7 \text{ m/s}$ .

**L276 Sfäärid ★★★**

Autor: Kristian Kuppart, lahtine, 2011, G 8

Et sfäärid on traadiga ühendatud, siis nad omandavad sama potentsiaali. Olgu ühe laeng  $Q_1$  ja teise laeng  $Q_2$ ; sellisel juhul  $kQ_1/R_1 = kQ_2/R_2$ . Jagades selle võrduse vasaku ja parema poole läbi  $R_1R_2$ -ga ja tähistades  $E_1 = kQ_1/R_1^2$  ning  $E_2 = kQ_2/R_2^2$ , saame  $E_1/R_2 = E_2/R_1$ , millest  $E_1/E_2 = R_2/R_1$ .

**L277 Laengud ★★★**

Autor: Mihkel Kree, piirkonnavor, 2017, G 9

Olgu keskmise kera nihe  $y$ . Keskmise kera kaugus kummastki äärmisest kerast on nüüd  $l = \sqrt{d^2 + y^2}$ . Kumbki äärmine kera mõjutab keskmist kera jõuga  $F = \frac{kqQ}{l^2}$ , mille vertikaalkomponendi on  $F_y = -\frac{y}{l}F$ . Kokku mõjub keskmisele kerale vertikaaljoud  $2F_y$ , millest saame seose keskmise kera kiirenduse jaoks  $ma = 2F_y$ . Et  $y \ll d$ , siis  $l \approx d$ , millest saame lihtsustada liikumisvõrandi kujule

$$a = -\frac{2kQq}{md^3}y.$$

See võrrand kirjeldab harmoonilist võnkumist perioodiga

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{md^3}{2kQq}}.$$

*Märkus.* perioodi ja sageduse valem on võimalik leida analoogiast vedru võnkumi-sega, kus  $ma = -kx$  ja  $T = 2\pi\sqrt{m/k}$ .

**L278 Kondensaatorid ★★★★**

Autor: Oleg Košik, lõppvoor, 2005, G 8

Tegu on kondensaatorite jadaühendusega, mille tõttu laeng mõlemal kondensaatori peab olema ühesugune. Kondensaatorite kogumahtuvuse leiate valemist

$$\frac{1}{C_0} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \Rightarrow C_0 = 1,2C.$$

Seega laeng on  $q = 1,2CU$ . Pinge kondensaatori mahtuvusega  $2C$  on seega  $U_1 = q/C_1 = 0,6U$  ning kondensaatori mahtuvusega  $3C$  vastavalt  $U_2 = 0,4U$ . Eeldame, et elektriväli on vaid kondensaatorite sees. Elektrivälja tugevus neis on nüüd vastavalt

$$E_1 = -\frac{U_1}{2d} = -\frac{-0,3U}{d} \quad \text{ja} \quad E_2 = \frac{U_2}{d} = \frac{0,4U}{d}.$$

Kuna elektriväljad peavad olema suunatud vastupidistes suundades, siis ühe elektrivälja tugevuse võtsime negatiivseks. Määrame nüüd horisontaalsuunalise kiirenduse seosest  $Eq = ma$ . Esimese kondensaatori puhul on see

$$a_2 = \frac{E_2 q}{m} = \frac{0,4Uq}{md}.$$

Vertikaalsuunaline kiirus on kogu aeg sama, selle tõttu aeg, mille joooksul asub osake mõlema kondensaatori elektrivälja mõjusfääril, on  $t = l/v$ . Selle aja joooksul

muutub horisontaalsuunaline kiirus *at* võrra. Seega teisest kondensaatorist väljumise hetkel on osakese kiirus

$$v_h = ta_1 + ta_2 = t(a_1 + a_2) = \frac{0,1Uql}{mdv}.$$

Trajektoori kaldenurga tangens on järelikult

$$\tan \alpha = \frac{v_h}{v} = \frac{0,1Uql}{mdv^2}.$$

### L279 Kärbes ★★★★

Autor: Stanislav Zavjalov, lahtine, 2010, G 7

Valime potentsiaali nullnivoooks kärbse asümptootilise asukoha (lõpmatuses). Olgu laeng  $Q$  koordinaatide alguspunktiks ning olgu  $x$ -telg horisontaalne ja  $y$ -telg vertikaalne. Kärbes peab püsima laengu lächedal kõverduval null-potentsiaalil. Potentsiaal avaldub homogeense välja  $E$  potentsiaali ja punktlaengu potentsiaali superpositsioonina, seega

$$E(d - y) - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{\sqrt{y^2 + x^2}} = 0.$$

Ülesande sümmeetriast on selge, kärbse vahemaa on minimaalne  $x = 0$  korral ehk teisisõnu kehtib  $E(d - y) = kQ/y$ . Antud võrrandist saame ruutvõrrandi lahenditega

$$y_{1,2} = \frac{d}{2} \pm \sqrt{\frac{d^2}{4} - \frac{kQ}{E}} = \frac{d}{2} \left( 1 \pm \sqrt{1 - \frac{4kQ}{Ed^2}} \right).$$

Juhul kui laeng on väike, liigub kärbes ilmselgelt sirgjooneliselt. Ometigi leidub kaks lahendit. Lahendi kahesus tuleneb sellest, et laengu läheduses leidub samuti null-potentsiaaliga suletud kõver. Laengu kasvades need kaks null-potentsiaaliga joont lähenevad üksteisele, kuni  $Q = \pi\epsilon_0 Ed^2$  juures puutuvad kokku ja edaspidi moodustub null-potentsiaalist juba üksainus kõver, mis kulgeb ümber laengu. Seega vastab kärbse trajektoor ruutvõrrandi suuremale lahendile:

$$y = \frac{d}{2} \left( 1 + \sqrt{1 - \frac{4kQ}{Ed^2}} \right).$$

**L280 Pendel ★★★**

Autor: Jonatan Kalmus, lõppvoor, 2018, G 6

Kuna liikumine toimub vaid vertikaalsihis, võtame  $x$ -teljeks vertikaalsihi suunaga alla. Algsest jõudude tasakaalust saame

$$Mg = kx_0,$$

kust kuuli algkõrgus on  $x_0 = \frac{Mg}{k}$ . Teame, et vedru otsa asetatud kuuli pool vönkeperioodi on

$$\tau = \pi \sqrt{\frac{M}{k}}.$$

On selge, et see ei sõltu gravitatsioonivälja tugevusest. Kuna nii gravitatsioonivälja kui ka elektrivälja poolt tekitatud jõud käituval analoogselt, võime järel dada, et vönkeperiood ei sõltu ka elektrivälja tugevusest ning jäab konstantseks. Seega muudab elektrivälja jõud vaid kuuli tasakaaluasendit iga kord, kui kuul muudab oma liikumissuunda (sest ülesandes on öeldud, et elektriväli on alati kuuli liikumise suunas) ehk iga poole vönkeperiode  $\tau$  järel. Alla liikumisel on elektriväli suunatud alla ning saame kirja panna uue jõudude tasakaalu

$$Mg + Eq = kx_{\downarrow}.$$

Seega on tasakaaluasend alla liikumisel

$$x_{\downarrow} = \frac{Mg}{k} + \frac{Eq}{k} = x_0 + \Delta x.$$

Analoogselt saame leida tasakaaluasendi üles liikumisel, kuid nüüd on elektriväli suunatud üles:

$$x_{\uparrow} = \frac{Mg}{k} - \frac{Eq}{k} = x_0 - \Delta x.$$

On selge, et algsest elektrivälja sisselülitamisel, kui elektriväli on alla suunatud, muutub tasakaaluasend hetkeliselt vastavaks, kuid kuuli asukoht jäab algsest saamaks. Seega pole kuul enam tasakaalus, vaid uuest tasakaaluasendist kaugusel  $\Delta x$  ning hakkab vönkuma amplituudiga  $A_1 = \Delta x$  tasakaaluasendi  $x_{\downarrow}$  ümber. Aja  $\tau$  järel on kuul jõudnud kaugusele  $x_0 + 2\Delta x$ . Kuna kuul hakkab nüüd üles liikuma, muutub ka kuuli tasakaaluasend koos elektriväljaga vastavaks ning üles minnes võngub kuul juba amplituudiga  $A_2 = 3\Delta x$  tasakaaluasendi  $x_{\uparrow}$  ümber. On selge, et iga tasakaaluasendi vahetumisega kasvab kuuli amplituud edaspidi  $2\Delta x$  võrra. Tasakaaluasend vahetub aga iga ajavahemiku  $\tau$  järel. Nüüd leiame kuuli asukohta ülesandes antud ajahetkel, milleks on  $7\tau$ . Selle aja jooksul liigub kuul korra algasendist alla, ning teebs siis 3 täisvöonet, jõudes nende järel uuesti alla. Pärast algasendist alla jõudmist on kuuli asukoht  $x_0 + 2\Delta x$ . Seejärel liigub kuul üles asendisse  $x_0 - 4\Delta x$  ja uuesti alla asendisse  $x_0 + 6\Delta x$ . Kauguse aboluutväärust algasendist suureneb seega iga  $\tau$  järel  $2\Delta x$  võrra.  $7\tau$  järel on kaugus tasakaaluasendist seega  $7 \cdot 2\Delta x = 14\Delta x$ . Nagu enne selgeks tegime, on kuul seega küsitud ajahetkel  $7\tau$  algasendist  $x_0 + 14\Delta x = 14\frac{Eq}{k}$  võrra all pool.

**L281 Laetud kLOTSID ★★★**

Autor: tundmatu, lahtine, 2006, G 9

Klots hakkab liikuma, kui sellele mõjuv elektrostaatiline jõud ületab maksimaalse hõõrdejõu:

$$\frac{kq^2}{l^2} > \mu mg.$$

Klotside läbitava vahemaa leiame energia jäävuse seadusest. Punktis, milles kLOTS peatub, on elektrostaatilise välja potentsiaalne energia väiksem kui algpunktis. Potentsiaalsete energiate vahe muundub liikumise käigus klotside kineetiliseks energiaks, mis omakorda hõõrdejõu töö tulemusena muundub soojuseks.

Kui kuulide vahemaa liikuma hakkamisel oli  $l$  ning seisma jäämise hetkel  $L$ , siis muutus elektrostaatilises potentsiaalses energias on

$$\Delta E = \frac{kq^2}{l} - \frac{kq^2}{L}.$$

Hõõrdejõud  $\mu mg$  mõjud kummagile kLOTSile vahemaa  $(L-l)/2$  jooksul, seega kogu hõõrdejõu töö on

$$A = \mu mg(L-l).$$

Et need energia muudud on võrdsed, saame vahemaa  $L$  jaoks lihtsa võrrandi:

$$\begin{aligned} kq^2 \left( \frac{1}{l} - \frac{1}{L} \right) &= \mu mg(L-l) \Rightarrow \frac{kq^2}{\mu mg} \frac{L-l}{lL} = L-l \Rightarrow \\ &\Rightarrow L = \frac{kq^2}{\mu mgl} \end{aligned}$$

**L282 Kosmoseprügi ★★★**

Autor: Siim Ainsaar, lõppvoor, 2009, G 9

Massikeskme taustsüsteemis on kerade kaugus minimaalne hetkel, kui süsteem on paigal.  $d$  saame energia jäävuse seadusest, mis kehtib, kuna nöör puutehetkel mutrile (sirgena) jõudu ei avalda ega muuda nii põrget plastseks.

Süsteemi masskeskme liikumiskiirus satelliidi süsteemis

$$v_c = \frac{mv}{m+2M},$$

mutri algkiirus masskeskme süsteemis

$$w = v - v_c = v \left( 1 - \frac{m}{m+2M} \right) = v \frac{2M}{m+2M},$$

tehiskaaslase oma

$$W = v_c = \frac{mv}{m+2M}.$$

Energia jäävus masskeskme taustsüsteemis on

$$\frac{mw^2}{2} + \frac{2MW^2}{2} + \frac{kq^2}{l} = \frac{kq^2}{d},$$

kust

$$\begin{aligned} d &= \frac{kq^2}{\frac{mv^2}{2} + MW^2 + \frac{kq^2}{l}} = \frac{kq^2}{\frac{mv^2}{2} \left( \frac{2M}{m+2M} \right)^2 + Mv^2 \left( \frac{m}{m+2M} \right)^2 + \frac{kq^2}{l}} = \\ &= \frac{1}{\frac{1}{l} + \frac{mMv^2}{kq^2(m+2M)}}. \end{aligned}$$

#### Alternatiivne lahendus

Hetkel, kui keradevaheline kaugus on minimaalne, on satelliidi osad üksteise suhtes paigal. Seega liigub süsteem sel hetkel nagu jäik keha. Võtame inertsiaalse taustsüsteemi, kus tehiskaaslane oli enne kokkupõrget paigal, ja tähistame süssteemi kiiruse minimaalse kauguse saavutamise hetkel kui  $v_1$ .

Impulsi jäädvusest

$$mv = (m + 2M)v_1 \implies v_1 = \frac{mv}{m + 2M}.$$

Kehtib ka energia jäävus.

$$\begin{aligned} \frac{mv^2}{2} + \frac{kq^2}{l} &= \frac{(m + 2M)v_1^2}{2} + \frac{kq^2}{d}, \\ \frac{mv^2}{2} + \frac{kq^2}{l} &= \frac{m^2v^2}{2(m + 2M)} + \frac{kq^2}{d}, \\ d &= \frac{\frac{kq^2}{l}}{\frac{mv^2}{2} + \frac{kq^2}{l} - \frac{m^2v^2}{2(m + 2M)}} = \frac{1}{\frac{1}{l} + \frac{mMv^2}{kq^2(m + 2M)}}. \end{aligned}$$

#### L283 Koonus ★★★★

Autor: Stanislav Zavjalov, piirkonnavaor, 2012, G 10

Punktlaengu  $q'$  poolt tekitatud potentsiaal on

$$\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q'}{r}.$$

Seega koonuse poolt tekitatud potentsiaal selle tipus on võrdeline summaarse laenguga ning pöördvördeline koonuse mõne lineaarmõõtmega. Olgu suurema koonuse laeng  $Q$  ja väiksema (mis on osa suuremast koonusest)  $q$ , siis nende sarnasuse tõttu

$$\frac{q}{Q} = \frac{h^3}{H^3}.$$

Kui suurem koonus tekitas punktis  $S$  potentsiaali  $\varphi_0$ , siis väiksem koonus (olles veel suurema koonuse osana) tekitab seal potentsiaali  $\varphi_1$ , mille kohta kehtib seos

$$\frac{\varphi_1}{\varphi_0} = \frac{q}{h} \frac{H}{Q} = \frac{h^2}{H^2},$$

kust avaldame

$$\varphi_1 = \varphi_0 \frac{h^2}{H^2}.$$

Potentsiaali jaoks kehtib superpositiooniprintsiip, seega väiksema koonuse eemaldamine toob kaasa vastava panuse kadumise. Seega otsitav uus potentsiaal on

$$\varphi' = \varphi_0 - \varphi_1 = \varphi_0 \left( 1 - \frac{h^2}{H^2} \right).$$

#### L284 Laengud ★★★★

Autor: Jaan Kalda, lõppvoor, 2012, G 9

**a)** Kuivõrd potentsiaal sõltub ainult  $x$ -koordinaadist, siis on elektriväli kõikjal  $x$ -telje sihiline ning impulsi  $y$ -komponent säilib. Seega, kui osake siseneb kõrgema potentsiaaliga piirkonda, siis väheneb vaid kiiruse  $x$ -komponent ning trajektoor on selline, nagu oleks valguskiirel optiliselt hõredamat kihti läbides.

**b)** Täielik „sisepeegeldus“ toimub siis, kui positiivse  $x$ -suunaga seotud kineetiline energia on suurem kui  $qU$ , mis vastab kiirusvektori ja  $x$ -telje vahelisele nugale

$$\arccos \sqrt{\frac{qU}{4qU}} = \frac{\pi}{3}.$$

Ainult sellest nurgast väiksemate nurkade puhul saab osake läbida kõrgema potentsiaaliga kihti ning selliset osakeste suhteline hulk on

$$\xi = \frac{\pi}{3} \nabla \cdot \pi = \frac{1}{3}.$$

#### L285 Kondensaator ★★★★

Autor: Stanislav Zavjalov, lõppvoor, 2013, G 10

Plaatkondensaatori mahtuvus on  $C = \epsilon_0 S/d$ , ning seega esialgu on kondesaatoril laeng

$$Q_0 = CU_0 = \epsilon_0 SU_0/d$$

ning koguenergia

$$E = CU_0^2/2 = \epsilon_0 SU_0^2/2d.$$

Et kondensaator on patareist lahti ühendatud, laeng säilib; aga pinge muutub, kui viime sisse metalliplaadi.

Olgu metallplaadi kaugus ühest kondensaatori plaadist  $x$ , siis on tegemist kahe jadamisi plaatkondensaatoriga, üks plaadivahelise kaugusega  $x$  ning teine kaugusega  $d - (d/2 + x) = d/2 - x$ . Uute kondensaatorite kogumahtuvuse  $C'$  leiate seosest

$$1/C' = 1/C(x) + 1/C(d/2 - x) = \frac{x}{\epsilon_0 S} + \frac{d/2 - x}{\epsilon_0 S} = \frac{d/2 - x + x}{\epsilon_0 S} = \frac{d}{2\epsilon_0 S},$$

kust  $C' = 2C$ . Seega süsteemi uus koguenergia on

$$E' = Q_0^2/2C' = \epsilon_0 S U_0^2/4d$$

ning ei sõltu plaadi täpsest asukohast kondensaatori sees. Süsteemi uue ja vana koguenergia vahe peab võrduma välisjõudude poolt sooritatud tööga, mis sel juhul tuleb negatiivne:

$$E' = E + A \rightarrow A = E' - E = -\epsilon_0 S U_0^2/4d.$$

Et välisjõu töö on negatiivne, tõmbub plaat ise kondesaatori sisse.

## L286 Kondensaator ★★★

Autor: Jaan Kalda, lahtine, 2017, G 7

Vaatleme kahe dielektrikuga kondensaatorit kui kahte järjestikku ühendatud plaat-kondensaatorit. Selleks asetame mõttelise metallplaadi dielektriliste kihtide eralduspinnale. Ühel kondensaatoril on seal laeng  $+q$ , teisel  $-q$ , seega vaba laeng on mõttelisel metallplaadil null (nii nagu vaja, sest tegelikult seal ju metallplaati pole). Algse dielektrikuta kondensaatori mahtuvus  $C = \epsilon_0 S/d$ . Mõtteliste kondensaatorite mahtuvused on  $C_1 = S\epsilon_0\epsilon/(d/2) = 2\epsilon C$  ja  $C_2 = S\epsilon_02\epsilon/(d/2) = 4\epsilon C$ , seega summaarse mahtuvuse pöördväärtus

$$C' = \frac{C_1 C_2}{(C_1 + C_2)} = \frac{4}{3}\epsilon C.$$

Dielektrikuga kondensaatori mahtuvus erineb dielektrikuta kondensaatori mahtuvusest, sest lisaks vabale laengule  $q$  metallplaadil on veel dielektriku pinnal vastasmärgiline dielektriku polarisatsioonist tingitud (dielektrikust mitte-eradatav) laeng  $-q'$ . Summaarne laeng  $Q = q - q'$  on selline, nagu on antud pinge puhul samasugusel, ilma dielektrikuta kondensaatoril. Olgu ühe mõttelise kondensaatori kogulaeng (vaba laeng + dielektriku laeng)  $Q_1 = q - q'_1$  ja teisel  $Q_2 = q - q'_2$ , siis sellel plaadil, mis jäab dielektrikute eralduspinnale, on kondensaatori plaatide laengumärke arvestades kogulaeng  $Q_1 - Q_2 = q'_2 - q'_1$ . Seega, dielektrikute eralduspinnal oleva kogulaengu  $q'_2 - q'_1$  saame leida, kui selliste dielektrikuta kondensaatorite laengute vahe, mille pinge võrdub vastavale dielektrikukihile langeva pingega.

Mõttelistel kondensaatoritel on ühesugune laeng, seose  $U = q/C$  tõttu on pinge pöördvõrdeline mahtuvusega, st ühele poole (kus dielektriline läbitavus on  $\epsilon$ ) langeb pinge  $2U_0/3$  ja teisele poole (kus dielektriline läbitavus on  $2\epsilon$ )  $U_0/3$ . Kui dielektriku kihti ei oleks, siis oleks kummagi mõttelise kondensaatori mahtuvus  $2C$ . Seega laeng mõttelistel kondensaatoritel oleks vastavalt  $Q_1 = 4U_0C/3$  ja  $Q_2 = 2U_0C/3$ , mistõttu kogulaeng dielektrikute eralduspinnal

$$q' = Q_1 - Q_2 = 2CU_0/3.$$

### Alternatiivne lahendus

Olgu kondensaatori plaadil laeng  $q$ , siis Gaussi teoreemist kondensaatori plaadi

jaoks saame seose  $SD = q$ , millest  $D = q/S$ . Dielektrikute eralduspinnal on  $D$ -vektori normaalkomponent pidev, seega piirkonnas, kus dielektriline läbitavus on  $\epsilon$ , on  $E_1 = D/\epsilon\epsilon_0$ , teises piirkonnas  $E_2 = D/2\epsilon\epsilon_0$ . Järelikult

$$U_0 = E_1 \frac{d}{2} + E_2 \frac{d}{2} = (Dd/2\epsilon\epsilon_0)(1 + \frac{1}{2}) = \frac{3}{4} Qd/\epsilon\epsilon_0 S,$$

mildest

$$C' \equiv Q/U_0 = \frac{4}{3}\epsilon\epsilon_0 S/d = \frac{4}{3}C\epsilon.$$

Laengu piirpinnal  $q'$  leiame Gaussi teoreemi abil mõttelise „karbi“ jaoks, mis hõlmab piirpinda:

$$q' = (E_1 - E_2)\epsilon\epsilon_0 S = DS/2\epsilon = q/2\epsilon = U_0 C'/2\epsilon = \frac{2}{3} C U_0.$$

### L287 Laengutega pulk ★★★★

Autor: Jaan Kalda, piirkonnnavoor, 2015, G 10

**a)** Seni, kuni üks laeng on piirkonnas  $x > 0$  ning teine piirkonnas  $x < 0$ , on pulgale mõjuv summaarne joud 0, mis tähendab, et pulk liigub konstantse kiirusega.

Alumisest asendist üles liikudes läbib pulk niisuguses režiimis (mil eri laengud viivivad eri piirkondades) vahemaa  $L$  ning sellele kuluv aeg on  $L/v$ ; sama kaua kulub ka antud vahemaa ülevallt alla läbimiseks, mis panustab kogu perioodi jaoks  $t_1 = 2L/v$ . Täispunktid anda sõltumata sellest, kas  $t_1$  on leitud poolperioodide kaupa (nagu siin) või veerand- või täisperioodi abil.

Kui mõlemad laengud on piirkonnas  $x > 0$ , siis mõjub pulgale summaarne konstantne joud  $2E_0q$  ning Newtoni II seaduse kohaselt liigub pulk konstantse kiirendusega  $a = 2E_0q/m$ . Pulk siseneb antud piirkonda kiirusega  $v$  ning väljub kiirusega  $-v$ , mistõttu kiiruse muut on  $2v$ ; teisalt, kiiruse muut on kiirenduse ja aja korruutis, seega nimetatud piirkonnas viibimise aeg on  $2v/a = mv/E_0q$ . Et sama protsess kordub ka piirkonnas  $x < 0$ , siis kogupanus võnkumisperioodi on  $t_2 = 2mv/E_0q$  ning lõppvastust

$$T = \frac{2L}{v} + \frac{2mv}{E_0q}.$$

**b)** Kui pulk on nihkunud vahemaa  $x$  võrra, siis ühes piirkonnas viibiva pulgaosa pikkus on vähenenud  $x$  võrra ning teises piirkonnas kasvanud  $x$  võrra; eri piirkondades viibivatele samapikkustele pulgalõikudele mõjuvad joud kompenseerivad üksteist ning kompenseerimata jäääb lõikude pikkuste vahe  $2x$ , millele vastab laeng  $q = 2xQ/L$  ning resultantjoud  $F = 2xQE_0/L$ . Seega kirjeldab pulga liikumist vörrand

$$a = \ddot{x} = -2xQE_0/Lm;$$

see on pendli vörrand, kus kiirendust ja nihet siduv võrdetegur annab ringsageduse ruudu,  $\omega^2 = 2QE_0/Lm$ . Seega periood

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{Lm}{2QE_0}}.$$

**L288 Kuulid ★★★★**

Autor: Jaan Kalda, lahtine, 2016, G 10

Metallkeradele indutseeritakse elektrivälja poolt võrsed ja vastasmärgilised laengud  $\pm q$ ; kuivõrd traat on peenike, siis võime ignoreerida sellel olevaid laenguid. Et traat on juhtivast materjalist, on süsteem ekvipotentsiaalne, ning võrdne süsteemi sümmeetriatasandis lõpmatuses paiknevate punktide potentsiaaliga:

$$E \frac{l}{2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R} \Rightarrow q = 2lE\pi\epsilon_0 R.$$

Seetõttu mõjub kummalegi kuulile elektrostaatiline jõud  $qE$ , mille tasakaalustab niidi pinge:

$$T = 2lE^2\pi\epsilon_0 R.$$

**L289 Kaks kuuli ★★★★**

Autor: Jaan Kalda, lõppvoor, 2018, G 10

Elektriväli indutseerib kuulidele vastasmärgilised laengud, mis tagavad, et kuulide potentsiaalid on võrsed. Olgu esimese kuuli koordinaat  $z$ ; siis väline väli tekitab kuulide vahel potentsiaalide vahe  $Ez$ ; see peab võrduma kuulidele indutseeritud laengute  $\pm q$  tekitatud potentsiaalide vahega

$$\frac{kq}{R} - \frac{(-q)k}{R} = \frac{2kq}{R}.$$

Seega  $q = EzR/2k$ . Esimesele kuulile mõjub elektriväljas jõud  $Eq = E^2zR/2k$ ; näeme, et see on võrdeline kaugusega ja toimib sarnaselt vedruga. Seega teeb summaarne jõud tööd  $E^2z^2R/4k$ . Kui ka teine kuul siseneb elektrivälja, siis muutub summaarne jõud hetkeliselt nulliks ning kuulid jätkavad liikumist konstantse kiirusega, mis on leitav energia jäävuse seadusest:

$$\frac{E^2z^2R}{4k} = \frac{2mv^2}{2},$$

millega

$$v = \frac{Ez}{2} \sqrt{\frac{R}{km}}.$$

Seni, kui kuulid kiirenevad, on liikumisvõrrandiks

$$\ddot{z} = \frac{E^2z^2R}{4km},$$

millega nii  $z$  kui  $v = \dot{z}$  on eksponentiaalsed funktsioonid ajast. Seega on kiiruse graafikuks eksponentiaalselt kasvav köver, mis läheb hüppeliselt üle kontsantseks funktsioniks (hetkel, kui ka teine kuul siseneb elektrivälja).

**L290 Kolm kuuli ★★★★☆**

Autor: Jaan Kalda, lõppvoor, 2016, G 10

**a)** Sümmeetria tõttu on äärmiste kuulide kiirused sama magnituudiga, aga sümmeetriatelje suhtes peegeldatud. Kuulide ruutkeskmene on maksimaalne siis, kui elektriline potentsiaalne energia on minimaalne, st siis, kui nööride vahel on sirgnurk. Veendume, et antud olukorras on  $A$  kiirus maksimaalne. Olgu  $A$  kiirus  $\vec{v}$ , äärmiste kuulide  $\vec{v}$ -ga paralleelne kiiruse komponent  $w$  ning ristikomponent  $u$ . Impulsi jäävusest  $v = 2w$ . Kuna ainsana muutub kahe äärmise kuuli vahekaugus, saame kirja panna energia jäävuse seaduse alghetkel ning siis, kui äärmiste kuulide vahekaugus on  $d$ :

$$\frac{kq^2}{L} = \frac{3mv^2}{4} + mu^2 + \frac{kq^2}{d}.$$

Seega

$$v = \sqrt{\frac{4}{3} \left( \frac{kq^2}{m} \left( \frac{1}{L} - \frac{1}{d} \right) - u^2 \right)}.$$

Näeme, et  $v$  on maksimaalne siis, kui  $d$  on maksimaalne ja  $|u|$  minimaalne.  $d$  on maksimaalne siis, kui nööride vahel on sirgnurk, siis ka  $u = 0$ . On selge, et antud olukord vastab maksimaalsele  $v$  väärtsusele. Geomeetriast,  $d = L/\cos 60^\circ = \frac{2L}{\sqrt{3}}$ . Niisiis,

$$v = \sqrt{\frac{4}{3} \frac{kq^2}{m} \left( \frac{1}{L} - \frac{\sqrt{3}}{2L} \right)} = q \left( \sqrt{3} - 1 \right) \sqrt{\frac{k}{3mL}}.$$

*Märkus.* Äärmiste kuulide maksimaalse kiiruse leidmine on keerulisem. Nende kiirust ei ole maksimaalne, kui nöörid on ühel sirgel.

**b)** Joonisel laeng  $A$  liigub sümmeetria tõttu vertikaalselt, seega niidi  $AB$  hetkeline pöörlemiskese peab asuma horisontaaljoonel  $OA$ . Massikese  $M$  jäab paigale, mistõttu niidi punkt  $D$ , mis jagab lõigu  $AB$  vahekorras 2:1, liigub horisontaalselt, seetõttu punkti  $D$  ja hetkelist pöörlemiskeset  $O$  ühendav sirge peab olema vertikaalne. Nüüd saab ilmseks, et  $O$  on võrdkülgse kolmnurga  $ABE$  keskpunkt, mistõttu lõik  $OB$  on vertikaali suhtes  $30^\circ$  nurga all ning seega punkt  $B$  hakkab liikuma horisontaali suhtes  $30^\circ$  nurga all ning selles sihis peab olema ka laengu  $B$  kiirendus. Projitseerides laengu  $B$  jaoks Newtoni II seaduse lõigu  $AB$  ristsihile, saame

$$ma \cos 30^\circ = \cos 60^\circ \frac{kq^2}{L^2},$$

millega

$$a = \tan 30^\circ \frac{kq^2}{mL^2} = \frac{kq^2}{mL^2\sqrt{3}}.$$

Impulsi jäävuse tõttu on laengu  $A$  kiirendus  $2a \sin 30^\circ = a$ , st sama, mis teistel laengutel.

**L291 Mõõteriistad ★**

Autor: Koit Timpmann, lõppvoor, 2006, G 1

Olgu alguses ampermeetri ja voltmeetri pinged vastavalt  $U_A$  ja  $U_V$ . Jadaühenduse korral kehtib

$$U_A + U_V = 9 \text{ V}.$$

Pärast takisti lisamist suurennes ampermeetrit läbiv vool ja seega ka pinge kaks korda. Teisisõnu, ampermeetri uus pinge oli  $2U_A$ . Pinge voltmeetril aga vähenes kaks korda ja oli  $0,5U_V$ . Kirchhoffi pinge seaduse kohaselt

$$2U_A + 0,5U_V = 9 \text{ V}.$$

Lahendades kahest võrrandist koosneva võrrandisüsteemi, saame  $U_A = 3 \text{ V}$  ja  $U_V = 6 \text{ V}$ . Seega voltmeetril pinge oli alguses  $6 \text{ V}$  ning lõpus  $3 \text{ V}$ .

**L292 Voltmeetrid ★**

Autor: Eero Vaher, piirkonnavoor, 2016, G 1

Voltmeetrid möödavad alati pingelangu enda klemmidel, kusjuures pingelangud on määratud voltmeetrite takistustega. Olgu iga voltmeetri takistus  $R$ . Kogu skeemi takistus on

$$R_k = \left( \frac{1}{R} + \frac{1}{2R} \right)^{-1} + R = \frac{5}{3}R.$$

Pingelang esimesel voltmeetril on

$$U_1 = \frac{R}{R_k} U_0 = 18 \text{ V}.$$

Pingelang neljandal voltmeetril on  $U_4 = U_0 - U_1 = 12 \text{ V}$  ning pingelangud teisel ja kolmandal voltmeetril on

$$U_2 = U_3 = \frac{U_4}{2} = 6 \text{ V}.$$

**L293 Voltmeeter ★**

Autor: Erkki Tempel, piirkonnavoor, 2017, G 1

Jooniselt näeme, et äärmised takistid on lühistatud, mistõttu need mõõteriistade näitu ei mõjuta. Ampermeeter on jadamisi kahe takistiga, mistõttu on ampermeetriga harus kogutakistus  $2R$ . Seega on kogupinge selles harus võrdne patarei pingega

$$U = I \cdot 2R.$$

Asendades ampermeetri voltmeetriga, näitab voltmeeter patarei pinget, kuna tegemist on ideaalse voltmeetriga, mille takistus on lõpmatu. Sellest tulenevalt voltmeetriga haru vool ei läbi ja temaga jadamisi ühendatud takistid voltmetri näitu ei mõjuta.

$$U_{\text{voltmeeter}} = 2RI.$$

**L294 Elektriküünlad ★**

Autor: Valter Kiisk, piirkonnnavoor, 2009, G 4

**a)** Lambi nimivool on  $0,6 \text{ W}/3 \text{ V} = 0,2 \text{ A}$ . 10 lampi tarbivad voolu  $10 \times 0,2 \text{ A} = 2 \text{ A}$ . Pingelang takistil on  $5 \text{ V} - 3 \text{ V} = 2 \text{ V}$ . Järelikult vajalik takistus on  $2 \text{ V}/2 \text{ A} = 1 \Omega$ .

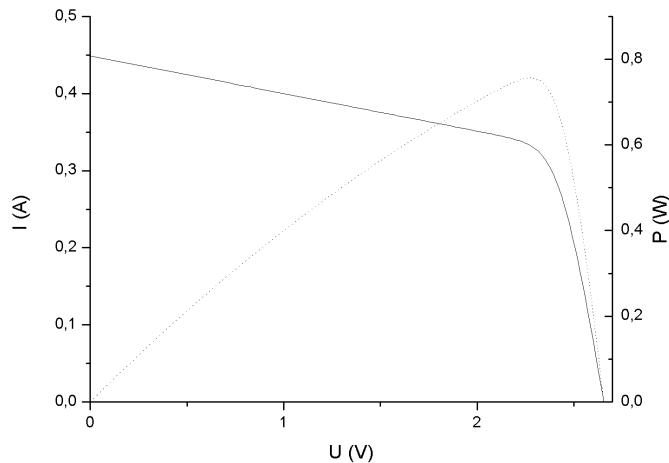
**b)**  $1 \Omega$ -st takistit kasutades oli voolutugevus ahelas  $(4 \text{ V} - 2,3 \text{ V})/1 \Omega = 1,7 \text{ A}$ . Sellise koormuse tulemusel langes pinge vooluallika klemmidel 1 V võrra, seega alaldi si-setakistus on  $1 \text{ V}/1,7 \text{ A} = 0,59 \Omega$ . Järelikult takisti  $R$  takistuse sobilik väärthus oleks  $1 \Omega - 0,59 \Omega = 0,41 \Omega$ .

**L295 Päikesepaneel ★**

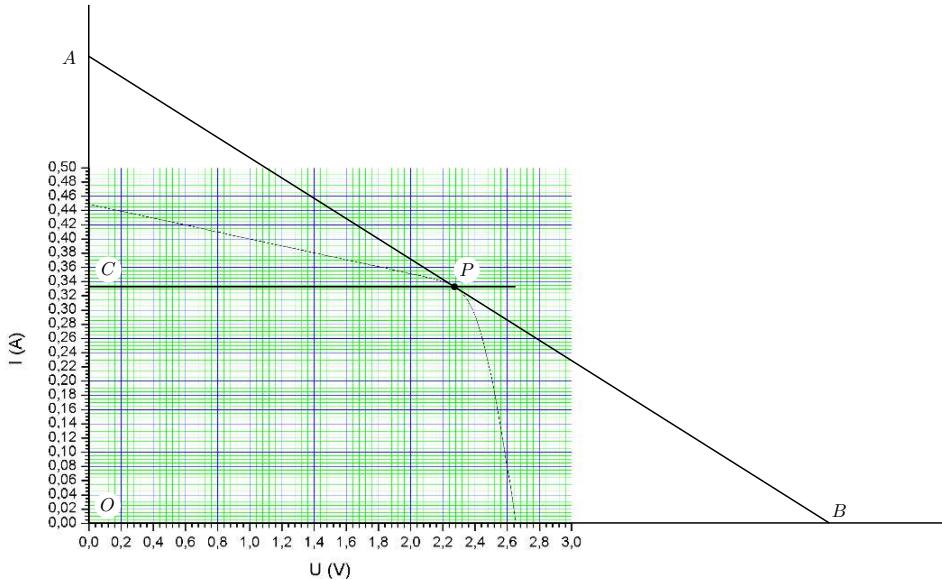
Autor: Mihkel Pajusalu, lõppvoor, 2010, G 3

Koormisel eralduv võimsus avaldub kui  $UI$ . Peame leidma punkti graafikul, mil antud avaldis on maksimaalne. Graafikult saab erinevate punktide jaoks võimsuse välja arvutada ja ligikaudu maksimaalse võimsuse määrata. Saame  $U_{\max} \approx 2,28 \text{ V}$ ,  $I_{\max} \approx 0,33 \text{ A}$ . Seega vastav koormise takistus on

$$R = \frac{U_{\max}}{I_{\max}} \approx 6,9 \Omega$$



*Alternatiivne lahendus*



Võimsus  $N = UI$  on maksimaalne, kui võimsuse tuletis pingे järgi on null. Seega,

$$dN = d(UI) = dUI + UdI = 0,$$

ehk

$$I + U \frac{dI}{dU} = 0,$$

kus  $dI/dU$  on graafiku tõus. Vaatleme vastavaid suurusi graafiku punktis  $P$ . Joonise tähistustes,  $|OC| = I$ ,  $|CP| = U$  ja

$$\frac{|OA|}{|OB|} = \frac{|CA|}{|CP|} = -\frac{dI}{dU}.$$

Järelikult, kui me tahame, et  $P$  oleks otsitav võimsuse maksimumi punkt, peab kehtima

$$|OC| - |CP| \frac{|CA|}{|CP|} = 0 \implies |OC| = |CA| \implies |AP| = |PB|.$$

Joonlauaga veidi otsides pole sellist punkti  $P$  raske leida. Vastus on muidugi sama, mis esimeses lahenduses.

**L296 Lambid ★**

Autor: Mihkel Kree, piirkonnnavoor, 2015, G 2

Olgu pingearvuga pinge  $U$ . Paralleelühenduse korral langeb kummalegi lambile samuti pinge  $U$ . Olgu lampide takistused  $R_1$  ja  $R_2$ , neil eralduvad võimsused on siis  $P_1 = U^2/R_1$  ja  $P_2 = U^2/R_2$ . Et ülesande tingimuste kohaselt on nende võimsuste suhe  $k$ , saame avaldada seose takistute vahel:

$$P_1 = kP_2, \quad \text{millest} \quad R_1 = R_2/k \quad \text{ehk} \quad R_2 = kR_1. \quad (1)$$

*Märkus.* üldisust kitsendamata võinuksime samaväärselt öelda ka:  $P_1 = P_2/k$ . Ühendades need lambid nüüd jadamisi, on ahela kogutakistuseks  $R_1 + R_2$  ning kummaski lambis võrdne voolutugevus  $I = U/(R_1 + R_2)$ . Lampidel eralduvad võimsused on nüüd vastavalt  $P'_1 = I^2R_1$  ja  $P'_2 = I^2R_2$ . Koguvõimsuste suhe kahel juhul on seega

$$\gamma = \frac{P'_1 + P'_2}{P_1 + P_2} = \frac{I^2(R_1 + R_2)}{U^2(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2})} = \frac{R_1 R_2}{(R_1 + R_2)^2}.$$

Et saada avaldises lahti tundmatutest takistustest, peame ühe neist asendame teise kaudu seose (1) abil, saades otsitavaks koguvõimsuste suhteks

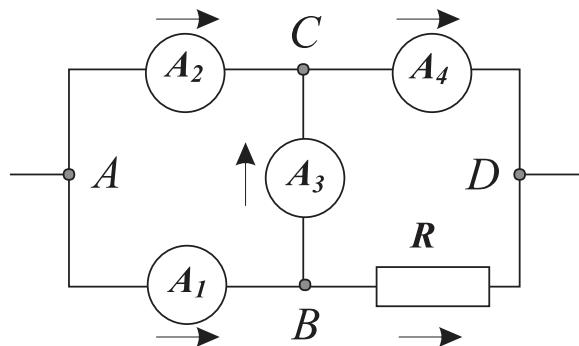
$$\gamma = \frac{R_1^2 k}{R_1^2 (1+k)^2} = \frac{k}{(1+k)^2}.$$

Vastates lisaküsimusele, näeme et  $\gamma < 1$  ehk jadaühenduses koguvõimsus väheneb.

**L297 Ampermeetrid ★★**

Autor: tundmatu, lahtine, 2008, G 4

Märgime skeemil voolude oletatavad suunad ning valime kontuurides  $ACB$  ja  $CDB$  liikumise suunaks päripäeva.



Kirchhoffi 2. seaduse põhjal kontuuris  $ACB$

$$I_2r - I_3r - I_1r = 0 \quad \Rightarrow \quad I_3 = I_2 - I_1 = 2 \text{ A.}$$

Kirchhoffi 1. seaduse põhjal punktis  $B$

$$I_1 = I_3 + I_R \Rightarrow I_R = I_1 - I_3 = 1 \text{ A.}$$

Kirchhoffi 1. seaduse põhjal punktis  $C$

$$I_4 = I_2 + I_3 = 7 \text{ A.}$$

Ning lõpuks Kirchhoffi 2. seaduse põhjal kontuuris CDB

$$I_4r - I_R R + I_3r = 0 \Rightarrow 9r - R = 0 \Rightarrow R/r = 9.$$

### L298 Patarei ★★

Autor: Taavi Pungas, piirkonnnavoor, 2011, G 6

Olgu patarei sisetakistus  $r$ . Mõlemas olukorras on patarei elektromotoorjõud sama, st  $I_1(R+r) = I_2(2R+r)$ . Seega,

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{R+r}{2R+r} = \frac{2R+r-R}{2R+r} = 1 - \frac{R}{2R+r} = 1 - \frac{1}{2 + \frac{r}{R}}. \quad (1)$$

**a)**  $r$  on väiksem kui  $R$ , aga samas peab  $r$  olema suurem kui 0. Seega  $0 \leq \frac{r}{R} < 1$  ja  $1 - \frac{1}{2+\frac{r}{R}} \leq I_2/I_1 < 1 - \frac{1}{2+1}$ , ehk  $1/2 \leq I_2/I_1 < 2/3$ .

**b)** Nüüd kehitib  $R < r$ , ehk  $I_2/I_1 > 2/3$ . Valemist (1) on näha, et  $I_2/I_1$  ülempiir on 1, seega  $2/3 < I_2/I_1 < 1$

### L299 Elektriskeem ★★

Autor: Oleg Košik, piirkonnnavoor, 2013, G 5

**a)** Tekib kaks kontuuri, milles igaühes on üks vooluallikas ning kaks ampermeetrit. Voolud ampermeetritel 1 ja 3 leiate Ohmi seadusest:  $I_1 = \frac{3\varepsilon}{r}$ ,  $I_3 = \frac{\varepsilon}{r}$ , voolu ampermeetril 2 aga Kirchhoffi I seadusest:

$$I_2 = I_1 + I_3 = \frac{4\varepsilon}{r}.$$

**b)** Ilmselt  $I_2 = 0$ . Tekib üks kontuur, mis sisalda kahte vooluallikat. Voolutugevuse kontuuris leiate Kirchhoffi II seadusest:

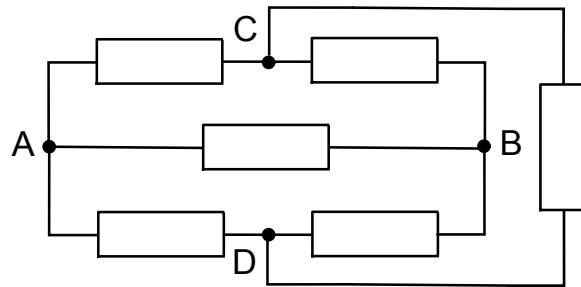
$$I_1 = I_3 = \frac{3\varepsilon - \varepsilon}{r+r} = \frac{\varepsilon}{r}.$$

**L300 Tetraeeder ★★**

Autor: Eero Vaher, lahtine, 2014, G 4

Alloleval joonisel on toodud tetraeedri ekvivalentskeem. Sümmeetriakaalutlustel ei saa tippude C ja D vaheline takisti mõjutada tippude A ja B vahelist takistust, järelikult võib selle skeemilt eemaldada. Allesjääva skeemi takistust on lihtne leida.

$$R_{AB} = \left( \frac{1}{R+R} + \frac{1}{R+R} + \frac{1}{R} \right)^{-1} = \frac{R}{2}.$$

**L301 Ruudustik ★★**

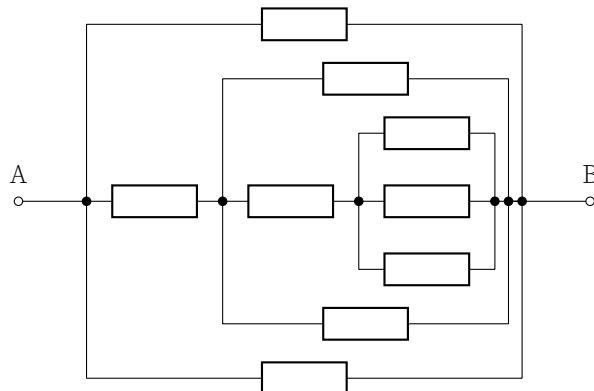
Autor: Taavi Pungas, lõppvoor, 2014, G 1

Sümmeetria tõttu on ruudustiku kaks tähistamata nurka ja keskpunkt sama potentsiaaliga, mistõttu võid need kolm punkti kokku ühendada. Saadud skeem jootub ilusti rõöp- ja jadaühendusteks, nende abil saame punktide A ja B vaheliseks takistuseks  $R = 1,5 \Omega$ .

**L302 Takistid ★★**

Autor: Hans Daniel Kaimre, lahtine, 2015, G 2

Teades, et ühesuguse potentsiaaliga punkte võib ahelas vabalt lahti ja kokku ühendada, saame ülesandes esitatud elektriskeemi viia allolevale kujule.



$$R_{AB} = (2R^{-1} + (R + (2R^{-1} + (R + (3R^{-1})^{-1})^{-1})^{-1})^{-1})^{-1} = \frac{15}{41}R.$$

**L303 Elektriskeem ★★**

Autor: Kristian Kuppart, lahtine, 2016, G 3

Vahetult pärast lüiliti sulgemist ei ole parempoolsele kondensaatorile laengut jõudnud koguneda, mis tähendab, et pingi tema klemmidel  $U = \frac{q}{C} = 0$ . Parempoolset ülemisest takistist esimesel hetkel voolu läbi ei lähe. Sama mõttekäik kehtib vasakpoolse kondensaator kohta, niisiis voolutugevus  $I = \frac{2U}{R}$ . Pika aja möödumisel on mõlemad kondensaatorid efektiivselt lahti ühendatud, kogu vool läheb läbi keskmise haru:  $I = \frac{U}{2R}$

**L304 Vooluring ★★**

Autor: Valter Kiisk, piirkonnavor, 2005, G 4

Teisest skeemist näeme, et vooluallika elektromotoorjõud  $\mathcal{E}$  võrdub voltmeetri näiduga,

$$\mathcal{E} = U_2.$$

Seega esimese skeemi jaoks

$$U_1 + I_1 r_a = \mathcal{E} = U_2,$$

teise skeemi jaoks

$$I_2 R + I_2 r_a = U_2,$$

kus  $r_a$  on ampermeetri sisetakistus. Viimase elimineerimisel saame

$$R = \frac{I_1 U_2 + I_2 U_1 - I_2 U_2}{I_1 I_2} = \frac{U_2}{I_2} + \frac{U_1}{I_1} - \frac{U_2}{I_1}.$$

**L305 Takistid ★★**

Autor: Aigar Vaigu, lõppvoor, 2005, G 4

Paneme tähele, et pingi absoluutväärust ahela otstesse  $U$  ei muudu. Arvestades, et päripidise voolu korral võib dioodi klemmid lugeda lühistatust ning vastuvoolu korral isoleerituks, saame kummagi polaarsuse jaoks koostada algse ahela (joonis 1) asemele ekvivalentsed ahelad (joonised 2 ja 3).

Leiame takistil  $A$  eralduva võimsuse päripinge puhul.

Takistil  $A$  eralduv võimsus on  $P_1 = I_1^2 R$ , kus

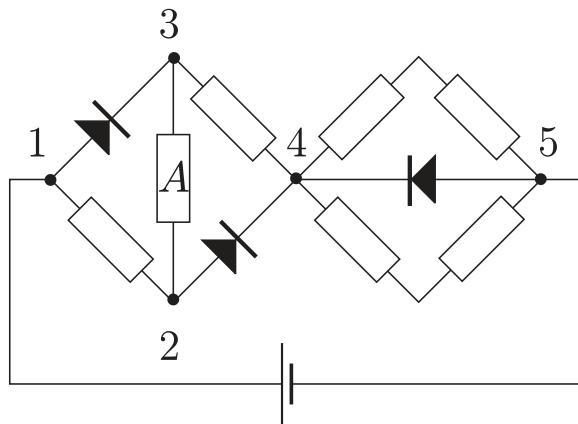
$$I_1 = \frac{I}{3} = \frac{1}{3} \frac{U}{r_1}$$

on vaadeldavat takistit läbiva voolu tugevus ning

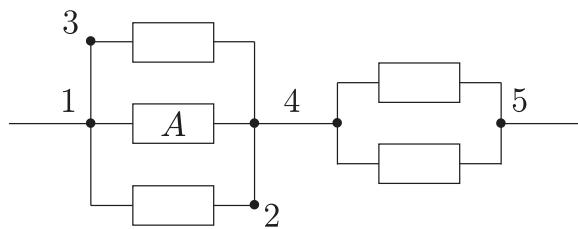
$$r_1 = \frac{R}{3} + R = \frac{4}{3} R$$

on kogu ahela takistus. Seega

$$P_1 = \frac{R}{9} \frac{U^2}{r_1^2} = \frac{U^2}{R} \frac{1}{9} \frac{9}{16} = \frac{1}{16} \frac{U^2}{R}.$$



Joonis 1: Esialgne skeem



Joonis 2: Ekvivalentne skeem ühe polaarsuse puhul

Nüüd määrame takistil  $A$  eralduva võimsuse vastupidise polaarsusega. Takistit  $A$  läbib vool  $I_2 = U/3R$ . Seega võimsus on

$$P_2 = \left( \frac{U}{3R} \right)^2 R = \frac{1}{9} \frac{U^2}{R}.$$

Võimsuste suhe

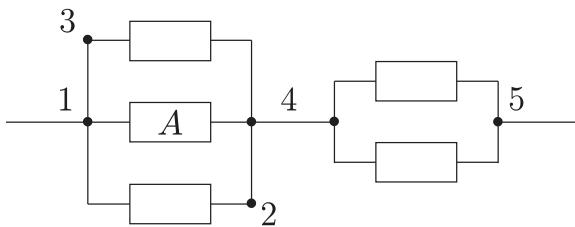
$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{9}{16},$$

seega polaarsuse muutmisel muutub takistil  $A$  eralduv võimsus  $9/16$  korda.

### L306 Elektriskeem ★★

Autor: tundmatu, lahtine, 2006, G 2

Kondensaatori  $C_1$  plaadid on ühendatud läbi takistite  $R_1$  ja  $R_2$ . Seepärast laeng selle kondensaatori plaatidel on  $q_1 = 0$  (pärast seda, kui on lõppenud kondensaatorite  $C_2$  ja  $C_3$  laadimine). Kuna pärast kondensaatorite laadimist voolud skeemis ei kulge, pinged kondensaatoritel  $C_2$  ja  $C_3$  on võrdsed  $\mathcal{E}$ . Järelikult,  $q_2 = C_2\mathcal{E}$  ja  $q_3 = C_3\mathcal{E}$ .



Joonis 3: Ekvivalentne skeem teise polaarsuse puhul

### L307 Skeem ★★

Autor: tundmatu, lahtine, 2009, G 3

Süsteem saab töötada kolmes režiimis:

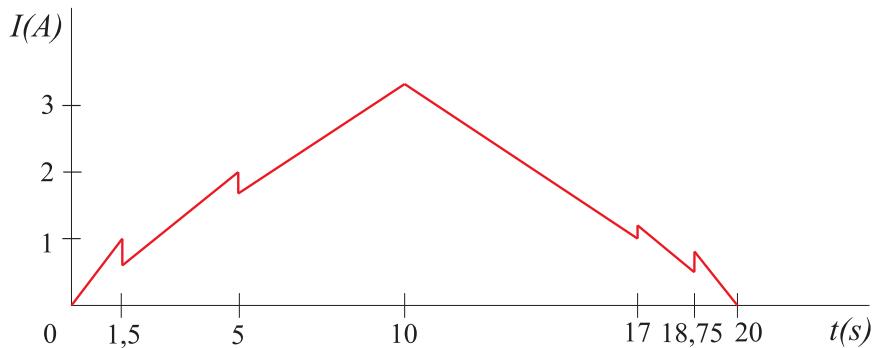
(I) Kõigi elementide takitus on  $1\Omega$ . Siis süsteemi kogutakistus on  $R_I = 1,5\Omega$ , vool  $I_I = \frac{U}{1,5}(A)$  ning pinge skeemi vasakpoolsel elemendil  $\frac{2}{3}U$  ja parempoolsetel elementidel  $\frac{1}{3}U$ .

(II) Vasakpoolse elemendi takitus on  $2\Omega$ , parempoolsemate elementide takitus on  $1\Omega$ . Siis süsteemi kogutakistus on  $R_I = 2,5\Omega$ , vool  $I_I = \frac{U}{2,5}(A)$  ning pinge vasakpoolsel elemendil  $\frac{4}{5}U$  ja parempoolsetel elementidel  $\frac{1}{5}U$ .

(III) Kõigi elementide takitus on  $2\Omega$ . Siis süsteemi kogutakistus on  $R_I = 3\Omega$ , vool  $I_I = \frac{U}{3}(A)$  ning pinge skeemi vasakpoolsel elemendil  $\frac{2}{3}U$  ja parempoolsetel elementidel  $\frac{1}{3}U$ .

Vaatame süsteemi käitumist, kui klemmipingे kasvab. Alguses töötab süsteem režiimis I kuni hetkeni, mil klemmipinge kasvab vääruseni  $U = 1,5\text{ V}$ . Siis muutub vasakpoolse elemendi takistuse väärus  $R_2 = 2\Omega$ -ks ning süsteem jätkab tööd režiimis II. Hetkel, mil klemmipingepinge kasvab vääruseni  $U = 5\text{ V}$ , muutub ka parempoolsete elementide takistus  $R_2$ -ks ning süsteem jätkab tööd režiimis III.

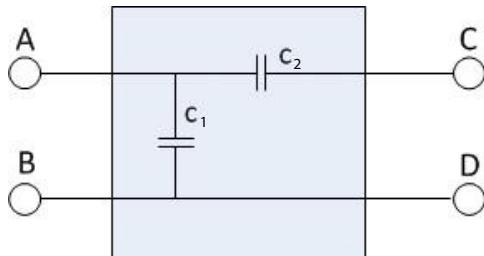
Vaatame süsteemi käitumist, kui klemmipinge kahaneb. Alguses töötab süsteem režiimis III kuni hetkeni, mil klemmipinge langeb vääruseni  $U = 3\text{ V}$ . Siis muutub parempoolsete elementide takistuse väärus tagasi  $R_1 = 1\Omega$ -ks ning süsteem jätkab tööd režiimis II. Hetkel, mil klemmipingepinge langeb vääruseni  $U = 1,25\text{ V}$ , muutub ka vasakpoolse elemendi takistus tagasi  $R_1$ -ks ning süsteem jätkab tööd režiimis I. Voolutugevuse käitumine on esitatud graafikul.



**L308 Must kast ★★**

Autor: Kristian Kuppart, lõppvoor, 2013, G 4

Sobiv skeem on näiteks selline:



Kui klemmide A ja B külge ühendada patarei ja klemmide C ja D külge voltmee-ter, siis läbi kondensaatori  $C_2$  vool ei lähe ning ta ei laadu. Pinge temal on 0 ning voltmeter näitab  $U$ .

Kui aga patarei ühendada klemmide C ja D külge ja voltmeter klemmide A ja B külge, laaduvad mõlemad kondensaatorid üheaegselt ning pinge  $U$  jaotub nende vahel võrdsesti. Voltmeter näitab  $\frac{U}{2}$ .

**L309 Elektroonikaskeem ★★**

Autor: Sandra Schumann, lahtine, 2017, G 4

Vaatame vooluallika polaarsuse vahetamist olukorras, kus seade vahepeal välja lülitatakse.

Kondensaatoril olevaks pingeks saab pärast mõne aja möödumist 0 V. Kui seade uesti sisse lülitada, siis läheb aega, enne kui kondensaatoril olev pingे suureneb, ja takistil  $R$  on seetõttu vähemalt hetkelisel pingel  $9 \text{ V}$ . Selles olukorras ei tohi takistil eralduv võimsus ületada maksimaalset väärust  $P_{\max} = 0,25 \text{ W}$ .

$$P_{\max} > \frac{U^2}{R},$$

$$R > \frac{U^2}{P_{\max}} = \frac{(9 \text{ V})^2}{0,25 \text{ W}} = 324 \Omega.$$

Kui seadet mitte välja lülitada, jäääb vooluallika eemaldamisel kondensaatorile pinge  $9 \text{ V}$ . Pärast vooluallika polaarsuse vahetamist saab takisti endale vähemalt hetkelisel patarei ja kondensaatori liitunud pinge  $9 \text{ V} + 9 \text{ V} = 18 \text{ V}$ . Selles olukorras ületab takistil eralduv võimsus vääruse  $P_{\max} = 0,25 \text{ W}$ .

$$P_{\max} < \frac{U_2^2}{R},$$

$$R < \frac{U_2^2}{P_{\max}} = \frac{(18 \text{ V})^2}{0,25 \text{ W}} = 1296 \Omega.$$

*Märkus.* Tegelikkuses ei põle realsed takistid kohe läbi maksimaalse võimsuse hetkelisel kergel ületamisel, seega on takisti maksimaalne võimalik väärus märkimisväärsest väiksem ja kondensaatori mahtuvuse väärust peab sellise olukorra tekitamise jaoks olema väga suur. Täpsed piirid aga sõltuvad konkreetsest takistist ja selle kvaliteedist.

**L310 Takisti ★★**

Autor: Jaan Kalda, piirkonnnavoor, 2007, G 7

Traadi ja pulga takistused pikkusühiku kohta on vastavalt  $r_r = \rho_r/s = 3,2 \Omega/\text{m}$  ja  $r_g = \rho_g/S = 10 \Omega/\text{m}$ . Olgu traadi ja pulga pikkused vastavalt  $l_r$  ja  $l_g$ . Arvestades temperatuurisõltuvusega, on takistused vastavalt

$$R_r = l_r r_r (1 + \alpha_r \Delta T) \text{ ja } R_g = l_g r_g (1 + \alpha_g \Delta T).$$

Järjestikühenduse korral on summaarne takistus

$$R = (l_r r_r + l_g r_g) + (l_r r_r \alpha_r + l_g r_g \alpha_g) \Delta T.$$

Temperatuurisõltuvus on minimaalne (lineaarses lähenduses olematu), kui

$$l_r r_r \alpha_r + l_g r_g \alpha_g = 0.$$

Sellisel juhul on takistus

$$R = l_r r_r + l_g r_g.$$

Nendest kahest võrrandist saame avaldada  $l_r$  ja  $l_g$ : esimesest võrrandist leidame  $l_r r_r = -l_g r_g \alpha_g / \alpha_r$ , mille asendamisel teise saame

$$R = l_g r_g \left( 1 - \frac{\alpha_g}{\alpha_r} \right) \Rightarrow l_g = \frac{R \alpha_r}{r_g (\alpha_r - \alpha_g)} \approx 5,6 \text{ cm.}$$

Analoogselt

$$l_r = \frac{R \alpha_g}{r_r (\alpha_g - \alpha_r)} \approx 13,6 \text{ cm.}$$

**L311 Kondensaatoriredel ★★**

Autor: Siim Ainsaar, piirkonnnavoor, 2007, G 8

Lõpmatust ahelast ühe lüli eemaldamisega mahtuvus ei muutu. Seetõttu võime tervet ahelat vaadelda kui jadaühendust  $C$ -st ning  $C_k$  paralleelühendusest. Seega saame, kasutades veel asjaolu, et jadaühenduses liituvad mahtuvuse pöördväärtused ning rõöpühenduses mahtuvused ise, võrrandi:

$$C_k = \frac{1}{1/C + 1/(C + C_k)}.$$

Teisendades jõuame ruutvõrrandini:

$$C_k^2 + CC_k - C^2 = 0.$$

Seda lahendades saame:

$$C_k = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} C \approx 0,6 \text{ C.}$$

Negatiivse lahendi heitsime kõrvale.

**L312 Traat ★★**

Autor: Jaan Kalda, lõppvoor, 2008, G 7

Traadijupp pikkusega  $\delta$  omab ristlõikepindala  $s = S \cdot 1 \text{ mm}/\Delta$  ning takistust  $r = \rho\delta/s = \rho\delta\Delta \cdot 1 \text{ mm}^{-3}$ . Liites kokku kõikide väikeste juppiide takistused näeme, et kogutakistus  $R = \rho A \cdot 1 \text{ mm}^{-3}$ , kus  $A$  on graafiku alune pindala (liita tuleb ka joonest  $\Delta = 1 \text{ mm}$  allapoole jäav osa). Joonise abil leiate  $A \approx 14 \text{ mm} \cdot \text{m}$  ning seega  $R \approx 14 \Omega$ .

**L313 Kondensaator ★★**

Autor: Aigar Vaigu, piirkonnavor, 2010, G 7

Patarei pingi on  $U = \text{const}$  ja vool ahelas, vastavalt ülesande tingimustele, on  $I = \text{const}$ . Patarei võimsus on

$$P_p = UI.$$

Energia kondensaatoris on

$$E = \frac{CU^2}{2},$$

kus kondensaatori mahtuvus on  $C = q/U$  ja laeng kondensaatoris  $q$ . Kondensaatorisse energia salvestamise kiirus on energia muutumise kiirus kondensaatoris ehk energia tulevis aja järgi,

$$P_C = \frac{dE}{dt} = \frac{dC}{dt} \frac{U^2}{2} = \frac{d(CU)}{dt} \frac{U}{2} = \frac{dq}{dt} \frac{U}{2}.$$

Arvestades, et laengu muutumise kiirus  $dq/dt$  on vool  $I$ , saame energi salvestamise kiiruseks kondensaatorisse

$$P_C = \frac{UI}{2}.$$

Näeme, et patareist „väljub“ energiat kaks korda kiiremini, kui seda salvestub kondensaatorisse. Energia, mis ajaühikus kondensaatorisse ei jõua, läheb välisjöudu-dele, mis muudavad kondensaatori mahtuvust selliselt, et  $I = \text{const}$ , vastu töö tegemiseks.

**L314 Elektriline sild ★★**

Autor: Jaan Kalda, lõppvoor, 2012, G 3

Sümmeetria tõttu ülemises ja alumises takistis ( $R_2$  ja  $R_4$ ) vool puudub. Tõepoolest, oletame et ühes neist (nt  $R_2$ -s) läheb vool vasakult paremale. Pegeledame joonist vertikaaltelje suhtes:  $R_1$  ja  $R_3$  ning  $\mathcal{E}_1$  ja  $\mathcal{E}_2$  vahetavad kohad, kuid takistite ning elektromotoorjõudude võrdsuse tõttu skeem ei muutu. Peegelduse käigus peaks nüüd vool muutma suuna vastupidiseks ning minema paremal vasaku-le; esialgse ja peegelduse tulemusel saadud skeemi ekvivalentse tõttu peaks aga vool olema endiselt vasakult paremale, mis viib vastuoluni. Järelikult on vool  $R_2$ -s ja  $R_4$ -s null ning skeemilt võib vastavad juhtmed kõrvaldada. Järelle jäääb  $R_1$ ,  $\mathcal{E}_2$ ,  $R_4$  ja  $\mathcal{E}_2$  jadaühendus, mistõttu on voolutugevus ahelas, sh  $R_1$ -s ja  $R_3$ -s leitav kui  $I = 2\mathcal{E}/2R = \mathcal{E}/R$ .

**L315 Must kast ★★★**

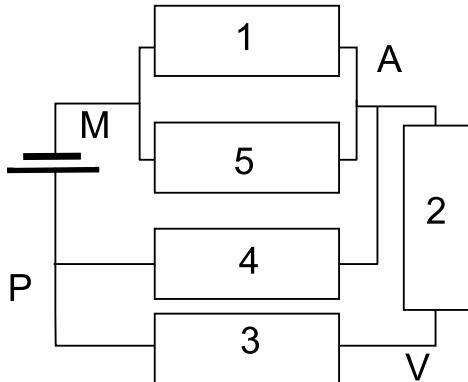
Autor: Jaan Kalda, lõppvoor, 2015, G 4

Takistid saavad omavahel olla kas kolmnurk- või tähtühenduses. Ampermeeter ei saa olla otse väljundklemmide vahel lülitatud, sest siis põleks see vastavale klemmpaarile pingi rakendamisel läbi. Samuti ei saa see olla ühegi takistiga rööbiti lülitatud, sest siis ei läbis vastavat takistit kunagi vool ning sisuliselt tähendaks see takisti asendamist null-takistusega. Sildühendus vajaks viit elementi, meil on aga vaid neli. Niisiis peab ampermeeter olema ühendatud järjestikku ühe takistusega. Tähtühenduse korral ei näitaks ampermeeter voolu, kui pingi on rakendatud vastasklemmidele. Seega saab mustas kastis olla vaid kolmnurkühendus. Kui pingi rakendada nende klemmide vahel, mille vaheline kolmnurga külg ei sisalda ampermeetrit, siis on ampermeetri ahelas kaks järjestikust takistit, järelikult on takistus suurem ja vool väiksem. Ampermeeter peab seega olema sellel kolmnurga küljel, mis ühendab klemme  $B$  ja  $C$ , sest siis on voolutugevus suurim. Nüüd on lihtne leida kolmnurkühenduse küljel  $BC$  oleva takistuse vääritus:  $R_{BC} = U/I_{BC} = 2\Omega$ . Kui pingi rakendada klemmidele  $A$  ja  $B$ , siis moodustavad kolmnurga küljed  $AC$  ja  $CB$  ampermeetrit sisaldaava järjestikühenduse,  $R_{AC} + R_{BC} = U/I_{AB} = 6\Omega$  ning  $R_{AC} = 6\Omega - 2\Omega = 4\Omega$ . Analoogsgelt leiame, et  $R_{AB} + R_{BC} = U/I_{AC} = 3\Omega$  ning  $R_{AB} = 3\Omega - 2\Omega = 1\Omega$ .

**L316 Viisnurk ★★★**

Autor: Jaan Kalda, lõppvoor, 2017, G 6

Joonistame lihtsustatud skeemi, arvestades et ampermeeter ja voltmeeter on ideaalsed. See tähendab, et ampermeetri võib asendada juhtmega ja voltmeetri lihtsalt kõrvaldada. Tähistame uue skeemi sõlmpunktid tähtedega P – patarei plussklemm; M – patarei miinusklemm; A – ampermeetri asukoht; V – voltmeetri alumine klemm. Takistid tähistame numbritega ühest viieni, liikudes päripäeva ja alustades viisnurga ülemisest tipust paremale jäävast takistist. Tulemus on toodud jooniseloleval skeemil.



Kirchoffi vooluseaduse tõttu on ampermeetri vool võrdne takistite 4 ja 5 voolude vahega, sest see osa voolust, mis läks läbi takisti 4, aga ei läinud läbi takisti 5, pidi järelikult läbi ampermeetri minema. Voltmeetri näit on võrdne klemmide M ja V

vahelise pingega. Skeemis on takistid 1 ja 5 paralleelselt, seega on nende takistus kokku  $\frac{1}{2}\Omega$ . Takisti 4 on paralleelselt takistite 2 ja 3 jadaühendusega, seega on nende takistus

$$\frac{1}{\frac{1}{1\Omega} + \frac{1}{2\Omega}} = \frac{2}{3}\Omega.$$

Terve skeemi kogutakistus on seega

$$R_K = \left( \frac{1}{2} + \frac{2}{3} \right) \Omega = \frac{7}{6}\Omega,$$

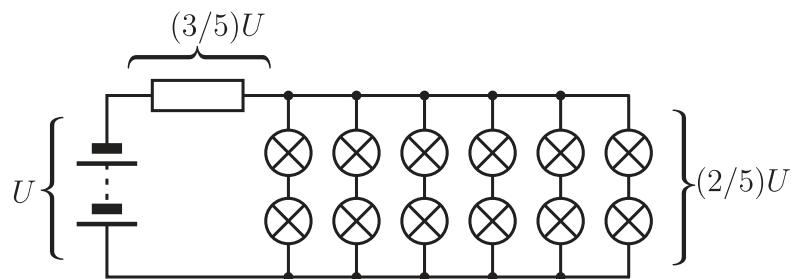
koguvool seega  $I = \mathcal{E}/R_K = 6$  A. Takistitest 1 ja 5 läheb sama palju voolu läbi, mistõttu takisti 5 vool on  $I_5 = \frac{1}{2}I = 3$  A ja pingelang sellel takistil on 3 V. Seega on punktide A ja P vahel pingे 4 V ja vool läbi takisti 4 on  $I_4 = \frac{4V}{1\Omega} = 4$  A. Ampermeetri näit on seega  $I_4 - I_5 = 1$  A.

Pinge M ja V vahel on patarei pingest väiksem takisti 3 pinge võrra. Kuna punktide A ja P vahel oli ping 4 V, siis arvestades, et takistid 2 ja 3 on samasugused ning jadamisi ühendatud, on takistil 3 ping 2 V. See annab voltmeetri pingeks  $7V - 2V = 5V$ .

### L317 12 lampi ★★

Autor: Valter Kiisk, piirkonnavoor, 2018, G 8

a) Ilmselt tuleb takisti voolu piiramiseks ühendada järjestikku vooluallikaga (ükski teine kombinatsioon, sh takisti ärajätmine, ei võimalda kõiki 12 lambi lülitada nominaalpingele). Lambid saab põhimõtteliselt ahelasse ühendada 1-, 2-, 3-, 4-, 6- või 12-kaupa jadamisi ja seejärel rööbiti (st kõik lambid on ahelasse lülitatud ühetaoliselt). Iga kombinatsiooni korral arvutame esmalt ahela erinevate osade takistuse (ühikutes  $R$ , mis on üksiku lambi takistus) ja seejärel arvestame pinge jagunemist elementidel proporsionaalselt takistusega. Erinevate variantide kontrollimine näitab, et lambile langeb nominaalpinge näiteks juhul, kui ühendada lambid kahekaupa jadamisi ja seejärel 6 sellist ahelat rööbiti. Seega, õige skeem on selline, nagu kujutatud joonisel.



Kuni kõik lambid põlevad, langeb igale lambile ping  $U/5$ , kus  $U$  on pingearvalla klemmping. Koguvõimsus on vastavalt

$$P_1 = 12 \times \frac{U^2}{25R} = \frac{12U^2}{25R},$$

kus  $R$  on üksiku lambi takistus. Kui üks lampidest põleb läbi, siis ka sellega järestikku ühendatud pirn lõpetab töötamise. Järelle jäab vaid 5 rööbiti ühendatud ahelat ja seega lampide kogutakistus on  $2R/5$ . Võttes nüüd arvesse pinge jagunemist ahelas, saab pinge igal lambil olema

$$U \times \frac{2R/5}{2R/5 + R/2} \times \frac{1}{2} = \frac{2}{9}U$$

ja lampide koguvõimsus vastavalt

$$P_2 = 10 \times \frac{4U^2}{81R} = \frac{40U^2}{81R}.$$

Seega koguvõimsus kasvab  $P_2/P_1 = 250/243 \approx 1,029$  korda.

*Märkus.* Leidub veel mitu sobivat skeemi. Toome mõned neist.

- Ühendame lambid kolmekaupa jadamisi ja seejärel 4 sellist ahelat rööbiti. Sel juhul osas b) kahaneb lampide koguvõimsus 1,080 korda.
- Ühendame lambid neljakaupa rööbiti ja seejärel 3 sellist plokki jadamisi takistiga. Sel juhul osas b) kahaneb lampide koguvõimsus 1,024 korda

Töötavaid skeeme leidub rohkemgi.

### L318 Kondensaatorid ★★

Autor: Mihkel Rähn, piirkonnnavoor, 2006, G 7

**a)** Vooluallikas laeb mõlemad kondensaatorid elektromotoorjõuga võrdse pingeni, seega on  $q_{a1} = C_1\mathcal{E}$  ja  $q_{a2} = C_2\mathcal{E}$ .

**b)** Leiame, kui suure pingeni kondensaatorid laaduvad. Voolutugevus ahelas on

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R_1 + R_2 + R_3 + r}.$$

Kondensaatoril  $C_1$  on laeng  $q_{b1} = C_1I(R_1 + R_2)$  ja kondensaatoril  $C_2$  on laeng  $q_{b2} = C_2IR_2$ .

**c)** Kehtib laengu jäävus, paralleelses ühenduses on pinged kondensaatoritel võrdsed. Summaarne laeng  $q = q_{b1} + q_{b2}$  ning mahtuvus  $C = C_1 + C_2$ . Pinge kondensaatoril on  $U = q/C$ . Laengud kondensaatoritel on  $q_{c1} = C_1U$  ja  $q_{c2} = C_2U$ .

**L319 Kondensaatorid ★★**

Autor: Mihkel Kree, lõppvoor, 2009, G 3

Kogunegu keskmisele kondensaatorile (mahtuvusega  $3C$ ) laeng  $a$  ning nurgas paiknevatele kondensaatoritele (mahtuvusega  $3C$ ) laeng  $b$ . Vaatleme ülemist vasakpoolset kondensaatorit: selle negatiivsel plaadil on nüüd laeng  $-q + a + b$  ning positiivsel plaadil  $q + b$ . Saame võrrandi:

$$-(-q + a + b) = q + b \implies q - a - b = q + b \implies b = -a/2.$$

Lisaks saame pingete võrdsusest

$$\frac{a}{3C} = \frac{q+b}{C} + \frac{b}{3C} \implies a = 3q + 4b \implies a + 2a = 3q,$$

millest  $a = q$ .

**L320 Elektriahela energia ★★**

Autor: Eero Vaher, piirkonnnavoor, 2014, G 8

Kuna tegemist on jadaühendusega, on ka voolutugevus läbi takisti ning pooli  $300\text{ mA}$ . Poolis oli seega hetkel  $t_0$  energia

$$E_L = \frac{LI^2}{2} = 0,45\text{ mJ}.$$

Summaarne pingelang takistil ning poolil peab olema võrdne kondensaatori pingega. Antud pooli pinge suuna korral saame kondensaatori pingeks  $U_C = IR + U$ . Kondensaatori energia on hetkel  $t_0$

$$E_C = \frac{CU_C^2}{2} = 0,64\text{ mJ},$$

seega oli hetkel  $t_0$  rohkem energiat kondensaatoril.

**L321 a ★★**

Autor: Sandra Schumann, lõppvoor, 2016, G 7

) Kui lülit on suletud, siis vooluallika vool saab läbi lülitit ringi käia ja ei mõjuta midagi. Võime selle asendada juhtmega. Lisaks paneme tähele, et  $5\text{ k}\Omega$  takisti ei mõjuta kuidagi pinget  $10\text{ k}\Omega$  takisti otstel. Liikudes  $10\text{ k}\Omega$  takisti vasakult poolt vastupäeva mööda skeemi edasi, saame, et potentsiaalide erinevus (pinge) sellel takistil on

$$U = -1\text{ V} + 3\text{ V} - 2\text{ V} = 0\text{ V}.$$

Selle abil saame leida voolutugevuse läbi takisti:

$$I = \frac{U}{R} = \frac{0\text{ V}}{10\text{ k}\Omega} = 0\text{ mA}.$$

Pinge  $U$  on lihtsalt patarei pinge  $U = 1\text{ V}$ .

**b)** Lülit on avatud. Alustame seekord voolutugevusest. Me teame, et tänu konsantse voolu allikale läbib  $10\text{ k}\Omega$  takistit vool tugevusega  $I = 2\text{ mA}$ . Selle abil saame leida pingे takisti otstel:

$$U_R = IR = 2\text{ mA} \cdot 10\text{ k}\Omega = 20\text{ V}.$$

Liites takistil olevale pingele kahe patarei pinged otsa, saame märke jälgides leida pinge

$$U = 20 \text{ V} - 2 \text{ V} + 3 \text{ V} = 21 \text{ V}.$$

### L322 Takistuste tuvastamine ★★★

Autor: Eero Vaher, lõppvoor, 2018, G 7

Elektrivooolul on võimalik ahelat läbida kolmel moel: läbi ülemise haru (takistid  $R_1$  ja  $R_4$ ), läbi keskmise haru (takistid  $R_2$ ,  $R_3$  ja  $R_4$ ) ning läbi alumise haru (takistid  $R_2$  ja  $R_5$ ). Pingelang iga takistil on võrdne selle takistuse ning seda läbiva voolutugevuse korrutisega ning pingelangude summa kõigil kolmel teekonnal peab olema võrdne pingega vooluallikal. Niisiis  $I_1R_1 + I_4R_4 = I_2R_2 + I_3R_3 + I_4R_4 = I_2R_2 + I_5R_5 = U_0$ .

Neist võrranditest saab tuletada avaldised  $I_1R_1 = I_2R_2 + I_3R_3$  ning  $I_3R_3 + I_4R_4 = I_5R_5$ , mis kirjeldavad pingelange skeemi vasakul ning paremal poolel. Lisaks saame panna kirja võrrandid voolutugevuste jaoks:  $I_1 = I_0 - I_2$ ,  $I_4 = I_1 + I_3$  ning  $I_5 = I_2 - I_3$ .

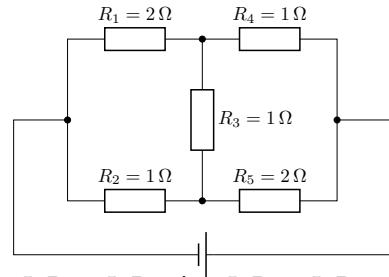
Paneme tähele, et kui  $R_1 = R_2$  ja  $R_4 = R_5$ , siis sümmeetriakaalulustel peaks kehtima  $R_3 = 0$ .

On ilmne, et  $R_3 = 1 \Omega$ . Oletame esmalt, et  $R_1 = R_4 = R_3$ . Sellisel juhul avaldub pingelang ülemises harus kujul  $(2I_1 + I_3)R_3 = U_0$ , milles järeltub  $I_1 = 6 \text{ A}$  ning  $I_2 = 4 \text{ A}$ . Vaadeldes voolu teekonda läbi keskmise haru, saame kirjutada  $I_2R_2 + U_3 + (I_1 + I_3)R_3 = U_0$ , milles saab järeltada  $R_2 = R_5 = 1 \Omega$ . Selline skeem rahuldab eespool mainitud sümmeetriaat, seega tehtud eeldus pole töene.

Oletame nüüd, et  $R_2 = R_5 = R_3$ . Skeemi alumise haru jaoks saame kirjutada  $(2I_2 - I_3)R_3 = U_0$  ehk  $I_2 = 8 \text{ A}$  ning  $I_1 = 2 \text{ A}$ . Pingelangud skeemi vasakus pooles peavad rahuldama võrrandit  $I_1R_1 = (I_2 + I_3)R_3$ , milles järeltub  $R_1 = 5 \Omega$ . Sellisel juhul on aga pingelang skeemi ülemisel harul  $(2I_1 + I_3)R_1 = 30 \text{ V} \neq U_0$ .

Oletame nüüd, et  $R_1 = R_5 = R_3$ . Pingelang skeemi keskmisel harul on  $I_2R_2 + U_3 + (I_0 - I_2 + I_3)R_2 = U_3 + (I_0 + I_3)R_2 = U_0$  ehk  $R_2 = R_4 = 1 \Omega$ . Tegemist on juba vaadeldud juhuga.

Ainus järelejäänud võimalus on  $R_2 = R_4 = R_3$ . Skeemi vasakust poolest saame  $(I_0 - I_2)R_1 = I_2R_3 + U_3$ , paremast  $(I_2 - I_3)R_1 = U_3 + (I_0 - I_2 + I_3)R_3$ . Nende põhjal  $(I_0 - I_3)R_1 = 2U_3 + (I_0 + I_3)R_3$  ehk  $R_1 = 2 \Omega$ . On lihtne veenduda, et leitud väärvtused rahuldavad kõiki võrrandeid pingelangude jaoks.



**L323 Aku laadimine ★★★**

Autor: Valter Kiisk, piirkonnnavoor, 2008, G 8

Olgu aku klemmide pinge  $U$  ning voolutugevus  $I$ . Voolutugevus takistis  $R_2$  on see-  
ga  $U/R_2$  ja voolutugevus takistis  $R_1$  avaldub kui  $U/R_2 + I$ . Teise Kirchhoffi seaduse  
kohaselt

$$U + \left( \frac{U}{R_2} + I \right) R_1 = U_0 \quad \Rightarrow \quad UR_1 - (U_0 - U) R_2 + IR_1 R_2 = 0,$$

kus  $U_0 = 6$  V. Laadimisgraafikult leame, et maksimaalne vool  $I = 0,1$  A vastab  
pingele  $U = 1,2$  V, kui aga  $U = 1,5$  V, siis peab olema  $I = 0$ . Seega  $R_1$  ja  $R_2$   
määramiseks saame võrrandisüsteemi

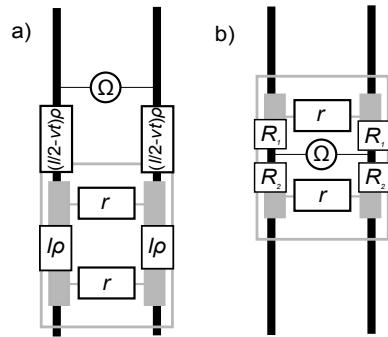
$$1,2R_1 - 4,8R_2 + 0,1R_1 R_2 = 0, \quad 1,5R_1 - 4,5R_2 = 0.$$

Selle lahend on  $R_1 = 12 \Omega$ ,  $R_2 = 4 \Omega$ .

**L324 Raudtee ★★★**

Autor: Mihkel Pajusalu, piirkonnnavoor, 2012, G 8

Ülesandes peab käsitelema kahte juhtu: a) kui  
mõõtepunkt ei asu vaguni rataste vahel ja b)  
kui mõõtepunkt asub vaguni rataste vahel. On  
ka näha, et ülesanne on sümmeetriline mõõte-  
punkt suhtes, st takistuse käitumine enne se-  
da, kui vaguni keskpunkt möödub mõõtepunk-  
tist ja pärast seda, on üksteise peegelpildid.  
Vaatleme alguses juhtu a). On näha, et sellel ju-  
hul on vagunil fikseeritud takistus, millele lii-  
tub vaguni ja mõõtepunkti vaheline jäavate rõö-  
baste takistus.

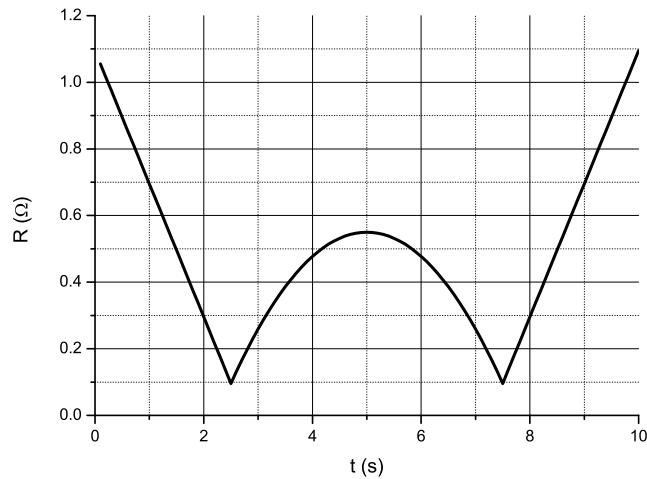


$$R = 2(l/2 - vt)\rho + \frac{1}{\frac{1}{r} + \frac{1}{r+2l\rho}}.$$

Seejärel vaatleme juhtu b). Sellel juhul moodustub takistus kahest rõöpühenduses  
olevast osast, mille takistus muutub vaguni liikumise käigus.  $R_1 = (l - vt')\rho$  ja  
 $R_2 = vt'\rho$ , kus  $t' = t - s/v$  on aeg, mis on möödunud hetkest, kui esimene rattapaar  
möödus mõõtepunktist. Seega saab takistuse käitumise leida valemist:

$$R = \frac{1}{\frac{1}{r+2R_1} + \frac{1}{r+2R_2}} = \frac{1}{\frac{1}{r+2(l-vt')\rho} + \frac{1}{r+2vt'\rho}}.$$

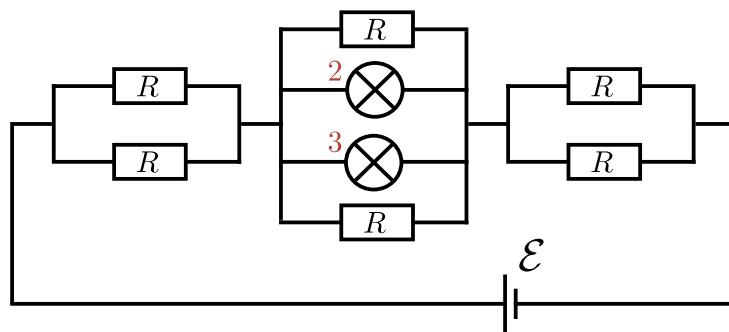
Tulemuseks on graafik:



### L325 Lambid ★★★

Autor: Mihkel Kree, lahtine, 2013, G 9

Paneme tähele, et skeemi sümmeetria tõttu ei läbi vool lampi 1, sest selle otstel on võrdsed potentsiaalid. Sama kehtib lambi 4 kohta. Joonistame skeemi ümber, ühendades lambi 1 otspunktid omavahel kokku, sama teeme ka lambi 4 otspunktidega. Saame võrdlemisi lihtsa skeemi, mis koosneb kolmest jadamisi ühendatud paralleelühendusest, nagu joonisel näidatud.



Arvutame ahela kogutakistuse

$$R_t = \frac{R}{2} + \frac{1}{\frac{1}{R} + \frac{1}{r} + \frac{1}{r} + \frac{1}{R}} + \frac{R}{2} = \frac{4}{3}R,$$

kus arvestasime, et  $r = 2R$ , kusjuures keskmise paralleelühenduse takistuseks tuli  $R_k = R/3$ , mis moodustab  $1/4$  osa kogutakistusest, seega langeb keskmisele osale

ka  $1/4$  osa patarei pingest ehk  $V_k = \mathcal{E}/4 = 5/4V$ . Nüüd on juba lihtne avaldada lampides  $2$  ja  $3$  eralduv võimsus

$$P_2 = P_3 = \frac{V_k^2}{r} = \frac{25}{16 \cdot 20} W \approx 0,08 W.$$

Lampides  $1$  ja  $4$  mõistagi võimsust ei eraldu.

**L326 Jõulukaunistus ★★★★**

Autor: Valter Kiisk, lõppvoor, 2010, G 8

Maksimaalne pingi, milleni kondensaator laadub, võrdub võrgupinge amplituud-väärtusega  $311V$ . Sellest takistile langeb pingi  $311V - 50 \times 3V = 161V$ . See-ga takistuse väärthus peab olema  $161V/20mA \approx 8k\Omega$  ja sellel eraldub võimsus  $161V \times 20mA \approx 3,2W$ . Peale pingi amplituudväärtuse saavutamist peab kondensaator olema suuteline vahelduvvoolu ühe perioodi ( $20ms$ ) jooksul valgusdiode ahelat toitma nii, et pingelang takistil (ja seega ka kondensaatoril endal) kukub mitte rohkem kui  $0,05 \times 161V = 8V$  vörra. Samas kondensaatorilt võetakse sama aja jooksul elektrilaeng  $20mA \times 20ms = 0,0004C$ . Seega nõutav mahtuvus on  $0,0004C/8V = 50\mu F$ .

**L327 Dioodid ★★★★**

Autor: Jaan Kalda, lahtine, 2012, G 8

Esimesele dioodile ( $D_1$ ) ei saa langeda üle ühe voldi, mistõttu järgnevatele ( $D_2$  ja  $D_3$ ) peab langema alla ühe voldi (takisti võtab ka endale teatud pingi). Seetõttu on ülejäänud dioodid suletud, st nullvooluga ning need võib skeemilt "välja lõigata". Selle tulemusel moodustub esimese dioodi taha jada- ja rööpühenduste kombinatsioon kogutakistusega  $4k\Omega$ , millele langeb dioodipingi  $1V$  ning mida läbib vool  $1V/4k\Omega = 0,25mA$ . Esimesele kahe kilo-oomisele takistile langeb pingi  $3V - 1V = 2V$ , mistõttu selle vool on  $2V/2k\Omega = 1mA$ . Järelikult on esimese dioodi vool  $1mA - 0,25mA = 0,75mA$  ning võimsus  $0,75mA \cdot 1V = 0,75mW$ . Suletud dioodidel võimsust loomulikult ei eraldu.

**L328 Oktaeeder ★★★★**

Autor: Jaan Kalda, lahtine, 2016, G 8

Et ampermeetrite sisetakistus on  $0$ , võime need lühistada: kõigis nendes tippudes, kuhu viivad ampermeetrid, on potentsiaalid võrdsed. Sümmeetria töttu peab see potentsiaal jäätma täpselt patareiklemmid potentsiaalide vahepeale, seega on igale takistile rakendatud pingi  $3V$ . Niisiis on 1-oomistes takistites vool  $3A$  ja 2-oomistes  $1,5A$ . Sümmeetria töttu jaguneb see voolude vahe igas tipus võrdseks kahe naaber-ampermeetri vahel, st kõikide ampermeetrite näidud on  $0,75A$ .

**L329 Kondensaator ★★★★**

Autor: Jaan Kalda, lõppvoor, 2018, G 9

Teises staadiumis eralduv soojus on võrdne kondensaatori energiaga lülitit avamise hetkel,  $Q_2 = q_C^2/2C$ , kus  $q_C$  on kondensaatori laeng sel hetkel. Kogu vabanev soojusenergia on võrdne patarei kogutööga

$$A = (q_C + q_R)\mathcal{E} = Q_1 + Q_2,$$

kus  $q_R$  on otsitav lampi läbiv laeng. Seega

$$q_R = \frac{Q_1 + Q_2}{\mathcal{E}} - \sqrt{2CQ_2}.$$

**L330 Närvirakk ★★★★★**

Autor: Andres Laan, lõppvoor, 2011, G 9

Kuna laengud saavad voolata üle membraani kolme eri teed mööda ja kondensaatorile kogunev laeng põhjustab kõigile kolmele teele ühiselt mõjuva elektrostaatilise pingi  $U$ , siis on meil närviraku mudeldamiseks sobiv skeem, kus meil on rööbiti kolm vooluteid: kondensaatori voolutee, kaalumi voolutee ja naatriumi voolutee. Kui saabub tasakaal, ei lähe voolu läbi kondensaatori. Selleks peab kaalumi ja naatriumi voolu summa olema elektriliselt neutraalne. Kaalumi vool on  $(\mathcal{E}_K - U)/R_K$ . Naatriumi vool on  $(\mathcal{E}_{Na} - U)/R_{Na}$ . Võrrutades nende voolude summa nulliga saame pingi avaldiseks

$$U = \frac{R_K \mathcal{E}_{Na} + R_{Na} \mathcal{E}_K}{R_{Na} + R_K}.$$

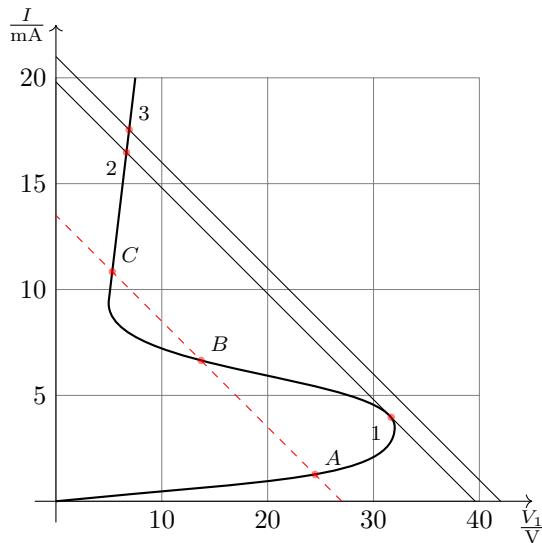
Membraani kogulaeng on siis

$$q = CU = C \frac{R_K \mathcal{E}_{Na} + R_{Na} \mathcal{E}_K}{R_{Na} + R_K}.$$

**L331 Türistor ★★★★★**

Autor: Jaan Toots, lõppvoor, 2015, G 10

Kirchhoffi esimese seaduse põhjal peab suvalise pingi ja voolutugevuse korral kehtima  $V_1 = U - IR$ , kus  $V_1$  on pingi türistoril  $T_1$ . Füüsikaliseks realsed on sellised olukorrad, kus  $V_1$  ja  $I$  on türistori volt-amperkarakteristiku poolt lubatud. Üldjuhul on mingi pingi  $U$  korral kuni kolm lahendit (punane sirge graafikul); punkt  $B$  ei ole stabiilne, kuna vastaks negatiivsele takistusele, ning punktid  $A$  ja  $C$  on lubatud, kuid vastavad erinevatele režiimidele, mis sõltuvad sellest, kuidas punktini jõutud on. Ülaltoodu põhjal on võimalik skitseerida voolutugevuse graafik. Alguses suureneb voolutugevus ligikaudu lineaarselt, sest türistor käitub sarnaselt lineaarsele takistile takistusega  $r_1 = 20 \text{ k}\Omega$ , mistöttu on voolutugevuse graafiku algne tõus  $\frac{1}{R+r_1} = \frac{1}{22 \text{ k}\Omega}$ . Punkti 1 (pinge 39,6 V, voolutugevus 4,1 mA) läheduses hakkab voolutugevus kiiresti kasvama ning hüppab punkti 2 (pinge 39,6 V, voolutugevus 16,5 mA). Edasi käitub türistor taas lineaarselt takistusega  $r_2 = 0,24 \text{ k}\Omega$



kuni lõpp-punktini 3 (pinge 42 V, voolutugevus 17,5 mA). Voolutugevuse  $I_a$  saab täpsemalt leida, kasutades Kirchhoffi seaduseid ja türistori takistust lineaarselt lähenades. Siis saame  $I_a = 17,54$  mA.

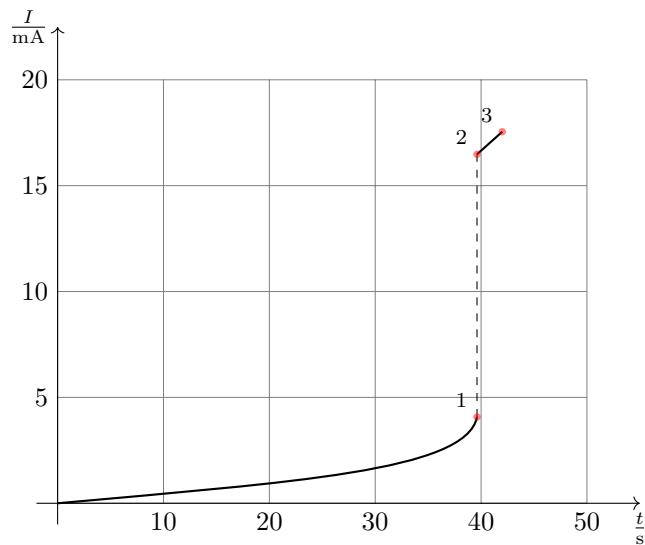
Pärast lülitri sulgemist lahendame vooluringi lähtuvalt Kirchhoffi seadustest.  $U = IR + V_1 = IR + V_2$ ,  $I = I_1 + I_2$ , kus  $I_1^0 = -11,5$  mA on türistori volt-amperkarakteristiku teise lineaarse osa algordinaat. Lahendamiseks eeldame, et  $T_2$  on lineaarses režiis enne hüpet (sarnaselt punktile A) ning  $T_1$  pärast hüpet (sarnaselt punktile C). Saame  $I_1 = I_1^0 + \frac{V_1}{r_2}$  ja  $I_2 = V_2/r_1$ . Lahendades saame türistoride pingeteks  $V_1 = V_2$ , voolutugevuseks läbi takisti  $I = I_1^0 + V_1/r_1 + V_1/r_2$ , pingeks vooluallikal

$$U = I_1^0 R + V_1 R/r_2 + V_1 R/r_1 + V_1$$

ning pingeteks türistoridel

$$V_1 = V_2 = \frac{U - I_1^0 R}{R/r_1 + R/r_2 + 1} = 6,84 \text{ V}.$$

Seega  $I_1 = 17,2$  mA ja  $I_2 = 0,34$  mA, mis õigustab tehtud eelduseid.



### L332 Magnetpeegel ★★

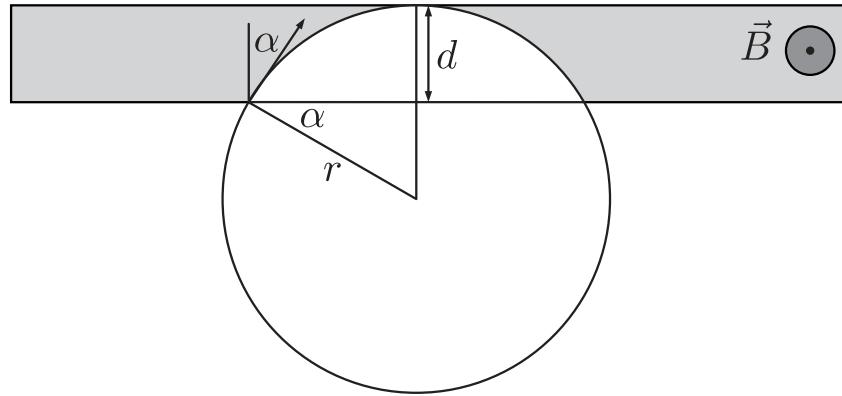
Autor: Kristian Kuppart, lahtine, 2013, G 2

Magenetvälja sattununa hakkab osake liikuma mööda ringjoone kaart, mille köverusraadiuse saame leida, kui mõtleme, et ringliikumiseks vajaliku kesktõmbejõu annab Lorentzi jõud:

$$m \frac{v^2}{r} = qvB, \quad \text{millegist} \quad r = \frac{mv}{qB}.$$

Kui langemisnurk  $\alpha$  on piisavalt väike, läbib osake magnetvälja riba. Kui hakkame  $\alpha$ -t suurendama, saabub olukord, kus ühel hetkel osake enam magnetvälja riba ei läbi, vaid "peegeldub" tagasi. Sellel piirjuhul (vt joonist):

$$r \sin \alpha_{\max} + d = r, \quad \text{millegist} \quad \alpha_{\max} = \sin^{-1} \left( 1 - \frac{d}{r} \right).$$



### L333 Solenoid ★★

Autor: Andres Laan, lõppvoor, 2011, G 5

Väljatugevus solenoidi sees on  $B = \mu nI$ , kus  $n$  on solenoidi traadi keerete arv pikkusühiku kohta,  $I$  seda läbiv vool ja  $\mu$  vaakumi magnetiline läbitavus. Väli on suunatud piki solenoidi telge. Kui selle välja suunaga on risti mingisugunegi kiirus  $v$ , siis ühe pöörde tegemiseks kulub aeg  $T = 2\pi m/eB$  (tuletatav Lorentzi ja tsentrifugaaljõu tasakaalust), kus  $m$  ja  $e$  on vastavalt elektroni mass ja laeng. Olgu elektronil ka solenoidi telje sihiline kiirus  $v$ . Ühikulises ajas läbib ta distantsi  $1/v$ . Selle aja sees teeb ta  $1/(vT)$  pööret. Nende pöörete arv ülesande püstituse kohaselt peab olema  $n$ . Seega

$$n = \frac{1}{vT} = \frac{eB}{2v\pi m} = \frac{e\mu nI}{2v\pi m}.$$

Siiit saame  $v = e\mu I/(2\pi m)$ .

Telje sihiline komponent kiirusel on üheselt määratud. Teljega risti olev kiiruse komponent peab olema nullist suurem.

### L334 Generaator ★★

Autor: Andreas Valdmann, lahtine, 2013, G 5

**a)** Elektrivoool generaatori mähises (juhtmekontuuris) tekib elektromagnetilise induktsiooni toimel ning seda protsessi kirjeldab Faraday seadus

$$\varepsilon = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t},$$

kus  $\varepsilon$  on voltides mõõdetav elektromotoorjõu suurus ning  $\Delta\Phi$  on juhtmekontuuri läbiva magnetvoo muutus, mis toimub ajavahemiku  $\Delta t$  jooksul. Magnetvoo suurus  $\Phi$  sõltub mähise asendist generaatori magnetite suhtes. Mähise pöörlemissegeduse suurendamisel 2 korda kulub magnetvoo muutmiseks  $\Delta\Phi$  vörra 2 korda vähem aega ja seetõttu suureneb elektromotoorjõud 2 korda. Kuna generaatoris kaod puuduvad, siis võib tema sisetakistuse lugeda nulliks ning antud juhul on

generaatori klemmpinge  $U$  alati võrdne tema elektromotoorjõuga. Lambis eralduv võimsus avaldub kujul

$$P = UI = \frac{U^2}{R},$$

Kus  $I$  on voolutugevus lambis ning  $R$  on lambi takistus. Kuna viimane ei muudu, siis järelikult suureneb pinge kahekordsel suurendamisel võimsus  $2^2 = 4$  korda. Seega  $P_1 = 4P_0$ .

**b)** Jõumomendi avaldamise näitlikustamiseks kujutame ette, et generaatorit pööratakse vändaga, mille õla pikkus on  $l$  ning mille otsale avaldatakse tangentsiaalselt jõudu  $F$ . Pöördemoment  $M$  avaldub kui  $M = Fl$ . Kadude puudumisel on generaatori pööramise võimsus võrdne lambil eralduva võimsusega. Definitsioonist teame, et mehaaniline võimsus on töö tegemise kiirus ehk

$$P = \frac{A}{\Delta t},$$

kus  $A$  on ajavahemiku  $\Delta t$  jooksul tehtud töö, mis avaldub omakorda jõu ja nihke korrutisena  $A = F\Delta s$ . Nihe  $\Delta s$  kujutab antud juhul vända otspunkti tangentsiaalset liikumist, milleks kulub ajavahemik  $\Delta t$ . Vända otspunkti nihe avaldub kui  $\Delta s = \Delta\phi l$ , kus  $\Delta\phi$  on nihkele vastav pöördenurk. Niisiis saame avaldada mehaanilise võimsuse:

$$P = F \frac{\Delta s}{\Delta t} = Fl \frac{\Delta\phi}{\Delta t}.$$

Paneme tähele, et avaldises esinev  $\Delta\phi/\Delta t$  on vända pöörlemise nurkkiirus  $\omega$ . Kõrvutades tulemust varem leitud jõumomendi avaldisega, saame lihtsa seose  $P = M\omega$ . Esialgsel juhul oli generaatorit pöörav jõumoment seega  $M_0 = P_0/\omega_0$ . Kuna  $\omega_1 = 2\omega_0$  ja  $P_1 = 4P_0$ , siis oli pöördemoment pärast sageduse suurendamist

$$M_1 = P_1/\omega_1 = 2P_0/\omega_0.$$

### L335 Tiirlev kuulike ★★★

Autor: Eero Vaher, lahtine, 2013, G 6

Olgu positiivse laenguga kuulikese laeng  $Q$ . Kuulikesele mõjuks kirjeldatud magneetväljas Lorentzi jõud suurusega  $F_L = QvB$ . See jõud oleks kuulikesele mõjuvaks kesktõmbejõuks  $F_k = \frac{mv^2}{r}$ . Saame  $QvB = \frac{mv^2}{r}$ . Kaks isoleeritud vördsed massiga kuulikest tiirlevad ümber ühise masskeskme, seega on nende omavaheline kaugus  $d = 2r$ . Kuulikesi ringorbiidil hoidvaks kesktõmbejõuks on kuloniline jõud suurusega

$$F_C = \frac{kqQ}{d^2} = \frac{kqQ}{4r^2}.$$

Kuna teineteise ümber tiirlevad laengud peavad olema vastasmärgilised, siis  $|F_C| = -F_C$ . Võrdsustades kesktõmbejõu ning kulonilise jõu suuruse, saame

$$\frac{mv^2}{r} = -\frac{kqQ}{4r^2}$$

ehk

$$QvB = -\frac{kqQ}{4r^2}.$$

Lõpptulemuseks saame

$$q = -\frac{4vBr^2}{k}.$$

**L336 Langev takisti ★★★**

Autor: Andres Laan, piirkonnavor, 2011, G 8

Raami läbiva magnetvoo suuruse muutus põhjustab raamis elektromotoorjõu  $\mathcal{E} = d\Phi/dt = Blv$ . Elektromotoorjõud põhjustab raamis voolu  $I = \mathcal{E}/R$ . Magnetväljas mõjub vooluga juhtmele jõud  $F = BiI$ , mis peab olema tasakaalus raskusjõuga  $mg$ . Elimineerides  $I$  ja  $\mathcal{E}$  leiate

$$mg = \frac{B^2 l^2 v}{R} \Rightarrow v = \frac{mgR}{B^2 d^2}.$$

*Alternatiivne lahendus*

Lahendus lähtub energia jäädvuse seadusest. Gravitatsioonijõu poolt tehtud töö võimsus on  $P = mgv$ . Elektrilise töö võimsus peab sellega võrduma, seega  $P = mgv = U^2/R$ . Pingi on leitav Faraday seadusest, mille kohaselt on pingi võrdne konttuuri läbiva magnetvoo muutumise kiirusega. Magnetvoo muutumise kiirus on  $d\Phi/dt = Bdv$ . Asendades selle eelmisesse võrrandisse ja avaldades  $v$  saame

$$v = \frac{mgR}{B^2 d^2}.$$

**L337 Tsüklotron ★★★**

Autor: Kristian Kuppart, piirkonnavor, 2018, G 10

Osakesed hakkavad tsüklotronis liikuma päripäeva mööda järjest suureneva raadiusega poolringjooni. Osakese trajektoori raadius avaldub kui  $r = mv/qB$ , kus  $v$  on osakese kiirus. Osake väljub tsüklotronist, kui tema trajektoori raadius kasvab sama suureks tsüklotroni raadiusega  $R$ , sel juhul tema kiirus  $v = qBR/m$ . Ühe täisringi jooksul saab osake elektriväljalt kineetilise energi  $\epsilon_k = 2qEd$ , kuna osake läbib selle aja jooksul riba 2 korda. Seega on osakese kiirus tsüklotronist väljumisel

$$\frac{mv^2}{2} = 2qEdn, \quad v^2 = \frac{4qEdn}{m}.$$

Avaldades neist võrranditest  $n$ , saame  $n = \frac{qB^2 R^2}{4mEd}$ .

**L338 Laengud ★★★**

Autor: Jaan Kalda, lahtine, 2011, G 6

Kuna Lorentzi jõud mõjub alati risti liikumissuunaga, liiguvald laengud mõöda ringjooni, mille raadiuse leiate Newtoni teisest seadusest:

$$qvB = m \frac{v^2}{r} \quad \Rightarrow \quad R = mv/qB,$$

kusjuures ühe ringjoone keskpunkt on punktis  $(0, R)$  ja teisel  $-(-R, 0)$ . Nende kiirusvektorid on alghetkel risti ja kuivõrd need pöörlevad ühesuguse kiirusega, siis jäavad risti ka edasise liikumise käigus, kusjuures suhtelise kiiruse vektor  $\vec{w} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2$  moodustab kummagi kiirusvektoriga 45-kraadilise nurga. Vahekaugus on maksimaalne, kui  $\vec{w}$  on risti laenguid ühendava sirgega, st laenguid ühendav sirge moodustab laengu asukohast tömmatud puutujaga (st laengu kiirusvektoriga) 45-kraadilise nurga; on lihtne näha, et see juhtub hetkel, mil laengud on punktides  $(0, 2R)$  ja  $(-2R, 0)$ , mis annab maksimaalseks vahekauguseks  $l = 2\sqrt{2}R = 2\sqrt{2}mv/qB$ .

*Alternatiivne lahendus*

Esitame laengute asukohad ajalises sõltuvuses kompleksarvudena komplekstasandil:

$$z_1 = Ri - Rie^{i\omega t} \text{ ja } z_2 = -R + Re^{i\omega t},$$

kus  $\omega$  on tsüklotronsagedus. Nende vahekaugus

$$l = |z_1 - z_2| = |R(1 + i)(1 - e^{i\omega t})| = R\sqrt{2}|1 - e^{i\omega t}|$$

on maksimaalne, kui  $e^{i\omega t} = -1$ , mil  $l = 2\sqrt{2}R = 2\sqrt{2}mv/qB$ .

**L339 Mass-spektromeeter ★★★** Autor: Kristian Kuppart, piirkonnavoor, 2013, G 10

Potentsiaalide vahes  $U$  saab kiirendatud laetud osake kineetilise energi

$$\frac{mv^2}{2} = qU,$$

sitavaldamme osakese kiiruse:

$$v = \sqrt{\frac{2qU}{m}}.$$

Kuna magnetvälvi on kiirusega risti, hakkab laetud osake magnetvälja jõudes liikuma seal mõöda ringjoone kaart, kus ringjoone raadius  $R = \frac{mv}{qB}$ . Selleks ajaks, kui osake jõuab detektorini, on ta läbinud pool ringjoonest. Olgu  $m_2$  raskema isotoobi mass ja  $m_1$  kergema isotoobi mass. Sel juhul

$$2 \left( \frac{m_1 v_1}{qB} - \frac{m_2 v_2}{qB} \right) = d,$$

ehk

$$m_2 v_2 = \frac{qBd}{2} + m_1 v_1.$$

Arvestades, et  $v_1 = \sqrt{\frac{2eU}{m_1}}$  ja  $v_2 = \sqrt{\frac{2eU}{m_2}}$ , kus  $e$  on elementaarlaeng, saame eelmise võrrandi ümber kirjutada kui

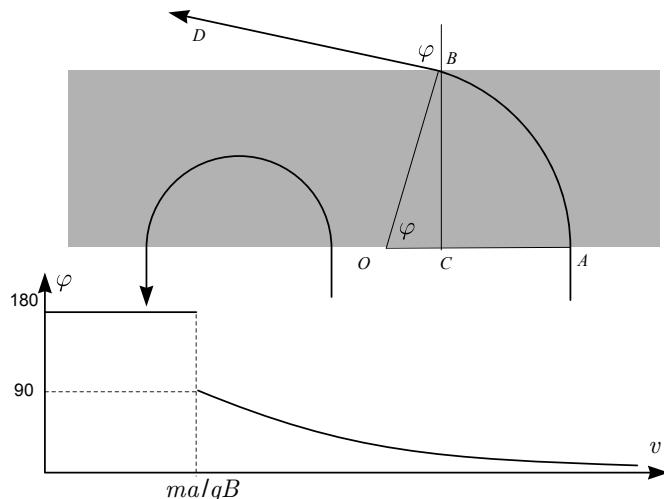
$$\sqrt{m_2} = \sqrt{m_1} + \frac{Bd}{2} \sqrt{\frac{e}{2U}}.$$

Võttes arvesse, et  $m_2 = \frac{\mu_2}{N_A}$  ja  $m_1 = \frac{\mu_1}{N_A}$ , kus  $N_A$  on Avogadro arv, saame:

$$\mu_2 = N_A \left( \sqrt{\frac{\mu_1}{N_A}} + \frac{Bd}{2} \sqrt{\frac{e}{2U}} \right)^2.$$

### L340 Magnetväli ★★★★

Autor: Jaan Kalda, piirkonnavor, 2015, G 9



Laeng sooritab magnetväljas ringliikumist, vt joonis; ringi raadiuse leiame Newtoni II seadusest  $Bqv = mv^2/R$ , millest  $R = \frac{mv}{qB}$ . Enne ja pärast ringliikumist on trajektooriks sirge, kusjuures üleminnek ringjooneks on ilma murdepunktita, st sirgjooned on ringile puutujaks. Väikeste kiiruste korral, kui  $R < a$ , st  $v < \frac{Bqa}{m}$ , siis läheb osake otse tagasi, st väljumisnurk  $\varphi = \pi \text{ rad} = 180^\circ$ .

Väljudes on kiirusvektor risti ringi raadiusega, st  $\angle OBD = \frac{\pi}{2}$ , mistõttu  $\varphi = \angle COB$ . Seega,

$$\varphi = \arcsin \frac{BC}{BO} = \arcsin \frac{a}{R} = \arcsin \frac{qBa}{mv}.$$

**L341 Traat ★★★★**

Autor: Jaan Kalda, lõppvoor, 2007, G 10

Traat võtab kaare kuju (sest Amper'i jõud mõjub analoogselt täispuhutud palli puhul pallikestale ülerõhu poolt mõjuva jõuga: lühikesele mõttelisele traadijupile mõjuv jõud on risti traadijupiga). Kaare raadiuse  $R$  saab leida järgmisest võrrandist:

$$a = 2R \sin(L/2R).$$

Väikese kaare-elemendi jaoks (pikkusega  $\alpha R$ ) välja kirjutatud Amper'i jõu ja mehaanilise pinge tasakaalust leiate pinge traadis:  $\alpha RIB = T\alpha$ . Eeldusel, et  $L \gg a$ , moodustub kaarest peaaegu täisring, st  $R = L/2\pi$ ; seega

$$T = LIB/2\pi.$$

**L342 Pool ★★★★**

Autor: Siim Ainsaar, lõppvoor, 2008, G 10

Venitame pooli väikese  $\Delta\ell$  võrra pikemaks ja avaldame tehtud töö ( $A$ ) kahel eri viisil. Ühelt poolt  $A = F_1\Delta\ell$ . Samas salvestub osa kulutatud energiat ( $\Delta E_m$ ) magnetväljas ja ülejäänu ( $\Delta E_v$ ) kas eraldub vooluallika sisetakistusel (see peab nt lühise korral jääva voolu hoidmiseks alati olemas olema) või, kui  $A < \Delta E_m$ , täiendatakse vooluallika töoga. Igal juhul:

$$A = \Delta E_m + \Delta E_v.$$

$\ell$  suurenedes  $B$  väheneb, mistõttu ilmselt  $\Delta E_m < 0$  ja vooluallika sisetakistusel eraldub energiat:

$$A > 0 \implies \Delta E_v > 0.$$

Vajalikud energiamuudud võime leida mitmel eri viisil.

*Esimene meetod.* Olgu kogu magnetvälja energia  $E_m$ . Selle energia ruumtihedus:

$$w = \frac{B^2}{2\mu_0} \implies E_m = w\ell S = \frac{\ell SB^2}{2\mu_0} \implies \Delta E_m = \frac{S\Delta(\ell B^2)}{2\mu_0} = \frac{INS \cdot \Delta B}{2}.$$

Toimugu pooli pikenemine ajaga  $\Delta t$  ja indutseerigu magnetvoo muutus poolil elektromotoorjõu absoluutväärtsusega  $E$ . Faraday induktsioniseadusest:

$$\mathcal{E} = N \frac{|\Delta B| \cdot S}{\Delta t}.$$

Sit saamegi  $\Delta E_v$ :

$$\Delta E_v = I\mathcal{E}\Delta t = INS|\Delta B|.$$

*Teine meetod.* Leiame tiheda pooli induktiivsuse  $L$ :

$$NBS = LI \implies L = \frac{NBS}{I}.$$

Magnetvälja energia:

$$E_m = \frac{LI^2}{2} = \frac{NBSI}{2} \implies \Delta E_m = \frac{INS \cdot \Delta B}{2}.$$

Toimugu pooli pikenemine ajaga  $\Delta t$  ja indutseerigu magnetvoo muutus poolil elektromotoorjõu absoluutväärtsusega  $\mathcal{E}$ . Eneseinduktsioonielektromotoorjõud tuleneb Faraday induktsiooniseadusest:

$$\mathcal{E} = \frac{|\Delta(NBS)|}{\Delta t} = \frac{|\Delta(LI)|}{\Delta t} = \frac{NS|\Delta B|}{\Delta t},$$

kust saame:

$$\Delta E_v = I\mathcal{E}\Delta t = INS|\Delta B|.$$

*Ühine osa mõlemale lahendusele.* Leiame  $\Delta B$ , eeldades, et  $\Delta\ell$  on väike:

$$\Delta B = \mu_0 IN \Delta \left( \frac{1}{\ell} \right) = \mu_0 IN \left( \frac{1}{\ell + \Delta\ell} - \frac{1}{\ell} \right) = -\mu_0 IN \frac{\Delta\ell}{(\ell + \Delta\ell)\ell} \approx -\mu_0 IN \frac{\Delta\ell}{\ell^2}.$$

Lõpuks:

$$F = \frac{A}{\Delta\ell} = \left( -\frac{INS}{2} + INS \right) \frac{|\Delta B|}{\Delta\ell} = \frac{INS|\Delta B|}{2\Delta\ell} = \frac{\mu_0 I^2 N^2 S}{2\ell^2}.$$

*Märkus.* Paar sõna ülesande tekstis tehtud eelduse kohta, et kõik keerud hakkavad otstest tömbamisel eemalduma võrdse vahemaa võrra. Tegelikult see ei kehti, otstest tömbamisel hakkaksid kõigepealt lahti hargnema otsmised keerud (ja märksa väiksema jõu juures). Ilmselt oleks võimalik keerduude ühtlane eemaldumine spetsiaalse mehaanilise konstruktsiooni abil, kui keerud poleks mitte klaaspulgal, vaid vastava raamistiku peal. Aga selgub, et antud ülesande vastus realiseerub lihtsamas olukorras ka. Kui võtta kinni poolist kahest lähestikku asuvas kohas keskpaiga läheduses, siis allpool leitav jõud on ühtlasi selline jõud, millega tömbamisel saab natuke eemaldada pika poolikeskkohast vasakule- ja paremale poole jäavaid keerde (sedá väidet me siinkohas töestama ei hakka).

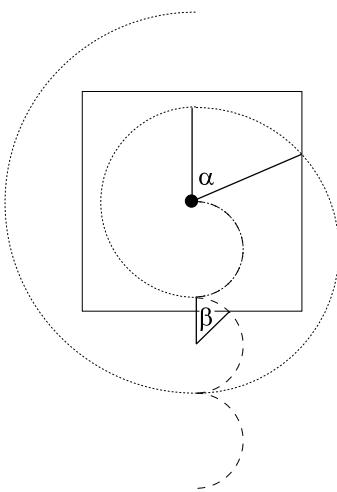
### L343 Laeng ★★★★

Autor: Oleg Košik, lahtine, 2010, G 8

Paneme tähele, et ajavahemik  $T$  on võrdne poolega tsüklotronperioodist (ajaga, mis kulub sellel laengul magnetväljas täistiiru tegemiseks). Seega antakse impulsimuut  $\Delta p = Eq\tau$  iga kord kiirusega paralleelselt (ii) või antiparalleelselt (i). Seega hakkab juhtumil (ii) impuls kasvama lineaarses sõltuvuses lülituste arvuga  $n = [t/T]$  (kus  $t$  on vaadeldav ajahetk ja nurksulud tähistavad täisosa):  $p = Eq\tau[t/T]$ . Et trajektoori kõverusraadius on võrdeline impulsiga,  $R = v/\omega = p/qB$ , siis kasvab kõverusraadius samuti lineaarselt  $n$ -ga, vt punktiirjoont joonisel. Juhtumil (i) paneb esimene jõuimpulss laengu liikuma, teine aga peatab liikumise. Tulemuseks on joonisel toodud laineline trajektoor (katkendjoon joonisel). Tuginedes nendele trajektooridele saame teha tabeli osakese eemaldumuse  $l = \max(x, y)$  jaoks  $x$  või  $y$ -teljest erinevatel ajahetkedel.

$t/T$	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5
$l/R$ (i)	1	2	2	2	3	4	4	4	5	6
$l/R$ (ii)	1	2	2	2	3	4	4	4	5	6

Nagu näha, toimub eemaldumine mõlemal juhul vaadeldavate ajahetkede jaoks täpselt ühekiiruselt. Siiski, kui kuubi poolküljepikkus ei ole mitte  $R$ -i täisarvukordne, siis väljub (i) juhtumi korral osake veidi varem. Sellest võib aru saada uurides võrdlevalt kauguse  $l$  kasvufaase juhtumeil (i) ja (ii) ja juuresolevat joonist: antud ruudukujulise piirkonna jaoks väljumisaeg  $2T + \Delta t$ , kus täiendav ajavahemik juhtumil (ii)  $\Delta t = \pi\alpha/T$  juhtumil (i)  $\Delta t = \pi\beta/T$ . Kuivõrd  $\alpha > \beta$ , siis saamegi järelda da, et juhtumil (i) väljub osake varem. On võimalik näha, et võrratus  $\alpha > \beta$  kehtib peaaegu alati — välja arvatud siis, kui kuubi külje pikkus on  $R$ -i paarisarvukordne. Ülesandes antud eelduse  $t \gg T$  tõttu muutub see väike väljumisaja erinevus tühiseks: aegade suhe sellel piirjuhul on 1.



### L344 Magnetväljali

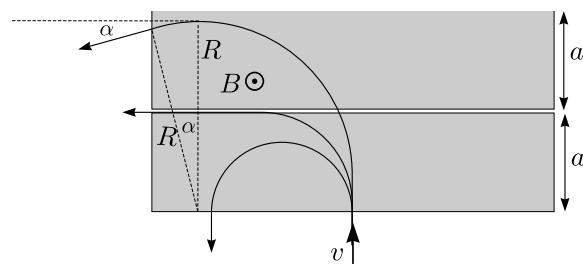
Autor: Jaan Kalda, piirkonnnavoor, 2010, G 9

Magnetväljas möjub elektronile Lorentzi jõud  $F = Bev$ , mis on kiirusega kogu aeg risti ning annab elektronile kesktömbekiirenduse  $v^2/R$ , kus  $R$  on trajektoori köverusraadius. Newtoni teisest seadusest  $Bev = mv^2/R$ , millest  $R = vm/Be$ .

Et elektri kiirus ei muutu (energia säilib!), siis ka köverusraadius ei muutu, st elektron liigub mööda ringjoont raadiusega  $R$ . Tuues sisse tähistuse  $v_0 = aBe/m$ , saame eelmise avaldise kirjutada kujul  $R = vm/Be = va/v_0$ .

Kui  $v < v_0$ , siis elektron teeb magnetväljas poolringi ning väljub tuldud suunas tagasi, st pöördenurk on  $\pi$  rad. Vastava graafikuosa eest.

Kui  $v \approx v_0$ , siis saab elektron väljuda mööda kitsast pilu, vt joonist, st pöördenurk on  $\pi/2$  rad. Vastava graafikuosa eest.

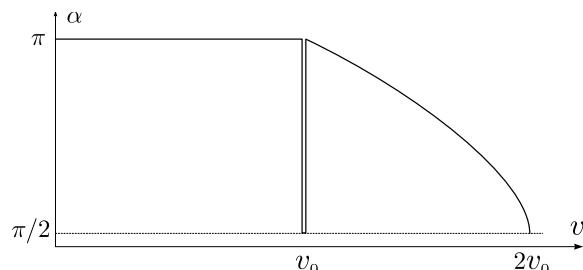


Kiiruse edasisel suurenemisel väljub elektron külg suunas; joonise abil on lihtne näha, et väljumisnurk on

$$\alpha = \frac{\pi}{2} + \arcsin \frac{2a - R}{R} = \frac{\pi}{2} + \arcsin \left( 2 \frac{v_0}{v} - 1 \right).$$

Kvalitatiivselt mõistliku graafikuosa eest, st graafikuosa algab väärtsuselt  $\pi$  rad ja lõppeb väärtsuse  $\pi/2$  rad juures.

Kokkuvõtvalt on võimalik väljutust väljundida järgmisel leheküljel oleval graafikul.



**L345 Laetud pendel ★★★★**

Autor: Eero Vaher, lahtine, 2015, G 10

Kuulikesele mõjuvad raskusjöud  $F_g$ , niidi pinge  $T$  ning Lorentzi jöud  $F_L$ . Kuulike püsib ringjoone kaarekujulisel trajektooril seni, kuni sellele mõjuvate jöudude projektsioonid niidi sihile rahuldavad võrrandit  $T + F_L - F_g \cos \alpha = F_k$ , kus  $\alpha$  on niidi kõrvalekaldenurk tasakaaluasendist ning  $F_k$  on ringjoone kaarel püsimiseks tarvilik kesktõmbejöud. Kuulikesee ringjoone kaarekujulisest trajektoorist kõrvalekaldumisel ei saa niit olla pinges. Järelikult pole kuulikesee trajektoor enam ringjoone kaar juhul  $F_L > F_g \cos \alpha + F_k$ . Olgu  $v$  kuulikesee kiirus nurga  $\alpha$  korral, mille saame leida energia jäädvusest

$$\frac{mv^2}{2} = -mg\Delta h,$$

kus  $\Delta h = l \cos \alpha - l + H$  on kuulikesee kõrguse muut. Järelikult

$$v = \sqrt{2g(l \cos \alpha - l + H)} = \sqrt{2gl \left( \cos \alpha - \frac{1}{8} \right)}$$

ning lahendamist vajav võrrand on  $qBv = mg \cos \alpha + \frac{mv^2}{l}$  ehk

$$qB \sqrt{2gl \left( \cos \alpha - \frac{1}{8} \right)} = mg \cos \alpha + 2mg \left( \cos \alpha - \frac{1}{8} \right).$$

Mõlemaid pooli ruutu võttes saame

$$2q^2B^2gl \left( \cos \alpha - \frac{1}{8} \right) = m^2g^2 \left( 3 \cos \alpha - \frac{1}{4} \right)^2.$$

Kuna  $2q^2B^2l = \frac{3}{2}m^2g$ , siis võime selle võrrandi viia kujule

$$\frac{3}{2} \cos \alpha - \frac{3}{16} = 9 \cos^2 \alpha - \frac{3}{2} \cos \alpha + \frac{1}{16}.$$

Saame ruutvõrrandi  $9 \cos^2 \alpha - 3 \cos \alpha + \frac{1}{4} = 0$  ehk  $9 \left( \cos \alpha - \frac{1}{6} \right)^2 = 0$ . Kuna selle ruutvõrrandi kaks lahendit on võrdsed, siis kas  $F_L \leq F_g \cos \alpha + F_k$  või  $F_L \geq F_g \cos \alpha + F_k$  iga  $\alpha$  korral. Vaadeldes juhtu  $\cos \alpha = \frac{1}{8}$  näeme, et  $F_L \leq F_g \cos \alpha + F_k$  ning järelikult on kuulikesee trajektoor ringjoone kaar raadiusega  $l$ , mille otspunktide kõrgus tasakaaluasendist on  $\frac{7}{8}l$ .

**L346 Silinder ★★★★**

Autor: tundmatu, lahtine, 2007, G 10

Vaatleme mõttelist ringikujulist kontuuri, mis ühtib silindri külgpinnna ristlõikega. Muutuv magnetväli tekitab suletud kontuuris elektromotoorjõu

$$\mathcal{E} = \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = \frac{S\Delta B}{\Delta t} = \frac{\pi R^2 \Delta B}{\Delta t}.$$

Sellise elektromotoorjõu olemasolu tähendab, et meil on teatud keeris-elektriväli  $E$ , mis on telgsümmeetrilisel juhtumil konstantne piki kontuuri ning seotud elektromotoorjõuga:

$$E = \frac{\mathcal{E}}{2\pi R} = \frac{1}{2} \frac{R\Delta B}{\Delta t}.$$

See elektriväli mõjub silindri külgpinnal olevale laengule  $q_i$  jõuga  $F_i = Eq_i$ , mis on risti teljelt tömmatud raadiusvektoriga. Seega on selle jõumoment telje suhtes  $M_i = Eq_i R$ . Summeerides üle kõikide laengute, saame tuua  $ER$  sulgude ette ning summaarne jõumoment avaldub kui  $M = EQR$ , kus  $Q$  on summaarne laeng. See tekitab nurkkiirenduse

$$\frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{M}{I_0},$$

kus  $I_0 = \frac{1}{2}mR^2$  on silindri inertsimoment telje suhtes. Asendades siia  $M$  ja  $E$  avaldised leiate

$$\frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{2EQR}{mR^2} = \frac{2QR}{mR^2} \frac{1}{2} \frac{R\Delta B}{\Delta t} = \frac{Q}{m} \frac{\Delta B}{\Delta t}.$$

Seega

$$\Delta\omega = \frac{Q}{m} \Delta B$$

ning võttes arvesse, et algne nurkkiirus ning lõpp-magnetväli on nullid, saame

$$\omega = \frac{Q}{m} B = \frac{2\pi R l \sigma}{\rho \pi R^2 l} B = \frac{2\sigma B}{\rho R}.$$

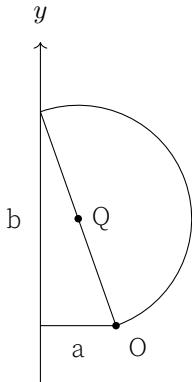
**L347 Elektronid ★★★★**

Autor: Jaan Kalda, lõppvoor, 2017, G 10

Maksimaalse  $y$ -telje sihilise läbimõõdu leidmiseks vaatleme osakesi, mis liiguvald  $x - y$ -tasandis. Sellisel juhul on elektroni trajektooriks ringjoon, sest magnetvälja poolt mõjuv jõud  $F = evB$  on konstantse suurusega ja kiirusega kogu aeg risti. Raadiuse saame leida, pannes magnetvälja poolt mõjuva jõu vördruma kesktõmbjõuga:

$$\frac{mv^2}{R} = evB \Rightarrow R = \frac{mv}{Be}.$$

Kõik selles tasandis olevad elektronid liiguvald sama raadiusega ringjoonel ja eri nurkade all liikuva elektronide trajektoorid saab leida seda ringjoont lihtsalt pöörates ümber punkti O. Kõige kaugemale  $y$ -telje positiivses suunas jõuab elektron siis, kui ekraani tabades on ta algpunktist võimalikult kaugel ehk läbinud täpselt pool ringjoone kaart, vaata joonist:

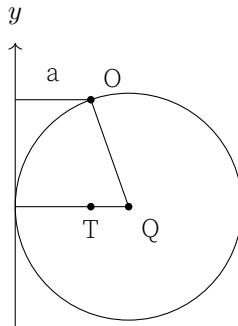


Kuna ekraan on kaugusel  $a$  elektronide allikast, siis Pythagorase teoreemi järgi saame laigu maksimaalseks  $y$  väärtsuseks

$$b = \sqrt{4R^2 - a^2} = \sqrt{4\left(\frac{mv}{Be}\right)^2 - a^2}.$$

Sit näeme, et väiksemale  $R$ -ile vastab väiksem läbimõõt ja maksimaalne  $y$ -telje sihiline läbimõõt on tõesti siis, kui osake liigub  $x - y$ -tasandis, nagu ka alguses väitsime.

Ringjoone kaart ümber punkti  $O$  pöörates näeme, et minimaalne  $y$ -suunalise väärtsuse korral on ringjoon ekraanile puutujaks, vaata joonist:



Kuna lõigu QT pikkus on  $R - a$ , siis lõigu OQ  $y$ -suunalise komponendi saab leida Pythagorase teoreemi abil

$$y_{\min} = -\sqrt{R^2 - (R - a)^2} = -\sqrt{2aR - a^2} = -\sqrt{\frac{2amv}{Be} - a^2}.$$

Seega laigu  $y$ -suunaline läbimõõt on

$$L = \sqrt{\frac{2amv}{Be} - a^2} + \sqrt{4\left(\frac{mv}{Be}\right)^2 - a^2}.$$

Selle laigu peal on heledus kõige suurem maksimaalse  $y$  väärtsuse korral, sest see vastab elektroni  $y$ -telje sihilise kõrvalekalde  $\Delta_y$  ekstreemumile. Kui tähistame elektroni stardinurga  $\alpha$  abil, siis

$$\frac{d\Delta_y}{d\alpha} = 0,$$

st väikeses stardinurga vahemikus  $\Delta\alpha$  saabuvad kõik elektronid peaegu täpselt samasse sihpunkti.

Leiame  $z$ -telje sihilise läbimõõdu tasandis  $y = 0$ . Kõige kaugemale  $z$ -teljel jõuavad need on osakesed, mille heeliksikujuline trajektoor puudutab tasandit  $x = -a$  ("üldaltvaates"  $x - y$ -tasandile puudutab ringjoonekujuline trajektoor raadiusega  $r = \frac{a}{2}$  joont  $x = -a$ ) ja mis stardivad  $y - z$ -tasandis, st algkiirusega, mille  $x$ -projektsioon  $v_x = 0$ . Edasi leiame

$$\frac{a}{2} = \frac{mv_y}{Be} \Rightarrow v_y = \frac{aBe}{2m} \Rightarrow v_z = \sqrt{v^2 - \left(\frac{aBe}{2m}\right)^2}.$$

Sellise algkiirusega elektronide teekond kestab pool tsüklotronperioodist. Perioodi saab leida seosest

$$T = \frac{2\pi R}{v} = \frac{2\pi m}{Be}.$$

Pool perioodi on seega

$$t = \frac{T}{2} = \frac{\pi m}{Be}$$

ning laigu  $z$ -telje sihiliseks mõõtmeks saame

$$2 \cdot tv_z = \pi \sqrt{\left(\frac{2mv}{Be}\right)^2 - a^2}.$$

### L348 Päikeseloojang ★

Autor: tundmatu, lahtine, 2004, G 2

Loojaku hetkel on Juku silmi ja Päikese ülemist punkti ühendav sirge puutujaks mingile punktile mere pinnal. Enamgi veel, võime teha lihtsustava eelduse, et esimese loojaku puhul see mere pinnal olev puutepunkt sisuliselt ühtib Juku asukohaga. Seniidi ja loojumise vahelisest ajavahemikust - veerand ööpaeva - järeldame, et päike loojub risti horisondiga. Märkame, et loojakute vahe on  $\tau = 10$  s, selle ajaaga pöördub Maa nurga  $\phi$  võrra

$$\phi = \frac{10}{24 \cdot 60 \cdot 60} \cdot 2\pi \approx 7,27 \cdot 10^{-4} \text{ rad.}$$

Teeme vastava joonise Päikese-Maa teljega fikseeritud taustüsteemis. Lihtsast geomeetriast ilmneb, et

$$\frac{R}{R+h} = \cos \phi \Rightarrow R = \frac{h \cos \phi}{1 - \cos \phi}.$$

Kui loeme lugejas oleva koosinuse võrdseks ühega ning nimetajas oleva avaldame väikse nurga jaoks kehtiva lähendivalemi abil, saame

$$R = \frac{2h}{\phi^2} \approx 6400 \text{ km.}$$

*Alternatiivne lahendus.*

Kahe esimese tähelepaneku järgi sai Juku teada, et Maa teeb ühe pöörde  $T = 24 \text{ h}$  jooksul. Tähistame silmade körguse  $h$ , ajavahemiku  $t = 19.00 : 05 - 18.59 : 55 = 10 \text{ s}$  ning Maa raadiuse  $R$ . Olgu  $\alpha$  nurk, mille vörra Maa pöördub ajavahemiku  $t$  jooksul:

$$\alpha = 2\pi \frac{t}{T}.$$

Kui joonistada välja Päikeseketta ülaservast lähtuva valguskiire käik juhu jaoks, kus Juku on püsti, saame täisnurkse kolmnurga, mille lähiskaatet on  $R$  ja hüpotenuus  $R + h$  ning nende vaheline nurk  $\alpha$ , nii et

$$R = (R + h) \cos \alpha.$$

Kuna  $h \ll R$ , siis  $\alpha \ll 1$  ja me võime kasutada ligikaudset valemit  $\cos \alpha \approx 1 - \alpha^2/2$ :

$$R = (R + h) \left(1 - \frac{\alpha^2}{2}\right).$$

Korrutame sulud lahti, jätkame ära väikese liikme  $h\alpha^2/2$ , asendame  $\alpha$  ja avaldame  $R$ :

$$R = \frac{hT^2}{2\pi^2 t^2} \approx 6400 \text{ km.}$$

**L349 Kiil ★**

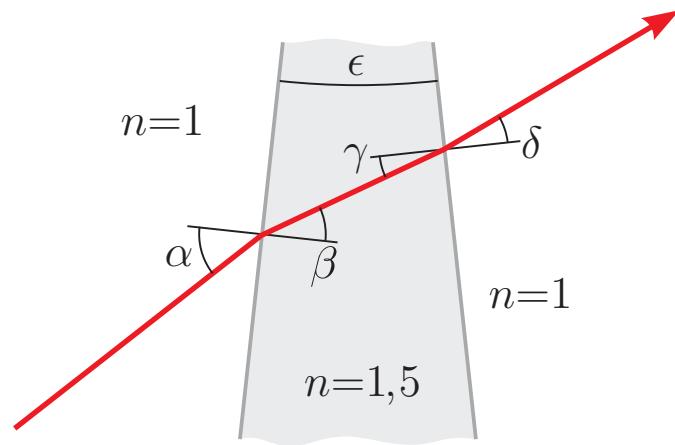
Autor: Valter Kiisk, lõppvoor, 2007, G 3

Kõik nurgad on tähistatud järgneval joonisel.  $\alpha$  on meelevaldne (kuigi  $\alpha \ll 1$ ).  $\beta = \alpha/n$ .  $\gamma = \beta - \epsilon$ .  $\delta = n\gamma = \alpha - n\epsilon$ . Kiire kõrvalekaldenurk

$$\phi = (\alpha - \beta) - (\delta - \gamma) = (\alpha - \delta) + (\gamma - \beta) = n\epsilon - \epsilon = \epsilon(n - 1).$$

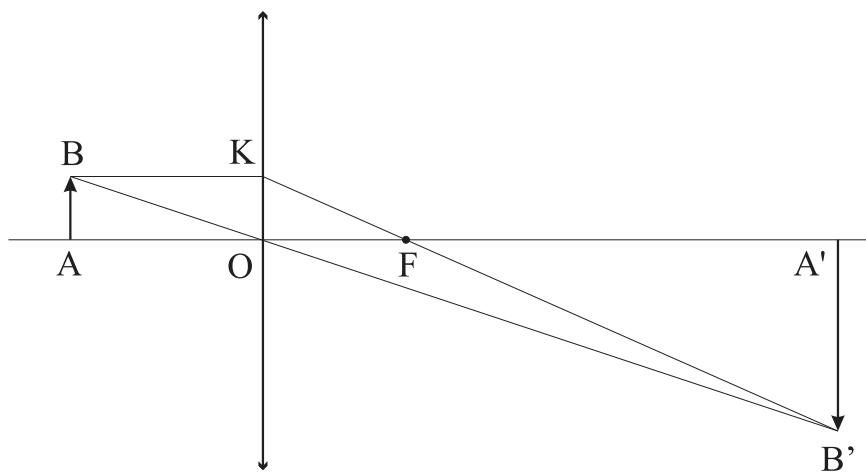
Teades, et  $\phi = 5 \text{ mm}/2 \text{ m} = 0,0025 \text{ rad}$ , saame

$$\epsilon = \frac{\phi}{n - 1} = 0,005 \text{ rad} = 0,29^\circ.$$

**L350 Lääts ★**

Autor: tundmatu, lahtine, 2009, G 2

Kuna kujutis tekib ekraanile, siis on kujutis tegelik ning tegemist on koondava läätsega.



Olgu  $a$  kaugus esemest läätse,  $k$  kaugus kujutisest läätse ning  $f$  läätse fookuskaugus. Et kujutis on esemest 3 korda suurem, siis sarnastest kolmnurkatest  $ABO$  ja  $A'B'O$

$$\frac{k}{a} = 3 \Rightarrow k = 3a.$$

Kujutis tekib kugusele  $d = 24$  cm, seega

$$a + k = 4a = 24 \text{ cm} \Rightarrow a = 6 \text{ cm}, k = 18 \text{ cm}.$$

Nüüd läätse valemist

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{k} = \frac{1}{f}$$

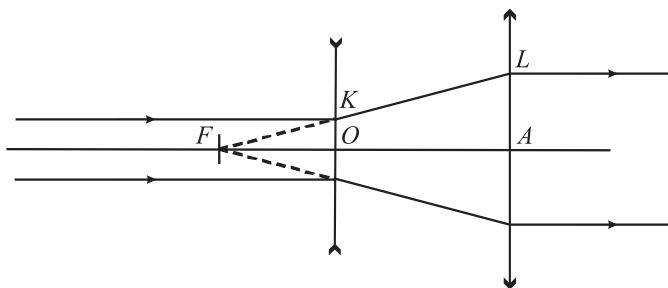
leiame, et  $f = 4,5$  cm.

*Märkus:* läätse valemi asemel võib fookuskauguse leidmiseks kasutada sarnaseid kolmnurki  $A'B'F$  ja  $OKF$ . Saame

$$\frac{k-f}{f} = 3 \Rightarrow f = \frac{k}{4} = 4,5 \text{ cm}.$$

### L351 Kiirtekimbu laiendi ★

Autor: Koit Timpmann, piirkonnavor, 2010, G 3



Kuna esimese läätse optiline tugevus on negatiivne, on see nõgus. Selleks, et sisenev paralleeline valgusvihk püsiks paralleelnä pärast süsteemist väljumist, peavad läätsede fookused ühtima. Olgu vastav ühine fookus  $F$ . Lisaks olgu läätsede keskpunktid  $O$  ja  $A$  ning siseneva kiirtekimbu kõige äärmise kiire lõikepunktid läätsede  $K$  ja  $L$ .

Sellisel juhul saame kolmnurkade  $KOF$  ja  $LAF$  sarnasusest, et

$$\frac{|LA|}{|KO|} = \frac{|AF|}{|OF|}.$$

Kuna  $|AL| = 2,5|OK|$ , siis  $|AF| = 2,5|OF|$ , ehk läätsede vahekauge on

$$|OA| = |AF| - |OF| = 1,5|OF| = 1,5 \left| \frac{1 \text{ m}}{-20} \right| = 7,5 \text{ cm}.$$

### L352 Segadus optikalaboris ★

Autor: Roland Matt, lahtine, 2011, G 1

Selleks, et kiirtekimp laieneks ja jäeks paralleelseks, pidi optik paigutama nõgusläätsse kumerläätsse ette niimoodi, et läätsede fookused ühtiksid nõgusläätsse ees. Tähistades nõgusläätsse fookuskauguse  $f_n$  ja vastavalt kumerläätsel  $f_k$ , saame kirja panna  $d = f_k - f_n$ . Vaatame üht kiirt, mis langeb nõgusläätsle paralleelselt läätsede optiliste peatelgedega, läätse keskpunktist kaugusel  $x_1$ . Teine kiir liikugu lihtsuse mõttes mööda süsteemi optilist peatelge. See kiir läbib kumerläätsse tema keskpunktist kaugusel  $x_2$ . Tekkivatest sarnastest kolmnurkadest saame kirja panna

$$\frac{x_1}{f_n} = \frac{x_2}{f_k} = \frac{x_2}{f_k - d},$$

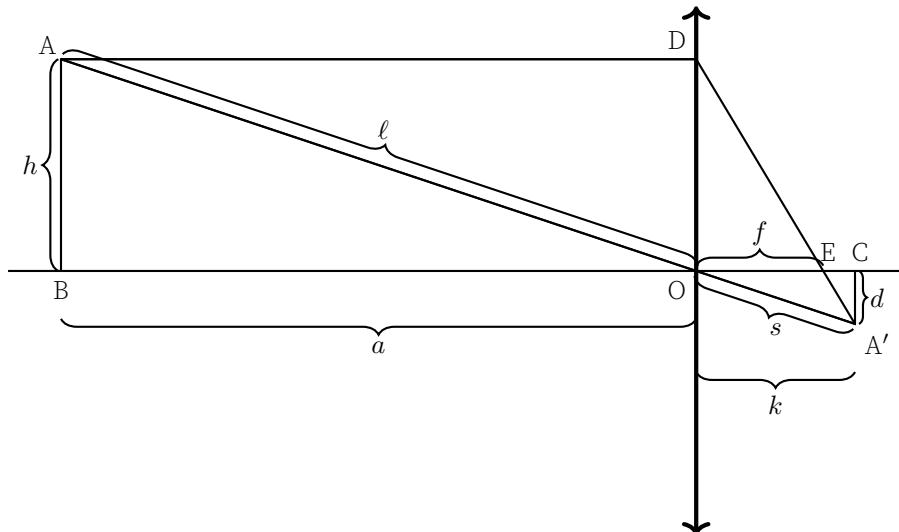
millest

$$f_k = \frac{x_2 d}{x_2 - x_1} = 52 \text{ cm}, \quad f_n = f_k - d = 20 \text{ cm}.$$

Optilised tugevused saame, võttes fookuskauguste pöördväärtused:  $D_k \approx 1,9 \text{ dptr}$  ja  $D_n = 5 \text{ dptr}$ .

### L353 Lääts ★

Autor: Koit Timpmann, piirkonnavor, 2016, G 3



Sarnastest kolmnurkadest  $\triangle ABO$  ja  $\triangle A'CO$  saame  $\frac{h}{l} = \frac{d}{s}$ . Kuna  $l + s = 15 \text{ cm}$ , siis:

$$\frac{4 \text{ cm}}{\ell} = \frac{1 \text{ cm}}{15 \text{ cm} - \ell} \rightarrow \ell = 12 \text{ cm}, \quad s = 3 \text{ cm}.$$

Täisnurksest kolmnurgast  $\triangle A'CO$  saame  $k^2 = \sqrt{s^2 - d^2}$ . Sarnastest kolmnurkadest  $\triangle DOE$  ja  $\triangle A'CE$  saame:

$$\frac{h}{f} = \frac{d}{k - f} \rightarrow f = \frac{hk}{h + d} \approx 2,26 \text{ cm}.$$

*Alternatiivne lahendus*

$\ell$  ja  $s$  leiate sarnaselt eelmisele lahendusele. Seejärel leiate kujutiste kaugused läätse tasandist:  $a = \sqrt{\ell^2 - h^2}$ ,  $k = \sqrt{s^2 - d^2}$ . Fookuskauguse leiate läätse valemi abil:

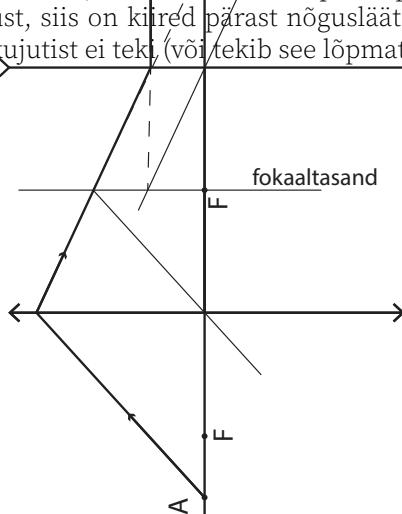
$$\frac{1}{a} + \frac{1}{k} = \frac{1}{f} \quad \rightarrow \quad f = \frac{ak}{a+k} \approx 2,26 \text{ cm.}$$

**L354 Valgusallika kujutis ★**

Autor: EFO žürii, lahtine, 2017, G 2

Valgusallika kujutist ei tekigi (või tekib lõpmatusse), kuna pärast teise läätse läbi-mist on valguskiired paralleelsed optilise peateljega.

Valguskiired on paralleelsed, kuna valgusallika  $A$  kujutis läbi kumerläätse tekiks nõgusläätse parempoolsesse fookusesse. Seega kumerläätse läbinud kiired langevad nõgusläätsele nii, et nad koonduksid parempoolses fookuses. Kuna nõguslääts hajutab valgust, siis on kiireid pärast nõgusläätse läbimist paralleelsed, mistõttu valgusallika kujutist ei teki (või tekib see lõpmatusse).



**L355 Piiritusetehas ★**

Autor: Aigar Vaigu, piirkonnavor, 2017, G 4

Murdumisseaduse järgi kehtib valguse murdumisel

$$n_0 \sin(\alpha_0) = n_1 \sin(\alpha_1),$$

kus  $n_0$  ja  $n_1$  on vastavalt esimese ja teise keskkonna murdumisnäitajad ning  $\alpha_0$  ja  $\alpha_1$  on vastavalt langemis- ja murdumisnurk. Seda valemit saab iteratiivselt jätkata järgmise murdumise jaoks kolmanda keskkonna piiril, kui keskkonnad on paralleelse kihtidena:

$$n_0 \sin(\alpha_0) = n_1 \sin(\alpha_1) = n_2 \sin(\alpha_2) = \dots$$

Selle abil näeme, et kehtib  $\sin(\alpha_j) = \frac{n_0}{n_j} \sin(\alpha_0)$ . See tähendab seda, et kiire murdumisnurk sõltub ainult hetke keskkonna murdumisnäitajast ja mitte sellest, kas ja kui mitu erinevat kihti varasemalt on läbitud. Seetõttu saame ignoreerida kanalit ümbrissevat klaasist või muust materjalist kihti, arvutamaks kiire nurka kanalis. Samuti, kuna ainult piirituse ja vee segu murdumisnäitaja muutub, siis ainult kanalis on kiire liikumisnurgad erinevad. Mujal on kiire liikumine täpselt sama, ainult pärast segu läbimist on kiir nihutatud, kui segu murdumisnäitajat muuta. Segus kehtib:

$$\sin(\alpha_{\text{segu}}) = \frac{n_0}{n_{\text{segu}}} \sin \alpha_0 = \frac{1}{\sqrt{2} n_{\text{segu}}},$$

kus  $\sin(\alpha_0) = 1/\sqrt{2}$  ja õhus  $n_0 = 1$ . Kiire nihe kanali sees piki kanali suunda on lihtsa geomeetria abil

$$y = d \tan(\alpha_{\text{segu}}).$$

Kasutades seost  $\tan(\phi) = \frac{\sin(\phi)}{\cos(\phi)} = \frac{\sin(\phi)}{\sqrt{1-\sin^2(\phi)}}$  saame

$$y = d \frac{\sin(\alpha_{\text{segu}})}{\sqrt{1 - \sin^2(\alpha_{\text{segu}})}} = \frac{d}{\sqrt{2} \sqrt{n_{\text{segu}}^2 - \frac{1}{2}}}.$$

Nüüd leiame  $y$  kahel juhul, kui  $X = 0,40$  siis  $y = 6,184$  mm ja kui  $X = 0,85$  siis  $y = 6,104$  mm. Saame  $y$  erinevuseks

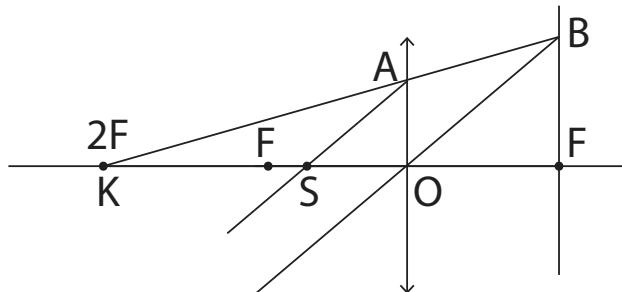
$$|\Delta y| \approx 80 \mu\text{m}.$$

### L356 Kaks valgusallikat ★

Autor: EFO žürii, piirkonnavoor, 2018, G 2

#### Esimene lahendus

Kui optilisel peateljel paiknev valgusallikas asub läätsest 18 cm kaugusel, mis on võrdne kahekordse fookuskaugusega, siis selle valgusallika kujutis asub teisel pool läätse läätsest samuti kahe fookuskaugusel ehk 18 cm kaugusel. Et kahe valgusalika kujutised kattuksid, peab teine kujutis olema näilik. Konstrueerime valgusalika asukoha, kui kujutise asukoht on teada.



Sarnastest kolmnurkadest  $\triangle KAO$  ja  $\triangle KBF$  saame, et

$$\frac{AO}{BF} = \frac{KO}{KF} = \frac{2f}{3f} = \frac{2}{3}.$$

Teisest sarnaste kolmnurkade paarist  $\triangle SAO$  ja  $\triangle OBF$  saame, et

$$\frac{AO}{BF} = \frac{OS}{FO} = \frac{b}{f},$$

kus  $b$  on teise valgusallika kaugus läätsest. Ühendades kaks seost, saame

$$\frac{KO}{KF} = \frac{OS}{FO} \Rightarrow \frac{2}{3} = \frac{b}{f} \Rightarrow b = \frac{2f}{3} = 6 \text{ cm.}$$

Teine valgusallikas peab asuma läätsest 6 cm kaugusel ning kahe valgusallika kaugus teineteisest on  $6 \text{ cm} + 18 \text{ cm} = 24 \text{ cm}$ .

#### *Teine lahendus*

Sarnaste kolmnurkade asemel saame kasutada läätse valemit. Teades, et valgusallikas asub läätsest  $a = 18 \text{ cm}$  kaugusel ning läätse fookuskaugus on  $f = 9 \text{ cm}$ , saame leida kujutise kauguse  $k$  läätsest:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{k} = \frac{1}{f} \Rightarrow k = 18 \text{ cm.}$$

Teise valgusallika kujutis peab olema samuti samas punktis, kus esimese valgusallika oma, seega peab teise valgusallikaga tekitatud kujutis olema näiline ning valgusallikas peab asuma kujutisega samal pool läätse. Kasutades läätse valemit, leiame teise valgusallika asukoha

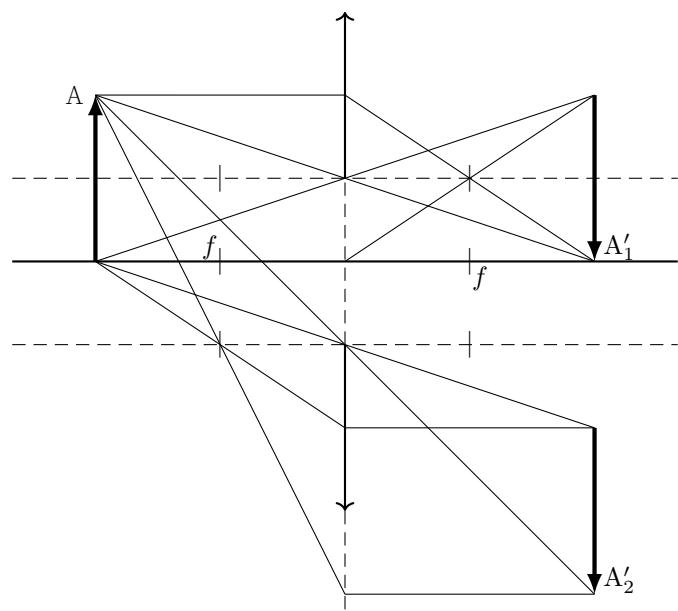
$$\frac{1}{a} - \frac{1}{k} = \frac{1}{f} \Rightarrow a = 6 \text{ cm.}$$

Teine valgusallikas peab asuma läätsest 6 cm kaugusel ning kahe valgusallika kaugus teineteisest on  $6 \text{ cm} + 18 \text{ cm} = 24 \text{ cm}$ .

#### L357 Poolitatud lääts ★

Autor: Hans Daniel Kaimre, lõppvoor, 2018, G 1

Ülesande püstituses on öeldud, et esialgse skeemi korral on lääts objektist ja kujutisest võrdsel kaugusel. Selline olukord realiseerub, kui nii objekt kui ka kujutis asuvad läätsest kahekordses fookuskauguses, kusjuures süsteemi suurendus on 1(objekt ja kujutis on sama suured). Lääts poolekslõikamisel ja poolde nihutamisel joonisel toodud skeemi järgi saame kaks uut läätse, mille fookuskaugused on endiselt samad, kuid optilised peateljed on nihkes. Seega tekib ekraanile kaks samasuurt kujutist kui enne, mis on omavahel vertikaalselt nihutatud ning mille intensiivsus on võrreldes esialgse kujutisega tunduvalt vähenenud. Seejuures paneme konstrueerimisel tähele, et kuigi reaalselt läätsest väljapool olevast piirkonnast kiiri läbi ei lähe, saame neid siiski kujutise konstrueerimiseks kasutada.



**L358 Taskulamp ★★**

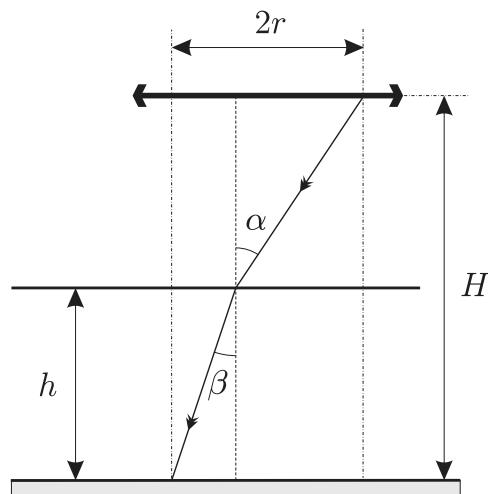
Autor: tundmatu, lahtine, 2004, G 3

Läätse fookuskaugus on  $f = 1/D = 50$  cm. Et põhja valgustatud ala pindala ei muutuks, peab äärmine kiir kalduma  $2r$  võra horisontaalses suunas, kus  $2r$  on valgusvihi diameeter. Paralleelne valgusvihk peab läätse läbimisel koonduma fookuses, seetõttu äärmise kiire langemisnurk  $\sin \alpha \approx \tan \alpha = r/f$ . Siin me arvestasime, et  $f \gg 2r$ . Murdumisseadusest  $\sin \alpha = n \sin \beta$ , kust  $\tan \beta \approx \sin \beta = r/nf$ . Kiire horisontaalses suunas kaldumise tingimuse võime täisnurksetest kolmnurkadest lähtudes kirja panna kui

$$(H - h) \tan \alpha + h \tan \beta = 2r.$$

Asendades siia  $\tan \alpha$  ja  $\tan \beta$  väärised ning avaldades  $h$ , saame

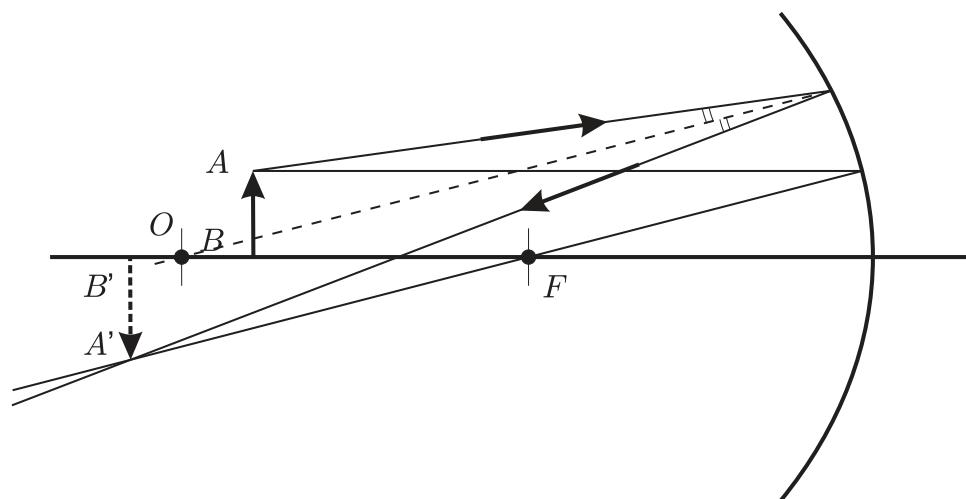
$$h = \frac{H - 2f}{n - 1} = 80 \text{ cm.}$$



**L359 Nõguspeegel ★★**

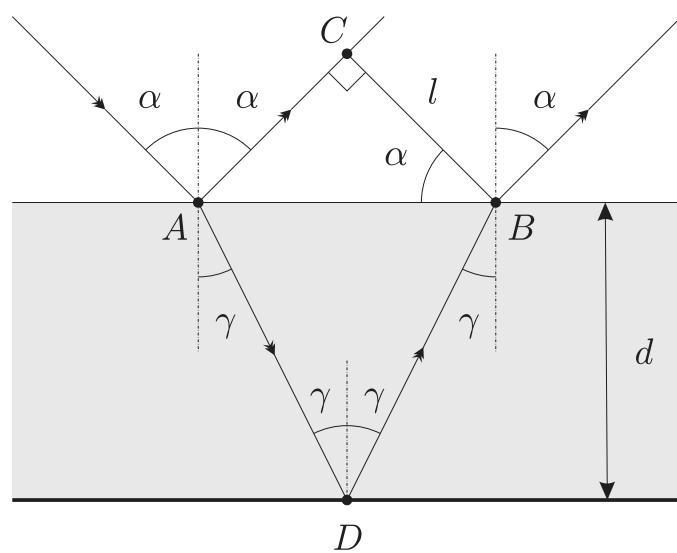
Autor: EFO žürii, lõppvoor, 2006, G 2

Joonisel antud kiire kahe osa pikenduste lõikepunkt vastab nõguspeegli pinnale ning kiirte nurgapoolitaja ja optilise peatlejä lõikepunkt annab nõguspeegli kõverusraadiuse keskpunkti  $O$ . Fookuse leidmiseks paneme tähele, et nõguspeegli fookuskaugus on pool kõverusraadiusest, kus kõverusraadiuse saame mõõta jooniselt. Edasi saame fookuse kaudu konstrueerida teise punktist  $A$  alguse saanud kiire käigu ning määramata eseme kujutise asukoha.

**L360 Plaat ★★**

Autor: tundmatu, lahtine, 2007, G 4

Kiirte käik plaadis on näidatud joonisel.



Nurk  $\angle ABC$  täisnurkses kolmnurgas  $ACB$  on  $\alpha$ , seetõttu  $|AB| = l / \cos \alpha$ . Teisest küljest, kolmnurgast  $ADB$  on näha, et  $|AB| = 2d \tan \gamma$ . Nurgad  $\alpha$  ja  $\gamma$  on seotud omavahel murdumisseadusega:

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \gamma} = n.$$

Lahendades need võrrandid, saame

$$n = \frac{\sin \alpha}{\sin \left( \arctan \left( \frac{l}{2d \cos \alpha} \right) \right)} = \sin \alpha \sqrt{1 + \left( \frac{2d \cos \alpha}{l} \right)^2} \approx 1,8.$$

### L361 Kärbes ★★

Autor: Taavi Pungas, lahtine, 2012, G 4

Kärbse trajektoor lühikese aja  $t$  jooksul on sirgjoon pikkusega  $h = vt$ . Konstrueerime joonisel kärbse kujutise trajektoori. Sarnastest kolmnurkadest saame leida kujutise trajektoori pikkuse  $h'$ :

$$\frac{h}{a-f} = \frac{h'}{f} \Rightarrow h' = \frac{f}{a-f} h.$$

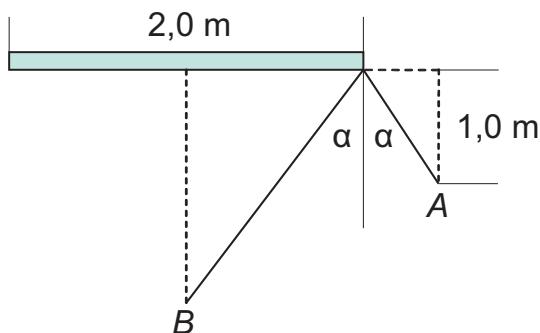
Kujutise kiirus on seega

$$v' = \frac{h'}{t} = \frac{f}{a-f} \frac{h}{t} = \frac{f}{a-f} v.$$

ning see on vastassuunaline kärbse kiirusega.

### L362 Peegel ★★

Autor: Oleg Košik, piirkonnavor, 2012, G 1



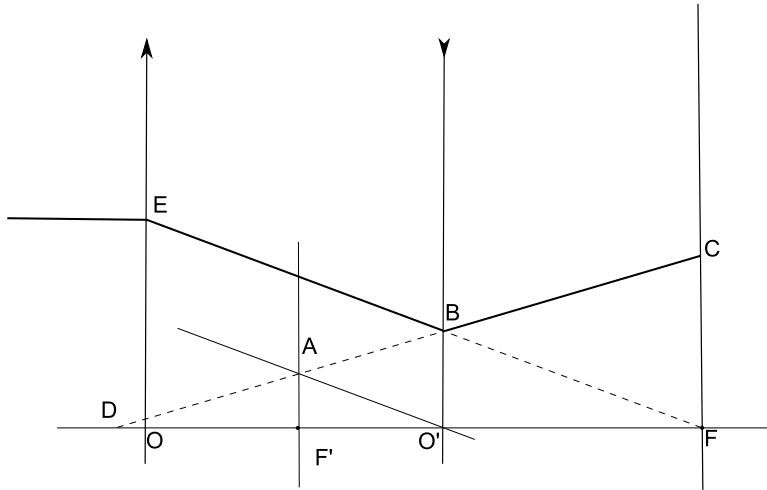
Joonisel on kujutatud hetk  $t$ , mil tuttavad märkavad teineteist. Selleks hetkeks läbis  $A$  teepikkuse  $2 - 1 \cdot t$  ning  $B$  läbis teepikkuse  $3,5 - 1 \cdot t$ . Sarnastest kolmnurkadest saame

$$\frac{1}{3,5 - t} = \frac{2 - t}{1}.$$

Tekib ruutvörrand, mille lahenditeks on  $t = 1,5$  s ja  $t = 4,0$  s, neist vastuseks on esimene lahend.

**L363 Läätsed ★★**

Autor: Tanel Kiis, lõppvoor, 2013, G 1



Kogu pilt on optilise peatelje suhtes sümmeetriseline, tänu sellele saame tegeleda ainult ühe poolega. Konstrueerime kiirte käigu, teades et kõigi nõgusläätsse läbivate paraleelsete kiirte pikendused lõikuvad fokaaltasandil.

Joonisel on mõned meid huvitavad sarnased kolmnurgad:

$$\Delta AF'D \sim \Delta BO'D \sim \Delta CFD$$

ja

$$\Delta EOF \sim \Delta AF'O' \sim \Delta BO'F.$$

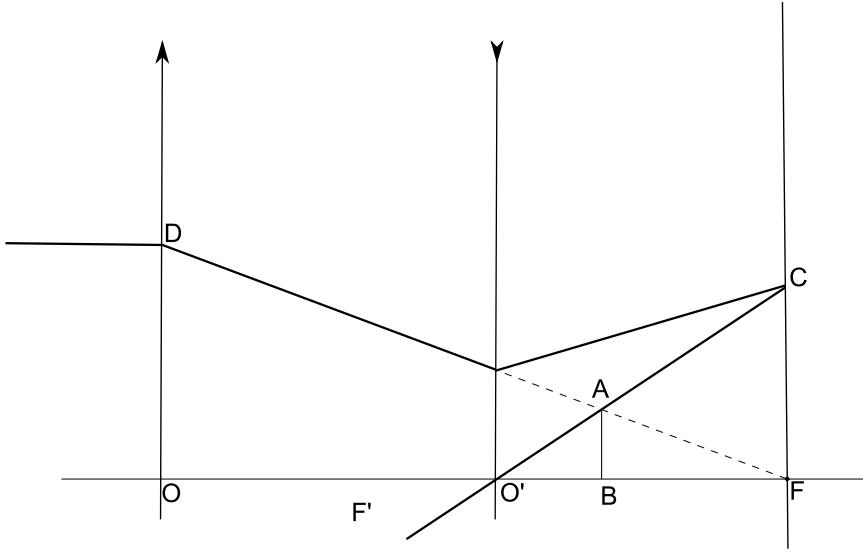
Lisaks teame osade lõikude pikkusi:  $|EO| = R$ ,  $|OF| = f_1$ ,  $|F'O'| = f_2$  ja  $|CF| = r$ . Seda teades saab moodustada neljast võrrandist koosneva lineaarvõrrandisüsteemi.

$$\begin{cases} \frac{|EO|}{|OF|} = \frac{|AF'|}{|F'O'|} \\ \frac{|EO|}{|OF|} = \frac{|BO'|}{|O'F|} \\ \frac{|AF'|}{|AF'|} = \frac{|CF|}{|FD|} \\ \frac{|F'D|}{|AF'|} = \frac{|FD|}{|BO'|} \\ \frac{|AF'|}{|F'D|} = \frac{|BO'|}{|O'D|}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{R}{f_1} = \frac{|AF'|}{f_2} \\ \frac{R}{f_1} = \frac{|BO'|}{\frac{f_1}{2}} \\ \frac{|AF'|}{|O'D|-f_2} = \frac{r}{\frac{f_1}{2}+|O'D|} \\ \frac{|AF'|}{|O'D|-f_2} = \frac{|BO'|}{|O'D|}. \end{cases}$$

Pärast süsteemi lahendamist saame tulemuseks  $f_2 = \frac{R}{4r} f_1$ .

*Alternatiivne lahendus*



Selles lahenduses kasutame läätse valemit  $-\frac{1}{f} = \frac{1}{a} - \frac{1}{k}$ .  $f$  ees on miinus, kuna tege mist on nõgusläätsega, ja  $k$  ees on miinus, kuna tegemist on näiva kujutisega. Kasutades kiirte pööratavuse printsiipi vaatame hoopis olukorda, kus tekib objektist  $CF$  näiv kujutis  $AB$ . Lisaks kasutame kolmnurkade sarnasust:  $\Delta CFO' \sim \Delta ABO'$  ja  $\Delta DOF \sim \Delta ABF$ .

$$\begin{cases} \frac{|CF|}{|FO'|} = \frac{|AB|}{|BO'|} \\ \frac{|DO|}{|OF|} = \frac{|AB|}{|BF|} \\ -\frac{1}{f_2} = \frac{1}{|FO'|} - \frac{1}{|BO'|}, \end{cases}$$

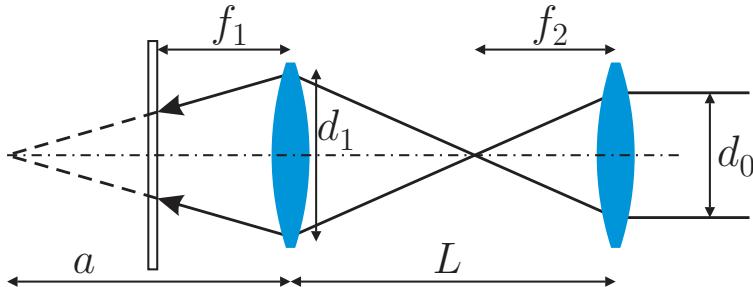
$$\begin{cases} \frac{r}{\frac{f_1}{2}} = \frac{|AB|}{|BO'|} \\ \frac{R}{f_1} = \frac{|AB|}{\frac{f_1}{2} - |BO'|} \\ -\frac{1}{f_2} = \frac{1}{\frac{f_1}{2}} - \frac{1}{|BO'|}. \end{cases}$$

Selle võrrandisüsteemi lahendamisel saame  $f_2 = \frac{R}{4r} f_1$ .

### L364 Valgustamine ★★

Autor: Valter Kiisk, lõppvoor, 2015, G 2

Vaatleme kõige äärmiste valguskiirte liikumist läbi süsteemi.



Pärast lisaläätsel läbimist koonduvad valguskiired punktiks lisaläätsest kaugusele  $f_2$  ehk kaugusele  $L - f_2$  algsest läätsest. Läätsel valem:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{L - f_2} = \frac{1}{f_1}. \quad (1)$$

põhjal tekib sellest punktist omakorda punktkujutis kaugusele  $a$  esimesest läätsest. Sarnastest kolmnurkadeest saame veel kaks võrrandit:

$$\frac{d_1}{d_0} = \frac{L - f_2}{f_2}, \quad (2)$$

$$\frac{d}{a - f_1} = \frac{d_1}{a}. \quad (3)$$

Kahest esimesest võrrandist saame suuruse  $\frac{1}{L-f_2}$  avaldamisel

$$\frac{1}{a} + \frac{d_0}{d_1 f_2} = \frac{1}{f_1} \implies \frac{d_0}{d_1 f_2} = \frac{a - f_1}{a f_1}. \quad (4)$$

Viimasest kahest võrrandist saame avaldada suuruse  $d_1(a - f_1)/a$ , mille põhjal saame  $d = d_0 \frac{f_1}{f_2}$ . Seega valguslaigu suurus ekraanil sõltub ainult lisatud läätse fookuskaugusest, aga mitte läätsedevahelisest kaugusest  $L$ . Valguslaik diameetriga 2 cm tekib kui  $f_2 = f_1 d_0 / d = 2$  cm.

### L365 Valgusvihk ★★

Autor: Mihkel Kree, piirkonnavoor, 2005, G 5

Ülesande lahendamisel osutub tarvilikuks teadmine, et läätsele selle optilise teljega paralleelselt langevad kiired (või murtud kiirte pikendused nõgusa läätse puuhul) koonduvad fookuses punktiks. Seega on ainus moodus kahe läätse abil saada süsteem, mis teisendab paralleelse kimbu uesti paralleelseks kimbuks, selline, et läätsede fookused ühtivad.

Esimene võimalus: kasutame kahte kumerläätse. Et kimbu diameeter suureneks, peab väiksema fookuskaugusega lääts olema eespool. Lihtsalt geomeetriast (sarnased kolmnurgad) ilmneb, et tekkiva kiirtekimbu diameeter on  $D = df_2/f_1 = 2d$ .

Teine võimalus: kasutame ühte kumerat ja ühte nõgusat läätse. Kui kumer lääts oleks esimene, siis kimbu diameeter väheneks. Seega paigutame nõgusa läätse kumera läätse ette. Nõgus lääts tekitab näilise kujutise. Kumera läätse asetame nii, et selle fookus ühtiks nõgusläätse tekitatud ebakujutise asukohaga. Sarnastest kolmnurkatest leiame, et tekib kiirekimp diameetriga

$$D = \left| \frac{f_{\text{kumer}}}{f_3} d \right|.$$

Domab suurimat väärust, kui kasutame suurema fookuskaugusega läätse,  $f_{\text{kumer}} = f_2$ . Niisiis

$$D = \left| \frac{f_2}{f_3} d \right| = 4d.$$

Näeme, et kiirtekimbu laiust saab suurendada maksimaalselt neli korda, kasutades selleks nõgusläätse ja kumerläätse ( $f_2 = 40 \text{ cm}$ ) nii, et nende fookused ühtiksid.

### L366 Biprisma ★★

Autor: Mihkel Kree, piirkonnavor, 2006, G 6

Valguskiir siseneb prismasse murdumata, sest kiir on normaali sihilin. Küll aga toimub murdumine prismast väljades. Kuna terve tahu ulatuses on langemisnurk sama, tekitab üks tahk paralleelse kiirtekimbu (vt joonist). Kuna meil on kaks murdat tahku, on esialgne kiirtekimp pärast prisma läbimist jagunenud kaheks.

On lihtne märgata, et langemisnurk, millega kiired langevad murdvale tahule, on  $\alpha$ . Vastavalt murdumisseadusele saame murdumisnurga  $\gamma$  jaoks seose:

$$\sin \gamma = n \sin \alpha.$$

Väikeste nurkade jaoks lihtsustub see avaldis:  $\gamma = n\alpha$ . Kiir kaldus seega oma esialgsest sihist kõrvale nurga

$$\beta = \gamma - \alpha = (n - 1)\alpha$$

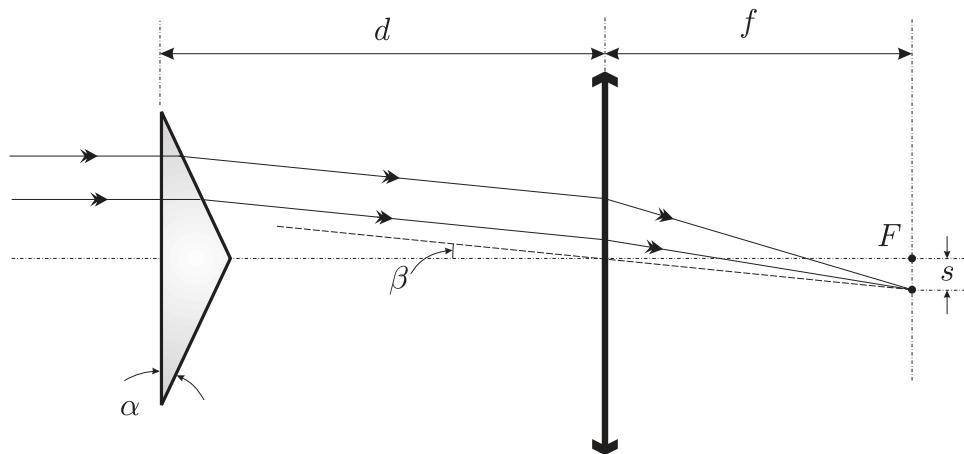
võrra.

Teame, et paralleelne kiirtekimp koondub kumerläätse fokaaltasandis. Seega tekitab fokaaltasandis asuvale ekraanile sümmeetriliselt kaks valgustäppi, teine teisele poole optilist peatelge. Arvutame ka nende kaugused peateljest. Selleks kasutame läbi läätse keskpunkti tömmatud kiirt, mis asetseb peateljega nurga  $\beta$  all. Täisnurksest kolmnurgast saame valguspunkti kauguse peateljest:

$$s = f \tan \beta \approx f\beta = (n - 1)\alpha f.$$

Ilmselt ei sõltu ekraanil tekkiv pilt kaugusest  $d$ .

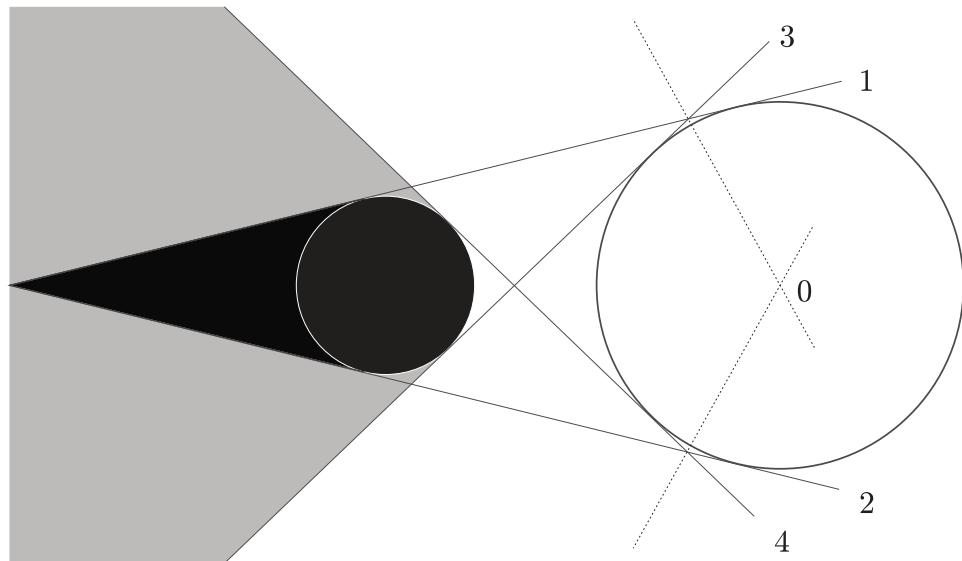
Et olla päris täpne, tuleks siiski märkida, et  $d$  kasvades piisavalt suureks hakkavad täpid muutuma tuhmimaks, kuni lõpuks kaovad üldse, sest siis kiired enam läätse ei läbi.



### L367 Varjud ★★

Autor: Jaak Kikas, piirkonnnavoor, 2007, G 6

Kanname joonisele varjukoonuste piirjoonte pikendused (sirged 1-4). Valgusallikaks oleva kera löikejoon joonise tasandiga on ringjoon, mille puutujateks on kõik need sirged. Selle keskpunkti leidmiseks konstrueerime sirgete 1-3 ja 2-4 poole moodustatud nurkade poolitajad (punktirjooned joonisel), nende lõikepunkt 0 on otsitava ringjoone keskpunktiiks. Ringi raadiuse leidmiseks konstrueerime punktist 0 mõnele sirgetest 1-4 keskristssirge.



### L368 Veealune valgus ★★

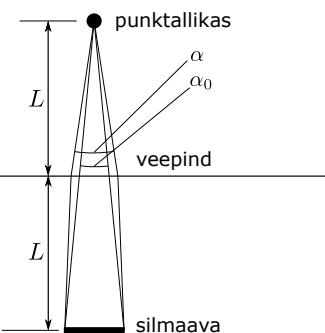
Autor: Jaak Kikas, lõppvoor, 2008, G 5

Allika heledus on ligikaudselt võrdeline vaatleja silmaava nurkläbimõõdu ruuduga allika asukohast vaadatuna. Olgu  $\alpha$  ja  $\alpha_0$  nurkläbimõõdud vastavalt veega täidetud ja veeta basseinis. Jooniselt

$$2L \tan(\alpha_0/2) = L \tan(\alpha/2) + L \tan(\beta/2),$$

kus langemis- ja murdumisnurkade  $\alpha/2$  ja  $\beta/2$  vahel kehtib seos

$$\frac{\sin(\alpha/2)}{\sin(\beta/2)} = n.$$



Kasutades väikeste nurkade lähendust  $\tan \alpha \approx \sin \alpha \approx \alpha$ , saame

$$\left( \frac{\alpha}{\alpha_0} \right)^2 = \frac{4n^2}{(n+1)^2}.$$

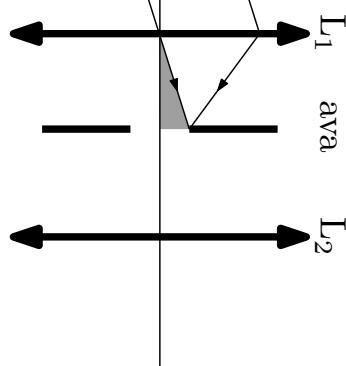
objektiivi fokaaltasand  
Arvestades ka peegeldumist veepinnalt, saame heleduste suhteeks

$$\frac{I_o}{I_f} = \left( \frac{\alpha}{\alpha_0} \right)^2 (1 - r) = \frac{4(1-r)n^2}{(n+1)^2} = 1,28.$$

### L369 Konfokaalne mikroskoop ★★

Autor: Mihkel Rähn, lõppvoor, 2009, G 7

Lahenduse optiline skeem on toodud joonisel. Konstrueerimisel tuleb läätsede valised kiired joonestada paralleelsed ja läätsede keskpunkte läbivad. Sellisel juhul annavad need kiired eseme ja ava tasandil vastavalt eseme ja kujutise asukohad.



Värvitud kolmnurgad on NNN tunnuse järgi sarnased. Seetõttu kehtib võrdus

$$\frac{d}{2f_1} = \frac{r_{\text{ese}}}{f_{\text{obj}}},$$

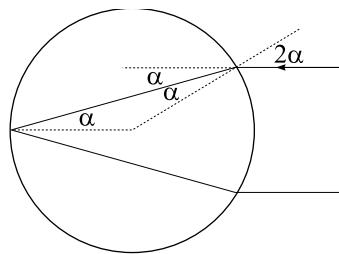
millega

$$r_{\text{ese}} = \frac{d \cdot f_{\text{obj}}}{2f_1}.$$

### L370 Klaaskuulike ★★

Autor: Jaan Kalda, lahtine, 2010, G 4

Tagasipeegelduv kiir peegeldub kuulikeses nii, nagu näidatud joonisel. Murdumisseadusest väikeste nurkade jaoks saame  $n = \sin 2\alpha / \sin \alpha \approx 2$ .



### L371 Optiline kiud ★★

Autor: Andreas Valdmann, lahtine, 2016, G 4

Pikas optilises kius jäävad levima vaid sellised kiired, mille jaoks toimub südamiku ja katte lahutuspinnal täielik sisepeegeldumine. Kui valgus langeb lahutuspinnale täieliku sisepeegeldumise piirnurgast väiksema nurga all, siis toimub korraga nii peegeldumine kui ka murdumine. Pärast mitmeid peegeldusi väheneb nende kiirte intensiivsus praktilliselt nullini, sest peaaegu kogu valgus on kiu külgedelt välja murdunud. Täieliku sisepeegeldumise piirnurk

$$\alpha = \arcsin(n_2/n_1) = 80,5^\circ.$$

Piirnurgale vastavad kiired levivad kiu telje suhtes nurga  $90^\circ - \alpha$  all. Pärast kiu otsast väljamurdumist on nende kiirte nurk kiu telje suhtes

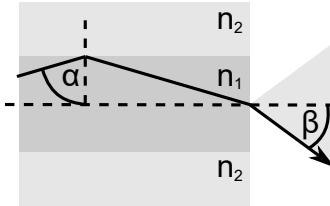
$$\beta = \arcsin[n_1 \sin(90^\circ - \alpha)] = \arcsin[n_1 \cos(\alpha)].$$

Valguskoonuse tipunurk  $\theta$  on sellest kaks korda suurem:

$$\theta = 2\beta = 2 \arcsin[n_1 \cos(\alpha)] = 28^\circ.$$

Kuna  $\cos(\arcsin(a)) = \sqrt{1 - a^2}$ , siis on võimalik vastus esitada kujul

$$\theta = 2 \arcsin\left(\sqrt{n_1^2 - n_2^2}\right).$$



### L372 Kolmlääts ★★

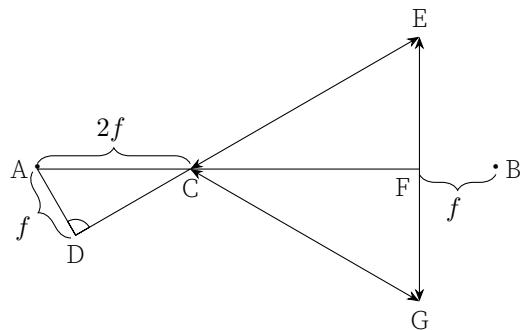
Autor: Andres Põldaru, lahtine, 2016, G 5

Kõigil kolmel läätsel on sama fookuskaugus, sest neil on üks ühine fookuspunkt, milleks on kolmnurga keskpunkt. Kolmnurgad  $\triangle ACD$  ja  $\triangle ACE$  on sarnased, sest nad on täisnurksed kolmnurgad, mille ühise tipu  $C$  juures olevad nurgad on samad. Seega

$$\frac{|AD|}{|AC|} = \frac{|EF|}{|EC|},$$

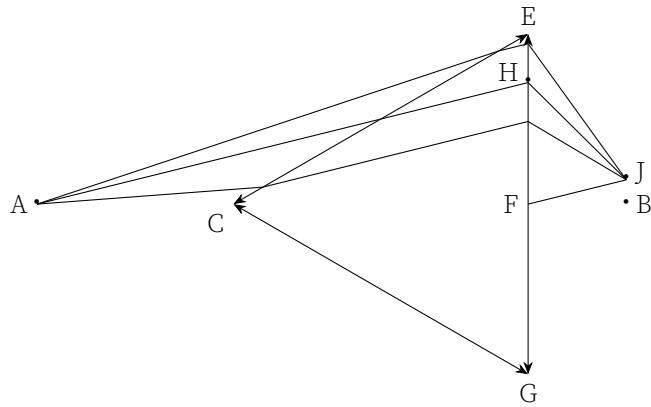
millest

$$|AD| = \frac{|AC|}{2} = f.$$



Saame järeltada, et punkt  $A$  asub mõlema läätse  $CE$  ja  $CG$  fokaaltasandites. Kui läätsele langevad paralleelsed kiired, siis need koonduvad fokaaltasandi ühe punkti ja seega teistpidi mõeldes peavad fokaaltasandi ühest punktist pärinevad kiired olema pärast läätse läbimist paralleelsed. Nende paralleelseste kiirte nurka on võimalik määrama nii, et tömbame punktist  $A$  ühe kiire läbi läätse  $CE$  või  $CG$  keskpunkti. Läätse keskpunkti läbiv kiir ei murdu ja liigub samas suunas edasi. Alumisel joonisel läbib kiir  $AH$  läätse keskpunkti ja teised kiired on konstrueeritud selliselt, et pärast läätse läbimist on nad sellega pralleelsed.

Pärast esimese läätse läbimist koonduvad läätsele  $EG$  langevad paralleelsed kiired fokaaltasandi ühe punkti  $J$ . Selle punkti leidmiseks joonistame läätse  $EG$  keskpunkti  $F$  läbiva kiire, mis on kiirega  $AH$  paralleelne, ja leiame selle kiire lõikumispunkti  $J$  fokaaltasandiga. Jooniselt on näha, et ükski kiir punkti  $B$  ei jõua, sest nad kõik kõik koonduvad punkti  $J$  ja vertikaalseid kiiri ei ole. Läätse  $CG$  jaoks on konstruktsioon sama, ainult peegelpildis  $AB$  suhtes ja seega ka seal ei jõua valgus punkti  $B$ .



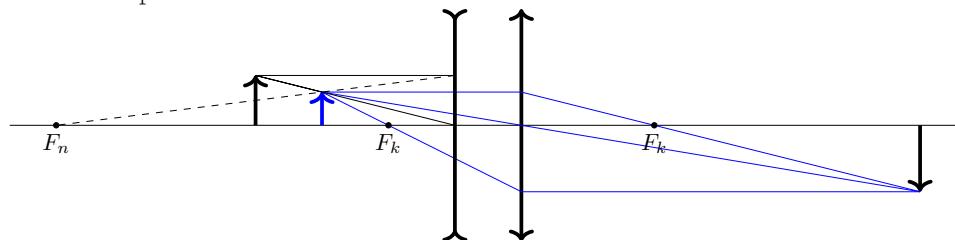
#### *Alternatiivne lahendus*

Analoogselt võime vaadata hoopis seda, kui punkt  $B$  on valgusallikas. Kui punktist  $A$  pärinevad kiired jõuavad punkti  $B$ , siis peavad ka punktist  $B$  pärinevad kiired jõudma punkti  $A$ . Punkt  $B$  on läätse  $EG$  fokaaltasandis ja tekitab paralleelse kiirtekimbu. Sarnaselt eelmise lahendusega see kiirtekimp koondub pärast teise läätse läbimist selle läätse fokaaltasandi ühte punkti, mis ei ole  $A$ . Fokaaltasand on läätsega paralleelne ja kui kiired koonduvad selles tasandis mingisse punktist  $A$  erinevasse punkti, siis järelkult punkti  $A$  valgus ei jõua.

#### L373 Puuduv lääts ★★

Autor: Eero Vaher, piirkonnavoor, 2017, G 5

Nõguslääts tekitab esemest näiva kujutise ning kumerlääts tekitab näivast kujutisest töelise kujutise. Teades kumerläätse asukohta ja fookuseid ning töelise kujutise asukohta, on võimalik leida näiva kujutise asukoht (joonisel kujutatud siinisega; kujutatud on kolme kiirt, kuid konstrueerimiseks piisab kahest). Teades eseme ning nõgusläätse tekitatud näiva kujutise asukohti, on läätse asukoha ning selle esemepoolse fookuse leidmine lihtne.



**L374 Kiilud ★★**

Autor: tundmatu, lahtine, 2006, G 6

On lihtne näha, et plaadist väljub endiselt paralleelne valgusvihk. Küll aga on selle levimise suund muutunud. Plaati sisenedes murdumist ei toimu, sest kiired liiguvad risti pinnaga. Kaldpinnale langevad kiired langemisnurga  $\varphi$  all, murdumisnurga  $\gamma$  saame murdumisseadusest:

$$n_1 \sin \varphi = n_2 \sin \gamma.$$

Meil on lubatud kasutada väikeste nurkade lähendust  $\sin \alpha \approx \alpha$ , mistõttu  $\varphi n_1 = \gamma n_2$ . Murdumise tõttu muutus kiirte levimise suund nurga  $\varphi - \gamma$  võrra. Ühtlasi on lihtne näha, et see on ka langemisnurgaks plaadi välistasandile, sest esialgu liikus kiir risti plaadiga. Arvestades, et õhu murdumisnäitaja on 1, saame leida kiire murdumisnurga  $\delta$  plaadist väljumisel:

$$n_2(\varphi - \gamma) = \delta, \quad \delta = n_2 \left( \varphi - \frac{\varphi n_1}{n_2} \right) = \varphi(n_2 - n_1).$$

Valguslaigu nihet on nüüd lihtne leida. Vaatleme läätse optilist keskpunkti läbivat kiirt. Et see kiir läätses ei murdu, lõikab see fokaaltasandit teljest kauguse sel:

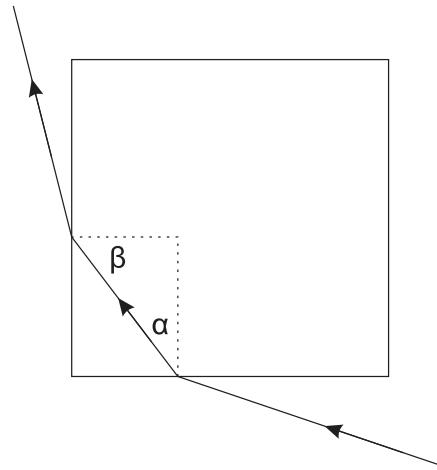
$$d = \delta f = \varphi f(n_2 - n_1).$$

**L375 Klaaskuup ★★**

Autor: tundmatu, piirkonnavor, 2009, G 7

Mustaks värvitud tahkudelt valgus peegelduda ei saa, toimub neeldumine. Ülesande tingimus on täidetud, kui värvimata tahust kuupi sisenev valgus ei saa väljuva läbi kõrvaltahu (toimub sisepeegeldus). Sisepeegelduse kriitilise nurga saame murdumisseadusest:

$$\sin \gamma_C = \frac{1}{n}.$$



Kiir siseneb kuupi, kui  $\alpha < \gamma_C$ . Langemisnurk kõrvaltahule on  $\beta = 90^\circ - \alpha$ . Kiir väljub kuubist, kui

$$\beta < \gamma_C, \quad \text{ehk} \quad 90^\circ < \gamma_C + \alpha < 2\gamma_C.$$

Et kiir ei saaks kuubist väljuda, peab kehtima:

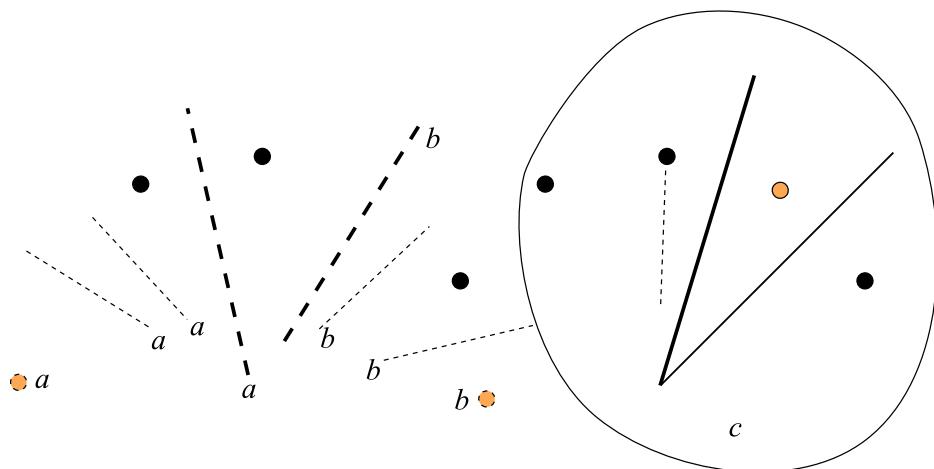
$$\gamma_C < 45^\circ, \quad \text{ehk} \quad n > 1 / \sin 45^\circ = \sqrt{2}.$$

### L376 Peeglid ★★

Autor: Jaan Kalda, piirkonnnavoor, 2009, G 8

Kuna on teada, et üks antud punktidest on peegelduse peegeldus, siis peab üks tasapeeglitest kindlasti asuma peegelduse  $S_1$  ning selle peegelduse peegelduse  $S'_1$  sümmeetriateljel. Lisaks saab punkt  $S_1$  tekkida ainult siis, kui paigutada  $S_1$  ja allika  $S$  vahele teine peegel. Järelkult peab kolmas antud punkt  $S_2$  olema allika  $S$  peegeldus esimesena paigutatud peeglis ehk see peegel asub nii  $S_1$  ja  $S'_1$  kui ka  $S$  ja  $S_2$  sümmeetriateljel. Teades seda, on lihtne määrrata joonisel allika  $S$  asukoht. Selleks, et tekiksid peegeldused ning peegelduse peegeldused, peab allikas asuma kahe peegli vahel nii, et mölemad peegeldavad küljed on sellele nähtavad. Kujustiste paariks  $S_1$  ja  $S'_1$  saab olla ainult kaks alumist punkti joonisel, kuna vastasel korral jäääks valgusallikas kõigi kujustiste suhtes teisele poole peegleid olenemata sellest, kas  $S_1$  ja  $S'_1$  jaoks valitakse ülemine ja vasakpoolne (joonisel  $a$ ) või ülemine ja parempoolne (joonisel  $b$ ).

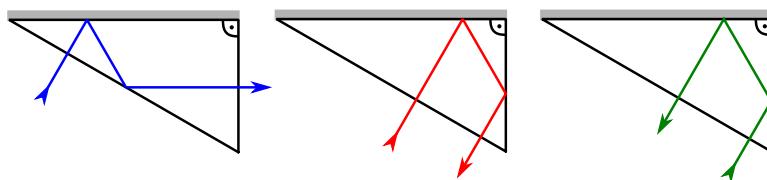
Niiisiis, esimeseks peeglikeks on kahe alumise punkti sümmeetriatelg ning allikaks ülemise punkti peegeldus selles peeglis. Teine peegel peab olema allika ja parempoolse punkti sümmeetriatelg, sest kui see oleks allika ja vasakpoolse punkti sümmeetriatelg, siis jäääks allikas jällegi peeglite vahelt välja.



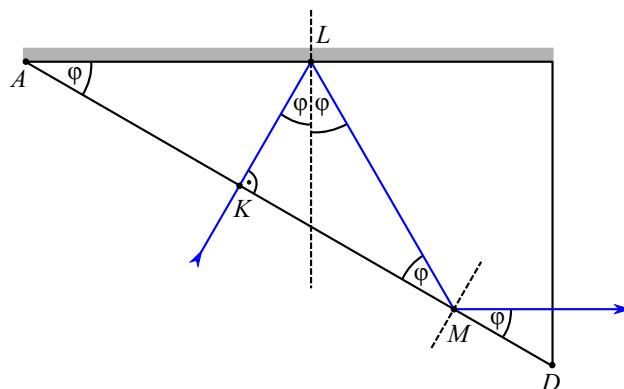
**L377 Periskooppillid ★★**

Autor: Andreas Valdmann, lõppvoor, 2014, G 4

a) Kuna sisenevad ja väljuvad kiired on prisma pinnaga risti, siis keskkondade lahtuspiiril nende suund ei muutu. Kui kiir langeb prismale lõigul  $AB$ , siis peegeldub see esmalt prisma ülemisel tahul, seejärel alumisel tahul ning väljub prismast läbi parempoolse tahu (vt joonist). Kui kiir langeb prismale lõigul  $BC$ , siis peegeldub see ülemisel tahul, siis parempoolsel tahul ning väljub läbi alumise tahu ja ei jõuagi silma. Kui kiir langeb prismale lõigul  $CD$ , siis peegeldub see esmalt parempoolsel tahul, seejärel ülemisel tahul ning väljub jällegi läbi alumise tahu.



b) Vaatleme kiirt, mis siseneb prismaisse lõigul  $AB$ . Kuna sisenev kiir on pinna risti, siis tekib täisnurkne kolmnurk  $AKL$  (vt joonist). Kolmnurga üheks teravnurgaks on  $\varphi$  ja seega on teise teravnurga suurus  $90^\circ - \varphi$ . Kuna viimane nurk on esimesel peegeldumisel langemisnurga täiendnurgaks, siis on ka langemisnurk  $\varphi$ . Peegeldumisseadusest järeltäidub, et esimene peegeldumisnurk on samuti  $\varphi$ . Kuna prismast väljuv kiir on paralleeline prisma ülemise tahuga, siis on teisel peegeldumisel peegeldumisnurga täiendnurk ja seega ka langemisnurga täiendnurk  $\varphi$ . Näeme, et täisnurkse kolmurga  $KLM$  teravnurgad on  $\varphi$  ja  $2\varphi$ . Kuna kolmnurga sisenurkade summa on  $180^\circ$ , siis  $\varphi = (180^\circ - 90^\circ)/3 = 30^\circ$ .

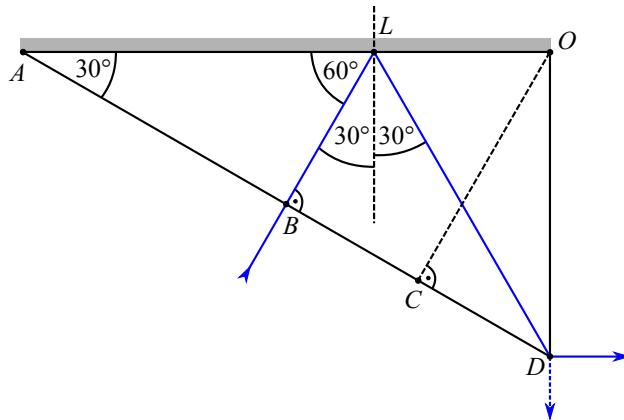


Märkus. Nüüd, kui prisma tipunurk on leitud, saame veenduda, et kui pinnaga risti sisenenud kiir peegeldub prisma alumiselt või parempoolselt tahult, siis on need peegeldumised täielikud. Eelmisest alaülesandest on näha, et nendel juhtudel on langemisnurgaks  $90^\circ - \varphi = 60^\circ$ . Täieliku sisepeegeldumise piirnurk on  $\alpha = \arcsin(1/n) = 42^\circ$ . Langemisnurk  $60^\circ$  on sellest suurem ehk toimub täielik sisepeegeldumine.

c) Kui kiir siseneb prismasse punktis  $B$ , siis läbib väljuv kiir punkti  $D$  (vt joonist). *Märkus.* Väljuva kiire suund pole sel juhul üheselt määratud, kuid see ei oma ülesande lahendamisel tähtsust.

Kasutades eelmises alaülesandes saadud  $\varphi$  väärust, on näha, et kolmnurgad  $ABL$  ja  $BDL$  on teineteise peegeldused lõigu  $BL$  suhtes (öeldakse, et need kolmnurgad on kongruentsed). Seega on lõikude  $AB$  ja  $BD$  pikkused võrdsed, millest järeltub, et  $|AB| = l/2$ . Kui kiir siseneb prismasse punktis  $C$ , siis peegeldub see punktis  $O$  otse tagasi ning väljub prismast punktis  $C$ . Täisnurksetest kolmnurkade saame, et  $|AO| = \cos(30^\circ)|AD|$  ja  $|AC| = \cos(30^\circ)|AO|$  ehk punkti  $C$  kaugus punktist  $A$  on

$$|AC| = \cos^2(30^\circ)|AD| = \frac{3}{4}l.$$

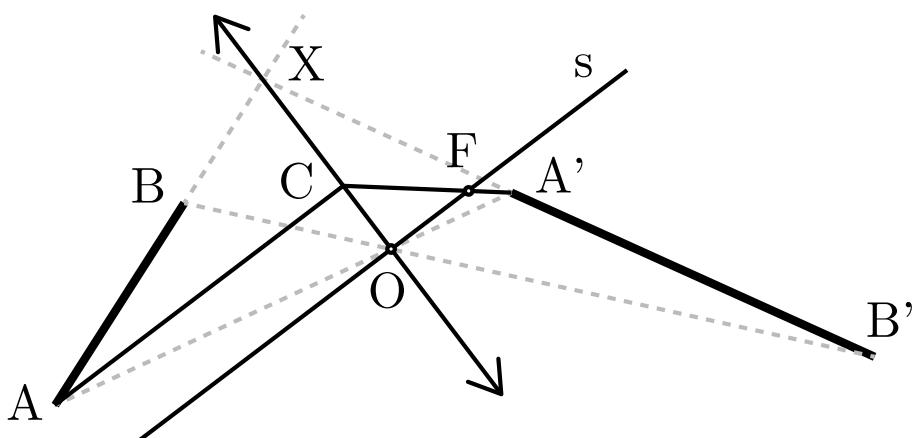


d) Ühe tasapeegli kasutamisel paistab tekst peegelpildis. Seetõttu tuleb teksti õigetpidi nägemiseks kasutada süsteemi, kus toimub paaritarv peegeldusi.

**L378 Lääts ★★**

Autor: Mihkel Kree, lahtine, 2015, G 5

Paneme esmalt tähele, et läätse keskpunkti läbivad kiired AA' ja BB' ei murdu. See-ga paikneb läätse keskpunkt O lõikude AA' ja BB' lõikepunktis. Teisalt märkame, et valguskiir AB murdub valguskiireks A'B'. Niisiis, pikendades lõike AB ja A'B', leiate nende lõikepunkt X. Sellega oleme konstrueerinud läätse tasandi OX. Läätsse optilise peatleje leiate, kui tömbame läätse tasandiga ristuva sirge s läbi läätse keskpunkti O. Fookuse F leidmiseks konstrueerime näiteks peateljega paralleelse kiire AC, mis murdub läbi fookuse.


**L379 Peegelpõhi ★★**

Autor: Sandra Schumann, lõppvoor, 2018, G 3

Paneme tähele, et valemi järgi, kui keskkonna murdumisnäitaja suureneb, aga läätse murdumisnäitaja jääb samaks, siis läätse fookuskaugus suureneb. Seega on ainus viis, kuidas valguskiired saaksid ka pärast anuma vett täis valamist samas punktis koonduda, see, kui vee sees valguskiired peegelduksid põhjas olevalt peeglilt ja seejärel koonduksid samas punktis, kus enne.

Lääts kaugus anuma põhjast on  $l = 10 \text{ cm}$ . Olgu läätse fookuskaugus õhus  $f$ . Siis on tema fookuskaugus vees järelikult  $2l - f$ . Valemi põhjal saame, et

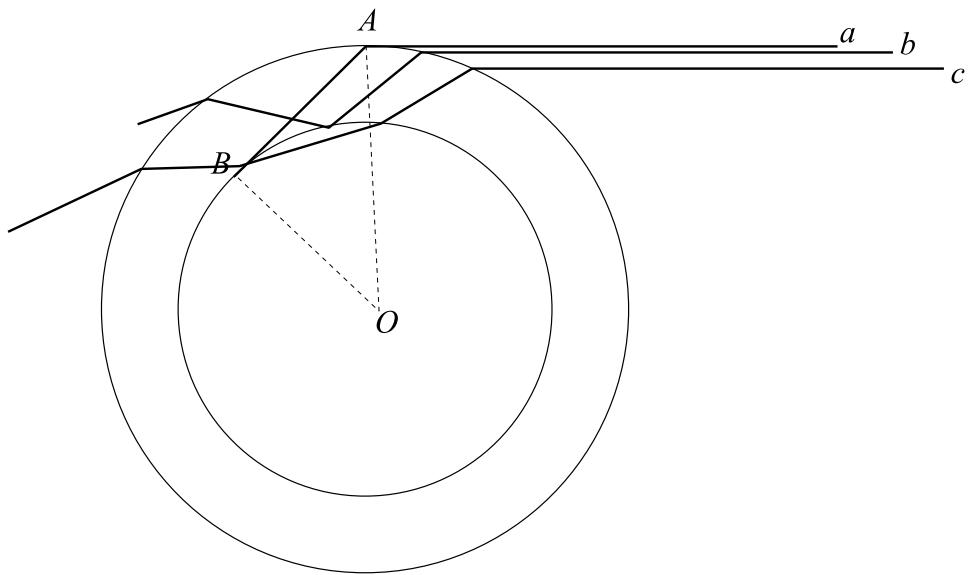
$$\begin{aligned} \frac{f}{2l - f} &= \frac{n_k n_0 - n_0 n_v}{n_k n_v - n_0 n_v} \Rightarrow \\ f(n_k n_v - n_0 n_v) &= (2l - f)(n_k n_0 - n_0 n_v) \Rightarrow \\ n_k n_v f - n_0 n_v f &= 2l n_k n_0 - 2l n_0 n_v - n_k n_0 f + n_0 n_v f \Rightarrow \\ f(n_k n_v + n_k n_0 - 2n_0 n_v) &= 2l n_0 (n_k - n_v) \Rightarrow \\ f &= \frac{2l n_0 (n_k - n_v)}{n_k n_v + n_k n_0 - 2n_0 n_v}. \end{aligned}$$

Seega on läätse fookuskaugus

$$f = \frac{2 \cdot 10 \text{ cm} \cdot 1,0 \cdot (1,49 - 1,33)}{1,49 \cdot 1,33 + 1,49 \cdot 1,0 - 2 \cdot 1,0 \cdot 1,33} = 3,94 \text{ cm} \approx 4 \text{ cm.}$$

**L380 Kapillaartoru ★★**

Autor: tundmatu, lahtine, 2009, G 8



Et kapillaarisein paistaks null-paksusega, peab kapillaarile puutujana (punktis  $A$ , vt joonist) langenud kiir  $a$  puudutama sisemist õönsust (punktis  $B$ ). Sellisel juhul pole ühtegi kiirt, mis läbiks kapillaari seina ilma sisemise õönsuse piirpinnale langemata (ning vaid kiir  $a$  teeb seda puutujana). Kolmnurk  $AOB$  on täisnurkne, seetõttu saame murdumisseadusest  $n = R/r$ .

Ülesande olukorda edasi analüüsides paneme tähele, et ka võrratuse  $r > R/n$  korral puuduvad kiired, mis langevad kapillaari välispinnale, kuid ei lange sisemise õönsuse piirpinnale; seega ka nende puhul näib kapillaari sein puuduvat.

Veel paneme tähele, et igal juhul on siiski oluline erinevus ime-õhukese seinaga kapillaarist: kapillaari servale lähedaste kiirte puhul toimub täielik sisepeegeldus sisemise õönsuse piirpinnalt (joonisel kiir  $b$ ). Visuaalselt paistab see peegel-kihina ja on selgelt eristatav, kui nt kapillaar täita värvilise gaasiga. Samas, see sisepeegeldus kaob, kui kapillaar täita värvilise vedelikuga, mille murdumisnäitaja on  $n$ .

### L381 Fookuskaugus ★★

Autor: Eero Vaher, piirkonnnavoor, 2015, G 8

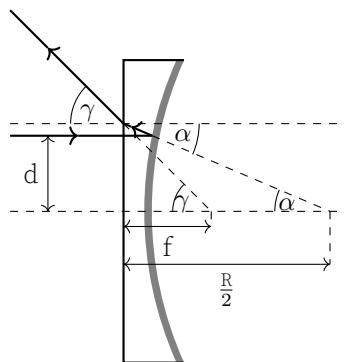
Langegu läätsele vasakult valguskiir, mille suund on paralleelne optilise teljega ning mille kaugus sellest on  $d$ . Läätses sisenedes valgus oma levimissuunda ei muuda, kuna langeb läätsele selle pinnaga risti. Höbetatud pind toimib kumerpeeglinna, mille fookuskaugus on  $\frac{R}{2}$ . Kui peegeldunud valguskiire nurk optilise peateli suhtes on  $\alpha$ , siis läätsetest väljunud kiire ning optilise peateli vaheline nurk on murdumisseaduse põhjal  $\sin \gamma = n \sin \alpha$ . Kuna lääts on õhuke, asetsevad punktid, kus valguskiir peegeldus ning kus see murdus, üksteisele väga lähedal. Seetõttu võime kirjutada

$$d = \frac{R}{2} \tan \alpha = f \tan \gamma.$$

Õhukese läätse korral on selle nõguna osa köverusraadius oluliselt suurem fookuskaugusest, mis lubab kasutada väikeste nurkade lähendust ehk  $\alpha \approx \sin \alpha \approx \tan \alpha$  ning  $\gamma \approx \sin \gamma \approx \tan \gamma$ . Tulemuseks saame

$$f = \frac{R}{2n}.$$

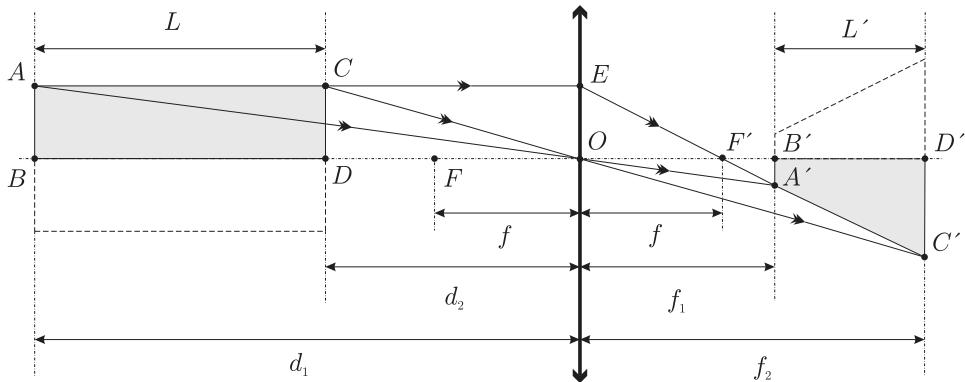
Tasub teada, et avaldis sfäärilise peegli fookuskauguse jaoks kehtibki ainult väikeste peegeldumisnurkade korral. Suурte peegeldumisnurkade korral ilmneb sfääriiline aberratsioon ning ei ole võimalik rääkida ühest fookusest.



**L382 Lääts ★★★**

Autor: tundmatu, lahtine, 2007, G 9

Olgu pliiatsi otste kaugused läätsest  $d_1 = |BO|$  ja  $d_2 = |DO|$  ning pliiatsi kujutise otste kaugused läätsest vastavalt  $f_1 = |B'D'|$  ja  $f_2 = |D'C'|$  (vt joonist).



Paneme kirja valemid suurendustegurite jaoks:

$$k = \frac{L'}{L}, \quad k_1 = \frac{|A'B'|}{|AB|}, \quad k_2 = \frac{|C'D'|}{|CD|}.$$

Sarnastest kolmnurkadest  $F'B'A'$  ja  $FOE$  leiame, et

$$\frac{|A'B'|}{|EO|} = \frac{|F'B'|}{|FO|} = \frac{f_1 - f}{f}.$$

Analoogiliselt, sarnastest kolmnurkadest  $F'D'C'$  ja  $FOE$  leiame, et

$$\frac{|C'D'|}{|EO|} = \frac{|F'D'|}{|FO|} = \frac{f_2 - f}{f}.$$

Kuna  $|EO| = |AB| = |CD|$ , siis

$$k = \frac{f_2 - f_1}{d_1 - d_2}, \quad k_1 = \frac{f_1 - f}{f}, \quad k_2 = \frac{f_2 - f}{f}.$$

Kasutades läätse valemit mõlema otsa jaoks:

$$\frac{1}{d_1} + \frac{1}{f_1} = \frac{1}{f} \quad \text{ning} \quad \frac{1}{d_2} + \frac{1}{f_2} = \frac{1}{f}$$

saame avaldada pikkused  $d_1$  ja  $d_2$  pikkuste  $f_1$  ja  $f_2$  kaudu:

$$d_1 = \frac{f_1 f}{f_1 - f}, \quad d_2 = \frac{f_2 f}{f_2 - f}.$$

Asendame saadud väärtsused suurendusteguri  $k$  avaldisse:

$$\begin{aligned} k &= \frac{f_2 - f_1}{f_1 - f} - \frac{f_2 f}{f_2 - f} = \frac{f_2 - f_1}{f} \frac{(f_1 - f)(f_2 - f)}{f_1(f_2 - f) - f_2(f_1 - f)} \\ &= \frac{f_2 - f_1}{f} \frac{(f_1 - f)(f_2 - f)}{f_1 f_2 - f_1 f - f_2 f_1 + f_2 f} = \frac{f_2 - f_1}{f} \frac{(f_1 - f)(f_2 - f)}{f_2 f - f_1 f} \\ &= \frac{f_2 - f_1}{f} \frac{(f_1 - f)(f_2 - f)}{f(f_2 - f_1)} = \frac{(f_1 - f)(f_2 - f)}{f^2}. \end{aligned}$$

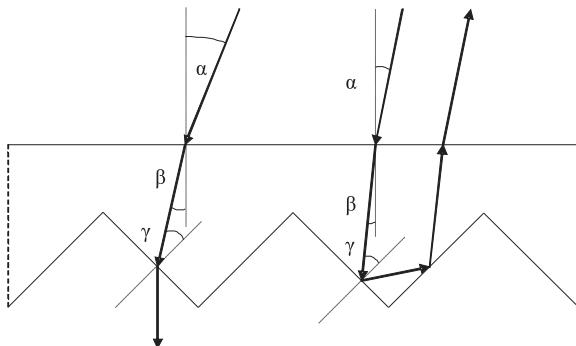
Võrreldes saadud avaldist varem saadud avaldistega  $k_1$  ja  $k_2$  jaoks, on lihtne näha, et

$$k = \frac{f_1 - f}{f} \frac{f_2 - f}{f} = k_1 k_2.$$

*Märkus:* mugavuse kaalutlusel vaatleme joonisel tegelikult vaid poolt pliatsit, aga on ilmne, et lahenduskäik kehtib ka terve pliatsi kohta (joonisel on pliatsi teine pool näidatud punktiirjoonega).

### L383 Hajuti ★★★

Autor: Andreas Valdmann, piirkonnavor, 2010, G 8



Valgus läbib hajuti, kui nurk  $\gamma$  on väiksem täieliku sisepeegeldumise nurgast. Kriitilisel juhul  $\sin(\gamma_{\text{kr}}) = 1/n$ . Kuna  $\beta = 45^\circ - \gamma$ , siis  $\beta_{\text{kr}} = 45^\circ - \arcsin(1/n)$ . Nurkade  $\alpha$  ja  $\beta$  vahel kehtib murdumisseadus  $\sin(\alpha)/\sin(\beta) = n$ . Seega

$$\alpha_{\text{kr}} = \arcsin(n \sin(45^\circ - \arcsin(1/n))).$$

Vastuse saab viia kujule

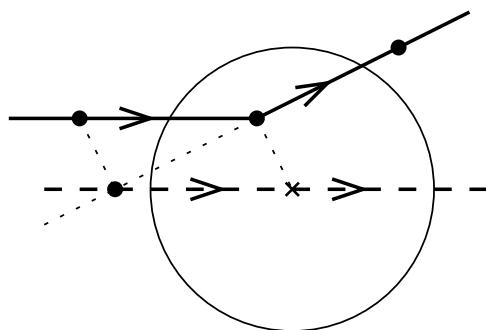
$$\alpha_{\text{kr}} = \arcsin \left[ \frac{\sqrt{2}}{2} (\sqrt{n^2 - 1} - 1) \right] = 4,8^\circ.$$

Kriitilisest väiksema  $\alpha$  korral (vt parempoolsemat kiirt) on tagasi pöörduv kiir paralleeline hajutile langenud kiirega. Kiirte käigu pööramisel selgub, et tulemus ei muudu, kui esimene sisepeegeldus toimub  $45^\circ$ -st kraadist suurema nurga all. Sel juhul toimub nurga  $\gamma$  all teine sisepeegeldus.

**L384 Nõguslääts eestvaates ★★★**

Autor: Siim Ainsaar, piirkonnavaor, 2011, G 10

Kui nõgusläätsle langevad paralleelsed kiired, lõikuvad murdunud kiirte pikendused eesmisel fokaaltasandil. Joonistame antud kiirega paralleelse abikiire (optilise kõrvaltelje, joonisel  $AO$ ), mis läbib läätse optilist keskpunkti. See abikiir ei murdu, seega ühtib oma läätse läbimise järgse osa pikendusega. Tema lõikepunkt eesmisse fokaaltasandiga (punkt  $A$ ) leiame tõigast, et lõik  $AO$  on lõigu  $KL$  parallellüke. Küsitav murdunud kiir asub siis sirgel  $AL$ . Lääts asub täpselt oma fokaaltasandite vahel keskel, seetõttu poolitab punkt  $L$  lõigu  $AB$ , kus  $B$  on küsitav murdunud kiire lõikepunkt tagumise fokaaltasandiga. Järelkult saame punkti  $B$ , kui peegeldame punkti  $A$  punkti  $L$  suhtes ( $|AL| = |LB|$ ).

**L385 Toru ★★★**

Autor: Jaan Kalda, lõppvoor, 2012, G 6

Kõigepealt paneme tähele, et punktallika kujutis tekib läätsest kaugusele

$$l = \left( \frac{1}{36} - \frac{1}{60} \right)^{-1} \text{ mm} = 90 \text{ mm},$$

st ekraanil. Kui peegeldavate silindriliste seinte asemel oleks kaks tasapeeglit, siis tekiks punktallika kujutiste lõpmatu jada (peegeldus, peegelduse peegeldus jne), kus kahe naaberkuutise vahekaugus on võrdne peeglite vahekaugusega 12 mm. Läheme näidul silindrilise juhtumi juurde. Joonise tasandis lebava kiire jaoks on kiirekäik täpselt sama, mis tasapeegli puhul, st joonise tasandis tekivad kujutised samuti perioodilise rivina, kus kujutiste vahekaugus on 12 mm. Joonise tasandit võib pöörata suvaliselt ümber süsteemi sümmeetriatelje; see tähendab, et kujutised on tegelikult „laialt määritud“ mööda kontsentrilisi ringjooni raadiustega  $n \times 12$  mm, kus  $n$  on täisarv. Lääts tekib neist ringidest ekraanile  $\frac{90}{60}$  korda suurendatud kujutise, kus kontsentriliste ringide raadiusteks on  $R = n \times 18$  mm.

**L386 Mikroskoop ★★★★**

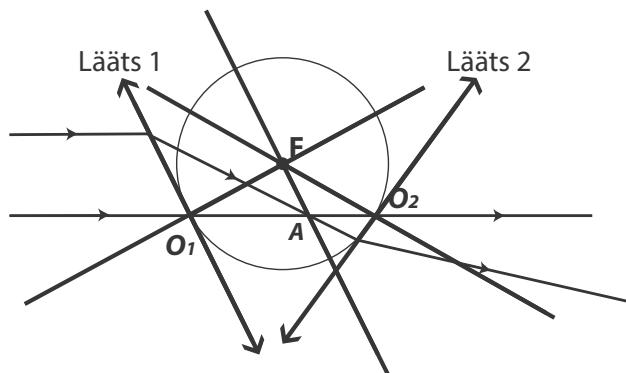
Autor: Valter Kiisk, lõppvoor, 2013, G 7

Esimeses teravustatavas asendis, kus lääts on objektile lähemal kui sensorile (st suurendus  $> 1$ ), olgu läätse kaugus esemest  $a$  ja sensorist  $b$ . Kujutise joonsuurendus on seega  $k = b/a$ . Teises asendis on nimetatud kaugused lihtsalt ümbervahetatud ja suurendus vastavalt  $l = a/b$ . Niisiis  $25 = k/l = b^2/a^2$ .

Analüüsime nüüd esimesele asendile vastavate läätside näitel sensori valgustuse küsimust. Kuivõrd joonsuurendus on  $k$ , siis pindalamuutust iseloomustav tegur on vastavalt  $k^2$ . Lisaks kujutise suurusele mõjutab selle heledust ka valguse hulk, mis päääseb läbi objektiivi. Vaadeldava eseme igast punktist lähtub valgus, mis on enam-vähem ühtlaselt hajutatud üle kõigi suundade, seega läätse läbiva kiirguse hulk on proporsionaalne selle osaga mõttelise sfääri pinnast, mille lõikab välja läätse apertuur:  $\Omega = d^2/a^2$ , kus  $d$  on läätse diameeter. Kokkuvõttes saame, et kujutise heledus on võrdeline suurusega  $\Omega/k^2 = d^2/b^2 \propto b^{-2}$ . Teises asendis, kus lääts on sensorile lähemal, on sama näitaja vastavalt  $a^{-2}$ , seega sel juhul on kujutise heledus suurem  $a^{-2}/b^{-2} = b^2/a^2 = 25$  korda.

**L387 Optiline skeem ★★★★**

Autor: Erkki Tempel, lahtine, 2014, G 7



Algelt paralleelsed kiired koonduvad pärast läätse läbimist fokaaltasandis (punkt A). Kuna alumine kiir ei murdu, peab see läbima läätse keskpunkti. Seega lääts 1 on paralleelne joonistatud fokaaltasandiga (kiir läbib punkte A ja F) ning läbib punkti O<sub>1</sub>. Kuna tegemist on kahe ühesuguse läätsegaga ning nende fookused asuvad punktis F, siis ring raadiusega FO<sub>1</sub> läbib alumist kiirt punktis O<sub>2</sub>, mis on teise läätse keskpunktiiks. Nüüd saame kergesti joonistada ka teise läätse, kuna teame ülemise kiire murdumiskohta ning läätse keskpunkti asukohta.

### L388 Luup ★★★

Autor: Valter Kiisk, lõppvoor, 2016, G 6

Poolkera kumera pinna keskosa võib vaadelda omaette õhukese läätsena, mille fookuskaugus  $f$  ja kaugus paberi pinnast (võrdne kumerpinna raadiusega  $R$ ) määradavad kujutise suurenduse. Selle ekvivalentse läätse fookuskauguse määramiseks vaatleme valguskiirt, mis liigub paralleelselt optilise peateljega ja pärast murdumist koondub fookusesse (vt joonis). Kui valguskiir levib optilise peatelje lähedal, siis kõik murdumisel tekkivad nurgad on väikesed, nii et saame tingimuse

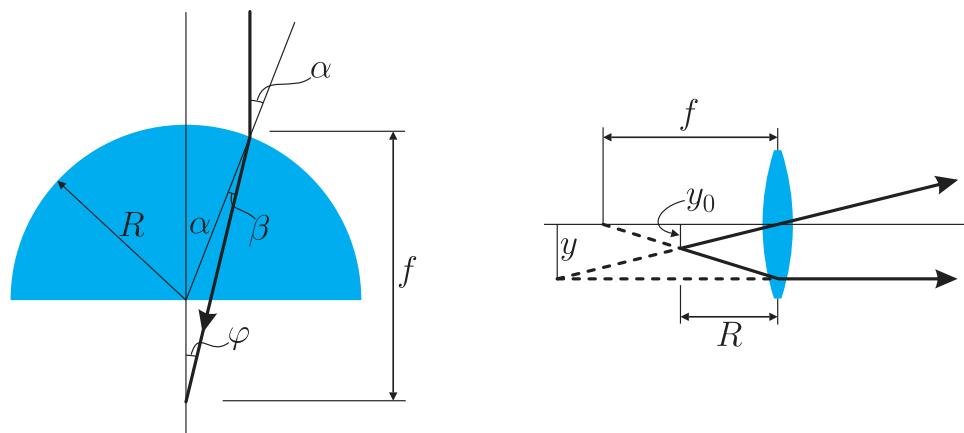
$$\alpha R \approx f\varphi.$$

Ilmselt

$$\varphi = \alpha - \beta = \alpha - \alpha/n = \alpha(1 - 1/n).$$

Nende seoste kombineerimisel nurgad taanduvad välja ja saame  $f = nR/(n - 1)$ . Ilmselt eseme (paberi pinna) kaugus läätsest on  $R$ , kusjuures  $f > R$ , järelikult tekib näiline kujutis kusgil paberi taga. Kõik kaugused on siiski  $R$  suurusjärgus, seega suurelt distantsilt silmaga vaadeldav suurendus (st nurksuurendus) on praktiliselt sama mis joonsuurendus  $y/y_0$ . Kujutise konstrueerimisel tekkivatest sarnastest kolmnurkadest saame

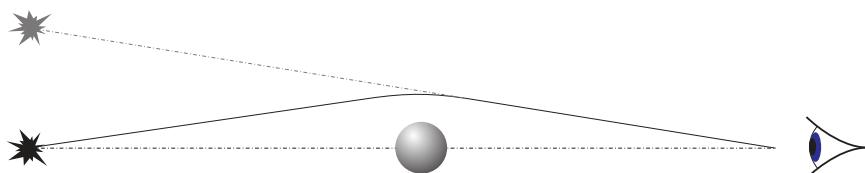
$$\frac{y}{y_0} = \frac{f}{f - R} = n = 1,5.$$



### L389 Gravitatsioonilääts ★★★

Autor: Mihkel Kree, piirkonnavor, 2007, G 10

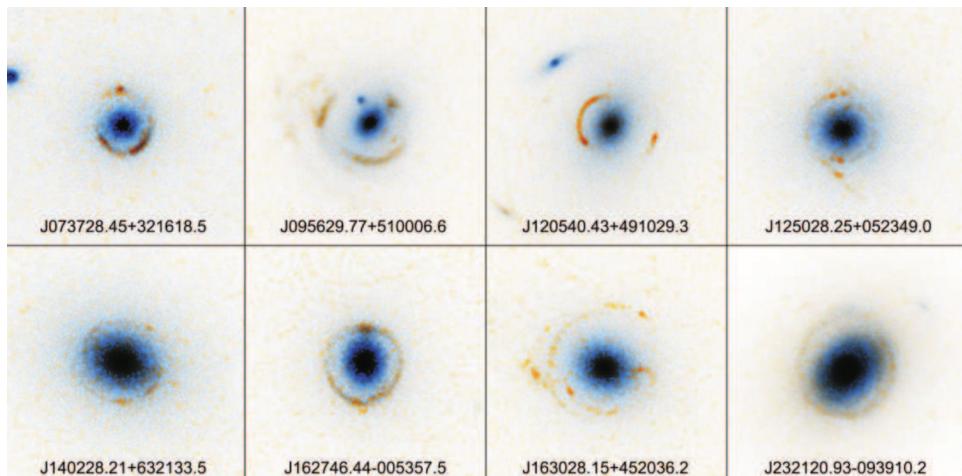
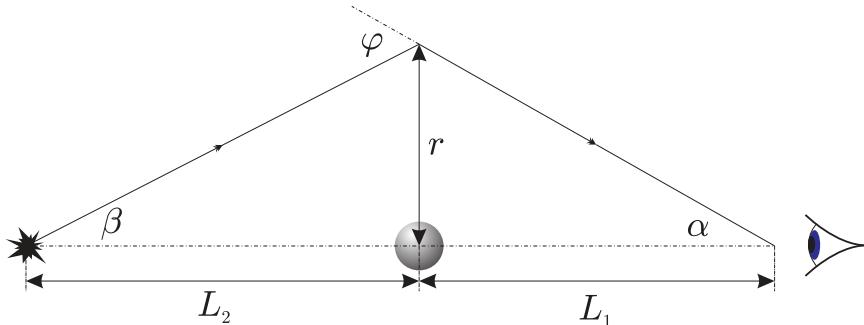
Tähest väljunud kiired köverduvad musta augu lähiümbruses (vt joonist).



Kujutise konstrueerimisel aga eeldatakse, et kiired on kogu tee otse liikunud. Et kiired jõuavad vaatlejani kõikjal ümber musta augu, on kujutiseks ringjoon (eedusel, et täht on punkt).

Et silmani jõudvate kiirte jaoks kehtib  $r \ll L$  ning trajektoori kõverdumine toimub tähe lähiümbruses, võib vaadelda kiire teekonda lihtsustatult: sirge liikumine musta auguni, hetkeline nurga muutus musta augu juures ning edasi sirge tee vaatlejani (vt joonist). Joonisel arusaadavalt on vertikaalskaala võrreldes horisontaalskaalaga oluliselt välja venitatud.

Järgnevalt leiame tähe nurkdiameetri. Lihtsast geomeetriast järeltub, et  $\alpha + \beta = \varphi$ . Kaugused on suured ning nurgad väikesed, seega võime kasutada ligikaudseid valemeid  $\alpha = r/L_1$  ja  $\beta = r/L_2$ . Niisiis



$$\frac{r}{L_1} + \frac{r}{L_2} = \frac{4GM}{c^2 r} \Rightarrow r = \sqrt{\frac{4GML_1 L_2}{c^2 (L_1 + L_2)}}.$$

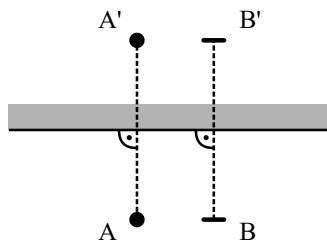
Tähe kujutise nurkdiameeter on

$$\gamma = \frac{2r}{L_1} = \sqrt{\frac{4GML_2}{c^2 L_1 (L_1 + L_2)}}.$$

**L390 Nurgapeegel ★★★**

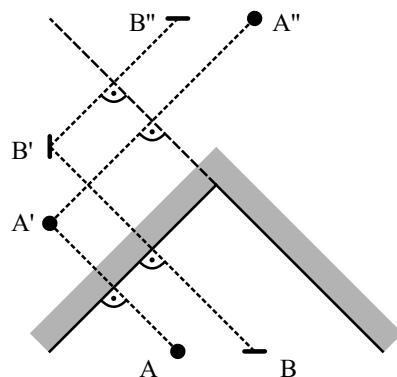
Autor: Andreas Valdmann, lõppvoor, 2016, G 8

Vaatame kõigepealt kujutise tekkimist tasapeeglis. Joonisel 1 on olukord pealtvaates. A on Juku lahtine silm ja A' selle kujutis. Kinnine silm ja selle kujutis on vastavalt B ja B'. Näeme, et parema silma kinnipigistamisel paistab ka peeglis kinnisena vaatleja suhtes parempoolne silm.



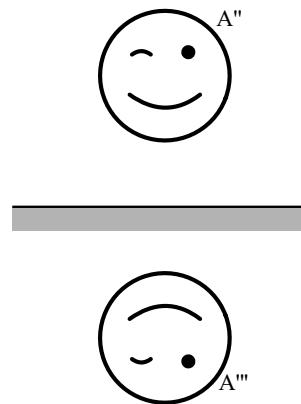
Joonis 4: Kujutis tasapeeglis

Olgu kolmest peeglist üks horisontaalne ja kaks ülejääenut vertikaalsed, kusjuures Juku vaatab otse vertikaalsete peeglite kokkupuutejoone poole. Joonisel 2 on see olukord pealtvaates. Vaatame vertikaalsete peeglite mõju. Esmalt konstrueerime silma A kujutise A' vasakpoolses peeglis. Seejärel konstrueerime kujutise A' kujutise A'' parempoolses peeglis. Toimime samamoodi kujutise B'' konstrueerimisel ja paneme tähele, et seekord on peegelpildil vasak ja parem pool vahetatud ning kinnisena paistab peeglites vasakpoolne silm.



Joonis 5: Kujutis kahes peeglitis

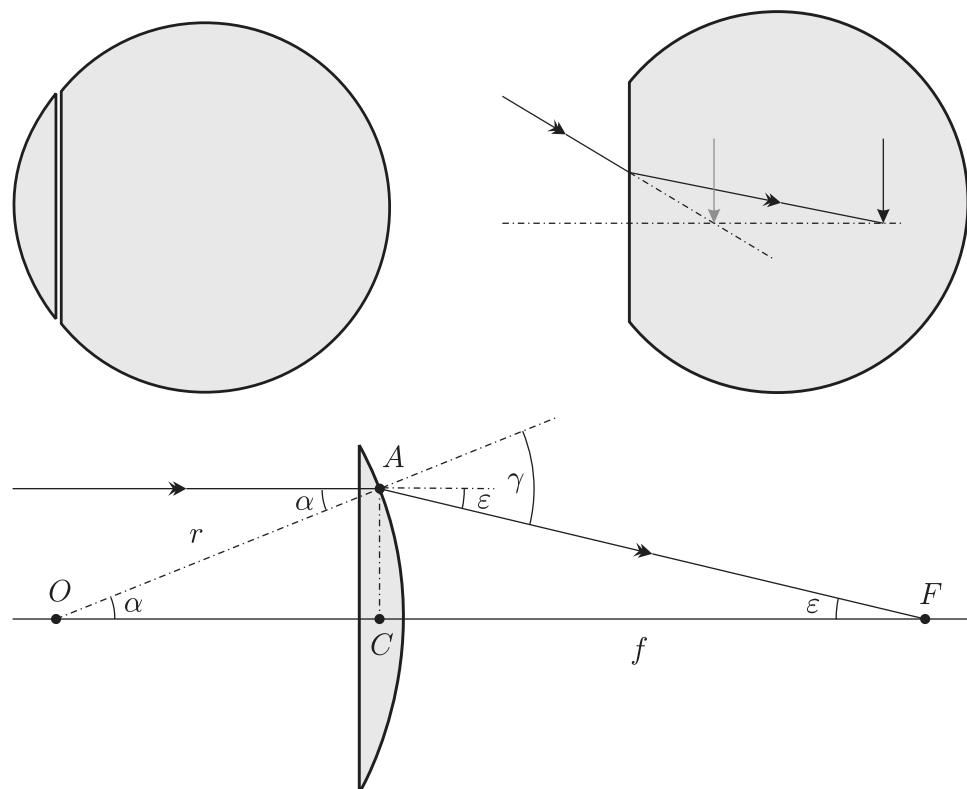
Võtame nüüd arvesse horisontaalse peegli mõju. Joonisel 3 on otsevaates teist jätku kujutis A'' ning selle kujutis A''' horisontaalses peeglisis. Näeme, et horisontaalne peegel pöörab pildi „pea peale“. Seega näeb Juku nurgapeeglisis ennast sellisena, nagu on joonisel 3 kujutis A'''.



Joonis 6: Peegeldumine horisontaalselt peeglilt

**L391 Akvaarium ★★★★**

Autor: tundmatu, lahtine, 2005, G 10



Vaatleme sfäärilist akvaariumi kui õhukest tasakumerat läätse, mis on surutud tasase küljega vastu sirgeseinalist akvaariumi (vt jooniseid). Kasutades väikeste

nurkade lähendust, on lihtne leida sellise õhukese läätse fookuskauguse  $f$  ( $f = |CF|$ ):

$$\gamma = \alpha n, \quad \varepsilon f = (\gamma - \alpha)f = \alpha r \quad \Rightarrow \quad f = \frac{r}{n-1}.$$

Vee puhul

$$f = \frac{r}{1,3-1} \approx 3,3r.$$

Läätses näeme kala kujutist, mis tekib murdumisel akvaariumivees. See kujutis on  $n$  korda lähemal akvaariumi seinale kui kala ise, st maksimaalne kaugus on

$$l_{\max} = \frac{2r}{n} \approx 1,5r,$$

mis on igal juhul väiksem kui läätse fookuskaugus. Lääts tekitab sellest kujutisest omakorda kujutise, mille kauguse (läättest)  $x$  saame läätse valemist

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{l} - \frac{1}{x}.$$

On lihtne näha, et suurendus on kahe kujutise kauguste suhe:

$$\frac{1}{k} = \frac{l}{x} = 1 - \frac{l}{f},$$

seega suurendus on maksimaalne, kui  $l$  on maksimaalne:

$$\frac{1}{k_{\max}} = 1 - \frac{2(n-1)}{n} = \frac{2-n}{n} \quad \Rightarrow \quad k_{\max} = \frac{n}{2-n} \approx 1,86.$$

### L392 Kuup ★★★★

Autor: Jaan Kalda, lõppvoor, 2007, G 8

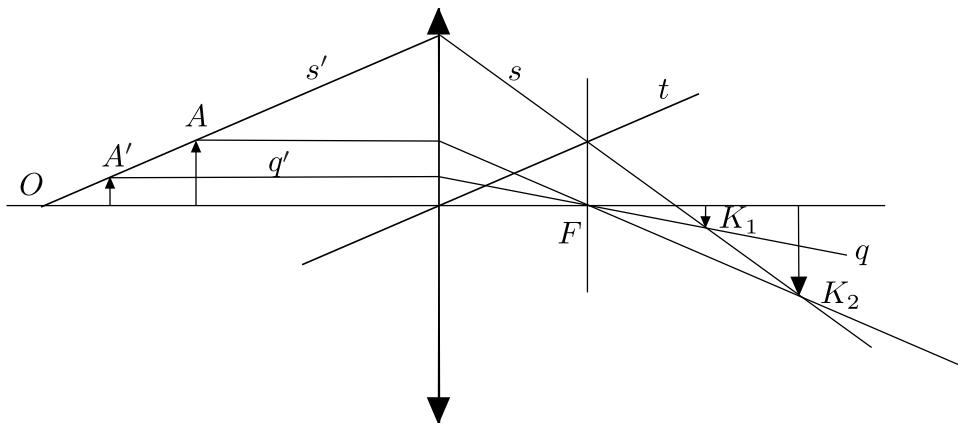
Välimine ringjoon on loomulikult kera välimine kontuur, tema raadius  $R_A$  on võrdne kera raadiusega foto mastaabris. Kerast eemal, piirkonnas  $D$ , näeb läbi kuubi põrandat, st piirkond  $D$  on valge. Piirkonnas  $A$  toimub täielik sisepeegeldumine kera pinnal, seega näeme me seal peegeldust, mis on samuti valge. Mõõtmise teel võib veenduda, et piirkondade  $A$  ja  $B$  eraldusjoone raadius  $R_B$  on umbes  $\sqrt{2}$  korda väiksem  $R_A$ -st, st tegemist on põrandata ja seinte eraldusjoone peegeldusega. Sestap on piirkond  $B$  kollane. Piirkondade  $B$  ja  $C$  eraldusjoon peab vastama täieliku sisepeegeldumise lõppemisele, st piirkonnas  $C$  on näha kera sisemust, mis on sinine valge põrandata taustal. Niisiis on piirkond  $C$  sinine. On lihtne näha, et täieliku sisepeegeldumise piirjuhul langemisnurga siinus on  $\sin \alpha = R_C/R_A = 1/n$ . Seega murdumisnäitaja  $n = R_A/R_C \approx 1,8$ .

**L393 Nõguspeegel ★★★★**

Autor: Mihkel Kree, lõppvoor, 2007, G 9

Paneme tähele, et köverustsenter  $O$ , objekt  $A$  ning kujutis  $A'$  kumerpeeglil asuvad samal sirgel. Seega, kui meil önnestub leida sirge  $AA'$ , siis selle lõikepunkt optilise teljega annaks punkti  $O$ . Teisest küljest, kiir, mis läbib punkti  $A$  kujutist läätses,  $K_2$ , ja punkti  $A'$  kujutist,  $K_1$ , jätkub peale murdumist läätses sirgena  $s'$  ja läbib nii punkti  $A$  kui  $A'$ . Tänu sellele leiamegi sirge  $AA'$  ja punkti  $O$ .

Punkti  $A'$  leidmiseks konstrueerime esmalt fokaaltasandi  $F$ . Selleks leiame fokaaltasandis lebava punkti — sirge  $s$  lõikepunkt sirgega  $t$ , mis on paralleelne sirgega  $s'$  ja läbib läätse keskpunkti. Kujutisi  $K_1$  ja  $K_2$  ühendav sirge murdub nii, et selle pikenduse lõikepunkt optilise peateljega ongi otsitav köverustsenter. Punkti  $A'$  leiame kui sirge  $s'$  lõikepunkt sirgega  $q'$ , mis peale murdumist läbib fookuse ja punkti  $K_1$  (sest  $K_1$  on  $A'$  kujutiseks).



**L394 Kärbes ★★★★**

Autor: Aigar Vaigu, piirkonna voor, 2008, G 10

Olgu  $O$  pinna köverusraadiuse keskpunkt ning  $K$  ja  $A$  vastavalt kärbse näiline ja tegelik asukoht. Allpool toodud joonis kujutab kärbsest alguse saanud kahe kiire  $AB$  ja  $AC$  edasist käiku. Kärbse näiline asukoht  $K$  vastab kärbsest alguse saanud murdunud kiire pikenduste lõikepunktile (joonisel  $KB$  ja  $KC$ ).

Arvestades väikeste nurkade korral kehtivat lähendust  $\tan \alpha \approx \sin \alpha \approx \alpha$ , võime murdumisseaduse kirjutada kujul:

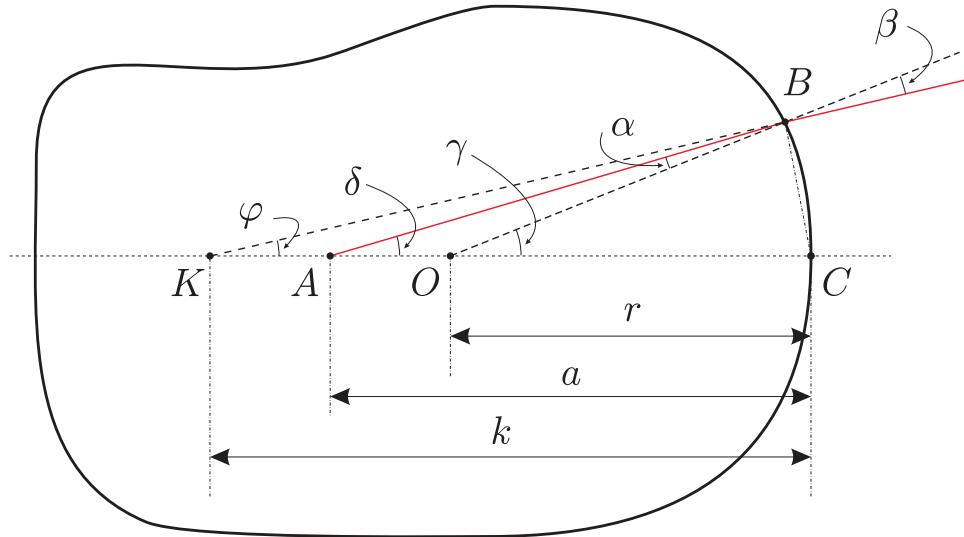
$$\frac{\sin \beta}{\sin \alpha} = n \approx \frac{\beta}{\alpha}$$

Kolmnurkade  $\triangle OCB$ ,  $\triangle ACB$  ja  $\triangle KCB$  kaudu avaldame kaare  $\widehat{BC}$

$$\gamma r = \delta a = \varphi k = \widehat{BC}.$$

Kolmnurkade  $\triangle CAB$  ja  $\triangle AOB$  kaudu avaldame nurga  $\angle BOC$

$$\alpha + \delta = \gamma \quad \text{ja} \quad \beta + \varphi = \gamma.$$



Saame

$$\begin{aligned} (\gamma - \alpha)a &= \gamma r \Rightarrow \gamma(a - r) = \alpha a \\ (\gamma - \beta)k &= \gamma r \Rightarrow \gamma(k - r) = \beta k. \end{aligned}$$

Paneme tähele, et need kaks võrrandit oleks saanud otse siinusteoreemist kolmnurkade  $\triangle AOB$  ja  $\triangle KOB$  arvestusega, et tänu nurkade  $\varphi$ ,  $\delta$  ja  $\gamma$  väiksusele  $|KB| \approx k$  ja  $|AB| \approx a$ .

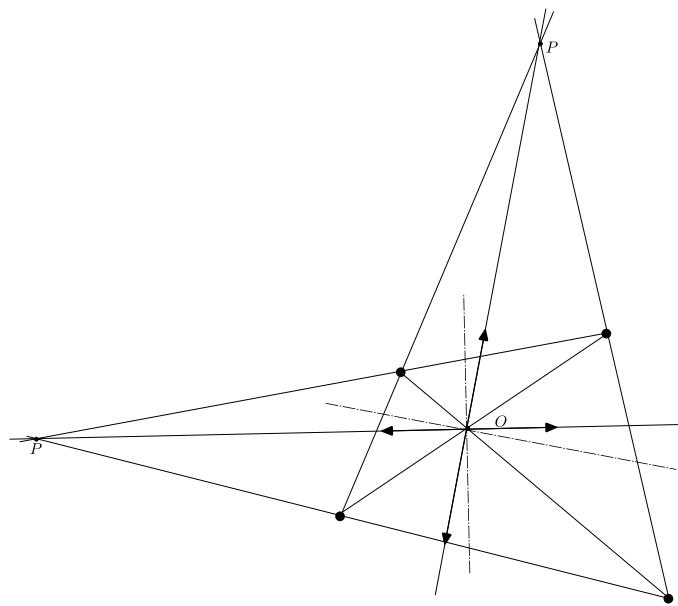
Arvestades, et  $\beta/\alpha \approx n$ , saame

$$\frac{a - r}{k - r} = \frac{a}{nk} \Rightarrow a = \frac{n rk}{nk - k + r} = \frac{1,6 \cdot 3 \cdot 5}{1,6 \cdot 5 - 5 + 3} = 4 \text{ mm.}$$

### L395 Punktallikad ★★★★

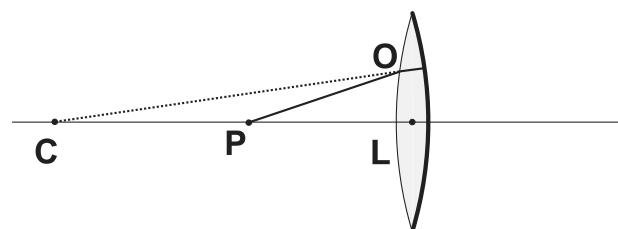
Autor: Jaan Kalda, lõppvoor, 2010, G 9

Allikat ja kujutist ühendav sirge läheb läbi läätse keskpunkti ning see punkt peab jäama allika ja kujutise vahele, sest kujutis on töeline. Seetõttu saame läätse keskpunkti  $O$  leida kui lõikude  $S_1S'_1$  ning  $S_2S'_2$  lõikepunkt, kus  $S_1$  ja  $S_2$  on allikad ning  $S'_1$  ja  $S'_2$  on vastavad kujutised. Et lõikepunkt tekiks, peavad  $S_1$  ja  $S'_1$  paiknema diagonaalselt. Edasi paneme tähele, et sirge kujutis on sirge, kusjuures need kaks sirget lõikuvad läätse tasandis. Et sirge  $S_1S_2$  kujutis on  $S'_1S'_2$ , siis nende lõikepunkt  $P$  võimaldab meil leida juba läätse tasandi  $OP$ ; optiline peatelg on punktist  $O$  tämmatud ristsirge. Läätses tasandi seisukohast pole oluline, kumb sirgetest ( $S_1S_2$  või  $S'_1S'_2$ ) on kujutis ja kumb originaal. Seetõttu tekib meil kaks oluliselt erinevat võimalust: kas need kaks sirget paiknevad ligikaudu horisontaalselt või ligikaudu vertikaalselt, vt joonist.

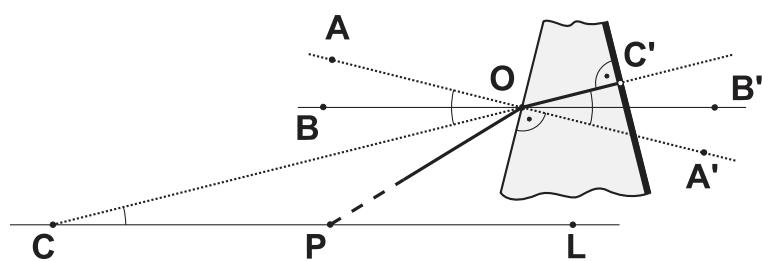


### L396 Optiline süsteem ★★★★

Autor: Andreas Valdmann, lõppvoor, 2011, G 8



Iga süsteemile langev valguskiir murdub läätse eesmisel pinnal, peegeldub tagumisel pinnal ja murdub uuesti. Lahenduse lihtsustamiseks vaatleme olukorda, kus kiire käik on sümmeetriseline. Sel juhul langeb murdunud kiir peegelpinnale risti, peegeldub otse tagasi ja teine murdumine on esimesega identne. Süsteemi sisenev ja seal väljuv kiir lõikavad optilist peatlege ühes ja samas punktis  $P$ . Seal asuva punktobjekti kujutis langeb kokku objekti endaga.



Võtame vaatluse alla teljelähedase kiire  $PO$ , mille korral võime nurga  $\angle LPO$  lugeda väikeseks. Lõik  $OC'$  on optilise peateljega veelgi väiksema nurga all ja punktide  $O$  ning  $C'$  kaugus optilisest peateljest on ligikaudu võrdne. Uurime lähemalt läätse õhukest kihti, mille körgus on palju väiksem kõverusraadiusest  $r$ . Sel juhul võime kõverpinnad asendada nende pootujatega. Pindade ristsirged on joonisel tähistatud punktiirjoonega ning need lõikavad optilist peatelge läätse kõverustsentrites. Optiline kõrvaltelg  $BB'$  on paralleelne optilise peateljega ning

$$\angle LCO = \angle B'OC' = \angle A'OB' = \angle BOC = \angle AOB \equiv \phi$$

ja murdumisnurk  $\angle A'OC' = 2\phi$ . Langemisnurgaks on  $\angle AOP$ . Murdumisseaduse rakendamisel kasutame väikese nurga lähendust

$$\frac{\sin(\angle AOP)}{\sin(\angle A'OC')} = n \approx \frac{\angle AOP}{\angle A'OC'},$$

millega

$$\angle AOP = n\angle A'OC' = 2n\phi.$$

Järgmisteks arvutusteks on vaja teada nurka

$$\angle LPO = \angle BOP = \angle AOP - \angle AOB = 2n\phi - \phi = (2n - 1)\phi.$$

Kuna lääts on õhuke ja punkt  $O$  ei ole kaugel optilisest peateljest, siis  $|CO| \approx |CL|$  ja  $|PO| \approx |PL|$  ning  $|CL| = r - \frac{d}{2} \approx r$ , kus  $d$  on läätse paksus keskkohas. Jällegi väikese nurga lähendust kasutades saame

$$|LO| = \angle LCO|CL| = \angle LPO|PL|,$$

millega

$$|PL| = \frac{\angle LCO}{\angle LPO}|CL| = \frac{\phi}{(2n - 1)\phi}r = \frac{r}{2n - 1}.$$

Viimaseks rakendame läätse valemit

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{k} = \frac{1}{f}$$

ja seost

$$|PL| = a = k = \frac{r}{2n - 1}$$

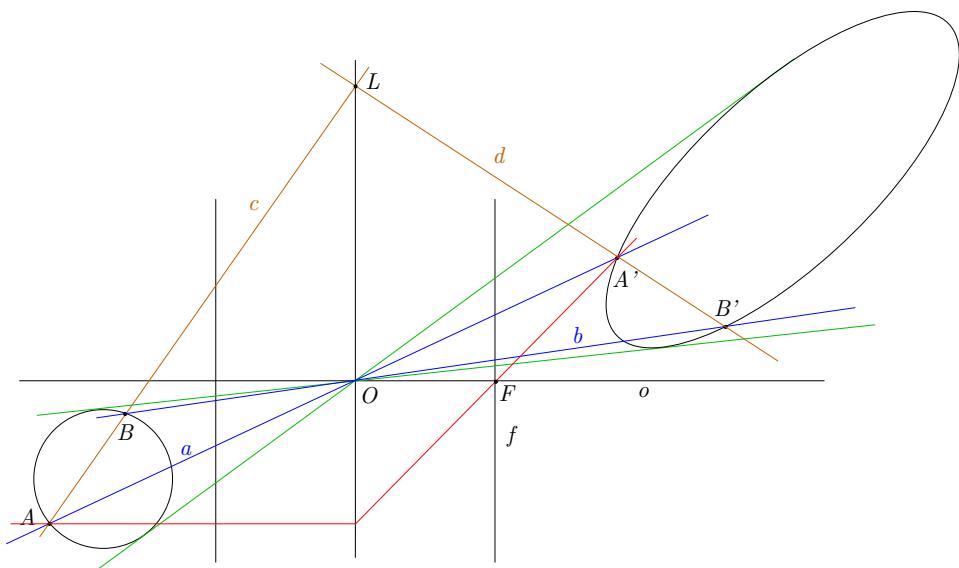
ning saame, et

$$f = \frac{|PL|}{2} = \frac{r}{2(2n - 1)}.$$

## L397 Ring ja ellips ★★★★

Autor: Jaan Kalda, lõppvoor, 2015, G 7

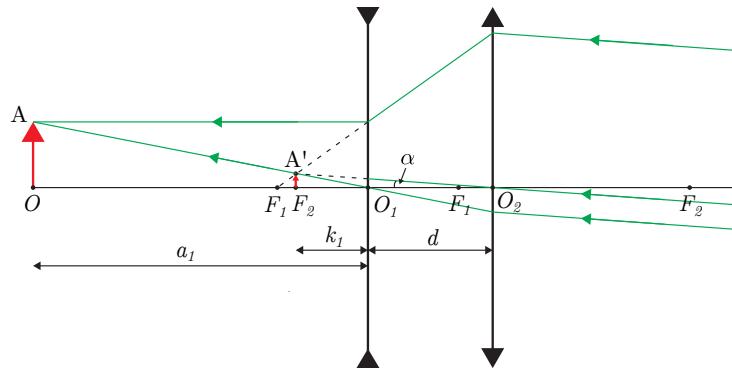
Läätse keskpunkt  $O$  on ringile ja ellipsile tõmmatud puutujate lõikepunkt, kuna puutepunktid peavad olema originaalkujutise paarid ning neid ühendavad sirged peavad läbima läätse keskpunkti. Läätse tasandi leidmiseks valime ringil kaks punkti,  $A$  ja  $B$ , ning leiame nende kujutised ellipsil  $A'$  ja  $B'$  sirgete  $AO$  ja  $BO$  ning ellipsi lõikepunktidega. Kui originaal on ringi kahest lõikepunktist see, mis asub läätsest kaugemal, siis selle kujutis on see, mis on läätsele lähemal (ja vastupidi), sest tõeline kujutis on pööratud tagurpidi. Kiir  $AB$  peab murduma läätes kiireks  $A'B'$ , murdepunkt annab meile punkti  $L$  läätsel ning sirge  $OL$  on läätse tasandiks. Optilise peatelje  $o$  leiame sirgele  $OL$  punktist  $O$  tõmmatud ristsirgema. Fookuse leidmiseks tömbame punktist  $A$  kiire, mis on paralleelne  $o$ -ga ja murdub läätsel punkti  $A'$  läbivaks kiireks, mille lõikepunkt  $o$ -ga annab fookuse  $F$ .



**L398 Kaamera ★★★★**

Autor: Ardi Loot, lõppvoor, 2017, G 8

On selge, et kuna virmalised asuvad kaugel, peab terava kujutise tekkimiseks olema valgustundlik element esialgse läätse fookuses, st kaugusel  $f = 14\text{ cm}$ . Kuna läätse keskpunkti läbiv kiir suunda ei muuda, saame esialgseks vaatenurgaks  $2\alpha = 2 \arctan(h/f)$ .



Joonisel on kujutatud kompaktse kaamera skeem. Vaatleme lihtsuse huvides olukorda tagurpidi, vaadeldav objekt asub fototundliku elemendi asemel ning kujutis konstrueeritakse lõpmatuses (kiirte pööratavuse printsip). Nõguslääts, mis on paigutatud kaugusele  $d$  kumerläättest, tekitab objektist  $A$  näiva kujutise  $A'$ . Seda näivat kujutist vaadeldakse kumerläätsega, mis konstrueerib sellest kujutise lõpmatuses. Kirja saab panna järgnevad võrrandid:

$$\frac{1}{k_1} - \frac{1}{a_1} = \frac{1}{f_1}, \quad (1)$$

$$k_1 + d = f_2, \quad (2)$$

$$a_1 + d = L_m. \quad (3)$$

Neist esimene määrab nõgusa läätse poolt näiva kujutise asukoha. Teine võrrand garantteerib, et kumerlääts konstrueerib sellest kujutise lõpmatuses. Kolmas võrrand tagab, et kogu süsteem oleks kompaktne. Lisaks eeltoodud võrranditele on vaja säilitada ka esialgse kaamera vaatenurk. Selleks märkame, et joonisel toodud nurk  $\angle A' O_2 F_2 = \alpha$ . Seetõttu saame kirja panna:

$$\frac{h'}{f_2} = \frac{h}{f}, \quad (4)$$

kus  $h'$  tähistab kujutise  $A'$  kõrgust, mille saame leida kolmnurkade  $OA_1O_1$  ja  $F_2A'O_1$  sarnasusest

$$h' = h \frac{k_1}{a_1}. \quad (5)$$

Lahendades võrranditest (1) - (5) tekkinud süsteemi, saame

$$f_1 = \frac{f_2 f (L_m - f_2)}{(f - f_2)^2} \approx 1,39 \text{ cm},$$

$$d = \frac{f_2(f - L_m)}{f - f_2} \approx 1,91 \text{ cm}.$$

### L399 Sähvatus ★★★★

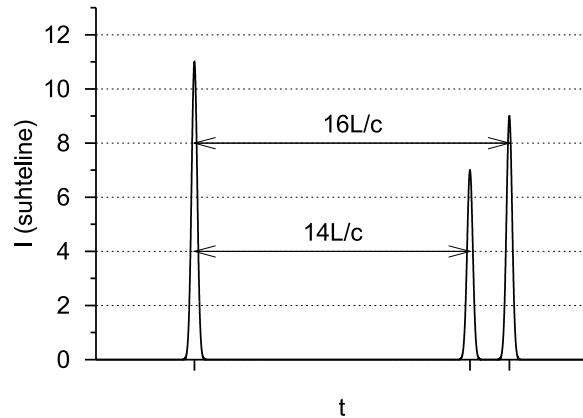
Autor: Mihkel Kree, lõppvoor, 2006, G 9

Alustuseks paneme tähele suurepärast seost arvandmetes. Nimelt ühtivad peeglite fookused, sest peeglite vahemaa on võrdne peeglite fookuskauguste summaga. Nõguspeegli fookuskaugus on teatavasti pool raadiusest. Paralleelne kiirtekimp koondub peegli fookuses. Seepärast jääb paralleelne kiirtekimp antud süsteemis pärast kahekordset peegeldumist ikkagi paralleelseks. Kuid paneme tähele, et kire laius väheneb kaks korda, sest ühe läätse fookuskaugus on kaks korda suurem teise omast.

Valguskiir jääb niisiis peeglite vahel pendeldama seniks, kuni tema kaugus teljest on väiksem kui  $d_0/2 = 0,5 \text{ mm}$ , kusjuures esialgne kauguste vahemik, mis jõuab peegliteni, on  $d_2/2 = 48 \text{ mm}$  kuni  $d_1/2 = 80 \text{ mm}$ , ehk pilu läbimiseks peab valgusvihk koonduma  $d_2/d_0 = 96$  kuni  $d_1/d_0 = 160$  korda. Pärast  $n$ -kordset edasi-tagasi peegeldumist väheneb kiire kaugus teljest  $2^n$  korda. Paneme tähele, et 128 on kahe aste ( $2^7 = 128$ ). Seepärast väljub peeglige langenud kiir pilust kahes järgus: esimehe osa pärast seitsmendat edasi-tagasi liikumist ning teine osa pärast kaheksandat. Üks edasi-tagasi liikumine peeglite vahel tekib ajalise viivise  $2L/c$ .

Kumerläätsele langev paralleelne kiirtekimp koondub fookuses, kusjuures fookuseni jõudmise aeg ei sõltu kiire asukohast (teljelähedased kiired läbivad paksema klaasikihi kui kaugemad kiired, klaasi läbib valgus aga aeglasmalt). Niisiis on fookuses oodata kolme impulssi: peegli ümbert tulnud osa, pärast seitset edasi-tagasi peegeldumist tulnud osa ning pärast kaheksat. Nende impulsside ajaline vahe on vastavalt  $14L/c$  ja  $2L/c$ .

Nüüd tuleb veel leida impulsside suhtelised intensiivsused, mis on võrdsed vastavate röngaste pindaladega esialgse kiire ristlõikes. Esimese peegli läbimõõdust väiksem osa ei läbige süsteemi. Köige välimise rönga pindala on võrdeline arvuga  $192^2 - 160^2$ , järgmiselle impulsile vastav rönga pindala  $128^2 - 96^2$  ning viimasele impulsile vastava rönga korral  $160^2 - 128^2$ . Need arvud suhtuvad kui:  $32^2(6^2 - 5^2) : 32^2(4^2 - 3^2) : 32^2(5^2 - 4^2) = 11 : 7 : 9$ .



#### L400 Klaassilinder ★★★★

Autor: Jaan Kalda, lõppvoor, 2014, G 10

Tähistame märgitud punkti  $A$ -ga ning murdugu sealt lähtunud kiir punktis  $B$  nii, et suundub eemale läbi punkti  $C$  (vt joonist). Sihi  $BC$  suunast kaugelt vaadatuna näeme tumeda punkti asukohana punkti  $B$ . Uurime, kuidas sõltub kiire  $BC$  levikusuund, mida kirjeldame  $AO$  ja  $BC$  vahelise nurga  $2\alpha - \beta$  abil, kiire algsest levikusuunast  $\alpha$ :

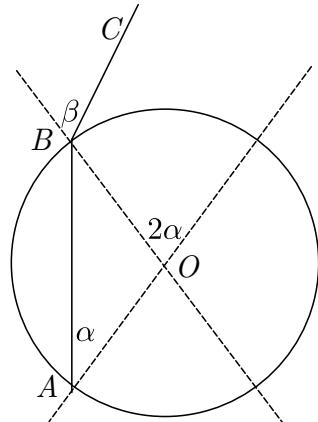
$$2\alpha - \beta = 2\alpha - \arcsin(n \sin \alpha).$$

Silindri algasendi korral  $2\alpha - \arcsin(n \sin \alpha) = 0$ , mille üks lahend  $\alpha = 0$  annab keskmise näiva punkti ning kaks külgmisi tumedat punkti vastavat võrrandi  $\sin(2\alpha) = n \sin \alpha$  ülejäänu lahenditele vahemikus  $-45^\circ < \alpha < 45^\circ$ . Kui pöörata nüüd silindrit nurga  $\delta$  võrra, siis vastavad näivid punktid võrrandi

$$2\alpha - \arcsin(n \sin \alpha) = \delta$$

lahenditele. Võrrandi vasakul pool on funktsioon, mis väikeste nurkade puhul käitub kui  $(2 - n)\alpha$ ; suuremate nurkade puhul teise liidetava suhteline möju kasvab. Seega juhul  $2 > n$ , on tegemist väikese nurkade puhul kasvava funktsiooniga, mis läheb suuremate nurkade puhul üle kahanevaks; juhul  $2 < n$  on see aga monotoonselt kahanev funktsioon. Kuivõrd  $\delta = 0$  puhul on kolm lahendit, siis peab olema tegemist esimese juhtumiga,  $2 > n$ . Nende pöördenurkade  $\delta$  puhul, mis on suuremad selle funktsiooni lokaalsest maksimumist, on võrrandil vaid üks lahend. Funktsioon saavutab globaalse maksimumi täieliku sisepeegelduse piirjuhul

$$n \sin \alpha = -1,$$



mis annab pöördenurga

$$90^\circ - 2 \arcsin \frac{1}{n} = 15^\circ \Rightarrow n = 1 / \sin 37,5^\circ = 1,64.$$

#### L401 Kontraktsioon ★

Autor: EFO žürii, piirkonnavor, 2018, G 1

Tähistame võetud vee massi  $m_v$  ning piirituse massi  $m_p$ . Teades, piirituse massiprotsenti  $p = 44,1\%$ , saame leida vee ja piirituse masside suhte.

$$\frac{m_p}{m_p + m_v} = 0,441 \quad \Rightarrow \quad m_p = 0,789m_v.$$

Teades lahuse kontraktsiooni  $\gamma = 6\%$ , saame kirjutada seose

$$(V_v + V_p)0,94 = V.$$

Avaldades vee ja piirituse ruumalad massi ja tiheduse kaudu, saame

$$\frac{m_v}{\rho_v} + \frac{m_p}{\rho_p} = 1,064V.$$

Masside suhtest saime, et  $m_p = 0,789m_v$ . Asendades selle eelmisesse võrrandisse, saame leida vee ja piirituse massid.

$$\frac{m_v}{1 \text{ kg/dm}^3} + \frac{0,789m_v}{0,79 \text{ kg/dm}^3} = 1,064 \cdot 1 \text{ dm}^3 \quad \Rightarrow \quad m_v = 532 \text{ g},$$

$$m_p = 0,789m_v = 420 \text{ g}.$$

Vee ja piirituse ruumalad on seega

$$V_v = \frac{m_v}{\rho_v} = 532 \text{ cm}^3,$$

$$V_p = \frac{m_p}{\rho_p} = 532 \text{ cm}^3.$$

#### L402 Tunnel ★

Autor: Jaan Kalda, lahtine, 2008, G 3

Loeme õhu kokkusurumatuks. Sellisel juhul rongi ja tunneli seina vahele juurde voolanud õhu ruumala võrdub rongi eest välja surutud õhu ruumalaga:

$$(b^2 - a^2) u' = a^2 v,$$

kus  $u'$  on õhu kiirus tunneli suhtes. Seega otsitav kiirus on

$$u = v + u' = v \left( 1 + \frac{a^2}{b^2 - a^2} \right) = \frac{vb^2}{b^2 - a^2} = 90 \text{ km/h}.$$

Tegelikult on kiirus veidi väiksem, sest rongi ees surutakse õhk mingil määral kokku ja rongi ees ning taga tekib teatud õhuvool.

**L403 Mobiililaadija ★★**

Autor: Mihkel Kree, piirkonnavor, 2014, G 4

Leiame ühel sammul saadava energia, arvestades et kannale toetub jõud  $F = mg$ . Vajudes kõrguse  $h$  vörora, tehakse tööd  $A_1 = mgh$ , milles tõestatakse saadav elektrienergia on  $W_1 = \eta A_1$ . Aku täislaadimiseks vajaliku energia leiame keskmise võimsuse  $P = UI_k$  ja aja  $T$  korrustisena  $W = UI_k T$ , mille kogumiseks vajalik sammude arv on

$$N = \frac{W}{W_1} = \frac{3.7 \cdot 0.13 \cdot 10 \cdot 3600}{0.2 \cdot 60 \cdot 9.8 \cdot 0.005} \approx 29400.$$

Laadimiseks vajaliku jalutuskäigu pikkuseks saame

$$s = Nd = 44 \text{ km}.$$

**L404 Laser ★★**

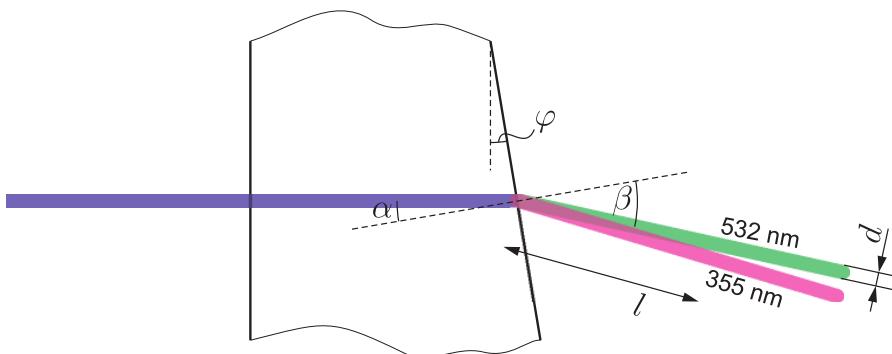
Autor: Valter Kiisk, lõppvoor, 2017, G 3

Eri värv komponendid on täielikult eraldunud juhul, kui plaadist väljuvate laserkiirte tsentrite vaheline kaugus distantsil  $l$  saab võrdseks kiire diameetriga (vt joonis). Vastavalt ülesande andmetele on kõik nurgad väikesed, nii et murdumisseaduses  $n_\alpha \sin \alpha = n_\beta \sin \beta$  võib võtta  $\sin \alpha \approx \alpha$  ja  $\sin \beta \approx \beta$  (kus  $\alpha$  ja  $\beta$  mõõdetakse radiaanides). Järelikult seos nurkade vahel muutub lineaarselt:  $n_\alpha \alpha \approx n_\beta \beta$ . Tänu sellele ei oleks ka lõppvastuse leidmise seisukohalt oluline valguse täpne langemisnurk klaasplaadile (tingimusel, et see nurk on  $\ll 1$ ). Antud ülesande juhul langeb valgus esimesele pinnale risti. Sel juhul langemisnurk teisele pinnale ( $\alpha$ ) on võrdne nurgaga  $\varphi$  ja murdumisnurk vastavalt  $\beta = n\alpha = n\varphi$ , kus  $n$  on klaasi murdumisnäitaja. Komponentide suundade erinevus on vastavalt  $\Delta\beta = \Delta n\varphi = (n_1 - n_2)\varphi$ . Kuna nurk  $\Delta\beta$  on väike, siis kiirte tsentrite vaheline kaugus on  $\Delta\beta l$ , kui nad on kaugusel  $l$  plaadi teisest pinnast. Et nad oleks täielikult eraldunud, peab kehtima

$$l\Delta\beta = l(n_1 - n_2)\varphi = d,$$

kust saame

$$l = \frac{d}{(n_1 - n_2)\varphi} = 1,4 \text{ m}.$$



**L405 Kaubaauto ★★**

Autor: tundmatu, lahtine, 2004, G 4

Tähistame  $L = 36$  mm. Aeg, mille jooksul katik läbib kujutise pikkuse on ligikaudu  $t = dt_k/L$ . Auto kujutis negatiivil liigub kiirusega  $(d/l)v$ . Aja  $t$  jooksul jõuab kujutis edasi nihkuda

$$\Delta d = \frac{d}{l}vt = \frac{d^2vt_k}{lL} \approx 2,4 \text{ mm}$$

võrra. Liikuva auto kujutis on  $\Delta d$  võrra lühem või pikem sõltuvalt katiku liikumise suunast. Filmi iga punkti valgustatakse  $t_s$  jooksul, seega kujutise teravus on

$$\delta_0 = \frac{d}{l}vt_s = 0,054 \text{ mm.}$$

Negatiivi võib suurendada  $\delta/\delta_0 = 1,8$  korda.

**L406 Kuu ★★**

Autor: Urmo Visk, lõppvoor, 2006, G 5

Olgu valgustatus (valgusvoog pinnaühiku kohta) päeval  $I_1$  ja öösel  $I_2$ . Kuna säriaeg ja valgustatus on pöördvõrdelised, siis kehtib seos

$$t_1/t_2 = I_2/I_1.$$

Öösel valgustab Maad Kuult peegeldunud valgus. Kuna eeldati, et Kuu ja Maa on Päikesest võrdsel kaugusel, siis on valgustatus Kuul ka  $I_1$ . Kui Kuu pind oleks Maad ja Kuud (ning ühtlas Päikest) ühendava teljega risti, siis oleks Kuu poolt tagasi (Maa pool) suunatud valgusvoo tihedus  $I_k = kI_1$ , kus  $k$  on Kuu pinna keskmise peegeldustegur (albedo). Kuu näiv keskpunkt seda ka on, aga servad mitte. Ometigi, visuaalne kogemus ütleb, et Kuu ketas näib kõikjal enam-vähem ühe heledune. Hinnanguliselt asendagem mötteliselt Kuu „pannkoogiga“, st kettaga, mille raadius on võrdne Kuu raadiusega.

Kuu pinnalt peegeldub Päikeselt sumaarde valgusvoog  $E = I_1\pi r^2 k$  ning see jaotub ühtlaselt möttelise poolsfääri peale, mille keskpunktis asub Kuu ja pinna peal Maa. Seega jõuab Maale valgusvoog

$$I_2 = \frac{E}{2\pi R^2} = I_1 \frac{r^2 k}{2R^2}.$$

Seega

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{t_1}{t_2} = \frac{r^2 k}{2R^2},$$

ehk

$$k = \frac{t_1}{t_2} \frac{2R^2}{r^2} \approx 8 \text{ %.}$$

**L407 Pindpinevus ★★**

Autor: Koit Timpmann, lahtine, 2011, G 2

Vaatleme jõudude tasakaalu kummaski torus: reservuaari veetasemest ülespoole jäava vee kaalu  $\rho ghS$  tasakaalustab kapillaarjõud  $\sigma p \cos \alpha$ , kus  $p$  on vee ja klaasi kontaktjoone kogupikkus,  $h$  – veetaseme kõrgus kapillaaris,  $S$  – toru ristlõikepindala ja  $\alpha$  – nurk veepinna puutuja ja klaasi pinna vahel, mis sõltub märgamise määrist, kuid on mõlema toru jaoks sama (öigeks loetakse ka lahendused, kus eeldades täielikku märgamist jäetakse tegur  $\cos \alpha$  ära). Niisiis  $h = \sigma p \cos \alpha / \rho g S$ . Suure toru jaoks  $p_2 = 2\pi(r_2 + r_1)$  ja  $S_2 = \pi(r_2^2 - r_1^2)$ ; väikse toru jaoks  $p_1 = 2\pi r_1$  ja  $S_1 = \pi r_1^2$ . Seosest  $h_1 = h_2$  saame  $p_2/p_1 = S_2/S_1$ , millest ülaltoodud avaldiste asendamise teel omakorda saame  $1 + r_2/r_1 = (r_2/r_1)^2 - 1$ . Viimane seos kujutab endast suhte  $x = r_2/r_1$  jaoks ruutvõrrandit  $x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$  (negatiivne lahend ei oma füüsikalist tähendust). Niisiis  $r_1 = 2r_2$ .

**L408 Smurf solariumis ★★**

Autor: Ants Remm, lahtine, 2011, G 4

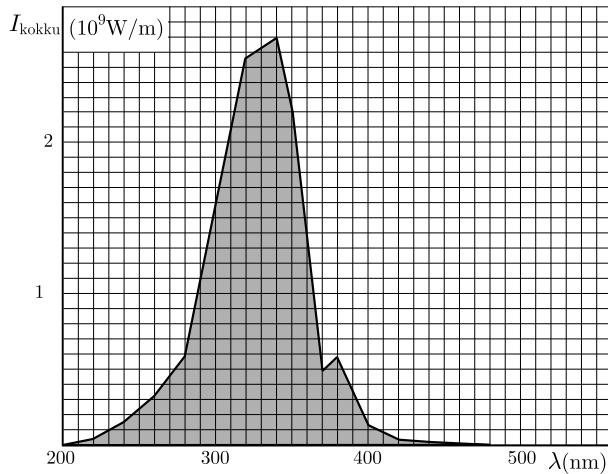
Kuna kogu Smurfile langenud valgusest  $I$  neeldub Smurfil vaid  $I \cdot \varepsilon$ , kujutab  $I \cdot \varepsilon$  graafik Smurfil neeldunud valguse intensiivsust lainepekkuse kohta sõltuvalt lainepikkusest. Konstrueerime nimetatud graafiku. Selleks loeme jooniselt erinevate  $\lambda$  väärustele vastavad  $I$  ja  $\varepsilon$  väärtsed ning arvutame nende korruised, vt tabelit. Tabeli põhjal konstrueeritud joonise ning loeme graafiku alla jäänud pindala, mis on võrdne Smurfil neeldunud valguse intensiivsusega

$$I_{\text{kokku}} = (162 + \frac{74}{2}) \cdot 1 \frac{\text{W}}{\text{m}^2} = 199 \frac{\text{W}}{\text{m}^2}.$$

Kuna kiirguse intensiivsus näitab võimsust pindalaühiku kohta, saab Smurf kokku soojushulga

$$Q = I_{\text{kokku}} St = 199 \frac{\text{W}}{\text{m}^2} \cdot 0,1 \text{m}^2 \cdot 10 \text{min} \cdot 60 \frac{\text{s}}{\text{min}} \approx 12 \text{kJ}.$$

$\lambda$ (nm)	200	220	240	260	280	300	320	340	350
$I (10^9 \cdot \frac{\text{W}}{\text{m}^3})$	0,00	0,05	0,24	0,45	0,85	2,25	3,75	4,35	4,25
$\varepsilon$	0,46	0,54	0,62	0,68	0,70	0,70	0,68	0,62	0,53
$I \cdot \varepsilon (10^9 \cdot \frac{\text{W}}{\text{m}^3})$	0,00	0,03	0,15	0,31	0,60	1,58	2,55	2,70	2,25
$\lambda$ (nm)	360	370	380	400	420	440	460	480	
$I (10^9 \cdot \frac{\text{W}}{\text{m}^3})$	3,25	2,00	2,70	0,85	0,20	0,10	0,05	0,00	
$\varepsilon$	0,37	0,25	0,22	0,18	0,18	0,20	0,23	0,33	
$I \cdot \varepsilon (10^9 \cdot \frac{\text{W}}{\text{m}^3})$	1,20	0,50	0,59	0,15	0,04	0,02	0,01	0,00	



#### L409 Valgustid ★★

Autor: Valter Kiisk, piirkonnavor, 2016, G 7

Kirjeldatud eeldustel luminestsentstoru (ja nendest moodustatud rivi) võib vaadelda lõpmata pika joonvalgusallikana, mille valgusvoog jaotub ühtlaselt silinderpinnaale, mille pindala on võrdeline silindri raadiusega. Kuna kogu energia jaguneb silindri pinna peale, siis valgustatus on pöördvõrdeline kaugusega,  $L \propto 1/r$ . Et kaugusel  $r = 0,15 \text{ m}$  oleks valgustatus  $L = 8400 \text{ lx}$ , peab valgustatuse valem olema  $L = 8400 \text{ lx} \times \frac{0,15 \text{ m}}{r}$ . Järelikult luminestsentslampide abil saadakse valgustatuseks töölaual

$$8400 \text{ lx} \times \frac{0,15 \text{ m}}{1,8 \text{ m}} \approx 700 \text{ lx}.$$

Seevastu LED-lamp on pigem punktvalgusallikas, mille valgusvoog jaotub sfääri pinnale, mille pindala on ruutsõltuvuses sfääri raadiusest. Seega  $L \propto 1/r^2$  ja et kaugusel  $r = 0,3 \text{ m}$  oleks valgustatus  $L = 1500 \text{ lx}$ , peab kehtima  $L = 1500 \text{ lx} \times \left(\frac{0,3 \text{ m}}{r}\right)^2$ . Töölaual kaugusel  $r = 0,4 \text{ m}$  lambist on valgustatus

$$2600 \text{ lx} \times \left(\frac{0,3 \text{ m}}{0,4 \text{ m}}\right)^2 \approx 1500 \text{ lx}.$$

#### L410 Maja ★★★

Autor: Jaan Kalda, lõppvoor, 2008, G 4

Maja teatud punkt  $P$  ja tema peegelkujutis mere pinnalt  $P'$  paiknevad sümmeetrisiliselt mere tasandiga. Vaatleme mõttelist sirget  $PP'$ . Tema lõikepunkt merega  $O$  paikneb mölemast otsast võrdsel kaugusel ning tänu sellele saame me jooniselt punkti  $O$  kergelt määrrata kui lõigu  $PP'$  keskpunkti. Maja körgus merepinnalt vastab vundamendi kaugusele punktist  $O$ , vt joonist. Mõõtes jooniselt akende vahkauguse  $|AB| = 9,5 \text{ mm}$  ja  $|OQ| = 58,5 \text{ mm}$  saame

$$H = 3 \text{ m} \cdot \frac{|OQ|}{|AB|} = 18,5 \text{ m}.$$



3

435

**L411 Tiik ★★**

Autor: Taavi Pungas, lõppvoor, 2013, G 6

Mõõdame jooniselt ringide läbimõõdud, saame  $0,1; 0,4; 0,9; 1,6; 2,5; 3,5$  ja  $4,5$  ühikut  $L$ -i. Näeme, et alguses on liikumine ühtlaselt kiirenev ehk kehtib  $\lambda \ll h$  seos

$$r \approx \frac{gt^2}{2\pi}.$$

Sellest saame arvutada esimestele ringidele vastavad ajahetked valemiga  $t = \sqrt{2\pi r/g}$ :

$$\sqrt{\frac{\pi L}{10g}}, 2\sqrt{\frac{\pi L}{10g}}, 3\sqrt{\frac{\pi L}{10g}}, 4\sqrt{\frac{\pi L}{10g}}, 5\sqrt{\frac{\pi L}{10g}}.$$

Näeme, et joonise tegemiseks kasutatud ajavahemik oli

$$T = \sqrt{\frac{\pi L}{10g}}.$$

Hiljem on liikumine ühtlane, kiirusega

$$v = \frac{L}{T} = \sqrt{\frac{10Lg}{\pi}}.$$

Teisalt teame, et  $v \approx \sqrt{hg}$ , seega tiigi sügavus on

$$h \approx \frac{v^2}{g} = \frac{10L}{\pi},$$

ehk

$$h/L = \frac{10}{\pi} \approx 3,2.$$

**L412 Radoon ★★**

Autor: Mihkel Kree, lõppvoor, 2016, G 5

Iga lagunev uraani tuum jõuab oma lagunemisahelas radoonini. Tasakaalulisel juhul tähendab see, et ajaühikus lagunevate uraani tuumade arv on võrdne ka nii ajaühikus tekkivate kui ka lagunevate radooni tuumade arvuga. Niisiis, ajaühikus lagunevate radooni tuumade arv  $\Delta N_{\text{R}}/\Delta t$  on määratud uraani tuumade koguarvu  $N_{\text{U}}$  ja uraani poolitusaja  $\tau$  kaudu kujul

$$\frac{\Delta N_{\text{R}}}{\Delta t} = \frac{N_{\text{U}} \ln 2}{\tau}.$$

Uraani tuumade arvu saame selle kogumassi  $m_{\text{U}} = \frac{0,3}{10^3} m$  ja ühe aatomi massi  $m_1 = 238 \cdot u$  suhtena:

$$N_{\text{U}} = \frac{m_{\text{U}}}{m_1} = 1,26 \cdot 10^{-6} \frac{m}{u}.$$

Et radooni aktiivsus (lagunemiste arv ruumalaühikus ajaühiku kohta) ruumis peab piirjuhul rahuldama tingimust

$$\frac{\Delta N_R}{\Delta t} = 200 \cdot V,$$

saame kivimitüki ohutu massi ülempiiriiks

$$m = \frac{200 \cdot V u \tau}{1,26 \cdot 10^{-6} \ln 2} = 1,4 \text{ kg}.$$

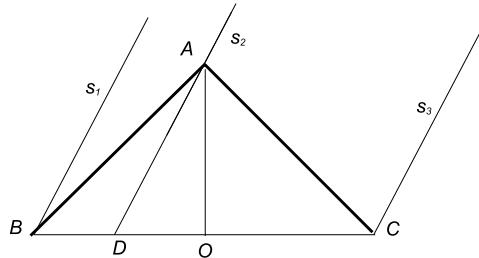
#### L413 Vihmasadu ★★★

Autor: Jaan Kalda, piirkonnnavoor, 2012, G 7

Tähistame katuse vertikaallõikel harja tähega  $A$ , räästad tähtedega  $B$  ja  $C$  ning lõigu  $BC$  keskpunkti tähega  $O$ . Tähistame sümbolitega  $s_1$ ,  $s_2$  ja  $s_3$  selliste piiskade trajektoorid, mis tabavad vastavalt põhjaräästast punktis  $B$ , harja punktis  $A$  ning lounaräästast punktis  $C$ . Sirgete  $s_1$  ja  $s_2$  vahelisse ribasse jäävad piisad tabavad põhjakatust ning sirgete  $s_2$  ja  $s_3$  vahelisse ribasse jäävad piisad tabavad lounakatust. Seega on veehulkade suhe võrdne ribade laiuste suhtega, mis omakorda on võrdne lõikude  $BD$  ja  $CD$  pikkuste suhtega, kus  $D$  on sirge  $s_2$  lõikepunkt lõiguga  $BC$ . Seetõttu  $|BD| = \frac{1}{3}|BC|$  ning järelikult

$$|DO| = |BO| - |BD| = \frac{1}{6}|BC|.$$

Paneme tähele, et vihmapiiskade kiirusvektori horisontaal- ja vertikaalkomponente suhe on võrdne lõikude  $DO$  ja  $OA = \frac{1}{2}|BC|$  pikkuste suhtega; et  $\frac{|AO|}{|DO|} = 3$ , siis piiskade langemise kiirus on  $3u = 18 \text{ m/s}$ .

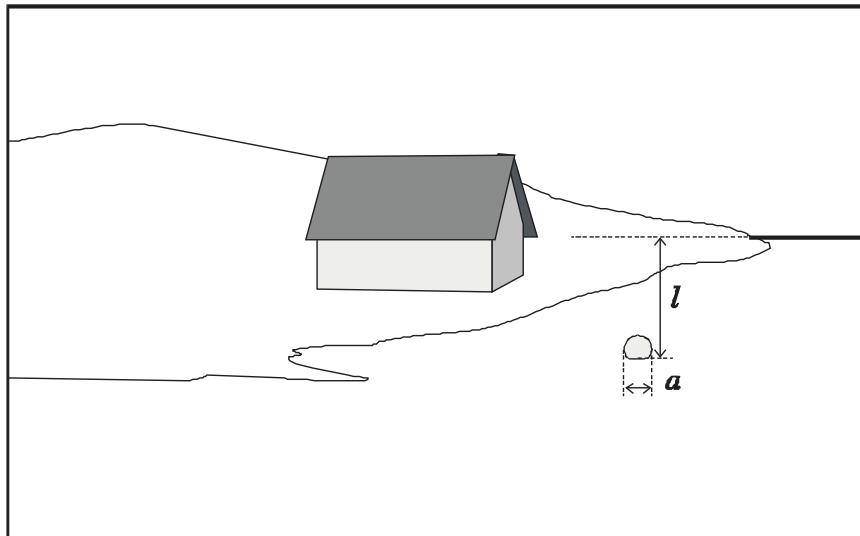


**L414 Maja ★★★**

Autor: Jaan Kalda, lahtine, 2008, G 9

Joonise põhjal võib oletada, et poi on märksa lähemal horisondist (ca 5 km), seega võib Maa kumerust mitte arvestada. Asetame mõtteliselt kahe-meetrise teiba poi kõrvale. Fotoaparaati ja teiba ülemist otsa ühendav joon on horisontaalne ja seega läbib horisonti, mis tähendab, et teiba ots puudutab joonisel näha oleva horisondiöigu pikendust. Poi diameetri  $d$  leiate mõõtes joonisel pikkused  $a$  ja  $l$ :

$$d = 2 \text{ m} \cdot \frac{a}{l} = 45 \text{ cm}.$$

**L415 Lööklaine ★★★**

Autor: Jaan Kalda, lõppvoor, 2015, G 6

Läheme üle lööklainega seotud taustsüsteemi, milles osake läheneb lööklainele kiirusega  $w$ . Energia jäävusest saame, et juhul kui osake läbib lööklainet, siis

$$mw^2/2 = qU_0 + mu^2/2,$$

kus  $u$  on osakese kiirus pärast lööklainega kohtumist. Sellest saame

$$u = \sqrt{w^2 - 2qU_0/m}.$$

Tagasi laboratooriesse süsteemi minnes saame kiiruseks

$$v = u - w = \sqrt{w^2 - 2qU_0/m} - w,$$

mis kehtib, kui  $mw^2 > 2qU_0$ . Vastasel juhul peegeldub osake lööklainelt ning  $u = -w$  ja  $v = -2w$ .

**L416 Õhupalli vari ★★★★**

Autor: Jaan Kalda, lahtine, 2013, G 10

Et Päikese nurksuurus on väike, siis maapinna lächedal võime lugeda varjukoonused silindriteks: joonisel tähendab see, et loeme  $AH$  paralleelseks  $DG$ -ga,  $CF$ -ga ja  $BE$ -ga. Paneme tähele, et  $|AD| = 2,5$  m, sest kaldo langevate kiirte puhul on kera varju laius (väiksem mõõde) maapinnal võrdne varjukoonuse läbimõõduga. See tähendab, et  $CB$  pikkus on 0,5 m ja  $AB$  pikkus on  $\frac{2,5-0,5}{2} = 1$  m. Et palli läbimõõt on võrdne  $AC$ -ga, siis  $|KL| = 1 + 0,5 = 1,5$  m. Nurk  $\angle KJL$  moodustab sirgnurgast murdosa  $0,5/180 = 1/360$ , mis tähendab, et lõik  $KL$  moodustab punkti  $J$  ümber tömmatud poolringjoonest raadiusega  $R = |JK|$  samasuguse murdosa; selle kaare pikkus on  $\pi R$ , st  $|KL| = \pi R/360$ , millest

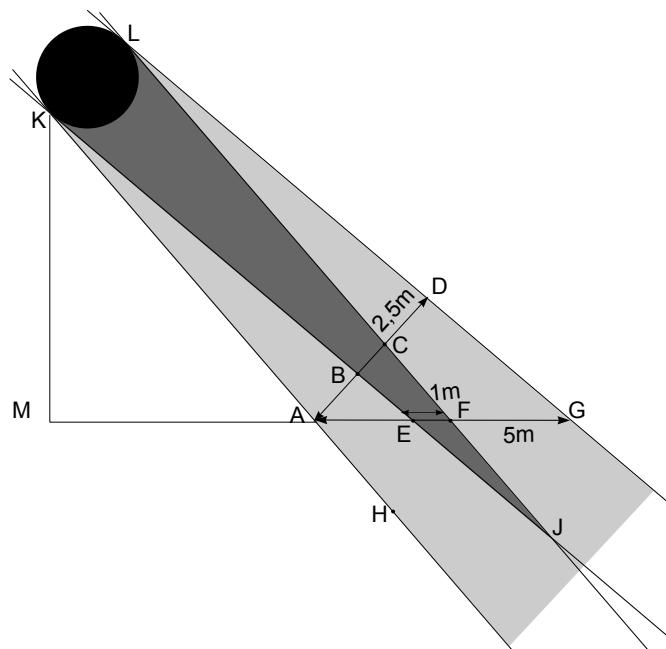
$$R = 360|KL|/\pi \approx 172 \text{ m.}$$

Sarnastest kolmnurkade  $JKL$  ja  $JBC$  leiame, et

$$|BK| = |JK| \frac{|KL| - |BC|}{|KL|} \approx 114 \text{ m.}$$

Ligikaudu sarnastest kolmnurkade  $KAM$  ja  $ADG$  leiame, et

$$|KM| \approx |KA| \frac{|DA|}{|AG|} \approx 57 \text{ m.}$$



**L417 Kile ★★★★**

Autor: Jaan Kalda, lahtine, 2008, G 8

Valgus peegeldub tagasi kile ülemiselt ja alumiselt pinnalt. Risti langeva valguse puhul on nende vaheline optiliste teede pikkuse erinevus  $2n_1d$ , kus  $d$  on (otsitav) kile paksus. Peegeldus on minimaalne, kui need kiired liituvad vastasfaasis, st

$$2n_1d = \left( N + \frac{1}{2} \right) \lambda.$$

Kui tahetakse, et peegeldunud valgus oleks nõrk ka punase ja sinise valguse jaoks, siis tuleb täisarvu  $N$  väärthus võtta võimalikult väike. Olgu  $\lambda - \Delta\lambda$  selline lainepeikkus, mille puhul peegeldunud kiired liituvad samas faasis, st peegeldunud valgus on maksimaalse intensiivsusega. Sellisel juhul  $2n_1d = N(\lambda + \Delta\lambda)$ . Kahest võrdustest saame  $\Delta\lambda = \lambda/2N$ . Et antud juhul oleme huvitatud võimalikult suurest  $\Delta\lambda$  väärthusest, siis tuleb valida  $N = 1$ . Niisiis  $d = \lambda/4n_1 \approx 102 \text{ nm}$ .

**L418 Kunstinäitus ★★★★★**

Autor: Jaan Kalda, lõppvoor, 2009, G 10

Kile ülemiselt ja alumiselt pinnalt peegeldunud kiirte optiliste teepikkuste erinevus on minimaalne, kui kiir langeb pinnaga risti, ning võrdne  $\Delta l_{\max} = 2n_1d$ , kus,  $d$  on kile paksus. Minimaalne on see siis, kui kiir langeb peaegu paralleelselt kilega (st horisontaalsel); sellisel juhul on optiliste teepikkuste vahe  $\Delta l_{\min} = 2n_1d/\cos\alpha - 2d\tan\alpha$ , kus  $\alpha$  on kiles leviva kiire nurk vertikaali suhtes,  $\sin\alpha = 1/n_1$ . Seega

$$\Delta l_{\min} = 2d/\cos\alpha(n_1 - \sin\alpha) = 2n_1d(1 - n_1^{-2})/\sqrt{1 - n_1^{-2}} = 2n_1d\sqrt{1 - n_1^{-2}}.$$

Kui muuta vaatesuunda vertikaalsete horisontaalseks, siis muutub optiliste teepikkuste vahe  $N\lambda$  võrra (sest selle protsessi käigus on võimalik registreerida  $N$  interferentsimaksimumi, mil optiliste teepikkuste vahe on lainepeikuse täisarv-kordne). Seega  $2n_1d(1 - \sqrt{1 - n_1^{-2}}) = N\lambda$ , millega

$$d = N\lambda/2n_1(1 - \sqrt{1 - n_1^{-2}}) \approx 13 \mu\text{m}.$$