

200 EESTI FÜÜSIKAOLÜMPIAADI ÜLESANNET AASTATEST

2018 – 2025

koos vihjete ja lahendustega

Koostas Taavet Kalda

2025

© Autoriõigused: Eesti Matemaatika Selts, Tallinna Tehnikaülikool, Tartu Ülikool,
ülesannete autorid ja Taavet Kalda.

Kogumiku koostamist toetasid: Eesti Matemaatika Seltsi fond “Benoit Mandelbroti
Jälgedes”, Robert Kitt ja Tallinna Tehnikaülikool.

Sisukord

Sissejuhatus	3
Ülesanded	4
TODO	4
Vihjed	57
Lahendused	61
Autorite loetelu	199

Sissejuhatus

Sia on koondatud 200 gümnaasiumi ülesannet Eesti füüsikaolümpiaadi piirkonnavoorudest, lõppvoorudest ja lahtistest võistlustest. Igale ülesandele on juurde kirjutatud paarilauseiline vihje. Juhul kui õpilane jäääb ülesannet lahendades top-pama, on tal võimalik vihjet lugeda ning teisele katsele minna.

Ülesanded on jaotatud teemade kaupa ning teemasiseselt raskuse järgi. Raskustaset tähistatakse kuni viie tärniga. Ülesannete lihtsamaks otsimiseks on ülesannete numbrite ette pandud „Ü“, vihjete ette „V“ ja lahenduste ette „L“. Näiteks ülesande 133 teksti number on kujul Ü133. Iga ülesande juures on kirjas ka selle autor ning olümpiaadi vooru lühinimetus, lisaks lühendid P 1, G 1 jne, kus tähed tähistavad põhikooli- ja gümnaasiumiastet. Näiteks G 9 viitab gümnaasiumiastme 9. ülesandele.

Lisaks leiate kogumiku lõpust kogumiku poolt kaetud lahtiste ja lõppvoorude esimese ja teise järgu saanud õpilaste ning ülesannete autorite nimekirja.

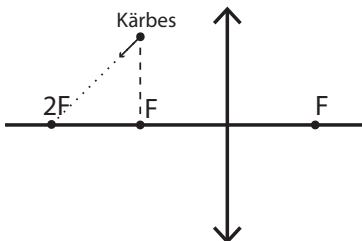
Ülesanded

TODO

Ü1 Kärbes ★

Autor: Erkki Tempel, lahtine, 2018, G 1

Kärbes asub kumerläätse fokaaltasandil, läätses optilisest peateljest kaugusest $a = 1 \text{ m}$ ning hakkab lendama läätsesse kahekordse fookuskaguuse suunas kiirusega $v = 0,5 \text{ m/s}$. Läätsesse fookuskagus $f = 1 \text{ m}$. Millise kiirusega u liigub kärbse kujutis sel hetkel, kui kärbse ja tema kujutise vaheline kaugus on minimaalne?



Ü2 Ristmik ★

Autor: Markus Rene Pae, lahtine, 2019, G 1

Juku, sõites autoga ($v = 90 \frac{\text{km}}{\text{h}}$), läheneb Y-kujuile ristmikule. Kui tal on ristmikuni jää nud veel $l = 150 \text{ m}$ märkab Juku, et kõrvalharu pealt sõidab ristmiku poole ka teine auto, mille ristmikuni jää nud vahemaa ja kiiruse projektsioonid Juku sõidusuunale on võrdsed Juku auto omadega. Kokkupõrke vältimiseks kiirendab Juku kiirendusega $a = 0,5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$. Mis on autode vahemaa, kui teine auto jõuab ristmikuni? Teede vaheline nurk on 15° .

Ü3 Rong ★

Autor: , piirkonnavor, 2019, G 1

Juku tahtis teada, mitu vagunit on rongis. Selleks seisits ta perroonile esimese vaguni esotsaga kohakuti ning ootab, kuni rong ühtlase kiirendusega sõitmis alustas. Stopperiga möötes sai ta teada, et esimene vagun läks temast mööda täpselt aja $t = 10 \text{ s}$ jooksul ning viimane vagun aja $t_2 = 1,83 \text{ s}$ jooksul. Mitu vagunit oli rongis? Vagunid on identsed.

Ü4 Autod ★

Autor: , lõppvoor, 2019, G 1

Kaks autot sõidavad teineteise poole. Esimese auto kiirus $v_1 = 80 \text{ km/h}$ ning teise auto kiirus $v_2 = 100 \text{ km/h}$. Autod märkavad teinetest, kui nende vahetkaugus $s = 600 \text{ m}$ ning hakkavad samal hetkel pidurdama. Autod jäavat seisma samal hetkel, vahetult enne kokkupõrget. Kui kaua võttis autodel aega peatumine?

Ü5 Pudel ★

Autor: Kaarel Kivilsalu, lahtine, 2020, G 1

Jäigast materjalist pudel (nt klaaspudel) on täidetud osaliselt veega. Rael pani tähele, et väikse pudelikaelaga on pudelist raske kogu vedelikku ära juua. Leidke, mis on maksimaalne vedeliku ruumala, mida on võimalik ära juua ilma pudelisse õhku juurde puhumata. Pudeli ruumala on V ja Rael suudab pudelisse tekitada alarõhu $\Delta P = 0,25p_0$ võrreldes atmosfäärirõhuga, kus p_0 on atmosfäärirõhk. Eeldada, et Rael joob vett piisavalt aeglasedelt, et pudelis olev õhk on soojuslikus tasakaalus välisõhuga.

Ü6 Saun ★

Autor: , piirkonnavor, 2020, G 1

Juhan ja Peeter on saunas ning Juhan viskab kuumale kivikerisele külma vett temperatuuriga $10\text{ }^{\circ}\text{C}$. Peeter väidab, et Juhan jahutab kerise niimoodi ära ja ütleb Juhanile, et ta viskaks külma vee asemel kuuma vett temperatuuriga $80\text{ }^{\circ}\text{C}$. Juhan aga väidab vastu, et külma ja kuuma vee kasutamisel ei ole erilist vahet (kerise jahtumise erinevus on väiksem kui 10%). Kui palju väheneb kerise temperatuur kummalgi juhul, kui visata sinna $V = 200\text{ cm}^3$ vett? Kas Juhanil on õigus? Vee tihedus $\rho = 1000\text{ kg/m}^3$, erisoojus $c_v = 4200\text{ J/(kg} \cdot {^{\circ}\text{C}})$ ja aurustumissoojus $L = 2300\text{ kJ/kg}$. Kerisekivide erisoojus $c_k = 700\text{ J/(kg} \cdot {^{\circ}\text{C}})$ ja kogumass $M = 100\text{ kg}$. Võib eeldada, et keris on piisavalt kuum ja kogu vesi aurustub ära.

Ü7 Klaaskera ★

Autor: , lõppvoor, 2020, G 1

Taskulambiga, millest väljuva valgusvihu läbimõõt on d , valgustatakse suurt klaasist kera läbimõõduga D . Milline peaks olema klaasi murdumisnäitaja, et valgusvihk kera keskpunkti suunates koonduks klaaskera pinnal? Eeldada, et valgusvihu diameeter on tunduvalt väikesem kera läbimõõdust ($d \ll D$) ning et taskulambist väljuv valgusvihk on paralleeline.

Vihje: Väikeste nurkade korral sin $\alpha \approx \alpha$, kui α on radiaanides.

Ü8 Võrkpall ★

Autor: Jaan Kalda, lahtine, 2021, G 1

Rannavõrkpallis peab olema rõhk (st manomeetri näit manomeetriga mõõtmisel) vahemikus $p_- = 17,5\text{ kPa}$ kuni $p_+ = 22,5\text{ kPa}$. Pall pumbatakse normaaltingimusel (temperatuuril $t_0 = 20\text{ }^{\circ}\text{C}$ ja atmosfäärirõhul $p_a = 101,325\text{ kPa}$) rõhuni $p_0 = 17,5\text{ kPa}$ ning viakse rannaliivale, kus see kuumeneb temperatuurini $t_1 = 80\text{ }^{\circ}\text{C}$. Millise rõhu omandab pall?

Ü9 Kuul sfääris ★

Autor: Markus Rene Pae, piirkonnavor, 2021, G 1

Kausis, mille sisekülgje pinnaks on poolsfääär raadiusega $R = 50\text{ cm}$, veereb ühtlase kiirusega mööda horisontaaltasapinnalist ringjoont kuulike. Kuuli tiirlemistasandi körgus kausi põhjast on $h = 10\text{ cm}$. Leidke kuuli tiirlemisperiood. Eeldage, et kuuli läbimõõt on kausi raadiusega võrreldes tühine ning hõõrdetegur kuuli ning kausi vahel on samuti tühiselt väike. Gravitatsioonikiirendus on $g = 9,8\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

Ü10 Lumepall ★

Autor: Oleg Košik, lõppvoor, 2021, G 1

Hannes istub $H = 7,7\text{ m}$ kõrgusel puu otsas ja tal on käes lumepall. Ta märkab otse tema suunas kiirusega $v = 6,0\frac{\text{km}}{\text{h}}$ lähenevat Richardit, kes on puust $l = 7,0\text{ m}$ kaugusel, ja otsustab teda lumepalliga visata. Millise kiirusega peaks ta lumepalli horisontaalselt viskama, et tabada Richardi pead, kui Richard on $h = 1,8\text{ m}$ pikk? Raskuskiirendus $g = 9,8\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

Ü11 Titicaca järv ★

Autor: Kaur Aare Saar, lahtine, 2022, G 1

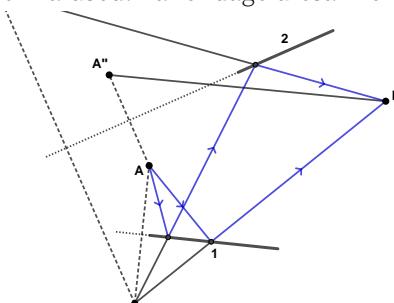
Titicaca järvest Boliviia ja Peruu piiril voolab ainsa jõena välja Desaguadero jõgi kiirusega $v = 10 \frac{\text{m}^3}{\text{s}}$. Järve pindala on $S = 8400 \text{ km}^2$ ja keskmene vee aurustumise kiirus järve pinnalt on aastas $b = 2000 \text{ mm}$.

Leidke Titicaca järve soolsus kui sissetuleva vee soolsus on $c = 10 \frac{\text{mg}}{\text{L}}$. Eeldage, et järves on soola kontsentratsioon ja veetase igal ajahetkel ühtlased.

Ü12 Peegel peeglis ★

Autor: Richard Luhtaru, piirkonnavor, 2022, G 1

Toas on kaks tasapeeglit. Arvo (tähistatud punktiga A) nägi peeglisse vaadates Pärti (tähistatud punktiga B). Konstrueerige kiirte käik, kuidas Arvo võis peegli(te) abil Pärti näha. Leidke kõik võimalused. Lahendage ülesanne lisalehel.

**Ü13 Kettaheide ★**

Autor: Jaan Kalda, lõppvoor, 2022, G 1

Taganttuul on spordis harilikult abiks, kuid mitte kettaheites. Selgitage kvalitatiivselt, miks vastutuul võib suurendada kettaheite tulemust. Visandage joonis, kus lendav ketas on kujutatud vertikaalläbilöikes näidates seal ketta lennusuuna ja tuule suuna. Näidake sellel joonisel jõudiagrammina, millised jõud möjuvad ketale lennu ajal ja kirjeldage, kuidas möjutab neid jõude vastutuul.

Ü14 Paviljon ★

Autor: Uku Andreas Reigo, lahtine, 2023, G 1

Mirtel varjus vihma eest paviljoni. Selle seinteta paviljonil on ruudukujuline põrand küljepikkusega $a = 5 \text{ m}$, mida varjab postidele toetuv põrandaga ühesuurune ruudukujuline lame katus, mille körgus maapinnast $H = 3 \text{ m}$. Mirtel märkas, et 20% põranda pindalast on siiski märg, sest sinna langevad vihmapiisad. Ta tegi anemomeetri abil kindlaks, et puhub konstantse suunaga tuul, mille kiirus $v_t = 3 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ on kõikjal üks ja sama. Mida on nende andmete põhjal võimalik öelda piiskade vertikaalkiiruse kohta: milline on selle suurim võimalik väärthus v_{max} ja vähim võimalik väärthus v_{min} ? Minimaalsuse ja maksimaalsuse ranget töestust pole vaja esitada.

Ü15 Valgusvihk ★

Autor: Richard Luhtaru, piirkonnnavoor, 2023, G 1

Maril on taskulamp, millest väljub paralleelne valgusvihk diameetriga 30 mm. Et koondada lambist tulenev valgus eredamaks, soovib Mari läätsede abil muuta valgusvihu väiksemaks paralleelseks valgusvihuks diameetriga 5 mm. Mari tuhnib oma sahtlis ringi ning leiab, et tal on nii kumer- kui nõgusläätsed järgnevate fookusaugustega: 1 cm, 2 cm, 3 cm, 5 cm, 8 cm, 10 cm, 12 cm ja 15 cm. Leidke, kuidas ja milliste fookusaugustega läätsede abil on Maril võimalik oma eesmärk saavutada, kasutades

- (a) kaht kumerläätse.
 - (b) üht kumerläätse ja üht nõguslääätse.
- Kummalgi juhul joonistage skeem.

Ü16 Sujuv autosõit ★

Autor: Jaan Kalda, lõppvoor, 2023, G 1

Bussijuht tahab sõita sujuvalt, st et reisijatel, kes bussis püsti seisavad ja kusagilt kinni ei hoia, ei tekiks äkilise kiirendamise või pidurdamise tõttu tasakaalu kaotamise ja kukkumise ohtu. Seepärast suurendab ta pidurdades survet piduripedaafile tasapisi kuni bussi peatumiseni. Kas selline sõit on sujuv? Kui on sujuv, siis põhjendada, miks see nii on. Kui ei ole sujuv, siis selgitada, mis hetkel on seisvatel reisijatel oht tasakaalu kaotada, mis suunas on neil oht kukkuda ning kuidas tuleks pidurdada, et pidurdamine oleks sujuv, st et seisvatel reisijatel ei tekiks kordagi ohtu tasakaalu kaotada?

Ü17 Vabasukeldumine ★

Autor: Jarl Patrick Paide, lahtine, 2024, G 1

Vabasukeldumise sügavusrekordit püüdes peab sukelduja alguses sügavuse kasvamiseks palju vaeva nägema, kuna vee üleslükejöud surub vastu. Mingi hetk hakkab sukelduja vabalangema, sest sukelduja ruumala väheneb kokkusurutud kopsude arvelt. Leia kui sügavalt alates hakkab sukelduja vabalangema. Sukeldaja mass on $m_0 = 75 \text{ kg}$, õhku täistõmmatud kopsude ruumala on $V_k = 12 \text{ L}$ ja sellel hetkel on sukelduja koguruumala $V_0 = 84 \text{ L}$. Eelda, et sukelduja temperatuur ei muudu sukelduse ajal ja rinnakorvi elastusjöud ei mõjuta kopsuruumala. Õhurõhk on $P_0 = 101\,300 \text{ Pa}$, raskuskiirendus on $g = 9,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ ja vee tihedus on $\rho = 1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$

Ü18 Päikesepaneel ★

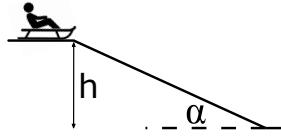
Autor: Richard Luhtaru, piirkonnnavoor, 2024, G 1

Pille majapidamine tarbib aastas 3000 kWh elektrit. Leidke, mitu päikesepaneeli on Pillel vähemalt vaja, et katta tema majapidamise energiakulu, kui iga päikesepaneeli pindala on $S = 1,5 \text{ m}^2$ ja kasutegur on $\eta = 15\%$. Eeldame, et Eestis on keskmise maapinnale langev päikeseenergia võimsus pindalaühiku kohta $I = 110 \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$ ning Pillel on piisavad võimalused energia salvestamiseks.

Ü19 Kelgumägi ★

Autor: Hans Daniel Kaimre, lõppvoor, 2024, G 1

Triinu ja Sandra on koos kelgutamas kelgumäel, mis on $h = 6\text{ m}$ kõrgune ning $\alpha = 15^\circ$ ühtlase tõusunurgaga kogu nõlva ulatuses. Kui suure kiiruse peab Triinu Sandrale kelgumäe üleval sisse lükkama, et ta jõuaks mäest alla? Höördetegur kelgu ning lumise nõlva vahel on $\mu = 0,3$, raskuskiirendus $g = 9,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.



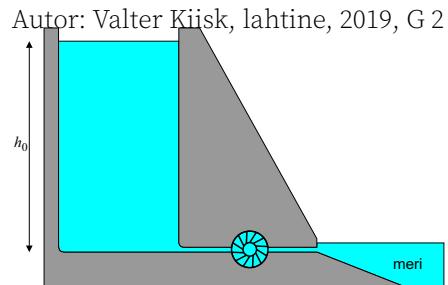
Ü20 2018 ★

Autor: Erkki Tempel, lahtine, 2018, G 2

Sul on kasutada takistid $R_1 = 10\Omega$, $R_2 = 100\Omega$ ning $R_3 = 1000\Omega$. Kasutades ainult neid takisteid, moodustage kuuest takistist koosnev süsteem nii, et kogutakistus oleks $R = 2018\Omega \pm 0,2\Omega$.

Ü21 Pumpjaam ★

Arenenud riikides on elektrienergia tarbimine, võrrelduna riigi pindalaga, suurusjärgus $100 \frac{\text{kW}}{\text{km}^2}$. Joonisel on kujutatud teatava pump-hüdroakumulatsiooni elektrijaama skeem. Eeldame, et alumiseks reservuaariks on meri (mille tase püsib praktiselt muutumatu) ja ülemise reservuaari põhi ulatub praktiselt merepinna tasemeeni. Elektrienergia ületootmisse ajal pumpbatakse merevett ülemisse reservuaari kuni kõrguseni $h_0 = 100\text{ m}$. Energiadefitsiidi ajal toimib sama süsteem hüdroelektrijaamana. Ignoreerides energia konverteerimis- ja ülekandekadusid, kui suure osa riigi pindalast peaks sellised pumpjaamat (st ülemise reservuaari pindala) moodustama, et muude elektritootjate äralangemisel kindlustada elektrienergia varu 24 tunniks?



Ü22 Peegel ★

Autor: , piirkonnavor, 2019, G 2

Optilises skeemis (vt. joonis) on kujutatud kolme valguskiire viit fragmentti. Samuti on teada, et skeemis on tasapeegel, mis on joonise tasandiga risti. Rekonstrueerige peegli asukoht. Ülesanne lahendage lisalehel.



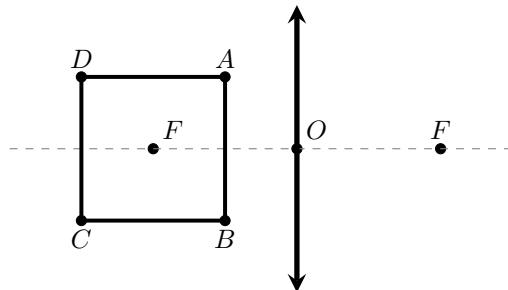
Ü23 Saunauks ★

Juku istub saunas ja viskab saunakerisele vett. Tekkinud leilist läheb saunaauks lähti. Arvutage, kui suur peaks olema höördetegu moment τ saunaauks hingededes, et $V_v = 200\text{ ml}$ vett korraga kerisele visates saunaauks lahti ei läheks? Sauna mõõtmned on $300 \times 250 \times 240\text{ cm}$, sauna ukse mõõtmned $70 \times 190\text{ cm}$. Eeldada, et aurustumine toimub nii kiiresti, et õhk ei jõua läbi pilude saunast välja minna. Universalne gaasikonstant $R = 8,314\text{ J}/(\text{mol} \cdot \text{K})$, vee molaarmass $\mu = 18\text{ g/mol}$ ja vee tihedus $\rho = 1\text{ g/cm}^3$.

Ü24 Ruut fookuses ★

Autor: Hannes Kuslap, lahtine, 2020, G 2

Konstrueerige ruudu $ABCD$ tippude ja külgede kujutised kumerläätses, kui on teada, et ruudu keskpunkt F on fookuses ja läätse fookuskaugus on võrdne ruudu küljepikkusega ($|AB| = |OF|$, kus O on läätse optiline keskpunkt).

**Ü25 Karussell ★**

Autor: , piirkonnavor, 2020, G 2

Juku läheb lõbustusparki ja märkab tiirlevat karusselli. Karussell koosneb ringikujulisest horisontaalsest kettast, mille küljes ripuvad kettide otsas lõbusöitjad. Juku märkab, et kinnitusketid moodustavad karusselli täiskiirusega pöörlemisel vertikaali suhtes nurga $\theta = 60^\circ$. Leia lõbusöitjate joonkiirus, kui karussell pööreleb täiskiirusel. Mitu tiiru minutis teeb karussell täiskiirusega pööreltes? Karusselli ketta raadius $R = 10\text{ m}$, kettide pikkus $l = 2\text{ m}$, raskuskiirendus $g = 9,8\text{ m/s}^2$. Kettide kaalu mitte arvestada.

Ü26 Kohukedes ★

Autor: , lõppvoor, 2020, G 2

Richard ostis kohukesi, mis on ühtlase kihina poekoti põhjas. Heatujulisena teeb ta kotiga vertikaalseid ringe, aga siis hakkab kohukese pärist muretsema. Önnekse selgub, et need ei kukkanud välja ja lõmaks ka ei läinud. Näidake, et kui Richard kotiga ei vehi (ega seda keeruta), siis võib ta panna koti põhja kaks korda paksema kihia kohukesi, ilma et ükski kohuke lõmastuks. Kohukesi võib käsitleda vedelikuna. Võib eeldada, et kohuke lõmastub siis, kui rõhk tema juures ületab mingi kriitilise väärtsuse. Vertikaalsete ringide tegemisel on Richardi käe nurkkiirus konstantne. Eeldada, et kohukese kihia paksus on palju väiksem kui ringi raadius.

Ü27 Plokk ★

Autor: Eero Vaher, lahtine, 2021, G 2

Ideaalsel plokil on kaks raskust massidega m ning $M = 3m$. Väiksem raskus on maapinnal, suuremat raskust hoitakse körgusel H nii, et raskusi ühendav venimatu nöör on pingul. Kui suurem raskus lahti lastakse hakkab süsteem raskusjõu mõjul vabalt liikuma. Mis on suurim körgus h_{\max} , milleni väiksem raskus liikumise käigus töuseb? Raskuskiirendus on g ning nöör on piisavalt pikk, et väiksem raskus plokini ei jõua.

Ü28 Klaaspudel ★

Autor: Kaur Aare Saar, piirkonnavor, 2021, G 2

Klaaspudel ruumalaga $V_0 = 1 \text{ L}$ on osaliselt täidetud veega, mis on temperatuuril $T_0 = 20^\circ\text{C}$. Algul on pudelis olev rõhk võrdne välise rõhuga, mis on $p_0 = 100 \text{ kPa}$. Pudel suletakse ja pannakse sügavkülma nii, et seal olev vesi hakkab jäätuma. Pudel kannatab maksimaalset ülerõhku $\Delta p = 300 \text{ kPa}$. Leidke maksimaalne kogus vett V_v , mis võis alguses pudelis olla, et pudel ei läheks vee jäätumisel katki. Vee tihedus lugeda kõikidel temperatuuridel võrdseks $\rho_v = 1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ ja jäää tihedus on $\rho_j = 920 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$. Eeldage, et pudelis olev õhk ja vesi on soojuslikus tasakaalus terve protsessi vältel ja et juurde tekkiv jäää saab vabalt liikuda pudeli õhuga täidetud osasse.

Vihje. Pudelis elevat õhku võib käsitleda kui ideaalset gaasi, mille rõhk p , ruumala V ja absoluutne temperatuur T (mida SI süsteemis mõõdetakse kelvinites) rahul-davad seost $\frac{pV}{T} = \text{const.}$

Ü29 Pudel ★

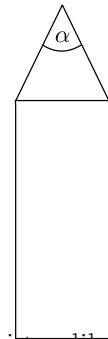
Autor: Jarl Patrick Paide, lõppvoor, 2021, G 2

Pärast kuumal päeval õues treenimist tuli sportlane oma tühja õrnast plastmassist joogipudeliga jahedasse tuppa ning ta märkas, et ta pudel hakkas vaikse „pau-kuma“. Lähemal uurimisel selgus, et kui pudeli sisene rõhk erineb välisest rõhust suuruse Δp võrra, siis tekib pudeli kesta sisse üks lohukujuline mölk juurde (selle tekkimine kostuski pauguna) ning hetkeks võrdsustuvad sise- ja välisrõhud. Sportlane mõõtis kahe paugu vaheliseks ajaks t . Leidke pudeli soojuskadude võimus vahetult pärast pudeli tuppa toomist. Tühja pudeli (seal hulgas pudelis oleva õhu) soojusmahutavus on c , õhu molaaruumala on V_m ja universaalne gaasikonstant on R . Võib eeldada, et ajavahemiku t jooksul soojuskadude võimus ei muudu.

Ü30 Pliats ★

Autor: Joonas Kalda, lahtine, 2022, G 2

Pliatsi kahe näpu vahel õhus hoidmiseks tuleb rakendada sama jõudu olenemata sellest, kas hoitakse kinni tipust või külje pealt. Näpu hõõrdetegurid pliatsi küljega ja teritatud osaga on vastavalt $\mu_1 = 0,3$ ja $\mu_2 = 0,5$. Milline on pliatsi tipunurk α ?

**Ü31 Juhe ★**

Autor: Jaan Kalda, piirkonnavor, 2022, G 2

Peeter tahab vältida kasvuhoones taimede külmumist ja viib sinna elektiradiaatori nimivõimsusega $P = 2 \text{ kW}$ ja nimipingega $V_0 = 230 \text{ V}$. Ta kasutab selleks pikendusjuhet pikkusega $L = 40 \text{ m}$, mis sisaldab kahte kõrvuti paiknevat vasktraati ristlõikepindalaga $S = 1 \text{ mm}^2$. Vase erit-kistus $\rho = 17 \frac{\text{m}\Omega \cdot \text{mm}^2}{\text{m}}$. Milline soojuslik võimsus eraldub juhtmetes, kui tegelik võrgupinge pistikus on $V_p = 240 \text{ V}$?

Ü32 Lumeväli ★

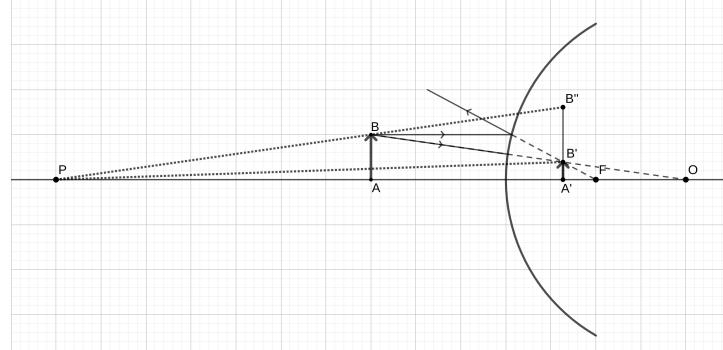
Autor: Moorits Mihkel Muru, lõppvoor, 2022, G 2

Mari on kooli hiljaks jäamas ning proovib välja arvutada, kuidas joosta üle kooli ees oleva väljaku, mis on lumega kaetud. Väljak on ristiklikukujuline, mille ühes tipus asub Mari ja diagonaali teises tipus koolimaja uks. Väljakу koolimaja fassaa-diga parallelnе külg on 100 m pikk ja koolimajaga risti olev külg 50 m. Mari jookseb mööda teed kiirusega $6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, ja ta hindab, et ta jookseb lumes 20% aeglasemalt kui mööda väljaku ääres olevat teed. Kui palju aega on võimalik Maril säästa joostes üle lumise väljaku võrreldes sellega, kui ta jookseks mööda väljaku ääres olevat teed?

Ü33 Kumerpeegel ★

Autor: Richard Luhtaru, lahtine, 2023, G 2

Joonisel (suurendatult lisalehel) on kujutatud ese AB ja kumerpeegel, mille keskpunkt on O ja fookus on F. Eeldame, et ese on sümmeetriateljest natuke nihkes, nii et see on punktist P nähtav nii otse kui kumerpeeglis. Mitu korda väiksem paistab ese AB punktist P kumerpeegli abil vaadelduna (võrreldes otse vaatamisega)? Lahendage ülesanne lisalehel.

**Ü34 Otsene kalorimeetria ★**

Autor: Konstantin Dukatš, piirkonnavoor, 2023, G 2

Üks viis, kuidas mõõta inimeselt või loomalt eralduva soojuse võimsust, on otsene kalorimeetria. Selle käigus pannakse inimene soojusisolatsiooniga tappa, kus tagatakse inimese jaoks vajalik õhuvahetus. Kehast eralduva soojushulga leidmiseks läbib tuba veotoru, milles oleva vee temperatuur mõõdetakse enne ja pärast toa läbimist. Eeldage, et vesi siseneb tappa temperatuuril $T_1 = 20,00^\circ\text{C}$ ning väljub temperatuuril $T_2 = 20,15^\circ\text{C}$. Vee kiirus torus on $u = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ ja toru ristlõikepindala on $S = 1 \text{ cm}^2$. Mis on inimese kehast eralduva soojuse võimsus P ? Vee tihedus on $\rho = 1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ ning vee erisoojus on $c = 4200 \frac{\text{J}}{\text{kg}^\circ\text{C}}$. Võib eeldada, et õhuvahetuse käigus soojusvahetust ei toimu ning süsteem on termodünaamilises tasakaalus.

Ü35 Elektrikarjus ★

Autor: Jaan Kalda, lõppvoor, 2023, G 2

Elektrikarjusega karjatamisel ümbritseb karjamaad pikk traat, mis on postide abil maast elektriliselt isoleeritud. Elektrikarjuses olev generaator saadab sellesse traati impulsspinge: pingevabad perioodid vahelduvad lühikeste pingega perioodidega. Pingemuplsi ajal võib elektrikarjuse pingegeneraatorit vaadelda kui elektromotoorjöudu \mathcal{E} , mis omab teatud sisetakistust R . Elektriimpulss on eluohhtlik, kui inimest läbib vool, mis on suurem kui $I_0 = 30 \text{ mA}$. Teatud marki elektrikarjuse kohta on teada järgmist: kui pingegeneratori väljundklemmidest üks on maandatud ja teisest lähtuv karjaaja traat on maapinnast ideaalselt isoleeritud, siis traadi ja maapinna vaheline pinge on impulsi ajal $U_m = 15 \text{ kV}$. Inimene, kes könnib paljajalu ja on seetõttu heas elektrilises kontaktis maapinnaga, puudutab kuiva käega karjuse traati ning saab elektrilöögi. Eeldage, et inimese keha takistus on hulga väiksem, kui kuiva käenaha takistus $r = 5 \text{ k}\Omega$.

a) Joonistage elektriskeem, mis kirjeldab olukorda, kui inimene saab parajasti karjuselt elektrilööki.

b) Millised sisetakistuse R väärused on lubatavad?

Ü36 Kaks kera ★

Autor: Jarl Patrick Paide, lahtine, 2024, G 2

Kaks sama tiheduse ja ühtlase massijaotusega kera peaaegu puutuvad üksteist (keskpunktide vaheline kaugus on kaks raadiust), aga hõõrdumist ei toimu. Kerad tiirlevad ümber üksteise gravitatsioonijõu tõttu nurkkiirusega ω . Leia kerade tihedus.

Ü37 Hajumine ★

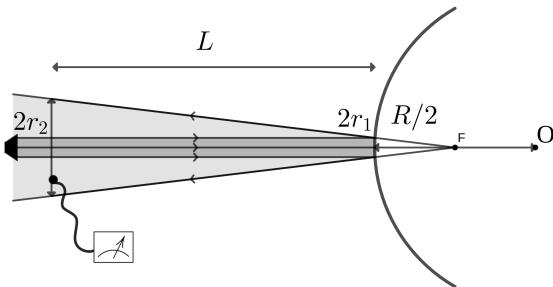
Autor: Moorits Mihkel Muru, piirkonnavoor, 2024, G 2

Juhani on valgusallikas, mis tekitab paralleelset silindrikujulist valgusvihku, ning väike fotodetektorist tajur, mis mõõdab valguse intensiivsust. Esimeses katses mõõdab Juhan valgusallika intensiivsust, asetades tajuri täielikult valgusallika valgusvihku (ilma kumerpeeglita). Teises katses (vt joonis) suunab Juhan valgusvihu kumerpeglile, mille kumerusraadius on $R = 30 \text{ cm}$, nii et valgusvihk asub optilisel peateljel ja on sellega paralleelne. Seejärel mõõdab Juhan hajunud valguse intensiivsust, asetades tajuri täielikult peegeldunud valgusvihku (aga valgusallika enda valgusvihust kõrvale) peegli pinnast $L = 60 \text{ cm}$ kaugusele. Mitu korda on tajuri näit esimeses katses suurem kui teises katses? Võib eeldada, et valgusallika valgusvihu laius on palju väiksem peegli kumerusraadiusest.

Ü38 Ragulka ★

Autor: Taavi Pungas, lõppvoor, 2024, G 2

Eva leidis pargist ragulka ning soovis sellega lasta kivikese vertikaalselt üles nii, et see täpselt puudutaks tema kohal asuvat puuoksa. Kui Eva venitab ragulka kummi lõdvast olekust 3 cm kaugusele, siis jääb kivil puudu $1/4$ vahemast oksani. Kui kaugele peaks Eva venitama ragulka kummi, et kivike jõuaks täpselt oksani?



Ü39 Ring ★★

Autor: Jaan Kalda, lahtine, 2018, G 3

Traadist, mille ühe detsimeetri takistus on üks oom tehakse ring ümbermõõduga L kuus detsimeetrit. Iga detsimeetri järel märgitakse punktid a, b, \dots, f . Punktide a ja e vahele ühendatakse patarei pingega $7V$, punktide d ja f vahele ampermeeter ning d ja b vahele voltmeeter. Punktide f ja b ühendatakse samast traadist lõigatud kahe-detsimeetrise traadijupiga. Leidke ampermeetri ja voltmeetri näidud.

Ü40 Lääts ★★

Autor: Hans Daniel Kaimre, lahtine, 2019, G 3

Optiline süsteem koosneb punktvalgusallikast ja ekraanist, mille vahel on asetatud õhuke koondav lääts. Ekraani ja valgusallika vaheline kaugus on L . Millist tingimust peab rahuldama läätse fookuskaugus, et ekraanile tekiks tõeline kujutis? Kui fookuskaugus on võimalikult suur, siis milline on optilise süsteemi suurus?

Ü41 Kärbes ★★

Autor: , piirkonnavor, 2019, G 3

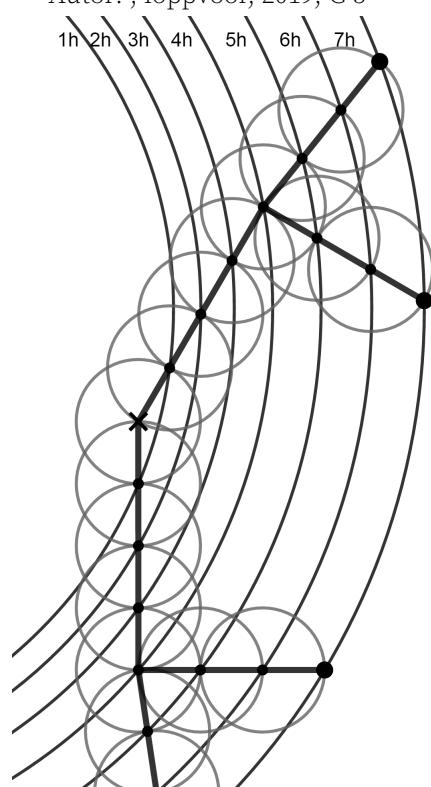
Kärbes asub kumerläätsest kümnekordse fookuskauguse kaugusel ning läätse optilisest peateljest kolme fookuskauguse kaugusel ning hakkab liikuma otse oma kujutise poole. Kui kaugel läätse tasandist asub kärbes hetkel, kui tema tõeline kujutis liigub kärbse suhtes

- a)** kõige aeglasmalt;
- b)** kõige kiiremini? Kui suur on kärbse kujutise kiirus kärbse suhtes nendel hetkedel? Põhjendage vastust.

Ü42 Lennuk ★★

Joonisel on lennuki algne asukoht märgitud ristiiga. Iga tunni järel mõõdeti lennuki kaugust fikseeritud punktist. Saadud kaugused on joonisel märgitud ringjoonena mõõtepunkti ümber. Konstrueerige kõikvõimalikud lennuki trajektoorid 7 h jooksul, kui on teada, et pärast starti lendas lennuk 4 h otse, muutis seejärel suunda ning lendas ülejäänu ajal samuti otse. Eeldada, et lennuki kiirus maapinna suhtes oli ühtlaselt 500 km/h.

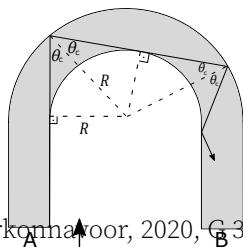
Autor: , lõppvoor, 2019, G 3



Lahendus esitada lisalehel. *Märkus.* Suuna muutus võis olla ka väga väike.

Ü43 U-klaas ★★ Autor: Hans Daniel Kaimre, lahtine, 2020, G 3

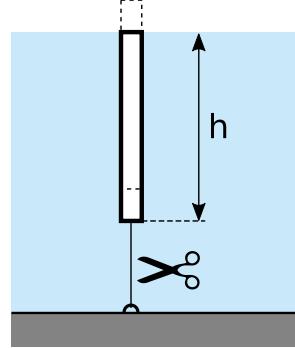
U-kujulise klaastüki (vt joonist) ristlõige on ristkülik. Tahule A langeb selle pinnaga risti paralleelne valgusvihk. Millist tingimust peaks rahuldama sisemise külje kõverusraadius R , et kogu pealelangev valgus väljuks tahust B? Struktuuri laius $d = 3 \text{ cm}$, klaasi murdumisnäitaja $n = 1,5$ ning tahud A ja B on kaetud peegeldumisvastase kilega.



Ü44 Hüppav silinder ★★

Autor: , piirkonna voor, 2020, G 3

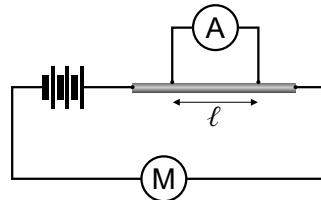
Peenike seest tühi silinder on nööriga kinnitatud veega täidetud basseini põhja nii, nagu näidatud joonisel. Silindri ülemine ots asub veepinnal. Nöör lõigatakse läbi ja silinder hakkab ülespoole liikuma ning hüppab veest välja. Kui kõrgele õhku tõuseb silindri alumine ots veepinnast maksimaalselt? Eeldage, et veest täielikult väljumise hetkel läheb 50% silindri kineetilisest energiast kaduma silindri ja veepinna vastastikmõju töttu. Muude keskkonna takistusjöududega ei pea arvestama. Silindri mass $m = 30 \text{ g}$, raadius $r = 1 \text{ cm}$ ja kõrgus $h = 0,5 \text{ m}$. Vee tihedus $\rho_v = 1000 \text{ kg/m}^3$.



Ü45 Käivitusvool ★★

Autor: , lõppvoor, 2020, G 3

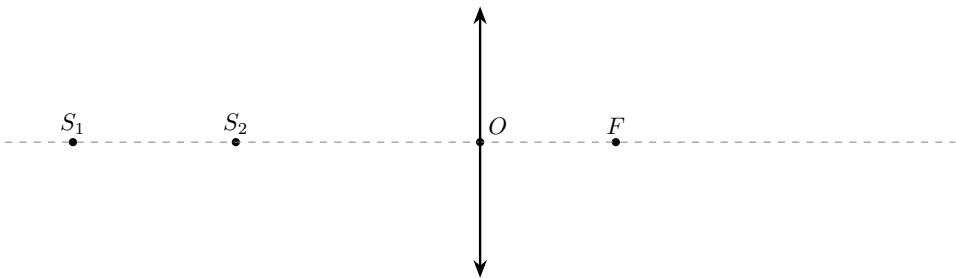
Taavet otsustas ära mõõta auto käivitusvoolu tugevuse. Ta leidis ampermeetri mõõtepiirkonna ga $I_0 = 1 \text{ mA}$ ja sisetakistusega $R_0 = 100 \Omega$ ja para ja pikkusega jupi vasktoru, mille sisediameteer oli $d_1 = 6 \text{ mm}$ ja välisdiameteer $d_2 = 8 \text{ mm}$. Ta ühen das vasktoru jadamisi autoaku ja starteriga (mida võib käsitleda kui takistit) ning ampermeetri rööbiti vasktoruga nagu kujutatud kõrvaloleval skeemil. Milline tuleks valida kontaktide vaheline distants ℓ , et ampermeetri maksimaalsele näidule I_0 vastaks mõõdetava voolu suurus $I_1 = 500 \text{ A}$? Vase eritakistus on $\rho = 1,68 \cdot 10^{-8} \Omega \text{ m}$. Ühendusuhtmete ja -kontaktide takistused võib lugeda tühiseks.



Ü46 Kumerpeegel ★★

Autor: Konstantin Dukatš, lahtine, 2021, G 3

Joonisel on kujutatud kumerlääts, selle optiline peatelg ning üks fookustest. On teada, et kusagil optilises skeemis leidub ka kumerpeegel. Kui panna valgusallikas punktidesse S_1 või S_2 , siis tekkinud kujutis kattub allikaga. Konstrueerige kumerpeegel. Esitage lahendus lisalehel.



Ü47 Joogid ★★

Autor: Kaarel Hänni, piirkonnavoor, 2021, G 3

Kauril on 3 anumat, igas neist on võrdselt 1 kg vett. Anumates oleva vee temperatuurid on vastavalt 10°C , 20°C ja 30°C . Kas Kauril on võimalik vaid antud vede-likke segades

- a)** teha 2 jooki, kumbki massiga 1,5 kg ja temperatuuridega vastavalt 13°C ja 27°C ;
- b)** teha 5 jooki, igauks massiga 0,5 kg ja temperatuuridega vastavalt 12°C , 17°C , 18°C , 20°C ja 22°C ? Eeldage mõlema puhul, et soojusvahetust keskkonnaga ei toimu.

Ü48 Lääts ja ekraan ★★

Autor: Oleg Košik, lõppvoor, 2021, G 3

Jarl asetas punktvalgusallika ja ekraani vahele õhukese kumerläätse (raamita klaas-lääts); valgusallikas asus peateljal ja ekraani tasand oli paralleelne läätse tasandi-ga. Ta liigutas ekraani edasi-tagasi, uurides sellel tekkivat mustrit ning pani tähele, et kui ekraan asub läätsest kauguse selgus, et kui ekraani kaugus läätsest oli 60 cm, siis ei olnud seal näha enam mingit mustrit: ekraan oli ühtlase heledusega nagu läätse polnuks!

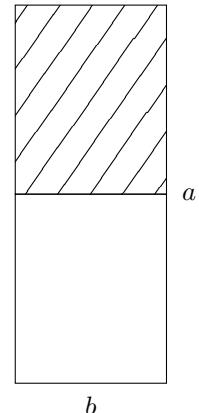
- a)** Leidke läätse fookuskaugus.
- b)** Mis kujuga muster tekib ekraanile, kui ekraan asub kaugemal, kui 10 cm läät-sest, kuid lähemal, kui 60 cm läätsest?

Ü49 Kond eskalaatoril ★★

Autor: Kaarel Hänni, lahtine, 2022, G 3

Sandra eesmärk on kõndida ristkülikukujulise koridori alumisest vasakust nurgast ülemisse paremasse nurka. Koridor on piklik ristkülik (pealtvaade joonisel) pikkusega $a = 200\text{ m}$ ja laiusega $b = 4\text{ m}$. Enda aitamiseks saab ta koridori ülemise poole põranda asenda vabalt valitud suunas liikuva lindiga (nagu tihti lennujaamades olevad horisontaalsed eskalaatorid). Sandra soovib lindi liikumissuuna valida selliselt, et ta saab võimalikult kiiresti koridori alumisest vasakust nurgast koridori vasakpoolse küljega peaks Sandra lindi liikumissuuna valima? Sandra könnib enda all oleva pinna suhtes maksimaalse kiirusega $v = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, lint liigub maksimaalse kiirusega $u = 3 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

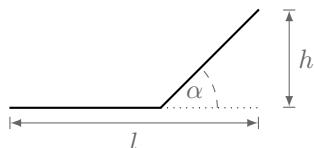
Märkus: kui $x \approx 0$, siis võib kasutada lähendusi $\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{x}{2}$ ja $\sin x \approx \tan x \approx x$ (nurk x on radiaanides).



Ü50 Liumägi ★★

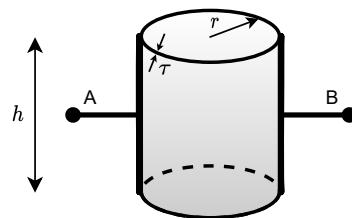
Autor: Kaarel Kivilsalu, piirkonnavor, 2022, G 3

Liumägi koosneb kahest osast: kaldpind nurgaga α ja horisontaalne pind. Liumäe kõrgus on h ja horisontaalne pikkus on l (vt joonist). Liumägi tahetakse teha selline, et seal all lastes jõuaks täpselt liumäe lõppu, aga jäädes lõpus paigale. Võib eeldada, et üleminek kaldpinnalt horisontaalsele pinnale on sujuv. Milline peaks olema sellise liumäe jaoks hõõrdetegur μ liumäe ja allalaskja vahel?

**Ü51 Silinder ★★**

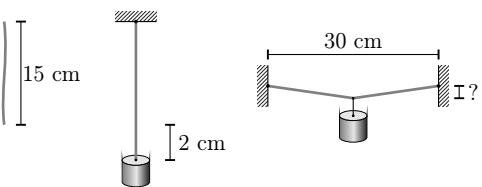
Autor: Richard Luhtaru, lõppvoor, 2022, G 3

Õhukese silindri eritakistus on ρ , raadius on r , kõrgus on h ja paksus on τ . Silindri ringikujulised põhhad on eemaldatud ning silindri vastaspooltel on silindri materjal asendatud peenikeste juhtivate klemmidega, mille pikkus on h ja paksus on τ (A ja B joonisel). Leidke kahe klemmi vaheline takistus.

**Ü52 Kummipael ★★**

Autor: Valter Kiisk, lahtine, 2023, G 3

Kummipaela pikkus vabas olekus on $L = 15\text{ cm}$. Kui kummipaela külge riputati tundmatu massiga koormis, siis kummipaela pikkus kasvas $\Delta L = 2\text{ cm}$ võrra (vt joonis). Seejärel kummipael fikseeriti otstest kahe samal kõrgusel paikneva punkti vahelle, mille vahakaugus oli $2L$ (st pael venitati L võrra pikemaks). Sama koormis riputati nüüd kummipaela keskpunkti. Hinnake, kui suur on selle punkti läbivajumine. Võib eeldada, et kummipaelas tekkiv elastsusjõud on võrdeline pikenemisega ja kummipaela enda mass on tühine.
Märkus: Väikeste nurkade x korral võib kasutada lähendust $\sin x \approx \tan x \approx x$ (nurk x on radiaanides).

**Ü53 Ökonoomne sõit ★★**

Autor: Marten Rannut, piirkonnavor, 2023, G 3

Linnas kiirendab sisepõlemismootoriga auto tippkiiruseni $40 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ ning peab peatumma keskmiselt iga 100 m tagant. Linnasõidul võib õhutakistust mitte arvestada. Maanteel sõidab auto püsiva kiirusega $90 \frac{\text{km}}{\text{h}}$. Õhutakistusjõud avaldub kujul $F = cv^2$, kus $c = 1,3 \frac{\text{kg}}{\text{m}}$ ja v on auto kiirus. Auto kaalub $1,5\text{ t}$. Leidke maanteesõidu ja linnasõidu kütusekulude suhe 100 km sõidu kohta. Eeldage, et mootori kasutegur ei sõltu kiirusest ja kiirendusest.

Ü54 Lääts ja kaks peeglit ★★

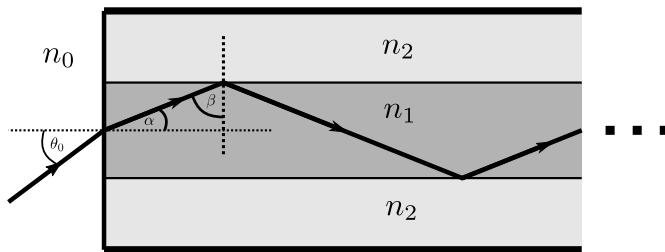
Autor: Aigar Vaigu, lõppvoor, 2023, G 3

Konstrueerige objekti AB (vt joonist lisalehel) kõik kujutised. Skeemil on hall sein, sinine 45° kaldu pool läbilaskev peegel (pool valgusest läheb otse läbi, pool peegeldub nagu tavalises tasapeeglis), kumerlääts fookuskaugusega f ja tasapeegel. Lahendage ülesanne lisalehel.

Ü55 Valguskaabel ★★

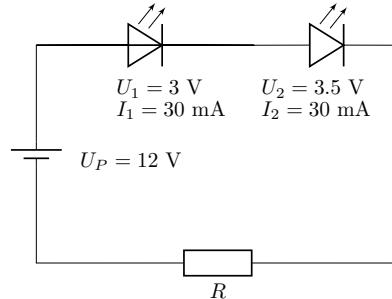
Autor: Richard Luhtaru, lahtine, 2024, G 3

Silindrilise sirge valguskaabel koosneb südamikust ja kattekihist ning selle ots on tasane ja kaabliga risti. Kui valgustada kaabli otsa välise valgusallikaga, siseneb osa välisest valgusest südamikku ja levib praktiliselt kadudeta pikki vahemaid. Seda, kui vastuvõtlik on valguskaabel välisele valgusele, iseloomustab numbriline apertuur (NA), mis on defineeritud kui $NA = \sin \theta_0$, kus θ_0 on suurim välise valguskiire nurk (kaabli sümmeetriateli suhtes), mis valguskaablisse sisenedes levib selle südamikus kadudeta. Leia valguskaabli numbriline apertuur NA , kui südamiku murdumisnäitaja on n_1 , kattekihi murdumisnäitaja on n_2 ja kaabel asub välises keskkonnas murdumisnäitajaga n_0 .

**Ü56 Valgusdioodid ★★**

Autor: Hans Daniel Kaimre, piirkonnavoor, 2024, G 3

Mari koostas patareist ning kahest valgusdioodist (LEDist) vooluringi (vt joonist), kuid vooluahela kokkuühendamisel valgusdioodid põlesid läbi ning purunesid. Mari küsis isalt nõu, kes soovitas lisada vooluringi üks takisti. Aidake Maril välja mõelda, kui suure väärtsusega takisti ja kuidas peaks ta skeemi lisama, et valgusdioodid töötaks normaaltingimustel. Joonistage uus vooluahel ning arvutage sobiva takisti väärtsus. Patarei klemmipingi $U = 12\text{ V}$, valgusdioodide nimipinged on vastavalt $U_1 = 3\text{ V}$ ja $U_2 = 3.5\text{ V}$ ning optimaalne voolutugevus normaaltingimustel töötamisel $I_1 = I_2 = 30\text{ mA}$.



Ü57 Leedid ★★

Autor: Sandra Schumann, lõppvoor, 2024, G 3

Kadil on punane ja sinine valgusdiood, 9 V patarei, 300Ω ja 360Ω takistid ning punane ja sinine nupplülit. Nupplülitil on kaks klemmi, mis on omavahel lühises, kui nupp alla vajutada, ja mis ei ole ühenduses, kui nuppu mitte vajutada. Punane diood süttib, kui talle rakendada päripinge $1,8\text{ V}$, ja sinine, kui talle rakendada päripinge 3 V . Väiksematel pingetel dioode vool ei läbi. Pinge dioodidel ei sõltu teda läbiva voolu suurusest. Millise skeemi peab Kadi moodustama, et vajutades punast lülitit põleks punane diood, vajutades sinist lülitit põleks sinine diood, mitte kumbagi vajutades ei põleks kumbki diood ja mõlemat lülitit vajutades samuti ei põleks kumbki diood. Kadi tahab ka, et dioodi põlemisel läbiks seda vool tugevusega 20 mA ning patarei poleks kunagi lühises.

Ü58 Kahurid ★★

Autor: Erkki Tempel, lahtine, 2018, G 4

Kahurist A lastakse horisondi suhtes nurga $\alpha = 30^\circ$ all lendu kuul algkiirusega $v_A = 140\text{ m/s}$ kahuri B suunas, mis on esimesest kahurist $l = 1\text{ km}$ kaugusel samal tasapinnal. Sel hetkel, kui kuul on oma trajektoori kõrgeimas punktis, tulistatakse kahurist B teine kuul, mis $t_1 = 5\text{ s}$ pärast põrkub esimese kuuliga. Millise algkiirusega tulistati kuul kahurist B ? Õhutakistusega mitte arrestada; vabalangemise kiirendus $g \approx 10\text{ m/s}^2$.

Ü59 Laetud tasand ★★

Autor: Kaarel Hänni, lahtine, 2019, G 4

Ruumis on ühtlaselt laetud tasand ja paaritu arv võrdseid laenguid, mis ei asu tasandil. Tõesta, et tasandile mõjuv resultantjöud ei saa olla 0.

Ü60 Vaakum ★★

Autor: , piirkonnavor, 2019, G 4

Mõlemast otsast õhukindlalt suletud klaastoru pikkus $\ell = 1\text{ m}$ ja sisediameter $d = 1\text{ cm}$. Õhurõhk $p = 101,3\text{ kPa}$. **a)** Kui palju tööd tuleb minimaalselt teha vaa-kumi tekitamiseks selles torus?

b) Horisontaalse vakumeeritud toru ühes otsas on teraskuulike, mis saab libiseda toru sees praktiliselt ilma hõordumiseta ja mille diameeter on võrdne toru sise-diametriga. Õnnetuse tõttu puruneb toru ots, mille lähedal kuulike paiknev ja õhu surve paneb kuulikese liikuma vakumeeritud osa suunas. Kui suure kiiruse saavutab kuulike jõudes toru teise otsa? Terase tihedus on $7,9\text{ g/cm}^3$.

Ü61 Konveier ★★

Autor: , lõppvoor, 2019, G 4

Sile metallplaat pikkusega l sõidab konveieril. Konveier koosneb kahest osast ning kummaligi osal on oma sile konveierilint. Mõlema lindi pikkus on x , kuid esimene lint liigub kiirusega v_1 ning teine kiirusega v_2 . Algases on plaat esimese lindi alguses nii, et plaat asub täielikult esimesel konveierilindil ning plaadi tagumine serv ühtib esimese lindi algusega. Lõppasendis on plaat teise lindi lõpus nii, et plaat asub täielikult teisel konveierilindil ning plaadi esimene serv ühtib teise lindi lõpuga. Leida aeg t , mis kulub plaadil algasendist lõppasendisse jõudmiseks.

Hõõrdetegur plaadi ja esimese konveierilindi vahel on μ_1 ning plaadi ja teise konveierilindi vahel μ_2 . Eeldada, et üleminekukohas on vahe konveierilintide vahel tühiselt väike ning aeg, mis kulub plaadi kiiruse muutumiseks üleminekukohas, on tühiselt väike võrreldes koguajaga.

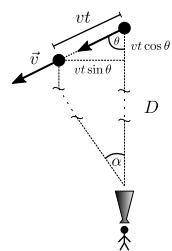
Ü62 Noova ★★

Autor: Richard Luhtaru, lahtine, 2020, G 4

Hobiastroonoom Jarl vaatleb teleskoobiga noovaplahvatust ja mõõdab ühe plahvatuse ainejäenuki kiirust. On teada, et ainejäenuki tegelik kiirus on v ja nurk kiirusvektori ja vaatesihi vahel on θ .

Jarl teab varasemate mõõtmiste põhjal, et noova kaugus on D , kuid ta ei tea nurka θ . Seetõttu eeldab Jarl, et ainejäänu liigub vaatesihiga risti ning arvutab kauguse ja jäänuki nurga muutumise abil jäänuki näiva kiiruse v' .

Leia Jarli poolt mõõdetav näiv kiirus v' , eeldusel et noova on väga kaugel ($vt \ll D$, kus t on vaatluse aeg) ning et kosmoloogiline paisumine on tühine. Valguse kiirus on c . Kas on võimalik, et ainejäänuki näiv kiirus v' on mingi v ja θ väärtsuse korral valguse kiirusest suurem, isegi kui $v < c$?



Ü63 Elektriruut ★★

Autor: , piirkonnnavoor, 2020, G 4

Leidke takistus punktide 1 ja 2 vahel (vt. joonis). Kõigi takistite takistus on R

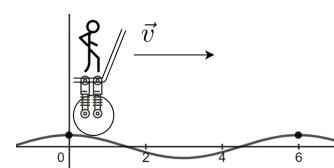
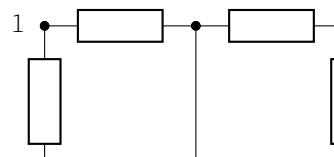
Ü64 Tasakaalulikur ★★

Autor:

, lõppvoor, 2020, G 4

Hannes massiga $m = 75 \text{ kg}$ sõidab tasakaaluliikuriga konarlikul teel ühtlase kiirusega v . Konarliku tee profili saab külgvaates lähendada koosinulainelise amplituudiga $A = 60 \text{ mm}$ ja perioodiga $\Delta x = 6 \text{ m}$. Tasakaaluliikril on amortiseerimissüsteem, mis koosneb $n = 2$ rööbiti ühendatud vedrust jäikusega $k = 900 \frac{\text{N}}{\text{m}}$. Leidke kiirus v , mille juures Hannes võngub enim ehk tekib resonants. Tasakaaluliikuri kaal on tühine. Kiirus v on kiirus, mida näitaks tasakaaluliikuril olev GPS seade, mitte ratta keerlemisel põhinev odomeeter.

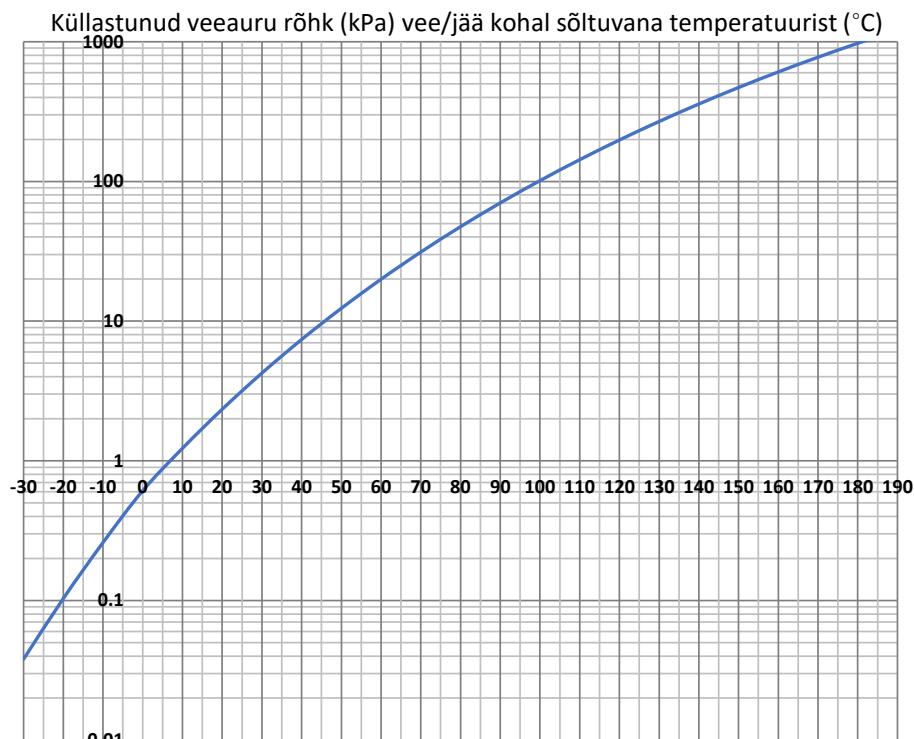
Vihje: Kui keha kiirendus a ja kaugus tasakaalupunktist y on seotud võrdusega $a = -\omega^2 y$, kus ω on positiivne konstant, siis võngub keha perioodiga $\frac{2\pi}{\omega}$.



Ü65 Kuiv õhk ★★ Autor: Jaan Kalda, lahtine, 2021, G 4

Talvel võib liigne kuivus toas probleeme tekitada: alla 20-protsendine suhteline niiskus ei mõju hästi inimese nahale ja limaskestadele. Eeldage, et välisõhk siseneb tippa läbi ventilatsiooni ja toaõhk vahetub väljast tulnud õhuga ühe tunni jooksul peaaegu täielikult ning et toas hoitakse 20-kraadilist õhutemperatuuri. Millise välisõhu temperatuuri juures langeb toas suhteline niiskus alla 20%, kui väljas on suhteline niiskus 80%? Küllastunud auru röhu sõltuvus temperatuurist on toodud graafikul.

Märkus: suhteliseks niiskuseks nimetatakse õhus oleva veeauru osaröhu ja antud temperatuuri juures küllastunud veeauru osaröhu suhet.



Ü66 Batüskaaf ★★

Autor: Kaido Reivelt, piirkonnavor, 2021, G 4

Monika sõidab keset ooceanit batüskaafi ehk süvaveeliikuriga. Ühel hetkel ülesid üles batüskaafi mootorid, millega veepaakidest vett välja pumbata. See vajus $h = 10\text{ km}$ sügavusele ooceani põhja ja jäi sinna lebama. Selleks, et batüskaaf pinna poole töösma hakkaks, on selle paakidest vaja ooceanisse välja pumbata $V = 1\text{ L}$ vett, mille tulemusena jäab paakidesse vaakum. Monikal on võimalik kasutada $d = 1\text{ cm}$ läbimõõduga silindrilist pumpa ja erinevaid lihtmehhanisme selle pumbaga töötamiseks. Kui kaua kulub Monikal vee välja pumpamiseks aega, kui ta suudab rakendada jõudu $F = 500\text{ N}$ ja teha tööd keskmise võimsusega $P = 100\text{ W}$.

Ookeani tihedus on $\rho = 1030 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ ning gravitatsioonikiirendus $g = 9,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$. Õhurõhkku võib ignoreerida.

Ü67 Sõit jääl ★★

Autor: Richar Luhtaru, lõppvoor, 2021, G 4

Kaarel sõidab autoga libedal horisontaalsel teel pikkusega $2L = 100 \text{ m}$. Tee koosneb kahest lõigust: esimesel lõigul pikkusega $L = 50 \text{ m}$ on rataste ja maapinna vaheline hõordetegur $\mu_1 = 0,1$ ja teisel lõigul pikkusega $L = 50 \text{ m}$ on hõordetegur $\mu_2 = 0,2$. Alguses on Kaarli auto esimese lõigu alguses paigal. Ta tahab tee läbida võimalikult kiiresti, nii et auto jäiks täpselt teise lõigu lõpus seisma. Leidke minimaalne võimalik tee läbimise aeg. Raskuskiirenduse väärtsuseks võtta $g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

Ü68 Kuiv jää ★★

Autor: Uku Andreas Reigo, lahtine, 2022, G 4

Kuiva jääd (tahke CO_2) kasutatakse vahel, et tekitada sublimerumisel eraldunud gaasi ning veepiiskade abil madal udu näiteks teatris või võtteplatsil. Noor füüsik Gerda tahab teada, mis sellisel tegevusel juhtuks kinnises ruumis. Selleks võtab ta natuke kuiva jääd ($m_{\text{CO}_2} = 10 \text{ g}$) sublimerumisttemperatuuril ($T_0 = -78,5^\circ\text{C}$) ja asetab selle tühja tünni diameetriga $D = 1 \text{ m}$ ja körgusega $h = 1,5 \text{ m}$. Gerda sulgeb tünni koheselt ja jätab meelde, et koos jääga on seal sees toatemperatuuril ($T_{\text{öhk}} = 25^\circ\text{C}$) õhk. Eeldame, et tünni seinade soojusmahtuvus on tühine ning ei toimu soojusvahetust tünnivälise keskkonnaga.

(a) Milline on õhutemperatuur ning -rõhk tünnis siis, kui kogu kuiv jää on sublimerunud?

(b) Kuidas ja miks muutuksid (suureneks, väheneks, jäeks samaks) õhutemperatuur ning -rõhk, kui Gerda oleks kuiva jäää pannud tünni põhja veevanni, nagu seda tihti kasutatakse?

Kuiva jäää sublimerumissoojus on $\lambda_{\text{CO}_2} = 32,3 \frac{\text{kJ}}{\text{mol}}$. Süsiniku ja hapniku molaarmassid on vastavalt $M_C = 12,0 \frac{\text{g}}{\text{mol}}$ ja $M_O = 16,0 \frac{\text{g}}{\text{mol}}$. Õhu tihedus toatemperatuuril on $\rho_{\text{öhk}} = 1,29 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$. Süsihaptegaasi ja õhu erisoojusmahtuvused konstantsel ruumalal on vastavalt $C_{\text{CO}_2} = 0,657 \frac{\text{kJ}}{\text{K kg}}$ ja $C_{\text{öhk}} = 0,718 \frac{\text{kJ}}{\text{K kg}}$. Atmosfäärirõhk on $p_0 = 101,3 \text{ kPa}$ ning universaalne gaasikonstant $R = 8,314 \frac{\text{J}}{\text{K mol}}$.

Ü69 Kaks tuba ★★

Autor: Jarl Patrick Paide, piirkonnavoor, 2022, G 4

Majas asub kaks ruudukujulist tuba, millel on üks tühine sein, ülejäänud seinad on välisseinad. Köik seinad on identsed ja iga seina soojusjuhtivustegur on k . Ühes toas on lisaks tavaleisele küttele lisaks kütteallikas võimsusega P . Kui suur on tubade temperatuurierinevus? Võib eeldada, et soojusvahetus ei toimu läbi põrandat ja lae.

Vihje: Soojusvahetuse võimsus läbi seina avaldub kujul $N = k(T_1 - T_2)$, kus k on soojusjuhtivustegur ning T_1 ja T_2 seina kahe pinna temperatuurid.

Ü70 Läätsede kolmnurk ★★

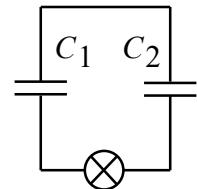
Autor: Erkki Tempel, lõppvoor, 2022, G 4

Kuhu tuleb paigutada ekraan, et ekraanile tekiks kaks valgusallika A kujutist? Kolme läätse fookused ühtivad ja asuvad punktis F . Lahendage ülesanne lisalehel.

Ü71 Kondensaatorid ★★

Autor: Päivo Simson, lahtine, 2023, G 4

Indrekul on kaks kondensaatorit mahtuvustega $C_1 = 40 \mu\text{F}$ ja $C_2 = 60 \mu\text{F}$. Esimene neist (C_1) on laetud pingeni $U_0 = 15 \text{ kV}$ ja teine (C_2) on pingeta. Indrek soovib teist kondensaatorit esimese abil laadida, aga kardab, et laadimisjuhtmed süttivad suure voolutugevuse töötu. Selle välimiseks lisab ta ahelasse hõõglambi (vt joonis). Kui suur soojushulk eraldub kogu süsteemis, kui Indrek hoiab kondensaatoreid ühenduses pikka aega?

**Ü72 Droon ★★**

Autor: Marten Rannut, piirkonnavoor, 2023, G 4

Droon massiga $m = 500 \text{ g}$ hõljub õhus ja püsib paigal. Äkitselt hakkab puhuma järjest tugevnev tuuleiil ning selleks, et drooni paigal hoida, käivituvad drooni horisontaalsuunas tõukavad propellerid. On teada, et tuule poolt droonile mõjuv horisontaalsuunaline jõud kasvab konstantse kiirusega nullist puhangu alguses kuni väärtsuseni $F_t = 25 \text{ N}$ ajahetkel $t_t = 0,7 \text{ s}$. Drooni horisontaalsuunalist liikumist kontrollivad propellerid avaldavad tõukejõudu, mis kasvab samuti konstantse kiirusega, nullist puhangu alguses kuni väärtsuseni $F_p = 20 \text{ N}$ ajahetkel $t_p = 1,0 \text{ s}$. Leidke drooni horisontaalsuunaline kiirus $t = 0,5 \text{ s}$ pärast puhangu algust.

Ü73 Laev ★★

Autor: Kaarel Kivilsalu, lõppvoor, 2023, G 4

Laev sõitis läbi Suessi kanali ning jäi sinna kinni nii, et blokeeris kogu kanali. Laeva pikkus on l , laius on w , kõrgus on h ja mass on m . Veepiirist allpool on k osa laeva ruumalast, kusjuures $klwh\rho < m$. Võib eeldada, et laev on ühtlase massijaotusega risttahukas ja $l \gg w$. Vee tihedus on ρ , raskuskiirendus g ja kanali laius d . Hõõrde-tegr laeva kere ja kanali vahel on μ . Laeva mölemat otsa tömbavad puksiirlaevad kanali sihis eri suundades. Kui suure jõuga F peavad puksiirlaevad tömbama, et kinni jäänud laev hakkaks liikuma?

Ü74 Rongiühendus ★★

Autor: Jonatan Kalmus, lahtine, 2024, G 4

Raudteelõigul sõidavad rongid pikkusega $l = 900 \text{ m}$. Millise kiirusega peaksid rongid sõitma, et raudteelõigu läbilaskmisvõime oleks maksimaalne (s.t. päevas läbib raudteelõiku nii palju ronge kui võimalik) ja ohutu vahekaugus rongide vahel oleks tagatud? Lihtsustatult eeldada, et kahe sõitva rongi vaheline ohutu kaugus on kaks korda suurem kui vahemaa, mis kulub tagumisel rongil seisma jäämiseks. Rongid pidurdavad kiirendusega $a = 1 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$. Eeldada, et rongid sõidavad kogu raudteelõigu pikkuses ühtlase kiirusega üksteise järel ühes suunas.

Vihje: Kasuks võib tulla võrratus $x + y \geq 2\sqrt{xy}$ kui $x, y \geq 0$.

Ü75 Galileo termomeeter ★★

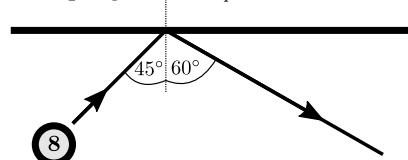
Autor: Jaan Kalda, piirkonnavor, 2024, G 4

Galileo termomeetris (vt foto) hõljuvad vees erineva massiga, kuid sama ruumalaga kuulikesed (see ruumala arvestab nii kuulikest kui ka sinna külge kinnitatud sildikest). Kuulikeste keskmise tihedus on väga lähedane vee tihedusele. Et vee tihedus sõltub temperatuurist, siis sõltuvalt temperatuurist võib kuulike tõusta nii pinnale kui vajuda põhja. Kui teatud kuulike hõljub anuma põhja ja veepinna vahel, siis on temperatuur võrdne selle kuulikese külge kinnitatud sildil näidatud temperatuuriga. Silti 20°C kandva kuulikese kogumass (koos sildikesega) on $m_1 = 20,000\text{ g}$; milline on silti 22°C kandva kuulikese mass? Vee ruumpaisumistegur on $k = 2,1 \cdot 10^{-4} \frac{1}{^{\circ}\text{C}}$, kuulikeste ruumpaisumistegur on sellest hulga väiksem. *Vihje:* Ruumpaisumistegur kirjeldab ruumala suhtelist suurenemist temperatuuri tõusmisel 1°C võrra, valemkulul: $\frac{\Delta V}{V} = k\Delta T$.

**Ü76 Piljard ★★** Autor: Richard Luhtaru, lõppvoor, 2024, G 4

Piljardikuul massiga $m = 200\text{ g}$ ja algkiirusega $v_0 = 1 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ põrkab mitteelastelt vastu piljardilaua serva, nii et nurk enne põrget on 45° ja nurk pärast põrget on 60° . Eeldage, et piljardilaua serv mõjutab kuuli ainult servaga risti olevas sihis. Leidke

- mitu protsendi piljardikuuli energiast läks põrke jooksul kaduma;
- kui suur oli keskmise põrke jooksul kuulile mõjuv jõud F_p , eeldades, et põrge kestis $t_p = 0,01\text{ s}$.

**Ü77 Hiiglane ★★★** Autor: Andres Põldaru, lahtine, 2018, G 5

Jukul vanem vend on tema kaks korda suuremaks skaleeritud identne koopia. Kas vanem vend hüppab kõrgemale kui Juku? Eeldage, et hüppeliigutus on mõlemal juhul täpselt sama ja et lihaste poolt tekitatav jõud sõltub ainult lihaste ristlõikepindalast. Hüppe kõrguse saamiseks lahtame pealae kõrgusest hüppaja pikkuse.

Ü78 Kuulid ★★ Autor: Erkki Tempel, lahtine, 2019, G 5

Mängupüssist lastakse otse üles kummist kuul algiirusega v . Sel ajal, kui esimene kuul on õhus, lastakse aja t pärast üles teine samasugune kuul samuti algiirusega v . Kui kõrgele h põrkab esimene kuul pärast esimest elastset põret?

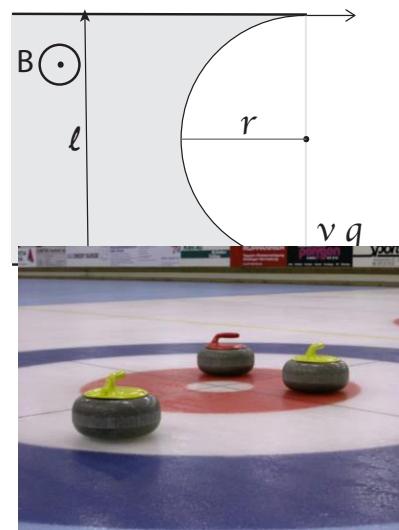
Ü79 Osake magnetväljas ★★

Autor: , piirkonnavor, 2019, G 5

Osake laenguga q ja massiga m liigub kiirusega v ning siseneb magnetvälja induktsiooniga B . Kui lai peab minimaalselt olema magnetvälja ala l , et osake liiguks pärast magnetväljast väljumist esialgsele liikumissuunale vastuunast?

Ü80 Jääkeegel ★★ Autor: , lõppvoor, 2019, G 5

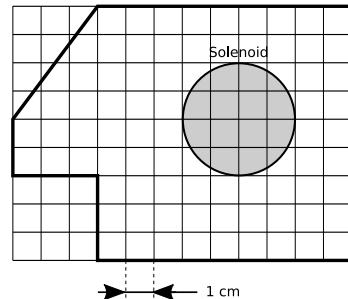
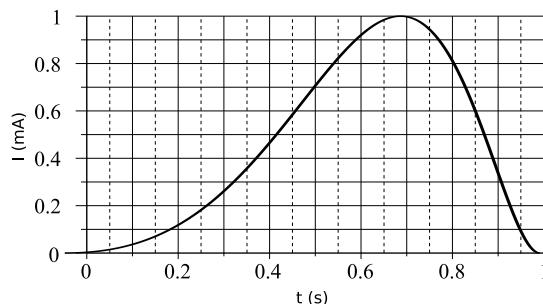
Jääkeegel ehk kurling on talispordimäng, mille eesmärgiks on enda meeskonna kivide libistamine jääljakule märgitud märklaua keskkohale võimalikult lähedale. Sealjuures on lubatud enda kividega vastase kivisid eemal tõugata. Vaatamegi olukorda, kus vastasel on önnestunud üks kivi täpselt märklaua keskele libistada. Kui suure kiirusega v_0 peaks oma kiviga vastase kivi tabama, et pärast vastase kivi eemaletõukamist jäaks see ise täpselt märklaua keskele? Jääkeegli kivid on võrdse massiga ning läbimõõduga $D = 29\text{ cm}$. Höördetegur jäät ja kivide vahel on $\mu = 0,02$ ning kividevahelisel põrkel muundub soojuseks $\eta = 40\%$ esialgsest kineetilisest energiast. Raskuskiirendus $g = 9,8\text{ m/s}^2$.



Ü81 Solenoid ja kontuur ★★

Autor: Päivo Simson, lahtine, 2020, G 5

Pikka solenoidi läbib muutuva tugevusega vool, mille ajaline sõltuvus on näidatud vasakpoolsel joonisel. Solenoidis on 1 cm kohta viis keerdu ning solenoidi teljega ristuvas tasandis paikneb parempoolsel joonisel toodud juhtiv kontuur eritakistusega $\rho = 1,7 \cdot 10^{-8} \Omega \text{ m}$ ja juhtme ristlõikepindalaaga $S_0 = 2,5 \text{ mm}^2$. Leidke voolutugevuse maksimaalne väärthus kontuuris. Vaakumi magnetiline läbitavus on $\mu_0 = 1,26 \cdot 10^{-6} \text{ H/m}$.

**Ü82 Purilennuk ★★**

Autor: , piirkonnavor, 2020, G 5

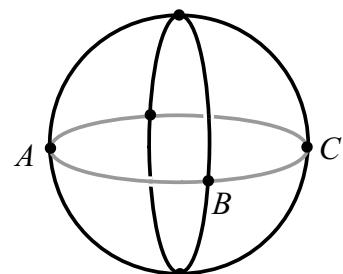
Purilennuk veeti tuulevaiksel päeval puksiirköiega propellerlennuki järel kõrguse ni $h = 2000 \text{ m}$ ja lasti seejärel lahti, mille tulemusel hakkas see ühtlase kiirusega maapinna poole liuglema. Kui suur on purilennuki maksimaalne lennukaus latilaskmispunktist piki maapinda? Purilennuki mass koos piloodiga oli $m = 500 \text{ kg}$. Enne latilaskmist ühtlase kiirusega horisontaalselt lennates oli puksiirköies tekkiv tõmbejöud $T = 120 \text{ N}$ (puksiirköis oli siis samuti horisontaalne). Rasakuksirendus $g = 9,8 \text{ m/s}^2$. Võib eeldada, et purilennukile mõjuva aerodünaamilise töstejöu ja õhutakistuse suhe F_L/F_D on pukseerimisel ja vabal liuglemisel ühesugune. Aerodünaamiline töstejöud F_L on definitsiooni kohaselt risti lennuki kiirusvektoriga õhu suhtes ja õhutakistus F_D on piki antud kiirusvektorit.

Ü83 Gloobus ★★

Autor: , lõppvoor, 2020, G 5

Sandral oli igav ja ta leidis vanatädi sahtlist kolm traadijuppi. Ta ühendas need võrdsete raadiustega rõngasteks ning ehitas huvi pärast gloobuse, nii nagu joonisel näidatud. Rõngad jaotased üksteist võrdsett neljaks ning nende lõikepunktides olid sõlmed. Traadid olid ühtlase joontakistusega ning Sandra mõõtis oommeetriga üksikute traadijuppide takistusteks $R_1 = 4 \Omega$ (joonisel hall rõngas) ja $R_2 = 8 \Omega$ (joonisel mustad rõngad). Mis oleks mõõdetav takistus

a) klemmide A ja C vahel;



b) klemmide A ja B vahel.

Ü84 Soolvesi ★★

Autor: Jaan Kalda, lahtine, 2021, G 5

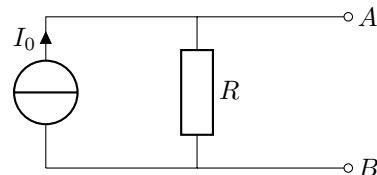
Silindriline anum on täidetud kõrguseni $H = 20\text{ cm}$ soolveega, mille tihedus on $\rho_s = 1,25\text{ g/cm}^3$. Silindrisse visatakse magedast veest tehtud jääkuubikuid sellisel hulgal, et vedeliku kõrgus anumas tõuseb $h = 10\text{ cm}$ võrra. Kui palju (ja millises suunas) muutub vedeliku tase silindris, kui kogu jää on ära sulanud ja mage vesi soolveega ära segunenud? Mageda vee tihedus $\rho_v = 1,00\text{ g/cm}^3$ ning jää tihedus $\rho_j = 0,90\text{ g/cm}^3$. Lugeda, et soolvee tiheduse erinevus mageda vee omast on võrdeline soola protsentuaalse sisaldusega soolvees.

Märkus: kõiki arvandmeid ei pruugi vaja minna.

Ü85 Vooluallikas ★★

Autor: Jaan Toots, piirkonnavor, 2021, G 5

Elektriskeem koosneb vooluallikast, mis annab välja konstantset voolu I_0 ja sellega rööpselt ühendatud sisetakistusest R . Leidke maksimaalne võimsus, mis saab klemmide A ja B vahel ühendatud tarbijal eralduda.

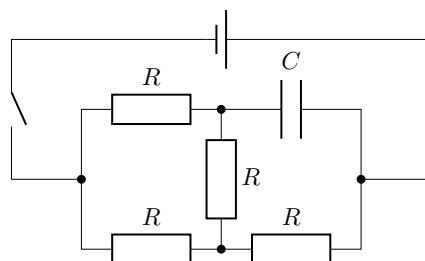


Ü86 Võimsus ★★

Autor: Kaur Aare Saar, lõppvoor, 2021, G 5

Juuresoleval skeemil on alguses lülitி avatud. Leidke takistitel eralduv koguvõimsus

- a)** vahetult pärast lülitī sulgemist;
 - b)** pika aja möödudes pärast lülitī sulgemist.
- Kõikide takistite takistus on R ja patarei pinge on V .



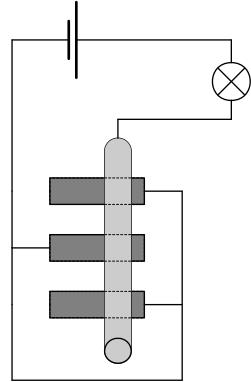
Ü87 Originaalsed reostaadid ★★

Autor: Richard Friedrichs, lahtine, 2022, G 5

Õhukeste grafitplaatide mõõtmed on $100 \mu\text{m} \times 1 \text{ cm} \times 10 \text{ cm}$ ning eritakistus on $\rho = 1 \Omega\text{m}$. Kolm sellist plati paiknevad paralleelselt isolatoril ja igale neist on ühele ots-test ühendatud plaadilaiune klemm (ei pea olema tingimata kõigil samas otsas!). Kõik need kolm klemmi on juhtmetega ühendatud patarei ühe otsaga. Patarei teine ots on ühendatud $R = 10 \text{k}\Omega$ takistust omava tarbija ühe klemmiga. Selle tarbija teine klemm on ühendatud juhtmete kaudu juhist toruga, mis on paigutatud risti üle kõigi kolme paberilipaka nagu näidatud joonisel. Patarei elektromotoorjõud $U = 12 \text{ V}$ ja sisetakistus on tühine.

(a) Kui toru puudutab kõiki pabereid $l = 8 \text{ cm}$ nende vaskust otsast, siis rakendub tarbijal ligikaudu võimsus $P = 2,65 \text{ mW}$. Mitu plati on ühendatud vasakult?

(b) Milline võimsus rakenduks tarbijal, kui liigitada toru nii, et ta puutuks iga paberilipakat vasakust otsast 7 cm kauguselt.



Ü88 Satelliittelevisioon ★★★

Autor: Krister Kasemaa, piirkonnavoor, 2022, G 5

Lapimaal, laiuskraadil $\varphi = 67^\circ$ elav Jussi soovib endale paigaldada satelliittelevisiooni. Satelliittelevisiooni võimaldavad satelliidid on geostatsionaarsel orbiidil. Eeldage, et satelliittelevisioon toimib, kui satelliit asub horisondist kõrgemal. Maa raadius $R = 6371 \text{ km}$, Maa pöörlemisperiood $T = 23 \text{ h } 56 \text{ min}$ ja raskuskiirendus maapinnal $g = 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

a) Kas Jussi saab endale satelliittelevisiooni paigaldada?

b) Mis on suurim laiuskraad, millel on satelliittelevisiooni paigaldamine veel võimalik?

Märkus: satelliit geostatsionaarsel orbiidil on maapinna suhtes paigal.

Ü89 Jalgratas ★★★

Autor: Valter Kiisk, lõppvoor, 2022, G 5

Elektrijalgratta mootor asub rattal rummus ning suudab arendada maksimaalset pöördemomenti $M = 60 \text{ N m}$ ja maksimaalset kasulikku võimsust $P = 500 \text{ W}$ (võib eeldada, et viimane ei sõltu kiirusest). Rattad on 26-tollised ehk raadiusega $r = 0,33 \text{ m}$. Jalgratta ja sõitja summaarne mass $m = 110 \text{ kg}$. Höördejõu rataste telgedes võib lugeda tühiseks.

a) Kui suure maksimaalse töusunurgaga mäenõlvast saaks sellise jalgrattaga vaid elektri jõul üles sõita?

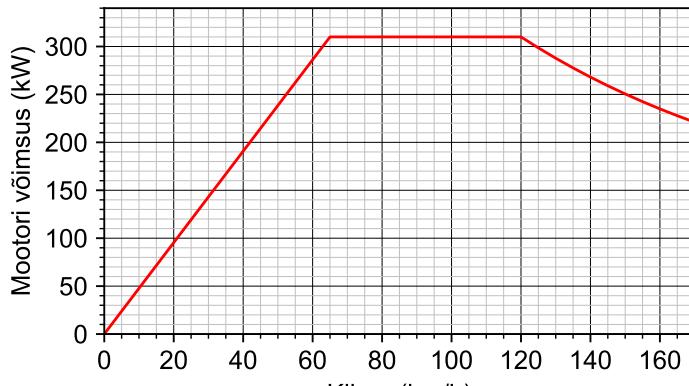
b) Kui suure maksimaalse kiiruse saavutaks jalgratas mõne aja möödudes, kui töus oleks $\alpha = 5^\circ$?

Ü90 Elektriauto ★★★

Autor: Valter Kiisk, lahtine, 2023, G 5

Gaafikul on kujutatud teatava elektriauto mootori kasuliku mehaanilise võimsuse sõltuvus kiirusest. Auto mass on $m = 2200 \text{ kg}$.

a) Milline on suurim võimalik kiirendus?

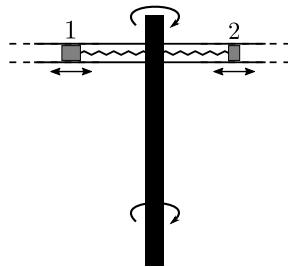


b) Minimaalselt kui kaua aega kulub 100 km tunnikiiruse saavutamiseks? Õhutakistust ja rehvi libisemist teekattel võib ignoreerida.

Ü91 Vedru keerutamine ★★

Autor: Sandra Schumann, piirkonnavaor, 2023, G 5

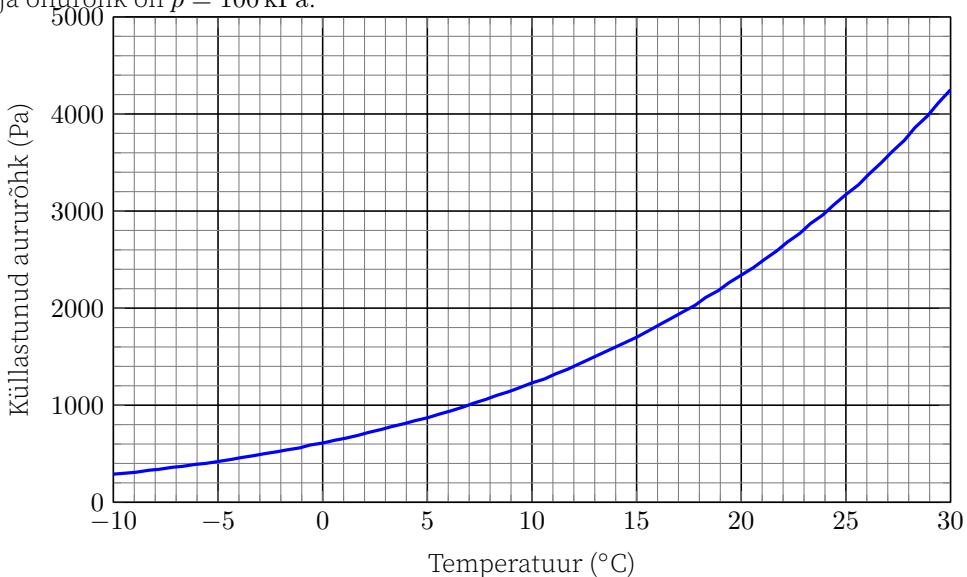
Kaks erineva jäikusega, kuid sama pikkusega vedru on kinnitatud ühest otsast posti külge. Kummagi vedru teises otsas on raskus, kusjuures esimese vedru olev raskus on kaks korda suurema massiga kui teise vedru otsas olev raskus. Mõlemad vedrud asuvad hõõrdevabas kanalis, kus raskused saavad liikuda ainult horisontaalselt, mistõttu gravitatsiooniga arvestama ei pea. Post hakkab pöörlema nii, et ka vedrude otsas olevad massid hakkavad liikuma ringsel trajektooril. Selle peale pikeneb esimene vedru kaks korda ja teine neli korda. Mis on vedrude jäikuste suhe? Vedrude enda massid võib lugeda raskuse massiga võrreldes tühiselt väikeks. Eeldage, et vedru pikenemine on piisavalt väike selleks, et kehtiks Hooke'i seadus.



Ü92 Sundventilatsioon ★★

Autor: Kaur Aare Saar, lõppvoor, 2023, G 5

Maril on kodus sundventilatsioon. Ta avastas, et ta peab õhuniisutit, mille paaki mahub $m = 1 \text{ kg}$ vett, täitma iga kümne tunni tagant selleks, et hoida toas suhtelist õhuniiskust $r_1 = 50\%$. Väljas on temperatuur $T_2 = -5^\circ\text{C}$ ja suhteline õhuniiskus $r_2 = 80\%$ ning toas on temperatuur $T_1 = 20^\circ\text{C}$. Kasutades juuresolevat küllastunud aururõhu graafikut, leidke mis kiirusega vahetab sundventilatsioon toas olevat õhku. Vee molaarmass on $M = 18 \frac{\text{g}}{\text{mol}}$, gaasi universaalkonstant $R = 8,31 \frac{\text{J}}{\text{mol K}}$ ja õhurõhk on $p = 100 \text{ kPa}$.

**Ü93 Värske õhk ★★**

Autor: Jaan Kalda, lahtine, 2024, G 5

Anu hoiab õhutusakna osaliselt lahti, parasjagu nii palju, et süsihaptegaasi sisaldus toas ei oleks suurem, kui 1000 ppm . Lühend ppm tähendab "osakest miljoni kohta", st antud juhul ei tohi iga miljoni õhumolekuli kohta olla õhus rohkem, kui 1000 ppm . Öueõhus on süsihaptegaasi sisaldus 420 ppm ja temperatuur $t_0 = -10^\circ\text{C}$ ja õhurõhk $p = 1 \cdot 10^5 \text{ Pa}$. Toas on kolm inimest, kellest igaüks toodab $v = 17 \frac{\text{L}}{\text{h}}$ süsihaptegaasi. Millise v\u00f6imsusega on vaja tuba kütta, et hoida toatemperatuur $t_1 = 20^\circ\text{C}$ juures? Soojuskaudega läbi aknaklaaside, seinte jms mitte arvestada.

Ü94 Amoksitsilliin ★★

Autor: Marten Rannut, piirkonnavoor, 2024, G 5

Juku läks tugeva kurguvaluga perearsti juurde, diagnoosiks osutus angii ning Juku sai raviks $m = 500 \text{ mg}$ amoksitsilliinitabletid. Kui pika aja tagant on Jukul vaja üks tablett võtta? Juku kaalub $M = 70 \text{ kg}$, ravimi minimaalne efektiivne kontsentratsioon kehakaalu kohta on $140 \frac{\mu\text{g}}{\text{kg}}$. Amoksitsilliini poolestusaeg on $t = 1,4 \text{ h}$. *Vihje:* Poolestusaja möödudes langeb aine kogus organismis poole v\u00f6rra. Et ravim oleks efektiivne, peab selle kontsentratsioon kehas igal ajahetkel \u00fcl\tam{ületama} minimaalset efektiivset kontsentratsiooni.

Ü95 Joonlaud koridoris ★★

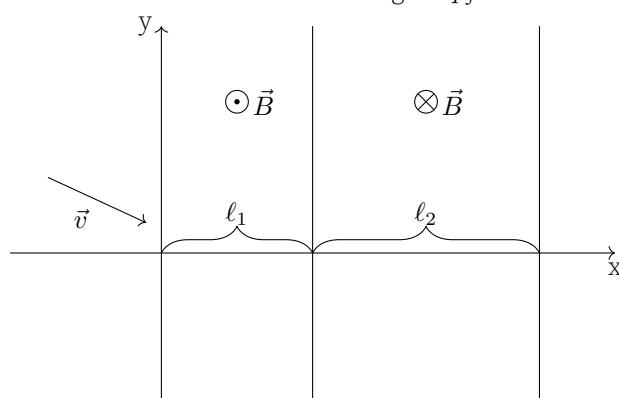
Autor: Sandra Schumann, lõppvoor, 2024, G 5

Seisad 1 m laiuses koridoris, mille mõlemas seinas on peegel. Peeglite vahel, parempoolsest peeglist 30 cm kaugusel asetseb vertikaalselt kitsas objekt. Sina oled koridoris, käes joonlaud, mida hoiad vertikaalselt enda ees. Märkad, et joonlaua 10 cm näib sulle sama pikk kui objekt ise, 7,5 cm sama pikk kui objekti peegeldus parempoolses peeglis ja 3,75 cm sama pikk kui objekti teine peegeldus parempoolses peeglis. Kui kaugel seisad peeglist?

Ü96 Magnetväljad ★★

Autor: Kaarel Hänni, lahtine, 2018, G 6

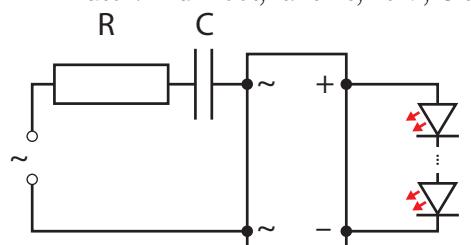
Vaatleme prootoni liikumist x-y-tasandis. Vahemikus $0 \leq x < \ell_1$ on magnetvälgi tugevusega B z-telje positiivses suunas, vahemikus $\ell_1 \leq x < \ell_1 + \ell_2$ on magnetvälgi tugevusega B z-telje negatiivses suunas. On teada, et $\ell_2 > \ell_1$. Ülejää nud tasandi osades magnetvälja pole. Alguses antakse prootonile mõigi kiirus \vec{v} tasandi vasakus pooles $x < 0$. Milline on minimaalne kiirus $v = |\vec{v}|$, mille puhul saab valida sellise algse liikumissuuna, et prooton jõuab läbi kahe magnetväljaga vahemiku tasandi parempoolsesse osasse $x \geq \ell_1 + \ell_2$? Prootoni laeng on q ja mass on m .



Ü97 Led ★★

LED-lamp koosneb $N = 10$ -st valgusdioodist (nimipingi $U_D = 3,0\text{ V}$ ja -vool $I_D = 100\text{ mA}$), mida toidetakse valdavvooluga (pinge maksimumväärtus $U = 320\text{ V}$ ja sagedus $f = 50\text{ Hz}$) läbi takisti ($R = 400\Omega$), kondensaatori ja alaldi (luggeda ideaalseks). Kui suur peab olema kondensaatori mahtuvus C , et valgusdioodid põleksid võimalikult heledalt, kuid ei põleks läbi? Märkus: Takisti ja kondensaatori nävitakistus on $Z = \sqrt{R^2 + X_C^2}$, kus $X_C = 1 / (2\pi f C)$ ning võib eeldada sinusoonaalset voolu ja pinget aladi ees.

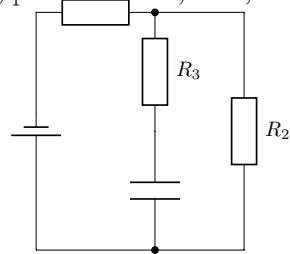
Autor: Ardi Loot, lahtine, 2019, G 6



Ü98 Kondensaator ★★

Autor: , piirkonnnavoor, 2019, G 6

Kondensaatorit laetakse kõrvaloleva skeemi järgi alalisvooluallikast pingega $U = 12 \text{ V}$. Skeemis olevate takistite takistused on vastavalt $R_1 = 1 \text{ k}\Omega$, $R_2 = 2 \text{ k}\Omega$ ning $R_3 = 3 \text{ k}\Omega$. Leida maksimaalne pinge, milleni saame kondensaatori niimoodi laadida.

**Ü99 Lõks ★★**

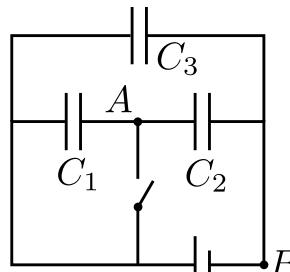
Autor: , lõppvoor, 2019, G 6

Kuulike massiga m ja laenguga q sisenes läbi väikse augu silindrisse, mida täidab teljesihiline homogeene magnetväli induktsiooniga B . Sisenemishetkel oli kuulikesi kiirus radiaalsihiline. Kuulike väljus silindrist sama augu kaudu peale kahte absoluutsest elastset põrget silindri seintega. Kui kaua viibis kuulike silindriss?

Ü100 Kondensaatorid ★★

Autor: Taavet Kalda, lahtine, 2020, G 6

Pingeallikas pingega \mathcal{E} on ühendatud kolme kondensaatoriga mahtuvustega C_1 , C_2 ja C_3 . Alguses hoitakse lülitil pikalt kinnises olekus. Mitu korda muutub punktide A ja B vaheline pinge peale lülitil avamist ja pika aja möödumist?

**Ü101 Kell ★★**

Autor: , piirkonnnavoor, 2020, G 6

Seinakellal on minut ja tunniosuti, mis kaaluvad vastavalt $m_1 = 5 \text{ g}$ ja $m_2 = 25 \text{ g}$, mille pikkused on vastavalt $L_1 = 15 \text{ cm}$ ja $L_2 = 10 \text{ cm}$ ning mille otspunktid on kinnitatud kella keskpunkti. Kella vooluallikas on tühjenemas ning täpselt kell kuus annab see maksimaalselt voolu $I = 1 \text{ mA}$ pingel $V = 5 \text{ V}$. Elektrienergiast jõuab osutenei mehaaniline energia kasuteguriga $\eta = 0.3$. Leia minutit täpsusega aeg, mil kell jäääb seisma.

Ü102 Palliviskenõlv ★★

Autor: , lõppvoor, 2020, G 6

Oleg viskab jalgpalliväljaku otsajoone tagant väljakule palli. Selgub, et sealjaksab ta visata maksimaalselt väljaku keskjooneni, mis asub kaugusel L . Ta tahab ehitada otsajoone taha sellise nõlva, mille igast punktist jaksaks ta visata maksimaalselt väljaku keskjooneni. Milline peaks olema selle nõlva kõrgusprofiil?

Võib eeldada, et maksimaalne kiirus, millega Oleg suudab palli visata, ei sõltu viskamissuunast. Õhutakistust võib ignoreerida. Vastuse võib anda kujul $y = f(x)$ või $x = g(y)$.

Ü103 Kaugusvise ★★

Autor: Jaan Kalda, lahtine, 2021, G 6

Mis nurga all tuleb ühtlase kaldega pinnal (kaldenurk α) visata, et pall lendaks fikseeritud algkiiruse juures võimalikult kaugele?

Ü104 Jalgrattur ★★

Autor: Jarl Patrick Paide, piirkonnnavoor, 2021, G 6

Samal ajal, kui jalgrattur sõidab mööda kindlat teelõiku, alustab auto juhuslikul ajahetkel juhuslikust kohast sellel teelõigul sõitu. Auto sõidab jalgratturiga samas suunas, kuid kaks korda kiiremini, ning mõlemad sõidavad teelõigu lõpuni. Mis on tõenäosus, et auto sõidab jalgratturist mööda?

Ü105 Keha keral ★★

Autor: Krister Kasemaa, lõppvoor, 2021, G 6

Kerakujulisele, ühtlase massijaotusega planeedile, raadiusega R , massiga M ja pöörlemisperioodiga T asetatakse väikese massiga keha m . Gravitatsioonikonstant on G .

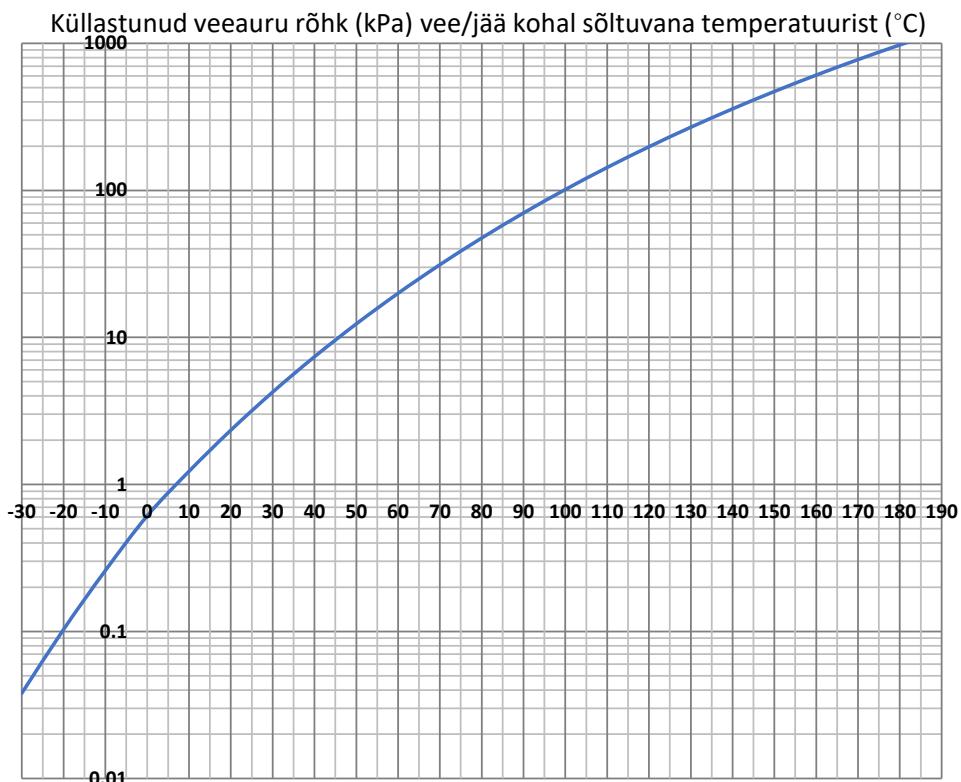
- a) Leia väikese keha kaal funktsionina laiuskraadist θ .
- b) Leia hõõrdeteguri μ väärustuse vahemik funktsionina laiuskraadist θ , mille puhul püsib väike keha planeedi peal staatisena.

Märkus: laiuskraadi θ mõõdetakse ekvaatorilt.

Ü106 Saun ★★

Autor: Jaan Kalda, lahtine, 2022, G 6

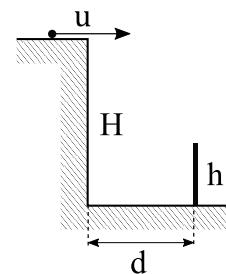
Subjektiivset palavusetunnet kuumas õhus kirjeldab väga hästi see, kui palju erineb kastepunkt keha temperatuurist. Kastepunkt on temperatuur, mille juures antud õhust hakkab vesi välja kondenseeruma (eeldusel, et rõhk püsib võrdne atmosfäärirõhuga). Olgu leiliruumi õhutemperatuur $T_l = 100^\circ\text{C}$, saunaõhu kastepunkt $T_k = 10^\circ\text{C}$ ja leiliruumi ruumala $V = 10 \text{ m}^3$. Mitme kraadini kerkib kastepunkt, kui leiliks vistakase $m = 200 \text{ g}$ vett? Universaalne gaasikonstant $R = 8,31 \frac{\text{J}}{\text{K mol}}$; vee molaarmass $\mu = 18 \frac{\text{g}}{\text{mol}}$.



Ü107 Doomino ★★★

Autor: Päivo Simson, piirkonnavor, 2022, G 6

Väike kuulike liigub horisontaalselt kiirusega u joonisel näidatud suunas ja kukub alla kõrguselt H . Alumisel tasapinnal on doominoklots kõrgusega h , mis kukub ümber, kui kuulike sellele pihta läheb. Klotsi kaugus astmest on d . Leidke minimaalne algkiirus u , mille korral kuulike teeb ühe põrke ja lendab seejärel klotsist üle. Eeldage, et õhutakistus ja hõõrdejoud puuduvad ning põrge on absoluutsest elastne. Klotsi paksusega ja kuuli mõõtmetega ei pea arvestama. Raskuskiirendus on g .



Ü108 Õhupüss ★★★

Autor: Jaan Kalda, lõppvoor, 2022, G 6

Õhupüssis kasutatakse rõhu $p_1 = 34 \text{ MPa}$ all olevat lämmastikku kuuli kiirendamiseks. Milline on püssirauda jäava lämmastiku temperatuur vahetult peale lasku? Enne lasku oli surulämmastik toatemperatuuril $t_0 = 20 \text{ }^{\circ}\text{C}$; õhurõhk $p_0 = 100 \text{ kPa}$. Lämmastiku molaarne soojsusmahtuvus konstantsel ruumalal on $c_V = \frac{5}{2}R$ ja keemistemperatuur $T_k = -196 \text{ }^{\circ}\text{C}$.

Vihje: Helikiirusest aeglasmates protsessides gaasiga, kus ei toimu soojusvahetust, kehtib nn adiabaadiseadus $pV^\gamma = \text{const}$, kus lämmastiku jaoks on astmenäitaja $\gamma = 7/5$.

Ü109 Võimas mootor ★★★

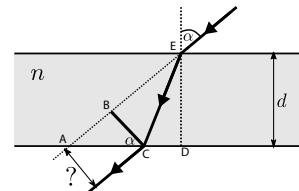
Autor: Marten Rannut, lahtine, 2023, G 6

K20A on 4-taktiline, 4-silindriline, 2,0 L mootor (iga silindri maht on 0,5 L), mis saabutab oma tippvõimsuse $f = 8000 \frac{1}{\text{min}}$ (pööret/min) juures. Üks takt kestab pool pööret, taktid on: sisselasketakt, survekakt, töötakt ja väljalasketakt. Temperatuuril $T_1 = 20^\circ\text{C}$ on õhu tihedus $\rho = 1,2 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$; kui välistemperatuur on T_1 , siis on sissevõtutakti lõpus silindris oleva õhu temperatuur $T_2 = 60^\circ\text{C}$. Sissevõtutakti lõpus kolbi pritsitud bensiini ruumalaga mitte arvestada. Leidke sellise mootori tippvõimsus. Bensiini energiatihedus on $\epsilon = 46 \frac{\text{MJ}}{\text{kg}}$, ideaalne kulunud õhu ja bensiini suhe on $\gamma = \frac{14,7 \text{ g}}{1 \text{ g}}$. Võib eeldada, et toimub täielik põlemine. Mootori efektiivsus on $\eta = 37\%$.

Ü110 Klaasplaat ★★★

Autor: Erkki Tempel, piirkonnavor, 2023, G 6

Leidke, kui palju nihkub valguskiir kõrvale esialgse sihi suhtes pärast klaasplaadi läbimist. Kiire langemisnurk on α , klaasi murdumisnäitaja on n ning klaasplati paksus on d . Täispunktide saamiseks palume vastuses mitte kasutada trigonomeetrilisi pöördfunktsioone (nt \arcsin , \arccos).



Ü111 Nõel vees ★★★

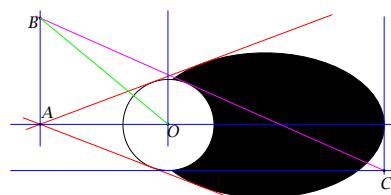
Autor: Martne Rannut, lõppvor, 2023, G 6

Nõel massiga $m = 0,5 \text{ g}$ ning pikkusega $l = 6 \text{ cm}$ asetatakse aeglasmelt vee pinnale. Millise nurga alla on veepind nõela juures horisontaalpinna suhtes paindunud? Vee pindpinevustegur $\sigma = 72,8 \frac{\text{mN}}{\text{m}}$ ja raskuskiirendus $g = 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$. Üleslükkejõuga võib mitte arvestada.

Ü112 Vari ★★★

Autor: Jaan Kalda, lahtine, 2024, G 6

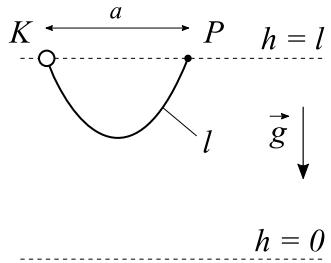
Joonisel (suurem koopia lisalehel) on näidatud ülaltvaates horisontaalsel laual lebav kera ja selle vari, mille heidab lauale punktvalgusallikas. Mitme kera raadiuse kaugusel kera keskpunktist asub see punktvalgusallikas? Võite teha joonisel lisakonstruktioone ja mõõtmisi.



Ü113 Mitteelastne nöör ★★★

Autor: Päivo Simson, piirkonnavor, 2024, G 6

Väike kuulike on kinnitatud mitteelastse nööri külge ja seda hoitakse esialgu punktis K . Nööri pikkus on l ja selle teine ots on kinnitatud punkti P . Punktid K ja P asuvad samal körgusel $h = l$ ja nendevaheline kaugus on a ($0 < a < l$). Nüüd lastakse kuulike ilma algkiirusega vabaks ja see hakkab gravitatsiooni mõjul liikuma. Leidke maksimaalne körgus, mille kuulike saavutab $h = 0$ suhtes edaspidise liikumise käigus (pärast täielikku kukkumist). Tehke kuuli trajektoori joonis. Nööri mass on võrreldes kuuli massiga tühine ning takistusjõudega võib mitte arvestada. Nööri mitteelastsus tähendab seda, et pörke hetkel summutab nöör kogu palli nöörishiilise impulsi.



Ü114 Jahtumine ★★★

Autor: Uku Andreas Reigo, lõppvoor, 2024, G 6

Sofial on kaks ühesugust koonusekujulist kaaneta termost, mis on osaliselt täidetud võrdse koguse vedelikuga temperatuuril $T = 40^\circ\text{C}$. Koonusekujulised termosed on asetatud nii, et vedelikupind on põhjaga paralleelne ja koonuse tipp on allpool. Sofia lisab ühte termosesse juurde sama koguse soojemat vedelikku temperatuuril $T_{\text{lisa}} = 88^\circ\text{C}$, soojuslik tasakaal saabub hetkeliselt. Seejärel mõõdab Sofia otsekohe vedelike jahtumiskiirust ning leiab, et soojema vedeliku jahtumise kiirus on $k = 1,62$ korda suurem jahedama vedeliku jahtumise kiirusest. Jahtumisvõimsus on võrdeline jahutatava pindala ja temperatuuride vahega. Leidke õhu-temperatuur $T_{\text{öhk}}$. Eeldage, et vedeliku ja termose vahel soojusvahetust ei toimu ning et vedeliku tihedus ei sõltu temperatuurist.

Vihje: koonuse ruumala $V = \frac{1}{3}S_pH$, kus S_p on koonuse põhja pindala ning H selle körgus.

Ü115 Kauss veega ★★★★

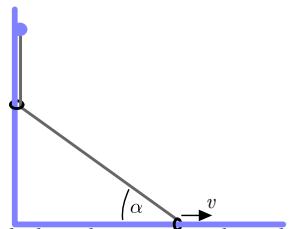
Autor: Krister Kasemaa, lahtine, 2018, G 7

Kaalul olevasse kaussi hakatakse ühtlaselt pudelist körgusel h vett valama. Vee valamine lõpetatakse hetkel, mil kaalu näit on m . Mis on kaalu lugem M peale stabiliserumist? Kas see on esialgsest näidust suurem, väiksem või võrdne? Õhutakistusega mitte arvestada.

Ü116 Niit relssidel ★★★★

Autor: Jaan Kalda, lahtine, 2019, G 7

Niit kogupikkusega L on kinnitatud kahest üksteisega ristuvast lõigust koosneva relsi külge nii, nagu näidatud joonisel: üks ots on fikseeritud jäigalt vertikaalse relsiosa külge kaugusele h relsi nurgast, alumine ots tilukese rõnga abil horisontaalse relsi külge. Niit on tõmmatud läbi teise tillukese rõnga, mis saab libiseda mööda vertikaalset relssi. Alumist rõngast liigutatakse konstantse kiirusega v . Leida teise rõnga kiirus ja kiirendus hetkel, mil nöör moodustab nurga α horisontaalsihiiga.



Ü117 Lennurada ★★★★

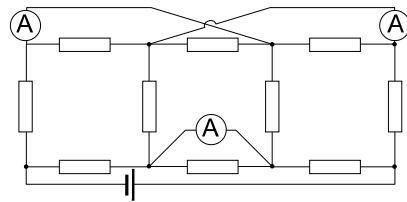
Autor: , piirkonnavor, 2019, G 7

Lennuk vajab õhkutõusmiseks vajaliku üleslükkejõu saavutamiseks merepinna kõrgusel vähemalt $L = 2$ km pikkust hoorada. Kui pikka hoorada vajaks sama lennuk maaailma kõrgeimal tsiviillennuväljal, mis asub merepinnaast 4 km kõrgusel? Õhu tihedus merepinnal $\rho_1 = 1,23 \text{ kg/m}^3$ ning 4 km kõrgusel $\rho_2 = 0,82 \text{ kg/m}^3$. Lennuki tiibade poolt tekitatav üleslükkejõud on võrdeline õhu tiheduse ning lennuki kiiruse ruuduga. Eeldada, et ilm on mõlemal juhul tuulevaikne ning lennuki kiirendus on kogu hoovõtu jooksul konstantne.

Ü118 3 ruutu ★★★★

Autor: , lõppvoor, 2019, G 7

Toodud skeemis on kõigi takistite takistus kolm oomi, patarei pinge on 48 volti. Leidke ampermeetrite näidud.

**Ü119 Poolsilinder basseinis ★★★★**

Autor:

Krister Kasemaa, lahtine, 2020, G 7

Basseinis laiusega l takistab vedeliku ühelt poolt teisele poole voolamist poolsilinder massiga m ja raadiusega r (ja seega pikkusega l), kusjuures telg, piki mida silinder on poolitatud, on vastu basseini põhja. Höördetegur poolisilindri ja basseini põhja vahel on μ , vedeliku tihedus basseinis ρ , ja raskuskirendus on g . Basseini üks pool on täidetud veega poolsilindri ülemise ääreni, kõrguseni r . Küsimusele vastates eeldage, et höördumine poolsilindri külgmiste poolringide ja seina vahel on tühiselt väike. Mis peaks olema höördeteguri μ vähim väärus μ_0 , et poolisilindri vabastades ei hakkaks see liikuma?

Ü120 Jälle sauna! ★★★★

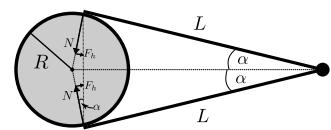
Autor: , piirkonnavor, 2020, G 7

Sauna leiliruumis on õhu temperatuur $t_0 = 80^\circ\text{C}$ ja leiliruumi ruumala $V = 10 \text{ m}^3$. Kerisele visati $m = 200 \text{ g}$ vett, mis paari sekundi jooksul kõik ära aurustus. Kui palju muutus õhu temperatuur leiliruumis? Eeldada, et tekkinud aur segunes täielikult leiliruumi õhuga ja röhk leiliruumis püsib võrdne õhurõhuga tänu õhu liikimisele läbi uksealuse pilu. Õhurõhk $p_0 = 1 \cdot 10^5 \text{ Pa}$, vee molaarmass $\mu_w = 18 \text{ g/mol}$, ühe mooli õhu soojusmahtuvus konstantsel ruumalal $c_a = \frac{5}{3}R$ ja ühe mooli veeauru soojusmahtuvus konstantsel ruumalal $c_w = 2R$.

Ü121 Pulgad ★★★★

Autor: , lõppvoor, 2020, G 7

Kaks pulka pikkusega L on otsapidi kinnitatud hõõrdevaba kinnitusega. Hõõrdevabal horisontaalsel laual on silinder raadiusega R ja massiga m . Joonisel on kujutatud silinder ja pulgad pealtvaates. Eeldame, et pulki hoitakse alati horisontaalselt nendu joonisel, nendega haaratakse kinni silindri keskelt, pulpade otsad on täpselt



silindri puutepunktides ning pulpade mass on tühine. Samuti eeldame, et silindri massikese on puutepunkte ühendava lõigu keskpunktis.

- a) Leidke minimaalne hõõrdetegur μ_{\min} pulpade ja silindri vahel, et silindrist pulpade abil kinni haarates see pulpade vahelt ära ei libiseks.
- b) Olgu hõõrdetegur pulpade ja silindri vahel $\mu > \mu_{\min}$. Leidke minimaalne vajalik jõumoment τ_{\min} , mida tuleb pulpadele avaldada, et silindrist pulpade abil kinni haarates oleks võimalik silinder laualt üles tõsta. Maa raskuskiirendus on g .

Ü122 Hantel ★★★★

Autor: Jaan Kalda, lahtine, 2021, G 7

Kaks pisikest kera, kumbki massiga m , on ühendatud üksteise külge kerge jäига vardaga abil, mille pikkus on l ; nimetagem seda süsteemi edaspidi hantliksi. Üks kera kannab laengut q , kuid teine on ilma laenguta. Alghetkel on hantel horisontaalne ning liikumatu ja asub vertikaalses elektriväljas tugevusega E ; raskusväli puudub. Milline on hantli telje pöörlemise maksimaalne nurkkiirus ω edasise liikumise käigus?

Ü123 Rippuv laeng ★★★★

Autor: Kaur Aare Saar, piirkonnavor, 2021, G 7

Punktlaeng q_1 ripub lakte kinnitatud nööri otsas, mille pikkus on L . Teine saamärgiline punktlaeng q_2 on nöörist sõltumatult fikseeritud täpselt nööri kinnituskoha alla kaugusele $2h$ laest. Leidke milline peab olema esimene punktlaengu mass, et selle kaugus laest oleks h .

Ü124 Kolmnurk ★★★★

Autor: Jaan Kalda, lõppvoor, 2021, G 7

Kolm ühesuguse massiga m osakest paigutatakse punktidesse A , B ning C . Osakeste mõõtmned on palju väiksemad kolmnurga ABC küljepikkustest $a = |BC|$, $b = |CA|$ ja $c = |AB|$. Osake punktis A kannab laengut q_A , osake punktis B – laengut q_B ja osake punktis C – laengut q_C . Osakesed vabastatakse ning need hakavad paigalseisust liikuma elektrostaatilise vastasmõju tõttu.

- a) Millised peaksid olema laengute suhted, et kõigi osakeste trajektoorid oleksid sirgjoonid?
- b) Kas sirgjooneline liikumine on võimalik suvalise kolmnurga ABC puhul?

Ü125 Elektron ja kondensaator ★★★★

Autor: Jaan Kalda, lahtine, 2022, G 7

Plaatkondensaatori plaadid on ruudukujulised küljepikkusega b ja plaatide vahekaugus d on hulga väiksem kui b ; plaatide vahele on rakendatud pinge U . Millist minimaalset algkiirust v peab omama elektron massiga m ja laenguga e , et see suudaks läbida plaatide vahelise ruumi ilma vastu plaate põrkamata? Elektron peab väljuma plaatidevahelisest ruumist sisenemispunkti suhtes vastasküljelt.

Ü126 Plastiliin ★★★★

Autor: Taavet Kalda, piirkonnavor, 2022, G 7

Laua peal asub vedrudel toetuv tasakaaluasendis olev plaat. Vedrude summaarne jäikustegur on k . Plaadi pinnale kõrguselt h kukutatakse ideaalselt plastne plastiliinitükk massiga m . Mõne aja pärast kukutatakse samalt kõrguselt teine identse massiga plastiliinitükk nii, et plastiliinitükk langeb plaadi pinnale hetkel, mil plaat on liikumas üles ja esialgse tasakaaluasendiga võrreldes samal kõrgusel. Mis on plaadi edasise trajektoori köige madalama asendi kõrguse ja esialgse tasakaaluasendi kõrguse vahe? Plaadi mass on plastiliini massiga võrreldes tühine, plastiliin kleebub pärast põrget plaadi külge ning õhutakistust ja vedrude hõordetakistust võib ignoreerida. Raskuskiirendus on g .

Ü127 Veeuputus ★★★★

Autor: Oleg Košik, lõppvoor, 2022, G 7

Tänava kanalisatsioon on ehitatud selliselt, et vihmasaju korral koguneb vihma-vesi köigepealt tänavale all kulgevasse kraavi, kust omakorda juhitakse vesi ära sadeveetorustiku kaudu. Sadeveetorustiku ummistuse töttu suudab see aga tagada sadevee äravoolu ainult 50% võimsusel maksimaalsest võimalikust. Ükskord paduvihma ajal juba 6 minutit peale vihma algust sai kraav täis ning vesi tungis tänavale. Graafikul (pöördel) on toodud sademete koguhulga h sõltuvus ajast t alates paduvihma algusest.

Peale paduvihma lõppemist tehtud arvutused näitasid, et isegi juhul, kui sadeveetorustik poleks ummistunud, poleks see uputusest päästnud ning kraav oleks täitunud 9 minutit peale vihma algust.

Milline pidanuks olema töökorras torustiku äravoolu minimaalne võime (liitrit minutis 1 m^2 pinna kohta), et uputust ei oleks tekkinud?

Ü128 Soojuspump ★★★★

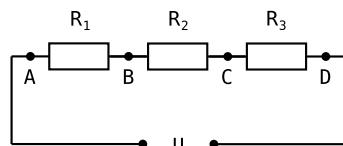
Autor: Jaan Kalda, lahtine, 2023, G 7

Hilissügisel maamajja minnes on nii õues kui toas $T_0 = 2^\circ\text{C}$ sooja. Kui soojuspump sisse lülitada, kulub toas keskmise temperatuuri tõusmiseks $T_1 = 4^\circ\text{C}$ -ni $t_0 = 30 \text{ min}$. Kui soojuspump jääkski pidevalt töötama, töuseks temperatuuri toas lõpuks $T_f = 42^\circ\text{C}$ -ni. Paraja soojuse tagamiseks lülitab soojuspumba sisse ehitatud termorelee pumba välja, kui toatemperatuur töuseb üle $T_3 = 23^\circ\text{C}$ ning uuesti sisse tagasi, kui temperatuuri langeb alla $T_2 = 22^\circ\text{C}$. Kui pikk on ajavahemik kahe järjestikuse sisse lülitumise vahel? Eeldage, et soojuspumba kütmisvõimsus on kogu aeg üks ja sama. Lahendamisel võib teha täiendavaid mõistlikke lähendusi. Märkus: Võite eeldada, et soojuskadu on võrdeline temperatuuride vahega.

Ü129 Voltmeeter ★★★★

Autor: Päivo Simson, piirkonnavor, 2023, G 7

Kolm tundmatut takistit on ühendatud jadamisi ja neile on rakendatud pingi $U = 126 \text{ V}$. Tundmatu sisetakistusega voltmeetriga mõõdetakse pingeid joonisel näidatud punktide vahel. Tulemuseks on näidud $V_{AB} = V_{CD} = 28 \text{ V}$ ja $V_{AC} = 84 \text{ V}$. Millist pinget näitab voltmeeter, kui selle klemmid ühendada punktidega B ja C?



Ü130 Tehiskaaslane ★★★★

Autor: Eero Vaher, lõppvoor, 2023, G 7

Tehiskaaslane tiirleb ümber planeedi ringorbiidil raadiusega $r = 55\,199\text{ km}$ kiirusega $v = 2,4 \frac{\text{km}}{\text{s}}$. Tehiskaaslasele on lühikese aja jooksul võimalik anda kiiruse muut $\Delta v = 0,7 \frac{\text{km}}{\text{s}}$.

- Mis oleks tehiskaaslase suurim kaugus planeedi keskmest R_1 , kui tehiskaaslasele antaks kiirendus selle liikumissuunas?
- Mis oleks suurim kaugus R_2 , kui kiirenduse suund oleks planeedist eemale?

Ü131 Äikesetorm ★★★★

Autor: Jarl Patrick Paide, lahtine, 2024, G 7

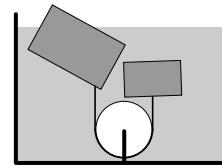
Helena mõõtis äikesetormi ajal Maa magnetvälja väga täpse elektroonilise magnetomeetriga. Ta hakkas muretsema äikesetormi mõjudest mõõtmistele ja otsustas seda uurida. Äikese sähvatusest kuni heli saabumiseni läks aega $t = 10\text{ s}$. Ta uris välja, et tavalise äikselöögi voolutugevus on $I = 30\,000\text{ A}$, õhu magneetiline läbitavus on $\mu = 1,26 \cdot 10^{-6} \frac{\text{T}\cdot\text{m}}{\text{A}}$ ja heli kiirus õhus on $v = 340 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Leia mitu kraadi maksimaalselt muutub mõõteriista poolt mõõdetud põhja suund löögi hetkel. Tavakeskkonnas magneomeeter mõõtab Maa magnetvälja tugevuseks $B = 50\text{ }\mu\text{T}$ ning magnetvälvi moodustab vertikaalse sihiga nurga $\alpha = 17^\circ$.

Vihje: Sirge juhe voolutugevusega I tekib endast kaugusele r magnetvälja tugevusega $B = \frac{\mu I}{2\pi r}$. Tekkinud magnetvälja suund on risti juhtmega ja tangensiaalne vastavalt kruvireeglike.

Ü132 Palgid vees ★★★★

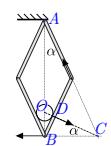
Autor: Jaan Kalda, piirkonnavor, 2024, G 7

Kaks palki on kinnitatud üksteise külge nööri abil, mis läheb üle basseini põhja kinnitatud ploki nii nagu näidatud joonisel. Nöör on tömmanud ühe palgi üleni vee alla sel ajal kui teine ujub vee pinnal. Mõlema palgi tihedus on $\rho = 600 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$, vee tihedus $\rho_v = 1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$, väiksema palgi ruumala on $V = 30\text{ L}$ ja risttahuka kujulise basseini põhja pindala $S = 1\text{ m}^2$. Kui palju muutub veetaseme kõrgus basseinis, kui palke ühendav nöör katki lõigata?

**Ü133 Romb ★★★★**

Autor: Jaan Kalda, lõppvoor, 2024, G 7

Laest ripub rombikujuline liigendiga konstruktsioon, mis on valmistatud massita varrastest pikkusega l , vt joonis. Silinder massiga m pannakse rombi sisse. Selle tulemusel võtab romb tasakaaluasendi, kus rombi tipunurk on 2α . Höördumine silindri ja varda vahel on tühiselt väike. Leidke silindri raadius.

**Ü134 Kolmnurk ★★★★**

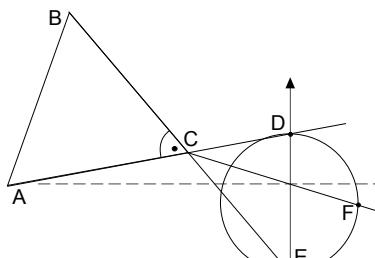
Autor: Jaan Kalda, lahtine, 2018, G 8

Joonisel on kujutatud täisnurkse kolmnurga kujutis (täisnurk on märgitud punktiga) õhukeses läätses, mis on koos oma peateljega samuti ära näidatud. Konstrueerida kolmnurga täisnurkse tipu tegelik asukoht.

Ü135 Külm gaas ★★★★

Jaan Kalda, lahtine, 2019, G 8

Tihedalt suletud anumas on monomolekulaarné gaas molaarmassiga μ ja tihedusega ρ temperatuuril T_0 . Anum on silindrilise ja tema telg vertikaalne. Anum liigub ülevalt alla algkiirusega v ja peatub hetkeliselt; eeldada, et $v \gg \sqrt{RT_0/\mu}$, R tähistab universaalset gaasikonstanti. Millist rõhku avaldab gaas anuma põhjale (a) vahetult peale anuma seinte peatumist; (b) peale seda, kui gaas jõuab termodünaamilisse tasakaalu. Gaasi soojsvahetust anuma seintega ignoreerida, eeldada, et pörkumisel seintega on molekulide eemaldumisnurk pinnanormaali suhtes võrdne langemisnurgaga.

**Ü136 Granaat ★★★★**

Autor: , piirkonnavor, 2019, G 8

Granaat visatakse algkiirusega v õhku nurga α all. Hetkel t_1 plahvatab granaat $N \gg 1$ killuks, kusjuures granaadi massikeskme süsteemis eemalduvad killud kiirusega u ühtlase nurkjaotusega. Mis ajahetkel t_2 jõuab esimene kild maapinnani ning mis ajahetkel t_3 viimane? Raskuskiirendus on g .

Ü137 Kärbes ★★★★

Autor: , lõppvoor, 2019, G 8

Kärbes lendab läätse peateljega paralleelselt, teljest kaugusel a , läätse suunas konsantse kiirusega v alustades suurest kaugusest ja lõpetades läätse juures. Läätse fookuskaugus on f . Milline on selle lennu jooksul kärbsे minimaalne kiirus tema kujutise suhtes?

Ü138 Termokaamera ★★★★

Autor: Jaan Kalda, lahtine, 2020, G 8

Termokaamera arvutab kehade temperatuure kehadelt saabuva soojskiirguse intensiivsuse põhjal kasutades koguintensiivsust lainepekkuste vahemikus 7-st kuni 14 mikromeetrini. Antud ülesandes lugem lihtsustatult, et arvutamiseks kasutatakse koguintensiivsust üle kõigi lainepekkuste (nullist lõpmatuseni).

Vaskplandi neeldumistegur on $\epsilon = 0,03$, st 3% kogu pealelangevast soojskiirgustest neeldub ja ülejäänud osa peegeldub. Kui väike vaskplaat asub toas, mis on termodünaamilises tasakaalus (st kõikide kehade temperatuurid on võrdsed toa-temperatuuriga $T_0 = 20^\circ\text{C}$), siis näitab termokaamera õigesti, et vaskplandi temperatuur on $T_0 = 20^\circ\text{C}$. Kui aga vaskplati kuumutada teatud temperatuurini T_1 , siis samas toas (endisel temperatuuril) termokaameraga mõõtes saame vaskplandi temperatuuriks $T_2 = 22^\circ\text{C}$. Mis on vaskplandi tegelik temperatuur T_1 ?

Vihje. Termodünaamilises tasakaalus oleva keha poolt kiiratav soojskiirguse koguintensiivsus üle kõigi lainepekkuste on võrdeline neelduvusteguri ja keha absoluutse temperatuuri neljanda astmega (Stefan-Boltzmanni seadus). Absoluutse temperatuuri ja Celsius skaala vahe on $273,15\text{ K}$. Termokaamera näit mingi kiirguse korral on võrdne sama palju kiirgava absoluutsest musta keha ($\epsilon = 1$) temperatuuriga.

Ü139 Dioodid ★★★

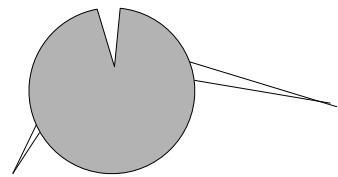
Autor: , piirkonnavor, 2020, G 8

Dioodide tootmisel fluktueeruvad nende parameetrid märkimisväärsest. Olgu meil kaks valgusdiode, mille pinged erinevad samasuguse tugevusega voolu korral 2% võrra; nende dioodide voolu-pinge tunnusjooned on toodud juuresoleval joonisel punase ja sinise köverana. Nende dioodide toitmiseks kasutatakse konstantse voolu allikat, mille väljundvool püsib konstantsest vördne $I_0 = 2,7 \text{ A}$ seni kuni väljundpinge pole suurem kui 4 V. Dioodid ühendatakse paralleelühenduses vooluallika klemmide külge; mitme protsendi võrra erinevad nende tarbitavad võimsused?

Ü140 Optiline seade ★★★

Autor: , lõppvor, 2020, G 8

Kiilukujulise sisselöikega silindri sees on kaks üks-teisega paralleelset peeglit, mis on paralleelsed ka silindri teljega. Valguskiired saavad silindrisse si-seneda ja seal väljuda läbi silindri seintes olevate aukude. Silinder on seest õõnes ning selle seinad on mittepeegeldavad. Joonisel on kujutatud silinder pealtvaates koos kahe silindrisse siseneva ning peale peegeldusi seal väljuva kiirega. Rekonstrueerige peeglite asukohad ning kiirte käik (leidke vähemalt üks võimalik lahendus). Lahendus esitage lisalehel.

**Ü141 Oberthi efekt ★★★★**

Autor: Eero Vaher, lahtine, 2021, G 8

Kosmoselaev tiirleb algsest ümber planeedi ringorbiidil raadiusega $r_0 = 70\,000 \text{ km}$. Kosmoselaeva joonkiirus on $v_0 = 3 \frac{\text{km}}{\text{s}}$. Lühikese aja jooksul antakse kosmoselaevale liikumissuunaga vastupidine kiiruse muut $\Delta v = 1 \frac{\text{km}}{\text{s}}$, mille tulemusena on kosmoselaev nüüd elliptisel orbiidil. Kui kosmoselaev on oma orbiidil planeedile lähimas punktis, siis antakse sellele lühikese aja jooksul liikumissuunaline kiiruse muut $\Delta v = 1 \frac{\text{km}}{\text{s}}$.

a) Mis on kosmoselaeva ja planeedi keskme vaheline kaugus r_1 teise manöövri hetkel?

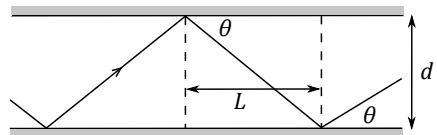
b) Mis on kosmoselaeva joonkiirus v_2 , kui see on pärast teist manöövrit planeedist uesti kaugusel r_0 ?

Vihje: Gravitatsioonivälja potentsiaalne energia avaldub kujul $E_{\text{pot}} = -\frac{GMm}{r}$, kus G on gravitatsioonikonstant, M on planeedi mass, m on kosmoselaeva mass ja r kosmoselaeva kaugus planeedi keskmost. Samuti kehtib orbiitide jaoks impulsimomendi $L = mv_{\perp}r$ jäävuse seadus, kus v_{\perp} on kiiruse tangentsiaalne (raadiusvektoriga risti olev) komponent.

Ü142 Lainejuht ★★★

Autor: Hans Daniel Kaimre, piirkonnavor, 2021, G 8

Optilise telekommunikatsiooni arengu algsaagadel pakuti üheks lahenduseks signaali edastamiseks lainejuhti, kus valgus levib edasi ruudukujulise ristlõikega õõnsustes, mille sisemine pind on kaetud peegeldava pinnaga. Sellises lainejuhis levib



valgus ainult diskreetsete nurkade θ korral (vt joonis), mille jaoks saab lihtsustatult kirjutada seose $\sin \theta = \frac{\lambda N}{2d}$, kus λ on valguse laineplikkus, d on lainejuhi läbimõõt ning $N = 1, 2, \dots$ on positiivne täisarv.

Alloleval graafikul on toodud ühe taolise lainejuhi läbipaistvuse sõltuvust nurgast θ , kui seda läbib valgus laineplikkusega $1,55 \mu\text{m}$. Leidke, kui kaugel on võimalik selle lainejuhiga optilist signaali saata nii, et selle intensiivsus ei väheneks rohkem kui 10 korda, kui lainejuhi sisemust katva peegeldava pinna peegeldustegur on $R = 99.8\%$ (st peegeldub 99.8% valgusest).

Ü143 Veesilinder ★★★★

Autor: Taavet Kalda, lõppvoor, 2021, G 8

Mihkel täidab silindrilise anuma kõrgusega $h = 12 \text{ m}$ täielikult veega. Seejärel ta katab silindri kaanega, ning pöörab selle tagurpidi. Missuguse kiirendusega hakanab vesi silindrist välja voolama, kui Mihkel silindri alt kaane ära võtab? Küllastunud veeauru rõhk toatemperatuuril on $p_v = 3170 \text{ Pa}$, vee tihedus $\rho = 1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$, atmosfääri rõhk $p_0 = 101325 \text{ Pa}$, raskuskiirendus $g = 9,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

Ü144 Kaubalaev ★★★★

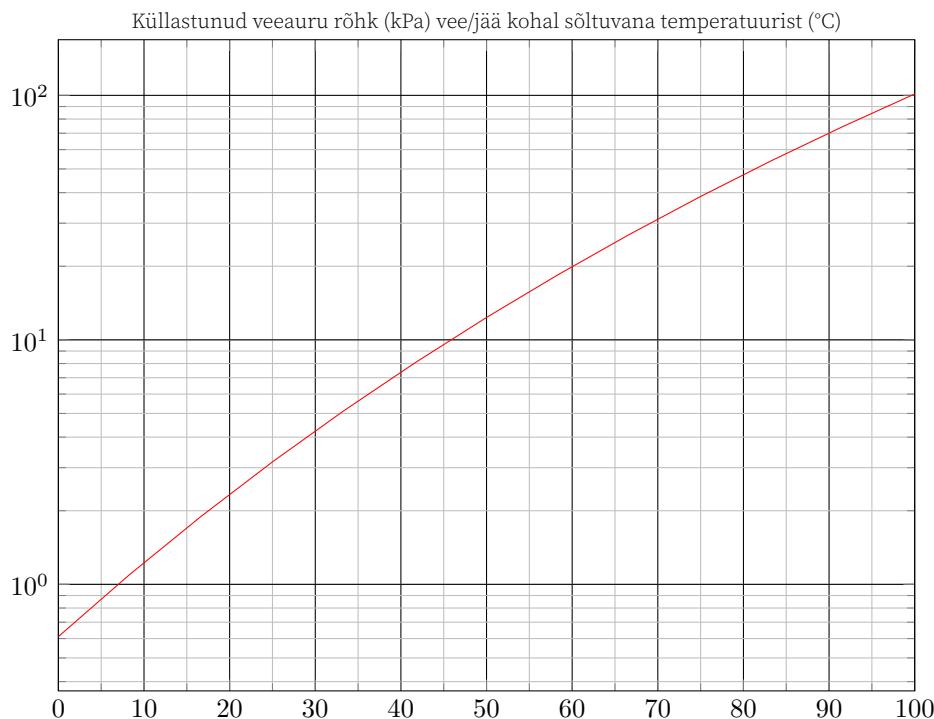
Autor: Päivo Simson, lahtine, 2022, G 8

Lastimise käigus hakkab kaubalaev tasases vees väikse amplituudiga üles-allä võnkuma. Kui laevale on tööstetud $m_1 = 1000$ tonni kaupa, on võnkumiste sagedus $f_1 = 10$ võnget minutis. Kui laevale on tööstetud $m_2 = 10000$ tonni kaupa, on võnkumiste sagedus $f_2 = 8$ võnget minutis. On teada, et laeva võnkumine haarab kaasa ka teatud hulga vett, mis näiliselt suurendab laeva inertsi. See tähendab, et vees reageerib laev välisjöududele nii, nagu oleks tema mass kaasahaaratud vee massi võrra tegelikust suurem. Leida laeva tühimass M arvestades, et sõltumata kauba hulgast on kaasahaaratud vee mass $\frac{1}{2}M$. Eeldage, et veepinna lähedal on laeva kere väliskülg vertikaalne.

Ü145 Tühi pudel ★★★★

Autor: Jaan Kalda, piirkonnavoor, 2022, G 8

Kokapoiss peseb liitrist plastpudelit: laseb sinna natuke kuuma vett temperatuuril $t_v = 55^\circ\text{C}$, suleb pöidlaga pudelikaela ja raputab tugevasti. Kui ta pöidla nüüd pudeli suu eest ära võtab, käib väike plaksatus ja pudelist surub veidi õhku välja, sest rõhk pudelis oli suurem atmosfäärirõhust. Kui suur oli rõhkude vahe? Toas on õhutemperatuur $t_t = 20^\circ\text{C}$, suhteline õhuniiskus $r = 50\%$ ja õhurõhk $p_0 = 1,01 \cdot 10^5 \text{ Pa}$? Küllastunud veeauru rõhu sõltuvus temperatuurist on toodud juuresoleval graafikul.



Ü146 Veevalaja ★★★★

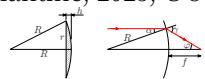
Autor: Kaur Aare Saar, lõppvoor, 2022, G 8

Oleg seisab kaalul ja ta ühes käes on pudel, kus on $m = 1 \text{ kg}$ vett ja teises käes on piisavalt suur anum, mis on $h = 1 \text{ m}$ madalamal kui pudel. Ta hakkab pudelist vett välja valama anumasse kiirusega $\dot{m} = 1 \text{ kg/s}$. Joonistage graafik (koos arvulise skaalaga), kuidas muutub kaalu näit alates hetkest, kui kogu vesi on veel pudelis kuni hetkeni, kui kogu vesi on jöudnud anumasse. Raskuskiirendus on $g = 10 \text{ m/s}^2$ ja võib eeldada, et vesi liigub pudelist anumasse ilma õhutakistusetähta. Anum on nii lai, et veenivoo seal ei muudu. Tehtud arvutused koos põhjendustega kirjutage eraldi lehele.

Ü147 Lääts ★★★★

Autor: Valter Kiisk, lahtine, 2023, G 8

Joonisel on kujutatud teatava tasakumera läätse ristlõige ja selle möödud millimeetrites. Lääts on valmistatud klaasist, mille murdumismäärataja $n = 1,52$.



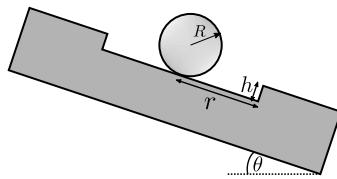
- a) Eeldusel, et kumerpind on sfääriline, kui suur on selle köverusraadius?
- b) Määräke läätse fookuskaugus kiirte jaoks, mis kulgevad optilise peatelje lähedal (Võite eeldada, et lääts on õhuke, st piisab 3 mm täpsusega õigest vastusest.)!

Märkus: Väikeste nurkade x korral võib kasutada lähendust $\sin x \approx \tan x \approx x$ (nurk x on radiaanides).

Ü148 Süvend ja kera ★★★

Autor: Marko Tsengov, piirkonnavor, 2023, G 8

Tasandil on silindrikujuline süvend raadiusega r ning sügavusega h , mis on risti tasandi pinnaga. Süvendi sisse asetatakse kera raadiusega R , nii et kera puudutab süvendi keskpunkti ja kera on algsest paigal. Tasand on maapinna suhtes kaldus nurga θ võrra. Millist tingimust peavad rahuldama antud suurused, et kera saaks mingi arvu põrgete järel süvendist välja hüpata? Võib eeldada, et hõordumist ei toimu, põrked on täielikult elastsed, pindade ebatasasuste tõttu on põrkesunad vähesel määral juhuslikud ning $h < R$.

**Ü149 Kuulitõuge ★★★★**

Autor: Valter Kiisk, lõppvoor, 2023, G 8

Nagu mehaanikast hästi teada, lendab visatud keha antud algkiiruse juures (õhutakistuse puudumisel) kõige kaugemale siis, kui viskenurk horisontaali suhtes on 45° . Kuulitõukespordis on optimaalne nurk mõnevõrra väiksem.

- Leidke selle väärthus, eeldades et kuuli maksimaalne lennukaugus on $s_m = 20\text{ m}$, tõukaja vabastab kuuli maapinnast kõrgusel $h_0 = 2\text{ m}$ ja algkiirus ei sõltu tõuke-suunast.
 - Kui suur on sellise kuuli algkiirus?
- Raskuskiirendus $g = 9,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

Ü150 Käru ★★★★

Autor: Jaan Kalda, lahtine, 2024, G 8

Kilplased ehitasid käru, mille esimeste ja tagumiste rattaste vahel on jõuülekanne: kui esimesi rattaid pöörata päripäeva 8 pööret, teevad tagumised rattad päripäeva 9 pööret. Millise maksimaalse kaldenurgaga teel püsib see käru ilma alla libisemata paigal, kui hõordetegur rattaste ja tee vahel on μ ning esimestele ja tagumistele rattastele mõjub tee poolt ühesugune tooreaktsioon?

Ü151 Hermeetiline sauna ★★★★

Autor: Hannes Kuslap, piirkonnavor, 2024, G 8

Aivo ehitas sauna $2 \times 2 \times 3$ meetri suuruse sauna, mille uks on $h = 1,8\text{ m}$ kõrge, $l = 0,8\text{ m}$ lai ning avaneb sisepoolle. Aivo aga polnud väga kogenud ehitaja ja tegi sauna kogemata täielikult hermeetilise, nii et kinnise uksega puudub igasugune õhuvahetus sauna ja väliskeskonna vahel. Ta pani saunaukse kinni, kui sauna temperatuur oli $T_1 = 20^\circ\text{C}$, ja küttis seejärel sauna temperatuurini $T_2 = 100^\circ\text{C}$. Kas Aivo saab nüüd ukse lükates lahti, kui ta kaalub $m = 100\text{ kg}$? Võib eeldada, et maksimaalne lükkejoud on piiratud Aivo ja põranda vahelise hõõrde poolt (hõõrdetegur $\mu = 0,6$). Samuti võib eeldada, et väljas on ühtlaselt rõhk $p_0 = 101\,000\text{ Pa}$, sauna soojenemisel kehtib ideaalgaasi võrrand ja ukselink asub ukse servas.

Ü152 Kolmnurk ★★★★

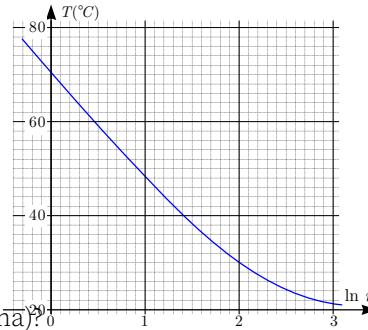
Autor: Jaan Kalda, lõppvoor, 2024, G 8

Koondav lääts fookuskaugusega f tekitab täisnurksest kolmnurgast, mille üks nurk on 30° kujutiseks kolmnurga, mis on samuti täisnurkne ja mille üks nurk on 30° . Kolmnurga hüpotenuus kulgeb piki läätse optilist peatelge. Leidke kolmnurga hüpotenuusi pikkus.

Ü153 Õhkjahutus ★★★★★

Autor: Jaan Kalda, lahtine, 2018, G 9

Valgusdiood tarbib elektrilist võimsust $P = 50\text{ W}$. Dioodi jahutamiseks on see kinnitatud vaskplaatile paksusega $t = 500\text{ }\mu\text{m}$. Vase soojusuhtivustegur $k = 385\text{ W/m K}$. Juuresoleval graafikul (suuremalt lisalehel) on toodud plaaadi temperatuur sõltuvuses vaadeldava punkti ja dioodi vahelise kauguse naturaallogaritmist. Kauguse mõõtmiseks kasutatud ühikud ei ole teada. Dioodi mõõtmed lugeda tühiselt väikseks. Milline on dioodi kasutegur (milline osa tarvitatud elektrienergiast kiirgub valgusenergiana)?
Märkus: soojusuhtivustegur on arvuliselt võrdne soojusenergiaga, mis kandub materjalis läbi ühikulise ristlõikepindala, kui temperatuur langeb ühe kraadi vörra ühe pikkuühiku kohta.

**Ü154 Hantel ★★★★★**

Autor: Jaan Kalda, lahtine, 2019, G 9

Kaks metallkera raadiusega R ja massiga m on ühendatud koaksiaalselt metallvaraga, mille pikkus L on hulga suurem R -st ja mille mass ning diameeter on tühiselt väiksed. Kogu süsteem asub kaalutuse tingimustes teljega ristsihilises homogeenses magnetväljas induktsiooniga B . Ühele kuulikestest kantakse hetkeliselt elektrilaeng Q ; visandage ühel ja samal joonisel mölema kuulikeset trajektoorid edasise liikumise käigus. Eeldada, et varda elektriline takistus on tühiselt väike ja et $\epsilon_0 B^2 L^2 R \ll m$, kus ϵ_0 tähistab vaakumi dielektrilist läbitavust.

Ü155 Kiik ★★★★★

Autor: , piirkonnavoor, 2019, G 9

Juku kiigub nii suure hooga, et kiik jõuab haripunktis kiige postide (kiige pöörlemistelje) kõrguseni. Suure hoo töttu hakkab Juku muretsema, kas kiige postid ikka vastu peavad.

- a) Leida minimaalne ja maksimaalne jõud, mida Juku kiikumisel postidele avaldab.
- b) Leida minimaalne ja maksimaalne jõumoment, mida Juku kiikumisel postidele avaldab. Jõumoment arvutada kiige posti alumise otsa ehk maasse kinnitamise punkti suhtes. Kiige völl (pöörlemistelg) on kinnitatud kahe horisontaalse posti otsa kõrgusel H maapinnast. Tasakaaluasendis on Juku masskeskme kõrgus maapinnast h . Juku mass on m , raskuskiirendus g . Kiige istme mass lugeda tühiseks. Lihtsustatult võib Jukut vaadelda punktmassina, mille kaugus kiige völliist ei muutu.

Ü156 Niit ja poolsfääär ★★★★

Autor: , lõppvoor, 2019, G 9

Millise kogulaengu Q indutseerib peenikese juhtme abil maandatud kerale, mille raadius on R , peenest traadist röngas raadiusega r , mis kannab laengut q , kui kera ja rönga keskpunktide vahekaugus on d ning kera keskpunkt asub rönga sümmeetriateljel? Maandamisjuhtme mahtuvus on tühiselt väike.

Ü157 Suvi ★★★★

Autor: Erik Tamre, lahtine, 2020, G 9

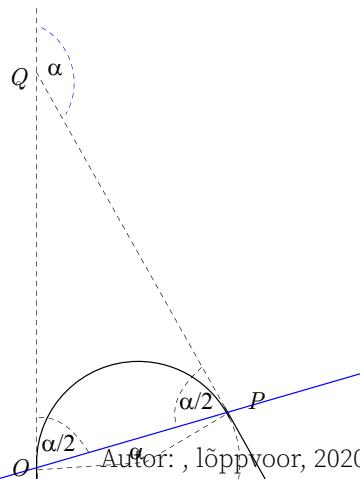
Ühel heal päeval kauges tulevikus, kui Maa orbiidi kuju on muutunud, on ta Päikesele köige lähemal suvisel pööripäeval. Sellel suvisel pööripäeval paistab Päike 30% heledamana kui sama aasta talvisel pööripäeval, s.t. päikesekiirtega risti olevale päikesepaneelile langeb 30% võrra suurem kiirgusvõimsus. Mitme päeva võrra erinevad selle aasta talve ja suve pikkus ning kumb on pikem? Lugeda, et suvi ja talv algavad vastavalt suvisel ja talvisel pööripäeval, s.t. hetkel, mil nurk Maad ja Päikest ühendava sirglöigu ning Maa keskpunkti ja põhjapoolust ühendava sirglöigu vahel on vastavalt minimaalne või maksimaalne. Suvi ja talv lõpevad hetkel, mil Päikest ja Maad ühendav sirge on risti Maa pöörlemisteljega. Eeldada, et aasta jooksul Maa pöörlemistelje suund ei muudu. Maa tiirlemisperiood on $T = 365,26$ peva. Atmosfääri efektidega mitte arvestada.

Vihje. Kepleri 1. seaduse järgi on planeedi orbiit alati ellips (mida võib käsitleda kui väljavenitatud ringi), kusjuures Päike asub mingis punktis selle pikemal sümmeetriateljel. Kepleri 2. seaduse järgi katab planeeti ja Päikest ühendav sirglöök võrdsetes ajavahemikes võrsed pindalad.

Ü158 Laengud magnetväljas ★★★★

Autor: , piirkonnavor, 2020, G 9

Ruumipiirkonda $y \geq f(x)$ täidab homomeenne z -telje sihiline magnetvälji tugevusega B . Erinevate kiirustega positiivseid ja negatiivseid laenguid kandvad osakesed liiguvad paralleelselt y -teljega ja sisenevad magnetväljaga piirkonda punktis $x = y = 0$. Magnetväljaga piirkonnast väljudes on kõigi osakeste kiirusvektor pöördunud ühe ja sama nurga α võrra pärinpäeva, sõltumata laengust, massist ja kiirust. Visandage osakeste trajektoorid ja leidke funktsioon $f(x)$.

**Ü159 Õhupallid ★★★★**

Autor: , lõppvoor, 2020, G 9

Kaur otsustas vaakumkambris kahe õhupalliga eksperimenti teha. Alustuseks ühendas ta mõlemad õhupallid toruga, mille keskel asus ventiil. Hoides ventiili suletuna, lasi ta mõlemasse õhupalli sama hulga õhku. Kuna õhupallid olid tehtud erinevatest materjalidest, paisusid nad erineval määral. Esimene õhupall paisus peale pikaa jõudu mõõdumist raadiuseni r_1 ning teine raadiuseni r_2 , kusjuures $r_1 > r_2$. Seejärel avas ta ventiili ning lasi õhul vabalt ühest õhupallist teise liikuda. Missugused

on mõlema õhupalli uued raadiused, R_1 ja R_2 , peale pika aja möödumist? Pika aja möödumisel saavad õhupallide temperatuurid võrdseks välistemperatuuriga (musta keha kiurguse kaudu). Eeldada, et torus oleva õhu ruumala on tühine vörreledes õhupallide ruumalaga ning et õhupallid on ideaalsed kerad. Õhupallide kesti võib lugeda hüperelastseteks materjalideks, mis alluvad lineaarsele elastsusmudelitele $\sigma = E\epsilon$, kus σ on materjali pinge pindalaühiku kohta, E materjali Youngi moodul ning $\epsilon = \Delta L/L_0$ materjali moone. Õhupallide puhul võib eeldada et deformatsioon on algsest pikkusest palju suurem, s.t. $\Delta L \gg L_0$. Lisaks eeldada, et paisumise käigus jäab õhupallide kesta ruumala samaks ning et kesta paksus on õhupalli lineaarmõõtmega vörreledes tühine.

Ü160 Pidurdav jalgratas ★★★★

Autor: Kaarel Hänni, lahtine, 2021, G 9

Jalgrattur paneb libedal pinnasel sõites tähele, et kui ta esipiduri põhja vajutab, siis esiratas lõpetab pöörlemise ja jalgratas libiseb edasi kiirendusega $-a_1$. Tagaratas püsib libisemise käigus samuti maapinnal (ja pöörleb edasi). Kui ta esipiduri asemel tagapiduri põhja vajutab, siis tagaratas lõpetab pöörlemise ja jalgratas libiseb edasi kiirendusega $-a_2$.

Jalgrattast ja jalgratturist koosneva süsteemi massikeskme kõrgus on h ja selle horisontaalkaugus kummagi ratta keskpunktist on ℓ . Nii esi- kui tagaratta ja maapinna vaheline hõõrdetegur on μ . Võite eeldada, et jalgratta kummagi ratta mass on vörreledes süsteemi massiga tühine.

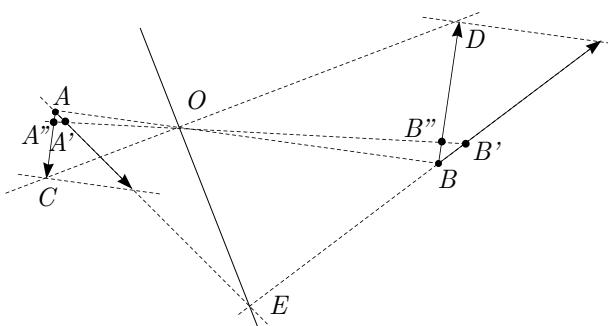
- a)** Leidke, millist võrratust peab rahuldama hõõrdetegur μ , et esipiduri põhja vajutamise ajal tagaratas maast üles ei töuseks.

b) Leidke $\frac{a_1}{a_2}$.

Ü161 Kiiruse kujutis ★★★★

Autor: Jaan Kalda, piirkonnavor, 2021, G 9

Joonisel on kujutatud punktvalgusallikas punktina ja selle valgusallika kiirusvektor mingil ajahetkel ning selle valgusallika kujutis õhukeses läätses teise punktina ja valgusallika kujutise kiirusvektor sellel samal ajahetkel. Konstrueerige õhukese läätse asukoht (tasand ja keskpunkt) lisalehel. Printimisvõimaluse puudumisel kopeerige joonis eraldi ruudulisele paberile.



Ü162 Vedelik peeglil ★★★★

Autor: Konstantis Dukatš, lõppvoor, 2021, G 9

Laua peal lebab veega täidetud sfääriline nõguspeegel, kusjuures vesi ulatub peegli servani (vt joonist). Peegli kohale kõrgusele $h = 25,0 \text{ cm}$ on kinnitatud valgusallikas nii, et selle kujutis kattub allikaga. Seejärel asendatakse vesi tundmatu vedeliku, mille peale nihkub kujutis $l = 5,0 \text{ cm}$ võrra peegli poole. Leidke tundmatu vedeliku murdumisnäitaja. Eeldada, et peegli laius on palju väiksem kui l , h , s.t. võib kasutada väikeste nurkade lähendust $\sin \alpha \approx \tan \alpha \approx \alpha$, kus α on radiaanides. Vee murdumisnäitaja on $n_v = 1,33$.

**Ü163 Nurk ★★★★**

Autor: Kaarel Hänni, lahtine, 2022, G 9

Spioonil on kodus koer, kellel ta tahab spioneerimise harjutamiseks alati silma peal hoida. Kodus on koridor, mille keskel on nurk suurusega α , mille tahe vastu seina koer mõnikord konutama läheb. Spioonile meeldib aga konutada teisel pool nurka, samuti vastu seina. Spioonil on selliste puhkude jaoks kumerlääts fookuskaugusega $f = 10 \text{ cm}$, mis on kettakujuline raadiusega $r = 5 \text{ cm}$, mille ta saab asetada koridoris vabalt valitud kohta, vabalt valitud orientatsiooniga. Milline on minimaalne nurk α , mille puhul on spioonil võimalik läätse kasutades koera antud situatsioonis jälgida?

Märkus: võib eeldada, et nii spiooni kui koera kaugus nurgast on palju suuremad kui nende mõõtmed, mis on omakorda palju suuremad kui läätse raadius. Läätse võib vaadelda ideaalse õhukese läätsena.

Ü164 Pikne ★★★★

Autor: Jaan Kalda, piirkonnavor, 2022, G 9

Pikselöögi ajal on keskmine voolutugevus $I = 50 \text{ kA}$ ning selle löögi kestvus $\tau = 600 \mu\text{s}$. Vaakumi dielektriline läbitavus $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \frac{\text{F}}{\text{m}}$.

a) Hinnake, millise murdosa oma laengust kaotab äikesepilv, kui elektrivälja tugevus enne pikselööki oli maapinna lächedal $E = 20 \frac{\text{kV}}{\text{m}}$. Äikesepilve diameeter $d = 24 \text{ km}$. *Vihje:* vöite maapinda vaadelda kui plaatkondensaatori alumist plati ja äikesepilve kui selle ülemist plati.

b) Pinnase eritakistus on $\rho = 100 \Omega \text{ m}$. Inimene seisab äikse ajal paljajalu ja jalad harkis ning saab märkimisväärse elektrilöögi, sest jalgadele rakendub pinge $V = 300 \text{ V}$. Hinnake, kui kaugele inimesest lõi välk maasse.

Ü165 Satelliit ★★★★

Autor: Jaan Kalda, lõppvoor, 2022, G 9

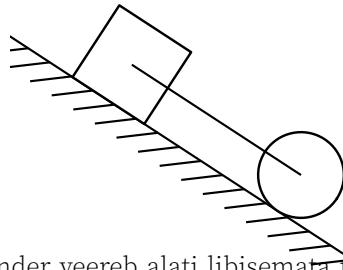
Millise temperatuuri omandab väike kuubikujuline absoluutsest must satelliit, mis liigub Maa ümber madalal ringorbiidil (kõrgus maapinnast on hulga väiksem, kui Maa raadius) ja on parajasti öö külje peal.

Vihje: Maad võib vaadelda kui lõpmatut tasandit, mis on temperatuuril $T_0 = 15^\circ\text{C}$ ja omab kiirgustegurit $\epsilon = 0,6$, st tema soojuskiirgustihedus (W/m^2) on 60% samasuguse absoluutsest musta keha soojuskiirgustihedusest σT^4 , kus σ tähistab Stefan-Boltzmanni konstanti.

Ü166 Klots ja silinder ★★★★

Autor: Taavet Kalda, lahtine, 2023, G 9

Anul on samasuguse läbimõõdu ja massiga pikk silinder ja klots. Ta lasi silindril mäenõlvast alla veereda ning mõõtis ajaks $t_1 = 5$ s. Seejärel lasi ta klotsil alla libiseda ning sai ajaks $t_2 = 7$ s. Kui palju kuloks silindril ja klotsil mäest alla jõudmiseks, kui need joonisel näidatud moel liigesega ühendada? Võib eeldada, et mäenõlv on ühtlase kaldenurgaga, hõõrdjoud kõikide pindade vahel on konstantne, silinder veereb alati libisemata ning et igas stenaariumis läbisid objektid sama vahemaa. Silindri inertsimoment on $I = mR^2/2$, kus m on silindri mass ja R selle raadius. Õhutakistusega mitte arvestada.

**Ü167 Sügav kaev ★★★★**

Autor: Jaan Kalda, piirkonnnavoor, 2023, G 9

Kilplased ehitasid umbes 11 meetri sügavuse pumbakaevu. Lihtsustatult võime nende kaevu vaadelda kui pikka vertikaalset silindriliist toru, mille ülaotsas tekitab pump alarõhu ja imeb seeläbi vett ülespoole. Toru alumine ots on lahtine: vesi saab sealt vabalt nii sisse kui välja voolata. Kilplased proovisid hommikul vett pumbata – pumpasid ja pumpasid, aga pumbatoru ülemisest otsast jäi veetase ikka umbes meetri kaugusele. Nad väsisid ära ja läksid puhkama. Peale paaritunnist puhkust tulid tagasi ja proovisid uuesti, aga nüüd jäi veetase pumbatoru ülemisest otsast veel kaugemale. Mitme sentimeetri võrra jäi veetase teisel katsel madalamaks? On teada, et õhus oli vett nii enne kui pärast $\rho_a = 8 \frac{\text{g}}{\text{m}^3}$, aga et õhk oli soojenenud hommikuselt $T_1 = 10^\circ\text{C}$ väärtseni $T_2 = 20^\circ\text{C}$, siis suhteline õhuniiskus oli vähenenud $r_1 = 80\%$ -lt $r_2 = 40\%$ -ni. Vee tihedus on $\rho_v = 1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ ja molaarmass $\mu = 18 \frac{\text{g}}{\text{mol}}$, gaasikonstant $R = 8,31 \frac{\text{J}}{\text{K mol}}$, vabalangemise kiirendus $g = 9,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$. Eelkõige, et vee temperatuur torus on võrdne õhutemperatuuriga ning õhurõhk päeva jooksul ei muutunud.

Ü168 Staatiline elekter ★★★★

Autor: Jaan Kalda, lõppvoor, 2023, G 9

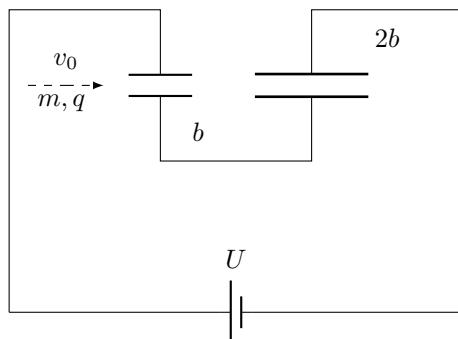
A4 formaadis kile kogupindalaga $S = 630 \text{ cm}^2$ on laetud ühtlase positiivse pindtihedusega staatilise elektriga. Kui see kile asetada vastu maandatud metallplaati, mille pindala on kile omast hulga suurem, siis „kleepub“ kile vastu plaati ning sel leks, et libistada kilet mööda plaati, on vaja rakendada jõudu $F = 0,1 \text{ N}$ plaadi sihis; hõõrdetegur kile ja plaadi vahel on $\mu = 0,5$. Kile mass on hulga väiksem kui 20 g. Millise pinge omandab kile metallplaadi suhtes, kui see tömmata plaadilt lahti ning hoida plaadist kaugusel $h = 5 \text{ cm}$, paralleelselt plaadiga? Elektriline konstant $\varepsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \frac{\text{F}}{\text{m}}$.

Ü169 Kondensaatorid ★★★★

Autor: Uku Andreas Reigo, lahtine, 2024, G 9

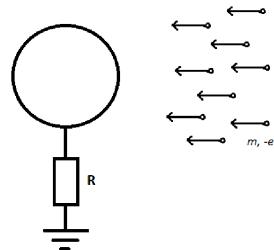
Kaks ruudukujulise plaadiga õhkkondensaatorit on ühendatud jadamisi ning neile on rakendatud alalispinge U . Kondensaatorite plaatide küljepikkused on vastavalt b ja $2b$ ning plaatidevaheline kaugus on d , kusjuures $d \ll b$. Kahe kondensaatori vaheline kaugus on b . Kondensaatoreid läbib plaadiga paralleelse algkiirusega v_0 osake laenguga q ja massiga m . Milline on osakese nihe kondensaatori telje sihis, kui ta väljub teise kondensaatori piirkonnast? Eeldage, et osake läbib mõlemat kondensaatorit nende plate puutumata. Raskuskiirenduse ja kondensaatori ääreefektidega arvestama ei pea.

Vihje: Kondensaatori mahtuvus on $C = \frac{\epsilon\epsilon_0 S}{d}$.

**Ü170 Laetud kuul ★★★★**

Autor: Konstantin Dukatš, piirkonnavor, 2024, G 9

Metallist kuul raadiusega a on maandatud takistuse R kaudu, vt joonist. Kuulile on suunatud lai elektronide (mass m , laeng $-e$) voog, kus elektronide kiirus on v ja elektronide arv ruumalaühiku kohta on n . Millise laengu omandab kuul tasakaalulise olukorra saabudes? Elektronide kiirus on nii suur, $v \gg ne^2 a^2 R / m$, et kuulile kogunev laeng ei suuda nende trajektoori märkimisväärtselt köverdada. Arvihedus n on nii väike, et elektronide tekitatud elektriväljaga võib mitte arvestada. Vihje: Kui kuul kannab laengut Q , siis tema pingi maapinna suhtes on $\varphi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a}$.

**Ü171 Udu ★★★★**

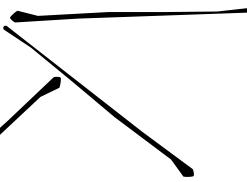
Autor: Jaan Kalda, lõppvoor, 2024, G 9

Kuiva (st ilma igasuguse veeauruta) õhu molaarmass $\mu_a = 28,97 \frac{\text{g}}{\text{mol}}$, vee molaarmass $\mu_v = 18,02 \frac{\text{g}}{\text{mol}}$. Teatud õhurõhu juures on temperatuuril $T_1 = 25^\circ\text{C}$ kuiva õhu tihedus $\rho_k = 1182,8 \frac{\text{g}}{\text{m}^3}$ ning teatud niiske kuid udipiiskadeta õhumassi tihedus $\rho = 1169,3 \frac{\text{g}}{\text{m}^3}$. Milline on selle õhumassi tihedus temperatuuril $T_2 = 10^\circ\text{C}$, kui on teada, et sellel temperatuuril on küllastunud veeauru tihedus $\rho_m = 9,4 \frac{\text{g}}{\text{m}^3}$. Eeldage, et kondenseeruvad udipiisad jäävad õhku hõljuma ja et vee tihedus on palju suurem, kui õhu oma.

Ü172 Pulk ★★★★

Autor: Jaan Kalda, lahtine, 2018, G 10

Õhkuvisatud pulga lendu filmiti liikumatu videokaamera abil ja kahe võrdse intervalli tagant võetud kolm kaadrit kopeeriti juuresolevale joonisele (suuremalt lisalehel). On teada, et esimese ja viimase kasutatud kaadri vahele jäänud ajavahemiku jooksul jäi pulga pöördenurk väiksemaks täispöördest. Pulk pöörles joonise tasandis, pulga pikkus oli $L = 1,0\text{ m}$ ja kaadri lühem külg on täpselt vertikaalne; raskuskiirendus $g = 9,8\text{ m/s}^2$. Kui kaugel pulga jämedamast otsast asub selle massikes? Kui pikk oli esimese ja viimase kaadri vaheline ajavahemik?

**Ü173 Lame maa ★★★★**

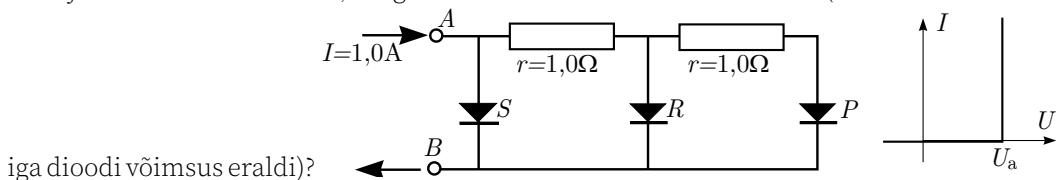
Autor: Andres Põldaru, lahtine, 2019, G 10

Juku lendab lennukiga $h = 10\text{ km}$ kõrgusele, suunab kaamera optilise peatelje horisondile ja teeb pildi. Seejärel trükitab pildi $10 \times 10\text{ cm}$ paberile ($L = 10\text{ cm}$). Kui palju on pildi servas horisont maakera kumeruse tõttu madalamal kui pildi keskel? Võib eeldada, et see suurus on väga väike. Kaamera vaatenurk $2\beta = 50^\circ$, Maa raadius $R = 6000\text{ km}$.

Ü174 3 dioodi ★★★★

Autor: , piirkonnnavoor, 2019, G 10

Joonisel näidatud skeem sisaldab kahte ühesugust takistit ($r = 1,0\Omega$) ning kolme valgusdiodi: sinist, rohelist ja punast, mis on tähistatud vastavalt tähtedega S , R ja P . Dioodide voolutugevuse sõltuvuse pingest võib lugeda lihtsuse mõttes selliseks nagu näidatud kõrvvaloleval graafikul: voolutugevus on null, kui dioodile rakendatud pääripinge on väiksem avanemispingest V_a ning suvalise nullist erineva pärivoolu korral on dioodi pinge võrdne V_a -ga. Avanemispinged on dioodidel järgmised: sinisel $3,2\text{ V}$, rohelisel $2,6\text{ V}$ ja punasel $1,8\text{ V}$. Sisendklemmidel A ja B rakendatakse konstantse voolu allikas, mis hoiab klemmi A siseneva ning klemmist B väljuva voolu võrdse $I = 1,0\text{ A}$ -ga. Millist võimsust tarbivad dioodid (näidata ära iga dioodi võimsus eraldi)?



Ü175 Pöörduv elektriväli ★★★★☆

Autor: , lõppvoor, 2019, G 10

Elektriväli \vec{E} muudab perioodiga $4T$ oma suunda pöördudes $x - y$ -tasandis iga ajavahemiku T möödudes hüppeliselt 90° päripäeva. Seega, kui t tähistab aega ning \hat{x} ja \hat{y} tähistavad vastavalt x - ja y -telje sihilisi ühikvektoreid, siis ajavahemikel

$$\begin{array}{ll} 4nT \leq t < 4nT + T & \vec{E} = E_0\hat{x}, \\ 4nT + T \leq t < 4nT + 2T & \vec{E} = -E_0\hat{y}, \\ 4nT + 2T \leq t < 4nT + 3T & \vec{E} = -E_0\hat{x} \text{ ja} \\ 4nT + 3T \leq t < 4nT + 4T & \vec{E} = E_0\hat{y}. \end{array}$$

On teada, et osake massiga m ja laenguga q liigub perioodiliselt, st mööda kinnist trajektoori; visandage selle osakese trajektoor $x - y$ -tasandis ja leidke trajektoori x -telje sihiline läbimõõt.

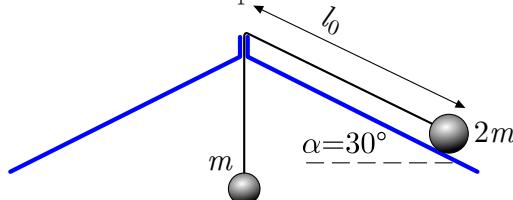
Ü176 Koonus ★★★★☆

Autor: Jaan Kalda, lahtine, 2020, G 10

Vabalt painduva venimatu niidi otstes on kuulid massidega m ja $2m$, vt joonist. Kuul massiga $2m$ lebab koonilisel pinnal, mis moodustab horisondiga nurga $\alpha = 30^\circ$, raskuskiirendus g on vertikaalselt alla suunatud. Alghetkel on niit pingul ja koonusel lebava kuuli kiirusvektor mooduliga v_0 lebab koonuse pinna tasandis moodustades nurga β niidiga (st kuuli ja koonuse tippu ühendava sihiga). Teine kuul liigub vertikaalselt niidi pingel ja raskusjõu koosmõjul, algiirusega $v_0 \cos \beta$. Kõiki hõõrdejõude võib ignoreerida.

a) Kui pika aja pärast jõuab teine kuul oma teekonna madalaimasse punkti eel-dusel, et esimene kuul püsib koonilisel pinnal?

b) Milline võrratus peab olema rahuldatud, et eelmises punktis tehtud eeldus kehtiks, st et kuulite ei kerkiks koonilisel pinnalt õhku?

**Ü177 Teleskoop ★★★★☆**

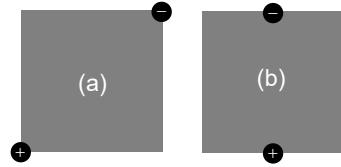
Autor: , piirkonnavoor, 2020, G 10

On antud 4 ühesugust õhukest kumerläätse fookuskaugusega f ning toru pikku-sega $12f$ mille siseläbimõõt ühtib läätse välisläbimõõduga. Leidke maksimaalne suurendus teleskoobile mille saab ehitada nendest komponetidest. Lisage optiline skeem. *Märkus:* Teleskoop on optiline seade, mille sisenevad ja väljuvad kiired on paralleelsed. Teleskoobi suurenduseks nimetatakse nurksuurendust $\beta = \alpha_2/\alpha_1$, kus α_1 on nurk mille all paistab ese vaatleja jaoks ilma teleskoobita ja α_2 on nurk mille all paistab eseeme kujutis teleskoobis. (Näiteks kahe puhul $\beta = f_1/f_2$.)

Ü178 Ruut ★★★★

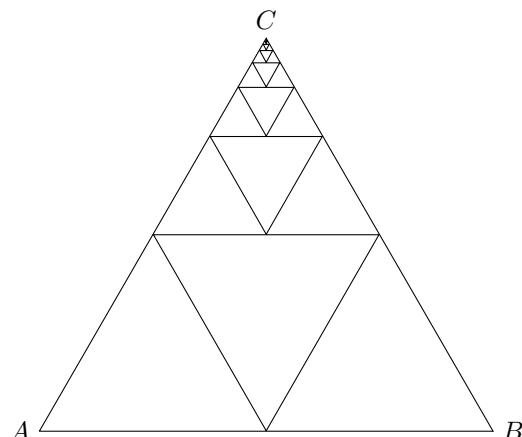
Ühtlase takistusega ruudust plaadi vastastippude vaheliseks takistuseks mõõdetakse R , vt joonis (a). Milline tulemus saadakse sama ruudu vastaskülgede keskpunktide vahelise takistuse mõõtmisel, vt joonis (b)? Mõlemal juhul kasutatakse oommeetri ühendamiseks samu kettakujuilisi tühise takistusega elektroode, mis surutakse vastu plaati nii nagu näidatud joonisel.

Autor: , lõppvoor, 2020, G 10

**Ü179 Kolmnurk ★★★★**

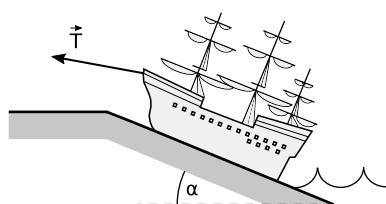
Autor: Kaarel Kivilsalu, lahtine, 2021, G 10

Traadist on tehtud võrdkülgne kolmnurk, mille sisse on pandud lõputult palju samast traadist tehtud võrdkülgseid kolmnurki (vt joonist). Traadi takistus pikkusühiku kohta on selline, et kolmnurga ABC ühe külje takistus on R . Leidke kolmnurga ABC tippude A ja B vaheline takistus.

**Ü180 Laeva vettelaskmine ★★★★**

Autor: Päivo Simson, piirkonnnavoor, 2021, G 10

Laeva lastakse aeglaselt mööda kaldpinda vette. Selleks, et laev liiga kiiresti ei libiseks, hoitakse seda paigal laeva ninasse kinnitatud tugeva köie abil (vt joonist). Laeva mass on m , kaldpinna kaldenurk horisondi suhtes on α ning hõordetegur laeva ja kaldpinna vahel on μ . Leidke laeva paigalhoidmiseks vajalik minimaalne tõmbejoud $T_{min} = |\vec{T}_{min}|$ köies. Eeldage, et laev veel vett ei puuduta.



Ü181 Sirgvool ★★★★

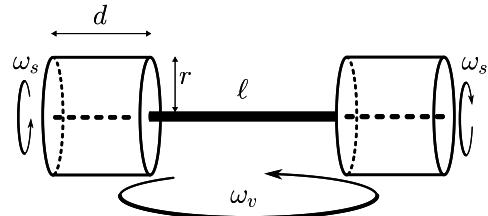
Autor: Taavet Kalda, lõppvoor, 2021, G 10

Lõputut sirget traati läbib vool I . Kaugusel r traadi teljest tulistatakse elektron teatud suunas kiirusega v_0 . On teada, et edaspidise liikumise käigus on elektroni traadi sihilise kiiruskomponent konstantne. Milline on elektroni trajektoor ning mis suguse kiirusega see piki liikuma hakkab? Elektroni laengu ja massi suhe on e/m_e , vaakumi magnetiline läbitavus on μ_0 .

Ü182 Hantel ja pöörlemine ★★★★

Autor: Marko Tsengov, lahtine, 2022, G 10

Hantel koosneb kahest ühesugusest silindrist raadiusega r ning kõrgusega d , mis on ühendatud koaksiaalselt vardaga pikkusega ℓ . Varda sees on mootor, mis pöörab silindreid varda suhtes võrdsete ja vastassuunaliste nurkkiirustega $\pm\omega_s$. Millise püsiva nurkkiiruse ω_v omardab varras, kui hantel asetatakse siledale horisontaalpinnale? Eeldada, et varras ei hakka pöörlema ümber oma telje (nt saab seda takistada kinnitades varda keskkohast alla rippuvaga lisaraskuse).

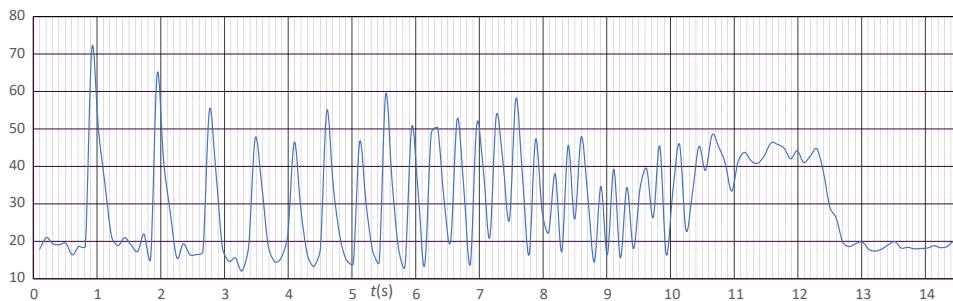
**Ü183 Pingpong ★★★★**

Autor: Jaan Kalda, piirkonnnavoor, 2022, G 10

Juuresoleval graafikul (suuremalt lisalehel) on toodud heli intensiivsus (detsibellides) funktsioonina ajast, kui pingpongipall põrkab üles-allä vastu horisontaalsest lauda. Heli tugevuse andmepunktid on võetud ligikaudu iga 0,1 sekundi järel. Leidke graafikut kasutades nii täpselt kui võimalik, mitu protsendi palli kineetilisest energiast muundub iga põrke ajal soojuseks

- a) esimeste põrgete ja
- b) viimaste põrgete jaoks.

Pidage silmas, et see protsent püsib enam-vähem konstantne esimesest kuni viienda põrkeni ning samuti alates kolmeteistkümnendast põrkest kuni põrkumiste lõpuni.



Ü184 Plaat ★★★★

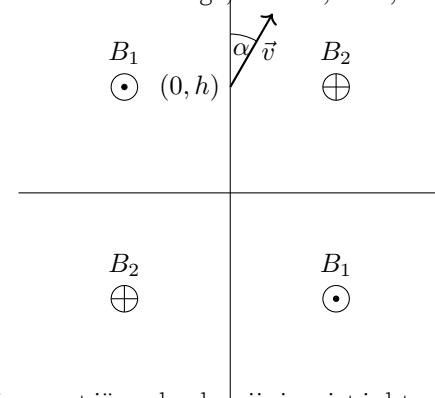
Autor: Konstantin Dukats, lõppvoor, 2022, G 10

Väike ringikujuline laenguta metallist plaat raadiusega r ja paksusega h asetati plaadi teljel olevast punktlaengust q kaugusele R . Hinnake, millise jõuga F tömbub või tõukub plaat laengu poole. Võite eeldada, et $h \ll r \ll R$ ja plaudi keskme ning ääre juurde indutseeritud laengute tõttu tekkinud jõud on tühiselt väike.

Ü185 Kõver trajektoor ★★★★

Autor: Uku Andreas Reigo, lahtine, 2023, G 10

Elektron massiga m ja laenguga q alustab liikumist punktis $(0, h)$ kiirusega v (vt joonis), kusjuures kiirusvektori ja y-telje sihi vaheline nurk on α nii, et $0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$. Milline peab olema magnetväljade tugevuste suhe $\frac{B_1}{B_2}$, et elektroni edasine trajektoor oleks kinnine ning ennast mitte lõikav?

**Ü186 Alajaama kaugus ★★★★**

Autor: Jaan Kalda, piirkonnavoor, 2023, G 10

Maja peakaitsmeni tuuakse elektrivool alajaamast jämeda aluminiiumist juhtmepaari abil, millest üks, nn nulljuhe, on maandatud alajaama juures. Mõlemad juhtmed on ühepiikkused ja ühesuguse ristlõike pindalaga $S = 35 \text{ mm}^2$. Alumiiniumi eritakistus on $\rho = 2,7 \cdot 10^{-8} \Omega \text{ m}$. Tegemist on elektriliini köige alajaamapoolsema tarbimispunktiga — elektriliin jätkub järgmiste majapidamiste poole. Maja sees on elektri edasi kandmiseks peenemad sinist ja pruuni värvjuhtmed, mis on peakaitsmes ühendatud alajaamast tulevate juhtmete külge: sinine on ühendatud nulljuhtmega ja pruun võrgupinget kandva nn faasijuhtmega. Peale selle saab peakaitsmi juurest alguse sealsamas maandatud rohe-kollane maandusjuhe. Maandamine tagab selle, et juhe omab maapinna elektrilist potentsiaali (kui juhtmes on elektrivool, siis kehtib see vaid maanduspunkti läheosal; maandusuhtimes voolu ei ole). Et maapind on hea elektrijuht, siis on maapinna potentsiaal kõikjal üks ja sama.

Kui majas on sisse lülitud elektriradiaator, siis on maja peakaitsmi juures pingi sinise ja kolla-rohelise juhtme vahel $U_1 = 30 \text{ V}$ ning sinise ja pruuni vahel $U_f = 210 \text{ V}$. Radiaatori nominaalpinge on $U_n = 230 \text{ V}$ ja nominaalvõimsus on $P_n = 2 \text{ kW}$ (st kui radiaatorile rakendatakse nominaalpinge, siis eraldub radiaatoril nominaalvõimsus). Radiaatori välja lülitamisel väheneb rohe-kollase juhtme ja sinise juhtme vaheline pingi väärtsuseni $U_0 = 20 \text{ V}$. Kui pikk on majast alajaamaani viiv juhtmepaar? Eeldage, et nii radiaatorit kui ka elektriliinil paiknevaid teisi tarbijaid võib heas lähinduses vaadelda kui takisteid. Muuhulgas tähendab see, et kuigi võrgus on vahelduvpinge, võib arvutusi teha täpselt samamoodi nagu alalispinge puhul.

Ü187 Uppuv pall ★★★★

Autor: Jaan Kalda, lõppvoor, 2023, G 10

Vees ujub vettinud ja vett täis tenniseball nii, et see on peaaegu üleni vee all ning ülemine serv puudutab veepinda. Kaldalt, $H = 2\text{ m}$ körguselt vaadates näib, et pall on ellipsoidi kujuiselt lapik, kusjuures laiuse ja körguse suhe on $k = 3$. Kui kaugel vaataja silmast on pall, kui vee murdumisnäitaja $n = \frac{4}{3}$? Ülesande lahendamisel võib teha mõistlikke lähendusi.

Ü188 Pärituul ★★★★

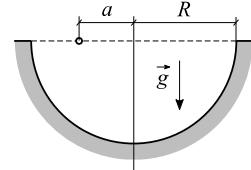
Autor: Jaan Kalda, lahtine, 2024, G 10

Jalgrattur sõidab mööda teed. Samal ajal puhub pooleldi selja tagant tuul, mille kiirus on täpselt võrdne jalgratturi kiirusega; tuule suund moodustab tee sihiga nurga $\alpha < 90^\circ$. Milliste nurga α väärustete puhul tuul takistab sõitmist (st rattur saaks tuulevaikse ilmaga sama kiiresti sõita kulutades õhutakistuse ületamiseks väiksemat võimsust)? Lugeda, et õhu takistusjõud on võrdeline ratturi kiiruse ruuduga õhu suhtes.

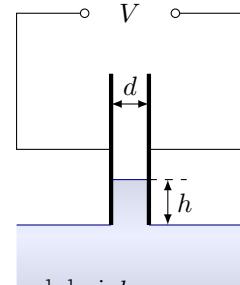
Ü189 Põrked ★★★★

Autor: Päivo Simson, piirkonnavor, 2024, G 10

Väiksel kummipallil lastakse kakkuda poolkera sisse, mille raadius on R . Kõrvaloleval lõikel on näidatud palli algne asukoht, mis on kaugusel a kera tsentrist. Palli algkiirus on null. Leidke üks selline kaugus a ($0 < a < R$), mille korral liikumine pärast esimest põrget on perioodiline.

**Ü190 Kondensaator vedelikus ★★★★** Autor: Konstantin Dukatš, lõppvoor, 2024, G 10

Plaatkondensaator plaatidevahelise kaugusega d on vertikaalasendis ja otsapidi vedelikus nii, nagu näidatud joonisel. Vedeliku dielektriline läbitavus on ϵ ja kondensaatori plaatidele on rakendatud pinge V . Kui körgel h on plaatide vahelises ruumiosas vedeliku nivoo võrreldes ülejäänuud vaba vedeliku pinnaga? Vaakumi dielektriline läbitavus on ϵ_0 , õhu dielektriline läbitavus $\epsilon_g = 1$, vedeliku tihedus on ρ ja vabalangemise kiirendus on g . Vedeliku pindpinevusega võib mitte arvestada; kondensaatori körgus ja laius ning õhuga täidetud kondensaatoriosa körgus on palju suuremad, kui d .



Vihjed

V1
V2
V3
V4
V5
V6
V7
V8
V9
V10
V11
V12
V13
V14
V15
V16
V17
V18
V19
V20
V21
V22
V23
V24
V25
V26
V27
V28
V29
V30
V31
V32
V33
V34
V35
V36
V37
V38
V39
V40
V41
V42
V43
V44

V45
V46
V47
V48
V49
V50
V51
V52
V53
V54
V55
V56
V57
V58
V59
V60
V61
V62
V63
V64
V65
V66
V67
V68
V69
V70
V71
V72
V73
V74
V75
V76
V77
V78
V79
V80
V81
V82
V83
V84
V85
V86
V87
V88
V89
V90
V91

V92
V93
V94
V95
V96
V97
V98
V99
V100
V101
V102
V103
V104
V105
V106
V107
V108
V109
V110
V111
V112
V113
V114
V115
V116
V117
V118
V119
V120
V121
V122
V123
V124
V125
V126
V127
V128
V129
V130
V131
V132
V133
V134
V135
V136
V137
V138

V139
V140
V141
V142
V143
V144
V145
V146
V147
V148
V149
V150
V151
V152
V153
V154
V155
V156
V157
V158
V159
V160
V161
V162
V163
V164
V165
V166
V167
V168
V169
V170
V171
V172
V173
V174
V175
V176
V177
V178
V179
V180
V181
V182
V183
V184
V185
V186
V187
V188
V189
V190

Lahendused

L1 Kärbes ★

Autor: Erkki Tempel, lahtine, 2018, G 1

Minimaalne kaugus on siis, kui kärbes läbib optilist peatelge. Kärbes ja tema kujutis on sel hetkel läätsest kahekordse fookuskauguse kaugusel. Kuna nii kärbes kui ka tema kujutis on läätsest sama kaugel, on kujutise suurendus 1, mistõttu kujutise liikumiskiirus on sama, mis kärbse liikumiskiirus, ehk $u = v = 0,5 \text{ m/s}$.

L2 Ristmik ★

Autor: Markus Rene Pae, lahtine, 2019, G 1

Kui Juku ja teise auto projitseeritu kaugus ristmikust ja kiirused on samad, siis nad jõuavad ristmikule täpselt sama ajaga $t = s/v = 150 \text{ m}/90 \frac{\text{km}}{\text{h}} = 150 \text{ m}/25 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 6 \text{ s}$. Kui Juku saavuitaks hetkeliselt kiirenduse $a = 0,5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$, siis selle ajaga jõuaks ta läbida $s = v_0 t + at^2/2 = 25 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 6 \text{ s} + 0,5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} (6 \text{ s})^2/2 = 159 \text{ m}$. Seega on teise auto ristmikule jõudes autode vahemaa 9 m. Nurk ei oma antud ülesandes tähtsust.

L3 Rong ★

Autor: , piirkonnavor, 2019, G 1

Olgu rongi kiirendus a . Kuna vagunid on identsed, siis ühe vaguni pikkus $s = \frac{at^2}{2}$. REMOVE Olgu rongis n vagunit, siis kõik vagunid mööduvad Jukust aja $t_n = \sqrt{\frac{2sn}{a}}$ jooksul. REMOVE Kõik peale viimase vaguni mööduvad aja $t_{n-1} = \sqrt{\frac{2s(n-1)}{a}}$ jooksul. REMOVE Seega

$$t_2 = t_n - t_{n-1} = \sqrt{\frac{2sn}{a}} - \sqrt{\frac{2s(n-1)}{a}} = t(\sqrt{n} - \sqrt{n-1}) \quad \text{REMOVE}$$

Sit tuleb ruutvõrrand, mille lahendades saame:

$$n = \frac{1}{4} \left(\frac{t_2}{t} \right)^2 + \frac{1}{2} + \left(\frac{t}{4t_2} \right)^2 = 7.97 \approx 8 \quad \text{REMOVE}$$

Üle kontrollides ainuke antud vahemikku sobiv $n = 8$ REMOVE.

L4 Autod ★

Autor: , lõppvoor, 2019, G 1

Kuna autod jäävad seisma samaaegselt, siis läheme ühe ühe autoga seotud taustsüsteemi. Autode suhteline kiirus üksteise suhtes on $v = v_1 + v_2 = 180 \text{ km/h} = 50 \text{ m/s}$

Autode pidurdustee on kokku $2 = 600 \text{ m}$ ning lõppkiirus on 0 m/s , siis pidurdamiseks kulunud aeg on

$$s = \frac{v + v_0}{2} \cdot t \quad \Rightarrow \quad t = \frac{2s}{v + v_0} = 24 \text{ s}$$

L5 Pudel ★

Autor: Kaarel Kivilaslu, lahtine, 2020, G 1

Olgu algne vee ruumala pudelis V_0 . Selleks, et ära joodud vee ruumala maksimeerida, peaks ilmselt lõpus pudelit ainult õhk täitma. Vastasel korral on võimalik algset vee ruumala vähhendada ning suurema õhu osakaalu arvelt rohkem vett ära juua. Pudelist joomine on isotermiline protsess. Seega,

$$p_0(V - V_0) = (p_0 - \Delta p)V.$$

Sit avaldades V_0 saame, et

$$V_0 = \frac{\Delta P}{p_0}V = 0,25V.$$

L6 Saun ★

Autor: , piirkonnavor, 2020, G 1

Vee mass on $m = \rho V$ ja seega vee soojendamiseks ja aurustumiseks kuluv soojushulk on

$$Q = c_v \rho V (T_k - T_0) + L \rho V, \quad REMOVE$$

kus $T_k = 100^\circ\text{C}$ on keemistemperatuur ja T_0 on vee algtemperatuur.

Kui kerise temperatuur väheneb ΔT vörra (ΔT on temperatuuri muutuse absoluutväärtus), siis kerise poolt antud soojushulk on

$$Q = c_k M \Delta T \quad REMOVE$$

Võrdustades seosed saame

$$\Delta T = \frac{\rho V (c_v (T_k - T_0) + L)}{c_k M} \quad REMOVE$$

Asendades sisse antud väärtsused, saame

$$\Delta T_{(\text{kühl})} \approx 7,65^\circ\text{C} \quad REMOVE$$

$$\Delta T_{(\text{kuum})} \approx 6,81^\circ\text{C} \quad REMOVE$$

Kuna $\frac{7,65-6,81}{6,81} \approx 0,12$ REMOVE on suurem kui 10%, siis Juhanil ei ole õigus. REMOVE

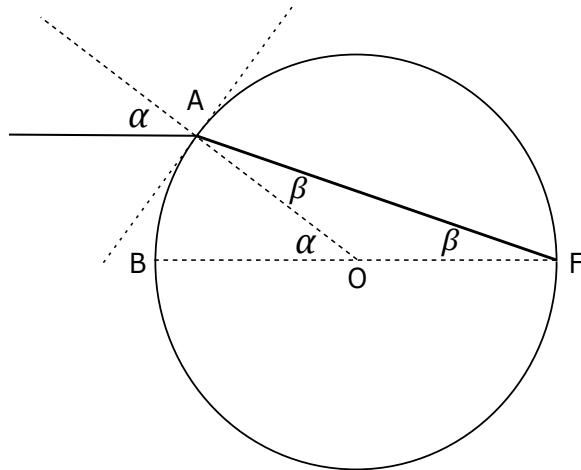
Märkus. Viimases reas lugeda õigeks ka lahendus, mis leiab $\frac{7,65-6,81}{6,81}$ asemel $\frac{7,65-6,81}{7,65}$ väärtsuse või leiab, et $\frac{7,65}{6,81} > 1,1$.

L7 Klaaskera ★

Autor: , lõppvoor, 2020, G 1

Mööda optilist peatelge liikuv kiir ei murdu ning liigub otse läbi kera. Seega koonduvad kõik kiired kera tagumise poole ja optilise peatelje lõikumiskohta. Uurime nüüd üht valguskiirt, mis asub vihu tsentrist eemal. Selle konkreetse valguskiire jaoks võib lähendada probleemi kahedimensionaalseks. Joonistame kiire käigu, märgime nurgad. Langemisnurk olgu α ning murdumisnurk β , kusjuures need on omavahel seotud Snelli seadusega: $n \sin \alpha = n_k \sin \beta$. Sarnaste kolmnurkade tõttu $\angle AOB$ on samuti α . Kolmnurk AFO on võrdhaarne (haaradeks kera raadiused) ning seega $\angle AFO$ on β . Ühelt poolt (kolmnurga sisenurkade summa on 180°) $\angle AOF = 180^\circ - 2\beta$, teisalt (kõrvunurkade summa on 180°) $\angle AOF = 180^\circ - \alpha$, seega $\alpha = 2\beta$. Võttes, et $n = 1$ ning tehes väikeste nurkade lähenduse $\sin x \approx x$, saame:

$$n \sin \alpha = n_k \sin \beta \Rightarrow \sin 2\beta = n_k \sin \beta \Rightarrow n_k = \frac{\sin 2\beta}{\sin \beta} \approx \frac{2\beta}{\beta} = 2.$$

**L8 Võrkpall ★**

Autor: Jaan Kalda, lahtine, 2021, G 1

Ideaalse gaasi olekuvõrrandi saab uue pallirõhu p_1 abil kirjutada kujul $p_1 + p_a = (p_0 + p_a)T_1/T_0$, kus alg- ja lõpptemperatuurid on kelvinites. Siit saame $p_1 = (p_0 + p_a)T_1/T_0 - p_0 \approx 42 \text{ kPa}$, st pall on nüüd liiga suure rõhu all.

L9 Kuul sfääris ★

Autor: Markus Rene Pae, piirkonnnavoor, 2021, G 1

Läheme pöörlevasse taustsüsteemi. Siis mõjub kuulile kolm jõudu, raskusjõud, tsentrifugaaljõud ja tooreaktsioon. Nende jõudude summa peab olema 0, sest pöörlevas taustsüsteemis seisab kuulike paigal. Sfääri pinna ja kuuli vahel puudub hõõrdejõud, seega on kuuli raskusjõu ning tsentrifugaaljõu summavektor sfääri raadiuse sihiline REMOVE.

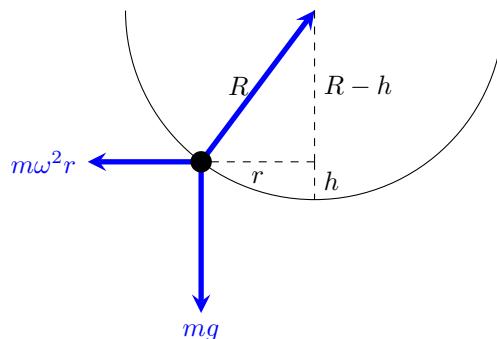
Olgu r kuulikese kaugus pöörlemisteljest. Sarnaste kolmnurkade töttu, suhtuvad raskusjõu ja tsentrifugaaljõu teineteisesse kui $R - h$ ja r REMOVE. Seega peab kehtima seos:

$$\frac{mg}{R - h} = \frac{m\omega^2 r}{r} \quad \text{REMOVE}$$

kus ω on kuulikese ringsagedus. Viimase avaldise lihtsustamine ning sellest nurkkiruse ω avaldamine annab:

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{R - h}} \quad \text{REMOVE}$$

Kuna $\omega = \frac{2\pi}{T}$ REMOVE, siis järelikult peab tiirlemise periood olema $T = 2\pi\sqrt{\frac{R-h}{g}} \approx 1,28$ s REMOVE.



L10 Lumepall ★

Autor: Oleg Košik, lõppvoor, 2021, G 1

Lumepall peab läbima kiirendusega g vertikaalse teepikkuse $H - h$, seega saame võrduse

$$H - h = \frac{gt^2}{2},$$

kus t on lumepalli lennuaeg. Olgu w lumepalli algkiirus, siis tema horisontaalsuunaline kiirus läheneva Richardi suhtes on $v + w$. Peab kehtima võrdus

$$(v + w)t = l.$$

Avaldades esimesest võrdusest t ja teisest w leiate

$$w = l \sqrt{\frac{g}{2(H-h)}} - v \approx 4,7 \text{ m/s.}$$

L11 Titicaca järv ★

Autor: Kaur Aare Saar, lahtine, 2022, G 1

Kuna järv on tasakaalus, siis sissetulev vee kogus peab olema võrdne väljamineva vee kogusega. Vett aurab kiirusega

$$v_a = \frac{A \cdot v}{1 \text{ aasta}} = \frac{8400 \cdot 2000 \text{ km}^2 \text{ mm}}{1} \frac{\text{aasta}}{\text{aasta}} = \frac{8400 \cdot 2000 \cdot 1000000 \cdot 0.001 \text{ m}^3}{3600 \cdot 24 \cdot 365.25} \frac{\text{m}^3}{\text{s}} = 532 \frac{\text{m}^3}{\text{s}}.$$

Järelikult voolab vett sisse kiirusega $v_s = v + v_a = 542 \frac{\text{m}^3}{\text{s}}$.

Kuna järv on tasakaalus, siis sissetulev soola kogus peab olema võrdne välja mineva soola kogusega. Sisse tuleb soola kiirusega $v_{sool} = c \cdot v_s = c_{välja} \cdot v$.

Järelikult $c_{välja} = c \frac{v_s}{v} = 10 \frac{542}{10} \frac{\text{mg}}{\text{L}} = 542 \frac{\text{mg}}{\text{L}}$.

L12 Peegel peeglis ★

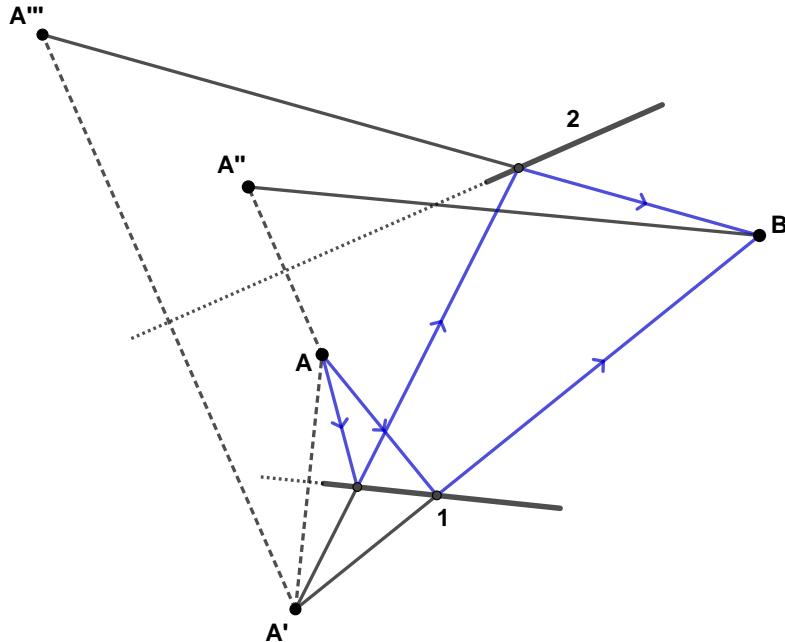
Autor: Richard Luhtaru, piirkonnavor, 2022, G 1

Konstrueerime Arvo kujutise peeglis 1 (A'), peeglis 2 (A'') ja punkti A' kujutise peeglis 2 (A'''). Breti nägemiseks on kaks võimalust. Esimene võimalus on ainult peegli 1 kaudu, kiirte käigu saame konstrueerida lõigu $A'B$ abil. Teine võimalus on peegli 1 ja seejärel peegli 2 kaudu, kiirte käigu saame konstrueerida lõigu $A'''B$ abil. Ainult peeglist 2 pole võimalik Brettini näha, sest $A''B$ ei lõiku peegliga 2. Samuti pole peeglist 2 võimalik näha peeglit 1, seega rohkem võimalusi pole.

L13 Kettaheide ★

Autor: Jaan Kalda, lõppvoor, 2022, G 1

Jõudiagramm on toodud joonisel. Vastutuul suurendab nii takistusjõudu kui õhuvolust tingitud üleslükkejõudu. Üleslükkejõud kasvab proporsionaalselt ketta kiirusega õhu suhtes. Suurem üleslükkejõud pikendab lennuaega, mille tulemusel jõuab ketas liikuda horisontaalsihis kaugemale vaatamata sellele, et horisontaalsuunaline kiirus natuke väheneb takistusjõu tõttu (esimene efekt on tugevam, kui teine).



L14 Paviljon ★

Autor: Uku Andreas Reigo, lahtine, 2023, G 1

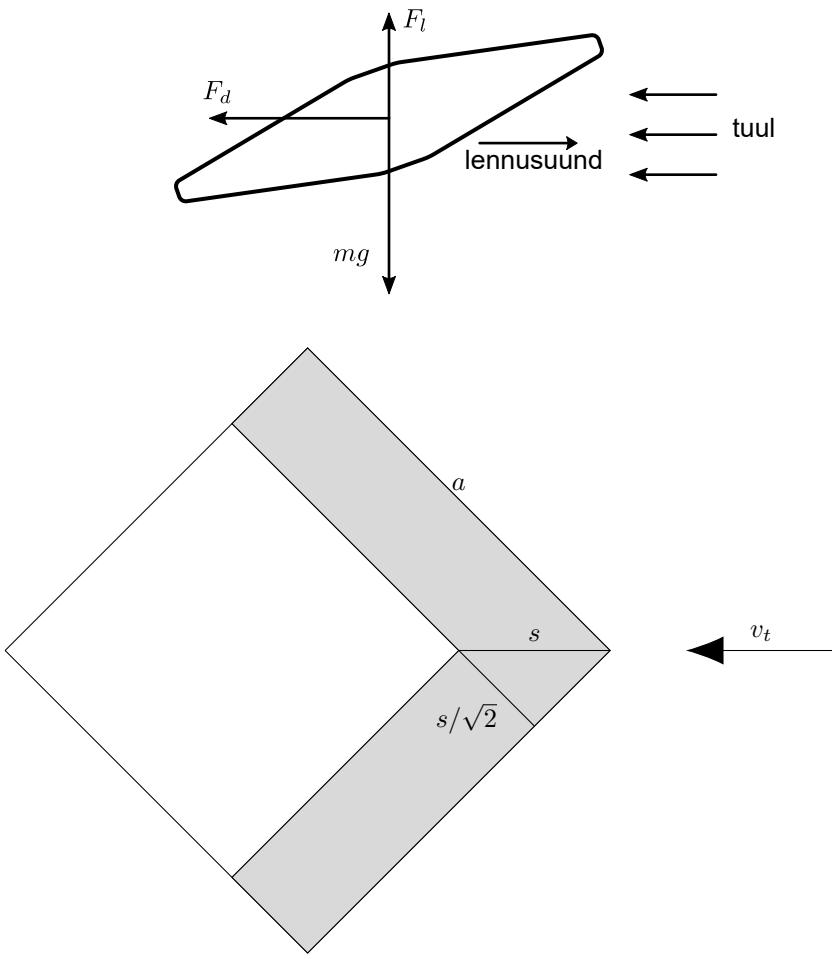
Mõistame, et ülesande tingimustest tuletatav piiskade vertikaalne kiirus v sõltub tuule suunast ruudukujulise paviljoni suhtes. Mõlemal korral vihmapiiskade horisontaalne nihe allpool katuseserva on $s = v_t T = \frac{v_t H}{v}$, kus T on kukkumisaeg katuseservast põrandani. Esimesel juhul olgu tuule suund paviljoni mingi küljega risti:

a) et 20% põrandast märguks, peab piiskade horisontaalne nihe olema 20% ruudu külje pikkusest.

$$s = \frac{v_t H}{v} = 0.2a$$

$$\implies v = \frac{v_t H}{0.2a} = 9 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

b) Teine juht, tuule suund on piki ruudu diagonaali.



Näeme, et kui kuiva ruudu külje pikkus on $b = a - \frac{s}{\sqrt{2}}$, ning kuiv ruut moodustab 80% kogu ruudust, siis:

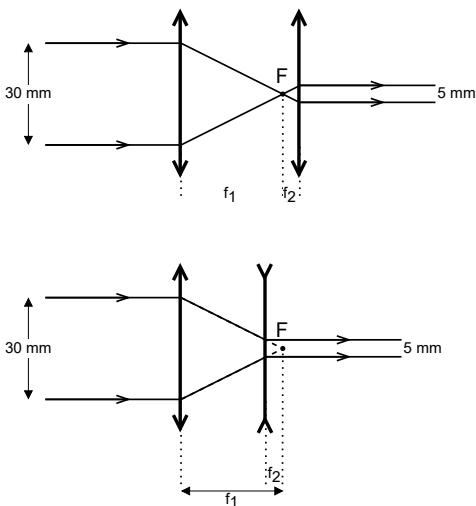
$$\begin{aligned}
 b^2 &= (1 - 0.2)a^2 \\
 \Rightarrow b &= \sqrt{0.8}a = a - \frac{s}{\sqrt{2}} \\
 \Rightarrow s &= \sqrt{2}(a - \sqrt{0.8}a) \\
 \Rightarrow v &= \frac{v_t H}{s} = \frac{v_t H}{\sqrt{2}(a - \sqrt{0.8}a)} \approx 12 \frac{\text{m}}{\text{s}}
 \end{aligned}$$

Leiame, et minimaalne ja maksimaalne võimalik vihmapiisa kiirus on vastavalt $v_{min} = 9 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ ja $v_{max} = 12 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

L15 Valgusvihk ★

Autor: Richard Luhtaru, piirkonnavor, 2023, G 1

Kummagi juhu skeemid on toodud allpool. Mõlemal juhul läätsede fookused kattuvad, mistõttu valgusvihk jäab paralleelseks pärast läätsede läbimist.



Sarnastest kolmnurkadest leiate, et kummalgi juhul $\frac{f_1}{f_2} = \frac{30\text{ mm}}{5\text{ mm}} = 6$. Ainsad Maril olevad läätsed, mille fookuskauguste suhe on 6, on 12 cm ja 2 cm. Seega esimesel juhul on Maril vaja kumerläätsi fookuskaugustega 12 cm ja 2 cm. Teisel juhul on Maril vaja kumerläätse fookuskaugusega 12 cm ja nõgusläätse fookuskaugusega 2 cm.

Tõestust, et teised läätsepaarid ei sobi, ei ole vaja.

L16 Sujuv autosõit ★

Autor: Jaan Kalda, lõppvoor, 2023, G 1

Ei ole sujuv: seismajäämise hetkel muutub hõördejöud hetkeliselt nulliks, mis tähindab, et inimesed, kes olid pidurdamise ajal kergelt tahapoole kallutanud, et seista neile jalgade juures möjuva hõördejöu ja tooreaktsiooniga paralleelselt, kavatavad tasakaalu ja hakkavad tahapoole kukkuma.

L17 Vabasukeldumine ★

Autor: Jarl Patrick Paide, lahtine, 2024, G 1

Sukelduja vabalangemine hakkab pihta siis, kui üleslükkejöud muutub väiksemaks kui raskusjöud. Selleks peab sukelduja ruumala olema $V_1 = \frac{m_0}{\rho} = 75\text{ l}$. Selle saavutamiseks peab sukelduja kopsu ruumal olema $V_{k2} = V_k - (V_0 - V_1) = 31\text{ l}$. Meil on sukeldumise ajal isotermiline protsess, seega kops saavutab vajaliku ruumala rõhu $P_1 = \frac{P_0 V_k}{V_{k2}} = 405\,200\text{ Pa}$ juures. Selline rõhk saavutatakse sügavusel $H = \frac{P_1 - P_0}{\rho g} = 31\text{ m}$

L18 Päikesepaneel ★

Autor: Richard Luhtaru, piirkonnavor, 2024, G 1

Iga paneeli poolt toodetav keskmise energia võimsus on

$$P = \eta SI = 24,75 \text{ W. REMOVE}$$

Pille keskmise energiatarbimise võimsus on

$$P_k = \frac{3000 \text{ kWh}}{1 \text{ aasta}} \cdot \frac{1000 \text{ W}}{1 \text{ kW}} \cdot \frac{1 \text{ aasta}}{365 \cdot 24 \text{ h}} \approx 342,5 \text{ W. REMOVE}$$

Leiame, et

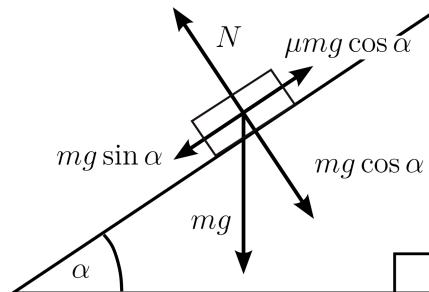
$$\frac{P_k}{P} = \frac{342,5 \text{ W}}{24,75 \text{ W}} \approx 13,8, \text{ REMOVE}$$

seega Pillel on vaja vähemalt 14 päikesepaneeli. REMOVE

L19 Kelgumägi ★

Autor: Hans Daniel Kaimre, lõppvoor, 2024, G 1

Lähendame Sandrat mäest alla kelgutades kLOTSINA kALDPINNAL (vt joonist). Sandra-le mõjub raskusjoud $F_r = mg$, mille kaldpinna suunaline komponent on $mg \sin \alpha$ ning pinnanormaali suunaline komponent on $mg \cos \alpha$. Pinnanormaali suunaline komponent on vordne toereaktsiooniga, st $N = mg \cos \alpha$. Kelgule mõjuv liug-höördejoud on vordeline toereaktsiooni ja jöördeteguriga: $F_h = \mu N = \mu mg \cos \alpha$. Seega Sandrat nõlval pidurdav joud on $F_p = mg(\mu \cos \alpha - \sin \alpha)$, kust kiirendus $a = F_p/m = g(\mu \cos \alpha - \sin \alpha)$.



Ühtlase kiirendusega liikumise kirjeldamiseks kehtib valem $s = (v^2 - v_0^2)/2a$, kus s on nihe, v keha lõppkiirus, v_0 keha algkiirus ning a kehale mõjuv kiirendus. Piirjuhul jäab Sandra nõlva lõppu jõudes seisma, st $v = 0$, kiirendus $a = -g(\mu \cos \alpha - \sin \alpha)$ (miinusmärgiga), kuna kiirendus on keha liikumise suunaga vörreldes vastassuunas) ning nihke leiame trigonomeetriast: $s = h / \sin \alpha$. Seega

$$\frac{h}{\sin \alpha} = \frac{-v_0^2}{-2g(\mu \cos \alpha - \sin \alpha)}.$$

Mildest

$$v_0 = \sqrt{\frac{2hg(\mu \cos \alpha - \sin \alpha)}{\sin \alpha}}$$

$$= \sqrt{\frac{2 \cdot 6 \text{ m} \cdot 9,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot (0,3 \cdot \cos 15^\circ - \sin 15^\circ)}{\sin 15^\circ}} = 3,8 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

L20 2018 ★

Autor: Erkki Tempel, lahtine, 2018, G 2

Selleks, et kogutakistus oleks 2018Ω , peaks kaks R_3 takistit ülejäänud takistitega jadamisi olema. Pannes need rõöbiti muutuks takistus liiga väikseks. Seega taandub ülesanne $18\Omega \pm 0,2\Omega$ leidmisele nelja takistiga. Üks sobilikest lahenditest on näiteks kahe R_1 ja kahe R_2 rõöbiti paigutamine. Sellisel juhul on takistus $2R_3 + \frac{1}{\frac{1}{2R_1} + \frac{1}{2R_2}} = 2018,182\Omega$

L21 Pumpjaam ★

Autor: Valter Kiisk, lahtine, 2019, G 2

Olgu reservuaari pindala S . Vee mass on $m = \rho V = \rho h_0 S$. Selle masskese on töstetud kõrgusele $h = h_0/2$, seega potentsiaalne energia on $mgh = \frac{1}{2}\rho gh_0^2 S$ ja energia pinnaühiku kohta

$$w_s = \frac{1}{2}\rho gh_0^2 \approx 49 \frac{\text{MJ}}{\text{m}^2} \approx 13,6 \text{ kWh/m}^2.$$

Energiavajaduse rahuldamiseks on vaja keskmist energiatihedust

$$w_t = 100 \frac{\text{kW}}{\text{km}^2} \cdot 24 \text{ h} = 2400 \text{ kWh/km}^2 = 0,0024 \text{ kWh/m}^2.$$

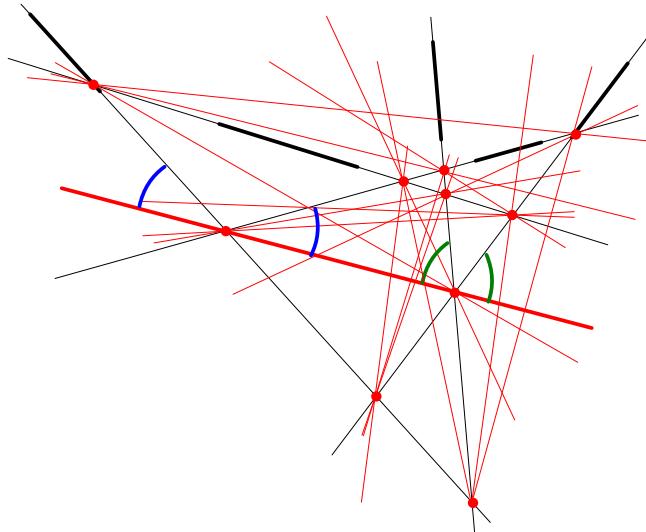
Otsitav suurus on ilmselt $w_t/w_s \approx 1,8 \cdot 10^{-4}$.

L22 Peegel ★

Autor: , piirkonnavor, 2019, G 2

Paneme tähele, et ükski kiirefragment ei ole teisega samal sirgel REMOVE. See tähendab, et kõikide kiirefragmentide puhul on tegemist kas erinevate kiirtega või sama kiire fragmentidega enne ja pärast peegeldumist REMOVE. Et kiiri on kokku ainult kolm, siis vähemalt kaks fragmenti peavad olema pärit samalt kiirelt, üks enne ning teine pärast peegeldumist REMOVE. Kui me suudame kindlaks teha, millised on need kaks fragmendipaari, siis saame leida peegli asukoha kui kahe kiirepaari pikenduste lõikepunkte ühendava joone. Viis fragmenti annavad pikendades viis sirget, mis lõikuvad paarikaupa kümnes erinevas punktis. Pikendame kõiki kiiri lõikumisteni ja leiame need 10 lõikepunkt (9-10 lõikepunkt: REMOVE; 8 või vähem lõikepunkt: REMOVE punkti). Ühendame need 15 lõikepunktipaari, mida ühendav joon saab olla peeglik (st mis ei ole juba ühendatud fragmendipikkusega), joonega (punased jooned joonisel) (11-15 joont: REMOVE; 10 või vähem joont: REMOVE). Leiame punaste joonte hulgast sellise, mis sobib peeglik: joon moodustab vastavalt võrdsed nurgad lõikuvate kiirtega, (joonisel on võrdsed

nurgad märgitud roheliste ja siniste kaarekestega ning peegli asukoht jämeda punase joonega) REMOVE.



L23 Saunauks ★

Autor: , lõppvoor, 2019, G 2

Saunakerisele visatud vee aurustamine lisas saunaruumi rõhu:

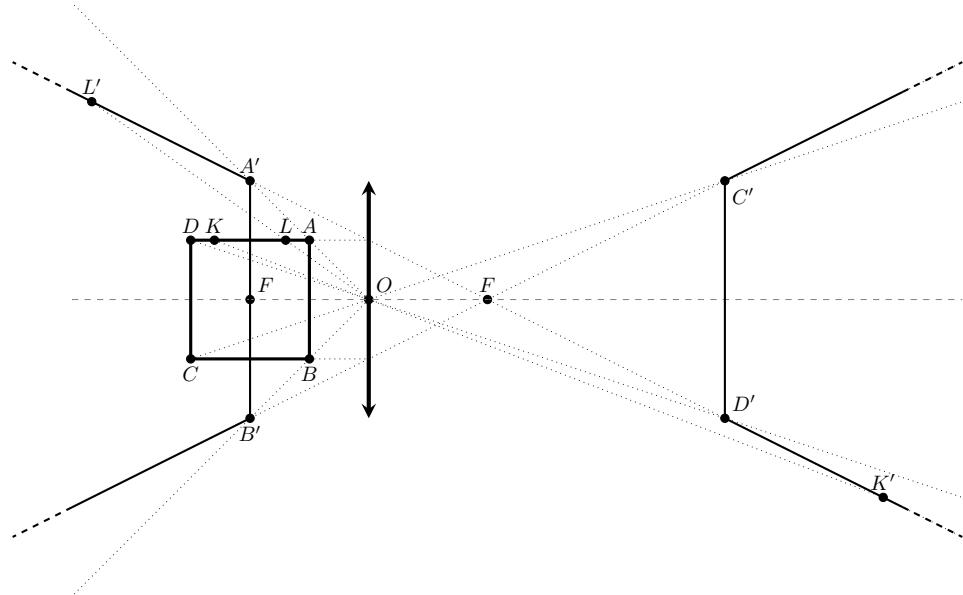
$$p = \frac{\rho V_v}{\mu} \cdot \frac{RT}{V} = \frac{200}{18} \cdot \frac{8,314 \cdot 373}{3 \cdot 2,5 \cdot 2,4} \approx 1914 \text{ Pa.}$$

kus me kasutasime teadmist, et auru temperatuur $T = 373$ K. Saunaukse pindala $S_u = 0,7 \cdot 1,9 = 1,33 \text{ m}^2$ ning talle mõjub jõud $F = pS_u \approx 2546 \text{ N}$. Selleks, et leili rõhk ust lahti ei teeks, peab ukse hingedele mõjuv hõõrdejõu moment olema vähemalt:

$$\tau = Fl = 2546 \cdot \frac{0,7}{2} \approx 891 \text{ N/m.}$$

L24 Ruut fookuses ★

Autor: Hannes Kuslap, lahtine, 2020, G 2



Leiame punktide A, B, C ja D kujutised A', B', C' ja D' läätses eraldi. Ühendame vertikaalsed küljed $A'B'$ ja $C'D'$. Märkame, et punktid A' ja B' on teisel pool läätse kui punktid C' ja D' . Seega ei ole lõigu AD kujutis lõik $A'D$. Valime küljel AD abipunktid K ja L , mis asuks vastavalt vasakul ja paremal pool fookusest. Seega on külje AD fookusest paremal oleva osa kujutis sirgel $A'L'$ ja fookusest vasakul oleva osa kujutis sirgel $D'K'$. Kuna mistahes L ja K puhul on need fookusele lähemal kui A ja D , siis on ka lõigust AD iga punkti kujutis läätsest kaugemal, kui A' ja D' . Analoogselt leiame ka BC kujutise.

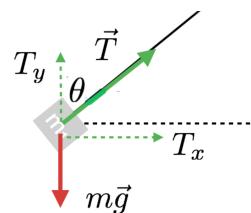
L25 Karussell ★

Autor: , piirkonnavor, 2020, G 2

Karuselli ketid on pinge all, olgu kettide pingे T . Pinget T saab jagada x ja y komponeniteks: REMOVE

$$T_x = T \cdot \sin \theta$$

$$T_y = T \cdot \cos \theta \quad \text{REMOVE}$$



Ketid on horisontaaltasandis ringliikumises, olgu selle joonkiirus v . Seega võrdub pinge horisontaalsunnaine projektsioon tsentrifugaaljõuga:

$$T_x = \frac{mv^2}{R_p} \quad REMOVE$$

kus m on Juku mass ja $R_p = R + l \cdot \sin \theta$ on pöörlemisraadius.
Vertikaalteljes on jõud tasakaalus:

$$T_y = mg \quad REMOVE$$

Asendades T_x ja T_y asemele $T \cdot \sin \theta$ ja $T \cdot \cos \theta$ ning R_p , saame võrrandisüsteemi:

$$T \cdot \sin \theta = \frac{mv^2}{R + l \cdot \sin \theta}$$

$$T \cdot \cos \theta = mg \quad REMOVE$$

Jagades esimese võrrandi teisegas

$$\tan \theta = \frac{mv^2}{g(R + l \cdot \sin \theta)}$$

avaldub lõbusõitja joonkiirus:

$$v = \sqrt{g \cdot \tan \theta \cdot (R + l \cdot \sin \theta)} \approx 14,1 \text{ m/s.} \quad REMOVE$$

Selleks et leida pöörete arvu minutis, leiame esmalt ühe pöörde aja, ehk perioodi T :

$$T = \frac{2\pi R_p}{v} = \frac{2\pi(R + l \cdot \sin \theta)}{v}. \quad REMOVE$$

Seega pöörete arv $\Delta t = 60$ s jooksul on

$$N = \frac{\Delta t}{T} = \frac{\Delta t \cdot v}{2\pi(R + l \cdot \sin \theta)} \approx 11,5. \quad REMOVE$$

L26 Kohukedes ★

Autor: , lõppvoor, 2020, G 2

Koti mõõtmed on Richardi käe pikkusega võrreldes väikesed, seega võime eeldada, et nurkkiirendus on kõigile kohukestele ühtemoodi $\omega^2\ell$, kus ℓ on Richardi käe pikkus. Kohukedes ei kuku kotist välja, seega ringi ülemisest punktist saame $\omega^2\ell \geq g$. Kohukedes ei lähe alumises punktis lõmaks, seega rõhk $\rho(g + \omega^2\ell)h$ pole piisav, et kohukest lõmastada. Eelnevast

$$\rho(g + \omega^2\ell)h \geq \rho g 2h.$$

Seega saaks kotti panna kõrgusega $2h$ kihi kohukesi, ilma et need lõmaks läheks.

L27 Plokk ★

Autor: Eero Vaher, lahtine, 2021, G 2

Lahendus 1: Leiame esmalt kiirenduse, millega suurem raskus langeb ning väiksem raskus tõuseb. Olgu nööri pinge T . Suurema raskuse kohta saame kirjutada $Mg - T = Ma$ ning väiksema jaoks kehtib $mg - T = -ma$. Võrrandisüsteemi lahend on $a = \frac{g}{2}$. Järelikult kestab suurema raskuse kukkumine $t_1 = \sqrt{\frac{2H}{a}} = \sqrt{\frac{4H}{g}}$ ning selle kiirus hetkel, mil see maapinnale jõuab, on $v = at_1 = \sqrt{gH}$. Väiksem raskus on sel hetkel kõrgusel H ning selle kiirus on sama suur, kuid suunatud üles. Kuna nöör pole enam pingul, on väiksem raskus nüüd vabalanguses kiiredusega g . Inertsitõttu liigub see üles veel aja $t_2 = \frac{v}{g} = \sqrt{\frac{H}{g}}$ ning läbib täiendavalte teepikkuse $\Delta h = vt_2 - \frac{gt_2^2}{2} = \frac{H}{2}$. Kokkuvõttes $h_{\max} = H + \Delta h = \frac{3}{2}H$.

Lahendus 2: Kasutame lahendamisel energia jäätust. Vahetult enne suurema raskuse maa peale jõudmist on mõlema raskuse kiirused samad ning seega on süsteemi koguenergia $mgH + \frac{mv^2}{2} + \frac{3mv^2}{2}$ mis on vordne süsteemi algenergiaga $3mgH$. Siit saame, et väiksema raskuse kinetiline energia on $\frac{mv^2}{2} = \frac{mgH}{2}$. Seega peale seda kui suurem raskus jõuab maapinnale liigub väiksem raskus veel $\Delta h = \frac{H}{2}$ võrra kõrgemale ja seega $h_{\max} = H + \Delta h = \frac{3}{2}H$.

L28 Klaaspudel ★

Autor: Kaur Aare Saar, piirkonnavoor, 2021, G 2

Kõige suurem rõhk on pudelis siis, kui kogu jäää on ära jäätunud ning pudeli temperatuur on $T_1 = 0^\circ\text{C}$ REMOVE.

Et maksimeerida pudelis olevat vee kogust, peab rõhk just siis olema maksimaalne võimalik. Maksimaalne rõhk pudelis on välise rõhu ja maksimaalse ülerõhu summa $p = p_0 + 3p_0 = 4p_0$ REMOVE.

Algul on õhku pudelis $V - V_v$. Ideaalgaasi seadusest saame, et pärast peab pudelis oleva õhu ruumala olema

$$(V - V_v) \frac{p_0 T}{p T_0} = (V - V_v) \frac{T}{4T_0} \quad \text{REMOVE.}$$

Kui kogu vesi on ära jäätunud, siis jäää ruumala on $V_j = V_v \frac{\rho_v}{\rho_j}$ REMOVE.

Kuna pudeli ruumala ei muutu, siis saame

$$V = V_v \frac{\rho_v}{\rho_j} + (V - V_v) \frac{T}{4T_0} \quad REMOVE$$

Sit saame avaldada V_v :

$$V_v = V \frac{1 - \frac{T}{4T_0}}{\frac{\rho_v}{\rho_j} - \frac{T}{4T_0}} = 0,90 L \quad REMOVE$$

L29 Pudel ★

Autor: Jarl Patrick Paide, lõppvoor, 2021, G 2

Toa jahedam õhk jahutab pudelit võimsusega P saades pudelilt aja t jooksul energia $\Delta Q = Pt$. Pudeli temperatuur muutub selle aja jooksul $\Delta T = \Delta Q/c$ võrra. Ideaalse gaasi olekuvõrrandist $PV = nRT$ saame temperatuuri muutusest rõhu muutuse $\Delta p = \frac{R\Delta T}{V_m}$. Pannes seosed kokku saame, et $P = \frac{\Delta pcV_m}{Rt}$

L30 Pliiats ★

Autor: Joonas Kalda, lahtine, 2022, G 2

Et kehtiks horisontaalne jõudude tasakaal, peavad pliiatsi hoidmisel mõlemad sõrmed rakendama sama jõudu. Olgu pliiatsi mass m ja pliiatsi hoidmiseks vajalik jõud ühelt sõrmelt N . Pannes kirja vertikaalsuunalised jõudude tasakaalud mõlema hoidmisasendi jaoks, saame võrrandid,

$$\begin{aligned} 2\mu_1 N &= mg, \\ 2 \cos \frac{\alpha}{2} \mu_2 N &= 2 \sin \frac{\alpha}{2} N + mg. \end{aligned}$$

Lahendame süsteemi,

$$\sin \frac{\alpha}{2} N + \mu_1 N = \cos \frac{\alpha}{2} \mu_2 N.$$

Teeme asenduse $\sin \frac{\alpha}{2} = x$,

$$\begin{aligned} x + \mu_1 &= \mu_2 \sqrt{1 - x^2}, \\ (x + \mu_1)^2 &= \mu_2^2 (1 - x^2), \\ (1 + \mu_2^2)x^2 + 2\mu_1 x + (\mu_1^2 - \mu_2^2) &= 0. \end{aligned}$$

Ruutvõrrandi lahenditeks on $x_1 \approx 0,191$ ja $x_2 \approx -0,671$. Selgelt $x = \sin \frac{\alpha}{2} > 0$, mis annab lahendiks $\sin \frac{\alpha}{2} \approx 0,191$ ja $\alpha \approx 22^\circ$.

L31 Juhe ★

Autor: Jaan Kalda, piirkonnavoor, 2022, G 2

$P = V_0^2/R$, millest $R = V_0^2/P = 26,45 \Omega$. Leame vasktraadist juhtme takistuse $r = 2L\rho/S = 1,36 \Omega$. Vool juhtmes $I = V_p/(R+r) = 8,6 \text{ A}$ ning juhtmes eralduv võimsus $P_j = rI^2 = rV_p^2/(R+r)^2 \approx 101 \text{ W}$.

L32 Lumeväli ★

Autor: Moorits Mihkel Muru, lõppvoor, 2022, G 2

Olgu väljaku pikem külg a , lühem külg b , Mari kiirus mööda teed v ja kiirus läbi lume nv . Mari keerab tee pealt lumisele väljakule hetkel, kui tal oli veel jäändud mööda teed platsi nurgani liikuda x meetrit ning liigub üle väljaku otse läbi lume koolimaja ukse suunas. Sellisel juhul liigub Mari mööda pikemat külge teepikkuse $s_1 = a - x$ ja pärast seda diagonaalil $s_2 = \sqrt{x^2 + b^2}$. Mööda väljaku äärt liikudes kuluks Maril ukseni jõudmiseks

$$t_0 = \frac{a+b}{v}$$

ja üle väljaku joostes kulub ukseni jõudmiseks

$$t_1 = \frac{s_1}{v} + \frac{s_2}{nv} = \frac{a}{v} - \frac{x}{v} + \frac{\sqrt{x^2 + b^2}}{nv}.$$

Selleks, et leida, millise nurga all peaks Mari läbi lume jooksma, saame kasutada optikast tuttavat murdumisseadust

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \gamma} = \frac{v}{nv},$$

kus keskkondasid lahutav sirge on väljaku serv ning seega $\alpha = 90^\circ$, sest Mari liikus kõigepealt mööda väljaku serva, ning γ on nurk väljaku serva ristsirge ning Mari optimaalse liikumissuuna vahel. Seega $\sin \alpha = 1$ ja saame

$$\sin \gamma = \frac{nv}{v} = n$$

ning geomeetriast saame

$$\sin \gamma = \frac{x}{s_2} \Rightarrow \frac{x}{s_2} = n \Rightarrow x = ns_2 = n\sqrt{x^2 + b^2}.$$

Avaldame saadud võrrandist x -i.

$$\begin{aligned} x &= n\sqrt{x^2 + b^2}, \\ x^2 &= n^2(x^2 + b^2), \\ x^2 - n^2x^2 &= n^2b^2, \\ x^2 &= \frac{n^2b^2}{1 - n^2}, \\ x &= \frac{nb}{\sqrt{1 - n^2}}. \end{aligned}$$

Asendame leitud x -i väärvtuse t_1 avaldisse.

$$\begin{aligned} t_1 &= \frac{a}{v} - \frac{nb}{v\sqrt{1-n^2}} + \frac{\sqrt{\left(\frac{nb}{\sqrt{1-n^2}}\right)^2 + b^2}}{nv} = \frac{a}{v} - \frac{b}{v} \frac{n}{\sqrt{1-n^2}} + \frac{\sqrt{\frac{n^2b^2}{1-n^2} + b^2}}{nv} = \\ &= \frac{a}{v} - \frac{b}{v} \frac{n}{\sqrt{1-n^2}} + \frac{b}{v} \frac{\sqrt{\frac{n^2+1-n^2}{1-n^2}}}{n} = \frac{a}{v} - \frac{b}{v} \frac{n}{\sqrt{1-n^2}} + \frac{b}{v} \frac{1}{n\sqrt{1-n^2}}. \end{aligned}$$

Leiame aegade erinevuse üle ja ümber väljaku liikudes.

$$\begin{aligned} \Delta_t = t_0 - t_1 &= \frac{a}{v} + \frac{b}{v} - \left(\frac{a}{v} - \frac{b}{v} \frac{n}{\sqrt{1-n^2}} + \frac{b}{v} \frac{1}{n\sqrt{1-n^2}} \right) = \\ &= \frac{b}{v} \left(1 + \frac{n}{\sqrt{1-n^2}} - \frac{1}{n\sqrt{1-n^2}} \right). \end{aligned}$$

Leiame ajavõidu kasutades ülesande tekstis antud suuruseid.

$$\Delta_t = \frac{50 \text{ m}}{6 \frac{\text{m}}{\text{s}}} \left(1 + \frac{0,8}{\sqrt{1-0,8^2}} - \frac{1}{0,8\sqrt{1-0,8^2}} \right) \approx 2,1 \text{ s}.$$

Seega oleme näidanud, et ümber väljaku liikumine on $\Delta_t \approx 2,1 \text{ s}$ võrra aeglasem kui üle väljaku mööda optimaalset trajektoori.

Alternatiivselt saab leida x -i väärvtuse ka ilma murdumisseaduseta lahendades ekstreemum ülesande, et leida x -i väärust, mis minimeerib t_1 avaldist.

$$t'_1(x) = 0 - \frac{1}{v} + \frac{1}{2} \frac{2x}{nv\sqrt{x^2+b^2}} = \frac{x}{nv\sqrt{x^2+b^2}} - \frac{1}{v} = 0.$$

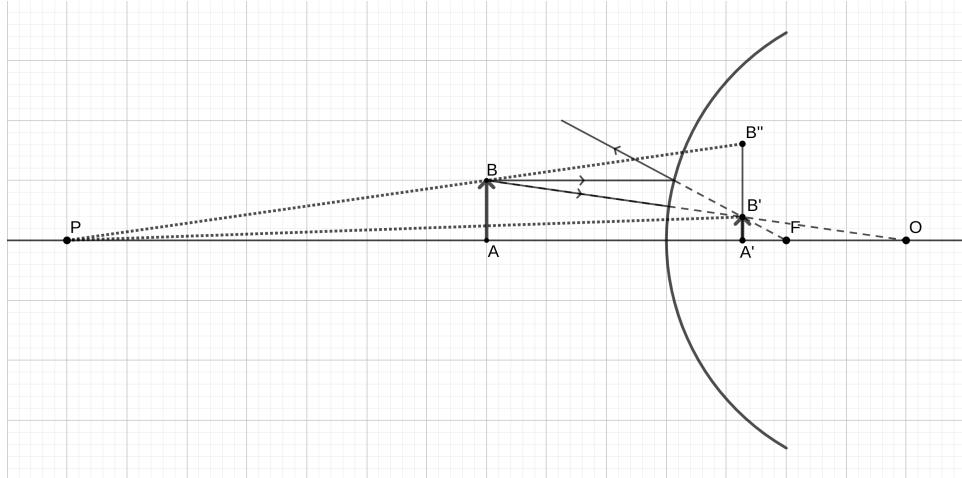
Lahendame saadud võrrandi.

$$\begin{aligned} \frac{x}{nv\sqrt{x^2+b^2}} &= \frac{1}{v}, \\ x &= \frac{nv\sqrt{x^2+b^2}}{v}, \\ x^2 &= n^2(x^2+b^2), \\ x^2 - n^2x^2 &= n^2b^2, \\ x^2 &= \frac{n^2b^2}{1-n^2}, \\ x &= \frac{nb}{\sqrt{1-n^2}}. \end{aligned}$$

Näeme, et tulemus on sama, mis murdumisseadusest.

L33 Kumerpeegel ★

Autor: Richard Luhtaru, lahtine, 2023, G 2



Ese paistab kumerpeeglis sama suur, kui suur paistaks selle kujutis ilma kumerpeeglita. Leiame kõigepealt eseme AB kujutise A'B', tõmmates ühe kiire otse läbi punkti O ja teise kiire kõigepealt paralleelselt optilise peateljega ja seejärel läbi fookuse F.

Selleks, et leida kui palju paistab kujutis A'B' väiksem esemest AB, peame lisaks füüsilisele suurusele arvestama ka kaugusega. Jooniselt näeme, et näivate suuruste suhe on sama, mis on lõikude A'B' ja A'B'' suhe. Jooniselt hindame, et A'B' pikkus on 2 ruutu ja A'B'' pikkus on 8 ruutu. Seega kumerpeeglis paistab ese 4 korda väiksem.

L34 Otsene kalorimeetria ★

Autor: Konstantin Dukatš, piirkonnavor, 2023, G 2

Kui vesi voolab torus, siis vesi soojeneb inimeselt eralduva soojuse töttu. Märkame, et aja Δt jooksul siseneb väike vee element tappa ja teine vee element samal hetkel väljub. Olgu Q_i inimesest eralduv soojus aja Δt jooksul ning Q_v veele lisandunud soojusenergia. Energia jäavusest $Q_v = Q_i$. REMOVE.

Teame, et $Q_v = c\Delta m(T_2 - T_1)$ REMOVE ja $Q_i = P\Delta t$ REMOVE, seega

$$c\Delta m(T_2 - T_1) = P\Delta t,$$

$$P = c \frac{\Delta m}{\Delta t} (T_2 - T_1). \quad \text{REMOVE}$$

Avaldame siseneva/väljuva vee elemendi massi

$$\Delta m = \rho \Delta V = \rho S u \Delta t. \quad \text{REMOVE}$$

Seega

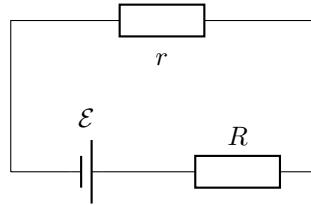
$$P = c \rho S u (T_2 - T_1), \quad \text{REMOVE}$$

$$P = 4200 \frac{\text{J}}{\text{kg}^\circ\text{C}} \cdot 1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 10^{-4} \text{ m}^3 \cdot 2 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 0,15^\circ\text{C} = 126 \text{ W. REMOVE}$$

L35 Elektrikarjus ★

Autor: Jaan Kalda, lõppvoor, 2023, G 2

Kui elektrikarjuse traat on maapinnast isoleeritud, siis seal voolu pole, pingelangu pole ja järelikult on pinge maa suhtes võrdne elektromotoorjõuga, seega $\mathcal{E} = 15 \text{ kV}$. Kui inimene puudutab traati, siis ta sisuliselt lühistab selle, st elektromotoorjõule langeb selle sisetakistus. Elektromotoorjõud \mathcal{E} sisetakistusega R on ühen-datud takistile r :



Järelikult $R_{\min} + r = \mathcal{E}/I_{\max} = 500 \text{ k}\Omega$. Näeme, et $r \ll R_{\min}$, seega $R_{\min} \approx \mathcal{E}/I_{\max} = 500 \text{ k}\Omega$.

L36 Kaks kera ★

Autor: Jarl Patrick Paide, lahtine, 2024, G 2

Olgu kera tihedus ρ , raadius R ja seega mass $M = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho$. Kahe keha vaheline gravitatsioonijõud on $F = \frac{GM^2}{4R^2}$. Et kerad saaksid olla ringorbiidil nurkkiirusel ω , on vaja neile rakendada tsentripetaaljõudu $F = M\omega^2 R$. Pannes vastavad jõud võrduma, saame $\frac{GM}{4R^3} = \omega^2$ ja asendades sinna M sisse, saame, et tihedus $\rho = \frac{3\omega^2}{\pi G}$.

L37 Hajumine ★

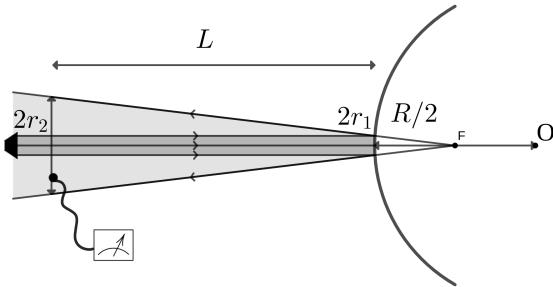
Autor: Moorits Mihkel Muru, piirkonnavoor, 2024, G 2

Tajur mõõdab valgustihedust ehk valgustatust, seega mida suurema ala peale valgusallikast pärinev valgus hajub, seda väiksem on tajuri näit. Olgu valgusallika võimsus P ja valgusallikast tuleva valgusvihu pindala S_1 , siis esimeses katses mõõdetud tajuri näitu kirjeldab suurus $E_1 = P/S_1 = P/\pi r_1^2$, kui eeldada, et valgusvihu pindala on ringikujuline ja raadiusega r_1 . Teises katses kirjeldab tajuri väärust suurus $E_2 = P/S_2 = P/\pi r_2^2$, kus r_2 sõltub sellest, kui kaugel tajur peeglist on. Raadiuse r_2 saab avaldada läbi raadiuse r_1 kasutades teadmist, et kumerpeeglige lastud paralleelne kiirtekimp koondub fookuses, mis asub kumerpeegli pinnast kaugusel $R/2$. Tekivad sarnased kolmnurgad, millega esimese körgus on $R/2$ ja alus $2r_1$ ning teise körgus on $R/2 + L$ ning alus $2r_2$. Seega saame

$$\frac{R/2}{2r_1} = \frac{R/2 + L}{2r_2} \Rightarrow r_2 = \frac{R/2 + L}{R/2} r_1$$

ja tajuri näitude suhe on

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{P/S_1}{P/S_2} = \frac{S_2}{S_1} = \frac{r_2^2}{r_1^2} = \left(\frac{R/2 + L}{R/2} \right)^2 = \left(\frac{15 \text{ cm} + 60 \text{ cm}}{15 \text{ cm}} \right)^2 = 25.$$



L38 Ragulka ★

Autor: Taavi Pungas, lõppvoor, 2024, G 2

Kivike on raske ja väike, seega õhutakistusega pole heas lähenduses vaja arvestada. See võimaldab meil kasutada energia jäavuse seadust. Lähendame ragulka kummi kui lineaarse elastsusega materjali, st kehtib Hooke'i seadus. Kivikese lennu haripunktis on elastsusjõu potentsiaalne energia ragulka kummi venitamisel täpselt teisenenud raskusjõu potentsiaalseks energiaks:

$$\frac{kx^2}{2} = mgh.$$

Jagades läbi selle valemi teise ja esimese katse jaoks, saame

$$\frac{x_2^2}{x_1^2} = \frac{h_2}{h_1},$$

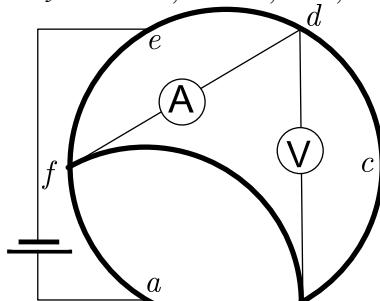
seega

$$x_2 = x_1 \cdot \sqrt{\frac{h_2}{h_1}} = 3 \text{ cm} \cdot \sqrt{\frac{1}{1 - \frac{1}{4}}} \approx 3,5 \text{ cm}.$$

L39 Ring ★★

Autor: Jaan Kalda, lahtine, 2018, G 3

Teeme ekvivalentskeemi, vt joonis, kus ideaalsete ampermeetri asendame traadiga ning ideaalsete voltmeetri kõrvvaldame. Et voltmeter on kinnitatud punktide b ja d vahele, siis peame leidma pingi takistil $2R$. Kirhoffi vooluseaduse tõttu näitab ampermeeter ülemise vasakpoolse takisti R ning ülemise takisti $2R$ voolude vahet. Takistus d ja a vahel on takistite R ja $2R$ rööpühendus, st $\frac{2}{3}R$ ning d ja e vahel $-\frac{1}{2}R$; seega kogutakistus on $\frac{7}{6}R$. Voolutugevus läbi patarei on $I_0 = \frac{q\mathcal{E}}{\frac{7}{6}R}$ ning see jaguneb punkte d ja a ühendava ülemise ja alumise haru vahel takistuste suhte vahekorras 1:2, st ülemisse harru läheb vool $I = \frac{1}{3}I_0 = \frac{2}{7}\frac{\mathcal{E}}{R}$. Pingi d ja b vahel saame Ohmi seadusest, $U = IR = \frac{2}{7}\mathcal{E} = 2 \text{ V}$. Läbi ülemise vasakpoolse takisti läheb



pool koguvoolust, $I_1 = \frac{1}{2}I_0 = \frac{3}{7}\mathcal{E}$ ja takistit $2R$ läbib vool $I_2 = \frac{U}{2R} = \frac{1}{7}\mathcal{E}$. Seega ampermeeter näitab voolu $I_A = I_2 - I_1 = \frac{2\mathcal{E}}{7R} = 2\text{ A}$.

L40 Lääts ★★

Autor: Hans Daniel Kaimre, lahtine, 2019, G 3

Otsime kaugust s , mille korral tekib ekraanile reaalne kujutis, paneme kirja süs-teemi jaoks läätse valemi:

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{L-s} = \frac{1}{f} \Rightarrow \frac{L}{s(L-s)} = \frac{1}{f} \Rightarrow s^2 - LS + Lf = 0$$

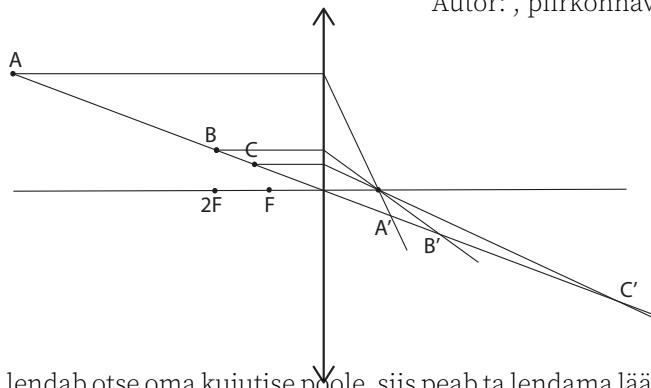
Tegu on tavalise ruutvõrrandiga, kust saame, et

$$s_{1,2} = \frac{1}{2}(L \pm \sqrt{L(L-4f)})$$

Kuna s on reaalne suurus, mitte imaginaarne, siis peab $L-4f \geq 0$, kust omakorda saame f tingimuseks, et $f \leq L/4$. Seega kõige suurem võimalik fookuskaugus on $f = L/4$, mille korral saame $s_{1,2} = L/2$ ja suurenduse $M = s_2/s_1 = 1$ ehk kujutis on sama suur kui kujutist tekitav objekt.

L41 Kärbes ★★

Autor: , piirkonnavor, 2019, G 3



Kuna kärbes lendab otse oma kujutise poole, siis peab ta lendama läätse keskpunkti poole, seega kärbes ja tema kujutis asuvad alati sirgel AC' . REMOVE

Kui kärbes lendab punktist A punkti B , siis kujutis liigub punktist A' punkti B' . Jooniselt on näha, et kärbse kujutis liigub aeglasemalt kui kärbes. Konstrueerides punktide A ja B vahele veel punkte on näha, et kujutise kiirus on järjest suureneb, kui kärbes läheneb punktile B . REMOVE

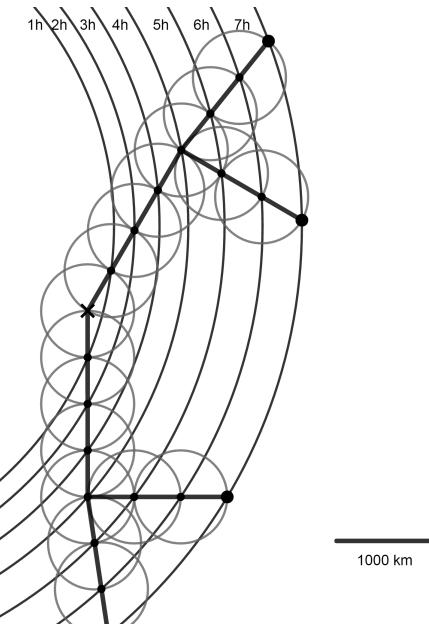
Kui kärbes asub läätsest kahekordse fookuskauguse kaugusel (punkt B), siis asub ka kujutis läätsest kahekordse fookuskauguse kaugusel (punkt B'). REMOVE Sellises kohas on kärbse ja tema kujutise kiirused võrdsed, seega on kärbse ja tema kujutise kiirus teineteise suhtes $v_{min} = 0\text{ m/s}$. REMOVE

Kui kärbes liigub punktist B fokaaltasandi suunas, siis kujutise kiirus järjest suureneb REMOVE ning vahetult enne fokaaltasandile jõudmist on kujutise kiirus lõpmatult suur ($v_{max} \rightarrow \infty\text{ m/s}$) REMOVE. Seega on kujutise kiirus kärbse suhtes maksimaalne siis, kui kärbes on väga lähedal fokaaltasandile ehk kärbes asub läätse tasandist fookuskauguse kaugusel. REMOVE

L42 Lennuk ★★

Teame, et suured ringjooned märgivad lennuki asukohta iga tunni järel ning ühe tunniga läbib lennuk 500 km. Joonisel oleva möötkava järgi saame 500 km vastava pikkuse joonisel. Võtame selle pikkuse ja joonestame sirkliga vastava raadiusega ringjoone lennuki algasukoha ümber. See ringjoon märgib lennuki asukohta 1 h pärast õhkutõsu ning selle lõikepunktid olemasoleva esimese suure ringjoonega (mis märgib samuti lennuki asukohta 1 h pärast õhkutõsu) annavad meile lennuki võimalikud asukohad 1 h pärast. Kuna me ei tea, millises suunas lennuk lendas, peame lennuki teekonda mölemast punktist edasi konstrueerima, joonestades uute punktide ümber samuti 500 km vastava ringjoone. Kuna aga teame, et lennuk lendas 4 h järjest otse, saame hakata lõikepunkte välistama, sest sõbivid punktid moodustavad sirge. 4 h vastava ringjoone juures teame vaid seda, et lennuk muutis suunda. Seega saame kummagi algse teekonna kohta veel 2 võimalikku uut suunda (kokku 4 võimalikku suunda). Teades, et lennuk lendas edaspidi samuti vaid otse, saame kõik 4 teekonda lõpuni konstrueerida.

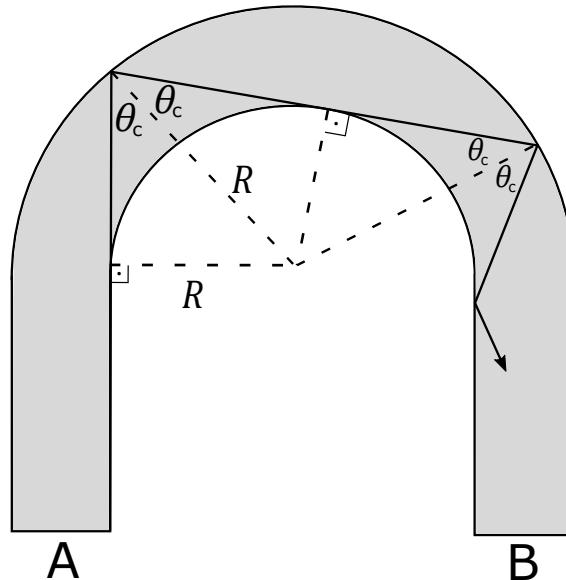
Autor: , lõppvoor, 2019, G 3



L43 U-klaas ★★

Autor: Hans Daniel Kaimre, lahtine, 2020, G 3

Esmalt teeme selgeks, milline peaks olema kõverusraadius, et esimese peegelduse jaoks oleks kogu valgusvihu ulatuses langemisnurk suurem kui kriitiline nurk. On ilmne, et kõige väiksem on langemisnurk valgusvihu kõige sisemise (joonisel parempoolse) kiire jaoks. Joonistame kiire käigu kriitilise nurga korral.



Snelli seadusest täieliku sisepeegeldumise jaoks $\sin \theta_c = 1/n$, jooniselt saame, et $\sin \theta_c = R/(R + d)$. Seega

$$\frac{1}{n} = \frac{R}{R + d} \Rightarrow R = \frac{3 \text{ cm}}{1.5 - 1} = 6 \text{ cm.}$$

Paneme tähele, et peegeldunud kiir puutub sümmeetria töttu klaasitüki sisekülgne peegeldub välisküljelt sama nurga all kui esimene kord. Sama protsess kordub, kuni klaasi kõver osa läheb üle sirgeks. Sellisel juhul on langemisnurk suurem kui enne ning toimub kindlasti peegeldumine ja lõpuks on tagatud, et valgusvihk väljub läbi tahu B. Järelikult ongi ainsaks tingimuseks esimesest peegeldusest saadu, mis annab $R \geq 6 \text{ cm}$.

L44 Hüppav silinder ★★

Autor: , piirkonnavor, 2020, G 3

Lahendus 1. Vaatleme kõigepealt silindri liikumist energiakadu arvestamata. Olgu silindri veest väljumise kõrgus x . Silindri potentsiaalne energia kasvab liikumise käigus

$$\Delta U_s = mg(h + x) \quad [1 \text{ p.}]$$

võrra. See muutus on võrdne üleslükkejõu tööga, mida saab arvutada kui tööd, mida tuleb teha silindri poolt välja törjutud vee töstmiseks pinnale. Välja törjutava vee mass $m_v = \pi r^2 h \rho_v$ ja selle massikese asub sügavusel $h/2$. Üleslükkejõu töö on seega

$$A = m_v \frac{h}{2} = \pi r^2 h \rho_v \frac{h}{2}. \quad [4 \text{ p.}]$$

Võrdusest $\Delta U_s = A$ saame

$$x = h \left(\frac{\pi r^2 \rho_v h}{2m} - 1 \right) \quad [2 \text{ p.}]$$

Et pool kineetilisest energiast läheb veest väljumisel kaduma, siis on tegelik kõrgus H saadud väärustest poole väiksem

$$H = \frac{x}{2} \approx 40,0 \text{ cm.} \quad [1 \text{ p.}]$$

Lahendus 2.

Olgu x -telg suunatud vertikaalselt üles ja nullpunkt asugu veepinnal. Vaatleme kõigepealt silindri alumise otsa liikumist vahemikus $x = -h \dots 0$ ja leiame silindri kineetilise energia veest väljumise hetkel. Silindrile mõjub gravitatsioonijõud $F_g = -mg$ ja üleslükkejõud $F_{\ddot{u}}$, mis kõrgusel x avaldub kujul $F_{\ddot{u}} = g\rho_v V = -g\rho_v \pi r^2 x$, [2 p.] kus V on silindri veealuse osa ruumala (x -koordinaat on vaadeldavas piirkonnas negatiivne). Näeme, et üleslükkejõud toimib analoogselt vedru elastsusjõuga $F_e = -kx$, mille potentsiaalne energia avaldub kujul $U_e = \frac{1}{2}kx^2$. Üleslükkejõule vastab antud juhul järelkult potentsiaalne energia $U_{\ddot{u}} = \frac{1}{2}g\rho_v \pi r^2 x^2$. Silindri koguenergia on seega

$$E = \frac{mv^2}{2} + mgx + \frac{1}{2}g\rho_v \pi r^2 x^2. \quad [2 \text{ p.}]$$

Kui $x = -h$, siis $v = 0$ ja koguenergia väärus on järelkult

$$E = \frac{1}{2}g\rho_v \pi r^2 h^2 - mgh. \quad [1 \text{ p.}]$$

Et pool sellest läheb teksti kohaselt kaduma, siis on pärast veest väljumist kogu-energia väärus $E/2$ ja silindri kineetiline energia

$$\frac{mv_0^2}{2} = \frac{1}{4}g\rho_v \pi r^2 h^2 - \frac{1}{2}mgh. \quad [1 \text{ p.}]$$

Edasi toimub silindri liikumine vastavalt kinemaatika valemitel $x = v_0 t - gt^2/2$ ja $v = v_0 - gt$. Et trajektoori kõrgeimas punktis $v = 0$, siis saame teisest kinemaatika võrrandist $t_{max} = v_0/g$, mis vastab hetkele, mil silinder on maksimaalsel kõrgusel. Maksimaalne kõrgus on järelikult

$$H = v_0 t_{max} - gt_{max}^2/2 = \frac{v_0^2}{2g} = \frac{h}{2} \left(\frac{\pi r^2 \rho_v h}{2m} - 1 \right) \approx 40,0 \text{ cm. [2 p.]}$$

L45 Käivitusvool ★★

Autor: , lõppvoor, 2020, G 3

Vasktoru takistus on ilmselt märksa väiksem kui ampermeetri sisetakistus, seega praktiliselt kogu käivitusvool kulgeb läbi vasktoru. Vasktoru ristlõike pindala (mida vool läbib) on $S = \frac{1}{4}\pi(d_2^2 - d_1^2) = 22 \text{ mm}^2$. Ühikulise pikkusega torujupi takistus on $R = \rho/S$. Seega voolutugevusel $I_1 = 500 \text{ A}$ pingelang vasktoru pikkusühiku kohta

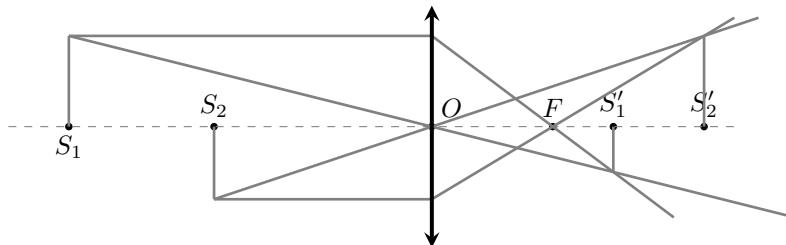
$$\delta U = RI_1 = \frac{\rho}{S} I_1 \approx 0,38 \frac{\text{V}}{\text{m}}.$$

Et läbi ampermeetri tekiks voolutugevus $I_0 = 1 \text{ mA}$, on ampermeetritile tarvis rakendada pingi $U = I_0 R_0 = 0,1 \text{ V}$. Selline pingelang moodustub vasktoru pikkusel $\ell = U/\delta U = 0,26 \text{ m}$.

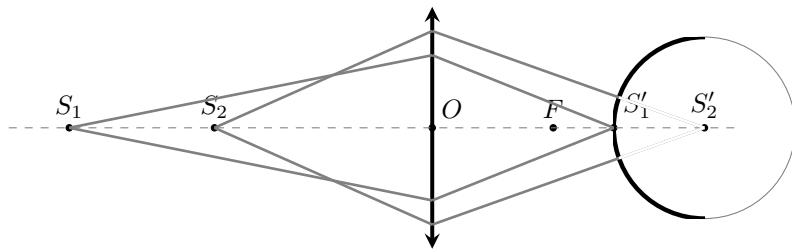
L46 Kumerpeegel ★★

Autor: Konstantin Dukatš, lahtine, 2021, G 3

Konstrueerime esmalt punktide S_1 ja S_2 kujutised S'_1 ja S'_2 .



Teame, et kui valguskiir langeb peegelpinnale risti, siis liigub see samasugust teed pidi tagasi alguspunkti suunas. Tänu kiirte pööratavuse printsiibile jõuab valguskiir punktidest S'_1 ja S'_2 tagasi vastavatesse algpunktidesse S_1 ja S_2 . Kumerpeegel on sfääriline, seejuures punkti S'_2 poole suunatud kiirte pikendused määrvavad ära peegli keskpunkti ning punktide S'_1 ja S'_2 vahekaugus määrab ära joonistatava kaare raadiuse.



L47 Joogid ★★

Autor: Kaarel Hänni, piirkonnavor, 2021, G 3

Osas (a) antud jooke ei ole võimalik kokku segada. Esiteks on ilmselge, et mitme järgestikuse segamise tulemusel saadud jooki saab valmistada ka kolmest anumast sellesse jooki pandud vee koguste ühekordse segamisega REMOVE.

Näitame nüüd, et nii pole aga võimalik valmistada 1,5 kg jooki temperatuuril 13 °C. Oletame, et sellise joogi saab valmistada segades koguse x vedelikku temperatuuril 10 °C ja koguse $y = 1,5 - x$ vedelikke temperatuuril vähemalt 20 °C REMOVE. Sellisel juhul

$$\begin{aligned}x \cdot 10 + y \cdot 20 &\leq 1.5 \cdot 13 \\10x + 30 - 20x &\leq 19.5 \\10.5 &\leq 10x \\x > 1,\end{aligned}$$

aga algsest oli temperatuuril 10 °C vett ainult 1 kg, seega $x \leq 1$ ja viimane võrratus on võimatu REMOVE.

Osas (b) antud jooke ei ole võimalik kokku segada, sest energiatoleks lõpus vähem kui alguses. Seda saab näha järgnevalt. Energia jäävuse töttu peab enne ja pärast segamist vee keskmise temperatuuri olema sama REMOVE. Algsest on keskmise temperatuuri

$$\frac{10^\circ\text{C} \cdot 1\text{kg} + 20^\circ\text{C} \cdot 1\text{kg} + 30^\circ\text{C} \cdot 1\text{kg}}{3\text{kg}} = 20^\circ\text{C}. \quad \text{REMOVE}$$

Pärast selliste jookide segamistoleks ülejäänud $3 - 5 \cdot 0.5 = 0.5$ kg vett temperatuuril ülimalt 30 °C, sest see oli kõrgeim algne temperatuur) REMOVE.

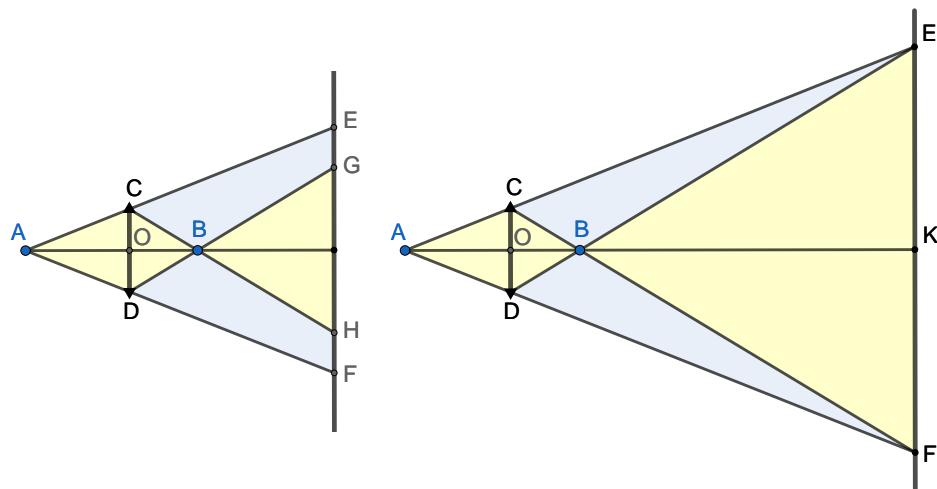
Seetõttu on vee keskmise temperatuuri pärast selliste jookide segamist ülimalt

$$\frac{0.5\text{kg} \cdot (12^\circ\text{C} + 17^\circ\text{C} + 18^\circ\text{C} + 20^\circ\text{C} + 22^\circ\text{C} + 30^\circ\text{C})}{3\text{kg}} = 19.8^\circ\text{C},$$

mis on vähem kui algne keskmise temperatuur REMOVE. Seega selliseid jooke ei saa segada.

L48 Lääts ja ekraan ★★

Autor: Oleg Košik, lõppvoor, 2021, G 3



Olgu A valgusallikas, B tema kujutis läätses ning CD lääts.

Kui ekraan asub läätsest 10 ja 60 cm vahel, tekivad ekraanile kaks kontsentrist list ringi (vasakpoolne joonis): hele väiksem ring diameetriaga GH asub tumeda ringi diameetriga EF sees. Aladele EG ja HF valgusallika valgus ei jõua.

Eemaldades läätse ekraanist saavad punktid E ja G kokku üheks nagu ka punktid F ja H . Ekraani katab ühtlaselt valgus, nagu läätse poleks (parempoolne joonis). Olgu $x = |AO|$ kaugus valgusallika ja läätse vahel, $r = |OC|$ läätse raadius ning $R = |KE|$. Ülesande tingimustest $|BO| = 10\text{ cm}$, $|KO| = 60\text{ cm}$ ning seega $|BK| = 50\text{ cm}$. Sarnastest kolmnurkadest AOC ja AKE saame

$$\frac{r}{R} = \frac{x}{x+60}.$$

Sarnastest kolmnurkadest BOD ja BKE aga

$$\frac{r}{R} = \frac{10}{50}.$$

Kokkuvõttes saame võrrandi $\frac{x}{x+60} = \frac{10}{50}$, mille lahendiks on $x = 15\text{ cm}$.

Lääts valemist nüüd

$$\frac{1}{10} + \frac{1}{15} = \frac{1}{f} \quad \Rightarrow \quad f = 6\text{ cm}.$$

L49 Kõnd eskalaatoril ★★

Autor: Kaarel Hänni, lahtine, 2022, G 3

Lahendus 1: Kuna $a \gg b$, siis nurgad on väiksed ning saab kasutada väikeste nurkade lähendusi, $\sin(\alpha) \approx \tan(\alpha) \approx \alpha$. Valgus levib kiireimal võimalikul moel. Seega võib eeldada, et Sandra muudab eksalaatorile jõudes enda liikumissuunda nii, nagu valgus murduks.

Snelli seadus $\frac{\sin(\beta)}{\sin(\alpha)} = \frac{\beta}{\alpha} = \frac{v+u}{v}$, kus nurgad α ja β on mõõdetud külje a suhtes.

Geomeetriast: $\tan(\beta) + \tan(\alpha) = \beta + \alpha = \frac{2b}{a}$

Vastuseks: $\beta = \frac{2b}{a} \frac{u+v}{u+2v} \approx 0,0286 \text{ rad}$

Lahendus 2: Olgu trajektoori horisontaalne kaugus vasakust äärest poole kõrguse juures x . Trajektoori aeg on sellisel juhul $\frac{\sqrt{x^2+(a/2)^2}}{v} + \frac{\sqrt{(b-x)^2+(a/2)^2}}{v+u}$, vaja leida x mille korral aeg on minimaalne. Võttes tuletise, saame et $\frac{2x}{2\sqrt{x^2+(a/2)^2}v} + \frac{-2(b-x)}{2\sqrt{(b-x)^2+(a/2)^2}(v+u)} = 0$. Kasutades lähendust, et a on palju suurem, saame $\frac{2x}{av} + \frac{-2(b-x)}{a(v+u)} = 0$, kust $x = \frac{vb}{2v+u}$ ja $\beta = \frac{2b}{a} \frac{u+v}{u+2v}$.

L50 Liiumägi ★★

Autor: Kaarel Kivilaslu, piirkonnavor, 2022, G 3

Lahendus 1: Kalpinna pikkus on $h / \sin \alpha$ REMOVE. Horisontaalse pinna pikkus on $l - h / \tan \alpha$ REMOVE. Hõõrdejõud kaldpinnast alla lastes on $F = \mu g \cos \alpha$ REMOVE. Energia jäävus (potentsiaalse energia muut on võrdne hõõrdejõu tööga):

$$mgh = \mu mg \cos \alpha \cdot \frac{h}{\sin \alpha} + \mu mg \cdot \left(l - \frac{h}{\tan \alpha} \right). \quad REMOVE$$

Järelikult $\mu = h/l$ REMOVE.

Lahendus 2: Kiirendus kaldpinnast alla lastes on $a_1 = g \sin \alpha - \mu g \cos \alpha$ REMOVE. Kalpinna pikkus on $h / \sin \alpha$ REMOVE. Järelikult kiirus kaldpinna lõpus on

$$v = \sqrt{\frac{2a_1 h}{\sin \alpha}}. \quad REMOVE$$

Horisontaalse pinna pikkus on $l - h / \tan \alpha$ REMOVE. Kuna üleminek kaldpinnalt horisontaalsele pinnale on sujuv, siis kiirus ei muudu. Kiirendus horisontaalsel pinnal on $a_2 = -\mu g$. Kuna liumäe lõpus peab alla lastes seisma jäälma, siis

$$v = \sqrt{-2a_2 \left(l - \frac{h}{\tan \alpha} \right)}. \quad REMOVE$$

Järelikult

$$2\mu g \left(l - \frac{h}{\tan \alpha} \right) = \frac{2h(g \sin \alpha - \mu g \cos \alpha)}{\sin \alpha}, \quad REMOVE$$

võrrantit lihtsustades saame, et $\mu = h/l$ REMOVE.

L51 Silinder ★★

Autor: Richard Luhtaru, lõppvoor, 2022, G 3

Jagame silindri kaheks poolsilindriks. Me võime vaadelda kumbagi poolsilindrit kui hästi laia juhet, mille pikkus on $\ell = \pi r$ ja ristlõikepindala on $S = \tau h$. Kummagi poolsilindri takistus on seega

$$R = \rho \frac{\ell}{S} = \frac{\rho \pi r}{\tau h}$$

Kuna kaks "juhet" on ühendatud rööbiti, siis kogutakistus A ja B vahel on

$$R_{AB} = \frac{1}{2} R = \frac{\rho \pi r}{2 \tau h}$$

L52 Kummipael ★★

Autor: Valter Kiisk, lahtine, 2023, G 3

Esimese katse jaoks saame jõudude tasakaalutingimuse $k\Delta L = mg$, kus k on kummipaela jäikustegur ja m on koormise mass (mõlemad tundmatud). Siit saame avaldada suhte $mg/k = \Delta L$. Teises katses on kummipael juba algsest tugevasti deformeeritud olekus, kus tõmbejõud kummipaelas on kL (sest pikkuse muut on L). Eeldame, et seetõttu läbivajumine $x \ll L$. Sel juhul, ühelt poolt, läbivajumisest tingitud kummipaela pikenemine on tühine ja seeläbi ka pinge paelas jääb peaaegu muutumatuks. Teiselt poolt, kummipael moodustab horisontaalsihiga nurga $\varphi \approx x/L$. Piki kummipaela suunatud jõu kL projektsioon vertikaalsihile on siis ilmselt $kL \sin \varphi \approx kL\varphi \approx kx$. Kuivõrd kuumipaelal on nüüd kaks poolt, mis mõlemad ühviisi panustavad koormise mg tasakaalustamisse, siis $2kx = mg$, millest

$$x = \frac{mg}{2k} = \frac{\Delta L}{2} = 1 \text{ cm.}$$

L53 Ökonoomne sõit ★★

Autor: Marten Rannut, piirkonnavoor, 2023, G 3

Ülesandes pole vahet, kas leiame kütusekulude suhte $100 \text{ m} \div 100 \text{ km}$ kohta REMOVE (juhul kui õpilane arvutab kütusekulud 100 km jaoks, siis anda see punkt, kui õpilane leiab korrektselt E_l 100 km jaoks). Linnas kiirendab auto iga 100 m taant kiiruseni $v_l = 40 \frac{\text{km}}{\text{h}} \approx 11,1 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ REMOVE. Selleks kulub energia

$$E_l = \frac{mv_l^2}{2} = \frac{1500 \text{ kg} \cdot (11,1 \frac{\text{m}}{\text{s}})^2}{2} \approx 92,4 \text{ kJ. REMOVE}$$

Maanteeõidul on auto kiirus $v_m = 90 \frac{\text{km}}{\text{h}} = 25 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ REMOVE. Auto poolt tehtav töö õhutakistuse ületamiseks on $E_m = Fs$ REMOVE, seega

$$E_m = cv^2 s = 1,3 \frac{\text{kg}}{\text{m}} \cdot \left(25 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 \cdot 100 \text{ m} \approx 81,3 \text{ kJ. REMOVE}$$

Kuna mootori kasutegur on mõlemal juhul sama, siis kütusekulude suhe on võrdne kuluva energia suhtega REMOVE. Seega kütusekulude suhe on

$$\frac{k_m}{k_l} = \frac{81,3 \text{ kJ}}{92,4 \text{ kJ}} \approx 0,88. \quad REMOVE$$

(või $k_l/k_m \approx 1,14$).

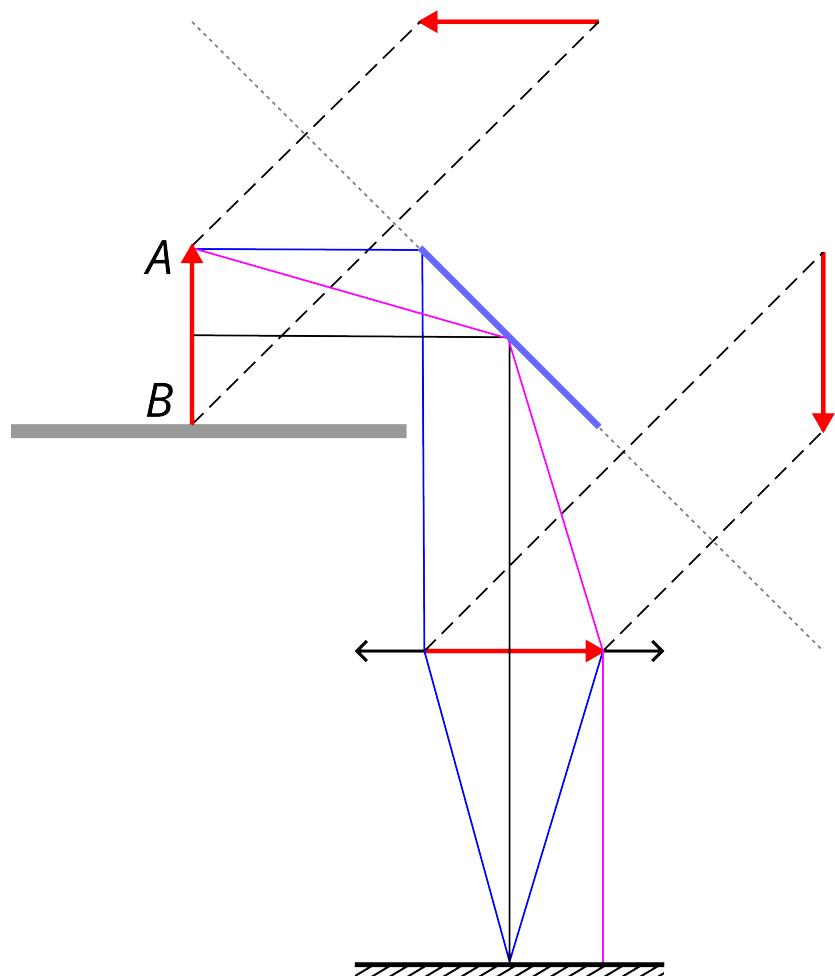
L54 Lääts ja kaks peeglit ★★

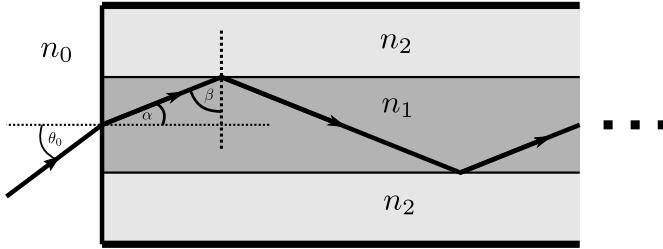
Autor: Aigar Vaigu, lõppvoor, 2023, G 3

Tõmbame punktist A väljuva horisontaalse sinise kiire, pärast poolläbilaskvas peeglis peegeldumist on see vertikaalne, läätses koondab selle optilisele peateljele, kus see peegeldub ning jõuab läätseni tagasi. Teiseks kiireks tõmbame lilla kiire punktist A poolläbilaskva peegli keskpunkti, pärast läätse läbimist liigub see edasi otse (kuna läätse fookus on poolläbilaskva peegli keskpunktis) ning lõikub läätse tasandis algse kiirega. Selle punkti näol on tegu A kujutisega. Analoogselt konstrueerime punkti B kujutise läätse tasandis. Objekti AB kujutis läätse tasandis on sama suur kui oli algne kujutis. Tasub märkida, et seda kujutist näeb ülevalt vaadates (kui oleks tegu tavalise peegliga näeks seda ainult poolläbilaskva peegli ja läätse vahel asudes).

Nii algsel objektil kui selle kujutisel läätse tasandis on ka kujutised poolläbilaskvas peeglis nagu oleks neil tavalistes peeglites. Konstrueerime ka need.

Kokku tekib kolm kujutist. Ülemist kujutist näeb altpoolt poolläbilaskvat peeglit vaadates. Parempoolset kujutist näeb vasakult poolt poolläbilaskvat peeglit vaadates. Nagu juba mainitud, siis kujutist läätse tasandis näeme vaadates ülevaltpoolt. Kuna siin skeemis on poolläbilaskev peegel, siis kujutised on mõnevõrra tumedamat võrreldes tavalise peegliga. Alumine kujutis 2 korda tumedam vaadates seda poolläbilaskva peegli ja läätse vahelt ning 4 korda tumedam vaadates seda läbi poolläbilaskva peegli. Parempoolne ja ülemine kujutis on mõlemad 4 korda tumedamat.





L55 Valguskaabel ★★

Autor: Richard Luhtaru, lahtine, 2024, G 3

Defineerime nurgad α ja β nagu joonisel. Valgus levib ilma kadudeta siis, kui β on piisavalt suur ja kaabli südamikus toimub täielik sisepeegeldumine. Seega piirjuhul

$$n_1 \sin \beta = n_2.$$

Murdumisseadusest saame samuti

$$n_0 \sin \theta_0 = n_1 \sin \alpha \implies n_0 \text{NA} = n_1 \sin \alpha \implies \text{NA} = \frac{n_1 \sin \alpha}{n_0}.$$

Kuna α ja β on täisnurkse kolmnurga nurgad, siis $\beta = 90^\circ - \alpha$, seega $\sin \beta = \cos \alpha$. Seega

$$n_1 \cos \alpha = n_2 \implies \cos \alpha = \frac{n_2}{n_1} \implies \sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{1 - \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2}$$

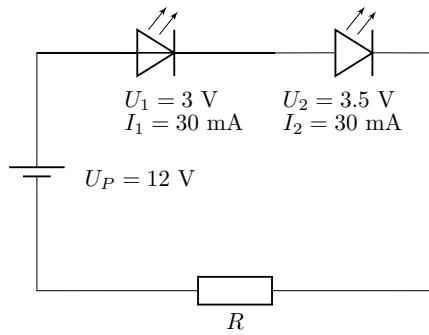
ning

$$\text{NA} = \frac{n_1}{n_0} \sin \alpha = \frac{n_1}{n_0} \sqrt{1 - \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2} = \frac{\sqrt{n_1^2 - n_2^2}}{n_0}.$$

L56 Valgusdioodid ★★

Autor: Hans Daniel Kaimre, piirkonnavor, 2024, G 3

Kuivõrd LEDide nominaalne voolutugevus on võrdne, on mõistlik need ühendada omavahel jadamisi, nii nagu Mari seda tegi. Pingelang üle LEDide normaaltingimustel on $U_1 + U_2 = 3\text{V} + 3,5\text{V} = 6,5\text{V}$, mis on tunduvalt vähem kui patarei klemmipinge $U = 12\text{V}$. Järelkult tuleb vooluringi ühendada LEDidega jadamisi takisti, millel pingelang oleks $U_R = U - U_1 - U_2 = 12\text{V} - 6,5\text{V} = 5,5\text{V}$. Takisti väärtsuse saame leida lihtsalt Ohmi seadusest, kuna takistit läbiv voolutugevus peab olema võrdne LEDe läbiva voolutugevusega: $R = U_R/I_1 = 5,5\text{V}/30\text{mA} = 183\Omega$.



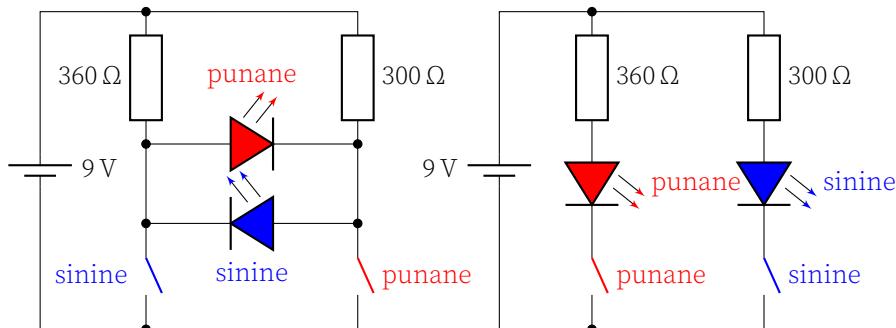
L57 Leedid ★★

Autor: Sandra Schumann, lõppvoor, 2024, G 3

Patareid lühistada ei tohi, seega dioode otse patarei külge ühendada ei tohi. Järelkiult peavad dioodid olema mingis kombinatsioonis jadamisi takistitega. Tahame, et dioodide põlemise korral läbiks neid voolutugevus 20 mA . Ilmselt peab vähemalt selline voolutugevus läbima ka vähemalt ühte takistit. Kui see voolutugevus läbib 300Ω takistit, siis sellel on pingelang 6 V , läbides 360Ω takistit oleks pingelang 7.2 V .

Märkame nüüd, et dioodide põlemiseks vajalike päripingete ja soovitud voolutugevustel olevate patareide pingelangude summad saavad võrduda patarei pingega kahel juhul: punane dioodi jadamisi 360Ω takisti ja patareiga ning sinine diood jadamisi 300Ω takisti ja patareiga.

Rakendades tingimust, et vastavat värvit lülitit vajutades peab minema põlema vastavat värvit diood, saame kaks võimalikku skeemi:



Meil peab veel kehtima ka tingimus, et mõlema lülitit vajutamisel ei põleks kumbki diood. See on töene ainult vasakpoolse skeemiga. Seega just see skeem tulebki koostada.

L58 Kahurid ★★

Autor: Erkki Tempel, lahtine, 2018, G 4

Kahurist A tulistatud kuul jõuab haripunkti siis, kui selle vertikaalne kiiruse komponent on 0, ehk ajahetkel $t_0 = \frac{v_A \sin \alpha}{g} = 7\text{ s}$. Kahurikuulid põrkuvad seega kokku momendil $t_0 + t_1 = 12\text{ s}$. Sellel hetkel on kahurist A lastud kuuli ja kahuri B horisontaalne vahekaugus $v_A \cos \alpha(t_0 + t_1) - l = v_{Bx}t_1$, kus v_B on kahurist B tulistatud kuuli algkiirus. Niisiis, $v_{Bx} = \frac{v_A \cos \alpha(t_0 + t_1) - l}{t_1} = -91,0\text{ m/s}$.

Selleks, et kuulid vertikaaltasandis ajahetkel $t_0 + t_1$ kokku saaksid, peab kehtima

$$v_A \sin \alpha(t_0 + t_1) - \frac{g(t_0 + t_1)^2}{2} = v_y t - \frac{gt_1^2}{2},$$

ehk

$$v_{By} = v_A \sin \alpha \left(\frac{t_0}{t_1} + 1 \right) - \frac{g(t_0 + t_1)^2}{2t_1} + \frac{gt_1}{2} = 49\text{ m/s}.$$

Niisiis,

$$v_B = \sqrt{v_{Bx}^2 + v_{By}^2} = 103\text{ m/s}.$$

L59 Laetud tasand ★★

Autor: Kaarel Hänni, lahtine, 2019, G 4

Ühe laengu poolt tasandile avaldatav jõud on võrdne ja vastasmärgiline tasandi poolt laengule avaldatava jõuga. Seega on tasandile kokku möjuv jõud 0 siis ja ainult siis, kui tasandi poolt laengutele avaldatud jõudude summa on 0. Tasandi elektriväli on konstantne ja risti tasandiga (ja tasandi eri pooltel erisuunaline). Seega on tasandi poolt laengutele avaldatud jõudude summa 0 siis ja ainult siis, kui kummagi pool tasandit on võrdne arv laenguid. Laenguid on kokku paaritu arv, seega see on võimatu.

L60 Vaakum ★★

Autor: , piirkonnavor, 2019, G 4

a) Toru tühjakspumpamine tähendab sisuliselt õhu väljasurumist torust, tehes tööd välisrõhu p vastu. REMOVE Õhk mõjub kuulikesele resultatiivse jõuga pS , kus toru ristlõikepindala $S = \pi(d/2)^2 = 0,79\text{ cm}^2$. REMOVE Jõudu pS tuleb rakendada tee-pikkusel ℓ , nii et tehtud töö $A = pS\ell$. REMOVE $A = 101\,300\text{ Pa} \cdot 7,9 \cdot 10^{-5}\text{ m}^2 \cdot 1\text{ m} \approx 8,0\text{ J}$.

b) Kuulikese mass:

$$m = \rho V = \rho(4/3)\pi(d/2)^3 = \pi\rho d^3/6 = \pi \cdot 7,9\text{ g/cm}^3 \cdot (1\text{ cm})^3/6 = 4,1\text{ g}$$

REMOVE Kuna kuulike liigub eeldatavasti hulga aeglasemalt kui on heli kiirus, siis talle möjub praktiliselt konstantne kiirendav jõud pS , jällegi teepikkusel ℓ . Järelkult eelmises punktis leitud töö A annab ühtlasi kuulikese kineetilise energia toru teises otsas. REMOVE Kuna $mv^2/2 = A$, siis $v = \sqrt{2A/m}$. REMOVE

$$v = \sqrt{\frac{2 \times 8,0\text{ J}}{0,0041\text{ kg}}} \approx 62\text{ m/s} \text{ REMOVE}$$

Alternatiivselt võib kasutada ka tuntud valemit ühtlase kiirenduse jaoks, $v^2 - v_0^2 = 2a\ell$, kus algkiirus $v_0 = 0$ ja kiirendus $a = pS/m$.

L61 Konveier ★★

Autor: , lõppvoor, 2019, G 4

Olles täielikult esimesel lindil, on plaadi kiirus v_1 ning teisel lindil v_2 . Plaadi kiirus muutub üleminekukohas v_1 -lt v_2 -le, kui hõõrdejõud teise konveierilindiga ületab hõõrdejõu esimese konveierilindiga. Olgu plaadi mass M ning plaadi joontihedus piki konveierit $\rho = M/l$. Piirjuhul saame hõõrdejõudude võrdsusest:

$$\mu_1 M_1 g = \mu_2 M_2 g$$

kus M_1 ja M_2 on vastavalt esimese ja teise lindi peal oleva plaadi osa massid. Olgu esimesel lindil oleva osa pikkus l_1 ning teisel osal l_2 . Kasutades joontihedust saame:

$$\mu_1 \rho l_1 g = \mu_2 \rho l_2 g$$

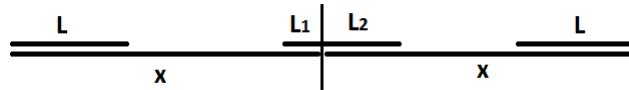
. Taandades ühised kordajad saame võrrandisüsteemi:

$$\mu_1 l_1 = \mu_2 l_2$$

$$l_1 + l_2 = l$$

Sit saame avaldada l_1 -e:

$$l_1 = \frac{l}{1 + \frac{\mu_1}{\mu_2}}$$



Joonisel on kujutatud plaadi algasend, lõppasend ning piirjuht, kus kiirus muutub (tühiselt väikese aja jooksul). Algasendist piirjuhuni läbib plaat vahemaa $x - l_1$ kiirusel v_1 . Piirjuhust lõppasendini läbib plaat vahemaa $x - l_2$ kiirusel v_2 . Seega koguaeg:

$$t = \frac{x - l_1}{v_1} + \frac{x - l_2}{v_2}$$

Asendades saame:

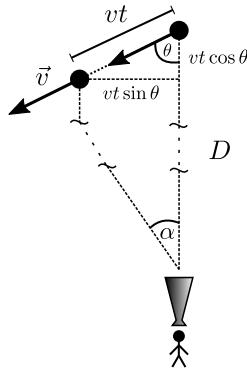
$$\begin{aligned} t &= \frac{v_2 x - v_2 l_1 + v_1 x - v_1 l_2}{v_1 v_2} = \\ &= \frac{x(v_1 + v_2) - l v_1 - l_1 v_2 + l_1 v_1}{v_1 v_2} = \\ &= \frac{x(v_1 + v_2) - l v_1 + \frac{l(v_1 - v_2)}{1 + \frac{\mu_1}{\mu_2}}}{v_1 v_2} \end{aligned}$$

L62 Noova ★★

Autor: Richard Luhtaru, lahtine, 2020, G 4

Vaatleme jäänuki liikumist aja t jooksul, selle aja jooksul liigub jäänuk vahemaa vt . Näeme, et ristisihis liigub jäänuk vahemaa $vt \sin \theta$, seega kasutades väikeste nurkade lähendusi, on Jarli poolt mõõdetav nurk nende kahe positsiooni vahel $\alpha = vt \sin \theta / D$ ja näiv vahemaa, mille jäänuk nende hetkede vahel läbib on

$$x' = \alpha D = vt \sin \theta.$$



Küll aga tuleb arvestada ka sellega, et jäänuk liigub selle aja jooksul $vt \cos \theta$ vatesihis Jarlike lähemale, mistõttu teepikkus, mille valgus peab Jarlini jõudmiseks läbima, lüheneb ja seega näiv aeg kahe hetke vahel t' ei ole võrdne tegeliku ajaga t . Kuna esimesel hetkel on jäänuki kaugus Jarlist D ning teisel juhul $D - vt \cos \theta$ (kasutades lähendust, et D on väga suur), siis näiv aeg kahe hetke vahel on

$$t' = t_2 - t_1 = \left(t + \frac{D - vt \cos \theta}{c} \right) - \frac{D}{c} = t \left(1 - \frac{v \cos \theta}{c} \right).$$

Seetõttu Jarli poolt mõõdetav näiv kiirus on

$$v' = \frac{x'}{t'} = \frac{v \sin \theta}{1 - \frac{v}{c} \cos \theta}.$$

Näeme, et näiv kiirus võib olla tõesti suurem kui c . Näiteks kui $\theta = 45^\circ$ ja $v = \frac{7}{5\sqrt{2}}c$ (mis on väiksem kui c), siis

$$v' = \frac{\frac{7}{5\sqrt{2}}c \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}}{1 - \frac{7}{5\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{7}{3}c > c.$$

Märkus. Selline nähtust, kus näiv kiirus on valguse kiirusest suurem (ingl. k. *superluminal motion*), on märgatud mitmete astronoomiliste objektide korral. Üks suuremaid näivaid kiirusi on mõõdetud kvasarijoal korral, mille näivaks kiiruseks mõõdeti $9,6c$.

L63 Elektriruut ★★

Autor: ,

4

Tähistame joonisel punktid A, B, C ja D. Paneme tähele, et kuna A ja C on ühendatud omavahel juhtmega, mille takistuse võime lugeda nulliks, siis A = C REMOVE. Samal põhjusel B = D REMOVE. Nüüd võime skeemi ümber joonistada nii, nagu näidatud joonisel 2. REMOVE

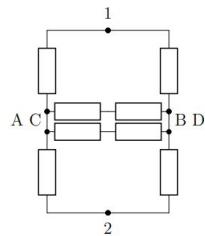
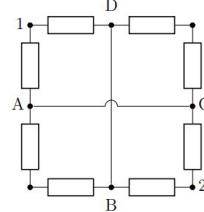
Sümmeetria tõttu ei läbi punktide A, C ja B, D vahelist silda kunagi vool REMOVE, seega lihtsustub skeem kujule, kus on vaid neli ülejäänud takistit REMOVE, mille kogutakistuseks tuleb $\frac{2R}{2} = R$ REMOVE

L64 Tasakaaluliikur ★★

Autor: , lõppvoor, 2020, G 4

Hannese liikumist saab vertikaalsuunas käsitleda vedrupendli võnkumisena. Vedrupendli perioodi valm on:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$



Joonis 2: Ekvivalentne konfiguratsioon.

Kuna meie süsteemil on kaks vedru rööbiti, tuleb võngete perioodi valemit veidi muuta. Kahe körvuti oleva vedru jäikus on võrdne ühe vedruga, mille jäikus on eelnevate vedurude jäikuste summaga. Seega on meie süsteemi vertikaalsuunaliste võngete periood:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{2k}}$$

Resonants tekib, kui koosinusaline läbimise sagedus ühtib verikaalse vedrusüsteemi naturaalsagedusega. Seega peab Hannes $\Delta x = 6 \text{ m}$ võrra edasi liikuma sama ajaga, mil teeb masspendel ühe naturaalsagedusel võanke. Seega, resonantsi tekke kiirus:

$$v_{\text{resonants}} = \frac{\Delta x}{T} = \frac{\Delta x}{2\pi} \sqrt{\frac{2k}{m}} = 4,678 \text{ ms}^{-1} \approx 4,7 \text{ ms}^{-1}$$

L65 Kuiv õhk ★★

Autor: Jaan Kalda, lahtine, 2021, G 4

Kui õhk siseneb ruumi, siis vee moolide suhe kogu gaasi moolide arvu ei muudu, olgu need teatud koguse tippa siseneva õhu jaoks vastavalt ν_v ja ν_k . Ideaalse gaasi olekuvõrrandist saame vee osarõhu ja kogu rõhu jaoks vastavalt $p_v V = \nu_v RT$ ja $p_k V = \nu_k RT$, milles $p_v = p_k \frac{\nu_v}{\nu_k}$. Arvestades, et kogurõhk on nii toas kui väljas võrdne atmosfääriõhuga p_0 , saame suhtelise niiskuse jaoks avaldise $r = \frac{p_v}{p(T)} = \frac{p_0}{p(T)} \frac{\nu_v}{\nu_k}$, kus $p(T)$ tähistab küllastunud auru rõhku sõltuvuses temperatuurist ja on leitav graafikult. Tähistagu $r_v = \frac{p_0}{p(T_v)} \frac{\nu_v}{\nu_k}$ ja $r_s = \frac{p_0}{p(T_s)} \frac{\nu_v}{\nu_k}$ vastavalt suhtelisi niiskusi väljas ja sees. Seega $p(T_v) = p(T_s) \frac{r_s}{r_v} = \frac{p(T_s)}{4}$; graafikult loeme, et $p(T_s) \approx 2,2 \text{ kPa}$ (NB! tüvenumbrite lugemisel tuleb meeles pidada, et tegemist on

logaritmiline graafikuga!) ning seega $p(T_v) \approx 550 \text{ Pa}$. Graafikult leiate ka sellele rõhule vastava temperatuuri, $T_v \approx -1^\circ\text{C}$.

L66 Batüskaaf ★★

Autor: Kaido Reivelt, piirkonnavor, 2021, G 4

Kuna kasutada on lihtmehhanismid, pole maksimaalne rakendatav jõud oluline, sest Monikal on neid kasutades võimalik avaldada ükskõik kui suuri jõude. Rõhu vahe batüskaafi väljas ja sees on

$$\Delta p = \rho gh. \quad \text{REMOVE}$$

Rõhuvahe avaldab silindrile jõudu

$$F_p = \Delta p S = \rho gh S. \quad \text{REMOVE}$$

Sellise jõuga tuleb tööd teha, et vett batüskaafist välja pumbata. Vee välja pumpamiseks vajalik töö avaldub kui

$$A = F_p \cdot \Delta x = \rho gh S \Delta x. \quad \text{REMOVE}$$

Paneme tähele, et batüskaafist on tarvis välja pumbata kokku $V = 1 \text{ L}$ vett, järelki peab kehtima $V = S \Delta x$ REMOVE.

Ruumala V batüskaafist välja pumpamiseks on vaja teha tööd $A = \rho gh V$. Kuna teame, et tööd saab teha keskmise võimsusega $P = 100 \text{ W}$, saame et vee välja pumpamiseks kulub

$$t = \frac{A}{P} = \frac{\rho gh V}{P} = 1009 \text{ s}. \quad \text{REMOVE}$$

L67 Sõit jääl ★★

Autor: Richar Luhtaru, lõppvor, 2021, G 4

Kui auto mass on m , siis auto raskusjõud on $F_g = mg$ ja maksimaalne ratsale mõjuv hõördejõud on $F_h = \mu mg$. Maksimaalne autole mõjuda saav kiirendav/pidurdav jõud on maksimaalne hõördejõud (muidu hakkaksid rattad libisema), seega auto maksimaalne kiirendus on $a_{max} = \frac{F_h}{m} = \mu g$ ja minimaalne kiirendus on $a_{min} = -\frac{F_h}{m} = -\mu g$.

On ilmne, et minimaalse sõiduaaja korral kiirendab auto kõigepealt maksimaalse kiirendusega a_{max} ja seejärel pidurdab kiirendusega a_{min} , nii et auto jäääks täpselt tee lõpus seisma. Tõepoolest, kui auto kiirendus ei oleks mingil hetkel maksimaalne/minimaalne võimalik, saaks auto sellel ajaperiodil lühikese aja maksimaalselt kiirendada ja pidurdada, vähendades sõiduaega. Kuna $\mu_2 > \mu_1$, siis on maksimaalne kiirendus suurem teisel lõigul ja seega ka kiirendamine muutub pidurdamiseks tee teisel lõigul.

Kulugu autol aeg t_1 , et jõuda tee keskele, seejärel aeg t_2 jõudmaks kohta, kus kiirendamine muutub pidurdamiseks, ja seejärel aeg t_3 , et jõuda tee lõppu. Vastavad auto kiirendused on $a_1 = \mu_1 g$, $a_2 = \mu_2 g$ ja $a_3 = -\mu_2 g$.

Aja t_1 jooksul läbib auto teepikkuse L , seega

$$L = \frac{\mu_1 g t_1^2}{2} \implies t_1 = \sqrt{\frac{2L}{\mu_1 g}} = 10 \text{ s.}$$

Tee keskele jõudes on auto kiirus

$$v_1 = \mu_1 g t_1 = \mu_1 g \cdot \sqrt{\frac{2L}{\mu_1 g}} = \sqrt{2L\mu_1 g} = 10 \text{ m/s.}$$

Seejärel peale aja t_2 läbimist on auto kiirus

$$v_2 = v_1 + \mu_2 g t_2.$$

Et teise lõigu pikkus on samuti L , siis

$$\begin{aligned} L &= \frac{v_2^2 - v_1^2}{2a_2} + \frac{0 - v_2^2}{2a_3} = \frac{2v_2^2 - v_1^2}{2\mu_2 g}, \\ v_2 &= \sqrt{\frac{2\mu_2 g L + v_1^2}{2}} \approx 12,25 \text{ m/s.} \end{aligned}$$

Seega

$$t_2 = \frac{v_2 - v_1}{\mu_2 g} \approx 1,12 \text{ s.}$$

Kuna auto peab tee lõpus seisma jäätma, siis

$$\Delta v = 0 \implies \mu_1 g t_1 + \mu_2 g t_2 - \mu_2 g t_3 = 0 \implies t_3 = t_2 + \frac{\mu_1}{\mu_2} t_1 \approx 6,12 \text{ s}$$

ja tee läbimise koguaeg on

$$t = t_1 + t_2 + t_3 \approx 17,24 \text{ s.}$$

L68 Kuiv jää ★★

Autor: Uku Andreas Reigo, lahtine, 2022, G 4

Kõik kuiva jää sublimeerimiseks ja soojendamiseks vajalik energia tuleb õhust. Leiame sublimeerimiseks vajaliku energiat:

$$\begin{aligned} Q_{sub} &= n_{CO_2} \cdot \lambda_{CO_2} \\ &= \frac{m_{CO_2}}{M_{CO_2}} \cdot \lambda_{CO_2} \\ &= \frac{m_{CO_2} \cdot \lambda_{CO_2}}{M_C + 2 \cdot M_O} \end{aligned}$$

Energiatasakaalust teame, et CO_2 sublimeerimiseks ja soojendamiseks (Q_1) vaja-

minev energia tuli täielikult õhu jahtumisest (Q_2) lõpptemperatuurini $T_{\text{lõpp}}$, kusjuures $Q = mc\Delta T$.

$$Q_{\text{sub}} + Q_1 = Q_2$$

$$Q_{\text{sub}} + m_{CO_2} C_{CO_2} \cdot (T_{\text{lõpp}} - T_0) = V_{\text{tünn}} \rho_{\text{öhk}} C_{\text{öhk}} \cdot (T_{\text{öhk}} - T_{\text{lõpp}})$$

Avaldame lõpptemperatuuri:

$$T_{\text{lõpp}} = \frac{V_{\text{tünn}} \rho_{\text{öhk}} C_{\text{öhk}} T_{\text{öhk}} + m_{CO_2} C_{CO_2} T_0 - Q_{\text{sub}}}{m_{CO_2} C_{CO_2} + V_{\text{tünn}} \rho_{\text{öhk}} C_{\text{öhk}}}$$

Asendades teatud väärtsused sisse, saame $T_{\text{lõpp}} = 17,7^\circ\text{C}$

Rõhu arvutamiseks kasutame ideaalgaasi seadust. Algsest on tünnis $n_0 = \frac{p_0 V_{\text{tünn}}}{R T_{\text{öhk}}}$ mooli erinevaid öhumolekul. Lisandub $n_{CO_2} = \frac{m_{CO_2}}{M_C + 2 \cdot M_O}$ mooli süsihappegaasi ning lõpptemperatuur on äsja leitud, seega

$$p_{\text{lõpp}} = \frac{nRT}{V}$$

$$= \frac{\left(\frac{m_{CO_2}}{M_C + 2 \cdot M_O} + \frac{p_0 V_{\text{tünn}}}{R T_{\text{öhk}}} \right) R (273,15 + 17,7^\circ\text{C})}{V_{\text{tünn}}}$$

asendades sisse teatud väärtsused saame $p_{\text{lõpp}} = 99,3 \text{ kPa}$

Kui kuiv jäää oleks kohe veevannis, siis oleks soojendamiseks tulnud energia just seal veest (vann on suur, seega vesi ei jäätu ning terve kuiv jäää ning kaasnev gaas saab välja). Seega oleks lõplik temperatuur tünnis soojem ning järelikult ka rõhk suurem.

L69 Kaks tuba ★★

Autor: Jarl Patrick Paide, piirkonnavor, 2022, G 4

Olgu mõlemas toas algne kütteallikas võimsusega N REMOVE. Olgu toas, kus on lisaks kütteallikas võimsusega P temperatuur T_0 , teises toas temperatuur T_1 ja väljas temperatuur T_2 . Süsteem on tasakaalus kui $T_0 > T_1 > T_2$ REMOVE. Paneme kirja võrrandi mõlema toa jaoks kus paremal pool on toast lahkuv soojus ja vasakul pool tappa sisenev soojus.

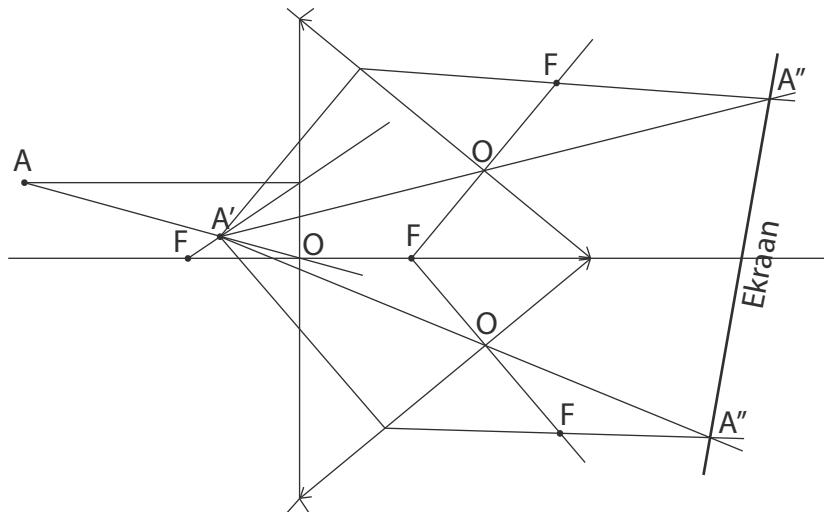
$$N + P = 3k(T_0 - T_2) + k(T_0 - T_1), \quad REMOVE$$

$$N + k(T_0 - T_1) = 3k(T_1 - T_2). \quad REMOVE$$

Sit saame avaldada temperatuurivahe $T_0 - T_1 = \frac{P}{5k}$ REMOVE.

L70 Läätsede kolmnurk ★★

Autor: Erkki Tempel, lõppvoor, 2022, G 4



L71 Kondensaatorid ★★

Autor: Päivo Simson, lahtine, 2023, G 4

Enne laadimise algust on esimese kondensaatori energia

$$E_1 = \frac{C_1 U_0^2}{2} = 4500 \text{ J}$$

ja teise energia on null. Laadimise käigus toimub kondensaatorite vahel laengu ümberjaotumine, kuid kogulaeng q säilib. Laadimisprotsess toimub seni, kuni kondensaatorite pinged võrdsustuvad. Lõpp-pinge U saame leida laengu jäävuse seadust:

$$q = C_1 U_0 = C_1 U + C_2 U \quad \Rightarrow \quad U = \frac{C_1 U_0}{C_1 + C_2} = 6 \text{ kV.}$$

Laadimise lõpuks on kahe kondensaatori koguenergia

$$E_2 = \frac{C_1 U^2}{2} + \frac{C_2 U^2}{2} = \frac{(C_1 + C_2) U^2}{2} = 1800 \text{ J.}$$

Näeme, et see on väiksem kui esimese kondensaatori energia enne laadimise algust. Puuduolev energia eraldus järelikult süsteemist soojusena, peamiselt hõõglambi põlemisel. Otsitav soojushulk on seega

$$Q = E_1 - E_2 = 2700 \text{ J.}$$

Märkus: ülesande võib lahendada ka vahetulemusi kasutamata. Energia ja laengu

jäävustest saame

$$\begin{cases} \frac{C_1 U_0^2}{2} = \frac{C_1 U^2}{2} + \frac{C_2 U^2}{2} + Q \\ C_1 U_0 = C_1 U + C_2 U \end{cases} \implies Q = \frac{C_1 C_2 U_0^2}{2(C_1 + C_2)} = 2700 \text{ J.}$$

L72 Droon ★★

Autor: Marten Rannut, piirkonnavor, 2023, G 4

Tuule jõu muutus ajas on $\frac{25 \text{ N}}{0,7 \text{ s}} = 35,7 \frac{\text{N}}{\text{s}}$ REMOVE. Drooni jõu muutus ajas on $\frac{20 \text{ N}}{1 \text{ s}} = 20 \frac{\text{N}}{\text{s}}$ REMOVE. Järelikult resultantjõu muutus ajas on $\frac{\Delta F}{\Delta t} = 35,7 \frac{\text{N}}{\text{s}} - 20 \frac{\text{N}}{\text{s}} = 15,7 \frac{\text{N}}{\text{s}}$ REMOVE. Kuna $F = ma$, siis hakkab droon kiirenema, kusjuures kiirendus hakkab ühtlaselt kasvama REMOVE. Kiirenduse kasvamise kiirus on

$$\frac{\Delta a}{\Delta t} = \frac{1}{m} \frac{m \Delta a}{\Delta t} = \frac{1}{m} \frac{\Delta F}{\Delta t} = \frac{1}{0,5 \text{ kg}} \cdot 15,7 \frac{\text{N}}{\text{s}} = 31,4 \frac{\text{m}}{\text{s}^3}. \quad \text{REMOVE}$$

Teame, et kui keha algne kiirus on 0 ja kiirus hakkab kasvama ühtlaselt kiirendusega $a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$, siis asukoha muutus on $\Delta s = \frac{at^2}{2} = \frac{\frac{\Delta v}{\Delta t} t^2}{2}$. Analoogselt, kuna kiirendus a on kiiruse muutumise kiirus ja $\frac{\Delta a}{\Delta t}$ kiirenduse muutumise kiirus, siis ühtlase kiirenduse kasvamise korral $\Delta v = \frac{\frac{\Delta a}{\Delta t} t^2}{2}$ REMOVE. (Kui Δv valemit pole leitud, aga on idee kasutada konstantse kiirenduse valemit $s = \frac{at^2}{2}$, siis REMOVE.) Et drooni kiirus on algsest 0, siis drooni kiirus pärast $t = 0,5 \text{ s}$ on

$$v = \Delta v = \frac{\frac{\Delta a}{\Delta t} t^2}{2} = \frac{31,4 \frac{\text{m}}{\text{s}^3} \cdot (0,5 \text{ s})^2}{2} \approx 3,93 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Numbrilise vastuse eest REMOVE.

L73 Laev ★★

Autor: Kaarel Kivilalu, lõppvoor, 2023, G 4

Nurk laeva ja kanali ristsihi vahel on $\alpha = \arccos(d/l)$. Kanali põhja poolt laevale avaldatav tooreaktsioon on $N = (m - \rho lwhk)g$.

Sümmeetri töttu hakkab laev pöörlema ümber oma keskpunkti. Seega puksiiride efektiivne jõud on risti laeva sihiga. Seega $F \cos \alpha = \mu N/2$. Nendest võrranditest avaldades saame, et

$$F = \frac{\mu gl}{2d} (m - \rho lwhk).$$

L74 Rongiühendus ★★

Autor: Jonatan Kalmus, lahtine, 2024, G 4

Olgu rongide kiirus v ning T rongide vaheline aeg, s.t. iga ajavahemiku T järel siseneb raudteelöiku üks rong. (Kuna kiirus on ühtlane, väljub ka iga ajavahemiku T järel üks rong, aga mitte tingimata samal ajahetkel.) Maksimaalne raudteelöigu läbilaskmisvõime vastab seega minimaalsele rongide vahelisele ajale T . Selle aja jooksul peab rong läbima iseenda pikkuse l ning rongidevahelise ohutu vahemaa ehk kahekordse pidurdusmaa:

$$2s = 2 \frac{v^2 - 0^2}{2a} = \frac{v^2}{a},$$

Saame seega võrrandi

$$T = \frac{2s + l}{v} = \frac{\frac{v^2}{a} + l}{v} = \frac{v}{a} + \frac{l}{v} \quad (\text{I})$$

Kasutades vihjet saame

$$T = \underbrace{\frac{v}{a}}_x + \underbrace{\frac{l}{v}}_y \geq 2 \sqrt{\underbrace{\frac{v}{a}}_x \cdot \underbrace{\frac{l}{v}}_y} = 2 \sqrt{\frac{l}{a}} = 2 \sqrt{\frac{900 \text{ m}}{1 \text{ m/s}^2}} = 60 \text{ s} \quad (\text{II})$$

Korrutades võrrandi (I) kiirusega v saame ruutvõrrandi optimaalse kiiruse leidmiseks:

$$\begin{aligned} T v = \frac{v^2}{a} + l &\iff v^2 - T a v + l = 0 \\ &\iff v = \frac{T a \pm \sqrt{(Ta)^2 - 4l}}{2} \\ &\iff v = \frac{60 \pm \sqrt{60^2 - 4 \cdot 900}}{2} = 30 \text{ (m/s)} \end{aligned}$$

Ülesande võib lahendada ka tületisega. Sel juhul leiame otse minimaalsele ajale vastava kiiruse:

$$T'(v) = \frac{1}{a} - \frac{l}{v^2} = 0 \implies v = \sqrt{\frac{l}{a}} = \sqrt{\frac{900 \text{ m}}{1 \text{ m/s}^2}} = 30 \text{ (m/s)}$$

L75 Galileo termomeeter ★★

Autor: Jaan Kalda, piirkonnnavoor, 2024, G 4

Olgu kuulikese koguruumala V ; sellisel juhul vee tihedus 20 kraadi juures ρ_1 ra-huldab tasakaalutingimust $\rho_1 V = m_1$ REMOVE. Sarnase seose saame 22-kraadise kuulikese kogumassi jaoks, $m_2 = \rho_2 V$, kus ρ_2 tähistab vee tihedust 22 kraadi juures REMOVE. Ühikmassi vee ruumala 20 kraadi juures on $V_1 = 1/\rho_1$ ja 22 kraadi juures — $V_2 = 1/\rho_2$ REMOVE. Teisest küljest $V_2 = V_1(1 + k\Delta T)$, kus $\Delta T = 2^\circ\text{C}$ REMOVE. Seetõttu $\rho_2 = 1/V_2 = 1/[V_1(1 + k\Delta T)] = \rho_1/(1 + k\Delta T)$ REMOVE. Et esimese kahe valemi põhjal $m_2 = \rho_2 V = m_1 \rho_2 / \rho_1$ REMOVE, siis $m_2 = m_1 / (1 + k\Delta T)$ REMOVE. Numbriliselt saame $m_2 = 19,9916 \text{ g}$ REMOVE.

L76 Piljard ★★

Autor: Richard Luhtaru, lõppvoor, 2024, G 4

a) Olgu piljardikuuli kiirus enne põrget v_0 ja pärast põrget v_1 . Olgu x -telg servaga paralleelne ja y -telg servaga risti. Kuna serv möjutab kuuli ainult y -sihis, siis kuuli x -suunaline kiirus ei muudu põrke jooksul. Seega

$$v_x = v_0 \sin 45^\circ = v_1 \sin 60^\circ \implies \frac{v_1}{v_0} = \frac{\sin 45^\circ}{\sin 60^\circ}.$$

Kuna kuuli kineetiline energia on $E = \frac{1}{2}mv^2$, siis

$$\frac{E_1}{E_0} = \frac{\frac{1}{2}mv_1^2}{\frac{1}{2}mv_0^2} = \frac{v_1^2}{v_0^2} = \frac{\sin^2 45^\circ}{\sin^2 60^\circ} = \left(\frac{\sqrt{2}/2}{\sqrt{3}/2}\right)^2 = \frac{2}{3},$$

seega põrke käigus läks kaduma umbes 33% palli energiast.

b) Newtoni teisest seadusest

$$F = ma = m \frac{\Delta v}{\Delta t} \implies F \Delta t = m \Delta v.$$

Kuna jõud möjus kuulile ainult y -suunas, siis järelikult

$$F_p t_p = m(v_{1,y} - v_{0,y})$$

(kus loeme v_y positiivseks, kui kiirus on suunatud lauast eemale). Me teame, et

$$v_{0,y} = -v_0 \cos 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2} v_0,$$

$$v_{1,y} = v_1 \cos 60^\circ = \sqrt{\frac{2}{3}} v_0 \cos 60^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} v_0,$$

seega

$$\Delta v_y = v_{1,y} - v_{0,y} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{2}}{2} \right) v_0 \approx 1,115 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Keskmine kuulile mõjuv jõud oli järelikult

$$F_p = \frac{m\Delta v_y}{t_p} = \frac{0,2\text{kg} \cdot 1,115 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{0,01\text{s}} = 22,3 \text{N}.$$

L77 Hiiglane ★★

Autor: Andres Põldaru, lahtine, 2018, G 5

Võrdleme mõlema hüppaja poolt tehtud tööd. Läbides väikese vahemaa Δl teevad lihased töö

$$\Delta A = F\Delta l.$$

Jõud sõltub hüppaja kõrgusest h ruutsõltuvuse järgi, sest lihaste pindala kasvab lineaarmõõtme ruuduga. Lisaks kasvab läbitud vahemaa võrdeliselt lineaarmõõtmega. Seega lihaste poolt tehtud töö on võrdeline hüppaja pikkuse kuubiga $A \propto h^3$.

Vaatleme nüüd, kui palju potentsiaalne energia muutub. Algseis seisab hüppaja vabalt, seejärel laskub alla vahemaa h_1 võrra ja hüppab üles. Kui hüppe kõrgus on h_2 , siis potentsiaalse energiate vahemaa hüppe madalaimas ja kõrgeimas punktis on $mg(h_1 + h_2)$. Kuna alg- ja lõpphetkel on hüppaja paigal (kineetiline energia puudub), siis energia jäävuse seaduse järgi peab tehtud töö võrduma potentsiaalse energiaga muuduga:

$$A = mg(h_1 + h_2) \rightarrow h_2 = \frac{A}{mg} - h_1.$$

Kuna nii mass kui tehtud töö A sõltuvad lineaarmõõtme kuubist, siis jagatis A/m on mõlema hüppaja jaoks sama. Kuna laskumise vahemaa h_1 on võrdeline hüppaja pikkusega, siis tuleb välja, et hüppe kõrgus on suuremal vennal hoopis väiksem.

L78 Kuulid ★★

Autor: Erkki Tempel, lahtine, 2019, G 5

Esimene kuuli kõrgus on $h_1(t_0) = vt_0 - gt_0^2/2$ ja teise kuuli kõrgus $h_2(t_0) = v(t_0 - t) - g(t_0 - t)^2/2$, kui esimene kuul lastakse õhku, siis $t_0 = 0$. Põrke hetkel on kuulide kõrgused võrdsed. Sellest saame avaldada põrkehette $t_0 = t_p$.

$$\begin{aligned} vt_p - gt_p^2/2 &= v(t_p - t) - g(t_p - t)^2/2, \\ vt_p - gt_p^2/2 &= vt_p - vt - gt_p^2/2 + 2gtt_p/2 - gt^2/2, \\ gtt_p &= vt + gt^2/2, \\ t_p &= v/g + t/2. \end{aligned}$$

Seda aega kasutades saame leida kummagi kuuli kiirused põrke hetkel. $v_1 = v - gt_p = v - v - gt/2 = -gt/2$ ja $v_2 = v - gt(t_p - t) = gt/2$ ehk $v_p = |v_1| = |v_2|$. Seda saab ka tuletada energiajäävusest, et samal kõrgusel on kuulide kiiruste absoluut-väärtused võrdsed. Elastse põrke korral kehtib nii impulsil kui ka energia jäävust, millega tuleneb, et võrdsete masside korral kuulide kiirused vahetuvad, ehk võrdsete vastassuunaliste kiiruste korral kiiruste suunad vahetuvad ja esimene kuul

põrkab otse üles tagasi. Leiame kõrguse, kus toimus põrge

$$h_p = vt_p - gt_p^2/2 = v^2/g + vt/2 - g(v^2/g^2 + vt/g + t^2/4)/2 = v^2/2g - gt^2/8.$$

Pärast põrget tõusis esimene kuul veel kõrguse $h_+ = v_p^2/2g = (gt/2)^2/2g = gt^2/8$. Seega kuuli maksimaalne kõrgus pärast esimest põrget on $h_p + h_+ = v^2/2g$, mis oli ka esimese kuuli maksimaalne kõrgus enne põrget.

Alternatiivne lahendus: Kuna kuulid lastakse välja sama algiirusega ning kokku põrge toimub ühel kõrgusel, siis energia jäädvuse põhjal on kokkupõrke hetkel kuulide kiirused samad, kuigi vastassuunalised. Kui põrkuvad kokku kaks ühesugust kuuli samade kiirustega, siis energia ja impulsi jäädvuse töttu on peale kokkupõrget nende kiirused samad, mis enne, kuid vastupidise märgiga. Seetõttu saavutab esimene kuul jälle oma esialgse maksimaalse kõrguse, mis on $h = \frac{v^2}{2g}$.

L79 Osake magnetväljas ★★

Autor: , piirkonnnavoor, 2019, G 5

Kui osake siseneb magnetvälja, siis mõjub osakesele Lorenzi jõud $F_L = qvB \sin \alpha$ REMOVE. Osake siseneb magnetvälja risti magnetväljaga ning hakkab Lorentzi jõi töttu liikuma mööda ringjoont. REMOVE

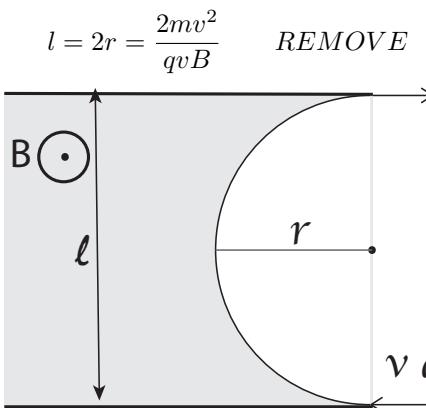
Ringjoone raadius r on minimaalne siis, kui osake siseneb magnetvälja alt ning väljub ülevalt servast. Mööda ringjoont liikudes mõjub osakesele tsentrifugaaljõud

$$F_T = \frac{mv^2}{r} \quad \text{REMOVE}$$

Lorentzi jõud ja tsentrifugaaljõud on võrdsed REMOVE, seega saame avaldada ringjoone raadiuse r

$$F_L = F_T \quad \Rightarrow \quad qvB = \frac{mv^2}{r} \quad \Rightarrow \quad r = \frac{mv^2}{qvB} \quad \text{REMOVE}$$

Seega on magnetvälja alla minimaalne laius l



L80 Jääkeegel ★★

Autor: , lõppvoor, 2019, G 5

Esmalt veendume selles, et esialgu liikuva kivi märklaua keskele jõudmiseks peab kivide vahel toimuma tsentraalne otsepõrge. Oletame vastuväiteliselt, et liukuva kivi trajektoori pikendus ei läbi enne põrget seisva kivi massikeset, vaid möödub sellest näiteks paremal poolt (liikumise sihis vaadatuna). Kuna kivide ristlõiked on ringikujulised ja eeldame, et kivi massikese asub ringi keskel, siis mõjuvad kivide vahel põrke ajal joud piki nende massikeskeid ühendavat sirget. Jagades liikumatu kivi poolt liikuvale kivile avaldatava jõu kaheks komponendiks, millest üks on piki kivi esialgset trajektoori ja teine sellega risti, näeme et jõu ristikomponent on suunatud liikumise sihist paremale. Seega pöördub likuva kivi trajektoor põrke tulemusel veel rohkem paremale ja ei saa läbida märklaua keskpunkti. Järelikult peab ülesande tingimuste täitmiseks toimuma tsentraalne otsepõrge ja saame järgnevalt olukorda vaadelda ühemõõtmelisena.

Märklaua keskele jõudmiseks peab esialgu liikuv kivi pärast põrget teatud kiirusega edasi liikuma ja seejärel jäaga hõordumise töttu seisma jäama. Tähistame kiirused: v_0 ja v – esialgu liikuva kivi kiirus enne ja pärast põrget ning u – esialgu seisva kivi kiirus pärast põrget. Impulsi jäävuse seadusest:

$$mv_0 = mv + mu, \quad (1)$$

kus m on kivi mass, mis nagu näha välja taandub. Samuti saame kirjutada energia jäävuse seaduse

$$(1 - \eta) \frac{mv_0^2}{2} = \frac{mv^2}{2} + \frac{mu^2}{2}, \quad (2)$$

kus $\eta = 0,4$ on põrkel kaduma läinud energia osakaal.

Kiiruse v jaoks kehtib tingimus

$$\frac{mv^2}{2} = \mu mgs, \quad (3)$$

ehk esialgu liikuva kivi kineetiline energia pärast põrget on võrdne hõõrdejõu tööga kivi seismajäämisel. Põrke hetkel on esialgu liikuva kivi keskkoha kaugus märklauast võrdne kivi läbimõõduga ehk $s = D$ ja $v = \sqrt{2\mu g D}$.

Kiiruse v_0 leidmiseks avaldamme impulsi jäävuse seadusest $u = v_0 - v$ ja asetame selle energia jäävuse avaldisse:

$$(1 - \eta) v_0^2 = v^2 + (v_0 - v)^2, \quad (4)$$

millest

$$\eta v_0^2 - 2v_0 v + 2v^2 = 0. \quad (5)$$

Saadud ruutvõrrandi lahend on

$$v_0 = \frac{v (1 \pm \sqrt{1 - 2\eta})}{\eta} \quad (6)$$

ehk kasutades eelnevalt leitud v avaldist, saame

$$v_0 = \frac{\sqrt{2\mu g D} (1 \pm \sqrt{1 - 2\eta})}{\eta}. \quad (7)$$

Vastavalt märgile ruutvõrrandi lahendi valemis saaksime kiirusteks

	+	-
v_0	1,22 m/s	0,47 m/s
v	0,34 m/s	0,34 m/s
u	0,88 m/s	0,13 m/s

Kuna kivid ei saa pärast põrget üksteisest läbi minna, siis peab kehtima $u > v$ ja füüsikalisest sobib ainult pluss-märgiga lahend ehk kivi kiirus enne põrget on $v_0 = 1,2$ m/s.

L81 Solenoid ja kontuur ★★

Autor: Päivo Simson, lahtine, 2020, G 5

Solenoidi sees on magnetiline induktsioon $B = \mu_0 n I$. Vastavalt Faraday induktsooniseadusele on kontuuris tekkiv induktsiooni elektromotoorjõud absoluutväärtuselt võrdne kontuuri läbiva magnetvoo $\Phi = BS$ muutumise kiirusega:

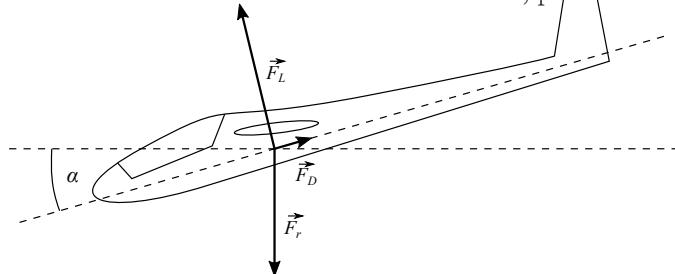
$$\epsilon = \frac{\Delta \Phi}{\Delta t} = S \frac{\Delta B}{\Delta t} = \mu_0 n S \frac{\Delta I_s}{\Delta t},$$

kus $S = \pi r^2$ on solenoidi ristlõikepindala ja r on ristlõike raadius. Selgitava märkusena olgu öeldud, et elektromotoorjõu vahetu tekijaja on solenoidi ümbritsev poöriselektriväli, mis on tingitud muutuvast magnetväljast solenoidi sees. Elektromotoorjõu tõttu tekib kontuuris vool $I = \epsilon/R = \epsilon S_0 / (\rho l)$, kus l on kontuuri pikus. Tekkiv vool on maksimaalne, kui voolu I_s muutumise kiirus $\Delta I_s / \Delta t$ on absoluutväärtuselt suurim. Funktsiooni $I_s(t)$ graafikul näeme, et see juhtub ajahetkel $t \approx 0,9$ s. Vahemikus $t = 0,85 \dots 0,95$ s on $I_s(t)$ graafik ligikaudu sirge ja seega $|\Delta I_s / \Delta t|_{max} \approx (0,6 - 0,1) / (0,95 - 0,85) = 5$ mA/s. Teiselt jooniselt saame solenoidi raadiuse $r = 2$ cm ja kontuuri pikkuse $l = 40$ cm. Voolutugevuse maksimaalne väärtus kontuuris on seega

$$I_{max} = \frac{\mu_0 \pi r^2 n S_0}{\rho l} \left| \frac{\Delta I_s}{\Delta t} \right|_{max} \approx 1,5 \mu A.$$

L82 Purilennuk ★★

Autor: , piirkonnavaor, 2020, G 5



Vaatleme purilennukile mõjuvaid jõude pukseerimise ajal ja vabal liuglemisel. Pukseerimise ajal mõjuvad purilennukile horisontaalselt puksiirköie tõmbejõud T ning õhutakistus F_D ja vertikaalselt raskusjõud $F_r = mg$ ning aerodünaamiline töstetõud F_L . Ühtlase kiirusega lendamisel on purilennukile mõjuvate jõudude (vektoriaalne) summa 0, millest $F_D = T$ ja $F_L = mg$. Seega on purilennuki aerodünaamilisi omadusi iseloomustav suhe antud juhul avaldatav kui

$$\frac{F_L}{F_D} = \frac{mg}{T}. \quad (1)$$

Vabal liuglemisel moodustab lennuki kiirusvektor horisontaalsihi suhtes nurga α ja antud olukorras lennukile mõjuvad jõud on kujutatud joonisel.

Kuna lennuki kiirus on ka sel juhul ühtlane, siis peab jälegi kehtima jõudude tasakaal ehk kõigi kolme jõu vektoriaalne summa on 0. Jõudude horisontaalkomponentide tasakaalust saame $F_L \sin(\alpha) = F_D \cos(\alpha)$, millest:

$$\frac{F_D}{F_L} = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} = \tan(\alpha). \quad (2)$$

Märkus: jõudude F_L ja F_D absoluttväärused on pukseerimisel ja liuglemisel mõnevõrra erinevad, kuid nende suhe F_D/F_L on mõlemal juhul sama. Viimaks paneeme tähele, et kuna purilennuki kiirusvektor moodustab horisontaalsihiiga nurga α , siis saame maksimaalse lennukauguse s leida täisnurksest kolmnurgast kaatetitega s ja h ning alusnurgaga α ehk $h/s = \tan \alpha$. Eelnevalt leitud seoseid kasutades saame

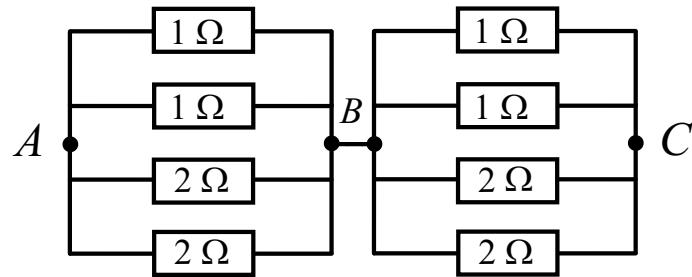
$$s = \frac{h}{\tan(\alpha)} = \frac{hF_L}{F_D} = \frac{hmg}{T}, \quad (3)$$

mille arväärtus on $s = 82$ km.

L83 Gloobus ★★

Autor: , lõppvoor, 2020, G 5

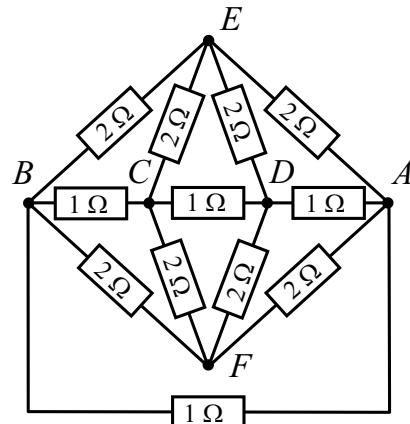
a) Pöördsümmeetria tõttu on näha, et väljundklemmide A ja C vahel jäävatel sõlmedel on kõigil sama potentsiaal. Seega võib need neli sõlme kokku ühendada ja saame kaks järjestikust neljatakitist rööbitiühendust:



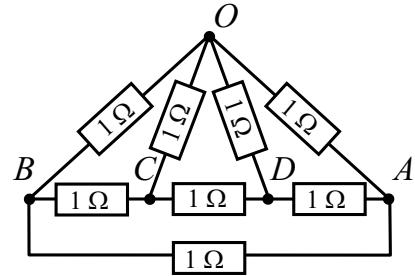
Takistus A ja C vahel on seega:

$$2 \cdot \frac{1}{2 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{1}} \Omega = \frac{2}{3} \Omega.$$

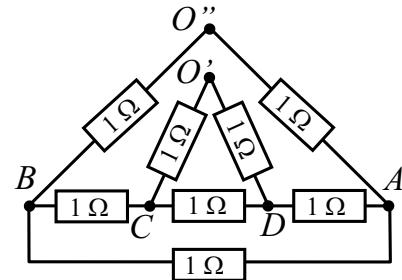
b) Variant 1: Kerast on võimalik saada ekvivalentne skeem:



kus on lisatud veel sõlmede tähisid D, E ja F. Kuna sõlmedel E ja F on sama potentsiaal, saame need kokku ühendada sõlmeks O, nagu järgneval skeemil. Sel juhul on sõlmega O ühendatud neli takisti paari, kus üks paar, mis koosneb kahest rööbiti ühendatud 2-oomisest takistist, annab kokku tavalise 1-oomise takisti:



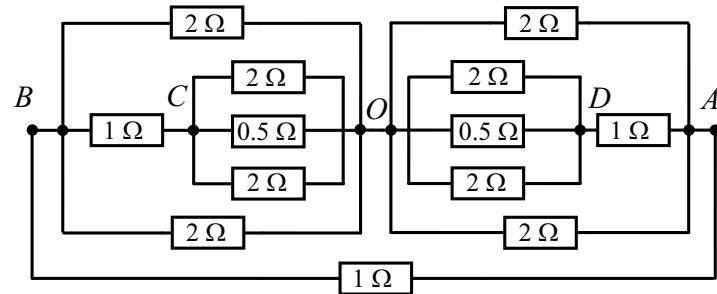
Nüüd saame tänu sümmeetriaile sõlme O poolitada:



Uue skeemi järgi arvutame A ja B vahelise takistuse:

$$\frac{1}{\frac{1}{\frac{1}{\frac{1}{\frac{1}{2} + 1} + \frac{1}{2}} + 1} + 1} \Omega = \frac{8}{15} \Omega.$$

Variant 2: Muutes C ja D vahelise takistise kaheks 0,5-oomiseks jadamisi takistiks ja öeldes, et C ja D keskel on uus punkt O , siis on E, F ja O sama pingega ning need saab ühendada üheks punktiks. Sellega taandub skeem jadamisi ja rööbiti ühendusteks:



mille kogutakistuse välja arvutamisel saame samuti $\frac{8}{15} \Omega$.

L84 Soolvesi ★★

Autor: Jaan Kalda, lahtine, 2021, G 5

Et soolvee kihi paksus kasvab 50% võrra, siis kasvab ka röhk anuma põhjas 50% võrra ning seega teeb seda ka kogu anumas oleva aine kaal. Seega kasvab anumas oleva aine mass 50% võrra. See tähendab, et peale jää sulamist ja segunemist moodustab soola kontsentratsioon 2/3 esialgsest väärtsusest. Seega on soolvee uueks tiheduseks $\rho' = (1 + 0.25 \cdot \frac{2}{3})\text{g/cm}^3 \approx 1,17\text{ g/cm}^3$. Et silindris oleva aine kaal ei muutu lahustumise käigus, siis ei muutu ka röhk anuma põhja juures ning seetõttu peab uus vedeliku taseme kõrgus olema $H' = (H + h)\rho/\rho' \approx 32,1\text{ cm}$. Niisiis kerkib vedeliku tase $\Delta h = 2,1\text{ cm}$ võrra.

L85 Vooluallikas ★★

Autor: Jaan Toots, piirkonnavor, 2021, G 5

Olgu pingi koormise klemmidel (ja ühtlasi ka sisetakisti klemmidel) V . Siis voolutugevus läbi koormise on $I = I_0 - \frac{V}{R}$ REMOVE. Seega võimsus on

$$P = IV = I_0V - \frac{V^2}{R} \quad \text{REMOVE}$$

Järelikult võimsus koormisel avaldub kui ruutfunktsioon pingest. Selle ruutfunktsiooni maksimumi leidmiseks viime võimsuse avaldise kujule

$$P = -\frac{1}{R} \left(V - \frac{I_0R}{2} \right)^2 + \frac{I_0^2 R}{4} \quad \text{REMOVE}$$

Paneme tähele, et $R > 0$ ja $(V - \frac{I_0R}{2})^2 \geq 0$.

Seega on maksimaalne võimsus $P_0 = \frac{I_0^2 R}{4}$ REMOVE ja seda pingel $V = \frac{I_0R}{2}$.

L86 Võimsus ★★

Autor: Kaur Aare Saar, lõppvoor, 2021, G 5

Vahetult pärast lüiliti sulgemist käitub kondensaator kui lühis. Järelikult on skeemi kogutakistus

$$R = \frac{1}{\frac{1}{R} + \frac{2}{3R}} = \frac{3}{5}R$$

Pärast pika aja möödumist käitub kondensaator kui avatud lüiliti. Seega takistus on

$$R = R + \frac{1}{\frac{1}{R} + \frac{1}{2R}} = \frac{5}{3}R$$

Võimsused on seega vastavalt $P = \frac{5V^2}{3R}$ ja $P = \frac{3V^2}{5R}$.

L87 Originaalsed reostaadid ★★

Autor: Richard Friedrichs, lahtine, 2022, G 5

Grafiigraafitplaatide käituvald kui reostaadid. Ristlõikepindala on $100 \cdot 10^{-6} \cdot 1 \cdot 10^{-2} = 10^{-6} \text{m}^2$. Olgu l toru puitepunkti kaugus vasakust otsast (meetrites). Vasakult poolt ühendatud plaadi takistus avaldub kujul $R(l) = \rho \frac{l}{S} = 10^6 l$, paremal poolt ühendatud plaadi takistus avaldub kujul $R(l) = \rho \frac{0.1-l}{S} = 10^6(0.1-l)$. Vasakult poolt ühendatud plaatide arv saab olla 0 kuni 3, vastavate rööbitiühenduses olevate plaatide kui süsteemide kogutakistused avaldub kujul

$$\begin{aligned} R_{0v}(l) &= \left(\frac{3}{10^6(0.1-l)} \right)^{-1} = \frac{10^6}{3}(0.1-l) \\ R_{1v}(l) &= \left(\frac{2}{10^6(0.1-l)} + \frac{1}{10^6 l} \right)^{-1} = \left(\frac{2l + (0.1-l)}{10^6(0.1-l)l} \right)^{-1} = \\ &\quad \left(\frac{l+0.1}{10^6(0.1-l)l} \right)^{-1} = 10^6 l \frac{(0.1-l)}{l+0.1} \\ R_{2v}(l) &= \left(\frac{1}{10^6(0.1-l)} + \frac{2}{10^6 l} \right)^{-1} = \left(\frac{l+2(0.1-l)}{10^6(0.1-l)l} \right)^{-1} = \\ &\quad \left(\frac{0.2-l}{10^6(0.1-l)l} \right)^{-1} = 10^6 l \frac{(0.1-l)}{0.2-l} \\ R_{3v}(l) &= \left(\frac{3}{10^6 l} \right)^{-1} = \frac{10^6}{3} l \end{aligned}$$

Seega võimalikud takistused oleksid

$$R_{0v}(0.08) = \frac{10^6}{3} \cdot (0.1 - 0.08) = 6667 \Omega$$

$$R_{1v}(0.08) = 10^6 \cdot 0.08 \cdot \frac{(0.1 - 0.08)}{0.08 + 0.1} = 8889 \Omega$$

$$R_{2v}(0.08) = 10^6 \cdot 0.08 \cdot \frac{(0.1 - 0.08)}{0.2 - 0.08} = 13\,333 \Omega$$

$$R_{3v}(0.08) = \frac{10^6}{3} \cdot 0.08 = 26\,667 \Omega$$

Voolutugevused oleksid $I_i = \frac{U}{R_i + R}$, kus $R = 10^4 \Omega$ ja $U = 12 \text{ V}$:

$$I_{0v}(0.08) = \frac{12}{10^4 + 6667} = 7.2 \cdot 10^{-4} \text{ A}$$

$$I_{1v}(0.08) = \frac{12}{10^4 + 8889} = 6.353 \cdot 10^{-4} \text{ A}$$

$$I_{2v}(0.08) = \frac{12}{10^4 + 13333} = 5.143 \cdot 10^{-4} \text{ A}$$

$$I_{3v}(0.08) = \frac{12}{10^4 + 26667} = 3.273 \cdot 10^{-4} \text{ A}$$

Vastavad võimsused $P_i = (I_i)^2 \cdot R$ oleksid siis

$$P_{0v}(0.08) = (7.2 \cdot 10^{-4})^2 \cdot 10^4 = 5.184 \cdot 10^{-3} \text{ W}$$

$$P_{1v}(0.08) = (6.353 \cdot 10^{-4})^2 \cdot 10^4 = 4.036 \cdot 10^{-3} \text{ W}$$

$$P_{2v}(0.08) = (5.143 \cdot 10^{-4})^2 \cdot 10^4 = 2.645 \cdot 10^{-3} \text{ W}$$

$$P_{3v}(0.08) = (3.273 \cdot 10^{-4})^2 \cdot 10^4 = 1.071 \cdot 10^{-3} \text{ W}$$

Seega kehtib meil olukord, kus kaks plaatti on ühendatud vasakult ja üks paremalt. Pärast toru liigutamist muutub $l = 0,07 \text{ m}$. Arvutab uue takistuse

$$R_{2v}(0.07) = 10^6 \cdot 0.07 \cdot \frac{(0.1 - 0.07)}{0.2 - 0.07} = 16\,154 \Omega$$

Arvutab uue voolutugevuse

$$I_{2v}(0.07) = \frac{12}{10^4 + 16154} = 4.588 \cdot 10^{-4} \text{ A}$$

Arvutab uue võimsuse

$$P_{2v}(0.07) = (4.588 \cdot 10^{-4})^2 \cdot 10^4 = 2.105 \cdot 10^{-3} \text{ W}$$

L88 Satelliittelevisioon ★★★

Autor: Krister Kasemaa, piirkonnavor, 2022, G 5

Leiame geostatsionaarse orbiidi raadiuse. Sateliidile mõjuvad jõud on tasakaalus:

$$\begin{aligned} \frac{GMm}{r_{\text{orbiit}}^2} &= \frac{mv^2}{r_{\text{orbiit}}} \\ \Rightarrow \frac{GM}{r_{\text{orbiit}}} &= \left(\frac{2\pi r_{\text{orbiit}}}{T} \right)^2 \\ \Rightarrow r_{\text{orbiit}}^3 &= T^2 \frac{GM}{4\pi^2}. \end{aligned}$$

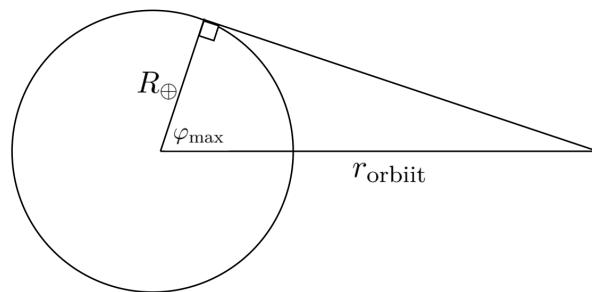
Maakera pinnal aga kehtib mingi suvalise massi m jaoks:

$$\begin{cases} F = \frac{GMm}{R_\oplus^2}, \\ F = mg. \end{cases}$$

Seega, $GM = gR_\oplus^2$. Asendades saadud seose orbiidi raadiuse valemisse, saame:

$$\begin{aligned} r_{\text{orbiit}}^3 &= T^2 \frac{gR_\oplus^2}{4\pi^2}, \\ \Rightarrow r_{\text{orbiit}} &\approx 42\,148 \text{ km}. \end{aligned}$$

Maksimaalsel satelliittelevisiooni võimaldaval laiuskraadil on sateliiti ja maakera ühendav sirge maakera puutujaks sellel maksimaalsel laiuskraadil. Seega saame seose:



$$\varphi_{\max} = \arccos \left(\frac{R_\oplus}{r_{\text{orbiit}}} \right) = 81,3^\circ$$

L89 Jalgratas ★★

Autor: Valter Kiisk, lõppvoor, 2022, G 5

a) Olgu otsitav tõusunurk α . Raskusjõu komponent, mis on suunatud piki mäenõlva alla, on siis $F = mg \sin \alpha$. Piirjuhul mõjub sama jõuga ka maapind ratastele. Seega saame tingimuse $Fr = M$, milles avaldame nurga

$$\alpha = \arcsin \left(\frac{M}{mgr} \right) \approx 9,7^\circ.$$

b) Liikugu jalgratas mäest üles kiirusega v . Jalgratta masskese tõuseb seega kiirusega $v \sin \alpha$ ja potentsiaalne energia kasvab vastavalt tempoga $mgv \sin \alpha$. Kui muid energiakadusid ei ole, siis see peab olema võrdne mootori kasuliku võimsusega P . Sellest saame avaldada kiiruse

$$v = \frac{P}{mg \sin \alpha} \approx 5,3 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Märkus: oluline tähelepanek on asjaolu, et maksimaalse tõusunurga puhul on piiravaks teguriks mootori pöördemoment ning tõusunurk ei sõltu mootori võimsusest. See tuleneb sellest, et voolavate liikumata hakkamist tühiselt väikesel kiiruse sel. Maksimaalse kiiruse puhul on aga piiravaks teguriks võimsus, kuna etteantud kalendurk on väiksem maksimaalsest võimalikust kalendurgast.

L90 Elektriauto ★★

Autor: Valter Kiisk, lahtine, 2023, G 5

a) Autot kiirendav jõud avaldub võimsuse P ja kiiruse v kaudu: $F = P/v$. Graafikult on näha, et väikestel kiirustel P kasvab võrdeliselt v -ga, nii et

$$F = \frac{310 \text{ kW}}{65 \frac{\text{km}}{\text{h}}} \approx \frac{310 000 \text{ W}}{18 \frac{\text{m}}{\text{s}}} \approx 17 200 \text{ N}$$

Suurematel kiirustel P jäääb konstandiks või väheneb, seega maksimaalne veojõud ongi $17 200 \text{ N}$ ja vastav kiirendus $a = F/m = 7,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

b) Kuni kiiruseni $v_1 = 65 \frac{\text{km}}{\text{h}} = 18 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ kulgeb auto ühtlase kiirendusega $a = 7,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$. Selle kiiruse saavutamiseks kulub aega

$$t_1 = \frac{v_1}{a} = \frac{18 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{7,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} \approx 2,3 \text{ s}.$$

Suurematel kiirustel (kuni $v_2 = 100 \frac{\text{km}}{\text{h}}$) mootori võimsus on konstant ($P = 310 \text{ kW}$), seega kiirendus ajas muutub. Kiirenduse asemel on nüüd mugavam opereerida kinetilise energiaga. Kogu kasulik võimsus läheb auto kinetilise energia suurendamiseks, seega

$$Pt_2 = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2},$$

millega

$$t_2 = \frac{m}{2P} (v_2^2 - v_1^2) \approx \frac{2200 \text{ kg}}{2 \cdot 310 000 \text{ W}} \left[(28 \frac{\text{m}}{\text{s}})^2 - (18 \frac{\text{m}}{\text{s}})^2 \right] \approx 1,6 \text{ s}.$$

Seega aega kulub kokku $t_1 + t_2 = 3,9$ s.

L91 Vedru keerutamine ★★★ Autor: Sandra Schumann, piirkonnavor, 2023, G 5

Olgu vedrude jäikused k_1 ja k_2 , raskuste massid vastavalt $2m$ ja m , posti nurkkiirus ω ning vedrude algne pikkus l . Siis pikeneb esimene vedru pikkuse $2l - l = l$ võrra ja teine $4l - l = 3l$ võrra REMOVE. Esimese vedru pikenemisest tulenev jõud on $k_1 \cdot l$ ja teise vedru pikenemist tulenev jõud on $k_2 \cdot 3l$ REMOVE. Ringliikumisest saame ka, et esimese jõu suurus peab olema $2m\omega^2 \cdot 2l$ ja teise jõu suurus $m\omega^2 \cdot 4l$ REMOVE. Saame kirja panna, et:

$$\begin{aligned} k_1 \cdot l &= 2m\omega^2 \cdot 2l \\ k_2 \cdot 3l &= m\omega^2 \cdot 4l \\ \frac{k_1}{k_2} &= \frac{2m\omega^2 \cdot 2l}{m\omega^2 \cdot 4l} \cdot \frac{3l}{l} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 3}{4 \cdot 1} = 3 \end{aligned}$$

Vedrude jäikuste suhe on 3-kordne REMOVE.

L92 Sundventilatsioon ★★★ Autor: Kaur Aare Saar, lõppvoor, 2023, G 5

Loeme juuresolevalt graafikult, et temperatuuril $T_1 = 20^\circ\text{C}$ on küllastunud aururõhk $p_{k1} = 2340$ Pa ja temperatuuril $T_2 = -5^\circ\text{C}$ on küllastunud aururõhk $p_{k2} = 420$ Pa. Järelikult on toas veeauru osarõhk $p_1 = p_{k1}r_1 = 1170$ Pa ja õues on veeauru osarõhk $p_2 = p_{k2}r_2 = 336$ Pa.

Olgu õhu ruumala, mis toast kümne tunni jooksul väljub V . Sama palju peab tulema ka sisse. Toast väljuvas õhus oleva veeauru massi m_1 saame arvutada ideaalse gaasi valemist:

$$p_1 V = \frac{m_1}{M} RT_1.$$

Ja tuppa sisenevas õhus oleva veeauru koguse m_2 saame arvutada valemist:

$$p_2 V = \frac{m_2}{M} RT_1.$$

Kuna toas on veeauru hulk konstantne, siis järelikult peab õhuniisutis aurustuma sama palju vett kui palju läheb toast välja. Seega saame seose $m = m_1 - m_2$. Järelikult saame avaldada kümne tunniga toast väljuva õhu ruumala:

$$V = \frac{mRT_1}{M(p_1 - p_2)} = 160 \text{ m}^3.$$

Õhu vahetumise kiiruseks seega saame $16 \frac{\text{m}^3}{\text{h}}$.

L93 Värske õhk ★★★

Autor: Jaan Kalda, lahtine, 2024, G 5

Toas oljad toodavad süsihappegaasi $3v = 51 \frac{\text{L}}{\text{h}}$ ja see on kõik vaja läbi õhuakna välja lasta. Vahetugu tunnis õhu ruumala V ; sellisel juhul tuleb sisse süsihappegaasi ruumalaga $V \cdot \frac{0.42}{1000}$ (peale toas soojenemist ja paisumist) ja välja läheb ruumalaga $V \cdot \frac{1}{1000}$. Seega $3v = V \cdot \frac{1-0.42}{1000}$, millest $V = 3v \cdot \frac{1000}{0.58} = 88 \text{ m}^3$. Sellele ruumalale vastab moolide arv $n = \frac{PV}{RT_1}$, mille soojendamiseks kulub energiat $Q = nC_P(T_1 - T_0) = PV \frac{C_P}{R}(1 - \frac{T_0}{T_1})$, kus õhu molaarne erisoojus konstantsel rõhul $C_P = \frac{7}{2}R$ ja $T_i = t_i + 273 \text{ K}$. Siit saame $Q = 3150 \text{ kJ}$, mis annab võimsuseks $P = Q/3600 \text{ s} = 876 \text{ W}$.

L94 Amoksitsilliin ★★★

Autor: Marten Rannut, piirkonnavoor, 2024, G 5

Arvutame Juku efektiivse doosi: $m_d = 70 \text{ kg} \cdot 140 \frac{\mu\text{g}}{\text{kg}} = 9800 \mu\text{g} = 9,8 \text{ mg}$ REMOVE. Olgu t_d aeg kahe tablette võtmise vahel. Me teame, et tablet tuleb võtta ajal, kui ravimi kontsentratsioon kehas langeb $m = 500 \text{ mg}$ pealt $m_d = 9,8 \text{ mg}$ peale. (Järgnevate tablettide puhul on algne kontsentratsioon natukene kõrgem, 509,8 mg, sest lisandub eelmine minimaalne efektiivne doos, kuid erinevus on piisavalt väike, et see tühiseks lugeda.)

Kuna t on poolestusaeg, siis järelikult $m_d = m(\frac{1}{2})^{t_d/t}$ REMOVE, kust $\frac{t_d}{t} = \log_{1/2}(m_d/m)$, seega $t_d = \frac{\log(m_d/m)}{\log(1/2)}t$ REMOVE. Arvuliselt leiame $t_d = \frac{\log(9.8/500)}{\log(1/2)} \cdot 1,4 \text{ h} \approx 7,94 \text{ h} \approx 8 \text{ h}$ REMOVE.

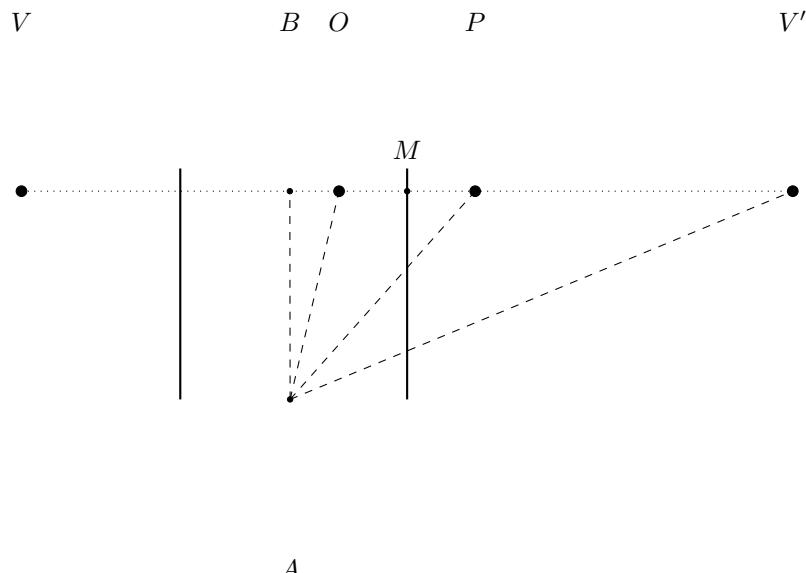
(Kui logaritmi ei ole osatud võtta, aga on proovimise teel leitud, et vastus on $5t = 7 \text{ h}$ ja $6t = 8,4 \text{ h}$ vahel, siis REMOVE, st ülesande eest kokku max REMOVE.)

Märkus: Ülesanne on eluga päris kattuv, 500 mg amoksitsilliini 3x päevas on päris tavaline retsept.

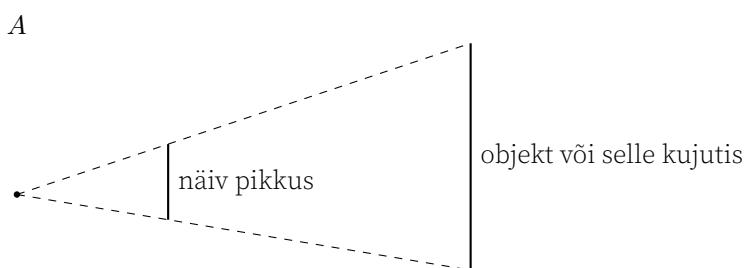
L95 Joonlaud koridoris ★★

Autor: Sandra Schumann, lõppvoor, 2024, G 5

Teeme joonise peegeldust ja kauguste paremaks mõistmiseks. Olgu inimese asukoht A ja objekti asukoht O . Objekti esimese peegeldus kujutis parempoolses peeglis on P . Objekti teise peegeldus parempoolses peeglis tekib objekti kujutis vasakpoolses peeglis. Olgu kujutis vasakpoolses peeglis V ja selle kujutis parempoolses peeglis V' . Tähistame veel kaks punkti kujutisi ühendaval sirgel, punkt B , mis on inimese asukoha projektsiooni, ja punkt M , mis on lõikepunkt parempoolse peegliga.



Vaadates kasutades joonlaua objekti või selle peegeldust, tekivad meile sarnased kolmnurgad (vt joonist). Objekti näiv pikkus joonlaua kaugusel korruttatud objekti kaugusega vaatlejast on võrdne objekti tegeliku pikkuse ja joonlaua kauguse korutisega. Sama suurusega on võrsed ka kummagi peegelduse kauguse korritis vastava peegelduse näiva pikkusega joonlaua kaugusel, kuna peegelduste tegelikud pikkused on sama suured kui objekti tegelik pikkus.



Teades näivate pikkuste suhet on meil nüüd võimalik leida kauguste suhted. Esimese peegelduse kaugus vaatlejast

$$AP = \frac{10 \text{ cm}}{7,5 \text{ cm}} \cdot AO = \frac{4}{3}AO$$

ja teise peegelduse kaugus vaatlejast

$$AV' = \frac{10 \text{ cm}}{3,75 \text{ cm}} \cdot AO = \frac{8}{3}AO.$$

Peegeldumise omadustest teame veel ka järgmisi pikkuseid: $OP = 60 \text{ cm}$ ja $OV' = 200 \text{ cm}$. Oleme nüüd teisendanud füüsikalise olukorra trigonomeetriaülesandeks, kus meie otsitav suurus on BM .

Üks võimalus lahendamiseks on kasutada Pythagorase teoreemi kolmnurkade $\triangle ABO$, $\triangle ABP$ ja $\triangle ABV'$ joaks. Sellest saame kolm võrrandit:

$$\begin{aligned} AO^2 &= AB^2 + BO^2, \\ AP^2 &= AB^2 + (BO + OP)^2, \\ AV'^2 &= AB^2 + (BO + OV')^2. \end{aligned}$$

Kasutades kauguste suhteid saame, et

$$\begin{aligned} \frac{16}{9}(AB^2 + BO^2) &= AB^2 + BO^2 + 2 \cdot BO \cdot OP + OP^2, \\ \frac{64}{9}(AB^2 + BO^2) &= AB^2 + BO^2 + 2 \cdot BO \cdot OV' + OV'^2. \end{aligned}$$

Elimineerime $(AB^2 + BO^2)$ saame:

$$7 \cdot (2 \cdot BO \cdot OV' + OV'^2) = 55 \cdot (2 \cdot BO \cdot OP + OP^2),$$

millest

$$BO = \frac{55 \cdot OP^2 - 7 \cdot OV'^2}{14 \cdot OV' - 110 \cdot OP} = \frac{410}{19} \text{ cm} \approx 21,6 \text{ cm}.$$

Seega inimese kaugus parempoolsest peeglist

$$BM = BO + OM = 30 \text{ cm} + \frac{410}{19} \text{ cm} = \frac{980}{19} \text{ cm} \approx 51,58 \text{ cm}.$$

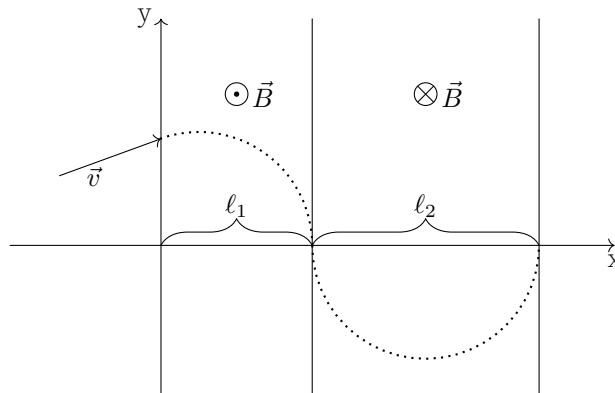
L96 Magnetväljad ★★

Autor: Kaarel Hänni, lahtine, 2018, G 6

Magnetväljas tugevusega B liigub prooton kiirusega v ringjoonelisel trajektooril raadiusega R . Tsentripetaaljõu ja magnetjõu võrdusest saab avaldada R :

$$\frac{mv^2}{R} = qvB \implies R = \frac{mv}{qB}.$$

Prootoni trajektoor vahemikus $\ell_1 \leq x < \ell_1 + \ell_2$ on ringjoon (täpsemalt ringjoone kaar), mis lõikub sirgega $x = \ell_1$. Et prooton saaks jõuda tasandi parempoolsesse osasse $x \geq \ell_1 + \ell_2$, peab selle trajektoor lõikuma ka sirgega $x = \ell_1 + \ell_2$. Seega peab selle trajektoorile vastav ringjoon lõikuma kahe paralleelse sirgega, mille vaheaugus on ℓ_2 . Siit $2R \geq \ell_2$ ehk $2\frac{mv}{qB} \geq \ell_2$, millest $v \geq \frac{qB\ell_2}{2m}$. Kui prooton siseneb teise vahemikku liikudes vertikaalsihis alla kiirusega $v = \frac{qB\ell_2}{2m}$, siis selle trajektoor on poolkaar, millel liikudes see jõuab täpselt vahemikust läbi. Kuna $\ell_1 < \ell_2$, siis leidub selline prootoni sisenemisnurk esimesesse vahemikku, mille puhul prooton jõuab teise vahemikku. Kui keerata sellest sisenemisnurgast alustades prootoni kiirusvektorit päripäeva, siis vertikaalse vektorini jõudes selle trajektoor enam sirget $x = \ell_1$ ei lõika. Seega mingil hetkel puutub selle trajektoorile vastav ringjoon sirget $x = \ell_1$. Selle sisenemisnurga puhul läbib prooton esimese vahemiku ja siseneb teise vahemikku vertikaalselt alla mineva kiirusega, seega see läbib mölemad vahemikud. Seega on kiiruse $v = \frac{qB\ell_2}{2m}$ puhul prootonil võimalik tasandi vasakpoolset osast tasandi parempoolsesse osadesse saada. Näitasime juba, et väiksemad kiirused ei tööta, seega minimaalne läbimiskiirus on $v = \frac{qB\ell_2}{2m}$.



L97 Led ★★

Autor: Ardi Loot, lahtine, 2019, G 6

Valgusdioodid põlevad võimalikult heledalt, ja ei põle läbi, nimipingel ja voolul. Pinge jaotumise kohta saab kirja panna võrrandi $U = I_D Z + N U_D$ ja seda lahendades leida vajaliku takisti ja kondensaatori näivtakistuse

$$Z = \frac{U - N U_D}{I_D} = 2,9 \text{ k}\Omega.$$

Kasutades takisti ja kondensaatori näivtakistuse valemit saame avaldada vajaliku mahtuvuse

$$C = \frac{1}{2\pi f \sqrt{Z^2 - R^2}} \approx 1,1 \mu\text{F}.$$

L98 Kondensaator ★★

Autor: , piirkonnavor, 2019, G 6

Pinge kondensaatoril on maksimaalne, kui see on täis laetud REMOVE. Sellisel juhul kondensaatorit ning ka takistit R_3 vool ei läbi REMOVE ning omakorda pingelang takistil R_3 on null REMOVE. See tähendab, et pinge kondensaatori klemmidel on võrdne pingega takistil R_2 . REMOVE Viimase saamegi leida Ohmi seadusest:

$$U_2 = I_2 R_2 \quad I_2 = \frac{U}{R_1 + R_2} \Rightarrow U_2 = U_C = \frac{U}{R_1 + R_2} R_2 \quad REMOVE$$

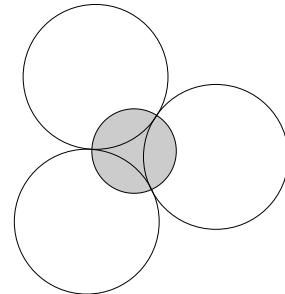
Asendame sisse teada olevad väärtsused:

$$U_C = \frac{12 \text{ V}}{1 \text{ k}\Omega + 2 \text{ k}\Omega} \cdot 2 \text{ k}\Omega = 8 \text{ V} \quad REMOVE$$

L99 Lõks ★★

Autor: , lõppvoor, 2019, G 6

Kuulikese trajektoor silindris koosneb kolmest kaarejupist nii nagu näidatud joonisel. Nagu jooniselt näha, igale kaarejupile vastav kesknurk on 60 kraadi, seega trajektoori de kesknurkade summa on pool täisringist, st kuulike veedab silindris pool tsüklotroniperioodist $t = T/2 = \pi \frac{m}{qB}$.



L100 Kondensaatorid ★★

Autor: Taavet Kalda, lahtine, 2020, G 6

Peale lülitili avamist pole punkt A enam ülejää nud skeemiga juhtmete kaudu ühen-datud. Kuna laengud ei saa läbi õhu hüpata (pinged on läbilöögitudgevusest palju väiksemad), kehtib skeemi A poolses osas laengu jäävus.

Alguses on A ja B vaheline pingi $V_1 = \mathcal{E}$. Punkti A suhtes on C_1 ja C_2 pinged vastavalt 0V ja \mathcal{E} . Järelikult on C_1 ja C_2 sisemiste plaatide kogulaeng $q_{\text{tot}} = 0 + C_2\mathcal{E} = C_2\mathcal{E}$.

Olgu punktide A ja B vaheline pingi peale lülitili avamist V_2 . C_1 ja C_2 pinged punkti A suhtes on siis $V_2 - \mathcal{E}$ ning V_2 ja sisemiste plaatide kogulaeng on $q_{\text{tot}} = C_1(V_2 - \mathcal{E}) + C_2V_2$. Kokkuvõttes saame

$$q_{\text{tot}} = C_2\mathcal{E} = C_1(V_2 - \mathcal{E}) + C_2V_2,$$

millest $V_2 = \mathcal{E}$. Näeme, et pingi punktide A ja B vahel ei muutu.

L101 Kell ★★

Autor: , piirkonnavor, 2020, G 6

Leiame kummagi osuti jaoks maksimaalse võimsuse, mis nende liigutamiseks saab kuluda. See juhtub siis, kui vastav seier on 9 peal, sest tööd tuleb teha gravitatsioonijõu vastu ja konstanse kiiruse korral on vajaminev jõud suurim siis kui jõud mille vastu tööd tehakse on antiparalleelne masskeskme kiirusvektoriga.

$$P_{\text{max}} = Fv = mg \frac{2\pi \frac{L}{2}}{T} = \frac{\pi mgL}{T},$$

kus T on vastava seieri täispöörde tegemiseks kuluv aeg. Minutiosuti jaoks on vastav periood $T_1 = 60 \cdot 60 \text{ s}$ ning võimsus $P_1 = 6,41 \mu\text{W}$. Tunniosuti jaoks on vastav periood $T_2 = 12 \cdot 60 \cdot 60 \text{ s}$ ning võimsus $P_2 = 1,78 \mu\text{W}$. Seega summaarselt saaks seierite liigutamine võtta võimsust $P_1 + P_2 = 8,20 \mu\text{W}$. Vooluallikas suudab seiereid liigutada kasuliku võimsusega $P = \eta VI = 1,5 \text{ mW}$. See on aga rohkem kui osutite liigutamiseks vaja läheb, seega kell ei jäää seisma.

Vastus: Kell ei jäää seisma, kuniks kella vooluallikas annab voolu vähemalt $8,20 \mu\text{W}$.

L102 Palliviskenõlv ★★

Autor: , lõppvoor, 2020, G 6

Lahendus 1. Ilmselgelt viskab Oleg kaugeimale, kui ta viskab oma maksimaalse kiirusega v , mis ei sõltu viskesuunast. Olgu viskenurk horisontaalsihi suhtes θ . Kõrguselt h visates saame liikumise vertikaalset komponendist lennuaja t jaoks järgmise võrrandi:

$$h = \frac{gt^2}{2} - t \sin \theta v.$$

Horisontaalsuunas liikumisest saame viske pikkusest ℓ avaldada aja:

$$t = \frac{\ell}{v \cos \theta}.$$

Asendades selle sisse esimesse võrrandisse, saame

$$h(1 + \cos 2\theta) = \frac{g\ell^2}{v^2} - \ell \sin 2\theta. \quad (1)$$

Fikseerides h , me otsime $\ell = \ell(\theta)$ maksimumi. Maksimumi leidmiseks võtame ülemise võrrandi mõlemast pooltest tuletise θ järgi ja kasutame ära, et maksimumis $\frac{d\ell}{d\theta} = 0$, saades

$$\tan 2\theta = \frac{\ell}{h},$$

millega

$$\cos 2\theta = \frac{h}{\sqrt{h^2 + \ell^2}}, \sin 2\theta = \frac{\ell}{\sqrt{h^2 + \ell^2}}.$$

Asendades need sisse võrrandisse 1, saame

$$\ell = \frac{2v^2}{g} \left(h + \frac{v^2}{2g} \right).$$

$h = 0$ juhust saame

$$L = \frac{v^2}{g}.$$

Asendades selle sisse avaldisse ℓ jaoks, saame

$$\ell = L \sqrt{1 + 2 \frac{h}{L}}.$$

Seega peab nõlva kõrgusel $y = h$ olev punkt olema keskjoonest kaugusel $L \sqrt{1 + 2 \frac{h}{L}}$. Seega keskjoone suhtes on nõlva võrrand

$$x = L \sqrt{1 + 2 \frac{y}{L}}.$$

Nihutades x -koordinaadi 0-punkti väljaku otsajoone juurde, saame

$$x = L \left(\sqrt{1 + 2 \frac{y}{L}} - 1 \right).$$

Lahendus 2. Jaan Kalda Vaatleme suvalist viskamispunkti nõlval ja kasutame seda $\xi - \eta$ koordinaadistiku nullpunktina. Teavastasti on punktist $(0; 0)$ kiirusega v visates tabatava ruumipiirkonna piirjoon $\eta = \frac{v^2}{2g} - \frac{g\xi^2}{2v^2}$. See on parabool, mille tipp on kõrgusel $\frac{v^2}{2g}$ viskepunktikoal. On ilmne, et väljaku keskpunkt lebab selles joonel. Peegeldame seda parabooli horisontaaltasandi suhtes ja nihutame nii, et uue parabooli tipp oleks $\frac{v^2}{2g}$ sügavusel väljaku keskpunkti all: $y = -\frac{v^2}{2g} + \frac{gx^2}{2v^2}$, kus $x - y$ koordinaadistiku nullpunkt on väljaku keskpunkt. Sümmeetria töttu lebab viskamispunkt sellel uuel kõveral. Uue parabooli kuju ei sõltu viskamispunkti

asukohast, seega asuvad kõik viskamispunktid sellel paraboolil.

Soovi korral võime valemi esitada kasutades väljaku poolpikkust $L = v^2/g$: $y = -\frac{L}{2} + \frac{x^2}{2L}$. Samuti võime nullpunktinihutada väljaku serva, $y = x'(x' - 2L)/2L$.

L103 Kaugusvise ★★

Autor: Jaan Kalda, lahtine, 2021, G 6

Lahendus 1: Olgu otsitav viskenurk kaldpinna suhtes β , viskamise algkiirus V_0 ja eeldame, et tahame visata palli ülespoole. Leiame kõigepealt lennuaja. Selleks suuname y -telje risti kaldpinnaga. Sel juhul on y -telje suunaline algkiiruse komponent $V_y = V_0 \sin \beta$ ning kiirenduse komponent $a_y = g \cos \alpha$. Lennuaeg võrdub

$$t = \frac{2V_y}{a_y} = \frac{2V_0}{g \cos \alpha} \sin \beta.$$

Suuname nüüd x -telje paralleelselt maapinnaga. Palli lennukaugus on kaldpinna suhtes maksimaalne siis, kui ta on maksimaalne ka maapinna suhtes. Maapinna suhtes lendab pall konstantse kiirusega $V_x = V_0 \cos(\alpha + \beta)$ ning lennukaugus

$$s = V_x t = \frac{2V_0^2}{g \cos \alpha} \sin \beta \cos(\alpha + \beta).$$

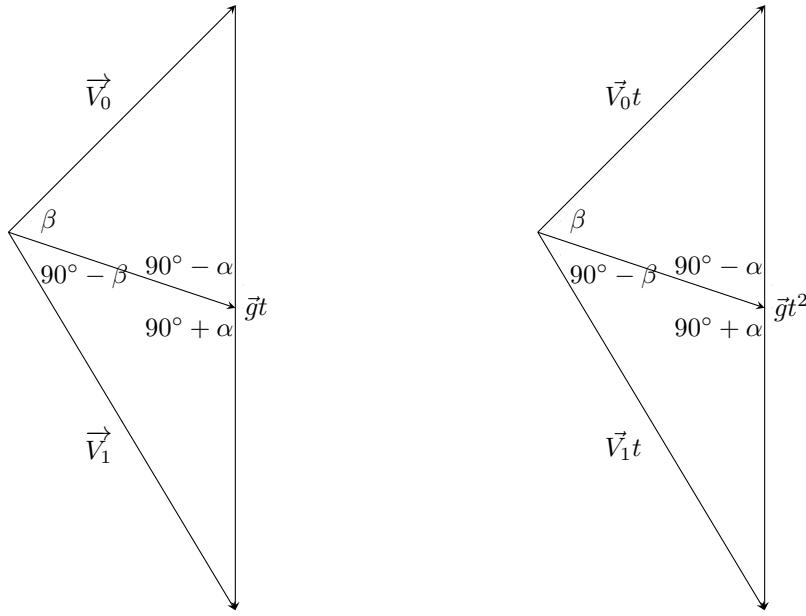
Rakendades seost $2 \sin x \cos y = \sin(x + y) + \sin(x - y)$ saame

$$s = \frac{V_0^2}{g \cos \alpha} (\sin(\alpha + 2\beta) + \sin \alpha).$$

Lennukaugus on maksimaalne siis, kui $\sin(\alpha + 2\beta)$ on maksimaalne ehk 1, mis omakorda kehtib siis, kui $\alpha + 2\beta = 90^\circ$. Seega otsitav nurk on $\beta = 45^\circ - \alpha/2$. Märkus. Kui palli visatakse allapoole, annab analoogiline lahenduskäik vastuseks $45^\circ + \alpha/2$.

Lahendus 2: Kuivõrd palli lennu suund on pööratav, siis kui trajektoor on optimaalne alt üles viskamiseks punktist A punkti B , siis on see seda ka ülevalt alla viskamiseks punktist B punkti A . Optimaalne trajektoor puudutab antud punkti ja antud kiiruse jaoks optimaalse trajektooride mähispinda, mis on parabool fookusega viskamispunktis. Et parabool koondab kõik peateljega paralleelsed kiired peale peegeldamist fookusesse, siis peab otse punkti A all asuvast punktist C vertikaalselt lähtuv punkti A saabudes peegelduma palli trajektoorilt punkti B . Sirge AB on horisondi suhtes nurga α all ja nüüd teame, et nurga $\angle CAB = 90^\circ + \alpha$ nurgapolitaja on risti palli trajektooriga punktis A . Niisiis on nurgapolitaja vertikaalsihi suhtes nurga $45^\circ + \alpha/2$ all ning nurk trajektoori ja horisontaalsihi vahel on samasugune, $\beta = 45^\circ + \alpha/2$. Nurk kaldpinna ja palli trajektoori vahel on $45^\circ - \alpha/2$.

Lahendus 3:



Joonistane kiiruste vektordiagrammi. \vec{V}_0 on algkiiruse vektor, \vec{V}_1 on lõppkiiruse vektor. Nad on seotud valemiga $\vec{V}_0 + \vec{g}t = \vec{V}_1$, kus t on palli lendamise kestvus. Joonistame ka kolmnurga mediaani, see osutub väga kasulikuks.

Kui me korrutame kõik küljed ajaga t , saame parempoolse joonise. Uuel diagramil mediaan s = palli kogunihe pärast maandumist. Seda on kerge näha diagrammilt, kasutades valemit $\vec{s} = \vec{V}_0t + \frac{\vec{g}t^2}{2}$. Kuna \vec{s} on paralleelne kalpinnaga, siis nurk β , \vec{V}_0 ja \vec{s} vahel, on nurk, mille all me viskame palli kaldpinna suhtes. Samuti, et pall lendaks võimalikult kaugele, \vec{V}_0t ja \vec{V}_1 peavad olema risti (alg ja lõppkiirus), tõestus on lisatud lahenduse lõppu. Järelikult nurk \vec{V}_1t ja \vec{s} vahel on $90^\circ - \beta$. Kuna \vec{s} on paralleelne kalpinnaga, siis nurgad \vec{s} ja $\vec{g}t$ vahel on $90^\circ - \alpha$ ja $90^\circ + \alpha$ (vt joonist). Vasakult diagraamilt kasutades Pythagorase teoreemi ning asjaolu, et \vec{V}_0t ja \vec{V}_1 on risti saame, et

$$V_0^2 + V_1^2 = g^2t^2$$

Samuti vasakult diagraamilt kasutades siinusteoreemi saame, et

$$\frac{V_0}{\sin(90^\circ - \alpha)} = \frac{gt/2}{\sin \beta}$$

$$\frac{V_1}{\sin(90^\circ + \alpha)} = \frac{gt/2}{\sin(90^\circ - \beta)}$$

Võrrandeid lihtsustades saame, et

$$\begin{cases} V_0^2 + V_1^2 = g^2 t^2 \\ V_0 = g t \frac{\cos \alpha}{2 \sin \beta} \\ V_1 = g t \frac{\cos \alpha}{2 \cos \beta} \end{cases}$$

Asendades teise ja kolmada võrrandi esimesesse saame, et

$$\frac{\cos^2 \alpha}{4} \left[\frac{1}{\sin^2 \beta} + \frac{1}{\cos^2 \beta} \right] = 1$$

$$\cos^2 \alpha = (2 \sin \beta \cos \beta)^2 \implies \cos^2 \alpha = (\sin 2\beta)^2$$

Vastuseks saame: $\beta = \frac{1}{2} \arcsin(\cos \alpha)$ (see on ekvivalentne lahenduses 1 olnud vastusega).

Tõestus, et maksimaalse lendamise puhul alg- ja lõppkiirus on risti.
Vasakult diagrammilt saame, et

$$\vec{V}_1 = \vec{V}_0 + \vec{g}t$$

$$(\vec{V}_1 - \vec{V}_0)^2 = g^2 t^2 \longrightarrow t^2 = \frac{(\vec{V}_1 - \vec{V}_0)^2}{g^2} \quad (1)$$

Paremalt diagraamilt me saame kirjutada:

$$\vec{s} = \frac{(\vec{V}_0 + \vec{V}_1)t}{2}$$

$$4s^2 = (\vec{V}_0 + \vec{V}_1)^2 t^2 \quad (2)$$

Asendades (1) võrrandisse (2) saame, et

$$4s^2 g^2 = (\vec{V}_0 + \vec{V}_1)^2 (\vec{V}_1 - \vec{V}_0)^2$$

$$= (\vec{V}_0^2 + \vec{V}_1^2 + 2\vec{V}_0 \cdot \vec{V}_1)(\vec{V}_0^2 + \vec{V}_1^2 - 2\vec{V}_0 \cdot \vec{V}_1)$$

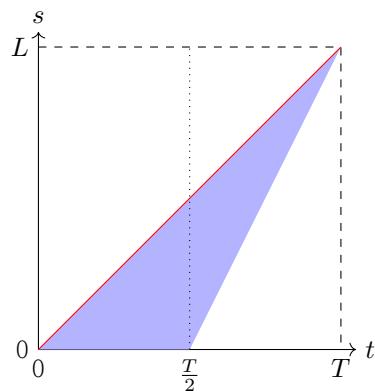
$$= (\vec{V}_0^2 + \vec{V}_1^2)^2 - 4(\vec{V}_0 \cdot \vec{V}_1)^2$$

Kaugus s on siis maksimaalne, kui $\vec{V}_0 \cdot \vec{V}_1 = 0$, mis tähendab, et alg ja lõppkiirus on risti.

L104 Jalgrattur ★★★

Autor: Jarl Patrick Paide, piirkonnnavoor, 2021, G 6

Joonisel punane joon kirjeldab jalgratturi asukohta s ajahetkel t (Rattur läbib teelõigu pikkusega L aja T jooksul). Auto alustab sõitu juhuslikul ajahetkel $0 < t_a < T$ ja juhuslikust kohast $0 < s_a < L$. Kui auto alustab sõitu jalgratturist eespool siis ei sõida auto jalgratturist mööda REMOVE. Jalgrattur sõidab poole auto kiirusega. Seetõttu ei jõua auto jalgratturist mööda kui auto alustab sõitu vähemalt kaks korra kaugemal lõpule kui jalgratturi kaugus lõpuni REMOVE. Seega auto sõidab jalgratturist mööda, kui auto alustab sõitu jalgratturist tagapool ja kui auto on jalgratturile lähemal kui jalgrattur lõppule. Vastavalt sobiv vahemik on näidatud joonisel sinise alana. Kui auto algpunkt $(t_a; s_a)$ asub sinisel alal siis sõidab auto jalgratturist mööda.



Tõenäosus, et auto sõidab jalgratturist mööda on võrdne sinise ala suhetega kogu pindalasse.

$$\frac{(L \times \frac{T}{2})/2}{L \times T} = \frac{1}{4} \quad \text{REMOVE}$$

Alternatiivselt saab vastuse leida ka ilma joonieta. Sellisel juhul anda punkte arvutuste eest järgnevalt. Tõenäosus, et auto alustab sõitu jalgratturist eespool on $\frac{1}{2}$ REMOVE. Tõenäosus, et auto alustab sõitu jalgratturist tagapool ja ei möödu jalgratturist on $\frac{1}{4}$ REMOVE. Seega tõenäosus, et auto sõidab jalgratturist mööda on $\frac{1}{4}$ REMOVE.

L105 Keha keral ★★★

Autor: Krister Kasemaa, lõppvoor, 2021, G 6

a) Vaatleme keha liikumist ümber θ defineeritud ringjoone. Laiuskraadil θ avaldub väikese keha tiirlemisraadius kujul

$$r = R \cos \theta$$

ja joonkiirus kujul

$$v = \omega r = \frac{2\pi}{T} r = \frac{2\pi R \cos \theta}{T}.$$

Nüüd saab avaldada tsentrifugaaljõu:

$$F_{\text{kesk}} = \frac{mv^2}{r} = \frac{m \left(\frac{2\pi R \cos \theta}{T} \right)^2}{R \cos \theta} = \frac{4m\pi^2 R \cos \theta}{T^2}.$$

Arvestades, et kaalule panustab ainult radiaalne tsentrifugaaljõu komponent

$$F_{\perp \text{kesk}} = \cos \theta F_{\text{kesk}} = \frac{4\pi^2 m R \cos^2 \theta}{T^2},$$

saab leida keha kaalu:

$$W = \frac{GmM}{R^2} - \frac{4\pi^2 m R \cos^2 \theta}{T^2} = m \left(\frac{GMT^2 - 4\pi^2 R^3 \cos^2 \theta}{R^2 T^2} \right).$$

b) Libisemist põhjustab tsentrifugaaljõu kera pinnaga tangentsiaalne komponent:

$$F_{\text{kesk}||} = \sin(|\theta|) F_{\text{kesk}} = \frac{4\pi^2 m R \cos \theta \sin(|\theta|)}{T^2} = \frac{2\pi^2 m R \sin(|2\theta|)}{T^2}.$$

Hõõrdeõud avaldub kujul

$$F_h = \mu W = \mu m \left(\frac{GMT^2 - 4\pi^2 R^3 \cos^2 \theta}{R^2 T^2} \right).$$

Seega, tasakaalu korral:

$$\begin{aligned} F_{\text{kesk}||} &\leq \mu W, \\ \frac{2\pi^2 m R \sin(|2\theta|)}{T^2} &\leq \mu m \left(\frac{GMT^2 - 4\pi^2 R^3 \cos^2 \theta}{R^2 T^2} \right) \end{aligned}$$

ja järelikult

$$\mu \geq \frac{2\pi^2 R^3 \sin(|2\theta|)}{GMT^2 - 4\pi^2 R^3 \cos^2 \theta}.$$

L106 Saun ★★★

Autor: Jaan Kalda, lahtine, 2022, G 6

Lahendus. Graafiku abil leiame veeauru osarõhu enne leili viskamist $p_a = 1,2 \text{ kPa}$. Idealse gaasi olekuvõrrandi abil leiame lisandunud aururõhu $p_b V = \frac{m}{\mu} RT$, milles $p_b = \frac{mRT}{\mu V} = \approx 3,4 \text{ kPa}$. Seega veeauru kogurõhk peale leili viskamist $p = p_a + p_b = 4,6 \text{ kPa}$; graafiku abil leiame sellele vastava kastepunkti väärtsuse $t_k \approx 32^\circ\text{C}$.

L107 Doomino ★★★

Autor: Päivo Simson, piirkonnavor, 2022, G 6

$$\tau = \frac{d}{u}. \quad REMOVE$$

Sellel hetkel peab kuulike olema kõrgemal kui doominoklotsi kõrgus h , et mitte klotsi ümber lükata. Vähimale kiirusele vastab pikim võimalik liikumise aeg REMOVE. On selge, et selleks peab kuulike pärast põrget uuesti tõusma kõrgusele H ja seejärel langema klotsini jõudmise hetkeks mitte madalamale kui h REMOVE. Kõrguselt H kukkumise aja t_1 saame leida seosest $H = gt_1^2/2$, mis annab

$$t_1 = \sqrt{\frac{2H}{g}}. \quad REMOVE$$

Sama aeg kulub ka pärast põrget uuesti kõrgusele H tõusmiseks. Kõrguselt H kõr-gusele h langemiseks kulub aeg

$$t_2 = \sqrt{\frac{2(H-h)}{g}}. \quad REMOVE$$

Kokku kulub klotsi ülemise servani jõudmiseks aeg $2t_1 + t_2 = \tau = d/u$ REMOVE. Siit saame pärast lihtsustamist minimaalseks kiiruseks

$$u = \frac{d\sqrt{g}}{2\sqrt{2H} + \sqrt{2(H-h)}}. \quad REMOVE$$

L108 Õhupüss ★★★

Autor: Jaan Kalda, lõppvoor, 2022, G 6

Torus toimub gaasi adiabaatiline paisumine, kusjuures sõltumata toru pikkusest omandab gaas torus pärast kuuli välja lendamist toas valitseva õhurõhu. Seega on jäavad suurused nii pV^γ kui pV/T , millest saame, et jäav suurus on ka $p^{\gamma-1}/T^\gamma$. Siit saame juba avaldada küsitud temperatuuri:

$$T_1 = T_0(p_0/p_1)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = T_0(p_0/p_1)^{2/7} \approx 55 \text{ K} \approx -218 \text{ }^\circ\text{C}$$

Märkus: tulemus on väiksem lämmastiku keemistemperatuurist, seega tegelikult langeb lämmastiku temperatuur keemistemperatuurini $-196 \text{ }^\circ\text{C}$ ning edasise paisumise juures püsib see konstantsena tänu vabanevale aurustumissoojusele. PS: adiabaadinäitaja on ka leitav valemiga $\gamma = c_P/c_V = (c_V + R)/c_V = 1.4$.

L109 Võimas mootor ★★

Autor: Marten Rannut, lahtine, 2023, G 6

Arvutame, mitu põlemistakti N toimub mootoris 1 minuti jooksul. 4-taktilise mootori silindris toimub põlemistakt iga teine pööre ehk peame lisama konstandi $1/2$

$$N = 1/2 \cdot f_n = 1/2 \cdot 8000 \frac{1}{\text{min}} \cdot 4 = 16000$$

Tulenevalt ideaalgaasi seadusest $V \cdot p = \frac{m}{\mu} RT$ (kus V on gaasi ruumala, p rõhk m mass, μ molaarmass, R universaalne gaasikonstant ja T temperatuur) on gaasi tihedus $\frac{m}{V} = \frac{p\mu}{RT}$. Seega, kui gaasi tihedus temperatuuril T_1 on ρ , siis gaasi isobaaarilisel soojendamisel temperatuurile T_2 muutub selle tihedus vastavalt valemille $\rho_2 = \rho \frac{T_1}{T_2}$.

Arvutame palju kütust m põletab 1 põlemistakt, kui silindri maht on v . $m = \rho_2 v / \gamma = \rho \frac{T_1}{T_2} v / \gamma = 1,2 \frac{\text{g}}{\text{L}} \frac{293 \text{K}}{333 \text{K}} 0,5 \text{ L} / 14, 7 \frac{\text{g}}{\text{L}} = 0,036 \text{ g}$

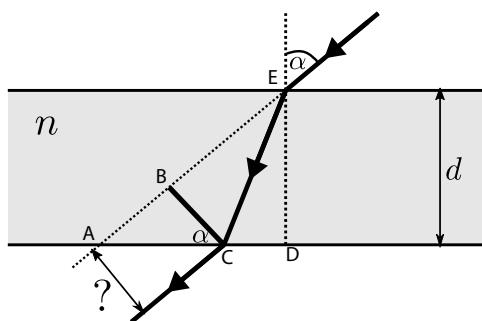
Kogu põletatud kütuse mass $M = N \cdot m = 0,036 \text{ g} * 16000 = 576 \text{ g}$

Arvutame mootori võimsuse $M \eta \frac{1}{60 \text{s}} = 576 \text{ g} \cdot 46 \frac{\text{kJ}}{\text{g}} \cdot 0,37 \cdot \frac{1}{60 \text{s}} = 163 \text{ kW}$

Pärvis K20A mootori võimsus ongi umbes 162-165 kW olenevalt variandist.

L110 Klaasplaat ★★

Autor: Erkki Tempel, piirkonnavor, 2023, G 6



Kolmnurgast $\triangle ABC$ saame avaldada kiire nihke BC

$$BC = AC \cos \alpha \quad \text{REMOVE}$$

Külje AC pikkuse saame leida lõikude AD ja CD kaudu

$$AC = AD - CD \quad \text{REMOVE}$$

Avaldame külje AD kolmnurgast $\triangle ADE$

$$AD = d \tan \alpha \quad \text{REMOVE}$$

Külje CD leidmiseks kasutame murdumisnäitaja seost

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \gamma} = n \implies \sin \gamma = \frac{\sin \alpha}{n} \quad \text{REMOVE}$$

Kolmnurgast $\triangle CDE$ saame avaldada $\sin \gamma$ ning sealt külje CD

$$\sin \gamma = \frac{CD}{CE} \implies CD = \frac{CE \sin \alpha}{n} \quad REMOVE$$

Kasutades eelnevat seost ning Phytagorase teoreemi kolmnurgast $\triangle CDE$, saame avaldada külje CD

$$CD = \frac{d \sin \alpha}{\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}} \quad REMOVE$$

Seega nihkub esialgne kiir kõrvale oma algsest sihist

$$BC = d \sin \alpha \left(1 - \frac{\cos \alpha}{\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}} \right) \quad REMOVE$$

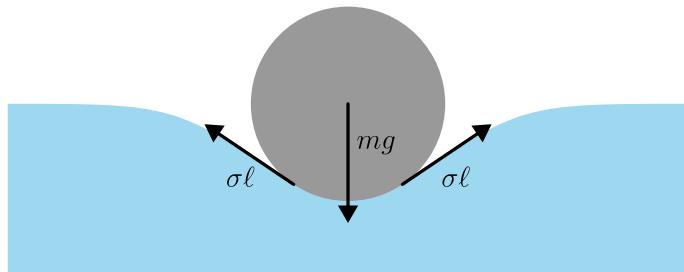
Kui lõppvastusesse on jäetud lihtsustamata trigonomeetriline pöörfunktsioon (nt \arcsin , \arccos), siis anda ülesande eest kuni REMOVE.

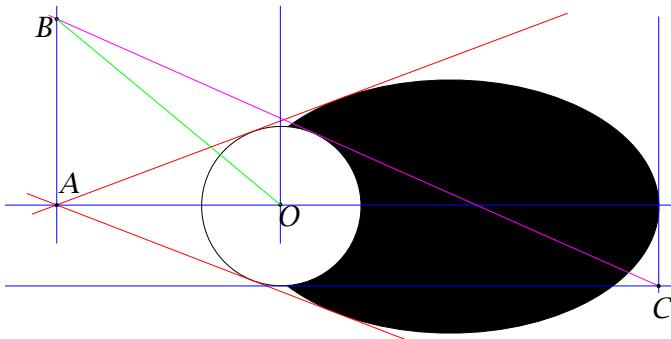
L111 Nõel vees ★★

Autor: Martne Rannut, lõppvoor, 2023, G 6

Ülesandes kirjeldatud olukord on ligikaudu näidatud joonisel. Veepind pisut kõverdub ning sealabi pindpinevusjõuga tasakaalustab nõela raskusjõu. Pindpinevusjõud mõjub veepinna sihis kontaktpunktides (see ei pruugi olla tangentsiaalne nõela pinnaga nagu on joonisel näidatud, kuid ülesande lahendust see ei mõjuta). Kummalegi poolele nõelast mõjub jõud $\sigma\ell$. Kui pindpinevusjõu vektorid on horisontaali suhtes nurga α all, siis saame jõudude tasakaalust $mg = 2\sigma\ell \sin \alpha$. Kuna veepind on sama nurga all kui jõuvektorid, siis otsitav nurk on

$$\alpha = \arcsin \frac{mg}{2\sigma\ell} \approx 34^\circ.$$





L112 Vari ★★★

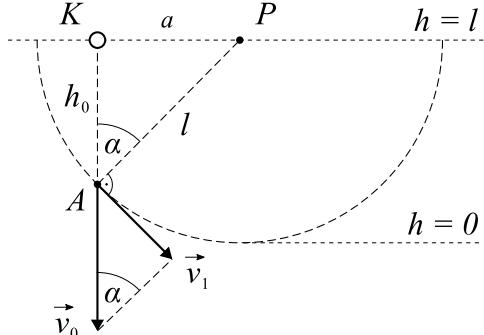
Autor: Jaan Kalda, lahtine, 2024, G 6

Lambi projektsiooni lauapinnale leiame kui ülaltvaates kera ja varju puutujate lõikepunkt \$A\$ (vt joonist). Tõmbame nüüd ringil horisontaalse puutuja ja vaatleme seda kui lauapinna vertikaallõike joont. Tõmbame varjule vertikaalpuutuja, selle lõikepunkt \$C\$ vasttõmmatud horisontaaljoonega on varju kaugeima punkti asukoht vaadeldaval vertikaallõikel. Tõmbame punktist \$C\$ puutuja ringjoonele ja punktist \$A\$ vertikaaljoone; nende lõikepunkt \$B\$ on lambi asukoht vertikaallõikel. Lambi kaugus vastab lõigule \$OB\$, joonlauaga mõõtes leiame, et see on umbes 3,7 korda suurem, kui kera raadius.

L113 Mitteelastne nöör ★★★

Autor: Päivo Simson, piirkonnavor, 2024, G 6

Kuulike langeb kõigepealt vabalt kõrguse \$h_0 = \sqrt{l^2 - a^2}\$ võrra ja saavutab punktis \$A\$ kiiruse \$v_0 = \sqrt{2gh_0}\$. Selleks hetkeks on nöör sirge ja toimub lõök, mille korral tagasipõrget ei toimu, sest nöör on mitteelastne. Lõogi käigus kaotab kuulike nöörishiilise kiiruse \$\vec{v}_0\$ komponendi ja seeaga ka osa energiast (kaotatud energia läheb nöörile, mis selle arvelt sooneb). Kuulike jätkab liikumist mööda pikkusega \$l\$ määratud ringjoone kaart. Säilib ainult kiiruse komponent \$v_1\$, mis on paralleelne ringjoone puutujaga punktis \$A\$: \$v_1 = v_0 \sin \alpha = v_0 a / l = \sqrt{2gh_0} a / l\$. Seega on kuulikese koguenergia vahetult pärast punkti \$A\$ jõudmist

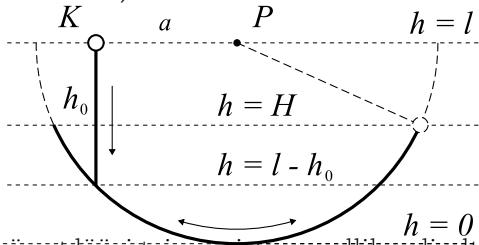


$$\begin{aligned}
 E &= \frac{mv_1^2}{2} + mg(l - h_0) = mgh_0 \frac{a^2}{l^2} + mg(l - h_0) = \\
 &= mgl \left(1 - \frac{h_0}{l} \left(1 - \frac{a^2}{l^2} \right) \right) = mgl \left(1 - \left(1 - \frac{a^2}{l^2} \right)^{\frac{3}{2}} \right).
 \end{aligned}$$

Vabalangemisele järgnevalt jäääb kuulike mööda ringjoone kaart võnkuma. Trajektoori kõrgeimas punktis on kuulikese kiirus null ja koguenergia on järelikult $E = mgH$, kus H on otsitav maksimaalne kõrgus. Võrdsustades koguenergia avaldised saame

$$H = l \left(1 - \left(1 - \frac{a^2}{l^2} \right)^{\frac{3}{2}} \right).$$

Trajektoori joonestamiseks võrdleme kõrgusi H ja $l - h_0$. Et $1 - a^2/l^2 = h_0^2/l^2$ ja $h_0/l < 1$, siis $l(1 - h_0^3/l^3) > l(1 - h_0/l)$ ehk $H > l - h_0$. Kuuli trajektoor on näidatud parempoolsel joonisel paksu pideva joonega. Võrratuse $H > l - h_0$ näitamiseks piisab ka tähelepanekust, et punktis A , pärast löögi toimumist, on pallil eendiselt kineetiline energia olemas ja seega ei saa punkt A olla edasise liikumise kõrgeim punkt.



L114 Jahtumine ★★

Autor: Uku Andreas Reigo, lõppvoor, 2024, G 6

Vedelik kaotab aja t jooksul jahtudes soojushulga Q , mis on võrdeline jahutatava pindala S ja temperatuuride vahega ΔT : $Q = \propto tS\Delta T$. Kuna eeldame, et tihedus ja erisoojus ei sõltu temperatuurist, siis vedeliku temperatuuri langemise kiirus \dot{T} on võrdeline ajaühukus kaotatud soojushulgaga ja pöördvõrdeline vedeliku ruumalaga V :

$$\dot{T} \propto \frac{Q}{Vt} \propto \frac{S\Delta T}{V}.$$

Leiame soojema kokku valatud vedeliku temperatuuri T_{segu} pärast soojusliku tasa-kaalu saabumist. Kuna kokku segatakse võrdsed kogused vedelikke, kehtib $T_{\text{segu}} - T = T_{\text{lisa}} - T_{\text{segu}}$, millest

$$T_{\text{segu}} = \frac{T + T_{\text{lisa}}}{2} = \frac{40^\circ\text{C} + 88^\circ\text{C}}{2} = 64^\circ\text{C}.$$

Kahe termose vedelikuga täidetud osad on sarnased koonused. Seega on nende täidetud ruumalad on proporsionaalsed kõrguse kuubiga ning põhjapindalad kõrguse ruuduga. Seega $S_2/S_1 = h_2^2/h_1^2$ ja $V_2/V_1 = h_2^3/h_1^3$, millest

$$\frac{S_2}{S_1} = \left(\frac{V_2}{V_1} \right)^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{4}.$$

Vedelike jahtumise suhe

$$\begin{aligned} k &= \frac{\dot{T}_2}{\dot{T}_1} \\ &= \frac{S_2}{S_1} \frac{V_1}{V_2} \frac{T_{\text{segu}} - T_{\text{ohk}}}{T - T_{\text{ohk}}} \\ &= \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \frac{T_{\text{segu}} - T_{\text{ohk}}}{T - T_{\text{ohk}}}. \end{aligned}$$

Millega

$$T_{hk} = \frac{kT - \frac{T_{\text{segu}}}{\sqrt[3]{2}}}{k - \frac{1}{\sqrt[3]{2}}} = \frac{1,62 \cdot 40^\circ\text{C} - \frac{64^\circ\text{C}}{\sqrt[3]{2}}}{1,62 - 1/\sqrt[3]{2}} = 17^\circ\text{C}.$$

L115 Kauss veega ★★★★

Autor: Krister Kasemaa, lahtine, 2018, G 7

Käitleme esmalt jõudu mida põhjustab veesamba impulsi muut kausile, jätkes kõrvale veesamba massi mis langeb kaussi peale valamise lõppemist. Veesammast mõjub kausi põhjale jõuga $F = \frac{dp}{dt}$. Olgu vee kiirus vahetult enne põhja vastu põrkumist v . Võime teha lihtsustuse, et kausi põhja vastu põrkudes jäääb vesi seisma. Seega,

$$F = \frac{dp}{dt} = \frac{dm}{dt}|v|.$$

Järgmiseks leiame vee kiiruse vahetult enne kaussi jõudmist. Valamise algushetkel on vee kiirus $v_0 \approx 0$. Langedes rakendab veesambale jõudu ainult gravitatsioon. Seega rakendame valemit $v^2 - v_0^2 = 2a\Delta s$, millega avaldub, et $v = \sqrt{2gh}$. Järelikult $F = \frac{dm}{dt}|v| = \frac{dm}{dt}\sqrt{2gh}$. Vee valamine lõpetati hetkel, kui $m_{\text{kausis}}g + F = m_{\text{skaalal}}g$, millega avaldub, et vee mass valamise hetkel kausis oli:

$$m_{\text{kausis}} = \frac{m_{\text{skaalal}}g - F}{g} = m_{\text{skaalal}} - \frac{dm}{dt} \sqrt{\frac{2h}{g}}.$$

Käitleme nüüd veesamba massi, mis lisandub kaussi peale valamise lõppemist. Veesamba mass on $m_{\text{veesammast}} = \frac{dm}{dt}\Delta t$, kus Δt on aeg mil kulub veesamba ühe elementaarelemendi jõudmiseni kaussi. Rakendame valemit $v = v_0 + at$ ja leiame, et:

$$\Delta t = \frac{v - v_0}{g} = \frac{v}{g} = \sqrt{\frac{2h}{g}}.$$

Millega järeltulub, et valamise lõppedes on kaussi jõudva veesamba mass on

$$m_{\text{veesammast}} = \frac{dm}{dt}\Delta t = \frac{dm}{dt} \sqrt{\frac{2h}{g}}.$$

Nüüd saame leida vee massi M , mis jõuab kaussi:

$$M = m_{\text{kausis}} + m_{\text{veesammas}} = m_{\text{skaalal}} - \frac{dm}{dt} \sqrt{\frac{2h}{g}} + \frac{dm}{dt} \sqrt{\frac{2h}{g}} = m_{\text{skaalal}}.$$

L116 Niit relssidel ★★★★

Autor: Jaan Kalda, lahtine, 2019, G 7

Olgu alumise rönga kaugus nurgast x ja vertikaalse rönga kaugus y , niidi pikkus L ja kinnituspunkt kõrgus h . Sellisel juhul $x^2 + y^2 = (L + y - h)^2$, võttes siit ajalise tuletise saame $2x\dot{x} + 2y\dot{y} = 2(L + y - h)\dot{y}$, kus punkt sümboli kohal tähistab ajalist tuletist, st $\dot{x} = v$. Lihtsustades seda avaldist leiame $v\dot{x} = (L - h)\dot{y}$. Esiteks saame siit avaldada otsitava kiiruse

$$\begin{aligned}\dot{y} &= vx/(L - h) = v \left(\frac{L + y - h}{x - \frac{y}{x}} \right)^{-1} = \\ &= v / \left(\frac{1}{\cos \alpha} - \tan \alpha \right)^{-1} = \frac{v \cos \alpha}{1 - \sin \alpha}.\end{aligned}$$

Teiseks, kui võtame antud avaldisest veelkord tuletise, saame $v\dot{x} = (L - h)\ddot{y}$, millest kiirendus $\ddot{y} = v^2/(L - h)$. Pangem tähele, et kiirendus püsib konstantne.

L117 Lennurada ★★★★

Autor: , piirkonnavor, 2019, G 7

Teame, et jõud on võrdeline õhu tiheduse ning kiiruse ruuduga. Seega olgu

$$F = C\rho v^2 \Rightarrow v^2 = \frac{F}{C\rho}$$

kus C on võrdetegur. REMOVE Kuna lennuk alustab hoovõttu paigalseisust ühtlase kiirendusega a , avaldub läbitud teepikkus $s = \frac{v^2}{2a}$. REMOVE Kuna lennuki mass (ning seega ka õhkutõusuks vajaminev üleslükkejõud) ja kiirendus on mõlemal juhul samad REMOVE, avalduvad teepikkused vastavalt:

$$\begin{aligned}s_1 &= \frac{v_1^2}{2a} = \frac{F}{2Ca\rho_1} \quad REMOVE \\ s_2 &= \frac{v_2^2}{2a} = \frac{F}{2Ca\rho_2} \quad REMOVE\end{aligned}$$

Võrrandid omavahel jagades saame:

$$\frac{s_1}{s_2} = \frac{\rho_2}{\rho_1} \quad REMOVE$$

Siit saame avaldada vajaliku lennuraja pikkuse $s_2 = s_1 \frac{\rho_1}{\rho_2} \approx 3 \text{ km}$ REMOVE.

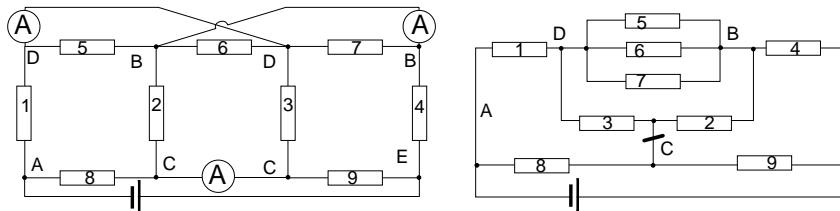
L118 3 ruutu ★★★

Autor: , lõppvoor, 2019, G 7

Lihtsustame skeemi arvestades sellega, et ideaalsete ampermeetrite sisetakistus on null: me võime lühistada need sõlmpunktid, mis on ühendatud juhtmega läbi ampermeetri. Selleks, et olla kindel vigadeta skeemi teisendamises tähistame takistid numbritega ja sõlmpunktid tähtedega, vt esimene joonis. Paneme tähele, et Kirchoffi vooluseaduse tõttu näitavad ampermeetrid vastavalt esimese ja viienda, seitsmenda ja neljanda ning kaheksanda ja neljanda takisti voolude vahet.

Seejärel alustame sõlmpunktide märkimisest ja ühendame need samade takistitega, mis algseski skeemis, tulemus on näidatud teisel joonisel. Viimase sammu na jagame sõlmpunkti C kaheks osaks lõigates mõtteliselt läbi joonise sümmeetrialetjel oleva vertikaalse juhtme; seda võib teha, sest sümmeetria tõttu puudub selles vertikaalses juhtmes vool. Nüüd on juba lihtne leida takistite voolud: takistitest 8 ja 9 koosneva ahela kogutakistus on $r_8 = 6 \Omega$, seetõttu läbib neid vool $i_8 = \mathcal{E}/r_8 = 8 \text{ A}$. Punktide B ja D vahelise viiest takistist koosneva ahelajupi takistus on $\frac{6}{7} \Omega$ ning seega ülemise ahelapoole kogutakistus on $r_1 = \frac{48}{7} \Omega$ ja takisti 1 vool $i_1 = \mathcal{E}/r_1 = 7 \text{ A}$. Seega langeb takistite 1 ja 7 peale kokku pingे $2i_1 R = 42 \text{ V}$, mis tõttu sõlmede B ja D vaheline pinge on $V_5 = \mathcal{E} - 2i_1 R = 6 \text{ V}$. Järelkult on takisti 5 vool $i_5 = V_5/R = 2 \text{ A}$ ja takisti 2 vool $i_2 = V_5/(2R) = 1 \text{ A}$.

Niisiis on vasakpoolse ülemise ampermeetri vool $i_8 = i_1 - i_5 = 5 \text{ A}$ ning sümmeetria tõttu näitab sama voolutugevust ka parempoolne ülemine ampermeeter. Alumise ampermeetri näit on $i_8 - i_2 = 7 \text{ A}$.



L119 Poolsilinder basseinis ★★★

Autor: Krister Kasemaa, lahtine, 2020, G 7

Vaatleme poolsilindrit ning selle kohal olevat veesammast ühtse kehana. Me saame seda teha, sest süsteem on tasakaalus ning vesi on paigal. Paneme esmalt kirja jõudude tasakaalu vertikaalsihis. Vertikaalsihis mõjud raskusjõud ning poolsilindi ja põrandaga vaheline tooreaktsioon N .

Poolsilindri kohal oleva veesamba ruumala on

$$V_{\text{vesi}} = lr^2 - \pi \frac{r^2 l}{4} = lr^2 \left(1 - \frac{\pi}{4} \right).$$

Seega, vertikaalne jõudude tasakaal avaldub kujul

$$N = g(\rho V_{\text{vesi}} + m) = g \left(\rho lr^2 \left(1 - \frac{\pi}{4} \right) + m \right).$$

Teades reaktsioonijõudu N on lihtne leida hõõrdejõud poolsilindri ja põhja vahel:

$$F_\mu = \mu N = \mu g \left(\rho lr^2 \left(1 - \frac{\pi}{4} \right) + m \right).$$

Horisontaalsuunas tasakaalustab hõõrdejõudu vee horisontaalsuunaline rõhumisjõud F_{vedelik} . Poolsilindri ja selle kohal olevale veesamba süsteemile mõjub keskmiselt rõhk $p = \rho gr/2$, kusjuures kontaktpindala on $S = lr$. Järelkult on horisontaalsuunaline jõud

$$F_{\text{vedelik}} = \frac{\rho gr}{2} rl = \frac{\rho glr^2}{2} F_\mu.$$

Kombineerides mõlemad avaldised F_μ jaoks, saame

$$\mu_0 = \frac{\rho lr^2}{2(\rho lr^2(1 - \frac{\pi}{4}) + m)}.$$

L120 Jälle sauna! ★★★★

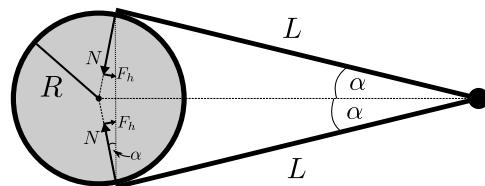
Autor: , piirkonnavor, 2020, G 7

Vesi keeb 100 kraadi juures ja tekkinud veeaur kaotab hea soojsliku kontakti keisekividega ning seetõttu ei jõua oluliselt üle 100 kraadi kuumeneda. REMOVE Niisiis võime eeldada, et $\nu_a = p_0 V / RT_a \approx 341$ mooli õhku REMOVE temperatuuril T_a seguneb $\nu_w = m/\mu_w \approx 11$ mooli veeauruga REMOVE temperatuuril $T_a + \Delta T$, kus $\Delta T = 20^\circ\text{C}$ REMOVE. Seega saame soojsbalansi kirja panna kujul $c_{pw}\nu_w(\Delta T - \delta T) = c_{pa}\nu_a\delta T$ REMOVE, kus δT tähistab õhutemperatuuri muutu ja $c_{pa} = c_a + R$ REMOVE ning $c_{pw} = c_w + R$ REMOVE tähistavad õhu ja veeauru molaarseid erisoojusi konstantsel rõhul. (Kasutada tuleb erisoojust konstantsel rõhul, sest kogu protsess toimub konstantse atmosfäärirõhu juures — üleliigne õhk pääseb välja; kes kasutab c_a -d ja c_w -d jäab neist kahest punktist ilma.) Siit saame $\delta T = c_{pw}\nu_w\Delta/(c_{pw}\nu_w + c_{pa}\nu_a) \approx 0,3^\circ\text{C}$ REMOVE. Nagu näeme on temperatuuri muutus üsna väike, subjektiivselt hakkab palavam õhuniiskuse töusu töttu. Pikemas ajaskaalas leil jahutab kerisekive, mis ei kuumuta enam õhku endise võimsusega ja temperatuur võib hoopis langema hakata.

L121 Pulgad ★★★★

Autor: , lõppvor, 2020, G 7

a) Olgu silindrile mõjuv normaaljõud kummaski punktis N (puutujaga risti) ning hõõrdejõud F_h (puutujaga paralleelne). Olgu nurk pulpade vahel 2α .



Jõudude tasakaalust saame, et puutepunktides mõjuvad resultantjõud $\vec{N} + \vec{F}_h$ peavad olema paralleelsed ja vastassuunalised, seega sümmeetria töttu peab $\vec{N} + \vec{F}_h$

olema sümmeetriateljega risti.

Kuna puutuja on raadiusega risti, on lihtne näidata, et nurk \vec{N} ja puutepunkte ühendava sirge vahel on α , seega $\tan \alpha = \frac{F_h}{N}$. Piirjuhul, kus μ on minimaalne, $F_h = \mu N$ ja seega

$$\tan \alpha = \frac{\mu N}{N} = \mu$$

Teisalt $\tan \alpha = \frac{R}{L}$, seega

$$\mu_{\min} = \frac{R}{L}$$

b) Nagu eelmises osas näidatud, siis hõõrdejõu lauaga paralleelne komponent $F_{h,r} = N \tan \alpha = \frac{R}{L} \cdot N$. Silindrit üles tõstes peab raskusjõu tasakaalustamiseks lisaks mõjuma kummaksi punktis hõõrdejõu lauaga risti olev komponent $F_{h,t} = \frac{mg}{2}$, seega kui summaarne hõõrdejõud on F_h , siis

$$F_h^2 = F_{h,r}^2 + F_{h,t}^2 = \frac{R^2}{L^2} N^2 + \frac{m^2 g^2}{4}$$

Piirjuhul $F_h = \mu N$ ja $\tau = NL$, seega

$$\begin{aligned} \mu^2 N^2 &= \frac{R^2}{L^2} N^2 + \frac{m^2 g^2}{4} \\ \left(\mu^2 - \frac{R^2}{L^2} \right) N^2 &= \frac{m^2 g^2}{4} \\ N &= \frac{mg}{2\sqrt{\mu^2 - \frac{R^2}{L^2}}} \\ \tau_{\min} = NL &= \frac{mgL}{2\sqrt{\mu^2 - \frac{R^2}{L^2}}} = \frac{mgL^2}{2\sqrt{L^2\mu^2 - R^2}} \end{aligned}$$

L122 Hantel ★★★

Autor: Jaan Kalda, lahtine, 2021, G 7

Hantli massikeskme kiirendus on $a = \frac{Eq}{2m}$. Kasutame süsteemi, mis liigub kiirendusega $\frac{Eq}{2m}$ ja kus hantli massikese on paigal. Selles süsteemis mõjub kummalegi kerale elektriväljale vastassuunaline inertsijõud $F = am = \frac{Eq}{2}$, st laenguga kerale mõjub elektrivälja suunaline resultantjõud $\frac{Eq}{2}$ ning laenguta kerale mõjub samasuur kuid vastassuunaline jõud. Nende jõudude potentsiaalse energia muutus (võrreldes algasendiga) on maksimaalne hetkel, kui hantel on pöördunud täisnurga võrra:

$$\Delta E_p = 2 \cdot \frac{Eq}{2} \cdot \frac{l}{2} = \frac{Eq l}{2};$$

selles valemis arvestasime, et kummagi kera jõusihiline nihe on $\frac{l}{2}$. Energia jäävusest tulenevalt on siis maksimaalne ka kineetiline energia ja nurkkiirus. Seega

saame energia jäÄvuse seadusest

$$\frac{Eql}{2} = 2 \cdot \frac{mv^2}{2},$$

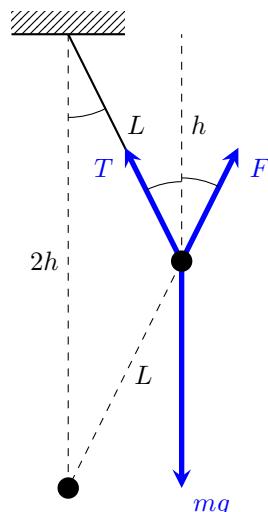
kus v on kummagi kuulikese kiirus meie taustsüsteemis antud ajahetkel. Järelikult $v = \sqrt{\frac{Eql}{2m}}$ ning otsitav nurkkiirus

$$\omega = \frac{\sqrt{\frac{Eql}{2m}}}{\frac{l}{2}} = \sqrt{\frac{2Eq}{ml}}.$$

L123 Rippuv laeng ★★★★

Autor: Kaur Aare Saar, piirkonnavor, 2021, G 7

Selleks, et rippuv laeng püsiks paigal, peab talle möjuvate jõuvektorite summa olema 0. Rippuvale laengule möjub kolm jõudu, raskusjõud mg , nööri pinge T ning laengute vaheline elektrostaatiline jõud F . REMOVE



Paneme tähele, et kinnituskoht, rippuv laeng ning fikseeritud laeng moodustavad võrdhaarse kolmnurga, mistõttu on laengute vaheline kaugus L REMOVE. Seega laengute vaheline elektrostaatiline jõud on:

$$F = \frac{kq_1q_2}{L^2} \quad \text{REMOVE}$$

Raskusjõul puudub horisontaalkomponent. Järelikult on elektrostaatilise jõu ja nööri pinge horisontaalkomponendid võrdsed ja vastassuunalised REMOVE.

Seega kuna elektrostaatilise jõu ja nööri pinge horisontaalkomponendid on võrdsed, siis sümmeetria tõttu on need jõud absoluutväärtuselt võrsed $T = F$ REMOVE.

Nüüd vertikaalsuunalisest jõudude tasakaalust saame

$$mg = T \cos \theta + F \cos(-\theta) = 2F \cos \theta = 2 \cos \theta \frac{kq_1 q_2}{L^2} \quad REMOVE,$$

kus θ on nurk vertikaalsihi ja nööri vahel. Täisnurksest kolmnurgast saame $\cos \theta = \frac{h}{L}$ REMOVE.

Nüüd asendades sisse $\cos \theta$ vertikaalsuunalise jõudude tasakaalu võrrandisse ja avaldades seal m, saame

$$m = \frac{2kq_1 q_2 h}{gL^3} \quad REMOVE$$

L124 Kolmnurk ★★★★

Autor: Jaan Kalda, lõppvoor, 2021, G 7

Et osakesed liiguksid sirgjooneliselt, peaks see kolmnurk, mille tippudes need asuvad, jäama iseenesega sarnaseks. Et kolmnurga mediaanide lõikepunkt (massikeses) jääb väliste jõudude puudumise tõttu paigale, siis peavad kõigile osakestele möjuvad resultantjõud möjuma piki mediaane ning nende moodulid peavad olema võrdelised vastavate mediaanide pikkustega (siis on mediaanide kasvamise kiiendused ja kiirused võrdelised mediaanide pikkustega ja kolmnurk jääb iseenesega sarnaseks).

Tähistame punktist C lähtuvad küljed vektoritega \vec{a} ja \vec{b} ; tipust C tõmmatud mediaan on $(\vec{a} + \vec{b})/2$; sarnased avaldised saame ka ülejäänud mediaanide jaoks. Järelikult peavad osakestele möjuvad resultantjõud avalduma kujul $p(\vec{a} + \vec{b}) = kq_C(\frac{\vec{a}q_B}{a^3} + \frac{\vec{b}q_A}{b^3})$, kus p on konstant (sama kõigi osakeste jaoks kirjutatud avaldiste puhul) ning k on Coulomb'i konstant. See võrdus kehtib ainult siis, kui $\frac{q_B}{a^3} = \frac{q_A}{b^3}$, st $q_B b^3 = q_A a^3$. Analoogselt leiate, et $q_C c^3 = q_A a^3$, st $q_A a^3 = q_B b^3 = q_C c^3 \equiv Q$. Kasutades siindefineeritud suurust Q saame avaldada konstandi $p = \frac{kQ}{a^3 b^3 c^3}$; sümmeetria tõttu on ilmne, et teiste osakeste jaoks saame täpselt samasuguse avaldise, nii nagu vajalik osakeste sirgjooneliseks liikumiseks. Seega: jah, iga kolmnurga puhul on võimalik osakeste sirgjooneline liikumine, vajalik on vaid rahuldada võrdus $q_A a^3 = q_B b^3 = q_C c^3$.

L125 Elektron ja kondensaator ★★★★

Autor: Jaan Kalda, lahtine, 2022, G 7

Lahendus. Optimaalne trajektoor on selline, mis riivab ühte plaati kondensaatori keskpunkti juures ja väljub vastasplaati riivates. Et $d \ll b$, siis on sisenemis- ja väljumisnurgad väiksed ning me võime lugeda, et elektroni plaadisihiline kiiruskomponent (mis püsib konstantsena, sest elektrivälja jõud on sellega risti) on võrdne v -ga. Elektroni liikumine on samasugune, nagu pallil Maa raskusväljas. Elektron viibib plaatide vahel aja $t = b/v$; et elektroni kiirendus $a = Ee/m$, siis saame välja

kirjutada tingimuse, et elektron jõub ühe plaadi keskpunkti juurest startides liikuda plaatide ristsihis vahemaa

$$d = \frac{a}{2} \left(\frac{t}{2} \right)^2 = \frac{Eeb^2}{8v^2m}.$$

Arvestades, et $E = U/d$ saame siis avaldada

$$v = \frac{b}{2d} \sqrt{\frac{Ue}{2m}}.$$

L126 Plastiliin ★★★★

Autor: Taavet Kalda, piirkonnavor, 2022, G 7

Peale esimest kokkupõrget nihkub plaadi tasakaaluasend mg/k võrra allapoole ning plaat hakkab uue tasakaaluasendi ümber teatud amplituudiga võnkuma (amplituudi värtust pole punktide saamiseks vaja leida) REMOVE. Kuna plaadi mass on plastiliini massiga võrreldes tühine, omandab plaat kokkupõrke hetkel impulsi jäävuse tõttu sama kiiruse nagu plastiliini, seega plaadi kiirus on energia jäävusest $v_0 = \sqrt{2gh}$ (v_0 valdist pole punktide saamiseks vaja leida). Energia jäävusest järeldamene, et plaadi kiirus on samuti v_0 siis, kui teine plastiliinitükk plaadiga kontakti loob REMOVE. See tuleneb asjaolust et plaadi kõrgus lauast, ehk teisisõnu plaadi potentsiaalne energia, on hetk enne teist kokkupõrget sama mis see oli just peale esimest kokkupõrget. Seega on teise plastiliini kokkupõrge plaadiga efektiivselt sama kui kahe identse massi ja kiirusega objektide lauskokkupõrge. Seega jäääb plaat peale teist kokkupõrget seisma REMOVE. Samas nihkub plaadi tasakaaluasend veel mg/k võrra allapoole ning plaat hakkab amplituudiga $2mg/k$ uue tasakaaluasendi ümber võnkuma REMOVE. Seega on järgneva liikumise käigus plaadi kõige alumine asend $4mg/k$ võrra esialgsest asendist all pool REMOVE.

L127 Veeuputus ★★★★

Autor: Oleg Košik, lõppvoor, 2022, G 7

Paneme tähele, et $1l/m^2 = 1 \text{ mm}$ ehk otsitav torustiku ärvavool on arvuliselt võrdne äraveetavate sademetega hulgaga millimeetrites.

Olgu $h_6 = 22 \text{ mm}$ sademetega koguhulk 6 minuti järel ning $h_9 = 28 \text{ mm}$ omakorda 9 minuti järel, H mitu millimeetrit sademeid suudab endas mahutada kraav (kui ärvavolu ei oleks) ning u töökorras torustiku sademetega ärvavolu kiirus millimeetrites minutis.

Saame võrrandid

$$h_6 = H + 0.5u \cdot 6 \text{ min}$$

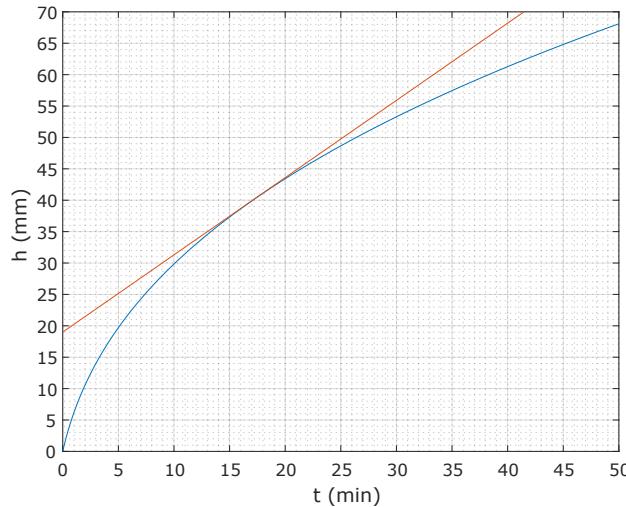
ja

$$h_9 = H + u \cdot 9 \text{ min}$$

Sellest võrrandisüsteemist leiame $H = 19 \text{ mm}$.

Olgu otsitud ärvavolu kiirus u_x . Siis sirge $h(t) = H + u_x t$ näitab, kui palju suudab kanalisatsioonisüsteem akumuleerida vett maksimaalselt igal ajahetkel (H on

kraavi panus $u_x t$ sadeveetorustiku panus). Selleks, et uputus ei tekiks, peab sadeomete koguhulga graafik jääma alati sellest sirgest allapoole. Kiirus u_x on minimaalne siis, kui see sirge on graafiku puutuja. Tõmbame niisiis graafikult puutuja, mis läbib punkti $(0, H)$. Selle puutuja tõus on otsitav kiirus u_x . Mõõtmised annavad meile $u_x = 1,23 \text{ mm/min} = 1,23 \frac{\text{L}}{\text{m}^2}$ minutis.



L128 Soojuspump ★★★★

Autor: Jaan Kalda, lahtine, 2023, G 7

Oletame, et toa efektiivne soojusmahtuvus on C . Efektiivne soojusmahtuvus iseenesest ei pruugi olla üheselt mõistetav suurus, sest nt lühikese aja jooksul ei jõua seinte sügavamad osad veel soojeneda, mistõttu efektiivne soojusmahtuvus kasvab koos vaadeldava karaktereeringuse ajavahemikuga. Antud juhul aga loodame, et karakterised ajavahemikud — t_1 ning hilisemas töörežiimis protsessi poolperiood — tulevad samas suurusjärgus. Kui soojuspumba kütmisvõimsus on P , siis saame $Pt_1 = C(T_1 - T_0)$. Kui toa temperatuur on T_f , siis on ka soojuskadude võimsus P_f ; üldjuhul on soojuskaod võrdelised sise- ja välistemperatuuride vahega, st soojuskadude võimsus $P_s = P(T - T_0)/(T_f - T_0)$. Nüüd saame välja kirjutada tingimused töörežiimis soojuspumba töötamise (t_s) ja puhkamise (t_v) ajavahemilike jaoks: $t_v P(T_k - T_0)/(T_f - T_0) = C(T_3 - T_2)$ ning $t_s [P - P(T_k - T_0)/(T_f - T_0)] = t_s P(T_f - T_k)/(T_f - T_0) = C(T_3 - T_2)$, kus $T_k = (T_3 + T_2)/2 = 22^\circ\text{C}$ on toa keskmise temperatuur. Asendades C esimesest võrrandist saame

$$t_v = t_0 \frac{T_3 - T_2}{T_1 - T_0} \frac{T_f - T_0}{T_k - T_0} = 30 \text{ min}$$

ning

$$t_s = t_0 \frac{T_3 - T_2}{T_1 - T_0} \frac{T_f - T_0}{T_f - T_k} = 30 \text{ min.}$$

Seega koguperiood $t_k = t_v + t_s = 60 \text{ min.}$

L129 Voltmeeter ★★★★

Autor: Päivo Simson, piirkonnavor, 2023, G 7

Olgu voltmeetri sisetakistus R_v . Skeemi sümmeetriast ja võrdusest $V_{AB} = V_{CD}$ järeltäpsustatud, et takistused R_1 ja R_3 peavad olema võrdsed, st $R_3 = R_1$. REMOVE

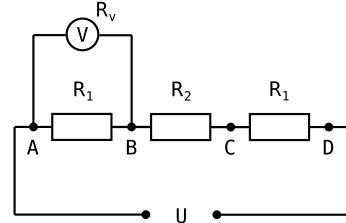
- 1) Koostame kõigepealt skeemi, mis kujutab pingemõõtmist punktide A ja B vahel. R_v ja R_1 on ühendatud rööbiti ja takistus punktide A ja B vahel on järelikult

$$R_{AB} = \frac{R_v R_1}{R_v + R_1}. \quad \text{REMOVE}$$

Skeemi kogutakistus on

$$R_k = \frac{R_v R_1}{R_v + R_1} + R_1 + R_2. \quad \text{REMOVE}$$

Pinge kahe punkti vahel jaotub proporsionaalselt nende punktide vahelise takistusega ja järelikult

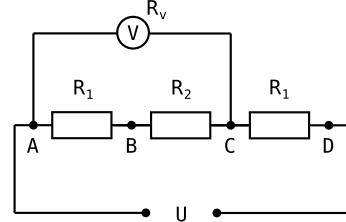


$$\begin{aligned} V_{AB} &= U \cdot \frac{R_{AB}}{R_k} = \frac{U \frac{R_v R_1}{R_v + R_1}}{\frac{R_v R_1}{R_v + R_1} + R_1 + R_2} = \\ &= \frac{UR_v R_1}{R_v(2R_1 + R_2) + R_1(R_1 + R_2)}. \quad \text{REMOVE} \end{aligned}$$

- 2) Koostame skeemi, mis kujutab pingemõõtmist punktide A ja C vahel. Analoogiliselt eelmise skeemiga saame

$$R_{AC} = \frac{R_v(R_1 + R_2)}{R_v + R_1 + R_2}, \quad \text{REMOVE}$$

$$R_k = \frac{R_v(R_1 + R_2)}{R_v + R_1 + R_2} + R_1, \quad \text{REMOVE}$$



$$\begin{aligned} V_{AC} &= U \cdot \frac{R_{AC}}{R_k} = \frac{U \frac{R_v(R_1 + R_2)}{R_v + R_1 + R_2}}{\frac{R_v(R_1 + R_2)}{R_v + R_1 + R_2} + R_1} = \\ &= \frac{UR_v(R_1 + R_2)}{R_v(2R_1 + R_2) + R_1(R_1 + R_2)}. \quad \text{REMOVE} \end{aligned}$$

- 3) Paneme tähele, et V_{AB} ja V_{AC} murdavaldiste nimetajad on samad. Jagame need omavahel.

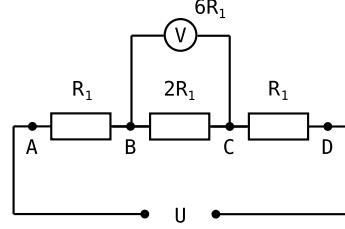
$$\frac{V_{AB}}{V_{AC}} = \frac{R_1}{R_1 + R_2} = \frac{28}{84} = \frac{1}{3} \implies R_2 = 2R_1. \quad \text{REMOVE}$$

Asendades saadud tulemuse V_{AB} avaldisse saame

$$\frac{126R_v}{4R_v + 3R_1} = 28 \implies R_v = 6R_1. REMOVE$$

4) Nüüd saame leida voltmeetri näidu V_{BC} . Vasavalt skeemile saame

$$V_{AB} = U \cdot \frac{R_{BC}}{R_k} = 126 \text{ V} \cdot \frac{\frac{2R_1 \cdot 6R_1}{8R_1}}{\frac{2R_1 \cdot 6R_1}{8R_1} + 2R_1} = \\ = 126 \text{ V} \cdot \frac{12}{12 + 8 \cdot 2} = 54 \text{ V}. REMOVE$$



L130 Tehiskaaslane ★★★

Autor: Eero Vaher, lõppvoor, 2023, G 7

Paneme tähele, et orbiidi kaugeimas punktis peab tehiskaaslase kiirusvektori projektsioon tehiskaaslast planeedi keskmega ühendavale lõigule olema 0. Kui kiirusvektori projektsioon oleks positiivne, liiguks tehiskaaslane planeedist eemale ning tehiskaaslane oleks järgmisel ajahetkel planeedist kaugemal. Kui kiirusvektori projektsioon oleks negatiivne, oleks tehiskaaslane planeedile lähemale liikumas ning tehiskaaslane olnuks eelmisel ajahetkel planeedist kaugemal.

Ringorbiidil oleva keha jaoks on kesktõmbejõuks gravitatsioonijõud ehk $\frac{mv^2}{r} = \frac{GMm}{r^2}$, kus G on gravitatsioonikonstant, M planeedi ning m tehiskaaslase mass. Järelikult $GM = v^2r$.

Vaatleme esmalt juhtu, kus tehiskaaslasele antaks kiirendus selle liikumissuunas. Vahetult pärast kiirenduse saamist oleks tehiskaaslase kiirus $u_1 = v + \Delta v = \frac{31}{24}v$.

Selle koguenergia oleks $E_1 = \frac{mu_1^2}{2} - \frac{GMm}{r}$ ning selle impulsimoment $L_1 = mru_1$. Olgu tehiskaaslase kiirus orbiidi kaugeimas punktis w_1 . Impulsimomendi jäätuse põhjal $L_1 = mR_1w_1$ ehk $w_1 = \frac{r}{R_1}u_1$ ning energia jäätuse põhjal $E_1 = \frac{mu_1^2}{2} - \frac{GMm}{R_1}$ ehk $\frac{u_1^2}{2} - v^2 = \frac{u_1^2r^2}{2R_1^2} - \frac{v^2r}{R_1}$. Selle saame teisendada kujule $\left(\frac{u_1^2}{2} - v^2\right)R_1^2 + v^2rR_1 - \frac{u_1^2r^2}{2} = 0$. Selle võrrandi lahendid on $R_1 = \frac{-v^2r \pm \sqrt{v^4r^2 - 2v^2u_1^2r^2 + u_1^4r^2}}{u_1^2 - 2v^2} = \frac{-v^2r \pm \sqrt{(1 - 2(\frac{31}{24})^2 + (\frac{31}{24})^4)v^4r^2}}{(\frac{961}{576} - 2)v^2} = \frac{1 \mp (\frac{961}{576} - 1)}{\frac{191}{576}}r$. Suurim kaugus oleks järelikult $R_1 = \frac{961}{191}r = 277\,729 \text{ km}$.

Kui kiirendus oleks suunatud planeedist eemale, oleks tehiskaaslase kiirus vahealt pärast kiirenduse saamist $u_2 = \sqrt{v^2 + \Delta v^2} = \frac{25}{24}v$. Selle koguenergia oleks $E_2 = \frac{mu_2^2}{2} - \frac{GMm}{r}$ ning impulsimoment $L_2 = mrv$. Olgu tehiskaaslase kiirus orbiidi kaugeimas punktis seekord w_2 . Impulsimomendi jäätuse põhjal $L_2 = mR_2w_2$ ehk $w_2 = \frac{r}{R_2}v$ ning energia jäätuse põhjal $\frac{u_2^2}{2} - v^2 = \frac{v^2r^2}{2R_2^2} - \frac{v^2r}{R_2}$ ehk $\left(\frac{u_2^2}{2} - v^2\right)R_2^2 + v^2rR_2 - \frac{v^2r^2}{2} = 0$, mille lahendid on $R_2 = \frac{-v^2r \pm \sqrt{v^4r^2 - 2v^4r^2 + v^2u_2^2r^2}}{u_2^2 - 2v^2} = \frac{-v^2r \pm \sqrt{(\frac{625}{576} - 1)v^4r^2}}{(\frac{625}{576} - 2)v^2} =$

$\frac{1 \pm \frac{7}{24}}{\frac{527}{576}} r$. Suurim kaugus oleks järelikult $R_2 = \frac{24}{17}r = 77\,928$ km.

L131 Äikesetorm ★★★★

Autor: Jarl Patrick Paide, lahtine, 2024, G 7

Võime eeldada, et äike käitub lõögi hetkel juhtmena, mis on sirge ja maaga risti, voolutugevusega $I = 30\,000$ A. Leiame äikesे kauguse $r = t \cdot v = 3400$ m. Seega äikesे poolt tekitatud magnetvälja muutus on $\Delta B = \frac{\mu I}{2\pi r} = 1,765 \mu\text{T}$. Kuna äike lõob maapinnaga risti, siis on äikesे poolt tekitatud magnetvälvi horisontaalne maapinnaga. Maa magnetvälja horisontaalne komponent (mis näitab põhja suunda) on $B_{hor} = \sin \alpha B = 14,62 \mu\text{T}$. Põhja suund on maksimaalselt mõjutatud siis, kui Maa magnetvälja horisontaalne komponent on risti äikesे poolt tekitatud magnetvälja muuduga. Seega muutus on $\beta = \arcsin \frac{\Delta B}{B_{hor}} = 6.9^\circ$

L132 Palgid vees ★★★★

Autor: Jaan Kalda, piirkonnavor, 2024, G 7

Süsteemile vesi+palgid mõjub raskusjoud, mille tasakaalustab joud $pS - 2T$, kus T on joud, millega niit tömbab kumbagi palki. Idee vaadelda süsteemi vesi+palgid koos annab REMOVE; tasakaalutingimusest saadud raskusjou avaldis $pS - 2T$ annab REMOVE. Väiksema palgi tasakaalutingimusest saame, et $T = (\rho_v - \rho)Vg$ REMOVE. Kui niit katki lõigata, siis niidi pingi kaob, kuid süsteemile vesi+palgid mõjub raskusjoud joud peab samaks jäama REMOVE. Seega rõhumisjou muutus $S\Delta p = 2T$ REMOVE. Et $\Delta p = \rho_v g \Delta h$ REMOVE, siis veetase langeb kõrguse $\delta h = 2T/\rho_v g S = 2(\rho_v - \rho)V/\rho_v S = 2,4$ cm (valem REMOVE, arvväärtus REMOVE).

Alternatiivne lahendus. Väiksema palgi tasakaalutingimusest saame, et $T = (\rho_v - \rho)Vg$ REMOVE. Olgu suurema palgi koguruumala U , milles vee all on ruumala W . Sellisel juhul saame selle tasakaalutingimuseks $\rho_v W g = \rho U g + T$ REMOVE. Kahest avaldisest saame kokku $W = kU + V - kV$ REMOVE, kus $k = \rho/\rho_v$. Kui nöör on katki, siis on palkide veealuste osade ruumalad tasakaalutingimusest tulenevalt vastavalt V_k ja U_k (REMOVE). Enne oli palkide veealuste osade ruumalade summa $W + V$ REMOVE ja pärast $-V_k + U_k$ REMOVE, seega veealuste osade ruumala vähenes $W + V - V_k - U_k = 2V(1 - k)$ vörra REMOVE, mistöttu alanes veetase $2V(1 - k)/S = 2,4$ cm vörra (valem REMOVE, arvväärtus REMOVE).

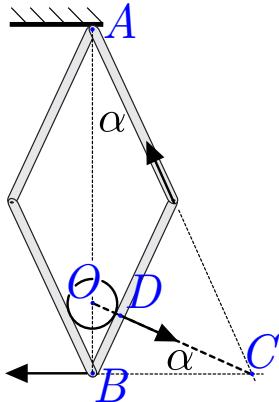
L133 Romb ★★★★

Autor: Jaan Kalda, lõppvoor, 2024, G 7

Lahendus 1: Vaatleme parempoolse alumise varda tasakaalu, vt joonist. Talle mõjub kokku kolm joudu. Esiteks on šarniirsesse kinnituspunkti B rakendatud vasakpoolse varda poolt mõjuv joud, mis on sümmeetria tõttu horisontaalne. Et ülemisele vardale mõjub vaid kaks joudu (üks ühes otsas ja teine teises otsas), siis peavad need mõlemad olema suunatud piki varrast (vastasel korral ei saaks rahulda ülemisele vardale mõjuvate jõumomentide tasakaalutingimust). Seega mõjub alumisele vardale ülemises šarniirses kinnituspunktis joud, mis on suunatud piki sirget AC . Peale selle mõjub alumisele vardale veel silindri toetuspunktis D normaaljoud, mis on suunatud risti vardaga.

Kuivõrd vardaid võib lugeda kaalutuiks, siis varrastele mõjuva raskusjouga võib mitte arvestada. Kui jäigale kehale on rakendatud vaid kolm joudu, siis peavad need lõikuma ühes punktis, vastasel korral ei oleks rahuldatud sellele kehale mõjuvate jõumomentide tasakaalutingimus. Seetõttu peab punkti D rakendatud jõu

pikendus läbima punkti C . On lihtne näha, et $BC = 2l \sin \alpha$, mistõttu $OB = BC \tan \alpha = 2l \sin \alpha \tan \alpha$ ning $r = OD = OB \sin \alpha = 2l \sin^2 \alpha \tan \alpha$.



Lahendus 2: Silinder avaldab vardale punktis D normaaljõudu N . Lisaks mõjub alumisele vardale ülemises šarniirses kinnituspunktis jõud T ülemise varda sihis. Saame kirjutada jõumomentide tasakaalu punkti B suhtes: $N \cdot |BD| = Tl \sin 2\alpha$. Jõudude tasakaal silindri jaoks on $2N \sin \alpha = mg$. Jõudude tasakaal punkti A jaoks on $2T \cos \alpha = mg$. Lahendades need kolm võrrandit, saame $|BD| = 2l \sin^2 \alpha$ ning $r = |BD| \tan \alpha = 2l \sin^2 \alpha \tan \alpha$.

Lahendus 3: Kasutame potentsiaalse energia miinimumi printsipi: silinder on sta-biilselt tasakaalus kui tema masskese on madalaimas võimalikus asendis.

Olgu lae kõrgus $2l$. Silindri keskpunkt asub kõrgusel

$$h(\alpha) = 2l - 2l \cos \alpha + \frac{r}{\sin \alpha}.$$

Selle tuletis on

$$h'(\alpha) = 2l \sin \alpha - r \frac{\cos \alpha}{\sin^2 \alpha}.$$

Tingimusest $h'(\alpha) = 0$ leiate

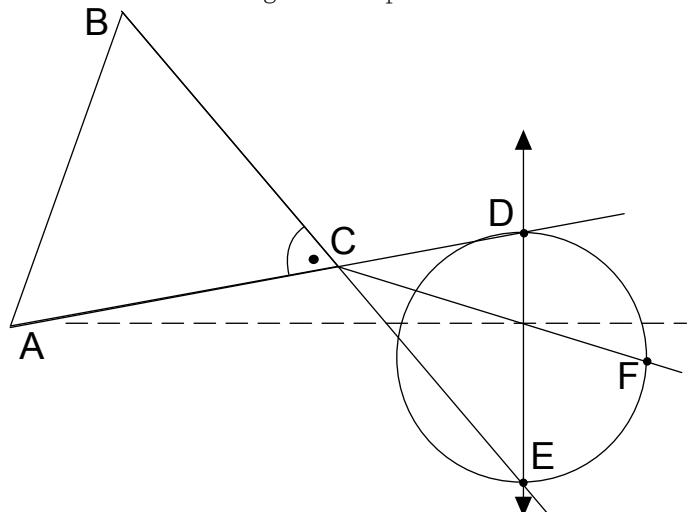
$$r = 2l \frac{\sin^3 \alpha}{\cos \alpha} = 2l \sin^2 \alpha \tan \alpha.$$

L134 Kolmnurk ★★★★

Autor: Jaan Kalda, lahtine, 2018, G 8

Tähistame kolmnurga kujutise tähtedega ABC (vt joonis) ja olgu täisnurkse tipu kujutisele C vastav originaal punktis F . Paneme tähele, et sirge kujutis on sirge ning need kaks sirget lõikuvad läätse tasandis. Lõikugu küljega AC määratud sirge läätse tasandiga punktis D ning olgu selle sirge kujutis sirge DF . Analoogselt definime sirge BC abil punkti E ja sirge FE . Et $\angle DFE$ on ülesande tingimuse ko-haselt täisnurk, siis peab see asuma ringjoonel, mis on ehitatud lõigule DE kui dia-meetrike. Teisest küljest punktist C läbi läätse keskpunkti tömmatud kiir läätses ei

murdu ja seetõttu peab punkt F asuma sellel kiirel. Niisiis leiamegi otsitava punkti



F kui antud kiire ja ringjoone lõikepunkt.

L135 Külm gaas ★★★★

Autor: Jaan Kalda, lahtine, 2019, G 8

Alghetkel lähenevad põhjale molekulid kiirusega v , seega lühikese ajavahemiku t jooksul jõuavad põhjaga põrkuda molekulid ruumalast vtS , kus S on põhja pindala, kogumassiga ρvtS . Peale põrkumist lahkuvad nad kiirusega v seetõttu said nad põhjal koguimpulsi $\Delta p = 2\rho vtS$. See vastab jõule $F = \Delta p/S$ ja röhule $p = F/S = 2\rho v$.

Pikema aja möödudes saavutavad molekulid soojsliku tasakaalu, st nende kiirusjaotus muutub isotroopseks ja algne kineetiline koguenergia muutub siseenergiaks: $U = V\rho v^2/2$, kus V tähistab anuma ruumala. Teisest küljest, $U = \frac{3}{2} \frac{\rho V}{\mu} RT$, milles $v^2 = 3 \frac{RT}{\mu}$ ning $p = \frac{\rho}{\mu} RT = \rho v^2/3$.

L136 Granaat ★★★★

Autor: , piirkonnavor, 2019, G 8

Granaadi vertikaalsuunaline algkiirus on $v_0 = v \sin \alpha$ REMOVE.

Kuna masskeskme süsteemis kaugenevad killud võrdse kiirusega u keskpunktist, siis võime ette kujutada, et ajahetkel t peale granaadi lõhkemist lendab ta edasi, kuid seda ümbritseb kildudest koosnev sfäär raadiusega ut REMOVE.

Seega kui esimene kild jõuab maapinaanni, on sfääri raadiuseks $u(t_2 - t_1)$, ehk ajahetkel t_2 on sfääri keskpunkti kõrguseks $u(t_2 - t_1)$ REMOVE. Paneme tähele, et sfääri keskpunkt liigub nii, nagu oleks liikunud granaat, kui see ei oleks lõhkenud. Sfääri keskpunkti liikumisvõrrandist on selle lennukõrgus ajahetkel t_2 võrdne $h_2 = v_0 t_2 - \frac{gt_2^2}{2}$ REMOVE, ehk saame

$$v_0 t_2 - \frac{gt_2^2}{2} = u(t_2 - t_1) \cdot \mathcal{P}1$$

Selle võrrandi positiivne lahend on $t_2 = \frac{(v_o - u) + \sqrt{(v_o - u)^2 + 2gt_1 u}}{g}$ REMOVE.

Kui viimane kild jõuab maapinaanni, on sfääri (mis nüüdseks on juba mõtteline, sest ülejäänud selle sfääri pinnal olevad killud lebavad maas) raadius $u(t_3 - t_1)$. Seega, ajahetkel t_3 on meie mõttelise sfääri keskpunkt kõrgusel $h_3 = -u(t_3 - t_1)$ REMOVE. See annab võrrandiks

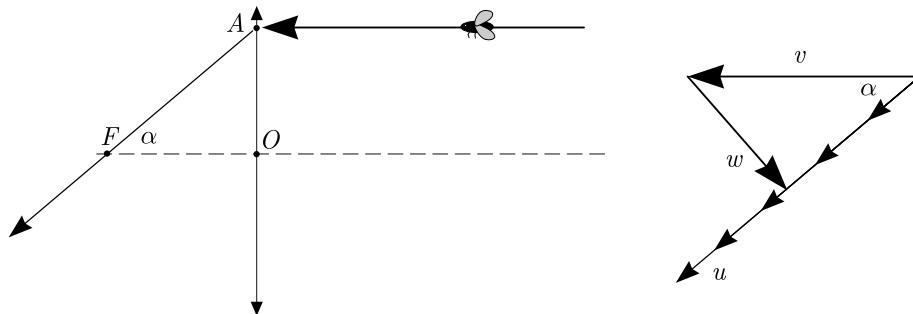
$$v_0 t_3 - \frac{gt_3^2}{2} = -u(t_3 - t_1) \cdot \mathcal{P}1$$

Pidades silmas, et $t_3 > t_2$, saame selle lahendiks $t_3 = \frac{v_o + u + \sqrt{(v_o + u)^2 - 2gt_1 u}}{g}$ REMOVE.

L137 Kärbes ★★★

Autor: , lõppvoor, 2019, G 8

Kui kärbes liigub mööda joonisel näidatud horisontaalset sirget, mis lõikub läätsega punktis A ja alustab liikumist väga kaugelt, siis kärbse kujutis liigub mööda kaldjoont, mis läbib punkti A ja fookust F (sest sirge kujutis on sirge ja need kaks sirget lõikuval läätse tasandis) ning alustab liikumist punktist F eemaldudes alguses väga aeglaselt. Kujutise kiirus kasvab monotooniselt kuni jõuab lõpmatusse hetkel, mil kärbes läbib fokaaltasandi. Seega, kui kärbse kiirust kujutab horisontaalne vektor v parempoolsel joonisel, siis kujutise kiiruse vektor erinevatel ajahetkedel on kujutatud kaldus olevate vektoriteena u . On ilmne, et nende kahe vektori vahe w on minimaalne siis, kui vektor w on risti vektoriga u . Seega saame $u_{\min} = v \sin \alpha$. Kolmnurga OAF põhjal sin $\alpha = a / \sqrt{a^2 + f^2}$ ning $u_{\min} = va / \sqrt{a^2 + f^2}$.



L138 Termokaamera ★★★

Autor: Jaan Kalda, lahtine, 2020, G 8

Kuivõrd plaat on väike, siis tema kiirgus ei mõjuta märkimisväärsest toa üldist soojuskiirguse fooni, mis vastab absoluutselt musta keha soojuskiirguse energiavoo tihedusele σT^4 . Seetõttu "näeb" soojuskaamera vaskplaadilt lähtuvat kahte kiirguskomponenti: 97% kiirgusest moodustab plaadile langenud ja sellelt peegeldunud foonikiirgust ning 3% moodustab plaadi enda soojuskiirgus. Seega saame seose $\sigma T_2^4 = 0,97\sigma T_0^4 + 0,03\sigma T_1^4$, millest

$$T_1 = [(T_2^4 - 0,97T_0^4)/0,03]^{1/4} \approx 345 \text{ K} \approx 72^\circ\text{C}.$$

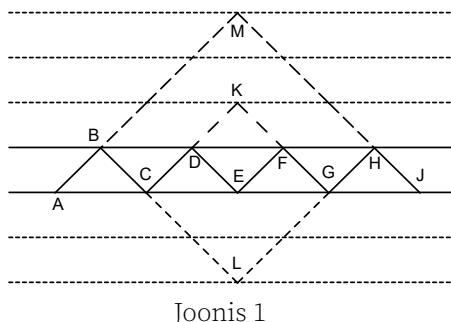
L139 Dioodid ★★★

Autor: , piirkonnavor, 2020, G 8

Lahendus: Kuivõrd dioodid on ühendatud paralleelselt, siis nende pinged on võrdsed REMOVE. Ilmselt kõige lihtsam moodus on katse-eksituse meetodil sellise pinge V_0 leidmine, mille korral dioodide voolude summa on võrdne I_0 -ga, $I_1(V_0) + I_2(V_0) = I_0$ REMOVE. Otsime lahendit piirkonnas, kus keskmene vool on pool vooluallika voolust, st 1.35 amprit REMOVE; seal piirkonnas on pinge umbes $V_0 \approx 3,6$ V REMOVE ja fikseeritud pinge V_0 juures on kahe voolutugevuse vahe $\Delta I = 0,20$ A REMOVE. Seega $I_1 = 1,25$ A [REMOVE väärtsuse eest, mis on vahemikus 1,22 A kuni 1,28 A ja rahuldab tingimust $I_1(V_0) + I_2(V_0) = 2,7$ A] ning $I_2 = 1,45$ A [REMOVE väärtsuse eest, mis on vahemikus 1,42 A kuni 1,48 A ja rahuldab tingimust $I_1(V_0) + I_2(V_0) = 2,7$ A]. (Kui voolude väärtsused on etteantud vahemikus, kuid summa erineb 2.7 amprist, siis arvväärtuste eest punkte ei saa.) Kuivõrd dioodide pinged on samad, siis võimsuste suhe on voolude suhe, st võimsuste suhteline erinevus on $2\Delta I/I_0 \approx 15\%$ (REMOVE avaldise ja REMOVE väärtsuse eest; kui lõppvastus on vahemikus 13% kuni 18%, siis antakse väärtsuse eest täispunktid; kui lõppvastus on väiksem 10%-st või suurem 22%-st, siis arvväärtuse punkte ei anta; ülejäänud juhtumeil antakse 0.5 punkti). Märkus: aktsepteeritavad on kõik lähenemised, mis jõuavad õige tulemuseni I_1 ja I_2 jaoks tuginedes lahenduse alguses toodud kahele tingimusele pingete ja voolude jaoks.

L140 Optiline seade ★★★

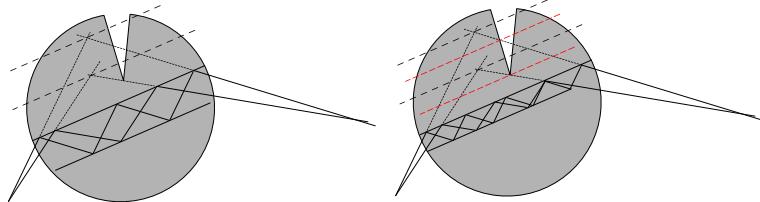
Autor: , lõppvoor, 2020, G 8



Joonis 1

Kõigepealt vaatleme kiirte käiku kahe paralleelse peegli vahel joonisel 1. Kui peegeldame sik-sakilisest kiirest jupi DEF ülemises peeglil, saame jupi DKF , mis koos lõikudega CD ning FG moodustab juba vähemate sik-sakkidega jupi CKG . Peegeldades juppi CKG alumises peeglil saame jupi CLG ning korrates peegeldamist veel ühe korra saame tervest sik-sakilisest teekonnast $ABCDEFHGJ$ tee konna AMJ , mida võib vaadelda kui kiire AB peegeldust alumise peegli kujutise-kujutise-kujutises. Niisiis, kui joonistame peeglite kujutised, kujutise-kujutised jne, näeme, et sisenevad kiired justkui peegelduksid peeglite kujutises või kujutise-kujutises või kujutise-kujutise-kujutises jne. Algsel joonisel toodud kiirte põhjal

saame taastada kaks sellist kujutist, kujutise-kujutist või kujutise-kujutise-kujutist või jne. N-järku kujutiste seeria moodustab paralleelse sirgete rivi; tegelikud peeglid peavad olema ühed neist. Kui me joonistame sisendiiri väljundiiriteks peegeldavate sirgetega (mis on leitavad kiirte pikenduste lõikepunkte läbivate nurgapooltajate ristsirgetena) paraleelse ja võrdsetel vahekaugustel asuvate sirgete rivi, siis peavad tegelikud peeglid asuma kahel naabersirgel.



Joonis 2.

Joonis 3.

Joonisel 2 on näha, et lihtsaimal juhul välistab sisselöige peeglite asukoha kõigis peale kahe alumise (veel madalamad asukohad pole võimalikud seetõttu, et sisendiired ei saa nende vahel siseneda). Põhimõtteliselt on võimalik ka joonisel 3 toodud variant.

L141 Oberthi efekt ★★★

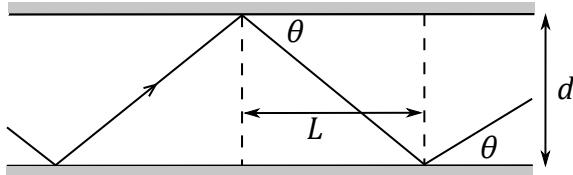
Autor: Eero Vaher, lahtine, 2021, G 8

Olgu kosmoselaeva mass m ning planeedi mass M . Kosmoselaevale mõjub raskusjõud, mis on ühtlasi seda ringorbiidil hoidvaks kesktõmbejõuks ehk $G \frac{Mm}{r_0^2} = \frac{mv_0^2}{r_0}$. Järelikult $GM = v_0^2 r_0$. Kosmoselaeva koguenergia kahe manöövri vahel ei muudu ehk $\frac{m(v_0 - \Delta v)^2}{2} - \frac{GMm}{r_0} = \frac{mv_1^2}{2} - \frac{GMm}{r_1}$, kus v_1 on kosmoselaeva joonkiirus kaugusel r_1 . Orbiidi planeedile lähimas ja planeedist kaugeimas punktis on kosmoselaeva kiirus risti seda planeedi keskmega ühendava raadiusvektoriga, mistõttu saab impulssmomendi jäädvuse panna kirja kujul $m(v_0 - \Delta v)r_0 = mv_1 r_1$. Kokkuvõttes saab kirja panna võrrandi $\frac{(v_0 - \Delta v)^2}{2} - v_0^2 = \frac{(v_0 - \Delta v)^2 r_0^2}{2r_1^2} - \frac{v_0^2 r_0}{r_1}$, mis on teisendatav kujule $\left(\frac{(v_0 - \Delta v)^2}{2} - v_0^2\right) r_1^2 + v_0^2 r_0 r_1 - \frac{(v_0 - \Delta v)^2 r_0^2}{2} = 0$. Selle ruutvõrrandi kaks lahendit avalduvad kujul $\frac{-v_0^2 \pm (v_0^2 - (v_0 - \Delta v)^2)}{(v_0 - \Delta v)^2 - 2v_0^2} r_0$, milles üks vastab suurimale kaugusele r_0 ja teine vähimale kaugusele $r_1 = \frac{2}{7}r_0 = 20\,000$ km. Impulssmomendi jäädvuse põhjal $v_1 = \frac{r_0}{r_1} (v_0 - \Delta v) = 7$ km/s. Pärast teist manöövit saab kosmoselaeva kiiruse kaugusel r_0 leida energia jäädvusest. $\frac{m(v_1 + \Delta v)^2}{2} - \frac{GMm}{r_1} = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{GMm}{r_0}$.

$$v_2 = \sqrt{(v_1 + \Delta v)^2 - 2v_0^2 \frac{r_0}{r_1} + 2v_0^2} \simeq 4,36 \text{ km/s.}$$

L142 Lainejuht ★★★★

Autor: Hans Daniel Kaimre, piirkonnavor, 2021, G 8



Kaod sellises lainejuhis tulenevad tõsiasjast, et iga peegeldusega läheb kaduma pisut valgust, kuna peegeldub vaid $R = 99,8\%$ sellest REMOVE. Kui valgus levib lainejuhi telje sihis kahe peegelduse vahel L võrra (vt joonist), saame intensiivsuse sõltuvuse levimise distantsist l panna kirja kujul

$$I = I_0 R^{l/L} \quad \text{REMOVE}$$

kust

$$\ln \frac{I}{I_0} = \frac{l}{L} \cdot \ln R = \ln R \cdot \frac{l}{d} \tan \theta \quad \Rightarrow \quad l = \frac{\ln \frac{I}{I_0}}{\ln R} \cdot \frac{d}{\tan \theta} \quad \text{REMOVE}$$

Meile pole teada ei d ega θ , küll saame need leida. Tuletatud seosest on näha, et valgus levib kaugemale, kui θ on võimalikult väike REMOVE. Ülesande püstituses antud graafikult võib näha, et θ minimaalne võimalik väärthus on $1,3^\circ$ (sellele vastab $N = 1$) REMOVE. Kasutades ülesande püstituses antud seost, saame

$$d = \frac{N\lambda}{2 \sin \theta} = \frac{1 \cdot 1,55 \mu\text{m}}{2 \cdot \sin(1,3^\circ)} = 34 \mu\text{m}. \quad \text{REMOVE}$$

Kui valguse intensiivsus on vähenenud 10 korda, $\frac{I}{I_0} = 0.1$ REMOVE ning sellele vastavaks levimise distantsiks saame

$$l = \frac{\ln(0,1)}{\ln(0,998)} \cdot \frac{34 \mu\text{m}}{\tan(1,3^\circ)} = 1,7 \text{ m}. \quad \text{REMOVE}$$

Nagu näha, väheneb valguse intensiivsus väga kiirelt. Seetõttu kasutataksegi modernsetes süsteemides signaali edastamiseks fibred, kus täieliku sisepeegeldumise töttu kadusid pole. Tänapäevaste optiliste fibritega toimub signaali tugevuse 10-kordne vähinemine umbes 50 kilomeetriga.

L143 Veesilinder ★★★

Autor: Taavet Kalda, lõppvoor, 2021, G 8

Lahendus 1. On selge, et kui veesammas ei kiireneks, oleks veesamba ülemise ja alumise punkti röhkude vahe $\rho gh \approx 1.2p_0$ ning veesamba haripunktis oleks negatiivne röhk. Aga kuna veesammas hakkab ühtse kehana teatud kiirendusega a silindrist välja voolama (sest vesi on kokkusurumatu), siis liikudes veega kiirenevasse taustüsteemi, näeme et ülemise ja alumise punkti röhkude vahe on tegelikult $\rho(g - a)h$ ning see ei pea tingimata negatiivne olema.

Vee välja voolamise käigus on peamine küsimus see, et mis vee asemel silindri üleval olevasse ruumi alles jäab. Üks variant on, et vee taha jäab vaakummull. Samas, kui vee röhk langeb toatemperatuuril küllastunud veeauru röhust madalamale, siis vee kontaktpinnas hakkab vesi aurustumma. Seega ei teki silindri ülemisse osa mitte vaakum, vaid veeaurud röhul p_v . Seega on veesamba ülemise ja alumise osa röhkude vahe $p_0 - p_v = \rho(g - a)h$ ning veesammas kiireneb kiirendusega $a = g - (p_0 - p_v)/(\rho h) = 1,62 \text{ m/s}^2$.

Lahendus 2. Vaatame veesambale mõjuvaid jõude. Olgu veesamba ristlõike pindala S . Siis alt mõjub õhurõhu poolt jõud p_0S . Ülevalt sinna tekkiva küllastunud auru poolt jõud p_vS . Lisaks mõjub veesambale raskusjõud mg , kus veesamba mass on $m = \rho hS$. Newtoni II seaduse põhjal

$$ma = mg + p_vS - p_0S,$$

kust leiame

$$a = g + \frac{(p_v - p_0)S}{m} = g + \frac{p_v - p_0}{\rho h}.$$

L144 Kaubalaev ★★★★

Autor: Päivo Simson, lahtine, 2022, G 8

Vaatleme laeva tasakaaluolekut, kui kogumass on m ja võnkumist ei toimu. Sellisel juhul on üleslükkejõud ja gravitatsioonijõud tasakaalus ning Resultantjõud F_{res} on võrdne nulliga:

$$F_{res} = \rho_v gV - mg = 0, \quad (1)$$

kus ρ_v on vee tihedus ja V on laeva veealuse osa ruumala. Vaatleme nüüd laeva vertikaalsihis võnkumist tasakaaluasendi suhtes. Oletame, et mingil ajahetkel on laev tõusnud tasakaaluasendist Δy võrra kõrgemale. Võrdust (1) arvestades on laevale mõjuv resultantjõud nüüd

$$F_{res} = \rho_v g(V - \Delta V) - mg = -\rho_v g\Delta V = -\rho_v gS\Delta y,$$

kus $\Delta V = S\Delta y$ on see osa laeva ruumalast, mis veest välja tõusis ja S on laeva horisontaallõike pindala veepinna kõrgusel. Võrdus $F_{res} = -\rho_v gS\Delta y$ kehtib suvalise väikse Δy jaoks. Siit järeltub, et laev võngub samamoodi nagu vedrupendli otsa riputatud mass. Vedru jäikuse k rollis on siin suurus $\rho_v gS$. Seega saab kasutada vedrupendli korral tuntud valemit

$$\frac{1}{f} = T = 2\pi\sqrt{\frac{m^*}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{m^*}{\rho_v gS}},$$

kus T on vönkeperiood, f on vönkesagedus ja $m^* = m + \frac{1}{2}M$ on laeva efektiivne kogumass, mis sisaldab kaasahaaratud vee massi.

Olgu $m_1 = 1000 \text{ t}$, $m_2 = 10\ 000 \text{ t}$, $f_1 = 10 \frac{\text{vn}}{\text{min}}$ ja $f_2 = 8 \frac{\text{vn}}{\text{min}}$. Viimase valemi põhjal saame

$$\frac{1}{f_1} = 2\pi \sqrt{\frac{M + \frac{1}{2}M + m_1}{\rho_v g S}},$$

$$\frac{1}{f_2} = 2\pi \sqrt{\frac{M + \frac{1}{2}M + m_2}{\rho_v g S}}.$$

Sin eeldasime, et laeva horisontaallõike pindala S on mõlemal juhul sama, sest veepinna lächedal on laeva kere väliskülg vertikaalne. Jagades teise võrduse esimesega ja töstes tulemuse mõlemad pooled ruutu saame

$$\frac{f_1^2}{f_2^2} = \frac{\frac{3}{2}M + m_2}{\frac{3}{2}M + m_1},$$

millega

$$M = \frac{2}{3} \cdot \frac{m_2 f_2^2 - m_1 f_1^2}{f_2^2 - f_1^2} = 10\ 000 \text{ t} = 10^7 \text{ kg}.$$

L145 Tühi pudel ★★★★

Autor: Jaan Kalda, piirkonnavoor, 2022, G 8

Rõhk pudelis kasvab kahel põhjusel. Esiteks, toimub pudelisse suletud õhu (va veeauru molekulid) isohooriline paisumine toatemperatuurilt kuni vee tempreatuurini — võime eeldada, et raputamise käigus annab vesi soojust õhule ning vee soojusmahtuvus on nii suur, et see ei jõua oluliselt jahtuda REMOVE. Teiseks kasvab õhus veeauru osarõhk, korraliku raputamise tulemusel saabub pudelisse termodünaamiline tasakaal, mis tähendab, et pudelis oleva õhu temperatuur võrdub vee temperaturiga ja veeauru rõhk võrdub küllastunud auru rõhuga antud temperatuuril REMOVE.

Esimese komponendi leidmiseks paneme tähele, et enne raputamist oli õhu osarõhk pudelis ($\text{õhu rõhk ilma veeauru rõhuta}$) $p'_0 = p_0 - rp_k(20^\circ\text{C}) \approx p_0$, sest veeauru osarõhk on palju väiksem atmosfäärirõhust. Avaldis õhu osarõhu jaoks pudelis enne loksutamist, olgu see siis täpne või lihtsustatult p_0 , annab REMOVE; selle punkti saab kätte ka siis, kui õpilane kasutab ilma pikemalt põhjendamata järgnevas isohoori seaduses atmosfäärirõhku p_0). Eelnevas avaldises esines auru rõhu osarõhk toaõhus $p_a = rp_k(20^\circ\text{C})$ REMOVE, mille väärust läheb hiljem vaja. Selle arvuliseks leidmiseks tuleb võtta graafkult lugem küllastunud auru rõhu jaoks, $p_k(20^\circ\text{C}) \approx 2,2 \text{ kPa}$; täpne lugem (väärtsed vahemikus 2,2(1) kPa) annab REMOVE ja vähem täpne lugem (väärtsed vahemikus 2,2(2) kPa) annab REMOVE (suurema vea korral punkte ei saa). Ideaalse gaasi olekuvõrrandist teame, et konstantsel ruumalal on rõhk võrdeline temperatuuriga, seega uus õhu osarõhk $p_1 = p_0 T_v / T_t$ REMOVE ning järelikult vastav rõhu kasv pudeli sees $\Delta p_1 \equiv p_1 - p_0 = p'_0 (T_v / T_t - 1) \approx 12 \text{ kPa}$ (avaldis Δp_1 jaoks annab REMOVE ja õige numbriline väärus REMOVE), kus temperatuurid on esitatud Kelvinites.

Teise komponendi leiate kui veeauru rõhkude vahel: $\Delta p_2 = p_k(55^\circ\text{C}) - 0,5p_k(20^\circ\text{C}) \approx 15 \text{ kPa} - 0,5 \cdot 2,2 \text{ kPa} \approx 14 \text{ kPa}$. Idee eest avaldada veeauru osarõhu muutus graafikult loetavate rõhkude vahena annab REMOVE; $p_k(55^\circ\text{C})$ korrektne leidmine graafikult (väärtused vahemikus 1,5(1) kPa) annab veel REMOVE (suurema vee korral saab vahemiku 1,5(2) kPa korral REMOVE).

Seega oli rõhk pudelis $\approx 25 \text{ kPa}$ võrra suurem, kui toas.

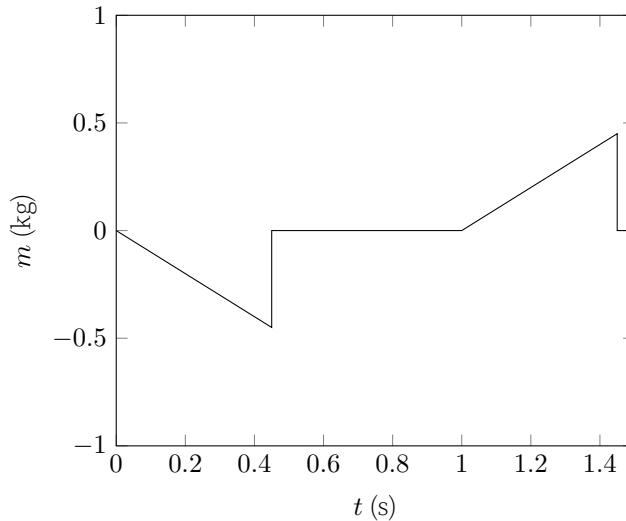
L146 Veevalaja ★★★

Autor: Kaur Aare Saar, lõppvoor, 2022, G 8

Arvestama peab kolme efektiga:

- Ülemise anuma mass muutub väiksemaks kiirusega \dot{m} . See toimub esimese $\frac{m}{\dot{m}} = 1 \text{ s}$ jooksul.
- Alumise anuma mass muutub suuremaks kiirusega \dot{m} . See algab ajahetkel $t_1 = \sqrt{\frac{2h}{g}} = 0,45 \text{ s}$ ja kestab kuni hetkeni $t_2 = t_1 + \frac{m}{\dot{m}} = 1,45 \text{ s}$.
- Kui vesi jõuab alumisse anumasse, siis avaldab ta läbi Olegi kaalule jõudu mis on võrdne anumasse jõudva impulsi muutumise kiirusega, s.o. $F = \frac{\Delta(mv)}{\Delta t} = \dot{m}v = \dot{m}\sqrt{2gh}$, mis mõjub konstatselt vahemikus t_1 kuni t_2 . See vastab kaalu näidu muutusega $m_p = \frac{\dot{m}\sqrt{2gh}}{g} = \dot{m}\sqrt{\frac{2h}{g}} = 0,45 \text{ kg}$

Need kolm komponenti kokku liites saame järgneva graafiku:



L147 Lääts ★★★

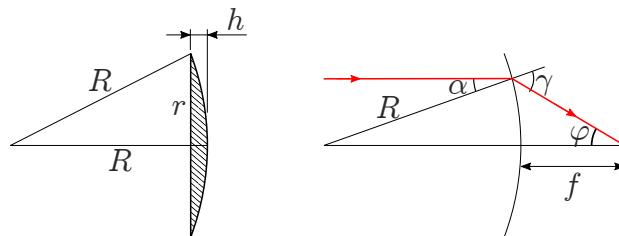
Autor: Valter Kiisk, lahtine, 2023, G 8

a) Tähistame läätse raadiuse $r = \frac{1}{2} \cdot 25,4 \text{ mm} = 12,7 \text{ mm}$ (vt joonis). Lääts kumerpinnaga kaetud osa paksus on ilmselt $h = 3,1 \text{ mm} - 2,0 \text{ mm} = 1,1 \text{ mm}$. Nüüd Pythagorase teoreemi põhjal $R^2 = r^2 + (R - h)^2$, millest

$$R = \frac{r^2 + h^2}{2h} = \frac{(12,7 \text{ mm})^2 + (1,1 \text{ mm})^2}{2 \cdot 1,1 \text{ mm}} \approx 73,8 \text{ mm}.$$

b) Läätsel langevad paralleelsed kiired koonduvad fookuses. Õhukese läätse eel-dusel võime fookuskauguseks lugeda lihtsalt fookuspunkti kauguse mistahes murd-vast pinnast. Kõige lihtsam on seda analüüsiga teha valguskiire jaoks, mis langeb läätsele vasakult, paralleelselt optilise peateljega. Seega esimesel pinnal murdu-mist ei toimu. Olgu langemisnurk kumerpinnale α ja murdumisnurk γ . Snelli seadusest $n \sin \alpha = \sin \gamma$. Kuna valguskiir eeldatavasti kulgeb optilise peatelje lähedal, siis kõik nurgad on väikesed, nii et $\sin \alpha \approx \alpha$ ja $\sin \gamma \approx \gamma$. Seega $\gamma \approx n\alpha$ ja $\varphi = \gamma - \alpha \approx (n - 1)\alpha$. Langev kiir kulgeb optilisest teljest kaugusel $a = R \sin \alpha \approx \alpha R$. Samamoodi, pärast murdumist $\varphi f \approx a$ ehk

$$f \approx \frac{a}{\varphi} = \frac{\alpha R}{(n - 1)\alpha} = \frac{R}{n - 1} \approx 142 \text{ mm}.$$


L148 Süvend ja kera ★★★

Autor: Marko Tsengov, piirkonnavor, 2023, G 8

Juhul $\theta > 90^\circ$ kukub kera kindlasti tasandilt maha.

Olgu $C \equiv \sqrt{(R-h)^2 + r^2}$. Kui $R = C$, siis puudutab kera korraga nii süvendi põhja kui ka äärt. Seega juhul $R > C$ puudutaks kera ainult süvendi äärt (mis pole ülesandes antuga kooskõlas).

Kui $R \leq C$, libiseb kera esmalt mööda süvendi põhja kauguse $C - R$ võrra, kogudes kineetilist energiat potentsiaalse energiaväljuse arvelt. Seejärel kera põrkab servalt – võib-olla korduvalt – kuni ta kas ületab süvendi serva või jäab (aeglaselt sumbuvate põrkamistega) süvendisse. Selleks, et kera süvendist väljuks, peaks algne potentsiaalne energia olema suurem potentsiaalsest energiast, mille kera saavutab, kui see puudutab serva ning selle masskese on täpselt puutepunkti kohal. Teisisõnu peab kera sellises olekus olema madalamal kui algolekus. Kõrguste vahe saame leida, liigutades kera masskeskme mõtteliselt:

1. Kera algsesse puutepunkti: $\Delta H = -R \cos \theta$

2. Süvendi serva alumisse punkti: $\Delta H = -r \sin \theta$
3. Süvendi serva ülemisse punkti (süvendi ääre peale): $\Delta H = h \cos \theta$
4. Süvendi ääre kohale, nii et kera masskese on täpselt puutepunkti kohal: $\Delta H = R$

Liites kõrguste vahed kokku, saame

$$\Delta H = -R \cos \theta - r \sin \theta + h \cos \theta + R = R - r \sin \theta - (R - h) \cos \theta$$

Kera saab süvendist väljuda, kui $\Delta H \leq 0$, st

$$R - r \sin \theta - (R - h) \cos \theta \leq 0$$

Ei ole oluline, kas õpilane kasutab tingimuses ranget ($<$) või mitteranget (\leq) võrrastust.

L149 Kuulitõuge ★★★★

Autor: Valter Kiisk, lõppvoor, 2023, G 8

Kuna kuul on raske ja selle kiirus on väike, siis õhutakistuse panus on praegusel juhul tühine. Optimaalse viskenurga erinevus 45° -st on seega tingitud peamiselt sellest, et alg- ja lõpp-punkt ei paikne samal kõrgusel. Ülesande sirgjooneliseks lahendamiseks avaldada kuuli lennukauguse s sõltuvus viskenurgast α ja määräta selle maksimum. See tee viib väga tülikate avaldisteni. Ülesande saab siiski lahendada alternatiivsel viisil.

Arvestades, et kuuli algkõrgus maapinnast on h_0 , avaldame kõigepealt lõpp-punkti kõrguse (mis on võrdne nulliga):

$$0 = h_0 + v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2,$$

kus $v_{0y} = v_0 \sin \alpha$ ja kuuli lennuaeg

$$t = \frac{s}{v_{0x}} = \frac{s}{v_0 \cos \alpha}.$$

Seega

$$0 = h_0 + s \tan \alpha - \frac{gs^2}{2v_0^2} \cdot \frac{1}{\cos^2 \alpha}.$$

Peale trigonomeetrilise seose $1/\cos^2 \alpha = 1 + \tan^2 \alpha$ kasutamist saame ruutvõrrandi $\tan \alpha$ suhtes. Selle füüsikalisele mõistlik lahend on

$$\tan \alpha = \frac{v_0^2}{gs} + \frac{1}{gs} \sqrt{v_0^4 + 2gh_0v_0^2 - g^2s^2}.$$

Seega kui h_0 ja v_0 on fikseeritud, siis saadud avaldis annab sellise sobiva viskenuruga, mille korral kuuli lennukaugus saab olema s . Kuid meid huvitab selline viskenurk, mille korral s on maksimaalne ($= s_m$). Järelikult, kui viimases avaldises

s võtta suurem maksimaalsest võimalikust väärthusest, peab saadav $\tan \alpha$ väärthus väljuma füüsikalisele võimalikest piiridest, st reaalarvude vallast. Piirjuht saavutatakse siis, kui ruutjuurealune avaldis (diskriminant) saab võrdseks nulliga:

$$v_0^4 + 2gh_0v_0^2 - g^2s_m^2 = 0.$$

See on tingimus kuuli algkiiruse määramiseks. Tegemist on ruutvõrrandiga v_0^2 suhtes, mille lahendiks on

$$v_0 = \sqrt{g\sqrt{s_m^2 + h_0^2} - gh_0} \approx 13,3 \text{ m/s.}$$

Viimaks otsitava algnurga tangens avaldub

$$\tan \alpha = \frac{v_0^2}{gs_m} = \frac{\sqrt{h_0^2 + s_m^2} - h_0}{s_m},$$

millega $\alpha \approx 42^\circ$.

L150 Käru ★★★

Autor: Jaan Kalda, lahtine, 2024, G 8

Lahendame ülesande virtuaalse nihke meetodil: oletame, et piirjuhul, kui käru on libisemise piiril ja liigub aeglaselt allapoole vahemaa x võrra. Alustuseks paneme tähele, et vähemalt ühed rattad peavad libisema. Kui libiseksid tagumised rattad, siis möjuks jõüülekanne tagumiste rataste telje suhtes jõumomendiga $T = F_h R$, kus $F_h = \mu N$ on hõördejöud ja R - ratta raadius, see tuleneb jõumomentide tasakaalutingimusest telje suhtes. Energia jäädvusest johtuvalt kannab jõüülekanne selle momendi esimestele ratastele $\frac{9}{8}$ korda suuremana, mistõttu peaks esimestele ratastele möjuma hõördejöud $\frac{9}{8}\mu N$, mis ei ole aga võimalik, sest maksimaalne hõördejöud on μN . Seega tagumised rattad ei saa libiseda ja seda peavad tegema esimesed. Kui käru liigub alla vahemaa x võrra, siis tagumised rattad pöörduvad nurga $\phi_t = x/R$ võrra ning esimesed rattad – nurga $\frac{8}{9}x/R$ võrra. Seega libisevad esimesed rattad vahemaa $s = x - \frac{8}{9}x = \frac{x}{9}$ võrra, mille käigus dissipeerub hõördejöud töö tulemusel soojushulk $\mu N \frac{x}{9}$. Energia jäädvuse tõttu peab see olema võrdne vankri potentsiaalse energiaga vähinemisega, $\mu N \frac{x}{9} = mgx \sin \alpha$, kus $mg = 2N / \cos \alpha$ on vankri mass. Seega $\tan \alpha = \frac{\mu}{18}$.

L151 Hermeetiline saun ★★★

Autor: Hannes Kuslap, piirkonnavor, 2024, G 8

Kuna enne kütma hakkamist oli saunaoks lahti, siis järelikult olid rõhud saunas ja saunast väljas tasakaalustunud; seega kui $T = T_1$, oli õhurõhk saunas p_0 REMOVE. Kütmise ajal oli saunaoks kinni ja saun hermeetiline, seega õhu ruumala saunas oli konstantne REMOVE. Ideaalgaasi võrrandist $pV = nRT$ REMOVE leiame seega, et $p \propto T$, see tähendab $\frac{p_2}{p_1} = \frac{T_2}{T_1}$. Järelikult õhurõhk saunas pärast kütmist on $p_2 = \frac{T_2}{T_1} p_0$ REMOVE. (Alternatiivselt võib välja arvutada ruumala V ning leida nR väärthus ja selle abil arvutada T_2 .) Rõhkude vahe tõttu avaldub uksele summaarne jöud $F_{hk} = (p_2 - p_0)hl$ REMOVE. Aivo maksimaalne lükkejöud on aga piiratud

tema jalgade hõõrdejõu poolt $F_{l\text{ke}} = \mu mg$ (suurema jõu korral hakkaksid Aivo jalad libisema) REMOVE. Eeldades, et õhurõhk mõjub uksele ühtlaselt, siis keskmine rõhujõu õlg on $L_{\text{hk}} = \frac{l}{2}$. Ukselink asub aga servas, nii et lükkejõu õlg on $L_{l\text{ke}} = l$. Kangi reegli abil uksehinge suhtes leiame, et uks avaneb, kui $F_{l\text{ke}}L_{l\text{ke}} > F_{\text{hk}}L_{\text{hk}}$, see tähendab $2F_{l\text{ke}} > F_{\text{hk}}$ REMOVE (kui kordaja 2 puudu, siis REMOVE). Seega ukse avanemise tingimus on $2\mu mg > \left(\frac{T_2}{T_1} - 1\right)p_0 hl$ REMOVE. Vasaku poole arvuline väärthus on $2 \cdot 0,6 \cdot 100 \text{ kg} \cdot 9,8 \frac{\text{N}}{\text{kg}} \approx 1180 \text{ N}$ REMOVE. Teades, et $T_1 = 273 + 20 \text{ K} = 293 \text{ K}$ ja $T_2 = 100 + 273 \text{ K} = 373 \text{ K}$, leiame, et parema poole väärthus on $\left(\frac{373 \text{ K}}{293 \text{ K}} - 1\right) \cdot 101\,000 \text{ Pa} \cdot 1,8 \text{ m} \cdot 0,8 \text{ m} \approx 39\,700 \text{ N}$ REMOVE. Kuna $39\,700 \text{ N} > 1180 \text{ N}$, siis Aivo ei saa ust lahti (õige järelduse eest REMOVE ainult siis, kui lahendus on füüsikaliseks korrektne).

L152 Kolmnurk ★★★

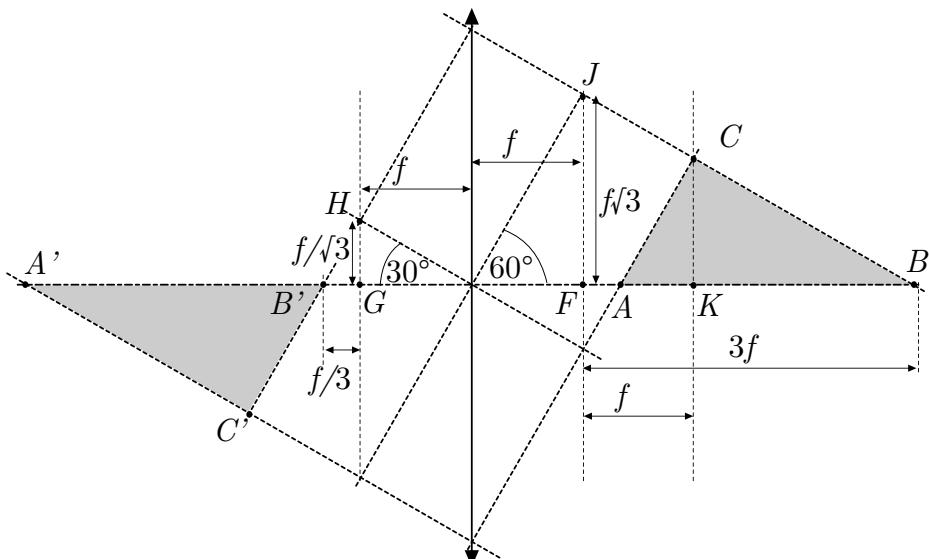
Autor: Jaan Kalda, lõppvoor, 2024, G 8

Lahendus 1: Esiteks paneme tähele, et õhukeses läätses kujutub sirge sirgeks, kusjuures need sirged lõikuvad läätse tasapinnal. See muutub ilmseks, kui mõtleme neist sirgeist kui valguskiirtest.

Teiseks paneme tähele, et 30° -ne nurk peab kujutuma 60° -ks nurgaks ja vastupidi. Töepooltest, kui 30° -ne nurk kujutuks 30° -ks nurgaks ja 60° -ne nurk kujutuks 60° nurgaks, peaksid esimese tähelepaneku töttu olema kolmnurk ja tema kujutis peegelsümmeetrisel läätse tasapinna suhtes, mis on vastuolus mitme õhukese läätse omadusega, mh läätse valemiga.

Kolmandaks, optilisel teljel läätsest paremal on vaid üks punkt, kust telje suhtes 30° all lähtuv kiir murdub 30° -se kaldenurgaga kiireks. Töepooltest, on lihtne näha, et mingist telje punktist X , mille kaugus läätsest on suurem fookuskaugusest f , 30° all lähtuva kiire kaldenurk peale läätSEL murdumist on monotoonne funktsioon punkti X kaugusest fokaaltasandist.

Kolmanda tähelepaneku töttu on ülesandel vaid üks lahend ning sümmeetria töttu peavad kolmnurk ja tema kujutis olema täpselt ühesuurused ja samal kaugusel läätsest. Sestap peab algse kolmnurga täisnurk ning kujutiskolmnurga täisnurk olema läätsest võrdsel kaugusel; läätse valemist on lihtne järeldada, et see kaugus on $2f$. Newtoni valem läätse jaoks ütleb, et kui x_1 ja x_2 on eseme kaugused omapoolsest fokaaltasandist, siis $x_1x_2 = f^2$. Olgu täisnurkse kolmnurga täisnurga C projektsioon hüpotenuusile K (vt joonist) ning olgu kolmnurga kõrgus $|CK| = \sqrt{3}h$; sellisel juhul kaatetite projektsioonid hüpotenuusile $|AK| = |CK| \tan 30^\circ = h$ ning $|KB| = |CK| \tan 60^\circ = 3h$. Sümmeetria töttu asub B kujutis B' fokaaltasandist sama kaugel, kui nurk A , seega Newtoni valem punkti B jaoks omandab kuju $(f - |AK|)(f + |KB|) = (f - h)(f + 3h) = f^2$, millega $h = 2f/3$ (lahend $h = 0$ pole füüsikaline). Nüüd on juba lihtne leida hüpotenuusi pikkuse $|AK| + |KB| = 4h = 8f/3$.



Lahendus 2: Teeme esimesed kaks tähelepanekut nagu 1. lahenduses. Tõmbame läbi läätse keskpunkti kaks sirget, mis kulgevad vastavalt 30° ja 60° nurkade all nii nagu näidatud joonisel. Olgu nende sirgete lõikepunktide fokaaltasanditega vastavalt J ja H . On lihtne näha, et $|JF| = f \tan 60^\circ = \sqrt{3}f$ ning $|HG| = f \tan 30^\circ = f/\sqrt{3}$. Vasakul pool läätse 60° all kulgevad kiiret peavad läbima peale läätsel murdumist punkti J , sh peab seda tegema piki kujutiskolmnurga kaatetit $C'B'$ kulgev kiir, mis enne murdumist moodustab optilise teljega 60° -se nurga ning pärast läätses murdumist – 30° -se nurga. ning kulgema piki kaatetit CB . Täisnurksest kolmnurgast JFB saame avaldada $|FB| = |JF| \tan 60^\circ = 3f$ ning täisnurksest kolmnurgast $B'HG$ saame avaldada $|B'G| = |HG| \tan 30^\circ = f/3$. Sümmeetria tõttu $|FA| = |B'G| = f/3$, tänu millele kolmnurga hüpotenuus $|AB| = |FB| - |FA| = 3f - f/3 = \frac{8}{3}f$.

L153 Õhkjahutus ★★★★

Autor: Jaan Kalda, lahtine, 2018, G 9

Piirkonnas, mis on dioodile lähdal ja kus seetõttu mööda plati leviv soojusenergia pole veel jõudnud õhku kaduda, on soojusvoog $P_s = 2\pi rtk \frac{dT}{dr} = 2\pi tk \frac{dT}{d \ln r}$, kus P_s on soojusena dissipeeruv soojusvõimsus. Näeme, et selles piirkonnas, kus antud eeldus kehtib, peab graafik olema sirgjoon ja selle tõus võrduma $\tan \alpha = 2\pi tk$. Graafikul on väikste r väärustele juures töepooltest selline piirkond olemas ning graafiku puutuja tõus on seal $\tan \alpha \approx 23,5$. Seega $P_s = kt \cdot 23,5 \text{ K} \approx 28,5 \text{ W}$. Kiiratud võimsus $P_k = P - P_s$ ning kasutegur $\eta = P_s/P \approx 0.43$.

L154 Hantel ★★★★

Autor: Jaan Kalda, lahtine, 2019, G 9

Tagamaks, et hantel on ekvipotentsiaalne, voolab pool laengust teisele kerale; see toimub väga kiiresti, sest varda takistus on tühiselt väike (eeldame, et RC -aeg on hulga väiksem tsüklotronperioodist). Laengu voolamise ajal mõjub vardale Ampère'i jõud $F = BL \frac{dq}{dt}$, kus q tähistab teise kera laengut. Seetõttu on ülekantav jõuimpulss leitav kui $\Delta p = \int F dt = \int BL dq = BLQ/2$. Järelikult hakkab hantel liikuma kiirusega $v = \Delta p/2m = BLQ/4m$. Kuivõrd mõlema kuuli massid ja laengud on samad, siis hakkavad nad liikuma magnetväljas ühtmoodi, tsüklotronsagedusega $\omega = BQ/2m$ ja tsüklotronraadiusega $r = v/\omega = L/2$. Järelikult on kuulikeste trajektoorid ringjooned raadiusega $L/2$ ja diameetriga L , st tegemist on kahe üksteist puudutava ringjoonega.

L155 Kiik ★★★★

Autor: , piirkonnavor, 2019, G 9

a) Minimaalne jõud: Haripunktis on Juku hetkeliselt vabalangemises ning mingit jõudu ei avalda. Seega on minimaalne jõud:

$$F_{min} = 0 \quad REMOVE$$

Maksimaalne jõud: Kiikumise ajal rakenduvad postidele 2 jõudu: Juku raskusjõud ning pöörlemisest tulev tsentrifugaaljõud. Mõlemad on maksimaalsed ning sama-suunalised, kui kiik on vertikaalasendis REMOVE. Olgu kiige pöörlemisraadius Juku masskeskme suhtes $R = H - h$. Kasutades energiäävust kiige vertikaal- ja horisontaalasendi jaoks saame:

$$mgR = \frac{mv^2}{2} \Rightarrow v^2 = 2gR \quad REMOVE$$

Tsentrifugaaljõu valemist saame:

$$F_C = m \frac{v^2}{R} = m \frac{2gR}{R} = 2mg \quad REMOVE$$

Summarne jõud:

$$F_{max} = F_C + F_R = 2mg + mg = 3mg \quad REMOVE$$

b) Minimaalne jõumoment: Kiige vertikaalasendis on jõuõlg kiigeposti alumise punkti suhtes 0, seega minimaalne jõumoment:

$$\tau_{min} = 0 \quad REMOVE$$

Maksimaalne jõumoment: Kuna väll körgusel H on ainuke kiige kinnituspunkt, rakendub kogu Juku poolt rakendatav jõud sellesse punkti REMOVE. Jõumoment on maksimaalne, kui jõuõlg H ning sellesse punkti rakenduv jõud on risti. Seega piisab maksimaalse horisontaalse jõu leidmisenst. Tähistame kiige hetkeasukoha ja haripunkti tasandi vahelise kauguse s ning nende vahelise nurga φ (vt. joonis). Tsentrifugaaljõud on alati suunatud piki raadiust ning analoogselt maksimaalse

jõu arvutusele saame energia jäädvusest:

$$F_C = m \frac{2gs}{R} = 2mg \sin \varphi \quad REMOVE$$

Lisaks tuleb arvestada raskusjõu raadiusesihilist komponenti $F_{R||} = F_R \sin \varphi = mg \sin \varphi REMOVE*$. Seega rakendub piki raadiust võllile jõud:

$$F_{||} = F_C + F_{R||} = 3mg \sin \varphi \quad REMOVE*$$

Meid huvitab selle jõu horisontaalkomponendi:

$$F_H = F_{||} \cos \varphi = 3mg \sin \varphi \cos \varphi \quad REMOVE$$

Teades, et $\sin 2\varphi = 2 \sin \varphi \cos \varphi$ saame:

$$F_H = \frac{3}{2}mg \sin 2\varphi \quad REMOVE$$

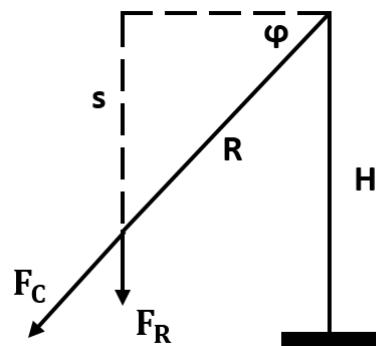
Siinuse maksimaalne väärthus on 1, mille saame $\varphi = 45^\circ$ korral, mis on antud ülesande jaoks reaalne väärthus. Seega saame maksimaalseks horisontaalseks jõuks:

$$F_H = \frac{3}{2}mg \quad REMOVE$$

Millele vastab maksimaalne jõumoment:

$$\tau_{max} = F_H H = \frac{3}{2}mgH \quad REMOVE$$

Märkus: Kui õpilane jätab maksimaalse jõumomendi leidmisel arvestamata raskusjõuga, jäääb saamata summarselt REMOVE (1.5 + 0.5, märgitud tärniga).



L156 Niit ja poolsfääär ★★★★

Autor: , lõppvoor, 2019, G 9

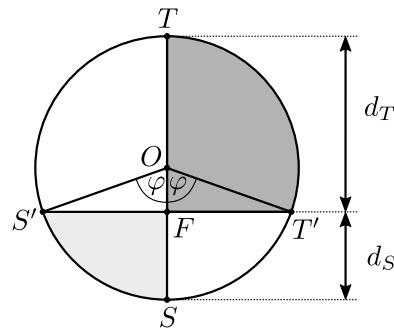
Et kera on maandatud, siis selle keskpunkti potentsiaal on 0. Superpositiooni-prinssiibi abil saame selle avaldada kui kera pinnale indutseeritud laengute Q_i ja röngal olevate laengute q_j panuste summa: $0 = \sum_i kQ_i/R + k \sum_j kq_j/l$, kus $l = \sqrt{r^2 + d^2}$ on rönga punktide kaugus kera keskpunktist. Summas saab kons-tandid sulgude ette tuua: $0 = \frac{k}{R} \sum_i Q_i + \frac{k}{l} \sum_j q_j = kQ/R + kq/l$, seega $Q = -qR/\sqrt{r^2 + d^2}$.

L157 Suvi ★★★★

Autor: Erik Tamre, lahtine, 2020, G 9

Maa liigub mööda ellipsit, kusjuures Päike asub selle pikemal sümmeetriateljel (pikemal poolteljel). Olgu Päike punktis F ning orbiidi punktid, kus algavad suvi ja talv, vastavalt S ja T , sest ülesande eeldusest teame, et Maa on Päikesele kõige lähemal suvisel pööripäeval. Tähistame suve ja talve lõpu punkti orbiidil vastavalt S' ja T' . Suvi lõppeb, kui Maa telg on risti Päkest ja Maad ühendava lõiguga ning kuna telje suund aasta jooksul ei muutu, siis $\angle SFS' = 90^\circ$. Kepleri 2. sea-duse järgi on suve ja talve pikkused võrdeliselt vastavalt kujundite FSS' ja FTT' pindaladega. Kõige mugavam on seda võrrelda ellpsi kogupindalaga, S_0 . Sellisel juhul on suve pikkus $T_S = T_{\oplus} S_{FSS'}/S_0$ ning talve pikkus $T_T = T_{\oplus} S_{FTT'}/S_0$, kus $T_{\oplus} = T = 365,26$ peva on Maa orbitaalperiood.

Ellpsi pindala on veel leitav, aga kujundite FSS' ja FTT' pindalade arvutamine on väga keeruline. Aitab tähelepanek, et ellips on väljavenitatud ring. Kuna T_S ja T_T sõltuvad vastavate kujundite pindalade suhest kogupindalaga, võime ellipsit ühes suunas välja venitada ilma et see otsitavaid suhteid muudaks. Seega võime mugavuse pärist ellpsi ringiks venitada, vaata joonist. Joonisel kujutatud pind-alad 1 ja 2 suhtuvad ellpsisse ning ringi samasugustega.



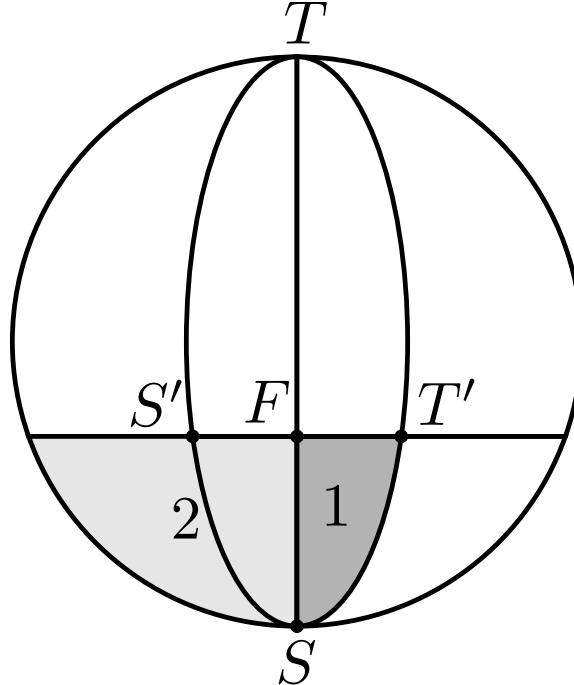
Edaspidi arvutame kõik pindalad ringiks venitatud ellpsi peal (vaata teist joonist), olgu ringi keskpunkt O .

Olgu Maa kaugused Päikesest suvisel ja talvisel pööripäeval vastavalt d_S ja d_T . Vaat-leme nüüd sfääre raadiustega d_S ja d_T , mille keskpunktides on päike. Kuna sfääri pindala on proporsionaalne selle raadiuse ruuduga ning summaarne kiirgusenergia, mis jõuab kaugusele d_T on sama, mis jõuab kaugusele d_S , siis järelikult on

Päikese heledus pöördvõrdeline kauguse ruuduga. Seega saame, et

$$\left(\frac{d_T}{d_S}\right)^2 = k^2 = 1,3,$$

kus $k = \sqrt{1,3}$ on konstant valemite mugavamaks kirjapanekuks. Niisiis, $d_T = kd_S$.



Ülejäänud ülesanne taandub geomeetria peale. FSS' ja FTT' pindalad on leitavad vastavate ringi sektorite ning kolmnurkade pindalade kaudu:

$$\begin{aligned} T_S &= T_{\oplus} \frac{S_{FSS'}}{\pi R^2} = T_{\oplus} \frac{\frac{\varphi}{360^\circ} \pi R^2 - \frac{1}{2}|OF||OS'| \sin \varphi}{\pi R^2} \\ &= T_{\oplus} \left(\frac{\varphi}{360^\circ} - \frac{\cos \varphi \sin \varphi}{2\pi} \right), \end{aligned}$$

kus me asendasime $|OS'| = R$ ning $|OF| = |OS'| \cos \angle FOS' = R \cos \varphi$. Sarnaselt,

$$T_T = T_{\oplus} \left(\frac{180^\circ - \varphi}{360^\circ} + \frac{\cos \varphi \sin \varphi}{2\pi} \right).$$

φ saame avaldada kui $\cos \varphi = |OF|/R = (R - d_S)/R$. Samas, $2R = d_T + d_S$, ehk

$$d_S = 2R/(1+k) \text{ ning}$$

$$\cos \varphi = 1 - \frac{2}{1+k} = \frac{k-1}{k+1},$$

ehk

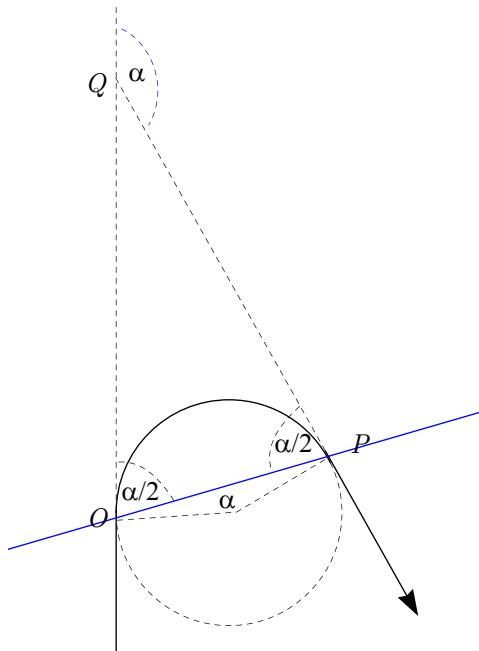
$$\varphi = \arccos \frac{k-1}{k+1} = \arccos \frac{\sqrt{1,3}-1}{\sqrt{1,3}+1} = 86,24^\circ.$$

Niisiis, otsitav aegade vahe on

$$\Delta T = T_T - T_S = T_\oplus \left(\frac{1}{2} - \frac{\varphi}{180^\circ} + \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{\pi} \right) = 15,2 \text{ peva.}$$

L158 Laengud magnetväljas ★★★★☆

Autor: , piirkonnavor, 2020, G 9



Lahendus. Sisenegu osake punktis O ja väljugu punktis P , kusjuures punkte O ja P ühendab ringjoone kaar — osakese trajektoor magnetväljas. Lõikugu osakese trajektoori sirgjooneliste lõikude pikendused punktis Q , vt joonis. Ülesande tingimuse kohaselt on nurk sirgete OQ ja QP vahel α . Et kolmnurk OQP on sümmeetria tõttu võrdhaarne, siis $\angle OQP = \alpha/2$ REMOVE. Seega peab punkt P asuma sõltumata ringjoone raadiusest sirgel OP , mis on y -telje suhtes nurga $\alpha/2$ all REMOVE, st $f(x) = x \cot(\alpha/2)$ REMOVE. Punktid joonise eest: on näidatud vähemalt üks trajektoor, millel on kaks sirgjoonelist segmenti, mis on üksteise suhtes nurga α all — trajektoori osad enne ja pärast magneväljas viibimist — REMOVE (kui joonis käsitleb vaid erijuhtu $\alpha = 180^\circ$, siis ainult REMOVE); neid segmente ühendab ringjoo kaare kujuline segment — REMOVE; üleminek sirgjooneliselt trajektoorilt ring-

jooneliseks ja vastupidi on ilma murdekohata (st sirge on ringjoone puutujaks) — REMOVE.

L159 Ŷhupallid ★★★★

Autor: , lõppvoor, 2020, G 9

Ŷhupallide raadiuste erinevus on põhjustatud Ŷhupalli kasutatavate materjalide erinevusest. Gaasi röhku tasakaalustab Ŷhupallide materjali venivusest tulenev pinge. Jõudude tasakaalu arvutamiseks vaatleme Ŷhupalli ristlõiget mis jagab Ŷhupalli kaheks vördeks pooleks. Kuna mölemad pooled on tasakaalus, peab õhu avaldatud rõhumisjõud ühele Ŷhupalli poolele tasakaalustama Ŷhupalli sisemised jõud. Olgu Ŷhupalli raadius r , ruumala V , materjali paksus δr , Youngi moodul E , õhu röhk Ŷhupalli sees p ning materjali pinge σ . Siis jõudude tasakaal esitub kujul

$$\pi r^2 p = 2\pi r \delta r \sigma,$$

kus me eeldasime et $r \gg \delta r$. Ŷhupalli deformatsioon on ligikaudu $\epsilon = r/r_0$, kus r_0 on Ŷhupalli esialgne karakterne lineaarmõõde. Seega, $\sigma = Er/r_0$. Lisaks kehitib Ŷhupalli materjali massi (ehk ruumala) jäävus. Teisisõnu, $r^2 \delta r = \alpha$, kus α on konstant. Kokkuvõttes saame, et

$$p = \frac{1}{\pi r^2} \frac{2\pi r^2 \delta r E}{r_0} = \frac{2\alpha E}{r_0} \frac{1}{r^2} = k/r^2, \quad (1)$$

kus $k = 2\alpha E/r_0$ on Ŷhupallile omane konstant. Ideaalse gaasi olekuvõrandist saame

$$n = \frac{pV}{RT} = \frac{4\pi}{3RT} pr^3 = \frac{4\pi k}{3RT} r.$$

Või siis

$$n = Akr,$$

kus A on kõikidele Ŷhupallidele ühine konstant. Niisiis, kuna mölemas Ŷhupallis on sama palju õhku, siis

$$k_1 r_1 = k_2 r_2. \quad (2)$$

Edasi, ühendades Ŷhupallid toruga, hakkab õhk suurema röhuga Ŷhupallist voolama teise Ŷhupalli. Samas paneme tähele, et Ŷhupalli röhk on pöördvõrdeline raadiuse ruuduga. See tähendab, et mida väiksemaks Ŷhupall muutub, seda kiiremini see tühjenema hakkab, sest õhuröhk aina suureneb. Seega tühjeneb esialgselt suurema röhuga Ŷhupall täielikult. Ülesande eelduste kohaselt ei pea tühjeneva Ŷhupali deformatsioonivaba mõõtmetega arvestama.

Kombineerides võrandid (1) ja (2) näeme, et

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{k_1}{k_2} \frac{r_2^2}{r_1^2} = \frac{r_2^3}{r_1^3}.$$

Kuna $r_1 > r_2$, siis teine Ŷhupall hakkab kiiremini tühjenema ning seega, $R_2 = 0$.

Esimeses õhupallis on $2n$ molekuli, st

$$2n = Ak_1 R_1 = \frac{n}{r_1} R_2.$$

Seega,

$$R_1 = 2r_1.$$

L160 Pidurdav jalgratas ★★★★☆

Autor: Kaarel Hänni, lahtine, 2021, G 9

Olgu esirattale avalduv tooreaktsioon N_1 ja tagarattale avalduv tooreaktsioon N_2 .

a) Lähme inertsiaalsesse taustsüsteemi, mis liigub kiirendusega $-a_1$. Paneme kirja jõumomendi esiratta ja maapinna kontaktpunkti suhtes:

$$\tau = \ell mg - hma_1 - 2\ell N_2. \quad (1)$$

Selleks, et tagaratas õhku ei töuseks, peab $\tau \geq 0$. Piirjuhul ei avalda maapind enam tagarattale tooreaktsiooni, kuid tagaratas ei töuse ka veel õhku. Sellisel juhul $N_2 = 0$. Paneme nüüd kirja jõudude tasakaalu: $\mu mg = ma_1$. Järelikult

$$\ell mg - h\mu mg \geq 0 \implies \mu \leq \frac{\ell}{h}. \quad (2)$$

b) Vaatame juhtu, kui pidurdatakse esipiduriga. Lähme sarnaselt osale a) inertsiaalsesse taustsüsteemi, mis liigub kiirendusega $-a_1$. Sellies taustsüsteemis kehitib jalgrattale mõjuvate jõudude ja jõumomentide tasakaal. Paneme kirja jõumomentide tasakaalu esiratta kontaktpunkti suhtes ning jõudude tasakaalud horisontaal- ja vertikaalsuundades.

$$\begin{cases} \ell mg - hma_1 - 2\ell N_2 = 0 \\ ma_1 = \mu N_1 \\ N_1 + N_2 = mg. \end{cases} \quad (3)$$

Asendades jõudude võrrandid jõumomentide võrrandisse saame, et

$$\ell mg - hma_1 + 2\ell \left(mg - \frac{ma_1}{\mu} \right) = 0. \quad (4)$$

Järelikult

$$a_1 = \frac{\ell \mu g}{2l - \mu h}. \quad (5)$$

Vaatame nüüd juhtu, kus pidurdatakse tagapiduriga. Lähme inertsiaalsesse taustsüsteemi, mis liigub kiirenudsega $-a_2$. Paneme nüüd kirja jõumomentide tasakaalu tagaratta kontaktpunkti suhtes ning jõudude tasakaalud horisontaal- ja ver-

tikaalsuundades.

$$\begin{cases} -\ell mg - hma_2 + 2\ell N_1 = 0 \\ ma_2 = \mu N_2 \\ N_1 + N_2 = mg. \end{cases} \quad (6)$$

Järelikult

$$a_2 = \frac{\ell \mu g}{2\ell + \mu h}. \quad (7)$$

Seega

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{2\ell + \mu h}{2\ell - \mu h}. \quad (8)$$

L161 Kiiruse kujutis ★★★★☆

Autor: Jaan Kalda, piirkonnavor, 2021, G 9

Valgusallika kiirusvektor ja kujutise kiirusvektor defineerivad kaks sirget, millest üks on teise kujutis. Need lõikuvad teadupärast läätse tasandil. Pikendades kiirusvektoreid lõikumiseni leiame nimetatud sirgete lõikepunktide E , mis asub läätsel. REMOVE

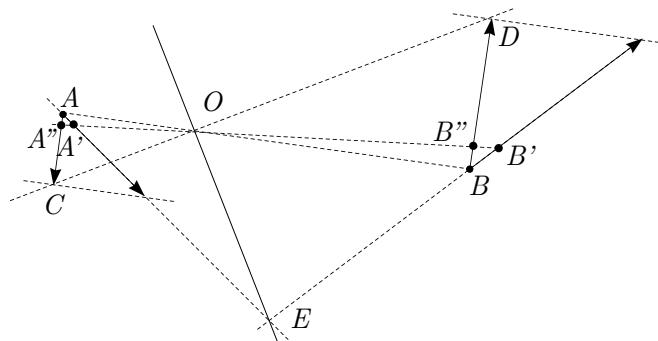
Valgusallikat ja selle kujutist ühendav sirge AB peab läbima läätsel keskpunkti. REMOVE

Sama peab kehtima sirge jaoks, mis ühendab valgusallika ja kujutise asukohti hästi lühikese ajavahemiku pärast. Üks võimalus ongi märkida valgusallika ja kujutise asukohad lühikese ajavahemiku Δt pärast — sellistes punktides A' ja B' , kus nihkevektorid $\vec{AA'}$ ja $\vec{BB'}$ on võrdelised vastavate kiirusvektoritega. REMOVE

Sellisel juhul saame leida läätsel keskpunkti kui sirgete AB ja $A'B'$ lõikepunktide. REMOVE

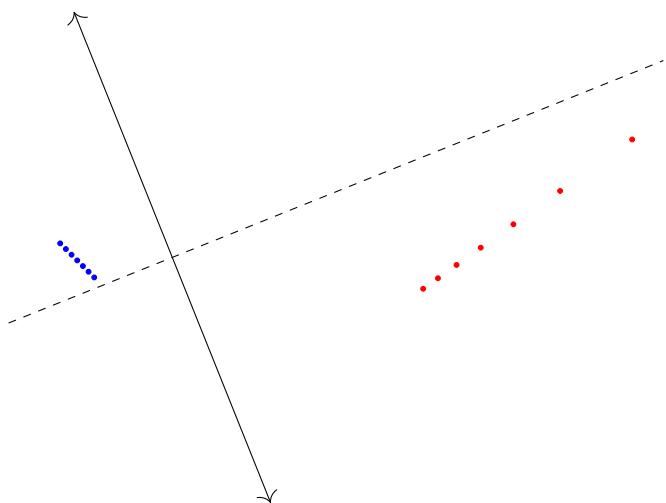
Probleem on selles, et niimoodi leitud asukoht on ebatäpne, sest kaks sirget lõikuvad väga väikese nurga all. Oluliselt täpsema tulemuse saame, kui paneme tähele, et projitseerides nihkevektorid $\vec{AA'}$ ja $\vec{BB'}$ sirge AB ristsihile vektoriteks $\vec{AA''}$ ja $\vec{BB''}$ saame sirge $A''B''$, mis lõpmatlult lühikese nihete puhul ühtib sirgega $A'B'$ ja mille lõikepunkt O sirgega AB püsib liikumatuna ka suurte nihete korral. See tõttu võime punkti O leidmiseks projitseerida kiirusvektorite lõpp-punktid sirge AB ristsirgetele punktideks C ja D . Sellisel juhul on punkt O sirgete AB ja CD lõikepunktiks. REMOVE

Läätsel tasandiks on sirge OE ja läätsel keskpunkti punkt O REMOVE.



Märkus:

Väide, et punkt A' kujutub punktiks B' kehtib ainult siis, kui punktid A' ja B' paiknevad lõpmata lähedal vastavalt punktidele A ja B . Valgusallika kiirusvektori otspunkt ei kujutu kujutise kiirusvektori otspunktiks. Kui punktvalgusallikas liigub ise konstantse kiirusega, siis ei saa sama väita tema kujutise kiiruse kohta. Alloleval joonisel on kujutatud siniste täppidega konstantse kiirusega liikuva valgusallika asukohad võrdsete ajavahemike tagant ning punaste täppidega vastavate siniste täppide kujutised. Jooniselt on näha, et punased täpid ei paikne võrdsete vahedega, järelikult kujutis ei liigu konstantse kiirusega.



L162 Vedelik peeglil ★★★★

Autor: Konstantis Dukatš, lõppvoor, 2021, G 9

Lahendus 1. Kui meil on vedelik kövera peegli peal, käitub see vedelik nagu lääts, mille ühe poole köverusraadius on sama peegli köverusraadiusega ja teise poole köverusraadius läheneb lõpmatusele. Kuna peegli laius on palju väikse kui l, h , siis on tegemist õhukese läätsegaga. Sellisel juhul läätse optiline tugevus

$$D_l = \frac{1}{f_l} = \frac{n-1}{R},$$

kus n on vedeliku murdumisnäitaja ja R on peegli köverusraadius¹. Peegli optiline tugevus

$$D_p = \frac{1}{f_p} = \frac{2}{R},$$

kus f_p on peegli fookuskaugus. Kuna valguskiired läbivad läätse kaks korda (enne peegeldamist ja pärast), siis läätse tugevusega peab arvestama kaks korda. Konbiniereides läätse ja peegli saame, et

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{k} = 2D_l + D_p,$$

kus a on objekti kaugus läätsest ja peeglist ning k on kujutise kaugus läätsest ja peeglist. Avaldades D_l ja D_p saame, et

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{k} = \frac{2(n-1)}{R} + \frac{2}{R} = \frac{2n}{R}$$

Vee korral

$$\frac{1}{h} + \frac{1}{h} = \frac{2n_v}{R} \implies R = hn_v.$$

Tundmatu vedeliku korral

$$\frac{1}{h} + \frac{1}{h-l} = \frac{2n_x}{R}.$$

Avaldades n_x saame, et

$$n_x = \frac{(2h-l)}{2h(h-l)}R = \frac{(2h-l)}{2(h-l)}n_v \approx 1,50.$$

Lahendus 2. Vaatleme allikast tulevat kiirt, mis on vertikaali suhtes nurga α all. Järelikult siseneb kiir vedelikku kaugusel $a = \alpha h$ peegli sümmetriateljест. Snelli

¹Tegu on läätsevalmistaja valemi erikujuga. Läätsvalmistaja valem annab üldjuhul sfääriliste pindadega läätse tugevuse:

$$D = \frac{1}{f} = (n-1) \left[\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} + \frac{(n-1)d}{nR_1R_2} \right],$$

kus f on läätse fookuskaugus, n on läätse materjali murdumisnäitaja õhu suhtes, R_1 on valgusallikale lähema pinna köverusraadius (koos märgikonventsiooniga), R_2 on valgusallikale kaugema pinna köverusraadius ja d on läätse paksus.

seaduse kohaselt on kiire nurk vertikaali suhtest peale vedelikku sisenemist $\frac{\alpha}{n}$. Olgu kiire nurk peale peegli vastu peegeldumist β . Väikeste nurkade lähenduses on peegli pinna normaal nurga $\frac{1}{2}(\frac{\alpha}{n} + \beta)$ all. Samas lõikub peegli pinna normaal sümmeetriateli jga kaugusel R , kus R on nõguspeegli köverusraadius. Seega,

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\alpha}{n} + \beta \right) = \frac{a}{R} = \frac{\alpha h}{R},$$

järelikult

$$\beta = \frac{2\alpha h}{R} - \frac{\alpha}{n}.$$

Edasi, pärast peegeldumist ning vedelikust järjekordset väljumist on kiire nurk vertikaali suhtes

$$\gamma = \beta n = \frac{2\alpha nh}{R} - \alpha.$$

Seega saame, et kujutise kaugus peegli pinnast on

$$\frac{1}{d} = \frac{\gamma}{a} = \frac{\gamma}{\alpha h} = \frac{2n}{R} - \frac{1}{h}.$$

Kasutades saadud seost esialgses olukorras näeme, et

$$\frac{1}{h} = \frac{2n_v}{R} - \frac{1}{h}.$$

Teisisõnu, $R = n_v h$. Pärast tundmatu vedelikuga asendamist saame aga

$$\frac{1}{h-l} = \frac{2n}{R} - \frac{1}{h} = \frac{2n}{n_v h} - \frac{1}{h}.$$

Järelikult

$$n = \frac{2h-l}{h-l} \cdot \frac{n_v}{2} \approx 1,5.$$

L163 Nurk ★★★★

Autor: Kaarel Hänni, lahtine, 2022, G 9

Taandame ülesande esmalt leidmisele, milline on maksimaalne nurk, mille võrra antud lääts kiirt murda suudab. Kui lääts ei murra ühtegeki kiirt rohkem kui nurga β võrra, siis koridori nurk ei saa olla (peaaegu üldse) väiksem kui $180^\circ - \beta$, sest nii spiooni kui koera kaugus nurgast on palju suuremad nende mõõtmetest. Kui aga leidub viis, kuidas läätse punkti X läbimine murrab mingist suunast tulevat kiirt nurga β võrra, siis saab paigutada läätse koridori nurga juurde ja pöörata see selleisse asendisse, et ühelt poolt tulev seinaga (ja põrandaga) paralleelne punkti X läbiv kiir murdub β võrra (ja jäab ka pärast murdumist põrandaga paralleelseks). Kuna läätse mõõtmed on vörreldes nii spiooni kui koera mõõtmetega väikesed, siis kui koridori nurgaks on $180^\circ - \beta$, siis (kui spioon täpselt parajalt kõrguselt vaatab) läbib selline spiooni silmast lähtuv kiir koera. Täpselt vastassuunaline koeralt lähtuv kiir jõuab seega spiooni silma. Nende kahe väite kombineerimisel saame, et

koridori minimaalne võimalik nurk on $180^\circ - \beta$, kus β on maksimaalne nurk, mille võrra kiir läbi läätse minnes murduda saab.

Olgu läätse keskpunkt O . Vaatleme maksimaalse nurga võrra murduvat kiirt; langeu see läätsele punktis X . Olgu Y kiirega paralleelse läätse keskpunkti läbiva kiire ja läätse fokaaltasandi lõikepunkt. Kuna paralleelne kiirtekimp koondub fokaaltasandil samasse punkti ja kuna põiknurgad on võrdsed, siis murdub see kiir täpselt $\angle XYO$ võrra. Kui lääts pole kiire ja sirge OX defineeritud tasandiga risti, siis saab läätse telje OX ümber selle tasandiga risti keerates väiksema $|OY'|$ (aga samal sirgel), mistöttu saab ka suurema $\angle XY'O$. Kuna vaatlesime juba algusest maksimaalse nurga võrra murduvat kiirt, on see võimatu, nii et lääts peab olema kiire ja sirge OX defineeritud tasandiga risti. Selle kiirega paralleelset kiirtekimpu, mis langeb läätsele sirgel OX , vaadeldes näeme, et punkt X peab olema läätse äärel.

Me teame praeguseks, et maksimaalse nurga võrra murduv kiir langeb läätse äärel olevale punktile ja sellisest suunast, et kiire ja sirge OX defineeritud tasand P on läätse tasandiga risti. Paneme tähele, et iga punkti Y'' jaoks, mis on P ja läätse fokaaltasandi ühisosas (kutsume seda sirgeks ℓ), saab valida kiire, mis langeb läätsele punktis X ja läbib punkti Y'' (selle saab unikaalselt konstrueerida teiselt poolt tuleva Y'' ja X läbiva kiire pööramisega). Maksimaalse nurga võrra murduval kihrel peab seega olema Y see punkt sirgel ℓ , mille jaoks on $\angle XYO$ suurim võimalik. Paneme tähele, et ℓ ja OX on paralleelsed sirged vahekaugusega f . Piirdenurga ja kesknurga seost kasutades on $\angle XY''O$ maksimaalne, kui kolmnurga $XY''O$ ümberringjoone raadius on minimaalne. See juhtub siis, kui ringjoon puutub sirget ℓ (ringjoont suuremaks libistades läbib köik muud punktid sirgel ℓ) mis juhtub siis, kui $XY'' = OY''$. Siit järeldamme, et XYO on võrdhaarne kolmnurk alusega r ja kõrgusega f . Siit $\angle XYO = 2 \arctan\left(\frac{r/2}{f}\right) \approx 28,07^\circ$, kust $\alpha \approx 180^\circ - 28,07^\circ \approx 152^\circ$.

L164 Pikne ★★★★

Autor: Jaan Kalda, piirkonnavor, 2022, G 9

a) Elektriväli maapinnal on elektriväli plaatkondensaatori sees, seega $E = Q/\epsilon_0 S$, kus S on plaadi (st pilve alumise pinna) pindala REMOVE. Selle avaldise võib leida Gaussi seadusest võrrutades elektrilise D -välja voo ES/ϵ_0 mõttelise pinna sisse jääva laenguga Q . Alternatiivselt võib selle leida plaatkondensaatori mahtuvuse valemist, mispuhul jagunevad need 3 punkti järgnevateks tükkideks: mahtuvuse C definitsiooni $q = UC$ eest (suvalisel ekvivalentsel kujul) REMOVE; elektrivälja tugevuse ja pinge vahelise seose $U = Ed$ eest REMOVE; valemi $C = \epsilon_0 S/d$ eest REMOVE. Siit avaldame pilve kogulaengu $Q = \epsilon_0 E \pi d^2 / 4 \approx 80 \text{ C}$ (valemi eest REMOVE). Välguna maha voolanud laengu leiame kui keskmise voolutugevuse ja vooluimpulsi kestvuse korrutise, $q = I\tau = 30 \text{ C}$ (avaldise eest REMOVE). Seega maha voolas $300/8\% \approx 40\%$ kogulaengust; õige numbrilise vastuse eest REMOVE.

b) Vaatleme mõttelist poolsfääril maa sees raadiusega r : vool I jaguneb ühtlaselt üle selle pinna nii, et voolu ruumtihedus $j = I/2\pi r^2$ REMOVE. Sellisel juhul elektrivälja tugevus $E = \rho j$ REMOVE, seega $E = I\rho/2\pi r^2$ ning jalgade vahel jääv pinge $U = Eh$ REMOVE, millest saame asendamiste järel $U = Iph/2\pi r^2$, kus $h \approx 1 \text{ m}$ tähistab jalgade vahemaad (mõistliku hinnangu tegemine 0,5 meetrist 1,2 meetri ni annab REMOVE). Seega kaugus välgulöögi kohast $r = \sqrt{I\rho h / 2\pi U} \approx 52 \text{ m}$; õige

arvuline väärthus, mis vastab kasutatud h väärthusel annab REMOVE.

Märkus: lihtsa valemi $U = Eh$ asemel võib kasutada ka integreerimist, $U = \int_r^{r+h} E dr = I\phi/2\pi[1/r - 1/(r+h)]$, aga selline täpsus pole vajalik, sest jalgade vahelise vahemaa pikkus ise on palju ebatäpsem, kui saavutatud võit täpsuses, seetõttu selline integreerimine punkte juurde ei anna.

L165 Satelliit ★★★★

Autor: Jaan Kalda, lõppvoor, 2022, G 9

Kui satelliiti oleks kahe absoluutsest musta plaadi vahel, mille temperatuur on T_0 , siis saavutaks ta peatselt soojusliku tasakaalu, st omandaks temperatuuri T_0 . Sellisel juhul kiurgaks ta soojust koguvõimsusega $P_0 = S\sigma T_0^4$, kus S on ta kogupindala. Nüüd saab ta aga soojuskiirust kaks korda vähem seetõttu, et on vaid üks plaat. Arvestades Maa ja musta plaadi soojuskiirguste tiheduste suhtega ϵ , saame satelliidile langeva koguvõimsuse $P_1 = \epsilon S\sigma T_0^4/2$. Soojustasakaalu korral kiirgab satelliit sama palju, kui ta saab soojust, st $\epsilon S\sigma T_0^4/2 = S\sigma T^4$. Siit saame avaldada satelliidi temperatuuri:

$$T = (\epsilon/2)^{1/4} T_0 \approx 213 \text{ K} \approx -60^\circ\text{C}.$$

L166 Klots ja silinder ★★★★

Autor: Taavet Kalda, lahtine, 2023, G 9

Olgu nõlva kaldenurk α ning hõõrdetegur μ .

Kuna silinder veeres libisemata, asus selle pöörlemiskese silindri ja mäenõlva kontaktpunktis. Vaatleme jõumomentide tasakaalu selle punkti suhtes. Kui silindri nurkkiirendus on ϵ , siis

$$I'\epsilon = mgR \sin \alpha,$$

kus $I' = mR^2/2 + mR^2 = 3/2mR^2$ on silindri inertsimoment kontaktpunkti läbiva telje suhtes (kasutades Steineri teoreemi). Silindri kiirendus on seega

$$a_1 = R\epsilon = \frac{mR^2}{I'} \sin \alpha = \frac{2}{3}g \sin \alpha.$$

Klotsi kiirendus allamäge takistab hõõrdejõud $mg \cos \alpha \mu$ ning kiirendab raskusjõud $mg \sin \alpha$. Klotsi kiirendus on seega

$$a_2 = g \sin \alpha \mu - g \cos \alpha \mu.$$

Peale silindri ja klotsi ühendamist hakkavad nad ühtse kehana mäest alla kiirendusega a_3 . Kui liigese pinge on T , siis silindrile mõjuvad jõud on rasakuirendus, liigese pinge ning hõõrdejõu ja tooreaktsiooni resultant. Kuna silinder ei libise, võime silindri jõumomentide tasakaalu jälle mäenõlva kontaktpunkti suhtes vaadelda (sest siis $a_3 = \epsilon/R$):

$$I'\epsilon = mgR \sin \alpha + TR = I' \frac{a_3}{R}.$$

Liigese pinge on seega

$$T = \frac{3}{2}ma_3 - mg \sin \alpha.$$

Klotsile mõjuvad sarnaselt liigese pinge, raskuskiirendus ning hõõrdejõu ja toe-reaktsiooni resultant. Mäenõlvaga paralleelne jõudude tasakaal esitub kujul

$$ma_3 = mg \sin \alpha - T - mg \cos \alpha \mu = 2mg \sin \alpha - \frac{3}{2}ma_3 - mg \cos \alpha \mu.$$

Seega,

$$a_3 = \frac{4}{5}g \sin \alpha - \frac{2}{5}g \cos \alpha \mu.$$

Näeme, et

$$a_3 = \frac{2}{5}a_2 + \frac{3}{5}a_1.$$

Ei tule suure üllatusena et tegu on kaalutud keskmisega, kus kiirendus on esimese ja teise stsenaariumite kiirenduste vahel.

Kui mäenõlva pikkus on L , siis kehtib $L = at^2/2$, st

$$\begin{aligned} t_3 &= \sqrt{\frac{2L}{a_3}} = \sqrt{\frac{2L}{\frac{2}{5}a_2 + \frac{3}{5}a_1}} = \sqrt{\frac{2L}{\frac{2}{5}\frac{2L}{t_2^2} + \frac{3}{5}\frac{2L}{t_1^2}}} \\ &= \sqrt{\frac{5}{2t_1^2 + 3t_2^2}} t_1 t_2 = 5,6 \text{ s}. \end{aligned}$$

L167 Sügav kaev ★★★★☆

Autor: Jaan Kalda, piirkonnavor, 2023, G 9

Vesi lõpetab kerkimise, kui see hakkab toru ülemises otsas keema, st küllastunud veeauru rõhk seal saab võrdseks atmosfäärirõhuga. Et temperatuuri tõustes küllastunud veeauru rõhk kasvab, siis vesi kaevu torus hakkab keema suurema rõhu juures, mistõttu veesamba kõrgus torus jääb väiksemaks.

Küllastunud veeauru rõhu saame leida vaadeldavatel temperatuuridel tänu sellele, et teame veeauru tihedust õhus ning õhu suhtelise niiskust. Kirjutame ideaalse gaasi olekuvõrrandi õhus oleva veeauru jaoks: $p_a V = \frac{m_a}{\mu} RT$ REMOVE, kus p_a on veeauru osarõhk, V on ruumala ja m_a on selles ruumalas oleva veeauru mass. Jägades selle võrduse V -ga saame siduda rõhu ja tiheduse, $p_a = \frac{\rho_a}{\mu} RT$ REMOVE.

Küllastunud auru rõhk on leitav suhtelise õhuniiskuse definitsioonist: $p_k = p_a/r$ REMOVE, millest küllastunud aururõhu muutus $\Delta p_k = \frac{\rho_a}{\mu} R(T_1/r_1 - T_2/r_2)$ REMOVE. Kaevutoru alumise otsa juures, kus põhjavee vaba pind on kontaktis atmosfääriga, on rõhk vees võrdne atmosfääri rõhuga p_0 . Torus oleva veesamba ülemise otsa juures, kus toimub keemine, on rõhk torus väiksem veesamba tekitatud rõhu võrra, $p = p_0 - \rho_v gh$ REMOVE, kus h on veesamba rõhk. Et pumbates pumbatakse torust rõhk välja ning asemele keeb veeaur, siis võime lugeda, et torus ongi puhas veeaur REMOVE, mille rõhk on võrdne küllastunud veeauru rõhuga antud temperatuuril, sest toimub keemine REMOVE, seega $p_k = p_0 - \rho gh$. Et p_0 ei muudu, siis saame selle võrduse abil siduda veesamba kõrguse muudu küllastunud veeauru

rõhu muuduga: $\Delta p_k = \rho g \Delta h$ REMOVE, kust saame, et

$$\Delta h = \frac{\rho_v R}{\mu \rho g} \left(\frac{T_1}{r_1} - \frac{T_2}{r_2} \right) \quad REMOVE$$

ning numbriliselt $\approx 14 \text{ cm}$ REMOVE.

L168 Staatiline elekter ★★★★☆

Autor: Jaan Kalda, lõppvoor, 2023, G 9

Metalli pinnal paiknevad laengud ümber nii, et metalli sees oleks elektrivälja tugevus null. See tähendab, et kile alla koguneb kilega võrdne ja vastasmärgiline pindlaeng pindtihedusega $-\sigma = -Q/S$, kus Q on kilel olev kogulaeng.

Kile tekitab metalli pinnal elektrivälja tugevusega $E = \sigma/2\epsilon_0$; selle saab tuletada kas Gaussi teoreemist või plaatkondensaatori mahtuvuse valemi $C = \epsilon_0 S/d$ arvestades, et plaatide vahelisse välja panustavad mölemad plaadid võrdselt, st kumbki tekitab välja tugevusega $E = U/2d$, kus U on kondensaatori pinge ja d on plaatide vahekaugus. Paneme tähele, et kile materjali elektrist läbitavust ϵ me ei pea mängu tooma, sest vaatleme elektrivälja vahetult metalli kohal, plaudi ja kile vahelises mikroskoopilises õhupilus. Metalli pinnale indutseeritud laengule $-Q$ mõjud joud $F_C = QE = 2\epsilon_0 E^2 S$. Selle kompenseerib tooreaktsioon $N = F/\mu$, tänu millele jõuame võrrandini

$$F = 2\mu\epsilon_0 E^2 S \Rightarrow E = \sqrt{F/2\mu\epsilon_0 S}.$$

Kui viia kile kaugusele h , siis laengute pindtihedused kilel ja metallil ei muudu, ja seetõttu ei muudu ka väljatugevus kille ja plaudi vahel, st plaudi ja kile vaheline pinge on leitav kui $U' = 2Eh$; tegur 2 tuleneb siin sellest, et praegu vajame kile ja plaudi vahel olevat summaarset välja tugevust $2E$, mitte ühe plaudi tekitatud väljatugevust E . Niisiis

$$U' = h\sqrt{2F/\mu\epsilon_0 S} = 42 \text{ kV}.$$

L169 Kondensaatorid ★★★★☆

Autor: Uku Andreas Reigo, lahtine, 2024, G 9

Kondensaatori mahtuvusest $C = \frac{\epsilon_0 b^2}{d}$ järeltub, et meil $C_1 = \frac{\epsilon_0 b^2}{d}$ ja $C_2 = 4C_1$. Jadamisi ühendatud kondensaatorite jaoks on $C_{tot} = \frac{1}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{4C_1}} = \frac{4C_1}{5}$, seega laeng kõigil plaatidel on $Q = CU = \frac{4UC_1}{5}$. Pingi esimesel kondensaatoril on $U_1 = \frac{Q}{C_1} = \frac{4U}{5}$ ning teisel kondensaatoril järelkult $U_2 = \frac{U}{5}$. Vastavalt, kuivõrd elektriväli kondensaatoris on $E = \frac{U}{d}$, rakendub osakesele esimese kondensaatori alas kiirendus $a_1 = \frac{U_1 q}{dm} = \frac{4Uq}{5dm}$ ning teise kondensaatori alas $a_2 = \frac{U_2 q}{dm} = \frac{Uq}{5dm}$. Defineerime koordinaadid nii, et x -telg on osakese algses liikumissuunas ning y -telg on piki kondensaatori plaate ühendavat sirget.

Liikumisel huvitab meid 3 piirkonda:

- $0 < x < b$: Osake on selles piirkonnas aja $T_1 = \frac{b}{v_0}$ ning talle rakendub y -telje suunaline kiirendus a_1 . Seega keskmise y -telje suunaline kiirus on $\bar{v}_1 = \frac{a_1 T_1}{2} = \frac{2Uqb}{5dmv_0}$. Kiirendus on positiivse q korral alla

- $b < x < 2b$: Osake on selles piirkonnas aja $T_2 = \frac{b}{v_0}$ ning kiirendust ei rakendu. Osakese kiirus on $v_2 = 2\bar{v}_1 = \frac{4Uqb}{5dmv_0}$
- $2b < x < 4b$: Osake on selles piirkonnas aja $T_3 = \frac{2b}{v_0}$ ning rakendub y -telje suunaline kiirendus a_2 vastassuunas esimese kondensaatoriga võrreldes. Osakese algkiirus on v_2 ning keskmise kiiruse $\bar{v}_3 = v_2 - \frac{T_3 a_2}{2} = \frac{4Uqb}{5dmv_0} - \frac{Uqb}{5dmv_0} = \frac{3Uqb}{5dmv_0}$ samas suunas, mis algsest.

Kõkkuvõtvalt on y -telje suunaline nihe $y = T_1\bar{v}_1 + T_2v_2 + T_3\bar{v}_3 = \frac{12Uqb^2}{5dmv_0^2}$.

L170 Laetud kuul ★★★★

Autor: Konstantin Dukatš, piirkonnavor, 2024, G 9

Alguses on kuuli laeng väike, nii et pingi ja seega ka vool takistil R on väike. See tõttu on elektronidele saabuv laengu vool suurem kui väljavoolav vool. Seetõttu kuhjub laeng kuuli pinnale kuni voolude tasakaalustamiseni.

Olgu $S = \pi a^2$ kuuli ristlõike pindala. Saame kirjutada voolu tasakaalu võrrandi:

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = -e \frac{\Delta N}{\Delta t} = -en_e v S = -en_e v \pi a^2.$$

Pinge takistil on võrdne $V = IR = \varphi - 0 = \varphi$, kus φ on potentsiaal kuuli pinnal, 0 on maapinna potentsiaal.

$$\varphi = -en_e v \pi a^2 R,$$

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{a}.$$

Sit leame:

$$Q = 4\pi\epsilon_0 \varphi a = -4\pi^2 \epsilon_0 e n_e v a^3 R.$$

Eeldus, et $v \gg n_e e^2 a^2 R / m$, oli vajalik selleks, et ignoreerida, et laetud kuul on elektronide liikumisele vastu, tõrjudes neid.

L171 Udu ★★★★

Autor: Jaan Kalda, lõppvoor, 2024, G 9

Ideaalse gaasi olekuvõrandist kujul $p = \frac{\rho}{\mu} RT$ saame võrandi $\rho_k/\mu_a = \rho/\mu$, kus märja õhu keskmise molaarmassi $\mu = (1-r)\mu_a + r\mu_v$ ning r tähistab veemolekulide suhtosa kõikide molekulide arvu. Sellest võrdusest saame avaldada $r = \frac{\mu_a}{\rho_k} \frac{\rho_k - \rho}{\mu_a - \mu_v} \approx 0,030$.

Moolide arvtiheduse saame kõige mugavamalt teada kuiva õhu andmetest: temperatuuril T_1 on see $n_0 = \rho_k/\mu_a$ ja järelikult temperatuuril $T_2 - n = \rho_k T_1 / \mu_a T_2$. Seega, kui üleküllastunud aur ei kondenseeruks piiskadeks, oleks veeauru tiheus $\rho'_v = nr\mu_v = \rho_k r \frac{\mu_v}{\mu_a} \frac{T_1}{T_2} \approx 23,4 \frac{\text{g}}{\text{m}^3}$. Et see on suurem, kui ρ_m , siis osa veeaurust kondenseerub; tähistades vee molaarse osakaalu uue väärtsuse r' -ga saame seose $\rho_m = nr'\mu_v$ ning võrreldes seda ρ'_v avaldisega näeme, et

$$r' = r \frac{\rho_m}{\rho'_v} \approx 0,012.$$

Vaatleme teatud hulka kuiva õhu molekule (st kõiki teisi õhus sisalduvaid moleküle peale vee molekulide, edaspidi lihtsalt "õhumolekule"), mis täidavad enne kondenseerumist ruumala V ning peale kondenseerumist - ruumala V' . Et õhumolekulide hulk on enne ja pärast kondenseerumist sama, siis $(1-r)nV = (1-r')nV'$, millest $V/V' = \frac{1-r'}{1-r}$; siinjuures kasutasime fakti, et tulenevalt ideaalse gaasi olekuvõrrandile püsib konstantsel temperatuuril toimuva kondenseerumise käigus moolide arvtihedus muutumatuna.. Kuivõrd vee molekulid ei kadunud ära, vaid osa neist läks üksnes piiskadesse, siis vee ja kuiva õhu molekulide summaarne suhttarv ei muutunud, st uues ruumalas V' on ka vee molekule sama palju, kui enne oli ruumalas V . Seetõttu on neis ruumalades ka kogumassid võrdsed ning uduga õhu tiheduseks saame $\rho'' = \rho' \frac{1-r'}{1-r}$, kus $\rho' = \rho T_1 / T_2$ tähistab niiske jahtunud õhu tihedust enne kondenseerumist. Niisiis

$$\rho'' = \rho \frac{T_1}{T_2} \frac{1-r'}{1-r} \approx 1254,3 \frac{\text{g}}{\text{m}^3}.$$

L172 Pulk ★★★★

Autor: Jaan Kalda, lahtine, 2018, G 10

Esimese ja teise kaadri-intervalli jooksul pöördus pulk sama nurga vörra, see tähendab, et peaegu horisontaalne pulga asend peab pärinema keskmiselt kaadrilt ja ülejäänud asendid on ca $\pm 140^\circ$ vörra pööratud. Üldust kitsendamata võime eeldada, et vasak alumine asend vastab esimesele kaadrile (kui see vastab tegelikult viimasele, siis vaatleme pulga liikumist tagurpidi kulgevas ajas). Jooniselt teeme kindlaks, et esimese kaadriintervalli jooksul nihkus pulga peenem ots horisontaalsihis paremale ca $p_1 = 155 \text{ cm}$ vörra ja jämedam ots $-j_1 = -20 \text{ cm}$ vörra. Et teatud pulga punkti horisontaalne nihe esimese kaadriintervalli jooksul s_1 on lineaarne funktsioon selle punkti kaugusest x pulga jämedamast otspunktist, siis $s_1 = p_1 \frac{x}{L} + j_1(1 - \frac{x}{L})$, kus L tähistab pulga pikkust. Analoogselt leiame nihked teise kaadriintervalli jaoks $p_2 = -105 \text{ cm}$ ja $j_2 = 75 \text{ cm}$ ning $s_2 = p_2 \frac{x}{L} + j_2(1 - \frac{x}{L})$. Et massikeskme horisontaalne kiiruskomponent ei muudu, siis $s_1 = s_2$, milles $\frac{x}{L}(p_1 - p_2 + j_2 - j_1) = j_2 - j_1$, st $x = L \frac{95}{355} \approx 27 \text{ cm}$. Teeme nüüd jooniselt kindlaks massikeskme vertikaalsihilised nihked: $v_1 = 45 \text{ cm}$ ja $v_2 = -50 \text{ cm}$. Olgu kaadriintervall τ ; massikeskme keskmine kiirus esimese kaadriintervalli jooksul oli v_1/τ ja teise jooksul $-v_2/\tau$ ning muutus $-(v_2 - v_1)/\tau = -g\tau$, seega $\tau = \sqrt{(v_1 - v_2)/g} \approx 0,31 \text{ s}$.

L173 Lame maa ★★★★

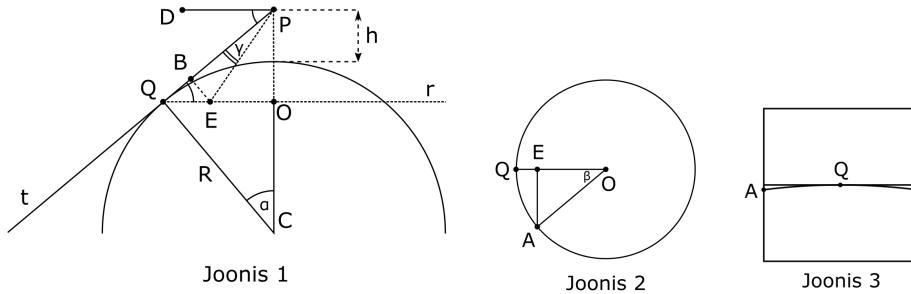
Autor: Andres Pöldaru, lahtine, 2019, G 10

Lennukist nähtav maakera horisont moodustab ringjoone. Selle ringjoone eri punktid asuvad kaamerast eri kaugustel. Millise kujutise kaamera sensorile tekib ringjoon, mille erinevate punktide kaugus kaamerast on erinev? Kõik kaamera vaatenurgas olevad ringjoone punktid on kaamerast väga kaugel. Kindlasti on lennukist näha kilomeetrite kaugusele, aga kaamera ise on väike. Seeaga on kõik horisondi punktid sisuliselt lõpmatuses ja võime heas lähenduses eeldata, et kaamera on nendele samamaagset fokusseeritud. Kujutise leidmiseks tuleb

kõik kiired projekteerida suvalisse tasandisse, mis on kaamera optilise peateljega risti.

Teeme joonise nr 1 maakera läbilõikega, kus Juku asub maakera kohal punktis P . Kaamera optiline peatelg on suunatud punkti Q . Olgu äärmine nähtav horisondi punkt A ja selle projektsioon joonise tasandile E . Lennukist nähtava horisondi poolt moodustatud ringjoone keskpunkt on O . Projekteerime lennukist (punktist P) tõmmatud kiired tasandile, mis on optilise peateljega risti ja läbib punkti E .

Joonisel nr 2 on kujutatud horisondi ringjoont keskpunktiga O eraldi, kus on näha äärmine nähtav punkt A ja selle projektsioon E eelmise joonise tasandisse. Heas lähenduses $\angle AOQ = \beta$, sest punktid O ja P on teineteisele lähedal ja pildi peal on punkti A näha pildi servas peaaegu serva keskel (joonis 3). Täpselt pildi keskel on äärmiste punktide vahel $2\beta = 60^\circ$.



Äärmise kiire projektsioon $|BE|$ vastab pildi peal üles-allu suunale. Seda projekt-siooni iseloomustab nurk $\gamma = 90^\circ - \alpha - \angle EPO$. Joonisel 1 leiame

$$\cos \alpha = \frac{R}{R+h},$$

kust

$$\alpha \approx 3,3^\circ.$$

Veel leiame

$$|OQ| = R \sin \alpha \approx \alpha R$$

ja

$$|OP| = R + h - R \cos \alpha = \frac{h^2 + 2Rh}{R+h} \approx 2h.$$

Joonise 2 abil leiame

$$|OE| = |OQ| \cos \beta \approx \alpha R \cos \beta.$$

Nüüd saame leida joonisel 1 nurga γ .

$$\gamma = 90^\circ - \alpha - \angle EPO = 90^\circ - \alpha - \arctan \frac{|OE|}{|OP|} \approx 0,34^\circ.$$

Nurgale vastava suuruse pildil saame leida, arrestades, et poolele vaatenurgale $\beta = 25^\circ$ vastab 5 cm. Projektsioonid samasse optilise peatlejega ristuvasse tasandisse

on võrdelised vastavate projektsioonidega välja prinditud pildil.

$$\frac{x}{5 \text{ cm}} = \frac{\tan \gamma}{\tan \beta} \rightarrow x = 0,64 \text{ mm.}$$

Alternatiivne lahendus: Joonistame vaatluspunktist P maakerale M puutujakoonuse K ning olgu M ja K puutejoon ring R keskpunktiga O . Olgu ringil R punkt Q pildivälja keskpunktkiks. Tähistame punkti Q läbiva M puutujatasandi t -ga ning ringi R poolt defineeritud tasandi r -ga. Olgu r ja t lõikejoon T . Teoreemist ringi puutujate kohta näeme, et $|PQ| = \sqrt{dh}$, kus d on Maa diameeter ja h - vaatluspunkti kõrgus. Seega nurk, mille all paistab Maa keskpunktist lõik OQ on väikeste nurkade lähenduses $\alpha \approx 2|PQ|/d = 2\sqrt{h/d}$ ning $|OP| \approx \alpha|PQ| = 2h$. Märgime ringil r punkti A nii, et kaarele QA vastav kesknurk oleks $\beta = 25^\circ$; punkti A kujutis asub pildi serval ning sirge T kujutiseks on sirgjoon. Tõmbame punktist A ristsirge tasandile t ; tähistame selle ristsirge lõikepunktit tasandiga t B -ga. Lõigu AB kujutis pildil on meie otsitav suurus. Et punkti A kaugus sirgest T on $|OQ|(1 - \cos \beta)$ ja tasandite t ning r vaheline nurk sarnaste kolmnurkade põhjal $\alpha \ll 1$, siis $|AB| \approx \alpha|OQ|(1 - \cos \beta) \approx 2h(1 - \cos \beta)$. Punkti A kaugus sirgest PQ omab ligikaudu pikkust $a = |OQ|\sin \beta$ ja kujutub pildi poolaiuseks $a' = 5 \text{ cm}$. Järelikult kujutub lõik AB lõiguks pikkusega $|AB|a'/a \approx a'\alpha(1 - \cos \beta)/\sin \beta \approx 2a'\sqrt{h/d}(1 - \cos \beta)/\sin \beta \approx 0,64 \text{ mm}$.

L174 3 dioodi ★★★★

Autor: , piirkonnavor, 2019, G 10

Lahendus. Vaatleme protsessi, kus sisendpinget hakatakse aeglasealt suurendama alates nullist. Väikese voolu korral on pingelang takisteil tühine, seetõttu on kõigi dioodide pinged peaegu võrdsed. See tähendab, et esimesena avaneb kõige madalama avanemispinge diaod - punane diaod. Voolu kasvatamisel pingelang takisteil kasvab; et esialgu on roheline diaod suletud, siis läbib mölemat takistid sama tugev vool, mis tähendab et ka takistite pinged on võrdsed. Et rohelise ja punase diaodi avanemispingete vahe on suurem, kui sinise ja rohelise diaodi avanemispingete vahe, siis järgmisena avaneb sinine diaod. Sellest hetkest, kui sinine diaod on avatud, ei saa takistite voolud enam kasvada (potentsiaalid takistite otstel on määratud sinise ja punase diaodi avanemispingetega) mistõttu roheline diaod jääb kogu aeg suletuks, st rohelisse diaodi minev vool on null REMOVE. Nüüd on kaks takistit järjestikühenduses, kusjuures pingi otste vahel on võrdne sinise ja punase diaodi avanemispingete vahega $U_T = 1,4 \text{ V}$. REMOVE See tähendab, et vool takisteis on $I_t = U_t/(2r) = 0,7 \text{ A}$ REMOVE. See on ka punase diaodi vool, mis tähendab, et punase diaodi võimsus $P_p = 0,7 \text{ A} \cdot 1,8 \text{ V} \approx 1.3 \text{ W}$ REMOVE. Sinise diaodi läheb sisendvoolu ja takistite voolu vahe $0,3 \text{ A}$ REMOVE, mistõttu sinise diaodi võimsus $P_s = 0,3 \text{ A} \cdot 3,2 \text{ V} \approx 1.0 \text{ W}$ REMOVE. Rohelise diaodi võimsus on null. REMOVE

L175 Pöörduv elektriväli ★★★★☆

Autor: , lõppvoor, 2019, G 10

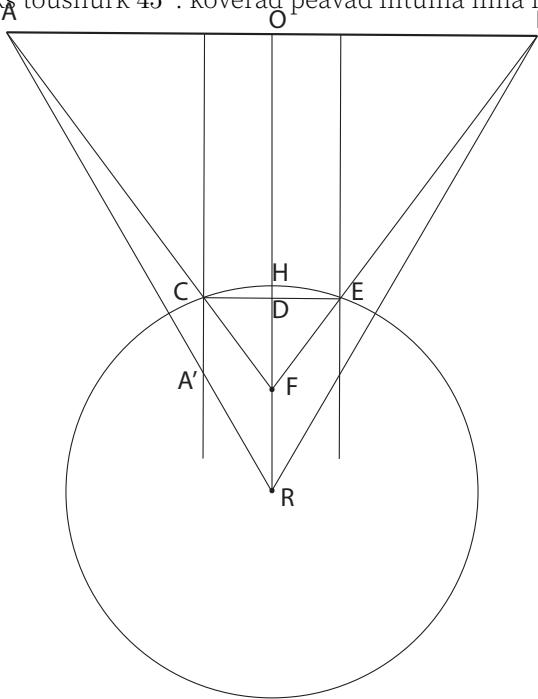
Et osakese x -telje sihiline keskmise kiirus v_x oleks null, peab ajaperioodidel $4nT + T \leq t < 4nT + 2T$ ja $4nT + 3T \leq t < 4nT + 4T$ olema v_x väärised vördsed ja vastasmärgilised, vastavalt u ja $-u$; ajavahemikul $4nT + 2T \leq t < 4nT + 3T$ annab elektriväli osakesele x -suunalise impulsi $-E_0 q T$, seetõttu

$$2mu = E_0 q T \Rightarrow u = \frac{E_0 q T}{2m}.$$

Järgneva veerandperioodi jooksul püsib osakese x -sihiline kiirus konstantsest vördsne u -ga ning seega nihkub osake sel ajal x -telje sihis $x_1 = uT$ võrra. Järgneva kaheksandikperioodi jooksul (ketusega $T/2$) kahaneb kiirus lineaarselt ajas nullini, seetõttu on täiendav nihe leitav keskmise kiiruse $\frac{u}{2}$ abil, $x_2 = \frac{u}{2} \cdot \frac{T}{2} = uT/4$; sümmeetria tõttu toimus samasugune nihe ka konstantse kiirusega veerandperioodile eelenenud kaheksandikperioodi jooksul, st kogunihe (ja seega trajektoori x -telje sihiline läbimõõt) on

$$x_1 + 2x_2 = \frac{3}{2}uT = \frac{3E_0 q T^2}{4m}.$$

Sümmeetria tõttu on y -telje sihiline läbimõõt samasugune. Trajektooriks on kujund, mis koosneb neljast parabolist — iga järgmine parabool on saadud eelmiest täisnurga võrra pööramisel (paraboolide pikkused peavad olema sellised, et otspunktides oleks täusnurk 45° : kõverad peavad liituma ilma murdepunktita).



L176 Koonus ★★★★

Autor: Jaan Kalda, lahtine, 2020, G 10

a) Vaatleme koonuse pinna tasandis toimivaid jõude. Nööri pinge tasakaalustab alati raskusjõu pinnasilhilise komponendi, seega pinnasilhilised jõud puuduvad, mistöttu liigub kuulike koonuse pinnalaotusel mööda sirjoont. Seetõttu on tee pikkus pinnalaotusel algasendist kuni suurima lähenemiseni tipule $L = l_0 \cos \beta$ ning seega otsitav aeg $t = L/v_0 = l_0 \cos \beta/v_0$.

b) Ilmselt on õhku hüppamise mõttes köige ohtlikum koonilist pinda mööda liikuvaa kuulikese trajektoori kõrgeim punkt, mille kaugus tipust on $l_0 \sin \beta$. Kuivõrd tegemist on kõrgeima punktiga, siis on trajektoori puutujatasand seal horisontaalne ning trajektoori kõverusraadius võrdne antud punkti kaugusega koonuse teljest: $R = l_0 \sin \beta \cos \alpha$. Seega on kuulikese kesktõmbekiirendus $a = v_0^2/R$ suunatud horisontaalselt telje suunas. Piirjuhul on selle kiirenduse pinnanormaalilihiline komponent $v_0^2 \sin \alpha / R$ võrdne vastava raskuskiirenduse komponendiga $g \cos \alpha$. Seega saame tingimuseks $v_0^2 \tan \alpha \leq g l_0 \sin \beta \cos \alpha$, st

$$v_0^2 \leq \frac{3}{2} g l_0 \sin \beta.$$

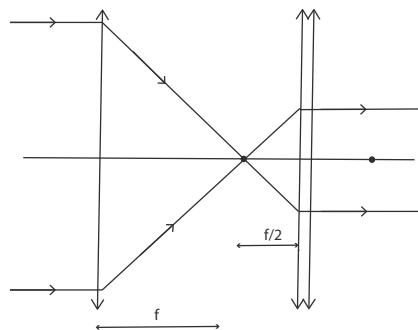
L177 Teleskoop ★★★★

Autor: , piirkonnavor, 2020, G 10

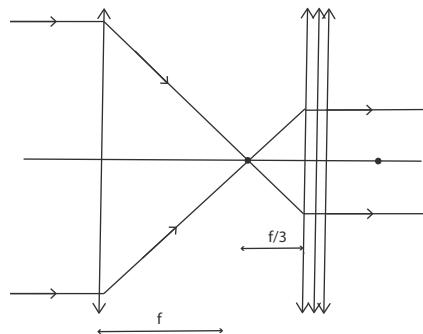
Kui koostaksime teleskoobi vaid kahest komponendist siis nurksuurenduse saamiseks peame eelkõige tekitama olukorra kus optiliste komponentide fookuskauused on erinevad. Kõrvuti asetatud õhukete läätsede optilised tugevused liituvad. Kahe läätse liitmisel saame seega läätse fookuskaugusega $\frac{f}{2}$ ja kui asetaksime kolm läätse kõrvuti siis ühendläätsede fookuskauguseks kujuneks $\frac{f}{3}$

Variant 1

Teleskoop mis koosneks siis ühest üksikust läätest ja ühest kaheläätselisest komponendist annaks suurenduse 2 korda.

*Variant 2*

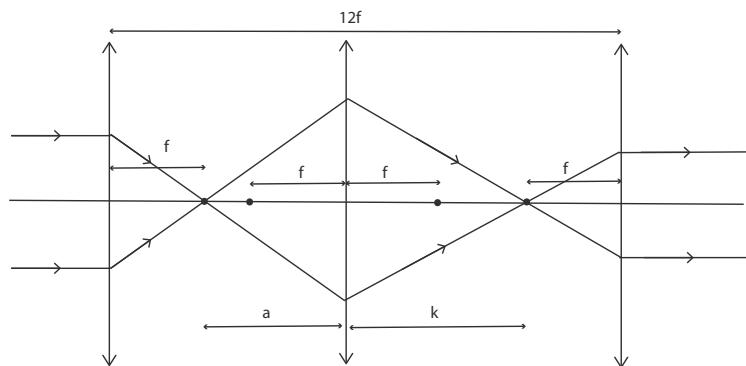
Teleskoop mis oleks koostatud ühest üksikut läätest ja ühest kolmeläätselisest komponendist annaks suurenduse 3 korda.



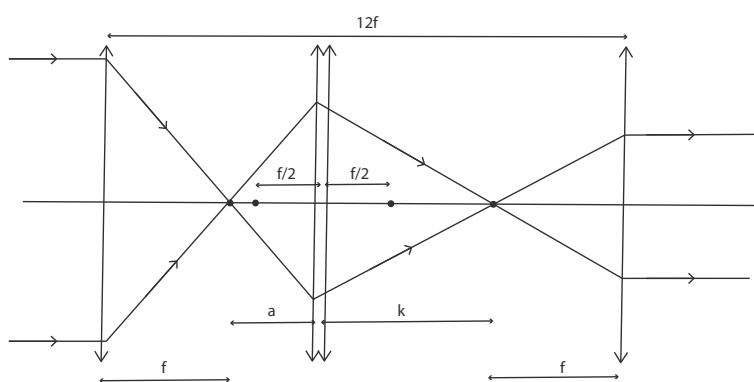
Variant 3

Suurema suurenduse saaks aga hoopis kolmekomponendilise või neljakomponendilise skeemiga.

Vaaltleme kahte skeemi:
kolm lihtläätse järjest



lihtlääts - kaheläätseline liitlääts - lihtlääts



Nimelt hakkab keskmine lääts sellise skeemi korral käituma justkui kaks kõrvuti asetatud läätse fookuskaugustega vastavalt a ja k .

Süsteemi kogusuurenduseks tuleks sel juhul

$$\beta_{kogu} = \beta_1 \cdot \beta_2 = \frac{f}{a} \cdot \frac{k}{f} = \frac{k}{a}$$

Näeme et parima tulemuse saame kui a oleks võimalikult väike ja k oleks võimalikult suur.

Üheläätselise kesklätse puhul ei saa a olla väiksem kui f (on sellest natukene suurem).

Kaheläätselise kesklätse puhul ei saa aga a olla väiksem kui $\frac{f}{2}$ (on sellest natukene suurem).

Samas aga k väärust piirab vaid süsteemi kogupikkusest tulenev piirang. See on aga mölema süsteemi jaoks ühesugune (tõsi, kaheläätselise keskkomponendi puhul on sama üldpikkuse korral $k \frac{f}{2}$ võrra pikem) ning tulenevalt suurenduse valemist annab suurima suurenduse just kaheläätselise keskkomponendiga süsteem!

Seega asetame üksikläätsed toru otstesse ja topeltlätse esiläätsele võimalikult lähedale nii, et esimese läätse fookuse kujutis tekiks kaksiklätse abil tagumise läätse fookusesse. Kaheläätselise keskelemendiga süsteemi jaoks saame seosed

$$12f = f + a + k + f \text{ ehk } 10f = a + k \text{ ehk } k = 10f - a$$

ja

$$\frac{2}{f} = \frac{1}{a} + \frac{1}{k}$$

asendame esimese teise

$$\frac{2}{f} = \frac{1}{a} + \frac{1}{10f-a}$$

viime ühisele nimetajale, ristkorrutis, jagame miinus kahega, saame ruutvõrrandi $a^2 - 10fa + 5f^2 = 0$

mille lahendiks on $a = (5 \pm \sqrt{20})f$ kust $a = 0.52786f$ ja $k = 9.47213f$.

Maksimaalseks suurenduseks tuleb seega $\beta_{kogu} = 17.944 \approx 18$.

Variant 4

Kui kolmekomponendilises süsteemis kasutati siiski vaid üheläätselist keskelementi saame seosed:

$$12f = f + a + k + f \text{ ehk } 10f = a + k \text{ ehk } k = 10f - a$$

ja

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{a} + \frac{1}{k}$$

asendame esimese teise

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{a} + \frac{1}{10f-a}$$

viime ühisele nimetajale, ristkorrutis, saame ruutvõrrandi

$$a^2 - 10fa + 10f^2 = 0$$

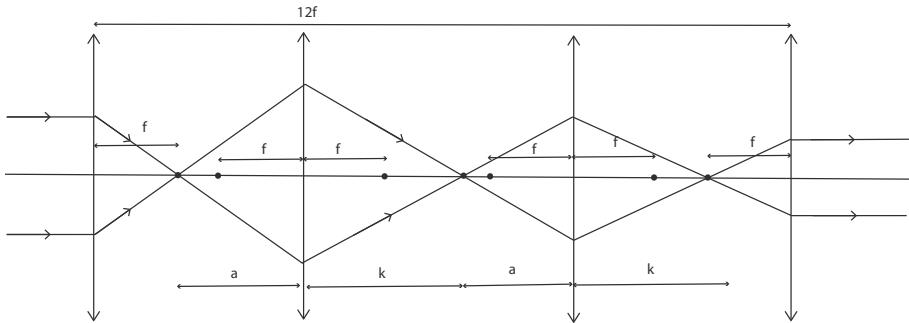
mille lahendiks on $a = (5 \pm \sqrt{15})f$ kust $a = 1.12702f$ ja $k = 8.87298f$.

Maksimaalseks suurenduseks tuleb seega $\beta_{kogu} = 7.872 \approx 8$.

Variant 5

Üks variantidest on ka nelja läätsega süsteem:

Puudusesks on nagu ka kolmest lihtläätsest süsteemi korral sama suurenduse saamiseks vajalik suurem üldpikkus.



$$12f = f + a + k + a + f \text{ ehk } 5f = a + k \text{ ehk } k = 5f - a$$

ja

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{a} + \frac{1}{k}$$

asendame esimese teise

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{a} + \frac{1}{5f-a}$$

viime ühisele nimetajale, ristkorrustis, saame ruutvõrrandi

$$a^2 - 5fa + 5f^2 = 0$$

mille lahendiks on $a = (2.5 \pm \sqrt{1,25})f$ kust $a = 1.38197f$ ja $k = 3.61803f$.

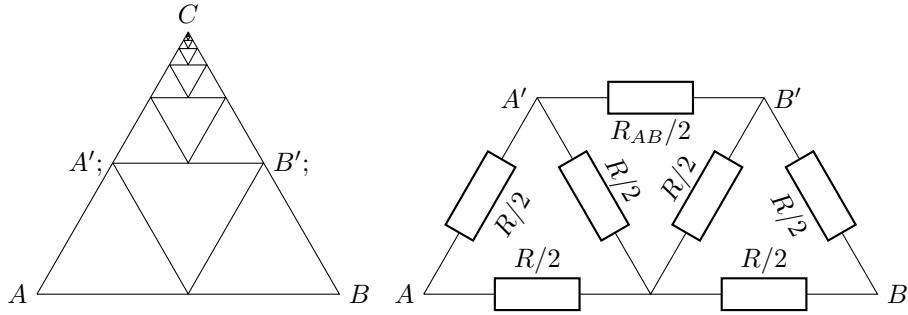
Maksimaalseks suurenduseks tuleb seekord aga

$$\beta_{kogu} = \beta_1 \cdot \beta_2 \cdot \beta_3 = \frac{f}{a} \cdot \frac{k}{a} \cdot \frac{k}{f} = \left(\frac{k}{a}\right)^2 = 2.618^2 = 6.854 \approx 7.$$

L178 Ruut ★★★★

Autor: , lõppvoor, 2020, G 10

Olgu M ja N vastavalt AB ja CD keskpunktid. Superpositioneerime ruudu, kus pingi on rakendatud A ja C vahelle, ruuduga, kus pingi on rakendatud B ja D vahelle. Nüüd sümmeetria töttu telge MN ei läbi vool ehk takistus A ja D vahel ristikülikus $AMND$ on samuti R . Peegeldame MN üle AD . Saame ruudu $M'MNN'$, külgede keskpunktidega A ja D . A ja D vaheline takistus sellises ruudus on kaks korda väiksem ehk $R/2$.



L179 Kolmnurk ★★★★

Autor: Kaarel Kivilaslu, lahtine, 2021, G 10

Märkame, et $A'B'C$ on sarnane kolmnurgaga ABC , kuid 2 korda väiksem. Seega saame asendada kolmnurga $A'B'C$ takistiga mille takistus on pool otsitavast takistustest: $\frac{R_{AB}}{2}$. Saame järgneva ekvivalentskeemi:

Skeem on kesktelje suhtes sümmeetiline, seega on kogutakistus

$$R_{AB} = 2 \left[\frac{1}{\frac{R}{2}} + \left(\frac{R}{2} + \frac{\frac{R}{2} \frac{R_{AB}}{4}}{\frac{R}{2} + \frac{R_{AB}}{4}} \right)^{-1} \right]^{-1} \quad (1)$$

$$= 2 \left[\frac{1}{\frac{R}{2}} + \left(\frac{\frac{R}{2} \frac{R}{2} + \frac{R}{2} \frac{R_{AB}}{4} + \frac{R}{2} \frac{R_{AB}}{4}}{\frac{R}{2} + \frac{R_{AB}}{4}} \right)^{-1} \right]^{-1} \quad (2)$$

$$= 2 \left[\frac{1}{\frac{R}{2}} + \frac{\frac{R}{2} + \frac{R_{AB}}{4}}{\frac{R}{2} \left(\frac{R}{2} + \frac{R_{AB}}{2} \right)} \right]^{-1} \quad (3)$$

$$= 2 \left[\frac{R + \frac{3}{4} R_{AB}}{\frac{R}{2} \left(\frac{R}{2} + \frac{R_{AB}}{2} \right)} \right]^{-1} \quad (4)$$

$$= \frac{2R(R + R_{AB})}{4R + 3R_{AB}}. \quad (5)$$

Seega

$$4RR_{AB} + 3R_{AB}^2 = 2R^2 + 2RR_{AB} \quad (6)$$

$$\implies 3R_{AB}^2 + 2RR_{AB} - 2R^2 = 0 \quad (7)$$

$$\implies R_{AB} = \frac{-2R \pm \sqrt{4R^2 + 24R^2}}{6} = \frac{\pm\sqrt{7} - 1}{3}R. \quad (8)$$

Kuna peab kehtima, et $R_{AB} \geq 0$, siis

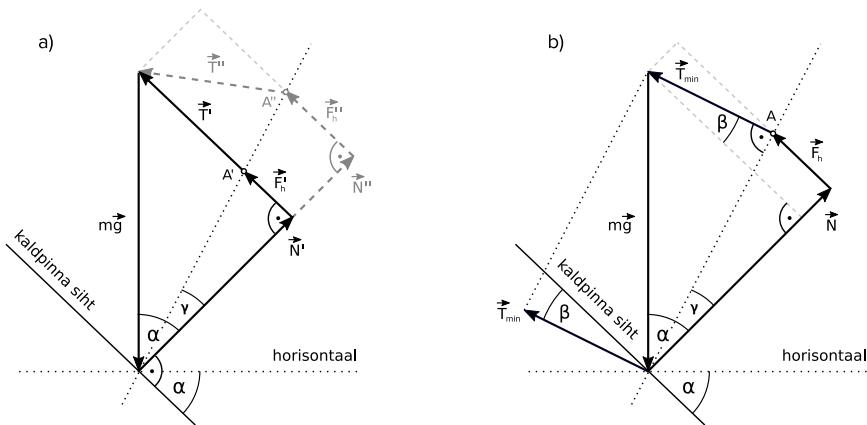
$$R_{AB} = \frac{\sqrt{7} - 1}{3}R. \quad (9)$$

L180 Laeva vettelaskmine ★★★★

Autor: Päivo Simson, piirkonnnavoor, 2021, G 10

Lahendus 1.

Laevale mõjuvad raskusjõud $m\vec{g}$, kaldpinna tooreaktsioon \vec{N} , hõõrdejõud \vec{F}_h ja köie tõmbejõud \vec{T} . Et laev paigal püsiks, peab nende jõudude vektorsumma võrduma nulliga. Raskusjõud $m\vec{g}$ on konstantne suurus. Köie tõmbe kaldpinnaga ristuv komponent võib tooreaktsiooni suurendada või vähendada ja vastavalt seosele $F_h = \mu N$ suureneneb või väheneb samas proporsioonis ka hõõrdejõud. See tähendab, et vektori $\vec{N} + \vec{F}_h$ siht ei sõltu köie tõmbest \vec{T} , sest $\tan \gamma = F_h/N = \mu = \text{const.}$



Vaatleme kõigepealt olukorda, kus köie tõmbejõud mõjub paralleelselt kaldpinnaga. Joonisel a) on sellele olukorrale vastavad jõud tähistatud primmiga. Nüüd on lihtne näha, et võimalikele tasakaaluolekutele vastavad vektordiagrammid saame, kui liigitame punkti A suvaliselt vektoriga $\vec{N} + \vec{F}_h$ määratud sihis. Sealjuures paneme tähele, et vektori \vec{T} pikkus on minimaalne siis, kui see asetseb $\vec{N} + \vec{F}_h$ sihiga risti. Selline olukord on kujutatud joonisel b). Sarnaste kolmnurkade võrdlemine annab minimaalsele tõmbele vastava nurga β vääruseks $\beta = \gamma = \arctan \mu$. Samalt vektordiagrammilt saame ka minimaalse tõmbe

$$\begin{aligned} T_{\min} &= mg \sin(\alpha - \gamma) = \\ &= mg \sin(\alpha - \arctan \mu) = mg \frac{\sin \alpha - \mu \cos \alpha}{\sqrt{1 + \mu^2}}. \end{aligned}$$

Märkus: Kui lahendaja eeldab ekslikult, et \vec{T}_{\min} on paralleelne kaldpinnaga ja tulletab sellest lähtuvalt lõppvalem T jaoks, siis hinnata lahendust maksimaalselt 4 p. vääriliseks.

Lahendus 2.

Olgu β nurk kaldpinna sihi ja tõmbbe T sihi vahel. Valime ristkoordinaadistiku selliselt, et x -telg asetseb kaldpinna sihis. Kirjutame mõlema koordinaatide jaoks välja jõudude tasakaalutingimused:

$$\begin{aligned} F_x &= mg \sin \alpha - T \cos \beta - F_h = 0, \\ F_y &= N - T \sin \beta - mg \cos \alpha = 0. \end{aligned}$$

Teisest võrrandist saame $N = T \sin \beta + mg \cos \alpha$ ja et $F_h = \mu N$, siis asendades need seoses esimesesse võrrandisse saame

$$mg \sin \alpha - T \cos \beta - \mu T \sin \beta - \mu mg \cos \alpha = 0,$$

millest

$$T = mg \frac{\sin \alpha - \mu \cos \alpha}{\cos \beta + \mu \sin \beta}.$$

Viimane valem annab tasakaalustava tõmbe T suvalise nurga β korral, kõik ülejäävud valemis esinevad parameetrid on ülesande tekstis fikseeritud suurused ehk konstandid. Järelikult võime tõmmet T vaadelda funktsioonina ühest muutujast β , st $T = T(\beta)$. Edasine ülesanne seisneb selle funktsiooni miinimumi leidmises. On selge, et T on minimaalne siis, kui nimetajas olev avaldis $\cos \beta + \mu \sin \beta$ on maksimaalne. Maksimumi määramiseks leiame selle avaldise tuletise β järgi ja võrdsustame selle nulliga:

$$(\cos \beta + \mu \sin \beta)' = -\sin \beta + \mu \cos \beta = 0,$$

millest $\mu = \tan \beta$ ehk $\beta = \arctan \mu$, mis ongi T minimaalsele väärustusele vastav nurk. Asendades selle T avaldisse saame

$$T_{min} = mg \frac{\sin \alpha - \mu \cos \alpha}{\cos(\arctan \mu) + \mu \sin(\arctan \mu)} = mg \frac{\sin \alpha - \mu \cos \alpha}{\sqrt{1 + \mu^2}}.$$

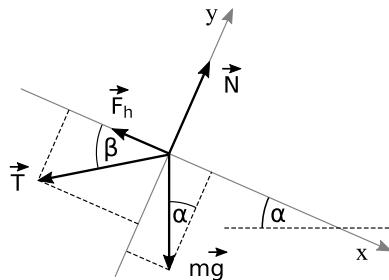
Hindamiskeem lahendusele 2.

Õiged jõudude tasakaaluvõrrandid õpilase valitud koordinaatsüsteemis koos selestega või joonisega, kus on näidatud võrranditele vastavad jõud ja nurgad [4 p.]
Korrektselt leitud T üldavaldis [2 p.]

On aru saadud, et ülesanne taandub funktsiooni T miinimumi leidmisele, ning et selleks tuleb kasutada tuletist. [1 p.]

Õigesti leitud tuletis ja sellest saadud miinimumile vastav seos $\mu = \tan \beta$, kus β on nurk kaldpinna ja \overrightarrow{T}_{min} vahel [3 p.]

Saadud õige lõppavaldis $T_{min} = mg \frac{\sin \alpha - \mu \cos \alpha}{\cos(\arctan \mu) + \mu \sin(\arctan \mu)}$ või sellega ekvivalentne avaluus, mis sisaldab ainult ülesande tekstis antud parameetreid ja gravitatsioonikiirendust g [2 p.]



Märkus: Kui lahendaja eeldab ekslikult, et \vec{T}_{min} on paralleelne kaldpinnaga ja tulab sellest lähtuvalt lõppvalem T jaoks, siis hinnata lahendust maksimaalselt 4 p. vääriliseks.

L181 Sirgvool ★★★★

Autor: Taavet Kalda, lõppvoor, 2021, G 10

Olgu sirgvool piki z -telge. Ampère'i seadusest näeme et sirgvool tekitab magnetvälja tugevusega $B_\varphi = \frac{\mu_0}{2\pi r} I$. Elektronile mõjub Lorentzi jõud $\vec{F} = -e\vec{v} \times \vec{B}$. Selleks et $v_z = \text{const}$, peab elektroni radiaalne kiiruskomponent olema 0. Töepooltest, kui see ei oleks 0, siis kruvireegli järgi oleks Lorentzi jõul z -sihiline komponent ning seega v_z ei saaks konstantne olla. Kuna magnetvälvi tööd ei tee, on elektroni kiirus konstantne ning seega $v_\varphi = \text{const}$. Tegu on liikumisega pikki heeliksit raadiusega r .

Näeme et Lorentzi jõule panustab ainult z -sihiline kiiruskomponent ning et kruvireegli järgi on $F = ev_z B$ radiaalsuunaline. Lorentzi jõudu tasakaalustab kesktõmbekiirendus kujul

$$-\frac{m_e v_\varphi^2}{r} = ev_z B = ev_z \frac{I\mu_0}{2\pi r}.$$

Paneme tähele, et selle võrrandi lahendamiseks peab v_z olema negatiivne. Asendades $v_\varphi^2 = v_0^2 - v_z^2$, saame

$$m_e(v_z^2 - v_0^2) = ev_z \frac{I\mu_0}{2\pi}.$$

Tegu on ruutvõrrandiga, lahendiks saame

$$v_z = \frac{eI\mu_0}{4\pi m_e} \pm \sqrt{\left(\frac{eI\mu_0}{4\pi m_e}\right)^2 + v_0^2}.$$

Kuna $v_z < v_0$, on positiivne lahend ebafüüsikaline, st

$$|v_z| = v_0 \left(\sqrt{\left(\frac{eI\mu_0}{4\pi m_e v_0^2}\right)^2 + 1} - \frac{eI\mu_0}{4\pi m_e v_0^2} \right).$$

L182 Hantel ja pöörlemine ★★★★

Autor: Marko Tsengov, lahtine, 2022, G 10

Lahendus: vaatleme hõõrdejõust tekkivat jõumomenti hantli keskpunkti suhtes. Sümmeetria tõttu on mõlema raskuse tekitatud jõumoment M sama, seega selleks, et nurkkiirendus oleks 0, peab see jõumoment olema samuti $M = 0$.

Hantel pöörleb keskpunktist kaugusel R joonkiirusega $v(R) = R \cdot \omega_v$, raskuse maad puudutav pind joonkiirusega $v_r = r \cdot \omega_s$. Normaaljõud on jaotunud ühtlaselt üle kokkupuutepinna maaga, seega on ka liugehõõrdejõu magnituud igas punktis sama ($\mu N \frac{dR}{d\theta}$). Samas, kui $v > v_r$, on hõõrdejõud selles punktis suunatud hantli pöörlemise vastu. Juhul $v < v_r$ aga on hõõrdejõud suunatud pöörlemisega kaasa.

Eeldame, et $v > v_r$ parajasti siis, kui $R > k$. Olgu normaaljõud N ning hõordetegur μ Sellisel juhul

$$\begin{aligned} M &= \int_{\ell/2}^k \mu N R \frac{dR}{d} - \int_k^{\ell/2+d} \mu N R \frac{dR}{d} \\ M &= \frac{\mu N}{d} \left(\int_{\ell/2}^k R \cdot dR - \int_k^{\ell/2+d} R \cdot dR \right) \\ 0 &= \frac{\mu N}{2d} \left(k^2 - \left(\frac{\ell}{2} \right)^2 - \left(\frac{\ell}{2} + d \right)^2 + k^2 \right) \\ 0 &= 2k^2 - \frac{\ell^2}{2} - \ell d - d^2 \\ k &= \frac{1}{2} \sqrt{\ell^2 + 2\ell d + 2d^2} \\ \left(k = \sqrt{\frac{\left(\frac{\ell}{2} \right)^2 + \left(\frac{\ell}{2} + d \right)^2}{2}} \right) \end{aligned}$$

k tingimusest peab $v_r = v(k)$, seega

$$\begin{aligned} r \cdot \omega_s &= k \cdot \omega_v \\ \omega_v &= \omega_s \frac{r}{k} = \omega_s \frac{2r}{\sqrt{\ell^2 + 2\ell d + 2d^2}} \end{aligned}$$

L183 Pingpong ★★★★☆

Autor: Jaan Kalda, piirkonnavor, 2022, G 10

Märkus: graafikult numbrite välja lugemise eest antakse punkte isegi siis, kui õpi-lane ei oska nendega midagi peale hakata.

a) Teeme kindlaks esimese kuue põrke hetked sekundites: 0,92; 1,93; 2,78; 3,49; 4,1; 4,61 (REMOVE; punkti teenimiseks piisab, kui välja on loetud esimesed kaks ja viimased kaks andmepunkti; kui on välja loetud vähem, kui neli andmepunkti, siis punkte ei anta; kui välja loetud andmepunktid ei sisalda esimest või kuuendat põrget, siis antakse REMOVE). Kuigi samplimise sagedus on 0,1 s, siis graafikult on näha, et tulemusi saab välja lugeda täpsemalt — ilmselt on graafikuid interpoleeritud (seda hindamisskeem ka eeldab: punkte ei alandata, kui välja loetud arvväärtused erinevad eeltoodutest mitte rohkem, kui 0,02 s võrra; kui ühes andmepunktis on suurem viga, mis pole siiski rohkem, kui 0,04 s, siis alandatakse skoori REMOVE võrra ja kui vigade arv on suurem, siis punkte ei anta).

Nende põhjal saame arvutada esimesele viiele põrkele järgnenud lennuajad sekundites: 1,01; 0,85; 0,71; 0,61; 0,51 (REMOVE; kui esimeses või viimases arvus on viga suurem, kui 0,03 s, siis alandatakse skoori REMOVE võrra ja kui see on suurem, kui 0,05 s, siis punkte ei anta).

Ülesande eelduste kohaselt peaks vähenema kineetiline energia geomeetrilise ja-dana: $T_n = mv_n^2/2 = T_0 k^n$ (valemiga kirja panemise eest REMOVE). Kiirus v_n on võrdeline ruutjuurega energiast, seega $v_n = v_0 \sqrt{k^n}$ REMOVE ning lennuaeg $t_n = 2v_n/g$ on võrdeline kiirusega, seega $t_n = t_0 \sqrt{k^n}$ REMOVE. Mõõdetud andmete kasutamise parim meetod oleks kanda need graafikule, kus horisontaalteljel on pörkenumber ja vertikaalteljel – lennuaaja logaritm $\ln t_n = \ln t_0 + \frac{1}{2} n \ln k$: ning nimetatud teljestikus peaks tulema sirgjoon, mille kahekordne tõusunurga tangens annaks meile $\ln k$ väärtsuse. Aga hea tulemuse saame ka, kui võtame viienda ja esimese lennuaaja suhest ruutjuure: $k = \sqrt{0.51/1.01} \approx 0.71$, mis tähendab, et 29% kineetilisest energiast kaob igal pörkel (ükskõik kumma meetodi rakendamisse annab REMOVE). Õige numbrilise vastuse eest (vahemikus 25% kuni 35%) saab REMOVE, ebatäpse vastuse eest (vahemikus 20% kuni 40%) saab pooled punktid, st REMOVE. NB! Arvulise väärtsuse eest saab punkte vaid siis, kui see tuleneb õige meetodi rakendamisest.

b) Alates üheksandast pörkest on pörkeajad nii väiksed, et eelpooltoodud arvutuste läbiviimine on küll võimalik, kuid ebatäpne; kui viiakse läbi selline analüüs, siis saab selle ülesande osa (b) eest vaid kuni REMOVE: vastuse eest vastavalt allpooltoodud reeglige kuni REMOVE ning kuni REMOVE graafikult pörkehetkedete välja lugemise eest (kui kasvõi ühes arvustusteks vajalikus andmes on viga suurem, kui 0,02 s, siis REMOVE ning kui see on suurem, kui 0,04 s, siis REMOVE).

Selle asemel kasutame teist meetodit: kuivõrd pörkeaedest moodustub geomeetriline jada, siis palli seismajäämise hetke saab avaldada geomeetrilise jada summana. Kaheteistkümnnes pörge toimub ajahetkel 6,97 s ja järgmine pörge – ajahetkel 7,27 s (mõlemad andmepunktid kokku REMOVE; kui kasvõi ühes neist on viga suurem, kui 0,02 s, siis alandataks skoori REMOVE võrra ja kui see on suurem, kui 0,04 s, siis punkte ei anta) ning pörked lõppevad ajahetkel 12,3 s (REMOVE; kui viga on suurem, kui 0,02 s, siis alandataks skoori REMOVE võrra ja kui see on suurem, kui 0,04 s, siis punkte ei anta). Siit saame leida kaheteistkümnenda pörke kestvuse $t_{12} = 0,3$ s. Mõõtes nüüd ajavahemiku kaheteistkümnendast pörkest pörkumiste lõpuni $T = t_{12}/(1 - \sqrt{k}) = 5,33$ s REMOVE on lihtne leida $k = (1 - t_{12}/T)^2 \approx 0.88$ REMOVE, mis tähendab, et igal pörkel kaob 12% kineetilisest energiat REMOVE. Kui vastus erineb antud numbrist rohkem, kui 1% võrra, siis saab numbrilise vastuse eest vaid REMOVE punkti ning kui see erineb rohkem, kui 2% võrra, siis punkte ei saa.

Märkus: Tasub tähele panna, et saadud tulemus pole väga täpne, sest samplimise sagedus on ju vaid 0,1 s, mistöttu t_{12} leidmise suhteline viga on võrdlemisi suur. Seetõttu on täpsamateks arvustusteks vaja kasutada ka järgnevaid andmepunkte (pörgete hetked 7,58 s, 7,88 s, 8,17 s ja 8,39 s) ning keskmistada. Geomeetrilises jadas on jada keskmise liige kõigi liikmete geomeetriline keskmine, aga kui keskmistavad arvud erinevad üksteisest vähe, siis on geomeetriline keskmine ligikaudu võrdne aritmeetilise keskmisega. Seega me võime leida $t_{14} = (8,39 - 6,97)/5 = 0,284$ s. Arvutades nüüd juba ajavahemiku neljateistkümnendast pörkest pörkumiste lõpuni $T' = t_{14}/(1 - \sqrt{k}) = 4,72$ s, saame tulemuseks $k = (1 - t_{14}/T')^2 \approx 0.88$, mis osutus võrdseks me esialgse tulemusega.

L184 Plaat ★★★★

Autor: Konstantin Dukats, lõppvoor, 2022, G 10

Kui metallist plaat viiakse laengu elektrivälja, indutseerub selle peal laeng nii, et see kompenseerib välise elektrivälja (st plaadi sees paigutuvad laengud vastavalt ümber, kuni elektrivälja tugevus plaadis on null). Kuna $r \ll R$, saame eeldada, et laengute pindtihedused on mõlemal küljel on isotroopsed. Kuna plaadi kogulaeng on null, siis indutseeritud laeng plaadi pindadel on vastavalt $\pm\Delta q$. Plaat sarnaneb sellel juhul laetud kondensaatoriga. Kuna plaadi sees on elektrivälja tugevus null, siis peab välise elektrivälja ja indutseeritud elektrivälja summa olema 0 ehk $\vec{E}_q + \vec{E}_{\pm\Delta q} = 0$. Siit saame avaldada ümberpaigutunud laengu suuruse Δq :

$$\begin{aligned}\therefore \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{R^2} &= \frac{\Delta q}{2\pi r^2} - \frac{-\Delta q}{2\pi r^2}, \\ \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{R^2} &= \frac{\Delta q}{\pi r^2}, \\ \Delta q &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{R^2} \pi r^2.\end{aligned}\tag{1}$$

Coulomb'i seadusest avaldame jõu, mis rakendub vastavalt kummalegi plaadi pinnaile ning saame summarseks jõuks:

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q\Delta q}{R^2} - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q\Delta q}{(R+h)^2} \approx \frac{q\Delta q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{2Rh}{R^4},\tag{2}$$

Võrranditest (1) ja (2) saame asendades:

$$F \approx \frac{q^2 h r^2}{8\pi\varepsilon_0 R^5}.$$

L185 Kõver trajektoor ★★★★

Autor: Uku Andreas Reigo, lahtine, 2023, G 10

Et trajektoor on kinnine ja ülesanne on mitmes mõttes sümmeetriline (näiteks laengu ja algse suuna vahetamise korral peaks töötama, lisaks ka olukorra peegeldamisel üle sirge $y=x$), siis on näha, et nurk kiirusvektori ja x-telje vahel, kui elektron lahkub 1. veerandist, on samuti α .

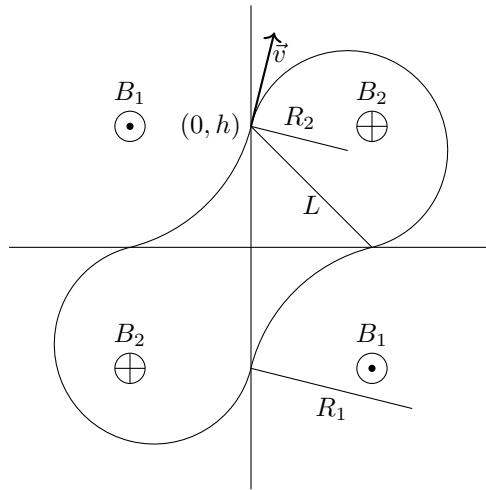
Edaspidi annan kõik nurgad positiivse x-telje suhtes vastupäeva mõõdetuna.

Algne nurk on $\theta_1 = \frac{\pi}{2} - \alpha$. 1. sektorist väljudes on nurk $\theta_2 = \alpha - \pi$, ehk $\Delta\theta = 2\alpha - \frac{3\pi}{2}$, seega sealne trajektoori osa moodustab $\frac{2\alpha - \frac{3\pi}{2}}{2\pi} = \frac{\alpha}{\pi} - \frac{3}{4}$ ringist. Järeldub ka, et kesknurk sisenemis- ja väljumispunkti vahel 1. sektoris on $\gamma = \frac{\pi}{2} + 2\alpha$

Samuti sümmeetriast teame, et trajektoor lõikab x-telje punktis $(h, 0)$. Seega on sisenemis- ja väljumispunkti ühendava kõõlu pikkus $L = \sqrt{2}h$ ning ringi raadius

$$R_2 = \frac{L}{2 \sin \frac{\gamma}{2}} = \frac{\sqrt{2}h}{2 \sin (\frac{\pi}{4} + \alpha)}$$

2. sektoris viib sarnane arutelu arusaamani, et nurk muutub vääratuselt $\theta_2 = \alpha - \pi$ vääratuseni $\theta_3 = -\frac{\pi}{2} - \alpha$, läbides nurga $\Delta\theta = \frac{\pi}{2} - 2\alpha$. Seega kesknurk sisenemis- ja



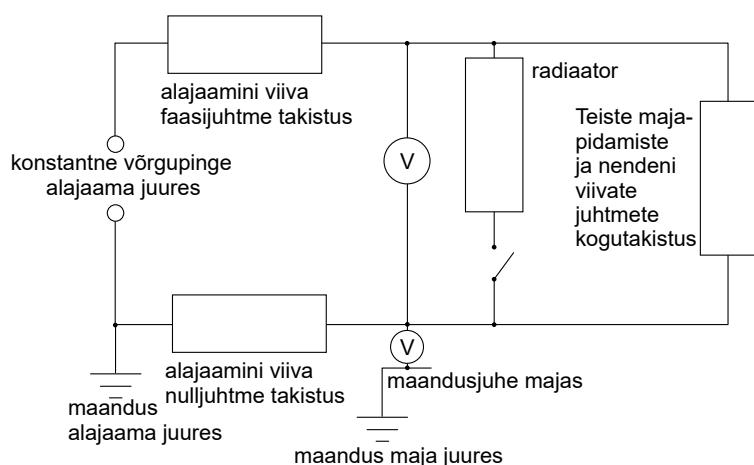
Näidislahend $a = 14^\circ$ korral. $R_2 \approx 0.83h$ ja $R_1 \approx 1.38h$

väljumispunkti vahel on $\gamma = \frac{\pi}{2} - 2\alpha$. Neid punkte ühendava kõõlu pikkus on jälle $L = \sqrt{2}h$ ning raadius $R_1 = \frac{L}{2 \sin \frac{\gamma}{2}} = \frac{\sqrt{2}h}{2 \sin(\frac{\pi}{4} - \alpha)}$

Et magnetväljas tiirleva elektroni tiirlemisraadius $R = \frac{mv}{qB}$, siis $\frac{R_1}{R_2} = \frac{B_2}{B_1} = \frac{\sin(\frac{\pi}{4} + \alpha)}{\sin(\frac{\pi}{4} - \alpha)}$

L186 Alajaama kaugus ★★★★

Autor: Jaan Kalda, piirkonnnavoor, 2023, G 10



Kõigepealt teeme ekvivalentskeemi: radiaatori (takistusega R_r) ja teiste tarbijate (takistusega R_t) rööpühendus on järjestikku mõlema juhtmeka pingearallika külge, milleks on alajaam; olgu kummagi juhtme takistus R_j ja pingi alajaamas U_a . Selles

skeemis on teada pinge ühel juhtmel U_1 ja pinge radiaatoril U_f ; kui eemaldada skeemist radiaator, siis tekkiva uue olukorra jaoks on teada uus pinge juhtmel U_0 . Kummagagi ekvivalentskeemi eest saab REMOVE.

Esimesest ekvivalentskeemist saame Kirchoffi pingeseaduse töttu

$$U_a = U_f + 2U_1;$$

see võrrand annab REMOVE (kui puudub tegur 2, siis REMOVE). Teisest ekvivalentskeemist saame tänu Kirchoffi pingeseadusele avaldada uue faasipinge, st pinge teistel koormistel:

$$U'_f = U_a - 2U_0 = U_f + 2(U_1 - U_0) = 210 \text{ V} + 2(30 - 20) \text{ V} = 230 \text{ V}.$$

see võrrand annab samuti REMOVE (kui puudub tegur 2, siis REMOVE).

Selleks, et leida juhtme pikkus, on meil esimese sammuna vaja leida juhtme takistus. Peale pingete avaldamist on meil on alles jäänud kolm tundmatut takistit, millest radiaatori takistuse saame avaldada tänu nominaalandmetele:

$$P_n = U_n^2/R_r \Rightarrow R_r = U_n^2/P_n = 26,45 \Omega.$$

See seos (emb-kumb) annab REMOVE. Kahe tundmatu leidmiseks vajame kahte võrrandit, milleks on Ohmi ja Kirchoffi seadustest tulenev järelus: jadaühenduses jagunevad pinged võrdeliselt takistustega. Seega

$$U_0/U'_f = R_j/R_t, \quad REMOVE$$

$$U_1/U_f = R_j(1/R_t + 1/R_r). \quad REMOVE$$

Lahutades teisest võrrandist esimese saame

$$U_1/U_f - U_0/U'_f = R_j/R_r \Rightarrow R_j = R_r(U_1/U_f - U_0/U'_f) = 1,479 \Omega. \quad REMOVE$$

Et $R_j = \rho L/S$ REMOVE, siis $L = SR_j/\rho \approx 1920 \text{ m}$. Numbrilise vastuse eest REMOVE.

L187 Uppuv pall ★★★★

Autor: Jaan Kalda, lõppvoor, 2023, G 10

Teeme joonise valguskiire käigu kohta silmasti palli ülemise ja alumise servani. Need on veepinnal murduvad jooned, mis on peaaegu paralleelsed, kui vaadelda pallilähedast piirkonda, sest palli möötmed on hulga väiksemad kaugusest (mis on ilmselt suurem körgusest $H = 2 \text{ m}$). Alumiste sirgete osade vahekaugus a on võrdne palli diameetriga, ülemiste sirgete osade vahekaugus b vastab palli näivale körgusele. Ülaltvaates palli vasakusse ja paremasse serva tömmatud sirged näiliselt ei murdu, seega pallin näiv laius on võrdne palli tegeliku laiusega. Seega on palli näiv lapikus $k = a/b = 3$. Kui tähistada murdroone ülemise osa kaldenurga veepinna suhtes β -ga ja alumise osa kaldenurga α -ga, siis saame eelpooltoodud tingimusest johtuvalt seosed $a = d \sin \alpha$ ja $b = d \sin \beta$, kus d tähistab murdroonte murdepunktide kaugust. Seega saame võrrandi $\sin \alpha = k \sin \beta$ ning murdumisseadusest $\cos \alpha = \cos \beta/n$. Võttes need avaldised ruutu ja liites vasakud ning paremad

pooled saame $1 - n^{-2} = (k^2 - n^{-2}) \sin^2 \beta$, millest $\sin \beta = \sqrt{7/135}$. Silma kaugus pallist $L = H/\sin \beta = H\sqrt{135/7} \approx 8,8 \text{ m}$.

L188 Pärituul ★★★★

Autor: Jaan Kalda, lahtine, 2024, G 10

Kasutame ratturi kiirust kui ühikkiirust (st võtame selle võrdseks ühega). Takistusjõu ühikuks võtame takistusjõu siis, kui õhu kiirus ratturi suhtes on üks. Ratturi ja õhu suhtelise kiiruse ruudu leiame koosinusteoreemi abil $v^2 = 2 - 2 \cos \alpha$, seega takistusjõu moodul $f = 2 - 2 \cos \alpha$. Selle jõu teega risti oleva komponendi kompenseerimiseks rattur tööd ei pea tegema, piisab ratta õige kaldenurga hoidmisest. Kompenseerida tuleb teega risti olev komponent $f \cos \beta$, kus β on suhtelise kiiruse nurk tee suhtes; selle leiame siinusteoreemist, $\sin \beta = \frac{1}{v} \sin \alpha$. Seega saame kriitilise nurga väärtsuse jaoks, mille puhul teesihiline takistusjõu komponent on 1, võrrandi

$$(2 - 2 \cos \alpha) \sqrt{1 - \sin^2 \alpha / (2 - 2 \cos \alpha)} = 1.$$

See võrrand lihtsustub, kui läheme üle poolnurga siinusele kasutades seost $1 - \cos \alpha = 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}$; lahendiks saame $\sin \frac{\alpha}{2} = 1/\sqrt[3]{4}$, milles $\alpha \approx 78.09^\circ$. Seega tuul takistab, kui nurk on suurem, kui 78.09° .

L189 Põrked ★★★★

Autor: Päivo Simson, piirkonnavoor, 2024, G 10

Lahendus 1

Ilmselt on lihtsaim perioodiline liikumine selline, mille korral kummipall jäääb põrku ma kahe punkti vahel, mis mölemad on keha keskteljest kaugusel a REMOVE. Uurime, kas selline lahend on võimalik, ja kui on, siis milline peab olema kaugus a .

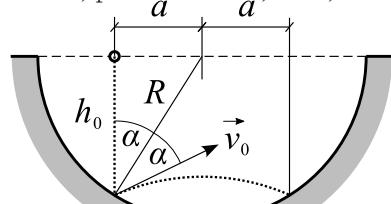
Kuni esimese põrkeni langeb pall vabalt kõrguse $h_0 = \sqrt{R^2 - a^2}$ võrra ja saavutab kiiruse $v_0 = \sqrt{2gh_0}$ REMOVE. Elastne põrge toimub nurga 2α all REMOVE ja edasi liigub pall mööda parabooli, mille haripunkt asub poolkera teljal REMOVE. Paraboolil liikudes on algkkiiruseks \vec{v}_0 , mis on horisondi suhtes nurga $90^\circ - 2\alpha$ all REMOVE. Kiiruse komponentide ajaline sõltuvus kahe põrke vahelisel ajal on

$$v_x = v_0 \cos(90^\circ - 2\alpha) = v_0 \sin 2\alpha = \text{const}, \quad \text{REMOVE}$$

$$v_y = v_0 \sin(90^\circ - 2\alpha) - gt = v_0 \cos 2\alpha - gt. \quad \text{REMOVE}$$

Kui koordinaatide alguseks valida põrkekoht, siis on parabooli haripunktis $x = v_x t_h = a$, kus t_h on haripunkti jõudmiseks kuluv aeg REMOVE. Lisaks on haripunktis $v_y = 0$, milles saame $t_h = v_0 \cos 2\alpha / g$ REMOVE. Võrdus $a = v_x t_h$ annab nüüd

$$a = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha \cos 2\alpha}{g} = 2h_0 \sin 2\alpha \cos 2\alpha \quad \text{REMOVE}$$



Jagame selle võrduse h_0 -ga ja teisendamise saadava võrduse paremat ja vasakut poolt:

$$\begin{aligned} a/h_0 &= 2 \sin 2\alpha \cos 2\alpha \\ \tan \alpha &= 4 \sin \alpha \cos \alpha (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) \\ \sin \alpha / \cos \alpha &= 4 \sin \alpha \cos \alpha (1 - 2 \sin^2 \alpha) \quad \text{REMOVE} \end{aligned}$$

Saime võrrandi nurga α leidmiseks. Et $\alpha = 0$ vastab juhule $a = 0$, siis see lahend meile ei sobi. Korrutades viimast võrdust koosinusega ja jagades siinusega saame

$$1 = 4 \cos^2 \alpha (1 - 2 \sin^2 \alpha) = 4(1 - \sin^2 \alpha)(1 - 2 \sin^2 \alpha)$$

Tähistame $x = \sin \alpha$, viime liikmed ühele poole võrdusmärki ja litsustame.

$$\begin{aligned} 4(1 - x^2)(1 - 2x^2) - 1 &= 0, \\ 8x^4 - 12x^2 + 3 &= 0. \quad \text{REMOVE} \end{aligned}$$

Saime ruutvõrrandi x^2 suhtes, mille lahend on

$$x^2 = \frac{12 \pm \sqrt{12^2 - 4 \cdot 8 \cdot 3}}{16} = \frac{12 \pm \sqrt{48}}{16} = \frac{3 \pm \sqrt{3}}{4}.$$

Plussiga lahend ei sobi, sest $\sin \alpha$ ei saa olla ühest suurem. Järelikult

$$x = \sin \alpha = \frac{\sqrt{3 - \sqrt{3}}}{2},$$

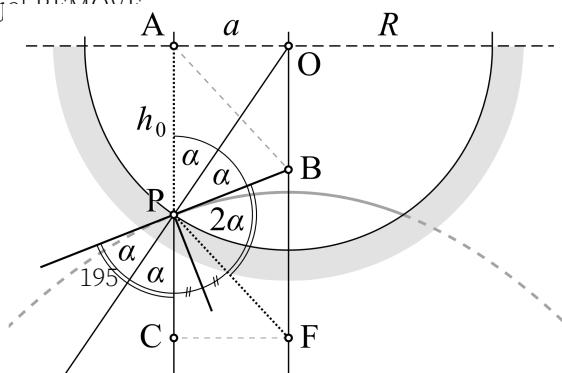
ehk

$$a = R \frac{\sqrt{3 - \sqrt{3}}}{2} \approx 0,563R. \quad \text{REMOVE}$$

Näeme, et kahe punkti vahel põrkuv liikumine on võimalik ja see realiseerub ülal-toodud a väärtsuse korral. Täpsemalt liigub pall ülevalt alla, siis mööda parabooli paremale, siis vertikaalselt üles ja alla, siis mööda parabooli tagasi esimese põrke punkti, uuesti üles ja alla jne.

Lahendus 2

Eeldame, et lihtsaim perioodiline liikumine on selline, mille korral kummipall jäääb põrkuma kahe punkti vahel, mis mölemad on kera keskteljest kaugusel a REMOVE. Kuni esimese põrkeni langeb pall vabalt körguse h_0 vörra. Elastne põrge toimub nurga 2α all REMOVE ja edasi liigub pall mööda parabooli, mille haripunkt asub eelduse põhjal poolkera teljel REMOVE. Parabooli omadustest on teada, et vertikaalne kiir CP peegeldub parabooli fookusesse F REMOVE. Et langemisnurk ja peegeldumisnurk on võrsed REMOVE,



siis järelikult $\angle FPB = 2\alpha$
 REMOVE. Kolmnurgad PAB ja PBF on sarnased, järelikult lõik $PF = h_0$
 REMOVE (seega on punkti O läbiv horisontaaljoon parabooli juhtjooneks). Kolmnurgast POA saame

$$\frac{a}{h_0} = \tan \alpha \quad REMOVE$$

ja kolmnurgast PCF

$$\frac{a}{h_0} = \sin(180^\circ - 4\alpha) = \sin(4\alpha). \quad REMOVE$$

Tulemuseks on võrrand $\tan \alpha = \sin 4\alpha$, ehk

$$\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = 4 \sin \alpha \cos \alpha (1 - 2 \sin^2 \alpha), \quad REMOVE$$

mille lahendamisel saame (vt lahendus 1)

$$\sin \alpha = \frac{\sqrt{3 - \sqrt{3}}}{2} = \frac{a}{R}. \quad REMOVE$$

L190 Kondensaator vedelikus ★★★★ Autor: Konstantin Dukatš, lõppvoor, 2024, G 10

Lahendus 1: Oletame, et kondensaatoril on ristkülikukujulised plaadid laiusega L ja kõrgusega H (tulemus ei sõltu kondensaatori kujust, kuid sellisel juhul on lahendus lihtsam). Kondensaatori vedeliku ja õhuga osi võib käsitleda paralleelsele kondensaatorite na. Olgu vedeliku tase kondensaatori sees h . Mahtuvused on siis:

$$C_1 = \frac{\varepsilon_0 L(H - h)}{d},$$

$$C_2 = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon L h}{d}.$$

Kondensaatori elektrostaatiline potentsiaalne energia on sellisel juhul

$$E = E_1 + E_2 = \frac{C_1 V^2}{2} + \frac{C_2 V^2}{2} = \frac{\varepsilon_0 L H V^2}{2d} + \frac{\varepsilon_0 L (\varepsilon - 1) V^2}{2d} h = \frac{VQ}{2},$$

kus Q on kondensaatori plaatide laeng. Edasi vaatleme kondensaatori ja pingearialika süsteemi summaarset potentsiaalset energiat E_{pot} sõltuvalt veetaseme kõrgusest. Kuna süsteem liigub madalaima potentsiaalse energiaga olekusse, kehtib tasakaalusendis $dE_{\text{pot}}/dh = 0$. Potentsiaalsesse energiasse panustub vee gravitatsiooniline potentsiaalne energia $mgh/2 = \rho L h^2 g/2$, kondensaatori elektrostaatili-

ne potentsiaalne energia E ning lõpuks pingeallika potentsiaalne energia. Pingeallika potentsiaalse energi arvutamiseks on kõige turvalisem kujutada pingeallikat ette kui hästi suure mahtuvusega C_∞ kondensaatorit nõnda, et pingeallika potentsiaalne energia muut oleks $d(C_\infty V^2/2) = d(q^2/(2C_\infty)) = qdq/C_\infty = Vdq$, kus C_∞ on pingeallika mahtuvus ja dq on pingeallikasse sisenev laeng (teisisõnu negatiivse märgiga võrreldes kondensaatorisse siseneva laenguga). Pingeallika potentsiaalne energia on seega kondensaatori pinge kaudu avaldatav kui $-VQ$. (Alternatiivselt oleksime võinud otse $-VQ$ kirjutada kasutades ära asjaolu, et elektrivälja tehtud töö on VQ mis on samas tõlgendatav kui negatiivne märk elektrivälja allikate potentsiaalse energi muuduga). Kokkuvõttes on potentsiaalne energiā

$$\begin{aligned} E_{\text{pot}} &= \frac{\rho L h^2 g}{2} + \frac{VQ}{2} - VQ = \\ &= \frac{\rho L h^2 g}{2} - \frac{\epsilon_0 L H V^2}{2d} - \frac{\epsilon_0 L (\epsilon - 1) V^2}{2d} h. \end{aligned}$$

Kuna süsteem läheb madalaima energiaga olekusse:

$$\frac{dE_{\text{pot}}}{dh} = -\frac{\epsilon_0 L (\epsilon - 1) V^2}{2d} + \rho L h g = 0.$$

Mildest

$$h = \frac{\epsilon_0 (\epsilon - 1) V^2}{2 \rho g d^2}.$$

Nagu oodatud, taandusid kondensaatori plaatide laiusi ja kõrgusi kirjeldavad suurused ära.

Lahendus 2: Nagu eelmiseski lahenduses eeldame lihtsuse mõttes, et kondensaatori plaadid on ristiküliku kujulised laiusega (horisontaalsihis) L . Vedelikuga tädetud ja õhuga tädetud kondensaatoriosad on ühendatud rööbiti, seetõttu nende mahtuvused liituvad. Olgu vedelikuga tädetud kondensaatoriosa kõrgus a ja õhuga tädetud osa kõrgus b . Sellisel juhul kogumahtuvus $C = C_1 + C_2 = \frac{\epsilon_0 L}{d} (\epsilon a + b)$. Vaatleme olukorda, kus kondensaator on lahti ühendatud toitest ja seetõttu toiteallikas tööd ei saa teha. Sellisel juhul võtab süsteem madalaima potentsiaalse energiaga oleku, kus summaarne energia koosneb elektrostaatilisest osast $Q^2/2C$ ja gravitatsioonilisest osast $\frac{1}{2} \rho g h^2 L d$, kus $Q = VC$ säilib, sest plaadid on isoleeritud ja laeng ei saa neilt kuhugile ära minna. Niisiis on meie tingimus

$$0 = \frac{d}{dh} \left(\frac{1}{2} \rho g h^2 L d + \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} \right) = \rho g h L d - \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C^2} \frac{dC}{dh}.$$

Siinjuures

$$\frac{dC}{dh} = \frac{\epsilon_0 L}{d} (\epsilon - 1),$$

sest $\frac{da}{dh} = 1$ ja $\frac{db}{dh} = -1$. Nüüd jääb üle vaid avaldada h asendades $Q/C = V$, tulemuseks on eelpooltoodud vastus.

Lahendus 3: Seni kuni vahemaa vedeliku nivoost plaatide vahel kuni plaatide üle-

mise servani on palju suurem, kui d , siis servaefektid plaatide servades on tühi sed. Aga mingis mõttes tõusebki nivoo just servaefektide töttu. Jõu ruumtihedus on võrdne elektrivälja teletisega polarisatsioonivektori sihis, st $(\vec{P} \cdot \nabla) \vec{E}$ -ga ning plaatide alumise serva juures on elektriväli servaefektist tingitult mittehomogeene, mis annabki töstejõu.

Teame, et $\nabla \times \vec{E} = 0$, seega

$$0 = \vec{E} \cdot (\nabla \times \vec{E}) = \frac{1}{2} \nabla E^2 - (\vec{E} \times \nabla) \vec{E},$$

seega jõud ruumalaühiku kohta on

$$(\vec{P} \cdot \nabla) \vec{E} - \nabla p = (\varepsilon - 1) \varepsilon_0 (\vec{E} \cdot \nabla) \vec{E} - \nabla p = \nabla \left[\frac{1}{2} (\varepsilon - 1) \varepsilon_0 E^2 - p \right].$$

Tasakaaluolekus on see kõik null, st $\frac{1}{2} (\varepsilon - 1) \varepsilon_0 E^2 - p = \text{const}$. Plaatide vahelt väljas on $E = 0$, seetõttu on sees röhk $\frac{1}{2} (\varepsilon - 1) \varepsilon_0 E^2$, kus $E = V/d$, mis kergitabki nivoo $\frac{1}{2} (\varepsilon - 1) \varepsilon_0 V^2 / \rho g d^2$ võrra kõrgemale.

Autorite loetelu

TODO