

200 EESTI FÜÜSIKAOLÜMPIAADI ÜLESANNET AASTATEST 2005 – 2011

koos vihjete ja lahendustega

Koostas Taavet Kalda

2025

© Autoriõigused: Eesti Matemaatika Selts, Tallinna Tehnikaülikool, Tartu Ülikool,
ülesannete autorid ja Taavet Kalda.

Kogumiku koostamist toetasid: Eesti Matemaatika Seltsi fond „Benoit Mandelbroti Jälgedes“, Robert Kitt ja Tallinna Tehnikaülikool.

Korrektorid Nata-Ly Pantšenko, Erki Leht, Aet Karolin, Päivo Simson
Kaanekujundaja Rael Kalda

Kirjastanud Tallinna Tehnikaülikooli avatud ülikooli eksami- ja olümpiaadikool
ISBN ???

Sisukord

| | |
|--------------------------------|-----|
| Sissejuhatus | 4 |
| Ülesanded | 5 |
| Staatika | 5 |
| Kinemaatika | 11 |
| Dünaamika | 18 |
| Taevamehaanika | 28 |
| Gaasid | 31 |
| Vedelike mehaanika | 35 |
| Termodünaamika | 38 |
| Elektrostaatika | 45 |
| Elektriahelad | 50 |
| Magnetism | 58 |
| Geomeetriline optika | 60 |
| Varia | 69 |
| Laineoptika | 72 |
| Vihjad | 73 |
| Lahendused | 92 |
| Õpilaste tulemused | 224 |
| Autorite loetelu | 229 |

Sissejuhatus

Kogumik sisaldab 200 ülesannet Eesti gümnaasiumiastme füüsikaolümpiaadi piirkonnavorudest, lõppvorudest ja lahtistelt võistlustelt. Igale ülesandele on lisatud paarilauseline vihje. Juhul kui õpilane jäab ülesannet lahendades toppama, on tal võimalik vihjet lugeda ning teisele katsele minna.

Siinne kogumik on teine väljaanne Eesti füüsikaolümpiaadi ülesannete kogude seerias. Esimeses kogumikus oli 200 ülesannet ajavahemikust 2012–2018.

Ülesanded on jaotatud teemade kaupa ning teemasiseselt raskuse järgi. Raskustaset tähistatakse kuni viie tärniga. Ülesannete lihtsamaks otsimiseks on ülesannete numbrite ette pandud „Ü“, vihjete ette „V“ ja lahenduste ette „L“. Näiteks ülesande 133 teksti number on kujul Ü133. Iga ülesande juures on kirjas ka selle autor ning olümpiaadi vooru lühinimetus, lisaks lühendid P 1, G 1 jne, kus tähed tähistavad põhikooli- ja gümnaasiumiastet. Näiteks G 9 viitab gümnaasiumiastme 9. ülesandele.

Kogumiku koostamise käigus eemaldati erinevatel põhjustel viis ülesannet, millele vastavalt on 2011. aasta füüsika lahtiselt võistluselt vaid viis ülesannet (ülejäänud on esimeses kogumikus).

Lisaks leiate kogumiku lõpust kogumiku poolt kaetud lahtiste ja lõppvorude esimese ja teise järgu saanud õpilaste ning ülesannete autorite nimekirja.

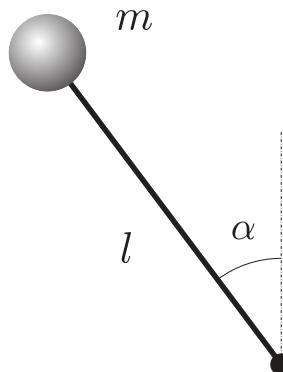
Ülesanded

Staatika

Ü1 Pendel ★

Autor: Mihkel Heidelberg, piirkonnavoor, 2008, G 1

Otsast kinnitatud varras saab pöörelda ümber horisontaaltelje ühes tasandis. Varda otsa on kinnitatud koormis massiga m . Varda pikkus on l . Varda kinnitusele mõjub hõõrdest tingitud pidurdav jõumoment M . Millistes nurkade vahemikes võib olla varras paigal (vt joonist)? Arvestada, et $mgl > M$.



Ü2 Toru ★

Autor: tundmatu, lahtine, 2007, G 2

Kaks inimest kannavad toru massiga $m = 80 \text{ kg}$ ja pikkusega $l = 5 \text{ m}$. Esimene inimene hoiab toru kaugusel $a = 1 \text{ m}$ toru otsast, teine aga hoiab toru teist otsa. Leida jõud, mida toru avaldab kummalegi inimesele.

Ü3 Nürinenud käärid ★

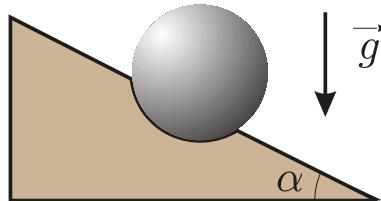
Autor: Mihkel Kree, lõppvoor, 2009, G 1

Juku asus heikääridega õunapuult jämedat kuivanud oksa lõikama. Et aga käär rid olid juba ammu nürinenud, polnud neist mingit abi. Enamgi veel, oks hakkas kääride kokkuvajutamise ajal terade vahel lausa libisema. Libisemine peatus hetkel, mil terade vaheline nurk oli kahanenud α -ni. Kui suur oli hõõrdetegur oksa ja nürinenud lõiketera vahel?

Ü4 Kuul ★★

Autor: tundmatu, lahtine, 2005, G 3

Metallist kuul asetseb lauaaugus, mille sügavus on 2 korda väiksem kuuli raadiusest (vt joonist). Kui suure laua kaldenurga α puhul kukub kuul august välja?

**Ü5 Katus ★★**

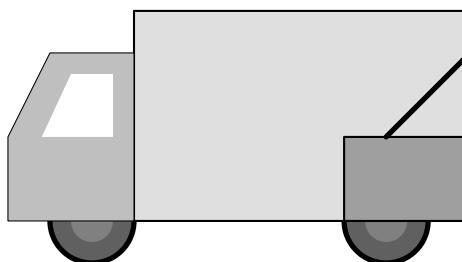
Autor: Ott Krikmann, piirkonnnavoor, 2005, G 2

Ühtlase lumekihiiga kaetud katus on horisondi suhtes kaldu $\alpha = 40^\circ$ nurga all. Katus on ristiküliku kujuline ja laius harjast räästani mööda katuse pinda on L . Katuse ja lume vaheline hõõrdetegur on $\mu = 1$. Katuse harjast hakkab lumekihi ja katuse vahele voolama vesi, mis muudab märja katuse ja lumekihi vahelise hõõrdeteguri nulliks. Kui vesi jõuab katuseharjast kaugusele l , hakkab lumekiht alla libisema. Leidke suhe l/L .

Ü6 Kast kaubikus ★★

Autor: Oleg Košik, lõppvoor, 2009, G 2

Kast massiga $m = 15 \text{ kg}$ on kinnitatud kaubiku tagaseina külge nööriga. Leida nööri pinge minimaalne võimalik väärustus äkkpidurduse ajal, kui kiirusega $v_0 = 45 \text{ km/h}$ sõitev kaubik jäab seisma ajaga $t = 5 \text{ s}$. Hõõrdetegur kasti aluse ja kaubiku põranda vahel $\mu = 0,2$, nurk nööri ja kaubiku tagaseina vahel $\alpha = 45^\circ$. Lugeda, et pidurdamine oli ühtlane ja kast püsits kogu aeg paigal.

**Ü7 Liivahunnik ★★**

Autor: Roland Matt, piirkonnnavoor, 2011, G 5

Millisele pindalale on võimalik mahutada koonusekujuline liivahunnik, kui liiva ruumala on $V = 50 \text{ m}^3$ ja libisevate liivakihtide vaheline efektiivne hõõrdetegur $\mu = 0,4$? Liivahunniku ja aluspinna hõõrdeteguri võib lugeda väga suureks.

Ü8 Tormituul ★★

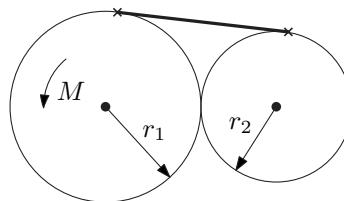
Autor: Mihkel Kree, lõppvoor, 2011, G 3

Vaatleme tugeva külgtuule kätte jäänud veoautot lihtsustatult homogeense risttahukana. Auto laius on $a = 2$ m, kõrgus $b = 3$ m, pikkus $c = 5$ m. Missugune peaks olema hõõrdetegur rattaste ja maapinna vahel, et piisavalt tugev külgtuul suudaks auto tuulepoolsed rattad maast lahti kergitada?

Ü9 Hammasrattad ★★★

Autor: Siim Ainsaar, lõppvoor, 2010, G 4

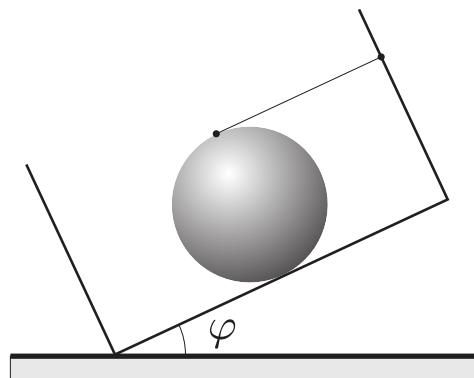
Fikseeritud telgedega hammasrattad raadiustega r_1 ja r_2 hambuvad ja on ühendatud venimatu nööriga, mis on mõlemale puutujaks. Esimest rattast pööratakse jõumomendiga M . Kui suur on nööri pinge T ?



Ü10 Kuul ★★★

Autor: tundmatu, lahtine, 2006, G 7

Kasti tasasel põhjal asub kuul. Kasti põhi asub nurga all horisontaalsuuna suhtes. Kuuli hoiab tasakaalus kasti seina külge kinnitatud niit, mis on paralleelne kasti põhjaga (vt joonist). Kui suure maksimaalse nurga φ võrra saab kasti kallutada, et kuul oleks veel tasakaalus? Höõrdetegur kuuli ja kasti vahel on μ .



Ü11 Toru ★★★

Autor: Aigar Vaigu, lõppvoor, 2010, G 5

Kareda horisontaalselt kinnitatud toru (raadius R) peal tasakaalustatakse risttahukakujulist prussi. Leidke prussi paksus L , mille korral prussi asend torul on stabilne.

Märkus: kasulikud võivad olla väikeste nurkade korral kehtivad lähenused $\sin \alpha \approx \alpha$ ja $\cos \alpha \approx 1 - \alpha^2/2$, kus nurgad on radiaanides.

Ü12 Kuubik ★★★★

Autor: Riho Taba, piirkonnnavoor, 2007, G 9

Kuubik massiga $m = 10 \text{ kg}$ ning küljepikkusega $a = 0,1 \text{ m}$ lebab laua. Laua ja kuubiku vaheline hõõrdetegur on $\mu = 0,5$. Kas kuubikut on võimalik käega teisele küljele lükata, avaldades vaid jõudu kuni $F = 40 \text{ N}$? Eeldada, et hõõrdetegur käe ja kuubiku vahel on väga suur ehk käsi ei libise. Raskusjõu kiirendus on $g = 9,8 \text{ m/s}^2$.

Ü13 Kuulid ★★★★

Autor: Jaan Kalda, lahtine, 2009, G 9

Kolm ühesuguse raadiusega kuuli A , B ja C on ühendatud kergete varraste abil võrdkulgseks kolmnurgaks ABC , mis lebab siledal (kuid nullist erineva hõõrdeteguriga) horisontaalpinnal. Kuuli C lükatakse hästi aeglaselt nii, et selle kiirusvektor on kogu aeg risti sirgega AC . Kui kuul A on pisavalt raske (st masside suhe M_A/M_B on piisavalt suur), siis jäab kuul A paigale. Millise suhte M_A/M_B puhul hakkab kuul A libisema?

Ü14 Rõngas ★★★★

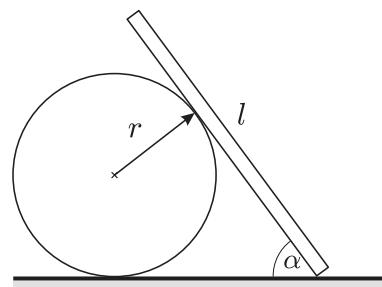
Autor: Jaan Kalda, lõppvoor, 2011, G 7

Ebaühtlase massijaotusega traadist on tehtud rõngas, mis kujutab endast ringi raadiusega R . Selle rõnga massikese asub ringi keskpunktist kaugusel $R/2$. Rõngas asetatakse horisontaalsele völliile rippuma. Milline peab olema rõnga ja völli vaheline hõõrdetegur μ , et völli aeglasel pöörlemisel rõngas völlil ei libiseks?

Ü15 Varras ★★★★★

Autor: Siim Ainsaar, lõppvoor, 2008, G 9

Peenike homogeenne varras toetub ühe otsaga vastu põrandat (hõõrdetegur varda otsa ja põrandata vahel on μ) ning küljega vastu libedat horisontaalset silindrit (hõõrdetegur on tühisele väike), vt joonist. Silinder on liikumatult kinnitatud põrandata külge, varras on risti silindri teljega ning moodustab põrandaga nurga α . Millise varda pikkuse l korral jäab varras sellisesse asendisse püsima?



Ü16 Konn ★★★★★

Autor: Taavi Pungas, lahtine, 2010, G 9

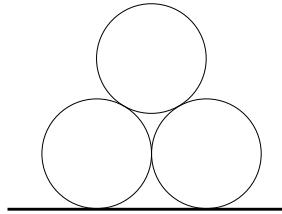
Väike puukonn suudab ronida mööda seinu ja lagesid, luues enda ja seina vahele seinaga risti oleva tõmbejõu (nt iminappade tekkitatud vaakumi) ning vältides libisemist selle tagajärvel tekkiva hõõrdejõu abil. Millise nurga all maapinna suhtes peab olema sein, et tal oleks end kõige raskem paigal hoida (mil libisemise välimiseks vajalik seinaaga risti olev jõud on maksimaalne)? Hõõrdetegur seina ja konna vahel on μ .



Ü17 Torud ★★★★

Autor: Jaan Kalda, piirkonnavor, 2010, G 10

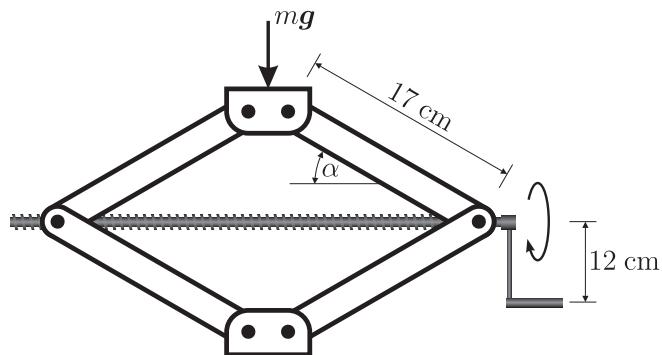
Põrandale asetatakse kõrvuti kaks ühesugust silindrilist toru — paralleelselt ja küljetsi üksteist puutuvana. Kolmas samasugune toru asetatakse nende peale — samuti paralleelselt, nõnda et see toetub kahele alumisele. Milliseid tingimusi peavad rahuldama hõõrdetegur μ toru ja põranda vahel ning hõõrdetegur k kahe toru vahel selleks, et pealmine toru kahte alumist üksteisest eemale ei vajutaks?

**Ü18 Tungraud ★★★★**

Autor: Valter Kiisk, lõppvoor, 2011, G 10

Joonisel on kujutatud lihtsa konstruktsiooniga tungraud, mille keerme samm on 3 mm. Tungraualle surub auto jõuga $F = 5\text{ kN}$. Vaatleme hetke, millal $\alpha = 40^\circ$. Tungraua mõõtmeid vaadake joonisel.

- a)** Kui suure jõuga tuleb auto töstmiseks vända käepidemele mõjuda, kui jäätta arvestamata hõõrdumine kõigi libisevate pindade vahel?
- b)** Kui hõõre oleks ka tegelikult tühiselt väike, siis ei püsiks tungraud üleskeeratud asendis: niipea kui käepidemest lahti lasta, hakkaks see auto raskuse mõjul pöörlema ja auto vajuks taas alla. Vastake eelmisele küsimusele eeldusel, et hõõrdetegur on parajasti nii suur (st mitte suurem, kui hädapärist vaja), et tungraud jäääks üleskeeratud asendisse püsima.



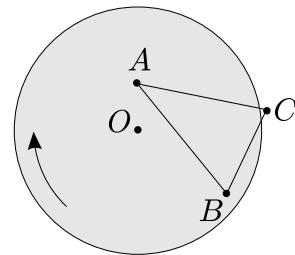
Ü19 Platvorm ★★★★

Autor: Jaan Kalda, lõppvoor, 2005, G 10

Siledas põrandas on pöörlev ringikujuline platvorm (joonisel pealtvaates, hall), mis on samast materjalist nagu põrandki (joonisel valge). Põrand ja platvormi ülemine pind on samal horisontaaltasandil. Kolm ühe-sugust keha ühendatakse kergete varraste abil kolmnurgaks ning asetatakse sedasi, et kaks keha asuvad platvormil punktides A ja B (vt joonist). Vardad ei puuduta ei põrandat, ega platvormi.

- a)** Kui kolmas keha lebaks põrandal punktis C , kas siis kolmnurk hakkaks põrand suhtes liikuma või jäeks paigale? Põhjendage vastust.
- b)** Märkige joonisel selline punktihulk X , kus võiks asuda kolmas keha nii, et kolmnurk jäeks põrand suhtes paigale.

Märkus: kolmnurga külgede AC ja BC pikkusi võib muuta. Seega, kui kolmas keha asub punktis $D \in X$, siis üldjuhul $|AD| \neq |AC|$ ja $|BD| \neq |BC|$.



Kinemaatika

Ü20 Autod ★

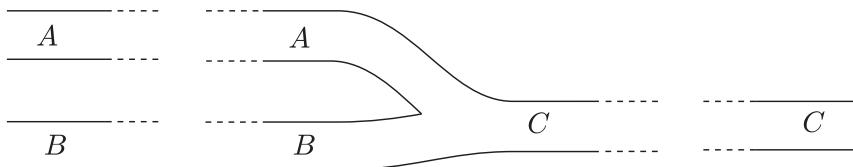
Autor: Oleg Košik, piirkonnavor, 2006, G 1

Tartu ja Tallinna vahemaa on $s = 180$ km. Jalgrattur sõidab Tartust Tallinna poole kiirusega $v_1 = 30$ km/h. Sõites luges ta kokku, et $t_0 = 5$ min jooksul tuli talle vastu $n_0 = 20$ autot. Mitu Tallinnast Tartusse sõitvat autot on korraga maanteel? Eeldada, et autod sõidavad võrdsete vahemaadega kiirusega $v_2 = 90$ km/h kogu maantee ulatuses.

Ü21 Ummik ★

Autor: Jaan Kalda, piirkonnavor, 2007, G 2

Vaateleme kahe üherajalise tee, A ja B, liitumist üherajaliseks teeks C. Tipptunni ajal on kõik kolm teed täidetud autodega; kahe naaberauto keskmise vahemaa võib lugeda kõigil kolmel teel ühesuguseks. Tee A pikkus on $L_A = 1$ km, tee B pikkus $L_B = 3$ km ning tee C pikkus $L_C = 2$ km. Autode keskmine kiirus teel A on $v_A = 3$ km/h ning tee B läbimiseks kulub autol $t_B = 36$ min. Kui kaua sõidab auto tee A algusest tee C lõpuni?



Ü22 Auto ★

Autor: tundmatu, lahtine, 2008, G 1

Paigalseisust liikuma hakanud autol kulus teatud vahemaa läbimiseks $t = 15$ s. Millise ajaga läbis auto viimase viiendiku sellest vahemast? Auto liikumine lugeda ühtlaselt kiirenevaks.

Ü23 Ratturid ★

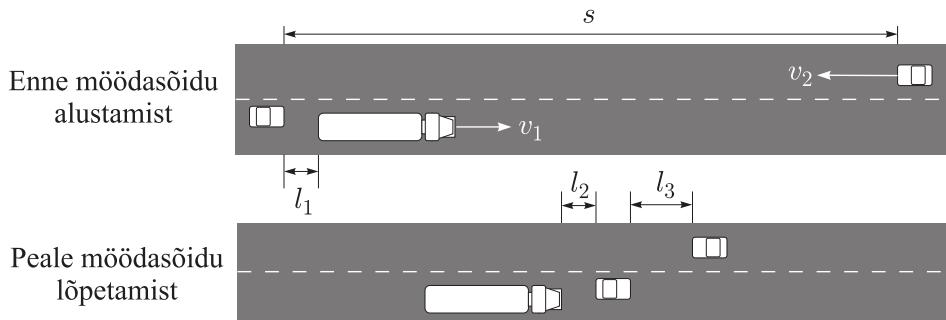
Autor: tundmatu, lahtine, 2009, G 1

Kolm ratturit sõitsid linnast A linna B. Linnast A väljusid nad üheaegselt. Esimese ratturi keskmine kiirus oli $v_1 = 30$ km/h, teise ratturi oma $v_2 = 20$ km/h. Esimene rattur jõudis sihtpunktisse kell 19.00, teine rattur kell 20.00 ning kolmas rattur kell 21.00. Milline oli kolmanda ratturi keskmine kiirus v_3 ?

Ü24 Veok ★

Autor: Valter Kiisk, piirkonnavor, 2005, G 1

Veok sõidab maanteel ühtlase kiirusega $v_1 = 80$ km/h. Veokile järgneb $l_1 = 10$ m kauguse sel sõiduauto. Veoki pikkus on $L_1 = 12$ m, sõiduauto pikkus $L_2 = 4$ m. Sõiduauto sooritab möödasõidu ühtlase kiirendusega $a = 2 \text{ m/s}^2$. Möödasõit lõpeb siis, kui sõiduauto on veokist $l_2 = 10$ m kauguse sel. Kui pikas minimaalses ulatuses s peaks vastassuunaline rada vaba olema ohutuks möödasõiduks? Ohutuks kauguseks vastutulevast autost loetakse $l_3 = 30$ m. Vastutulevad autod sõidavad kiirusega $v_2 = 90$ km/h.



Ü25 Rongiõnnetus ★

Autor: Oleg Košik, piirkonnavoor, 2011, G 4

Kehrast Aegviidu poole sõitis kiirusega $v_1 = 63 \text{ km/h}$ kaubarong. Aegviidust hakis Kehra poole sama teed pidi sõitma elektrirong kiirendusega $a_2 = 0,15 \text{ m/s}^2$. Kui rongide vahemaa oli $s = 2750 \text{ m}$, märkas kaubarongi vedurijuht vastusõitvat elektrirongi ning vajutas pidurile. Elektrirongi kiirus oli selleks hetkeks $v_2 = 18 \text{ km/h}$. Leidke rongide sõidukiirused vahetult kokkupõrke eel. Kaubarongi pidudruskiirendus on $a_1 = -0,1 \text{ m/s}^2$.

Ü26 Sonar ★★

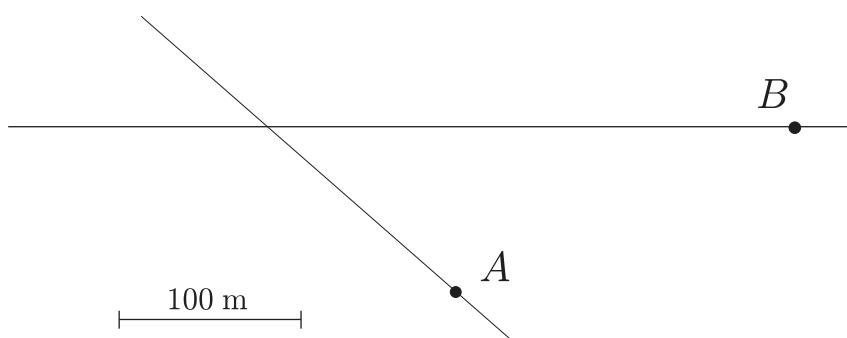
Autor: Oleg Košik, piirkonnavoor, 2006, G 3

Vaatame laeva kiiruse määramiseks järgmist meetodit: rannikult saadetakse eemalduvale laevale ultraheli signaal sagedusega f_1 . Laevalt peegeldub signaal tagasi rannikule, kus vastuvõtja fikseerib signaali sagedusega f_2 . Teades, et heli kiirus õhus on v_h , määrase laeva kiirus v .

Ü27 Autod ★★

Autor: Jaan Kalda, piirkonnavoor, 2008, G 2

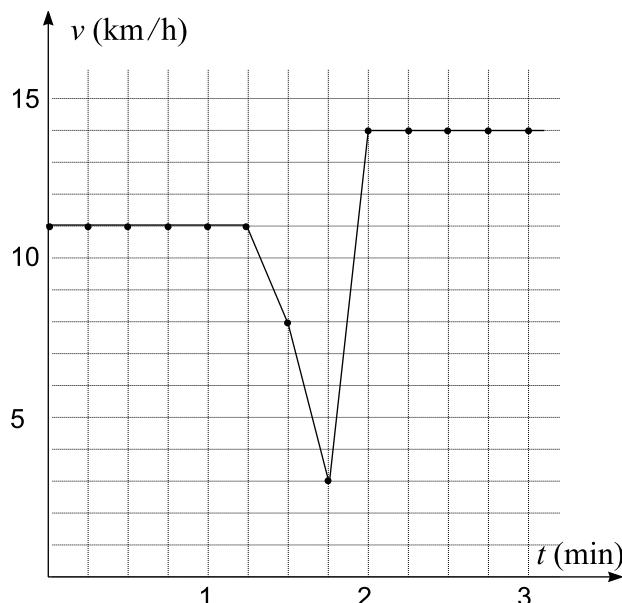
Juuresolev joonis on tehtud kõrgelt otse alla pildistatud foto põhjal, millel on jäädvustatud kaks autot (tähistatud punktidega A ja B), mis lähenevad ristmikule jäävate kiirustega $v_A = 40 \text{ km/h}$ ja $v_B = 60 \text{ km/h}$. Kasutades joonist ja sellel antud mõõtkava, leidke autode edasisel liikumisel nende vaheline minimaalne kaugus.



Ü28 GPS ★★

Autor: Jaan Kalda, lõppvoor, 2009, G 5

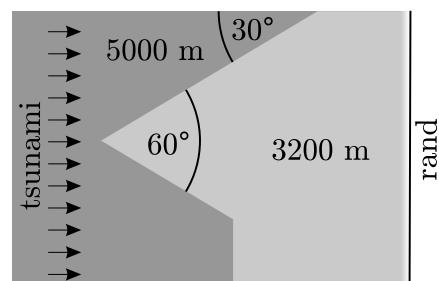
Tervisesportlane kasutab GPS seadet oma jooksutreeningu tulemuste salvestamiseks. Tema GPS seade määrab iga 15 sekundi järel jooksja täpse asukoha, mille põhjal arvutab ja salvestab GPS seade viimase 15 sekundi keskmise kiiruse ning esitab saadud tulemused graafikul punktidena, mis on ühendatud sirglõikude abil. Jooksja märkas lahti läinud ketsipaelu, peatus ja sidus paelad kinni. Tänu väikesele puhkusele jätkas ta jooksmist juba kiiremini, vt juuresolevat GPS-i esitatud graafikut. Kui kaua kestis peatus? Pidurdumiseks ning puhkusjärgselt kiirendamiseks kulunud aeg lugeda tühiseks; jooksu kiirus oli konstantne nii enne peatust kui ka pärast seda.



Ü29 Tsunami ★★★

Autor: Jaan Kalda, lõppvoor, 2005, G 6

Joonisel onookeani kujutatud ülaltvaates ja põhja sügavus on kodeeritud halltoonidega: tumehall vastab sügavamale, helehall madalamale veele. Ookeanipõhjas on astang, kus $h_1 = 5000$ m sügavune vesi läheb $h_2 = 3200$ m sügavuseks; ranna lähedal toimub madaldumine väga kiiresti. Rannale läheneb tsunami nii, nagu näidatud joonisel. Tsunami liikumiskiirus $v = \sqrt{gh}$, kus $g = 9,8 \text{ m/s}^2$ ja h tähistab vee sügavust. Millisesse ranna punkti jõuab kõigem laine? Põhjendage vastust.



Ü30 Hävituslennuk ★★

Autor: tundmatu, lahtine, 2011, G 7

Ühel ilusal augustipäeval käis Mati paraadil vaatamas NATO hävituslennukeid, mis tegid rahva kohal demonstratsioonlende. Diktor ütles valjuhääldest, et lennuk lendab horisontaalselt üle rahva kiirusega $v = 1350 \text{ km/h}$. Matit huvitas aga, kui kõrgel lennuk lendab. Vajalike mõõtetulemuste saamiseks seisis ta nii, et tema ja läheneva lennukiga ühele joonele jäi täpselt üks 9 meetri pikkune elektripost ning Mati ise asus teise posti juures; postide vahekaugus oli 50 m. Mati käivitas oma mobiiltelefoni stopperi just siis, kui lennuk posti ülemise otsa tagant nähtavale ilmus, ning peatas hetkel, kui käis köva pauk ja hakkas kostuma lennuki müra. Ta sai stopperi näiduks 32,04 s. Kodus mõõtis ta üle ka enda silma kõruse maapinnast: $l = 1,68 \text{ m}$. Kui kõrgel lendas lennuk? Heli kiirus õhus on umbes $u = 330 \text{ m/s}$.

Vihje: kui lennuk lendab ülehelikiiruse sel, siis levib tema taga koonusekujuline lõök-laine front, kusjuures koonuse tipus on lennuk ja selle koonuse telglõike tipunurk on $\alpha = 2 \arcsin\left(\frac{u}{v}\right)$.

Ü31 Fotograaf ★★★

Autor: Jaan Kalda, lõppvoor, 2011, G 6

Fotograaf pildistas kõrgest joast langevat veevoolu; päikesevalguses sätendavad veepiisad venisid piltidel vertikaalseteks triipudeks. Kui fotoaparaat oli pildistamisel normaalasendis, siis olid kõik triibud pikkusega $l_1 = 120 \text{ pikslit}$; kui fotoaparaat oli pildistamisel „jalad ülespidi“ (st seda pöörati ümber optilise telje 180 kraadi), siis oli triipude pikkuseks $l_2 = 200 \text{ pikslit}$. Kui pikad olid triibud siis, kui fotoaparaati hoiti pildistamisel „portree asendis“ (st seda pöörati ümber optilise telje 90 kraadi)? Eeldada, et säriaeg ja optilise telje suund oli kõigil juhtudel üks ja sama. Kui toodud andmete põhjal pole vastus üheselt leitav, siis andke kõik võimalikud vastused.

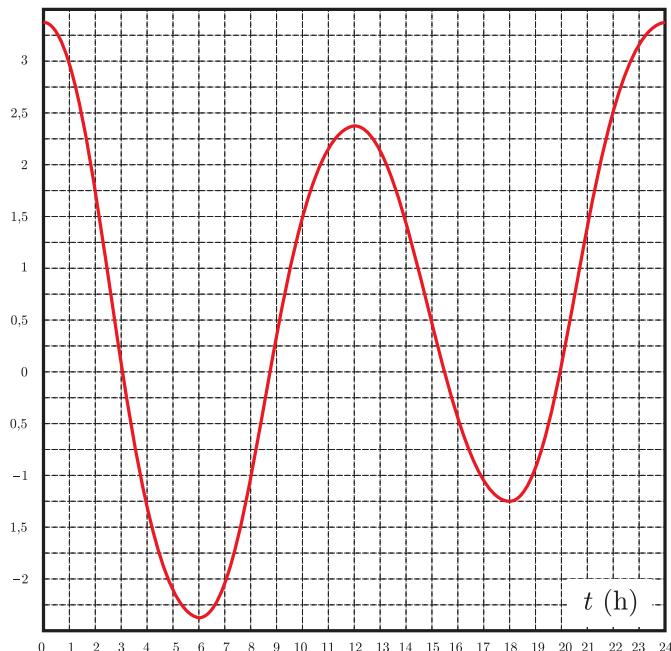
Vihje: fotoaparaadi põhikomponendid on objektiiv (lääts) ja katik, millest esimene tekitab digitaalsensori (või filmi) tasandile pildistatavate esemete kujutise. „Puhkeasendis“ ei lange see kujutis siiski sensorile, sest katik varjab läbi objektiivi tulnud valguse ära. Päästikule vajutamisel avaneb katik lühikeseks ajavahemikuks (säriajakaks): objektide kujutis langeb nüüd töesti sensorile ning sensori iga piksel mõõdab ära kogu selle aja vältel langeva valgusenergia. Harilikult kujutab katik endast kahte „kardinat“, mis paiknevad vahetult sensori ees ja katavad selle. Alguses varjab sensorit esimene kardin, mille ülemine serv liigub päästikule vajutamisel konstantse kiirusega v ülevalt alla, avades sensori. Säriaaja lõpetab teine kardin, mille alumine serv liigub samuti ülevalt alla, samasuguse kiirusega v nagu esimenegi. Kui säriaeg on hästi lühike, siis ei jõua sensor täielikult avaneda: mõlemad kardinad liiguvalt koos ülevalt alla ning sensor on avatud objektiivist tulevale valgusele vaid kardinate vahelise kitsa horisontaalse riba ulatuses (kusjuures see valgusele avatud riba liigub kiirusega v ülevalt alla).

Ü32 Laev ★★★

Autor: tundmatu, lõppvoor, 2007, G 5

Maailmas leidub jõgesid, kus vesi tõusude tõttu liigub kord ühes, kord teises suunas. Vaatleme laevaliiklust ühel sellisel jõel. Joonisel on antud vee liikumiskiiruse sõltuvus kellaajast. Positiivseks loetakse vee kiirus siis, kui see on suunatud punktist A punkti B poole. Leida optimaalne (lühimate sõiduaegadega) tunniplaan kaubalaeva regulaarseks liikumiseks üks kord päevas punktist A punkti B ja tagasi. Kaugus nende punktide vahel piki jõge on $L = 20$ km, laeva kiirus seisvas vees $v_0 = 4$ km/h.

v (km/h)



Ü33 Müra ★★★

Autor: Siim Ainsaar, lahtine, 2009, G 10

Matkaja rõõmustab laagriplatsil, et elektrijaama müra tuuletu ilmaga nii vaiksest temani kostab. Hiljem, kui tuul tõuseb, on müra veel vaiksem. Puhub põhjatuul kiirusega βc , kus c on heli kiirus paigalseivas õhus; jaam jäääb matkajast edelasse (st tuule ja jaama suundade vaheline nurk on $\alpha = 135^\circ$).

- a) Kas helisagedus on sama mis tuuleta?
- b) Kui tuuleta on tajutav helivõimsus P ja tuulega xP , siis kui suur on x ? Võite lugeda, et elektrijaam on punktikujuline.

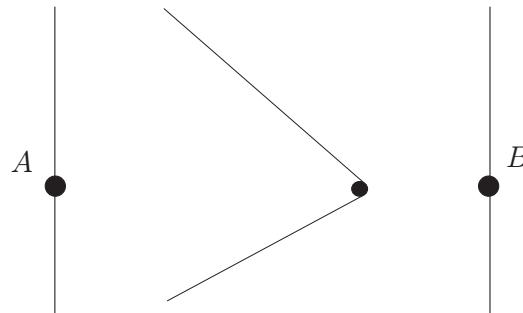
Soovitus: uurige helifrondi levimist.

Ü34 Kaater ★★★★

Autor: Jaan Kalda, lõppvoor, 2009, G 8

Mootorpaat sõidab jõe ühelt kaldalt punktist A teisele kaldale punkti B. Paadi kiirus on $u = 7 \text{ m/s}$.

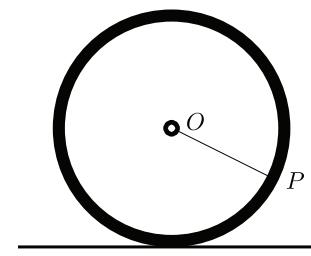
- a) Joonisel on näidatud paadi tekitatud veelained. Milline on jõe voolukiirus?
b) On teada, et kui vee sügavus on h , siis lained levivad kiirusega $w = \sqrt{gh}$, kus g on vabalangemise kiirendus. Kui sügav on jõgi?

**Ü35 Kodarad ★★★★**

Autor: tundmatu, lahtine, 2011, G 10

Horisontaalsel pinnal veerevast radiaalsete kodaratega rattast tehakse pilt. Fotokaamera säriaeg on mõõduka pikkusega: paigalseisvad objektid on pildil teravad, liikuvad esemed aga hägused. Muuhulgas on ratta kodarad valdavalt hägused, kuid osade kodarate teatud punktid on ometigi teravad. Võib eeldada, et kogu pilt on salvestatud samaaegselt.

- a) Kopeerige juuresolev skeem lahenduslehele ning näidake konstruktsiooni teel, milline kodara OP punkt (või punktid) kujutub fotol teravalt; põhjendage vastust.
b) Konstrueerige köver, millel asuvad ülejäänud kodarate teravalt kujutuvad punktid.

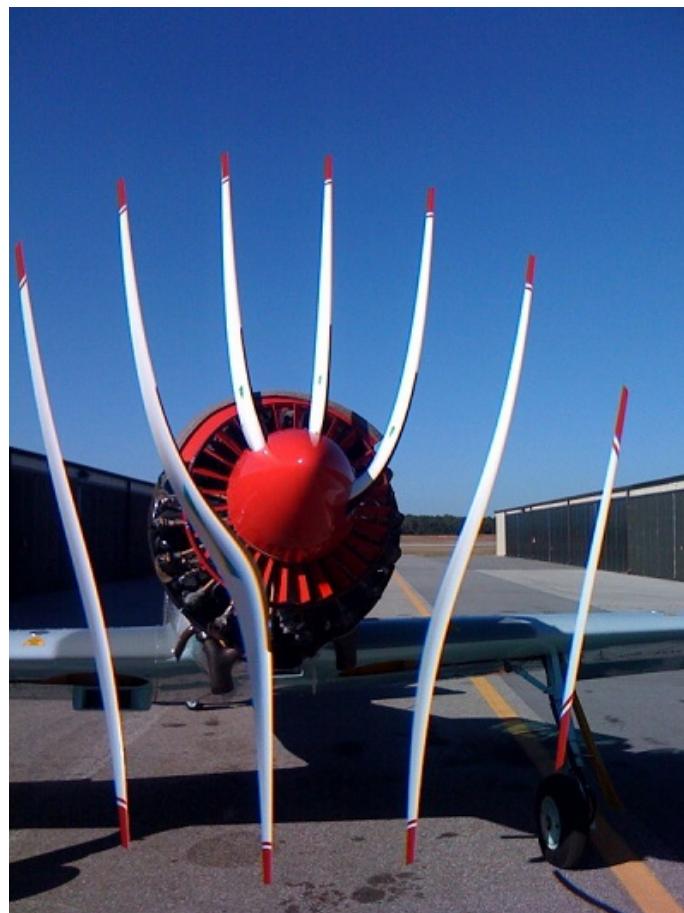


Ü36 Propeller ★★★★

Autor: Andreas Valdmann, lõppvoor, 2010, G 10

See pilt pöörlevast lennukipropellerist on tehtud telefoni kaameraga, mis salvestab korraga ühe vertikaalse veeru pikselid. Pilt tekib vasakult paremale veergude kaupa skaneerides.

- a) Mis suunas pöörleb propeller fotograafi poolt vaadatuna (päripäeva või vastupäeva)?
- b) Mitu laba on propelleril?
- c) Mitu pööret teeb propeller ühes minutis, kui kogu pildi tegemiseks kulunud aeg on 1/8 sekundit?



Dünaamika

Ü37 Kivi ★

Autor: Aigar Vaigu, lõppvoor, 2005, G 1

Sirgjooneliselt ja jääva kiirusega $v = 4 \text{ m/s}$ tõusva õhupalli gondlis on poiss. Mängil hetkel kukutab poiss gondlist alla kivi ning seejärel viskab kivile järgi palli, millega proovib langevat kivi tabada. Milline võib olla suurim ajavahemik kivi lahtilaskmise ja palli viskamise vahel, et see oleks veel võimalik? Maapinnal seisates suudaks poiss visata palli vertikaalselt üles kuni $h = 20 \text{ m}$ kõrgusele. Võib eeldada, et õhupall asub piisavalt kõrgel selleks, et pall tabaks kivi enne maapinnale kukkumist. Õhutakistus lugeda tühiseks. Raskuskiirendus $g = 9,8 \text{ m/s}^2$.

Ü38 Pallid ★

Autor: tundmatu, lahtine, 2007, G 1

Juku istub puu otsas ja laseb algkiiruseta lahti tema käes oleva palli. All seisab Juhan, kes samal hetkel viskab Juku pihta vertikaalselt üles täpselt samasuguse palli. Pärast pallide põrget jõuab Juku pall täpselt tema kõrgusele tagasi. Kas pall tabab Juhanit enne või pärast seda, kui Juku pall jõuab Jukuni? Lageda, et pallide põrge on absoluutsest elastne.

Ü39 Hobune ★

Autor: Valter Kiisk, piirkonnnavoor, 2007, G 1

Puuoksal istub poiss, kes soovib hüpata puu alt mööda galopeeriva hobuse selga. Hobuse kiirus on $v = 10 \text{ m/s}$ ja puuoksa kõrgus sadula suhtes $h = 3 \text{ m}$. Kui suur peab olema horisontaalsihiline distants sadula ja puuoksa vahel sel hetkel, kui poiss oksast lahti laseb?

Ü40 Eiffeli torn ★

Autor: Aigar Vaigu, piirkonnnavoor, 2010, G 1

Eiffeli torni ülemiselt vaateplatvormilt (kõrgus maapinnast $h = 273 \text{ m}$) lastakse kukkuda raudkuulil. Täpselt $t = 3 \text{ sekundi}$ pärast kukutatakse veel üks raudkuul. Kui suur on raudkuulide suurim kiiruste vahe langemisel? Kui suur on ajavahemik kuulide maapinnale jõudmiste vahel? Raskuskiirendus $g = 9,8 \text{ m/s}^2$. Katse käigus ükski külastaja viga ei saanud.

Ü41 Kokkupõrge ★

Autor: Andreas Valdmann, piirkonnnavoor, 2011, G 1

Kaks autot massidega $m = 1,5 \text{ tonni}$ teevad laupkokkupõrke, mille võib lugeda täielikult plastseks. Kui suur energia kulus purustute tekitamiseks, kui:

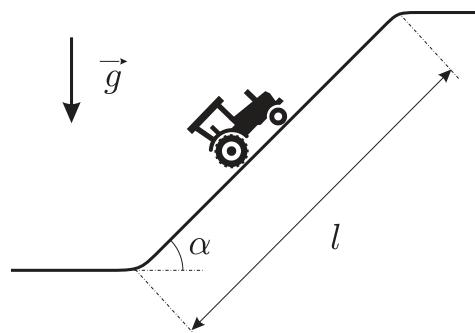
- mõlema auto kiirus oli $v_a = 50 \frac{\text{km}}{\text{h}}$;
- üks auto seisis paigal ja teise auto kiirus oli $v_b = 100 \frac{\text{km}}{\text{h}}$?

Võib arvestada, et autode lohisemisel pärast põrget olulist kahju ei teki.

Ü42 Tõus ★

Autor: tundmatu, lahtine, 2005, G 2

Talvise ilmaga Tartust Tallinnasse sõitev auto peab oma teekonna alguses ületama järsu ja libeda töusu Jakobi tänaval (vt joonist). Töusu kallak horisontaalsihi suhtes $\alpha \approx 5^\circ$, pikkus $l \approx 200$ m. Hinnata, kui suur on minimaalne hõõrdetegur μ rataste ja tee vahel, mille puhul kiirusega $v = 30$ km/h mäkke üles sõitma hakanud auto suudab veel töusu ületada?

**Ü43 Keha ★**

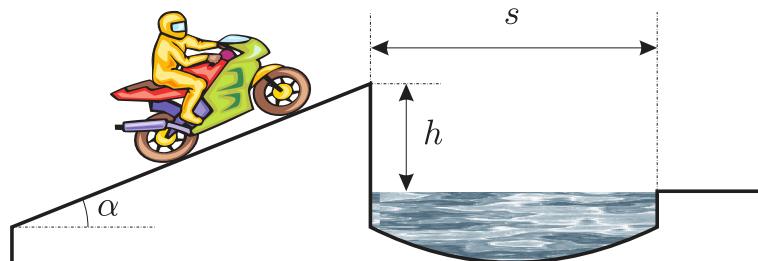
Autor: tundmatu, lahtine, 2006, G 3

Vertikaalselt üles visatud keha läbib kaks korda kõrguse h asuvat punkti. Ajavahemik nende kahe läbimise vahel on Δt . Leida keha algkiirus v_0 ja aeg τ keha liikumise algusest kuni algpunkt tagasi jõudmiseni.

Ü44 Mootorratas ★

Autor: tundmatu, lahtine, 2007, G 5

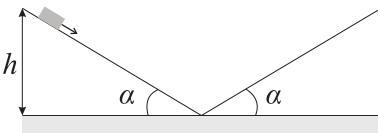
Mootorrattur tahab hüpata üle kraavi, mille mõõtmed on näidatud joonisel. Kui suur peab olema mootorratturi minimaalne kiirus v lennu alguses selleks, et tema ettevõtmise õnnestuks?



Ü45 Kelk ★

Autor: tundmatu, lahtine, 2008, G 2

Kelguga lastakse alla $h = 10\text{ m}$ kõrgusest $\alpha = 30^\circ$ kaldenurgaga orunõlvast. Kui kõrgele tõuseb kelk saadud hooga mööda sama suure kaldenurgaga vastasnõlva, kui hõõrdetegur on $\mu = 0,1$?



Märkus: joonis on ligikaudne, languselt tõusule üleminek on tegelikult sujuv ja põrkega seotud kiirusekadu seal ei toimu.

Ü46 Hantel ★

Autor: Mihkel Kree, lõppvoor, 2008, G 1

Hantel koosneb kahest võrdse massiga kerast (kumbki massiga m) ning neid ühen-davast massitust jäigast vardast. Alguses hoitakse hantel horisontaalselt õhus paigal. Nüüd antakse ühele kuulidest hetkega vertikaalsuunaline kiirus v ning han-tel hakkab vabalt liukuma. Vabalangemise kiirendus on g . Missugune on süsteemi kineetiline energia hetkel, mil massikese saavutab maksimaalse kõrguse?

Ü47 Pingpong ★

Autor: Siim Ainsaar, lõppvoor, 2008, G 2

Pingpongil palk kukutatakse kõrguselt h horisontaalsele lauale. Igal põrkel kah-a-neb palli energia k korda. Leidke palli lahilaskmiseni seismajäämiseni kuluv aeg t . Vabalangemise kiirendus on g .

Ü48 Mürsk ★

Autor: Mihkel Kree, piirkonnnavoor, 2009, G 2

Kahurist välja lennanud mürsk (massiga M) laguneb oma lennutrajektoori kõr-geimas punktis mingi sisemise vedrumehhanismi abil kaheks võrdseks pooleks (kumbki massiga $M/2$) nii, et üks osadest kukub mürsu senist trajektoori pidi liikudes täpselt kahurini tagasi. Kui kaugele kahurist maandub teine pool? Lagu-nemispunkti projektsioon maapinnale asub kahurist kaugusel L .

Ü49 Kerad ★

Autor: Valter Kiisk, lahtine, 2010, G 1

On antud kolm väliselt identset ja ühesuguse massiga kera. On teada, et üks neist keradest on homogeenne, teine on seest õõnes ja kolmas on seest vedel. Kuidas saab lihtsate võrdlevate mehaanikakatsetega kindlaks teha, milline on iga kera sisemus? Abivahendeid võib vabalt valida, aga kerasid vigastada ei tohi.

Ü50 Sild ★

Autor: Valter Kiisk, lõppvoor, 2010, G 1

Risti üle $l = 100\text{ m}$ laiuse jõe kulgeb kumer autoteega sild. Silla keskel on autotee kaldapealsest tasemest $h = 5\text{ m}$ võrra kõrgemal. Silla profiliiks on ringjoone kaar. Auto massiga $m = 1000\text{ kg}$ ületab silda muutumatu kiirusega $v = 60\text{ km/h}$. Kui suure jõuga röhub auto silla keskohta? Kui suure kiiruse juures hakkab kaduma kontakt rataste ja tee vahel?

Ü51 Varras ★

Autor: Stanislav Zavjalov, lõppvoor, 2011, G 2

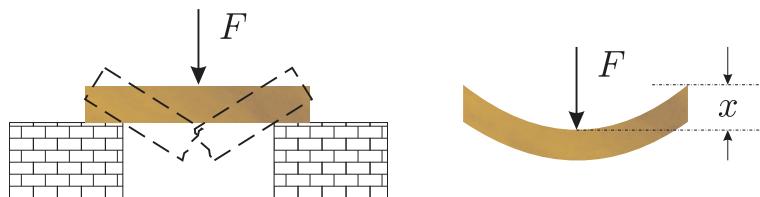
Mööda liigendi abil seina külge kinnitatud väga pikka ja tühiselt kerget varrast saab libiseda väike röngas massiga m . Esialgu asub röngas liigendist kaugusel l ja varras on horisontaalne. Ajahetkel $t = 0$ hakkab süsteem vabalt liikuma. Leidke varda ja horisontaali vahelise nurga α ajaline sõltuvus. Kõik liikumised lugeda hõõrdevabaks.

Ü52 Karatist ★★

Autor: tundmatu, lahtine, 2007, G 6

Hinnake, millise kiirusega v peab karatisti käsi tabama kahele kivile toetuva lauajupi keskpunkti (vt joonist), et laud murduks? Käe mass on $m = 1,5 \text{ kg}$, laua mass $M = 2 \text{ kg}$, laua jäikustegur $k = 1,4 \cdot 10^5 \text{ N/m}$, murdumiseks vajalik läbipaine (st laua keskpunkti nihe) $d = 20 \text{ mm}$.

Märkus: jäikustegur k on võrdetegur laua keskpunkti rakendatud jõu F ning laua keskpunkti nihke x vahel (vt joonist).



Ü53 Veenus ★★

Autor: Mihkel Kree, lõppvoor, 2007, G 2

Lugege maa ja Veenuse orbiitid ümber Päikese ringikujulisteks. Planeedid tiirlevad ümber Päikese samas suunas ja Veenuse maksimaalne eemaldumus (nurk Veenuse ja Päikese vahel Maalt vaadates) on 46 kraadi.

a) Leidke Veenuse ja Maa orbiitide raadiuste suhe.

b) Mitu päeva jääb järjestikuste maksimaalseste eemaldumuste vaheline?

Vihje: Kepleri seaduse kohaselt on taevakehade tiirlemisperioodide ruudud võrdlised vastavate orbiitide raadiuste kuupidega.

Ü54 Auto ★★

Autor: Mihkel Heidelberg, piirkonnavoor, 2009, G 5

Auto kiirendab nii, et rattad libisevad. Hetkel on auto kiirus stabiilselt v , vedavate ratsaste nurkkiirus ω ja raadius r . Kui oletada, et mootori võimsus läheb ainult auto liikumisse ja vedavate ratsaste libisemisse, siis kui suur on kasutegur?

Ü55 Vedru ★★

Autor: Aigar Vaigu, piirkonnavoor, 2010, G 4

Raske tellis kukub poole meetri kõrguselt jäigale lühikesele vedrule. Põrge on elastne ja tellis lendab peaaegu algsele kõrgusele tagasi. Kui kõrgele maast kerkib vedru pärast põrget?

Ü56 Pendel ★★

Autor: Taavi Pungas, piirkonnnavoor, 2011, G 7

Pendel pandi väikese amplituudiga võnkuma ning stopperiga registreeriti neid hetki, kui pendel läbis vasakult poolt tulles oma tasakaalupunkti. Kaks järjestikust sellist sündmust toimusid hetkedel $t_1 = 3,19\text{ s}$ ja $t_2 = 5,64\text{ s}$. Pendlil lasti mõnda aega segamatult võnkuda, seejärel saadi kaheks järjestikuseks näiduks $t_3 = 61,14\text{ s}$ ja $t_4 = 63,54\text{ s}$. Leidke võimalikult täpselt pendli võnkeperiood ning hinnake selle mõõtemääramatust.

Ü57 Aerud ★★

Autor: tundmatu, piirkonnnavoor, 2005, G 6

Aerude pikkus tullist (punktist, kus aerud kinnituvad paadi kere külge) kuni käepidemeni on $a = 1\text{ m}$ ning tullist kuni labadeni on $b = 1,5\text{ m}$. Keskmise joud, millega aerutaja tömbab kumbagi aeru, on $F = 60\text{ N}$. Paadi ja vee vaheline takistusjoud on $F_h = \alpha v^2$, kus $\alpha = 20\text{ kg/m}$. Kui suure keskmise kiirusega liigub paat? Hinnata aerutaja keskmist võimsust.

Ü58 Kivi ★★

Autor: tundmatu, lahtine, 2006, G 4

Paelaga lae külge kinnitatud kivi liigub mööda horisontaaltasapinnas asuvat ringjoont, mille kaugus laest $h = 1,25\text{ m}$. Leida kivi tiirlemisperiood τ .

Ü59 Kaldpind ★★

Autor: Mihkel Rähn, piirkonnnavoor, 2006, G 4

Pall kukub kaldpinnale ja hakkab elastsest põrkuma (st energiakadudeta). Kui kaugel on viies põrkekoht esimesest? Kaldpinna kaldenurk on α , palli algkõrgus esimesest põrkekohast oli h .

Ü60 Kuulike ★★

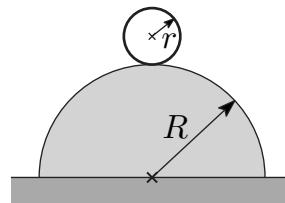
Autor: tundmatu, lahtine, 2008, G 5

Venimatu ja kaalutu niidi otsa kinnitati kuulike. Niit viidi horisontaalasendisse ja lasti lahti. Kuulikese kiiruse vertikaalne komponent hakkab esialgu suurenema, kuid teatud hetkest alates vähenema. Millise nurga moodustab niit vertikaalsihiiga ajahetkel, kui kuulikese kiiruse vertikaalne komponent on maksimaalne?

Ü61 Veerev silinder ★★

Autor: Andres Laan, lahtine, 2010, G 3

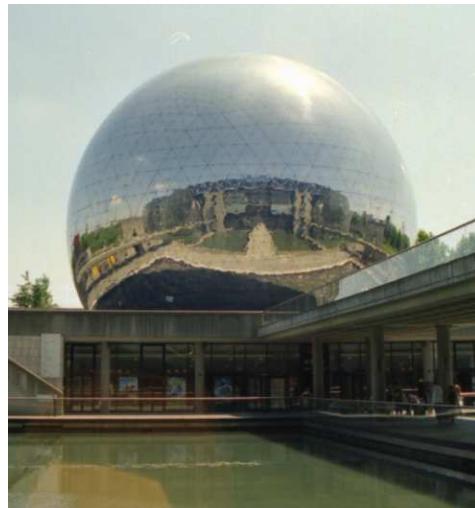
Alusele kinnitatud poolsilindril raadiusega R lebab selle kõrgeimas punktis seest tühi silinder raadiusega r . Ühel hetkel nihkub keha veidi tasakaalust välja ja hakkab selle tulemusel libisemiseta veerema (hõõrdetegur on väga suur). Leidke, kui kõrgel aluse kohal keha poolsilindri pinnast eraldub. *Vihje:* kui veereva silindri mass on m ja ta masskese liigub kiirusega v , on ta kineetiline energia mv^2 (ilmata kordajata $\frac{1}{2}!$).



Ü62 Sfääär ★★

Autor: Andre Sääsk, lahtine, 2005, G 6

Üks osa Pariisi Cité des Sciences' teadusmuuseumi kompleksist — La Géode — kujutab endast hiigelsuurt sfääri raadiusega $R = 18\text{ m}$, mille sees asub maailma suurim kinoekraan (vt joonist). Hoonet väljastpoolt imetlev uudishimulik koolipoiss otsustab tabada selle hoone tipp-punkti tennisepaliga. Kui suure minimaalse kiirusega v peaks ta palli viskama, et palli liikumise trajektoor lõikuks hoone välispinnaga vaid ühes punktis — hoone tipp-punktis — ja see oleks ühtlasi ka palli liikumise trajektoori kõrgeimaks punktiks? Pall alustab liikumist kõrgusel $h = 1,5\text{ m}$.



Ü63 Anum ★★

Autor: tundmatu, lahtine, 2005, G 7

Siledal pinnal asub kerge ristikülikuline anum, mis on täidetud vedelikuga tihedusega ρ_0 , vedeliku ruumala on V_0 . Anuma põhja sattunud pörnikas ruumalaga V ja tihedusega ρ hakkab anuma põhja suhtes roomama kiirusega u . Millise kiirusega hakkab anum pinnal liikuma? Anuma mass on tühine, veetase jäab kogu aeg horisontaalseks. Eeldada, et pinna ja anuma vahel hõõre puudub.

Ü64 Mullitaja ★★

Autor: Jaak Kikas, lõppvoor, 2005, G 7

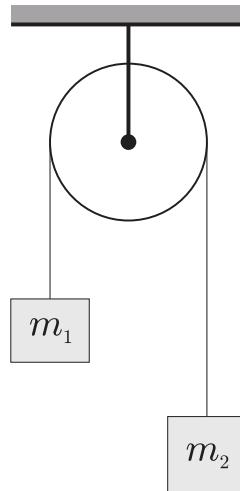
Veekogu põhjas asub mullitaja — õhuballoon väikese avausega, millest võrdsete ajavahemike $\Delta t = 1\text{ s}$ järel väljuvad õhumullid raadiusega $R = 0,3\text{ mm}$. Taolise mullikese liikumisel vees mõjub sellele takistusjoud $F = 6\pi\eta Rv$, kus η on vedeliku voolamistakistust iseloomustav tegur ehk vedeliku viskoossus (vee korral on selle suuruse väärtsuseks $1 \cdot 10^{-3}\text{ N s/m}^2$) ja v on mullikese kiirus. Võite lugeda, et mullikese liikumine toimub kogu aeg kiirusega, mis on määratud tingimusega, et kõigi talle mõjuvate jõudude resultant on null. Vee tihedus $\rho = 1000\text{ kg/m}^3$,

raskuskiirendus $g = 9,8 \text{ m/s}^2$, õhurõhk $p_0 = 100 \text{ kPa}$. Mitu korda muutub vahemaa naabermullikese vahel tõusul põhjast pinnale, kui veekogu sügavus on $H = 27 \text{ m}$?

Ü65 Plokk ★★

Autor: tundmatu, lahtine, 2006, G 5

Kui suure kiirendusega a_k ja mis suunas hakkab liikuma kahest kehist koosneva süsteemi masskese, kui kehad on seotud niidiga, mis on tömmatud üle ploki (vt joonist)? Kehade massid on m_1 ja m_2 ($m_1 < m_2$), niit on kaalutu ja mitteelastne.



Ü66 Kada ★★

Autor: Oleg Košik, lõppvoor, 2006, G 3

Vaatame lihtsa kada ehk ragulka konstruktsiooni. Elastne kummipael tömmatakse kahe fikseeritud otspunkti vahelle, laskmiseks asetatakse kivi paela keskele, pael tömmatakse koos kiviga pingule ja lastakse vabaks. Kivi lastakse lendu horisontaaltasandi suhtes nurga $\alpha = 10^\circ$ all. Leidke, kui kaugele peab laskja tömbama kivi, et tabada märki, mis asub kadast $L = 25 \text{ m}$ kaugusel ning sellega samal körgusel. Kui suurt jõudu peab ta selleks paelale rakendama? Kummipaela pikkus pingestamata olekus on $l = 60 \text{ cm}$, mis on ühtlasi ka paela kinnituspunktide vahekaugus. Pael lugeda kaalutuks ning jäikusteguriga $k = 50 \text{ N/m}$. Kivi mass on $m = 20 \text{ g}$. Õhutakistusega ei ole vaja arvestada. Raskusjõu möju kivi kiirendamisel kadas pole vaja arvestada. Raskuskiirendus on $g = 9,81 \text{ m/s}^2$.

Ü67 Hooratas ★★

Autor: Valter Kiisk, lõppvoor, 2007, G 4

Hooratas raadiusega R pöörleb nurkkiirusega ω . Lihtsuse huvides võib hooratast vaadelda peenikese rõngana (pöörlemistelg ühtib rõnga teljega).

- a) Milline on energia salvestustihedus w (kineetiline energia massiühiku kohta) hoorattas?

b) Hooratas on valmistatud süsinikkiuga armeeritud polümeerist, mille tömbetugevus $\sigma_{\max} = 2,4 \cdot 10^9$ Pa ja tihedus $\rho = 1500 \text{ kg/m}^3$. Hinnake energia salvestustiheduse maksimaalselt võimalikku väärust sellises hoorattas (andes numbrilise vastuse).

Vihje: tömbetugevus on maksimaalne jõud ristlõike pindala kohta, mida antud materjal talub ilma purunemata.

Ü68 Maaler ★★

Autor: Valter Kiisk, lahtine, 2010, G 5

Maaler on seina ülemise osa värvimiseks roninud kõrge, peaaegu vertikaalse redeli tippu. Ettevaatamatu liigutuse tulemusena hakkab redel ümber kukkuma. Kas vähemohtlik oleks redelist kohe lahti lasta või pigem klammerduda redeli külge? Põrand on lai ja tühi, nii et (redeli) kukkumist ei takista miski. Redeli alumine ots ei libise. *Vihje:* homogeensel vardal pikkusega l ja massiga m on ümber otsa nurkkiirusega ω pööreledes kineetiline energia $\frac{ml^2\omega^2}{6}$.

Ü69 Benji-hüpe ★★

Autor: Andreas Valdmann, piirkonnavor, 2010, G 6

Benji-hüppaja massiga $m = 80 \text{ kg}$ kasutab köit pikkusega $l = 35 \text{ m}$, mille jäikustegur $k = 60 \text{ N/m}$. Kui kõrgele maapinnast tuleks tõsta hüppeplatvorm, et jäaks ohutusvaru $h = 5 \text{ m}$? Mis on suurim kiirus, mille hüppaja saavutab? Raskuskirrendus $g = 9,8 \text{ m/s}^2$. Hüppaja mõõtmetega arvestama ei pea.

Ü70 Vai ★★★

Autor: Jaak Kikas, piirkonnavor, 2006, G 10

Vertikaalset vaia pikkusega L ja massiga M lüükse pinnasesse nii, et tema otsa pihta lastakse kõrguselt $H \gg L$ vaia otsast kakkuda koormisel massiga m . Lööki vaia pihta võib lugeda absoluutsest mitteelastseks, st pärast raskuse ja vaia kokkujuudet liiguavad nad kui üks tervik. Pinnase takistusjõud on $F = F_0 + kl$, kus l on maa sees oleva vaiaosa pikkus. Kui suur on löökide arv N , mis on vajalik selles, et vai täies pikkuses maasse lüüa? Võite eeldada, et ühekordse löögi tagajärvel nihkub vai sügavamale väikese osa võrra oma pikkusest.

Ü71 Klaaskuul ★★★★

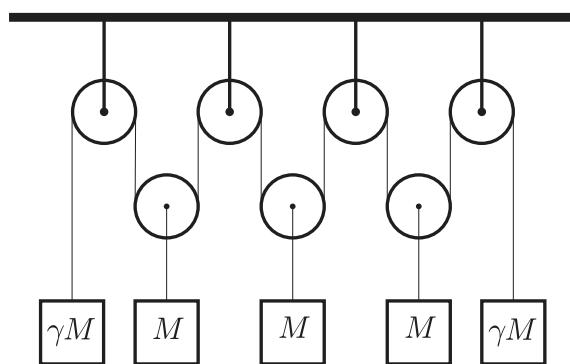
Autor: Aigar Vaigu, piirkonnnavoor, 2008, G 6

Klaaskuul kukkus vertikaalselt alla libedale horisontaalsele põrandale ning purunes kolmeks tükit, mis lendasid mööda põrandat laiali. Sündmus jäädvustati fotol (vt joonist). Tükkide kujutised osutusid välja venitatuks, sest säriaeg oli võrdlemisi pikk. Millised olid kuuli tükkide masside suhted? Hõördejoud tükkide liikumisel lugeda tühiselt väikeseks. Fotoobjektiivi optiline peatelg oli pildistamisel vertikaalne

**Ü72 Plokid ★★★★**

Autor: Mihkel Kree, piirkonnnavoor, 2008, G 9

Polüspast ehk liitplokk koosneb seitsmest plokist (vt. joonist). Koormiste massid M ja γM on näidatud joonisel. Missuguse kiirendusega hakkavad liikuma äärmised koormised? Mis tingimust peab rahuldama suurus γ , et äärmised koormised hakkaksid langema? Plokide ja nööri mass jäätta arvestamata ning nöör lugeda venitatuks.

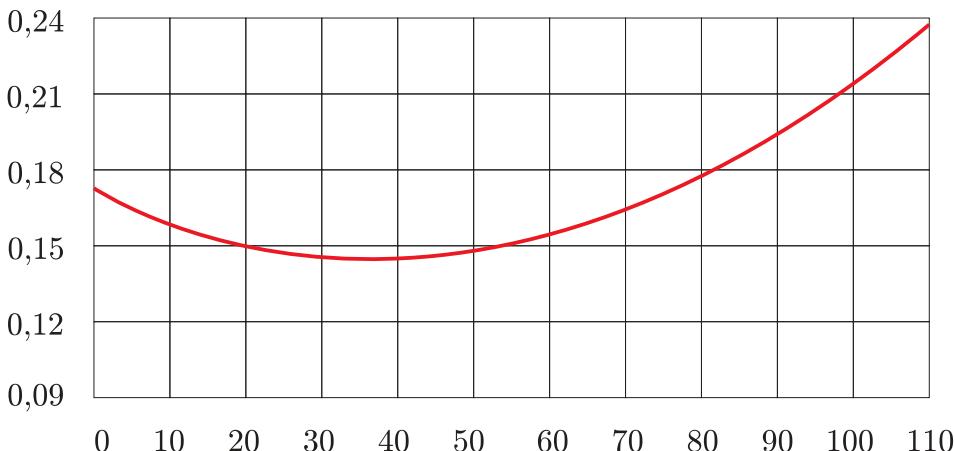


Ü73 Rong ★★★★

Autor: tundmatu, lahtine, 2006, G 10

Rong sõidab kiirusega $v = 100 \text{ km/h}$ ja pidurdab järsult (blokeerides rattad). Graafikul on toodud rongi rataste ja rõõbaste vahelise hõõrdeteguri μ sõltuvus kiirusest (km/h).

- Kui pikk on rongi täieliku peatumiseni kulunud aeg?
- Kui suur on pidurdusmaa pikkus? Mõlemad vastused tuleb leida graafikualuste pindaladena sobilikult valitud teljestikes.

**Ü74 Värinaalarm ★★★★**

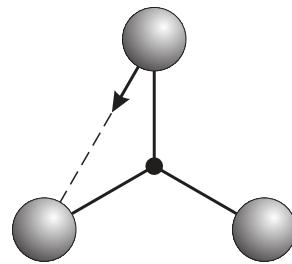
Autor: Jaan Kalda, lahtine, 2011, G 9

Uurime lihtsustatud mudeli abil kergelt kaldus pinnal asetseva mobiiltelefoni liikumist värinaalarmi töötamise ajal. Kujutagu lauale asetatud mobiil risttahukat massiga M , mille sees liigub üles-allä väike keha massiga m . Liikugu see keha ajahetkedel $t = 0, 2\tau, 4\tau, \dots$ vahemaa x võrra hetkeliselt üles ning ajahetkedel $t = \tau, 3\tau, 5\tau, \dots$ algasendisse tagasi. Olgu mobiiltelefoni ja laua vaheline hõõrdetegur μ ning laua kaldenurk $\alpha \ll 1$. Mobiiltelefoni ja laua vahelised põrked lugege absoluutseks plastseiks. Millise keskmise kiirusega u hakkab mobiiltelefon mööda lauda liukuma?

Ü75 Kuulid ★★★★

Autor: Jaan Kalda, lõppvoor, 2006, G 10

Joonisel kujutatud süsteem koosneb kolmest võrdkülgse kolmnurga tippudes paiknevast kuulist massiga m ja kolmest kergest vardast pikkusega l , mis on omavahel šarniirselts ühendatud (liigendiga). Süsteem lebab hõõrdevabalt siledal horisontaalpinnal. Ühte kuuli lükatakse teatud lühiajalisel jõuga nii, et see omandab kiiruse v_0 , mis on suunatud naaberkuuli poole. Leidke teiste kuulide kiiruste suunad ja moodulid ning kõigi kuulide kiirendused vahetult peale esimese kuuli lükkamist.



Taevamehaanika

Ü76 Satelliit ★

Autor: Mihkel Pajusalu, piirkonnnavoor, 2011, G 2

Satelliit tiirleb ringikujulisel orbiidil (raadiusega $r = 7000$ km) ümber maakebra, kusjuures satelliidi orbiit on samas tasapinnas Maa orbiidiga ümber Päikeset. Kui suure osa ajast keskmiselt veedab satelliit Maa varjus? Maa läbimõõt on $R = 6378$ km. Päikeselt tulevad kiired võib lugeda paralleelseteks ja Maa liikumise ühe satelliidi orbiiditaalperioodi jooksul tühiseks.

Ü77 Väike prints ★

Autor: Urmo Visk, piirkonnnavoor, 2009, G 1

Väike Prints elab sfäärilisel asteroidil B-612. Jalutades märkas väike prints, et mida kiiremini ta könnib, seda kergemaks ta muutub. Kui väike prints jooksis piki asteroidi ekvaatorit kiirusega $v = 6$ m/s, siis muutus ta kaalutuks ja hakkas asteroidi pinna kohal hõljuma. Kui suur on asteroidi raadius R ? Eeldame, et asteroid ei pöörle. Asteroidi tihedus on $\rho = 5200$ kg/m³, gravitatsioonikonstant $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$ m³ kg⁻¹ s⁻².

Ü78 Eksinud satelliit ★★

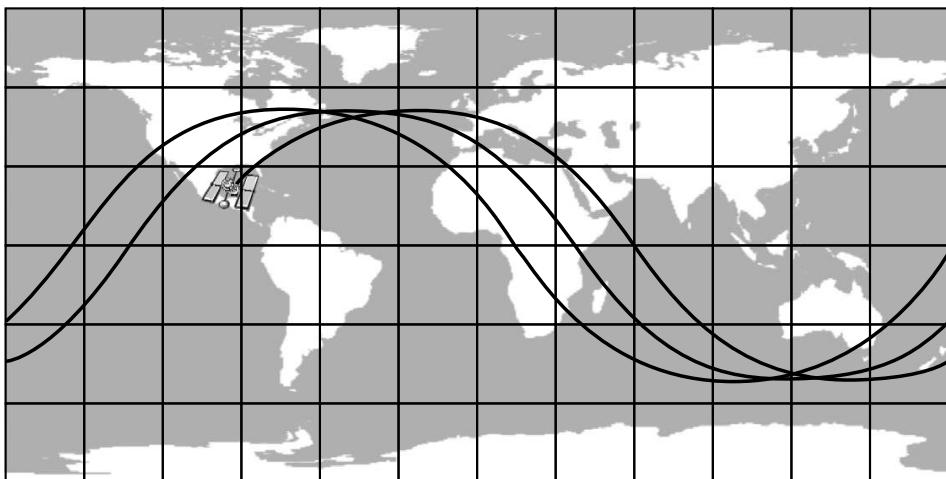
Autor: tundmatu, lahtine, 2009, G 5

Sidesatelliidid paiknevad geostatsionaarsel orbiidil — st niisugusel ringorbiidil, mille raadius ja suund on sellised, et satelliit püsib maapinna suhtes kogu aeg pügal. Ühe sidesatelliidi saatmisel aga esines viga, nii et ta saavutas küll õige kõrguse, kuid ringorbiidi suund sattus juhuslik. Milline on suurim võimalik suhteline kiirus, millega võib selliselt „eksinud“ satelliit kokku põrkuda mõne teise sidesatelliidiga? Maa raadius on $R = 6400$ km, raskuskiirendus maapinnal $g = 9,8$ m/s².

Ü79 Kosmosejaam ★★★

Autor: Oleg Košik, lõppvoor, 2005, G 9

Joonisel on toodud ringorbiidil liikuva rahvusvahelise kosmosejaama trajektoor maapinna kohal (Maa keskpunktist kosmosejaamaani tömmatud sirge ja maapinna lõikepunktiga jälg). Hinnake selle abil kosmosejaama kõrgust maapinnast. Maa raadius $R = 6380$ km, raskuskiirendus maapinnal $g = 9,8 \text{ m/s}^2$.

**Ü80 Kuukaabel ★★★★**

Autor: Siim Ainsaar, piirkonnavor, 2009, G 10

Oletame, et Maa ja Kuu on ühendatud sirge, homogeense, mõlema suhtes radiaalse kaabliga.

- a)** Mitu korda on Maa poolt kaablile avaldatav raskusjõud suurem Kuu-poolsest?
- b)** Maa pinnal asuv kaabli kinnitus sellele vertikaalsihis jõudu ei avalda. Kui kõrgel Kuu kohal asub punkt, kus pisut liiga nõrk kaabel katkeks?

Lugegegem taevakehad paigalseisvaiks. Maa raadius $r_M = 6370$ km, Kuu raadius $r_K = 1740$ km, Maa mass $m_M = 5,97 \cdot 10^{24}$ kg, Kuu mass $m_K = 7,35 \cdot 10^{22}$ kg, taevakehade keskmete vahekaugus $D = 3,80 \cdot 10^5$ km.

Abivalem. Kui kaablit tömbaks Maa üksi ning otspunktide kaugused Maa tsentrist oleksid a ja b , mõjuks sellele raskusjõud $Gm_M \lambda \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)$, kus G on gravitatsiooni-konstant ning λ kaabli joontihedus (ühikuga kg/m).

Ü81 Satelliidid ★★★★

Autor: Mihkel Kree, lõppvoor, 2010, G 7

2009. aasta veebruaris põrkasid Siberi kohal 780 kilomeetri körgusel kokku USA ja Venemaa satelliidid. Pidades silmas, et ümber Maa tiirleb juba tuhandeid satelliite ning nende köigi orbiite pole seetõttu võimalik omavahel koordineerida, hinnake, mitme aasta tagant keskelt läbi niisugused juhuslikud kokkupõrked aset leiavad. Oma lahenduses kasutage järgmisi hinnanguid ja lähendusi: maalähetiste satelliitide arv $N = 2500$; orbiidid jäävad maapinnast körguste vahemikku $h_1 = 200 \text{ km}$ kuni $h_2 = 2000 \text{ km}$ ning satelliidid on jaotunud selles kihis ühtlase ruumtihedusega; tüüpilise satelliidi ristlõikepindala $S = 10 \text{ m}^2$. Maa raadius $R = 6400 \text{ km}$, raskuskiirendus maapinnal $g = 10 \text{ m/s}^2$.

Gasid

Ü82 Jalgpall ★

Autor: tundmatu, lahtine, 2006, G 1

Kui suure rõhuni p_N võib pumbata jalgpalli palli kolbpumbaga, kui pumpa surutakse kokku $N = 40$ korda? Iga pumpamiskäigu jooksul võtab pump atmosfäärist õhu koguse ruumalaga $v = 150 \text{ cm}^3$. Atmosfääri rõhk $p_0 = 0,1 \text{ MPa}$, palli ruumala $V = 31$. Lugeda, et õhu temperatuur pallis võrdub välistemperatuuriga.

Ü83 Allveelaev ★

Autor: tundmatu, lahtine, 2007, G 3

Mõnikord on inimesed uppuvatest allveelaevadest pääsenud avades esialgu alumiinised ventiilid (mida mööda vesi sisse tungib), seejärel ülemise luugi ning siis ise koos õhumulliga veepinnale töustes. Kui suur osa k laeva ruumalast polnud täidetud veega peale ventiilide avamist, kui laev asus sugavusel $h = 42 \text{ m}$? Merevee tihedus $\rho = 1,03 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$. Õhu rõhk laevas alghetkel $p_0 = 0,1 \text{ MPa}$. Võite lugeda, et vee sisse laskmise käigus õhu temperatuur laevas ei muutu (tänu soojusvahetusele ümbritseva veega).

Ü84 Tuukrid ★

Autor: Ott Krikmann, piirkonnavor, 2007, G 4

Tuukrid (akvalangistid) kasutavad sageli oma varustuse ja keha keskmise tiheduse ühtlustamiseks vee tihedusega (vees hõljumise saavutamiseks) õhuga täidetavat hermeetilist vesti, kuhu pumbatakse õhku hingamisaparaadist (akvalangist). Oletame, et tuuker saavutas hõljumise veepinna lähedal, pumbates teatud ruumala õhku oma vesti. Seejärel sukeldus ta $h = 25 \text{ m}$ sügavusele. Mitu korda pidi tuuker sellel sügavusel oma vesti ruumala suurendama, et saavutada hõljumise selles sügavuses? Õhurõhk on $p_0 = 105 \text{ kPa}$.

Ü85 Toaõhk ★

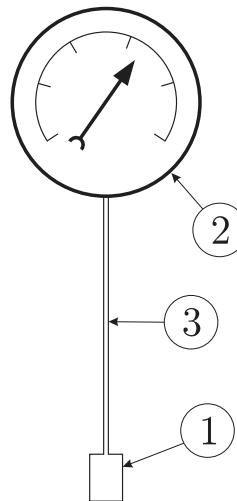
Autor: Mihkel Rähn, lõppvoor, 2008, G 3

Leida seos toaõhu molekulide summaarse kulgliikumise kineetilise energia ja toatemperatuuri vahel. Õhu rõhk on p ja toa ruumala V .

Ü86 Gaasitermomeeter ★★

Autor: Valter Kiisk, piirkonnavor, 2006, G 5

Gaasitermomeeter koosneb mõõteamppullist 1 ja manomeetrist 2, mis on omavalhel ühenduses peenikesse kapillaari 3 kaudu (vt joonist). Manomeetri ja mõõteamppuli ruumalade suhe on $\alpha = 30$. Kapillaari ruumala võib lugeda tühiselt väikeks. Seade täidetakse toatemperatuuril oleva gaasiga rõhuni $p_0 = 1 \text{ atm}$. Gaasi võib lugeda ideaalseks. Manomeetrit hoitakse toatemperatuuril $T_0 = 293 \text{ K}$, mõõteamppull asetatakse keskkonda, mille temperatuuri on tarvis määrata. Leidke keskkonna temperatuur, kui manomeetri näit on $p = 0,7 \text{ atm}$.



Ü87 Tuulik ★★

Autor: Valter Kiisk, piirkonnnavoor, 2007, G 5

Teatud tuuleturbiin (tiiviku diameeter $d = 50\text{ m}$) töötab maksimaalse efektiivsusega tuule kiiruse sel juhul $v = 9\text{ m/s}$. Sel juhul õnnestub $\eta = 40\%$ tiiviku poolt haaratava õhuvoolu kineetilisest energiast muundada elektriks (kineetilise energiaga arvutamisel ei arvestata õhu pidurdumist tiivikul). Leidke nendel tingimustel tuuliku elektriline võimsus. Õhu tihedus on $\rho = 1,3\text{ kg/m}^3$.

Ü88 Rong tunnelis ★★

Autor: Eero Uustalu, lõppvoor, 2009, G 4

Rong liikus kiirusega $v = 54\text{ km/h}$ läbi pika horisontaalse silindrikujulise tunneli. Kui palju tõusis tunnelis asuva õhu temperatuur? Tunneli läbimõõt oli $d = 5\text{ m}$. Rongi elektrimootor tarbis tunnelit läbides võimsust $P = 800\text{ kW}$. Õhu molekulaarmass on $M = 29\text{ g/mol}$, õhurõhk tunnelis $p = 100\text{ kPa}$ ja algtemperatuur $t_0 = 17^\circ\text{C}$. Õhk lugeda kaheaatomiliseks ideaalseks gaasiks. Eeldada, et rongi liikumisest tekkinud õhuvoolude liikumisest tulenev alarõhk on atmosfäärirõhuga võrreldes tühine

Märkus: kaheaatomilise gaasi siseenergia ühe molekuli kohta on $5/3$ korda suurem kui samal temperatuuril oleval üheaatomilisel gaasil.

Ü89 Heelium ★★★

Autor: tundmatu, lahtine, 2008, G 6

Kolme mooli heeliumi soojendamisel muutus gaasi rõhk võrdeliselt gaasi ruumalaga. Mitme kraadi võrra tõusis heeliumi temperatuur, kui gaasile anti soojushulk $Q = 300\text{ J}$?

Ü90 Õhk ★★★

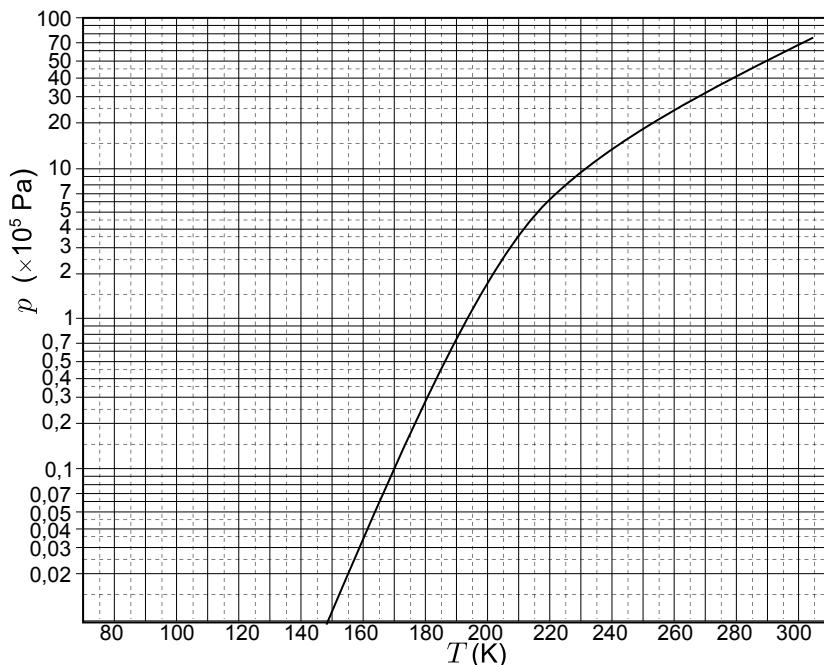
Autor: tundmatu, lahtine, 2009, G 7

Kaks anumat ruumalade suhtega $\alpha = V_1/V_2 = 2$ on ühendatud lühikese toruga, mille keskel asub ventiil. Ventiil laseb gaasi läbi juhul kui rõhkude vahe on suurem kui $\Delta p = 1,1p_0$, kus p_0 on atmosfäärirõhk. Temperatuuril $t_1 = 27^\circ\text{C}$ on suuremas anumas õhk normaalrõhul, väiksemas anumas on vaakum. Milliseks kujuneb rõhk väiksemas anumas, kui mõlemad anumad soojendada temperatuuriini $t_2 = 127^\circ\text{C}$?

Ü91 Õuhuhoki ★★★

Autor: Mihkel Heidelberg, lõppvoor, 2010, G 6

Heast soojusjuhist plaadile asetatakse kuivast jääst (st tahkest süsihappegaasist) kerge seib raadiusega $r = 1\text{ cm}$; seibi surutakse pealt jõuga $F = 10\text{ N}$. Millise minimaalse aluse temperatuuri juures hõljub seib sublimeeruva süsihappegaasi tekitatud gaasipadjal? Aluse temperatuur lugege ühtlaseks ja samaks temaga vahetus kontaktis oleva ainekihiga. Õhurõhk $p_0 = 100\text{ kPa}$ ja kuiva jää aururõhu sõltuvus temperatuurist on kujutatud graafikul.

**Ü92 Õhk ★★★★**

Autor: tundmatu, lahtine, 2006, G 8

Leida niiske (suhteline niiskus $f = 90\%$) ja kuiva õhu tiheduste suhe rõhu $p_0 = 0,1\text{ MPa}$ ja temperatuuri $t = 27^\circ\text{C}$ juures. Küllastunud auru tihedus sellel temperatuuril on $\rho_0 = 0,027\text{ kg/m}^3$. Õhu molaarmass $\mu_1 = 0,029\text{ kg/mol}$, vee molaarmass $\mu_2 = 0,018\text{ kg/mol}$.

Ü93 Gaasid ★★★★

Autor: Oleg Košik, lõppvoor, 2007, G 6

Isoleeritud silindrilises anumas vabalt liikuva koormise all on vesinik ja heelium, mis on teineteisest eraldatud vabalt liikuva ja aeglaselt soojust juhtiva õhukese vaheseinaga (vt. joonist). Alguses on gaaside temperatuurid võrdsed, kusjuures vesinik hõlmab heeliumist 3 korda väiksema ruumala. Vesinikule antit teatud soojushulk, mille tulemusena nihkus koormis $d_1 = 5,5 \text{ cm}$ võrra ülespoole. Pika aja möödudes täheldati, et koormis nihkus veel. Mis suunas ja kui palju see nihkus? Gaasid lugeda ideaalseteks. Vesiniku soojusmahtuvus konstantsel rõhul on $C_{\text{PH}_2} = 7R/2$ ning heeliumil $C_{\text{PHe}} = 5R/2$.

**Ü94 Korsten ★★★★**

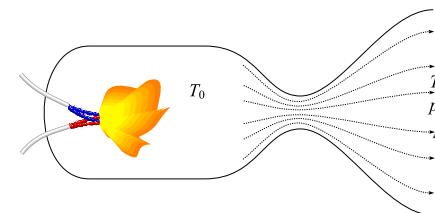
Autor: Jaan Kalda, piirkonnnavoor, 2009, G 9

Hinnake, milline oleks suitsu kiirus korstnast väljumisel, kui õhutakistusega (sh turbulentsest liikumisest tingitud takistusega) korstnas ning ahjulõõrides mitte arvestada. Korstna kõrgus (mõõdetuna korstnajala juurest, kuhu siseneb ahjust tulev soe õhk) on $h = 10 \text{ m}$ ja õhu keskmne temperatuur korstnas $t = 80^\circ\text{C}$. Lugeda, et aju uks ja korstnajalg on samal kõrgusel. Välisõhu temperatuur on $t_0 = 0^\circ\text{C}$.

Ü95 Rakettmootori ★★★★

Autor: Jaan Kalda, lahtine, 2010, G 10

Vedelkütusel töötava rakettmootori skeem on toodud juuresoleval joonisel. Põlemiskambris moodustuvad põlemisproduktid (gaasid) omandavad kõrge rõhu ja temperatuuri. Seejärel väljuvad need adiabaatiliselt paisudes ja jahtudes läbi düüsi. Õigessti konstrueeritud düüsi korral (kaela läbimõõt vastab põlemiskiirusele ja -temperatuurile) jätkub adiabaatiline paisumine ka peale düüsikaela läbimist ning suur osa soojusenergiast muundatakse gaasijoa kineetiliseks energiaks. Leidke rakettmootori veojõud F eeldusel, et (a) on teada düüsi väljundristlõike pindala S , temperatuur põlemiskambris T_0 ning gaaside temperatuur T_1 ja rõhk p_1 düüsist väljumise hetkel, kusjuures $T_0 \gg T_1$; (b) põlemiskambris on gaaside kineetiline energia tühine vörreldes soojusenergiaga; (c) atmosfäärirõhu mõju veojõule on tühine; (d) moodustuva gaasisegu ühe mooli soojusmahtuvus konstantsel ruumalal on $c_V = \frac{5}{2}R$, kus R on gaasikonstant.



Vedelike mehaanika

Ü96 Vedelik ★

Autor: tundmatu, lahtine, 2005, G 1

Ühendatud silindrilistesse anumatesse diameetritega d_1 ja d_2 on valatud vedelik tihedusega ρ . Kui palju töuseb vedeliku tase anumates, kui ühte anumasse panakse ujuma vedeliku tihedusest väiksema keha massiga m ?

Ü97 Veektoru ★★

Autor: Taavi Pungas, lõppvoor, 2011, G 4

Kaks erineva diameetriga horisontaalset toru on otsapidi kokku ühendatud nii, et nende teljad ühtivad. Mööda esimest toru voolab vesi kiirusega v_1 . Kummagi veektoru külge on ühendatud väike vertikaalne toruke, vedelikusamba kõrgused neis on vastavalt h_1 ja h_2 (toru teljest mõõtes). Leidke horisontaalsete torude diameetrite suhe. Höördumist mitte arvestada.

Vihje: vedeliku horisontaalsel voolamisel kehtib Bernoulli seadus kujul $\frac{\rho v^2}{2} + p = \text{Const}$, kus p on hüdrostaatiline rõhk, ρ vedeliku tihedus ning v vedeliku kiirus.

Ü98 Veekahur ★★★

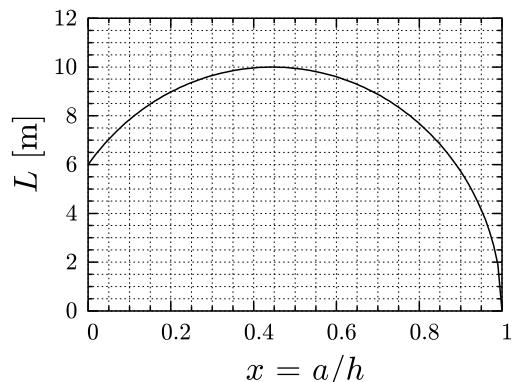
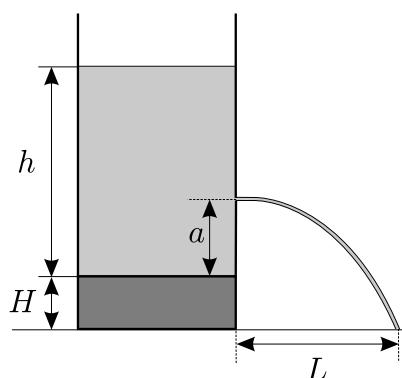
Autor: Oleg Košik, piirkonnavor, 2005, G 7

Veekahur tulistab veejuga, mille ristlõikepindala on $S = 8 \text{ cm}^2$ ning võimsus $N = 6000 \text{ W}$. Millise jõuga tabab veejuga märki, kui kahur ja märk asuvad samal kõrgusel? Vee tihedus on $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$, õhutakistust mitte arvestada. Märklaua ja veekahuri vahemaa on väike, st veejoa köverdumist raskusjõu toimel ei pea arvestama.

Ü99 Veetünn ★★

Autor: Mihkel Kree, lõppvoor, 2005, G 5

Silindriline veetünn, milles hoitakse muutumatut veetaset kõrgusega h , on tõstetud horisontaalsele platvormile, mille kõrgus maapinnast on H (vt joonist). Tünni seina kõrgusele a selle põhjast puuritakse auk. Väljuv veejuga puudutab maapinda kaugusel L platvormi jalamist. Graafikul on kujutatud kauguse L sõltuvus augu kõrgusest $x = a/h$. Määrase tünni kõrgus h ning aluse kõrgus H eeldusel, et $h > H$.



Ü100 Veejuga ★★

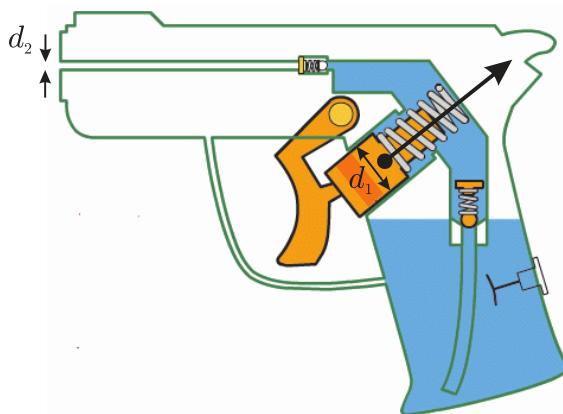
Autor: Siim Ainsaar, piirkonnavoor, 2006, G 9

Vesi voolab kraanist vertikaalselt alla purki. Nagu teada, ei ole kraanist voolav veejuga silindriline. Joa raadius kraani otsa juures on $r_0 = 5 \text{ mm}$, sellest kaugusel $h = 130 \text{ mm}$ allpool aga $r_1 = 3 \text{ mm}$. Leidke aeg t , mis kulub purgi täitmiseks, kui raskuskiirendus on $g = 9,8 \text{ m/s}$. Purgi ruumala $V = 1 \text{ liiter}$. Pindpinevusest tingitud efekte pole vaja arvestada. Eeldada, et voolamiskiirus on iga ristlõike piires ühesugune ning keeriseid ei ole.

Ü101 Veepüstol ★★

Autor: Valter Kiisk, lõppvoor, 2006, G 4

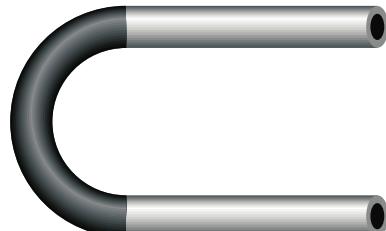
Veepüstoliga (vt joonist) tekitatakse veejuga, surudes vett läbi kitsa silindrilise suudme, mille sisediameteer on $d_2 = 1 \text{ mm}$. Päästik on ühendatud kolviga, mis saab tihedalt liikuda silindrilises torus diameetriga $d_1 = 1 \text{ cm}$. Oletagem, et sõrmed suruvad päästikule jõuga $F = 20 \text{ N}$ (jõu rakenduspunkt ja suund on näidatud joonisel). Kui suure kiirusega väljub veejuga püstolist? Vee liikumise võib lugeda laminaarseks, vee viskoossust ja püstoli liikuvatele osadele mõjuvaid hõördejõude võib ignoreerida. Vee tihedus on $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$



Ü102 U-toru ★★

Autor: tundmatu, lahtine, 2009, G 6

Teatud torustikes võib vedeliku surve olla nii tugev, et torud võivad märgatavalt deformeeruda. Vaatleme sellist deformatsiooni U-kujulises torus (vt joonist): kaks sirget terastotoru pikkusega l , mille välisraadius on $\sqrt{2}$ korda suurem siseraadiusest, on ühendatud sama sisemise raadiusega mittedeformeeruvast materjalist kaarekujulise toruga. Selles U-torus voolab vedelik tihedusega ρ ja konstantse voolukiirusega v . Vedeliku hüdrostaatiline rõhk lugeda võrdseks välisrõhuga. U-toru



otsad on pinnal jäigalt kinnitatud. Leidke toru pikenemine eeldades, et õõnsa terastoru deformatsiooni jaoks toimib Hooke'i seadus, kusjuures jäikustegur avaldub kujul $k = ES/l$ (E on terase nn Young'i konstant, S on toru ristlõike pindala ja l on deformeerimata toru pikkus).

Ü103 Ookean ★★★★

Autor: tundmatu, lahtine, 2005, G 8

Vee kokkusrutavuse tegur $\beta = 5 \cdot 10^{-5} \text{ atm}^{-1}$.

- a)** Hinnake ookeani keskmise sügavuse muutumist juhul, kui vesi oleks täielikult kokkusrumatu. Ookeani keskmise sügavus $h \approx 3800 \text{ m}$.
- b)** Hinnake vee tiheduste vahet $\Delta\rho$ veepinnalähedasel veel ja veel ookeani süvendi põhjas sügavusel $H = 10 \text{ km}$.

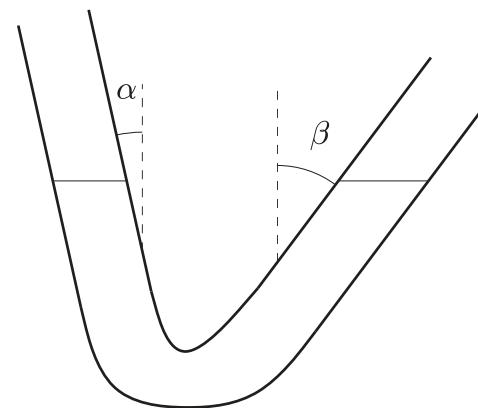
Märkus: kokkusrutavuse tegur β näitab keha ühikulise ruumala vähenemist rõhu suurenemisel ühe ühiku võrra. Atmosfääär on rõhu mõõtmise ühik, mis võrdub atmosfääri normaalrõhuga merepinna kõrgusel: $1 \text{ atm} = 101\,325 \text{ Pa}$.

Ü104 V-toru ★★★★

Autor: Mihkel Kree, lõppvoor, 2008, G 8

Toomas mängib läbipaistvast aiavoolikust tehtud U-toruga. Et seekordne U-toru polegi klaasist, painutab ta üht poolt nurga α ning teist β võrra (vt joonist). Kas vedelikutaseme vönkesagedus on nüüd suurem või väiksem, mitu korda?

Märkus: vertikaalses U-torus on vedelikutaseme vönkumise sagedus $f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{2S\rho g}{m}}$, kus S on toru ristlõikepindala, ρ vedeliku tihedus ning m torus oleva vedeliku mass.



Termodünaamika

Ü105 Balloon ★

Autor: Jaan Susi, lõppvoor, 2005, G 3

Suletud balloon ruumalaga $V = 101$ oli täidetud veega temperatuuril $t_0 = 0^\circ\text{C}$. Samal temperatuuril külmutati vesi jääks, mille tulemusena balloonist venis välja ja vesi avaldas kogu jäätumise protsessi käigus balloonile rõhku $p = 5 \cdot 10^7 \text{ Pa}$.

Leida balloonis olnud vee (H_2O) siseenergia muut koos märgiga. Jää tihedus $\rho_j = 900 \text{ kg/m}^3$ ja sulamissoojuseks antud rõhul $\lambda = 317 \text{ kJ/kg}$. Jää ja vee kokkusuru-tavust mitte arvestada.

Ü106 Kütteklaas ★

Autor: Jaak Kikas, lõppvoor, 2007, G 1

Ruumide soojendamiseks kasutatava elektriliselt köetava klaasi pind on kaetud õhukese valgust läbilaskva elektrit juhtiva kihiga, mille vastasservadele rakenda-takse elektriline pingi (vool kulgeb mööda klaasi pinda). Kuidas suhtuvad selli-sest klaasist valmistatud ristikülikukujuliselt aknalt eralduvad soojuvvõimsused P_H ja P_V sama pingi rakendamisel vastavalt klaasi horisontaalsele (P_H) ja verti-kaalsete (P_V) servade vahel? Akna horisontaalmõõde $a = 0,5 \text{ m}$ ja vertikaalmõõde $b = 1 \text{ m}$.

Ü107 Jääkuul ★

Autor: Urmo Visk, piirkonnnavoor, 2008, G 4

Õhukeste seintega jäast kera sees on õhk. Algelt on jääkera külmkapis tempe-ratuuril $t_0 = -9^\circ\text{C}$ ning õhurõhk tema sees võrdub välisrõhuga $p_0 = 105 \text{ kPa}$. Kera töstetakse külmikust välja tuppa, kus see hakkab soojenema. Kera sein on nii õhuke, et maksimaalne ülerõhk (st. sise- ja välisrõhkude vahe), mida ta puru-nemata talub, on $\Delta p = 0,2p_0$. Mis juhtub enne: kas kera hakkab sulama või ta puruneb ülerõhu tõttu? Kuuli soojenemine lugeda nii aeglaseks, et igal ajahetkel võib lugeda õhu temperatuuri tema sees ning seinte sise- ja välispinna tempe-ruurid võrdseks.

Ü108 Küttesüsteem ★

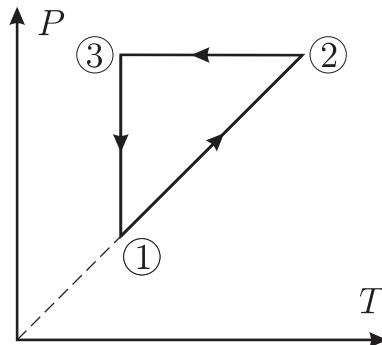
Autor: tundmatu, piirkonnnavoor, 2011, G 3

Küttesüsteem täidetakse $t_1 = 10^\circ\text{C}$ temperatuuriga veega. Kui palju peab paisu-paagis olema vaba ruumi, et kütmisel avatud paisupaagist vesi välja ei voolaks? Küttesüsteemis on $V_1 = 250$ liitrit vett ja töölukorras on selle keskmine tempe-ratuur $t_2 = 63^\circ\text{C}$. Vee ruumpaisumistegur on $\beta = 3 \times 10^{-4} \text{ K}^{-1}$. Vedeliku ruumala mingil temperatuuril avaldub kujul $V = V_0(1 + \beta t)$, kus t on vedeliku temperatuur Celsiusi kraadides, ning V_0 on vedeliku ruumala temperatuuril 0°C .

Ü109 Ringprotsess

Autor: Riho Taba, piirkonnavor, 2006, G 2

Kas joonisel kujutatud ringprotsessil on ideaalse gaasi töö positiivne või negatiivne? Põhjendada vastust.

**Ü110 Vedelike segamine**

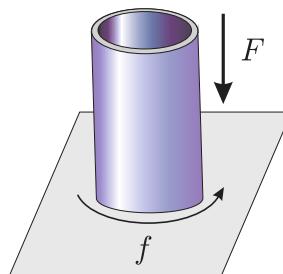
Autor: Aleksei Vlassov, piirkonnavor, 2007, G 3

Kahe erineva vedeliku segamisel ruumalade suhtega $1 : 1$ tekib segu temperatuuriga $t_3 = 42^\circ\text{C}$. Milline oleks segu temperatuur, kui ruumalade suhe oleks $2 : 1$? Vedelike temperatuurid on vastavalt $t_1 = 27^\circ\text{C}$ ning $t_2 = 47^\circ\text{C}$.

Ü111 Tulehõõrumine

Autor: Jaak Kikas, piirkonnavor, 2008, G 3

Jõuga F otsapidi vastu tasast pinda surutud toru põörleb sagedusega f . Toru läbimõõt on D ja seina paksus $d \ll D$. Toru otspind on risti toru teljega, hõõrdetegur toru ja tasapinna vahel on μ . Kui palju soojusenergiat vabaneb ajavahemiku Δt jooksul?



Ü112 Termos ★

Autor: Urmo Visk, piirkonnnavoor, 2009, G 3

Termoses, mis on ümbritsevatest kehadest soojuslikult isoleeritud, on $m_1 = 300\text{ g}$ vett temperatuuriga $t_1 = 20^\circ\text{C}$. Sellele lisatakse $m_2 = 600\text{ g}$ vett temperatuuriga $t_2 = 80^\circ\text{C}$. Pärast soojusliku tasakaalu saabumist mõõdeti vee temperatuuriks T_1 . Järgmisel korral oli samas anumas alguses $m_2 = 600\text{ g}$ vett temperatuuriga $t_2 = 80^\circ\text{C}$ ja sellele lisati $m_1 = 300\text{ g}$ vett temperatuuriga $t_1 = 20^\circ\text{C}$. Nüüd mõõdeti vee temperatuuriks soojusliku tasakaalu saabumise järel $T_2 = T_1 + 2^\circ\text{C}$. Kui suur on termose materjali erisoojus? Tühja termose mass on $m = 140\text{ g}$ ja vee erisoojus $c = 4200\text{ J/kg}\cdot\text{C}$.

Ü113 Rauatükk ★

Autor: Oleg Košik, lahtine, 2010, G 2

Anumasse, milles oli $V = 1\text{ l}$ vett temperatuuril $t_1 = 20^\circ\text{C}$, visati rauatükk massiga $m = 100\text{ g}$ temperatuuril $t_0 = 500^\circ\text{C}$. Osa veest aurustus. Mõne aja pärast mõõdeti vee temperatuuriks $t_2 = 24^\circ\text{C}$. Kui palju vett aurustus? Vee erisoojus $c_1 = 4200\text{ J}/(\text{kg}\cdot^\circ\text{C})$, aurustumissoojus $L = 2,26 \cdot 10^6\text{ J/kg}$ ja tihedus $\rho = 1000\text{ kg/m}^3$; raua erisoojus $c_2 = 460\text{ J}/(\text{kg}\cdot^\circ\text{C})$. Anum on tühise soojusmahutusega ning väliskeskonnast hästi isoleeritud.

Ü114 Jõhvikad ★

Autor: Urmo Visk, piirkonnnavoor, 2010, G 2

Keevasse vette kallatakse külmutatud jõhvikaid. Vee temperatuur langes väärtseni $t = 89^\circ\text{C}$. Mitu korda oli vee mass suurem jõhvikate massist? Kuna jõhvikad olid väikesed ja sulasid väga kiiresti, siis võib vee soojusvahetuse ümbritseva keskkonnaga arvestamata jätkta. Jõhvikate algtemperatuur oli $t_2 = -18^\circ\text{C}$. Jää erisoojus $c_j = 2100\text{ J}/(\text{kg}\cdot\text{C})$, vee erisoojus $c_v = 4200\text{ J}/(\text{kg}\cdot^\circ\text{C})$, jää sulamissoojus $L = 330\text{ kJ/kg}$. Jõhvikate suure veesisalduse tõttu võib neid käsitleda jäända.

Ü115 Vesi ★

Autor: Taavi Pungas, lõppvoor, 2011, G 1

Avatud termoses on vesi temperatuuril $t_0 = 100^\circ\text{C}$. Sellest 1% aurustub. Hinnaata, kui palju muutub termosesse jääenud vee temperatuur t . Vee erisoojus $c_v = 4,2\text{ kJ kg}^{-1}\text{ K}^{-1}$, veeauru erisoojus $c_a = 1,9\text{ kJ kg}^{-1}\text{ K}^{-1}$ ning vee aurustumissoojus temperatuuril 100°C on $L = 2,26\text{ MJ/kg}$. Eeldada, et termose seinte kaudu soojuskadusid ei ole.

Ü116 Kastmisvesi ★★

Autor: Urmo Visk, piirkonnnavoor, 2008, G 5

Päikesisel suvepäeval langeb päikesekiirtega risti olevale ühe ruutmeetrisele pinnale ühes sekundis keskmiselt $\varepsilon = 0,5\text{ kJ}/(\text{s m}^2)$ energiat. Kastmisvett soojendatakse pilgeni täis valatud õhukeseseinalises kerakujulisnes anumas raadiusega $R = 0,5\text{ m}$. Eeldada, et veeanum on päeva jooksul täielikult valgustatud. Kastmisvee temperatuur päikesetöusu ajal kell 4.30 oli $t_0 = 16^\circ\text{C}$. Kui suur on kastmisvee temperatuur päikeseloojangu ajal kell 22.30? Vee erisoojus on $c = 4200\text{ J}/(\text{kg}\cdot^\circ\text{C})$, tihedus $\rho = 1\text{ kg/dm}^3$. Eeldada, et anum neelab kogu pealelangeva päikesevalguse energi ning et kogu päikesevalguse energia läheb kastmisvee soojendamiseks. Soojusvahetus kastmisvee ja keskkonna vahel lugeda tühiseks.

Ü117 Lihvimisketas ★★

Autor: Ott Krikmann, piirkonnavor, 2005, G 3

Detaili lihvatakse horisontaalselt pöörleva lihvimiskettaga, mille raadius on $r = 20\text{ cm}$. Ülekuumenemise välimiseks jahutatakse seda veega. Aja $t = 1\text{ s}$ jooksul eraldub ketta ühelt ruutmeetritl ($s = 1\text{ m}^2$) keskmiselt $q = 10\text{ kJ}$ suurune soojushulk, mille neelab jahutusvesi. Jahutusvett algtemperaturiga $t_1 = 10^\circ\text{C}$ juhitakse ketta tsentrisse vooga $w = 10\text{ cm}^3/\text{s}$. Vee erisoojus $c = 4200\text{ J}/(\text{kg K})$. Leidke üle kettaääre voolava vee keskmise temperatuuri t_2 .

Ü118 Vee keemine ★★

Autor: Mihkel Kree, lõppvoor, 2008, G 6

Mari keetis Mikule teed, aga vesi läks seekord keema alles $t_0 = 105^\circ\text{C}$ juures, kui-gi toas oli normaalrõhk. Milles asi? Teatavasti hakkab vesi keema siis, kui küllastunud veeauru rõhk saab võrdseks õhurõhuga ning kogu anuma ulatuses saavad hakata paisuma küllastunud auruga tädetud mullid; tavaliselt on vees küllalda-selt tahkeid osakesi, millele tekivad piisavalt suured mullid, nii et pindpinevusega pole tarvis arvestada. Oletades aga, et seekord oli vesi haruldaselt puhas, hinnake, missugune oli mullide suurim võimalik raadius enne keemist. Vee pindpinevuseks keemistemperatuuril võib võtta $\sigma = 58 \cdot 10^{-3}\text{ N/m}$ ning lineaarses lähendus-es arvestada, et temperatuuri tõstmisel ühe kraadi võrra suureneb küllastunud veeauru rõhk $\Delta p = 3,5\text{ kPa}$ võrra (keemistemperatuuri läheduses)

Ü119 Vesi ja jää ★★

Autor: Andres Laan, piirkonnavor, 2010, G 5

Kahte suurt paralleelset metallplaati hoitakse horisontaalselt vastastikku. Üks plaatidest on temperatuuril $T_1 = -20^\circ\text{C}$ ja teine temperatuuril $T_2 = 20^\circ\text{C}$. Metallplaatide vahel on vesi. Ilmselgelt on külma plaadi läheduses vesi tahkes olekus. On teada, et vee tahke ja vedela kihi paksuste suhe on 4. Millisele temperatuuri-le tuleb soojendada teine metallplaat, et vedela kihi paksus saaks võrdseks tahke kihi paksusega?

Ü120 Destillaator ★★

Autor: Koit Timpmann, lõppvoor, 2010, G 2

Destillaator toodab tunnis $V = 21$ puhast vett. Sisenev aur ja kondenseerunud vesi on samal temperatuuril. Auru kondenseerumisel vabanenud soojusest ku-lub $\eta = 95\%$ jahutusvee soojendamiseks. Jahutussüsteem kujutab endast pikka toru, milles voolab jahutusvesi. Toru ristlöikepindala on $S = 0,8\text{ cm}^2$. Destillaato-risse siseneva ja sealt väljuva jahutusvee temperatuurid erinevad $\Delta T = 30^\circ\text{C}$ võrra. Kui kiiresti peab vesi voolama jahutussüsteemis? Vee aurustumissoojus $L = 2300\text{ kJ/kg}$, vee erisoojus $c = 4,2\text{ kJ}/(\text{kg K})$ ja vee tihedus $\rho = 1000\text{ kg/m}^3$.

Ü121 Külmatusseade ★★

Autor: tundmatu, piirkonnavor, 2005, G 8

Külmatusseadme mootor teeb tööd $A = 2\text{ kJ}$. Kui suur on maksimaalne külmatusseadmes kehalt äravõetav soojushulk, kui külmatusseadme sisetemperatuur on $t_k = -15^\circ\text{C}$ ja seadme jahutusvedeliku temperatuur on $t_j = 10^\circ\text{C}$?

Vihje. Külmatusseadet võib vaadelda kui pööratud töötsükliga ideaalset soojusmasinat. See tähendab, et kõik tööd ja soojushulgad on vastupidise märgiga. Nii-siis mootor ei tee tööd, vaid tema töös hoidmiseks on vaja teha tööd; madala tem-peratuuriga keskkond ei saa soojust, vaid annab soojust ära.

Ü122 Elektripliit ★★

Autor: tundmatu, lahtine, 2007, G 8

Elektripliid spiraali poolt ajaühikus keskkonnale üle antav soojushulk sõltub lineaarselt spiraali ja toa õhu temperatuuride vahest: $N = \kappa(T - T_0)$. Spiraali takistus sõltub sellest samuti lineaarselt: $R = R_0[1 + \alpha(T - T_0)]$, kus R_0 on spiraali takistus toatemperatuuril. Kui suure temperatuurini kuumeneb spiraal, kui seda läbib vool tugevusega I ?

Ü123 Õhuaken ★★

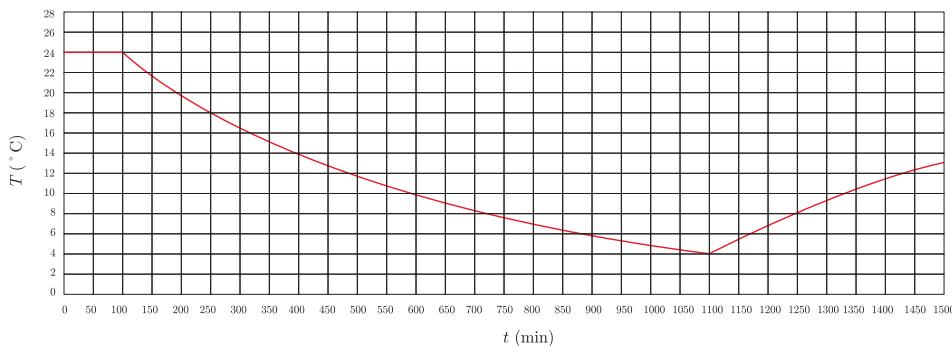
Autor: Jaan Kalda, lõppvoor, 2009, G 6

Tuba köetakse elektriradiaatoriga, mille võimsus on $P = 1 \text{ kW}$. Välistemperatuur on $t_0 = 0^\circ\text{C}$, toas püsib ühtlane temperatuur $t_1 = 20^\circ\text{C}$. Nüüd avatakse õhuaken ning õueõhku tuleb tappa kiirusega $v = 20 \text{ l sekundis}$. Milliseks kujuneb toatemperatuur? Õhu võib lugeda ideaalseks gaasiks, mille soojusmahtuvus konstantsel rõhul ühe mooli kohta on $c_P = \frac{7}{2}R$. Eeldada, et soojuskaod läbi seinte on võrdlised sise- ja välistemperatuuride vahega.

Ü124 Tuba ★★

Autor: Oleg Košik, lõppvoor, 2006, G 7

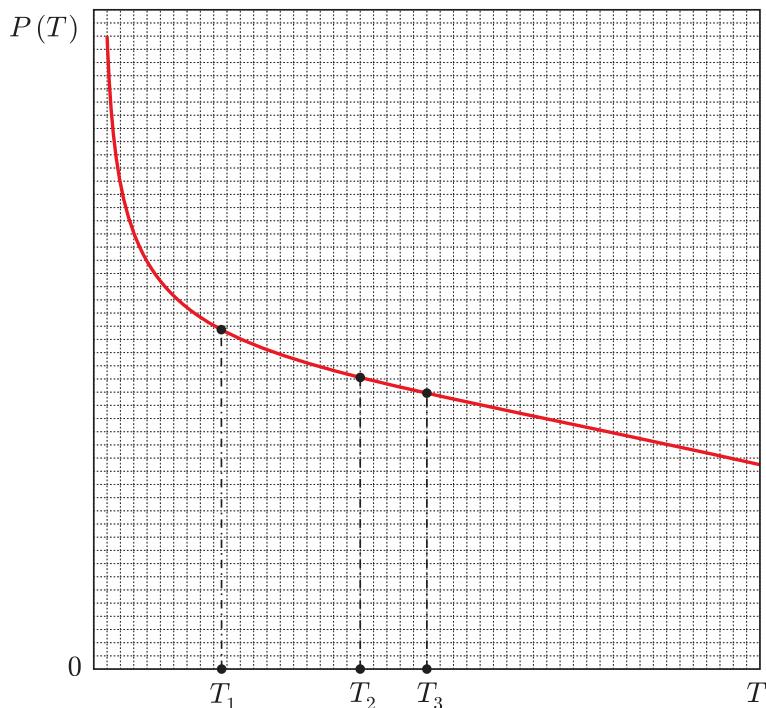
Külma töttu läks küttesüsteem rikki ja toatemperatuur hakkas langema. Ühel hetkel pandi tööle ajas muutumatu võimsusega töötav soojapuhur ning toatemperatuur hakkas taas tõusma. Graafikul on toodud toatemperatuuri sõltuvus ajast. Leidke toatemperatuur pika aja möödumisel. Protsessi vältel välisingimused ei muutunud. Seinte ja toas olevate esemete soojusmahtuvusega mitte arvestada. Soojusvahetuse kiirus väliskeskkonnaga ei ole võrdeline temperatuuride vahega.



Ü125 Küttekehha ★★★

Autor: Mihkel Heidelberg, lõppvoor, 2007, G 7

Teatud ruumi köetakse sellise küttekehaga, mille võimsus P sõltub ruumi temperatuurist, nagu on näidatud joonisel. Kui välistemperatuur on T_1 , siis ruumi temperatuur stabiliseerub T_2 juures (need temperatuurid on märgitud graafikul). Millise temperatuurini tõuseb toatemperatuur, kui välistemperatuur tõuseb T_3 -ni (leida see temperatuur graafilise konstrueerimise abil)? Soojusvahetus keskkonnaga on võrdeline temperatuuride vahega.

**Ü126 Soojuskiirgus ★★★**

Autor: Valter Kiisk, lõppvoor, 2006, G 8

Veeldatud gaaside säilitamisel on tarvis palju tähelepanu pöörata anuma soojusisolatsioonile. Olulise osa soojusvahetusest moodustab soojuskiirgus. Oletagem, et anumal on kahekordsed seinad, mille kiirgusvõimsus pinnaühiku kohta on $\varepsilon\sigma T^4$, kus Stefan-Boltzmanni konstant $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W}/(\text{m}^2 \text{ K})$ ja seinte kiirgusvõime ε loeme temperatuurist sõltumatuks ja võrdseks 0,1-ga. Vedela lämmastikuga kokkupuutes oleva siseseina temperatuur on $T_s = 77 \text{ K}$, toaõhuga kokkupuutes oleva välisseina temperatuur aga $T_v = 293 \text{ K}$.

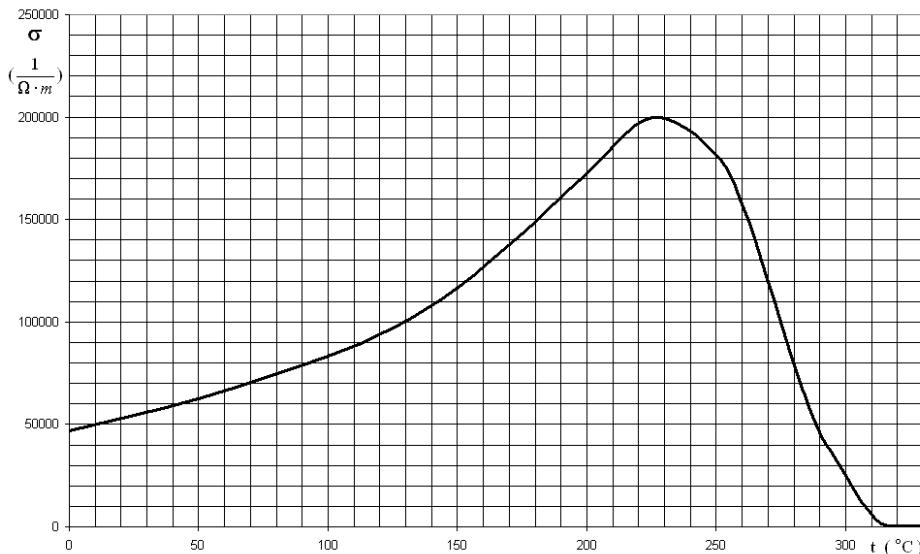
- a)** Leidke soojuskiirgusest tingitud soojusvoog läbi $S = 1 \text{ cm}^2$ suuruse seinapinna.
- b)** Soojusvoo vähendamiseks asetatakse sise- ja välisseina vahelle N õhukest ekraani, mille pind on kaetud samasuguse materjaliga nagu anuma seinad. Mitu korda väheneb selle tulemusena soojusvoog? Põhjendage vastust.

Märkus: kehtib Kirchhoffi seadus — keha neelamisvõime, mis näitab, kui suur osa aine pinnale langevast kiirgusest neeldub, on alati võrdne tema kiirgamisvõimega ε .

Ü127 Pooljuht ★★★★

Autor: tundmatu, lahtine, 2008, G 10

Graafikul on antud pulgakujulise keraamilisest pooljuhist (nn. PTC takisti) soojendi materjali erijuhtivuse σ ($1/(\Omega \cdot m)$) sõltuvus temperatuurist t ($^{\circ}\text{C}$). Erijuhtivuseks nimetatakse eritakistuse pöördväärust. Leida, millise temperatuurini kuumeneb avatud ruumis paiknev sellest materjalist soojendi, kui tema otstele rakendatakse pinge $U_1 = 60$ V. Milliseks kujuneb soojendi temperatuur, kui otstele rakendatud pinge on $U_2 = 36$ V? On teada, et kui soojendi otstele rakendatakse pinge $U_0 = 30$ V, siis soojendi temperatuuriks kujuneb $t_0 = 70$ $^{\circ}\text{C}$. Välisõhu temperatuur on $t_v = 20$ $^{\circ}\text{C}$.



Elektrostaatika

Ü128 Juhe ★★

Autor: tundmatu, lahtine, 2005, G 5

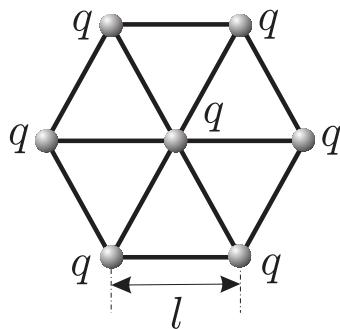
Sirgjooneline juhe asub sügaval maa all ühtlases pinnases. Lekkevool ühikulise pikkusega juhtmest on i . Leidke lekkevoolu tihedus (A/m^2) kaugusel r juhtmest. Juhtme pikkus on palju suurem kui r . Lekkevool on konstantne piki juhet.

Märkus: lekkevooluks nimetatakse voolu, mis levib isolatorites.

Ü129 Kuulikesed ★★

Autor: tundmatu, lahtine, 2005, G 4

Seitse ühesugust laetud kuulikest laenguga q on seotud omavahel samast materjalist võrdse algpikkusega elastsete niitidega ja saavad liikuda vaid ühes fikseeritud tasapinnas (vt joonist). Vahemaa kahe suvalise naaberkuulikese vahel tasakaalu olekus on l . Leidke tõmbepinged niitides.



Ü130 Tolmukübe ★★

Autor: Aigar Vaigu, piirkonnavor, 2006, G 8

Tolmukübe massiga $m = 1 \cdot 10^{-9}$ g on kondensaatori horisontaalsete plaatide vahel tasakaalus. Laengu pindtihedus kondensaatori plaatidel $\sigma = 2,6 \cdot 10^{-5} \text{ C/m}^2$. Kui suur on tolmükübeme elektrilaeng? Millise kiirendusega hakkaks tolmukübe langema, kui kondensaatori polaarsus muuta vastupidiseks? Eeldada, et elektriväli kondensaatori plaatide vahel on homogeenne. Õhutakistust mitte arvestada. Elektriline konstant $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ F/m}$, õhu dielektriline läbitavus $\epsilon \approx 1$.

Ü131 Kuulikesed ★★

Autor: tundmatu, lahtine, 2007, G 7

Kaks ühesugust kuulikest, millest kumbki kannab laengut q , asuvad vertikaalsis his kaugusel H üksteisest. Alumine kuulike on jäigalt kinnitatud, ülemine aga hakkab liikuma vertikaalselt alla suunatud algkiirusega v . Kui suur on minimaalne kaugus h alumise kuulikeseni, millele suudab läheneda ülemine kuulike? Ülemise kuulikese mass on m . Raskuskiirendus on g .

Ü132 Laetud rõngas ★★

Autor: tundmatu, lahtine, 2009, G 4

Peenikesest traadist rõngas raadiusega R on ühtlaselt laetud negatiivse laenguga Q . Elektron massiga m ja laenguga e läheneb rõngale mööda sirget, mis on risti rõnga tasandiga ning läbib rõnga keskpunkti. Millist tingimust peab rahuldama elektroni kiirus punktis, mis asub kaugusel $d = R\sqrt{3}$ rõnga keskpunktist, et elektron saaks rõngast läbi lennata?

Ü133 Ioonmootor ★★

Autor: Mihkel Pajusalu, lahtine, 2010, G 6

Kosmosesond on varustatud lihtsa ionomootoriga, mis koosneb ksenooni ionide Xe^+ allikast ja kahest elektroodist, mille vahele rakendatakse pingे U ja mille vahel maad läbides ioone kiirendatakse. Kui suurt kogust (mass) ksenooni on vaja, et selle mootoriga sondi kiirust tösta $\Delta v = 1 \text{ km/s}$ võrra? Ksenooni aatommass $\mu = 131,29 \text{ g/mol}$, kosmosesondi mass $M = 1000 \text{ kg}$, kiirendav pingе $U = 100 \text{ kV}$, elementaarlaeng $e = 1,60 \cdot 10^{-19} \text{ C}$, Avogadro arv $N_A = 6,02 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$.

Ü134 Lendav elektronkahur ★★

Autor: Siim Ainsaar, lõppvoor, 2006, G 6

Jaan Tatikal tuli järjekordne lennumasinaidee, mida ta kohe realiseerima töttas. Nimelt ehitas ta palkidest platvormi, mille alla kinnitas telerist välja lõhutud elektronkahuri koos vajaliku elektronika ja akuga. Elektrone kiirendav pingе on U , voolutugevus elektronkiires I . Leidke, kui suurt töstejöudu F suudab see seade tekitada. Missugust tingimust peaksid U ja I rahuldama, et taoline lennumasin suudaks leiduri õhku tösta? Kas see on ka realistiklik (televiisorites $U \approx 30 \text{ kV}$, $I \approx 100 \mu\text{A}$)? Relativistlikke efekte pole vaja arvestada; elektroni algkiirus katoodi juures on 0. Eeldage, et kiir üldse moodustub (õhu olemasoluga ärge arvestage). Tatika mass koos platvormi ja seadmega on $m_T \approx 150 \text{ kg}$, raskuskiirendus $g \approx 9,8 \text{ m/s}^2$. Elektroni laeng ja massi suhe $k = e/m_e \approx 1,76 \cdot 10^{11} \text{ C/kg}$.

Ü135 Elektronkiir ★★

Autor: tundmatu, lahtine, 2008, G 7

Kitsas elektronkiir läbib vaakumis tasaparalleelse plaatide vahelise pilu ja langeb seejärel fluoresceeruvale ekraanile, mis asub plaatide ekraanipoolsemast servast kaugusel $l = 15 \text{ cm}$. Kui plaatidele antakse pingе $U = 50 \text{ V}$, nihkub helendav punkt ekraanil endisest asukohast kaugusele $s = 21 \text{ mm}$. Plaatidevaheline kagus $d = 18 \text{ mm}$, plaatide mõõtmed elektronide liikumise suunas on $b = 6 \text{ cm}$. Milline on elektronide algkiirus plaatide vahelle sattumisel? Elektroni laeng ja massi suhe $e/m \approx 1,76 \cdot 10^{11} \text{ C/kg}$.

Ü136 Kuup ★★

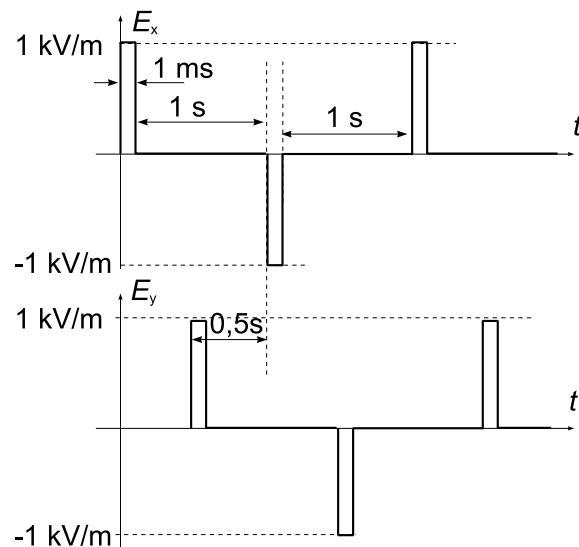
Autor: Jaan Kalda, piirkonnnavoor, 2008, G 7

Õhukesest elektrit mittejuhtivast materjalist on valmistatud kuup küljepikkusega a . Kuubil on elektrilaeng ühtlase pindtihedusega σ (pindtihedus on laeng pinna-ühiku kohta). Ühe tahu keskkohata lõigatakse väike ruudukujuline auk mõõtmeega $b \times b$ ($b \ll a$). Leida elektrivälja tugevus kuubi keskpunktis.

Ü137 Liikuv laeng ★★

Autor: Jaan Kalda, piirkonnavoor, 2009, G 6

Laetud osake laengu ja massi suhtega $q/m = 1 \text{ C/kg}$ seisab algsest paigal. Seejärel hakkab ta liikuma x - ja y -telje sihis toimivate elektrivälja impulsside mõjul. Elektrivälja vastavate komponentide E_x ja E_y sõltuvus ajast on toodud graafikul (graafiku mastaap ei ole korrektne, juhenduda tuleb graafikul näidatud numbritest impulsi kestvuse $\tau = 1 \text{ ms}$ ja amplituudi $E_0 = 1 \text{ kV/m}$ ning perioodi $T = 2 \text{ s}$ jaoks). Visandage osakese trajektoor ja leidke keskmise kiirus (visandi tegemisel ja arvutustes võib lugeda ajavahemiku $\tau = 1 \text{ ms}$ jooksul toimuvad muutused hetkelisteks).

**Ü138 Sfäärid ★★**

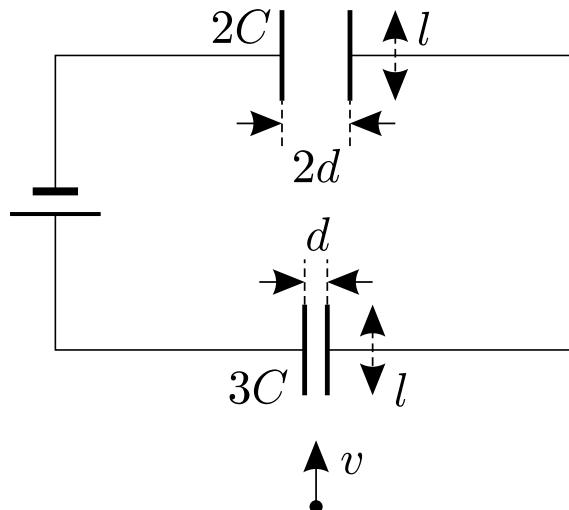
Autor: Kristian Kuppart, lahtine, 2011, G 8

Kaks juhtivast materjalist sfääri raadiustega R_1 ja R_2 on ühendatud pika juhtmeaga. Ühele sfääridest antakse mingi laeng. Leidke suhe $\frac{E_1}{E_2}$, kus E_1 ja E_2 on elektrivälja tugevused vastavate sfääride pinnal. Eeldage, et juhtme mahtuvus on tühine ning juhtme pikkus on oluliselt suurem sfääride raadiustest.

Ü139 Kondensaatorid ★★★★

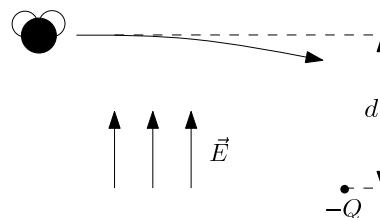
Autor: Oleg Košik, lõppvoor, 2005, G 8

Kondensaatorid mahtuvustega $2C$ ja $3C$ on ühendatud pingearvutusega, mille pingel on U . Osake massiga m ning laenguga q lendab algiirusega v , mis on suunatud paralleelselt kondensaatorite plaatidega (vt joonist). Osake lendab mõlemal kondensaatori plaatide vahelt läbi. Mõlemal kondensaatori plaatide pikkus on l ning plaatide vahelised kaugused on vastavalt $2d$ ja d . Leidke nurk, mille võrra kalandub osake vörreldes esialgse trajektooriga, kui ta väljub joonisel ülemisest kondensaatorist. Eeldada, et see nurk on väike.

**Ü140 Kärbes ★★★★**

Autor: Stanislav Zavjalov, lahtine, 2010, G 7

Kärbes otsustas lennates püsida ainult elektrivälja ekvipotentsiaalpindade peal. Ta lendab sisse ruumi, mis on täidetud homogeensel elektriväljaga \vec{E} , välja jõujoontega risti. Elektriväljas hoitakse paigal ka laengut $-Q$ nii, et kärbse trajektoori esialgse puutuja ja laengu vahemaa on d (vt. joonist; $-Q < 0$). Kui lähedale kärbes laengule jõuab? Eeldage, et $Q \leq \pi\epsilon_0 Ed^2$.



Ü141 Laetud klotsid ★★★

Autor: tundmatu, lahtine, 2006, G 9

Horisontaalsel siledal dielektrilisel pinnal asuvad kaks laetud klotsi massidega m ja samanimeliste laengutega q . Alghetkel on vahemaa nende vahel l . Mis tingimusel hakkavad klotsid liikuma ja kui suur on vahemaa L nende vahel, kui liikumine lõppeb? Höördetegur klotside ja pinna vahel on μ . Klotside mõõtmeid ja liikuvate laengute elektromagnetkiirgust mitte arvestada. Pinna dielektriline läbitavus on 1.

Ü142 Kosmoseprügi ★★★

Autor: Siim Ainsaar, lõppvoor, 2009, G 9

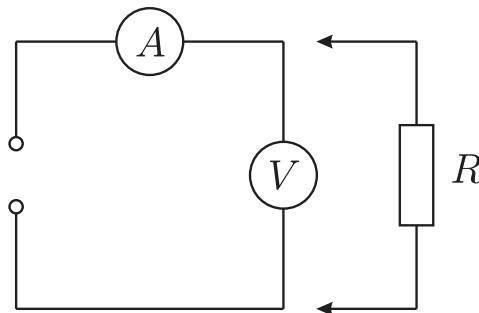
Kosmoses hõljuvad vabalt kaks ühesugust elektriliselt laetud kuuli, mis on ühen-datud ideaalse nööriga. Kummagi kera laeng on q ja mass M , nööri pikkus on l . Ootamatult lendab nööriga risti selle keskkoha pihta kosmoseprügi tükki massiga m ja kiirusega v ning jäääb nööri külge kinni. Millisele vähimale kaugusele d lähenevad teineteisele kuulid? Eeldada, et kuulikeste diameetrid on väiksemad kui otsitav kaugus d .

Elektriahelad

Ü143 Mõõteriistad ★

Autor: Koit Timpmann, lõppvoor, 2006, G 1

Vooluringis on ampermeeter ja voltmeeter ühendatud jadamisi. Klemmidele on rakendatud pingi $U = 9\text{ V}$. Kui voltmeetriga ühendada rööbiti takisti R , väheneb voltmetri näit kaks korda, ampermeetri näit aga suureneb kaks korda. Kui suurt pinget näitas voltmeeter enne ja pärast takisti ühendamist?

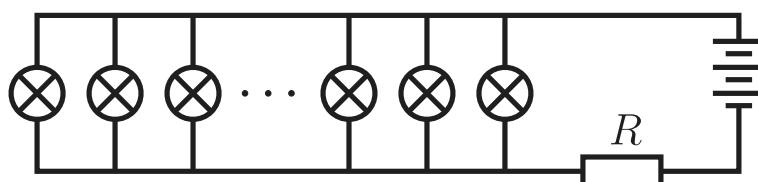


Ü144 Elektriküünlad ★

Autor: Valter Kiisk, piirkonnavoor, 2009, G 4

Jõulukaunistuse valmistamiseks otsis Juku välja 10 taskulambipirni (nimipingi 3 V , võimsus $0,6\text{ W}$) ja alaldi klemmipinge 5 V. Seejärel koostas ta skeemi, mis on kujutatud joonisel.

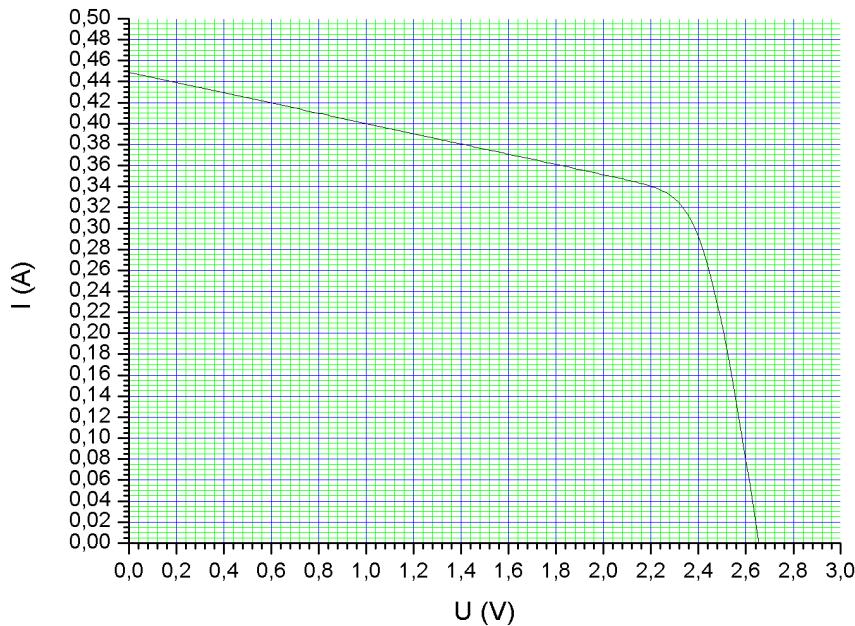
- a) Kui suur peab olema takisti R takistus, et pingi lampidel ei ületaks nimipinget?
- b) Skeemi sisselülitamisel avastas Juku, et lambid põlevad oodatust tuhmimalt. Selgus, et alaldi klemmipinge oli koormusega langenud 4 V -ni ning pingi lampidel $2,3\text{ V}$ -ni. Kui suur tuleks valida takisti R väärthus, et lambid põleksid normaalse heledusega?



Ü145 Pääkesepaneel ★

Autor: Mihkel Pajusalu, lõppvoor, 2010, G 3

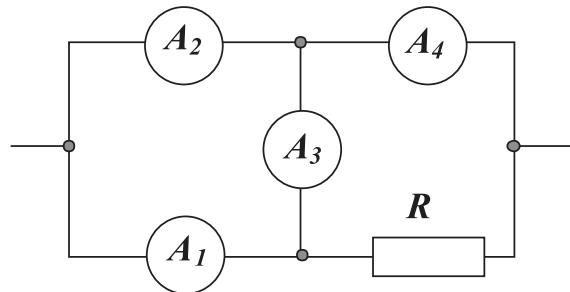
Joonisel on kujutatud pääkesepaneeli läbiva voolu sõltuvus klemmipingest. Määra paneeli klemmidega ühendatud koormise takistus, mille korral on koormisel eralduv võimsus maksimaalne.



Ü146 Ampermeetrid ★★

Autor: tundmatu, lahtine, 2008, G 4

Vooluahelasse on ühendatud neli ühesugust ampermeetrit, igaüks sisetakistusega r , ja takisti R . Esimese kahe ampermeetri näidud on $I_1 = 3 \text{ A}$ ja $I_2 = 5 \text{ A}$. Leida takistuste suhte R/r arvuline väärus.



Ü147 Patarei ★★

Autor: Taavi Pungas, piirkonnavor, 2011, G 6

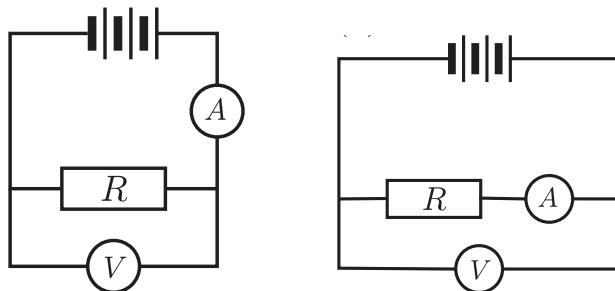
Patarei ühendatakse jadamisi takistusega R ja ampermeetriga, mis näitab voolutugevuseks I_1 . Kui lisada jadamisi veel üks takisti takistusega R , näitab ampermeeter voolutugevuseks I_2 . Leidke, mis vahemikku jääks suhe I_2/I_1 , kui vooluallika sisetakistus r oleks

- a) väiksem kui R ,
- b) suurem kui R .

Ü148 Vooluring ★★

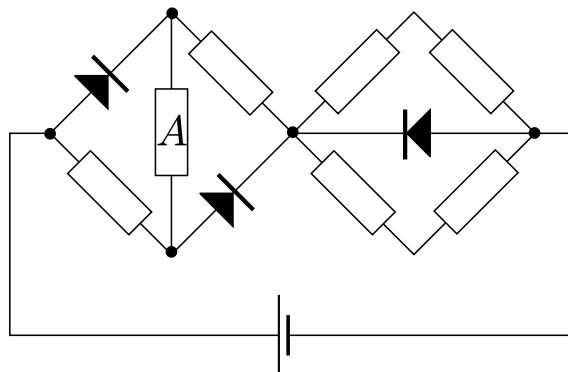
Autor: Valter Kiisk, piirkonnavoor, 2005, G 4

Takisti takistuse määramiseks koostati kaks erinevat vooluringi kasutades voltmeetrit, ampermeetrit ja vooluallikat (vt joonist). Leidke avaldis takistuse R arvutamiseks, kui vasakpoolse skeemi järgi mõõtes saadi voltmeetri näiduks U_1 ja ampermeetri näiduks I_1 ning parempoolse skeemi järgi mõõtes vastavalt U_2 ja I_2 . Vooluallika elektromotoorjõud on muutumatu ning sisetakistus tühine. Mõõteriistade sisetakistused ei ole teada.

**Ü149 Takistid** ★★

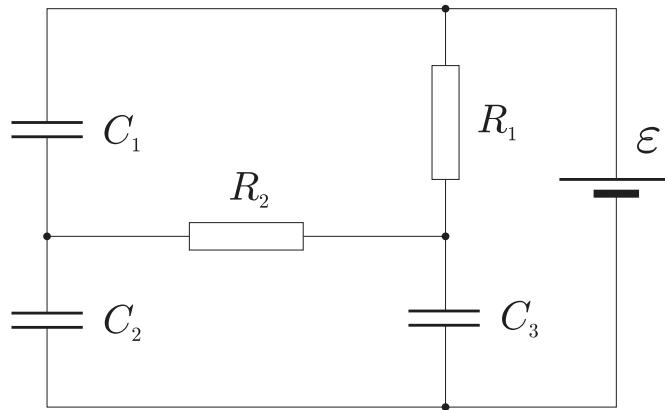
Autor: Aigar Vaigu, lõppvoor, 2005, G 4

Mitu korda muutub joonisel kujutatud ahelas takistil A eralduv võimsus, kui vahetada alalispingeallika polaarsust? Kõik takistid on võrdse takistusega.



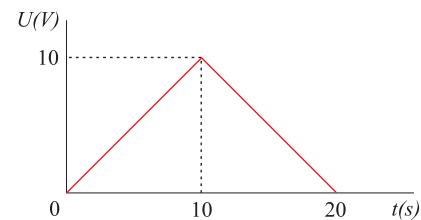
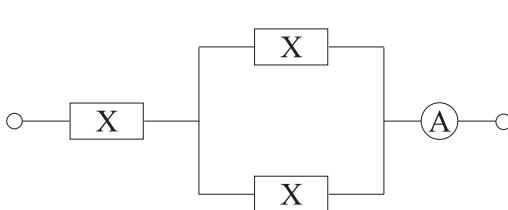
Ü150 Elektriskeem ★★

Autor: tundmatu, lahtine, 2006, G 2

Leida laengud q_1 , q_2 ja q_3 kõikidel skeemil toodud kondensaatoritel.**Ü151 Skeem ★★**

Autor: tundmatu, lahtine, 2009, G 3

Elemendi X takistus muutub sõltuvalt selle pingest. Kui $U_X \leq 1\text{ V}$, siis selle takistus on $R_1 = 1\Omega$, kui aga $U_X > 1\text{ V}$, siis on takistus $R_2 = 2\Omega$. Kolm elementi X ühendatakse ideaalse ampermeetriga, nagu näidatud joonisel. Väljundklemmidele rakendatakse pingi, mille ajaline sõltuvus on toodud graafikul. Joonestage ampermeetri näidu ajalise sõltuvuse graafik.

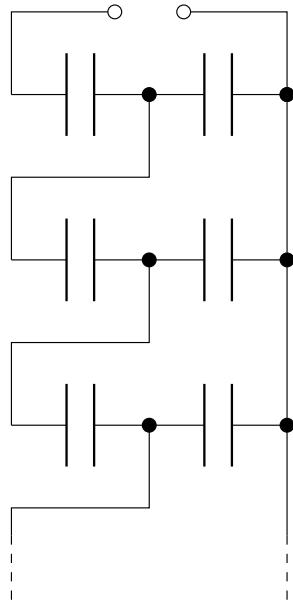
**Ü152 Takisti ★★★**

Autor: Jaan Kalda, piirkonnavor, 2007, G 7

On vaja teha taksti takistusega $R = 1\Omega$, mille takistuse temperatuurisõltuvus oleks toatemperatuurile lähedastel temperatuuridel võimalikult väike. Kasutada on raudtraat ristlõikepindalaga $s = 0,030\text{ mm}^2$ ja grafiitpulk ristlõikepindalaga $S = 3,0\text{ mm}^2$. Kuidas valmistada soovitud takistit ja kui pikki grafiitpulga ning terastraadi juppe tuleb seejuures kasutada? Grafiidi ja raua eritakistused on vastavalt $\rho_g = 3,0 \cdot 10^5 \Omega \text{ m}$ ning $\rho_r = 9,7 \cdot 10^{-8} \Omega \text{ m}$; takistuse temperatuurikoeffiendid (suhtelised muutused $\Delta R/R$ temperatuuri kasvamisel ühe kraadi võrra) on $\alpha_g = -5,0 \cdot 10^{-3} \text{ K}^{-1}$ ning $\alpha_r = 6,41 \cdot 10^{-3} \text{ K}^{-1}$

Ü153 Kondensaatoriredel ★★★ Autor: Siim Ainsaar, piirkonnnavoor, 2007, G 8

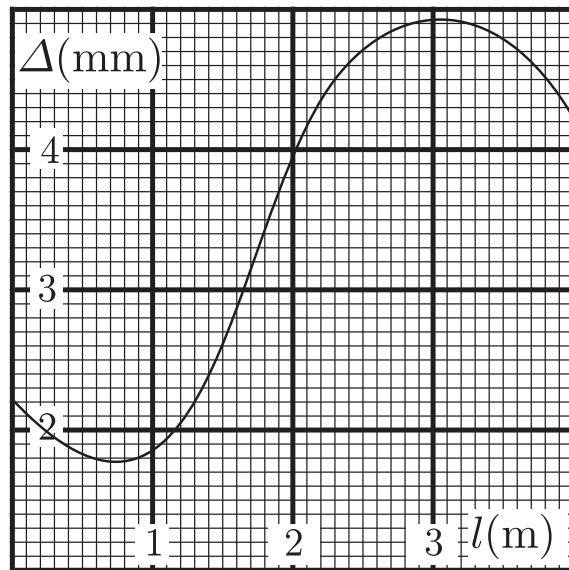
Ühesugustest kondensaatoritest mahtuvusega C on koostatud joonisel näidatud lõpmatu ahel. Leidke ahela kogumahtuvus C_k .



Ü154 Traat ★★★

Autor: Jaan Kalda, lõppvoor, 2008, G 7

Ühtlase ristlõikega traati (ristlõike pindala $S = 1 \text{ mm}^2$) venitati nii, et tema erinevad lõigud venisid erinevalt. Enne venitamist oli traadile märgitud jooned iga millimeetri tagant. Joonisel on toodud nende joonte vahekaugused Δ pärast venitamist sõltuvana kaugusest traadi ühest otsast l (l on mõõdetud pärast venitamist). Leidke selle nüüdseks 4 meetri pikkuse traadi takistus, arvestades, et traadi materjali tihedus ja eritakistus $\rho = 1 \cdot 10^{-6} \Omega \text{ m}$ venitamise tagajärvel ei muutunud.



Ü155 Kondensaator ★★

Autor: Aigar Vaigu, piirkonnavor, 2010, G 7

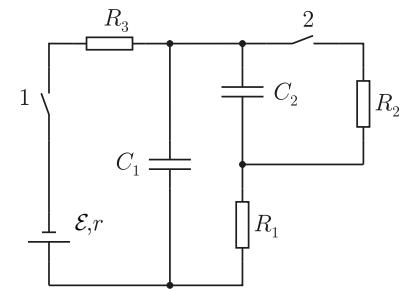
Muudetava mahtuvusega kondensaator on ühendatud patareiga, mille klemmid pingi on U . Kondensaatori mahtuvust muudetakse laadimisel nii, et kondensaatori laadimise vool I on konstantne. Leidke patarei võimsus ja kondensaatori laadimisel energia salvestamise kiirus. Põhjendage võimalikku erinevust.

Ü156 Kondensaatorid ★★

Autor: Mihkel Rähn, piirkonnavor, 2006, G 7

Joonisel toodud elektriskeemil on vooluallikas elektromotoorjõuga \mathcal{E} ja sisetakistusega r , kolm takistit takistustega $R_1 = R_2 = R_3 = R$ ning kondensaatorid mahtuvustega C_1 ja C_2 . Arvutage, kui suured on elektrilaengud kondensaatoritel pärast pika aja möödumist, kui:

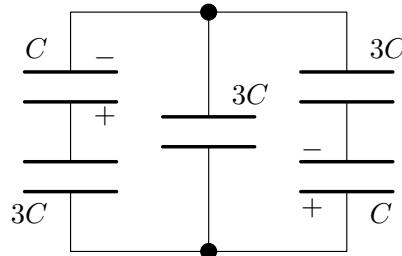
- a) lülit 1 on suletud, lülit 2 on avatud;
- b) mölemad lülitid on suletud;
- c) eelmisest seisust avatakse mölemad lülitid üheaegselt.



Ü157 Kondensaatorid ★★★

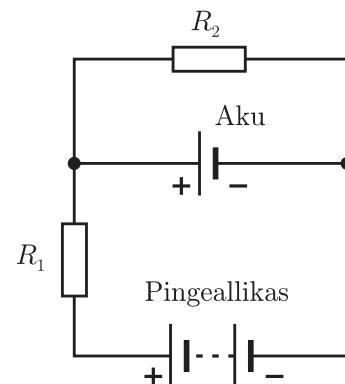
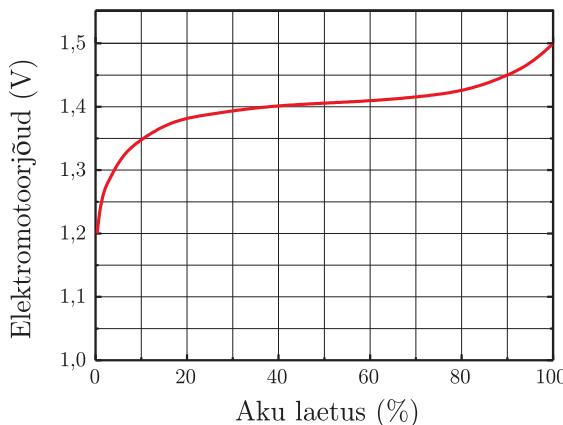
Autor: Mihkel Kree, lõppvoor, 2009, G 3

Kondensaatorite süsteem koosneb viiest kondensaatorist. Alghetkel on kolm neist laenguta ning kahel paikneb laeng q (vt joonist). Missugune laeng koguneb kesk-misele kondensaatorile, kui süsteem on jõudnud tasakaaluolekusse?

**Ü158 Aku laadimine ★★★★**

Autor: Valter Kiisk, piirkonnnavoor, 2008, G 8

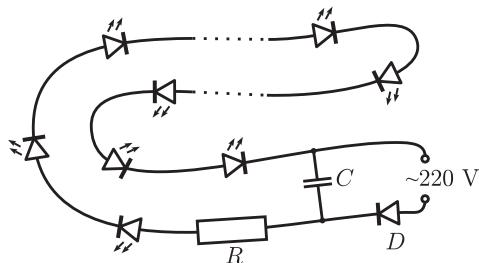
Teatava akumulaatori elektromotoorjõud kasvab laadimise käigus nõnda, nagu kujutatud joonisel. Samas on toodud ka elektriskeem, mida Juku kavatseb kasutada sellise akumulaatori laadimiseks. Pingeallika klemmidel on pingे 6 V. Nii pingeallika kui ka aku sisetakistust võib lugeda tühiseks. Kuidas peaks Juku valima takistite R_1 ja R_2 väärtsused, kui ta soovib, et maksimaalne laadimisvool ei ületaks 100 mA ja laadimisvool muutuks nulliks, kui akumulaator on täielikult laetud?



Ü159 Jõulukaunistus ★★★

Autor: Valter Kiisk, lõppvoor, 2010, G 8

Soodsa jõulukaunistuse valmistamiseks otsustas Juku ühendada jadamisi kokku 50 valgusdiodi ja toita seda ahelat läbi alaldusdiodi D otse võrgupingega (vt joonist). Voolu piiramiseks on ahelasse lülitatud takisti ning voolu pulsatsiooni väljasilumiseks kondensaator. Pinge alaldusdioodil on tühine, igal valgusdioodil aga $U_d = 3\text{ V}$. Kui suure takistusega R ja maksimumvõimsusega N tuleks valida takisti, kui valgusdioodid taluvad voolu kuni $I = 20\text{ mA}$? Kui suure mahtuvusega C kondensaator kindlustab, et voolutugevuse pulsatsioon jäääb $\alpha = 5\%$ piiresse? Võrgupinge sagedus on $f = 50\text{ Hz}$ ning amplituudväärust $U_0 = 311\text{ V}$.

**Ü160 Närvirakk ★★★★**

Autor: Andres Laan, lõppvoor, 2011, G 9

Närviraku membraani võib vaadelda kui õhukest kilet mahtuvusega C , mida läbivad ioonkanalid, mis võimaldavad laengutel liikuda läbi membraani. Närviraku elektrilise tasakaalu seisukohast on olulisteks ioonideks naatrium ja kaalium. Kui naatriumioon (laenguga $+e$) läbib ioonkanali (sisenedes närvirakku), siis sooritavad keemilised jõud töö $e\mathcal{E}_{\text{Na}}$, st võib öelda, et naatriumioonidele mõjub ioonkanalis elektromotoorjõud \mathcal{E}_{Na} . Kaaliumioonide puhul on kanali läbimise protsess täpselt samasugune, kuid efektiivne elektromotoorjõud on sel puhul $\mathcal{E}_{\text{K}} (\neq \mathcal{E}_{\text{Na}})$. Peale keemiliste jõudude töö toimivad laengu liikumisel ioonkanalis ka hõördejõud, mida saab kirjeldada elektrilise takistuse abil: naatriumioonide jaoks on membraani elektriline takistus R_{Na} ja kaaliumioonide jaoks R_{K} . Millise laengu omandab närviraku membraan elektrilise tasakaalu saabudes?

Magnetism

Ü161 Solenoid ★★

Autor: Andres Laan, lõppvoor, 2011, G 5

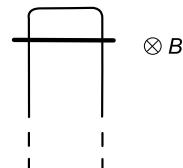
Õhksüdamikuga solenoidis (pikas silindrilises poolis) on vool I . Solenoidi sise-muses liigub elektron, mille trajektoor kujutab endast sellist kruvijoont, mille keerdude arv on võrdne solenoidi keerdude arvuga. Leidke selle elektroni kiiruse teljesihiline komponent. Võib eeldada, et elektroni kiiruse teljega risti olev komponent on piisavalt väike, et kokkupõrkeid solenoidi seinaga ei toimu. Elektroni mass on m ja laeng e .

Vihje: solenoidi sees on homogeenne magnetväli induktsiooniga $B = \mu_0 n I$, kus n on solenoidi traadi keerdude arv pikkusühiku kohta, I selles olev vool ja μ_0 vaakumi magnetiline läbitavus.

Ü162 Langev takisti ★★★

Autor: Andres Laan, piirkonnnavoor, 2011, G 8

Joonisel on kujutatud Maa gravitatsiooniväljas vertikaalselt paiknevale juhtivale traadile kinnitati takisti nii, et see võib piiki traati vabalt libiseda. Teades, et magnetinduktsioon oli B ja traadi harude vaheline kaugus d , leidke, millise lõppkiirusega hakkab takisti langema. Takisti mass on m ja takistus R .



Ü163 Laengud ★★★★

Autor: Jaan Kalda, lahtine, 2011, G 6

Kaks osakest laenguga q stardivad koordinaatide alguspunktist kiirusega v : üks x -telje sihis, teine y -telje sihis. Liikumine toimub homogeenses z -telje silihises magnetväljas induktsiooniga B ; osakeste omavahelise elektrostaatilise vastasmõju juga ärge arvestage. Milline on osakeste vahelise kauguse maksimaalväärustus l_{\max} edasise liikumise käigus?

Ü164 Traat ★★★★★

Autor: Jaan Kalda, lõppvoor, 2007, G 10

Horisontaalsel libedal pinnal on fikseeritud kaks klemmi, mille vahekaugus a on väiksem neid ühendava hästi painduva sõlmevaba traadi pikkusest L . Süsteem asub vertikaalses homogeenses magnetväljas tugevusega B , traati läbib vool tugevusega I . Joonistage, millise kuju võtab traat. Kirjutage välja võrrandid, kust saab leida mehaanilise pingi T traadis. Leidke selle väärustus eeldusel, et $L \gg a$.

Ü165 Pool ★★★★★

Autor: Siim Ainsaar, lõppvoor, 2008, G 10

Libedale klaaspulgale on pehmest traadist tihedasti keritud solenoid pikkusega ℓ , keerdude arvuga N ja ristlõikepindala S . Selles hoitakse konstantset voolu tugevusega I . Millist jõudu F oleks vaja rakendada pooli otstesse südamiku sihis, et venitada seda pisutki pikemaks, kui kehtiks eeldus, et venitamisel suurenevad kõigi naaberkeerdude vahekaugused võrdselt? Võite lugeda, et klaasi magnetiline läbitavus $\mu = 1$.

Vihje: tiheda solenoidi südamikus on homogeenne magnetinduktsioon $B = \mu_0 I N / \ell$.

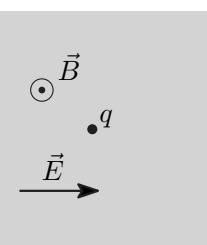
Ü166 Laeng ★★★★

Autor: Oleg Košik, lahtine, 2010, G 8

Ruudukujulise ristlõikega ruumipiirkond on täidetud homogeensel magnetväljaga B ning selle keskel asub osake massiga m ja laenguga q , mis on alghetkel paigal. Alates alghetkest iga ajavahemiku $T = \frac{\pi m}{qB}$ tagant lülitub selles piirkonnas lühiajaliselt sisse elektriväli E (kestusega $\tau \ll T$), mis on suunatud risti magnetväljaga. Elektriväli võib muutuda kahes režiimis: (i) olles iga kord suunatud joonisel näidatud suunas; (ii) olles suunatud vaheldumisi kord joonisel näidatud suunas, kord vastupidises suunas.

a) Skitseerige osakese trajektoor mõlema režiimi korral.

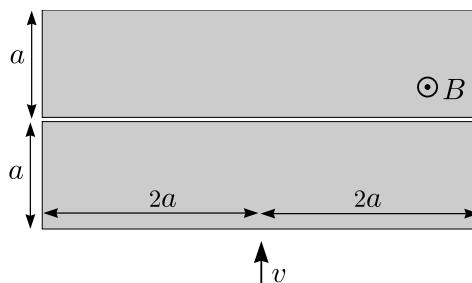
b) Kumma režiimi korral väljub osake magnetväljaga piirkonnast kiiremini? Mitu korda kiiremini? Eeldage, et väljumisaeg on mõlemal juhul palju suurem kui T . Põhjendage vastust.



Ü167 Magnetväli ★★★★

Autor: Jaan Kalda, piirkonnavor, 2010, G 9

Magnetväli induktsiooniga B täidab joonisel kujutatud mõõtmetega risttahukakujuist ruumipiirkonda, välja arvatud väga kitsas magnetväljata pilus. Joonisel näidatud suunas lendab kiirusega v elektron (massiga m ja laenguga e). Arvutage ja visandage graafikul, kuidas sõltub elektroni kõrvalekaldenurk (st nurk tema kiirusvektorite vahel enne magnetvälja sisenemist ja pärast sealte lõplikkut väljumist) elektroni algkiirusest v ; piirduge väärustega $v < 2aBe/m$.



Ü168 Silinder ★★★★

Autor: tundmatu, lahtine, 2007, G 10

Pika ühtlase mittejuhtiva silindri pinnal on ühtlaselt jaotatud laeng pindtihedusega σ . Alguses asub silinder välises homogeenses magnetväljas induktsiooniga B , mis on suunatud piki silindri telge; silinder on paigal. Seejärel lülitatakse magnetväli välja. Kui suure pöörlemise nurkkiiruse omandab selle tulemusel silinder? Silindri aine tihedus on ρ , silindri raadius on r .

Märkus: pöörleva silindri poolt tekitatav magnetväli lugeda tühiselt väikseks võrreldes välise väljaga

Geomeetriseline optika

Ü169 Kiil ★

Autor: Valter Kiisk, lõppvoor, 2007, G 3

Laserkiire teele asetatakse enam-vähem risti õhuke klaasplaat (klaasi murdumisnäitaja $n = 1,5$). Selle tulemusena nihkub $L = 2\text{ m}$ kaugusel ekraanil olev laserkiire kujutis $d = 5\text{ mm}$ võrra. Järeldatakse, et plaat on kergelt kiilukujuline. Leidke selle kiilu tipunurk α .

Vihje: väikeste nurkade φ puhul $\sin \varphi \approx \tan \varphi \approx \varphi$.

Ü170 Lääts ★

Autor: tundmatu, lahtine, 2009, G 2

Lääts tekitab esemest $d = 24\text{ cm}$ kaugusele ekraanile kujutise, mis on esemest 3 korda suurem. Leidke läätse fookuskaugus.

Ü171 Kiirtekimbu laiendi ★

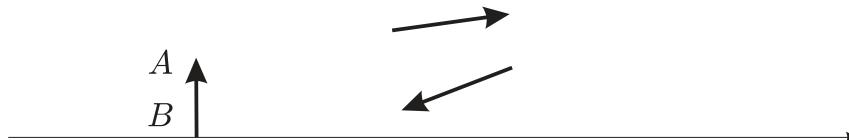
Autor: Koit Timpmann, piirkonnnavoor, 2010, G 3

Kaks ühise optilise peatljega läätse moodustavad seadme, millega saab paralleelist valgusvihust moodustada esialgsest laiema või kitsama paralleelse valgusvihu. Kasutatava seadme esimese läätse optiline tugevus on -20 dpt . Kui kaugele esimesest läätsest tuleks paigutada teine lääts, et laiendada seadmele langev valgusvihk 2,5-kordseks?

Ü172 Nõguspeegel ★★

Autor: EFO žürii, lõppvoor, 2006, G 2

On teada esemelt lähtunud ühe kiire suund enne ja pärast peegeldumist sfääriliselt nõguspeeglilt. Teades eseme AB ja optilise peatljue asukohta, konstrueeri ge eseme kujutis ja tähistage nõguspeegli fookuse asukoht. Ignoreerida sfäärilisi aberratsioone.



Ü173 Plaat ★★

Autor: tundmatu, lahtine, 2007, G 4

Tasaparalleelsel plaadil paksusega $d = 5\text{ cm}$ on alumine pind höbetatud. Valguskiir langeb plaadi ülemisele pinnale nurga $\alpha = 30^\circ$ all, osaliselt peegeldub sellega ning osaliselt murdub plaadi sisse. Seejärel peegeldub murdunud kiir plaadi alumiselt pinnalt ning murdub teist korda, väljudes tagasi õhku. Leidke plaadi materjali murdumistegur n , kui kaugus esimese peegeldunud ja teise murdunud kiire vahel $l = 2,5\text{ cm}$.

Ü174 Valgusvihk ★★

Autor: Mihkel Kree, piirkonnavor, 2005, G 5

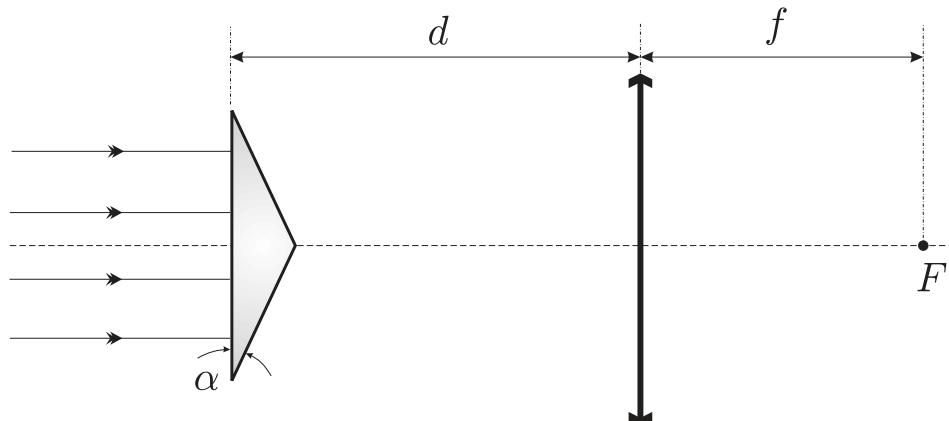
On antud ülesanne muuta kitsas paralleelne valgusvihk võimalikult laiaks paralleelseks valgusvihuks. Kasutada saab vaid kahte läätse etteantud kolmest: kumerlääts (fookuskaugus $f_1 = 20\text{ cm}$), kumerlääts ($f_2 = 40\text{ cm}$) ning nõguslääts ($f_3 = -10\text{ cm}$). Kuidas tuleb toimida ning mitu korda laiemaks valgusvihk sel juhul muutub? Eeldage, et läätsede mõõtmed on oluliselt suuremad valgusvihu laiusest.

Ü175 Biprisma ★★

Autor: Mihkel Kree, piirkonnavor, 2006, G 6

Paralleelne kiirtekimp langeb võrdhaarsele kolmnurksele prismale risti prisma tahuga (vt joonist). Prisma teravnurgad on väikesed, suurusega α . Prisma materjali murdumisnäitaja on n . Prismast kaugusel d paikneb koondav lääts fookuskaugusega f . Läätsse optiline peatelg on paralleelne kiirtekimbu esialgse sihiga ning läbib prisma tipunurka. Missugune pilt tekib läätse fokaaltasandis asuvale ekraanile? Leida pilti iseloomustavad parameetrid. Kuidas sõltub pilt kaugusest d ?

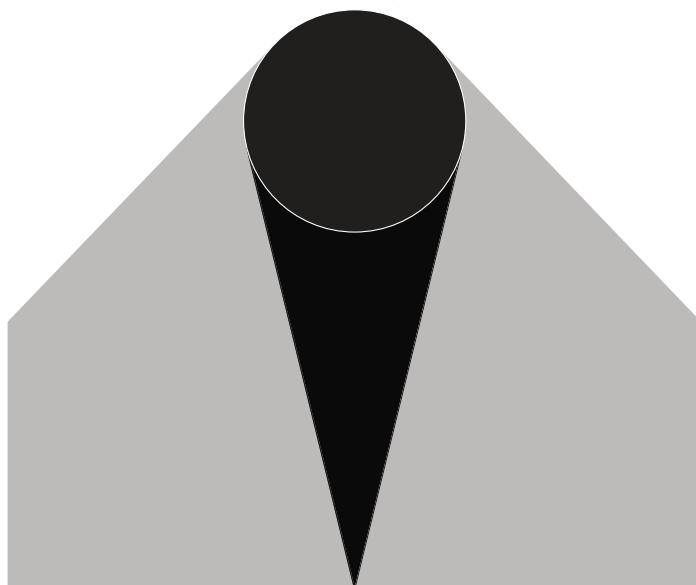
Märkus: väikeste nurkade korral kehtib lähendus $\tan \alpha \approx \sin \alpha \approx \alpha$.



Ü176 Varjud ★★

Autor: Jaak Kikas, piirkonnavor, 2007, G 6

Läbipaistmatut kera valgustab kerakujuline valgusallikas. Joonisele on kantud läbipaistmatu kera poolt tekitatud täis- ja poolvarju koonuste lõiked joonise tasandiga (kera keskpunkt asub samas tasandis). Konstrueerige valgusallika lõige joonise tasandiga. Valgusallika keskpunkt asetseb samuti joonise tasandis.



Ü177 Veealune valgus ★★

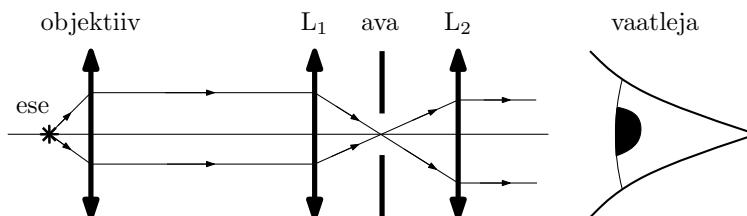
Autor: Jaak Kikas, lõppvoor, 2008, G 5

Kas basseini kohal rippuv punktvalgusallikas, mida vaadeldakse basseini põhjast, on heledam siis, kui bassein on veest tühi, või siis, kui ta on veega täidetud ja kaugus silmast veepinnani võrdub valgusallika kõrgusega veepinna kohal? Mitu korda? Veepinnalt peegeldub tagasi $r = 2\%$ valgust, vee murdumisnäitaja on $n = 1,33$ ja neeldumine vees on tühine. Allika heledus on võrdeline silmaavasse sattuva valguse energiaga, silmaava läbimõõdu loeme samaks kõigis vaatlustingimustes ja väikeseks võrreldes vaatleja sügavusega.

Ü178 Konfokaalne mikroskoop ★★

Autor: Mihkel Rähn, lõppvoor, 2009, G 7

Harilikest mikroskoopidest parema ruumilise lahutuse saamiseks kasutatakse konfokaalseid mikroskoope. Juuresoleval joonisel on kujutatud konfokaalse mikroskoobi põhielemendid: objektiiv, läätsed L_1 ja L_2 ning nende ühisest fokaaltasandis asuv väike ringikujuline ava. Joonisel on samuti esitatud optilisel peateljal asuvast väikesest uuritavast esemest lähtuvate kirte käik. Objektiivi fokaaltasandist kaugemal ja lähemal olevatest objektidest lähtuvad kiired ei läbi enamuses ava, vaid neelduvad ava servadel. Kõrvvalnähtusena vaateväli kitseneb. Kui kaugel optilisest peateljest võib olla objektiivi fokaaltasandis olev ese, et see oleks veel nähtav? Läätsede L_1 , L_2 ja objektiivi fookuskaugused on vastavalt f_1 , f_2 ja f_{obj} , ava läbimõõt d .



Ü179 Klaaskuulike ★★

Autor: Jaan Kalda, lahtine, 2010, G 4

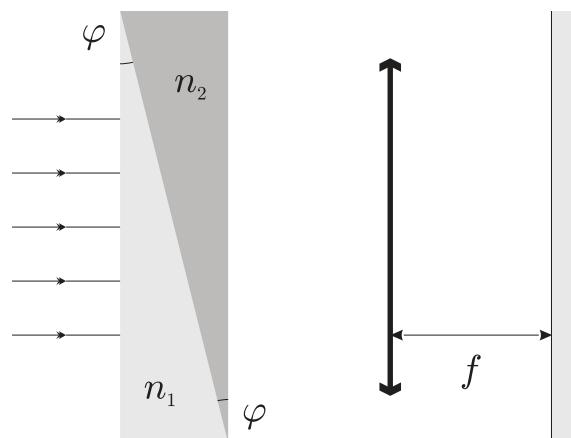
Paljudes helkurmaterjalides kasutatakse valguse tagasisuunamiseks tillukesi klaaskuulikesi, mis kantakse tiheks kihina materjali pinnale. Uurime, milline peaks olema selliste klaaskuulikeste murdumisnäitaja. Teeme järgmised eeldused: (a) klaaskuulile langeb valguskiir nii, et valguskiire ja pinnanormaali vaheline nurk α on väike ($\alpha \ll 1$ rad); (b) valguskiir murdub klaasi pinnal, peegeldub ühekordsest kuuli sisepinnalt ja väljub seejärel kuulist (murdudes teistkordsest kuuli pinnal). Millise murdumisnäitaja n korral suundub selline valguskiir täpselt tagasi? Tehke kiirtekäigu joonis ja põhjendage vastust. Abivalem: väikese α korral radiaanmõõdus $\sin \alpha \approx \alpha$.

Ü180 Kiilud ★★

Autor: tundmatu, lahtine, 2006, G 6

Tasaparalleeline plaat koosneb kahest klaaskiilust väikse nurgaga $\varphi \ll 1$ (vt joonist). Kiilude murdumisnäitajad on n_1 ja n_2 ($n_2 > n_1$). Plaadile risti tema pinnaga langeb paralleelne valgusvihk. Plaadi taga asub koondav lääts fookuskaugusega f . Lääts fokaaltasandis asub ekraan. Joonistage kiirte käik süsteemis. Kui palju nihkub valguslaik ekraanil, kui me eemaldame plaidi?

Vihje: väikeste nurkade puhul kehtib ligikaudne võrdlus $\tan \varphi \approx \sin \varphi \approx \varphi$.

**Ü181 Klaaskuup ★★**

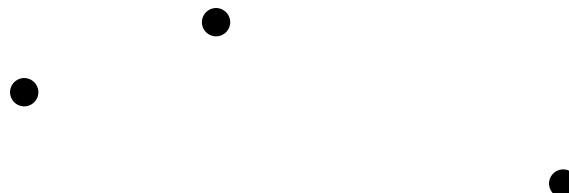
Autor: tundmatu, piirkonnavor, 2009, G 7

Klaaskuubi neli tahku on värvitud mustaks nõnda, et värvimata tahud paiknevad kõrvuti (omavad ühist serva). Missugune peab olema klaasi murdumisnäitaja n , et ka värvimata tahud paistaksid mustadena?

Ü182 Peeglid ★★

Autor: Jaan Kalda, piirkonnavor, 2009, G 8

Kui paigutada kaks tasapeeglit nii, et nende tasapinnad moodustavad nurga $\alpha < 180^\circ$ ning peegeldavad pinnad on vastamisi, siis peeglite vahele paigutatud asjadest võib tekkida mitu kujutist: lisaks peegeldustele veel peegelduse peegeldused jne. Joonisel on kujutatud valgusallika S kaks peegeldust ning üks peegelduse peegeldus ülaltvaates (st peeglite tasapindade lõikejoone sihis). Leida konstruktsiooni abil peeglite ning valgusallika asukohad. Peeglitel on ainult üks peegeldav külg.



Ü183 Kapillaartoru ★★★

Autor: tundmatu, lahtine, 2009, G 8

Klaasist kapillaartoru on sisemise raadiusega r ja välimise raadiusega R . Millist tingimust peavad rahuldama r , R ja klaasi murdumisnäitaja n , et küljelt vaadates paistaks, et kapillaartoru seinapaksus on null?

Ü184 Lääts ★★★★

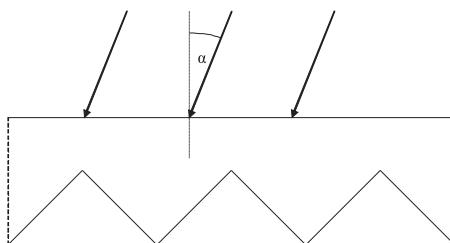
Autor: tundmatu, lahtine, 2007, G 9

Teritamata pliiatsi telg ühtib koondava läätse peateljega. Mitu korda on pliiatsi kujutise pikkus tema enda pikkusest erinev, kui pliiatsi ühe otsa kujutise diameetri ja pliiatsi diameetri suhe on k_1 ning teise otsa jaoks on see suhe k_2 ? Pliiatsi mõlemad otsad asuvad läätsest kaugemal kui on läätse fookuskaugus.

Ü185 Hajuti ★★★★

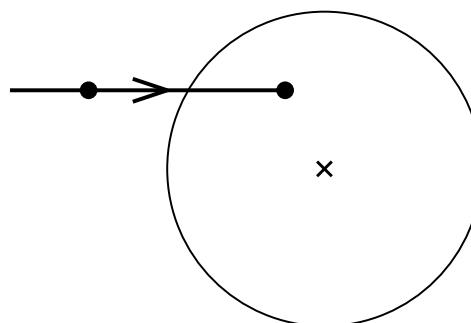
Autor: Andreas Valdmann, piirkonnnavor, 2010, G 8

Mõnedes valgustites kasutatakse valguse hajutamiseks joonisel kujutatud ristlõikega pleksiklaasist plati. Valgus langeb selle siledale poolele ja läbib hajuti vaid juhul, kui langemisnurk on suurem kriitilisest nurgast α_{kr} . Leidke nurga α_{kr} väärustus. Pleksiklaasi murdumisnäitaja $n = 1,5$. Kõik sakilise poole tahud on sileda poole suhtes 45-kraadise nurga all.

**Ü186 Nõguslääts eestvaates ★★★★**

Autor: Siim Ainsaar, piirkonnnavor, 2011, G 10

Joonisel on kujutatud eestvaates nõguslääts, mille optiline peatelg on joonise taandiga risti ja lõikub läätsega punktis O . Antud on ka üks horisontaalne valguskiir ning selle lõikepunktid eesmise fokaaltasandi ning läätsega (vastavalt punktid K ja L). Joonestage antud vaates lisalehel kiire edasine käik ning lõikepunkt tagumise fokaaltasandiga. Põhjendage lahendust.



Ü187 Gravitatsioonilääts ★★★★ Autor: Mihkel Kree, piirkonnnavoor, 2007, G 10

Üldrelatiivsusteooria ennustab, et mustast august möödumisel kaldub valguskiir gravitatsiooni tõttu kõrvale oma esialgsest liikumissuunast nurga $\varphi = 4GM/c^2r$ võrra, kus M on musta augu mass ning r trajektoori lähima punkti kaugus selleni. Oletame, et must auk satub täpselt vaatleja ja tähe vahele nii, et kaugus vaatlejast musta auguni on L_1 ning mustast august täheni L_2 . Missugune on tähe kujutis vaatleja jaoks (põhjendage oma vastust kiirte käigu visandi abil) ning kui suur on kujutise nurkläbimõõt? Kuna vaatlejani jõudvate kiirte jaoks on r palju väiksem tähe kaugusest, võib kasutada väikeste nurkade lähendust $\sin \alpha \approx \tan \alpha \approx \alpha$.

Ü188 Akvaarium ★★★★★

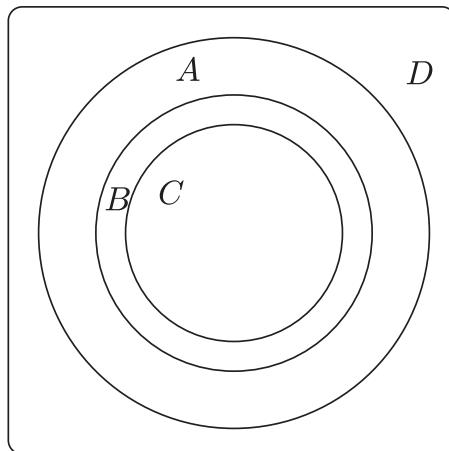
Autor: tundmatu, lahtine, 2005, G 10

Leidke maksimaalne suurendus k , mille tekib sfääriline akvaarium, kui vaadata väljastpoolt selles ujuvat kala. Suurenduse all mõistame siin kala kujutise ja tegeliku kala suuruste suhet. Vee murdumisnäitaja $n = 1,3$. Väikeste nurkade puhul kehtib ligikaudne võrdus $\sin \alpha \approx \alpha$.

Ü189 Kuup ★★★★★

Autor: Jaan Kalda, lõppvoor, 2007, G 8

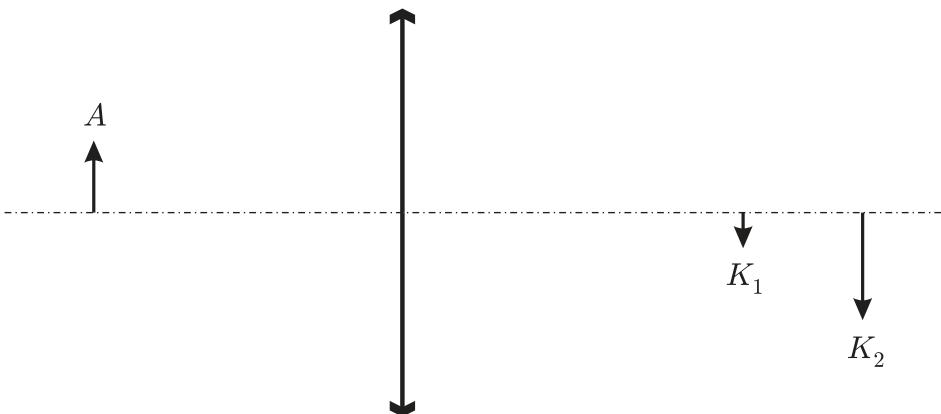
Läbipaistvast klaasist tehtud kuubis on suur kerakujuline õönsus, mis on täidetud sinist värvi gaasiga. Kuup lebab kollaste seittega toas valgel põrandal. Juuresolev kuubi joonis on tehtud kuubi kohalt pildistatud foto põhjal, millelt on eemaldatud kõik värvid ning jäetud alles selgeltnähtavad kontuurid ja erivärviliste piirkondade eraldusjooned (joonte kujud ja mõõtmed on täpselt sellised nagu fotol). Kuubi mõõtmed lugeda hulga väiksemateks põranda mõõtmetest ning kõrgusest, millelt on tehtud joonise aluseks olnud foto. Millistele värvidele vastavad tähed A, B, C, D ? Põhjendage vastust. Leidke klaasi murdumisnäitaja.



Ü190 Nõguspeegel ★★★★

Autor: Mihkel Kree, lõppvoor, 2007, G 9

Optiline süsteem koosneb kumerläätsest ja nõguspeeglist, mille optilised peatuled ühtivad. Kumerpeegli asukohta pole joonisel märgitud. On teada, et objektist A tekib teisele poole läätse kaks kujutist K_1 ja K_2 . Konstrueerige kumerpeegli köveruskeskpunkt O ja kumerpeeglis objektist A tekkinud näiv kujutis A' . Eeldada, et optilises süsteemis on nurgad piisavalt väiksed, et sfäärilisi aberratsioone ei teki.

**Ü191 Kärbes ★★★★**

Autor: Aigar Vaigu, piirkonnavor, 2008, G 10

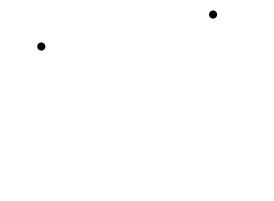
Kärbes on merevaigutükis, mille murdumisnäitaja on $n = 1,6$. Tüki üks pinnaosa on sfääriline köverusraadiusega $r = 3 \text{ mm}$. Kui vaadata kärbse pead läbi selle pinnaosa, siis näib pea asuvat köveruskeskpunkti läbival sirgel $k = 5 \text{ mm}$ sügavusel merevaigus. Kui sügaval on kärbse pea tegelikult?

Märkus: kasutada väikeste nurkade lähendust $\tan \alpha \approx \sin \alpha \approx \alpha$, kus $\alpha \gg 1$ on väike nurk mõõdetuna radiaanides.

Ü192 Punktallikad ★★★★

Autor: Jaan Kalda, lõppvoor, 2010, G 9

Juuresoleval joonisel on neli punkti, millest kaks on valgusallikad ja kaks nende töelised kujutised, mille on tekitanud õhuke lääts. Leidke konstrueerimise teel läätse tasand ja optiline peatulg. Kui võimalusi on rohkem kui üks, siis leidke need kõik.



Ü193 Optiline süsteem ★★★★ Autor: Andreas Valdmann, lõppvoor, 2011, G 8

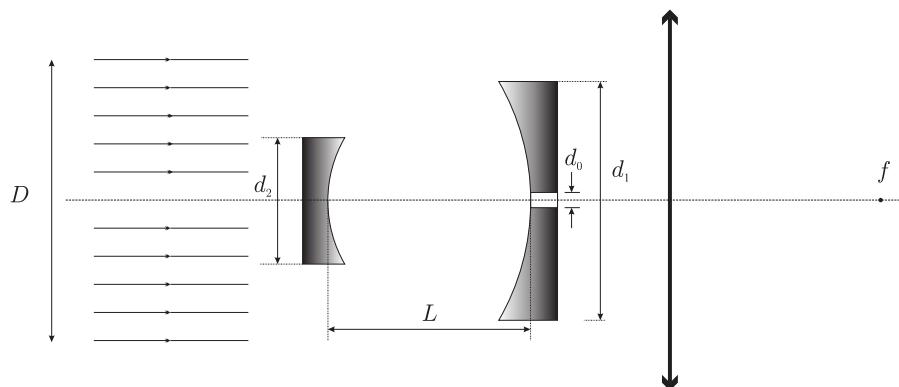
Klaasist murdumisnäitajaga n on valmistatud õhuke kaksikkumer lääts, mille mõlema pinna kõverusraadius on r (läätse paksus $d \gg r$). Lääts üks pind kaetakse peegeldava metallikihiga. Leidke kumerläätsest ja nõguspeeglist tekkinud optilise süsteemi fookuskaugus.

Vihje: fookuskauguse leidmiseks võib vaadelda optilise peatelje lähedasi kiiri, mis levivad selle suhtes väikese nurga all. Sel juhul saab rakendada väikeste nurkade valemit $\sin \alpha \approx \tan \alpha \approx \alpha$, kus α on radiaanides.

Ü194 Sähvatus ★★★★

Autor: Mihkel Kree, lõppvoor, 2006, G 9

Optiline süsteem koosneb kahest nõguspeeglist ja kumerläätsest (vt joonist), mille optilised peateljed ühtivad. Ringikujulise ristlõikega valgusimpulss siseneb süsteemi optilise peatelje sihis ning valgusvihu telg ühtib sellega. Peeglite kõverusraadiused on $R_1 = 8\text{ m}$ ja $R_2 = 4\text{ m}$ ning peeglite vahekaugus $L = 6\text{ m}$. Peeglite läbimõõdud on $d_1 = 160\text{ mm}$ ja $d_2 = 96\text{ mm}$. Kiire läbimõõt on $D = 192\text{ mm}$. Lääts läbimõõt on suurem valgusvihu omast. Suurema peegli keskel on ava läbimõõduga $d_0 = 1\text{ mm}$. Joonistage valguse intensiivsuse ajaline kulg kumerläätse fookuses f . Feldage, et süsteemi saabuva impulsi kestvus $\tau \ll L/c$. Valguse kiirus $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$.



Varia

Ü195 Tunnel ★

Autor: Jaan Kalda, lahtine, 2008, G 3

Rong, mis sõidab kiirusega $v = 50 \text{ km/h}$, sisenes hästi pikka tunnelisse. Nii rongi kui tunneli ristlõiget lugeda ruuduks küljepikkusega vastavalt $a = 4 \text{ m}$ ja $b = 6 \text{ m}$. Hinnake, milline on tuule kiirus rongi aknast mõõdetuna.

Ü196 Kuu ★★

Autor: Urmo Visk, lõppvoor, 2006, G 5

Peegeldusteguriks nimetatakse pinnalt peegeldunud ja pinnale langenud valgusvõimsuste suhet. Säriaeg on ajavahemik, mille vältel langeb fotoaparaadis objektiivi läbinud valgus filmilindile. Päikeselisel sügispäeval on mingi objekti pildistamisel optimaalne säriaeg $t_1 = 1/8000 \text{ s}$. Sama objekti pildistamisel öösel, kui paistab täiskuu, on optimaalne säriaeg $t_2 = 160 \text{ s}$. Mõlema pildi tegemisel on erinev vaid säriaeg. Hinnake Kuu pinna keskmist peegeldustegurit. Kuu kaugus Maast $R = 384\,000 \text{ km}$ ja Kuu raadius $r = 1740 \text{ km}$. Kvaliteetse pildi saamiseks peab filmile langev valgusenergia päeval ja öösel olema sama väärtsusega ehk fotografeerimisel võib valgustatuse ja optimaalse säriaaja lugeda pöördvõrdeliseks.

Ü197 Maja ★★★

Autor: Jaan Kalda, lõppvoor, 2008, G 4

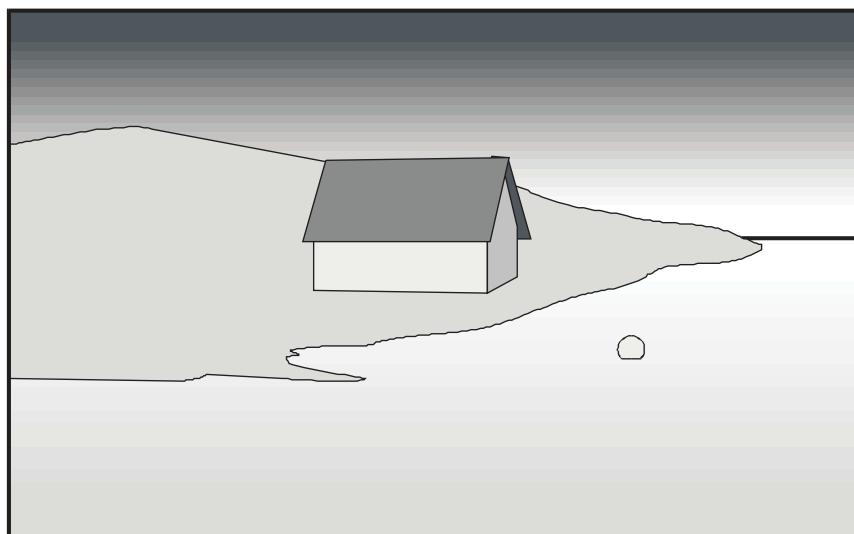
Fotol kujutatud maja alumise korruse kõrgus (mõõdetuna esimese korruse akna alumisest servast teise korruse akna alumise servani) on 3 meetrit. Kui kõrgel veepinnast on maja (täpsemalt, tema vundamendi ülemine serv)?



Ü198 Maja ★★★

Autor: Jaan Kalda, lahtine, 2008, G 9

Juuresolev joonis on tehtud foto põhjal. Pildistamise hetkel asus fotoaparaat 2 m kõrgusele veepinnast. Kasutades antud joonist ja joonlauda määraseke nii täpselt kui võimalik vees ujuva poi läbimõõt!



Laineoptika

Ü199 Kile ★★★★

Autor: Jaan Kalda, lahtine, 2008, G 8

Selleks et vähendada peegeldusi optilistelt klaasidelt, kaetakse nende pinnad õhukese läbipaistva kilega. Leida, millise paksusega peaks olema selline kile, kui klaasi murdumisnäitaja on $n_0 = 1,5$ ja kile oma $n_1 = 1,3$. Eeldada, et kile on optimeeritud risti langeva rohelise valguse jaoks lainepeikkusega $\lambda = 530 \text{ nm}$.

Ü200 Kunstinäitus ★★★★★

Autor: Jaan Kalda, lõppvoor, 2009, G 10

Kunstinäituse saal kujutab endast valgete seintega suurt tuba, mida valgustatakse monokromaatilise rohelise valgusega (lainepeikkus $\lambda = 550 \text{ nm}$). Sellel toal on siledast klaasist põrand; klaasi alumine pind on värvitud mustaks, ülemine pind on aga kaetud õhukese läbipaistva värvitu kilega. Keset tuba seisev näituseküllastaja näeb enda ümber põrandal heledaid ja tumedaid ringikujulisi vööte, kusjuures ta ise asub nende ringide keskpunktis — sõltumata sellest, kus kohas ta parajasti seisab. Näituseküllastaja uurib asja lähemalt: kükitab ja vaatab kaugemale, seejärel püüab vaadata otse alla. Maksimaalselt õnnestub tal loendada $N = 20$ heledat vööti. Kui paks on klaasi kattev kile? Klaasi murdumisnäitaja $n_0 = 1,6$, seda katva kile oma $n_1 = 1,4$.

Vihjed

- V1** Kangi kriitilise nurga korral kehtib varda jaoks jõumomentide tasakaal.
- V2** Kehtib Newtoni II seadus ning jõumomentide tasakaal (näiteks ühe toru ots-punkti suhtes).
- V3** Tooreaktsiooni kääride telje sihiline komponent peab olema tasakaalustatud hõõrdejõu poolt.
- V4** Kuuli hoiab augus või „lükkab“ august välja üks ja sama jõud — kuulile mõjuv raskusjõud, mis on suunatud vertikaalselt alla. Kuul on augus, kui raskusjõu vektor läbib augu põhja, ja kukub, kui see väljub sellest.
- V5** Libisemise piiril tasakaalustab lund katuselt alla lükkavat raskusjõudu hõõrdejõud, kusjuures hõõrdejõud mõjub vaid lume kuivale osale.
- V6** Koheldes hõõrdejõudu tundmatuna, võime kasti jaoks kirja panna Newtoni II seaduse nii x - kui ka y -telje jaoks. Hõõrdejõu maksimaalne väärthus on $F_\mu = N\mu$, kus N on tooreaktsioon.
- V7** Liivahunniku maksimaalse kõrguse saavutamiseks peavad pindmised liivakihid olema libisemise äärel. Seega tasub vaadelda jõudude tasakaalu pindmiste liivaterade jaoks.
- V8** Kriitilise hõõrdeteguri väärtsuse korral kehtib jõumomentide tasakaal tuulepoolsete rataste telje suhtes.
- V9** Kuna nöör on venimatu, on mõlemad hammasrattad paigal ja seega tasakaalus. Kehtib nii jõudude kui ka jõumomentide tasakaal. Antud juhul on kõige mugavam vaadelda jõumomentide tasakaalu hammasrataste keskpunktide suhtes.
- V10** Kuulile mõjub raskusjõud, niidi pinge, tooreaktsioon ning hõõrdejõud kuuli ja kasti vahel. Süsteemi lahendamise standardmeetod on rakendada Newtoni II seadust nii x - kui ka y -telje jaoks ning jõumomentide tasakaalu tingimust. Elu teeb lihtsamaks tähelepanek, et hõõrdejõu ja tooreaktsiooni võib kombineerida üheks jõuks, mille nurk kasti vertikaali suhtes on kuni $\arctan \mu$, ning seejärel täheldada, et tasakaalu korral peavad kuulile mõjuvad kolm jõudu lõikuma ühes punktis.
- V11** Prussi asend on stabiilne, kui väikse kõrvalekalde korral muutub prussi potentsiaalne energia suuremaks. Teisisõnu peab massikese kõrgemale tõusma.

V12 Ülesande lahendamiseks tuleb küsida: (a) kas antud jõust piisab üle serva kantimiseks; (b) ega klots seejuures libisema ei hakka? Mõlema küsimuse analüüsimeks on mugav rakendada jõumomentide tasakaalu. Lisaks on kasulik teada, et hõõrdejõu ja tooreaktsiooni resultantjõu maksimaalne nurk vertikaali suhtes on $\arctan \mu$.

V13 Et kuuli C kiirusvektor on risti sirgega AC , siis hetkeline pöörlemiskese asub sellel sirgel. Seega, kui kuul A hakkab libisema, siis on selle kiirusvektor samuti (ning järelikult ka hõõrdejõu vektor) risti sirgega AC . Piirjuhtumil, kui kuulide masside suhe on selline, et kuul A hakkab vaevu liikuma, on hetkeline pöörlemiskese väga lähedal punktile A .

V14 Kehtib nii jõudude kui ka jõumomentide tasakaal. Ülesandes on kolm huviväärselt punkti: rõnga keskpunkt, massikese ning völli ja rõnga puutepunkt.

V15 Pulgale mõjuvad neli erinevat jõudu: silindri ja pulga vaheline tooreaktsioon, raskusjõud, maa ja pulga vaheline tooreaktsioon ning hõõrdejõud. Pulga asend on stabiilne, kui jõudude ja jõumomentide tasakaalu tingimustest avaldatav hõõrdejõud ei ületa maksimaalset seisuhõõrdejõudu ning kui varda alaots ei töuse õhku. Mõlemat tingimust väljendavad erinevad võrratused, mis peavad saamaegselt kehtima.

V16 Konnale mõjub kolm jõudu: raskusjõud, rõhumisjõu ja hõõrdejõu resultant ning iminapa tekitatud tõmbejõud. Rõhumisjõu ja hõõrdejõu resultandi nurk pinnanormaali suhtes on kriitilisel juhul $\arctan \mu$. Tasakaalu korral peavad antud jõud üksteist tasakaalustama, ehk moodustuma kolmnurga.

V17 Tasakaalu korral peab iga toru jaoks kehtima jõudude ning jõumomentide tasakaal. Alumiste torude jaoks on jõumomentide tasakaalu kõige mugavam voodella maapinna puutepunkti suhtes, sest sellisel juhul on maapinna hõõrdejõu panus 0. Lisaks paneme tähele, et kahe alumise silindri vahel rõhumisjõudu ei ole, sest see kaob niipea, kui alumised silindrid natukenevi üksteisest eemalduvad.

V18 a) Jõu määramiseks on vajalik leida, kui palju muutub tungraua kõrgus ühe vända täispõördega. Selle jaoks võib rakendada Pythagorase teoreemi tungraua pikkuse jaoks ja seda diferentseerida.

b) Selleks, et tunraud oleks ilma väntamiseta hõõrdejõu tõttu tasakaalus, peab hõõrdejõud täpselt kompenseerima eelnevatas alamülesandes leitud väntamiseks kuluva jõu.

V19 Tasakaalu korral peab kehtima jõumomentide tasakaal. Kuna kehadest sõsteemile mõjuvad kolm jõudu, peavad jõudude pikendused lõikuma samas punktis, sest vastasel juhul saaksime valida kahe jõu pikenduse lõikepunktist ning selle punkti suhtes mõjuks kolmanda punkti poolt nullist erinev jõumoment. Lisaks paneme tähele, et kehadel A ja B mõjuvad sama absoluutväärtusega jõud (mõlemad on libisemise äärel) ning nende suunad on teada.

V20 Ratta liikumist on mugavam vaadelda autodega seotud süsteemis.

V21 Autode hulga pidevuse tõttu on lõigul C teatud punkti ajaühikus läbivate autode arv võrdne lõikude A ja B vastavate arvude summaga.

V22 Lihtsam on leida, kui palju aega kulus autol esimese 4/5 läbimiseks ning seejärel võtta t ja leitud aja vahe.

V23 Ratturite sõiduaeg on leitav asjaolust, et esimene ja teine rattur läbisid sama pika vahemaa.

V24 Möödasõitu käigus avaldub sõiduauto läbitud vahemaa ühtlase kiirenduse valemiga $x = vt + \frac{at^2}{2}$.

V25 Kuna rongid kiirenevad konstantse kiirendusega, saame avaldada läbitud vahemaa liikumisvõrrandist $s(t) = vt + \frac{1}{2}at^2$. Lisaks peab mõlema rongi kokku-põrkeni läbitavate vahemaade summa olema $s = 2750$ m.

V26 Löppsageduse avaldamiseks esialgse sageduse kaudu võib Doppleri seadust kaks korda järvast kasutada.

V27 Ülesannet on mugavam vaadelda emma-kumma autoga seotud taustsüsteemis.

V28 Graafikult on näha, et ainult kahel mõõdetud ajahetkel oli sportlase kiirus keskmisest madalama väärtsusega. See tähendab, et peatus mahtus täielikult antud kahe perioodi sisse.

V29 Laine levik toimub geomeetrilise optika seadustele kohaselt. Kehtib $\sin \alpha_1 / \sin \alpha_2 = v_1/v_2$, kus v_i ja α_i on vastavalt keskkonna $i \in \{1, 2\}$ laine leviku kiirus ja lange-misnurk eralduspinna normaal suhtes.

V30 Ülesande geomeetria ning lõöklaine koonuse nurga kaudu on võimalik avaldada lennuki koordinaadid stopperi kävitamise ja peatamise hetkedel. Leitud nihke kaudu on lennukiirust lihtsasti leitav.

V31 Antud ülesandes on kolm tundmatut: pilu laius, katiku kiirus ja piisa kujutise kiirus sensori tasandis. Lisaks kirjeldati kahte olukorda, mis seovad antud tundmatuid. Selgub, et nendest piisab, et määräata kolmandas olukorras triibu pikkust.

V32 Liikudes B suunas on laeva kiirus $v_0 + v(t)$ ning liikudes A suunas on kiirus $-v_0 + v(t)$. Võimalik on näidata, et kahe punkti vahelise sõiduaja minimeerimiseks peavad voolukiirused alguses ja lõpus olema võrdsed. Vastasel juhul saaks valida veel väiksema sõiduajaga plaani nihutades stardiaega emmas-kummas suunas.

V33 Ülesannet on mugavam vaadelda õhu tastsüsteemis, sest siis on helilainefrondid kiirusega c kasvava raadiusega ja paigaloleva keskmega poolsfäärid. Helivõimsus jaotub ühtlaselt üle terve frondipinna, seega on tajutav võimsus pöördvördeline frondi pindalaga ehk frondi raadiuse ruuduga.

V34 Olukorda on mugavam vaadelda veega seotud tastsüsteemis, sest siis liiguvad lained paadi trajektoori suhtes sümmeetriselt (lainefrondid on paadi varasematest asukohtadest eemalduvad ringid).

V35 Pildistamise hetkel pöörleb kogu ratas ümber hetkelise pöörlemistelje, mis läbib ratta ja maa puutepunkti. See tähendab, et ratta iga osake liigub mööda ringjoone kaart, mille keskpunktiks on ratta ja maa puutepunkt.

V36 **a)** Vastavalt sellele, kas labad liiguvalt salvestatavatele pikslite veergudele vastu või eemale, on labade kujutiste tihedus vastavalt suurem või väiksem.

b) Vaadeldes pildil ühte vertikaalset pikslite veergu ei ole moonutusi näha. Seega tasub uurida, kui palju labasid erinevatel pikslite veergudel näha on.

c) Teades labade arvu on võimalik vaadelda täpselt, kui palju üks laba salvestamise käigus liigub.

V37 Maksimaalse viivituse korral on palli kiirus vaevu kivi omast suurem. Selles on võimalik veenduda liikudes vabalt langevasse tastsüsteemi. Seal liiguvad vabalt langevad kehad konstantse kiirusega ning selleks, et pall ja kivi kokku pörkaksid, peaks nende suhteline kiirus olema negatiivne.

V38 Kuna pallid on samasuguse massiga ja tegu on elastse kokkupõrkega, vahtavad pallid oma kiirusvektorid. Seega võime sama hästi öelda, et pallid lähevad üksteisest vabalt läbi.

V39 Langemise aeg on avaldatav valemi $s = \frac{at^2}{2}$ kaudu.

V40 Kukkumise käigus kiirenevad mõlemad kuulid sama kiirusega. Seega on nende suhteline kiirus muutumatu.

V41 a) Energia jäÄvuse seaduse kohaselt kulub purustuse tekitamiseks esialgse ja pÄrastise kineetiliste energiate vahе.

b) Taustsüsteemide vahetamine lihtsustab olukorda oluliselt.

V42 MÄe tippu jõudmiseks peab esialgne kineetiline energia olema suurem kui hõördejöu ja raskusjöu ületamiseks vajalik töö.

V43 Üles visatud keha vertikaalne koordinaat avaldub vastavalt liikumisvõrrandile kui $h = v_0t - \frac{gt^2}{2}$. Kuna tegu on ruutvõrrandiga, leidub fikseeritud h jaoks kaks ajahetke, mil keha sellel kõrgusel on.

V44 Tegu on suhteliselt sirgjoonelise ballistiklike probleemiga. Mootorratturi kiirus peab olema selline, et mootorratturi paraboolne trajektoor läbiks kraavi vastasnurka.

V45 Kehtib energia jäÄvuse seadus. Koguenergiate vahе alg- ja lõppseisu vahel kulus hõördejöu ületamiseks vajalikuks tööks mõlemal mäenõlval.

V46 Massikeskme kuligliikumise energia muundub maksimaalsele kõrgusele jõudes täielikult potentsiaalseks energiaks.

V47 Palli koguenergia vastab geomeetrilisele jadale, sest iga jäÄgmise põrke energia on eelnevast k korda väiksem. Saame sarnase jada, kui avaldame kahe järjestikuse põrke vahelise aja summaarse energiakaudu.

V48 Vedrumehhanismi vallandumisel muutub osa vedrudesse salvestatud potentsiaalsest energiast kineetiliseks energiaks — seega kineetilise energia jäÄvus ei kehti. See-eest kehtib impulsi jäÄvuse seadus, sest lagunemise käigus ei mõju mürsule väliseid jõude (eeldusel, et mürsk laguneb hetkeliselt).

V49 Õõnes ja homogeenne kera erinevad nende intertsimomentide poolest. Vedelikku sisaldaval keral toimub sees paramatult hõordumine ning seega energiakaudu vedeliku erinevate kihtide vahel.

V50 Silla kõverusraadius on leitav Pythagorase teoreemist. Autole mõjub silla peal kaks jõudu: raskusjöud ja röhumijsjöud. Antud jõudude resultant annab kesktõmbekiirenduse.

V51 Ülesanne näeb keerulisem välja, kui see tegelikult on. Olukorda lihtsustab oluliselt asjaolu, et varras on tühiselt kerge ja libisemised hõördevabad.

V52 Löögi hetkel kehtib impulsi jäÄvus, aga energia ei säili. See-eest säilib mehaaniline energia pÄrast põrget toimuval liikumisel.

V53 **a)** Maksimaalse eemaldumise korral moodustub Maast, Veenusest ja Päikest täisnurkne kolmnurk, mille täisnurga tipp on Veenus.

b) Maa ja Veenuse suhtelise nurga (Päikeselt vaadatuna) muutus on avaldatav planeetide nurkkiiruste vahel kaudu.

V54 Nii auto liikumisse kui ka mootori tööse minevad võimsused on avaldatavad rataste ja maa vahelise hõõrdejõu kaudu.

V55 Tellise eemaldumise hetkel on vedru alumine ots paigal, aga ülemine ots liigub tellisega sama kiirusega üles.

V56 Pendli perioodi leidmiseks on võimalik teha esialgne hinnang, mis põhineb järjestikustel mõõtmistel. Täpsema hinnangu jaoks võib kasutada esialgset hinnangut ja pikemat ajavahemikku, et määrata täpselt mitu võnget antud ajavahemiku sisse mahub.

V57 Aerulabadele mõjuv keskmine jõud on leitav jõumomentide tasakaalust tullide suhtes. Keskmise kiirusega liikuva paadi puhul kehtib jõudude tasakaal aerulabadele mõjuva jõu ja takistusjõu vahel.

V58 Kivile mõjuva paela tömbepinge T ja raskusjõu mg resultant on kesktõmbejõuks, mis on suunatud horisontaaltasapinnas sissepooke.

V59 Ülesannet on mugavam vaadelda x - y teljestikus, mis kulgeb vastavalt piki ja risti kaldpinda. Sellisel juhul muutub peale igat põrget kiiruse y -komponent vastupidiseks.

V60 Kuulikese kiirus on leitav energia jäÄvuse seadusest. Edasi taandub ülesanne ekstreempunkteli leidmisele.

V61 Eraldumiskõrgust on kõige mugavam leida jõudude tasakaalust silindri keskpunkti radiaalsihis. Lisaks kehtib energia jäÄvuse seadus.

V62 Kriitilise kiiruse korral on palli trajektoori kõverusraadius sfääri tipp-punktis võrdne sfääri raadiusega. See tähendab, et pallile mõjuva raskuskiirenduse tasakaalustab kesktõmbe kiirendus v^2/R .

V63 Kui põrnikas (massiga ρV) roomab mööda anuma põhja, siis selle peale liigub ka põrnikat ümbritsev vedelik. Põrnika liikumist võib mugavuse mõttes ette kujutada virtuaalse põrnika liikumisega, mille tihedus on $\rho - \rho_0$. Sellisel juhul liigub virtuaalne põrnikas vedelikku törjumata ning ülesanne taandub mugavamale dünaamika ülesandele.

V64 Arvestades mullide arvu jäävust on ruumiline vahemaa nende vahel võrdeline mullikeste kiirusega. Viimane on leitav võrdsustades takistus- ja üleslükkejõu ning arvestades mullikese ruumala muutust röhu tõttu.

V65 Ülesandes ei ole niidi pingे T teada, aga see on leitav pannes plokkide jaoks kirja Newtoni teise seaduse ning niidi venimatuse tingimuse. Massikeskme kiirenduse avaldamine plokkide kiirenduste kaudu on analoogne massikeskme koordinaadi avaldamisega plokkide koordinaatide kaudu.

V66 Ragulkas salvestunud potentsiaalne energia muundub täielikult kivi kineetiliseks energiaks. Kummipaelale rakendatav jõud on leitav kummipaela pinge projektsionist kivi lennu sihilisele teljele.

V67 Mehaaniline pingे röngas on määratud tsentrifugaaljõu poolt, millega röngast radiaalselt väljapoole tiritakse. Pingे täpseks määramiseks on mugav vaadelda väikest rönga juppi ning sellele mõjuvate jõudude tasakaalu.

V68 Maalri asendi ohtlikkust võib hinnata tema kiirusega vahetult enne maapinnaga kokkupuutumist. Vastavad kiirused on leitavad energia jäävuse seadustest.

V69 Hüppe käigus säilib energia ehk hüppaja kineetilise energia ning hüppaja ja köie potentsiaalsete energiate summa on konstantne. Hüppaja kiirus on maksimaalne, kui talle mõjuv summaarne jõud on null, sest see vastab kiirenemise ja pidurdamise ülemineku punktile.

V70 Ühe pörke käigus kehtib impulsi jäävus, aga mitte energia jäävus. Selle põhjal on võimalik määrata hõõrdejõu ületamiseks kulunud töö ühe pörke jooksul ning saadud avaldis summeerida kogu vaia ulatuses.

V71 Tükikeste trajektooride järgi saab võrrelda kiiruste suundi ja suuruseid, sest $s = vt_s$, kus t_s on säriaeg. Lisaks kehtib impulsi jäävus. Kuna klaaskuul kukkus otse alla, peab summaarne põrandaga paralleelne impuls olema 0.

V72 Ülesandes on kolm tundmatut: keskmiste plokkide kiirendused, äärmiste plokkide kiirendused ning niidi pinge. Vastavate tundmatute leidmiseks on vaja kolme võrrandit: kaks tulenevad Newtoni II seadusest ning üks tuleb niidi venimatuse tingimusest.

V73 Otsitavate suuruste jaoks on kasulik vaadelda lühikest ajavahemikku Δt , mille jooksul on rongi kiirus, ja seega hõõrdetegur, ligikaudu konstantsed. Seejärel saab saadud ajavahemikke summeerida terve graafiku ulatuses. Selle jaoks peab vajadusel konstrueerima uued graafikud teistsuguste telgedega.

V74 Väikse keha hetkelise liikumise käigus püsib mobiil+keha massikese paigal. Seega liigub mobiil iga τ tagant sarnaselt kehaga hetkeliselt üles või alla. Iga kord kui mobiil üles liigub, nihkub ta gravitatsiooni tõttu ka veidike laua sihis edasi.

V75 Teisest ja kolmandast kuulist koosnevale süsteemile mõjus esimese kuuli lükkamise ajal esimese varda sihiline jöud, sest teatavasti mõjuvad kergetele varrastele vaid varda sihilised pinged. Lisaks peab esimese kuuli lükkamise ajal kehtima varraste venimatuse tingimus.

Kiirenduse leidmiseks on süsteemi mugav vaadelda šarniirse ühenduspunktiga kaasa liikuvas ja kirenevas taustsüsteemis ning seejärel rakendada Newtoni II seadust.

V76 Ringikujulisel orbiidil on satelliidi kiirus kogu orbitaalperioodi jooksul konsantne ja seetõttu on varjus veedetud osa ajast võrdne orbiidi varjus oleva osa pikkuse ja kogu orbiidi pikkuse suhtega.

V77 Kui väike prints könnib piki asteroidi ekvaatorit, mõjub talle gravitatsioonijöud, normaaljöud ning ringjoonelisest trajektoorist tingitud kesktõmbekiirendus. Hõljuma hakates normaaljöudu ei mõju ning kehtib jõudude tasakaal.

V78 Sidesatelliidil kõrgus on leitav ringorbiidil mõjuva gravitatsionijõu ja tsentrifugaaljõu tasakaalust.

V79 Kosmosejaama trajektoori nihked on põhjustatud maa pöörlemisest ümber oma telje, kusjuures ühele ööpäevale vastava kosmosejaama nihke ja Maa ekvaatori pikkuse suhe on otseses sõltuvuses kosmosejaama ja maa pöörlemise nurkkiiruste suhtega.

V80 **a)** Kuu ja Maa poolt avaldatavad jõud on otseselt leitavad abivalemi kaudu. **b)** Kaabli katkemispunktis on pingi maksimaalne. Pinge on leitav jõudude tasakaalust.

V81 Satelliidi tüüpiline kiirus on võrreldav esimese paokiirusega, sest satelliiti-de orbitaalaadiused ei erine üksteisest märkimisväärtselt. Ülesande eelduste kohaselt liiguvalt satelliidid sarnaselt molekulidega gaasis. Gaasis molekuli vaba tee hindamisel arvestatakse, et molekul liigub ilma põrgeteta ligikaudu aja jooksul, mil tema kokkupõrke ristlõige on katnud ruumala, milles asub tüüpiliselt üks osake.

V82 Pumpamise käigus kehtib ideealse gaasi olekuvõrrand.

V83 Ideaalse gaasi olekuvõrrandist on võimalik leida seos esialgse ja pärastise õhu ruumala vahel.

V84 Kõrgusega h veesamba lisarõhk on ρgh . Sukeldumise käigus kehtib ideaalse gaasi olekuvõrrand.

V85 Ühe molekuli keskmine kineetiline energia temperatuuril T avaldub kui $\langle E_m \rangle = \frac{3}{2}kT$.

V86 Kuna manomeeter ja mõõteampull on kapillaari kaudu ühenduses, siis nende gaasirõhud on isegi temperatuuride erinedes ühesugused.

V87 Kui ajavahemiku Δt jooksul kandub tiivikust läbi õhumass kineetilise energiaga ΔE , siis sellele vastav võimsus on $P = \frac{\Delta E}{\Delta t}$.

V88 Ülesannet on mugav lahendada uurides ajavahemikku Δt ning vaadeldes, kuidas rongist eraldunud võimsus soojendab rongist möödunud õhu molekule.

V89 Paisumisel gaasi poolt tehtud tööd on kõige lihtsam leida $p - V$ graafikult protsessi aluse alla pindalana. Lisaks tuleb kasuks termodünaamika I seadus.

V90 Temperatuuri kasvades hakkab esimese anuma rõhk p_1 suurenema ning mingil hetkel ületab see ventili kriitilise rõhu Δp . Sellest hetkest alates hakkab ventiil õhku läbi laskma nõnda, et edaspidi anumate rõhud p_1 ja p_2 rahuldavad tingimust $p_1 - p_2 = \Delta p$.

V91 Seibi alumise külje läheduses surub süsihaptegaas teatud rõhuga seibi üles. Vastav joud on ülemiselt küljelt tasakaalustatud nii õhurõhu, kui ka surumisjõu poolt.

V92 Niiske õhu puhul on veeauru ja normaalse õhu rõhkude summa võrdne atmosfäärirõhuga, kusjuures veeauru rõhk on leitav küllastunud veeauru tihedustest.

V93 Esialgu on vesinik teatud temperatuurivahe võrra soojem kui heelium, kuid pikaaaja möödudes on mölemad soojuslikus tasakaalus. Koormise nihe ongi põhjustatud gaaside soojenemisest tulenevast paisumisest.

V94 Korstna sees voolav õhk tekitab alarõhu, mis on avaldatav Bernoulli võrrandist. Rõhu langud korstna sees ja väljas peavad olema võrdsed.

V95 Adiabaatilisel paisumisel muutub gaasi siseenergia $c_V T_0$ osaliselt joa kineetiliseks energiaks $\mu v^2/2$. Düüs is peab kehtima energia jäävus. Seega, ajaühikus siseneval gaashulgjal on sama energia kui ajaühikus väljuval gaasil.

V96 Kuna anumad on ühendatud, on rõhud mölemas anumas samal kõrgusel samad ja anumate vedelikutasemed võrdsed.

V97 Torudes oleva vee rõhk on avaldatav vedelikusammaste kõrguste kaudu. Lisaks kehtib mõlemas torus Bernoulli seadus ning vee pidevustingimus, st sama aja jooksul läbib mõlemat toru sama kogus vett.

V98 Õhutakistuse puudumisel jõuab veejuga märgini sama kiirusega nagu väljudes (energia jäävusest tulenevalt). Jõu leidmiseks võib vaadelda ajavahemikku Δt ning selle jooksul üle antavat vee impulsit.

V99 Veejoa väljumise kiirus on leitav energia jäävuse seadusest või alternatiivselt impulsi jäävusest. Mõlemad lähenemised on korrektsed, aga annavad numbrilise konstanti võrra erineva vastuse, mis on tingitud jäävusseaduste kehtivuse eelduste erinevusest. Tünni ja aluse kõrgused on leitavad valides graafikult kaks (või vajadusel rohkem) punkti ja lahendades tekkinud võrrandisüsteemi.

V100 Kuna veejuga kiireneb ühtlaselt, kehtib energia jäävuse seadus. Lisaks kehtib vee massi jäävus ristlõigete ulatuses.

V101 Kolbile mõjuv jõud tekitab kolvi sees lisarõhu F/S . Kuna tegu on lamineerisse vooga, kehtib Bernoulli seadus. Alternatiivselt võib rakendada energia jäävust kolvi ees ja suudme juures.

V102 Sirges torus voolav vesi piki-sihilisi deformatsioone ei tekitata. Kaarekuju-lise osa juures aga survestab vesi väliskülge rohkem kui sisekülge ning tekitab piki-sihilisi pingeid. Pinge täpsuse suuruse määramiseks on mugav vaadelda kaarekujulist osa tervikuna ning uurida, kuidas vee impuls muutub kaarekujulisesse osa sisenedes ja väljudes.

V103 **a)** Juhul kui ookeani keskmise tiheduse ning lisarõhk on vastavalt ρ ja p , kehtib ülesandes mainitud kokkusurutavuse seos $\rho \approx \rho_0(1 + \beta p)$. Lisaks on vee rõhud ookeani põhjas kokkusurumatud ja kokkusurutud juhtudel võrdsed.

b) Tasub vaadelda väikest vee kogust massiga m ning selle ruumala muute sügavusest H võrreldes pinnaapealse olukorraga.

V104 Omavõnkesageduse leidmiseks on harilikult kõige mugavam vaadelda väikest hälvet tasakaaluasendist ning uurida, kuidas süsteem edasi käitub. Ülesande kontekstis võib oletada, et õhuke veekiht ühes toru harus kandub teisele toru poolole. See põhjustab lisarõhu toru teises pooles, mis üritab süsteemi tasakaaluasendisse tagasi viia.

V105 Termodünaamika I seaduse kohaselt $\Delta U = Q - A$, kus Q on süsteemi antud soojushulk ning A on välisjõudude vastu tehtud töö. Antud üesande kontekstis on Q negatiivne ja A positiivne.

V106 Kahe vastasserva vaheline takistus on $R = \frac{\rho L}{S}$, kus L on servade vaheline kaugus ja S ristlõikepindala.

V107 Jääkera sees tekib ülerõhk, sest õhu soojenedes rõhk tõuseb. Seega on kõige kriitilisem moment vee sulamise temperatuuril.

V108 Küttesüsteemis oleva vee ruumala esialgses olukorras ja töörežiimis on avaldatavad ülesandes antud valemiga.

V109 P - V teljestikus avaldub gaasi tehtud töö tsükli aluse pindalana. Alternatiivselt võib iga tsükli etapil tehtud töö leidmiseks rakendada termodünaamika esimest seadust.

V110 Mõlema olukorra jaoks kehtib energia jäävuse seadus, kusjuures vedelike tihedused ning erisoojused on tundmatud.

V111 Varda pöörlemise käigus muutub hõõrdejõu F_h ületamiseks kulutatud töö soojuseks. Töö on leitav hõõrdejõu ja läbitud tee pikkuse korrustisena.

V112 Ülesandes on kaks tundmatut: vee lõpptemperatuur ja termose erisoojus. Need on leitavad, kui panna süsteemi jaoks kirja soojusliku tasakaalu võrrandid.

V113 Energia jäävuse seaduse kohaselt peab rauatükist eraldunud soojusenergia minema vee soojendamiseks ja aurustumiseks.

V114 Energia jäävuse seaduse kohaselt peab jõhvikate soojendamiseks kuluv soojushulk tulema vee jahtumise arvelt.

V115 Vee aurustumise käigus kehtib energia jäävuse seadus. Seega tuleb väikese veekoguse aurustumiseks vajalik soojushulk järeljäänud vee temperatuuri langemise arvelt.

V116 Kastmisvee anuma taha tekib kiirtega ristuvale tasandile ringikujuline vari. Samasugune vari tekiks ka ringist, mis paikneb risti päikesekiirtega. Seega neelavad võrdse raadiusega kera ja kiirtega risti olev ring valgust võrdsest, sõltumata päikesevalguse langemise nurgast.

V117 Kehtib soojusbilanss lihvimise käigus eralduva soojuse ning sisse ja välja voolava vee soojusvoo vahel. Mugavuse mõttes võib vaadelda ajavahemikku Δt ning selle jooksul lihvil eralduvat ning vee poolt äraantavat soojushulka.

V118 Enne keema hakkamist pidid vees olevad mullid olema nii väiksed, et pindpinevuse poolt tekitatud lisarõhu ja õhurõhu summa jää suuremaks kui küllastunud veeauru rõhk.

V119 Soojusvoog läbi kihi paksusega d , pindalaga S , temperatuuride vahega ΔT ja soojusuhtivuskoeffitsiendiga D on $Q = D \frac{S \Delta T}{d}$. Statsionaarses olekus tasakaalustab jää ja vee eralduspinnal ühe plaadi poolt tulev soojusvoog teiselt poolt tulova soojusvoo täielikult ära.

V120 Süsteemis kehtib energia jäÄvuse seadus. Nimelt ühe tunni jooksul läheb 95 % kahe liitri aurustumisel eraldunud energiast tundmatu massiga jahutusvee soojendamiseks ΔT võrra. Jahutusvee kiirus on leitav toru massivoo ja ristlõike pindala kaudu.

V121 Ideaalse soojusmasina kasutegur avaldub kujul $\eta = \frac{T_j - T_k}{T_j}$, kus T on temperatuur kelvinites. Kasutegur on samas tehtud töö ja jahtusvedelikult võetud soojushulga suhe.

V122 Spiraal kuumeneb temperatuurini, mil tekib soojuslik tasakaal spiraali ja ümbritseva keskkonna vahel. Teisisõnu, spiraali takistil eralduv võimsus peab olema võrdne soojusvooga spiraalist toa õhku.

V123 Soojusliku tasakaalu tingimuse kohaselt kulub radiaatori võimsus sissetuleva õhu soojendamiseks ja seinte soojuskadude kompenseerimiseks. Seinte soojuskaod on leitavad akna avamise eelsest tasakaalutingimuses.

V124 Temperatuuri kasvu või langemise kiirus on võrdeline tappa siseneva summaarse soojusliku võimsusega. Sellele vastab graafiku puutuja tõus. Soojapuhuri sisse lülitamise ajahetkel oli graafiku tõusu muut võrdeline soojapuhuri võimsusega.

V125 Tasakaalulises olukorras on ruumist eemalduv soojuse hulk võrdne küttekeha poolt toodetud soojusega. Selle põhjal saab leida esialgsest olukorrast keskkonna ja ruumi vahelise soojusvahetuse võrdelisusteguri ning saadud tulemust kasutada hilisema tasakaalulise temperatuuri leidmiseks.

V126 **a)** Kehtib soojuslik tasakaal sise- ja välisseina vahel. Nimelt on soojusvoog siseseinalt välisseinale võrdne siseseinalt kiirgava soojusvoo ja välisseinalt saabunud kiirguse peegeldunud osa summaga. Välisseina jaoks kehtib analoogne tasakaalutingimus.

b) Nüüd kehtivad sarnased voo tasakaalud iga seinapaari vahel, aga õnneks on eelmise osa tulemus üldistatav ka mitme seina jaoks.

V127 Kütteelement on soojuslikus tasakaalus ümbritseva keskkonnaga ning kaod keskkonda on võrdelised sise- ja välistemperatuuride vahega. Soojusliku tasakaalu temperatuur on määratav nn graafilise meetodiga, mis seisneb $\sigma(t)$ ja teatud funktsiooni pingest lõikepunktide leidmises.

V128 Kehtib laengute jäävus — valides suvalise suletud pinna, peab pinda läbiv vool olema võrdne pinna sisse jääva summaarse lekkevooluga.

V129 Sümmeetria tõttu mõjuvad kõikidele kuulidele radiaalsed sama väärusega elektrostaatilised jõud, mis on niitide pingete poolt tasakaalustatud. Lisaks paneme tähele, et kuna niidid on identsed ning sama palju veninud, peavad kõikide niitide pinged võrdsed olema.

V130 Tolmukübemel kehtib jõudude tasakaal raskusjöö ja elektrostaatilise jõu vahel.

V131 Kehtib energia jäävuse seadus, kus peame arvestama nii gravitatsioonilise kui ka elektrilise potentsiaalse energiaga.

V132 Põhimõtteliselt on võimalik leida elektroni kiirendus rönga poolt tekitatud elektriväljas ning seda integreerida, aga märgatavalt lihtsam on rakendada energia jäävuse seadust ning kasutada rönga poolt tekitatud potentsiaalset energiat. Punktlaengu q poolt tekitatud potentsiaal kaugusel r on $k \frac{q}{r}$.

V133 Ioonide kiirus on leitav energia jäävusest. Sondi ja ionide kiiruse sidumiseks on kõige mugavam rakendada impulsi jäävust.

V134 Elektronkahurist aja Δt jooksul eralduva elektronide kogumi summaarne impuls on võrdne impulsi jäävusest elektronkahurile mõjuva jõu ja Δt korrutisega. Individuaalse elektroni impuls on leitav energia jäävuse seadusest.

V135 Selleks, et siduda elektronide kiirust ekraani-sihilise nihkega, tasub ülesanne jagada kaheks eraldi osaks: elektronide viibimine plaatide vahel ning plaatide ja ekraani vahelises ruumis. Esimeses osas mõjub elektronile ühtlane kiirendus, teises osas liigub elektron sirgjooneliselt.

V136 Kasulikuks võib osutada superpositsooniprintsiip, mille kohaselt võib välja lõigatud ruutu tekitatud välja leida kui $+$ ja $-$ laenguga ruutude väljade summana.

V137 Osakese asukohta on mugavam leida vaadeldes eraldi osakese x - ja y -koordinaate. Laengu keskmise kiirus on leitav perioodi jooksul sooritatud nihke ja perioodi suhtena.

V138 Kuna sfäärid on traadiga ühendatud, peavad need sama potentsiaaliga olema.

V139 Kondensaatorid on pingeallikaga ühendatud jadamisi ning kondensaatori-te C_1 ja C_2 kogutakistus jadamisi on $(1/C_1 + 1/C_2)^{-1}$.

Kuna osakesele mõjuvad elektrijõud on esialgse liikumissuunaga risti, ku-lub mõlema kondensaatori läbimiseks sama aeg, kusjuures kondensaatorite va-hel mõjub osakesele konstantne kiirendus.

V140 Kärbse potentsiaali on mugav avaldada $x - y$ koordinaadistikus. Ülesande sümmeetriast on suhteliselt lihtne näha, et kärbse kaugus laengust on minimaal-ne siis, kui ta asub otse laengu kohal.

V141 Klotside läbitav vahemaa on leitav energia jäävuse seadusest. Nimelt on klotsid paigal nii alg- kui ka lõppasendis ning ainus viis soojuse eraldumiseks on hõõrdejõu kaudu, mis on omakorda avaldatav alg- ja lõppasendi potentsiaalsete energiate vahest.

V142 Hetkel, mil kuulide vahekaugus on minimaalne, peab massikeskme taust-süsteemis mõlemad kuulid ja kosmoseprügi paigal olema. Vastasel korral ei oleks kuulide vahekaugus minimaalne, sest kuulid liiguksid üksteise suhtes.

V143 Ampermeetri ja voltmeetri pingete summa peab olema võrdne klemmide-le rakendatava pingega nii enne kui ka pärast takisti ühendamist.

V144 **a)** Takisti peab tagama selle, et lampide pinge ei ületaks nominaalpinget üksköik missuguse lambi sisetakistuse väärtsuse korral
b) Lampide oodatavast tuhmimalt põlemine on põhjustatud alaldi sisetakistusest.

V145 Koormisel eralduv võimsus on pinge ja voolu korrutis. Seega on vaja graafikult leida x - ja y -koordinaadi korrutise maksimum.

V146 Mõlema kontuuri jaoks saab rakendada Ohmi või Kirchhoffi seadusi.

V147 Otsitav suhe I_2/I_1 on mugavalt avaldatav Ohmi seadusest, ülejäänud on võrratustega manipuleerimine.

V148 Ülesandes on neli tundmatut: vooluallika pinge, takisti takistus ning ampermeetri ja voltmeetri sisetakistused. Nelja tundmatu jaoks on vaja nelja võrran-dit ning need tulenevad ülesandes antud ampermeetri ja voltmeetri näitudest.

V149 Teades, et päripidise voolu korral võib dioodi klemmid lugeda lühistatuks ning vastuvoolu korral isoleerituks, võib koostada esialgse skeemi asemel mõlema polaarsuse korral dioodideta ekvivalentsed skeemid.

V150 Kuna süsteemi stabiilses olekus on kondensaatorite pinge konstantne, ei läbi neid ka vool.

V151 Süsteem saab töötada kolmes erinevas režiimis. Esiteks, kui pinge on piisavalt madal või kõrge, on kõikide elementide takistus vastavalt 1Ω või 2Ω . Vahepealse pinge väärtsuse korral on vasakpoolse elemendi takistus 2Ω ja parempoolsetel 1Ω . Teisi režiime ei ole, sest vasakpoolse takisti pinge on alati suurem kui parempoolsetel ning seega ei saa vasaku takisti takistus olla väiksem kui parempoolsetel.

V152 Mõlemat tüüpi traadjuppide pikkused peavad olema sellised, et 1) summaarne takistus on 1Ω ; 2) temperatuurist sõltuvus oleks võimalikult väike. Temperatuurist sõltuvuse leidmiseks tuleb kasutada ülesandes antud temperatuuri koefitsiente.

V153 Lõpmatust ahelast ühe lüli eemaldamisega summaarne mahtuvus ei muutu.

V154 Kõigepealt tasub leida lühikese traadjupi takistus ning seejärelt üritada saadud avaldist summeerida terve traadi ulatuses.

V155 Patarei tehtud töö ajaühikus Δt on $UI\Delta t$. Kondensaatorisse salvestatava energia muutumise kiirus on leitav võttes kondensaatori siseenergiast $\frac{CU^2}{2}$ aja järgi tuletise.

V156 a) b) Peale pikka aega on kondensaatoreid läbiv vool null, sest nende pinged, ja seega laengud, on stabiliseerunud. Seega võib kondensaatorid efektiivselt süsteemist välja lõigata.

c) Elimineerides süsteemist vooluallika, peab kehtima laengu jäätuse seadus.

V157 Süsteemis kehtib laengu jäätus, st alamsüsteemis, mis koosneb ülemisest sõlmpunktist ja sellega ühendatud kolmest kondensaatori plaadist peab alati olema summaarse laenguga $-q$. See kehtib sellepärist, et laengud saavad liikuda ainult mööda metalli ning ei saa eelmainitud alamsüsteemist õhu kaudu lahkuda.

V158 Mõlema ülesandes antud tingimuse jaoks on võimalik kirja panna vastav võrrand (kasutades näiteks Kirchhoffi seadusi) ning saadud võrrandisüsteemi lahendid peaksidki olema R_1 ja R_2 .

V159 Nominaalses töörežiimis on iga valgusdioodi pinge U_d ja vool maksimaalselt 20 mA . Teades võrgupinge maksimaalset pinget on võimalik leida takisti takistus ja maksimumvõimsus. Ühe täisperioodi jooksul tuleb pingelanguse muut kondensaatoril takisti arvelt. Seejuures on kondensaatori plaatide laengumuut leitav täisperioodi pikkusest ja ahela voolutugevusest.

V160 Ülesande peamine raskus on korrektselt määrata ülesande tekstiga ekvivalentne elektriskeem. Peale elektriskeemi määramist taandub ülesanne stabiilse režiimi leidmisele. See on tehtav näiteks Kirchhoffi seadustega.

V161 Elektron sooritab solenoidi teljega risti tasandis ringliikumist. Antud ringliikumise periood on leitav kasutades Lorentzi ja tsentrifugaaljõu tasakaalutingimust.

V162 Raamis indutseeritakse vool, sest takisti kukkudes suureneb raami läbiv magnetvoog, mis omakorda tekitab Faraday seaduse kohaselt raamis elektromootorjõu ja voolu. Seega on stabiilses režiimis raskusjõud ning takistit läbiva voolu poolt tekitatud Lorentzi jõud tasakaalus.

V163 Lorentzi jõu tõttu liiguvad mölemad osakesed mööda ringjoont, kusjuures mölema osakese kiirusvektorite pöörlemise nurkkiirused on samad.

V164 Traat võtab kaare kuju (sest Ampere'i jõud mõjub analoogselt täispuhutud palli puhul pallikestale ülerõhu poolt mõjuva jõuga: lühikesele mõttelisele traadijupile mõjuv jõud on risti traadijupiga). Pinge leidmiseks on mugav vaadelda lühikes traadijupi lõiku ning kirja panna joudude tasakaalu tingimus.

V165 Selleks, et venitada pooli väikse vahemaa $\Delta\ell$ võrra pikemaks, on vaja teha tööd, millest osa kulub magnetväljas salvestatud energia suurendamiseks ning teine osa kulub vooluallika poolt tehtud töö kompenseerimiseks. Magnetväljas salvestatud energia leidmiseks võib kasutada kas pooli koguenergia valemit $\frac{LI^2}{2}$ või magnetvälja energiatihedust $w = \frac{B^2}{2\mu_0}$.

V166 Magnetväljas liiguvad osakesed mööda ringjoont kiirusest sõltumatu perioodiga $t = \frac{2\pi m}{qB}$. Näeme, et ülesandes antud ajavahemik T vastab poolele täistriule. Antud tähelepanek võimaldab olukorra mugavamat skitseerimist. Iga kord kui elektriväli sisse lülitatakse, antakse osakesele väike elektriväljasihiline impulss.

V167 Magnetväljas hakkab osake liikuma mööda ringjoont. Ringjoone raadius on avaldatav Lorentzi jõu ja kesktömbekiiruse võrdlusest. Märkame, et kui ringjoone raadius on piisavalt väike, väljub elektron tulduud suunas tagasi. Ringjoone suurenedes väljub elektron lõpuks vasakust küljest.

V168 Magnetvälja väljalülitamise käigus muutub magnetvoog läbi silindri ristlõike, mis indutseerib Faraday seaduse kohaselt keeris-elektrivälja. Keeris-elektriväli mõjub omakorda silindri pinnal olevatele laengutele teatud jõuga ning paneb silindri pöörlema. Silindri pöörlemise kiiruse leidmiseks on mugav vaadelda lühikes traadijupi ajavahemikku Δt , mille jooksul väheneb magnetvälgi ΔB võrra.

V169 Laserkiire kõrvalekaldenurk on leitav Snelli seaduse ja kiilu geomeetria rakendamisest.

V170 Tasub teha selge joonis ning kasutada sarnaseid kolmnurki.

V171 Selleks, et sisenev kiirte kimp oleks ka peale teise läätse läbimist paralleelne, peavad läätsede fookused ühtima.

V172 Nõguspeegli pinnalt peegeldunud kiirte nurgapoolitajad läbivad peegli kõverusraadiuse keskpunkti.

V173 Tasub koostada selge joonis ning murdumisnäitäja leidmiseks kasutada täisnurksete kolmnurkade omadusi ja Snelli seadust.

V174 Ülesande lahendamisel osutub tarvilikuks teadmine, et läätsele selle op tilise teljega paralleelselt langevad kiired (või murtud kiirte pikendused nõgusa läätse puhul) koonduvad fookuses punktiks. Seega on ainus moodus kahe läätse abil saada süsteem, mis teisendab paralleelse kimbu uuesti paralleelseks kimbuks selline, et läätsede fookused ühtivad.

V175 Valguskiir siseneb prismasse murdumata, sest kiir on normaali sihiline. Küll aga toimub murdumine prismast väljades. Kuna terve tahu ulatuses on lagemisnurk sama, tekib üks tahk paralleelse kuirtekimbu. Kuna meil on kaks murdvat tahku, on esialgne kuirtekimp pärast prisma läbimist jagunenud kaheks.

V176 Nii täis- kui poolvarjude piirjoonte pikendused on valgusallika puutujad.

V177 Allika heledus on ligikaudselt võrdeline vaatleja silmaava nurkläbimõõdu ruuduga allika asukohast vaadatuna.

V178 Piisab kahe ettevaatlikult valitud kiirte käikude vaatlemisest.

V179 Ülesande mugavamaks lahendamiseks tuleb teha selge joonis ning raken dada väikeste nurkade lähendust. Lisaks, kiire ja kuuli puutepunkti pinnanor maal ühtib kuuli raadiusega.

V180 On lihtne näha, et plaadist väljub endiselt paralleelne valgusvihk. Küll aga on selle levimise suund muutunud. Valguslaigu nihke leidmiseks on mugav vaa delda kiirt, mis läbib läätse optilist keskpunkti.

V181 Mustaks värvitud tahkudelt valgus peegelduda ei saa, toimub neeldumine. Ülesande tingimus on täidetud, kui värvimata tahust kuupi sisenev valgus ei saa väljuda läbi kõrvaltahu (toimub sisepeegeldus).

V182 Joonisel on kaks peegeldust ja üks peegelduse peegeldus. Sellele vastab kolm võimalikku punktide konfiguratsiooni ning eeldatavasti on võimalik paari kavala argumendi põhjal osad konfiguratsioonid elimineerida (näiteks peab valgusallikas olema mõlema peegli vahel).

V183 Selleks, et kapillaari sein paistaks null paksusega, peab kapillaarile puutujana langenud kiir napilt puudutama sisemist õönsust. Sellisel juhul ei leidu ühtegeki kiirt, mis läbisid kapillaari seina ilma sisemise õönsuse piirpinnale langemata.

V184 Suhteliselt kindel meetod on avaldada kõik ülesandes antud ja otsitavad muutujad võimalikult mugavate jooniselt leitavate suuruste kaudu ning loota, et saadud võrranditest on lihtne näha, kuidas lõppvastus avaldub k_1 ja k_2 kaudu. Kehvemal juhul tuleb lahendada kolmest võrrandist koosnev võrrandisüsteem (k_1 , k_2 ning otsitava suhte jaoks). Silmas peab pidama, et jooniselt valitud muutujad peavad ülesande geomeetria üheselt ära defineerima. Selleks sobivad näiteks läätse fookuskaugus ning pliatsi mõlema otsa kaugused läätsest.

V185 Kriitilise langemisnurga all on valgus sakilisel poolel täieliku sisepeegeldumise piiril. Selleks, et antud tingimust langemisnurgaga siduda, on kasulik joonistada suur ja selge joonis.

V186 Kui nõgusläätsele langevad paralleelsed kiired, lõikuvald murdunud kiirte pikendused eesmisel fokaaltasandil.

V187 Kuna silmani jõudvate kiirte jaoks kehtib $r \ll L$ ning trajektoori kõverdumine toimub musta augu lähiümbruses, võib vaadelda kiire teekonda lihtsatult: kiire liikumine musta auguni, hetkeline nurga muutus musta augu juures ning edasi sirge tee vaatlejani.

V188 Sfäärilist akvaariumit saab vaadelda kui õhukest tasakumerat läätse, mis on surutud tasase küljega vastu sirge seinaga akvaariumi. Lisaks peab arvestama, et läätses lõplikku kujutist tekitav kala ei vasta tegelikule kala asukohale, vaid akvaariumis murdumise töttu asuvale kujutisele, mis on tegelikust kala asukohast n korda lähemal.

V189 Kera ääres toimub pinnalt täielik sisepeegeldumine, kus peegeldunud kiired saavad alguse kas põrandalt või seinalt (ja olles seega kas valget või kollast värvit). Murdumisnäitaja määramiseks on vaja jooniselt uurida sisepeegeldumise piirjuhti.

V190 Kahe kujutamise tekkeks peab kumerpeegel asuma objektist A vasakul. A' leidmiseks peab määrama läätse fookuse, aga selleks peab silmas pidama asjaolu, et pole teada, kumb kujutistest K_1 ja K_2 kuulub objektile A .

V191 Kärbse näiline asukoht vastab kärbsest alguse saanud klaasist väljunud murdunud kiirte pikendustele lõikepunktile. Selle jaoks tasub vaadelda kahte kiirt: mölemad saavad alguse kärbsest, aga üks väljub merevaigutükist pinnaga risti ja teine väikse nurga all. Edasi tuleb kiirte geomeetriat ettevaatlikult uurida ning rakendada Snelli seadust.

V192 Allikat ja kujutist ühendav sirge läheb läbi läätse keskpunkti, kusjuures läätse keskpunkt peab jäama allika ja kujutise vahele, sest tegu on töelise kujutisega. Lisaks teame, et sirge kujutis on sirge, kusjuures need kaks sirget lõikuvad läätse tasandis.

V193 Lisaks väikeste nurkade lähendusele lihtsustab ülesande geomeetriat võimalikult sümmeetrislike kiirte käikude uurimine. Näiteks on mugav vaadelda kiri, mis peegelduvad risti peegli pinnaga.

V194 Ülesandes on arvandmed valitud nõnda, et peeglite fookused ühtiksid. Töepooltest, nõguspeeglite fookuskaugus on pool raadiusest ja peeglite vahemaa on võrdne peeglite fookuskauguste summaga. See tähendab, et peale igat edastagasi peegeldumist püsivad valguskimbu kiired paralleelselt, kusjuures kimp muutub 2 korda kitsamaks (sest fookuskauguste suhe on 2).

V195 Rongi taustsüsteemis on rong paigal ning õhk uhab mööda kiirusega v , kusjuures õhu jaoks kehtib massi jäädvuse seadus.

V196 Lihtsuse mõttes võib eeldada, et Kuu pinnale jõudev summaarne valgusvoog Päikeselt peegeldub ühtlaselt poolsfäärike, mille keskpunktiiks on Kuu ja pinda peal asub Maa.

V197 Maja teatud punkt ja tema peegelkujutis mere pinnalt paiknevad sümmeetriselt mere tasandiga võrreldes. See võimaldab vee tasandi leidmist.

V198 Kõik objektid, mis ületavad fotol horisonti, peavad olema vähemalt sama kõrgel kui fotoaparaat.

V199 Valgus peegeldub tagasi kile ülemiselt ja alumiselt pinnalt. Peegeldus on minimaalne, kui vastavad kiired liituvad vastasfaasides. Selleks, et määräta mitu täislainepeikkust optiliste teeide vahesse mahub, tuleb vaadelda, kuidas minimeerida peegeldunud valguse hulka punase ja sinise valguse jaoks.

V200 Heledad võödid vastavad ülemiselt ja alumiselt pinnalt peegeldunud kiirte liitumisele samas faasis. Vaadates põrandat erinevate nurkade alt, muutub kiirte optiliste teekondade vahe piisavalt palju, et see vastaks 20-le lainepeikkusele. Vastav optiliste teekondade vahe vähemik on leitav põranda geomeetriast.

Lahendused

L1 Pendel ★

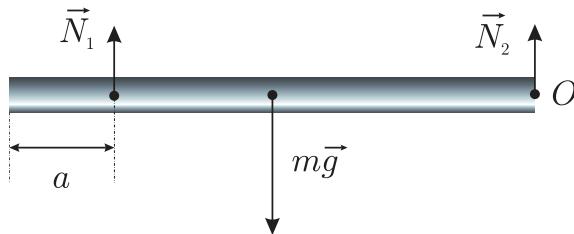
Autor: Mihkel Heidelberg, piirkonnnavoor, 2008, G 1

Koormisele mõjub raskusjõu moment $mgl \sin \alpha$. Kang püsib paigal, kui see on väiksem hõõrdejõu momendist M , seega $mgl \sin \alpha < M$, milles $\sin \alpha < \frac{M}{mgl}$.

L2 Toru ★

Autor: tundmatu, lahtine, 2007, G 2

Newtoni kolmenda seaduse kohaselt on toru tooreaktsioonid N_1 ja N_2 suuruse poolest võrdsed otsitavate rõhumisjõududega (vt joonist).



Kuna jõudude summa peab tasakaalu asendis olema võrdne nulliga, siis

$$N_1 + N_2 - mg = 0.$$

Jõumomentide võrrand punkti O suhtes (võib valida suvalist punkti) on

$$N_1(l - a) = \frac{mgl}{2},$$

kust saame

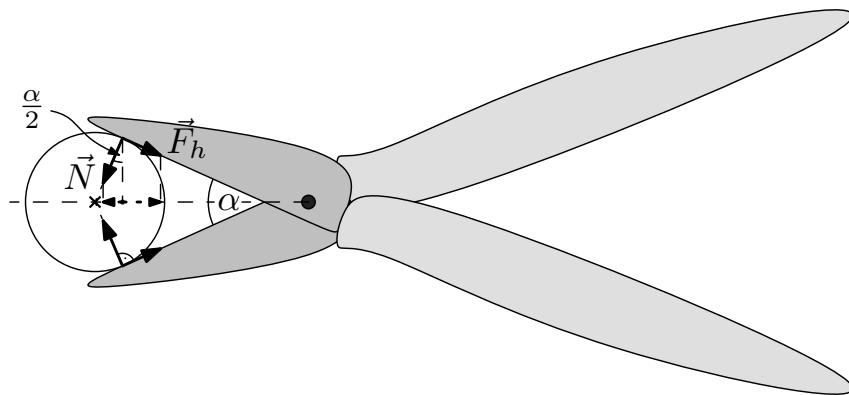
$$N_1 = \frac{mgl}{2(l - a)} = \frac{80 \cdot 9,8 \cdot 5}{2 \cdot (5 - 1)} = 490 \text{ N}.$$

Asendades N_1 esimesesse võrrandisse, saame avaldise N_2 jaoks:

$$N_2 = \frac{mg(l - 2a)}{2(l - a)} = \frac{80 \cdot 9,8 \cdot (5 - 2 \cdot 1)}{2 \cdot (5 - 1)} = 294 \text{ N}.$$

L3 Nürinenud käärid ★

Autor: Mihkel Kree, lõppvoor, 2009, G 1



Hõõrdejõud peab tasakaalustama tooreaktsiooni kääride telje sihilise komponendi (joonis). Lihtsast geomeetriast saame, et $\mu = \tan \frac{\alpha}{2}$.

L4 Kuul ★★

Autor: tundmatu, lahtine, 2005, G 3

Kuuli hoiab augus või „lükkab“ august välja üks ja sama jõud — kuulile mõjuv raskusjõud, mis on suunatud vertikaalselt alla. Kuul on augus, kui raskusjõu vektor läbib augu põhja, ja kukub, kui see väljub sellest. Esimesel juhul on raskusjõu moment suunatud augu poole, teisel juhul august välja. Piirjuhul on kuul tasaakaalus, toetudes vaid punktile A (vt joonist). Sellel juhul on kuulile mõjuv raskusjõud suunatud otse punkti A poole, jõuõlg ning järelikult ka jõumoment on võrdne nulliga.

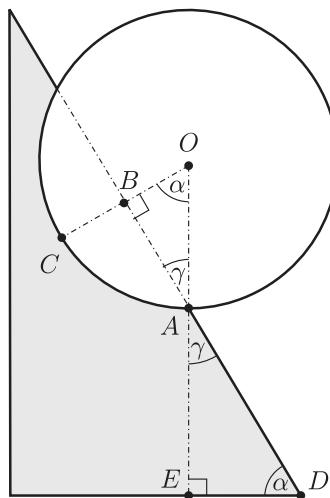
Vaatleme piirjuhtu (vt joonist). Kuna lauaaugu sugavus $|BC|$ on 2 korda väiksem, kui kuuli raadius r , saame kolmnurga AOB kohta kirjutada järgneva tingimuse:

$$\sin \gamma = \frac{r/2}{r} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \gamma = \arcsin \frac{1}{2} = 30^\circ.$$

Kuna punkti A tipunurgad on võrdsed, siis ka täisnurkse kolmnurga ADE üksnurkadeest on 30° . Järelikult

$$\alpha = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ.$$

Kui laua kaldenurk ületab 60° , kukub kuul lauaugust välja.



L5 Katus ★★

Autor: Ott Krikmann, piirkonnnavoor, 2005, G 2

Vaatleme lund katusel kui kahte vastasmõjus olevat keha: üheks kehaks on lumi, mille all on vesi ning millele hõõrdejõud ei mõju, ja teiseks kehaks kuival katusel olev lumi. Nende kahe osa vahel mõjuva jõu F võime lugeda katuse sihiliseks (selle sihi valime x -teljeks, y -telg on katuse sihiga risti). Arvestame, et lumi on ühtlase paksusega ja seega osade massid on võrdelised nende pikkustega:

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{l}{L-l}.$$

y -telje sihiline tasakaaluvõrrand kuiva osa jaoks:

$$N_2 = m_2 g \cos \alpha,$$

kus N_2 on kuivale osale mõjuva katuse rõhumisjõud. x -telje sihiline tasakaalu-võrrand vesise ja kuiva osa jaoks:

$$F = m_1 g \sin \alpha,$$

$$\mu N_2 = F + m_2 g \sin \alpha.$$

Elimineerides kahest viimastest võrrandist F -i leidame

$$\mu N_2 = (m_1 + m_2) g \sin \alpha.$$

Asendades siia N_2 leidame

$$m_2 \mu g \cos \alpha = (m_1 + m_2) g \sin \alpha.$$

Jagades läbi $m_2 g$ -ga ja asendades esimesest võrrandist suhte m_1/m_2 , saame

$$\frac{L}{L-l} = \mu \cot \alpha,$$

mildest

$$\frac{l}{L} = 1 - \mu^{-1} \tan \alpha \approx 0,16.$$

Alternatiivne lahendus

Vaatleme lund katusel tervikliku süsteemina. Valime x -teljeks katuse sihi, y -telg olgu katuse sihiga risti. Lumekihile mõjuvad järgnevad jõud: raskusjõud mg , katusepinna tooreaktsioonijõud N ning hõõrdejõud

$$F_h = \frac{L-l}{L} \mu N.$$

Kordaja $(L-l)/L$ tuleb sellest, et hõõrdejud mõjub vaid $(L-l)$ -pikkusel katuseosal. Tasakaaluvõrrand y -telje jaoks on

$$N = mg \cos \alpha,$$

x -telje jaoks aga

$$mg \sin \alpha = F_h = \frac{L-l}{L} \mu N.$$

Elimineerides kahest viimastest võrrandist N -i leiame

$$mg \sin \alpha = \mu mg \cos \alpha \frac{L-l}{L}.$$

Saame, et

$$\frac{L-l}{L} = \frac{\tan \alpha}{\mu}.$$

Seega

$$\frac{l}{L} = 1 - \frac{\tan \alpha}{\mu} \approx 0,16.$$

L6 Kast kaubikus ★★

Autor: Oleg Košik, lõppvoor, 2009, G 2

Kaubiku kiirendus on $a = v_0/t = 2,5 \text{ m/s}^2$. Newtoni II seaduse põhjal

$$\vec{N} + \vec{T} + \vec{F}_h + m\vec{g} = m\vec{a}.$$

Nööri pinge on minimaalne, kui hõõrdejud F_h saavutab maksimaalse väärtsuse μN . Projektsioon x -teljele:

$$T \sin \alpha + \mu N = ma;$$

y -teljele:

$$N + T \cos \alpha - mg = 0.$$

Lahendades süsteemi leiame, et

$$T = m \frac{a - \mu g}{\sin \alpha - \mu \cos \alpha} \approx 14 \text{ N}.$$

L7 Liivahunnik ★★

Autor: Roland Matt, piirkonnnavoor, 2011, G 5

Liivahunniku maksimaalse kõrguse saavutamiseks peavad pindmised liivakihid olema libisemise äärel ehk kehtib $\tan(\alpha) = \frac{h}{R} = \mu$, kus α on nurk maa ja koonuse moodustaja vahel, R hunniku aluse raadius ja h hunniku kõrgus. Liiva ruumala on

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 h = \frac{1}{3}\pi R^3 \mu,$$

millega

$$R = \sqrt[3]{\frac{3V}{\pi\mu}}$$

ning seega hunniku aluse pindala on

$$S = \pi R^2 = \sqrt[3]{9\pi \left(\frac{V}{\mu}\right)^2} \approx 76,2 \text{ m}^2.$$

L8 Tormituul ★★

Autor: Mihkel Kree, lõppvoor, 2011, G 3

Tuule poolt avaldatav horistonaalsuunaline jõud F peab olema niisugune, et selle poolt tekitatud jõumoment $Fb/2$ ületab raskusjõu poolt tekitatud jõumomendi $Mga/2$. Jõumomentide võrdsuse korral $F = Mga/b$. Et niisugune jõud autot libisema ei paneks, peab hõõrdejõud $F_h = \mu Mg$ selle tasakaalustama, millega saame nõutud tingimuseks: $\mu > a/b = 2/3$.

L9 Hammasrattad ★★

Autor: Siim Ainsaar, lõppvoor, 2010, G 4

Kasutame virtuaalse nihke meetodit: oletame, et nöör pole siiski päris venimatu ning saame esimest ratsast pöörata väikese nurga α vörra. Hõõre puudub, mistõttu salvestub kogu välise jõumomendi töö nööri elastsusjõu potentsiaalseks energiaks. Välisjõumomendi töö on $M\alpha$ (kui jõumomenti avaldab üks jõud õlaga \tilde{o} ja suurusega M/\tilde{o} , siis nihkub ta rakenduspunkt $\alpha\tilde{o}$ vörra ja töö on $\alpha\tilde{o}M/\tilde{o} = M\alpha$). Väikesel nihkel ei jõua T oluliselt muutuda, seega peab nööri venitamise töö olema Ts , kus s on nööri pikenemine. Hambumusse jäavate hammasrataste pinnapunktid läbitavad teepikkused on võrdsed — mõlemal αr_1 , järelikult $s = 2\alpha r_1$ ja $M\alpha = 2\alpha r_1 T$, kust $T = \frac{M}{2r_1}$.

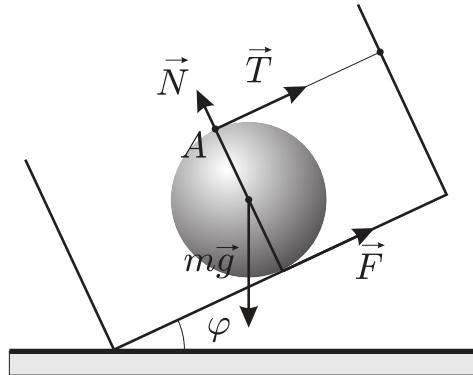
Alternatiivne lahendus

Ratastele mõjuvad jõud ja jõumomendid on tasakaalus. Lihtsaim on kirjutada jõumomentide tasakaalud rataste tsentrite suhtes, kuna siis on võllide poolt avaldatava tundmatute jõudude õlad nullid. (Muidu saame lahenduse, kui avaldamme need jõud jõudude tasakaaluvõrranditest.) Rattad mõjutavad teineteist puutujasilhilise jõuga; kui teine ratas avaldab esimesele jõudu \vec{F} , siis avaldab Newtoni III seaduse järgi esimene teisele $-\vec{F}$. Jõumomentide tasakaal esimesele rattale on nii $M = (F + T)r_1$ ning teisele $T = F$, sestap $T = \frac{M}{2r_1}$.

L10 Kuul ★★

Autor: tundmatu, lahtine, 2006, G 7

Kõigepealt uurime kuulile mõjuvate jõudude projektsioone kasti põhjaga risti olevale teljele (vt joonist).



Nende projektsioonide summa peab olema võrdne nulliga. Projektsioone sellele teljele omavad vaid raskusjõud $m\vec{g}$ ja kasti põhja toereaktsioon \vec{N} . Järelikult $N = mg \cos \varphi$ ja hõõrdejõud

$$F \leq \mu mg \cos \varphi. \quad (1)$$

Kuuli tasakaal sõltub selle võrratuse täitumisest.

Nüüd tuleb valida punkt, mille suhtes me hakkame määrama jõumomente. Valime punkti nii, et hõõrdejõu moment selle suhtes oleks nullist erinev, aga niidi tõmbepinge T moment oleks võrdne nulliga (niidi pingे arvutamise välimiseks). Sellele tingimusele vastab punkt A , milles niit kinnitub kuuli külge. Selle punkti suhtes on hõõrdejõu õlg $2r$ (kus r on kuuli raadius), raskusjõu õlg $l = r \sin \varphi$, ning jõudude N ja T õlad võrdsed nulliga. Jõumomentide summa on tasakaalu puhul võrdne nulliga, järelikult

$$2rF - mgr \sin \varphi = 0 \Rightarrow F = \frac{mg \sin \varphi}{2}.$$

Arvestades võrratust (1) leiate, et tasakaalu puhul

$$\mu mg \cos \varphi \geq \frac{mg \sin \varphi}{2} \Rightarrow \tan \varphi = 2\mu,$$

ehk

$$\varphi = \arctan(2\mu).$$

L11 Toru ★★

Autor: Aigar Vaigu, lõppvoor, 2010, G 5

Prussi võnkumine torul on stabiilne, kui prussi kõrvalekallutamisel väikese nurga α võrra prussi massikese tõuseb kõrgemale kui alguses. Esialgne prussi massikeskme kõrgus on $R + L/2$. Massikeskme kõrgus kõrvalekallutamisel on

$$\left(R + \frac{L}{2} \right) \cos \alpha + R\alpha \sin \alpha,$$

ning peab kehtima

$$\left(R + \frac{L}{2} \right) \cos \alpha + R\alpha \sin \alpha > R + \frac{L}{2}.$$

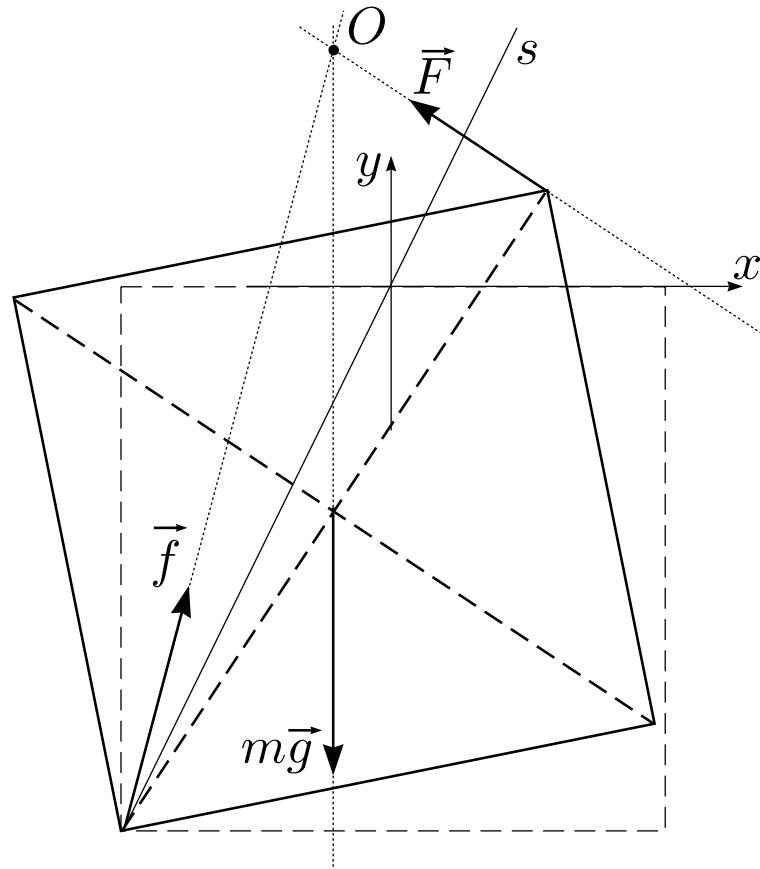
Kuna kõrvalekalde nurk on väike, siis võime arvestada, et $\sin \alpha \approx \alpha$ ja $\cos \alpha \approx 1 - \alpha^2/2$. Lihtsustades ning avaldades L -i, saame, et võnkumised on väikeste kõrvalekallete korral stabiilsed, kui

$$L < 2R.$$

L12 Kuubik ★★★

Autor: Riho Taba, piirkonnavor, 2007, G 9

Ülesande lahendamine jaguneb kaheks osaks: (a) kas antud jõust piisab üle serva kantimiseks; (b) ega klots seejuures libisema ei hakka. Analüüsides oletame, et klots on juba kallutatud teatud nurga φ ($0 \leq \varphi \leq 45^\circ$) võrra; seejuures selgub, et $\varphi = 0$ on kõige ohtlikum olukord. Alternatiiv oleks väita intuitiivselt, et ohtlikuim on olukord $\varphi = 0$ ning uurida ainult seda juhtumit;



(a) Vaatleme jõumomentide tasakaalu toetava nurga suhtes. Kompenseerimist vajab raskusjõu moment $M_{1\max} = Fa \cos(45^\circ) \cos(\varphi + 45^\circ)$, mille maksimaalväärtus on

$$M_{1\max} = \frac{mga}{2}, \quad M_{1\max} = \frac{10 \cdot 9,8 \cdot 0,1}{2} = 4,9 \text{ N m}.$$

Rakendatav jõud annab seda suurema momendi, mida suurem on õlg; õla maksimaalne pikkus ei sõltu nurgast φ ning on alati $l = a\sqrt{2}$. See väärthus saavutatakse siis, kui jõud on rakendatud maha toetuva serva suhtes vastasserva külge ning on risti ruudu diagonaaliga. Seega on antud jõu abil alati võimalik tekitada raskus-

jõudu kompenseeriv moment väärtsusega kuni

$$M_2 = Fl = Fa\sqrt{2} = 5,6 \text{ N m.}$$

Näeme, et $M_{1\max} < M_2$, st antud jõud on piisav kuubi keeramiseks.

(b) Vaatleme jõudude tasakaalu raskusjõu $m\vec{g}$ ja rakendatud jõu \vec{F} pikenduste lõikepunktiga O suhtes, vt joonist. Aeglasel pööramisel on jõud tasakaalus, st hõõrdejõu ja tooreaktsiooni resultantjõud \vec{f} peab minema samuti läbi selle punkti. Et hõõrdetegur $\mu = 0,5$, siis nurk toetuspinna normaali (st vertikaalsihi) ja jõu \vec{f} vahel ei tohi olla suurem, kui $\arctan \mu$, st jõud \vec{f} ei tohi olla vähem püstine, kui sirges. Nii see ka töepooltest on, sest punkt O jäab alati piirkonda $x \leq 0$ ja $y > 0$.

Alternatiivne lahendus osa (b) jaoks

Meil on vaja tõestada, et aeglasel pööramisel kehtib kogu aeg võrratus

$$|F_x| = F \cos(45^\circ - \varphi) \leq N\mu,$$

kus N on laua tooreaktsioon. Paneme tähele, et vertikaalsest tasakaalutingimustest

$$N = mg - |F_y| = mg - F \sin(45^\circ - \varphi).$$

Me kasutame osast (a) teada olevat asjaolu, et kui hõõrdumist ei oleks, siis tasakaalu tagava jõu jaoks kehtib võrratus $F < F_{\max}$, seda asjaolu kasutame alljärgnevalt võrratuste ümber kirjutamisel.

Meile piisaks, kui suudaksime tõestada, et

$$\mu[mg - F_{\max} \sin(45^\circ - \varphi)] \geq F_{\max} \cos(45^\circ - \varphi), \quad (1)$$

sest sellisel juhul

$$\begin{aligned} N\mu &= \mu[mg - F \sin(45^\circ - \varphi)] \geq \mu[mg - F_{\max} \sin(45^\circ - \varphi)] \geq \\ &\geq F_{\max} \cos(45^\circ - \varphi) \geq F \cos(45^\circ - \varphi) = |F_x|. \end{aligned}$$

Tõepooltest, $N\mu \geq |F_x|$. Võrratuse (1) tõestamiseks kirjutame selle ümber ekvivalentset kujul

$$1 \geq \frac{F_{\max}}{\mu mg} [\mu \sin(45^\circ - \varphi) + \cos(45^\circ - \varphi)],$$

mis tõepooltest kehtib, sest

$$\begin{aligned} \frac{F_{\max}}{\mu mg} [\mu \sin(45^\circ - \varphi) + \cos(45^\circ - \varphi)] &= \\ &= \frac{F_{\max} \sqrt{\mu^2 + 1}}{\mu mg} \sin(45^\circ - \varphi + \arcsin[(\mu^2 + 1)^{-1}]) \leq \\ &\leq \frac{F_{\max} \sqrt{\mu^2 + 1}}{\mu mg} = \frac{40 \text{ N} \cdot \sqrt{5/4}}{49 \text{ N}} \approx 0,91 < 1. \end{aligned}$$

L13 Kuulid ★★★

Autor: Jaan Kalda, lahtine, 2009, G 9

Et kuuli C kiirusvektor on risti sirgega AC , siis hetkeline pöörlemiskese O asub sellel sirgel. Seega, kui kuul A hakkab libisema, siis on selle kiirusvektor samuti (ning järelikult ka hõõrdejõu vektor) risti sirgega AC . Piirjuhtumil, kui kuulide masside suhe on selline, et kuul A hakkab vaevu liikuma, on punkt O väga lähedal punktile A ning seega on punkti B kiirusvektor (ja hõõrdejõu suund) risti sirgega AB . Hõõrdejõudude jõumomentide summa punkti C suhtes peab olema null; et punkti A rakendatud hõõrdejõu õlg on $|AC|$ ning punkti B puhul on õlg $|AC|/2$, saame kriitiliseks masside suhteks $1/2$, st kuul A jäääb paigale, kui $M_A/M_B > 1/2$. *Märkus.* Uurides olukorda edasi ja vaadeldes üha vähenevaid M_A väärtsusi (alustades $M_B/2$ -st ja lõpetades tühiselt väikeste massidega) paneme tähele, et punkt O nihkub piki sirget AC , alustades punkti A juurest, üha kaugemale punktidest A ja C ning läheneb piiril $M_A \rightarrow 0$ punktile D , mis asub punktist A kaugusel $|AC| - nõnda$, et kolmnurk BCD on täisnurkne ning seetõttu punkti B rakendatud hõõrdejõu õlg läheneb nullile.

L14 Rõngas ★★★

Autor: Jaan Kalda, lõppvoor, 2011, G 7

Olgu rõnga keskpunkt O ja massikesse M ning völli ja rõnga puutepunkt P . Vaadeldes jõumomentide tasakaalu punkti P suhtes näeme, et raskusjõud peab andma sarnaselt kõigi teiste jõududega null-momendi, st lõik PM peab olema vertikaalne. Tooreaktsiooni \vec{N} ja hõõrdejõu \vec{F}_h resultant peab kompenseerima raskusjõu ja olema samuti vertikaalne. Pinnanormaali ja nimetatud resultantjõu vaheline nurk ei saa olla suurem kui $\arctan \mu$, vastasel korral algaks libisemine. Et pinnanormaaliks on sirge OP , siis

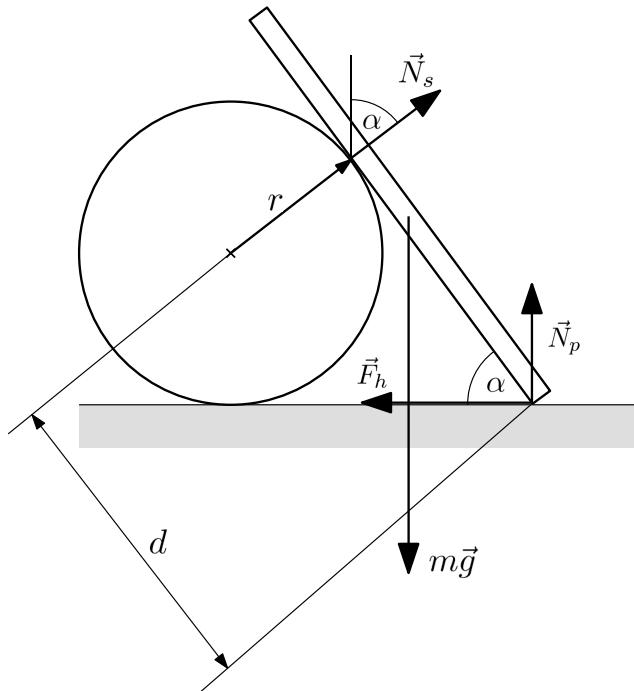
$$\angle OPM \leq \arctan \mu.$$

Rõnga pöörlemise käigus $|OP| = R$ ja $|OM| = R/2$; seega moodustub kolmnurk OPM lõikudest pikkusega R ja $R/2$ ning järelikult on tipu P juures olev nurk maksimaalne, kui tipu M juures on täsnurk. Sel juhul

$$\mu = \tan \angle OPM = |MO|/|MP| = \frac{R}{2} / \sqrt{R^2 - \frac{1}{4}R^2} = 1/\sqrt{3} \approx 0,58.$$

L15 Varras ★★★★

Autor: Siim Ainsaar, lõppvoor, 2008, G 9



Vardale mõjuvad põranda ja silindri tooreaktsioonid (vastavalt \vec{N}_p ja \vec{N}_s), hõõrdejõud \vec{F}_h ja raskusjõud $m\vec{g}$ (vt ülemist joonist). Asend on stabiilne, kui jõudude ja jõumomentide tasakaalu tingimustest avaldatav hõõrdejõud ei ületa maksimaalset seisuhõõrdejõudu:

$$F_h \leq \mu N_p \quad (1)$$

ja varda alaots ei tõuse õhku:

$$N_p \geq 0. \quad (2)$$

Siin ja edaspidi võiksime sama hästi rangeid võrratusi kasutada, täpne libisemise piir on realselt saavutamatu.

Jõudude tasakaal horisontaalsihis:

$$F_h = N_s \sin \alpha \quad (3)$$

ja varda sihis (võinuksime soovi korral valida ka muu sihi):

$$N_p \sin \alpha + F_h \cos \alpha = mg \sin \alpha. \quad (4)$$

Olgu d kaugus varda alaotsast toetuspunktini. Jõumomentide tasakaal varda alumiise otsa suhtes annab (jällegi oleksid muud punktid võrdväärselt kasutatavad):

$$mg \frac{\ell}{2} \cos \alpha = N_s d. \quad (5)$$

Avaldame jõud ja asendame võrratustesse:

$$(5), (3) \implies F_h = \frac{mg\ell}{2d} \sin \alpha \cos \alpha, \quad (6)$$

$$(6) \rightarrow (4) \implies N_p = mg \left(1 - \frac{\ell}{2d} \cos^2 \alpha \right), \quad (7)$$

$$\begin{aligned} (6), (7) \rightarrow (1) &\implies \frac{\ell}{2\mu d} \sin \alpha \cos \alpha \leq 1 - \frac{\ell}{2d} \cos^2 \alpha \implies \\ &\implies \ell \leq \frac{2\mu d}{\cos \alpha (\sin \alpha + \mu \cos \alpha)}, \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} (7) \rightarrow (2) &\implies 1 - \frac{\ell}{2d} \cos^2 \alpha \geq 0 \implies \\ &\implies \ell \leq \frac{2d}{\cos^2 \alpha} = \frac{2\mu d}{\mu \cos^2 \alpha}. \end{aligned} \quad (9)$$

(9) on leebem võrratus kui (8), mis on niisiis ℓ ülempiiriks (paremal nimetajas on selleks positiivne liige, $\sin \alpha$, juures). Kuna rangemat alampiiri ei ole, jäab selleks d .

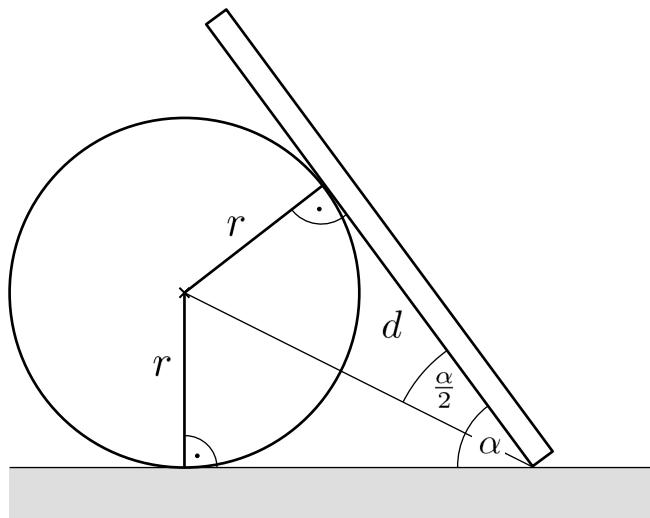
d leidmiseks ühendame varda alaotsa silindri teljega (joonis 2). Tekib kaks võrdset kolmnurka, millest:

$$d = \frac{r}{\tan \frac{\alpha}{2}} = \frac{r \sin \alpha}{1 - \cos \alpha}, \quad (10)$$

$$\begin{aligned} (10) \rightarrow (8) &\implies \ell \leq \frac{2\mu r}{(\sin \alpha + \mu \cos \alpha) \cos \alpha \tan \frac{\alpha}{2}} = \\ &= \frac{2\mu r}{(1 + \mu \cot \alpha)(1 - \cos \alpha) \cos \alpha}. \end{aligned}$$

Kokkuvõttes

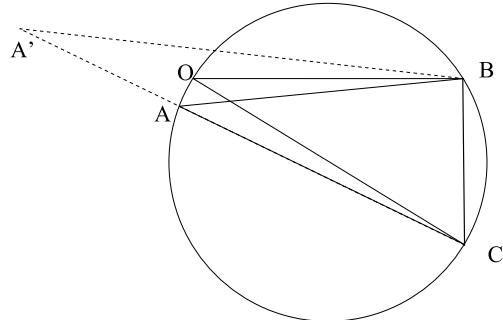
$$\frac{r \sin \alpha}{1 - \cos \alpha} \leq \ell \leq \frac{2\mu r}{(1 + \mu \cot \alpha)(1 - \cos \alpha) \cos \alpha}.$$



L16 Konn ★★★★

Konnale mõjub kolm jõudu: raskusjõud $m\vec{g} = \vec{BC}$, mis on suunatud vertikaalselt alla, jõud $\vec{F} = \vec{CA'}$, mis on suunatud kaldpinna pinnanormaalili sihis (pinna sisse), ning rõhumisjõu ja hõördejõu resultant $\vec{A'B}$, mille nurk pinnanormaaliga $\alpha = \angle CA'B$ ei ületa väärust $\arctan \mu$. Need kolm vektorit moodustavad tasakaalu korral joonisel toodud kolmnurga $A'BC$. Joonisel on ilmne, et antud kaldenurga ($A'C$ sihi) puhul saab konn minimeerida vajalikku jõudu (st lõigu $A'C$ pikkust) suurendades nurga α maksimaalse võimaliku vääruseni $\alpha = \arctan \mu$ (mil $A' = A$). Kui nüüd muuta pinna kaldenurka, siis joonistab punkt A ringjoone kaare (sest punktid B ja C on fikseeritud ning $\angle BAC$ on konstantne ($\arctan \mu$)). Vajalik jõud (lõik AC) on maksimaalne, kui lõik AC on ringi diameetrikas OC , st pinnanormaal moodustab horisondiga nurga $\arctan \mu$ (sest $\angle OBC = 90^\circ$). Seega, sein on vertikaali suhtes kaldus $\arctan \mu$ võrra, moodustades põrandaga teravnurga.

Autor: Taavi Pungas, lahtine, 2010, G 9



Alternatiivne lahendus

Olgu iminapa tekitatud tõmbejõud F , hõördejõud F_h ja normaaljõud N . Jõude tasakaalu tingimusest saame $F_h = mg \sin \theta$ ja $F = N + mg \cos \theta$. Kui konn rakendab minimaalset tarvilikku jõudu, siis

$$F_h = \mu N = mg \sin \theta,$$

ehk

$$N = \frac{mg \sin \theta}{\mu}.$$

Niisiis,

$$F = N + mg \cos \theta = \frac{mg \sin \theta}{\mu} + mg \cos \theta = mg \left(\frac{\sin \theta}{\mu} + \cos \theta \right).$$

Nüüd on vaja leida, millise θ korral on F maksimaalne. Selleks katsume siinuse ja koosinuse summa avaldada ühe siinusena.

Otsime A ja B nii, et kehtiks võrdus

$$A \sin(\theta + B) = \frac{\sin \theta}{\mu} + \cos \theta.$$

Kuna

$$A \sin(\theta + B) = A \sin \theta \cos B + A \sin B \cos \theta,$$

siis $A \sin B = 1$ ja $A \cos B = \frac{1}{\mu}$. Siit saame $\tan B = \mu$ ja

$$A = \sqrt{\frac{1}{\mu^2} + 1} = \frac{1}{\mu} \sqrt{1 + \mu^2}.$$

Seega

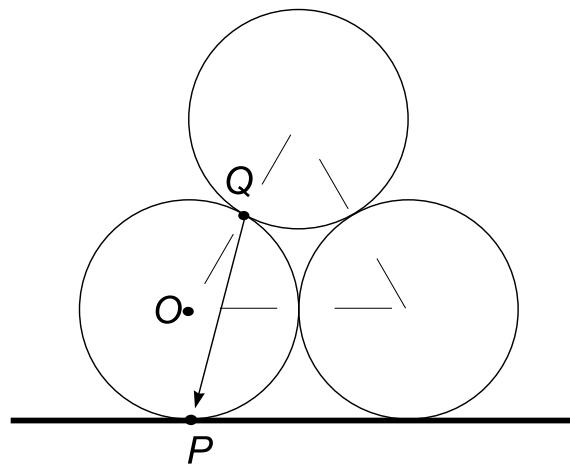
$$F = \frac{mg}{\mu} \sqrt{1 + \mu^2} \sin(\theta + \arctan \mu).$$

Siinuse suurim võimalik väärthus on $\sin(90^\circ) = 1$, ehk $\theta + \arctan \mu = 90^\circ$. Seega on otsitav nurk $\theta = 90^\circ - \arctan \mu$.

L17 Torud ★★★★

Autor: Jaan Kalda, piirkonnavor, 2010, G 10

Kõigepalt paneme tähele, et põhimõtteliselt võiks antud süsteemis toimida rõhumijsjoud kahe alumise silindri vahel, kuid see kaob niipea, kui alumised silindrid natukenelegi üksteisest eemalduvad; niisiis võime sellega mitte arvestada.



Esmalt oletame, et μ on piisavalt suur, nii et vastu põrandat toetuvad torud pigem veerevad kui libisevad (kui k pole piisavalt suur). Vaatleme vastu põrandat toetuvalle torule mõjuvate jõumomentide tasakaalu tingimust toru ja põranda kontakt-punkti P suhtes. Põranda rõhumis- ja hõõrdeju õlg on null; ka raskusjõud mg õlg on null. Vaadeldavale torule mõjub veel vaid üksainus jõud — ülemise toru põhjustatud hõõrde- ja rõhumisjõu resultant, mis on rakendatud puutepunkti Q (vt joonist) ja kui tegemist on libisemise piirjuhuga (st veidigi väiksem hõõrdetegur k viiks libisemisele), siis moodustab see vektor pinnanormaaliga nurga $\arctan k$ (sest antud vektor moodustub üksteisega risti olevate rõhumisjõu N ja hõõrdejõu F_h vektorite resultandina ning nurga tangens on $F_h/N = k$). Et ülejäänuud jõudu-de moment oli null, siis peab ka selle jõu moment olema null, st jõu vektor peab olema suunatud punkti P . Et kolmnurk OQP on võrdhaarne (vt joonist), siis

$$k \geq \tan 15^\circ \approx 0,27.$$

Nüüd oletame, et $k \geq \tan 15^\circ$ ning vaatleme libisemise piirjuhu punktis P . Sel-leks vaatleme jõumomentide tasakaalu punkti Q suhtes. Silindrile mõjuv raskusjõud mg ning punktis P toimiv rõhumisjõud $\frac{3}{2}mg$ (mis kompenseerib poolteise silindri raskusjõu) on rakendatud sirge OP sihis ning nende summaarne jõumoment $\frac{1}{4}mgR$ (kus R on silindri raadius) tasakaalustab hõõrdejõu momendi

$$\frac{3}{2}mg\mu(R + R \sin 60^\circ).$$

Siinjuures arvestasime, et punktis P toimiv hõõrdejõud on μ -kordne rõhumisjõud $\frac{3}{2}mg$ ning on horisontaalne ja omab seetõttu õlga $R + R \sin 60^\circ$. Seega,

$$\mu \geq \frac{1}{6(1 + \sin 60^\circ)} = \frac{1}{6\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)} \approx 0,09.$$

L18 Tungraud ★★★★

Autor: Valter Kiisk, lõppvoor, 2011, G 10

a) Olgu a tungraua vertikaalne ja b horisontaalne diagonaal; Pythagorase teoreemi põhjal $a^2 + b^2 = \text{Const}$, milles erinevates saame

$$2a\Delta a + 2b\Delta b = 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta a = \frac{-b\Delta b}{a} = -\cot \alpha \Delta b.$$

Siinjuures Δa ja Δb on tungraua kõrguse ja laiuse väikesed muutused. Vändaga ühe täispöörde tegemisel $\Delta b = -3 \text{ mm}$. Võrrutades tehtud töö $2\pi l F_k$ (kus l on vända pikkus) potentsiaalse energia muuduga $F\Delta a$, saame

$$F_k = \frac{F \cot \alpha \Delta b}{2\pi l} \approx 24 \text{ N}.$$

Alternatiivne lahendus

Kui vändale rakendatakse pöördemomenti M , siis keerates seda väikese nurga $\Delta\Phi$ võrra tehakse tööd $M\Delta\Phi$. Kuivõrd hõordumine puudub, siis see töö peab olema sama mis $F\Delta H$, kus ΔH on tungraua kõrguse muutus. Niisiis

$$M = F \frac{dH}{d\phi} = F \times \frac{dH}{d\alpha} \times \frac{d\alpha}{dL} \times \frac{dL}{d\phi},$$

kus L on tungraua äärmiste šarniirsete kinnituste vahekaugus. Ilmselt $H = 2a \sin \alpha$, kus $a = 17\text{cm}$. Seega $dH/d\alpha = 2a \cos \alpha$. Teiselt poolt, $L = 2a \cos \alpha$, millest $dL/d\alpha = -2a \sin \alpha$. Vända üks täispööre tingib L muutuse kruvikeerme sammu h võrra: $\Delta L = -(\Delta\Phi/2\pi)h$. Kokkuvõttes

$$M = F \times (2a \cos \alpha) \times \frac{1}{-2a \sin \alpha} \times \frac{-h}{2\pi} = \frac{Fh \cot \alpha}{2\pi}.$$

Tähistades vända õla pikkuse l , saame avaldada otsitava jõu:

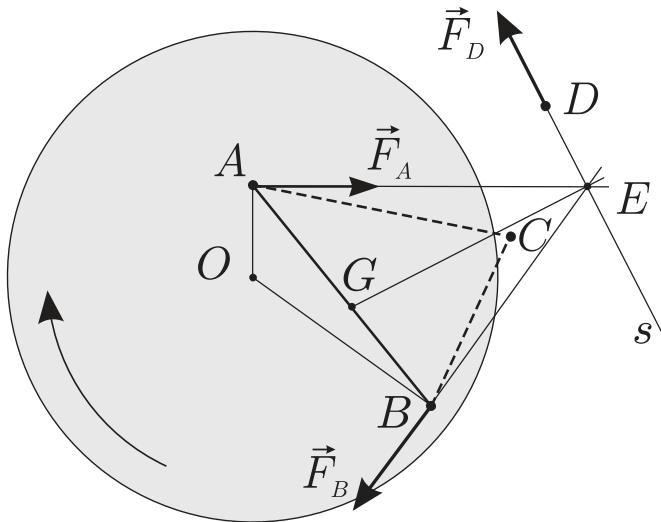
$$F_k = \frac{M}{l} = \frac{Fh \cot \alpha}{2\pi l} \approx 24\text{ N}.$$

b) Kui hõordumist ei ole, siis läheb vändast pööramisel tehtav töö puhtalt auto potentsiaalse energia kasvatamiseks. Kui hõordumine on olemas tekstis kirjeldatud määral, siis vastupidises suunas pööramisel ei ole jöudu peaegu vaja rakenda (tungraud püsib libisemise piiri peal) ja seega on potentsiaalse energi muut oma moodulilt võrdne hõördejõudude tööga. Kui vändata päripidi (auto kergitamiseks), siis hõördejõu töö ei muutu (võrreldes sama nurga võrra vastupidi pööramisega) ja on seetõttu endiselt võrdne potentsiaalse energi muuduga. Niisiis tuleb võrreldes hõördevaba pööramisega sooritada kaks korda suuremat tööd, st rakendatav jõud peab olema täpselt kaks korda suurem, kui esimeses osas. Seega $F_1 = 2F = 48\text{ N}$.

L19 Platvorm ★★★★

Autor: Jaan Kalda, lõppvoor, 2005, G 10

- a)** Kolmnurk hakkab põranda suhtes liikuma, sest summaarne jõumoment punkti C suhtes koosneb kahest liidetavast, mis omavad ühte ja sama märki ning on nullist erinevad. Selles veendumiseks tuleb tõmmata punktidesse A ja B rakendatud hõördejõudude pikendused AE ja BE (E on nende pikenduste lõikepunkt), mis on risti vastavalt raadiustega OA ja OB (vt joonist).
- b)** Süsteemile mõjub kolm horisontaalsuunalist jõudu. Jõumomentide tasakaalu tingimusest järeltub et nende jõudude pikendused peavad lõikuma ühes punktis E . Olgu kolmas keha punktis D . Siis punkti D rakendatud hõördejõud peab olema suunatud piki sirget ED . Teisest küljest, jõudude tasakaalu tingimusest lähtuvalt peavad hõördejõudude vektorid moodustama võrdhaarse kolmnurga $\vec{F}_A + \vec{F}_B + \vec{F}_C = 0$ (võrdhaarse, sest punktidesse A ja B rakendatud jõud on moodulilt võrdsed, $|\vec{F}_A| = |\vec{F}_B|$).



Selletõttu peab vektorite \vec{F}_A ja \vec{F}_D vaheline nurgaga. Niisiis peab sirge ED ristuma nurga $\angle AEB$ poolitajaga EG . See tähendab, et punktihulgaks X on sirge s , mis ristub nurga $\angle AEB$ poolitajaga EG . Lõpetuseks paneme tähele, et hõördejõud \vec{F}_D peab olema moodulilt väiksem, kui \vec{F}_A ja \vec{F}_B , sest muidu toimuks kolmanda keha juures libisemine. Nii ka on, sest nurg $\angle AEB$ on väiksem kui 60° (60° , st võrdkülgse kolmnurga puhul oleks jõudude kolmurgas $\vec{F}_A + \vec{F}_B + \vec{F}_C = 0$ kõik külged vördsed, 60° väiksemate nurkade puhul aga oleks vektor \vec{F}_C oma moodulilt teistest väiksem).

L20 Autod ★

Autor: Oleg Košik, piirkonnavoor, 2006, G 1

Vaatleme jalgratturi liikumist talle vastu sõitvate autode suhtes. Tema kiirus autode süsteemis on $v = v_1 + v_2 = 120 \text{ km/h}$. Seega katavad $n_0 = 20$ autot vahemaa $vt_0 = 10 \text{ km}$ ning terve maantee ulatuses on autosid

$$n = n_0 \frac{s}{vt_0} = 360.$$

L21 Ummik ★

Autor: Jaan Kalda, piirkonnavoor, 2007, G 2

Lõigul C on teatud punkti ajaühikus läbivate autode arv N_C vördsne lõikude A ja B vastavate arvude summaga: $N_C = N_A + N_B$. Olgu autode vahemaa a ja vaadeldav ajavahemik τ . Siis $N_i = v_i \tau / l$, ehk

$$\frac{v_C \tau}{l} = \frac{v_A \tau}{l} + \frac{v_B \tau}{l} \Rightarrow v_C = v_A + v_B.$$

Et $v_B = L_B / t_B$, siis toodud arvude põhjal leiate

$$v_B = \frac{3 \text{ km}}{36 \text{ min}} = 5 \text{ km/h}$$

ning seega $v_C = 8 \text{ km/h}$. Lõpetuseks, $t_A = L_A/v_A = 20 \text{ min}$ ja $t_C = L_C/v_C = 15 \text{ min}$. Niisiis kulub autol aega $T = t_A + t_C = 35 \text{ min}$.

L22 Auto ★

Autor: tundmatu, lahtine, 2008, G 1

Olgu s läbitud vahemaa, a auto kiirendus ning τ aeg, millega auto läbis esimese $4/5$ teest. Kehtivad võrdused

$$s = \frac{at^2}{2}, \quad \frac{4}{5}s = \frac{a\tau^2}{2}.$$

Siit $\tau = 2t/\sqrt{5} \approx 13,4 \text{ s}$. Seega otsitav ajavahemik on $t - \tau \approx 1,6 \text{ s}$.

L23 Ratturid ★

Autor: tundmatu, lahtine, 2009, G 1

Olgu esimese ratturi sõiduaeg tundides t , siis teise ratturi sõiduaeg on $t + 1$ ning kolmanda ratturi oma $t + 2$. Et esimene ja teine rattur sõitsid läbi sama pika vahemaa, saame võrrandi

$$30t = 20(t + 1),$$

kust saame $t = 2$ tundi. Järelkult linnade A ja B vaheline kaugus on $s = 302 = 60 \text{ km kilomeetrit}$. Kolmada ratturi keskmne kiirus oli seega

$$v_3 = \frac{s}{t+2} = 15 \text{ km/h}.$$

L24 Veok ★

Autor: Valter Kiisk, piirkonnnavoor, 2005, G 1

Tähistagu x teepikkust, mille sõiduauto läbib möödasöidi lõpuks (vt joonist) ja olgu t möödasöidioks kuluv ajavahemik. Vahemaa x läbib sõiduauto ühtlase kiirendusega a , alustades algkiirusega v_1 , seega

$$x = v_1 t + \frac{at^2}{2}.$$

Teiselt poolt, veoauto liikumise põhjal

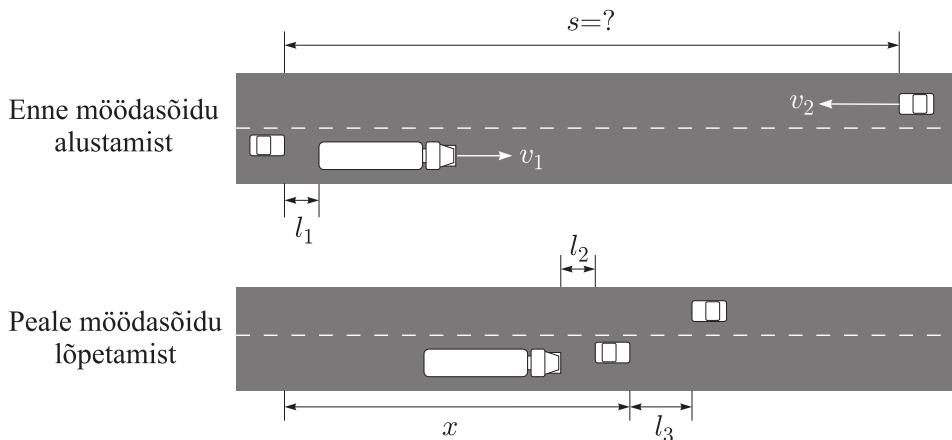
$$x = v_1 t + L_1 + L_2 + l_1 + l_2.$$

Kahe viimase avaldise võrdsustamisel saame

$$\frac{at^2}{2} = L_1 + L_2 + l_1 + l_2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2(L_1 + L_2 + l_1 + l_2)}{a}} \Rightarrow$$

$$s = v_1 t + L_1 + L_2 + l_1 + l_2 + v_2 t + l_3$$

$$s = (v_1 + v_2) \sqrt{\frac{2(L_1 + L_2 + l_1 + l_2)}{a}} + L_1 + L_2 + l_1 + l_2 + l_3 \approx 349 \text{ m}$$



Alternatiivne lahendus

Kasutame möödasõidu aja leidmiseks veoauto taustsüsteemi, kus möödasõitva auto algkiirus on $u = 0$:

$$\frac{at^2}{2} = L_1 + L_2 + l_1 + l_2.$$

Selle aja jooksul lähenevad veoauto ja vastutulev auto vahemaa

$$s_1 = (v_1 + v_2)t$$

võrra, mis tähendab, et möödasõitja algvahemaa on

$$s = s_1 + L_1 + L_2 + l_1 + l_2 + l_3,$$

st (asendades s_1 ja t eelnevatest võrranditest)

$$s = (v_1 + v_2) \sqrt{\frac{2(L_1 + L_2 + l_1 + l_2)}{a}} + L_1 + L_2 + l_1 + l_2 + l_3 \approx 349 \text{ m}.$$

L25 Rongiõnnetus ★

Autor: Oleg Košik, piirkonnnavoor, 2011, G 4

Teisendades kiirusühikuid, saame $v_1 = 17,5 \text{ m/s}$ ning $v_2 = 5 \text{ m/s}$. Olgu t aeg, mis möödus kokkupõrkeni. Kaubarong läbis teepikkuse $s_1 = v_1 t + \frac{1}{2} a_1 t^2$. Elektrirong läbis teepikkuse $s_2 = v_2 t + \frac{1}{2} a_2 t^2$. Kuna $s = s_1 + s_2$, siis

$$s = (v_1 + v_2) t + \frac{1}{2} (a_1 + a_2) t^2.$$

Lahendades ruutvõrrandi, leiate $t = 109 \text{ s}$. Seega kaubarongi kiirus oli kokku põrke hetkel $v_k = v_1 + a_1 t = 6,6 \text{ m/s}$ ehk 24 km/h , elektrirongi oma $v_e = v_2 + a_2 t = 21,4 \text{ m/s}$ ehk 77 km/h .

L26 Sonar ★★

Autor: Oleg Košik, piirkonnavor, 2006, G 3

Sonarist saadetakse välja heli lainepekkusega $\lambda_1 = v_h/f_1$. Helilaine läheneb laevale kiirusega $v_h - v$, seega jõuab laevani helisignaal sagedusega

$$f_L = \frac{v_h - v}{\lambda_1} = f_1 \frac{v_h - v}{v_h}.$$

Peegeldudes laevalt tagasi, liigub helisignaal laeva suhtes kiirusega $v_h + v$. Kuuna laevalt peegeldunud kiirt saab vaadelda kui kiirt, mis on alguse saanud laeva pardal olevalt signaaliallikalt sagedusega f_L , on signaali lainepekkus $\lambda_2 = (v_h + v)/f_L$. Sonari vastuvõtjasse rannikul jõuab signaal sagedusega

$$f_2 = \frac{v_h}{\lambda_2} = f_L \frac{v_h}{v_h + v} = f_1 \frac{v_h - v}{v_h + v}.$$

Avaldame viimasesest võrdusest v :

$$v = v_h \frac{f_1 - f_2}{f_1 + f_2}.$$

Alternatiivne lahendus

Kasutame Doppleri valemit

$$f_2 = f_1 \frac{1 + v_2/v_h}{1 + v_1/v_h},$$

kus saatja ja vastuvõtja lähenevad üksteisele kiirustega vastavalt v_1 ja v_2 .

Kui signaal jõuab rannikult laevani, siis antud olukorras on saatja kiirus $v_1 = 0$ ja vastuvõtja kiirus $v_2 = -v$, sest vastuvõtja (laev) kaugeneb saatjast. Doppleri valemit saab sel juhul kuju

$$f_L = f_1 \frac{v_h - v}{v_h},$$

kus f_L on laevani jõudva signaali sagedus.

Olukorras, kus signaal läheb laevalt tagasi rannikule, on saatja kiirus $v_1 = -v$, sest saatja (laev) kaugeneb vastuvõtjast (rannikult). Vastuvõtja kiirus on aga $v_2 = 0$. Vastavalt Doppleri valemile jõuab sonari vastuvõtjasse rannikul signaal sagedusega

$$f_2 = f_L \frac{v_h}{v_h + v} = f_1 \frac{v_h - v}{v_h + v}.$$

Avaldame viimasesest võrdusest v :

$$v = v_h \frac{f_1 - f_2}{f_1 + f_2}.$$

Märkus: kuivõrd iga realistliku laeva kiiruse puhul $v \ll v_h$, siis on lubatud kasutada ligikaudset Doppleri valemit

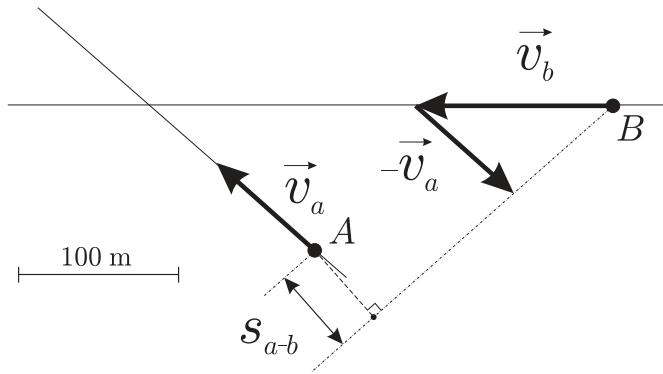
$$f \approx f_0 \left(1 + \frac{v}{v_h} \right).$$

Sama lähendust saab kasutada ka esimese lahenduse puhul.

L27 Autod ★★

Autor: Jaan Kalda, piirkonnavoor, 2008, G 2

Kanname joonisele autode A ja B kiirusvektorid suvalises mõõtkavas (st vektorite moodulid suhtuvad nagu 40:60). Leiame nende vektorite vahe, see on autode suhteline kiirus. Tõmmates ühe auto juurest selle vektori sihilise sirge leiame tema trajektoori teise autoga seotud süsteemis. Teise auto kaugus sellest sirgest annabki vastuse. Mõõtkava arvestamine ja mõistlik numbriline tulemus annab 60 m.



L28 GPS ★★

Autor: Jaan Kalda, lõppvoor, 2009, G 5

Ajahetkel $t_1 = 75$ s tervisesportlane veel jooksis, sest eelmise perioodi keskmine kiirus polnud veel alanenud ($v_0 = 11$ km/h); et ajahetkeks $t_2 = 90$ s oli keskmine kiirus langenud kiiruseni $v_1 = 8$ km/h, siis oli ta seisnud juba ajavahemiku τ_1 , kus $v_1 T = v_0(T - \tau_1)$ ning $T = 15$ s. Seega,

$$\tau_1 = \left(1 - \frac{v_1}{v_0}\right) T.$$

Analoogelt, pärast ajahetke t_2 seisis sportlane veel ajavahemiku τ_2 , kus $v_2 T = v_3(T - \tau_2)$ ning $v_2 = 3$ km/h ja $v_3 = 14$ km/h. Seega,

$$\tau_2 = \left(1 - \frac{v_2}{v_3}\right) T$$

ning kogu peatusaeg

$$\tau = \tau_1 + \tau_2 = T \left(2 - \frac{v_1}{v_0} - \frac{v_2}{v_3}\right) \approx 16 \text{ s.}$$

L29 Tsunami ★★

Autor: Jaan Kalda, lõppvoor, 2005, G 6

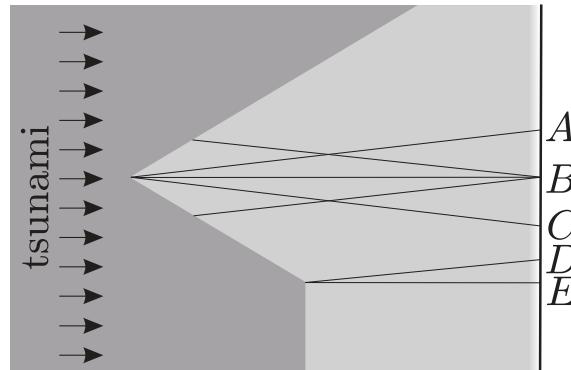
Laine levik toimub geomeetrilise optika seaduste kohaselt: astangu juures on laine langemisnurga ja murdumisnurga suhe

$$\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{\sqrt{gh_1}}{\sqrt{gh_2}} = \sqrt{\frac{h_1}{h_2}} \Rightarrow \alpha_2 = \arcsin \left(\sin \alpha_1 \sqrt{\frac{h_2}{h_1}} \right).$$

Seal astangu osas, kus langemisnurk on 0° , murdumist ei toimu. Seal aga, kus $\alpha_1 = 60^\circ$, on murdumisnurk

$$\alpha_2 = \arcsin \left(\sin 60^\circ \sqrt{\frac{3200}{5000}} \right) \approx 44^\circ.$$

Seega kaldub laine esialgsest levimissuunast kõrvale nurga $\beta = \alpha_1 - \alpha_2 = 16^\circ$ võrra. Niisiis jõuab rannalõigule *AC* kaks lainet ning rannalõigule *DE* ei jõua üldse lainet. Punkt *B* jõuavad mõlemad lained üheaegselt (sümmeetria tõttu) ning seal ongi laine kõige kõrgem.



L30 Hävitusalennuk ★★

Autor: tundmatu, lahtine, 2011, G 7

Olgu hetkel, mil Mati käivitab stopperi, lennuki horisontaalsuunaline kaugus temast x_1 . Tähistame lennuki lennukõrguse H , posti pikkuse h ja kauguse L . Tekitib kaks kujutletavat täisnurkset sarnast kolmnurka, mille ühise nurga tipus asub Mati. Nendest saame (kasutades eeldust, et ilmselt $l \ll H$):

$$\frac{H - l}{x_1} \approx \frac{H}{x_1} = \frac{h - l}{L}.$$

Kui lennuk on jõudnud üle Mati pea, jõuab temani lööklaine hetkel, mil lennuki horisontaalkaugus x_2 Matist on

$$x_2 = \frac{H}{\tan \left(\frac{\alpha}{2} \right)} = \frac{H}{\tan \left(\arcsin \left(\frac{u}{v} \right) \right)} = \frac{H}{u} \sqrt{v^2 - u^2}.$$

Olgu τ mõõdetud aeg. Stopperi käivitamise hetkest seiskamiseni liikus lennuk vahemaa

$$x_1 + x_2 = H \left(\frac{\sqrt{v^2 - u^2}}{u} + \frac{L}{h-l} \right) = v\tau \Rightarrow H = \frac{v\tau}{\left(\frac{\sqrt{v^2 - u^2}}{u} + \frac{L}{h-l} \right)} \approx 1630 \text{ m.}$$

L31 Fotograaf ★★★★

Autor: Jaan Kalda, lõppvoor, 2011, G 6

Olgu pilu laius d , katiku kiirus u ja piisa kujutise kiirus sensori tasandis v . Katku taustsüsteemis liigub piisa kujutis kiirusega $u \pm v$; kui fotoaparaat on päripidi, siis tuleb võtta märk „+“ ja kui tagurpidi, siis „–“. Seega on piisa jälje tekkimise aeg $d/|u \pm v|$ ning jälje pikkus $l = vd/|u \pm v|$. Olgu $u \geq v$; siis

$$l_1 = \frac{vd}{u+v}, \quad l_2 = \frac{vd}{u-v}.$$

Jagades teise võrrandi esimesega saame

$$\frac{u+v}{u-v} = \frac{l_2}{l_1} = \frac{5}{3},$$

millest

$$3u + 3v = 5u - 5v,$$

ehk

$$u = 4v.$$

Kui fotoaparaat on portreeasendis, siis viibib piisa kujutis pilus ajavahemiku d/u jooksul ja jälje pikkus on seega

$$l_3 = vd/u.$$

Esimese võrrandiga läbi jagades leiame, et $l_3/l_1 = 1 + \frac{v}{u} = \frac{5}{4}$ ning

$$l_3 = \frac{5}{4}l_1 = 150 \text{ pikselit.}$$

Kui $u < v$, siis muutub ainult teine võrrand,

$$l_2 = \frac{vd}{v-u},$$

mistõttu $3u + 3v = 5v - 5u$ ja $u = v/4$, mistõttu

$$l_3 = 5l_1 = 600 \text{ pikselit.}$$

Märkus 1: ülesande teksti põhjal on see üks kahest võimalikust vastusest; reaal-selt, arvestades tüüpilist katiku liikumiskiirust (18 mm läbimisaeg $\frac{1}{125}$ s $\Rightarrow u =$

$2,25 \text{ m/s} \implies v = 4u = 9 \text{ m/s}$), on siiski üsna raske saavutada, et $v = 4u$: pildistamine peaks toimuma ohtlikult lähedalt. Kui joa kõrgus oleks nt 100 m, siis vaabalangenud piisa kiirus oleks ca 44 m/s, mistõttu pildistamiskauguse ja objektiivi fookuskauguse suhe (st suurendustegur) tuleks $44/9 \approx 5$ ning isegi teleobjektiivi (nt $f = 300 \text{ mm}$) korral peaks fotograaf olema joast vaid 1,5 m kaugusel.

Märkus 2: eeldusest, et „pilu laius on d “ võib jäääda mulje, justkui eeldanuks me vaikimisi, et sensor ei jõua säritud ajal täielikult avaneda. Ometigi kehtib lähendus ka siis, kui säriaeg on nii pikk, et sensor jõuab täielikult avaneda: piltlikult võib ette kujutada, et ikkagi mõlemad kardinad liiguavad samaaegselt, kuid pilu laius on suurem sensori kõrgusest, st esimene kardin jõuab sensori kohalt eemale minna enne teise kardina saabumist.

L32 Laev ★★★★

Autor: tundmatu, lõppvoor, 2007, G 5

Näitame, et laev peab sõitma nii, et voolukiirused stardihetkel t_s ja finišihetkel t_f on võrdsed, $v(t_s) = v(t_f)$. Teeme seda vastuväiteliselt. Vaatleme konkreetse mõttes liikumist B suunas, mil laeva kiirus kalda suhtes on $v_0 + v(t)$. Sellisel juhul on läbitud vahemaa L graafiku $v(t)$ ja joone $v = -v_0$ vahelise piirkonna pindala. Nihutame stardi ja finišiaega väikese ajavahemiku Δt võrra. Läbitav vahemaa muutub seejuures $\Delta t(v_f - v_s)$ võrra. Kui $v(t_s) \neq v(t_f)$, siis saame valida Δt märgi selliselt, et $\Delta t(v_f - v_s) > 0$, st sama aja jooksul läbitud vahemaa kasvab saades suuremaks L . Seega saaks sõiduaega vähendada ning stardihetk polnud optimaalne.

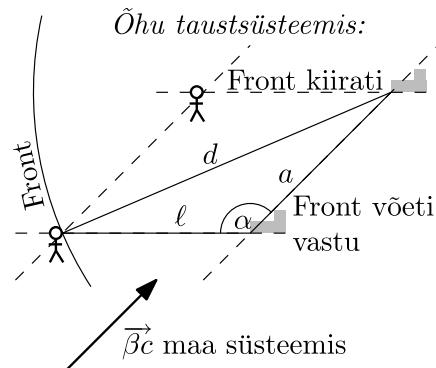
Eelpool selgitatud tingimustele (stardi- ja finišihetke kiirused on võrdsed, graafiku ja joone $v = -v_0$ vaheline pindala võrdub 20 km-ga) vastavad stardiajad punktist A 22.20 ja punktist B 04.20.

L33 Müra ★★★★

Autor: Siim Ainsaar, lahtine, 2009, G 10

Õhu taustsüsteemis on helilainefrondid kiirusega c kasvava raadiuse ja paigaloleva keskmega poolsfäärid. Helivõimsus jaotub ühtlaselt üle terve frondipinna, seeaga on tajutav võimsus pöördvõrdeline frondi pindalaga ehk pöörvõrdeline frondi raadiuse ruuduga. Lisaks on võimsus ka võrdeline frontide vastuvõtmise sagedusega ehk võrdeline helisagedusega, aga nagu peagi leiame, on sagedus konstant.

Õhu taustsüsteemis liiguvald nii matkaja kui ka jaam vastu esialgsele tuule suunale kiirusega βc . Järelikult kui front oli vastuvõtmise hetkeks raadiusega $d = ct$, siis selle kiirgamise alguspunkt oli liikunud jaama suhtes allatult kaugusele $a = (\beta c)t = \beta d$. Et see kaugus on kõigile frontidele ühesugune, on sama ka frontide teeloleku aeg ning aeg kahe frondi kiirgamise vahel võrdub ajaga nende vastuvõtmise vahel. Seega helisagedus ei muudu. Olgu



jaama kaugus ℓ . Rakendame tekinud kolmnurgale koosinusteoreemi:

$$d^2 = a^2 + \ell^2 - 2a\ell \cos \alpha.$$

Kuna $x = \left(\frac{\ell}{d}\right)^2$ ja $\cos 135^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, saame \sqrt{x} leidmiseks ruutvõrrandi, kusjuures ℓ taandub välja (karakteristlik pikkusmõõde puudub).

$$\begin{aligned} \frac{\ell^2}{x} &= \frac{\beta^2 \ell^2}{x} + \ell^2 + \frac{\sqrt{2}\beta\ell^2}{\sqrt{x}} \\ x + \sqrt{2}\beta\sqrt{x} + \beta^2 - 1 &= 0 \\ x = \left(\frac{-\sqrt{2}\beta \pm \sqrt{2\beta^2 - 4\beta^2 + 4}}{2}\right)^2 &= \frac{(-\beta \pm \sqrt{2-\beta^2})^2}{2} = 1 \mp \beta\sqrt{2-\beta^2}. \end{aligned}$$

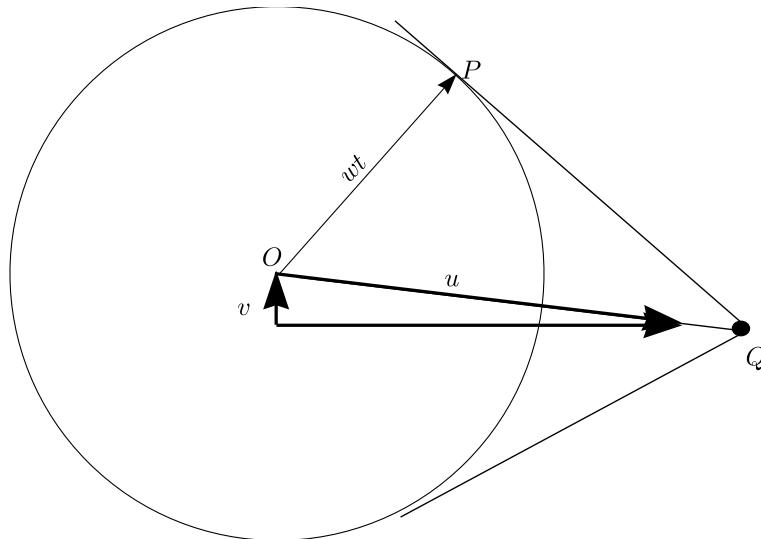
Heli jääb vaiksemaks, mistõttu $x < 1$ ja peame valima miinusmärgiga lahend

$$x = 1 - \beta\sqrt{2 - \beta^2}.$$

L34 Kaater ★★★★

Autor: Jaan Kalda, lõppvoor, 2009, G 8

a) Veega seotud taustsüsteemis liiguval lained paadi trajektoori suhtes sümmeetriselt. Seega, veega seotud taustsüsteemis on paadi trajektoor lainetest moodustatud nurga poolitaja. Paadi kiirusest \vec{u} , jõe voolukiirusest \vec{v} ja paadi kiirusest maa suhtes moodustub kiiruste kolmnurk, vt joonis. Joonisel mõõdame selle kolmnurga teravama nurga siinuse, $\sin \alpha = v/u = 0,26$, millest $v = 1,8 \text{ m/s}$.



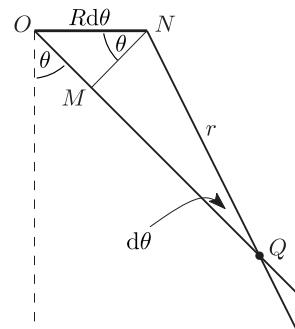
b) Kui paat tekitas teatud punktis häirituse, siis levis see ajaga t kaugusele wt (nähtavaks paadilaineks on selliste ringide mähisjoon), paat aga liikus kaugusele ut . Seega leiame joonisel pikkuste suhte abil $w/u = |OP|/|OQ| = 0,64$, millest $w = 4,5 \text{ m/s}$. Järelikult on vee sügavus $h = w^2/g = 2 \text{ m}$.

L35 Kodarad ★★★★

Autor: tundmatu, lahtine, 2011, G 10

Kodara antud punkt näib kujutisel terav, kui selle kiirusvektor on suunatud pikki kodarat, st antud punktis kodar ei liigu enese ristsihis.

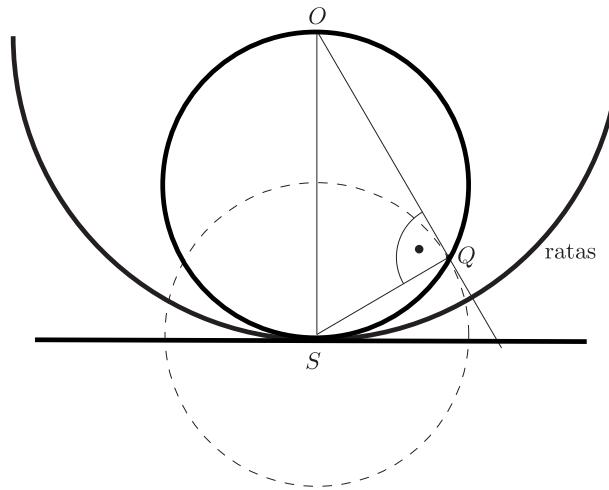
Olukorda võib selgitada juuresoleva joonise abil. Olgu R ratta raadius ja oltu selle keskpunkt O . Kui kodara pöördenurk on θ ning see nurk muutub pildistamise jooksul nurga $d\theta$ võrra, siis O on läbinud teatud vahemaa ($R d\theta$), aga kodar on samuti pöördunud sama nurga ($d\theta$) võrra. Jooniselt on näha, et uuel ja vanal kodara asendil on üks ühine punkt, oltu see punkt Q . Nii pildistamise alg- kui ka lõpphetkel asus selles punktis kodar, mistõttu kujutisel jäab see punkt selgelt näha (erinevalt teistest punktidest, kus kodar viibis vaid lühiajaliselt).



Kasutades eeltoodud joonist (kus tähistasime $OQ = r$) võime avaldada lõigu MN pikkuse kahel viisil: $R d\theta \cos \theta = r d\theta$, kus paremal pool kasutasime väikese nurga lähendust $\sin d\theta \approx d\theta$. Seega $R \cos \theta = r$, mis tähendab, et (a) punkt Q on leitav kodara lõikepunktina ratta ja maa kontaktpunktist S kodarale tömmatud ristsirgega (vt järgnev joonis); (b) vaadeldes seda võrdust kui raadiuse r sõltuvust polaarnurgast θ näeme, et ülejää nud kodarate teravalt kujutuvad punktid asuvad ringjoonel, mille diameetriks on ratta raadius OS .

Alternatiivne lahendus

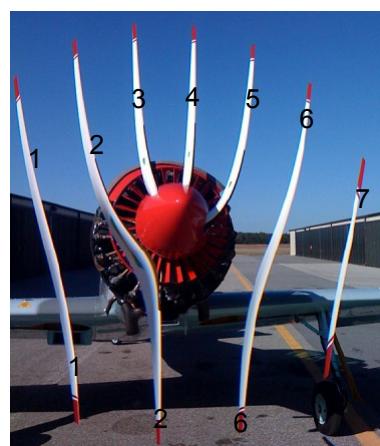
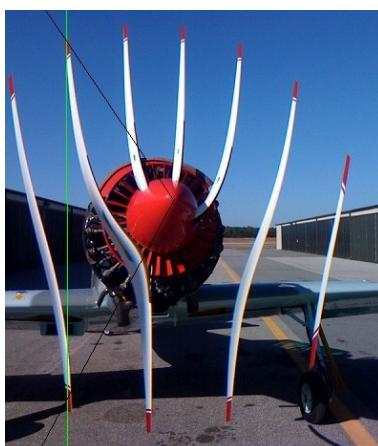
Pildistamise hetkel pöörleb kogu ratas ümber hetkelise pöörlemistelje, mis läbib ratta ja maa puutepunkti S (vt. joonist). Sellel hetkel liigub iga ratta osake mööda ringjoone kaart, mille keskpunktiks on S . Kui ühe sellisel moel liikuva punkti kiirus on mööda kodarat (OP), siis see punkt kujutub fotol selgema. Seega me otsime selliseid punkte Q , mille juures $\angle OQS$ on täisnurk. Piirdenurga omaduse põhjal peab selline punkt Q lebama ringjoonel, mille diameetriks on OS — sõltumata kodara kaldenurgast θ .



L36 Propeller ★★★★

Autor: Andreas Valdmann, lõppvoor, 2010, G 10

- a)** Propeller pöörleb vastupäeva, sest pildi ülaosas liiguvad labad vastu parajasti salvestatavale pikseliveerule ja seetõttu paiknevad seal labade kujutised tihedamalt.
- b)** Vasakpoolsel joonisel on ülalt alla tömmatud üks veerg millel on korraga peal maksimaalset 2 laba. Kui labasid oleks 2, peaks veerus paistma korraga vaid üks laba. Labad ise on kantud joonisele mustaga. Näha on, et labade vaheline nurk on suurem kui 90 kraadi ja seega on propelleril kolm laba.

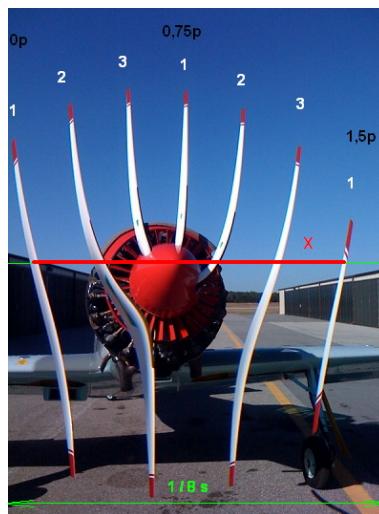


Alternatiivne lahendus

Tähistame labade tekitatud jooned numbritega 1 kuni 7, nii nagu näidatud parekpoolsel joonisel. Joonise alumises servas eelneb joon 2 joonele 6. See tähendab, et joonele 2 vastav laba peab eelnema joonele 6 vastavale labale. Joonise ülemise serva põhjal võime analoogselt väita, et joonele 5 vastav laba peab eelnema joonele 6

vastavale labale. Järelikult peavad jooned 5 ja 2 vastama samale labale. Ülemises servas jäääb joonte 5 ja 2 vahel veel 2 joont, st sellele labale vastavad jooned korduvad perioodiga 3 joont. See periood peab olema propelleri labade arvu n kordne. Et 3 on algarv, siis ainus variant on $n = 3$.

c) Iga kolmas triip pildil kujutab sama propellerilaba. Järgneval joonisel on valgega nummerdatud labad; propelleri telje kõrgusel on tömmatud joon mille kogupikkus moodustus pildistamise aja jooksul ehk kogupikkus on $1/8$ s. Punasega on märgitud aeg millega laba number üks jõudis liikuda 1,5 pööret. Punase osa pikkus moodustab ligikaudu $4/5$ pildi kogulaiusest. Seetõttu moodustab ka nende punktide ajaline intervall $4/5$ pildi tegemise koguajast. Selle aja jooksul teeb propeller poolteist pööret. Ühes sekundis teeb propeller $1,5/(1/8 \cdot 4/5) = 15$ pööret ja ühes minutis $15 \cdot 60 = 900$ pööret.



L37 Kivi ★

Autor: Aigar Vaigu, lõppvoor, 2005, G 1

Läheme üle vabalt langevasse taustsüsteemi. Selles süsteemis liiguvad vabalt langevad kehad konstantse kiirusega. Kivi saavutab langevas süsteemis palli viskamise hetkeks, Δt , õhupalli suhtes suhetlike kiiruse $u = g\Delta t$; see ei tohi olla suurem, kui maksimaalne viskekiirus v_{\max} . Seega

$$\Delta t \leq \frac{v_{\max}}{g}.$$

Avaldame palli viskekiiruse energia jäätuse seadusest:

$$\frac{mv_{\max}^2}{2} = mgh \quad \Rightarrow \quad v_{\max} = \sqrt{2gh}.$$

Maksimaalne viivituse aeg on seega

$$\Delta t_{\max} = \frac{v_{\max}}{g} = \sqrt{\frac{2h}{g}} \approx 2 \text{ s.}$$

L38 Pallid ★

Autor: tundmatu, lahtine, 2007, G 1

Ühesuguse massiga pallide elastse kokkupõrke tulemusena vahetavad nad oma kiirusevektorid (järeldub lihtsalt impulsi ja energia jäävusest massikeskme süsteemis vaadatuna). Seega võime sama hästi öelda, et pallid lähevad üksteisest vabalt läbi, kusjuures ühe palli algkiirus ja teise palli lõppkiirus on võrdsed nulliga. Kui Juku istub körgusel h , siis saame mõlema vabalt liikuva palli jaoks lennuajaks $t = \sqrt{2h/g}$. Seega tabavad pallid viskajaid üheaegselt.

Alternatiivne lahendus

Kui Juku visatud pall jõuab täpselt tagasi oma algkõrgusele, siis peab tema kiiruse absoluutväärtsus vahetult kokkupõrke eel ja vahetult kokkupõrke järel olema sama. Elastse kokkupõrke korral kehtib energia jäävus, järelikult võrdub ka Juhani palli kiiruse absoluutväärtsus vahetult kokkupõrke eel kiiruse absoluutväärtsusega vahetult kokkupõrke järel. Seega liigub kumbki pall tuldud suunas tagasi nii, et liikumise ajagraafik on peegelsümmeetiline põrkehetke suhtes. Seega, kui nad startisid samaaegselt, siis nad ka finišeerivad samaaegselt.

L39 Hobune ★

Autor: Valter Kiisk, piirkonnnavoor, 2007, G 1

Vaba langemise aeg

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 3}{9,81}} \approx 0,78 \text{ s}$$

Seega otsitav kaugus on $s = vt = 10 \text{ m/s} \cdot 0,78 \text{ s} = 7,8 \text{ m}$.

L40 Eiffeli torn ★

Autor: Aigar Vaigu, piirkonnnavoor, 2010, G 1

Kontrollime, kui kaua kukub raudkuul ülemiselt vaateplatvormilt $h = 273 \text{ m}$ maapinnale.

$$h = \frac{gt^2}{2} \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2h}{g}} \approx 7,5 \text{ s.}$$

Alates hetkest, kui mõlemad kuulid langevad, on nende suhteline kiirus muutumatu, sest mõlemad kuulid on siis vabalt langevas taustsüsteemis paigal. Leiate esimese kuuli kiiruse teise kuuli kukutamise hetkel.

$$v = gt \approx 29,4 \text{ m/s.}$$

Ajavahemik kuulide maapinnale jõudmisel on sama mis kuulide kukutamiselgi ehk $t = 3 \text{ s}$.

L41 Kokkupõrge ★

Autor: Andreas Valdmann, piirkonnavor, 2011, G 1

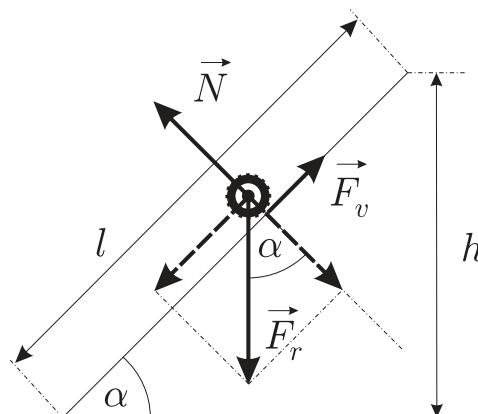
a) Autode kiirused on võrdsed ja vastassuunalised. Seetõttu on koguimpulss võrdne nulliga ja autod jäavat pärast kokkupõrget paigale. Kogu esialgne kineetiline energia kulub purustuste tekitamiseks. Selleks on $2\frac{mv_a^2}{2} = mv_a^2$. Autode kiirused on $50 \text{ km/h} = 13,9 \text{ m/s}$ ja koguenergia on 289 kJ .

b) Minnes üle massikeskme taustsüsteemi näeme, et olukord taandub eelmiseks olukorraks, seega kokkupõrke koguenergia on 289 kJ .

L42 Tõus ★

Autor: tundmatu, lahtine, 2005, G 2

Autole mõjuv veojõud on määratud tee ja rataste vahelise hõõrdeteguriga. Antud juhul hõõrdumine ei takista liikumist, vaid vastupidi, on liikumise aluseks. Kui hõõrdetegur oleks võrdne nulliga, siis ei saaks auto üldse edasi liikuda. Kanname joonisele kõik autole mõjuvad jõud (vt joonist): raskusjõu $\vec{F}_r = mg$, tooreaktsiooni $\vec{N} = mg \cos \alpha$ ja hõõrdejõuga võrdse veojõu $\vec{F}_v = \mu mg \cos \alpha$.



Paneme kirja energia miinimumitingimuse mäkke töusu jaoks:

$$E_h = E_0 + A,$$

kus $E_h = mgh = mgl \sin \alpha$ on auto potentsiaalne energia mäe tipus, $E_0 = mv^2/2$ on auto kineetiline energia mäe jalamil ning $A = F_v l = \mu mgl \cos \alpha$ on auto mäkke vedamiseks hõõrdejõu poolt tehtud töö. Saame

$$mgl \sin \alpha = \frac{mv^2}{2} + \mu mgl \cos \alpha.$$

Sellest võrrandist saame avaldada otsitava hõõrdeteguri:

$$\mu = \tan \alpha - \frac{v^2}{2gl \cos \alpha} = \tan 5^\circ - \frac{(30 \cdot 1000/3600)^2}{2 \cdot 9,8 \cdot 200 \cdot \cos 5^\circ} \approx 0,07.$$

Arvestades, et libedal jääl võib hõõrdetegur langeda alla 0,05, võib meie auto teoreetiliselt koju jäädä, kui tee on libe, seda pole õigeaegselt liivatatud ja autol pole naastrehve all.

L43 Keha ★

Autor: tundmatu, lahtine, 2006, G 3

Üles visatud keha koordinaadi leiame võrrandist:

$$h = v_0 t - \frac{gt^2}{2}.$$

Iga antud v_0 ja h jaoks annab see võrrand kaks t väärust:

$$t_{1,2} = \frac{v_0 \pm \sqrt{v_0^2 - 2gh}}{g}.$$

Nende kahe vääruse vahe on ajavahemik, mis möödub kõrguse h kahe läbimise vahel keha poolt:

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{2\sqrt{v_0^2 - 2gh}}{g}. \quad (1)$$

Siit saame, et

$$v_0 = \sqrt{2gh + \frac{g^2 \Delta t^2}{4}}.$$

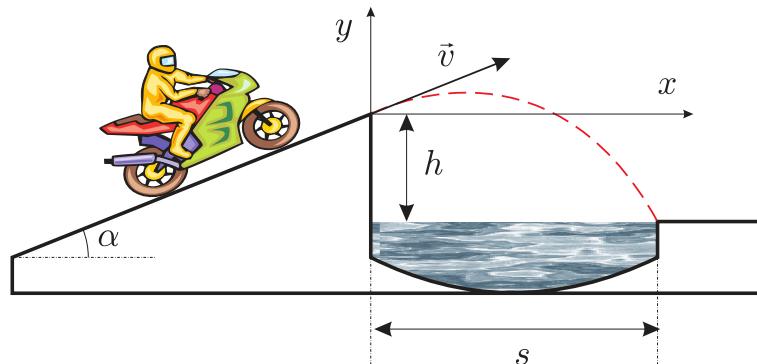
Kui valemis (1) võtta $h = 0$, siis saame ajavahemiku, mis möödub liikumise algusest kuni jõudmiseni tagasi algpunkt: $\tau = 2v_0/g$. Asendades siia varem saadud v_0 vääruse, saame:

$$\tau = 2\sqrt{\frac{2h}{g} + \frac{\Delta t^2}{4}}.$$

L44 Mootorratas ★

Autor: tundmatu, lahtine, 2007, G 5

Suuname koordinaatteljed nii, nagu näidatud joonisel.



Mootorratturi liikumist kirjeldavad seosed

$$x = vt \cos \alpha, \quad y = vt \sin \alpha - \frac{gt^2}{2},$$

kust saame

$$y = x \tan \alpha - \frac{gx^2}{2v^2 \cos^2 \alpha}.$$

See on parabooli võrrand. Asendades siia mootorratturi langemiskoha koordinaatid $x = s$ ja $y = -h$, leiate minimaalse kiiruse

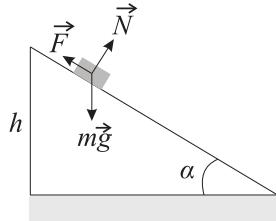
$$\begin{aligned} -h &= s \tan \alpha - \frac{gs^2}{2v^2 \cos^2 \alpha} \Rightarrow \frac{gs^2}{2v^2 \cos^2 \alpha} = h + s \tan \alpha \Rightarrow \\ \Rightarrow 2v^2 \cos^2 \alpha &= \frac{gs^2}{h + s \tan \alpha} \Rightarrow v^2 = \frac{gs^2}{2 \cos^2 \alpha (h + s \tan \alpha)} \Rightarrow \\ v &= \frac{s}{\cos \alpha} \sqrt{\frac{g}{2(h + s \tan \alpha)}}. \end{aligned}$$

L45 Kelk ★

Autor: tundmatu, lahtine, 2008, G 2

Kehtib energia jäävuse seadus. Algul on kelk kõrgusel h ja omab potentsiaalset energiat mgh . See energia kulutatakse hõõrdejõu ületamise tööks mõlemal mäenõlval ja kelgu uueks tõusuks vajaliku potentsiaalse energia peale. Energia jäävust väljendab valem

$$mgh = A_1 + A_2 + mgh_2, \quad (1)$$



kus h_2 on kelgu lõppkõrgus. Hõõrdejõud mõlemal nõlval avaldub kujul $F = \mu N = \mu mg \cos \alpha$. Teepikkus laskumisel on $s_1 = h / \sin \alpha$ ning tõusul $s_2 = h_2 / \sin \alpha$. Seega tehtud töö hõõrdejõu ületamiseks on

$$A_1 = F s_1 = \mu mgh / \tan \alpha$$

ja

$$A_2 = F s_2 = \mu mgh_2 / \tan \alpha.$$

Asendades saadud seosed valemissesse (1) saame

$$h_2 = \frac{1 - \mu / \tan \alpha}{1 + \mu / \tan \alpha} h \approx 7 \text{ m.}$$

L46 Hantel ★

Autor: Mihkel Kree, lõppvoor, 2008, G 1

Kehale antakse energia $E_k = \frac{mv^2}{2}$. Massikese saab impulsi $p_c = mv$ ning hakkab vertikaalsuunas liikuma kiirusega

$$v_c = \frac{p_c}{m+m} = \frac{v}{2}$$

ning süsteemi kuligliumise energia on seega

$$E_v = \frac{v_c^2(m+m)}{2} = \frac{mv^2}{4}.$$

Kui keha saavutab maksimaalse kõrguse, on tema kuligliumise energia täielikult muutunud potentsiaalseks energiaks ning süsteemi kineetiline energia on nüüd

$$E = E_k - E_v = \frac{mv^2}{4}.$$

L47 Pingpong ★

Autor: Siim Ainsaar, lõppvoor, 2008, G 2

Kui pall tõuseb kahe järjestikuse põrke vahel (pärast i-ndat põrget) kõrgusele h_i , saame nende põrgete vahelise ajavahemiku t_i :

$$h_i = \frac{g\left(\frac{t_i}{2}\right)^2}{2} \Rightarrow t_i = 2\sqrt{\frac{2h_i}{g}}.$$

Igas lennu haripunktis on palli kiirus ja ka kineetiline energia null ning kogu-energia E_i potentsiaalne. Kui palli mass on m , siis $E_i = mgh_i$ ja on võrdeline haripunkti kõrgusega h_i . Seega ka haripunkti kõrgus kahaneb pärast igat põrget k korda: $h_{i+1} = \frac{h_i}{k}$. Ilmselt selles seoses $h_0 = h$.

Kukkumise aeg enne esimest põrget:

$$t_0 = \frac{2h}{g}.$$

Nii saamegi koguaja:

$$\begin{aligned} t &= t_0 + t_1 + t_2 + \dots = \sqrt{\frac{2h}{g}} + 2\sqrt{\frac{2h}{gk}} + 2\sqrt{\frac{2h}{gk^2}} + 2\sqrt{\frac{2h}{gk^3}} + \dots = \\ &= \sqrt{\frac{2h}{g}} + 2\sqrt{\frac{2h}{gk}} \left[1 + \left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)^1 + \left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)^3 + \dots \right] = \\ &= \sqrt{\frac{2h}{g}} + \sqrt{\frac{2h}{gk}} \frac{1}{1 - \frac{1}{\sqrt{k}}} = \sqrt{\frac{2h}{g}} + 2\sqrt{\frac{2h}{g}} \frac{1}{\sqrt{k}-1} = \\ &= \sqrt{\frac{2h}{g}} \left(1 + \frac{2}{\sqrt{k}-1} \right) = \frac{\sqrt{k}+1}{\sqrt{k}-1} \sqrt{\frac{2h}{g}}. \end{aligned}$$

L48 Mürsk ★

Autor: Mihkel Kree, piirkonnavor, 2009, G 2

Tähistame mürsu kiiruse lagunemishetkel v -ga. Vahetult pärast lagunemist peab ühe poole kiirus olema samuti v , kuid vastassuunaline. Olgu teise osa kiirus sel hetkel u . Impulsi jäädvuse tõttu

$$Mv = \frac{M}{2}u - \frac{M}{2}v,$$

millest $u = 3v$. Vahetult pärast lagunemist kuulidel vertikaalne kiiruskomponent puudub, seetõttu võtab kummagi tüki langemine võrdselt aega. Teine tükki maandub kahurist kaugusele $L + 3L = 4L$.

L49 Kerad ★

Autor: Valter Kiisk, lahtine, 2010, G 1

Õõnes ja homogeenne kera eristuvad selle poolest, et esimese inertsimoment on suurem, sest mass on koondunud pöörlemistsentrist kaugemale, st sama nurkkiirusega pööreldes on pöörlemisega seotud kineetiline enregia suurem. Niisiis võrdse kineetilise energia omadamisel (näiteks sama kalpdinda mööda alla vee redes) saavutab õõnes kera väiksema kiiruse (sest pöörlemisega seotud energia on suurem).

Vedeliku sisaldava kera korral kulub aga osa liikumise energiast paratamatult vedeliku sisehõordumise ületamiseks, seetõttu mehaanilise energia jäädvus on katsetes rikutud (näiteks lükkame kerad veerema; vedeliku sisaldav kera pidurdub iseenesest).

L50 Sild ★

Autor: Valter Kiisk, lõppvoor, 2010, G 1

Olgu sillal kõverusraadius r . Pythagorase teoreemist

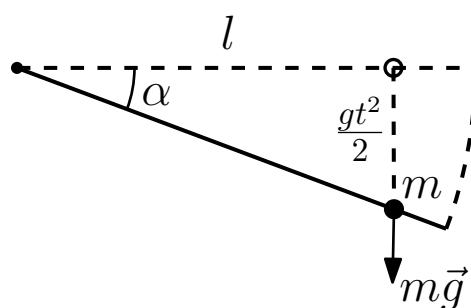
$$r^2 = (l/2)^2 + (r-h)^2 \implies 0 = l^2/4 - 2rh + h^2.$$

Kuna $h \ll l$ ja seega $h \ll r$, siis h^2 võib ära jäätta ja $r = l^2/8h = 250$ m. Auto raskusjõu mg ja tooreaktsiooni N resultant annab kesktõmbekiirenduse v^2/r . Seega $N = mg - mv^2/r \approx 8700$ N.

Kontakt rataste ja maapinna vahel hakkab kaduma, kui $N = 0$. Seega $v = \sqrt{gr} \approx 180$ km/h.

L51 Varras ★

Autor: Stanislav Zavjalov, lõppvoor, 2011, G 2



Kuna varras on kaalutu, peab sellele mõjuv summaarne jõud olema 0. Vastasel korral mõjuks sellele Newtoni III seaduse kohaselt lõpmatu jõud, mis pole füüsikaline. Sellest saab järel dada, et massile mõjuv normaaljõud on null ning hõõrdeta libisemise tõttu on ka vardaga paralleelne jõukomponent null. Seega ei mõju massile varda poolt ükski jõud ning mass on vabalanguses.

Aja t jooksul jõuab mass langeda vahemaa $\frac{gt^2}{2}$ ning varda ja horisontaali vaheline nurk avaldub kui (vt joonist) $\tan \alpha = \frac{gt^2}{2L}$.

L52 Karatist ★★

Autor: tundmatu, lahtine, 2007, G 6

Laua paindumist käsiteleme sarnaselt vedru paindumisega. Laua elastsusenergia enne purunemist on $E = kx^2/2$. Eeldame, et pärast plastset põrget toimuval liikumisel on mehaaniline energia jäav ning lauajupp ja käsi peatuvad vahetult pärast lööki. Käe ja laua kokkupõrge — löök — on täielikult mitteelastne. Seega peab pärast lööki laua ja rusika kineetilisest energiast

$$W = \frac{(m + M)u^2}{2}$$

piisama laua deformeerimiseks.

$$E = W \Rightarrow u = \sqrt{\frac{kd^2}{m + M}},$$

kus u on laua ja käe kiirus pärast lööki. Löögi hetkel kehtib impulsi jäävus

$$(m + M)u = mv \Rightarrow v = \frac{m + M}{m}u.$$

Kokkuvõttes saame

$$v = \frac{m + M}{m} \sqrt{\frac{kd^2}{m + M}} = \sqrt{\frac{kd^2(m + M)}{m^2}},$$

$$v = \sqrt{\frac{1,4 \cdot 10^5 \cdot 0,02^2 \cdot (1,5 + 2)}{1,5^2}} \approx 9,3 \text{ m/s.}$$

L53 Veenus ★★

Autor: Mihkel Kree, lõppvoor, 2007, G 2

- a) Maksimaalse eemaldumise korral moodustub Maast, Veenusest ja Päikesest täisnurkne kolmnurk, mille täisnurga tipp on Veenus. Siit saame Veenuse ja Maa orbitaalraadiuste suhte

$$\alpha = \sin 46^\circ = 0,72.$$

- b) Veenuse tiirlemisperioodi saame Kepleri seadusest

$$T_V = T_M \sqrt{\alpha^3}.$$

Maa tiirlemise nurkkiirus $\omega_M = \frac{2\pi}{T_M}$ ning Veenuse tiirlemise nurkkiirus $\omega_V = \frac{2\pi}{T_V}$. Nende suhtelise liikumise nurkkiirus

$$\Delta\omega = \omega_V - \omega_M = \omega_M \left(\frac{1}{\sqrt{\alpha^3}} - 1 \right)$$

ning suhtelise liikumise periood on

$$T_s = \frac{T_M}{\frac{1}{\sqrt{\alpha^3}} - 1} = 570 \text{ päeva.}$$

Järjestikuste eemaldumiste vahele jäab Päikeselt vaadatuna nurk $2 \cdot (90^\circ - 46^\circ) = 88^\circ$ või $360^\circ - 88^\circ = 272^\circ$ ehk päevades

$$T_s \frac{88}{360} = 140 \text{ päeva.}$$

ja

$$T_s \frac{272}{360} = 430 \text{ päeva.}$$

L54 Auto ★★

Autor: Mihkel Heidelberg, piirkonnavoor, 2009, G 5

Vedavate rataste ja maa vahel mõjub mingi horisontaalsihiline hõõrdejõud F . Jõust ja kiirusest saame auto liikumisse mineva võimsuse $N_l = Fv$. Ratastele mõjub jõumoment Fr , mille tõttu mootori võimsus $N_m = \omega Fr$.

Kasutegur on niisiis

$$\nu = \frac{N_l}{N_m} = \frac{Fv}{F\omega r} = \frac{v}{\omega r}.$$

L55 Vedru ★★

Autor: Aigar Vaigu, piirkonnnavoor, 2010, G 4

Hetkel, mil tellis vedrust eemalduma hakkab, liigub vedru ülemine ots koos tellisega kiirusega v üles. Tellise kiirus on piisav, et kerkida tagasi esialgsele kõrgusele $H \propto v^2$. Eeldame, et vedru on pikisunas ühtlane, sellisel juhul liigub vedru massikese ülemise ja alumise otsa keskmise kiirusega ülesse. Niisiis, $v_{\text{vedru}} = v/2$. Seega tõuseb vedru massikese kõrgusele $h \propto v_{\text{vedru}}^2 = v^2/4$, ehk

$$h = \frac{H}{4}.$$

L56 Pendel ★★

Autor: Taavi Pungas, piirkonnnavoor, 2011, G 7

Esialgse hinnangu perioodile, $\tau = 2,425$ s, saame $\tau_1 = t_2 - t_1$ ja $\tau_2 = t_4 - t_3$ keskmisest. Seda kasutades näeme, et t_1 ja t_3 vahel pidi toimuma täpselt 24 võngat, samamoodi t_2 ja t_4 vahel. Saame kaks sõltumatu mõõtmist 24 võnke kestuse kohta: $\tau'_1 = (t_3 - t_1)/24 = 2,4146$ s ja $\tau'_2 = (t_4 - t_2)/24 = 2,4125$ s. Nende keskmise annab meie hinnangu pendli perioodi kohta, $\tau' = 2,4135$ s $\approx 2,414$ s.

L57 Aerud ★★

Autor: tundmatu, piirkonnnavoor, 2005, G 6

Jõumomentide tasakaalu tingimus aeru jaoks tullide suhtes annab aerulabadele mõjuva keskmise jõu: $F_l = Fa/b$.

Tasakaalutingimus süsteemi paat+aerutaja+aerud jaoks annab võrrandi:

$$\frac{2Fa}{b} = \alpha v^2,$$

millest

$$v = \sqrt{\frac{2Fa}{\alpha b}} = 2 \text{ m/s.}$$

Kui aerulabad püsiksid tõmbamise ajal vee suhtes paigal, siis oleks võimsus

$$P = \frac{2vFa}{b} = 160 \text{ W.}$$

Et aga aerulabad nihkuvad ilmselt veidi tagasi, siis on tegelik võimsus mõnevõrra suurem.

L58 Kivi ★★

Autor: tundmatu, lahtine, 2006, G 4

Kivile mõjuvaks kesktõmbejõuks on paela tömbepinge T projektsioon tiirlemise tasapinnale $F = T \sin \varphi$ (vt joonist), kus φ on nurk paela ja vertikaalsihi vahel. Newtoni teine seadus kivi liikumise jaoks mööda ringjoont raadiusega R näeb välja:

$$m\omega^2 R = T \sin \varphi, \quad (1)$$

kus $\omega = 2\pi/\tau$ — kivi nurkkiirus ja m — kivi mass. Kuna vertikaalsuunas kivil kiirendus puudub, järelikult kivile mõjuvate jõudude projektsioonid vertikaalteljele annavad summas nulli:

$$T \cos \varphi = mg. \quad (2)$$

Jagades valemi (1) valemiga (2), saame

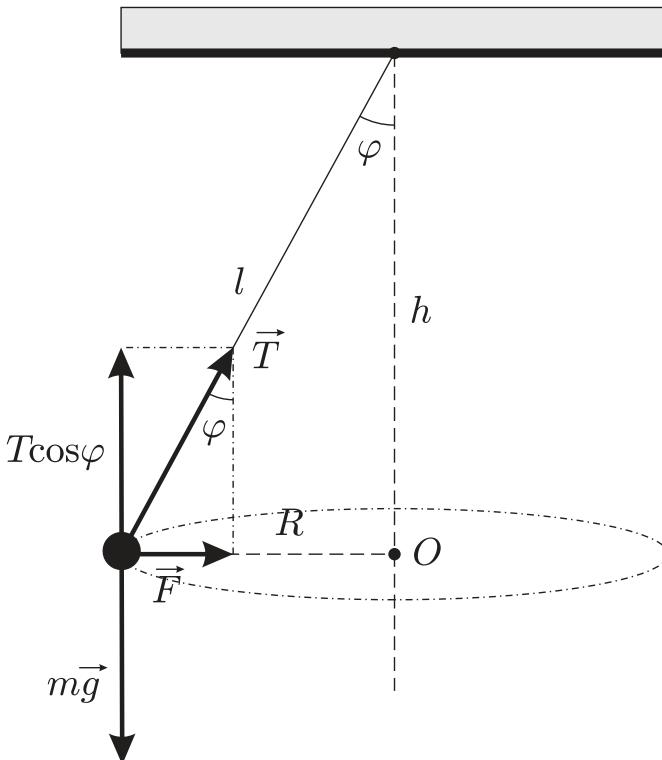
$$\tan \varphi = \frac{\omega^2 R}{g}.$$

Arvestades, et $\tan \varphi = R/h$, saame

$$\frac{\omega^2 R}{g} = \frac{R}{h} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{g}{h}},$$

ehk

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{h}{g}} = 2 \cdot 3,14 \cdot \sqrt{\frac{1,25}{9,81}} \approx 2,24 \text{ s}.$$



L59 Kaldpind ★★

Autor: Mihkel Rähn, piirkonnnavoor, 2006, G 4

Esimeseks põrkeks kogub pall kiiruse $v = \sqrt{2gh}$. Valime x -telje piki kaldpinda ja y -telje risti kaldpinnaga. Seega mõjub pallile x -suunaline kiirendus $a_x = g \sin \alpha$ ja y -suunaline kiirendus $a_y = -g \cos \alpha$. Märkame, et palli y -suunaline liikumine on efektiivselt sama nagu nõrgemas raskusväljas põrkumine ehk pall hakkab kindla perioodiga üles-allu põrkuma. Põrgete vaheline aeg avaldub kui

$$\tau = \frac{2v_{0y}}{|a_y|} = \frac{2\sqrt{2gh} \cos \alpha}{g \cos \alpha} = \sqrt{8h/g},$$

kus $v_{0x} = \sin \alpha \sqrt{2gh}$ ja $v_{0y} = \cos \alpha \sqrt{2gh}$ on palli esimese põrke järgsed kiiruskomponendid.

x -telje suunaline liikumisvõrrand avaldub kui

$$x = v_{0x}t + \frac{a_x t^2}{2}.$$

Peale viienda põrget, ajahetkel $t = 4\tau$, on palli x -koordinaat

$$x = \sin \alpha \sqrt{2gh} \cdot 4\sqrt{\frac{8h}{g}} + \frac{g \sin \alpha}{2} \cdot 16 \frac{8h}{g} = 80h \sin \alpha.$$

L60 Kuulike ★★

Autor: tundmatu, lahtine, 2008, G 5

Olgu α nurk vertikaali ja varda vahel ning l niidi pikkus. Energia jäävuse seadusest $v^2 = 2gl \cos \alpha$, millest kiiruse vertikaalkomponendi ruut

$$v_y^2 = 2gl \cos \alpha \sin^2 \alpha = 2gl \cos \alpha (1 - \cos^2 \alpha).$$

Tähistades $\cos \alpha = y$, saame v_y^2 maksimumi tingimuse, kui võtame sellest tuletise y järgi:

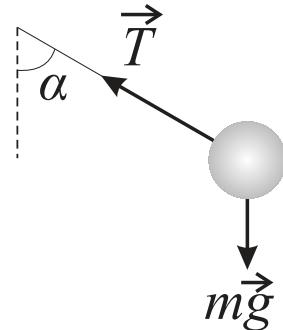
$$\frac{dv_y^2}{dy} = 2gl (1 - 3y^2) = 0,$$

millega $y = 1/\sqrt{3}$ ja $\alpha = \arccos(1/\sqrt{3}) \approx 55^\circ$.

Alternatiivne lahendus

Ülesandes on öeldud, et kuulikese kiiruse vertikaalne komponent hakkab esialgu suurenemama, kuid teatud hetkest alates vähenemama. See tähendab seda, et kuulikese kiirenduse vertikaalne komponent oli alguses positiivne ning pärast muutus negatiivseks. Järelikult hetkel, kui kiiruse vertikaalne komponent on maksimaalne, on kiirenduse vertikaalne komponent null. Seega vaadeldaval hetkel võrdub kuulikese raskusjõu ja niidi tõmbejõu vertikaalse projektsioonide summa nulliga ehk siis

$$mg = T \cos \alpha. \quad (1)$$



Kuuli kesktõmbekiirendus on $a_n = v^2/l$, kus l on niidi pikkus. Seega Newtoni II seaduse põhjal

$$m \frac{v^2}{l} = T - mg \cos \alpha. \quad (2)$$

Energia jäävuse seadusest

$$v^2 = 2gl \cos \alpha. \quad (3)$$

Asendades võrdusesesse (2) avaldised T ja v^2 jaoks võrdustest (1) ja (3) saame

$$\frac{m \cdot 2gl \cos \alpha}{l} = \frac{mg}{\cos \alpha} - mg \cos \alpha,$$

millega

$$\frac{1}{\cos \alpha} - \cos \alpha = 2 \cos \alpha \Rightarrow \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Sittem $\alpha = \arccos(1/\sqrt{3}) \approx 55^\circ$.

L61 Veerev silinder ★★

Autor: Andres Laan, lahtine, 2010, G 3

Eraldumiskõrgust on kõige lihtsam arvutada kasutades jõudude tasakaalu. Nii kaua kui veerev keha on alusega kontaktis, mõjub talle tooreaktsioon. Pinnalt eraldumise punktis muutub tooreaktsioon nulliks ja raskusjõu raadiusesihiline komponent saab võrdseks kesktömbekiirendusega. Seega

$$\frac{mv^2}{R+r} = mg \cos \alpha,$$

kus α on pinna kaldenurk eraldumispunktis (mis asub kõrgusel $H = (r+R) \cos \alpha$). Vastav kiirus on leitav energia jäävuse seadusest ehk võrdsustades gravitatsiooni-energia muudu kulg- ja pöördliikumise kineetilise energiaga:

$$mg(R+r-H) = mv^2.$$

Elimineerides eelnevaist võrrandeist $\cos \alpha$, saame tulemuseks $H = (r+R)/2$.

L62 Sfääär ★★★

Autor: Andre Sääsk, lahtine, 2005, G 6

Kuna küsitakse ainult minimaalset vajalikku kiirust (arvväärtust), siis ei pea me leidma ei viske nurka ega viske kohta. Vertikaalsuunalise kiiruse komponendi viske hetkel leiame energia jäävuse seadusest:

$$\frac{mv_{y0}^2}{2} = mg\Delta h = mg(2R-h) \Rightarrow v_{y0} = \sqrt{2g(2R-h)}.$$

Horisontaalsuunalise kiiruse komponendi leiame tingimusest, et sfääri ülemises punktis peab olema pallile mõjuv kesktömb kiirendus v^2/R võrdne pallile mõjuva raskuskiirendusega. Kuna sfääri ülemises punktis on $v_y = 0$, siis $v = v_x$. Kuna õhu takistust me ei arvesta, siis $v_x = v_{x0}$ (kiiruse horisontaalsuunaline komponent ei muutu lennu ajal). Seega

$$\frac{v_{x0}^2}{R} = g \Rightarrow v_{x0} = \sqrt{gR}.$$

Teades kahte kiiruse komponenti, on lihtne leida kogu kiiruse viske hetkel:

$$v = \sqrt{v_{x0}^2 + v_{y0}^2} = \sqrt{gR + 2g(2R-h)} = \sqrt{g(5R-2h)} \approx 29 \text{ m/s}.$$

Alternatiivne lahendus

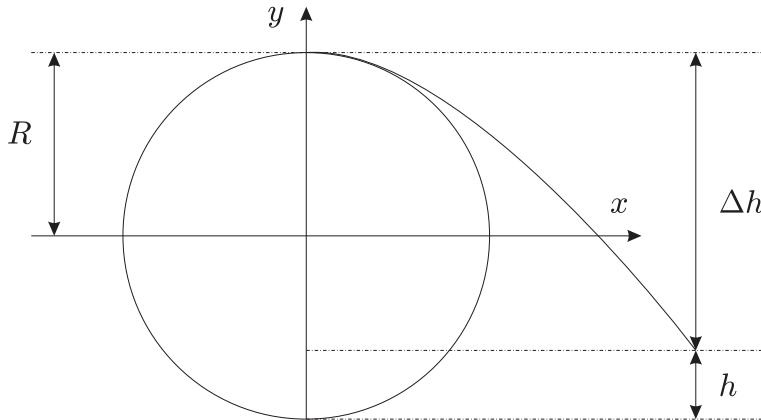
Läheneeme ülesandele matemaatiliselt. Meil on ringjoon, parabool ning nende puutepunkt. Lahendades nende võrrandid puutepunkti leidmiseks peame saama ainult ühe lahendi, sest visatud pall ei tohi läbida kuplit. Koordinaatide alguspunkti paneme kera keskpunkti, y -telg on suunatud vertikaalselt üles, x -telg – horisontaalselt viske suunas.

Ringjoone võrrand

$$x^2 + y^2 = R^2.$$

Parabooli võrrand

$$y = ax^2 + bx + c.$$



Sümmeetriast y -telje suhtes on $b = 0$, palli ja kupli kokkupuutepunkti teades on $x = 0$ puhul $y = R$ (vt joonist). Seega $c = R$ ja parabooli võrrand omandab kuju:

$$y = ax^2 + R.$$

Nüüd tuleb ühest võrrandist tundmatu asendada teise. Olgu selleks parabooli võrrandi y , mille asendame ringjoone võrrandisse:

$$\begin{aligned} x^2 + (ax^2 + R)^2 &= R^2, \\ x^2 + a^2x^4 + 2aRx^2 + R^2 &= R^2, \\ x^4 + \left(\frac{2aR+1}{a^2}\right)x^2 &= 0. \end{aligned}$$

Lahendades selle võrrandi, saame kolm lahendit:

$$x = 0, \quad x = \pm \sqrt{-\frac{2aR+1}{a^2}}.$$

Meile sobib ainult esimene lahend, sest teised kaks on imaginaarsed. Seega

$$2aR + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad a = -\frac{1}{2R}.$$

Nüüd on paras aeg analüüsida kiiruse komponente. Vaatleme kõigepealt kiiruse vertikaalset komponendi. Energia jäävuse seadusest teame, et palli kineetiline energia viske alguses muundub palli potentsiaalseks energiaks trajektoori tippunktis:

$$\frac{mv_{0y}^2}{2} = mg\Delta h = mg(2R - h) \quad \Rightarrow \quad v_{0y} = \sqrt{2g(2R - h)}.$$

Teisest küljest, kiiruse võrrandist teame, et

$$v_{0y} = g\Delta t \quad \Rightarrow \quad \Delta t = \frac{v_{0y}}{g} = \frac{\sqrt{2g(2R - h)}}{g}.$$

Seega lennuaeg on paika pandud viskekohata arvestamata. Analüüsime parabooli võrrandit viskekohas

$$-R + h = ax^2 + R \Rightarrow x^2 = \frac{h - 2R}{a}.$$

Lennuaeg on juba määratud, seega mida väiksem on x , seda väiksema kiirusega võib pall läbida vahemaad viskekohast nullpunktiga vaadelduna x -teljel. Seega peab a olema võimalikult suur. Asendades suurima a saab

$$x = \sqrt{\frac{h - 2R}{-1/2R}} = \sqrt{2R(2R - h)}.$$

Kiiruse x -teljeline komponent teepikkuse ja aja suhtena on

$$v_{0x} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{g\sqrt{2R(2R - h)}}{\sqrt{2g(2R - h)}} = \sqrt{\frac{g^2 R}{g}} = \sqrt{gR}.$$

Liites komponendid saame minimaalse viske kiiruse:

$$v = \sqrt{v_{0x}^2 + v_{0y}^2} = \sqrt{gR + 2g(2R - h)} = \sqrt{g(5R - 2h)} \approx 29 \text{ m/s}.$$

Antud lahendus on hea näide sellest, kui pikk ja keeruline võib olla ülesande matemaatiline lahendus võrreldes füüsikalisega.

L63 Anum ★★★

Autor: tundmatu, lahtine, 2005, G 7

Vaatame algul liikuva anumaga seotud taustsüsteemi. Kui põrnikas (massiga ρV) roomab mööda anuma põhja, siis selle peale liigub ka põrnikat ümbritsev vedelik. Põrnika liikumist võib mugavuse mõttes ette kujutada virtuaalse põrnika liikumisega, mille tiheus on $\rho - \rho_0$. Sellisel juhul liigub virtuaalne põrnikas vedelikku tõrjumata ning ülesanne taandub mugavamale dünaamika ülesandele.

Liigume nüüd põrandaga seotud taustsüsteemi. Vastavalt impulsi jäävuse seadusele on põrnika ja anuma koguimpulss kogu aeg konstantne (sest põrnika+anuma süsteemile ei möju väliseid jõude). Kuna see oli alguses 0, on põrnika ja anuma impulsid vastassuunalised ning absoluutväärtsuse poolest võrdsed. Olgu anuma kiirus põranda suhtes v . Siis põrnika kiirus põranda suhtes on $u - v$. Impulsi jäävuse seadusest tulenevalt

$$\rho_0(V_0 + V)v = (\rho - \rho_0)V(u - v),$$

ehk

$$v = \frac{V(\rho_0 - \rho)}{\rho V + \rho_0 V_0} u.$$

L64 Mullitaja ★★

Autor: Jaak Kikas, lõppvoor, 2005, G 7

Arvestades mullide arvu jäävust on ruumiline vahemaa nende vahel võrdeline mullikeste kiirusega. Viimase leiame võrdsustades takistus- ja üleslükkejõu ning arvestades mullikese ruumala muutust rõhu muutumisel sügavuse vähenemisel. Mullikesele mõjuvad vee takistusjõud F ja üleslükkejõud F_A . Nende võrdusest

$$6\pi\eta Rv = g(\rho - \rho_{hk})V,$$

kus V on mullikese ruumala. Kuna ülesande tingimuste kohaselt $\rho \ll \rho_{hk}$ ja tähis- tades indeksitega „H“ ja „0“ vastavalt situatsioone vee kogu põhjas ja pinna lähe- dal saame

$$6\pi\eta R_H v_H = g\rho V_H, \quad (1)$$

$$6\pi\eta R_0 v_0 = g\rho V_0. \quad (2)$$

Võrrandeid 1 ja 2 omavahel jagades ning kasutades seost $V_i = (4/3)\pi R_i^3$, saame mullikeste vahekauguse suhte

$$\frac{L_0}{L_H} = \frac{v_0}{v_H} = \frac{V_0 R_H}{V_H R_0} = \left(\frac{V_0}{V_H} \right)^{2/3}.$$

Kuna $V_0 p_0 = V_H p_H$ ja $p_H = p_0 + g\rho H$, siis

$$\frac{L_0}{L_H} = \left(1 + \frac{\rho g H}{p_0} \right)^{2/3} = 2,4,$$

st mullikeste vahemaa suureneb 2,4 korda.

L65 Plokk ★★

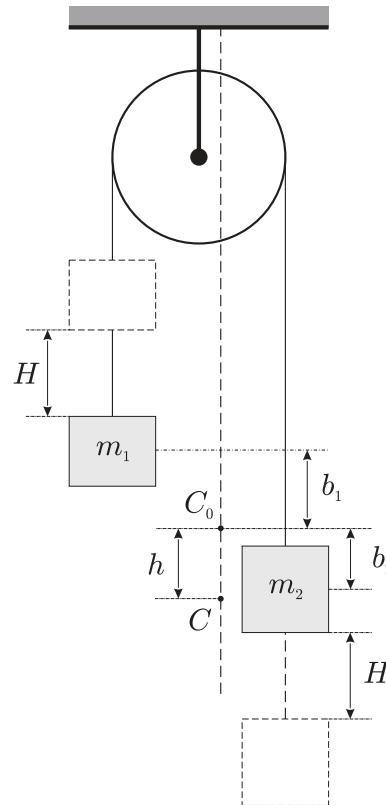
Autor: tundmatu, lahtine, 2006, G 5

Kuna raskem keha hakkab liikuma allapoole ja kergem ülespoole, siis on selge, et süsteemi massikese hakkab liikuma allapoole.

Olgu süsteemi massikese alghetkel punktis C_0 (vt joonist). Kehade massikeskmete kaugused süsteemi massikeskmest leiame tingimusest:

$$m_1 b_1 = m_2 b_2. \quad (1)$$

Aja t jooksul liigub raskem keha allapoole ja kergem ülespoole kauguse H võrra:



$$H = at^2/2, \quad (2)$$

kus a on kehade kiirendus. Süsteemi masskese liigub sama aja jooksul kauguse h võrra, mille määrab tingimus:

$$m_2(H + b_2 - h) = m_1(H + b_1 + h).$$

Siit, arvestades valemeid (1) ja (2), leiame, et:

$$h = \frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1} H = \frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1} \frac{at^2}{2}. \quad (3)$$

Kiirenduse a leiame võrrandisüsteemist:

$$m_2a = m_2g - T, \quad m_1a = T - m_1g,$$

kus T on niidi tõmbepinge. Avaldades a võrrandisüsteemist, saame

$$a = \frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1} g.$$

Asendades leitud väärtsuse valemisse (3), saame:

$$\begin{aligned} h &= \left(\frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1} \right)^2 \frac{gt^2}{2} = \frac{a_k t^2}{2} \Rightarrow \\ \Rightarrow \quad a_k &= \left(\frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1} \right)^2 g. \end{aligned}$$

L66 Kada ★★★

Autor: Oleg Košik, lõppvoor, 2006, G 3

Olgu kivi kiirus lasu järel v . Kiiruse horisontaalsuunaline komponent on $v_x = v \cos \alpha$ ja vertikaalsuunaline komponent $v_y = v \sin \alpha$. Kivi lennuaeg on

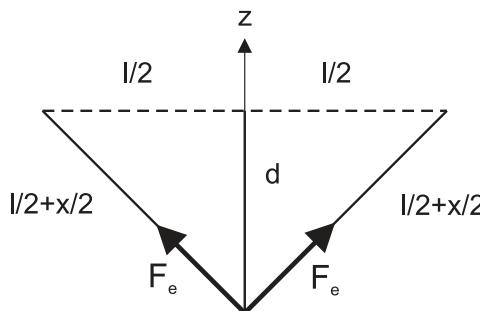
$$t = 2 \frac{v_y}{g} = 2 \frac{v \sin \alpha}{g}$$

ja lennukaugus

$$L = v_x t = \frac{2v^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g} = \frac{v^2 \sin 2\alpha}{g}.$$

Siit

$$v^2 = \frac{gL}{\sin 2\alpha}.$$



Kivi saavutab algkiiruse tänu kumminööri elastsele energiale. Kui nööri pikenemine vörreldes algolekuga on x , siis energia jäädvuse seadusest saame

$$\frac{kx^2}{2} = \frac{mv^2}{2},$$

kust

$$x^2 = \frac{mv^2}{k} \Rightarrow x = \sqrt{\frac{mgL}{k \sin 2\alpha}} = 53,6 \text{ cm.}$$

Uurides ragulka geomeetriat näeme, et moodustuva täisnurkse kolmnurga hüpotenuus on $l/2 + x/2$. Otsitav kaugus, millele tuleb nööri tömmata, on seega

$$d = \sqrt{(l/2 + x/2)^2 - (l/2)^2} = 48,2 \text{ cm.}$$

Kumminööris tekib elastsusjõud $F_e = kx$. Jõud, millega tuleb nööri tömmata, võrdub selle jõu kahekordse projektsiooniga z -teljele:

$$F = 2kx \frac{d}{l/2 + x/2} \approx 46 \text{ N.}$$

L67 Hooratas ★★

Autor: Valter Kiisk, lõppvoor, 2007, G 4

- a)** Hooratta kineetiline energia on $K = \frac{1}{2}M\omega^2R^2$, seega energia salvestustihedus $w = E/M = \frac{1}{2}\omega^2R^2$.
- b)** Olgu rõnga raadius r ja mass m . Mehaaniline pinge rõngas (σ) on määratud tsentrifugaaljõuga, millega kahte rõnga poolt üksteisest eemale töugatakse. Vaatleme ühe rõnga poole väikest lõiku pikkusega Δl . Selle mass on $\Delta m = (\Delta l/2\pi r)m$ ja sellele mõjub tsentrifugaaljõud suurusega $\Delta F = \Delta m\omega^2r$, kus ω on pöörlemise nurkkiirus. Selle jõu projektsioon vertikaalsihile on (vt joonist)

$$\Delta F_{\parallel} = \Delta F \cos \alpha = \frac{m\omega^2}{2\pi} \Delta l \cos \alpha.$$

Ent $\Delta l \cos \alpha$ on lõigu Δl projektsioon horisontaalsihile. Järelikult summaarne jõud, mis mõjub ühele rõnga poolele, avaldub kui

$$F = \sum \Delta F_{\parallel} = \frac{m\omega^2}{2\pi} 2r = \frac{m\omega^2 r}{\pi}.$$

Teiselt poolt, $F = 2\sigma S$, kus S on rõnga ristlõige. Viimase asendame seosest

$$m = \rho V = \rho(2\pi r S) \Rightarrow S = \frac{m}{2\pi r \rho}.$$

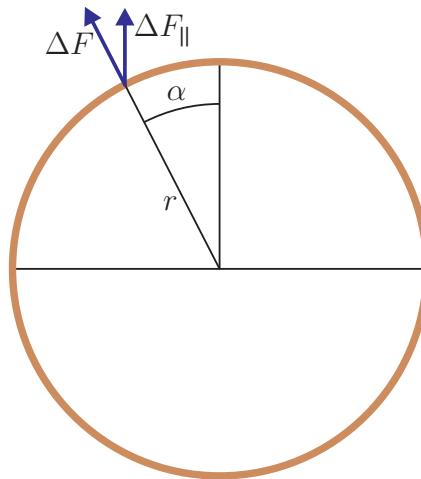
Kokkuvõttes saame

$$\sigma = \frac{F}{2S} = \omega^2 r^2 \rho.$$

Rõnga kineetiline energia

$$E = \frac{mv^2}{2} = \frac{m\omega^2 r^2}{2} = \frac{m\sigma}{2\rho},$$

millest $E/m = \sigma/2\rho$. Võttes $\sigma = \sigma_{\max}$, saame $E/m = 800 \text{ kJ/kg}$.



L68 Maaler ★★

Autor: Valter Kiisk, lahtine, 2010, G 5

Selgitame välja, kummal juhul on maaga kokku puutudes inimese kiirus väiksem. Lihtsuse huvides vaatleme redelit ühtlase homogeense vardana (pikkus L , mass M) ning inimest punktmassina m , mis on kinnitunud redeli ülemise otsa külge. Kui maaler laseks kohe redelist lahti, oleks tema kiirus maaga kokkupuute hetkel $\sqrt{2Lg}$. Kui aga maaler klammerdub redeli külge, tuleb lõppkiiruse v arvutamisel arvesse võtta ka redeli pöördliikumise tekitamiseks kuluvat energiat. Pikka ühtlast redelit võib esimeses lähinduses vaadelda kui homogeenset varrast, mis pöörleb ümber alumise otsa. Selleks hetkeks kui redel on jõudnud horisontaalasendisse, on tema nurkkiirus $\omega = v/L$. Niisiis redeli pöördliikumise energia sel hetkel avaldub $ML^2\omega^2/6 = Mv^2/6$. Nüüd energia jäävuse seadus annab

$$mgL + Mg \frac{L}{2} = \frac{mv^2}{2} + \frac{Mv^2}{6},$$

millest

$$v = \sqrt{\frac{3Lg(2m + M)}{3m + M}} = \sqrt{gL} \sqrt{2 + \frac{M}{3m + M}}.$$

Saadud tulemus ei ole ühelgi tingimusel väiksem kui $\sqrt{2Lg}$, nii et selles mõttes on kasulikum kohe redelist lahti lasta.

L69 Benji-hüpe ★★★

Autor: Andreas Valdmann, piirkonnnavoor, 2010, G 6

Hüppe madalaimas punktis on hüppaja kiirus ja seetõttu ka kineetiline energia võrdne nulliga. Gravitatsioonivälja potentsiaalse energia muutus torni tipust selle punktini on võrdne köies tekkinud elastsusjõu energiaga:

$$mg(l + \Delta l_1) = \frac{k\Delta l_1^2}{2},$$

kus Δl_1 on köie pikenemine. Lahendades ruutvõrrandi Δl_1 suhtes ja ignoreerides negatiivset lahendit, saame

$$\Delta l_1 = \frac{mg + \sqrt{m^2 g^2 + 2mgkl}}{k}.$$

Platvormi kõrgus on $h_1 = l + \Delta l_1 + h$. Arvuliselt, $h_1 \approx 86$ m. Suurima kiiruse leidmisel lisandub energia võrrandisse kineetiline energia:

$$mg(l + \Delta l_2) = \frac{k\Delta l_2^2}{2} + \frac{mv^2}{2}.$$

Kiirendus muudab märki, kui elastsusjõud saab võrdseks gravitatsioonijõuga. See-tõttu on suurima kiiruse tingimuseks

$$mg = k\Delta l_2 \quad \Rightarrow \quad \Delta l_2 = \frac{mg}{k}.$$

Asetades antud tingimuse energia võrrandisse ja lahendades selle v suhtes, saame

$$v = \sqrt{\frac{g(gm + 2kl)}{k}} \approx 29 \text{ m/s.}$$

L70 Vai ★★★★

Autor: Jaak Kikas, piirkonnnavoor, 2006, G 10

Olgu raskuse kiirus enne lööki vaia pihta v ja raskuse ning vaia kiirus vahetult pärast lööki v' . Löögi jooksul säilib impulss (aga mitte energia)

$$p = mv = (m + M)v'.$$

Kiiruse v või impulsi p saame energia jäävuse seadusest, näiteks kujul

$$\frac{p^2}{2m} = mgH.$$

Niisiis on peale lööki süsteem vai+raskus omandanud kiiruse v' . Hõõrdejõudude toimel peatuvad need teatava teepikkuse x jooksul, kusjuures tingimuste kohaselt löökide arv $N \gg 1$ ning seega $x \ll L$. Hõõrdejõudude töö on seejuures võrdne energiaga muuduga.

Eelpooltoodu võib kirja panna kujul

$$(F_0 + kl)x = (M + m)gx + \frac{p^2}{2(m + M)},$$

kuid lõppvastuse leidmise seisukohast on meil lihtsam võrrutada summaarne hõõrdejõudude töö (mis on leitav nt graafiku $F(l)$ aluse pindalana),

$$A_h = F_0L + \frac{kL^2}{2}.$$

summaarse dissipieruva energiaga

$$E = \frac{Np^2}{2(m + M)} + (M + m)gL.$$

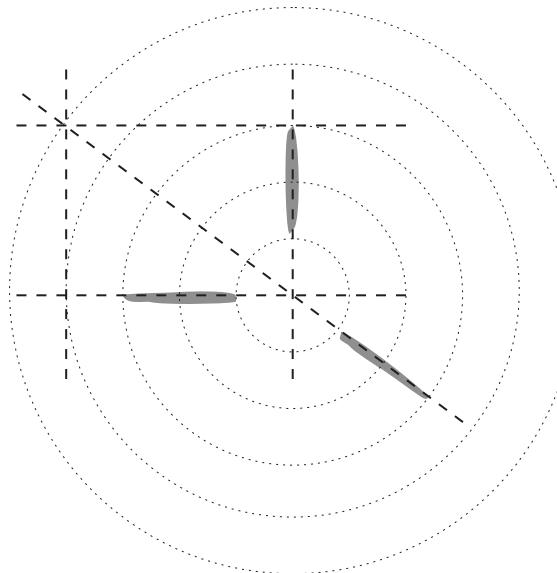
Võrdusest $A_h = E$ saame (arvestades eelpooltoodud avaldisi A_h , E ja $p^2/2m$ jaoks)

$$N = \left(F_0 + \frac{kL}{2} - Mg - mg \right) \frac{(m + M)L}{m^2 g H}.$$

L71 Klaaskuul ★★★

Autor: Aigar Vaigu, piirkonnnavoor, 2008, G 6

Tükikeste trajektooride järgi saab võrrelda kiiruste suundasid ja suuruseid, sest $s = vt_s$, kus t_s on säriaeg (alternatiivselt võib kasutada kaugust kukkumispunktist $S = vt_S$, kus t_S on ajavahemik mahakukkumishetkest säriaaja lõpuni). Seega on jälgede pikkuste suhe (või jälgede lõpp-punktide kauguste suhe kukkumispunktist) võrdne kiiruste suhtega. Fotolt saame, et $s_1 \approx s_2 \approx s_3$, st $v_1 \approx v_2 \approx v_3$. Kuna kiiruste suunad on teada, siis on teada ka impulsside $\vec{p}_1 = m_1 \vec{v}_1$, $\vec{p}_2 = m_2 \vec{v}_2$ ja $\vec{p}_3 = m_3 \vec{v}_3$ suunad. Kuna $\vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3 = 0$, siis moodustavad need vektorid kolmnurga. Et selle kolmnurga külgede suunad on teada, siis on teada selle kolmnurga nurkade suurused ning kolmnurk määratud sarnasusteguri täpsusega (et meid huvitavad külgede pikkuste suhted, siis sellest täpsusest piisab). Niisiis konstrueerime fotole kolmurga, mille küljed on vastavalt paralleelsed kolme kuulikillu jälgjega. Jooniselt leiame, et $p_1 : p_2 : p_3$ suhtuvad kui $3 : 4 : 5$. Kombineerides seda nüüd eelmise tulemusega $v_1 \approx v_2 \approx v_3$ saame, et $m_1 : m_2 : m_3$ suhtuvad kui $3 : 4 : 5$.

**L72 Plokid ★★★**

Autor: Mihkel Kree, piirkonnnavoor, 2008, G 9

Rakendades Newtoni II seadust näeme, et kõik kolm keskmist koormist hakkavad liikuma võrdse kiirendusega a_0 :

$$Ma_0 = 2T - Mg,$$

kus T on niidi pinge. Rakendades Newtoni II seaduste äärmiste koormiste jaoks saame

$$\gamma Ma_1 = T - \gamma Mg,$$

kus a_1 on äärmiste koormiste kiirendus. Elimineerides niidi pinge T saame

$$2\gamma a_1 - a_0 = g - 2\gamma g.$$

Nööri venimatus avaldub kujul $a_1 = -3a_0$, millest tulenevalt

$$-2\gamma a_1 - \frac{a_1}{3} = (2\gamma - 1)g \quad \Rightarrow \quad a_1 = \frac{1 - 2\gamma}{2\gamma + 1/3}g.$$

Äärmised koormised hakkavad langema, kui a_1 on negatiivne. Selle jaoks peab kehtima

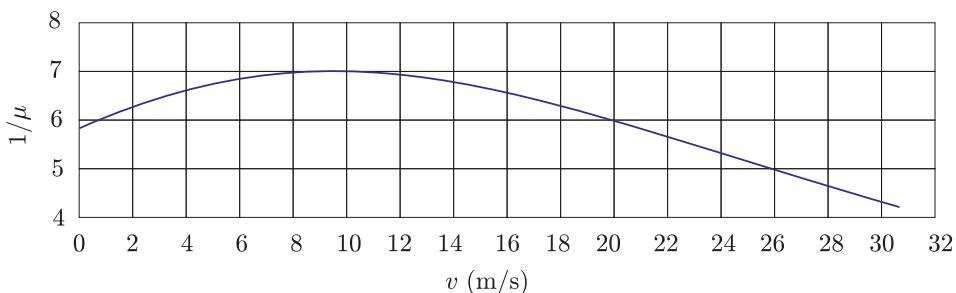
$$1 - 2\gamma < 0 \quad \Rightarrow \quad \gamma > \frac{1}{2}.$$

L73 Rong ★★★★

Autor: tundmatu, lahtine, 2006, G 10

a) Vaatame väikest kiiruste vahemikku Δv , mille sees võib kiirust v ja järelikult ka hõõrdetegurit $\mu(v)$ lugeda konstantseks. Kiirendus on selle liikumisfaasi jooksul siis $a = \mu(v)g$ ning kiiruse vähenemiseks kuuluv aeg

$$\Delta t = \frac{\Delta v}{a} = \frac{\Delta v}{\mu(v)g}.$$

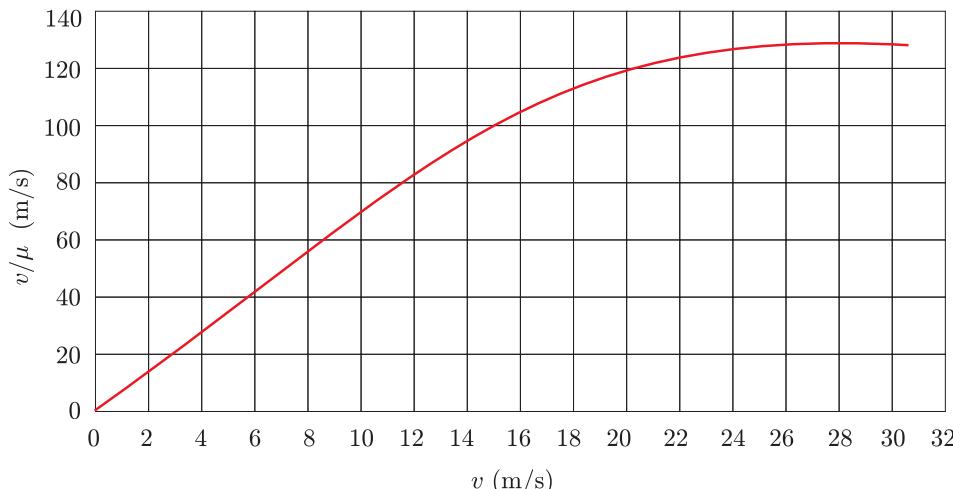


Summaarne aeg oleks summa üle kõigi selliste väikeste kiirusemuutustele. Konstrueerime esialgsest graafikust lähtudes suuruse $1/\mu(v)$ sõltuvuse kiirusest v (vt joonist). Siis pidurdamiseks kuuluv aeg on selle sõltuvuse graafikualune pindala (kiirusest 0 kuni 100 km/h), jagatud g -ga. Seejuures peame silmas, et kiirus x -teljel peab olema meetrites sekundis (m/s). Vastuseks saame ligikaudselt 18 s.

b) Vaatame samasugust kiiruste vahemikku Δv nagu esimeses osas. Ajaga Δt , mille jooksul kiirus selle võrra väheneb, läbib rong teepikkuse

$$\Delta s = v\Delta t = \frac{v\Delta v}{\mu(v)g}.$$

Summaarne pidurdusmaa oleks summa üle kõigi selliste teepikkustele. Konstrueerime esialgsest graafikust lähtudes suuruse $v/\mu(v)$ sõltuvuse kiirusest v (vt joonist). Siis pidurdusmaa on selle sõltuvuse graafikualune pindala (kiirusest 0 kuni 100 km/h), jagatud g -ga. Kiirus x -teljel on samuti meetrites sekundis (m/s). Vastuseks saame ligikaudselt 235 m.



Märkus. Integraalne avaldis pidurdusaja jaoks on kujul

$$t = \int_0^{v_0} \frac{dv}{\mu(v)g} = \frac{1}{g} \int_0^{v_0} \frac{dv}{\mu(v)},$$

kus v_0 on rongi algkiirus. Avaldis pidurdusmaa pikkuse jaoks on aga

$$s = \int_0^{v_0} \frac{v dv}{\mu(v)g} = \frac{1}{g} \int_0^{v_0} \frac{v dv}{\mu(v)}.$$

L74 Värinaalarm ★★★★

Autor: Jaan Kalda, lahtine, 2011, G 9

Kui vord väike keha liigub alla hetkeliselt, siis süsteemi mobiil+keha masskese püsib paigal, mistõttu mobiil kerkib lauapinnast körgusele $h = x \frac{m}{M}$. Edasi hakkab mobiil raskusjõu toimel langema; lauapinnale jöudmiseks kuluv aeg $t = \sqrt{2h/g}$. Hõõrdejõud peatab mobiili ilma libisemata, kui $\mu > \tan \alpha$; et $\alpha \ll 1$, siis võime eeldada, et see nii ka juhtub. Kui $t = \sqrt{2h/g} < \tau$, siis jõuab mobiil liikuda langemise jooksul lauapinna sihis vahemaa $\delta = h \sin \alpha \approx h\alpha$, mis annab keskmiseks kiiruseks

$$u = \frac{xm\alpha}{2\tau M}.$$

Kui $\sqrt{2h/g} < \tau$, siis ei jõua mobiil lõpuni langeda, vaid väikese keha kerkimine surub mobiili ennatlikult vastu lauda tagasi. Mobiil jõuab langeda vahemaa $H = g\tau^2/2$ võrra, mis annab keskmiseks kiiruseks

$$u = \frac{H\alpha}{2\tau} = \frac{1}{4}g\tau\alpha.$$

Kokkuvõtlikult võib vastuse anda kujul

$$u = \min \left(\frac{xm\alpha}{2\tau M}, \frac{1}{4}g\tau\alpha \right).$$

L75 Kuulid ★★★★

Autor: Jaan Kalda, lõppvoor, 2006, G 10

Teisest ja kolmandast kuulist koosnevale süsteemile mõjus sel ajal, kui esimest kuuli lükati, esimese varda sihiline jõud, sest teatavasti mõjuvad kergetele varastele vaid varda sihilised pinged. Seega nihkus šarniirne ühenduspunkt esimese varda sihiliselt ning teine ja kolmas kuul omandasid sümmeetria tõttu ühesugused kiirused. Šarniirse ühenduspunkti kiirus on $v_s = v_0 \cos 30^\circ$, sest esimese varda pikkus ei muutu. Et nii teisele kui kolmandale kuulile mõjub ainult varda sihiline jõud, siis nende kiirus on ka varda sihiline; varda venimatusest juhtivalt $v_2 = v_3 = v_s \cos 60^\circ = v_0 \sqrt{3}/4$.

Pinged varastes on võrdsed, sest šarniirse ühenduspunkti massi võime lugeda nulliks ning talle mõjuv resultantjõud peab olema 0 ja jõudude tasakaalust tugi-nevalt peab varraste pingetest moodustuma võrdkülgne kolmnurk. Olgu varras-te pinge T . Seega on kõigi kuulikeste kiirendused võrdsed, $a_k = T/m$. Läheme šarniirse ühenduspunktiga seotud kulgevalt liikuvasse taustsüsteemi, mis liigub kiirendusega \vec{a} . Selles süsteemis on esimese kuuli kiirus $u_1 = v_0/2$ ning teiste kiirus $u_2 = v_s \sin 60^\circ = \frac{3}{4}v_0$. Selles süsteemis liiguvad kuulid ringjoont mööda. Iga kuuli jaoks saame välja kirjutada jõudude tasakaalu tingimuse projekteerituna vastava varda sihile (siis kaob vajadus teada kuulikese ringliikumise tangentsiaal-kiirendust, sest see on teljega risti). Teise ja kolmanda kuuli tasakaalutingimus vörreldes selgub, et inetrtsijou $-m\vec{a}$ projektsioon kummalegi teljele peab olema üks ja sama, st \vec{a} peab olema esimese varda sihilise. Seega saame kaks võrrandit:

$$\begin{aligned} mu_1^2/l + a &= T, \\ mu_2^2/l - a/2 &= T. \end{aligned}$$

Elimineerides neist võrrandeist a , saame

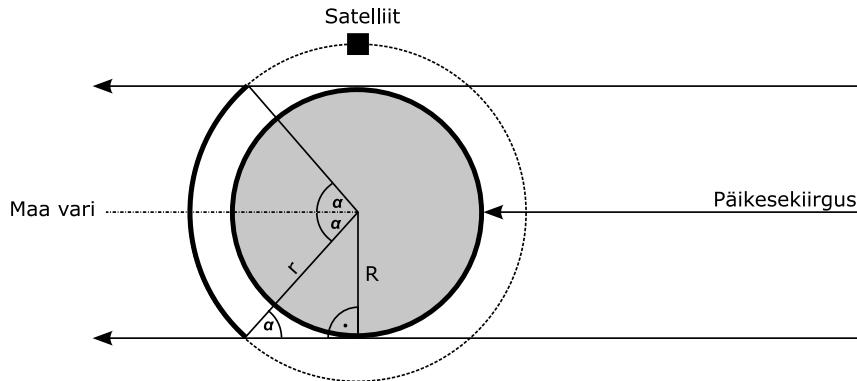
$$T = \frac{1}{3} \frac{m}{l} (u_1^2 + 2u_2^2)$$

ning otsitava kiirenduse

$$a_k = T/m = (u_1^2 + 2u_2^2) 3l = \frac{11}{24} v_0^2 / l.$$

L76 Satelliit ★

Autor: Mihkel Pajusalu, piirkonnnavoor, 2011, G 2



Ringikujulisel orbiidil on satelliidi kiirus kogu orbitaalperioodi jooksul konstantne ja seetõttu on varjus veedetud osa ajast võrdne orbiidi varjuse osa pikkuse ja kogu orbiidi pikkuse suhtega, mis on ülal toodud jooniselt leitav kui

$$k = \frac{2\alpha r}{2\pi r} = \frac{\arcsin\left(\frac{R}{r}\right)}{\pi} = 36,5\%$$

L77 Väike prints ★

Autor: Urmo Visk, piirkonnnavoor, 2009, G 1

Kui väike prints könnib piki asteroidi ekvaatorit, mõjub talle gravitatsioonijõud, mis põhjustab kesktömbekiirendust. Kaalugu väike prints m kilogrammi. Newtoni II seaduse põhjal

$$m \frac{v^2}{R} = G \frac{mM}{R^2} \Rightarrow v^2 = \frac{GM}{R}.$$

Asteroidi mass pole teada, kuid teada on asteroidi tihedus. Kui asteroidi raadius on R , siis on asteroidi ruumala $V = \frac{4}{3}\pi R^3$ ja mass

$$M = \rho V = \frac{4}{3}\pi\rho R^3.$$

Asendades massi esialgsesse avaldisse saame

$$v^2 = \frac{GM}{R} = \frac{G}{R} \cdot \frac{4}{3}\pi\rho R^3 = \frac{4}{3}\pi\rho GR^2.$$

Siit avaldame asteroidi raadiuse:

$$R = v \sqrt{\frac{3}{4\pi\rho G}} = \frac{v}{2} \sqrt{\frac{3}{\pi\rho G}} = 5 \text{ km.}$$

L78 Eksinud satelliit ★★

Autor: tundmatu, lahtine, 2009, G 5

Leiame geostatsionaarse orbiidi raadiuse, olgu see r . Sellel orbiidil on satelliidi tiirlemise periood $T = 24\text{ h} = 86\,400\text{ s}$ ning nurkkiirus $\omega = \frac{2\pi}{T} = 7,27 \cdot 10^{-5}\text{ s}^{-1}$. Olgu satelliidi mass m ja Maa mass M . Satelliit liigub kesktõmbekiirendusega $a = \omega^2 r$ ning talle mõjub gravitatsioonijõud

$$F_G = G \frac{Mm}{r^2}.$$

Newtoni II seaduse põhjal

$$G \frac{Mm}{r^2} = m\omega^2(R + h) \Rightarrow r^3 = \frac{GM}{\omega^2}.$$

Raskuskiirendus maapinnal võrdub $g = G \frac{M}{R^2}$, kust saame avaldada $GM = gR^2$. Saame nüüd asendada

$$r^3 = \frac{gR^2}{\omega^2} \Rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{gR^2}{\omega^2}} \approx 42\,300\text{ km}.$$

Satelliidi orbitaallikumise kiirus on seega $v_0 = \omega r = 3,08\text{ km/s}$. Põrkekiirus on maksimaalne siis, kui „eksinud“ satelliit tiirleb samal ringorbiidil mis teised side-satelliidid, kuid liikumise suund on vastupidine. Sel juhul

$$v = 2v_0 = 6,16\text{ km/s}.$$

L79 Kosmosejaam ★★★

Autor: Oleg Košik, lõppvoor, 2005, G 9

Maa pöörlemise töltu ümber oma telje tekivad trajektoori nihked. Mõõdame nihke pikkuse ekvaatoril Δl ning ekvaatori pikkuse (ehk kogu kaardi laiuse) l . Nende suhe määrab kosmosejaama nurkkiiruse ω_J ja maa pöörlemise nurkkiiruse ω_M suhte:

$$\alpha = \frac{l}{\Delta l} = \frac{\omega_J}{\omega_M} \approx 15,7.$$

Arvestades, et maa pöörlemise nurkkiirus on $\omega_M = 2\pi/T$, kus T on ööpäeva pikkus ehk $86\,400\text{ s}$, leiame

$$\omega_J = \alpha \omega_M = \frac{2\pi\alpha}{T}.$$

Kosmosejaamale mõjuv gravitatsioonijõud määrab kesktõmbekiirenduse:

$$mg' = m\omega_J^2 r = m\omega_J^2(R + h),$$

kus g' on raskuskiirendus kõrgusel h maapinnast. Gravitatsiooniseadusest teame, et raskuskiirendus on pöördvõrdeline kauguse ruuduga, milles

$$g' = g \left(\frac{R}{r} \right)^2 = g \left(\frac{R}{R+h} \right)^2.$$

Kombineerides kaks viimast võrrandit, saame

$$\omega_J^2(R+h) = g \left(\frac{R}{R+h} \right)^2,$$

kust ostitav kõrgus on

$$h = \sqrt[3]{\frac{gR^2}{\omega_J^2}} - R = \sqrt[3]{\frac{gR^2T^2}{4\pi^2\alpha^2}} - R \approx 359 \text{ km}.$$

Märkus: tegelik kõrgus varieerub 350 ja 365 km vahel (Maa raadius ei ole kõikjal ühesugune). Siin α väärthus oli mõõdetud suhteliselt täpselt arvutigraafika vahenditega, joonlauga joonise mõõtmise korral esinevate ebatäpsuste tõttu võib vastus erineda tegelikust kuni 200 kilomeetri võrra.

L80 Kuukaabel ★★★★

Autor: Siim Ainsaar, piirkonnavor, 2009, G 10

a) Maa avaldab kaablile jõudu

$$F_M = Gm_M \lambda \left(\frac{1}{r_M} - \frac{1}{D-r_K} \right),$$

analoogiliselt Kuu,

$$F_K = Gm_K \lambda \left(\frac{1}{r_K} - \frac{1}{D-r_M} \right).$$

Suhe on seega

$$\frac{F_M}{F_K} = \frac{m_M \left(\frac{1}{r_M} - \frac{1}{D-r_K} \right)}{m_K \left(\frac{1}{r_K} - \frac{1}{D-r_M} \right)} \approx 21,9.$$

b) Leiame kaablit pingutava jõu $T(x)$ Kuu keskmest mingil kaugusest x . Sellest kaugusest Maa-poolset kaabliosa mõjutavad kolm jõudu: kaabli pinge $T(x)$ ning Maa ja Kuu poolt avaldatavad raskusjõud. (x -st Kuu-poolset osa mõjutab ka otsa Kuu küljes hoidev jõud, selle arvutamiseks pole tarvidust.) Nimetatud jõud on tasakaalus, mistõttu

$$T(x) = G\lambda m_M \left(\frac{1}{r_M} - \frac{1}{D-x} \right) - G\lambda m_K \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{D-r_M} \right).$$

Kabel katkeks seal, kus pingे on tugevaim, seega lahendame ekstreemumülesande ja leiame $T(x)$ maksimumi. Seal tuletis $T'(x) = 0$. Kui saame ainult ühe mõistliku lahendi, pole ekstreemumi liigi määramiseks teist tuletist vajagi: teame, et kosmoses on T suurem kui kaabli otstes (taevakeha pinnalt kaabliosade eralduspunkti eemaldudes kasvab lähema keha tõmme alumisele kaablipooolele ilmselt kiiremini kui kahaneb teise keha tõmme ülemisele; osade suhtelised massid

muutuvad oluliselt erineva kiirusega), tänu millele (vähemalt) üks maksimum ek-sisteerib.

$$T'(x) = -\frac{G\lambda m_M}{(D-x)^2} + \frac{G\lambda m_K}{x^2} = 0 \implies x = \frac{D}{1 \pm \sqrt{\frac{m_M}{m_K}}}.$$

Miinusmärgiga lahend on negatiivsena mittefüüsikaline, seega otsitavaks kõrguseks osutub

$$h = \frac{D}{1 + \sqrt{\frac{m_M}{m_K}}} - r_K \approx 36\,200 \text{ km}.$$

L81 Satelliidid ★★★★☆

Autor: Mihkel Kree, lõppvoor, 2010, G 7

Lähtume analoogiast molekulaarfüüsikaga, kus ühe molekuli vaba tee hindamisel arvestatakse, et molekul liigub ilma põreteta tüüpiliselt aja jooksul, mil tema kokkupõrke-ristlõige on katnud ruumala, milles asub tüüpiliselt üks osake (see ruumala avaldub kui anuma ruumala jagatud osakeste arvuga). Kokkupõrke-ristlõige pole päris identne osakese enda ristlõikega – vaatleme näiteks kera-kujulisi osakesi raadiusega r , osakesed pörkuvad, kui nende tsentrid ei ole teineteisest kaugemal kui $2r$, niisiis on ühe osakese kokkupõrke-ristlõige neli korda suurem tema ristlõikest.

Satelliidid liiguvalt ruumiosas ruumalaga

$$V = \frac{4\pi}{3} [(R + h_2)^3 - (R + h_1)^3] \approx 1,2 \cdot 10^{12} \text{ km}^3.$$

Liikumisruum ühe satelliidi kohta on seega V/N (niisuguse ruumalaga suvaliselt valitud ruumiosast leiame tüüpiliselt ühe satelliidi).

Aja t jooksul katastabiilne ruumalaga ruumala

$$V_t = 4Svt,$$

kus v on tüüpiline satelliidi liikumise kiirus. Me ei tee suurt viga, võttes v väärtsuseks esimese kosmilise kiiruse (kiirus sõltub raadiuse ruutjuurest ning suhteline viga oleks ainult $\sqrt{\frac{6400+2000}{6400}} \approx 1,15$):

$$\frac{v^2}{R} = \frac{GM}{R^2} = g.$$

Niisiis,

$$V_t = \sqrt{gR}4St.$$

Eelneva arutluse kohaselt arvestame, et ühel satelliidil tuleb kokkupõrget oodata niisugune ajavahemik t , et $V_t = V/N$. Et meil on aga N satelliiti, siis esimese niisuguse kokkupõrkeni kulub N korda vähem aega. Seega,

$$\Delta t = \frac{V}{N^2 4S \sqrt{gR}} = \frac{1,2 \cdot 10^{12} \cdot 10^9}{4 \cdot 2,5^2 \cdot 10^6 \cdot 10 \cdot \sqrt{10 \cdot 64 \cdot 10^2 \cdot 10^3}} s = 6 \cdot 10^8 \text{ s},$$

ehk

$$\Delta t = \frac{6 \cdot 10^8}{3600 \cdot 24 \cdot 365} \approx 19 \text{ a.}$$

L82 Jalgpall ★

Autor: tundmatu, lahtine, 2006, G 1

Iga pumpamiskäigu alguses täidab atmosfääri õhk rõhuga p_0 pumba siseruumi ruumalaga v . Pumpamiskäigu lõpus on see õhk pallis, kus ta ruumala on V ja osarõhk p . Viimase saame leida Boyle-Mariotte'i seadusest:

$$p = \frac{p_0 v}{V}.$$

Pärast N pumpamiskäiku on rõhk pallis võrdne osarõhkude summaga:

$$p_N = Np = \frac{Nv p_0}{V} = \frac{40 \cdot 150 \cdot 0,1}{3000} = 0,2 \text{ MPa.}$$

L83 Allveelaev ★

Autor: tundmatu, lahtine, 2007, G 3

Kuna temperatuur on jäav, kehtib seos $pV = \text{Const.}$ Olgu laeva ruumala V ning õhu ruumala laevas peale ventiilide avamist v . Siis

$$p_0 V = (p_0 + \rho g h) v,$$

$$k = \frac{v}{V} = \frac{p_0}{p_0 + \rho g h} = \frac{0,1 \cdot 10^6}{0,1 \cdot 10^6 + 1,03 \cdot 10^3 \cdot 9,8 \cdot 42} \approx 0,19.$$

L84 Tuukrid ★

Autor: Ott Krikmann, piirkonnavor, 2007, G 4

Oletame, et tuuker pumpas pinna lähedal vesti õhku, mille ruumala oli V_0 . Vee pinna lähedal oli rõhk võrdne välisrõhuga. Sukeldudes 25 m sügavusele, suureneb rõhk $\Delta p = \rho g h$ võrra. Summaarne rõhk sellel sügavusel on seega

$$p = p_0 + \Delta p = p_0 + \rho g h$$

Võrdusest $pV = p_0 V_0$ leiame, et

$$\frac{V_0}{V} = \frac{p}{p_0} = \frac{p_0 + \rho g h}{p_0} = 3,33.$$

Seega, vestis oleva õhu ruumala väheneb endisega võrreldes 3,33 korda. Järelikult on vaja sellel sügavusel suurendada õhu ruumala 3,33 korda, et saavutada hõljumine.

L85 Toaõhk ★

Autor: Mihkel Rähn, lõppvoor, 2008, G 3

Summaarne kineetiline energia on $E = N \cdot \langle E_m \rangle$, kus N on toas oleva gaasi molekulide arv ja $\langle E_m \rangle$ ühe molekuli gaasi keskmise kineetiliste energiaga. Kehtib

$$\langle E_m \rangle = \frac{3}{2}kT.$$

Idealsega gaasi võrrandist saab avaldada toas olevate molekulide arvu $N = pV/(kT)$. Pannes need kokku, $E = \frac{3}{2}pV$. Kuna toas on õhurõhk võrdne välisrõhuga, ei sõltu toas olevate õhumolekulide summaarne kineetiline energia temperatuurist.

L86 Gaasitermomeeter ★★

Autor: Valter Kiisk, piirkonnnavoor, 2006, G 5

Olgu mõõteampulli ruumala V ning manomeetri ruumala V_m . Kui toatemperatuuril T_0 täideti seade n mooli gaasiga, siis ideaalsega gaasi olekuvõrrandi põhjal

$$\frac{p_0 V}{T_0} + \frac{p_0 V_m}{T_0} = nR.$$

Kuna manomeeter ja mõõteampull on kapillaari kaudu ühenduses, siis nende gaasirõhud on isegi temperatuuride erinedes ühesugused. Kui mõõteampull on temperatuuril T , siis (gaasi koguhulk jäab samaks)

$$\frac{pV}{T} + \frac{pV_m}{T_0} = nR.$$

Elimineerides n ja asendades $V_m/V = \alpha$, saame

$$T = \frac{pT_0}{p_0 + (p_0 - p)\alpha} \approx 20,5 \text{ K}.$$

L87 Tuulik ★★

Autor: Valter Kiisk, piirkonnnavoor, 2007, G 5

Tiiviku poolt haaratav pindala on

$$S = \frac{\pi d^2}{4},$$

Ajavahemikus Δt kandub läbi selle pinna õhumass $\Delta m = vS\rho\Delta t$, mille kineetiline energia on

$$\Delta E = \frac{\Delta mv^2}{2} = \frac{S\rho\Delta tv^3}{2},$$

millele vastab võimsus $P_0 = S\rho v^3/2$. Elektriiks õnnestub muundada osa η sellest:

$$P = \eta P_0 = \frac{\eta S \rho v^3}{2} = \frac{\eta \pi d^2 \rho v^3}{8} \approx 370 \text{ kW}.$$

L88 Rong tunnelis ★★

Autor: Eero Uustalu, lõppvoor, 2009, G 4

Õhu temperatuur tunnelis kasvab, kuna mootor soojendab tunneli läbimisel selles olevat õhku. Vaatleme rongi liikumist ajavahemiku Δt jooksul. Selle ajaga läbib rong vahemaa $s = v\Delta t$ ja rongist mööduva õhu ruumala on $\Delta V = \pi d^2 s/4$. Õhu mass on $m = \Delta V \rho$ ja moolide arv on

$$N = \frac{m}{M} = \frac{\Delta V \rho}{M} = \frac{\pi d^2 v \Delta t \rho}{4M}.$$

Ideaalse gaasi olekuvõrrandist $pV = \frac{m}{M}RT$ saame avaldada $\rho = \frac{m}{V} = \frac{pM}{RT}$.

Rongi mootoris eraldub samal ajal soojushulk $Q_1 = P\Delta t$.

Üheaatomilise gaasi erisoojus jäaval ruumalal on $C_1 = 3/2R$. Seega on kaheatomilise gaasi erisoojus $C_2 = 5/3 \cdot 3/2R = 5/2R$. Gaasi erisoojus jäaval rõhul on seega $C = 5/2R + R = 7/2R$. Õhu soojendamiseks ΔT võrra kulub soojushulk $Q_2 = NC\Delta T$. Võrdsustame soojushulgad Q_1 ja Q_2 .

$$NC\Delta T = P\Delta t.$$

Asendades leitud avaldised N ja C jaoks saame pärast teisendusi

$$\Delta T = \frac{8PT}{7\pi d^2 vp} = 2,25 \text{ K}.$$

L89 Heelium ★★★

Autor: tundmatu, lahtine, 2008, G 6

Käitleme heeliumit üheaatomilise ideaalsegaasina. Paneme kirja olekuvõrrandid alg- ja lõppseisundi jaoks:

$$p_1 V_1 = nRT_1, \quad p_2 V_2 = nRT_2.$$

Paisumisel tehtav töö võrdub graafikul halliks värvitud trapetsi pindalaga:

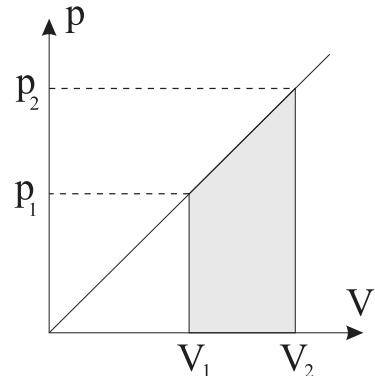
$$A = \frac{1}{2}(p_2 V_2 - p_1 V_1) = \frac{1}{2}nR(T_2 - T_1).$$

Termodünaamika I seaduse kohaselt

$$Q = A + \Delta U = \frac{1}{2}nR(T_2 - T_1) + \frac{3}{2}nR\Delta T = 2nR\Delta T.$$

Siit

$$\Delta T = \frac{Q}{2nR} \approx 6 \text{ K}.$$



L90 Õhk ★★

Autor: tundmatu, lahtine, 2009, G 7

Temperatuuri kasvades hakkab esimese anuma rõhk p_1 suurenemama ning mingil hetkel ületab see ventili kriitilise rõhu Δp . Sellest hetkest alates hakkab ventiil õhku läbi laskma nõnda, et edaspidi anumate rõhud p_1 ja p_2 rahuldavad tingimust $p_1 - p_2 = \Delta p$. See tingimus jäab edaspidi alati täidetuks, sest ei saa tekkida olukorda, kus väiksema rõhuga anumas kasvaks rõhk kiiremini kui suurema rõhuga anumas. Korrektse lahenduse huvides peame siiski ka veendumata, kas rõhk üldse kasvab piisavalt suureks, et ventiil avaneks. Selleks peaks rõhk kasvama 10 % võrra, milleks omakorda peab temperatuuri tõstma vähemalt 10 % võrra – töepooltest, see on kooskõlas ülesandes antud arvudega: $t_2 - t_1 > 30^\circ\text{C}$. Algne gaasi hulk (moolides)

$$n = \frac{p_0 V_1}{R t_1}$$

on jääv suurus ning jaotub hiljem anumate vahel osadeks n_1 ja n_2 nõnda, et $n = n_1 + n_2$, ehk

$$\frac{p_0 V_1}{R t_1} = \frac{(p_2 + \Delta p) V_1}{R t_2} + \frac{p_2 V_2}{R t_2}.$$

Asendades $\alpha = V_1/V_2$, saame

$$\begin{aligned} p_0 \alpha \frac{t_2}{t_1} - \Delta p \alpha &= p_2(\alpha + 1), \quad \Rightarrow \\ p_2 &= \frac{\alpha}{\alpha + 1} \left(p_0 \frac{t_2}{t_1} - \Delta p \right). \end{aligned}$$

Kasutades arvutustes absoluutühikutesse teisendatud temperatuuride väärtsusi $t_1 = 300\text{ K}$ ja $t_2 = 400\text{ K}$, saame vastuseks

$$p_2 = \frac{2}{3} \left(\frac{4}{3} - 1,1 \right) p_0 \approx 0,16 p_0.$$

L91 Õhuhoki ★★

Autor: Mihkel Heidelberg, lõppvoor, 2010, G 6

Olukorras, kus aluse temperatuur on minimaalne, on rõhk seibi alumise külje vahetus läheduses võrdne süsihappegaasi aururõhuga. Seibi surutakse alla jõuga F ja kuna seibi pindala on πr^2 , peab surumist tasakaalustav rõhk olema $p = \frac{F}{\pi r^2}$. Vaadeldes rõhkude tasakaalu seibi ülemise ja alumise pinna läheduses, saame et kuiva jää aururõhk on

$$p_{\text{kuiv}} = p + p_0 = p_0 + \frac{F}{\pi r^2} = 131,8\text{ kPa}.$$

Sellele vastab graafiku põhjal temperatuur $\sim 195\text{ K}$.

L92 Šokk ★★★★

Autor: tundmatu, lahtine, 2006, G 8

Kuiva õhu tihedus

$$\rho_1 = \frac{\mu_1 p_0}{RT}.$$

Suhtelise niiskusega f auru tihedus

$$\rho' = f\rho_0 = \frac{\mu_2 p_2}{RT},$$

kus p_2 on auru osarõhk. Siit:

$$p_2 = \frac{\rho_0 f RT}{\mu_2}.$$

Kuna niiske õhu rõhk on õhu ja auru osarõhkude p_1 ja p_2 summa, siis

$$p_1 = p_0 - p_2 = p_0 - \frac{\rho_0 f RT}{\mu_2}.$$

Õhu tihedus (ilma auruta) sellel osarõhul

$$\rho'' = \frac{\mu_1 p_1}{RT} = \frac{\mu_1 p_0}{RT} - \frac{\mu_1 f \rho_0}{\mu_2}.$$

Niiske õhu tihedus

$$\rho_2 = \rho' + \rho'' = \frac{\mu_1 p_0}{RT} - \left(\frac{\mu_1}{\mu_2} - 1 \right) f \rho_0.$$

Niiske ja kuiva õhu tiheduste suhe on seega

$$\begin{aligned} \frac{\rho_2}{\rho_1} &= 1 - \frac{(\mu_1 - \mu_2) f \rho_0 RT}{\mu_1 \mu_2 p_0} \\ &= 1 - \frac{(0,029 - 0,018) \cdot 0,9 \cdot 0,027 \cdot 8,31 \cdot 300}{0,029 \cdot 0,018 \cdot 10^5} \approx 0,987. \end{aligned}$$

L93 Gaasid ★★★★

Autor: Oleg Košik, lõppvoor, 2007, G 6

Kogu protsessi jooksul on mõlema gaasi rõhud võrdsed ja konstantsed. Olgu vesiniku moolide arv n_0 . Kuna alguses on ka temperatuurid võrdsed, siis valemi $n = \frac{pV}{RT}$ põhjal näeme, et heeliumi moolide arv peab olema $3n_0$. Konstantsel rõhul avaldub molaarne erisoojus kui $C_P = \left(\frac{i}{2} + 1\right) R$ (see valem on tületatav ka teistest rohkem tuntud valemitest). Vesinik on kaheatomiline gaas, heelium aga üheaatomiline, seega $i_{H_2} = 5$, $i_{He} = 3$ ning järelikult $C_{PH_2} = 7/2R$ ja $C_{PHe} = 5/2R$. Omandagu vesinik vahetult peale soojendamist temperatuuri, mis on algtemperatuurist ΔT_1 võrra kõrgem, ning olgu terve süsteemi tasakaaluline lõpptemperatuur algtemperatuurist ΔT_2 võrra suurem. Heelium saab temperatuuride ühtlustumise ajal soojushulgaga $3n_0 C_{PHe} \Delta T_2$, mis peab võrduma vesiniku poolt ära antava soojushulgaga:

$$n_0 C_{PH_2} (\Delta T_1 - \Delta T_2) = 3n_0 C_{PHe} \Delta T_2,$$

ehk

$$\frac{7}{2}(\Delta T_1 - \Delta T_2) = 3 \cdot \frac{5}{2} \Delta T_2,$$

kust

$$\Delta T_2 = \frac{7}{22} \Delta T_1.$$

Kuna protsess on isobaariline ja nii alguses kui ka lõpus on gaaside temperatuurid võrdsed, siis kehtivad võrdused $pV_{\text{H}_2} = n_{\text{H}_2}RT$, $p(V_{\text{H}_2} + V_{\text{He}}) = (n_{\text{He}} + n_{\text{H}_2})RT = 4n_0RT$. Siit tulenevalt kehtib ka

$$p\Delta V_{\text{H}_2} = n_0 R \Delta T_1,$$

$$p\Delta(V_{\text{H}_2} + V_{\text{He}}) = 4n_0 R \Delta T_2.$$

Järelikult

$$\frac{d_2}{d_1} = \frac{\Delta(V_{\text{H}_2} + V_{\text{He}})}{\Delta V_{\text{H}_2}} = \frac{4\Delta T_2}{\Delta T_1} = \frac{28}{22}.$$

Seega lõpus on koormus algusega võrreldes $d_2 = \frac{28}{22}d_1 = 7 \text{ cm}$ kõrgemal, järelikult ta nihkub täiendavalt $\Delta d = d_2 - d_1 = 1,5 \text{ cm}$ ülespoole.

L94 Korsten ★★★★

Autor: Jaan Kalda, piirkonnavor, 2009, G 9

Ahjusuusse siseneva õhu röhk p_1 on võrdne õhurõhuga ahjusuu kõrgusel ning korstnast väljuva õhu röhk p_2 on võrdne õhurõhuga korstnasuu kõrgusel. Seega, $p_2 = p_1 - \rho_0 gh$, kus ρ_0 tähistab välisõhu tihedust. Bernoulli seaduse kohaselt kehtib seos

$$p_1 = p_2 + \rho_0 gh + \rho \frac{v^2}{2} = p_1 - \rho_0 gh + \rho_0 gh + \rho \frac{v^2}{2},$$

kus $\rho = T\rho_0/T_0$ on õhu tihedus korstnas ning v on otsitav kiirus. Seega,

$$v = \sqrt{2 \left(\frac{T}{T_0} - 1 \right) gh} \approx 3,5 \text{ m/s.}$$

Märkus: ahjusuhi voolava õhu kiiruse võib lugeda tühiselt väikseks, sest voolava õhuga piirkonna ristlõike pindala on ilmselt hulga suurem korstna ristlõikepind-alast.

Bernoulli seaduse võib tuletada ka energia jäädvuse seadusest. Samuti lugeda õigeks impulsibalansi abil saadav tulemus (mis tuleb $\sqrt{2}$ korda väiksem), sest nõuti vaid hindamist.

L95 Rakettmootor ★★★★

Autor: Jaan Kalda, lahtine, 2010, G 10

Adiabaatilisel paisumisel muutub gaasi sisenergia $c_V T_0$ osaliselt joa kineetiliseks energiaks $\mu v^2/2$ (avaldised on siin ühe mooli gaasi jaoks); energia jäävuse seaduses tuleb siiski arvestada ka põlemiskambris juurde tekkivate gaaside poolt tehtavat tööd $p_0 V_0$ ning ärvoolavate gaaside pidurdavat tööd $p_1 V_1$, mis on olekuvõrrandi tõttu vastavalt võrdsed RT_0 -ga ja RT_1 -ga. Seega,

$$c_V T_0 + RT_0 = c_V T_1 + RT_1 + \mu v^2/2 \Rightarrow v^2 = 7R(T_0 - T_1)/\mu.$$

Veojõud on võrdne ajaühikus eemalduva gaasijoa impulsiga,

$$F = \dot{m}v = (\rho_1 S v) \cdot v = \rho_1 S v^2 = 7S \frac{R\rho_1 T_1}{\mu} \left(\frac{T_0}{T_1} - 1 \right).$$

Arvestades gaasi olekuvõrrandit ja lähendust $T_0 \gg T_1$ saame lõppptulemuseks

$$F = 7S p_1 T_0 / T_1.$$

L96 Vedelik ★

Autor: tundmatu, lahtine, 2005, G 1

Kuna anumad on ühendatud ning vedelikes antakse röhk igas suunas võrdselt edasi, on mõlemas anumas röhud samal kõrgusel võrdsed. Järelikult võib antud anumaid vaadelda ühe anumana, mille pindala on

$$S = \pi \left(\frac{d_1}{2} \right)^2 + \pi \left(\frac{d_2}{2} \right)^2 = \frac{\pi (d_1^2 + d_2^2)}{4}.$$

Väljasurutud vedeliku mass on võrdne lisatava ujuva keha massiga. Seega on lisanduva vedeliku ruumala $\Delta V = m/\rho$ ning kõrguse muut avaldub kui

$$\Delta h = \frac{\Delta V}{S} = \frac{4m}{\pi \rho (d_1^2 + d_2^2)}.$$

L97 Veetoru ★★

Autor: Taavi Pungas, lõppvoor, 2011, G 4

Bernoulli seadusest saame seoses

$$\frac{\rho v_1^2}{2} + p_1 = \frac{\rho v_2^2}{2} + p_2.$$

Rõhu torudes leiame veesamba kõrguse järgi, $p_1 = p_0 + \rho g h_1$ ja $p_2 = p_0 + \rho g h_2$, kus p_0 on atmosfäärirõhk. Asendades p_1 ja p_2 esimeses seoses, saame vee kiiruse teises torus:

$$v_2 = \sqrt{v_1^2 + 2g(h_1 - h_2)}.$$

Et torud on ühendatud, peab läbi nende voolama sama aja jooksul sama kogus vett, $v_1 S_1 = v_2 S_2$. Kuna toru ristlõikepindala on $S = \pi d^2/4$, saame $v_1 d_1^2 = v_2 d_2^2$. Kokku,

$$\frac{d_1}{d_2} = \sqrt{\frac{v_2}{v_1}} = \left(1 + \frac{2g(h_1 - h_2)}{v_1^2}\right)^{1/4}.$$

L98 Veekahur ★★★

Autor: Oleg Košik, piirkonnavor, 2005, G 7

Olgu veejoa kiirus kahurist väljades v . Et märk ja kahur asuvad samal körgusel ning õhutakistus puudub, siis märgini jõuab veejuga samuti kiirusega v . Aja t jooksul väljub kahurist vesi massiga $m = \rho Svt$. Väljuva vee kineetiline energia on $E = mv^2/2$ ning asendades massi leiame

$$E = \frac{\rho S v^3 t}{2}.$$

Seega saame avaldada kahuri võimsuse

$$N = \frac{E}{t} = \frac{\rho S v^3}{2} \Rightarrow v = \sqrt[3]{\frac{2N}{\rho S}}.$$

Jõud, millega veejuga tabab märki, on määratud vee impulsiga:

$$F = \frac{mv}{t} \Rightarrow F = \frac{\rho S v^2 t}{t} = \rho S v^2.$$

Asendades v saame

$$F = \sqrt[3]{4N^2 \rho S} \approx 490 \text{ N}.$$

L99 Veetünn ★★★

Autor: Mihkel Kree, lõppvoor, 2005, G 5

Leiame esmalt veejoa väljumise kiiruse. Kiiruse avaldis on tuntud Torricelli seadusena, kuid selle leidmiseks võime arutleda nõnda: avast väljuv juga omab kineetilist energiat $mv^2/2$, teisalt peab see olema võrdne potentsiaalse energiaga, mis saadakse vee ülemiselt pinnalt kuni auguni langedes: $mg(1-x)h$. Seega väljumiskiirus avaldub

$$v = \sqrt{2g(1-x)h}.$$

Märkus: impulsi jäätusest saaksime (võrreldes tünni vasakule ja paremale seinalle mõjuvate rõhumisjõudude vahe avaldist ning veejoa impulssi) tulemuse $v = \sqrt{g(1-x)h}$. See avaldis kehtib siis, kui vee liikumine tünnis pole laminaarne ning energia ei säili (läheb veekeeristesse). Laminaarse (energiakadudeta) voolu korral tuleks rõhumisjõudude vahe leidmisel arvestada Bernoulli seadusest tingitud rõhu muutust, mistõttu impulsi jäätusest tuletatud vastus ei kehti. Kuivõrd

antud ülesandes on voolu laminaarsuse küsimus jäetud täpsustamata, siis on mõlemad meetodid korrektsed.

Et veejoal vertikaalset kiiruskomponenti esialgu pole, kulub langemiseks aeg

$$\tau = \sqrt{\frac{2(H + xh)}{g}}.$$

Selle ajaga liigub aga veejuga horisontaalsihis kaugusele $L = v\tau$ ehk:

$$L = 2\sqrt{(1-x)h(H+xh)},$$

mida aga ongi antud graafikul kujutatud.

Seega piisaks H ja h leidmiseks kahe joone punkti koordinaatide määramisest ning tekkiva võrrandisüsteemi lahendamisest. Et aga võimalikult lihtsalt tulemeni jõuda, kasutame tähelepanekut, et $x = 0$ korral $L = 2\sqrt{hH}$. Võtame graafikult lugemi punktis $x = 0$ ning saame esimese võrrandi: $hH = 9 \text{ m}^2$.

Nagu öeldud, võib teise võrrandi saada suvalise punkti abil, kuid uurime natuke ekstreemumtingimust. Tähistame esmalt $\alpha = H/h$, L avaldub seega kui

$$L = 2h\sqrt{(1-x)(\alpha+x)}.$$

Kui võtame L -ist x -i järgi tuletise, näeme, et L omab ekstreemumväärust $x = (1-\alpha)/2$ korral. Selle tulemiseni võib jõuda ka arutledes nõnda: $y = (1-x)(\alpha+x)$ kujutab endast allapoole suunatud parabooli nullkohtadega 1 ja $-\alpha$, ekstreemumväärust on seega nende vahel ehk kohal $x = (1-\alpha)/2$. Asendame selle L -i avaldisse:

$$L = 2h\sqrt{\left(1 - \frac{1-\alpha}{2}\right)\left(\alpha + \frac{1-\alpha}{2}\right)} = 2h\frac{1+\alpha}{2} = h + H.$$

Seega saame teise võrrandi L -i maksimumväärust kasutades:

$$H + h = 10 \text{ m}.$$

Nendest kahest lihtsast võrrandist tekkiva võrrandisüsteemi lahendamisel (viies need näiteks ruutvõrandi kujule) leiate väärused: $h = 9 \text{ m}$ ja $H = 1 \text{ m}$.

L100 Veejuga ★★

Autor: Siim Ainsaar, piirkonnnavoor, 2006, G 9

Leidmaks purgi täitumise aega, on meil vaja teada veevoolu kiirust mingil kõrgusel. Olgu see kiirus kraanitoru otsa juures v_0 ning kaugusel h (seal, kus raadius on r_1) v_1 . Kuna vool kiireneb ühtlaselt, siis

$$v_1^2 - v_0^2 = 2gh.$$

Ajaga Δt läbib iga veejoa ristlõiget sama kogus vett, sest seda ei kao kuhugi ega tule ka juurde:

$$\pi r_0^2 v_0 \Delta t = \pi r_1^2 v_1 \Delta t.$$

Seega

$$v_1 = v_0 \left(\frac{r_0}{r_1} \right)^2,$$

mille asetame avaldisse $v_1^2 - v_0^2 = 2gh$:

$$\begin{aligned} \left[v_0 \left(\frac{r_0}{r_1} \right)^2 \right]^2 - v_0^2 &= 2gh \quad \Rightarrow \quad v_0^2 \left[\left(\frac{r_0}{r_1} \right)^4 - 1 \right] = 2gh \quad \Rightarrow \\ \Rightarrow \quad v_0 &= \sqrt{\frac{2gh}{\left(r_0/r_1 \right)^4 - 1}} \end{aligned}$$

Ajaga t voolab purki vee kogus, mille ruumala on

$$V = \pi r_0^2 v_0 t.$$

Avaldame viimasesest võrrandist aja t :

$$t = \frac{V}{\pi r_0^2 v_0} = \frac{V}{\pi r_0^2} \sqrt{\frac{\left(r_0/r_1 \right)^4 - 1}{2gh}} = \frac{V}{\pi \sqrt{2gh}} \sqrt{\frac{1}{r_1^4} - \frac{1}{r_0^4}} \approx 21 \text{ s.}$$

L101 Veepüstol ★★

Autor: Valter Kiisk, lõppvoor, 2006, G 4

Kuna me ei arvesta dissipatiivseid efekte, siis peab kehtima mehaanilise energia jäävus. Liikugu kolb jõu F toimel kiirusega v_1 ja olgu vee kiirus suudmes v_2 . Kuna vee koguruumala ei muutu, siis $v_1 S_1 = v_2 S_2$. Ajavahemiku t vältel läbib kolb vahemaa $x = v_1 t$ tehes tööd $A = Fx$. Vaatame, milline on sellele liikumisele vastav vee summaarne kineetilise energi muut. Ühelt poolt kolvi eest „kaob ära“ veehulk $m = S_1 x \rho$, mille kiirus oli v_1 , teiselt poolt ilmub suudmesse sama kogus vett liikudes kiirusega v_2 . Energia jäävus annab

$$A + \frac{mv_1^2}{2} = \frac{mv_2^2}{2}$$

ehk peale asendamist ja v_1 elimineerimist

$$\frac{F}{S_1} + \frac{\rho v_2^2}{2} \frac{S_2^2}{S_1^2} = \frac{\rho v_2^2}{2}.$$

Aga $d_2 \ll d_1$ ja $S \propto d^2$, seega ammugi $S_2^2 \ll S_1^2$ ning teise liikme vasakul pool võrdusmärki võib ära jätkata. Avaldame v_2 :

$$v_2 = \frac{1}{d_1} \sqrt{\frac{8F}{\pi \rho}} \approx 22,6 \text{ m/s.}$$

Märkus: Bernoulli seadusele tuginedes oleks saanud ülesande lahendada ka lühemalt:

$$p + \frac{\rho v^2}{2} = \text{Const},$$

mille me lahendamise käigus sisuliselt tuletasime.

L102 U-toru ★★★

Autor: tundmatu, lahtine, 2009, G 6

Olgu U-toru siseraadius r ja välisraadius $R = \sqrt{2}r$. Vaatleme eraldi U-toru kaarekujulist osa. Aja Δt jooksul siseneb sinna kiirusega v vee kogus massiga $\Delta m = \rho\Delta V = \rho\pi r^2 vt$, ning samasugune vee kogus voolab sealt sama kiirusega välja, seege summaarne vee impulsi muutus aja Δt jooksul on $\Delta p = 2\rho\pi r^2 v^2 t$, ning jõud, millega vesi mõjub sellele toru osale, on Newtoni teise seaduse põhjal

$$F = \Delta p / \Delta t = 2\rho\pi r^2 v^2.$$

Kaarekujuline toru osa on liikumatu, nii et vee poolt rakendatud jõud on tasakaalustatud kahe terastoru elastsusjõuga. Kui terastoru jäikusteguriks võtame k , siis on selge, et kehtib võrdus

$$F = k\Delta l + k\Delta l = 2k\Delta l,$$

kus Δl on ühe terastoru pikenemine. Teguri k avaldame ülesande tekstis toodud seose kaudu kui $k = ES/l = E\pi(R^2 - r^2)/l = E\pi r^2/l$ (kogu ristlõike pindalast panustab jäikustegurisse ainult materjaliga kaetud osa) ning seega

$$2\rho\pi r^2 v^2 = 2E\pi r^2 \Delta l/l.$$

Siit saame ühe toru pikenemiseks $\Delta l = \rho v^2 l/E$ ning kogu U-toru pikenemiseks

$$2\Delta l = 2\rho v^2 l/E.$$

L103 Ookean ★★★★

Autor: tundmatu, lahtine, 2005, G 8

a) Tähistame vedeliku keskmise tiheduse pinnast sügavuseni h kui ρ . Kuna vedeliku mass on kokkusurumatu ja kokkusurutud olukordades võrdne, siis

$$\rho_0 h_0 = \rho h.$$

Kui tiheduse muut on väike, saab tiheduse avaldada kujul

$$\rho = \rho_0(1 + \beta p_{\text{keskm}}),$$

kus p_{keskm} on keskmine veele mõju rõhk. Vee rõhk sügavusel h' on $p(h') = \rho gh'$, ehk keskmine rõhk avaldub kui $p_{\text{keskm}} = p(h' = h/2) = \rho gh/2$ ning

$$\rho = \rho_0 \left(1 + \frac{\beta \rho gh}{2}\right) = \frac{\rho_0 h_0}{h} \Rightarrow h \left(1 + \frac{\beta \rho gh}{2}\right) = h_0,$$

Viimasesest valemist saame avaldada sügavuste vahe Δh :

$$\Delta h = h_0 - h = \frac{\beta \rho gh^2}{2} \approx 36 \text{ m.}$$

b) Sügavusel $H = 10\,000$ m on lisarõhk ligikaudu $p \approx \rho g H$. Sellele vastab ruumala muutus (ühe kuupmeetri kohta):

$$\delta = \frac{\Delta V}{V} = \beta \rho g H \approx 0,0484.$$

Kui veepinnal on ruumalaga V vee mass ρV , siis sama vee massi ruumala sügavusel H on ligikaudu $V(1 - \delta)$ ja tihedus seega:

$$\rho_H V(1 - \delta) = \rho V \Rightarrow \rho_H = \frac{\rho}{1 - \delta}.$$

Seega sellel sügavusel on vee tiheduse muutus:

$$\Delta \rho = \rho_H - \rho = \frac{\rho}{1 - \delta} - \rho = \frac{\rho \delta}{1 - \delta} \approx 51 \text{ kg/m}^3.$$

L104 V-toru ★★★★

Autor: Mihkel Kree, lõppvoor, 2008, G 8

Oletame, et vesi on tasakaalust hälbinud nii, et veekiht, mille kõrguse projektsioon toru sihis on δx , on kandunud nurga α all olevast toru poolest teise. Veetaaseme kõrguste erinevus toru kahe poole vahel on $\delta h = \delta x(\cos(\alpha) + \cos(\beta))$, mis tekitab lisarõhu $\delta P = \rho \delta h g$. Lisarõhk mõjub vedelikule jõuga, mille toru sihiline komponent on

$$F = \delta PS = \rho \delta x (\cos(\alpha) + \cos(\beta)) g S.$$

See valem on sarnane vedruppendli valemiga $F = k \delta x$, kus

$$k = \rho (\cos(\alpha) + \cos(\beta)) g S.$$

Sellise pendli omavõnkesagedus avaldub kui

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\rho (\cos(\alpha) + \cos(\beta)) g S}{m}}.$$

Seega võime öelda, et toru pooli painutades väheneb vedeliku võnkumise sagedus

$$\sqrt{\frac{1}{2} (\cos \alpha + \cos \beta)}$$

korda.

L105 Balloon ★

Autor: Jaan Susi, lõppvoor, 2005, G 3

Termodünaamika I seaduse kohaselt $\Delta U = Q - A$, kus Q on süsteemi antud soojushulk ning A on välisjõudude vastu tehtud töö. Antud ülesande kontekstis on Q negatiivne ja A positiivne ning $A = p\Delta V$ ja $Q = -\lambda\rho_v V$. Niisiis,

$$\Delta U = -\lambda\rho_v V - p \left(\frac{V\rho_v}{\rho_j} - V \right) = -\rho_v V [\lambda + p (\rho_j^{-1} - \rho_v^{-1})].$$

Paneme tähele, et avaldis nurksulgudes peaks kujutama endast sulamissoojust normaaltingimustel (sest vee võib viia samasse lõppolekusse ka teisel viisil – muutes ta jäiks normaaltingimustel ning seejärel viies rõhu etteantud väärtsuse-ni; et jäää loeme kokkusurumatuks, siis rõhu tõstmisel tööd ei tehta). Paistab, et tegemist pole siiski päris hariliku veega, sest

$$\lambda + p (\rho_j^{-1} - \rho_v^{-1}) = 323 \text{ kJ/kg} \neq \lambda_0 = 334 \text{ kJ/kg}.$$

Arvandmete asendamisel leidame $\Delta U = -3,23 \text{ MJ}$.

L106 Kütteklaas ★

Autor: Jaak Kikas, lõppvoor, 2007, G 1

Kehtivad valemid

$$P = \frac{U^2}{R}, \quad R = \frac{\rho L}{S},$$

kus ρ on kattekihi eritakistus. Seega vastavalt orientatsioonile $R_H = \rho b / da$ ja $R_V = \rho a / db$, kus d on kattekihi paksus. Niisiis,

$$P_H/P_V = a^2/b^2 = 0,25.$$

L107 Jääkuul ★

Autor: Urmo Visk, piirkonnnavoor, 2008, G 4

Rõhk kuuli sees kasvab seetõttu, et õhk kuulis soojeneb. Ülesande teksti põhjal võime eeldada, et õhu temperatuur kuuli sees on võrdne tema seinte temperatuuriga. Meie ülesandeks on kontrollida, kui palju on rõhk kasvanud selleks hetkeks, kui seinad hakkavad sulama, st on saavutanud temperatuuri $t_1 = 0^\circ\text{C}$. Eeldame, et kera soojuspaisumine on tühine. Siis on õhu ruumala keras konstantne. Isohoorilises protsessis kehtib seos

$$\frac{p_1}{T_1} = \frac{p_0}{T_0}.$$

Tähistame indeksiga „0“ gaasi omadusi külmikus ja indeksiga „1“ omadusi temperatuuril, mille juures seinad hakkavad sulama. Niisiis

$$p_1 = p_0 \frac{T_1}{T_0}.$$

Kasutades seda tulemust saame avaldada rõhu suhtelise muutuse

$$\frac{\Delta p}{p_0} = \frac{p_1 - p_0}{p_0} = \left(\frac{T_1}{T_0} - 1 \right).$$

Leiame selle avaldise numbrilise väärtsuse:

$$\frac{\Delta p}{p_0} \approx 0,034 = 3,4\%.$$

See on selgelt väiksem kui kuuli seinte purunemispiir, st kuul hakkab enne sulama (kuid puruneb ilmselt ülerõhu töttu enne lõplikku ära sulamist).

Märkus: alternatiivse ja võrdväärsse lahendusena võib leida, millise õhutemperatuuri juures saavutaks suhteline ülerõhk väärtsuse 20 % (selleks tuleb 317 K ehk 44 °C) ja võrrelda seda jää sulamistemperatuuriga.

L108 Küttesüsteem ★

Autor: tundmatu, piirkonnavor, 2011, G 3

Paisumisel lisanduva ruumala jaoks peab olema paisupaagis piisavalt lisaruumi. Vajalik ruumala on

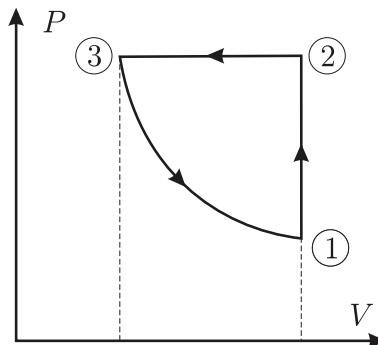
$$V - V_1 = V_0 (1 + \beta t_2) - V_0 (1 + \beta t_1) = \frac{V_1 \beta}{1 + \beta t_1} (t_2 - t_1).$$

Vajalik vaba ruum paisupaagis on seega $V - V_1 \approx 4,01$.

L109 Ringprotsess ★

Autor: Riho Taba, piirkonnavor, 2006, G 2

Antud joonise saab teisendeda telgedega P ja V graafikuks, kus iga tsükli osa töö on arvuliselt võrdne antud graafiku osa alla jäava pindalaga (sest tehtud töö on $P\Delta V$). Ideaalse gaasi töö protsessi osal $1 \rightarrow 2$: $A_{1 \rightarrow 2} = 0$, protsessi osal $2 \rightarrow 3$: $A_{2 \rightarrow 3} < 0$ ning protsessi osal $3 \rightarrow 1$: $A_{3 \rightarrow 1} > 0$, kuid $|A_{2 \rightarrow 3}| > |A_{3 \rightarrow 1}|$, seega $A_{1 \rightarrow 2 \rightarrow 3} < 0$, ehk gaasi tehtud töö on negatiivne.



L110 Vedelike segamine ★ Autor: Aleksei Vlassov, piirkonnnavoor, 2007, G 3

Olgu vedelike tihedused vastavalt ρ_1 ja ρ_2 ning erisoojused c_1 ja c_2 . Olgu otsitav temperatuur t_4 . Paneme kirja energia jäätuse võrrandid mõlema segu jaoks:

$$\begin{cases} \rho_1 V c_1 (t_3 - t_1) = \rho_2 V c_2 (t_2 - t_3) \\ 2\rho_1 V c_1 (t_4 - t_1) = \rho_2 V c_2 (t_2 - t_4) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \rho_1 c_1 (t_3 - t_1) = \rho_2 c_2 (t_2 - t_3) \\ 2\rho_1 c_1 (t_4 - t_1) = \rho_2 c_2 (t_2 - t_4). \end{cases}$$

Korrutame esimese võrrandi vasaku poole läbi teise võrrandi parema poolega:

$$\rho_1 c_1 \rho_2 c_2 (t_3 - t_1) (t_2 - t_4) = 2\rho_1 c_1 \rho_2 c_2 (t_4 - t_1) (t_2 - t_3).$$

ehk

$$(t_3 - t_1) (t_2 - t_4) = 2(t_4 - t_1) (t_2 - t_3).$$

Siihul avaldame t_4 :

$$t_4 = \frac{t_1 t_2 + t_2 t_3 - 2t_1 t_3}{2t_2 - t_1 - t_3} = 39^\circ\text{C}.$$

L111 Tulehõõrumine ★

Autor: Jaak Kikas, piirkonnnavoor, 2008, G 3

Varda pöörlemisel käigus muutub hõõrdejõu ületamiseks tehtud töö soojuseks. Toru otspinna ja aluse vahel mõjub hõõrdejõud F_h , mis võrdub pinnaga ristuvaga rõhumisjõu ja hõõrdeteguri korrustisega. Rõhumisjõuks on jõud F , millega surutakse toru vastu alust. Seega $F_h = \mu F$. Kui toru teeb ühe pöörde, siis läbib toru sein teepikkuse $L = \pi D$. Hõõrdejõu ületamiseks tehti ühe pöörde läbimisel töö $A = F_h L$. Kui toru pöörleb sagedusega f , siis aja t jooksul teebs toru $N = ft$ pöörret. Kokku eraldub toru pöörlemisel soojushulk

$$Q = AN = \mu F \pi D f \Delta t.$$

L112 Termos ★

Autor: Urmo Visk, piirkonnnavoor, 2009, G 3

Olgu c_x otsitav erisoojus.

Vaatleme esimest juhtu, kus termoses oli algsest külmem vesi. Kuna külmem vesi oli termosega soojuslikus tasakaalus, siis oli ka termose temperatuur t_1 . Temperatuuride ühtlustumisel annab soojem vesi energiat ära. Külmem vesi ja termos saavad energiat juurde. Paneme kirja soojusliku tasakaalu võrrandi:

$$m_1 c (T_1 - t_1) + mc_x (T_1 - t_1) = m_2 c (t_2 - T_1). \quad (1)$$

Vaatleme teist juhtu, kus termoses oli algsest soojem vesi. Kuna soe vesi oli termosega soojuslikus tasakaalus, siis oli ka termose temperatuur t_2 . Temperatuuride ühtlustumisel annavad termos ja soojem vesi energiat ära. Külmem vesi saab energiat juurde. Kirjutame soojusliku tasakaalu võrrandi:

$$m_1 c (T_2 - t_1) = m_2 c (t_2 - T_2) + mc_x (t_2 - T_2). \quad (2)$$

Lahutame teineteisest võrrandid (2) ja (1).

$$m_1 c (T_1 - T_2) + mc_x (T_1 - t_1) = m_2 c (T_2 - T_1) - mc_x (t_2 - T_2).$$

Tähistame $T_2 - T_1 = \Delta T$. Allpool on toodud c_x tuletuskäik eelnevast valemist.

$$\begin{aligned} -m_1 c \Delta T + mc_x (t_2 - t_1) &= m_2 c \Delta T + mc_x \Delta T \implies \\ -\Delta T c (m_2 + m_1) &= mc_x (\Delta T + t_1 - t_2) \implies \\ c_x &= -\frac{\Delta T c (m_2 + m_1)}{m (\Delta T + t_1 - t_2)} = 930 \text{ J/kg C}. \end{aligned}$$

L113 Rauatükk ★

Autor: Oleg Košik, lahtine, 2010, G 2

Algne vee mass on $M = \rho V = 1000 \text{ g}$. Olgu väljaaurustunud vee mass m_0 . Selle soojendamiseks keemistemperatuurini $t = 100^\circ\text{C}$ ning aurustamiseks läheb vaja energiat

$$Q_1 = m_0(c_1(t - t_1) + L).$$

Ülejää nud vee soojendamiseks temperatuurini t_2 läheb energiat

$$Q_2 = (M - m_0)c_1(t_2 - t_1).$$

Raua jahtumisel eraldub energia $Q_3 = mc_2(t_0 - t_2)$. Energia jäädvuse seaduse kohaselt $Q_1 + Q_2 = Q_3$, ehk

$$m_0(c_1(t - t_1) + L) + (M - m_0)c_1(t_2 - t_1) = mc_2(t_0 - t_2).$$

Sit

$$m_0 = \frac{mc_2(t_0 - t_2) - Mc_1(t_2 - t_1)}{c_1(t - t_2) + L} \approx 2 \text{ g}.$$

L114 Jõhvikkad ★

Autor: Urmo Visk, piirkonnavor, 2010, G 2

Vee algtemperatuur oli $t_1 = 100^\circ\text{C}$. Olgu vee ja jõhvikkate massid vastavalt M ja m . Jõhvikkate soojendamiseks kuluv soojushulk tuleb vee jahtumise arvelt. Vee jahtumisel eralduv soojushulk oli

$$Q_j = Mc_V(t_1 - t).$$

Jõhvikkate soojendamise käigus tuli 1) soojendada külmunud jõhvikkad sulamistemperatuurini, 2) sulatada külmunud jõhvikkad ja 3) soojendada sulanud jõhvikkad vee temperatuurini. Leiate igas etapis kulunud soojushulga:

$$\begin{aligned} Q_{s1} &= mc_j(0 - t_2) = -mc_j t_2, \\ Q_{s2} &= mL, \\ Q_{s3} &= mc_v(t - 0) = mc_v t. \end{aligned}$$

Liidame jõhvivate soojendamiseks kulunud soojushulgad ja võrdsustame saadud summa vee jahtumisel eraldunud soojushulgaga. Saadud võrrandist avaldame vee ja jõhvivate masside suhte:

$$-mc_j t_2 + mL + mc_v t = Mc_V(t_1 - t),$$

kust

$$\frac{M}{m} = \frac{-c_j t_2 + L + c_v t}{c_V(t_1 - t)}.$$

Arvuliseks vastuseks saame 16.

L115 Vesi ★

Autor: Taavi Pungas, lõppvoor, 2011, G 1

Energia jäävusest teame, et väikese koguse vee aurustumiseks kuluv soojushulk tuleb järelejäänud vee temperatuuri langemise arvelt.

Kuigi aurustumise alghetkel tekib veeaur temperatuuriga 100°C , on hiljem nii vee kui tekkiva veeauru temperatuur veidi madalam. Uuel temperatuuril aga ei ole enam väikese koguse vee aurustumiseks kuluv soojushulk otseselt arvutatav vee aurustumissoojusest temperatuuril 100°C (ülesandes antud L).

Seega teeme lihtsustuse, et vee aurustumissoojus on selles temperatuurivahemikus kogu aeg L . Olgu esialgselt termoses oleva vee mass m . Saame $0,01mL = 0,99mc_v\Delta t$, mis annab vastuseks

$$\Delta t = \frac{1}{99} \frac{L}{c_v} = 5,4^\circ\text{C}.$$

L116 Kastmisvesi ★★

Autor: Urmo Visk, piirkonnnavoor, 2008, G 5

Kastmisvee anuma taha tekib kiirtega ristuvale tasandile ringikujuline vari. Samasugune vari tekiks ka ringist, mis paikneb risti päikesekiirtega. Seega neelavad võrdse raadiusega kera ja kiirtega risti olev ring valgust võrdsest, sõltumata päikesevalguse langemise nurgast. Järelikult on veeanuma poolt ühes sekundis neelatav soojushulk $P = \varepsilon\pi R^2$. Päeva jooksul saadav soojushulk on $Q = P\tau$, kus ajavahemik

$$\tau = 22,5\text{ h} - 4,5\text{ h} = 18\text{ h} = 64\,800\text{ s}.$$

Teisest küljest kulub see soojus vee soojendamisele, st $Q = C\Delta t$, kus Δt on vee temperatuuri muutus ja vee soojusmahtuvus $C = mc$. Siinjuures vee mass $m = (4/3)\pi R^3\rho$. Niisiis

$$\pi R^2 \cdot \varepsilon\tau = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho c \Delta t,$$

millega

$$\Delta t = \frac{3\varepsilon\tau}{4c\rho R}$$

ja järelikult lõpptemperatuur on

$$t = t_0 + \frac{3\varepsilon\tau}{4c\rho R};$$

numbriliselt $t \approx 28^\circ\text{C}$.

L117 Lihvimisketas ★★

Autor: Ott Krikmann, piirkonnavor, 2005, G 3

Kettal aja $t = 1\text{ s}$ jooksul eralduv soojushulk on

$$Q = \frac{\pi r^2 q}{s}.$$

Sama aja jooksul voolab vesi massiga

$$m = wt\rho.$$

Et jahutusvesi kannab ära kogu eralduva soojuse, siis võib koostada soojusbalansi võrrandi aja $t = 1\text{ s}$ jaoks:

$$\frac{\pi r^2 q}{s} = wt\rho c(t_2 - t_1).$$

Siit võrrandist avaldame t_2 :

$$t_2 = t_1 + \frac{\pi r^2 q}{swt\rho c} \approx 40^\circ\text{C}.$$

L118 Vee keemine ★★

Autor: Mihkel Kree, lõppvoor, 2008, G 6

Leiame pindpinevuse tõttu mullis tekkiva lisarõhu. See on teatavasti $P = \frac{2\sigma}{r}$. Seda saab mitmel moel töestada. Üks võimalus on vaadelda mulli keskpunkti läbi-vat tasandit, mis jaotab kera kaheks poolkeraks. Poolkerasid tömbab kokku pind-pinevusjoud $F = 2\pi r\sigma$. Jöudude tasakaalust peab see olema võrdne lisarõhu poolt tekitatud jöuga $F = \pi r^2 \cdot P$. Seega tekib pindpinevus mullis lisarõhu $P = \frac{2\sigma}{r}$. Samale tulemusele võiksime jöuda ka järgnevalt. Pindpinevuse pinnaenergia avaldub teatavasti kui $E = \sigma 4\pi r^2$. Suurendades raadiust väikese Δr võrra, on energia muut

$$\Delta E = 4\pi\sigma((r + \Delta r)^2 - r^2) \approx 8\pi\sigma r \Delta r.$$

Samas avaldub energia muut rõhu kaudu

$$A \approx pS\Delta r = 4\pi r^2 p \Delta r.$$

Kuna $A = \Delta E$, siis $p = \frac{2\sigma}{r}$.

Kuni 105 kraadini ei toimunud keemist, seega pidid mullid olema nii väiksed, et pindpinevuse poolt tekitatud lisarõhu ja õhurõhu summa jää suuremaks kui küllastunud veeauru rõhk: $p_0 + \frac{2\sigma}{r} > p_{\text{aur}} = p_0 + 5 \cdot 3,5 \text{ kPa}$, siit

$$r = \frac{2\sigma}{5 \cdot 3,5 \text{ kPa}} = 6,6 \mu\text{m}.$$

L119 Vesi ja jää ★★

Autor: Andres Laan, piirkonnavor, 2010, G 5

Soojusvoog läbi vee kihi on määrtud valemiga

$$Q = D \frac{S \Delta T}{l},$$

kus S on kihi pindala, l selle paksus, ΔT kihi ülemise ja alumise pinna temperatuuride vahe ning D vastava vee faasi soojuhtivuskoeffitsient. Vaatleme vedela ja tahke faasi piirpinda. Antud pinna temperatuur on 0°C . Tahkest pooltest tulev soojusvoo võimsus on $Q_t = D_t S T_1 / l_t$ ja vedelast faasist tuleva voo võimsus on $Q_v = D_v S T_2 / l_v$. Statsionaarses olukorras, kus piirpinna asukoht ei muudu, tasakaalustavad antud vood üksteist ära. Arvestades, et mõlema faasi pindalad on võrdsed, saame

$$\frac{D_t T_1}{l_t} = -\frac{D_v T_2}{l_v}.$$

Kasutame ära asjaolu, et tahke ja vedela kihi paksuste suhe oli alguses 4:

$$\frac{D_t}{D_v} = -\frac{T_2 l_t}{T_1 l_{v1}} = -\frac{-20 \cdot 4}{20 \cdot 1} = 4,$$

Teisel juhul

$$T'_2 = -\frac{D_t}{D_v} \frac{l'_v}{l'_t} T_1 = -4 \frac{l'_v}{l'_t} T_2 = 80^\circ\text{C}.$$

L120 Destillaator ★★

Autor: Koit Timpmann, lõppvor, 2010, G 2

Kahe liitri vee mass on $m = 2 \text{ kg}$. Kondenseerudes eraldub soojushulk $Q = Lm$. 95% eraldunud soojushulgast läheb jahutusvee soojendamiseks. Seosest $\eta Lm = cM\Delta T$ saame jahutusvee massi

$$M = \frac{\eta Lm}{c\Delta T}.$$

Jahutusvee massi saame avaldada tiheduse ja ruumala kaudu ning ruumala oma-korda toru ristlõikepindala, voolu kiiruse ja aja kaudu:

$$M = \rho V = \rho Sl = \rho Svt.$$

Viies kokku need kaks võrrandit, saame avaldada kiiruse:

$$v = \frac{\eta Lm}{c\Delta T \rho St} \approx 0,12 \text{ m/s}.$$

L121 Külmatusseade ★★

Autor: tundmatu, piirkonnavor, 2005, G 8

Külmatusseadme korral on tegu pööratud soojusmasinaga, idealse soojusmasina puhul kehtib seos

$$\frac{A}{Q_j} = \frac{T_j - T_k}{T_j},$$

kus mootori tehtud töö on leitav energia jäävusest

$$A = Q_j - Q_k.$$

Siinjuures Q_j ja Q_k on vastavalt jahutusvedelikule ära antud ja jahutatavalta kehalt ära võetud soojushulk. Elimineerides mittevajaliku suuruse Q_j saame

$$1 + \frac{Q_k}{A} = \frac{T_j}{T_j - T_k},$$

millest

$$Q_k = \frac{AT_k}{T_j - T_k} = 22,6 \text{ kJ}.$$

L122 Elektripliit ★★

Autor: tundmatu, lahtine, 2007, G 8

Spiraal kuumeneb temperatuurini, mil tekib soojuslik tasakaal spiraali ja ümbritseva keskkona vahel. Kuna spiraalil eraldub võimsus $P = I^2R$, peab kehtima $P = N$ (soojuskadusid arvestamata) ehk

$$\kappa(T - T_0) = I^2 R_0 [1 + \alpha(T - T_0)].$$

Avaldades T , saame

$$T = T_0 + \frac{I^2 R_0}{\kappa - \alpha I^2 R_0}.$$

Kui $\kappa \leq \alpha I^2 R_0$ suureneb temperatuur lõpmatuseni ning pliit põleb läbi.

L123 Õhuaken ★★

Autor: Jaan Kalda, lõppvoor, 2009, G 6

Soojusvahetuskiirus läbi seinte jms on

$$P_s = \alpha(t - t_0) = P \frac{t - t_0}{t_1 - t_0}.$$

Peale selle toimub soojusvahetus sissetuleva õhu abil $P_1 = \dot{\nu} \frac{7}{2} R(t - t_0)$, kus ajahikus sisenevate moolide arv on $\dot{\nu} = v/V$ ja mooli ruumala $V = RT/p_0 = 22,4 \text{ l/mol}$. Seega soojusliku tasakaalu tingimuse saab kirja kujul

$$P = P \frac{t - t_0}{t_1 - t_0} + c_p \frac{v}{V}(t - t_0),$$

millest

$$t = t_0 + \frac{P}{\frac{P}{t_1 - t_0} + c_p \frac{v}{V}} \approx 13,2^\circ\text{C}.$$

L124 Tuba ★★★

Autor: Oleg Košik, lõppvoor, 2006, G 7

Temperatuuri kasvu või langemise kiirus on võrdeline tappa siseneva summaarse soojusliku võimsusega. Sellele vastab graafiku puutuja tõus. Ajahetkeni $t = 1100$ min läheb soojus toast välja, peale seda lisandub kaotatavale võimsusele soojapuhuri võimsus. Soojapuhuri võimsusele vastab puutuja tõusu muut mingil temperatuuril. Näiteks hetke $t = 1100$ min jaoks saame, et puutuja tõusu muut on (lignikaudu) $8/1000 + 10,2/400 \approx 0,036$ °C/min. Graafiku abil leiame nüüd temperatuuri, mille korral soojuskadude võimsus võrdub soojapuhuri võimsusega. Selle jaoks võib kasutada joonlauda tõusuga 0,036 °C/min ning määrata punkt graafikus, mis puutub antud sirget. Graafiku esimeses osas on selline punkt umbes temperatuuril $T = 20$ °C. Seega toatemperatuur pika aja möödumisel on $T = 20$ °C.

L125 Küttekeha ★★★

Autor: Mihkel Heidelberg, lõppvoor, 2007, G 7

Et ruumist eemalduva soojuse hulk on stabiilses olukorras võrdne küttekeha poolt toodetud soojusega, siis $P(T_2) = k(T_2 - T_1)$, $k = \frac{P(T_2)}{T_2 - T_1}$. Teisel juhul jäab k saamaks:

$$P(T_4) = \frac{P(T_2)}{T_2 - T_1} (T_4 - T_3),$$

kust on näha, et punkt $(T_4, P(T_4))$ peab asetsema sirgel, mis läbib punkti $(T_3, 0)$ ja on sama tõusuga (k), kui punkte $(T_2, P(T_2))$ ja $(T_1, 0)$ ühendav sirge. Joonistades sellise sirge, saame graafikute lõikepunktist vastuse.

L126 Soojuskiirgus ★★★

Autor: Valter Kiisk, lõppvoor, 2006, G 8

a) Tähistame $j_{s \rightarrow v}$ abil soojusvoogu pindalaühiku kohta, mis on suunatud siseseinalt välisseina poole. Vastassuunalist soojusvoogu tähistame $j_{v \rightarrow s}$, $j_{s \rightarrow v}$ on tingitud siseseina kiirgusest ja $j_{v \rightarrow s}$ osalisest peegeldumisest. Analoogiliselt, $j_{v \rightarrow s}$ on tingitud välisseina kiirgusest ja $j_{s \rightarrow v}$ osalisest peegeldumisest. Seega siis

$$j_{s \rightarrow v} = \varepsilon \sigma T_s^4 + (1 - \varepsilon) j_{v \rightarrow s}$$

$$j_{v \rightarrow s} = \varepsilon \sigma T_v^4 + (1 - \varepsilon) j_{s \rightarrow v},$$

millega

$$j_{s \rightarrow v} = \sigma \frac{T_s^4 + (1 - \varepsilon) T_v^4}{2 - \varepsilon}, \quad j_{v \rightarrow s} = \sigma \frac{T_v^4 + (1 - \varepsilon) T_s^4}{2 - \varepsilon}.$$

Summaarne soojusvoog on

$$P = S j = S (j_{v \rightarrow s} - j_{s \rightarrow v}) = S \varepsilon \sigma \frac{T_v^4 - T_s^4}{2 - \varepsilon} \approx 22 \text{ W}.$$

b) Eelmise punkti vastusest selgub, et kahe seina vahel toimuv soojusvoog on võrdeline vahega $T_2^4 - T_1^4$. Seega on siin täielik analoogia elektriahelate teooriaga, kui T^4 tölgendada pingena, soojusvoogu voolutugevusena ning $(2 - \varepsilon)/(\sigma \varepsilon)$ takistusena. Viimane ei sõltu seinte vahekaugusest. Paigutades sise- ja välisseina vahele N ekraani, on tegemist $N + 1$ ühesuguse takisti järgistikühendusega. Järelikult soojusvoog kahaneb $N + 1$ korda.

L127 Pooljuht ★★★★

Autor: tundmatu, lahtine, 2008, G 10

Kütteelemendi takistus on

$$R = \frac{\rho L}{S} = \frac{L}{\sigma S},$$

kus ρ on eritakistus, L elemendi pikkus, S elemendi ristlõikepindala ja σ erijuhtivus. Elemendil eralduv võimsus on

$$N = \frac{U^2}{R} = \frac{S}{L} U^2 \sigma.$$

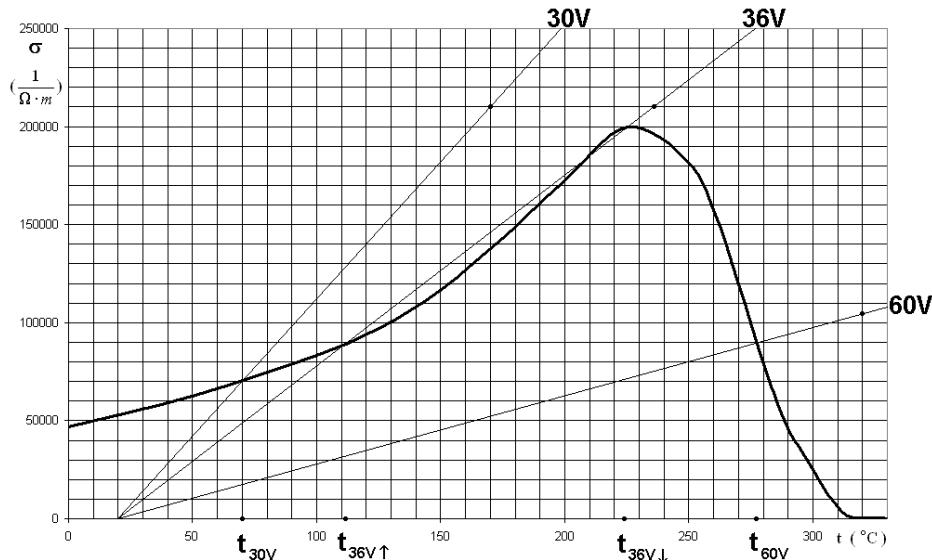
Võimsus, millega keha annab soojust ümbritsevale keskkonnale, on võrdeline temperatuuride vahega ja tasakaalulise temperatuuri puhul peab võrduma kehal eralduva võimsusega. Seega

$$N = k \Delta t = \frac{S}{L} U^2 \sigma.$$

Siit näeme, et

$$\frac{\sigma}{\Delta t} \cdot U^2 = k \frac{L}{S} = \text{Const}, \quad (1)$$

kus aga $\frac{\sigma}{\Delta t}$ on sirge tõus erijuhtivuse graafikul, kus algpunktiks on $t_v = 20^\circ\text{C}$ ja $\sigma = 0$.



Algtingimusi silmas pidades on pinge $U_0 = 30 \text{ V}$ juures see tõus $\left(\frac{\sigma}{\Delta t}\right)_{30} = \frac{7}{5}$ ning arvestades valemit (1) saame

$$\left(\frac{\sigma}{\Delta t}\right)_{30} \cdot U_0^2 = \left(\frac{\sigma}{\Delta t}\right)_{60} \cdot U_1^2 = \left(\frac{\sigma}{\Delta t}\right)_{36} \cdot U_2^2.$$

Siit

$$\left(\frac{\sigma}{\Delta t}\right)_{60} = \frac{U_0^2}{U_1^2} \left(\frac{\sigma}{\Delta t}\right)_{30} = \frac{7}{20},$$

$$\left(\frac{\sigma}{\Delta t}\right)_{36} = \frac{U_0^2}{U_2^2} \left(\frac{\sigma}{\Delta t}\right)_{30} = \frac{35}{36}.$$

Kanname vastavad sirged (alguspunktiga $t = 20^\circ\text{C}$ ja $\sigma = 0$) graafikule ja loeme vastavad tasakaalulised temperatuurid.

Saame $U_1 = 60\text{ V}$ puhul $t_1 = 277^\circ\text{C}$.

Tekib huvitav nähtus, et tänu mittelineaarsusele on $U_2 = 36\text{ V}$ puhul pingे tõstmisel ja langetamisel tasakaalulised temperatuurid erinevad, vastavalt pinge tõusu $t_2 = 112^\circ\text{C}$ ja langetamisel $t'_2 = 224^\circ\text{C}$.

Paneme tähele, 36 V puhul on graafikult loetavaid lahendeid justkui kolm, aga keskmise lahend 207°C on ebastabiilne. Nimelt olukorras, kus küttekeha on selles temperatuuril, viib väikenegi küttekeha temperatuuri tõus võimsuse suurenemiseni ja langus vastavalt võimsuse vähenemiseni, seega temperatuur kas kasvab temperatuurini 224°C või langeb temperatuurini 112°C .

L128 Juhe ★★

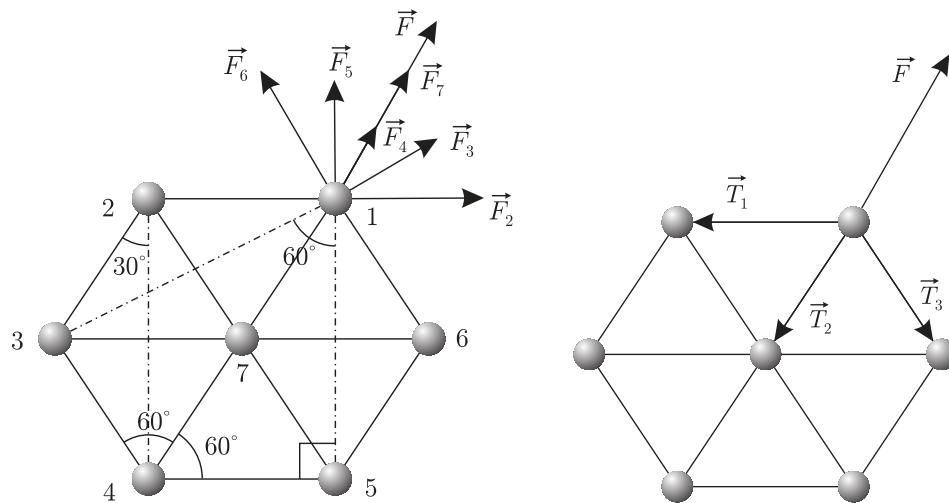
Autor: tundmatu, lahtine, 2005, G 5

Valime mõttelise ühikulise pikkusega silindrilise kontuuri, mille raadius on r . Selle pindala on $S = 2\pi r$, sellest voolab läbi vool i . Voolutihedus tuleb seega

$$j = \frac{i}{2\pi r}.$$

L129 Kuulikesed ★★

Autor: tundmatu, lahtine, 2005, G 4



Kõigepealt teeme kaks olulist tähelepanekut, lähtudes sümmeetria kaalutlustest:

- 1) Keskmise kuul jäääb paigale.
- 2) Kõik 6 kuuli servades on samaväärsed, neile mõjuvate jõudude suurused on samad, kuid jõudude suunad on erinevad — nad langevad kokku sirgetega, mis ühendavad vastava kuulikesele keskmise kuulikesega, ning kuna laengud on sama-märgilised, on suunatud keskmisest kuulikesest eemale.

Märgime joonisel ühele äärminele kuulikesele mõjuvad jõud (vt joonist). Leiame jõudude väärtsused. Jõud F_2 , F_6 ja F_7 mõjuvad kuulikesele 1, vastavalt kuulikeste 2, 6 ja 7 poolt:

$$F_2 = F_6 = F_7 = \frac{kq^2}{l^2}.$$

Jõud F_4 mõjub kuulikesele 1 kuulikesese 4 poolt:

$$F_4 = \frac{kq^2}{(2l)^2} = \frac{kq^2}{4l^2}.$$

Jõud F_3 ja F_5 mõjuvad kuulikesele 1, vastavalt kuulikeste 3 ja 5 poolt:

$$F_3 = F_5 = \frac{kq^2}{(2l \sin 30^\circ)^2} = \frac{kq^2}{(2l \cdot \sqrt{3}/2)^2} = \frac{kq^2}{3l^2}.$$

Summaarse jõu leiame projitseerides jõud radiaalsele teljele:

$$\begin{aligned} F &= F_7 + F_4 + 2F_2 \cos 60^\circ + 2F_3 \cos 30^\circ \\ &= \frac{kq^2}{l^2} + \frac{kq^2}{4l^2} + 2 \cdot 0,5 \cdot \frac{kq^2}{l^2} + 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{kq^2}{3l^2} = \frac{kq^2}{l^2} \left(1 + \frac{1}{4} + 1 + \frac{\sqrt{3}}{3} \right) \\ &= \frac{kq^2}{l^2} \left(\frac{27 + 4\sqrt{3}}{12} \right). \end{aligned}$$

Kuna tegu on ühesuguste niitidega, mis venisid sama palju (niitide alg- ja lõpp-pikkused on ühesugused), siis pinged kõigis niitides on võrdsed:

$$\vec{F} = \vec{T}_1 + \vec{T}_2 + \vec{T}_3, \quad |\vec{T}_1| = |\vec{T}_2| = |\vec{T}_3|.$$

Siit:

$$F = T + 2T \cos 60^\circ = T(1 + 2 \cdot 0,5) = 2T.$$

Seega niitides on pinged

$$T = \frac{F}{2} = \frac{kq^2}{l^2} \left(\frac{27 + 4\sqrt{3}}{24} \right).$$

L130 Tolmukübe ★★

Autor: Aigar Vaigu, piirkonnnavoor, 2006, G 8

Olgu plaatide pindala S , plaatide vaheline kaugus d , kondensaatori mahtuvus ja pinge vastavalt C ja U . Avaldame elektrivälja tugevuse kondensaatori plaatide vahel:

$$C = \frac{\epsilon\epsilon_0 S}{d} \quad \text{ja} \quad C = \frac{q}{U},$$

kust

$$E = \frac{q}{\epsilon\epsilon_0 S}.$$

Arvestades, et pindtihedus $\sigma = q/S$, saame

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon\epsilon_0}.$$

Tolmukübemele mõjub raskusjõud mg ja elektrostaatiline jõud Eq . Tasakaalu korral $mg = Eq$. Tolmukübeme laeng on seega

$$q = \frac{mg}{E} = mg \frac{\epsilon\epsilon_0}{\sigma} \approx 0,33 \cdot 10^{-17} \text{ C}.$$

Kui polaarsust muuta, siis mõjub tolmukübemele jõud

$$F = mg + Eq = 2mg.$$

Kiirendus, millega tolmukübe hakkab langema, on $a = 2g$.

L131 Kuulikesed ★★

Autor: tundmatu, lahtine, 2007, G 7

Energia jäävuse seaduse kohaselt

$$mgH + \frac{mv^2}{2} + \frac{kq^2}{H} = mgh + \frac{kq^2}{h},$$

kus peale gravitatsioonilise potentsiaalse energiia arvestasime ka elektrilise potentsiaaliga. Niisiis

$$\begin{aligned} h - \frac{v^2}{2g} - H - \frac{kq^2}{mgH} + \frac{kq^2}{mgh} &= 0, \\ h^2 - \left(\frac{v^2}{2g} + \frac{kq^2}{mgH} + H \right)h + \frac{kq^2}{mg} &= 0. \end{aligned}$$

Lahendades saadud ruutvõrrandi, saame

$$h = \frac{1}{2} \left(\frac{v^2}{2g} + \frac{kq^2}{mgH} + H \right) - \sqrt{\frac{1}{4} \left(\frac{v^2}{2g} + \frac{kq^2}{mgH} + H \right)^2 - \frac{kq^2}{mg}}.$$

Lahend „+“-märgiga ruutjuure ees oleks kaugusest H suurem ja vastaks maksimaalsele kõrgusele, mille saavutaks kuulike, kui ta saaks samasuguse kuid ülespoole suunatud algkiiruse.

L132 Laetud rõngas ★★

Autor: tundmatu, lahtine, 2009, G 4

Punktis, mis asub rõnga teljel kaugusel d rõnga keskpunktist on rõnga poolt tekitatud välja potentsiaal

$$\phi_1 = k \frac{Q}{\sqrt{R^2 + d^2}} = k \frac{Q}{2R}.$$

Rõnga keskpunktis on rõnga poolt tekitatud välja potentsiaal

$$\phi_2 = k \frac{Q}{R}.$$

Et elektron saaks rõngast läbi lennata, peab tema kineetiline energia olema piisav potentsiaalide vahel $U = \phi_2 - \phi_1$ läbimiseks. Piirjuhul saame

$$\frac{mv^2}{2} = e \left(k \frac{Q}{R} - k \frac{Q}{2R} \right) = k \frac{eQ}{2R}.$$

Siit

$$v_{\min} = \sqrt{k \frac{eQ}{mR}}.$$

L133 Ioonmootor ★★

Autor: Mihkel Pajusalu, lahtine, 2010, G 6

Ioonide kiiruse leiame energia jäävuse seadusest:

$$mu^2/2 = Ue \Rightarrow u = \sqrt{2Ue/m},$$

kus $m = \mu/N_A$. Impulsi jäävuse seadusest süsteemi „laev+kiirendatud kütus“ jaoks saame (eeldusel, et $M \gg m_k$)

$$m_k u = Mv \Rightarrow m_k = Mv/u = Mv\sqrt{\mu/2N_A Ue} = 2,61 \text{ kg}.$$

Näeme, et tehtud eeldus $m_k \ll M$ töepooltest kehtib.

L134 Lendav elektronkahur ★★★

Autor: Siim Ainsaar, lõppvoor, 2006, G 6

Olgu elektroni laengu absoluutväärustus e ja mass m_e . Ajaga t lahkub katoodilt hulk elektrone kogulaengu absoluutväärusega $q = It$. Elektronide arv, mis selle ajaga lendu läheb, on siis $N = \frac{q}{e} = \frac{It}{e}$ ja mass $m = Nm_e = \frac{Itm_e}{e}$. Leiame ka, kui kiiresti need elektronid liiguavad. Üks elektron saab elektronkahuris kineetilise energi $E = Ue$. Samas $E = \frac{m_e v^2}{2}$, seega

$$v = \sqrt{\frac{2E}{m_e}} = \sqrt{\frac{2Ue}{m_e}}.$$

Ajaga t lendu läinud elektronide koguimpulss

$$p = mv = \frac{Itm_e}{e} \sqrt{\frac{2Ue}{m_e}} = It \sqrt{2U \frac{m_e}{e}}.$$

Et elektronkahur muudab aja t jooksul elektronide impulssi p võrra, siis mõjub temale keskmiselt jõud

$$F = \frac{p}{t} = I \sqrt{2U \frac{m_e}{e}} = I \sqrt{\frac{2U}{k}}.$$

Tõstmaks masinat õhku, peab see F ületama masinale (koos Tatikaga) mõjuva raskusjõu $m_T g$, st $F \geq m_T g$ ehk

$$I \sqrt{U} \geq m_T g \sqrt{\frac{k}{2}} \approx 4,3 \cdot 10^8 \text{ A} \sqrt{\text{V}}.$$

Ilmselt peavad I ja U olema ebarealistlikult suured, sest televiisori puhul

$$I \sqrt{U} \approx 0,017 \text{ A} \sqrt{\text{V}}.$$

Seega pole Tatikal lootustki sellise masinaga lennata.

Märkus: erirelatiivsusteooriat arvestades sama arutluskäiku läbi tehes saaksime, et täpsem valem on

$$F = I \sqrt{\frac{2U}{k} + \frac{U^2}{c^2}},$$

kus $c \approx 3,0 \cdot 10^8 \text{ m/s}$ on valguse kiirus vaakumis. Seega võime relativistlikud efektid arvestamata jäätta vaid siis, kui

$$\frac{U^2}{c^2} \ll \frac{2U}{k}$$

ehk

$$U \ll \frac{2c^2}{k} \approx 1,0 \cdot 10^6 \text{ V}.$$

Arvestades vajalikku $I \sqrt{U}$ suurusjärku, peab Tatikas niisiis kardetavasti ka relatiivsusteooriat uurima... Lendu tõusta ei suudaks ta aga sellegipoolest.

L135 Elektronkiir ★★

Autor: tundmatu, lahtine, 2008, G 7

Olgu v_0 elektronide algiirus plaatide vahel sattumisel. Aeg, mille jooksul üks elektron viibib plaatide vahel, on $t = \frac{b}{v_0}$.

Plaatide vahel on elektriväli tugevusega $E = \frac{U}{d}$. Newtoni II seadusest $eE = ma$ leiame, et elektron liigub plaatide vahel kiirendusega $a = \frac{eU}{md}$. Läbides plaatide vahelise tee, kalduvad elektronid vahemaa s_0 esialgsest trajektoorist kõrvale, kus

$$s_0 = \frac{at^2}{2} = \frac{Ueb^2}{2dmv_0^2}.$$

Elektronide liikumise kiirus v plaatide vahelisest ruumist väljudes koosneb kahest komponendist:

– paralleelsest ekraaniga $v_y = at = \frac{eUb}{mdv_0}$,

- risti ekraaniga $v_x = v_0$.

Seega veedavad elektronid plaatidest ekraanini aja $t' = \frac{l}{v_x} = \frac{l}{v_0}$. Selle aja jooksul lisandub täiendav ekraaniga paralleelne nihe

$$s' = v_y t' = \frac{eUbl}{mdv_0^2}.$$

Kogu nihe on niisiis

$$s = s_0 + s' = \frac{eUb}{mdv_0^2} \left(\frac{b}{2} + l \right).$$

Seega

$$v_0 = \sqrt{\frac{e}{m} \frac{Ub}{ds} \left(\frac{b}{2} + l \right)} \approx 1,58 \cdot 10^7 \text{ m/s}.$$

Sooritame kontrolli, kas elektroni nihe plaatide vahel on väiksem kui plaatide vaheline kaugus:

$$s_0 = \frac{Ueb^2}{2dmv_0^2} = \frac{bs}{2l+b} = 3,5 \text{ mm} < d.$$

L136 Kuup ★★★

Autor: Jaan Kalda, piirkonnavor, 2008, G 7

Kui auku ei oleks, oleks väljatugevus sümmeetria töttu 0. Antud olukord on ekvivalentne auguta kuubi ja negatiivse pindlaenguga $b \times b$ ruudu superpositiooniga. Negatiivne ruut moodustab laengu $q = -\sigma b^2$ ning tekitab kuubi keskel väljatugevuse

$$E = \frac{\sigma b^2}{4\pi\epsilon_0 \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{\sigma b^2}{\pi\epsilon_0 a^2}.$$

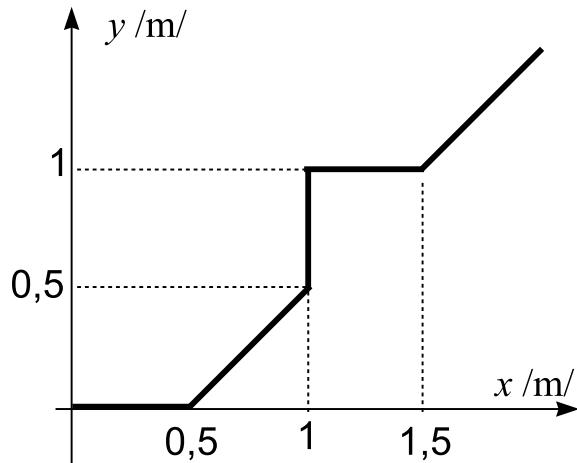
L137 Liikuv laeng ★★★

Autor: Jaan Kalda, piirkonnavor, 2009, G 6

Esimene impulss annab alguses laengule x -suunalise impulsi $mv_x = qE_x\tau$, millega

$$v_x = \frac{q}{m} E_x \tau = 1 \text{ m/s}.$$

Ajavahemiku $t_1 = T/4$ jooksul kuni järgmise impulsini jõuab osake liikuda sirgjooneliselt piki x -telge kaugusele $s_x = v_x T/4 = 0,5 \text{ m}$. Seejärel saab ta impulsi y -telje sihis, mistöttu omandab ka kiiruse y -komponent samasuguse väärtsuse: $v_y = v_x = 1 \text{ m/s}$, mistöttu ta liigub 45-kraadise nurga all, sooritades kuni järgmisse impulsini nii x - kui y -telje sihis nihke $s_x = s_y = 0,5 \text{ m}$. Järgmine impulss peatab x -telje sihilise (kuid muutmata y -sihilist) liikumise, nii et osake nihkub nüüd piki y -telge kaugusele $s_y = 0,5 \text{ m}$. Järgmine impulss peatab ka x -suunalise liikumise, nii et osake jäääb paigale. Edasi kordub protsess otsast peale. Eelpooltoodud tulmuste põhjal saame juuresoleva trajektoori.



Keskmise kiiruse leidame perioodi jooksul sooritatud nihke $s = \sqrt{1 + 1}\text{m}$ perioodi $T = 2\text{s}$ suhtena, $v \approx 0,7\text{ m/s}$.

L138 Sfäärid ★★★

Autor: Kristian Kuppart, lahtine, 2011, G 8

Et sfäärid on traadiga ühendatud, siis nad omavad sama potentsiaali. Olgu ühe laeng Q_1 ja teise laeng Q_2 ; sellisel juhul $kQ_1/R_1 = kQ_2/R_2$. Jagades selle võrduse vasaku ja parema poole läbi R_1R_2 -ga ja tähistades $E_1 = kQ_1/R_1^2$ ning $E_2 = kQ_2/R_2^2$, saame $E_1/R_2 = E_2/R_1$, millest $E_1/E_2 = R_2/R_1$.

L139 Kondensaatorid ★★★★

Autor: Oleg Košik, lõppvoor, 2005, G 8

Tegu on kondensaatorite jadaühendusega, mille tõttu laeng mõlemal kondensaatoril peab olema ühesugune. Kondensaatorite kogumahtuvuse leidame valemist

$$\frac{1}{C_0} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \quad \Rightarrow \quad C_0 = 1,2C.$$

Seega laeng on $q = 1,2CU$. Pinge kondensaatoril mahtuvusega $2C$ on seega $U_1 = q/C_1 = 0,6U$ ning kondensaatoril mahtuvusega $3C$ vastavalt $U_2 = 0,4U$. Eeldame, et elektriväli on vaid kondensaatorite sees. Elektrivälja tugevus neis on nüüd vastavalt

$$E_1 = -\frac{U_1}{2d} = -\frac{-0,3U}{d} \quad \text{ja} \quad E_2 = \frac{U_2}{d} = \frac{0,4U}{d}.$$

Kuna elektriväljad peavad olema suunatud vastupidistes suundades, siis ühe elektrivälja tugevuse võtsime negatiivseks. Määrame nüüd horisontaalsuunalise kiirenduse seosest $Eq = ma$. Esimese kondensaatori puhul on see

$$a_2 = \frac{E_2 q}{m} = \frac{0,4 U q}{md}.$$

Vertikaalsuunaline kiirus on kogu aeg sama, selle tõttu aeg, mille jooksul asub osake mõlema kondensaatori elektrivälja mõjusfääril, on $t = l/v$. Selle aja jooksul muutub horisontaalsuunaline kiirus *at* võrra. Seega teisest kondensaatorist väljumise hetkel on osakese kiirus

$$v_h = ta_1 + ta_2 = t(a_1 + a_2) = \frac{0,1Uql}{mdv}.$$

Trajektoori kaldenurga tangens on järelkult

$$\tan \alpha = \frac{v_h}{v} = \frac{0,1Uql}{mdv^2}.$$

L140 Kärbes ★★★

Autor: Stanislav Zavjalov, lahtine, 2010, G 7

Valime potentsiaali nullnivooleks kärbse asümpootoolise asukoha (lõpmatuses). Olgu laeng Q koordinaatide alguspunktiks ning olgu x -telg horisontaalne ja y -telg vertikaalne. Kärbes peab püsima laengu lähedal köverduval null-potentsiaalil. Potentsiaal avaldub homogeense välja E potentsiaali ja punktlaengu potentsiaali superpositioonina, seega

$$E(d-y) - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{\sqrt{y^2+x^2}} = 0.$$

Ülesande sümmeetriast on selge, kärbse vahemaa on minimaalne $x = 0$ korral ehk teisisõnu kehtib $E(d-y) = kQ/y$. Antud võrrandist saame ruutvõrandi lahenditega

$$y_{1,2} = \frac{d}{2} \pm \sqrt{\frac{d^2}{4} - \frac{kQ}{E}} = \frac{d}{2} \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{4kQ/E}{d^2}} \right).$$

Juhul kui laeng on väike, liigub kärbes ilmselgelt sirgjooneliselt. Ometigi leidub kaks lahendit. Lahendi kahesus tuleneb sellest, et laengu läheduses leidub samuti null-potentsiaaliga suletud köver. Laengu kasvades need kaks null-potentsiaaliga joont lähenevad üksteisele, kuni $Q = \pi\epsilon_0 Ed^2$ juures puutuvad kokku ja edaspidi moodustub null-potentsiaalist juba üksainus köver, mis kulgeb ümber laengu. Seega vastab kärbse trajektoor ruutvõrandi suuremale lahendile:

$$y = \frac{d}{2} \left(1 + \sqrt{1 - \frac{4kQ}{Ed^2}} \right).$$

L141 Laetud klotsid ★★★★

Autor: tundmatu, lahtine, 2006, G 9

Klots hakkab liikuma, kui sellele mõjuv elektrostaatiline jõud ületab maksimaalse hõördejõu:

$$\frac{kq^2}{l^2} > \mu mg.$$

Klotside läbitava vahemaa leiame energia jäävuse seadusest. Punktis, milles klots peatub, on elektrostaatilise välja potentsiaalne energia väiksem kui algpunktis. Potentsiaalsete energiate vahe muundub liikumise käigus klotside kineetiliseks energiaks, mis omakorda hõördejõu töö tulemusena muundub soojuseks.

Kui kuulide vahemaa liikuma hakkamisel oli l ning seisma jäämise hetkel L , siis muutus elektrostaatilises potentsiaalses energias on

$$\Delta E = \frac{kq^2}{l} - \frac{kq^2}{L}.$$

Hõördejõud μmg mõjub kummagile klotsile vahemaa $(L - l)/2$ jooksul, seega kogu hõördejõu töö on

$$A = \mu mg(L - l).$$

Et need energia muudud on võrdsed, saame vahemaa L jaoks lihtsa võrrandi:

$$\begin{aligned} kq^2 \left(\frac{1}{l} - \frac{1}{L} \right) &= \mu mg(L - l) \Rightarrow \frac{kq^2}{\mu mg} \frac{L - l}{lL} = L - l \Rightarrow \\ &\Rightarrow L = \frac{kq^2}{\mu mgl} \end{aligned}$$

L142 Kosmoseprügi ★★★★

Autor: Siim Ainsaar, lõppvoor, 2009, G 9

Massikeskme taustsüsteemis on kerade kaugus minimaalne hetkel, kui süsteem on paigal. d saame energia jäävuse seadusest, mis kehtib, kuna nöör puutehetkel mutrilise (sirgena) jõudu ei avalda ega muuda nii põrget plastseks.

Süsteemi masskeskme liikumiskiirus satelliidi süsteemis

$$v_c = \frac{mv}{m + 2M},$$

mutri algkiirus masskeskme süsteemis

$$w = v - v_c = v \left(1 - \frac{m}{m + 2M} \right) = v \frac{2M}{m + 2M},$$

tehiskaaslase oma

$$W = v_c = \frac{mv}{m + 2M}.$$

Energia jäävus masskeskme taustsüsteemis on

$$\frac{mw^2}{2} + \frac{2MW^2}{2} + \frac{kq^2}{l} = \frac{kq^2}{d},$$

kust

$$d = \frac{kq^2}{\frac{mw^2}{2} + MW^2 + \frac{kq^2}{l}} = \frac{kq^2}{\frac{mv^2}{2} \left(\frac{2M}{m+2M} \right)^2 + Mv^2 \left(\frac{m}{m+2M} \right)^2 + \frac{kq^2}{l}} = \\ = \frac{1}{\frac{1}{l} + \frac{mMv^2}{kq^2(m+2M)}}.$$

Alternatiivne lahendus

Hetkel, kui keradevaheline kaugus on minimaalne, on satelliidi osad üksteise suhtes paigal. Seega liigub süsteem sel hetkel nagu jäik keha. Võtame inertsiaalse taustsüsteemi, kus tehiskaaslane oli enne kokkupõrget paigal, ja tähistame süsteemi kiiruse minimaalse kauguse saavutamise hetkel kui v_1 .

Impulsi jäädvusest

$$mv = (m + 2M)v_1 \implies v_1 = \frac{mv}{m + 2M}.$$

Kehtib ka energia jäädvus.

$$\frac{mv^2}{2} + \frac{kq^2}{l} = \frac{(m + 2M)v_1^2}{2} + \frac{kq^2}{d}, \\ \frac{mv^2}{2} + \frac{kq^2}{l} = \frac{m^2v^2}{2(m + 2M)} + \frac{kq^2}{d}, \\ d = \frac{\frac{kq^2}{l}}{\frac{mv^2}{2} + \frac{kq^2}{l} - \frac{m^2v^2}{2(m + 2M)}} = \frac{1}{\frac{1}{l} + \frac{mMv^2}{kq^2(m+2M)}}.$$

L143 Mõõteriistad ★

Autor: Koit Timpmann, lõppvoor, 2006, G 1

Olgu alguses ampermeetri ja voltmeetri pinged vastavalt U_A ja U_V . Jadaühenduse korral kehtib

$$U_A + U_V = 9 \text{ V}.$$

Pärast takisti lisamist suurennes ampermeetrit läbiv vool ja seega ka pinge kaks korda. Teisisõnu, ampermeetri uus pinge oli $2U_A$. Pinge voltmeetril aga vähenes kaks korda ja oli $0,5U_V$. Kirchhoffi pinge seaduse kohaselt

$$2U_A + 0,5U_V = 9 \text{ V}.$$

Lahendades kahest võrrandist koosneva võrrandisüsteemi, saame $U_A = 3 \text{ V}$ ja $U_V = 6 \text{ V}$. Seega voltmeetril pinge oli alguses 6 V ning lõpus 3 V.

L144 Elektriküünlad ★

Autor: Valter Kiisk, piirkonnnavoor, 2009, G 4

a) Lambi nimivool on $0,6 \text{ W} / 3 \text{ V} = 0,2 \text{ A}$. 10 lampi tarbivad voolu $10 \times 0,2 \text{ A} = 2 \text{ A}$. Pingelang takistil on $5 \text{ V} - 3 \text{ V} = 2 \text{ V}$. Järelikult vajalik takistus on $2 \text{ V} / 2 \text{ A} = 1 \Omega$.

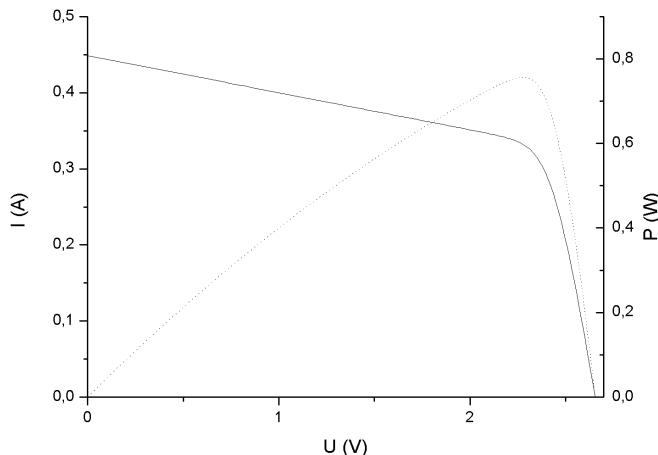
b) 1Ω -st takistit kasutades oli voolutugevus ahelas $(4 \text{ V} - 2,3 \text{ V}) / 1 \Omega = 1,7 \text{ A}$. Sellise koormuse tulemusel langes pingे vooluallika klemmidel 1 V võrra, seega alaldi sisetakistus on $1 \text{ V} / 1,7 \text{ A} = 0,59 \Omega$. Järelikult takisti R takistuse sobilik väärthus oleks $1 \Omega - 0,59 \Omega = 0,41 \Omega$.

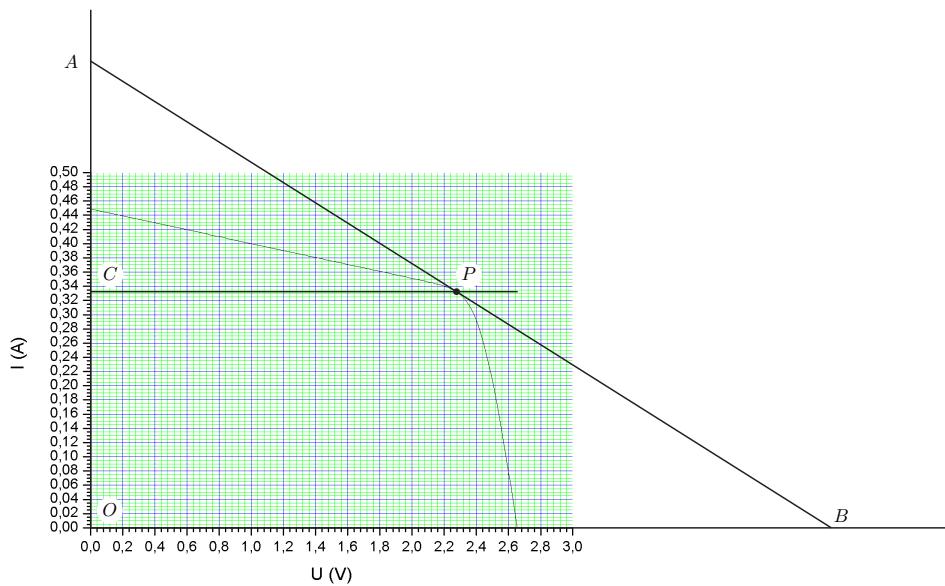
L145 Päikesepaneel ★

Autor: Mihkel Pajusalu, lõppvoor, 2010, G 3

Koormisel eralduv võimsus avaldub kui UI . Peame leidma punkti graafikul, mil antud avaldis on maksimaalne. Graafikult saab erinevate punktide jaoks võimsuse välja arvutada ja ligikaudu maksimaalse võimsuse määräta. Saame $U_{\max} \approx 2,28 \text{ V}$, $I_{\max} \approx 0,33 \text{ A}$. Seega vastav koormise takistus on

$$R = \frac{U_{\max}}{I_{\max}} \approx 6,9 \Omega$$

*Alternatiivne lahendus*



Võimsus $N = UI$ on maksimaalne, kui võimsuse tuletis pingे järgi on null. Seega,

$$dN = d(UI) = dUI + UdI = 0,$$

ehk

$$I + U \frac{dI}{dU} = 0,$$

kus dI/dU on graafiku tõus. Vaatleme vastavaid suurusi graafiku punktis P . Joonise tähistustes, $|OC| = I$, $|CP| = U$ ja

$$\frac{|OA|}{|OB|} = \frac{|CA|}{|CP|} = -\frac{dI}{dU}.$$

Järelikult, kui me tahame, et P oleks otsitav võimsuse maksimumi punkt, peab kehtima

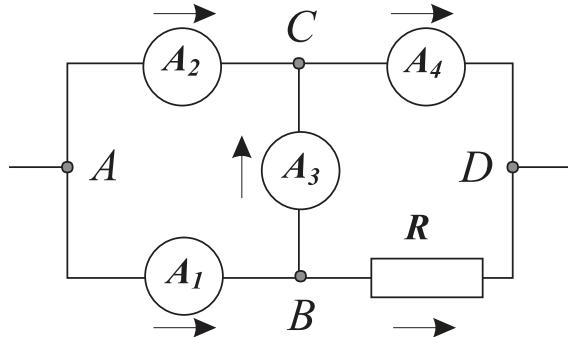
$$|OC| - |CP| \frac{|CA|}{|CP|} = 0 \implies |OC| = |CA| \implies |AP| = |PB|.$$

Joonlauaga veidi otsides pole sellist punkti P raske leida. Vastus on muidugi sama, mis esimeses lahenduses.

L146 Ampermeetrid ★★

Autor: tundmatu, lahtine, 2008, G 4

Märgime skeemil voolude oletatavad suunad ning valime kontuurides ACB ja CDB liikumise suunaks päripäeva.



Kirchhoffi 2. seaduse põhjal kontuuris ACB

$$I_2r - I_3r - I_1r = 0 \Rightarrow I_3 = I_2 - I_1 = 2 \text{ A.}$$

Kirchhoffi 1. seaduse põhjal punktis B

$$I_1 = I_3 + I_R \Rightarrow I_R = I_1 - I_3 = 1 \text{ A.}$$

Kirchhoffi 1. seaduse põhjal punktis C

$$I_4 = I_2 + I_3 = 7 \text{ A.}$$

Ning lõpuks Kirchhoffi 2. seaduse põhjal kontuuris CDB

$$I_4r - I_R R + I_3r = 0 \Rightarrow 9r - R = 0 \Rightarrow R/r = 9.$$

L147 Patarei ★★

Autor: Taavi Pungas, piirkonnavor, 2011, G 6

Olgu patarei sisetakistus r . Mõlemas olukorras on patarei elektromotoorjõud sama, st $I_1(R+r) = I_2(2R+r)$. Seega,

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{R+r}{2R+r} = \frac{2R+r-R}{2R+r} = 1 - \frac{R}{2R+r} = 1 - \frac{1}{2 + \frac{r}{R}}. \quad (1)$$

- a) r on väiksem kui R , aga samas peab r olema suurem kui 0. Seega $0 \leq \frac{r}{R} < 1$ ja $1 - \frac{1}{2+\frac{r}{R}} \leq I_2/I_1 < 1 - \frac{1}{2+1}$, ehk $1/2 \leq I_2/I_1 < 2/3$.
- b) Nüüd kehtib $R < r$, ehk $I_2/I_1 > 2/3$. Valemist (1) on näha, et I_2/I_1 ülempiir on 1, seega $2/3 < I_2/I_1 < 1$

L148 Vooluring ★★

Autor: Valter Kiisk, piirkonnavor, 2005, G 4

Teisest skeemist näeme, et vooluallika elektromotoorjõud \mathcal{E} võrdub voltmeetri näiduga,

$$\mathcal{E} = U_2.$$

Seega esimese skeemi jaoks

$$U_1 + I_1 r_a = \mathcal{E} = U_2,$$

teise skeemi jaoks

$$I_2 R + I_2 r_a = U_2,$$

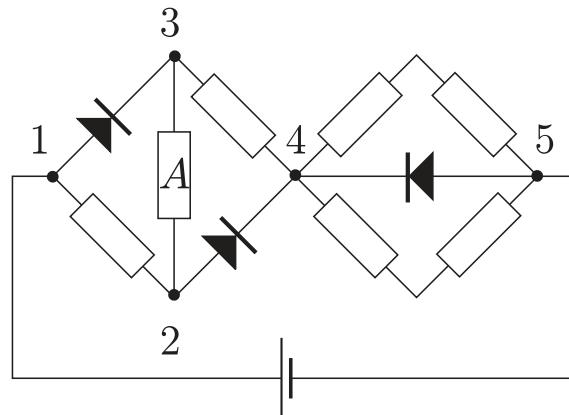
kus r_a on ampermeetri sisetakistus. Viimase elimineerimisel saame

$$R = \frac{I_1 U_2 + I_2 U_1 - I_2 U_2}{I_1 I_2} = \frac{U_2}{I_2} + \frac{U_1}{I_1} - \frac{U_2}{I_1}.$$

L149 Takistid ★★

Autor: Aigar Vaigu, lõppvoor, 2005, G 4

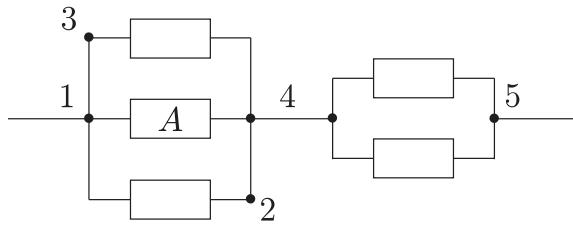
Paneme tähele, et pingi absoluutväärtus ahela otstele U ei muudu. Arvestades, et päripidise voolu korral võib dioodi klemmid lugeda lühistatust ning vastuvoolu korral isoleerituks, saame kummagi polaarsuse jaoks koostada algse ahela (joonis 1) asemel ekvivalentsed ahelad (joonised 2 ja 3).



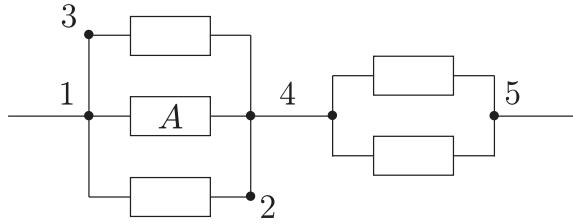
Joonis 1: Esialgne skeem

Leiame takistil A eralduva võimsuse päripinge puhul. Takistil A eralduv võimsus on $P_1 = I_1^2 R$, kus

$$I_1 = \frac{I}{3} = \frac{1}{3} \frac{U}{r_1}$$



Joonis 2: Ekvivalentne skeem ühe polaarsuse puhul



Joonis 3: Ekvivalentne skeem teise polaarsuse puhul

on vaadeldavat takistit läbiva voolu tugevus ning

$$r_1 = \frac{R}{3} + R = \frac{4}{3}R$$

on kogu ahela takistus. Seega

$$P_1 = \frac{R U^2}{9 r_1^2} = \frac{U^2}{R} \frac{1}{9} \frac{9}{16} = \frac{1}{16} \frac{U^2}{R}.$$

Nüüd määrame takistil A eralduva võimsuse vastupidise polaarsusega.

Takistit A läbib vool $I_2 = U/3R$. Seega võimsus on

$$P_2 = \left(\frac{U}{3R} \right)^2 R = \frac{1}{9} \frac{U^2}{R}.$$

Võimsuste suhe

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{9}{16},$$

seega polaarsuse muutmisel muutub takistil A eralduv võimsus $9/16$ korda.

L150 Elektriskeem ★★

Autor: tundmatu, lahtine, 2006, G 2

Kondensaatori C_1 plaadid on ühendatud läbi takistite R_1 ja R_2 . Seepärast laeng selle kondensaatori plaatidel on $q_1 = 0$ (pärast seda, kui on lõppenud kondensaatorite C_2 ja C_3 laadimine). Kuna pärast kondensaatorite laadimist voolud skeemis ei kulge, pinged kondensaatoritel C_2 ja C_3 on võrdsed \mathcal{E} . Järelikult, $q_2 = C_2 \mathcal{E}$ ja $q_3 = C_3 \mathcal{E}$.

L151 Skeem ★★

Autor: tundmatu, lahtine, 2009, G 3

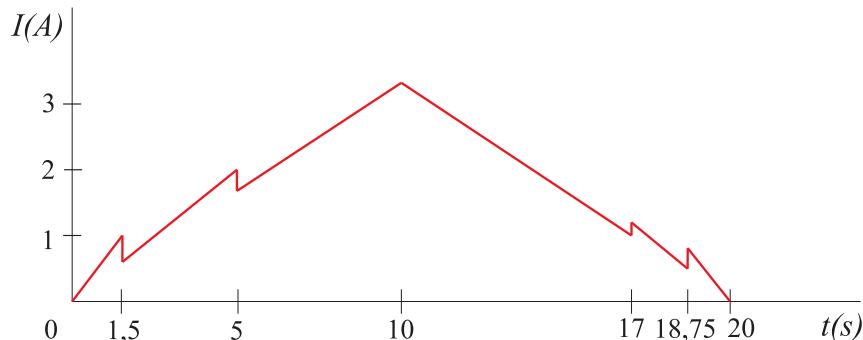
Süsteem saab töötada kolmes režiimis:

(I) Kõigi elementide takitus on 1Ω . Siis süsteemi kogutakistus on $R_I = 1,5\Omega$, vool $I_I = \frac{U}{1,5}(A)$ ning pinge skeemi vasakpoolsel elemendil $\frac{2}{3}U$ ja parempoolsetel elementidel $\frac{1}{3}U$.

(II) Vasakpoolse elemendi takitus on 2Ω , parempoolsete elementide takitus on 1Ω . Siis süsteemi kogutakistus on $R_I = 2,5\Omega$, vool $I_I = \frac{U}{2,5}(A)$ ning pinge vasakpoolsel elemendil $\frac{4}{5}U$ ja parempoolsetel elementidel $\frac{1}{5}U$.

(III) Kõigi elementide takitus on 2Ω . Siis süsteemi kogutakistus on $R_I = 3\Omega$, vool $I_I = \frac{U}{3}(A)$ ning pinge skeemi vasakpoolsel elemendil $\frac{2}{3}U$ ja parempoolsetel elementidel $\frac{1}{3}U$.

Vaatame süsteemi käitumist, kui klemmipingi kasvab. Alguses töötab süsteem režiimis I kuni hetkeni, mil klemmipingi kasvab vääratuseni $U = 1,5\text{ V}$. Siis muutub vasakpoolse elemendi takistuse vääratus $R_2 = 2\Omega$ -ks ning süsteem jätkab tööd režiimis II. Hetkel, mil klemmipingepinge kasvab vääratuseni $U = 5\text{ V}$, muutub ka parempoolsete elementide takistus R_2 -ks ning süsteem jätkab tööd režiimis III. Vaatame süsteemi käitumist, kui klemmipingi kahaneb. Alguses töötab süsteem režiimis III kuni hetkeni, mil klemmipingi langeb vääratuseni $U = 3\text{ V}$. Siis muutub parempoolsete elementide takistuse vääratus tagasi $R_1 = 1\Omega$ -ks ning süsteem jätkab tööd režiimis II. Hetkel, mil klemmipingepinge langeb vääratuseni $U = 1,25\text{ V}$, muutub ka vasakpoolse elemendi takistus tagasi R_1 -ks ning süsteem jätkab tööd režiimis I. Voolutugevuse käitumine on esitatud graafikul.

**L152 Takisti ★★**

Autor: Jaan Kalda, piirkonnavor, 2007, G 7

Traadi ja pulga takistused pikkusühiku kohta on vastavalt $r_r = \rho_r/s = 3,2\Omega/\text{m}$ ja $r_g = \rho_g/S = 10\Omega/\text{m}$. Olgu traadi ja pulga pikkused vastavalt l_r ja l_g . Arvestades temperatuurisõltuvusega, on takistused vastavalt

$$R_r = l_r r_r (1 + \alpha_r \Delta T) \quad \text{ja} \quad R_g = l_g r_g (1 + \alpha_g \Delta T).$$

Järjestikühenduse korral on summaarne takistus

$$R = (l_r r_r + l_g r_g) + (l_r r_r \alpha_r + l_g r_g \alpha_g) \Delta T.$$

Temperatuurisõltuvus on minimaalne (lineaarses lähenduses olematu), kui

$$l_r r_r \alpha_r + l_g r_g \alpha_g = 0.$$

Sellisel juhul on takistus

$$R = l_r r_r + l_g r_g.$$

Nendest kahest võrrandist saame avaldada l_r ja l_g : esimesest võrrandist leiame $l_r r_r = -l_g r_g \alpha_g / \alpha_r$, mille asendamisel teise saame

$$R = l_g r_g \left(1 - \frac{\alpha_g}{\alpha_r} \right) \Rightarrow l_g = \frac{R \alpha_r}{r_g (\alpha_g - \alpha_r)} \approx 5,6 \text{ cm.}$$

Analoogselt

$$l_r = \frac{R \alpha_g}{r_r (\alpha_g - \alpha_r)} \approx 13,6 \text{ cm.}$$

L153 Kondensaatoriredel ★★★ Autor: Siim Ainsaar, piirkonnnavoor, 2007, G 8

Lõpmatust ahelast ühe lüli eemaldamisega mahtuvus ei muutu. Seetõttu võime tervet ahelat vaadelda kui jadaühendust C -st ning C ja C_k paralleelühendusest. Seega saame, kasutades veel asjaolu, et jadaühenduses liituvad mahtuvuse pöördväärtused ning rõõpühenduses mahtuvused ise, võrrandi:

$$C_k = \frac{1}{1/C + 1/(C + C_k)}.$$

Teisendades jõuame ruutvõrrandini:

$$C_k^2 + CC_k - C^2 = 0.$$

Seda lahendades saame:

$$C_k = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} C \approx 0,6 C.$$

Negatiivse lahendi heitsime kõrvale.

L154 Traat ★★★

Autor: Jaan Kalda, lõppvoor, 2008, G 7

Traadijupp pikkusega δ omab ristlõikepindala $s = S \cdot 1 \text{ mm}/\Delta$ ning takistust $r = \rho \delta / s = \rho \delta \Delta \cdot 1 \text{ mm}^{-3}$. Liites kokku kõikide väikeste juppide takistused näeme, et kogutakistus $R = \rho A \cdot 1 \text{ mm}^{-3}$, kus A on graafiku alune pindala (liita tuleb ka joonest $\Delta = 1 \text{ mm}$ allapoole jäav osa). Joonise abil leiame $A \approx 14 \text{ mm} \cdot \text{m}$ ning seega $R \approx 14 \Omega$.

L155 Kondensaator ★★

Autor: Aigar Vaigu, piirkonnnavoor, 2010, G 7

Patarei ping on $U = \text{const}$ ja vool ahelas, vastavalt ülesande tingimustele, on $I = \text{const}$. Patarei võimsus on

$$P_p = UI.$$

Energia kondensaatoris on

$$E = \frac{CU^2}{2},$$

kus kondensaatori mahtuvus on $C = q/U$ ja laeng kondensaatoris q . Kondensaatorisse energia salvestamise kiirus on energia muutumise kiirus kondensaatoris ehk energia tuletis aja järgi,

$$P_C = \frac{dE}{dt} = \frac{dC}{dt} \frac{U^2}{2} = \frac{d(CU)}{dt} \frac{U}{2} = \frac{dq}{dt} \frac{U}{2}.$$

Arvestades, et laengu muutumise kiirus dq/dt on vool I , saame energi salvestamise kiiruseks kondensaatorisse

$$P_C = \frac{UI}{2}.$$

Näeme, et patareist „väljub“ energiat kaks korda kiiremini, kui seda salvestub kondensaatorisse. Energia, mis ajaühikus kondensaatorisse ei jõua, läheb välisjõudule, mis muudavad kondensaatori mahtuvust selliselt, et $I = \text{const}$, vastu töö tegemiseks.

L156 Kondensaatorid ★★

Autor: Mihkel Rähn, piirkonnnavoor, 2006, G 7

a) Vooluallikas laeb mõlemad kondensaatorid elektromotoorjõuga võrdse pingeni, seega on $q_{a1} = C_1\mathcal{E}$ ja $q_{a2} = C_2\mathcal{E}$.

b) Leiame, kui suure pingeni kondensaatorid laaduvad. Voolutugevus ahelas on

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R_1 + R_2 + R_3 + r}.$$

Kondensaatoril C_1 on laeng $q_{b1} = C_1I(R_1 + R_2)$ ja kondensaatoril C_2 on laeng $q_{b2} = C_2IR_2$.

c) Kehtib laengu jäävus, paralleelses ühenduses on pinged kondensaatoritel võrdsed. Summaarne laeng $q = q_{b1} + q_{b2}$ ning mahtuvus $C = C_1 + C_2$. Pinge kondensaatoril on $U = q/C$. Laengud kondensaatoritel on $q_{c1} = C_1U$ ja $q_{c2} = C_2U$.

L157 Kondensaatorid ★★★

Autor: Mihkel Kree, lõppvoor, 2009, G 3

Kogunegu keskmisele kondensaatorile (mahtuvusega $3C$) laeng a ning nurgas paiknevatele kondensaatoritele (mahtuvusega $3C$) laeng b . Vaatleme ülemist vaskpoolset kondensaatorit: selle negatiivsel plaadil on nüüd laeng $-q + a + b$ ning positiivsel plaadil $q + b$. Saame võrrandi:

$$-(-q + a + b) = q + b \implies q - a - b = q + b \implies b = -a/2.$$

Lisaks saame pingete võrdsusest

$$\frac{a}{3C} = \frac{q + b}{C} + \frac{b}{3C} \implies a = 3q + 4b \implies a + 2a = 3q,$$

millest $a = q$.

L158 Aku laadimine ★★★★

Autor: Valter Kiisk, piirkonnavoor, 2008, G 8

Olgu aku klemmide pinge U ning voolutugevus I . Voolutugevus takistis R_2 on seega U/R_2 ja voolutugevus takistis R_1 avaldub kui $U/R_2 + I$. Teise Kirchhoffi seaduse kohaselt

$$U + \left(\frac{U}{R_2} + I \right) R_1 = U_0 \quad \Rightarrow \quad UR_1 - (U_0 - U) R_2 + IR_1 R_2 = 0,$$

kus $U_0 = 6\text{ V}$. Laadimisgraafikult leiame, et maksimaalne vool $I = 0,1\text{ A}$ vastab pingele $U = 1,2\text{ V}$, kui aga $U = 1,5\text{ V}$, siis peab olema $I = 0$. Seega R_1 ja R_2 määramiseks saame võrrandisüsteemi

$$1,2R_1 - 4,8R_2 + 0,1R_1R_2 = 0, \quad 1,5R_1 - 4,5R_2 = 0.$$

Selle lahend on $R_1 = 12\Omega$, $R_2 = 4\Omega$.

L159 Jõulukaunistus ★★★★

Autor: Valter Kiisk, lõppvoor, 2010, G 8

Maksimaalne pinge, milleni kondensaator laadub, võrdub võrgupinge amplituudväärtusega 311 V . Sellest takistile langeb pingे $311\text{ V} - 50 \times 3\text{ V} = 161\text{ V}$. Seeaga takistuse väärtus peab olema $161\text{ V}/20\text{ mA} \approx 8\text{ k}\Omega$ ja sellel eraldub võimsus $161\text{ V} \times 20\text{ mA} \approx 3,2\text{ W}$. Peale pingे amplituudväärtuse saavutamist peab kondensaator olema suuteline vahelduvvoolu ühe perioodi (20 ms) jooksul valgusdioode ahelat toitma nii, et pingelang takistil (ja seega ka kondensaatoril endal) kukub mitte rohkem kui $0,05 \times 161\text{ V} = 8\text{ V}$ võrra. Samas kondensaatorilt võetakse sama aja jooksul elektrilaeng $20\text{ mA} \times 20\text{ ms} = 0,0004\text{ C}$. Seega nõutav mahtuvus on $0,0004\text{ C}/8\text{ V} = 50\text{ }\mu\text{F}$.

L160 Närvirakk ★★★★

Autor: Andres Laan, lõppvoor, 2011, G 9

Kuna laengud saavad voolata üle membraani kolme eri teed mööda ja kondensatorile kogunev laeng põhjustab kõigile kolmele teele ühiselt möjuva elektrostaatilise pinge U , siis on meil närviraku mudeldamiseks sobiv skeem, kus meil on rööbiti kolm vooluteed: kondensaatori voolutee, kaalumi voolutee ja naatriumi voolutee.

Kui saabub tasakaal, ei lähe voolu läbi kondensaatori. Selleks peab kaalumi ja naatriumi voolu summa olema elektriliselt neutraalne. Kaalumi vool on $(\mathcal{E}_K - U)/R_K$. Naatriumi vool on $(\mathcal{E}_{Na} - U)/R_{Na}$. Võrrutades nende voolude summa nulliga saame pinge avaldiseks

$$U = \frac{R_K \mathcal{E}_{Na} + R_{Na} \mathcal{E}_K}{R_{Na} + R_K}.$$

Membraani kogulaeng on siis

$$q = CU = C \frac{R_K \mathcal{E}_{Na} + R_{Na} \mathcal{E}_K}{R_{Na} + R_K}.$$

L161 Solenoid ★★

Autor: Andres Laan, lõppvoor, 2011, G 5

Väljatugevus solenoidi sees on $B = \mu n I$, kus n on solenoidi traadi keerete arv pikkusühiku kohta, I seda läbiv vool ja μ vaakumi magnetiline läbitavus. Väli on suunatud piki solenoidi telje. Kui selle välja suunaga on risti mingisugunegi kiirus v , siis ühe pöörde tegemiseks kulub aeg $T = 2\pi m/eB$ (tuletatav Lorentzi ja tsentrifugaaljõu tasakaalust), kus m ja e on vastavalt elektroni mass ja laeng. Olgu elektronil ka solenoidi telje sihiline kiirus v . Ühikulises ajas läbib ta distantsi $1/v$. Selle aja sees teeb ta $1/(vT)$ pööret. Nende pöörete arv ülesande püstituse kohaselt peab olema n . Seega

$$n = \frac{1}{vT} = \frac{eB}{2v\pi m} = \frac{e\mu n I}{2v\pi m}.$$

Siit saame $v = e\mu I / (2\pi m)$.

Telje sihiline komponent kiiruse sel on üheselt määratud. Teljega risti olev kiiruse komponent peab olema nullist suurem.

L162 Langev takisti ★★

Autor: Andres Laan, piirkonnnavoor, 2011, G 8

Raami läbiva magnetvoo suuruse muutus põhjustab raamis elektromotoorjõu $\mathcal{E} = d\Phi/dt = Blv$. Elektromotoorjõud põhjustab raamis voolu $I = \mathcal{E}/R$. Magnetväljas mõjub vooluga juhtmele jõud $F = BlI$, mis peab olema tasakaalus raskusjõuga mg . Elimineerides I ja \mathcal{E} leiate

$$mg = \frac{B^2 l^2 v}{R} \Rightarrow v = \frac{mgR}{B^2 d^2}.$$

Alternatiivne lahendus

Lahendus lähtub energia jäävuse seadusest. Gravitatsioonijõu poolt tehtud töö võimsus on $P = mgv$. Elektrilise töö võimsus peab sellega võrduma, seega $P = mgv = U^2/R$. Pinge on leitav Faraday seadusest, mille kohaselt on pinge võrdne kontuuri läbiva magnetvoo muutumise kiirusega. Magnetvoo muutumise kiirus on $d\Phi/dt = Bdv$. Asendades selle eelmisesse võrrandisse ja avaldades v saame

$$v = \frac{mgR}{B^2 d^2}.$$

L163 Laengud ★★★

Autor: Jaan Kalda, lahtine, 2011, G 6

Kuna Lorentzi jõud mõjub alati risti liikumissuunaga, liiguvalt laengud mööda ringjooni, mille raadiuse leiate Newtoni teisest seadusest:

$$qvB = m \frac{v^2}{r} \quad \Rightarrow \quad R = mv/qB,$$

kusjuures ühe ringjoone keskpunkt on punktis $(0, R)$ ja teisel $-(-R, 0)$. Nende kiirusvektorid on alghetkel risti ja kuivõrd need põörlevad ühesuguse kiirusega, siis jäavad risti ka edasise liikumise käigus, kusjuures suhtelise kiiruse vektor $\vec{w} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2$ moodustab kummagi kiirusvektoriga 45-kraadilise nurga. Vahekaugus on maksimaalne, kui \vec{w} on risti laenguid ühendava sirgega, st laenguid ühendav sirge moodustab laengu asukohast tõmmatud puutujaga (st laengu kiirusvektoriga) 45-kraadilise nurga; on lihtne näha, et see juhtub hetkel, mil laengud on punktides $(0, 2R)$ ja $(-2R, 0)$, mis annab maksimaalseks vahekauguseks $l = 2\sqrt{2}R = 2\sqrt{2}mv/qB$.

Alternatiivne lahendus

Esitame laengute asukohad ajalises sõltuvuses kompleksarvudena komplekstandid:

$$z_1 = Ri - Rie^{i\omega t} \text{ ja } z_2 = -R + Re^{i\omega t},$$

kus ω on tsüklotronsagedus. Nende vahekaugus

$$l = |z_1 - z_2| = |R(1 + i)(1 - e^{i\omega t})| = R\sqrt{2}|1 - e^{i\omega t}|$$

on maksimaalne, kui $e^{i\omega t} = -1$, mil $l = 2\sqrt{2}R = 2\sqrt{2}mv/qB$.

L164 Traat ★★★★

Autor: Jaan Kalda, lõppvoor, 2007, G 10

Traat võtab kaare kuju (sest Amper'i jõud mõjub analoogselt täispuhutud palli puhul pallikestale ülerõhu poolt mõjuva jõuga: lühikesele mõttelisele traadijupile mõjuv jõud on risti traadijupiga). Kaare raadiuse R saab leida järgmisest võrrandist:

$$a = 2R \sin(L/2R).$$

Väikese kaare-elemendi jaoks (pikkusega αR) välja kirjutatud Amper'i jõu ja mehaanilise pinge tasakaalust leiame pinge traadis: $\alpha RIB = T\alpha$. Eeldusel, et $L \gg a$, moodustub kaarest peaaegu täisring, st $R = L/2\pi$; seega

$$T = LIB/2\pi.$$

L165 Pool ★★★★

Autor: Siim Ainsaar, lõppvoor, 2008, G 10

Venitame pooli väikese $\Delta\ell$ võrra pikemaks ja avaldame tehtud töö (A) kahel eri viisil. Ühelt poolt $A = F_1\Delta\ell$. Samas salvestub osa kulutatud energiat (ΔE_m) magnetväljas ja ülejäänu (ΔE_v) kas eraldub vooluallika sisetakistusel (see peab nt lühise korral jäava voolu hoidmiseks alati olemas olema) või, kui $A < \Delta E_m$, täiedatakse vooluallika tööga. Igal juhul:

$$A = \Delta E_m + \Delta E_v.$$

ℓ suurenedes B väheneb, mistõttu ilmselt $\Delta E_m < 0$ ja vooluallika sisetakistusel eraldub energiat:

$$A > 0 \implies \Delta E_v > 0.$$

Vajalikud energiamuudud võime leida mitmel eri viisil.

Esimene meetod. Olgu kogu magnetvälja energia E_m . Selle energia ruumtihedus:

$$w = \frac{B^2}{2\mu_0} \implies E_m = w\ell S = \frac{\ell SB^2}{2\mu_0} \implies \Delta E_m = \frac{S\Delta(\ell B^2)}{2\mu_0} = \frac{INS \cdot \Delta B}{2}.$$

Toimugu pooli pikenemine ajaga Δt ja indutseerigu magnetvoo muutus poolil elektromotoorjõu absoluutväärtsusega E . Faraday induktsiooniseadusest:

$$\mathcal{E} = N \frac{|\Delta B| \cdot S}{\Delta t}.$$

Siit saamegi ΔE_v :

$$\Delta E_v = I\mathcal{E}\Delta t = INS|\Delta B|.$$

Teine meetod. Leiame tiheda pooli induktiivsuse L :

$$NBS = LI \implies L = \frac{NBS}{I}.$$

Magnetvälja energia:

$$E_m = \frac{LI^2}{2} = \frac{NBSI}{2} \implies \Delta E_m = \frac{INS \cdot \Delta B}{2}.$$

Toimugu pooli pikenemine ajaga Δt ja indutseerigu magnetvoo muutus poolil elektromotoorjõu absoluutväärtsusega \mathcal{E} . Eneseinduktsioonielektromotoorjõud tuleneb Faraday induktsiooniseadusest:

$$\mathcal{E} = \frac{|\Delta(NBS)|}{\Delta t} = \frac{|\Delta(LI)|}{\Delta t} = \frac{NS|\Delta B|}{\Delta t},$$

kust saame:

$$\Delta E_v = I\mathcal{E}\Delta t = INS|\Delta B|.$$

Ühine osa mõlemale lahendusele. Leime ΔB , eeldades, et $\Delta\ell$ on väike:

$$\Delta B = \mu_0 IN \Delta \left(\frac{1}{\ell} \right) = \mu_0 IN \left(\frac{1}{\ell + \Delta\ell} - \frac{1}{\ell} \right) = -\mu_0 IN \frac{\Delta\ell}{(\ell + \Delta\ell)\ell} \approx -\mu_0 IN \frac{\Delta\ell}{\ell^2}.$$

Lõpuks:

$$F = \frac{A}{\Delta\ell} = \left(-\frac{INS}{2} + INS \right) \frac{|\Delta B|}{\Delta\ell} = \frac{INS|\Delta B|}{2\Delta\ell} = \frac{\mu_0 I^2 N^2 S}{2\ell^2}.$$

Märkus. Paar sõna ülesande tekstis tehtud eelduse kohta, et kõik keerud hakavad otstest tömbamisel eemalduma võrdse vahemaa võrra. Tegelikult see ei kehti, otstest tömbamisel hakkaksid köigepealt lahti hargnema otsmised keerud (ja märksa väiksema jõu juures). Ilmselt oleks võimalik keerduude ühtlane eemaldumine spetsiaalse mehaanilise konstruktsiooni abil, kui keerud poleks mitte klaaspulgal, vaid vastava raamistiku peal. Aga selgub, et antud ülesande vastus realiseerub lihtsammas olukorras ka. Kui võtta kinni poolist kahest lähestikku asuvas kohas keskpaiga läheduses, siis allpool leitav jõud on ühtlasi selline jõud, millega tömbamisel saab natuke eemaldada pika poolikeskkohast vasakule- ja paremale poole jäväaid keerde (seda väidet me siinkohas töestama ei hakka).

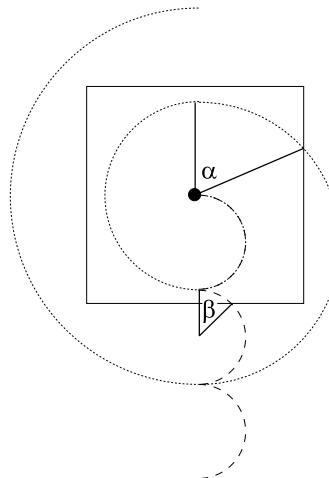
L166 Laeng ★★★★

Autor: Oleg Košik, lahtine, 2010, G 8

Paneme tähele, et ajavahemik T on võrdne poolega tsüklotronperioodist (ajaga, mis kulub sellel laengul magnetväljas täistiiru tegemiseks). Seega antakse impulsmuut $\Delta p = Eq\tau$ iga kord kiirusega paralleelselt (ii) või antiparalleelselt (i). Seega hakkab juhtumil (ii) impuls kasvama lineaarses sõltuvuses lülituste arvuga $n = [t/T]$ (kus t on vaadeldav ajahetk ja nurksulud tähistavad täisosa): $p = Eq\tau[t/T]$. Et trajektoori kõverusraadius on võrdeline impulsiga, $R = v/\omega = p/qB$, siis kasvab kõverusraadius samuti lineaarselt n -ga, vt punktiirjoont joonisel. Juhtumil (i) paneb esimene jõuimpulss laengu liikuma, teine aga peatab liikumise. Tulemuseks on joonisel toodud laineline trajektoor (katkendjoon joonisel). Tuginedes nendele trajektooridele saame teha tabeli osakese eemaldumuse $l = \max(x, y)$ jaoks x või y -teljest erinevatel ajahetkedel.

| | | | | | | | | | | |
|------------|-----|---|-----|---|-----|---|-----|---|-----|---|
| t/T | 0,5 | 1 | 1,5 | 2 | 2,5 | 3 | 3,5 | 4 | 4,5 | 5 |
| l/R (i) | 1 | 2 | 2 | 2 | 3 | 4 | 4 | 4 | 5 | 6 |
| l/R (ii) | 1 | 2 | 2 | 2 | 3 | 4 | 4 | 4 | 5 | 6 |

Nagu näha, toimub eemaldumine mölemal juhul vaadeldavate ajahetkede jaoks täpselt ühekiiruselt. Siiski, kui kuubi poolküljepikkus ei ole mitte R -i täisarvkordne, siis väljub (i) juhtumi korral osake veidi varem. Sellest võib aru saada uurides võrdlevalt kauguse l kasvufaase juhtumeil (i) ja (ii) ja juuresolevat joonist: antud ruudukujulise piirkonna jaoks väljumisaeg $2T + \Delta t$, kus täiendav ajavahemik juhtumil (ii) $\Delta t = \pi\alpha/T$ juhtumil (i) $\Delta t = \pi\beta/T$. Kuivõrd $\alpha > \beta$, siis saamegi järeldada, et juhtumil (i) väljub osake varem. On võimalik näha, et võrratus $\alpha > \beta$ kehtib peaaegu alati — välja arvatud siis, kui kuubi külje pikkus on R -i paarisarvukordne. Ülesandes antud eelduse $t \gg T$ tõttu muutub see väike väljumisaja erinevus tühiseks: aegade suhe sellel piirjuhul on 1.



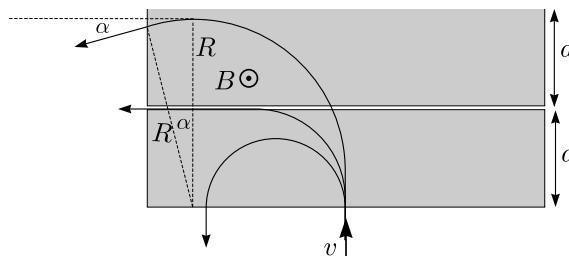
L167 Magnetväli ★★★★

Autor: Jaan Kalda, piirkonnavoor, 2010, G 9

Magnetväljas möjub elektronile Lorentzi jöud $F = Bev$, mis on kiirusega kogu aeg risti ning annab elektronile kesktõmbekiirenduse v^2/R , kus R on trajektoori köverusraadius. Newtoni teisest seadusest $Bev = mv^2/R$, millest $R = vm/Be$. Et elektroni kiirus ei muutu (energia säilib!), siis ka köverusraadius ei muutu, st elektron liigub mööda ringjoont raadiusega R . Tuues sisse tähistuse $v_0 = aBe/m$, saame eelmise avaldise kirjutada kujul $R = vm/Be = va/v_0$.

Kui $v < v_0$, siis elektron teeb magnetväljas poolringi ning väljub tuldud suunas tagasi, st pöördenurk on π rad. Vastava graafikuosa eest.

Kui $v \approx v_0$, siis saab elektron väljuda mööda kitsast pilu, vt joonist, st pöördenurk on $\pi/2$ rad. Vastava graafikuosa eest.

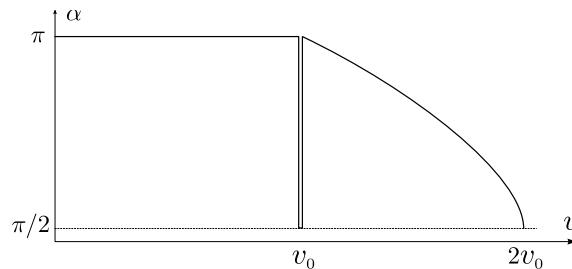


Kiiruse edasisel suurenemisel väljub elektron külgsuunas; joonise abil on lihtne näha, et väljumisnurk on

$$\alpha = \frac{\pi}{2} + \arcsin \frac{2a - R}{R} = \frac{\pi}{2} + \arcsin \left(2 \frac{v_0}{v} - 1 \right).$$

Kvalitatiivselt mõistliku graafikuosa eest, st graafikuosa algab väärthuselt π rad ja lõppeb väärthusel $\pi/2$ rad juures.

Kokkuvõtvalt on sõltuvus $\alpha(v)$ esitatud järgmisel leheküljel oleval graafikul.



L168 Silinder ★★★★

Autor: tundmatu, lahtine, 2007, G 10

Vaatleme mõttelist ringikujulist kontuuri, mis ühtib silindri külginna ristlõikega. Muutuv magnetväli tekib suletud kontuuris elektromotoorjõu

$$\mathcal{E} = \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = \frac{S\Delta B}{\Delta t} = \frac{\pi R^2 \Delta B}{\Delta t}.$$

Sellise elektromotoorjõu olemasolu tähendab, et meil on teatud keeris-elektriväli E , mis on telgsümmeetrilisel juhtumil konstantne piki kontuuri ning seotud elektromotoorjõuga:

$$E = \frac{\mathcal{E}}{2\pi R} = \frac{1}{2} \frac{R\Delta B}{\Delta t}.$$

See elektriväli mõjud silindri külginnal olevale laengule q_i jõuga $F_i = Eq_i$, mis on risti teljelt tömmatud raadiusvektoriga. Seega on selle jõumoment telje suhtes $M_i = Eq_i R$. Summeerides üle kõikide laengute, saame tuua ER sulgude ette ning summaarne jõumoment avaldub kui $M = EQR$, kus Q on summaarne laeng. See tekib nurkkiirenduse

$$\frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{M}{I_0},$$

kus $I_0 = \frac{1}{2}mR^2$ on silindri inertsimoment telje suhtes. Asendades siia M ja E avaldised leiame

$$\frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{2EQR}{mR^2} = \frac{2QR}{mR^2} \frac{1}{2} \frac{R\Delta B}{\Delta t} = \frac{Q}{m} \frac{\Delta B}{\Delta t}.$$

Seega

$$\Delta\omega = \frac{Q}{m} \Delta B$$

ning võttes arvesse, et algne nurkkiirus ning lõpp-magnetväli on nullid, saame

$$\omega = \frac{Q}{m} B = \frac{2\pi R l \sigma}{\rho \pi R^2 l} B = \frac{2\sigma B}{\rho R}.$$

L169 Kiil ★

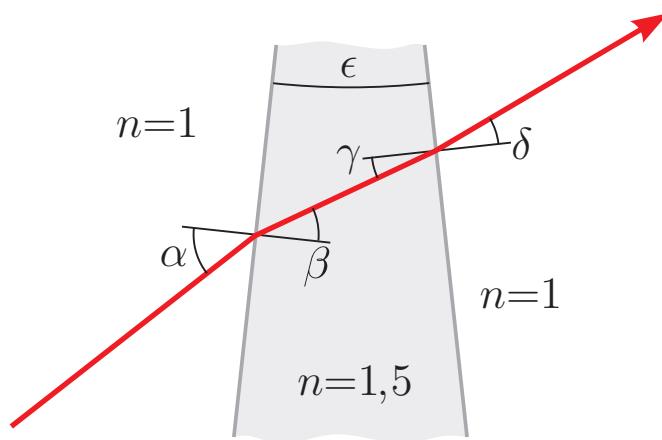
Autor: Valter Kiisk, lõppvoor, 2007, G 3

Kõik nurgad on tähistatud järgneval joonisel. α on meelevaldne (kuigi $\alpha \ll 1$). $\beta = \alpha/n$. $\gamma = \beta - \epsilon$. $\delta = n\gamma = \alpha - n\epsilon$. Kiire kõrvalekaldenurk

$$\phi = (\alpha - \beta) - (\delta - \gamma) = (\alpha - \delta) + (\gamma - \beta) = n\epsilon - \epsilon = \epsilon(n - 1).$$

Teades, et $\phi = 5 \text{ mm}/2 \text{ m} = 0,0025 \text{ rad}$, saame

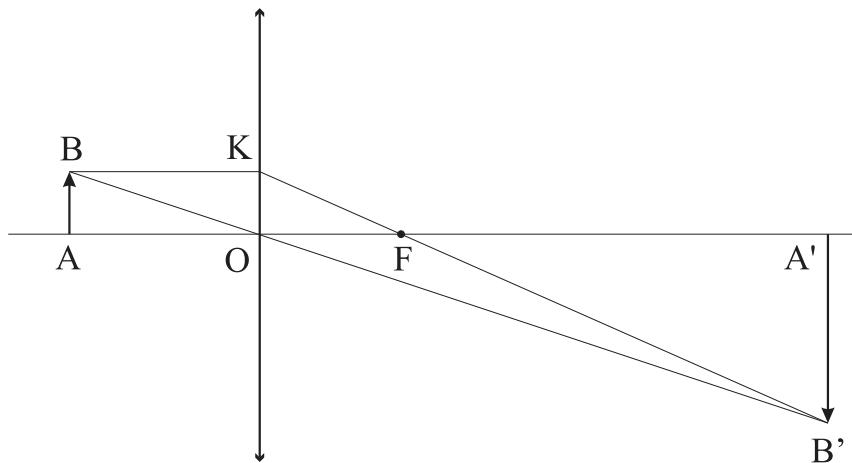
$$\epsilon = \frac{\phi}{n - 1} = 0,005 \text{ rad} = 0,29^\circ.$$



L170 Lääts ★

Autor: tundmatu, lahtine, 2009, G 2

Kuna kujutis tekib ekraanile, siis on kujutis tegelik ning tegemist on koondava läätsega.



Olgu a kaugus esemest läätseni, k kaugus kujutisest läätseni ning f läätse fookuskaugus. Et kujutis on esemest 3 korda suurem, siis sarnastest kolmnurkadest ABO ja $A'B'O$

$$\frac{k}{a} = 3 \quad \Rightarrow \quad k = 3a.$$

Kujutis tekib kugusele $d = 24$ cm, seega

$$a + k = 4a = 24 \text{ cm} \quad \Rightarrow \quad a = 6 \text{ cm}, k = 18 \text{ cm}.$$

Nüüd läätse valemist

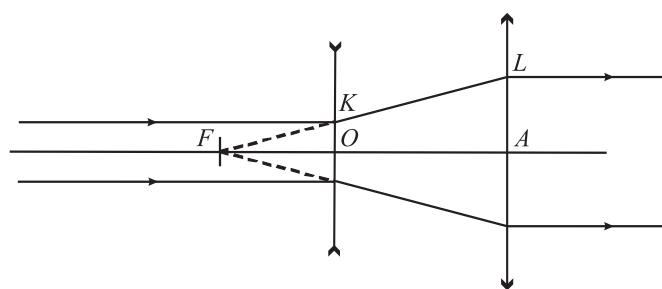
$$\frac{1}{a} + \frac{1}{k} = \frac{1}{f}$$

leiame, et $f = 4,5$ cm.

Märkus: läätse valemi asemel võib fookuskauguse leidmiseks kasutada sarnaseid kolmnurki $A'B'F$ ja OKF . Saame

$$\frac{k-f}{f} = 3 \quad \Rightarrow \quad f = \frac{k}{4} = 4,5 \text{ cm.}$$

L171 Kiirtekimbu laiendi ★ Autor: Koit Timpmann, piirkonnavor, 2010, G 3



Kuna esimese läätse optiline tugevus on negatiivne, on see nõgus. Selleks, et sienev paralleelne valgusvihk püsiks paralleelne pärast süsteemist väljumist, peavad läätsede fookused ühtima. Olgu vastav ühine fookus F . Lisaks olgu läätsede keskpunktid O ja A ning siseneva kiirtekimbu kõige äärmise kiire lõikepunktid läbi läätsede K ja L .

Sellisel juhul saame kolmnurkade KOF ja LAF sarnasusest, et

$$\frac{|LA|}{|KO|} = \frac{|AF|}{|OF|}.$$

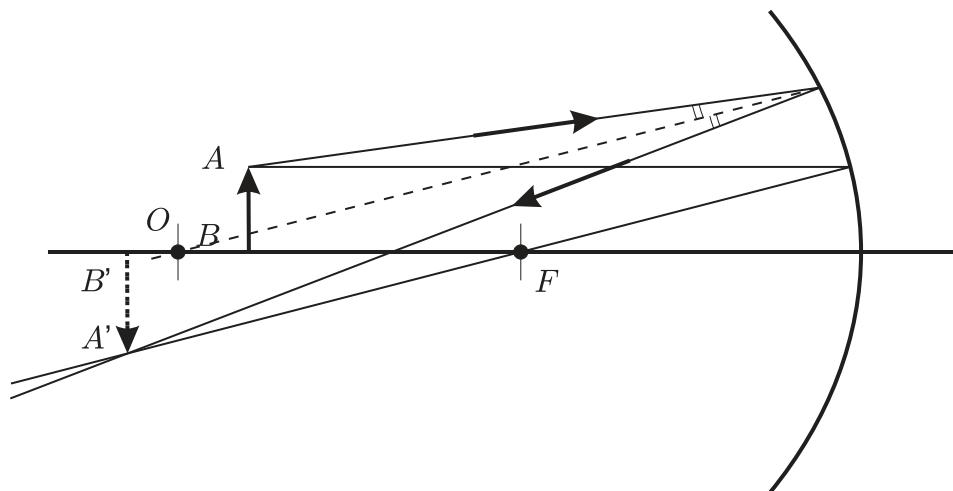
Kuna $|AL| = 2,5|OK|$, siis $|AF| = 2,5|OF|$, ehk läätsede vahekaugus on

$$|OA| = |AF| - |OF| = 1,5|OF| = 1,5 \left| \frac{1 \text{ m}}{-20} \right| = 7,5 \text{ cm.}$$

L172 Nõguspeegel ★★

Autor: EFO žürii, lõppvoor, 2006, G 2

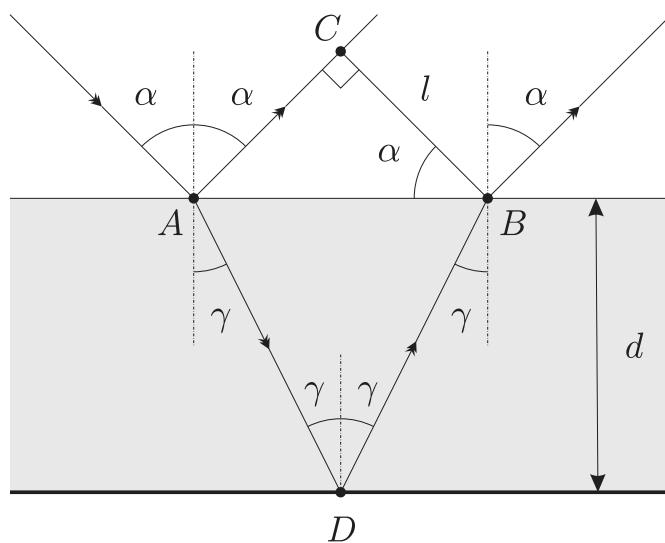
Joonisel antud kiire kahe osa pikenduste lõikepunkt vastab nõguspeegli pinnale ning kiire nurgapoolitaja ja optilise peatelje lõikepunkt annab nõguspeegli kõverusraadiuse keskpunkti O . Fookuse leidmiseks paneme tähele, et nõguspeegli fookuskaugus on pool kõverusraadiusest, kus kõverusraadiuse saame mõõta jooniselt. Edasi saame fookuse kaudu konstrueerida teise punktist A alguse saanud kiire käigu ning määrrata eseme kujutise asukoha.



L173 Plaat ★★

Autor: tundmatu, lahtine, 2007, G 4

Kiirte käik plaadis on näidatud joonisel.



Nurk $\angle ABC$ täisnurkses kolmnurgas ACB on α , seetõttu $|AB| = l / \cos \alpha$. Teisest küljест, kolmnurgast ADB on näha, et $|AB| = 2d \tan \gamma$. Nurgad α ja γ on seotud omavahel murdumisseadusega:

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \gamma} = n.$$

Lahendades need võrrandid, saame

$$n = \frac{\sin \alpha}{\sin(\arctan(\frac{l}{2d \cos \alpha}))} = \sin \alpha \sqrt{1 + \left(\frac{2d \cos \alpha}{l}\right)^2} \approx 1,8.$$

L174 Valgusvihk ★★

Autor: Mihkel Kree, piirkonnavor, 2005, G 5

Ülesande lahendamisel osutub tarvilikuks teadmine, et läätsele selle optilise teljega paralleelselt langevad kiired (või murtud kiirte pikendused nõgusa läätse puhul) koonduvad fookuses punktiks. Seega on ainus moodus kahe läätse abil saada süsteem, mis teisendab paralleelse kimbu uesti paralleelseks kimbuks, selline, et läätsede fookused ühtivad.

Esimene võimalus: kasutame kahte kumerläätse. Et kimbu diameeter suureneks, peab väiksema fookuskaugusega lääts olema eespool. Lihtsast geomeetriast (sarnased kolmnurgad) ilmneb, et tekkiva kiirtekimbu diameeter on $D = df_2/f_1 = 2d$.

Teine võimalus: kasutame ühte kumerat ja ühte nõgusat läätse. Kui kumer lääts oleks esimene, siis kimbu diameeter väheneks. Seega paigutame nõgusa läätse kumera läätse ette. Nõgus lääts tekib näilise kujutise. Kumera läätse asetame nii, et selle fookus ühtiks nõgusläätse tekitatud ebakujutise asukohaga. Sarnastest kolmnurkatest leiame, et tekib kiirekimp diameetriga

$$D = \left| \frac{f_{\text{kumer}}}{f_3} d \right|.$$

Domab suurimat väärust, kui kasutame suurema fookuskaugusega läätse, $f_{\text{kumer}} = f_2$. Niisiis

$$D = \left| \frac{f_2}{f_3} d \right| = 4d.$$

Näeme, et kiirtekimbu laiust saab suurendada maksimaalselt neli korda, kasutades selleks nõgusläätse ja kumerläätse ($f_2 = 40 \text{ cm}$) nii, et nende fookused ühtkuid.

L175 Biprisma ★★

Autor: Mihkel Kree, piirkonnavor, 2006, G 6

Valguskiir siseneb prismaisse murdumata, sest kiir on normaali sihiline. Küll aga toimub murdumine prismast väljades. Kuna terve tahu ulatuses on langemisnurk sama, tekib üks tahk paralleelse kiirtekimbu (vt joonist). Kuna meil on kaks murdat tahku, on esialgne kiirekimp pärast prisma läbimist jagunenud kaheks. On lihtne märgata, et langemisnurk, millega kiired langevad murdvale tahule, on α . Vastavalt murdumisseadusele saame murdumisnurga γ jaoks seose:

$$\sin \gamma = n \sin \alpha.$$

Väikeste nurkade jaoks lihtsustub see avaldis: $\gamma = n\alpha$. Kiir kaldus seega oma esialgsest sihist kõrvale nurga

$$\beta = \gamma - \alpha = (n - 1)\alpha$$

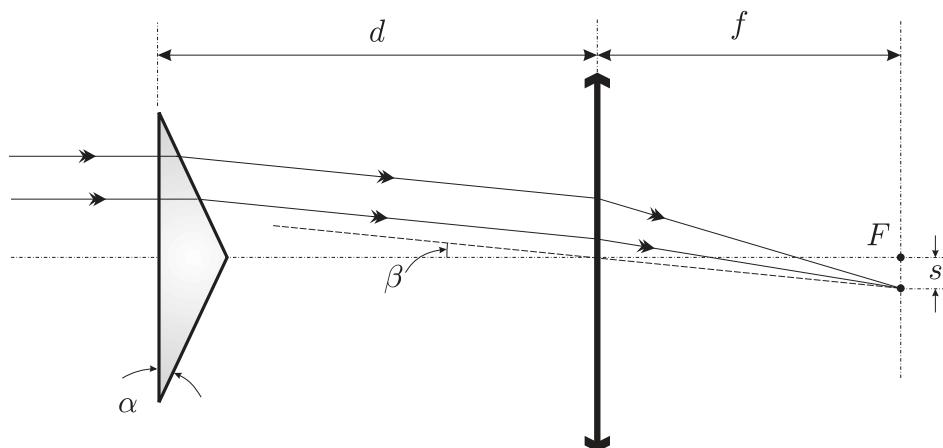
võrra.

Teame, et paralleelne kiirtekimp koondub kumerläätse fokaaltasandis. Seega tekitab fokaaltasandis asuvale ekraanile sümmeetriliselt kaks valgustäppi, teine teisele poole optilist peatelge. Arvutame ka nende kaugused peateljest. Selleks kasutame läbi läätse keskpunkti tömmatud kiirt, mis asetseb peateljega nurga β all. Täisnurksest kolmnurgast saame valguspunkti kauguse peateljest:

$$s = f \tan \beta \approx f\beta = (n - 1)\alpha f.$$

Ilmselt ei sõltu ekraanil tekki vilt kaugusest d .

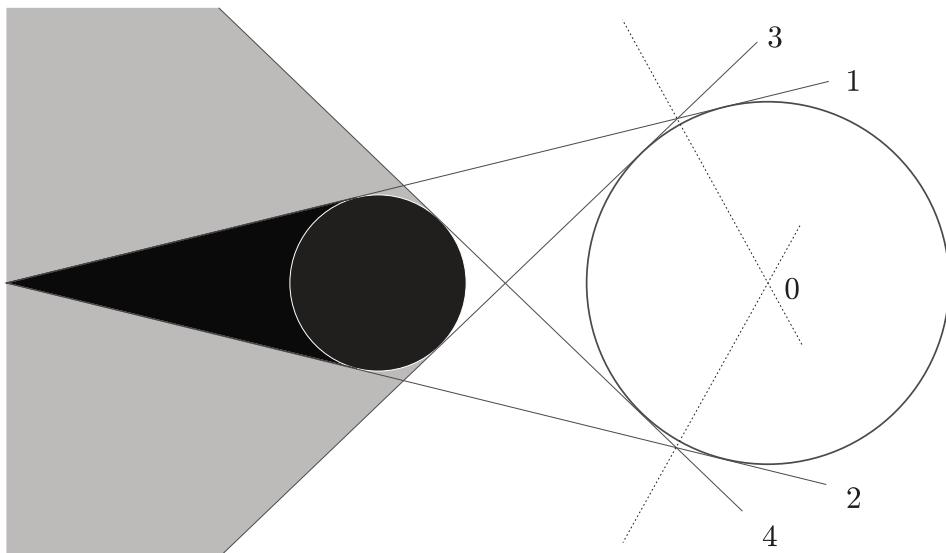
Et olla päris täpne, tuleks siiski märkida, et d kasvades piisavalt suureks hakkavad täpid muutuma tuhmimaks, kuni lõpuks kaovad üldse, sest siis kiired enam läätse ei läbi.



L176 Varjud ★★

Autor: Jaak Kikas, piirkonnavoor, 2007, G 6

Kannane joonisele varjukoonuste piirjoonte pikendused (sirged 1-4). Valgusallikaks oleva kera lõikejoon joonise tasandiga on ringjoon, mille puutujateks on kõik need sirged. Selle keskpunkti leidmiseks konstrueerime sirgete 1-3 ja 2-4 poolt moodustatud nurkade poolitajad (punktirjooned joonisel), nende lõikepunkt 0 on otsitava ringjoone keskpunktiks. Ringi raadiuse leidmiseks konstrueerime punktist 0 mõnele sirgetest 1-4 keskristssirge.

**L177 Veealune valgus ★★**

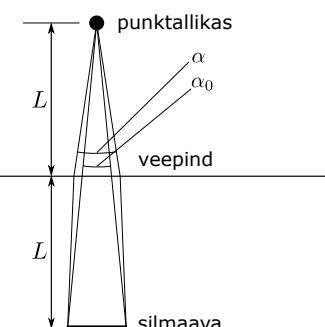
Autor: Jaak Kikas, lõppvoor, 2008, G 5

Allika heledus on ligikaudselt vörde-line vaatleja silmaava nurkläbimõõdu ruuduga allika asukohast vaadatuna. Olgu α ja α_0 nurkläbimõõdud vastavalt veega täidetud ja veeta basseinis. Jooniselt

$$2L \tan(\alpha_0/2) = L \tan(\alpha/2) + L \tan(\beta/2),$$

kus langemis- ja murdumisnurkade $\alpha/2$ ja $\beta/2$ vahel kehtib seos

$$\frac{\sin(\alpha/2)}{\sin(\beta/2)} = n.$$



Kasutades väikeseid nurkade lähendust $\tan \alpha \approx \sin \alpha \approx \alpha$, saame

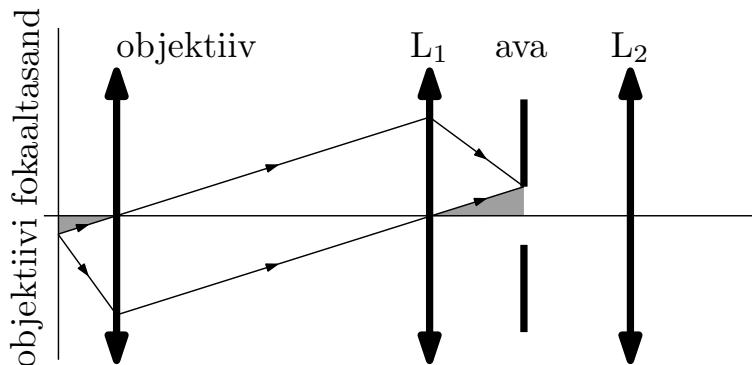
$$\left(\frac{\alpha}{\alpha_0} \right)^2 = \frac{4n^2}{(n+1)^2}.$$

Arvestades ka peegeldumist veepinnalt, saame heleduste suhteeks

$$\frac{I}{I_0} = \left(\frac{\alpha}{\alpha_0} \right)^2 (1 - r) = \frac{4(1 - r)n^2}{(n + 1)^2} = 1,28.$$

L178 Konfokaalne mikroskoop ★★ Autor: Mihkel Rähn, lõppvoor, 2009, G 7

Lahenduse optiline skeem on toodud joonisel. Konstrueerimisel tuleb läätsede vahelised kiired joonestada paralleelsed ja läätsede keskpunkte läbivad. Sellisel juhul annavad need kiired eseme ja ava tasandil vastavalt eseme ja kujutise asukohad.



Värvitud kolmnurgad on NNN tunnuse järgi sarnased. Seetõttu kehtib võrdus

$$\frac{d}{2f_1} = \frac{r_{\text{ese}}}{f_{\text{obj}}},$$

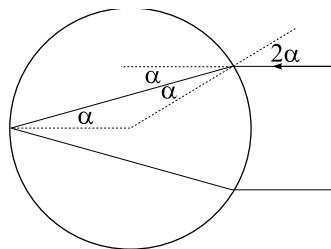
millest

$$r_{\text{ese}} = \frac{d \cdot f_{\text{obj}}}{2f_1}.$$

L179 Klaaskuulike ★★

Autor: Jaan Kalda, lahtine, 2010, G 4

Tagasipeegelduv kiir peegeldub kuulikeses nii, nagu näidatud joonisel. Murdumisseedusest väikeste nurkade jaoks saame $n = \sin 2\alpha / \sin \alpha \approx 2$.



L180 Kiilud ★★

Autor: tundmatu, lahtine, 2006, G 6

On lihtne näha, et plaadist väljub endiselt paralleelne valgusvihk. Küll aga on selle levimise suund muutunud. Plaati sisenedes murdumist ei toimu, sest kiired liiguvad risti pinnaga. Kaldpinnale langevad kiired langemisnurga φ all, murdumisnurga γ saame murdumisseadusest:

$$n_1 \sin \varphi = n_2 \sin \gamma.$$

Meil on lubatud kasutada väikeste nurkade lähendust $\sin \alpha \approx \alpha$, mistõttu $\varphi n_1 = \gamma n_2$. Murdumise töttu muutus kiirte levimise suund nurga $\varphi - \gamma$ võrra. Ühtlasi on lihtne näha, et see on ka langemisnurgaks plaadi välistasandile, sest esialgu liikus kiir risti plaadiga. Arvestades, et õhu murdumisnäitaja on 1, saame leida kiire murdumisnurga δ plaadist väljumisel:

$$n_2(\varphi - \gamma) = \delta, \quad \delta = n_2 \left(\varphi - \frac{\varphi n_1}{n_2} \right) = \varphi(n_2 - n_1).$$

Valguslaigu nihet on nüüd lihtne leida. Vaatleme läätse optilist keskpunkti läbivat kiirt. Et see kiir läätses ei murdu, lõikab see fokaaltasandit teljest kauguse sel

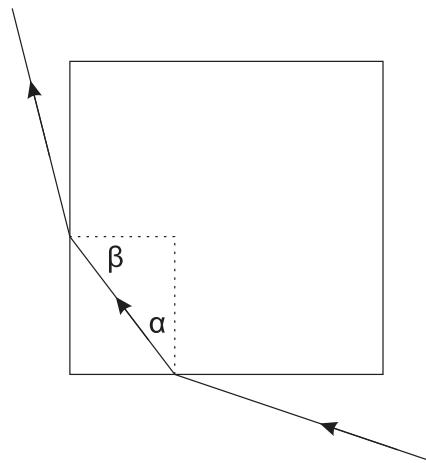
$$d = \delta f = \varphi f(n_2 - n_1).$$

L181 Klaaskuup ★★

Autor: tundmatu, piirkonnavor, 2009, G 7

Mustaks värvitud tahkudelt valgus peegelduda ei saa, toimub neeldumine. Ülesande tingimus on täidetud, kui värvimata tahust kuupi sisenev valgus ei saa väljuva läbi körvaltahu (toimub sisepeegeldus). Sisepeegelduse kriitilise nurga saame murdumisseadusest:

$$\sin \gamma_C = \frac{1}{n}.$$



Kiir siseneb kuupi, kui $\alpha < \gamma_C$. Langemisnurk kõrvaltahule on $\beta = 90^\circ - \alpha$. Kiir väljub kuubist, kui

$$\beta < \gamma_C, \quad \text{ehk} \quad 90^\circ < \gamma_C + \alpha < 2\gamma_C.$$

Et kiir ei saaks kuubist väljuda, peab kehtima:

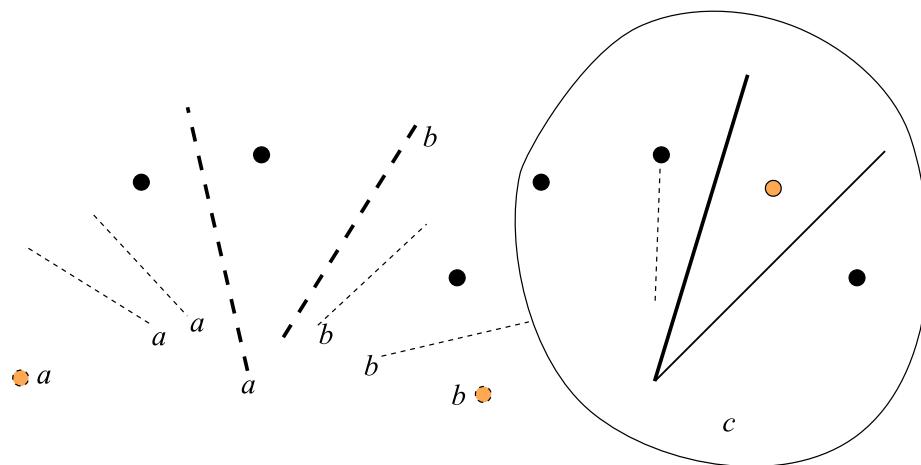
$$\gamma_C < 45^\circ, \quad \text{ehk} \quad n > 1/\sin 45^\circ = \sqrt{2}.$$

L182 Peeglid ★★

Autor: Jaan Kalda, piirkonnavoor, 2009, G 8

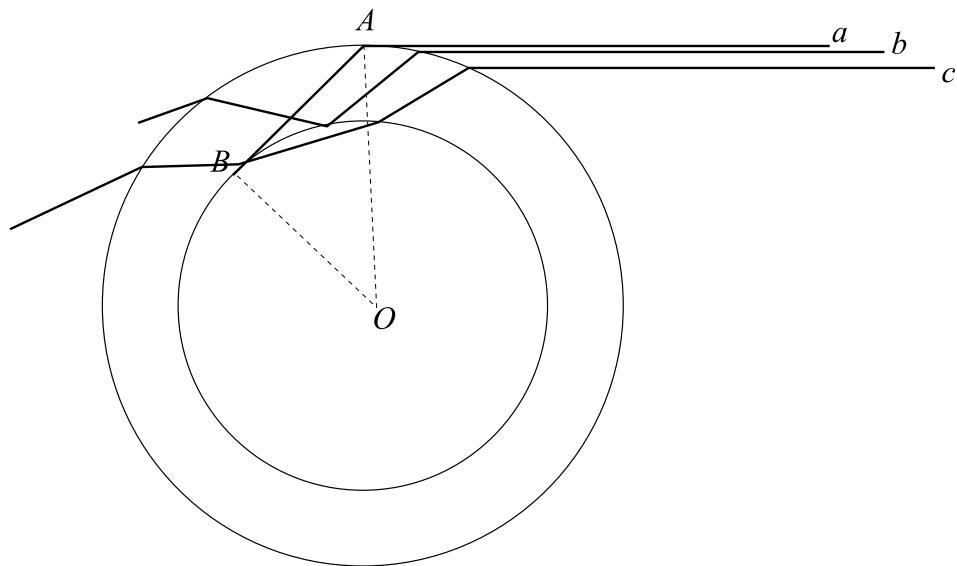
Kuna on teada, et üks antud punktidest on peegelduse peegeldus, siis peab üks tasapeeglitest kindlasti asuma peegelduse S_1 ning selle peegelduse peegelduse S'_1 sümmetriateljel. Lisaks saab punkt S_1 tekida ainult siis, kui paigutada S_1 ja allikা S vahel teine peegel. Järelikult peab kolmas antud punkt S_2 olema allikа S peegeldus esimesena paigutatud peeglis ehk see peegel asub nii S_1 ja S'_1 kui ka S ja S_2 sümmeetriateljel. Teades seda, on lihtne määrata joonisel allikа S asukoht. Selleks, et tekiksid peegeldused ning peegelduse peegeldused, peab allikas asuma kahe peegli vahel nii, et mölemad peegeldavad küljed on sellele nähtavad. Kuutiste paariks S_1 ja S'_1 saab olla ainult kaks alumist punkti joonisel, kuna vastasel korral jäääks valgusallikas kõigi kuutiste suhtes teisele poole peegleid olenemata sellest, kas S_1 ja S'_1 jaoks valitakse ülemine ja vasakpoolne (joonisel a) või ülemine ja parempoolne (joonisel b).

Niisiis, esimeseks peegliksi on kahe alumise punkti sümmeetriatelg ning allikaks ülemise punkti peegeldus selles peeglis. Teine peegel peab olema allikа ja parempoolse punkti sümmeetriatelg, sest kui see oleks allikа ja vasakpoolse punkti sümmeetriatelg, siis jäääks allikas jällegi peeglite vahelt välja.



L183 Kapillaartoru ★★

Autor: tundmatu, lahtine, 2009, G 8



Et kapillaarisein paistaks null-paksusega, peab kapillaarile puutujana (punktis A , vt joonist) langenud kiir a puudutama sisemist õönsust (punktis B). Sellisel juhul pole ühtegi kiirt, mis läbiks kapillaari seina ilma sisemise õönsuse piirpinnale langemata (ning vaid kiir a teeb seda puutujana). Kolmnurk AOB on täsnurkne, seetõttu saame murdumisseadusest $n = R/r$.

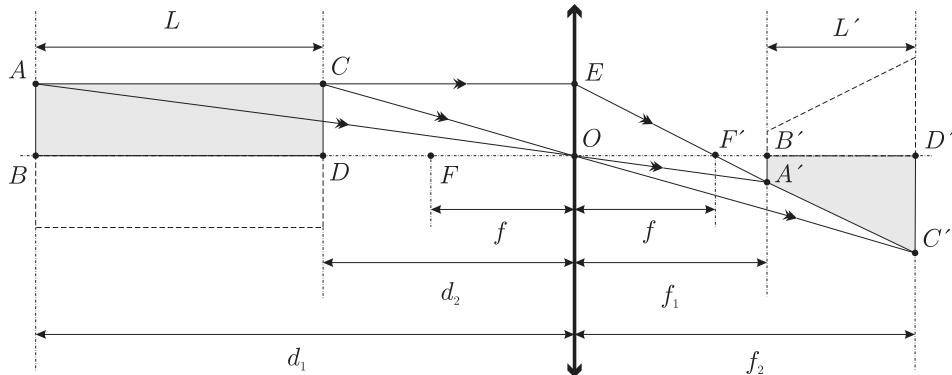
Ülesande olukorda edasi analüüsides paneme tähele, et ka võrratuse $r > R/n$ korral puuduvad kiired, mis langevad kapillaari välispinnale, kuid ei lange sisemise õönsuse piirpinnale; seega ka nende puhul näib kapillaari sein puuduvat.

Veel paneme tähele, et igal juhul on siiski oluline erinevus ime-õhukese seinaga kapillaarist: kapillaari servale lähedaste kiirte puhul toimub täielik sisepeegeldus sisemise õönsuse piirpinnalt (joonisel kiir b). Visuaalselt paistab see peegel-kihina ja on selgelt eristatav, kui nt kapillaar täita värvilise gaasiga. Samas, see sisepeegeldus kaob, kui kapillaar täita värvilise vedelikuga, mille murdumisnäitaja on n .

L184 Lääts ★★★★

Autor: tundmatu, lahtine, 2007, G 9

Olgu pliiatsi otste kaugused läätsest $d_1 = |BO|$ ja $d_2 = |DO|$ ning pliiatsi kujutise otste kaugused läätsest vastavalt $f_1 = |B'O|$ ja $f_2 = |D'O|$ (vt joonist).



Paneme kirja valemid suurendustegurite jaoks:

$$k = \frac{L'}{L}, \quad k_1 = \frac{|A'B'|}{|AB|}, \quad k_2 = \frac{|C'D'|}{|CD|}.$$

Sarnastest kolmnurkadest $F'B'A'$ ja FOE leiame, et

$$\frac{|A'B'|}{|EO|} = \frac{|F'B'|}{|FO|} = \frac{f_1 - f}{f}.$$

Analoogiliselt, sarnastest kolmnurkadest $F'D'C'$ ja FOE leiame, et

$$\frac{|C'D'|}{|EO|} = \frac{|F'D'|}{|FO|} = \frac{f_2 - f}{f}.$$

Kuna $|EO| = |AB| = |CD|$, siis

$$k = \frac{f_2 - f_1}{d_1 - d_2}, \quad k_1 = \frac{f_1 - f}{f}, \quad k_2 = \frac{f_2 - f}{f}.$$

Kasutades läätse valemit mõlema otsa jaoks:

$$\frac{1}{d_1} + \frac{1}{f_1} = \frac{1}{f} \quad \text{ning} \quad \frac{1}{d_2} + \frac{1}{f_2} = \frac{1}{f}$$

saame avaldada pikkused d_1 ja d_2 pikkuste f_1 ja f_2 kaudu:

$$d_1 = \frac{f_1 f}{f_1 - f}, \quad d_2 = \frac{f_2 f}{f_2 - f}.$$

Asendame saadud väärtsused suurendusteguri k avaldisse:

$$\begin{aligned} k &= \frac{f_2 - f_1}{f_1 - f} - \frac{f_2 f}{f_2 - f} = \frac{f_2 - f_1}{f} \frac{(f_1 - f)(f_2 - f)}{f_1(f_2 - f) - f_2(f_1 - f)} \\ &= \frac{f_2 - f_1}{f} \frac{(f_1 - f)(f_2 - f)}{f_1 f_2 - f_1 f - f_2 f_1 + f_2 f} = \frac{f_2 - f_1}{f} \frac{(f_1 - f)(f_2 - f)}{f_2 f - f_1 f} \\ &= \frac{f_2 - f_1}{f} \frac{(f_1 - f)(f_2 - f)}{f(f_2 - f_1)} = \frac{(f_1 - f)(f_2 - f)}{f^2}. \end{aligned}$$

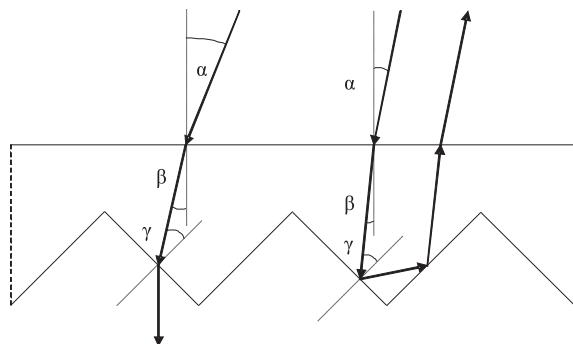
Võrreldes saadud avaldist varem saadud avaldistega k_1 ja k_2 jaoks, on lihtne näha, et

$$k = \frac{f_1 - f}{f} \frac{f_2 - f}{f} = k_1 k_2.$$

Märkus: mugavuse kaalutlusel vaatleme joonisel tegelikult vaid poolt pliiatsit, aga on ilmne, et lahenduskäik kehtib ka terve pliiatsi kohta (joonisel on pliiatsi teine pool näidatud punktiirjoonega).

L185 Hajuti ★★★★

Autor: Andreas Valdmann, piirkonnavor, 2010, G 8



Valgus läbib hajuti, kui nurk γ on väiksem täieliku sisepeegeldumise nurgast. Kriitilisel juhul $\sin(\gamma_{\text{kr}}) = 1/n$. Kuna $\beta = 45^\circ - \gamma$, siis $\beta_{\text{kr}} = 45^\circ - \arcsin(1/n)$. Nurkade α ja β vahel kehtib murdumisseadus $\sin(\alpha)/\sin(\beta) = n$. Seega

$$\alpha_{\text{kr}} = \arcsin(n \sin(45^\circ - \arcsin(1/n))).$$

Vastuse saab viia kujule

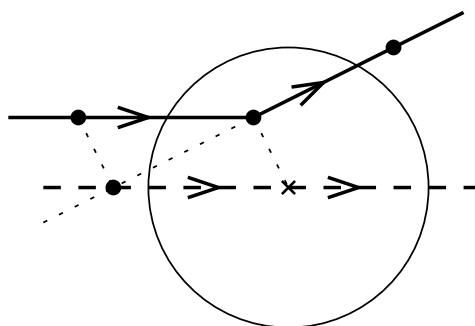
$$\alpha_{\text{kr}} = \arcsin \left[\frac{\sqrt{2}}{2} (\sqrt{n^2 - 1} - 1) \right] = 4,8^\circ.$$

Kriitilisest väiksema α korral (vt parempoolsemat kiirt) on tagasi pöörduv kiir paralleeline hajutile langenud kiirega. Kiirte käigu pööramisel selgub, et tulemus ei muutu, kui esimene sisepeegeldus toimub 45° -st kraadist suurema nurga all. Sel juhul toimub nurga γ all teine sisepeegeldus.

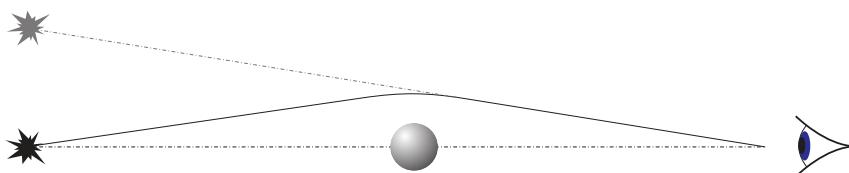
L186 Nõguslääts eestvaates ★★★

Autor: Siim Ainsaar, piirkonnavor, 2011, G 10

Kui nõgusläätsele langevad paralleelsed kiireid, lõikuvald murdunud kiirte pikendused eesmisel fokaaltasandil. Joonistame antud kiirega paralleelse abikiire (optilise kõrvaltelje, joonisel AO), mis läbib läätse optilist keskpunkti. See abikiir ei murdu, seega ühtib oma läätse läbimise järgse osa pikendusega. Tema läikepunkt eesmisse fokaaltasandiga (punkt A) leiame töigast, et lõik AO on lõigu KL parallellüke. Küsitav murdunud kiir asub siis sirgel AL . Lääts asub täpselt oma fokaaltasandite vahel keskel, seetõttu poolitab punkt L lõigu AB , kus B on küsitav murdunud kiire läikepunkt tagumise fokaaltasandiga. Järelikult saame punkti B , kui peegeldame punkti A punkti L suhtes ($|AL| = |LB|$).

**L187 Gravitatsioonilääts ★★★** Autor: Mihkel Kree, piirkonnavor, 2007, G 10

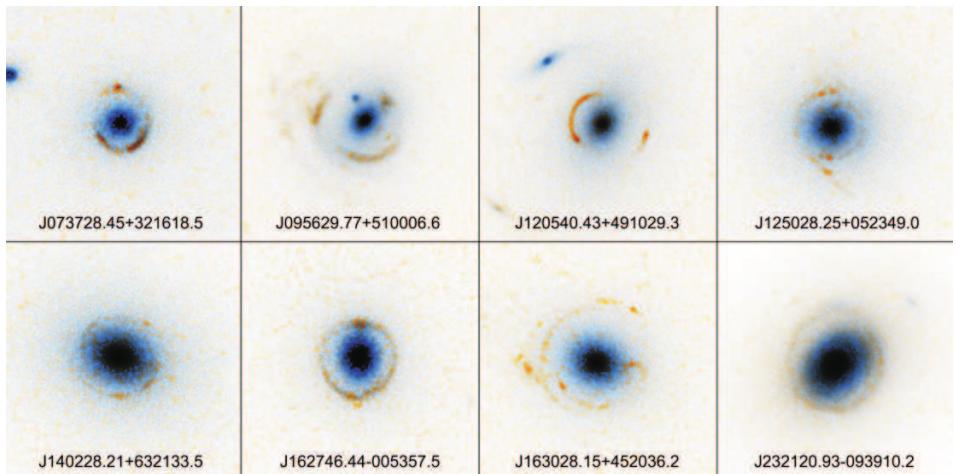
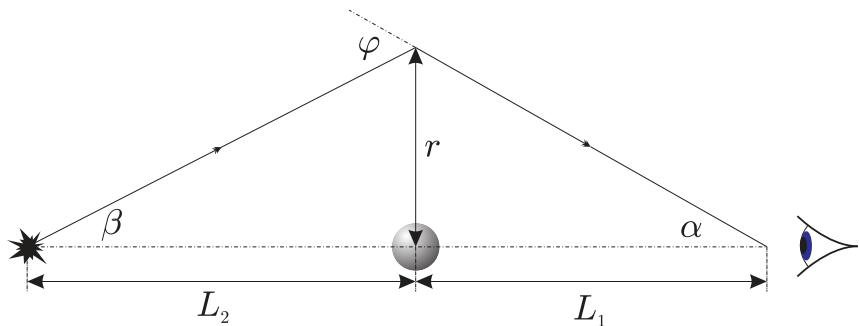
Tähed väljunud kiireid kõverduvad musta augu lähiümbruses (vt joonist).



Kujutise konstrueerimisel aga eeldatakse, et kiireid on kogu tee otse liikunud. Et kiired jõuavad vaatlejani köikjalt ümber musta augu, on kujutiseks ringjoon (eel-dusel, et täht on punkt).

Et silmani jõudvate kiire jaoks kehtib $r \ll L$ ning trajektoori kõverdumine toimub tähe lähiümbruses, võib vaadelda kiire teekonda lihtsustatult: sirge liikumine musta auguni, hetkeline nurga muutus musta augu juures ning edasi sirge tee vaatlejani (vt joonist). Joonisel arusaadavalt on vertikaalskaala võrreldes horisontaalskaalaga oluliselt välja venitatud.

Järgnevalt leiame tähe nurkdiameetri. Lihtsast geomeetriast järeldub, et $\alpha + \beta = \varphi$. Kaugused on suured ning nurgad väikesed, seega võime kasutada ligikaudseid valemeid $\alpha = r/L_1$ ja $\beta = r/L_2$. Niisiis



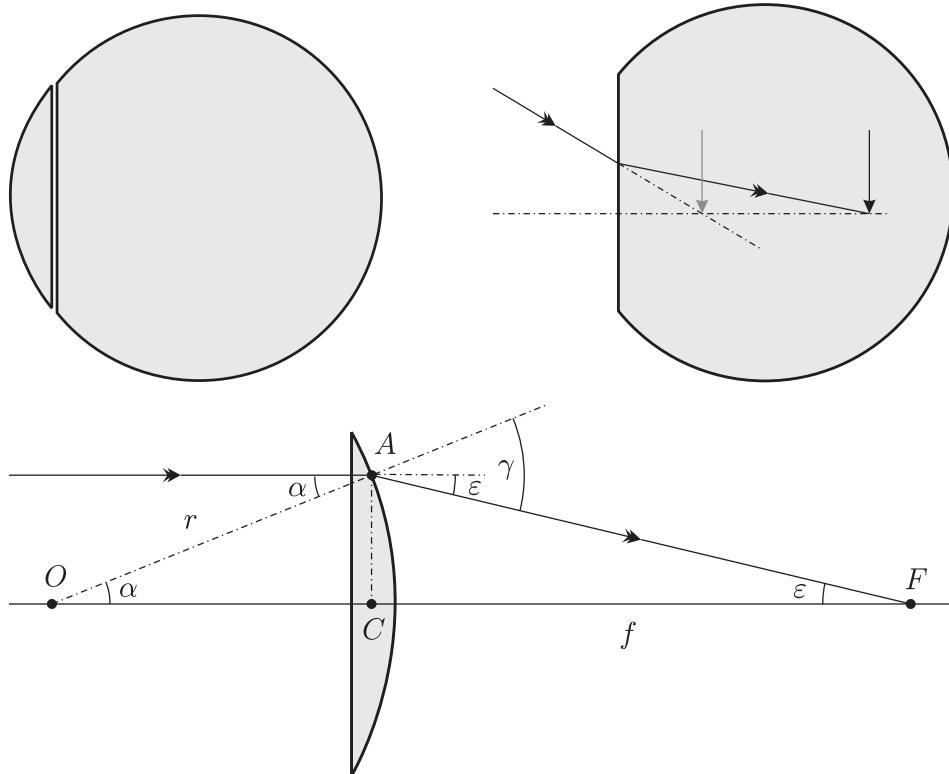
$$\frac{r}{L_1} + \frac{r}{L_2} = \frac{4GM}{c^2 r} \Rightarrow r = \sqrt{\frac{4GML_1L_2}{c^2(L_1 + L_2)}}.$$

Tähe kujutise nurkdiameeter on

$$\gamma = \frac{2r}{L_1} = \sqrt{\frac{4GML_2}{c^2L_1(L_1 + L_2)}}.$$

L188 Akvaarium ★★★★

Autor: tundmatu, lahtine, 2005, G 10



Vaatleme sfäärilist akvaariumi kui õhukest tasakumerat läätse, mis on surutud tasase küljega vastu sirgeseinalist akvaariumi (vt jooniseid). Kasutades väikeste nurkade lähendust, on lihtne leida sellise õhukese läätse fookuskauguse f ($f = |CF|$):

$$\gamma = \alpha n, \quad \varepsilon f = (\gamma - \alpha)f = \alpha r \quad \Rightarrow \quad f = \frac{r}{n - 1}.$$

Vee puhul

$$f = \frac{r}{1,3 - 1} \approx 3,3r.$$

Läätses näeme kala kujutist, mis tekib murdumisel akvaariumivees. See kujutis on n korda lähemal akvaariumi seinale kui kala ise, st maksimaalne kaugus on

$$l_{\max} = \frac{2r}{n} \approx 1,5r,$$

mis on igal juhul väiksem kui läätse fookuskaugus. Lääts tekib sellest kujutisest omakorda kujutise, mille kauguse (läätsest) x saame läätse valemist

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{l} - \frac{1}{x}.$$

On lihtne näha, et suurendus on kahe kujutise kauguste suhe:

$$\frac{1}{k} = \frac{l}{x} = 1 - \frac{l}{f},$$

seega suurendus on maksimaalne, kui l on maksimaalne:

$$\frac{1}{k_{\max}} = 1 - \frac{2(n-1)}{n} = \frac{2-n}{n} \Rightarrow k_{\max} = \frac{n}{2-n} \approx 1,86.$$

L189 Kuup ★★★★

Autor: Jaan Kalda, lõppvoor, 2007, G 8

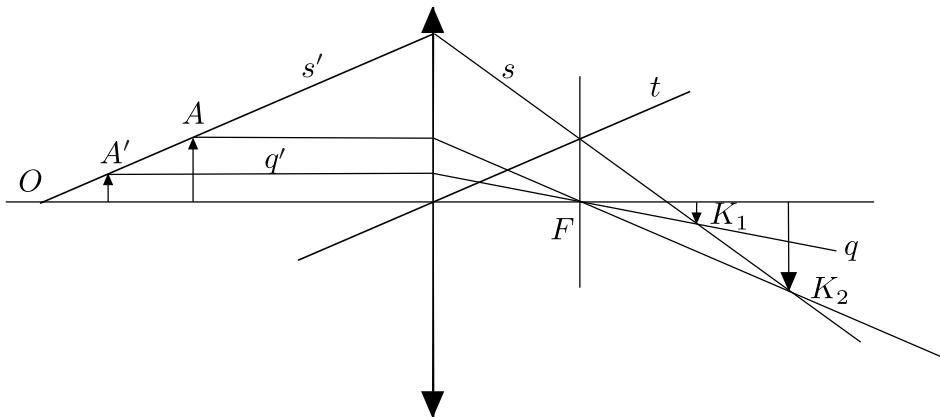
Välimine ringjoon on loomulikult kera välimine kontuur, tema raadius R_A on võrdne kera raadiusega foto mastaabiks. Kerast eemal, piirkonnas D , näeb läbi kuubi põrandat, st piirkond D on valge. Piirkonnas A toimub täielik sisepeegeldumine kera pinnal, seega näeme me seal põranda peegeldust, mis on samuti valge. Mõõtmise teel võib veenduda, et piirkondade A ja B eraldusjoone raadius R_B on umbes $\sqrt{2}$ korda väiksem R_A -st, st tegemist on põranda ja seinte eraldusjoone peegeldusega. Sestap on piirkond B kollane. Piirkondade B ja C eraldusjoon peab vastama täieliku sisepeegeldumise lõppemisele, st piirkonnas C on näha kera sisemust, mis on sinine valge põranda taustal. Niisiis on piirkond C sinine. On lihtne näha, et täieliku sisepeegeldumise piirjuhul langemisnurga siinus on $\sin \alpha = R_C/R_A = 1/n$. Seega murdumisnäitaja $n = R_A/R_C \approx 1,8$.

L190 Nõguspeegel ★★★★

Autor: Mihkel Kree, lõppvoor, 2007, G 9

Paneme tähele, et köverustsenter O , objekt A ning kujutis A' kumerpeeglil asuvad samal sirgel. Seega, kui meil õnnestub leida sirge AA' , siis selle löikepunkt optilise teljega annaks punkti O . Teisest küljest, kiir, mis läbib punkti A kujutist läätses, K_2 , ja punkti A' kujutist, K_1 , jätkub peale murdumist läätses sirgena s' ja läbib nii punkti A kui A' . Tänu sellele leiamegi sirge AA' ja punkti O .

Punkti A' leidmiseks konstrueerime esmalt fokaaltasandi F . Selleks leiame fokaaltasandis lebava punkti — sirge s löikepunkt sirgega t , mis on paralleelne sirgega s' ja läbib läätse keskpunkti. Kujutisi K_1 ja K_2 ühendav sirge murdub nii, et selle pikenduse löikepunkt optilise peateli jääb otsitav köverustsenter. Punkti A' leiame kui sirge s' löikepunkt sirgega q' , mis peale murdumist läbib fookuse ja punkti K_1 (sest K_1 on A' kujutiseks).



L191 Kärbes ★★★★

Autor: Aigar Vaigu, piirkonnavor, 2008, G 10

Olgu O pinna köverusraadiuse keskpunkt ning K ja A vastavalt kärbse näiline ja tegelik asukoht. Allpool toodud joonis kujutab kärbsest alguse saanud kahe kiire AB ja AC edasist käiku. Kärbse näiline asukoht K vastab kärbsest alguse saanud murdunud kirite pikenduste löikepunktile (joonisel KB ja KC).

Arvestades väikeste nurkade korral kehtivat lähendust $\tan \alpha \approx \sin \alpha \approx \alpha$, võime murdumisseaduse kirjutada kujul:

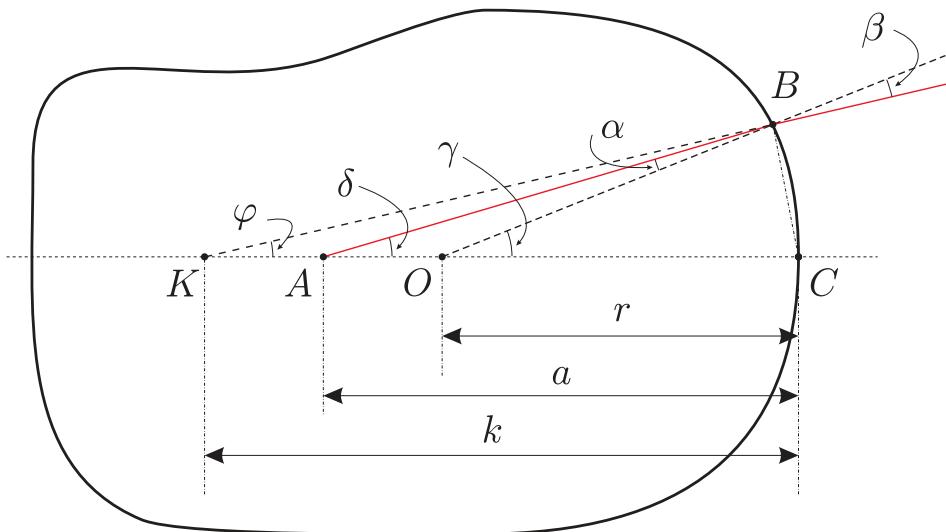
$$\frac{\sin \beta}{\sin \alpha} = n \approx \frac{\beta}{\alpha}$$

Kolmnurkade $\triangle OCB$, $\triangle ACB$ ja $\triangle KCB$ kaudu avaldame kaare \widehat{BC}

$$\gamma r = \delta a = \varphi k = \widehat{BC}.$$

Kolmnurkade $\triangle KAB$ ja $\triangle AOB$ kaudu avaldame nurga $\angle BOC$

$$\alpha + \delta = \gamma \quad \text{ja} \quad \beta + \varphi = \gamma.$$



Saame

$$\begin{aligned} (\gamma - \alpha)a &= \gamma r \Rightarrow \gamma(a - r) = \alpha a \\ (\gamma - \beta)k &= \gamma r \Rightarrow \gamma(k - r) = \beta k. \end{aligned}$$

Paneme tähele, et need kaks võrrandit oleks saanud otse siinusteoreemist kolmnurkade $\triangle AOB$ ja $\triangle KOB$ arvestusega, et tänu nurkade φ , δ ja γ väiksusele $|KB| \approx k$ ja $|AB| \approx a$.

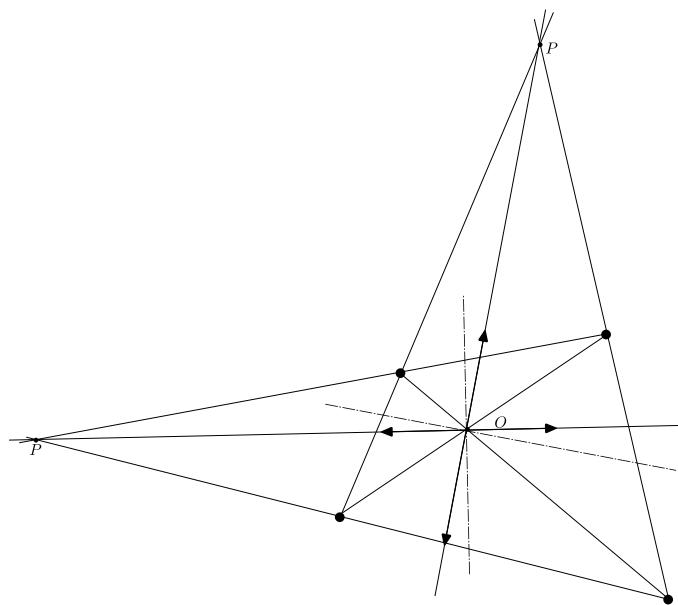
Arvestades, et $\beta/\alpha \approx n$, saame

$$\frac{a - r}{k - r} = \frac{a}{nk} \Rightarrow a = \frac{n rk}{nk - k + r} = \frac{1,6 \cdot 3 \cdot 5}{1,6 \cdot 5 - 5 + 3} = 4 \text{ mm.}$$

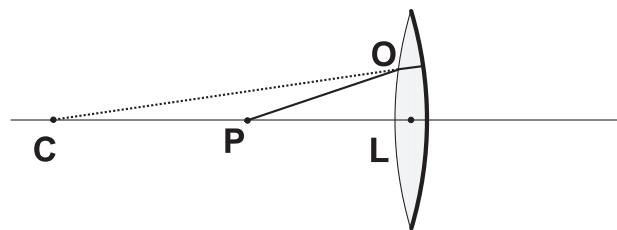
L192 Punktallikad ★★★★

Autor: Jaan Kalda, lõppvoor, 2010, G 9

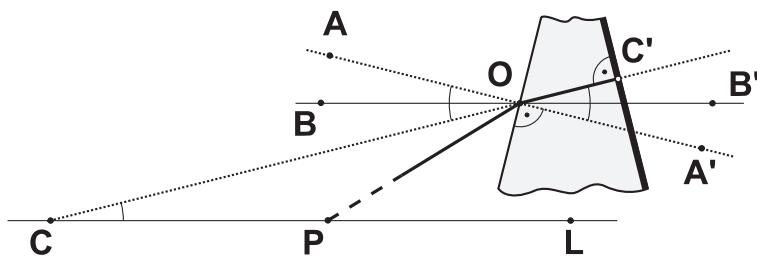
Allikat ja kujutist ühendav sirge läheb läbi läätse keskpunkti ning see punkt peab jääma allika ja kujutise vahelle, sest kujutis on töeline. Seetõttu saame läätse keskpunkti O leida kui lõikude $S_1S'_1$ ning $S_2S'_2$ lõikepunkt, kus S_1 ja S_2 on allikad ning S'_1 ja S'_2 on vastavad kujutised. Et lõikepunkt tekiks, peavad S_1 ja S'_1 paiknema diagonaalselt. Edasi paneme tähele, et sirge kujutis on sirge, kusjuures need kaks sirget lõikuuvad läätse tasandis. Et sirge S_1S_2 kujutis on $S'_1S'_2$, siis nende lõikepunkt P võimaldab meil leida juba läätse tasandi OP ; optiline peatelg on punktist O tömmatud ristsirge. Läätse tasandi seisukohast pole oluline, kumb sirgetest (S_1S_2 või $S'_1S'_2$) on kujutis ja kumb originaal. Seetõttu tekib meil kaks oluliselt erinevat võimalust: kas need kaks sirget paiknevad ligikaudu horisontaalselt või ligikaudu vertikaalselt, vt joonist.



L193 Optiline süsteem ★★★★ Autor: Andreas Valdmann, lõppvoor, 2011, G 8



Iga süsteemile langev valguskiir murdub läätse eesmisel pinnal, peegeldub tagumisel pinnal ja murdub uuesti. Lahenduse lihtsustamiseks vaatleme olukorda, kus kiirte käik on sümmeetriseline. Sel juhul langeb murdunud kiir peegelpinnale risti, peegeldub otse tagasi ja teine murdumine on esimesega identne. Süsteemi sisenev ja seal väljuv kiir lõikavad optilist peatlege ühes ja samas punktis P . Seal asuva punktobjekti kujutis langeb kokku objekti endaga.



Võtame vaatluse alla teljelähedase kiire PO , mille korral võime nurga $\angle LPO$ lugeda väikeseks. Lõik OC' on optilise peateljega veelgi väiksema nurga all ja punktide O ning C' kaugus optilisest peateljest on ligikaudu võrdne. Uurime lähemalt läätse õhukest kihti, mille kõrgus on palju väiksem kõverusraadiusest r . Sel juhul võime kõverpinnad asendada nende puitujatega. Pindade ristsirged on joonisel tähistatud punktiirjoonega ning need lõikavad optilist peatelge läätse kõverustsentrites. Optiline kõrvatleg BB' on paralleelne optilise peateljega ning

$$\angle LCO = \angle B'OC' = \angle A'OB' = \angle BOC = \angle AOB \equiv \phi$$

ja murdumisnurk $\angle A'OC' = 2\phi$. Langemisnurgaks on $\angle AOP$. Murdumisseaduse rakendamisel kasutame väikese nurga lähendust

$$\frac{\sin(\angle AOP)}{\sin(\angle A'OC')} = n \approx \frac{\angle AOP}{\angle A'OC'},$$

millega

$$\angle AOP = n\angle A'OC' = 2n\phi.$$

Järgmistes arvutusteks on vaja teada nurka

$$\angle LPO = \angle BOP = \angle AOP - \angle AOB = 2n\phi - \phi = (2n - 1)\phi.$$

Kuna lääts on õhuke ja punkt O ei ole kaugel optilisest peateljest, siis $|CO| \approx |CL|$ ja $|PO| \approx |PL|$ ning $|CL| = r - \frac{d}{2} \approx r$, kus d on läätse paksus keskkohas. Jällegi väikese nurga lähendust kasutades saame

$$|LO| = \angle LCO|CL| = \angle LPO|PL|,$$

millega

$$|PL| = \frac{\angle LCO}{\angle LPO}|CL| = \frac{\phi}{(2n - 1)\phi}r = \frac{r}{2n - 1}.$$

Viimaseks rakendame läätse valemit

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{k} = \frac{1}{f}$$

ja seost

$$|PL| = a = k = \frac{r}{2n - 1}$$

ning saame, et

$$f = \frac{|PL|}{2} = \frac{r}{2(2n - 1)}.$$

L194 Sähvatus ★★★★

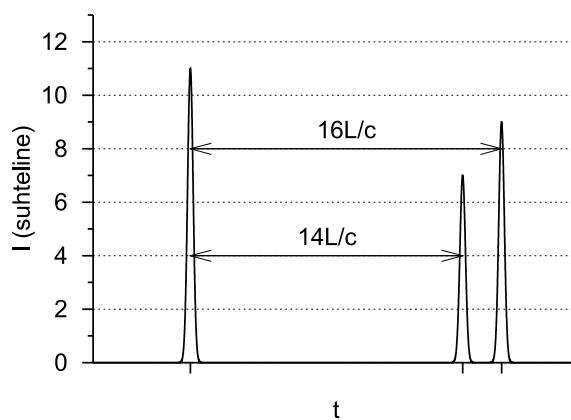
Autor: Mihkel Kree, lõppvoor, 2006, G 9

Alustuseks paneme tähele suurepärast seost arvandmetes. Nimelt ühtivad peeglite fookused, sest peeglite vahemaa on võrdne peeglite fookuskauguste summaga. Nõguspeegli fookuskaugus on teatavasti pool raadiusest. Paralleelne kiirtekimp koondub peegli fookuses. Seepärast jääb paralleelne kiirtekimp antud süsteemis pärast kahekordset peegeldumist ikkagi paralleelseks. Kuid paneme tähele, et kiire laius väheneb kaks korda, sest ühe läätse fookuskaugus on kaks korda suurem teise omast.

Valguskiir jääb niisiis peeglite vahelle pendeldama seniks, kuni tema kaugus teljest on väiksem kui $d_0/2 = 0,5\text{ mm}$, kusjuures esialgne kauguste vahemik, mis jõubab peegliteni, on $d_2/2 = 48\text{ mm}$ kuni $d_1/2 = 80\text{ mm}$, ehk pilu läbimiseks peab valgusvihk koonduma $d_2/d_0 = 96$ kuni $d_1/d_0 = 160$ korda. Pärast n -kordset edasi-tagasi peegeldumist väheneb kiire kaugus teljest 2^n korda. Paneme tähele, et 128 on kahe aste ($2^7 = 128$). Seepärast väljub peeglide langenud kiir pilust kahes järgus: esimene osa pärast seitsmendat edasi-tagasi liikumist ning teine osa pärast kaheksandat. Üks edasi-tagasi liikumine peeglite vahel tekib ajalise viivise $2L/c$.

Kumerläätsele langev paralleelne kiirtekimp koondub fookuses, kusjuures fookuseni jõudmisse aeg ei sõltu kiire asukohast (teljelähedased kiired läbivad paksema klaasikihi kui kaugemad kiired, klaasi läbib valgus aga aeglasemalt). Niisiis on fookuses oodata kolme impulssi: peegli ümbert tulnud osa, pärast seitset edasi-tagasi peegeldumist tulnud osa ning pärast kaheksat. Nende impulsside ajaline vahe on vastavalt $14L/c$ ja $2L/c$.

Nüüd tuleb veel leida impulsside suhtelised intensiivsused, mis on võrdsed vastavate röngaste pindaladega esialgne kiire ristlõikes. Esimese peegli läbimõõdust väiksem osa ei läbige süsteemi. Köige välimise rönga pindala on võrdeline arvuga $192^2 - 160^2$, järgmisele impulsile vastav rönga pindala $128^2 - 96^2$ ning viimasele impulsile vastava rönga korral $160^2 - 128^2$. Need arvud suhtuvad kui: $32^2(6^2 - 5^2) : 32^2(4^2 - 3^2) : 32^2(5^2 - 4^2) = 11 : 7 : 9$.



L195 Tunnel ★

Autor: Jaan Kalda, lahtine, 2008, G 3

Loeme õhu kokkusurumatuks. Sellisel juhul rongi ja tunneli seina vahel surutud õhu ruumalaga:

$$(b^2 - a^2) u' = a^2 v,$$

kus u' on õhu kiirus tunneli suhtes. Seega otsitav kiirus on

$$u = v + u' = v \left(1 + \frac{a^2}{b^2 - a^2} \right) = \frac{vb^2}{b^2 - a^2} = 90 \text{ km/h}.$$

Tegelikult on kiirus veidi väiksem, sest rongi ees surutakse õhk mingil määral kokku ja rongi ees ning taga tekib teatud õhuvool.

L196 Kuu ★★

Autor: Urmo Visk, lõppvoor, 2006, G 5

Olgu valgustatus (valgusvoog pinnaühiku kohta) päeval I_1 ja öösel I_2 . Kuna säri-aeg ja valgustatus on pöördvõrdelised, siis kehtib seos

$$t_1/t_2 = I_2/I_1.$$

Öösel valgustab Maad Kuult peegeldunud valgus. Kuna eeldati, et Kuu ja Maa on Päikesest võrdsel kaugusel, siis on valgustatus Kuul ka I_1 . Kui Kuu pind oleks Maad ja Kuud (ning ühtlasi Päikest) ühendava teljega risti, siis oleks Kuu poolt tagasi (Maa poole) suunatud valgusvoo tihedus $I_k = kI_1$, kus k on Kuu pinna keskmise peegeldustegur (albedo). Kuu näiv keskpunkt seda ka on, aga servad mitte. Ometigi, visuaalne kogemus ütleb, et Kuu ketas näib kõikjal enam-vähem ühe heledune. Hinnanguliselt asendagem mötteliselt Kuu „pannkoogiga“, st kettaga, mille raadius on võrdne Kuu raadiusega.

Kuu pinnalt peegeldub Päikeselt sumaarde valgusvoog $E = I_1 \pi r^2 k$ ning see jäätab ühtlaselt möttelise poolsfääri peale, mille keskpunktis asub Kuu ja pinna peal Maa. Seega jõuab Maale valgusvoog

$$I_2 = \frac{E}{2\pi R^2} = I_1 \frac{r^2 k}{2R^2}.$$

Seega

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{t_1}{t_2} = \frac{r^2 k}{2R^2},$$

ehk

$$k = \frac{t_1}{t_2} \frac{2R^2}{r^2} \approx 8 \text{ \%}.$$

L197 Maja ★★★

Autor: Jaan Kalda, lõppvoor, 2008, G 4

Maja teatud punkt P ja tema peegelkujutis mere pinnalt P' paiknevad sümmeetriselt mere tasandiga. Vaatleme mõttelist sirget PP' . Tema lõikepunkt merega O paikneb mõlemast otsast võrdsel kaugusel ning tänu sellele saame me joonisel punkti O kergelt määräta kui lõigu PP' keskpunkti. Maja kõrgus merepinnalt vastab vundamendi kaugusele punktist O , vt joonist. Mõõtes jooniselt akende vahkauguse $|AB| = 9,5$ mm ja $|OQ| = 58,5$ mm saame

$$H = 3 \text{ m} \cdot \frac{|OQ|}{|AB|} = 18,5 \text{ m.}$$

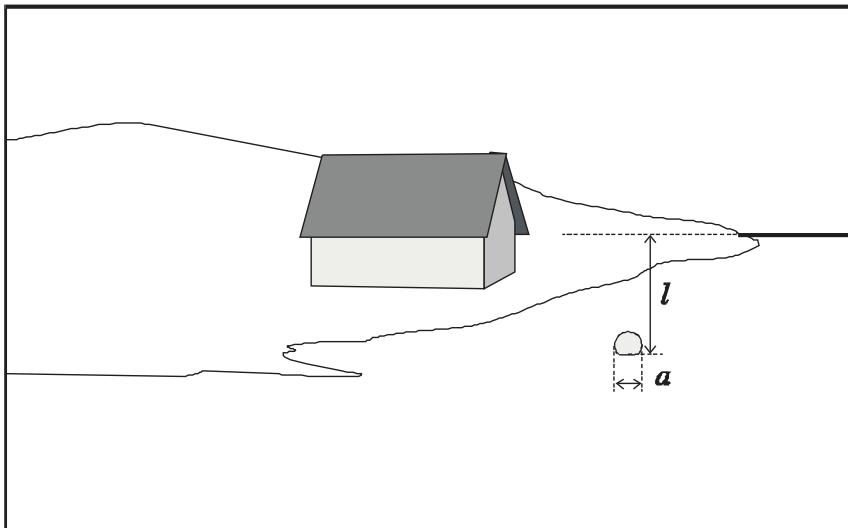


L198 Maja ★★★★

Autor: Jaan Kalda, lahtine, 2008, G 9

Joonise põhjal võib oletada, et poi on märksa lähemal horisondist (ca 5 km), see-ka võib Maa kumerust mitte arvestada. Asetame mõtteliselt kahe-meetrise teiba poi kõrvale. Fotoaparaati ja teiba ülemist otsa ühendav joon on horisontaalne ja seega läbib horisonti, mis tähendab, et teiba ots puudutab joonisel näha oleva horisondilõigu pikendust. Poi diameetri d leiame mõõtes joonisel pikkused a ja l :

$$d = 2 \text{ m} \cdot \frac{a}{l} = 45 \text{ cm}.$$

**L199 Kile ★★★★**

Autor: Jaan Kalda, lahtine, 2008, G 8

Valgus peegeldub tagasi kile ülemiselt ja alumiselt pinnalt. Risti langeva valguse puhul on nende vaheline optiliste teede pikkuse erinevus $2n_1d$, kus d on (otsitav) kile paksus. Peegeldus on minimaalne, kui need kiired liituvad vastasfaasis, st

$$2n_1d = \left(N + \frac{1}{2} \right) \lambda.$$

Kui tahetakse, et peegeldunud valgus oleks nõrk ka punase ja sinise valguse jaoks, siis tuleb täisarvu N väärustus võtta võimalikult väike. Olgu $\lambda - \Delta\lambda$ selline lainepeiklus, mille puhul peegeldunud kiired liituvad samas faasis, st peegeldunud valgus on maksimaalse intensiivsusega. Sellisel juhul $2n_1d = N(\lambda + \Delta\lambda)$. Kahest võrdust saame $\Delta\lambda = \lambda/2N$. Et antud juhul oleme huvitatud võimalikult suurest $\Delta\lambda$ väärustusest, siis tuleb valida $N = 1$. Niisiis $d = \lambda/4n_1 \approx 102 \text{ nm}$.

L200 Kunstinäitus ★★★★

Autor: Jaan Kalda, lõppvoor, 2009, G 10

Kile ülemiselt ja alumiselt pinnalt peegeldunud kiirte optiliste teepikkuste erinevus on maksimaalne, kui kiir langeb pinnaga risti, ning võrdne $\Delta l_{\max} = 2n_1 d$, kus, d on kile paksus. Minimaalne on see siis, kui kiir langeb peaegu paralleelselt kilega (st horisontaalsel); sellisel juhul on optiliste teepikkuste vahe $\Delta l_{\min} = 2n_1 d / \cos \alpha - 2d \tan \alpha$, kus α on kiles leviva kiire nurk vertikaali suhtes, $\sin \alpha = 1/n_1$. Seega

$$\Delta l_{\min} = 2d / \cos \alpha (n_1 - \sin \alpha) = 2n_1 d (1 - n_1^{-2}) / \sqrt{1 - n_1^{-2}} = 2n_1 d \sqrt{1 - n_1^{-2}}.$$

Kui muuta vaatesuunda vertikaalsest horisontaalseks, siis muutub optiliste teepikkuste vahe $N\lambda$ võrra (sest selle protsessi käigus on võimalik registreerida N interferentsimaksimumi, mil optiliste teepikkuste vahe on laine pikkuse täisarv-kordne). Seega $2n_1 d (1 - \sqrt{1 - n_1^{-2}}) = N\lambda$, millest

$$d = N\lambda / 2n_1 (1 - \sqrt{1 - n_1^{-2}}) \approx 13 \mu\text{m}.$$

Õpilaste tulemused

Füüsika lõppvoor

9. aprill 2005. a.

Gümnaasium

| Koht | Nimi | Klass | Füüsikaõpetaja | Kokku | Järk |
|------|---------------------|-------|--------------------|-------|------|
| 1 | Aleksandr Morozenko | 12 | Nadežda Tšerkašina | 58 | I |
| 2 | Siim Ainsaar | 12 | Mart Kuurme | 55 | I |
| 3 | Karel Aru | 12 | Lilian Tambek | 46 | II |
| 4 | Ott Rebane | 12 | Mart Kuurme | 43 | II |
| 5 | Meelis Lootus | 11 | Elmu Mägi | 42 | II |

Füüsika lahtine võistlus

26. november 2005. a.

Vanem rühm

| Koht | Nimi | Klass | Füüsikaõpetaja | Kokku | Järk |
|------|--------------------|-------|--------------------|-------|------|
| 1 | Aleksei Vlassov | 12 | Tatjana Beloussova | 56 | |
| 2 | Holger Haas | 12 | Elmu Mägi | 54 | |
| 3 | Mihkel Heidelberg | 12 | Aarne Silas | 50 | |
| 4 | Mikhail Verhovtsov | 12 | Esfira Zolotarjova | 47 | |
| 5 | Lauri Kaldamäe | 12 | Jaak Saukas | 44 | |

Füüsika lõppvoor

4. märts 2006. a.

Gümnaasium

| Koht | Nimi | Klass | Füüsikaõpetaja | Kokku | Järk |
|------|-------------------|-------|--------------------|-------|------|
| 1 | Aleksei Vlassov | 12 | Tatjana Beloussova | 58,5 | I |
| 2 | Holger Haas | 12 | Elmu Mägi | 50,5 | II |
| 3 | Meelis Lootus | 12 | Elmu Mägi | 50 | II |
| 4 | Mihkel Heidelberg | 12 | Aarne Silas | 45 | II |

Füüsika lahtine võistlus**25. november 2006. a.****Vanem rühm**

| Koht | Nimi | Klass | Füüsikaõpetaja | Kokku | Järk |
|------|-----------------|-------|--------------------|-------|------|
| 1 | Andres Laan | 11 | Mart Kuurme | 62 | |
| 2 | Marek Jarkovoi | 12 | Mart Kuurme | 54 | |
| 3 | Velle Toll | 12 | Indrek Peil | 52 | |
| 3 | Jaan Katus | 12 | Mart Kuurme | 52 | |
| 5 | Andrei Klevtsov | 11 | Jelena Guljajeva | 46,5 | |
| 5 | Andrei Lošitski | 12 | Nadežda Tšerkašina | 46,5 | |

Füüsika lõppvoor**17. märts 2007. a.****Gümnaasium**

| Koht | Nimi | Klass | Füüsikaõpetaja | Kokku | Järk |
|------|--------------------|-------|----------------|-------|------|
| 1 | Uku Hämarik | 11 | Maire Piirimäe | 49 | I |
| 2 | Stanislav Zavjalov | 10 | Gennadi Medkov | 48 | I |
| 2 | Marek Jarkovoi | 12 | Mart Kuurme | 48 | I |
| 4 | Priit Rinken | 12 | Madis Reemann | 45 | II |

Füüsika lahtine võistlus**24. november 2007. a.****Vanem rühm**

| Koht | Nimi | Klass | Füüsikaõpetaja | Kokku | Järk |
|------|--------------------|-------|--------------------|-------|------|
| 1 | Stanislav Zavjalov | 11 | Gennadi Medkov | 48 | |
| 2 | Heiki Niglas | 12 | Kusta Rumma | 46 | |
| 3 | Karen Atabekjan | 12 | Tatjana Beloussova | 45 | |
| 4 | Vyatšeslav Žarinov | 12 | Nelli Afonina | 41,5 | |
| 5 | Andreas Valdmann | 12 | Madis Reemann | 41 | |

Füüsika lõppvoor**8. märts 2008. a.****Gümnaasium**

| Koht | Nimi | Klass | Füüsikaõpetaja | Kokku | Järk |
|------|--------------------|-------|------------------|-------|------|
| 1 | Andres Laan | 12 | Mart Kuurme | 53,5 | I |
| 2 | Heiki Niglas | 12 | Kusta Rumma | 52,5 | I |
| 3 | Taavi Pungas | 11 | Mart Kuurme | 51 | I |
| 4 | Stanislav Zavjalov | 11 | Gennadi Medkov | 48,5 | II |
| 5 | Uku Hämarik | 12 | Maire Piirimäe | 48 | II |
| 6 | Andrei Klevtsov | 12 | Jelena Guljajeva | 45,5 | II |
| 7 | Ardi Loot | 11 | Märt Kask | 45 | II |
| 8 | Heino Soo | 11 | Märt Kask | 43 | II |

Füüsika lahtine võistlus**29. november 2008. a.****Vanem rühm**

| Koht | Nimi | Klass | Füüsikaõpetaja | Kokku | Järk |
|------|--------------------|-------|----------------|-------|------|
| 1 | Stanislav Zavjalov | 12 | Gennadi Medkov | 59 | |
| 2 | Taavi Pungas | 12 | Mart Kuurme | 56 | |
| 3 | Paavo Parmas | 12 | Aarne Silas | 53 | |
| 4 | Lauri Taales | 12 | Aarne Kivimäe | 50 | |
| 5 | Ardi Loot | 12 | Märt Kask | 45 | |
| | Jonatan Jöks | 12 | Toomas Reimann | 45 | |

Füüsika lõppvoor**7. märts 2009. a.****Gümnaasium**

| Koht | Nimi | Klass | Füüsikaõpetaja | Kokku | Järk |
|------|--------------------|-------|----------------|-------|------|
| 1 | Stanislav Zavjalov | 12 | Gennadi Medkov | 58 | I |
| 2 | Ardi Loot | 12 | Märt Kask | 54 | I |
| 3 | Paavo Parmas | 12 | Aarne Silas | 50 | I |
| 4 | Mihkel Soolep | 12 | Mart Kuurme | 42 | II |
| 5 | Kadi Liis Saar | 10 | Mart Kuurme | 41 | II |

Füüsika lahtine võistlus

28. november 2009. a.

Vanem rühm

| Koht | Nimi | Klass | Füüsikaõpetaja | Kokku | Järk |
|------|------------------|-------|----------------|-------|------|
| 1 | Ants Remm | 11 | Siim Oks | 50 | I |
| 2 | Rauno Siinmaa | 12 | Elmu Mägi | 47,5 | I |
| 3 | Roland Matt | 12 | | 43 | II |
| 4 | Janno Jõulu | 11 | Mart Kuurme | 42,5 | II |
| 4 | Madis Ollikainen | 11 | Erkki Soika | 42,5 | II |

Füüsika lõppvoor

6. märts 2010. a.

Gümnaasium

| Koht | Nimi | Klass | Füüsikaõpetaja | Kokku | Järk |
|------|------------------|-------|----------------|-------|------|
| 1 | Ants Remm | 11 | Siim Oks | 51 | I |
| 2 | Madis Ollikainen | 11 | Erkki Soika | 49 | I |
| 3 | Siim Liiser | 11 | Mart Kuurme | 47,5 | II |
| 4 | Kadi Liis Saar | 11 | Mart Kuurme | 46,5 | II |
| 5 | Andres Jaanson | 11 | Elmu Mägi | 46 | II |
| 6 | Gerli Viikmaa | 12 | Elmu Mägi | 45,5 | II |
| 7 | Sander Siim | 11 | August Alop | 45 | II |
| 7 | Kert Pütsepp | 11 | Mart Kuurme | 45 | II |
| 9 | Ivar Kiitam | 11 | Mart Kuurme | 44,5 | II |

Füüsika lahtine võistlus

27. november 2010. a.

Vanem rühm

| Koht | Nimi | Klass | Füüsikaõpetaja | Kokku | Järk |
|------|------------------|-------|----------------|-------|------|
| 1 | Jaan Toots | 10 | Toomas Reimann | 58 | I |
| 2 | Madis Ollikainen | 12 | Erkki Soika | 53,5 | II |
| 3 | Ants Remm | 12 | Siim Oks | 53 | II |
| 3 | Kristian Kuppart | 12 | August Alop | 53 | II |
| 5 | Andres Jaanson | 12 | Elmu Mägi | 51,5 | II |
| 6 | Erik Tamre | 11 | Mart Kuurme | 51 | II |

Füüsika lõppvoor**9. aprill 2011. a.****Gümnaasium**

| Koht | Nimi | Klass | Füüsikaõpetaja | Kokku | Järk |
|------|------------------|-------|-----------------|-------|------|
| 1 | Ants Remm | 12 | Siim Oks | 61 | I |
| 2 | Siim Liiser | 12 | Mart Kuurme | 58 | I |
| 3 | Jaan Toots | 10 | Toomas Reimann | 57,5 | I |
| 4 | Tanel Kiis | 11 | Vahur Pohlalalu | 55 | II |
| 5 | Deiwin Sarjas | 11 | Muia Keerutaja | 53 | II |
| 6 | Andres Jaanson | 12 | Elmu Mägi | 51,5 | II |
| 7 | Eero Vaher | 12 | Elmu Mägi | 51 | II |
| 7 | Kristian Kuppart | 12 | August Alop | 51 | II |
| 7 | Erik Tamre | 11 | Mart Kuurme | 51 | II |
| 10 | Janno Jõulu | 12 | Mart Kuurme | 50,5 | II |

Füüsika lahtine võistlus**26. november 2011. a.****Vanem rühm**

| Koht | Nimi | Klass | Füüsikaõpetaja | Kokku | Järk |
|------|------------------|-------|-------------------|-------|------|
| 1 | Jaan Toots | 11 | Toomas Reimann | 61 | I |
| 2 | Kaur Aare Saar | 11 | Guido Vegmann | 57 | I |
| 3 | Erik Tamre | 12 | Mart Kuurme | 56 | I |
| 4 | Tanel Kiis | 12 | Vahur Pohlalalu | 53 | II |
| 4 | Sandra Schumann | 11 | Mart Kuurme | 53 | II |
| 6 | Sergei Malõšev | 12 | Mihhail Emeljanov | 51 | II |
| 7 | Sergei Jakovlev | 12 | Elena Golubeva | 50,5 | II |
| 8 | Janno Veeorg | 11 | Toomas Reimann | 50 | II |
| 9 | Eva-Lotta Käsper | 12 | Siim Oks | 48 | II |

Autorite loetelu

Aigar Vaigu – Aalto Ülikool ja VTT Technical Research Centre of Finland
Aleksei Vlassov – Tartu Ülikool
Andre Sääsk – Tartu Ülikooli Narva kolledž
Andreas Valdmann – Tartu Ülikool
Andres Laan – Cambridge'i Ülikool
Eero Uustalu – Tallinna Tehnikaülikool
Jaak Kikas – Tartu Ülikool
Jaan Kalda – Tallinna Tehnikaülikool
Jaan Susi – Tartu Ülikool
Koit Timpmann – Tartu Ülikool
Kristian Kuppart – Tartu Ülikool
Mihkel Heidelberg – Tartu Ülikool ja Tallinna Tehnikaülikool
Mihkel Kree – Marseille' Ülikool ja Tartu Ülikool
Mihkel Pajusalu – Tartu Ülikool ja Massachusettsi Tehnoloogia instituut
Mihkel Rähn – Tartu Ülikool
Oleg Košik – Tartu Ülikool
Ott Krikmann – Eesti Maaülikool
Riho Taba – Bristol Ülikool ja Imperial College
Roland Matt – Tartu Ülikool ja ETH Zürich
Siim Ainsaar – Tartu Ülikool ja Tallinna Tehnikaülikool
Stanislav Zavjalov – Oxfordi Ülikool
Taavi Pungas – Cambridge'i Ülikool ja Tartu Ülikool
Urmo Visk - Tartu Ülikool
Valter Kiisk – Tartu Ülikool