

# 200 EESTI FÜÜSIKAOLÜMPIAADI ÜLESANNET AASTATEST 2005 – 2011

koos vihjete ja lahendustega

Koostas Taavet Kalda

2019

© Autoriõigused: Eesti Matemaatika Selts, Tallinna Tehnikaülikool, Tartu Ülikool,  
ülesannete autorid ja Taavet Kalda.

Kogumiku koostamist toetasid: Eesti Matemaatika Seltsi fond “Benoit Mandelbroti Jälgedes”, Robert Kitt ja Tallinna Tehnikaülikool.

Korrektorid Nata-Ly Pantšenko ja Erki Leht  
Kaanekujundaja Rael Kalda

Kirjastanud Tallinna Tehnikaülikooli eelõppeosakond

ISBN ???

# Sisukord

<b>Sissejuhatus</b>	4
<b>Ülesanded</b>	5
Dünaamika . . . . .	5
Elektriahelad . . . . .	15
Elektrostaatika . . . . .	23
Gaasid . . . . .	28
Geomeetriline optika . . . . .	32
Kinemaatika . . . . .	41
Laineoptika . . . . .	48
Magnetism . . . . .	49
Staatika . . . . .	51
Taevamehaanika . . . . .	57
Termodünaamika . . . . .	60
Varia . . . . .	67
Vedelike mehaanika . . . . .	70
<b>Vihjad</b>	73
<b>Lahendused</b>	92
<b>Õpilaste tulemused</b>	225
<b>Autorite loetelu</b>	230

# Sissejuhatus

Siiia on koondatud 200 gümnaasiumi ülesannet Eesti füüsikaolümpiaadi piirkonnavoorudest, lõppvoorudest ja lahtistest võistlustest. Igale ülesandele on juurde kirjutatud paarilauseline vihje. Juhul kui õpilane jäab ülesannet lahendades top-pama, on tal võimalik vihjet lugeda ning teisele katsele minna.

Tegu on teise kogumikuga Eesti füüsikaolümpiaadi ülesannete kogude seeriast, kus esimene kattis 200 ülesannet ajavahemikust 2012–2018.

Ülesanded on jaotatud teemade kaupa ning teemasiseselt raskuse järgi. Raskustaset tähistatakse kuni viie tärniga. Ülesannete lihtsamaks otsimiseks on ülesannete numbrite ette pandud „Ü“, vihjete ette „V“ ja lahenduste ette „L“. Näiteks ülesande 133 teksti number on kujul Ü133. Iga ülesande juures on kirjas ka selle autor ning olümpiaadi vooru lühinimetus, lisaks lühendid P 1, G 1 jne, kus tähed tähistavad põhikooli- ja gümnaasiumiastet. Näiteks G 9 viitab gümnaasiumiastme 9. ülesandele.

Kogumiku koostamise käigus eemaldati erinevatel põhjustel 3 ülesannet.

Lisaks leiate kogumiku lõpust kogumiku poolt kaetud lahtiste ja lõppvooru-de esimese ja teise järgu saanud õpilaste ning ülesannete autorite nimekirja.

# Ülesanded

## Dünaamika

### Ü1 Kivi ★

Autor: Aigar Vaigu, lõppvoor, 2005, G 1

Sirgjooneliselt ja jääva kiirusega  $v = 4 \text{ m/s}$  tõusva õhupalli gondlis asub poiss. Mingil hetkel laseb poiss gondlist alla kukkuda kivi ning seejärel viskab ta kivile järgi palli, soovides tabada palliga langevat kivi. Milline võib olla suurim ajavahe-mik kivi lahtilaskmise ja palli viskamise vahel, et see oleks veel võimalik? Maapinnal seistes suudaks poiss visata palli vertikaalselt üles kuni  $h = 20 \text{ m}$  kõrgusele. Võib eeldada, et õhupall asub piisavalt kõrgel selleks, et kivi saaks palliga tabada enne maapinnale kukumist. Õhutakistus lugeda tühiseks. Raskuskiirendus  $g = 9,8 \text{ m/s}^2$ .

### Ü2 Pallid ★

Autor: Tundmatu autor, lahtine, 2007, G 1

Juku istub puu otsas ja laseb algkiirusesta lahti tema käes oleva palli. All seisab Juhan, kes samal hetkel viskab vertikaalselt üles täpselt samasuguse palli Juku pihta. Pärast pallide põrget jõuab Juku pall täpselt tema kõrgusele tagasi. Kas pall tabab Juhanit enne või pärast seda, kui Juku pall jõuab Jukuni? Lugeda, et pallide põrge on absoluutsest elastne.

### Ü3 Hobune ★

Autor: Valter Kiisk, piirkonnavoor, 2007, G 1

Puu oksal istub poiss, kes soovib hüpata puu alt mööda galopeeriva hobuse selga. Hobuse kiirus on  $v = 10 \text{ m/s}$  ja puuoksa kõrgus sadula suhtes  $h = 3 \text{ m}$ . Kui suur peab olema horisontaalsihiline distants sadula ja puuoksa vahel sel hetkel kui poiss oksast lahti laseb?

### Ü4 Eiffeli torn ★

Autor: Aigar Vaigu, piirkonnavoor, 2010, G 1

Eiffeli torni ülemiselt vaateplatvormilt (kõrgus maapinnast  $h = 273 \text{ m}$ ) lastakse kukkuda raudkuulil. Täpselt  $t = 3$  sekundi pärast kukutatakse veel üks raudkuul. Kui suur on raudkuulide suurim kiiruste vahe langemisel? Kui suur on ajavahe-mik kuulide maapinnale jõudmiste vahel? Raskuskiirendus  $g = 9,8 \text{ m/s}^2$ . Katse käigus ükski küllastaja viga ei saanud.

### Ü5 Kokkupõrge ★

Autor: Andreas Valdmann, piirkonnavoor, 2011, G 1

Kaks autot massidega  $m = 1,5 \text{ tonni}$  teevad laupkokkupõrke, mille võib lugeda täielikult plastseks. Kui suur energia kulus purustute tekitamiseks, kui:

a) mõlema auto kiirus oli  $v_a = 50 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ ;

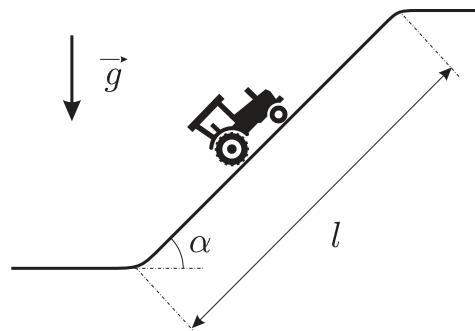
b) üks auto seisis paigal ja teise auto kiirus oli  $v_b = 100 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ ?

(Võib arvestada, et autode lohisemisel pärast põrget olulist kahju ei teki.)

**Ü6 Tõus ★**

Autor: Tundmatu autor, lahtine, 2005, G 2

Talvise ilmaga Tartust Tallinnasse sõitev auto peab oma teekonna alguses ületama järsu ja libeda tõusu Jakobi tänaval (vt joonist). Tõusu kallak horisontaalsihi suhtes  $\alpha \approx 5^\circ$ , pikkus  $l \approx 200$  m. Hinnata, kui suur on minimaalne hõõrdetegur  $\mu$  rataste ja tee vahel, mille puhul kiirusega  $v = 30$  km/h mäkke üles sõitma hakkanud auto suudab veel tõusu ületada?

**Ü7 Keha ★**

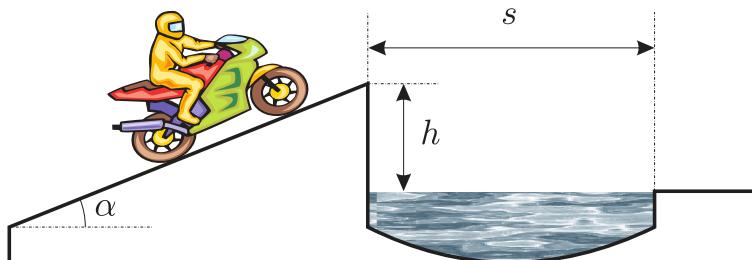
Autor: Tundmatu autor, lahtine, 2006, G 3

Vertikaalselt ülesse visatud keha läbib kaks korda kõrgusel  $h$  asuvat punkti. Ajavahemik nende kahe läbimise vahel on  $\Delta t$ . Leida keha algkiirus  $v_0$  ja aeg  $\tau$  keha liikumise algusest kuni algpunkt tagasi jõudmiseni.

**Ü8 Mootorratas ★**

Autor: Tundmatu autor, lahtine, 2007, G 5

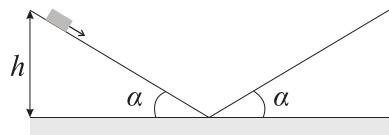
Mootorrattur tahab hüpata üle kraavi, mille mõõtmed on näidatud joonisel. Kui suur peab olema mootorratturi minimaalne kiirus  $v$  lennu alguses selleks, et tema ettevõtmise õnnestuks?



### Ü9 Kelk ★

Autor: Tundmatu autor, lahtine, 2008, G 2

Kelguga lastakse alla  $h = 10\text{ m}$  kõrgusest  $\alpha = 30^\circ$  kaldenurgaga orunõlvast. Kui kõrgele tõuseb kelk saadud hooga mööda sama suure kaldenurgaga vastasnõlva, kui hõordetegur on  $\mu = 0,1$ ?



Märkus. Joonis on ligikaudne, languselt tõusule üleminek on tegelikult sujuv ja põrkega seotud kiirusekadu seal ei toimu.

### Ü10 Hantel ★

Autor: Mihkel Kree, lõppvoor, 2008, G 1

Hantel koosneb kahest võrdse massiga kerast (kumbki massiga  $m$ ) ning neid ühen-davast massitust jäigast vardast. Alguses hoitakse hantel horisontaalselt õhus paigal. Nüüd antakse ühele kuulidest hetkega vertikaalsuunaline kiirus  $v$  ning hantel hakkab vabalt liikuma. Vabalangemise kiirendus on  $g$ . Missugune on süsteemi kineetiline energia hetkel, mil massikese saavutab maksimaalse kõrguse?

### Ü11 Ping-pong ★

Autor: Siim Ainsaar, lõppvoor, 2008, G 2

Pingpongil pall kukutatakse kõrguselt  $h$  horisontaalsele lauale. Igal põrkel kahaneb palli energia  $k$  korda. Leidke palli lahtilaskmiseni seismäämiseni kuluv aeg  $t$ . Vabalangemise kiirendus on  $g$ .

### Ü12 Mürsk ★

Autor: Mihkel Kree, piirkonnnavoor, 2009, G 2

Kahurist välja lennanud mürsk (massiga  $M$ ) laguneb oma lennutrajektoori kõrgeimas punktis mingi sisemise vedrumehanismi abil kaheks võrdseks pooleks (kumbki massiga  $M/2$ ) nii, et üks osadest kukub mürsu senist trajektoori pidi liikudes täpselt kahurini tagasi. Kui kaugele kahurist maandub teine pool? Lagunemispunkti projektsioon maapinnale asub kahurist kaugusel  $L$ .

### Ü13 Kerad ★

Autor: Valter Kiisk, lahtine, 2010, G 1

On antud kolm väliselt identset ja ühesuguse massiga kera. On teada, et üks neist keradest on homogeenne, teine on seest õõnes ja kolmas on seest vedel. Kuidas saab lihtsate võrdlevate mehaanikakatsetega kindlaks teha, milline on iga kera sisemus? Abivahendid võite vabalt valida, aga kerasid vigastada ei tohi.

### Ü14 Sild ★

Autor: Valter Kiisk, lõppvoor, 2010, G 1

Risti üle  $l = 100\text{ m}$  laiuse jõe kulgeb kumer sild, mille keskel on autotee  $h = 5\text{ m}$  võrra kõrgemal kaldapealsest tasemest. Silla profiliiks on ringjoone kaar. Auto massiga  $m = 1000\text{ kg}$  ületab silla muutumatu kiirusega  $v = 60\text{ km/h}$ . Kui suure jõuga röhub auto silla keskkohta? Kui suure kiiruse juures hakkab kaduma kontakt rataste ja tee vahel?

**Ü15 Varras ★**

Autor: Stanislav Zavalov, lõppvoor, 2011, G 2

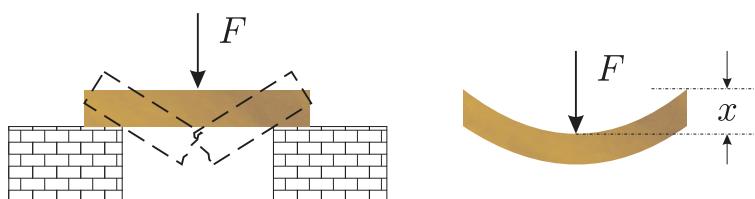
Mööda liigendi abil seina külge kinnitatud väga pikka ja tühiselt kerget varrast saab libiseda väike röngas massiga  $m$ . Esialgu asub röngas liigendist kaugusel  $l$  ja varras on horisontaalne. Ajahetkel  $t = 0$  hakkab süsteem vabalt liikuma. Leidke varda ja horisontaali vahelise nurga  $\alpha$  ajaline sõltuvus. Kõik liikumised lugeda hõõrdevabaks.

**Ü16 Karatist ★★**

Autor: Tundmatu autor, lahtine, 2007, G 6

Hinnake, millise kiirusega  $v$  peab karatisti käsi tabama kahele kivile toetuva laaujupi keskpunkti (vt joonist), et laud murduks? Käe mass on  $m = 1,5 \text{ kg}$ , laua mass  $M = 2 \text{ kg}$ , laua jäikustegur  $k = 1,4 \cdot 10^5 \text{ N/m}$ , murdumiseks vajalik läbipaine (st laua keskpunkti nihe)  $d = 20 \text{ mm}$ .

*Märkus.* Jäikustegur  $k$  on võrdetegur laua keskpunkti rakendatud jõu  $F$  ning laua keskpunkti nihke  $x$  vahel (vt joonist).

**Ü17 Veenus ★★**

Autor: Mihkel Kree, lõppvoor, 2007, G 2

Lugegem Maa ja Veenuse orbiitid ümber Päikese ringikujulisteks. Planeedid tiirlevad ümber Päikese samas suunas ja Veenuse maksimaalne eemaldumus (nurk Veenuse ja Päikese vahel Maalt vaadates) on 46 kraadi.

a) Leidke Veenuse ja Maa orbiitide raadiuste suhe.

b) Mitu päeva jääb järjestikuste maksimaalsete eemaldumustele vahele?

*Vihje.* Kepleri seaduse kohaselt on taevakehade tiirlemisperioodide ruudud võrdelised vastavate orbiitide raadiuste kuupidega.

**Ü18 Auto ★★**

Autor: Mihkel Heidelberg, piirkonnnavoor, 2009, G 5

Auto kiirendab nii, et rattad libisevad. Hetkel on auto kiirus stabiilselt  $v$ , vedavate rataste nurkkiirus  $\omega$  ja raadius  $r$ . Kui oletada, et mootori võimsus läheb ainult auto liikumisse ja vedavate rataste libisemisse, siis kui suur on kasutegur?

**Ü19 Vedru ★★**

Autor: Aigar Vaigu, piirkonnnavoor, 2010, G 4

Raske tellis kukub poole meetri kõrguselt jäigale lühikesele vedrule. Põrge on elastne ja tellis lendab peaegu algsele kõrgusele tagasi. Kui kõrgele maast kerkib vedru pärast põrget?

**Ü20 Pendel ★★**

Autor: Taavi Pungas, piirkonnavoor, 2011, G 7

Pendel pandi väikese amplituudiga võnkuma ning stopperiga registreeriti neid hetki, kui pendel läbis vasakult poolt tulles oma tasakaalupunkti. Kaks järjestikust sellist sündmust toimusid hetkedel  $t_1 = 3,19\text{ s}$  ja  $t_2 = 5,64\text{ s}$ . Pendlit lasti mõnda aega segamatult võnkuda, seejärel saadi kaheks järjestikuseks näiduks  $t_3 = 61,14\text{ s}$  ja  $t_4 = 63,54\text{ s}$ . Leidke võimalikult täpselt pendli võnkeperiood ning hinnake selle mõõtemääramatust.

**Ü21 Aerud ★★**

Autor: Tundmatu autor, piirkonnavoor, 2005, G 6

Aerude pikkus tullist (punktist, kus aerud kinnituvad paadi kere külge) kuni käepidemeni on  $a = 1\text{ m}$  ning tullist kuni labadeni on  $b = 1,5\text{ m}$ . Keskmine joud, millega aerutaja tömbab kumbagi aeru, on  $F = 60\text{ N}$ . Paadi ja vee vaheline takistusjoud on  $F_h = \alpha v^2$ , kus  $\alpha = 20\text{ kg/m}$ . Kui suure keskmise kiirusega liigub paat? Hinnata aerutaja keskmist võimsust.

**Ü22 Kivi ★★**

Autor: Tundmatu autor, lahtine, 2006, G 4

Paelaga lae külge kinnitatud kivi liigub mööda horisontaaltasapinnas asuvat ringjoont, mille kaugus laest  $h = 1,25\text{ m}$ . Leida kivi tiirlemisperiood  $\tau$ .

**Ü23 Kaldpind ★★**

Autor: Mihkel Rähn, piirkonnavoor, 2006, G 4

Pall kukub kaldpinnale ja hakkab elastelt põrkuma (st energiakadudeta). Kui kaugel on viies põrkekoht esimesest? Kaldpinna kaldenurk on  $\alpha$ , palli algkõrgus esimesest põrkekohast oli  $h$ .

**Ü24 Kuulike ★★**

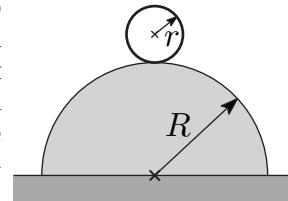
Autor: Tundmatu autor, lahtine, 2008, G 5

Venimatu ja kaalutu niidi otsa kinnitati kuulike. Niit viidi horisontaalasendisse ja lasti lahti. Kuulikese kiiruse vertikaalne komponent hakkab esialgu suurenema, kuid teatud hetkest alates vähenema. Millise nurga moodustab niit vertikaalsihiiga ajahetkel, kui kuulikese kiiruse vertikaalne komponent on maksimaalne?

**Ü25 Veerev silinder ★★**

Autor: Andres Laan, lahtine, 2010, G 3

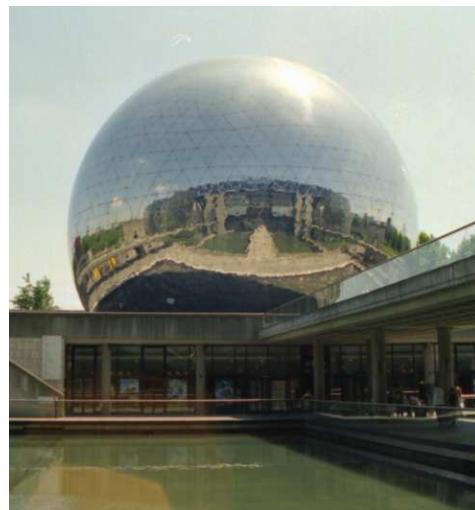
Alusele kinnitatud poolsilindril raadiusega  $R$  lebab selle kõrgeimas punktis seest tühi silinder raadiusega  $r$ . Mingisugusel hetkel nihkub keha natuke tasakaalust välja ja selle tulemusel hakkab libisemiseta veerema (hõõrdetegur on väga suur). Leidke, kui kõrgel aluse kohal keha poolsilindri pinnast eraldub. *Vihje:* kui veeveva silindri mass on  $m$  ja ta masskese liigub kiirusega  $v$ , on ta kineetiline energia  $mv^2$  (ilmata kordajata  $\frac{1}{2}!$ ).



**Ü26 Sfääär ★★**

Autor: Andre Sääsk, lahtine, 2005, G 6

Üks osa Pariisi Cité des Sciences teadusmuuseumi kompleksist — La Géode — ku-jutab endast hiigel suurt sfääri raadiusega  $R = 18\text{ m}$ , mille sees asub maailma suurim kinoekraan (vt joonist). Hoonet väljastpoolt imetlev uudishimulik koolipoiss otsustab tabada selle hoone tipp-punkti tennispalliga. Kui suure minimaalse kiirusega  $v$  peaks ta palli viskama, et palli liikumise trajektoor lõikuks hoone välispinnaga vaid ühes punktis — hoone tipp-punktis — ja see oleks ühtlasi ka palli liikumise trajektoori kõrgeimaks punktiks? Pall alustab liikumist kõrgusel  $h = 1,5\text{ m}$ .

**Ü27 Anum ★★**

Autor: Tundmatu autor, lahtine, 2005, G 7

Siledal pinnal asub kerge ristikülikuline anum, mis on täidetud vedelikuga tihe-dusega  $\rho_0$ , vedeliku ruumala on  $V_0$ . Anuma põhja sattunud põrnikas ruumalaga  $V$  ja tihedusega  $\rho$  hakkab anuma põhja suhtes roomama kiirusega  $u$ . Millise kiirusega hakkab anum pinnal liikuma? Anuma mass on tühine, veetase jäab kogu aeg horisontaalseks. Eeldada, et pinna ja anuma vahel hõõre puudub.

**Ü28 Mullitaja ★★**

Autor: Jaak Kikas, lõppvoor, 2005, G 7

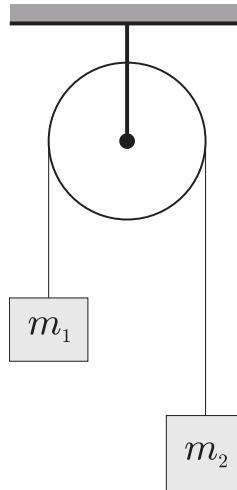
Veekogu põhjas asub mullitaja — õhuballoon väikese avausega, millest võrdsete ajavahemike  $\Delta t = 1\text{ s}$  järel väljuvad õhumullid raadiusega  $R = 0,3\text{ mm}$ . Taolise mullikese liikumisel vees mõjub sellele takistusjõud  $F = 6\pi\eta Rv$ , kus  $\eta$  on vedeliku voolamistakistust iseloomustav tegur (vedeliku viskoossus, vee korral on selle suuruse väärtsuseks  $1 \cdot 10^{-3}\text{ N s/m}^2$ ) ja  $v$  on mullikese kiirus. Võite lugeda, et mullikese liikumine toimub kogu aeg kiirusega, mis on määratud tingimusega, et kõigi talle mõjuvate jõudude resultant on null. Vee tihedus  $\rho = 1000\text{ kg/m}^3$ ,

raskuskiirendus  $g = 9,8 \text{ m/s}^2$ , õhurõhk  $p_0 = 100 \text{ kPa}$ . Mitu korda muutub vahemaa naabermullikeste vahel tõusul põhjast pinnale, kui veekogu sügavus on  $H = 27 \text{ m}$ ?

### Ü29 Plokk ★★

Autor: Tundmatu autor, lahtine, 2006, G 5

Kui suure kiirendusega  $a_k$  ja mis suunas hakkab liikuma kahest kehast koosneva süsteemi masskese, kui kehad on seotud niidiga, mis on tömmatud üle ploki (vt joonist)? Kehade massid on  $m_1$  ja  $m_2$  ( $m_1 < m_2$ ), niit on kaalutu ja mitteelastne.



### Ü30 Kada ★★

Autor: Oleg Košik, lõppvoor, 2006, G 3

Vaatame lihtsa kada ehk ragulka konstruktsiooni. Elastne kummipael tömmatakse kahe fikseeritud otspunkti vahele, laskmiseks asetatakse kivi paela keskele, pael tömmatakse koos kivila pingule ja lastakse vabaks. Kivi lastakse lendu horisontaaltasandi suhtes nurga  $\alpha = 10^\circ$  all. Leidke, kui kaugele peab laskja tömbama kivi, et tabada märki, mis asub kadast  $L = 25 \text{ m}$  kaugusel ning sellega samal kõrgusel. Kui suurt jõudu peab ta selleks paelale rakendama? Kummipaela pikkus pingestamata olekus on  $l = 60 \text{ cm}$ , mis on ühtlasi ka paela kinnituspunktide vahekaugus. Pael lugeda kaalutuks ning jäikusteguriga  $k = 50 \text{ N/m}$ . Kivi mass on  $m = 20 \text{ g}$ . Õhutakistusega ei ole vaja arvestada. Raskusjõu mõju kivi kiirendamisel kadas pole vaja arvestada. Raskuskiirendus on  $g = 9,81 \text{ m/s}^2$ .

### Ü31 Hooratas ★★

Autor: Valter Kiisk, lõppvoor, 2007, G 4

Hooratas raadiusega  $R$  pöörleb nurkkiirusega  $\omega$ . Lihtsuse huvides võib hooratast vaadelda peenikese rõngana (pöörlemistelg ühtib rõnga teljega).

- a) Milline on energia salvestustihedus  $w$  (kineetiline energia massiühiku kohta) hoorattas?

**b)** Hooratas on valmistatud süsinikkiuga armeeritud polümeerist, mille tõmbetugevus  $\sigma_{\max} = 2,4 \cdot 10^9$  Pa ja tihedus  $\rho = 1500$  kg/m<sup>3</sup>. Hinnake energia salvestustiheduse maksimaalselt võimalikku väärust sellises hoorattas (andes numbrilise vastuse).

Vihje. Tõmbetugevus on maksimaalne jõud ristlõike pindala kohta, mida antud materjal talub ilma purunemata.

### Ü32 Maaler ★★★

Autor: Valter Kiisk, lahtine, 2010, G 5

Maaler on seina ülemise osa värvimiseks roninud kõrge, peaaegu vertikaalse redeli tippu. Ettevaatamatu liigutuse tulemusena hakkab redel kukkuma ümber. Kas vähemohlik oleks redelist kohe lahti lasta või pigem klammerduda redeli külge? Põrand on lai ja tühi, nii et (redeli) kukkumist ei takista miski. Redeli alumine ots ei libise. Vihje. homogeensel vardal pikkusega  $l$  ja massiga  $m$  on ümber otsa nurkkiirusega  $\omega$  pööreledes kineetiline energia  $\frac{ml^2\omega^2}{6}$ .

### Ü33 Benji-hüpe ★★★

Autor: Andreas Valdmann, piirkonnnavoor, 2010, G 6

Benji-hüppaja massiga  $m = 80$  kg kasutab köit pikkusega  $l = 35$  m, mille jäikustegur  $k = 60$  N/m. Kui kõrgele maapinnast tuleks tõsta hüppeplatvorm, et jäiks ohutusvaru  $h = 5$  m? Mis on suurim kiirus, mille hüppaja saavutab? Raskuskirrendus  $g = 9,8$  m/s<sup>2</sup>. Hüppaja mõõtmetega arvestama ei pea.

### Ü34 Vai ★★★★

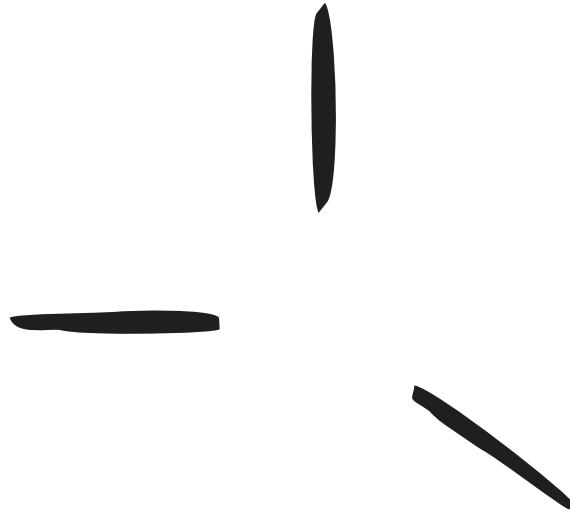
Autor: Jaak Kikas, piirkonnnavoor, 2006, G 10

Vertikaalset vaia pikkusega  $L$  ja massiga  $M$  lüükse pinnasesse nii, et tema otsa pihta lastakse kõrguselt  $H \gg L$  vaia otsast kukkuda koormisel massiga  $m$ . Lööki vaia pihta võib lugeda absoluutsest mitteelastseks, st pärast raskuse ja vaia kokkujuudet liiguval nad kui üks tervik. Pinnase takistusjõud on  $F = F_0 + kl$ , kus  $l$  on maa sees oleva vaiaosa pikkus. Kui suur on löökide arv  $N$ , mis on vajalik selles, et vai täies pikkuses maasse lüüa? Võite eeldada, et ühekordse löögi tagajärvel nihkub vai sügavamale väikese osa vörra oma pikkusest.

### Ü35 Klaaskuul ★★★★

Autor: Aigar Vaigu, piirkonnnavoor, 2008, G 6

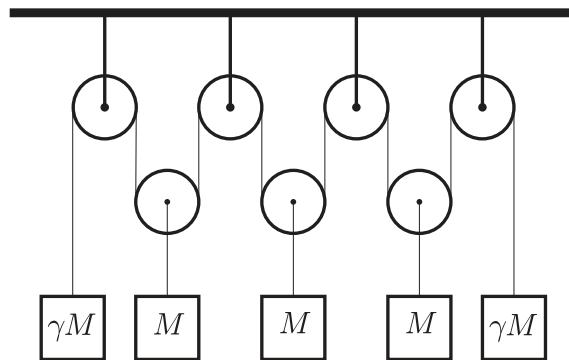
Klaaskuul kukkus vertikaalselt alla libedale horisontaalsele põrandale ning purunes kolmeks tükkiks, mis lendasid mööda põrandat laiali. Sündmus jäädvustati fotol (vt joonist). Tükkide kujutised osutusid välja venitatuks, sest säriaeg oli võrdlemisi pik. Millised olid kuuli tükkide masside suhted? Hõördejõud tükkide liikumisel lugeda tühiselt väikeseks. Fotoobjektiivi optiline peatelg oli pildistamisel vertikaalne



### Ü36 Plokid ★★★

Autor: Mihkel Kree, piirkonnavor, 2008, G 9

Polüspast ehk liitplokk koosneb seitsmest plokist (vt. joonist). Koormiste massid  $M$  ja  $\gamma M$  on näidatud joonisel. Missuguse kiirendusega hakkavad liikuma äärmed koormised? Mis tingimust peab rahuldama suurus  $\gamma$ , et äärmed koormised hakkaksid langema? Plokkide ja nööri mass jättää arvestamata ning nöör lugeda venimatuks.

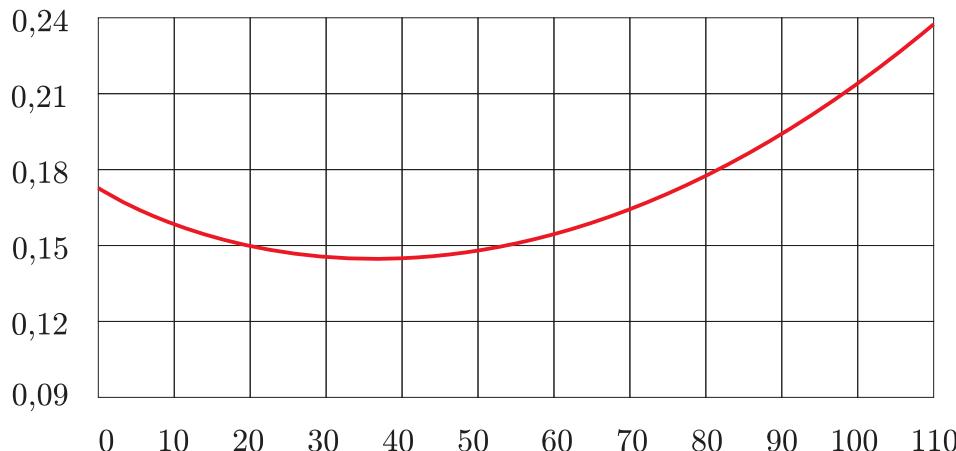


### Ü37 Rong ★★★★

Autor: Tundmatu autor, lahtine, 2006, G 10

Rong sõidab kiirusega  $v = 100 \text{ km/h}$  ja pidurdab järsult (blokeerides rattad). Graafikul on toodud rongi rataste ja rööbaste vahelise hõõrdeteguri  $\mu$  sõltuvus kiirusest ( $\text{km/h}$ ).

- a) Kui pikk on rongi täieliku peatumiseni kulunud aeg?
- b) Kui suur on pidurdusmaa pikkus? Mölemad vastused tuleb leida graafikualuste pindaladena sobilikult valitud teljestikes.



### Ü38 Värinaalarm ★★★★

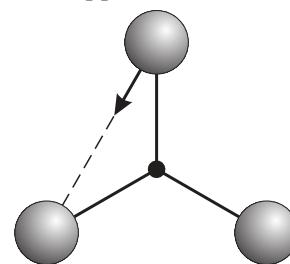
Autor: Jaan Kalda, lahtine, 2011, G 9

Uurime mobiiltelefoni liikumist nõrgalt kaldus pinnal värinaalarmi töötamise ajal lihtsustatud mudeli abil. Kujutagu lauale asetatud mobiil risttahukat massiga  $M$ , mille sees liigub üles-allä väike keha massiga  $m$ . Liikugu see keha ajahetkedel  $t = 0, 2\tau, 4\tau, \dots$  vahemaa  $x$  võrra hetkeliselt üles ning ajahetkedel  $t = \tau, 3\tau, 5\tau, \dots$  algasendisse tagasi. Olgu mobiiltelefoni ja laua vaheline hõõrdetegur  $\mu$  ning laua kaldenurk  $\alpha \ll 1$ . Mobiiltelefoni ja laua vahelised põrked lugege absoluutsest plastseiks. Millise keskmise kiirusega  $u$  hakkab mobiiltelefon mööda lauda liikuma?

### Ü39 Kuulid ★★★★

Autor: Jaan Kalda, lõppvoor, 2006, G 10

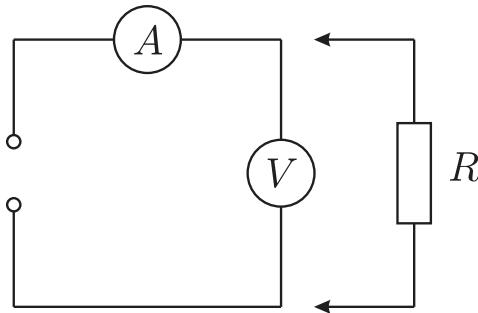
Joonisel kujutatud süsteem koosneb kolmest võrdkülgse kolmnurga tippudes paiknevast kuulist massiga  $m$  ja kolmest kergest vardast pikkusega  $l$ , mis on omavahel šarniiriselt ühendatud (liigendiga). Süsteem lebab hõõrdevabalt siledal horisontaalpinnal. Ühte kuuli lükkatakse teatud lühiajalise jõuga nii, et see omandab kiiruse  $v_0$ , mis on suunatud naaberkuuli poole. Leidke teiste kuulide kiiruste suunad ja moodulid ning kõigi kuulide kiirendused vahetult peale esimese kuuli lükkamist.



## Elektriahelad

### Ü40 Mõõteriistad ★

Vooluringis on ampermeeter ja voltmeeter ühendatud jadamisi. Klemmidel on rakendatud pingi  $U = 9\text{ V}$ . Kui voltmeetriga ühendada rööbiti takisti  $R$ , väheneb voltmeetri näit kaks korda, ampermeetri näit aga suureneb kaks korda. Kui suurt pinget näitas voltmeeter enne ja pärast takisti ühendamist?

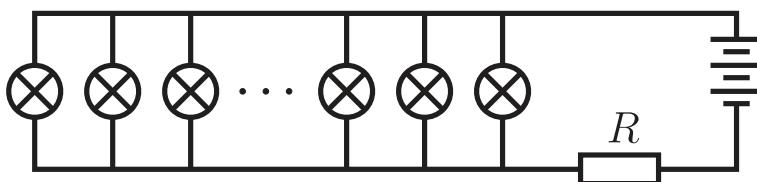


### Ü41 Elektriküünlad ★

Autor: Valter Kiisk, piirkonnavoor, 2009, G 4

Jõulukaunistuse valmistamiseks otsis Juku välja 10 taskulambipirni (nimipingi  $3\text{ V}$ , võimsus  $0,6\text{ W}$ ) ja alaldi klemmipingega  $5\text{ V}$ . Seejärel koostas ta skeemi, mis on kujutatud joonisel.

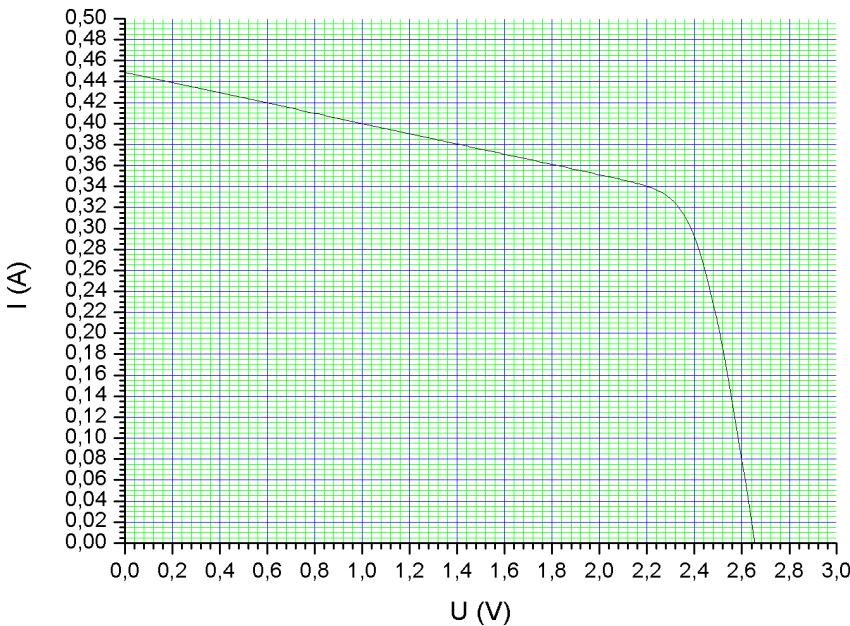
- a) Kui suur peab olema takisti  $R$  takistus, et pingi lampidel ei ületaks nimipinget?
- b) Skeemi sisselülitamisel avastas Juku, et lambid põlevad oodatust tuhmimalt. Selgus, et alaldi klemmipingi oli koormusega langenud  $4\text{ V}$ -ni ning pingi lampidel  $2,3\text{ V}$ -ni. Kui suur tuleks valida takisti  $R$  väärthus, et lambid põleksid normaalse heledusega?



### Ü42 Päikesepaneel ★

Autor: Mihkel Pajusalu, lõppvoor, 2010, G 3

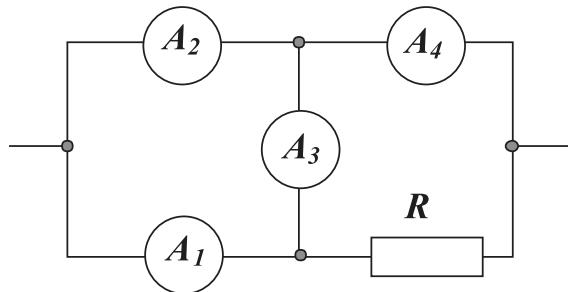
Joonisel on kujutatud päikesepaneeli läbiva voolu sõltuvus klemmipingest. Määra paneeli klemmidega ühendatud koormise takistus, mille korral on koormisel eralduv võimsus maksimaalne.



### Ü43 Ampermeetrid ★★

Autor: Tundmatu autor, lahtine, 2008, G 4

Vooluahelasse on ühendatud neli ühesugust ampermeetrit, igaüks sisetakistusega  $r$ , ja takisti  $R$ . Esimene kahe ampermeetri näidud on  $I_1 = 3 \text{ A}$  ja  $I_2 = 5 \text{ A}$ . Leida takistuste suhte  $R/r$  arvuline väärus.



### Ü44 Patarei ★★

Autor: Taavi Pungas, piirkonnavoor, 2011, G 6

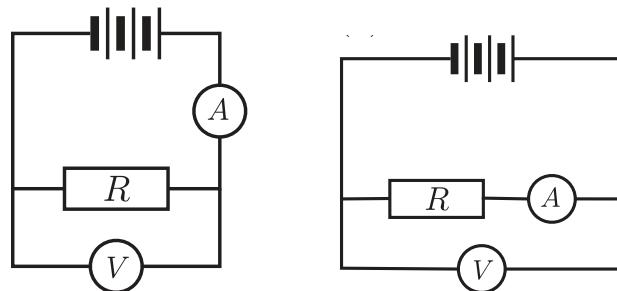
Patarei ühendatakse jadamisi takistiga takistusega  $R$  ja ampermeetriga, mis näitab voolutugevuseks  $I_1$ . Kui lisada jadamisi veel üks takisti takistusega  $R$ , näitab ampermeeter voolutugevuseks  $I_2$ . Leidke, mis vahemikku jäääks suhe  $I_2/I_1$ , kui vooluallika sisetakistus  $r$  oleks

- a) väiksem kui  $R$ ,
- b) suurem kui  $R$ .

**Ü45 Vooluring** ★★

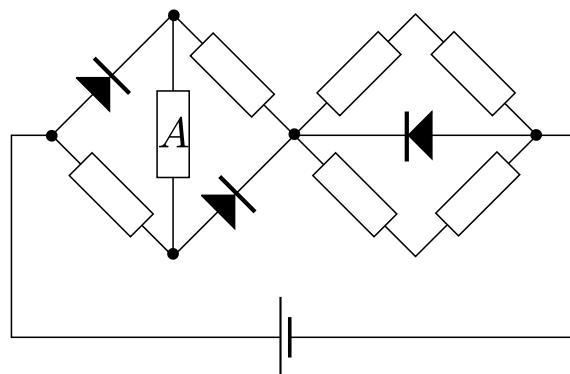
Autor: Valter Kiisk, piirkonnavoor, 2005, G 4

Takisti takistuse määramiseks koostati kaks erinevat vooluringi kasutades voltmeetrit, ampermeetrit ja vooluallikat (vt joonist). Leidke avaldis takistuse  $R$  arvutamiseks, kui vasakpoolse skeemi järgi mõõtes saadi voltmeetri näiduks  $U_1$  ja ampermeetri näiduks  $I_1$  ning parempoolse skeemi järgi mõõtes aga vastavalt  $U_2$  ja  $I_2$ . Vooluallika elektromotoorjõud on muutumatu ning sisetakistus tühine. Mõõteriistade sisetakistused ei ole teada.

**Ü46 Takistid** ★★

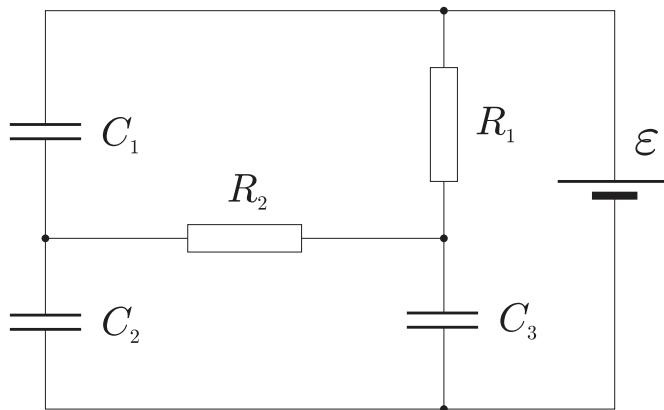
Autor: Aigar Vaigu, lõppvoor, 2005, G 4

Mitu korda muutub joonisel kujutatud ahelas takistil  $A$  eralduv võimsus, kui vahteda alalispingeallika polaarsus? Kõik takistid on võrdse takistusega.



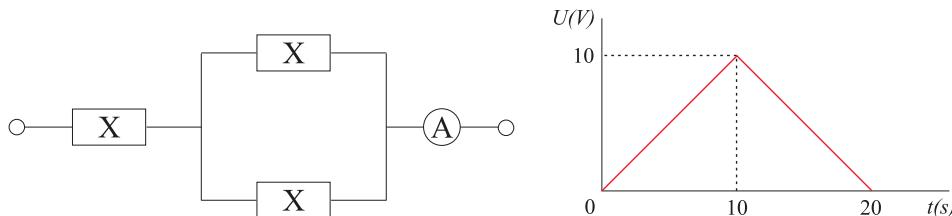
**Ü47 Elektriskeem ★★**

Autor: Tundmatu autor, lahtine, 2006, G 2

Leida laengud  $q_1$ ,  $q_2$  ja  $q_3$  kõikidel skeemil toodud kondensaatoritel.**Ü48 Skeem ★★**

Autor: Tundmatu autor, lahtine, 2009, G 3

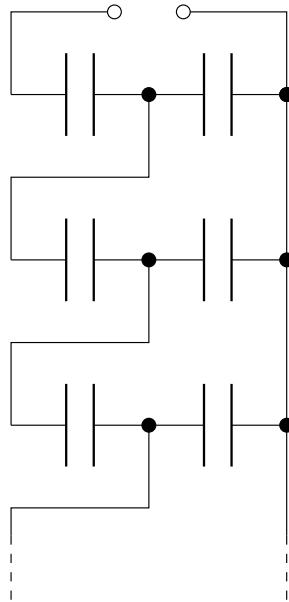
Elemendi  $X$  takistus muutub sõltuvalt selle pingest. Kui  $U_X \leq 1$  V, siis selle takistus on  $R_1 = 1 \Omega$ , kui aga  $U_X > 1$  V, siis on takistus  $R_2 = 2 \Omega$ . Kolm elementi  $X$  ühendatakse ideaalse ampermeetriga, nagu näidatud joonisel. Väljundklemmide rakendatakse pinge, mille ajaline sõltuvus on toodud graafikul. Joonestage ampermeetri näidu ajalise sõltuvuse graafik.

**Ü49 Takisti ★★★**

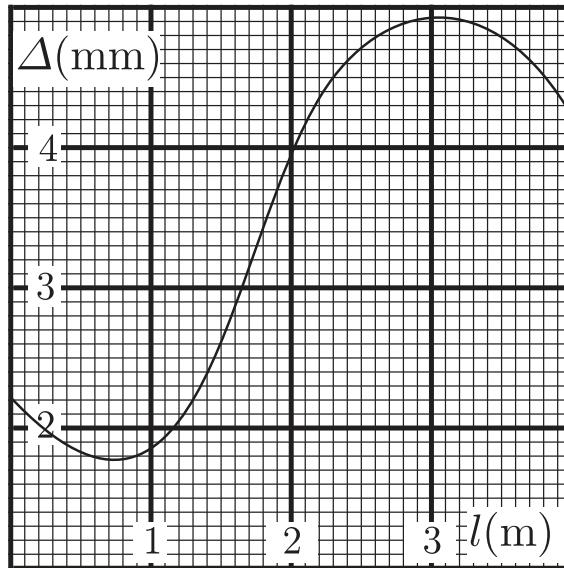
Autor: Jaan Kalda, piirkonnavor, 2007, G 7

Oletagem, et me tahame teha takisti takistusega  $R = 1 \Omega$ , mille takistuse temperatuurisõltuvus oleks toatemperatuuri ümbruses võimalikult väike. Olgu meil kasutada raudtraat ristlõikepindalaga  $s = 0,030 \text{ mm}^2$  ja grafiitpulk ristlõikepindalaga  $S = 3,0 \text{ mm}^2$ . Kuidas valmistada soovitud takistit ja kui pikki grafiitpulga ning terastraadi juppe tuleb seejuures kasutada? Grafiidi ja raua eritakistused on vastavalt  $\rho_g = 3,0 \cdot 10^5 \Omega \text{ m}$  ning  $\rho_r = 9,7 \cdot 10^{-8} \Omega \text{ m}$ ; takistuse temperatuurikoeffiциendid (suhtelised muutused  $\Delta R/R$  temperatuuri kasvamisel ühe kraadi võrra) on  $\alpha_g = -5,0 \cdot 10^{-3} \text{ K}^{-1}$  ning  $\alpha_r = 6,41 \cdot 10^{-3} \text{ K}^{-1}$

**Ü50 Kondensaatorireidel** ★★ Autor: Siim Ainsaar, piirkonnnavoor, 2007, G 8  
 Ühesugustest kondensaatoritest mahtuvusega  $C$  on koostatud joonisel näidatud lõpmatu ahel. Leidke ahela kogumahtuvus  $C_k$ .



**Ü51 Traat** ★★ Autor: Jaan Kalda, lõppvoor, 2008, G 7  
 Ühtlase ristlõikega traati (ristlõike pindala  $S = 1 \text{ mm}^2$ ) venitati nii, et tema erinevad lõigud venisid erinevalt. Enne venitamist oli traadile märgitud jooned iga millimeetri tagant. Joonisel on toodud nende joonte vahekaugused  $\Delta$  pärast venitamist sõltuvuses kaugusest traadi ühest otsast  $l$  ( $l$  on mõõdetud pärast venitamist). Leidke selle nüüdseks 4 meetri pikkuse traadi takistus, arvestades, et traadi materjali tihedus ja eritakistus  $\rho = 1 \cdot 10^{-6} \Omega \text{ m}$  venitamise tagajärjel ei muutunud.



### Ü52 Kondensaator ★★

Autor: Aigar Vaigu, piirkonnavor, 2010, G 7

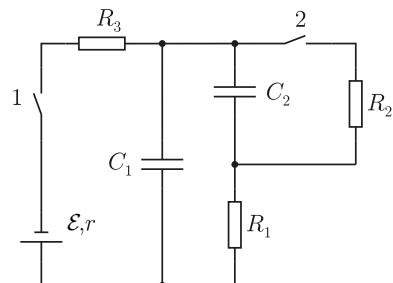
Muudetava mahtuvusega kondensaator on ühendatud patareiga, mille klemmid pingi on  $U$ . Kondensaatori mahtuvust muudetakse laadimisel nii, et kondensaatori laadimise vool  $I$  on konstantne. Leidke patarei võimsus ja kondensaatori laadimisel energia salvestamise kiirus. Põhjendage võimalikku erinevust.

### Ü53 Kondensaatorid ★★

Autor: Mihkel Rähn, piirkonnavor, 2006, G 7

Joonisel toodud elektriskeemil on vooluallikas elektromotoorjõuga  $\mathcal{E}$  ja sisetakistusega  $r$ , kolm takistit takistustega  $R_1 = R_2 = R_3 = R$  ning kondensaatorid mahtuvustega  $C_1$  ja  $C_2$ . Arvutage, kui suured on elektrilaengud kondensaatoritel pärast pika aja möödumist, kui:

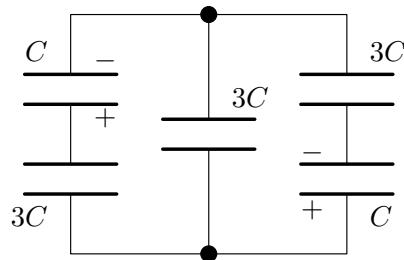
- a) lülit 1 on suljetud, lülit 2 on avatud;
- b) mölemad lülitid on suljetud;
- c) eelmisest seisust avatakse mölemad lülitid üheaegselt.



**Ü54 Kondensaatorid ★★**

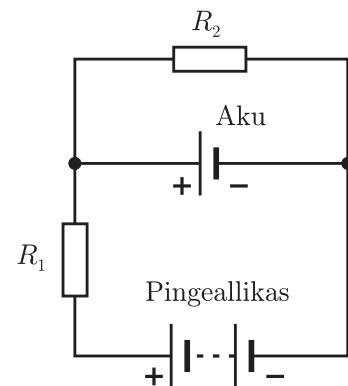
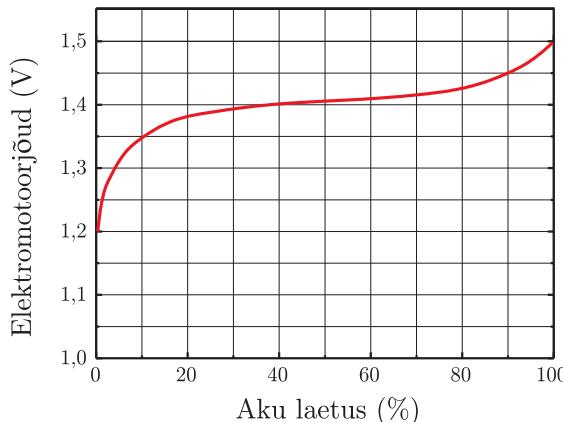
Autor: Mihkel Kree, lõppvoor, 2009, G 3

Koosnegu kondensaatorite süsteem viiest kondensaatorist. Alghetkel on kolm neist laenguta ning kahel paikneb laeng  $q$  (vt joonist). Missugune laeng koguneb keskmisele kondensaatorile, kui süsteem on jõudnud tasakaaluolekusse?

**Ü55 Aku laadimine ★★★**

Autor: Valter Kiisk, piirkonnavoor, 2008, G 8

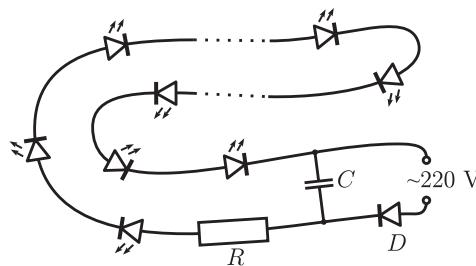
Teatava akumulaatori elektromotoorjõud kasvab laadimise käigus nõnda, nagu kujutatud joonisel. Samas on toodud ka elektriskeem, mida Juku kavatseb kasutada sellise akumulaatori laadimiseks. Pingearallika klemmidel on pingे 6 V. Nii pingearallika kui ka aku sisetakistust võib lugeda tühiseks. Kuidas peaks Juku valima takistite  $R_1$  ja  $R_2$  väärtused, kui ta taotleb, et maksimaalne laadimisvool ei ületaks 100 mA ja laadimisvool muutuks nulliks, kui akumulaator on täielikult laetud?



**Ü56 Jõulukaunistus ★★★★**

Autor: Valter Kiisk, lõppvoor, 2010, G 8

Jõulukaunistuse hankimiseks majandussurutise tingimustes otsustas Juku ühendada jadamisi kokku 50 valgusdioodi ja toita seda ahelat läbi alaldusdioodi  $D$  otse võrgupingega (vt joonist). Voolu piiramiseks on ahelasse lülitatud takisti ning voolu pulsatsiooni väljasilumiseks kondensaator. Pinge alaldusdioodil on tühi-ne, igal valgusdioodil aga  $U_d = 3\text{ V}$ . Kui suure takistusega  $R$  ja maksimumvõimsusega  $N$  tuleks valida takisti, kui valgusdioodid taluvad voolu kuni  $I = 20\text{ mA}$ ? Kui suure mahtruvusega  $C$  kondensaator kindlustab, et voolutugevuse pulsatsioon jäääb  $\alpha = 5\%$  piiresse? Võrgupinge sagedus on  $f = 50\text{ Hz}$  ning amplituudväärustus  $U_0 = 311\text{ V}$ .

**Ü57 Närvirakk ★★★★★**

Autor: Andres Laan, lõppvoor, 2011, G 9

Närviraku membraani võib vaadelda kui õhukest kilet mahtuvusega  $C$ , mida läbivad ioonkanalid, mis võimaldavad laengutel liikuda läbi membraani. Närviraku elektrilise tasakaalu seisukohast on olulisteks ioonideks naatrium ja kaalium. Kui naatriumioon (laenguga  $+e$ ) läbib ioonkanali (sisenedes närvirakku), siis sooritavad keemilised jõud töö  $e\mathcal{E}_{\text{Na}}$ , st võib öelda, et naatriumioonidele mõjub ioonkanalis elektromotoorjõud  $\mathcal{E}_{\text{Na}}$ . Kaaliumioonide puhul on kanali läbimise protsess täpselt samasugune, kuid efektiivne elektromotoorjõud on sel puhul  $\mathcal{E}_K (\neq \mathcal{E}_{\text{Na}})$ . Peale keemiliste jõudude töö toimivad laengu liikumisel ioonkanalis ka hõõrdejõud, mida saab kirjeldada elektrilise takistuse abil: naatriumioonide jaoks on membraani elektriline takistus  $R_{\text{Na}}$  ja kaaliumioonide jaoks  $R_K$ . Millise laengu omandab närviraku membraani elektrilise tasakaalu saabudes?

## Elektrostaatika

### Ü58 Juhe ★★

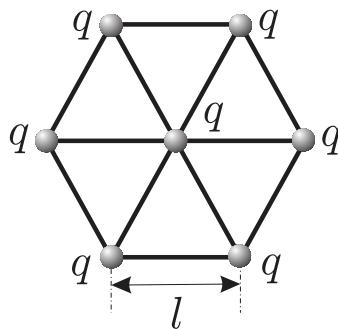
Autor: Tundmatu autor, lahtine, 2005, G 5

Sirgjooneline juhe asub sügaval maa all ühtlases pinnases. Lekkevool ühikulise pikkusega juhtmest on  $i$ . Leidke lekkevoolu tihedus ( $\text{A/m}^2$ ) kaugusel  $r$  juhtmest. Juhtme pikkus on palju suurem kui  $r$ . Lekkevool on konstantne piki juhet. *Märkus.* Lekkevooluks nimetatakse voolu, mis levib isolatorites.

### Ü59 Kuulikesed ★★

Autor: Tundmatu autor, lahtine, 2005, G 4

Seitse ühesugust laetud kuulikest laenguga  $q$  on seotud omavahel samast materjalist võrdse algpikkusega elastsete niitidega ja saavad liikuda vaid ühes fikseeritud tasapinnas (vt joonist). Vahemaa kahe suvalise naaberkuulikese vahel tasakaalu olekus on  $l$ . Leidke tõmbepinged niitides.



### Ü60 Tolmukübe ★★

Autor: Aigar Vaigu, piirkonnavor, 2006, G 8

Tolmukübe massiga  $m = 1 \cdot 10^{-9}$  g on kondensaatori horisontaalsete plaatide vahel tasakaalus. Laengu pindtihedus kondensaatori plaatidel  $\sigma = 2,6 \cdot 10^{-5} \text{ C/m}^2$ . Kui suur on tolmukübeme elektrilaeng? Millise kiirendusega hakkaks tolmukübe langema, kui kondensaatori polaarsus muuta vastupidiseks? Eeldada, et elektriväli kondensaatori plaatide vahel on homogeenne. Õhutakistust mitte arvestada. Elektriline konstant  $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ F/m}$ , õhu dielektriline läbitavus  $\epsilon \approx 1$ .

### Ü61 Kuulikesed ★★

Autor: Tundmatu autor, lahtine, 2007, G 7

Kaks ühesugust kuulikest, millest kumbki kannab laengut  $q$ , asuvad vertikaalsis his kaugusel  $H$  üksteisest. Alumine kuulike on jäigalt kinnitatud, ülemine aga hakkab liikuma vertikaalselt alla suunatud algkiirusega  $v$ . Kui suur on minimaalne kaugus  $h$  alumise kuulikeseni, millele suudab läheneda ülemine kuulike? Ülemise kuulikese mass on  $m$ . Raskuskiirendus on  $g$ .

**Ü62 Laetud röngas ★★**

Autor: Tundmatu autor, lahtine, 2009, G 4

Peenikesest traadist röngas raadiusega  $R$  on ühtlaselt laetud negatiivse laenguga  $Q$ . Elektron massiga  $m$  ja laenguga  $e$  läheneb röngale mööda sirget, mis on risti rönga tasandiga ning läbib rönga keskpunkti. Millist tingimust peab rahuldama elektroni kiirus punktis, mis asub kaugusel  $d = R\sqrt{3}$  rönga keskpunktist, et elektron saaks röngast läbi lennata?

**Ü63 Ioonmootor ★★**

Autor: Mihkel Pajusalu, lahtine, 2010, G 6

Kosmosesond on varustatud lihtsa ionomoottoriga, mis koosneb ksenooni ionide  $\text{Xe}^+$  allikast ja kahest elektroodist, mille vahele rakendatakse pingे  $U$  ja mille vahel maad läbides ioone kiirendatakse. Kui suurt kogust (mass) ksenooni on vaja, et selle mootoriga sondi kiirust tõsta  $\Delta v = 1 \text{ km/s}$  võrra? Ksenooni aatommass  $\mu = 131,29 \text{ g/mol}$ , kosmosesondi mass  $M = 1000 \text{ kg}$ , kiirendav pingе  $U = 100 \text{ kV}$ , elementaarlaeng  $e = 1,60 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ , Avogadro arv  $N_A = 6,02 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$ .

**Ü64 Lendav elektronkahur ★★★**

Autor: Siim Ainsaar, lõppvoor, 2006, G 6

Jaan Tatikal tuli järjekordne lennumasinaidee, mida ta kohe realiseerima töttas. Ta nimelt ehitas palkidest platvormi, mille alla kinnitas telerist välja lõhutud elektronkahuri koos vajaliku elektronika ja akuga. Elektrone kiirendav pingе on  $U$ , voolutugevus elektronkiires  $I$ . Leidke, kui suurt töstejöudu  $F$  suudab see seade tekitada. Missugust tingimust peaksid  $U$  ja  $I$  rahuldama, et taoline lennumasin suudaks leiduri öhku tõsta? Kas see on ka realistiklik (televiisorites  $U \approx 30 \text{ kV}$ ,  $I \approx 100 \mu\text{A}$ )? Relativistlike efekte pole vaja arvestada; elektroni algkiirus katoodi juures on 0. Eeldage, et kiir üldse moodustub (öhu olemasoluga ärge arvestage). Tatika mass koos platvormi ja seadmega on  $m_T \approx 150 \text{ kg}$ , raskuskiirendus  $g \approx 9,8 \text{ m/s}^2$ . Elektroni laeng ja massi suhe  $k = e/m_e \approx 1,76 \cdot 10^{11} \text{ C/kg}$ .

**Ü65 Elektronkiir ★★★**

Autor: Tundmatu autor, lahtine, 2008, G 7

Kitsas elektronkiir läbib vaakumis tasaparalleelse plaatide vahelise pilu ja langeb seejärel fluoresceeruvale ekraanile, mis asub plaatide ekraanipoolsemast servast kaugusel  $l = 15 \text{ cm}$ . Kui plaatidele antakse pingе  $U = 50 \text{ V}$ , nihkub helendav punkt ekraanil endisest asukohast kaugusele  $s = 21 \text{ mm}$ . Plaatidevaheline kagus  $d = 18 \text{ mm}$ , plaatide mõõtmed elektronide liikumise suunas on  $b = 6 \text{ cm}$ . Milline on elektronide algkiirus plaatide vahelle sattumisel? Elektroni laeng ja massi suhe  $e/m \approx 1,76 \cdot 10^{11} \text{ C/kg}$ .

**Ü66 Kuup ★★★**

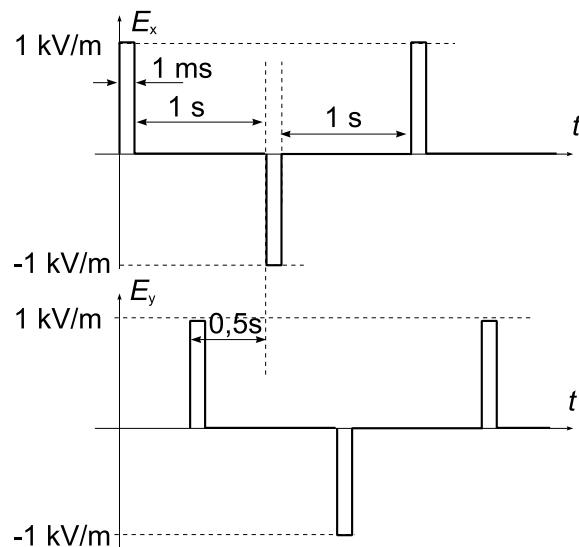
Autor: Jaan Kalda, piirkonnnavoor, 2008, G 7

Õhukesest elektrit mittejuhtivast materjalist on valmistatud kuup küljepikkusega  $a$ . Kuubil on elektrilaeng ühtlase pindtihedusega  $\sigma$  (pindtihedus on laeng pinna-ühiku kohta). Ühe tahu keskkohata lõigatakse väike ruudukujuline auk mõõtmeega  $b \times b$  ( $b \ll a$ ). Leida elektrivälja tugevus kuubi keskpunktis.

### Ü67 Liikuv laeng ★★

Autor: Jaan Kalda, piirkonnavoor, 2009, G 6

Laetud osake laengu ja massi suhtega  $q/m = 1 \text{ C/kg}$  seisab algsest paigal. Seejärel hakkab ta liikuma  $x$ - ja  $y$ -telje sihis toimivate elektrivälja impulsside mõjul. Elektrivälja vastavate komponentide  $E_x$  ja  $E_y$  sõltuvus ajast on toodud graafikul (graafiku mastaap ei ole korrektne, juhenduda tuleb graafikul näidatud numbritest impulsi kestvuse  $\tau = 1 \text{ ms}$  ja amplituudi  $E_0 = 1 \text{ kV/m}$  ning perioodi  $T = 2 \text{ s}$  jaoks). Visandage osakese trajektoor ja leidke keskmise kiirus (visandi tegemisel ja arvutustes võib lugeda ajavahemiku  $\tau = 1 \text{ ms}$  jooksul toimuvad muutused hetkelisteks).



### Ü68 Sfäärid ★★

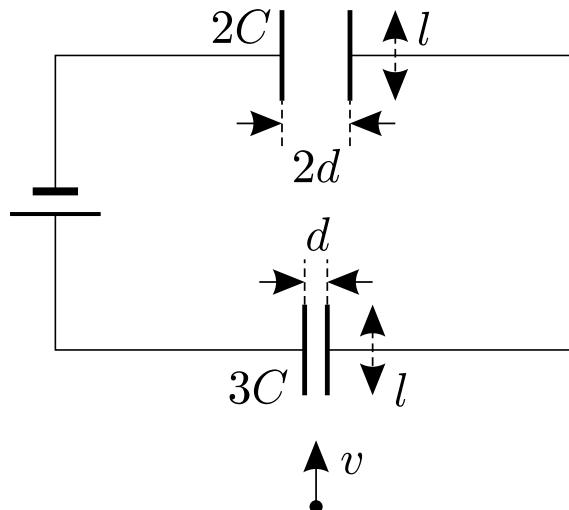
Autor: Kristian Kuppart, lahtine, 2011, G 8

Kaks juhtivast materjalist sfääri raadiustega  $R_1$  ja  $R_2$  on ühendatud pika juhtme-ga. Ühele sfääridest antakse mingi laeng. Leidke suhe  $\frac{E_1}{E_2}$ , kus  $E_1$  ja  $E_2$  on elektrivälja tugevused vastavate sfääride pinnal. Eeldage, et juhtme mahtuvus on tühine ning juhtme pikkus on oluliselt suurem sfääride raadiustest.

**Ü69 Kondensaatorid ★★★★**

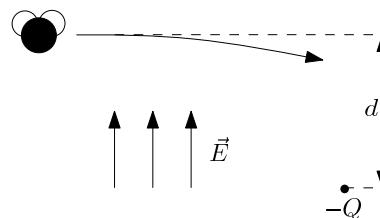
Autor: Oleg Košik, lõppvoor, 2005, G 8

Kondensaatorid mahtuvustega  $2C$  ja  $3C$  on ühendatud pingearallikaga, mille pinge on  $U$ . Osake massiga  $m$  ning laenguga  $q$  lendab alkiirusega  $v$ , mis on suunatud paralleelselt kondensaatorite plaatidega (vt joonist). Osake lendab mõlema kondensaatori plaatide vahelt läbi. Mõlema kondensaatori plaatide pikkus on  $l$  ning plaatide vahelised kaugused on vastavalt  $2d$  ja  $d$ . Leidke nurk, mille võrra kaldub osake vörreldes esialgse trajektooriga, kui ta väljub joonisel ülemisest kondensaatorist. Eeldada, et see nurk on väike.

**Ü70 Kärbes ★★★★**

Autor: Stanislav Zavjalov, lahtine, 2010, G 7

Kärbes on otsustanud lennates püsida ainult ekvipotentsiaalse pindade peal. Ta lendab sisse ruumi, mis on täidetud homogeensel elektriväljaga  $\vec{E}$ , välja jõujoontega risti. Elektriväljas hoitakse paigal ka laengut  $-Q$  nii, et kärbse trajektoori esialgse puutuja ja laengu vahemaa on  $d$  (vt. joonist;  $-Q < 0$ ). Kui lähedale kärbes laengule jõuab? Eeldage, et  $Q \leq \pi\epsilon_0 Ed^2$ .



**Ü71 Laetud kLOTSID ★★★**

Autor: Tundmatu autor, lahtine, 2006, G 9

Horisontaalsel siledal dielektrilisel pinnal asuvad kaks laetud klotsi massidega  $m$  ja samanimeliste laengutega  $q$ . Alghetkel on vahemaa nende vahel  $l$ . Mis tingimusel hakkavad klotsid liikuma ja kui suur on vahemaa  $L$  nende vahel, kui liikumine lõppeb? Hõõrdetegur klotside ja pinna vahel on  $\mu$ . Klotside mõõtmeid ja liikuvate laengute elektromagnetkiirgust mitte arvestada. Pinna dielektriline läbitavus on 1.

**Ü72 Kosmoseprügi ★★★**

Autor: Siim Ainsaar, lõppvoor, 2009, G 9

Kaks ühesugust elektriliselt laetud kuuli, mis on ühendatud ideaalse näöriga, hõljuvad vabalt kosmoses. Kummagi kera laeng on  $q$  ja mass  $M$ , näöri pikkus on  $l$ . Ootamatult lendab näöriga risti selle keskkoha pihta kosmoseprügi tükki massiga  $m$  ja kiirusega  $v$  ning jäab näöri külge kinni. Millisele vähimale kaugusele  $d$  lähenevad teineteisele kuulid? Eeldada, et kuulikeste diameetrid on väiksemad kui otsitav kaugus  $d$ .

## Gaasid

### Ü73 Jalgpall ★

Autor: Tundmatu autor, lahtine, 2006, G 1

Kui suure rõhuni  $p_N$  võib pumbata jalgpalli palli kolbpumbaga  $N = 40$  pumpamise käigus? Iga pumpamiskäigu jooksul võtab pump atmosfäärist õhu koguse ruumalaga  $v = 150 \text{ cm}^3$ . Atmosfääri rõhk  $p_0 = 0,1 \text{ MPa}$ , palli ruumala  $V = 31$ . Lugeda, et õhu temperatuur pallis võrdub välistemperatuuriga.

### Ü74 Allveelaev ★

Autor: Tundmatu autor, lahtine, 2007, G 3

Uppunud allveelaevadest on inimesed mõnikord pääsenud avades esialgu alumiined ventiilid (mida mööda vesi sisse tungib), seejärel ülemise luugi ning siis ise koos õhumulliga veepinnale töustes. Kui suur osa  $k$  laeva ruumalast polnud täidetud veega peale ventiilide avamist, kui laev asus sugavusel  $h = 42 \text{ m}$ ? Merevee tihedus  $\rho = 1,03 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$ . Õhu rõhk laevas alghetkel  $p_0 = 0,1 \text{ MPa}$ . Võite lugeda, et vee sisse laskmise käigus õhu temperatuur laevas ei muutu (tänu soojusvahetusele ümbritseva veega).

### Ü75 Tuukrid ★

Autor: Ott Krikmann, piirkonnavor, 2007, G 4

Tuukrid (akvalangistid) kasutavad sageli oma varustuse ja keha keskmise tiheuse ühtlustamiseks vee tihedusega (vees hõljumise saavutamiseks) õhuga täidetavat hermeetilist vesti, kuhu õhku pumbatakse hingamisparaadist (akvalangist). Oletame, et tuuker saavutas hõljumise veepinna lähdal, pumbates teatud ruumala õhku oma vesti. Seejärel sukeldus ta  $h = 25 \text{ m}$  sügavusele. Mitu korda pidi tuuker sellel sügavusel oma vesti ruumala suurendama, et saavutada hõljumise selles sügavuses? Õhurõhk on  $p_0 = 105 \text{ kPa}$ .

### Ü76 Toaõhk ★

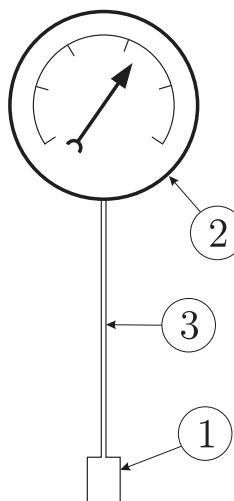
Autor: Mihkel Rähn, lõppvoor, 2008, G 3

Leida seos toaõhu molekulide summaarse kulgliikumise kineetilise energia ja toatemperatuuri vahel. Õhu rõhk on  $p$  ja toa ruumala  $V$ .

### Ü77 Gaasitermomeeter ★★

Autor: Valter Kiisk, piirkonnavor, 2006, G 5

Gaasitermomeeter koosneb mõõteampullist 1 ja manomeetrist 2, mis on omavalhel ühenduses peenikese kapillaari 3 kaudu (vt joonist). Manomeetri ja mõõteampulli ruumalade suhe on  $\alpha = 30$ . Kapillaari ruumala võib lugeda tühiselt väikeks. Seade täidetakse toatemperatuuril oleva gaasiga rõhuni  $p_0 = 1 \text{ atm}$ . Gaasi võib lugeda ideaalseks. Manomeetrit hoitakse toatemperatuuril  $T_0 = 293 \text{ K}$ , mõõteampull asetatakse keskkonda, mille temperatuuri on tarvis määrrata. Leidke keskkonna temperatuur, kui manomeetri näit on  $p = 0,7 \text{ atm}$ .



### Ü78 Tuulik ★★

Autor: Valter Kiisk, piirkonnnavoor, 2007, G 5

Teatud tuuleturbini (tiiviku diameeter  $d = 50\text{ m}$ ) töötab maksimaalse efektiivsusega tuule kiirusel  $v = 9\text{ m/s}$ . Sel juhul õnnestub  $\eta = 40\%$  tiiviku poolt haaratava õhuvoolu kineetilisest energiast muundada elektriks (kineetilise energia arvutamisel ei arvestata õhu pidurdumist tiivikul). Leidke nendel tingimustel tuuliku elektriline võimsus. Õhu tihedus on  $\rho = 1,3\text{ kg/m}^3$ .

### Ü79 Rong tunnelis ★★

Autor: Eero Uustalu, lõppvoor, 2009, G 4

Rong liikus kiirusega  $v = 54\text{ km/h}$  läbi pika horisontaalse silindrikujulise tunneli. Kui palju tõusis tunnelis asuva õhu temperatuur? Tunneli läbimõõt oli  $d = 5\text{ m}$ . Rongi elektrimootori tarbis tunnelit läbides võimsust  $P = 800\text{ kW}$ . Õhu molaarmass on  $M = 29\text{ g/mol}$ , õhurõhk tunnelis  $p = 100\text{ kPa}$  ja algtemperatuur  $t_0 = 17^\circ\text{C}$ . Õhk lugeda kaheaatomiliseks ideaalseks gaasiks. Eeldada, et rongi liikumisest tekkinud õhuvoolude liikumisest tulenev alarõhk on atmosfäärirõhuga võrreldes tühine

*Märkus.* Kaheaatomilise gaasi siseenergia ühe molekuli kohta on  $5/3$  korda suurem kui samal temperatuuril oleval üheaatomilisel gaasil.

### Ü80 Heelium ★★

Autor: Tundmatu autor, lahtine, 2008, G 6

Kolme mooli heliumi soojendamisel muutus gaasi rõhk võrdeliselt gaasi ruumalaga. Mitme kraadi võrra tõusis heliumi temperatuur, kui gaasile anti soojushulk  $Q = 300\text{ J}$ ?

**Ü81 Õhk ★★**

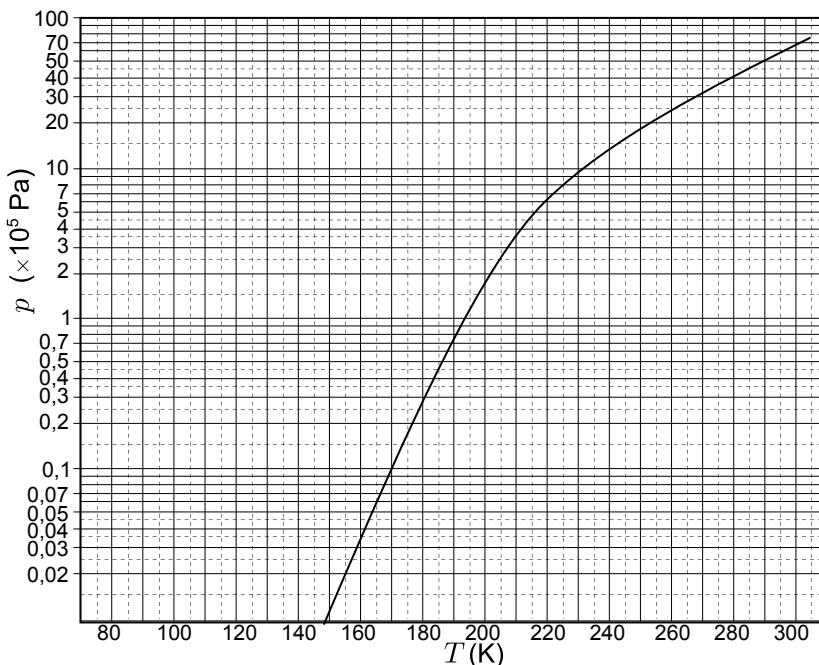
Autor: Tundmatu autor, lahtine, 2009, G 7

Kaks anumat ruumalade suhtega  $\alpha = V_1/V_2 = 2$  on ühendatud lühikese toruga, mille keskel asub ventiil. Ventiil laseb gaasi läbi juhul kui rõhkude vahe on suurem kui  $\Delta p = 1,1p_0$ , kus  $p_0$  on atmosfäärirõhk. Temperatuuril  $t_1 = 27^\circ\text{C}$  on suuremas anumas õhk normaalrõhul, väiksemas anumas on vaakum. Milliseks kujuub rõhk väiksemas anumas, kui mõlemad anumad soojendada temperatuurini  $t_2 = 127^\circ\text{C}$ ?

**Ü82 Õhuhoki ★★**

Autor: Mihkel Heidelberg, lõppvoor, 2010, G 6

Heast soojusjuhist plaadile asetatakse kuivast jääst (st tahkest süsihaptegaasist) kerge seib raadiusega  $r = 1\text{ cm}$ ; seibi surutakse pealt jõuga  $F = 10\text{ N}$ . Millise minimaalse aluse temperatuuri juures hõljub seib sublimeeruva süsihaptegaasi tekitatud gaasipadjal? Aluse temperatuur lugege ühtlaseks ja samaks temaga vaetus kontaktis oleva ainekihiga. Õhurõhk  $p_0 = 100\text{ kPa}$  ja kuiva jää aururõhu sõltuvus temperatuurist on kujutatud graafikul.

**Ü83 Õhk ★★★**

Autor: Tundmatu autor, lahtine, 2006, G 8

Leida niiske (suhteline niiskus  $f = 90\%$ ) ja kuiva õhu tiheduste suhe rõhu  $p_0 = 0,1\text{ MPa}$  ja temperatuuri  $t = 27^\circ\text{C}$  juures. Küllastunud auru tihedus sellel temperatuuril on  $\rho_0 = 0,027\text{ kg/m}^3$ . Õhu molaarmass  $\mu_1 = 0,029\text{ kg/mol}$ , vee molaarmass  $\mu_2 = 0,018\text{ kg/mol}$ .

### Ü84 Gaasid ★★★

Autor: Oleg Košik, lõppvoor, 2007, G 6

Isoleeritud silindrilises anumas vabalt liikuva koormise all on vesinik ja heelium, mis on teineteisest eraldatud vabalt liikuva ja aeglaselt soojust juhtiva õhukese vaheseinaga (vt. joonist). Alguses on gaaside temperatuurid võrdsed, kusjuures vesinik hõlmab heeliumist 3 korda väiksema ruumala. Vesinikule anti teatud soojushulk, mille tulemusena nihkus koormis  $d_1 = 5,5 \text{ cm}$  võrra ülespoole. Pika aja möödudes tähdeldati, et koormis nihkus veel. Mis suunas ja kui palju see nihkus? Gaasid lugeda ideaalseteks. Vesiniku soojasmahtuvus konstantsel rõhul on  $C_{\text{PH}_2} = 7R/2$  ning heeliumil  $C_{\text{PHe}} = 5R/2$ .



### Ü85 Korsten ★★★★

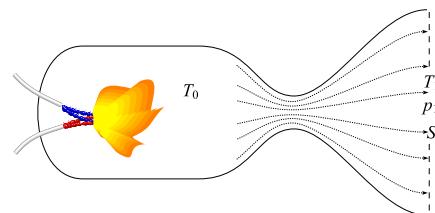
Autor: Jaan Kalda, piirkonnavor, 2009, G 9

Hinnake, milline oleks suitsu kiirus korstnast väljumisel, kui õhutakistusega (sh turbulentest liikumisest tingitud takistusega) korstnas ning ahjulõõrides võiks mitte arvestada. Korstna kõrgus (mõõdetuna korstnajala juurest, kuhu siseneb ahjust tulev soe õhk) on  $h = 10 \text{ m}$  ja õhu keskmne temperatuur korstnas  $t = 80^\circ\text{C}$ . Lugeda, et ahju uks ja korstna jalga on samal kõrgusel. Välisõhu temperatuur on  $t_0 = 0^\circ\text{C}$ .

### Ü86 Rakettmootori skeem

Autor: Jaan Kalda, lahtine, 2010, G 10

Vedelkütusel töötava rakettmootori skeem on toodud juuresoleval joonisel. Põlemiskambris moodustuvad põlemisproduktid (gaasid) omandavad kõrge rõhu ja temperatuuri. Seejärel väljuvad need adiabaatiliselt paisudes ja jahtudes läbi düüsi. Õigesiti konstrueeritud düüsi korral (kaela läbimõõt vastab põlemiskiirusele ja -temperatuurile) jätkub adiabaatiline paisumine ka peale düüsikaela läbimist ning suur osa soojasenergiast muundatakse gaasijoa kineetiliseks energiaks. Leidke rakettmootori veojõud  $F$  eeldusel, et (a) on teada düüsi väljundristlõike pindala  $S$ , temperatuur põlemiskambris  $T_0$  ning gaaside temperatuur  $T_1$  ja rõhk  $p_1$  düüsist väljumise hetkel, kusjuures  $T_0 \gg T_1$ ; (b) põlemiskambris on gaaside kineetiline energia tühine vörreldes soojasenergiaga; (c) atmosfäärirõhu mõju veojõule on tühine; (d) moodustuva gaasisegu ühe mooli soojasmahtuvus konstantsel ruumalal on  $c_V = \frac{5}{2}R$ , kus  $R$  on gaasikonstant.



## Geomeetriline optika

### Ü87 Kiil ★

Autor: Valter Kiisk, lõppvoor, 2007, G 3

Laserkiire teele asetatakse enam-vähem risti õhuke klaasplaat (klaasi murdumisnäitaja  $n = 1,5$ ). Selle tulemusena nihkub  $L = 2$  m kaugusel ekraanil olev laserkiire kujutis  $d = 5$  mm võrra. Järeldatakse, et plaat on kergelt kiilukujuline. Leidke selle kiilu tipunurk  $\alpha$ .

Vihje. Väikeste nurkade  $\varphi$  puhul  $\sin \varphi \approx \tan \varphi \approx \varphi$ .

### Ü88 Lääts ★

Autor: Tundmatu autor, lahtine, 2009, G 2

Lääts tekitab esemest  $d = 24$  cm kaugusele ekraanile kujutise, mis on esemest 3 korda suurem. Leidke läätse fookuskaugus.

### Ü89 Kiirtekimbu laiendi ★

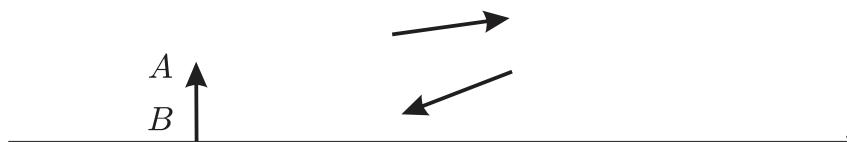
Autor: Koit Timpmann, piirkonnavor, 2010, G 3

Kaks ühise optilise peateljega läätse moodustavad seadme, millega saab paralleelist valgusvihust moodustada esialgsest laiema või kitsama paralleelse valgusvihu. Kasutatava seadme esimese läätse optiline tugevus on  $-20$  dpt. Kui kaugele esimesest läätsest tuleks paigutada teine lääts, et laiendada seadmele langev valgusvihk 2,5-kordseks?

### Ü90 Nõguspeegel ★★

Autor: EFO žürii, lõppvoor, 2006, G 2

On teada esemelt lähtunud ühe kiire suund enne ja pärast peegeldumist sfääriselt nõguspeeglilt. Teades eseme  $AB$  ja optilise peatelje asukohta, konstrueeri ge eseme kujutis ja tähistage nõguspeegli fookuse asukoht. Ignoreerida sfäärilisi aberratsioone.



### Ü91 Plaat ★★

Autor: Tundmatu autor, lahtine, 2007, G 4

Tasaparalleelsel plaadil paksusega  $d = 5$  cm on alumine pind höbetatud. Valguskiir langeb plaadi ülemisele pinnale nurga  $\alpha = 30^\circ$  all, osaliselt peegeldub sellega ning osaliselt murdub plaadi sisse. Seejärel peegeldub murdunud kiir plaadi alumiselt pinnalt ning murdub teist korda, väljudes tagasi õhku. Leidke plaadi materjali murdumistegur  $n$ , kui kaugus esimese peegeldunud ja teise murdunud kiire vahel  $l = 2,5$  cm.

### Ü92 Valgusvihk ★★

Autor: Mihkel Kree, piirkonnavoor, 2005, G 5

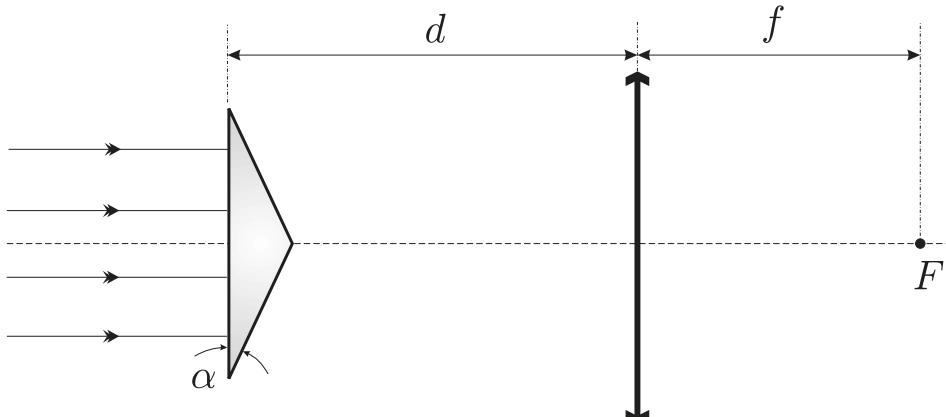
On antud ülesanne muuta kitsas paralleelne valgusvihk võimalikult laiaks paralleelseks valgusvihuks. Kasutada saab vaid kahte läätse etteantud kolmest: kumerlääts (fookuskaugus  $f_1 = 20\text{ cm}$ ), kumerlääts ( $f_2 = 40\text{ cm}$ ) ning nõguslääts ( $f_3 = -10\text{ cm}$ ). Kuidas tuleb toimida ning mitu korda laiemaks valgusvihk sel juhul muutub? Eeldage, et läätsede mõõtmed on oluliselt suuremad valgusvihu laiusest.

### Ü93 Biprisma ★★

Autor: Mihkel Kree, piirkonnavoor, 2006, G 6

Paralleelne kiirtekimp langeb võrdhaarsele kolmnurksele prismale risti prisma tahuga (vt joonist). Prisma teravnurgad on väikesed, suurusega  $\alpha$ . Prisma materjali murdumisnäitaja on  $n$ . Prismast kaugusel  $d$  paikneb koondav lääts fookuskaugusega  $f$ . Läätsede optiline peatelg on paralleelne kiirtekimbu esialgse sihiga ning läbib prisma tipunurka. Missugune pilt tekib läätse fokaaltasandis asuvale ekraanile? Leida pilti iseloomustavad parameetrid. Kuidas sõltub pilt kaugusest  $d$ ?

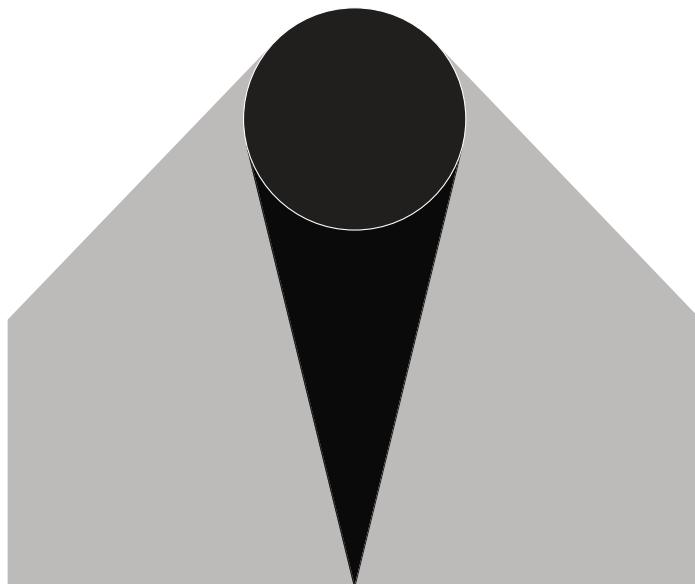
Märkus. Väikeste nurkade korral kehtib lähendus  $\tan \alpha \approx \sin \alpha \approx \alpha$ .



#### Ü94 Varjud ★★

Autor: Jaak Kikas, piirkonnavor, 2007, G 6

Läbipaistmatut kera valgustab kerakujuline valgusallikas. Joonisele on kantud läbipaistmatu kera poolt tekitatud täis- ja poolvarju koonuste lõiked joonise tasandiga (kera keskpunkt asub samas tasandis). Konstrueerige valgusallika lõige joonise tasandiga. Valgusallika keskpunkt asetseb samuti joonise tasandis.



### Ü95 Veealune valgus ★★

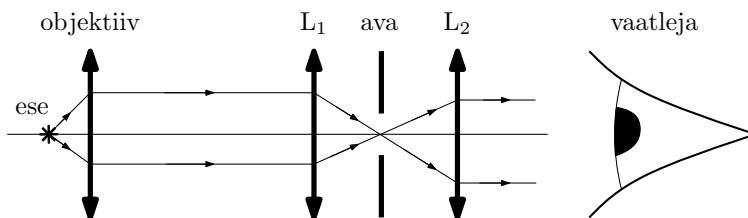
Autor: Jaak Kikas, lõppvoor, 2008, G 5

Kas basseini kohal rippuv punktvalgusallikas, mida vaadeldakse basseini põhjast, on heledam siis, kui bassein on veest tühi, või siis, kui ta on veega täidetud ja kaugus silmast veepinnani võrdub valgusallika kõrgusega veepinna kohal? Mitu korda? Veepinnalt peegeldub tagasi  $r = 2\%$  valgust, vee murdumisnäitaja on  $n = 1,33$  ja neeldumine vees on tühine. Allika heledus on võrdeline silmaavasse sattuva valguse energiaga, silmaava läbimõõdu loeme samaks kõigis vaatlustingimustes ja väikeseks võrreldes vaatleja sügavusega.

### Ü96 Konfokaalne mikroskoop ★★

Autor: Mihkel Rähn, lõppvoor, 2009, G 7

Harilikest mikroskoopidest parema ruumilise lahutuse saamiseks kasutatakse konfokaalseid mikroskoope. Juuresoleval joonisel on kujutatud konfokaalse mikroskoobi põhielemendid: objektiiv, läätsed  $L_1$  ja  $L_2$  ning nende ühisest fokaaltasandis asuv väike ringikujuline ava. Joonisel on samuti esitatud optilisel peateljal asuvast väikesest uuritavast esemest lähtuvate kirte käik. Objektiivi fokaaltasandist kaugemal ja lähemal olevatest objektidest lähtuvad kiired ei läbi enamuses ava, vaid neelduvad ava servadel. Kõrvvalnähtusena vaateväli kitseneb. Kui kaugel optilisest peateljest võib olla objektiivi fokaaltasandis olev ese, et see oleks veel nähtav? Läätsede  $L_1$ ,  $L_2$  ja objektiivi fookuskaugused on vastavalt  $f_1$ ,  $f_2$  ja  $f_{\text{obj}}$ , ava läbimõõt  $d$ .



### Ü97 Klaaskuulike ★★

Autor: Jaan Kalda, lahtine, 2010, G 4

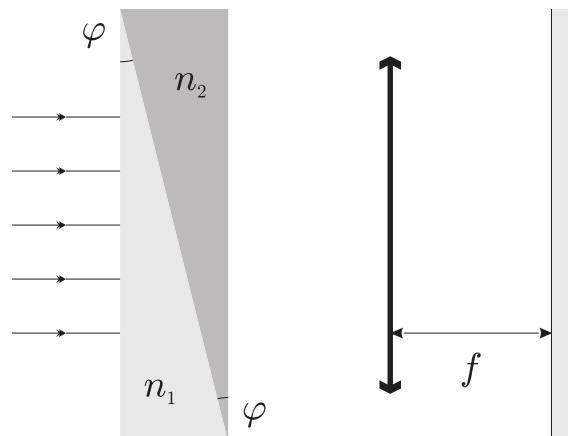
Paljudes helkurmaterjalides kasutatakse valguse tagasisuunamiseks tillukesi klaaskuulikesi, mis kantakse tiheda kihina materjali pinnale. Uurigem, milline peaks olema selliste klaaskuulikeste murdumisnäitaja. Teeme järgmised eeldused: (a) klaaskuulile langeb valguskiir nii, et valguskiire ja pinnanormaali vaheline nurk  $\alpha$  on väike ( $\alpha \ll 1$  rad); (b) valguskiir murdub klaasi pinnal, peegeldub ühekordsest kuuli sisepinnalt ja väljub seejärel kuulist (murdudes teistkordsest kuuli pinnal). Millise murdumisnäitaja  $n$  korral suundub selline valguskiir täpselt tagasi? Tehke kiirtekäigu joonis ja põhjendage vastust. Abivalem: väikese  $\alpha$  korral radiaanmõõdus  $\sin \alpha \approx \alpha$ .

**Ü98 Kiilud ★★**

Autor: Tundmatu autor, lahtine, 2006, G 6

Tasaparalleeline plaat koosneb kahest klaaskiilust väikse nurgaga  $\varphi \ll 1$  (vt joonist). Kiilude murdumisnäitajad on  $n_1$  ja  $n_2$  ( $n_2 > n_1$ ). Plaadile risti tema pinnaga langeb paralleelne valgusvihk. Plaadi taga asub koondav lääts fookuskaugusega  $f$ . Lääts fokaaltasandis asub ekraan. Joonistage kiirte käik süsteemis. Kui palju nihkub valguslaik ekraanil, kui me eemaldame plaidi?

Vihje. Väikeste nurkade puhul kehtib ligikaudne võrdus  $\tan \varphi \approx \sin \varphi \approx \varphi$ .

**Ü99 Klaaskuup ★★**

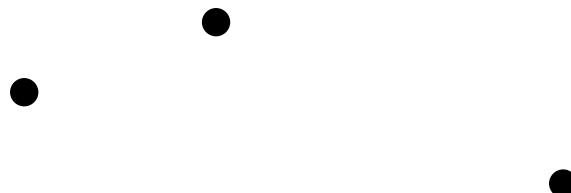
Autor: Tundmatu autor, piirkonnavor, 2009, G 7

Klaaskuubi neli tahku on värvitud mustaks nõnda, et värvimata jääenud tahud paiknevad kõrvuti (omavad ühist serva). Missugune peab olema klaasi murdumisnäitaja  $n$ , et ka värvimata tahud paistaksid mustadena?

**Ü100 Peeglid ★★**

Autor: Jaan Kalda, piirkonnavor, 2009, G 8

Kui paigutada kaks tasapeeglit nii, et nende tasapinnad moodustavad nurga  $\alpha < 180^\circ$  ning peegeldavad pinnad on vastamisi, siis peeglite vahele paigutatud asjadest võib tekkida mitu kujutist: lisaks peegeldustele veel peegelduse-peegeldused jne. Joonisel on kujutatud valgusallika  $S$  kaks peegeldust ning üks peegelduse-peegeldus ülaltvaates (st peeglite tasapindade lõikejoone sihis). Leida konstruktsiooni abil peeglite ning valgusallika asukohad. Peeglitel on ainult üks peegeldav külg.



**Ü101 Kapillaartoru ★★★**

Autor: Tundmatu autor, lahtine, 2009, G 8

Klaasist kapillaartoru on sisemise raadiusega  $r$  ja välimise raadiusega  $R$ . Millist tingimust peavad rahuldama  $r$ ,  $R$  ja klaasi murdumisnäitaja  $n$ , et küljelt vaadates paistaks, et kapillaartoru seinapaksus on null?

**Ü102 Lääts ★★★★**

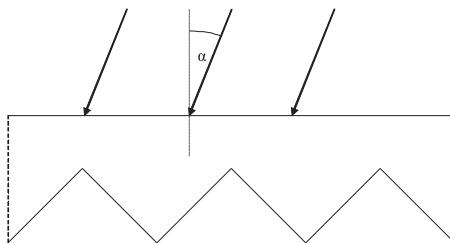
Autor: Tundmatu autor, lahtine, 2007, G 9

Teritamata pliiatsi telg ühtib koondava läätse peateljega. Mitu korda on pliiatsi kujutise pikkus tema enda pikkusest erinev, kui pliiatsi ühe otsa kujutise diameetri ja pliiatsi diameetri suhe on  $k_1$  ning teise otsa jaoks on see suhe  $k_2$ ? Pliiatsi mõlemad otsad asuvad läätsest fookuskaugusest suuremal kaugusel.

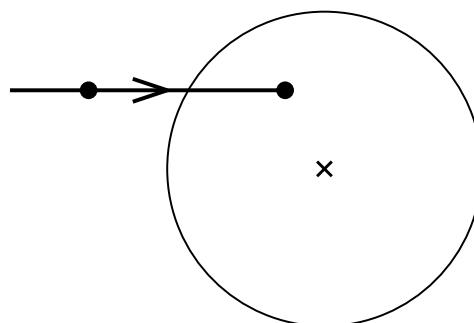
**Ü103 Hajuti ★★★★**

Autor: Andreas Valdmann, piirkonnavor, 2010, G 8

Mõnedes valgustites kasutatakse valguse hajutamiseks joonisel kujutatud ristlõikega pleksiklaasist plati. Valgus langeb selle siledale poolele ja läbib hajuti vaid juhul, kui langemisnurk on suurem kriitilisest nurgast  $\alpha_{kr}$ . Leidke nurga  $\alpha_{kr}$  väärustus. Pleksiklaasi murdumisnäitaja  $n = 1,5$ . Kõik sakilise poole tahud on 45-kraadise nurga all sileda poole pinna suhtes.

**Ü104 Nõguslääts eestvaates ★★★★** Autor: Siim Ainsaar, piirkonnavor, 2011, G 10

Joonisel on kujutatud eestvaates nõguslääts, mille optiline peatelg on joonise taandiga risti ja lõikub läätsega punktis  $O$ . Antud on ka üks horisontaalne valguskiir ning selle lõikepunktid eesmise fokaaltasandi ning läätsega (vastavalt punktid  $K$  ja  $L$ ). Joonestage antud vaates lisalehel kiire edasine käik ning ta lõikepunkt tagumise fokaaltasandiga. Põhjendage lahendust.



**Ü105 Gravitatsioonilääts ★★★★** Autor: Mihkel Kree, piirkonnavor, 2007, G 10

Üldrelatiivsussteooria ennustab, et mustast august möödumisel kaldub valguskiir gravitatsiooni tõttu kõrvale oma esialgsest liikumissuunast nurga  $\varphi = 4GM/c^2r$  võrra, kus  $M$  on musta augu mass ning  $r$  trajektoori lähima punkti kaugus selle-ni. Sattugu must aust täpselt vaatleja ja tähe vahele, nii et kaugus vaatlejast musta auguni on  $L_1$  ning mustast august täheni  $L_2$ . Missugune on tähe kujutis vaatleja jaoks (põhjendage oma vastust kiirte käigu visandi abil) ning kui suur on kuju-tise nurkläbimõõt? Kuna vaatlejani jõudvate kiirte jaoks on  $r$  palju väiksem tähe kaugusest, võib kasutada väikeste nurkade lähendust  $\sin \alpha \approx \tan \alpha \approx \alpha$ .

**Ü106 Akvaarium ★★★★★**

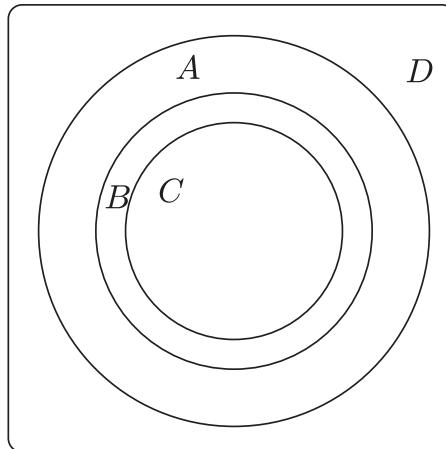
Autor: Tundmatu autor, lahtine, 2005, G 10

Leidke maksimaalne suurendus  $k$ , mille tekib sfääriline akvaarium, kui vaadata väljastpoolt selles ujuvat kala. Suurenduse all mõistame siin kala kujutise ja tege-liku kala suuruste suhet. Vee murdumisnäitaja  $n = 1,3$ . Väikeste nurkade puhul kehtib ligikaudne võrdus  $\sin \alpha \approx \alpha$ .

**Ü107 Kuup ★★★★★**

Autor: Jaan Kalda, lõppvoor, 2007, G 8

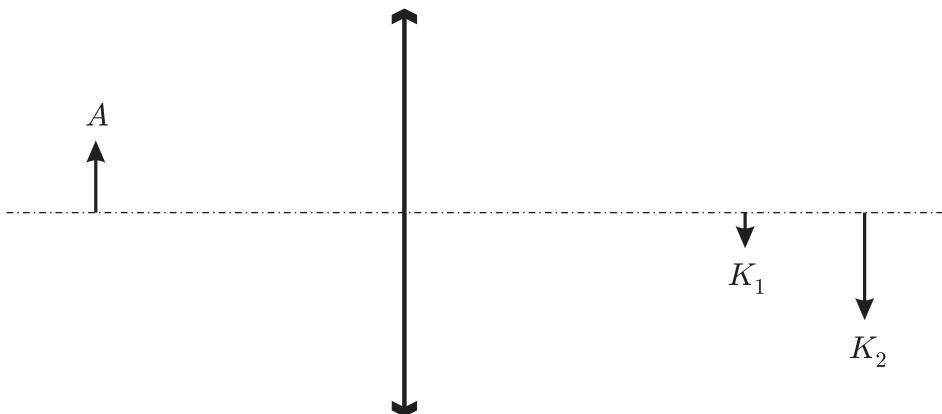
Läbipaistvast klaasist tehtud kuubis on suur kerakujuline õönsus, mis on täidetud sinist värvi gaasiga. Kuup lebab kollaste seittega toas valgel põrandal. Juuresolev kuubi joonis on tehtud kuubi kohalt pildistatud foto põhjal, millelt on eemaldatud kõik värvid ning jäetud alles selgeltnäh-tavad kontuurid ja erivärviliste piirkondade eraldusjooned (joonte kujud ja mõõtmed on täpselt sellised na-gu fotol). Kuubi mõõtmed lugeda hulga väiksemateks põranda mõõtmetest ning kõrgusest, millelt on tehtud joo-nise aluseks olnud foto. Millistele vär-videle vastavad tähed  $A, B, C, D$ ? Põh-jendage vastust. Leidke klaasi murdumisnäitaja.



**Ü108 Nõguspeegel ★★★★**

Autor: Mihkel Kree, lõppvoor, 2007, G 9

Optiline süsteem koosneb kumerläätsest ja nõguspeeglist, mille optilised peatuled ühtivad. Kumerpeegli asukohta pole joonisel märgitud. On teada, et objektist  $A$  tekib teisele poole läätse kaks kujutist  $K_1$  ja  $K_2$ . Konstrueerige kumerpeegli köveruskeskpunkt  $O$  ja kumerpeeglis objektist  $A$  tekkinud näiv kujutis  $A'$ . Eeldada, et optilises süsteemis on nurgad piisavalt väiksed, et sfäärilisi aberratsioone ei teki.

**Ü109 Kärbes ★★★★**

Autor: Aigar Vaigu, piirkonnavor, 2008, G 10

Kärbes on merevaigutükis, mille murdumisnäitaja on  $n = 1,6$ . Tüki üks pinnaosa on sfääriline köverusraadiusega  $r = 3 \text{ mm}$ . Kui vaadata kärbse pead läbi selle pinnaosa, siis näib pea asuvat köveruskeskpunkti läbival sirgel  $k = 5 \text{ mm}$  sügavusel merevaigus. Kui sügaval on kärbse pea tegelikult?

*Märkus.* Kasutada väikeste nurkade lähendust  $\tan \alpha \approx \sin \alpha \approx \alpha$ , kus  $\alpha \gg 1$  on väike nurk mõõdetuna radiaanides.

**Ü110 Punktallikad ★★★★**

Autor: Jaan Kalda, lõppvoor, 2010, G 9

Juuresoleval joonisel on neli punkti, millest kaks on valgusallikad ja kaks nende tõelised kujutised, mille on tekitanud õhuke lääts. Leidke konstrueerimise teel läätse tasand ja optiline peatulg. Kui võimalusi on rohkem kui üks, siis leidke need kõik.

### Ü111 Optiline süsteem ★★★★

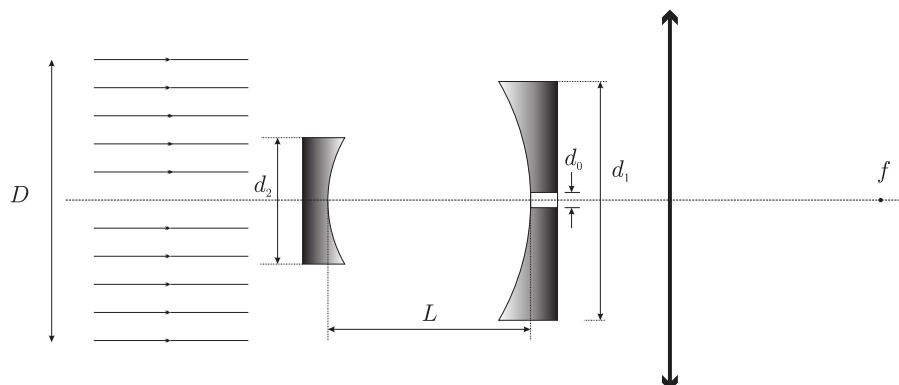
Autor: Andreas Valdmann, lõppvoor, 2011, G 8  
Klaasist murdumisnäitajaga  $n$  on valmistatud õhuke kaksikkumer lääts, mille mõlema pinna kõverusraadius on  $r$  (läätse paksus  $d \gg r$ ). Lääts üks pind kaetakse peegeldava metallikihiga. Leidke kumerläätsest ja nõguspeeglist tekkinud optilise süsteemi fookuskaugus.

Vihje. Fookuskauguse leidmiseks võib vaadelda optilise peatelje lähedasi kiiri, mis levivad selle suhtes väikese nurga all. Sel juhul saab rakendada väikeste nurkade valemit  $\sin \alpha \approx \tan \alpha \approx \alpha$ , kus  $\alpha$  on radiaanides.

### Ü112 Sähvatus ★★★★

Autor: Mihkel Kree, lõppvoor, 2006, G 9

Optiline süsteem koosneb kahest nõguspeeglist ja kumerläätsest (vt joonist), mille optilised peateljed ühtivad. Ringikujulise ristlöikega valgusimpulss siseneb süsteemi optilise peatelje sihis ning valgusvihu telg ühtib sellega. Peeglite kõverusraadiused on  $R_1 = 8\text{ m}$  ja  $R_2 = 4\text{ m}$  ning peeglite vahekaugus  $L = 6\text{ m}$ . Peeglite läbimõõdud on  $d_1 = 160\text{ mm}$  ja  $d_2 = 96\text{ mm}$ . Kiire läbimõõt on  $D = 192\text{ mm}$ . Lääts läbimõõt on suurem valgusvihu omast. Suurema peegli keskel on ava läbimõõduga  $d_0 = 1\text{ mm}$ . Joonistage valguse intensiivsuse ajaline kulg kumerläätse fookuses  $f$ . Feldage, et süsteemi saabuva impulsi kestvus  $\tau \ll L/c$ . Valguse kiirus  $c = 3 \cdot 10^8\text{ m/s}$ .



## Kinemaatika

### Ü113 Autod ★

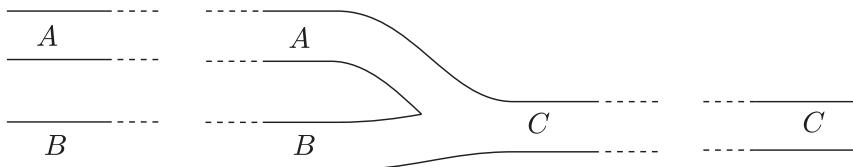
Autor: Oleg Košik, piirkonnavor, 2006, G 1

Tartu ja Tallinna vahemaa on  $s = 180$  km. Jalgrattur sõidab Tartust Tallinna poole kiirusega  $v_1 = 30$  km/h. Sõites luges ta kokku, et  $t_0 = 5$  min jooksul tuli talle vastu  $n_0 = 20$  autot. Mitu Tallinnast Tartusse sõitvat autot on korraga maanteel? Eeldada, et autod sõidavad võrdsete vahemaadega kiirusega  $v_2 = 90$  km/h kogu maantee ulatuses.

### Ü114 Ummik ★

Autor: Jaan Kalda, piirkonnavor, 2007, G 2

Vaateleme kahe üherajalise tee, A ja B, liitumist üherajaliseks teeks C. Tipptunni ajal on kõik kolm teed täidetud autodega; kahe naaberauto keskmise vahemaa võib lugeda kõigil kolmel teel ühesuguseks. Tee A pikkus on  $L_A = 1$  km, tee B pikkus  $L_B = 3$  km ning tee C pikkus  $L_C = 2$  km. Autode keskmine kiirus teel A on  $v_A = 3$  km/h ning tee B läbimiseks kulub autol  $t_B = 36$  min. Kui kaua kulub autol jõudmaks tee A algusest tee C lõpuni?



### Ü115 Auto ★

Autor: Tundmatu autor, lahtine, 2008, G 1

Paigalseisust liikuma hakanud autol kulus teatud vahemaa läbimiseks  $t = 15$  s. Millise ajaga läbis auto viimase viiendiku sellest vahemast? Auto liikumine lugeda ühtlaselt kiirenevaks.

### Ü116 Ratturid ★

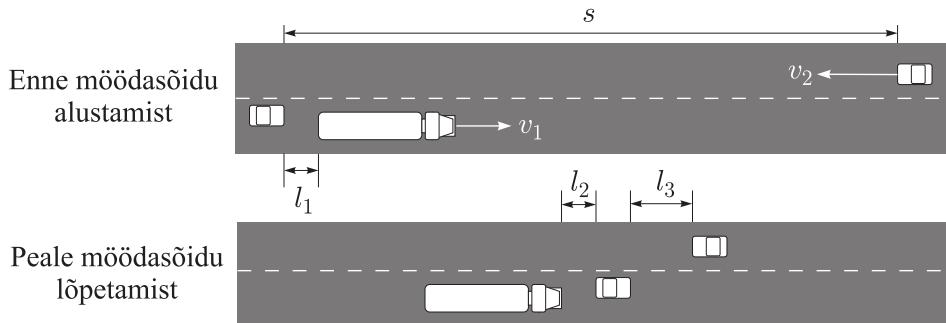
Autor: Tundmatu autor, lahtine, 2009, G 1

Kolm ratturit sõitsid linnast A linna B. Linnast A väljusid nad üheaegselt. Esimese ratturi keskmine kiirus oli  $v_1 = 30$  km/h, teise ratturi oma  $v_2 = 20$  km/h. Esimene rattur jõudis sihtpunktisse kell 19.00, teine rattur kell 20.00 ning kolmas rattur kell 21.00. Milline oli kolmanda ratturi keskmine kiirus  $v_3$ ?

### Ü117 Veok ★

Autor: Valter Kiisk, piirkonnavor, 2005, G 1

Veok sõidab maanteel ühtlase kiirusega  $v_1 = 80$  km/h. Veokile järgneb  $l_1 = 10$  m kauguse sel sõiduauto. Veoki pikkus on  $L_1 = 12$  m, sõiduauto pikkus  $L_2 = 4$  m. Sõiduauto sooritab möödasõidu ühtlase kiirendusega  $a = 2 \text{ m/s}^2$ . Möödasõit lõpeb siis, kui sõiduauto on veokist  $l_2 = 10$  m kauguse sel. Kui pikas minimaalses ulatuses  $s$  peaks vastassuunaline rada vaba olema ohutuks möödasõiduks? Ohutuks kauguseks vastutulevast autost loetakse  $l_3 = 30$  m. Vastutulevad autod sõidavad kiirusega  $v_2 = 90$  km/h.



### Ü118 Rongiõnnetus ★

Autor: Oleg Košik, piirkonnavoor, 2011, G 4

Kehrast Aegviidi poole sõitis kiirusega  $v_1 = 63 \text{ km/h}$  kaubarong. Aegviidust hakis sama teed pidi sõitma Kehra poole elektrirong kiirendusega  $a_2 = 0,15 \text{ m/s}^2$ . Kui rongide vahemaa oli  $s = 2750 \text{ m}$ , märkas kaubarongi vedurijuht vastusõitvat elektrirongi ning vajutas pidurile. Elektrirongi kiirus oli selleks hetkeks  $v_2 = 18 \text{ km/h}$ . Leidke rongide sõidukiirused vahetult kokkupõrke eel. Kaubarongi pidudrdukiirendus on  $a_1 = -0,1 \text{ m/s}^2$ .

### Ü119 Sonar ★★

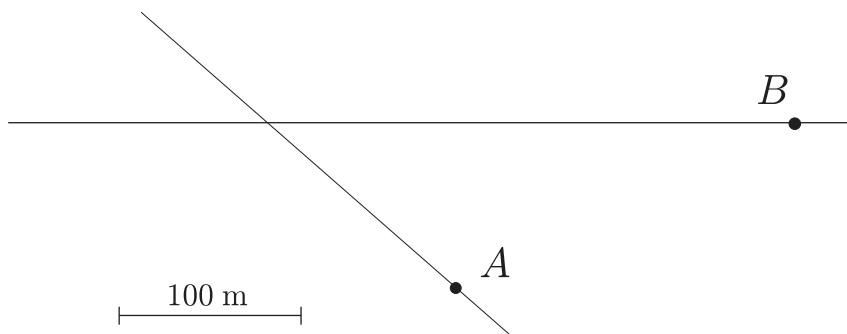
Autor: Oleg Košik, piirkonnavoor, 2006, G 3

Vaatame järgmist meetodit laeva kiiruse määramiseks. Saadame rannikult sellest eemalduvale laevale ultraheli signaali sagedusega  $f_1$ . Laevalt peegeldub signaal tagasi rannikule, kus vastuvõtja fikseerib signaali sagedusega  $f_2$ . Teades, et heli kiirus õhus on  $v_h$ , määrase laeva kiirus  $v$ .

### Ü120 Autod ★★

Autor: Jaan Kalda, piirkonnavoor, 2008, G 2

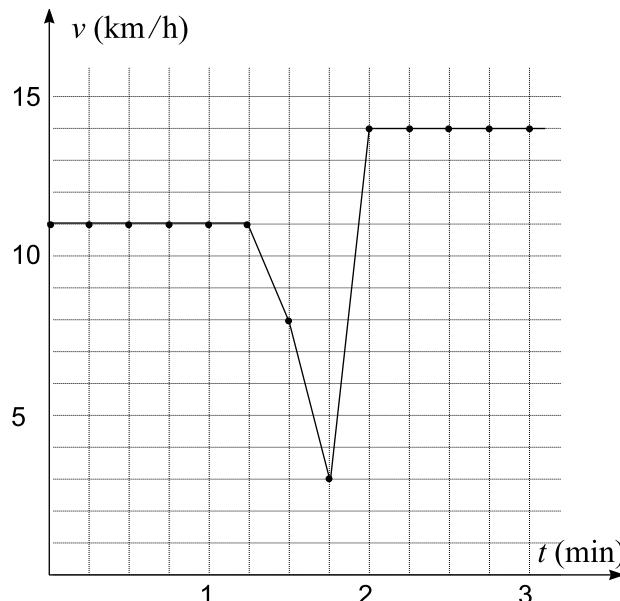
Juuresolev joonis on tehtud kõrgelt otse alla pildistatud foto põhjal, millel on jäädvustatud kaks autot (tähistatud punktidega  $A$  ja  $B$ ), mis lähenevad ristmikule jäädvate kiirustega  $v_A = 40 \text{ km/h}$  ja  $v_B = 60 \text{ km/h}$ . Kasutades joonist ja sellel antud mõõtkava, leidke autode edasisel liikumisel nende vaheline minimaalne kaugus.



### Ü121 GPS ★★

Autor: Jaan Kalda, lõppvoor, 2009, G 5

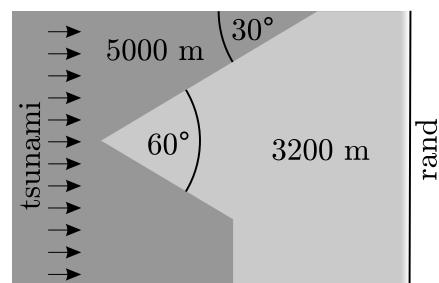
Tervisesportlane kasutab GPS seadet oma jooksutreeningu tulemuste salvestamiseks. Tema GPS seade määrab iga 15 sekundi järel jooksja täpse asukoha, milles põhjal arvutab ja salvestab GPS seade viimase 15 sekundi keskmise kiiruse. GPS esitab saadud tulemused graafikul punktidena, mis on ühendatud sirglöide abil. Jooksja märkas, et ketsipael oli lahti läinud. Ta peatus, sidus sellekinni ning tänu väikesele puhkusele jätkas jooksu juba natuke suurema kiirusega, vt juuresolevat GPS-i esitatud graafikut. Kui kaua kestis peatus? Pidurdumiseks ning puhkusjärgselt kiirendamiseks kulunud aeg lugeda tühiseks; jooksu kiirus oli konstantne nii enne peatust kui ka pärast seda.



### Ü122 Tsunami ★★★

Autor: Jaan Kalda, lõppvoor, 2005, G 6

Joonisel on ülaltvaates toodud ookeanipõhja sügavus kodeeritud halltoonidega: tumedam hall vastab sügavamale, heledam hall madalamale veele. Ookeanipõhjas on astang, kus  $h_1 = 5000$  m sügavune vesi läheb  $h_2 = 3200$  m sügavuseks; ranna lähedal toimub madaldumine väga kiiresti. Rannale läheneb tsunami nii, nagu näidatud joonisel. Tsunami liikumiskiirus  $v = \sqrt{gh}$ , kus  $g = 9,8 \text{ m/s}^2$  ja  $h$  tähistab vee sügavust. Millisesse punkti jõuab kõrgeim laine? Põhjendage vastust.



**Ü123 Hävituslennuk ★★**

Autor: Tundmatu autor, lahtine, 2011, G 7

Ühel ilusal augustipäeval käis Mati paraadil vaatamas NATO hävituslennukeid, mis tegid üle rahva peade demonstratsioonlende. Diktor ütles valjuhääldest, et lennuk lendab horisontaalselt üle rahva kiirusega  $v = 1350 \text{ km/h}$ . Matit huvisitas aga, kui kõrgel lennuk lendab. Vajalike mõõtetulemuste saamiseks seisis ta nii, et tema ja läheneva lennukiga ühele joonele jäi täpselt üks 9 meetri pikkuine elektriroost ning Mati ise asus teise posti juures; postide vahekaugus oli 50 m. Mati käivitas oma mobiltelefoni stopperi just siis, kui lennuk ilmus posti otsa tagant nähtavale ning peatas hetkel, kui käis kõva pauk ja hakkas kostuma lennuki müra. Ta sai stopperi näiduks 32,04 s. Kodus mõõtis ta üle ka enda silma kõruse maapinnast:  $l = 1,68 \text{ m}$ . Kui kõrgel lendas lennuk? Heli kiirus õhus on umbes  $u = 330 \text{ m/s}$ .

*Vihje.* Kui lennuk lendab ülehelikiiruse sel, siis levib tema taga koonusekujuline lõöklaine front, kusjuures koonuse tipus on lennuk ja selle koonuse telglõike tipunurk on  $\alpha = 2 \arcsin\left(\frac{u}{v}\right)$ .

**Ü124 Fotograaf ★★★★**

Autor: Jaan Kalda, lõppvoor, 2011, G 6

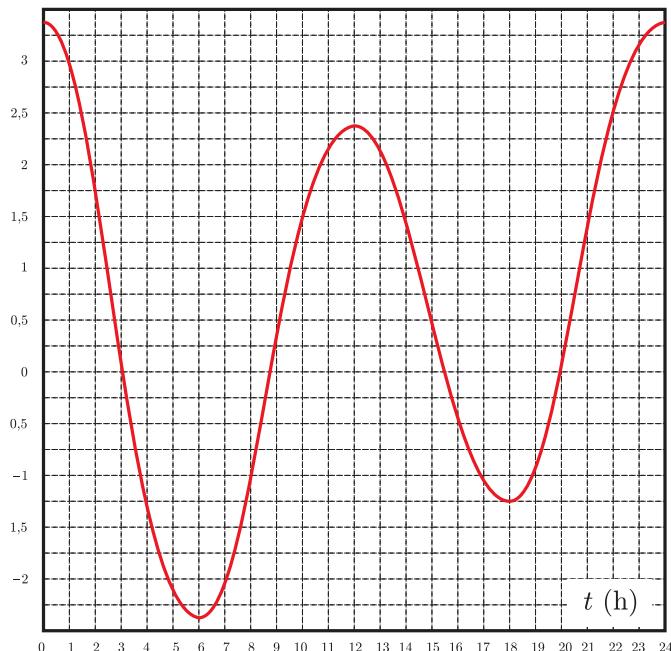
Fotograaf pildistas kõrgest joast langevat veevoolu; päikesevalguses sätendavad veepiisad venisid piltidel vertikaalseteks triipudeks. Kui fotoaparaat oli pildistamisel normaalasendis, siis olid kõik triibud pikkusega  $l_1 = 120 \text{ pikslit}$ ; kui fotoaparaat oli pildistamisel „jalad ülespidi“ (st seda pöörati ümber optilise telje 180 kraadi), siis oli triipude pikkuseks  $l_2 = 200 \text{ pikslit}$ . Kui pikad olid triibud siis, kui fotoaparaati hoiti pildistamisel „portree asendis“ (st seda pöörati ümber optilise telje 90 kraadi)? Eeldada, et säriaeg ja optilise telje suund oli kõigil juhtudel üks ja sama. Kui toodud andmete põhjal pole vastus üheselt leitav, siis andke kõik võimalikud vastused.

*Vihje.* Fotoaparaadi põhikomponendid on objektiiv (lääts) ja katik, millest esimene tekib digitaalsensori (või filmi) tasandile pildistatavate esemete kujutise. „Puhkeasendis“ ei lange see kujutis siiski sensorile, sest katik varjab läbi objektiivi tulnud valguse ära. Päästikule vajutamisel avaneb katik lühikeseks ajavahe-mikuks (säriajaks): objektide kujutis langeb nüüd töesti sensorile ning sensori iga piksel mõõdab ära kogu selle aja vältel langeva valgusenergia. Harilikult kujutab katik endast kahte „kardinat“, mis paiknevad vahetult sensori ees ja katavad selle. Alguses varjab sensorit esimene kardin, mille ülemine serv liigub päästikule vajutamisel konstantse kiirusega  $v$  ülevalt alla, avades sensori. Säriaaja lõpetab teine kardin, mille alumine serv liigub samuti ülevalt alla, samasuguse kiirusega  $v$  na-gu esimenegi. Kui säriaeg on hästi lühike, siis ei jõua sensor täielikult avaneda: mõlemad kardinad liiguvalt koos ülevalt alla ning sensor on avatud objektiivist tulevale valgusele vaid kardinate vahelise kitsa horisontaalse riba ulatuses (kusjuures see valgusele avatud riba liigub kiirusega  $v$  ülevalt alla).

**Ü125 Laev ★★★**

Autor: Tundmatu autor, lõppvoor, 2007, G 5

Maailmas leidub jõgesid, kus vesi tõusude tõttu liigub kord ühes, kord teises suunas. Vaatleme laevaliiklust ühel sellisel jõel. Joonisel on antud vee liikumiskiiruse sõltuvus kellaajast. Positiivseks loetakse vee kiirus siis, kui see on suunatud punktist  $A$  punkti  $B$  poole. Leida optimaalne (lühimate sõiduaegadega) tunniplaan kaubalaeva regulaarseks liikumiseks üks kord päevas punktist  $A$  punkti  $B$  ja tagasi. Kaugus nende punktide vahel piki jõge on  $L = 20$  km, laeva kiirus seisvas vees  $v_0 = 4$  km/h.

 $v$  (km/h)**Ü126 Müra ★★★**

Autor: Siim Ainsaar, lahtine, 2009, G 10

Matkaja on laagriplatsil õnnelik, et elektrijaama müra temani tuuletu ilmaga nii vaikselt kostab. Veidi hiljem, tuulega, on müra veel tasasem. Puhub põhjatuul kiirusega  $\beta c$ , kus  $c$  on heli kiirus paigalseisvas õhus; jaam jäääb matkajast edelasse (st tuule ja jaama suundade vaheline nurk on  $\alpha = 135^\circ$ ).

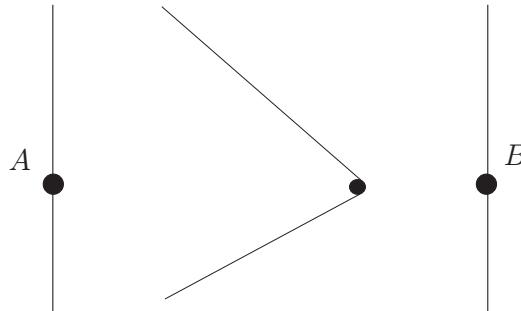
- a) Kas helisagedus on sama mis tuuleta?
  - b) Kui tuuleta on tajutav helivõimsus  $P$  ja tuulega  $xP$ , siis kui suur on  $x$ ? Võite lugeda, et elektrijaam on punktikujuline.
- Soovitus. Uurige helifrondi levimist

**Ü127 Kaater ★★★★**

Autor: Jaan Kalda, lõppvoor, 2009, G 8

Mootorpaat sõidab jõe ühelt kaldalt punktist A teisele kaldale punkti B. Paadi kiirus on  $u = 7 \text{ m/s}$ .

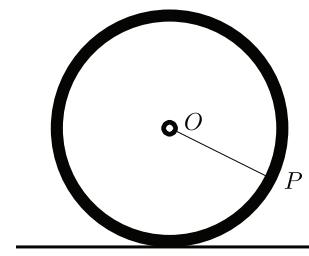
- a) Joonisel on näidatud paadi tekitatud veelained. Milline on jõe voolukiirus?  
b) On teada, et kui vee sügavus on  $h$ , siis lained levivad kiirusega  $w = \sqrt{gh}$ , kus  $g$  on vabalangemise kiirendus. Kui sügav on jõgi?

**Ü128 Kodarad ★★★★★**

Autor: Tundmatu autor, lahtine, 2011, G 10

Radiaalsete kodaratega rattast, mis veereb horisontaalsel pinnal, tehakse pilt. Fotokaamera säriaeg on mõõduka pikkusega: paigalseisvad objektid on pildil teravad, liikuvad esemed aga hagused. Muuhulgas on ratta kodarad valdavalt hagusad, kuid osa kodarate teatud punktid on ometigi teravad. Võite eeldada, et kogu pilt on salvestatud samaaegselt.

- a) Kopeerige juuresolev skeem lahenduslehele ning näidake konstruktsiooni teel, milline kodara  $OP$  punkt (või punktid) kujutub fotol teravalalt; põhjendage vastust.  
b) Konstrueerige köver, milles asuvad ülejäänud kodarate teravalalt kujutuvad punktid.

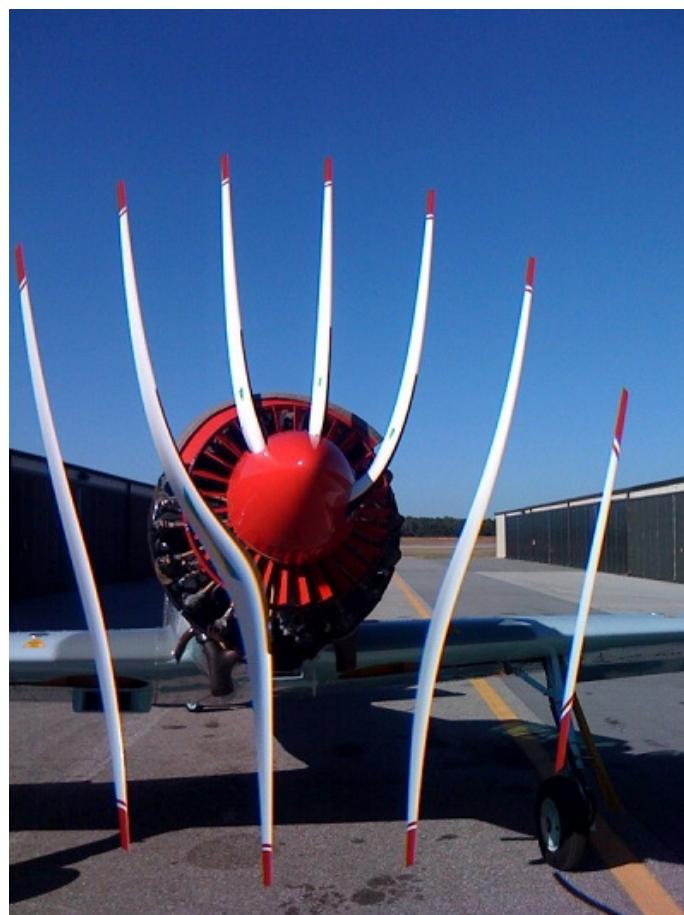


### Ü129 Propeller ★★★★

Autor: Andreas Valdmann, lõppvoor, 2010, G 10

See pilt pöörlevast lennukipropellerist on tehtud telefoni kaameraga, mis salvestab korraga ühe vertikaalse veeru pikselid. Pilt tekib vasakult paremale veergude kaupa skaneerides.

- a) Mis suunas pöörleb propeller fotograafi poolt vaadatuna (päripäeva või vastupäeva)?
- b) Mitu laba on propelleril?
- c) Mitu pööret teeb propeller ühes minutis, kui kogu pildi tegemiseks kulunud aeg on 1/8 sekundit?



## Laineoptika

### Ü130 Kile ★★★★

Autor: Jaan Kalda, lahtine, 2008, G 8

Selleks, et vähendada peegeldusi optilistelt klaasidelt, kaetakse nende pinnad õhukese läbipaistva kilega. Leida, millise paksusega peaks olema selline kile, kui klaasi murdumisnäitaja on  $n_0 = 1,5$  ja kile oma  $n_1 = 1,3$ . Eeldada, et kile on optimeeritud risti langeva rohelise valguse jaoks lainepeikkusega  $\lambda = 530 \text{ nm}$ .

### Ü131 Kunstinäitus ★★★★★

Autor: Jaan Kalda, lõppvoor, 2009, G 10

Kunstinäituse saal kujutab endast valgete seintega suurt tuba, mida valgustatakse monokromaatilise rohelise valgusega (lainepeikkus  $\lambda = 550 \text{ nm}$ ). Sellel toal on siledast klaasist põrand; klaasi alumine pind on värvitud mustaks, ülemine pind on aga kaetud õhukese läbipaistva värvitu kilega. Keset tuba seisev näituseküllastaja näeb enda ümber põrandal heledaid ja tumedaid ringikujulisi vööte, kusjuures ta ise asub nende ringide keskpunktis — sõltumata sellest, kus kohas ta parajasti seisab. Näituseküllastaja uurib asja lähemalt: kükitab ja vaatab kaugemale, seejärel püüab vaadata otse alla. Maksimaalselt õnnestub tal loendada  $N = 20$  heledat vööti. Kui paks on klaasi kattev kile? Klaasi murdumisnäitaja  $n_0 = 1,6$ , seda katva kile oma  $n_1 = 1,4$ .

# Magnetism

## Ü132 Solenoid ★★

Autor: Andres Laan, lõppvoor, 2011, G 5

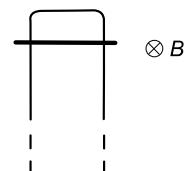
Õhksüdamikuga solenoidis (pikas silindrilises poolis) on vool  $I$ . Solenoidi sise-muses liigub elektron, mille trajektoor kujutab endast sellist kruvijoont, mille keerdude arv on võrdne solenoidi keerdude arvuga. Leidke selle elektroni kiiruse teljesihiline komponent. Võib eeldada, et elektroni kiiruse teljega risti olev komponent on piisavalt väike, et kokkupõrkeid solenoidi seinaga ei toimu. Elektroni mass on  $m$  ja laeng  $e$ .

Vihje. Solenoidi sees on homogeenne magnetväli induktsiooniga  $B = \mu_0 n I$ , kus  $n$  on solenoidi traadi keerdude arv pikkusühiku kohta,  $I$  selles olev vool ja  $\mu_0$  vaakumi magnetiline läbitavus.

## Ü133 Langev takisti ★★★

Autor: Andres Laan, piirkonnnavoor, 2011, G 8

Joonisel kujutatud Maa gravitatsiooniväljas vertikaalselt paiknevale juhtivale traadile kinnitati takisti nöndaviisi, et see võib piki traati vabalt libiseda. Teades, et magnetinduktsioon oli  $B$  ja traadi harude vaheline kaugus  $d$ , leidke, millise lõppkiirusega hakkab takisti langema. Takisti mass on  $m$  ja takistus  $R$ .



## Ü134 Laengud ★★★★

Autor: Jaan Kalda, lahtine, 2011, G 6

Kaks osakest laenguga  $q$  stardivad koordinaatide alguspunktist kiirusega  $v$ : üks  $x$ -telje sihis, teine  $y$ -telje sihis. Liikumine toimub homogeenses  $z$ -telje sihilises magnetväljas induktsiooniga  $B$ ; osakeste omavahelise elektrostaatilise vastasmõjuga ärge arvestage. Milline on osakeste vahelise kauguse maksimaalväärtus  $l_{\max}$  edasise liikumise käigus?

## Ü135 Traat ★★★★★

Autor: Jaan Kalda, lõppvoor, 2007, G 10

Horisontaalsel libedal pinnal on fikseeritud kaks klemmi, mille vahekaugus  $a$  on väiksem neid ühendava hästi painduva sõlmevaba traadi pikkusest  $L$ . Süsteem asub vertikaalses homogeenses magnetväljas tugevusega  $B$ , traati läbib vool tugevusega  $I$ . Joonistage, millise kuju võtab traat. Kirjutage välja võrrandid, kust saab leida mehaanilise pinge  $T$  traadis. Leidke selle väärtus eeldusel, et  $L \gg a$ .

## Ü136 Pool ★★★★★

Autor: Siim Ainsaar, lõppvoor, 2008, G 10

Libedale klaaspulgale on pehmest traadist tihedasti keritud solenoid pikkusega  $\ell$ , keerdude arvuga  $N$  ja ristlöikepindalaga  $S$ . Selles hoitakse konstantset voolu tugevusega  $I$ . Millist jõudu  $F$  oleks vaja rakendada pooli otstesse südamiku sihis, et venitada seda pisutki pikemaks, kui kehtiks eeldus, et venitamisel suurenenevad kõigi naaberkeerdude vahekaugused võrdselt. Võite lugeda, et klaasi magnetiline läbitavus  $\mu = 1$ .

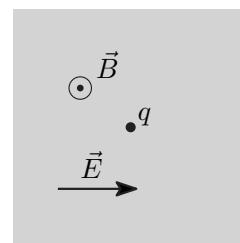
Vihje. Tiheda solenoidi südamikus on homogeenne magnetinduktsioon  $B = \mu_0 I N / \ell$ .

**Ü137 Laeng ★★★★**

Autor: Oleg Košik, lahtine, 2010, G 8

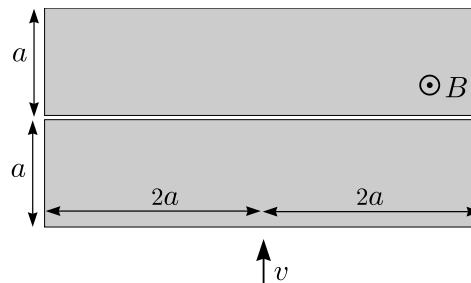
Ruudukujulise ristlõikega ruumipiirkond on täidetud homogeensel magnetväljaga  $B$  ning selle keskel asub osake massiga  $m$  ja laenguga  $q$ , mis on alghetkel paigal. Alates alghetkest iga ajavahemiku  $T = \frac{\pi m}{qB}$  tagant lülitub selles piirkonnas lühiajaliselt sisse elektriväli  $E$  (kestusega  $\tau \ll T$ ), mis on suunatud risti magnetväljaga. Elektriväli võib muutuda kahes režiimis: (i) olles iga kord suunatud joonisel näidatud suunas; (ii) olles suunatud vahendumisi kord joonisel näidatud suunas, kord vastupidises suunas.

- a**) Skitseerige osakese trajektoor mõlema režiimi korral.  
**b**) Kumma režiimi korral väljub osake magnetväljaga piirkonnast kiiremini? Mitu korda kiiremini? Eeldage, et väljumisaeg on mõlemal juhul palju suurem kui  $T$ . Põhjendage vastust.

**Ü138 Magnetväli ★★★★**

Autor: Jaan Kalda, piirkonna voor, 2010, G 9

Magnetväli induktsiooniga  $B$  täidab joonisel kujutatud mõõtmetega risttahukakujuhist ruumipiirkonda, välja arvatud väga kitsas magnetväljata pilus. Joonisel näidatud suunas lendab kiirusega  $v$  elektron (massiga  $m$  ja laenguga  $e$ ). Arvutage ja visandage graafikul, kuidas sõltub elektroni kõrvalekalduur (st nurk tema kiirusvektorite vahel enne magnetvälja sisenemist ja peale seal tõplikku väljumist) elektroni algkiirusest  $v$ ; piirduge väärustega  $v < 2aBe/m$ .

**Ü139 Silinder ★★★★**

Autor: Tundmatu autor, lahtine, 2007, G 10

Pika ühtlase mittejuhtiva silindri pinnal on ühtlaselt jaotatud laeng pindtihedusega  $\sigma$ . Alguses asub silinder välises homogeenses magnetväljas induktsiooniga  $B$ , mis on suunatud piki silindri telje; silinder on paigal. Seejärel lülitatakse magnetväli välja. Kui suure pöörlemise nurkkiiruse omandab selle tulemusel silinder? Silindri aine tihedus on  $\rho$ , silindri raadius on  $r$ .

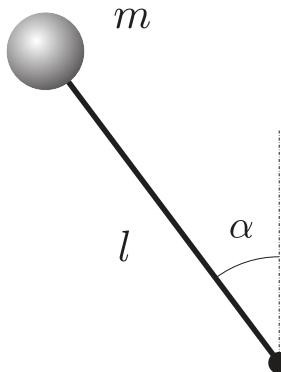
*Märkus.* Pöörleva silindri poolt tekitatav magnetväli lugeda tühiselt väikseks võrreldes välise väljaga

## Staatika

### Ü140 Pendel ★

Autor: Mihkel Heidelberg, piirkonnavoor, 2008, G 1

Otsast kinnitatud varras saab pöörelda ümber horisontaaltelje ühes tasandis. Varda otsa on kinnitatud koormis massiga  $m$ . Varda pikkus on  $l$ . Varda kinnitusele mõjub hõõrdest tingitud pidurdav jõumoment  $M$ . Millistes nurkade vahemikes võib olla varras paigal (vt joonist)? Arvestada, et  $mgl > M$ .



### Ü141 Toru ★

Autor: Tundmatu autor, lahtine, 2007, G 2

Kaks inimest kannavad toru massiga  $m = 80\text{ kg}$  ja pikkusega  $l = 5\text{ m}$ . Esimene inimene hoiab toru kaugusel  $a = 1\text{ m}$  toru otsast, teine aga hoiab toru teist otsa. Leida jõud, mida toru avaldab igale inimesele.

### Ü142 Nürinenud käärid ★

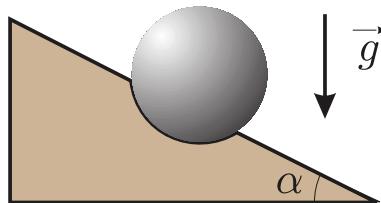
Autor: Mihkel Kree, lõppvoor, 2009, G 1

Juku asus hezikääridega õunapuult jämedat kuivanud oksa lõikama. Et aga käärid olid juba ammu nürinenud, polnud neist mingit abi. Enamgi veel, oks hakkas kääride kokkuvajutamise ajal terade vahel lausa libisema. Libisemine peatus hetkel, mil terade vaheline nurk oli kahanenud  $\alpha$ -ni. Kui suur oli hõõrdetegur oksa ja nürinenud lõiketera vahel?

### Ü143 Kuul ★★

Autor: Tundmatu autor, lahtine, 2005, G 3

Metallist kuul asetseb lauaaugus, mille sügavus on 2 korda väiksem kuuli raadiusest (vt joonist). Kui suure laua kaldenurga  $\alpha$  puhul kuul kukub august välja?



**Ü144 Katus ★★**

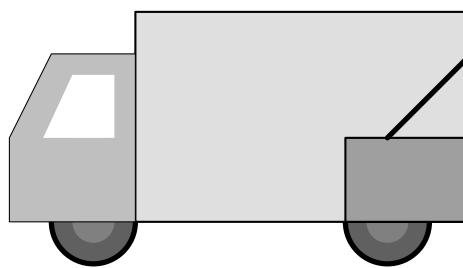
Autor: Ott Krikmann, piirkonnavor, 2005, G 2

Ühtlase lumekihiga kaetud katus on horisondi suhtes kaldu  $\alpha = 40^\circ$  nurga all. Katus on ristküliku kujuline ja laius harjast räästani mööda katuse pinda on  $L$ . Katuse ja lume vaheline hõordetegur on  $\mu = 1$ . Katuse harjast hakkab lumekihi ja katuse vahele voolama vesi, mis muudab märja katuse ja lumekihi vahelise hõordeteguri nulliks. Kui vesi jõub katuseharjast kaugusele  $l$ , hakkab lumekiht alla libisema. Leidke suhe  $l/L$ .

**Ü145 Kast kaubikus ★★**

Autor: Oleg Košik, lõppvoor, 2009, G 2

Kast massiga  $m = 15\text{ kg}$  on kinnitatud kaubiku tagaseina külge nööriga. Leida nööri pinge minimaalne võimalik väärustus äkkpidurduse ajal, kui kiirusega  $v_0 = 45\text{ km/h}$  sõitev kaubik jäab seisma ajaga  $t = 5\text{ s}$ . Hõordetegur kasti aluse ja kaubiku põrandvahele  $\mu = 0,2$ , nurk nööri ja kaubiku tagaseina vahel  $\alpha = 45^\circ$ . Lugeda, et pidurdamine oli ühtlane ja kast püsis kogu aeg paigal.

**Ü146 Liivahunnik ★★**

Autor: Roland Matt, piirkonnavor, 2011, G 5

Millisele pindalale on võimalik mahutada koonusekujuline liivahunnik, kui liiva ruumala on  $V = 50\text{ m}^3$  ja libisevate liivakihtide vaheline efektivne hõordetegur  $\mu = 0,4$ ? Liivahunniku ja aluspinna hõordeteguri võib lugeda väga suureks.

**Ü147 Tormituul ★★**

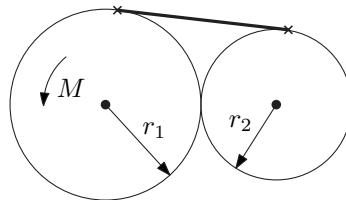
Autor: Mihkel Kree, lõppvoor, 2011, G 3

Vaatleme tugeva külgtuule kätte jäänud veoautot lihtsustatult homogeense risttuhkana. Auto laius on  $a = 2\text{ m}$ , kõrgus  $b = 3\text{ m}$ , pikkus  $c = 5\text{ m}$ . Missugune peaks olema hõordetegur rataste ja maapinna vahel, et piisavalt tugev külgtuul saaks auto tuulepoolsete rattade maast lahti kergitada?

**Ü148 Hammasrattad ★★**

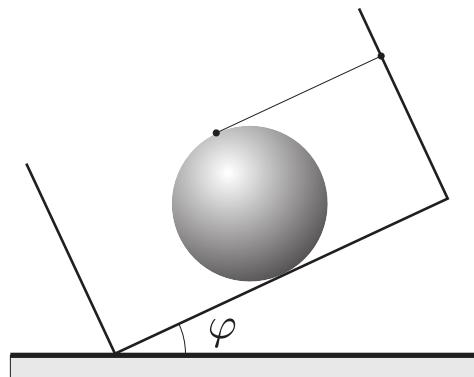
Autor: Siim Ainsaar, lõppvoor, 2010, G 4

Fikseeritud telgedega hammasrattad raadiustega  $r_1$  ja  $r_2$  hambuvad ja on ühen-datud venimatu nööriga, mis on mõlemale puutujaks. Esimest rattast pööratakse jõumomendiga  $M$ . Kui suur on nööri pinge  $T$ ?

**Ü149 Kuul ★★**

Autor: Tundmatu autor, lahtine, 2006, G 7

Kasti tasasel põhjal asub kuul. Kasti põhi asub nurga all horisontaalsuuna suhtes. Kuuli hoiab tasakaalus kasti seina külge kinnitatud niit, mis on paralleelne kasti põhjaga (vt joonist). Kui suure maksimaalse nurga  $\varphi$  võrra saab kasti kallutada, et kuul oleks veel tasakaalus? Höördetegur kuuli ja kasti vahel on  $\mu$ .

**Ü150 Toru ★★**

Autor: Aigar Vaigu, lõppvoor, 2010, G 5

Kareda horisontaalselt kinnitatud toru (raadius  $R$ ) peal tasakaalustatakse ristta-hukakujulist prussi. Leidke prussi paksus  $L$ , mille korral prussi asend torul on stabiilne.

*Märkus.* Võivad olla kasulikud väikeste nurkade korral kehtivad lähenused  $\sin \alpha \approx \alpha$  ja  $\cos \alpha \approx 1 - \alpha^2/2$ , kus nurgad on radiaanides.

**Ü151 Kuubik ★★★★**

Autor: Riho Taba, piirkonnavor, 2007, G 9

Kuubik massiga  $m = 10 \text{ kg}$  ning küljepikkusega  $a = 0,1 \text{ m}$  lebab laual. Laua ja kuubiku vaheline hõõrdetegur on  $\mu = 0,5$ . Kas kuubikut on võimalik käega teisele küljele ajada, avaldades vaid jõudu kuni  $F = 40 \text{ N}$ ? Eeldada, et hõõrdetegur käe ja kuubiku vahel on väga suur ehk käsi ei libise. Raskusjõu kiirendus on  $g = 9,8 \text{ m/s}^2$ .

**Ü152 Kuulid ★★★★**

Autor: Jaan Kalda, lahtine, 2009, G 9

Kolm ühesuguse raadiusega kuuli  $A$ ,  $B$  ja  $C$  on ühendatud kergete varraste abil võrdkulgseks kolmnurgaks  $ABC$ , mis lebab siledal (kuid nullist erineva hõõrdeteguriga) horisontaalpinnal. Kuuli  $C$  lükatakse hästi aeglaselt nii, et selle kiirusvektor on kogu aeg risti sirgega  $AC$ . Kui kuul  $A$  on pisavalt raske (st masside suhe  $M_A/M_B$  on piisavalt suur), siis jäab kuul  $A$  paigale. Millise suhte  $M_A/M_B$  puhul hakkab kuul  $A$  libisema?

**Ü153 Rõngas ★★★★**

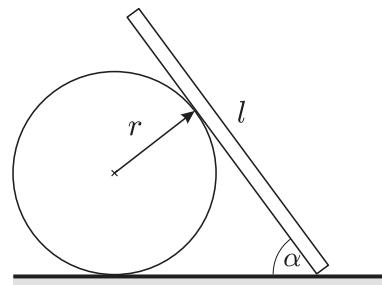
Autor: Jaan Kalda, lõppvoor, 2011, G 7

Ebaühtlase massijaotusega traadist on tehtud rõngas, mis kujutab endast ringi raadiusega  $R$ . Selle rõnga massikese asub ringi keskpunktist kaugusel  $R/2$ . Rõngas asetatakse horisontaalsele völliile rippuma. Milline peab olema rõnga ja völli vaheline hõõrdetegur  $\mu$ , et völli aeglasel pöörlemisel rõngas völlil ei libiseks?

**Ü154 Varras ★★★★★**

Autor: Siim Ainsaar, lõppvoor, 2008, G 9

Peenike homogeenne varras toetub ühe otsaga vastu põrandat (hõõrdetegur varda otsa ja põrandata vahel on  $\mu$ ) ning küljega vastu libedat horisontaalset silindrit (hõõrdetegur on tühisele väike), vt joonist. Silinder on liikumatult kinnitatud põrandata külge, varras on risti silindri teljega ning moodustab põrandaga nurga  $\alpha$ . Millise varda pikkuse  $l$  korral jäab varras sellisesse asendisse püsima?

**Ü155 Konn ★★★★★**

Autor: Taavi Pungas, lahtine, 2010, G 9

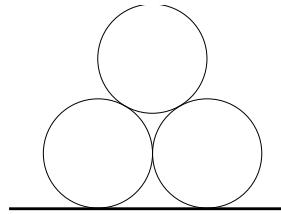
Väike puukonn suudab ronida mööda seinu ja lagesid, luues enda ja seina vahele seinaga risti oleva tõmbejõu (nt iminappade tekitatud vaakumiiga) ning vältides libisemist selle tagajärvel tekkiva hõõrdejõu abil. Millise nurga all maapinna suhtes peab olema sein, et tal oleks end kõige raskem paigal hoida (mil libisemise vältimiseks vajalik seinaaga risti olev jõud on maksimaalne)? Hõõrdetegur seina ja konna vahel on  $\mu$ .



**Ü156 Torud ★★★★**

Autor: Jaan Kalda, piirkonnavor, 2010, G 10

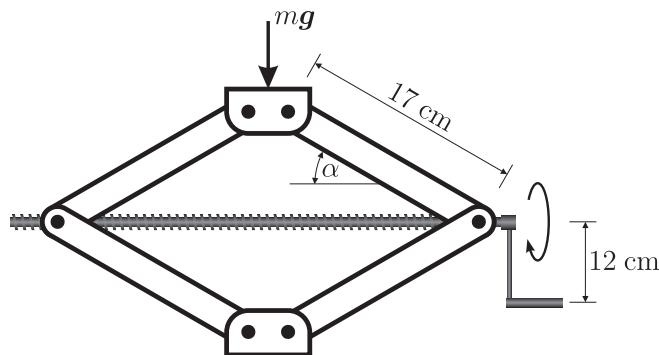
Põrandale asetatakse kõrvuti kaks ühesugust silindrilist toru — paralleelselt ja küljetsi üksteist puutuvana. Kolmas samasugune toru asetatakse nende peale — samuti paralleelselt, nõnda et see toetub kahele alumisele. Milliseid tingimusi peavad rahuldama hõõrdetegur  $\mu$  toru ja põranda vahel ning hõõrdetegur  $k$  kahe toru vahel selleks, et pealmine toru kahte alumist üksteisest eemale ei vajutaks?

**Ü157 Tungraud ★★★★**

Autor: Valter Kiisk, lõppvoor, 2011, G 10

Joonisel on kujutatud lihtsa konstruktsiooniga tungraud, mille keerme samm on 3 mm. Tungrauale surub auto jõuga  $F = 5 \text{ kN}$ . Vaatleme hetke, millal  $\alpha = 40^\circ$ . Tungraua mõõtmeid vaadake joonisel.

- a)** Kui suure jõuga tuleb auto tööstmiseks vända käepidemele mõjuda, kui jäätta arvestamata hõõrdumine kõigi libisevate pindade vahel?
- b)** Kui hõõre oleks ka tegelikult tühiselt väike, siis ei püsiks tungraud üleskeeratud asendis: niipea, kui käepidemest lahti lasta, hakkaks see auto raskuse mõjul pöörlema ja auto vajuks taas alla. Vastake eelmisele küsimusele eeldusel, et hõõrdetegur on parajasti nii suur (st mitte suurem, kui hädapärast vaja), et tungraud jäääks üleskeeratud asendisse püsima.



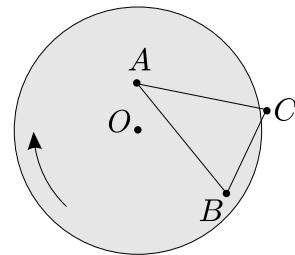
**Ü158 Platvorm ★★★★**

Autor: Jaan Kalda, lõppvoor, 2005, G 10

Siledas põrandas on pöörlev ringikujuline platvorm (joonisel pealtvaates, hall), mis on samast materjalist nagu põrandki (joonisel valge). Põrand ja platvormi ülemine pind on samal horisontaaltasandil. Kolm ühe-sugust keha ühendatakse kergete varraste abil kolmnurgaks ning asetatakse sedasi, et kaks keha asuvad platvormil punktides  $A$  ja  $B$  (vt joonist). Vardad ei puuduta ei põrandat, ega platvormi.

- a)** Kui kolmas keha lebaks põrandal punktis  $C$ , kas siis kolmnurk hakkaks põrand suhtes liikuma või jäeks paigale? Põhjendage vastust.  
**b)** Märkige joonisel selline punktihulk  $X$ , kus võiks asuda kolmas keha nii, et kolmnurk jäeks põrand suhtes paigale.

*Märkus.* Kolmnurga külgede  $AC$  ja  $BC$  pikkusi võib muuta. Seega, kui kolmas keha asub punktis  $D \in X$ , siis üldjuhul  $|AD| \neq |AC|$  ja  $|BD| \neq |BC|$ .



## Taevamehaanika

### Ü159 Satelliit ★

Autor: Mihkel Pajusalu, piirkonnavor, 2011, G 2

Satelliit tiirleb ringikujulisel orbiidil (raadiusega  $r = 7000$  km) ümber maakeraga, kusjuures satelliidi orbit on samas tasapinnas Maa orbiidiga ümber Päikeset. Kui suure osa ajast veedab satelliit keskmiselt Maa varjus? Maa läbimõõt on  $R = 6378$  km. Päikeselt tulevad kiired võib lugeda paralleelseteks ja Maa liikumise ühe satelliidi orbiiditalperioodi jooksul tühiseks.

### Ü160 Väike prints ★

Autor: Urmo Visk, piirkonnavor, 2009, G 1

Väike Prints elab sfäärilisel asteroidil B-612. Jalutades märkas väike prints, et mida kiiremini ta könnib, seda kergemaks ta muutub. Kui väike prints jooksis piki asteroidi ekvaatorit kiirusega  $v = 6$  m/s, siis muutus ta kaalutuks ja hakkas asteroidi pinna kohal hõljuma. Kui suur on asteroidi raadius  $R$ ? Eeldame, et asteroid ei pöörle. Asteroidi tihedus on  $\rho = 5200$  kg/m<sup>3</sup>, gravitatsioonikonstant  $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$  m<sup>3</sup> kg<sup>-1</sup> s<sup>-2</sup>.

### Ü161 Eksinud satelliit ★★

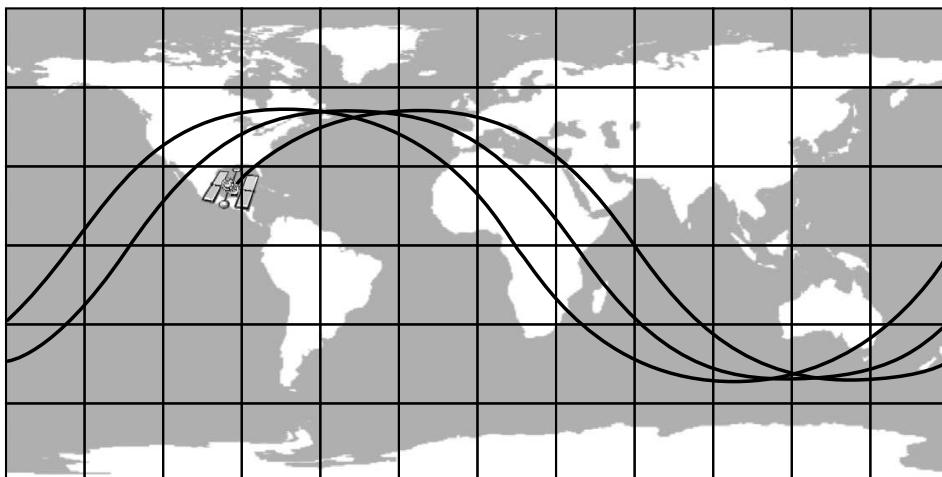
Autor: Tundmatu autor, lahtine, 2009, G 5

Sidesatelliidid paiknevad geostatsionaarsel orbiidil — st niisugusel ringorbiidil, mille raadius ja suund on sellised, et satelliit püsib maapinna suhtes kogu aeg pügal. Ühe sidesatelliidi saatmisel aga esines viga, nii et ta saavutas küll õige kõrguse, kuid ringorbiidi suund sattus juhuslik. Milline on suurim võimalik suhteline kiirus, millega võib selliselt „eksinud“ satelliit kokku põrkuda mõne teise sidesatelliidiga? Maa raadius on  $R = 6400$  km, raskuskiirendus maapinnal  $g = 9,8$  m/s<sup>2</sup>.

**Ü162 Kosmosejaam ★★★**

Autor: Oleg Košik, lõppvoor, 2005, G 9

Joonisel on toodud ringorbiidil liikuva rahvusvahelise kosmosejaama trajektoor maapinna kohal (Maa keskpunktist kosmosejaamaani tömmatud sirge ja maapinna lõikepunkt jälg). Hinnake selle abil kosmosejaama körgust maapinnast. Maa raadius  $R = 6380$  km, raskuskiirendus maapinnal  $g = 9,8 \text{ m/s}^2$ .

**Ü163 Kuukaabel ★★★**

Autor: Siim Ainsaar, piirkonnnavoor, 2009, G 10

Oletame, et Maa ja Kuu on ühendatud sirge homogeense mölema suhtes radiaalse kaabliga.

- a) Mitu korda on Maa poolt kaabliile avaldatav raskusjöud suurem Kuu-poolsest?
- b) Maa pinnal asuv kaabli kinnitus sellele vertikaalsihis jöudu ei avalda. Kui kõrgel Kuu kohal asub punkt, kus pisut liiga nörk kaabel katkeks?

Lugegem taevakehad paigalseisvaiks. Maa raadius  $r_M = 6370$  km, Kuu raadius  $r_K = 1740$  km, Maa mass  $m_M = 5,97 \cdot 10^{24}$  kg, Kuu mass  $m_K = 7,35 \cdot 10^{22}$  kg, taevakehade keskmete vahekaugus  $D = 3,80 \cdot 10^5$  km.

*Abivalem.* Kui kaablit tömbaks Maa üksi ning otspunktide kaugused Maa tsentrist oleksid  $a$  ja  $b$ , mõjuks sellele raskusjöud  $Gm_M\lambda\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)$ , kus  $G$  on gravitatsioonikonstant ning  $\lambda$  kaabli joontihedus (ühikuga kg/m).

**Ü164 Satelliidid ★★★★☆**

Autor: Mihkel Kree, lõppvoor, 2010, G 7

2009. aasta veebruaris põrkasid Siberi kohal 780 kilomeetri kõrgusel kokku USA ja Venemaa satelliidid. Pidades silmas, et ümber Maa tiirleb juba tuhandeid satelliite ning nende kõigi orbiite pole seetõttu võimalik omavahel koordineerida, hinnake mitme aasta tagant keskelt läbi niisugused juhuslikud kokkupõrked aset leiavad. Oma lahenduses kasutage järgmisi hinnanguid ja lähenust: maalähedaste satelliitide arv  $N = 2500$ ; orbiidid jäavad maapinnast kõrgustest vahemikku  $h_1 = 200 \text{ km}$  kuni  $h_2 = 2000 \text{ km}$  ning satelliidid on jaotunud selles kihis ühtlasse ruumtihedusega; tüüpilise satelliidi ristlõikepindala  $S = 10 \text{ m}^2$ . Maa raadius  $R = 6400 \text{ km}$ , raskuskiirendus maapinnal  $g = 10 \text{ m/s}^2$ .

## Termodünaamika

### Ü165 Balloon ★

Autor: Jaan Susi, lõppvoor, 2005, G 3

Suletud balloon ruumalaga  $V = 101$  oli täidetud veega temperatuuril  $t_0 = 0^\circ\text{C}$ . Samal temperatuuril külmutati vesi jääks, mille tulemusena balloonist venis välja ja vesi avaldas kogu jäätumise protsessi käigus balloonile rõhku  $p = 5 \cdot 10^7 \text{ Pa}$ .

Leida balloonis olnud vee ( $\text{H}_2\text{O}$ ) siseenergia muut koos märgiga. Jää tihedus  $\rho_j = 900 \text{ kg/m}^3$  ja sulamissoojuseks antud rõhul  $\lambda = 317 \text{ kJ/kg}$ . Jää ja vee kokkusuru-tavust mitte arvestada.

### Ü166 Kütteklaas ★

Autor: Jaak Kikas, lõppvoor, 2007, G 1

Ruumide soojendamiseks kasutatava elektriliselt köetava klaasi pind on kaetud õhukese valgust läbilaskva elektrit juhtiva kihiga, mille vastasservadele rakenda-takse elektriline pingi (vool kulgeb mööda klaasi pinda). Kuidas suhtuvad selli-sest klaasist valmistatud ristikülikukujuliselt aknalt eralduvad soojusvõimsused  $P_H$  ja  $P_V$  sama pingi rakendamisel vastavalt klaasi horisontaalsele ( $P_H$ ) ja verti-kaalsete ( $P_V$ ) servade vahel? Akna horisontaalmõõde  $a = 0,5 \text{ m}$  ja vertikaalmõõde  $b = 1 \text{ m}$ .

### Ü167 Jääkuul ★

Autor: Urmo Visk, piirkonnnavoor, 2008, G 4

Õhukeste seintega jääst kera sees on õhk. Algsest on jääkera külmkapis temperatuuril  $t_0 = -9^\circ\text{C}$  ning õhurõhk tema sees võrdub välisrõhuga  $p_0 = 105 \text{ kPa}$ . Kera töstetakse külmikust välja tuppa, kus see hakkab soojenema. Kera sein on nii õhu-ke, et maksimaalne ülerõhk (st. sise- ja välisrõhkude vahe), mida ta purunemata talub on  $\Delta p = 0,2p_0$ . Mis juhtub enne, kas kera hakkab sulama või ta puruneb ülerõhu tõttu? Kuuli soojenemine lugeda nii aeglaseks, et igal ajahetkel võib lu-geda õhu temperatuuri tema sees ning seinte sise- ja välispinna temperatuurid võrdseks.

### Ü168 Küttesüsteem ★

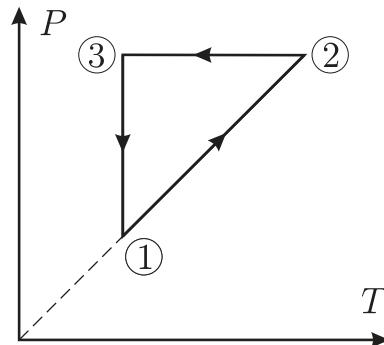
Autor: Tundmatu autor, piirkonnnavoor, 2011, G 3

Küttesüsteem täidetakse  $t_1 = 10^\circ\text{C}$  temperatuuriga veega. Kui palju peab paisu-paagis olema vaba ruumi, et kütmisel avatud paisupaagist vesi välja ei voolaks? Küttesüsteemis on  $V_1 = 250 \text{ liitrit}$  vett ja töölukorras on selle keskmine tempera-tuur  $t_2 = 63^\circ\text{C}$ . Vee ruumpaisumistegur on  $\beta = 3 \times 10^{-4} \text{ K}^{-1}$ . Vedeliku ruumala mingil temperatuuril avaldub kujul  $V = V_0(1 + \beta t)$ , kus  $t$  on vedeliku temperatuur Celsiusi kraadides, ning  $V_0$  on vedeliku ruumala temperatuuril  $0^\circ\text{C}$ .

**Ü169 Ringprotsess**

Autor: Riho Taba, piirkonnavoor, 2006, G 2

Kas joonisel kujutatud ringprotsessil on ideaalse gaasi töö positiivne või negatiivne? Põhjendada vastust.

**Ü170 Vedelike segamine**

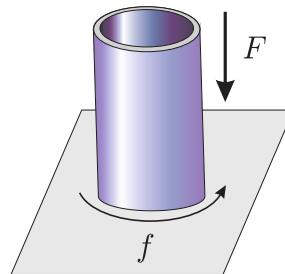
Autor: Aleksei Vlassov, piirkonnavoor, 2007, G 3

Kahe erineva vedeliku segamisel ruumalade suhtega  $1 : 1$  tekib segu temperatuuriga  $t_3 = 42^\circ\text{C}$ . Milline oleks segu temperatuur, kui ruumalade suhe oleks  $2 : 1$ ? Vedelike temperatuurid on vastavalt  $t_1 = 27^\circ\text{C}$  ning  $t_2 = 47^\circ\text{C}$ .

**Ü171 Tulehõõrumine**

Autor: Jaak Kikas, piirkonnavoor, 2008, G 3

Jõuga  $F$  otsapidi vastu tasast pinda surutud toru põörleb sagedusega  $f$ . Toru läbimõõt on  $D$  ja seina paksus  $d \ll D$ . Toru otspind on risti toru teljega, hõõrdetegur toru ja tasapinna vahel on  $\mu$ . Kui palju soojusenergiat vabaneb ajavahemiku  $\Delta t$  jooksul?



**Ü172 Termos ★**

Autor: Urmo Visk, piirkonnnavoor, 2009, G 3

Termoses, mis on ümbritsevatest kehadest soojuslikult isoleeritud, on  $m_1 = 300\text{ g}$  vett temperatuuriga  $t_1 = 20^\circ\text{C}$ . Sellele lisatakse  $m_2 = 600\text{ g}$  vett temperatuuriga  $t_2 = 80^\circ\text{C}$ . Pärast soojusliku tasakaalu saabumist mõõdeti vee temperatuuriks  $T_1$ . Järgmisel korral oli samas anumas alguses  $m_2 = 600\text{ g}$  vett temperatuuriga  $t_2 = 80^\circ\text{C}$  ja sellele lisati  $m_1 = 300\text{ g}$  vett temperatuuriga  $t_1 = 20^\circ\text{C}$ . Nüüd mõõdeti vee temperatuuriks soojusliku tasakaalu saabumise järel  $T_2 = T_1 + 2^\circ\text{C}$ . Kui suur on termose materjali erisoojus? Tühja termose mass on  $m = 140\text{ g}$  ja vee erisoojus  $c = 4200\text{ J/kg}\cdot\text{C}$ .

**Ü173 Rauatükk ★**

Autor: Oleg Košik, lahtine, 2010, G 2

Anumasse, milles oli  $V = 1\text{ l}$  vett temperatuuril  $t_1 = 20^\circ\text{C}$ , visati rauatükk massiga  $m = 100\text{ g}$  temperatuuril  $t_0 = 500^\circ\text{C}$ . Osa veest aurustus. Mõne aja pärast mõõdeti vee temperatuuriks  $t_2 = 24^\circ\text{C}$ . Kui palju vett aurustus välja? Vee erisoojus  $c_1 = 4200\text{ J}/(\text{kg}\cdot^\circ\text{C})$ , aurustumissoojus  $L = 2,26 \cdot 10^6\text{ J/kg}$  ja tihedus  $\rho = 1000\text{ kg/m}^3$ ; raua erisoojus  $c_2 = 460\text{ J}/(\text{kg}\cdot^\circ\text{C})$ . Anum on tühise soojusmahutusega ning väliskeskonnast hästi isoleeritud.

**Ü174 Jõhvikad ★**

Autor: Urmo Visk, piirkonnnavoor, 2010, G 2

Keevasse vette kallatakse külmutatud jõhvikaid. Vee temperatuur langes väärtseni  $t = 89^\circ\text{C}$ . Mitu korda oli vee mass suurem jõhvikate massist? Kuna jõhvikad oli väikesed ja sulasid väga kiiresti, siis võib vee soojusvahetuse ümbritseva keskkonnaga arvestamata jätkta. Jõhvikate algtemperatuur oli  $t_2 = -18^\circ\text{C}$ . Jää erisoojus  $c_j = 2100\text{ J}/(\text{kg}\cdot\text{C})$ , vee erisoojus  $c_v = 4200\text{ J}/(\text{kg}\cdot^\circ\text{C})$ , jää sulamissoojus  $L = 330\text{ kJ/kg}$ . Jõhvikate suure veesisalduse tõttu võib need jäädna käsitleda.

**Ü175 Vesi ★**

Autor: Taavi Pungas, lõppvoor, 2011, G 1

Avatud termoses on vesi temperatuuril  $t_0 = 100^\circ\text{C}$ . Sellest 1% aurustub. Hinntata, kui palju muutub termosesse jäänud vee temperatuur  $t$ . Vee erisoojus  $c_v = 4,2\text{ kJ kg}^{-1}\text{ K}^{-1}$ , veeauru erisoojus  $c_a = 1,9\text{ kJ kg}^{-1}\text{ K}^{-1}$  ning vee aurustumissoojus temperatuuril  $100^\circ\text{C}$  on  $L = 2,26\text{ MJ/kg}$ . Eeldada, et termose seinte kaudu soojuskadusid ei ole.

**Ü176 Kastmisvesi ★★**

Autor: Urmo Visk, piirkonnnavoor, 2008, G 5

Päikesisel suvepäeval langeb päikesekiirtega risti olevale ühe ruutmeetrisele pinnale ühes sekundis keskmiselt  $\varepsilon = 0,5\text{ kJ}/(\text{s m}^2)$  energiat. Kastmisvett soojendatakse pilgeni täis valatud õhukeseseinalises kerakujulisnes anumas raadiusega  $R = 0,5\text{ m}$ . Eeldada, et veeanum on päeva jooksul täielikult valgustatud. Kastmisvee temperatuur päikesetöusu ajal kell 4.30 oli  $t_0 = 16^\circ\text{C}$ . Kui suur on kastmisvee temperatuur päikeseloojangu ajal kell 22.30? Vee erisoojus on  $c = 4200\text{ J}/(\text{kg}\cdot^\circ\text{C})$ , tihedus  $\rho = 1\text{ kg/dm}^3$ . Eeldada, et anum neelab kogu pealelangeva päikesevalguse energiaga ning, et kogu päikesevalguse energia läheb kastmisvee soojendamiseks. Soojusvahetus kastmisvee ja keskkonna vahel lugeda tühiseks.

**Ü177 Lihvimisketas ★★**

Autor: Ott Krikmann, piirkonnavoor, 2005, G 3

Detaili lihvatakse horisontaalselt pöörleva lihvimiskettaga, mille raadius on  $r = 20\text{ cm}$ . Ülekuumenemise välimiseks jahutatakse seda veega. Aja  $t = 1\text{ s}$  jooksul eraldub ketta ühelt ruutmeetritl ( $s = 1\text{ m}^2$ ) keskmiselt  $q = 10\text{ kJ}$  suurune soojushulk, mille neelab jahutusvesi. Jahutusvett, algtemperatuuriga  $t_1 = 10^\circ\text{C}$ , juhitakse ketta tsentrisse vooga  $w = 10\text{ cm}^3/\text{s}$ . Vee erisoojus  $c = 4200\text{ J}/(\text{kg K})$ . Leidke üle kettaääre voolava vee keskmise temperatuuri  $t_2$ .

**Ü178 Vee keemine ★★**

Autor: Mihkel Kree, lõppvoor, 2008, G 6

Mari keetis Mikule teed, aga vesi läks seekord keema alles  $t_0 = 105^\circ\text{C}$  juures, kui-gi toas oli normaalrõhk. Milles asi? Teatavasti hakkab vesi keema siis, kui küllastunud veeauru rõhk saab võrdseks õhurõhuga ning kogu anuma ulatuses saavad hakata paisuma küllastunud auruga tädetud mullid; tavaliselt on vees küllalda-selt tahkeid osakesi, millele tekivad piisavalt suured mullid, nii et pindpinevusega pole tarvis arvestada. Oletades aga, et seekord oli vesi haruldaselt puhas, hinnake, missugune oli mullide suurim võimalik raadius enne keemist. Vee pindpinevuseks keemistemperatuuril võib võtta  $\sigma = 58 \cdot 10^{-3}\text{ N/m}$  ning lineaarses lähindus-es arvestada, et temperatuuri tõstmisel ühe kraadi võrra suureneb küllastunud veeauru rõhk  $\Delta p = 3,5\text{ kPa}$  võrra (keemistemperatuuri läheduses)

**Ü179 Vesi ja jää ★★**

Autor: Andres Laan, piirkonnavoor, 2010, G 5

Kahte suurt paralleelset metallplaati hoitakse horisontaalselt vastastikku. Üks plaatidest on temperatuuril  $T_1 = -20^\circ\text{C}$  ja teine temperatuuril  $T_2 = 20^\circ\text{C}$ . Metallplaatide vahel on vesi. Ilmselgelt on külma plaadi läheduses vesi tahkes olekus. On teada, et vee tahke ja vedela kihi paksuste suhe on 4. Millisele temperatuuri-le tuleb soojendada teine metallplaat, et vedela kihi paksus saaks võrdseks tahke kihi paksusega?

**Ü180 Destillaator ★★**

Autor: Koit Timpmann, lõppvoor, 2010, G 2

Destillaator toodab tunnis  $V = 21$  puhast vett. Sisenev aur ja kondenseerunud vesi on samal temperatuuril. Auru kondenseerumisel vabanenud soojusest ku-lub  $\eta = 95\%$  jahutusvee soojendamiseks. Jahutussüsteem kujutab endast pikka toru, milles voolab jahutusvesi. Toru ristlöikepindala on  $S = 0,8\text{ cm}^2$ . Destillaato-risse siseneva ja sealt väljuva jahutusvee temperatuurid erinevad  $\Delta T = 30^\circ\text{C}$  võrra. Kui kiiresti peab vesi voolama jahutussüsteemis? Vee aurustumissoojus  $L = 2300\text{ kJ/kg}$ , vee erisoojus  $c = 4,2\text{ kJ}/(\text{kg K})$  ja vee tihedus  $\rho = 1000\text{ kg/m}^3$ .

**Ü181 Külmatusseade ★★★**

Autor: Tundmatu autor, piirkonnavoor, 2005, G 8

Külmatusseadme mootor teeb tööd  $A = 2\text{ kJ}$ . Kui suur on maksimaalne külmatusseadmes kehalt äravõetav soojushulk, kui külmatusseadme sisetemperatuur on  $t_k = -15^\circ\text{C}$  ja seadme jahutusvedeliku temperatuur on  $t_j = 10^\circ\text{C}$ ?

*Vihje.* Külmatusseadet võib vaadelda kui pööratud töötsükliga ideaalset soojusmasinat. See tähendab, et kõik tööd ja soojushulgad on vastupidise märgiga. Nii-siis mootor ei tee tööd, vaid tema töös hoidmiseks on vaja teha tööd; madala tem-peratuuriga keskkond ei saa soojust, vaid annab soojust ära.

### Ü182 Elektripliit ★★

Autor: Tundmatu autor, lahtine, 2007, G 8

Elektripliid spiraali poolt ajaühikus keskkonnale üle antav soojushulk sõltub li-neaarselt spiraali ja toa õhu temperatuuride vahest:  $N = \kappa(T - T_0)$ . Spiraali takistus sõltub sellest samuti lineaarselt:  $R = R_0[1 + \alpha(T - T_0)]$ , kus  $R_0$  on spiraali takistus toatemperatuuril. Kui suure temperatuurini kuumeneb spiraal, kui seda läbib vool tugevusega  $I$ ?

### Ü183 Õhuaken ★★

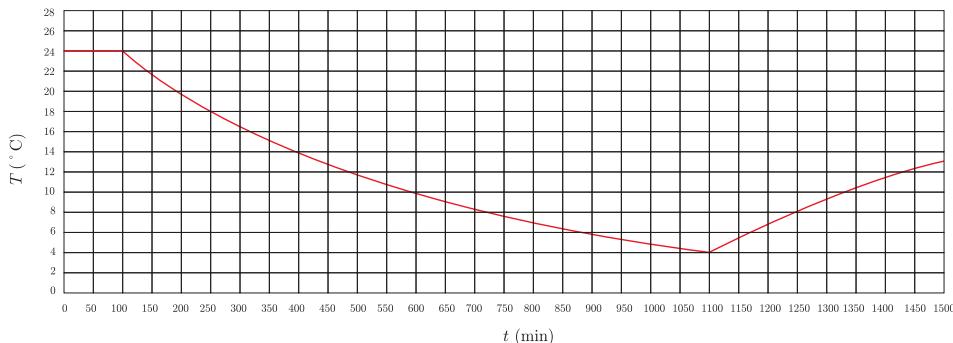
Autor: Jaan Kalda, lõppvoor, 2009, G 6

Tuba köetakse elektriradiaatoriga, mille võimsus on  $P = 1 \text{ kW}$ . Välistemperatuur on  $t_0 = 0^\circ\text{C}$ , toas püsib ühtlane temperatuur  $t_1 = 20^\circ\text{C}$ . Nüüd avatakse õhuaken ning õueõhku tuleb tappa kiirusega  $v = 20 \text{ l sekundis}$ . Milliseks kujuneb toatemperatuur? Õhu võib lugeda ideaalseks gaasiks, mille soojusmahtuvus konstantsel rõhul ühe mooli kohta on  $c_P = \frac{7}{2}R$ . Eeldada, et soojuskaod läbi seinte on võrdlised sise- ja välistemperatuuride vahega.

### Ü184 Tuba ★★

Autor: Oleg Košik, lõppvoor, 2006, G 7

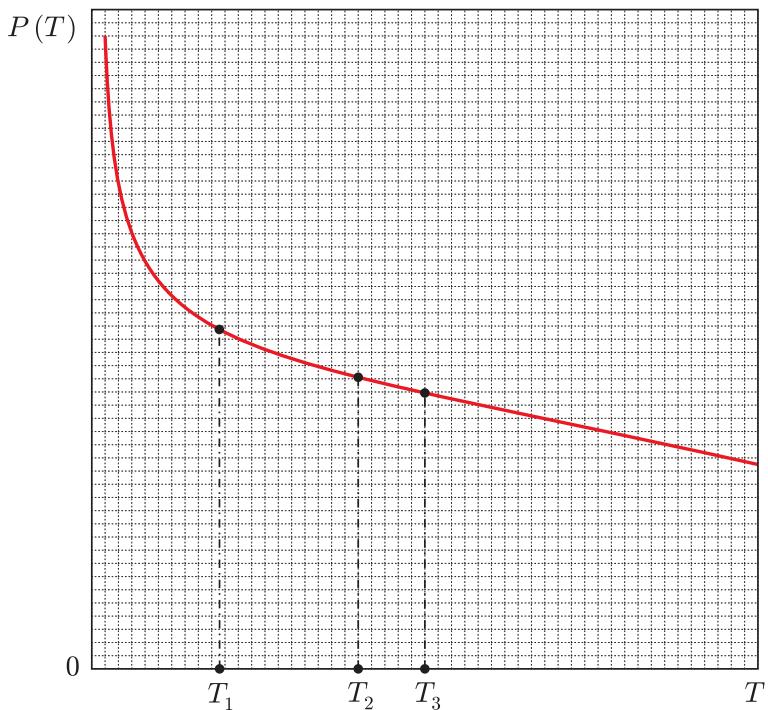
Külmade töttu läks küttessüsteem rikki ja temperatuur toas hakkas langema. Ühel hetkel pandi tööle ajas muutumatu võimsusega töötav soojapuhur ning temperatuur toas hakkas taas tõusma. Graafikul on toodud toatemperatuuri sõltuvus ajast. Leidke toatemperatuur pika aja möödumisel. Protsessi välitel välistingimusid ei muutunud. Seinte ja toas olevate esemete soojusmahtuvusega mitte arvestada. Soojusvahetuse kiirus väliskeskkonnaga ei ole võrdeline temperatuuride vahega.



### Ü185 Küttekeha ★★

Autor: Mihkel Heidelberg, lõppvoor, 2007, G 7

Teatud ruumi köetakse sellise küttekehaga, mille võimsus  $P$  sõltub ruumi temperatuurist nagu on näidatud joonisel. Kui välistemperatuur on  $T_1$ , siis ruumi temperatuur stabiliseerub  $T_2$  juures (need temperatuurid on märgitud graafikul). Millise temperatuurini töuseb toatemperatuur, kui välistemperatuur töuseb  $T_3$ -ni (leida see temperatuur graafilise konstrueerimise abil). Soojusvahetus keskkonnaga on võrdeline temperatuuride vahega.



### Ü186 Soojuskiirgus ★★★

Autor: Valter Kiisk, lõppvoor, 2006, G 8

Veeldatud gaaside säilitamisel on tarvis palju tähelepanu pöörata anuma soojusisolatsioonile. Olulise osa soojusvahetusest moodustab soojuskiirgus. Oletagem, et anumal on kahekordsed seinad, mille kiirgusvõimsus pinnaühiku kohta on  $\epsilon\sigma T^4$ , kus Stefan-Boltzmanni konstant  $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W}/(\text{m}^2 \text{ K})$  ja seinte kiirgamisvõime  $\epsilon$  loeme temperatuurist sõltumatuks ja võrdseks 0,1-ga. Vedela lämmastikuga kokkupuutes oleva siseseina temperatuur on  $T_s = 77 \text{ K}$ , toaõhuga kokkupuutes oleva välisseina temperatuur aga  $T_v = 293 \text{ K}$ .

**a)** Leidke soojuskiirgusest tingitud soojusvoog läbi  $S = 1 \text{ cm}^2$  suuruse seinapinna.

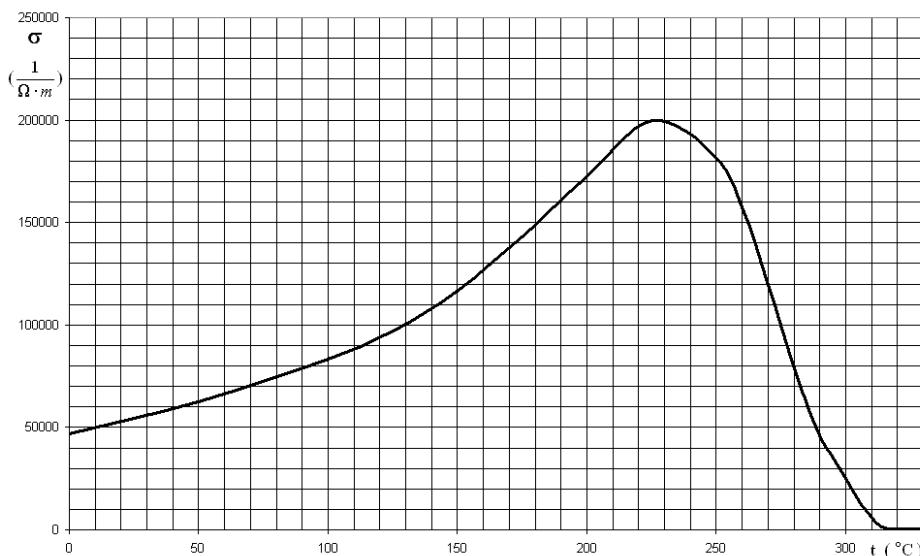
**b)** Soojusvoo vähendamiseks asetatakse sise- ja välisseina vahel  $N$  õhukest ekraani, mille pind on kaetud samasuguse materjaliga nagu anuma seinad. Mitu korda väheneb selle tulemusena soojusvoog? Põhjendage vastust.

*Märkus.* kehtib Kirchhoffi seadus – keha neelamisvõime, mis näitab, kui suur osa aine pinnale langevast kiirgusest needub, on alati võrdne tema kiirgamisvõimega  $\epsilon$ .

**Ü187 Pooljuht ★★★★**

Autor: Tundmatu autor, lahtine, 2008, G 10

Graafikul on antud pulgakujulise keraamilisest pooljuhist (nn. PTC takisti) soojendi materjali erijuhtivuse  $\sigma$  ( $1/(\Omega \cdot m)$ ) sõltuvus temperatuurist  $t$  ( $^{\circ}\text{C}$ ). Erijuhtivuseks nimetatakse eritakistuse pöördväärtust. Leida, millise temperatuurini kuumeneb avatud ruumis paiknev selles materjalist soojendi, kui tema otstele rakendatakse pinge  $U_1 = 60$  V. Milliseks kujuneb soojendi temperatuur, kui otstele rakendatud pinge on  $U_2 = 36$  V? On teada, et kui soojendi otstele rakendatakse pinge  $U_0 = 30$  V, siis soojendi temperatuuriiks kujuneb  $t_0 = 70$   $^{\circ}\text{C}$ . Välisõhu temperatuur on  $t_v = 20$   $^{\circ}\text{C}$ .



## Varia

### Ü188 Tunnel ★

Autor: Jaan Kalda, lahtine, 2008, G 3

Rong, mis sõidab kiirusega  $v = 50 \text{ km/h}$ , sisenes hästi pikka tunnelisse. Nii rongi kui tunneli ristlõiget lugeda ruuduks küljepikkusega vastavalt  $a = 4 \text{ m}$  ja  $b = 6 \text{ m}$ . Hinnake, milline on tuule kiirus rongi aknast mõõdetuna.

### Ü189 Kuu ★★

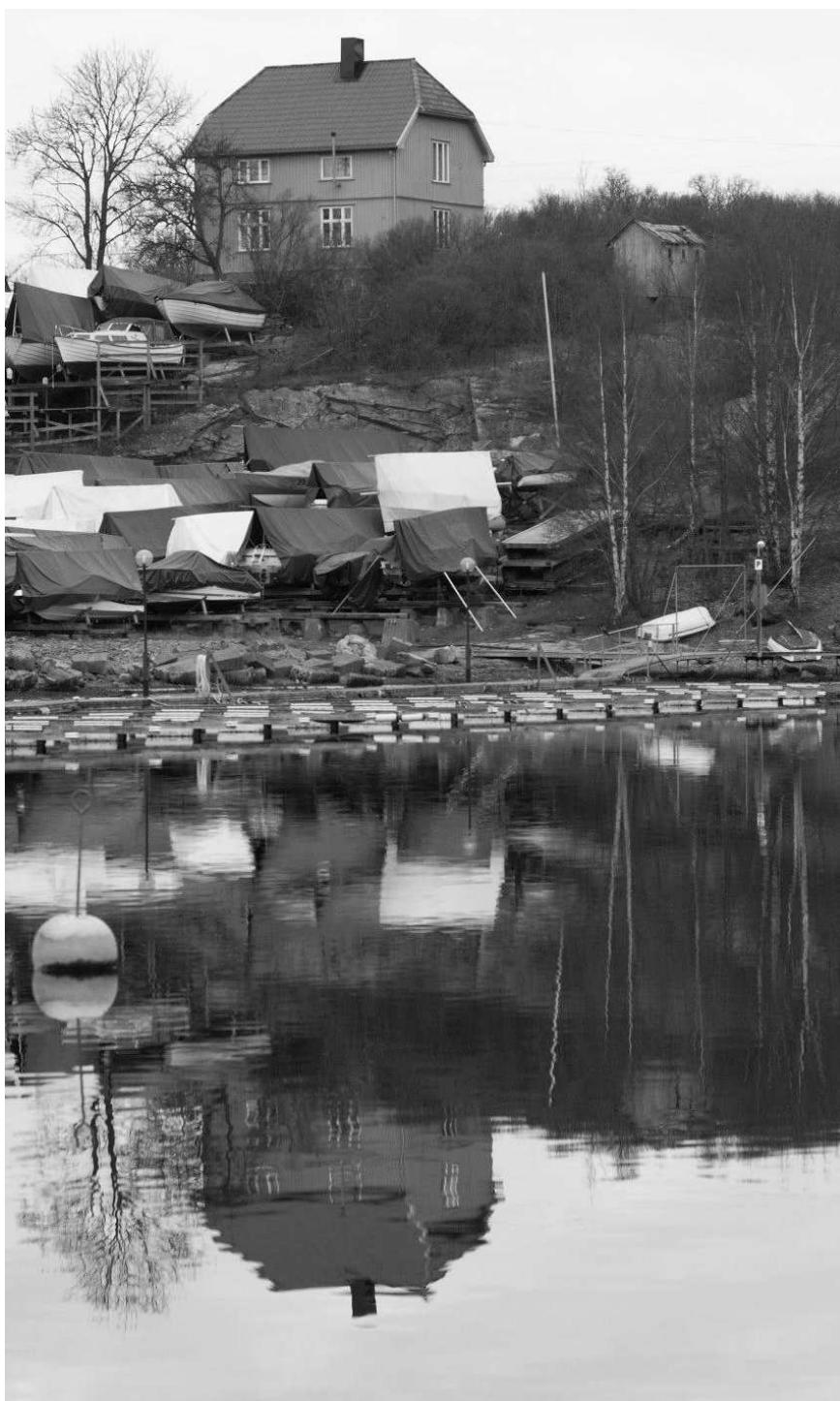
Autor: Urmo Visk, lõppvoor, 2006, G 5

Peegeldusteguriks nimetatakse pinnalt peegeldunud ja pinnale langenud valgusvõimsuste suhet. Säriaeg on ajavahemik, mille välitel langeb fotoaparaadis objektiivi läbinud valgus filmilindile. Päikeselisel sügispäeval on mingi objekti pildistamisel optimaalne säriaeg  $t_1 = 1/8000 \text{ s}$ . Sama objekti pildistamisel öösel, kui paistab täiskuu, on optimaalne säriaeg  $t_2 = 160 \text{ s}$ . Mõlema pildi tegemisel on erinev vaid säriaeg. Hinnake Kuu pinna keskmist peegeldustegurit. Kuu kaugus Maast  $R = 384\,000 \text{ km}$  ja Kuu raadius  $r = 1740 \text{ km}$ . Kvaliteetse pildi saamiseks peab filmile langev valgusenergia päeval ja öösel olema sama väärtsusega ehk fotografeerimisel võib valgustatuse ja optimaalse säriaaja lugeda pöördvõrdeliseks.

### Ü190 Maja ★★★

Autor: Jaan Kalda, lõppvoor, 2008, G 4

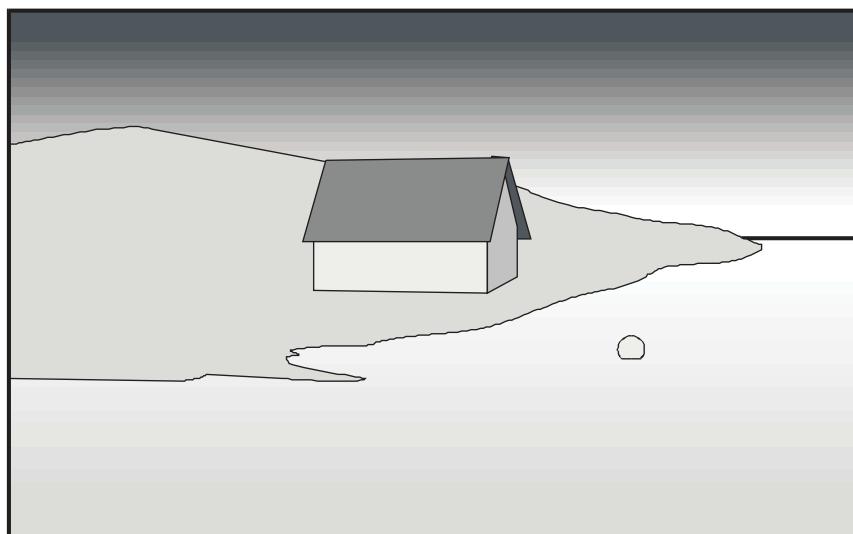
Fotol kujutatud maja alumise korruse kõrgus (mõõdetuna esimese korruse akna alumisest servast teise korruse akna alumise servani) on 3 meetrit. Kui kõrgel veepinnast on maja (täpsemalt, tema vundamendi ülemine serv)?



### Ü191 Maja ★★★

Autor: Jaan Kalda, lahtine, 2008, G 9

Juuresolev joonis on tehtud foto põhjal. Pildistamise hetkel asus fotoaparaat 2 m kõrgusele veepinnast. Kasutades antud joonist ja joonlauda määraseke nii täpselt kui võimalik vees ujuva poi läbimõõt!



## Vedelike mehaanika

### Ü192 Vedelik ★

Autor: Tundmatu autor, lahtine, 2005, G 1

Ühendatud silindriliistesse anumatesse diameetritega  $d_1$  ja  $d_2$  on valatud vedelik tihedusega  $\rho$ . Kui palju tõuseb vedeliku tase anumates, kui ühte anumasse panakse ujuma vedeliku tihedusest väiksema keha massiga  $m$ ?

### Ü193 Veetoru ★★

Autor: Taavi Pungas, lõppvoor, 2011, G 4

Kaks erineva diameetriga horisontaalset toru on otsapidi kokku ühendatud nii, et nende teljad ühtivad. Mööda esimest toru voolab vesi kiirusega  $v_1$ . Kummagi veetoru külge on ühendatud väike vertikaalne toruke, vedelikusamba kõrgused neis on vastavalt  $h_1$  ja  $h_2$  (toru teljest mõõtes). Leidke horisontaalsete torude diameetrite suhe. Höördumist mitte arvestada.

*Vihje.* Vedeliku horisontaalsel voolamisel kehtib Bernoulli seadus kujul  $\frac{\rho v^2}{2} + p = \text{Const}$ , kus  $p$  on hüdrostaatiline rõhk,  $\rho$  vedeliku tihedus ning  $v$  vedeliku kiirus.

### Ü194 Veekahur ★★★

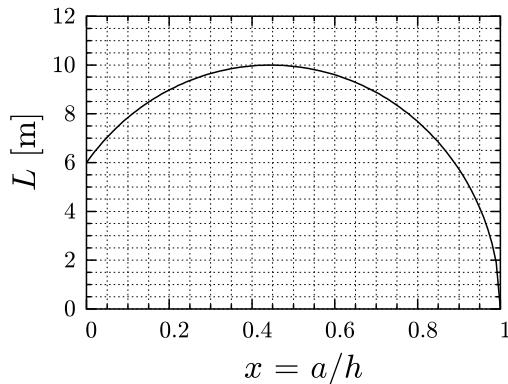
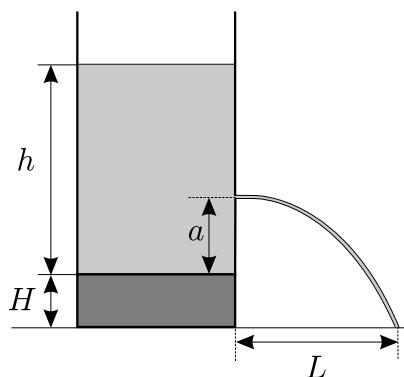
Autor: Oleg Košik, piirkonnnavoor, 2005, G 7

Veekahur laseb veejoaga, mille ristlõikepindala on  $S = 8 \text{ cm}^2$  ning võimsus  $N = 6000 \text{ W}$ . Millise jõuga tabab veejuga märki, kui kahur ja märk asuvad samal kõrgusel? Vee tihedus on  $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$ , õhutakistust mitte arvestada. Märklaua ja veekahuri vahemaa on väike, st veejoa kõverdumisega raskusjõu toimel võib mitte arvestada.

### Ü195 Veetünn ★★★

Autor: Mihkel Kree, lõppvoor, 2005, G 5

Silindriline veetünn, milles hoitakse muutumatut veetaset kõrgusega  $h$ , on tõstetud horisontaalsele platvormile, mille kõrgus maapinnast on  $H$  (vt joonist). Tünni seina kõrgusele  $a$  selle põhjast puuritakse auk. Väljuv veejuga puudutab maapinda kaugusel  $L$  platvormi jalamist. Graafikul on kujutatud kauguse  $L$  sõltuvus augu kõrgusest  $x = a/h$ . Määrate tünni kõrgus  $h$  ning aluse kõrgus  $H$  eeldusel, et  $h > H$ .



### Ü196 Veejuga ★★

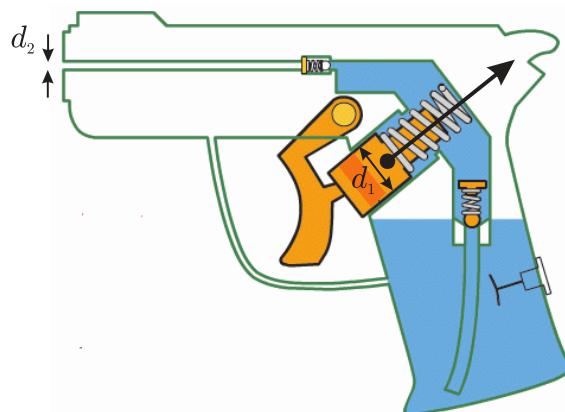
Autor: Siim Ainsaar, piirkonnavoor, 2006, G 9

Vesi voolab kraanist vertikaalselt alla purki. Nagu teada, ei ole kraanist voolav veejuga silindriline. Joa raadius kraani otsa juures on  $r_0 = 5 \text{ mm}$ , sellest kaugusele  $h = 130 \text{ mm}$  allpool aga  $r_1 = 3 \text{ mm}$ . Leidke aeg  $t$ , mis kulub purgi täitmiseks, kui raskuskiirendus on  $g = 9,8 \text{ m/s}^2$ . Purgi ruumala  $V = 1 \text{ liiter}$ . Pindpinevusest tingitud efekte pole vaja arvestada. Eeldada, et voolamiskiirus on iga ristlõike piires ühesugune ning keeriseid ei ole.

### Ü197 Veepüstol ★★

Autor: Valter Kiisk, lõppvoor, 2006, G 4

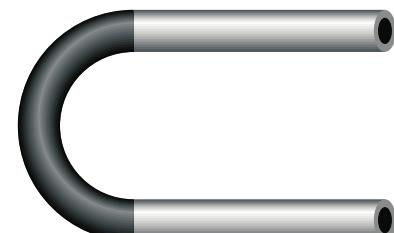
Veepüstoliga (vt joonist) tekitatakse veejuga, surudes vett läbi kitsa silindrilise suudme, mille sisendiameeter on  $d_2 = 1 \text{ mm}$ . Päästik on ühendatud kolviga, mis saab tihedalt liikuda silindrilises torus diameetriga  $d_1 = 1 \text{ cm}$ . Oletagem, et sõrmed suruvad päästikule jõuga  $F = 20 \text{ N}$  (jõu rakenduspunkt ja suund on näidatud joonisel). Kui suure kiirusega väljub veejuga püstolist? Vee liikumise võib lugeda laminaarseks, vee viskoossust ja püstoli liikuvatele osadele möjuvaid hõõrdejõude võib ignoreerida. Vee tihedus on  $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$



### Ü198 U-toru ★★

Autor: Tundmatu autor, lahtine, 2009, G 6

Teatud torustikes võib vedeliku surve olla nii tugev, et torud võivad märgatavalt deformeeruda. Vaatleme sellist deformatsiooni U-kujulises torus (vt joonist): kaks sirget pikku-sega  $l$  terastoru, mille välisraadius on  $\sqrt{2}$  korda suurem siseraadiusest, on ühendatud sama sisemise raadiusega mitteledeformeeruvast materjalist kaarekujulise toruga. Selles U-torus voolab vedelik tihedusega  $\rho$  ja konstantse voolukiirusega  $v$ . Vedeliku hüdrostaatilise rõhk lugeda võrdseks välsrõhuga. U-toru otsad on pinnal jäigalt kinnitatud. Eeldades, et õõnsa terastoru deformatsiooni



jaoks toimib Hooke'i seadus, kusjuures jäikustegur avaldub kujul  $k = ES/l$  ( $E$  on terase nn Young'i konstant,  $S$  on toru ristlõike pindala ja  $l$  on deformeerimata toru pikkus), leidke toru pikenemine.

### Ü199 Ookean ★★★★

Autor: Tundmatu autor, lahtine, 2005, G 8

Vee kokkusurutavuse tegur  $\beta = 5 \cdot 10^{-5} \text{ atm}^{-1}$ .

**a)** Hinnake ookeani keskmise sügavuse muutumist juhul, kui vesi oleks täielikult kokkusurumatu. Ookeani keskmise sügavus  $h \approx 3800 \text{ m}$ .

**b)** Hinnake vee tiheduste vahet  $\Delta\rho$  veepinnalähedasel veel ja veel ookeani süvendi põhjas sügavusel  $H = 10 \text{ km}$ .

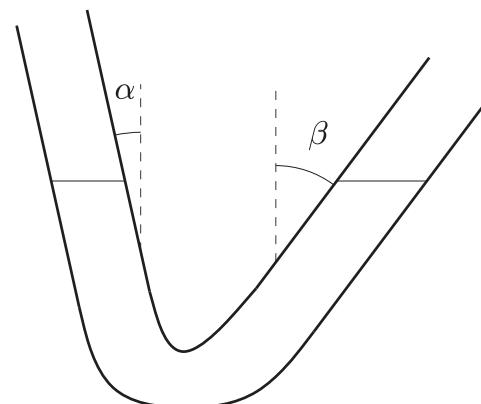
*Märkus.* kokkusurutavuse tegur  $\beta$  näitab keha ühikulise ruumala vähenemist rõhu suurenemisel ühe ühiku võrra. Atmosfääär on rõhu mõõtmise ühik, mis võrdub atmosfääri normaalrõhuga merepinna kõrgusel:  $1 \text{ atm} = 101\,325 \text{ Pa}$ .

### Ü200 V-toru ★★★★

Autor: Mihkel Kree, lõppvoor, 2008, G 8

Toomas mängib läbipaistvast aiavoolikust tehtud U-toruga. Et seekordne U-toru polegi klaasist, painutab ta üht poolt nurga  $\alpha$  ning teist  $\beta$  võrra (vt joonist). Kas vedelikutaseme võnkumise sagedus on nüüd suurem või väiksem, mitu korda?

*Märkus.* Vertikaalses U-torus on vedelikutaseme võnkumise sagedus  $f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{2S\rho g}{m}}$ , kus  $S$  on toru ristlõikepindala,  $\rho$  vedeliku tihedus ning  $m$  torus oleva vedeliku mass.



# Vihjad

**V1** Maksimaalse viivituse korral on palli kiirus vaevu kivi omast suurem. Selles on võimalik veenduda liikudes vabalt langevasse taustsüsteemi. Seal liiguvalt vabalt langevad kehad konstantse kiirusega ning selleks, et pall ja kivi kokku põraksid, peaks nende suhteline kiirus olema negatiivne.

**V2** Kuna pallid on samasuguse massiga ja tegu on elastse kokkupõrkega, vaheavad pallid oma kiirusvektorid. Seega võime sama hästi öelda, et pallid lähevad üksteisest vabalt läbi.

**V3** Langemise aeg on avaldatav valemi  $s = \frac{at^2}{2}$  kaudu.

**V4** Kukkumise käigus kiirenevad mõlemad kuulid sama kiirusega. Seega on nende suhteline kiirus muutumatu.

**V5** **a)** Energia jäÄvuse seaduse kohaselt kulub purustuse tekitamiseks esialgse ja pärastise kineetiliste energiate vahel.  
**b)** Taustsüsteemide vahetamine lihtsustab olukorda oluliselt.

**V6** Mäe tippu jõudmiseks peab esialgne kineetiline energia olema suurem kui hõördejõu ja raskusjõu ületamiseks vajalik töö.

**V7** Ülesse visatud keha vertikaalne koordinaat avaldub vastavalt liikumisvõrrandile kui  $h = v_0t - \frac{gt^2}{2}$ . Kuna tegu on ruutvõrrandiga, leidub fikseeritud  $h$  jaoks kaks ajahetke, mil keha sellel kõrgusel on.

**V8** Tegu on suhteliselt sirgjoonelise ballistiklike probleemiga. Mootorratturi kiirus peab olema selline, et mootorratturi paraboolne trajektoor läbis kraavi vastasnurka.

**V9** Kehtib energia jäÄvuse seadus. Koguenergiate vahel alg- ja lõppseisu vahel kulus hõördejõu ületamiseks vajalikuks tööks mõlemal mäenõlval.

**V10** Massikeskme kuligliikumise energia muundub maksimaalsele kõrgusele jõudes täielikult potentsiaalseks energiaks.

**V11** Palli koguenergia vastab geomeetrilisele jadale, sest iga järgmise põrke energia on eelnevast  $k$  korda väiksem. Saame sarnase jada, kui avaldame kahe järjestikuse põrke vahelise aja summaarse energiakaudu.

**V12** Vedrumehanismi vallandumisel muutub osa vedrudesse salvestatud potentsiaalsest energiast kineetiliseks energiaks — seega kineetilise energia jäävus ei kehti. See-eest kehtib impulsi jäävuse seadus, sest lagunemise käigus ei mõju mürsule väliseid jõude (eeldusel, et mürsk laguneb hetkeliselt).

**V13** Õõnes ja homogeenne kera erinevad nende intertsimomentide poolest. Vadelikku sisaldaval keral toimub sees paramatult hõõrdumine ning seega energia kadu vedeliku erinevate kihtide vahel.

**V14** Silla köverusraadius on leitav Pythagorase teoreemist. Autole mõjub sillapeal kaks jõudu: raskusjõud ja rõhumisjõud. Antud jõudude resultant annab kesktõmbekiirenduse.

**V15** Ülesanne näeb keerulisem välja kui see tegelikult on. Olukorda lihtsustab oluliselt asjaolu, et varras on tühiselt kerge ja libisemised hõõrdevabad.

**V16** Löögi hetkel kehtib impulsi jäävus, aga energia ei säili. See-eest säilib mehaaniline energia pärast põrget toimuval liikumisel.

**V17** **a)** Maksimaalse eemaldumise korral moodustub Maast, Veenusest ja Päikesest täisnurkne kolmnurk, mille täisnurga tipp on Veenus.

**b)** Maa ja Veenuse suhtelise nurga (Päikeselt vaadatuna) muutus on avaldatav planeetide nurkkiiruste vahel kaudu.

**V18** Nii auto liikumisse kui ka mootori tööse minevad võimsused on avaldatavad rataste ja maa vahelise hõõrdejõu kaudu.

**V19** Tellise eemaldumise hetkel on vedru alumine ots paigal, aga ülemine ots liigub tellisega sama kiirusega ülesse.

**V20** Pendli perioodi leidmiseks on võimalik teha esialgne jäme hinnang, mis põhineb järjestikustel mõõtmistel. Täpsema hinnangu jaoks võib kasutada esialgset jämedat hinnangut ja pikemat ajavahemikku, et määrrata täpselt mitu võnget antud ajavahemiku sisse mahub.

**V21** Aerulabadele mõjuv keskmine jõud on leitav jõumomentide tasakaalust tullide suhtes. Keskmise kiirusega liikuva paadi puhul kehtib jõudude tasakaal aerulabadele mõjuva jõu ja takistusjõu vahel.

**V22** Kivile mõjuva paela tõmbepinge  $T$  ja raskusjõu  $mg$  resultant on kesktõmbejõuks, mis on suunatud horisontaaltasapinnas sissepoole.

**V23** Ülesannet on mugavam vaadelda  $x$ - $y$  teljestikus, mis kulgeb vastavalt pikki ja risti kaldpinda. Sellisel juhul muutub peale igat põrget kiiruse  $y$ -komponent vastupidiseks.

**V24** Kuulikese kiirus on leitav energia jäävuse seadusest. Edasi taandub ülesanne ekstreemumpunkti leidmisele.

**V25** Eraldumiskörgust on kõige mugavam leida jõudude tasakaalust silindri keskpunkti radiaalsihis. Lisaks kehtib energia jäävuse seadus.

**V26** Kriitilise kiiruse korral on palli trajektoori köverusraadius sfääri tipp punktis võrdne sfääri raadiusega. See tähendab, et pallile möjuva raskuskiirenduse tasakaalustab kesktõmbe kiirendus  $v^2/R$ .

**V27** Kui põrnikas (massiga  $\rho V$ ) roomab mööda anuma põhja, siis selle peale liigub ka põrnikat ümbritsev vedelik. Põrnika liikumist võib mugavuse mõttes ette kujutada virtuaalse põrnika liikumisega, mille tihedus on  $\rho - \rho_0$ . Sellisel juhul liigub virtuaalne põrnikas vedelikku tõrjumata ning ülesanne taandub mugavamale dünaamika ülesandele.

**V28** Arvestades mullide arvu jäävust on ruumiline vahemaa nende vahel võrdeline mulllikeste kiirusega. Viimane on leitav võrdsustades takistus- ja üleslükkejõu ning arvestades mullikese ruumala muutust rõhu tõttu.

**V29** Ülesandes niidi pingे  $T$  teada, aga see on leitav pannes plokkide jaoks kirja Newtoni teise seaduse ning niidi venimatuse tingimuse. Massikeskme kiirenduse avaldamine plokkide kiirenduste kaudu on analoogne massikeskme koordinaadi avaldamisega plokkide koordinaatide kaudu.

**V30** Ragulkas salvestunud potentsiaalne energia muundub täielikult kivi kineetiliseks energiaks. Kummipaelale rakendatav jõud on leitav kummipaela pinge projektsionist kivi lennu sihilisele teljele.

**V31** Mehaaniline pingе röngas on määratud tsentrifugaaljõu poolt, millega röngast radiaalselt väljapoole tiritakse. Pingе täpseks määramiseks on mugav vaadelda väikest rõnga juppi ning sellele möjuvate jõudude tasakaalu.

**V32** Maaleri asendi ohtlikkust võib hinnata tema kiirusega vahetult enne maapinnaga kokkupuutumist. Vastavad kiirused on leitavad energia jäävuse seadustest.

**V33** Hüppe käigus säilib energia, ehk hüppaja kineetilise energiа ning hüppaja ja köie potentsiaalse energiate summa on konstantne. Hüppaja kiirus on maksimaalne, kui talle möjuv summaarne jõud on null, sest see vastab kiirenemise ja pidurdamise üleminiku punktile.

**V34** Ühe põrke käigus kehtib impulsi jäävus, aga mitte energia jäävus. Selle põhjal on võimalik määrata hõõrdejõu ületamiseks kulunud töö ühe põrke jooksul ning saadud avaldis summeerida kogu vaia ulatuses.

**V35** Tükikeste trajektooride järgi saab võrrelda kiiruste suundasid ja suuruseid, sest  $s = vt_s$ , kus  $t_s$  on säriaeg. Lisaks kehtib impulsi jäävus. Kuna klaaskuul kukkus otse alla, peab summaarne põrandaga paralleelne impulss olema 0.

**V36** Ülesandes on kolm tundmatut: keskmiste plokkide kiirendused, äärmiste plokkide kiirendused ning niidi pinge. Vastavate tundmatute leidmiseks on vaja kolme võrrandit, kaks tulenevad Newtoni II seadusest ning üks tuleb niidi venimatuse tingimusest.

**V37** Otsitavate suuruste jaoks on kasulik vaadelda lühikest ajavahemikku  $\Delta t$ , mille jooksul on rongi kiirus, ja seega hõördetegur, ligikaudu konstantsed. Seejärel saab saadud ajavahemikke summeerida terve graafiku ulatuses. Selle jaoks peab vajadusel konstrueerima uued graafikud teistsuguste telgedega.

**V38** Väikse keha hetkelise liikumise käigus püsib mobiil+keha massikese paigal. Seega liigub mobiil iga  $\tau$  tagant sarnaselt kehaga hetkeliselt ülesse või alla. Iga kord kui mobiil ülesse liigub, nihkub ta gravitatsiooni tõttu ka veidike lau sihis edasi.

**V39** Teisest ja kolmandast kuulist koosnevale süsteemile mõjus esimese kuu liukamise ajal esimese varda sihiline joud, sest teatavasti mõjuvad kergetele varrastele vaid varda sihilised pinged. Lisaks peab esimese kuuli liukamise ajal kehtima varraste venimatuse tingimus.

Kiirenduse leidmiseks on süsteemi mugav vaadelda šarniirse ühenduspunktiga kaasa liikuvas ja kirenevas taustsüsteemis ning seejärel rakendada Newtoni II seadust.

**V40** Ampermeetri ja voltmeetri pingete summa peab olema võrdne klemmideli rakendatava pingega nii enne kui ka pärast takisti ühendamist.

**V41** **a)** Takisti peab tagama selle, et lampide pingi ei ületaks nominaalpinget ükskõik missuguse lambi sisetakistuse väärtsuse korral  
**b)** Lampide oodatavast tuhmimalt põlemine on põhjustatud alaldi sisetakistusest.

**V42** Koormisel eralduv võimsus on pingi ja voolu korrutis. Seega on vaja graafikult leida  $x$ - ja  $y$ -koordinaadi korrutise maksimum.

**V43** Mõlema kontuuri jaoks saab rakendada Ohmi või Kirchhoffi seadusi.

**V44** Otsitav suhe  $I_2/I_1$  on mugavalt avaldatav Ohmi seadusest, ülejäänud on võrratustega manipuleerimine.

**V45** Ülesandes on neli tundmatut: vooluallika pinge, takisti takistus ning ampermeetri ja voltmeetri sisetakistused. Nelja tundmatu jaoks on vaja nelja võrrandit ning need tulenevad ülesandes antud ampermeetri ja voltmeetri näitudest.

**V46** Teades, et päripidise voolu korral võib dioodi klemmid lugeda lühistatusts ning vastuvoolu korral isoleerituks, võib koostada esialgse skeemi asemel mõlema polaarsuse korral dioodideta ekvivalentsed skeemid.

**V47** Kuna süsteemi stabiilses olekus on kondensaatorite pinge konstantne ei läbi neid ka vool.

**V48** Süsteem saab töötada kolmes erinevas režiimis. Esiteks, kui pinge on piisavalt madal või kõrge, on köikide elementide takistus vastavalt  $1\Omega$  või  $2\Omega$ . Vahepealse pinge väärtsuse korral on vasakpoolse elemendi takistus  $2\Omega$  ja parempoolsetel  $1\Omega$ . Teisi režiime ei ole, sest vasakpoolse takisti pinge on alati suurem kui parempoolsetel ning seega ei saa vasaku takisti takistus olla väiksem kui parempoolsetel.

**V49** Mõlemat tüüpi traadijuppide pikkused peavad olema sellised, et esiteks, summaarne takistus on  $1\Omega$  ning teiseks, temperatuurist sõltuvus oleks võimalikult väike. Temperatuurist sõltuvuse leidmiseks tuleb kasutada ülesandes antud temperatuurikofitsente.

**V50** Lõpmatust ahelast ühe lüli eemaldamisega summaarne mahtuvus ei muutu.

**V51** Kõigepealt tasub leida lühikese traadijupi takistus ning seejärelt üritada saadud avaldist summeerida terve traadi ulatuses.

**V52** Patarei tehtud töö ajaühikus  $\Delta t$  on  $UI\Delta t$ . Kondensaatorisse salvestava energia muutumise kiirus on leitav võttes kondensaatori siseenergiast  $\frac{CU^2}{2}$  aja järgi tuletise.

**V53 a) b)** Peale pikka aega on kondensaatoreid läbiv vool null, sest nende pinged, ja seega laengud, on stabiliseerunud. Seega võib kondensaatorid efektiivselt süsteemist välja lõigata.

**c)** Elimineerides süsteemist vooluallika, peab kehtima laengu jäädvuse seadus.

**V54** Süsteemis kehtib laengu jäädvus, st alamsüsteemis, mis koosneb ülemisest sõlmpunktist ja sellega ühendatud kolmest kondensaatori plaadist peab alati olema summaarse laenguga  $-q$ . See kehtib sellepärast, et laengud saavad liikuda ainult mööda metalli ning ei saa eelmainitud alamsüsteemist õhu kaudu lahkuda.

**V55** Mõlema ülesandes antud tingimuse jaoks on võimalik kirja panna vastav võrrand (kasutades näiteks Kirchhoffi seadusi) ning saadud võrrandisüsteemi lahendid peaksidki olema  $R_1$  ja  $R_2$ .

**V56** Nominaalses töörežiimis on iga valgusdioodi pinge  $U_d$  ja vool maksimaalselt 20 mA. Teades võrgupinge maksimaalset pinget on võimalik leida takisti takistus ja maksimumvõimsus. Ühe täisperioodi jooksul tuleb pingelanguse muut kondensaatoril takisti arvelt. Seejuures on kondensaatori plaatide laengumuut leitav täisperioodi pikkusest ja ahela voolutugevusest.

**V57** Ülesande peamisi raskusi on korrektselt määrata ülesande tekstiga ekvivalentne elektriskeem. Peale elektriskeemi määramist taandub ülesanne stabiilse režiimi leidmisele. See on tehtav näiteks Kirchhoffi seadustega.

**V58** Kehtib laengute jäävus — valides suvalise suletud pinna, peab pinda läbiv vool olema võrdne pinna sisse jääva summaarse lekkevooluga.

**V59** Sümmeetria tõttu mõjuvad kõikidele kuulidele radiaalsed sama väärtsusega elektrostaatilised jõud, mis on niitide pingete poolt tasakaalustatud. Lisaks paneeme tähele, et kuna niigid on identsed ning sama palju veninud, peavad kõikide niitide pinged võrdsed olema.

**V60** Tolmukübemel kehtib jõudude tasakaal raskusjõu ja elektrostaatilise jõu vahel.

**V61** Kehtib energia jäävuse seadus, kus peame arvestama nii gravitatsioonilise kui ka elektrilise potentsiaalse energiaga.

**V62** Põhimõtteliselt on võimalik leida elektroni kiirendus rönga poolt tekitatud elektriväljas ning seda integreerida, aga märgatavalts lihtsam on rakendada energia jäävuse seadust ning kasutada rönga poolt tekitatud potentsiaalset energiat. Punktlaengu  $q$  poolt tekitatud potentsiaal kaugusel  $r$  on  $k \frac{q}{r}$ .

**V63** Ioonide kiirus on leitav energia jäävusest. Sondi ja ionide kiiruse sidumiseks on kõige mugavam rakendada impulsi jäävust.

**V64** Elektronkahurist aja  $\Delta t$  jooksul eraldava elektronide kogumi summaarne impuls on võrdne impulsi jäävusest elektronkahurile mõjuva jõu ja  $\Delta t$  korrustega. Individuaalse elektroni impuls on leitav energia jäävuse seadusest.

**V65** Selleks, et siduda elektronide kiirust ekraani-sihilise nihkega ülesanne jagada kaheks eraldi osaks: elektronide viibimine plaatide vahel ning plaatide ja ekraani vahelises ruumis. Esimeses osas mõjub elektronile ühtlane kiirendus, teises osas liigub elektron sirgjooneliselt.

**V66** Kasulikuks võib osutada superpositsiooniprintsiip, mille kohaselt võib välja lõigatud ruutu tekitatud välja leida kui  $+ ja -$  laenguga ruutude väljade summana.

**V67** Osakese asukohta on mugavam leida vaadeldes eraldi osakese  $x$ - ja  $y$ -koordinaate. Laengu keskmise kiirus on leitav perioodi jooksul sooritatud nihke ja perioodi suhtena.

**V68** Kuna sfäärid on traadiga ühendatud, peavad need sama potentsiaaliga olema.

**V69** Kondensaatorid on pingearvutustega ühendatud jadamisi ning kondensaatorite  $C_1$  ja  $C_2$  kogutakistus jadamisi on  $(1/C_1 + 1/C_2)^{-1}$ .

Kuna osakesele möjuvad elektrijõud on esialgse liikumissuunaga risti, kubub mõlema kondensaatori läbimiseks sama aeg, kusjuures kondensaatorite vahel möjub osakesele konstantne kiirendus.

**V70** Kärbse potentsiaali on mugav avaldada  $x - y$  koordinaadistikus. Ülesande sümmeetriast on suhteliselt lihtne näha, et kärbse kaugus laengust on minimaalne siis, kui ta asub otse laengu kohal.

**V71** Klotside läbitav vahemaa on leitav energia jäätusest. Nimelt on klotsid paigal nii alg- kui ka lõppasendis ning ainus viis soojuse eraldumiseks on hõördejõu kaudu, mis on omakorda avaldatav alg- ja lõppasendi potentsiaalsete energiate vahest.

**V72** Hetkel, mil kuulide vahekaugus on minimaalne, peab massikeskme taustsüsteemis mõlemad kuulid ja kosmoseprügi paigal olema. Vastasel korral ei oleks kuulide vahekaugus minimaalne, sest kuulid liiguksid üksteise suhtes.

**V73** Pumpamise käigus kehtib ideealse gaasi olekuvörrand.

**V74** Ideaalse gaasi olekuvörrandist on võimalik leida seos esialgse ja pärastise õhu ruumala vahel.

**V75** Kõrgusega  $h$  veesamba lisarõhk on  $\rho gh$ . Sukeldumise käigus kehtib ideaalse gaasi olekuvörrand.

**V76** Ühe molekuli keskmise kineetiline energia temperatuuril  $T$  avaldub kui  $\langle E_m \rangle = \frac{3}{2}kT$ .

**V77** Kuna manomeeter ja mõõteamppull on kapillaari kaudu ühenduses, siis nende gaasirõhud on isegi temperatuuride erinedes ühesugused.

**V78** Kui ajavahemiku  $\Delta t$  jooksul kandub tiivikust läbi õhumass kineetilise energiaga  $\Delta E$ , siis sellele vastav võimsus on  $P = \frac{\Delta E}{\Delta t}$ .

**V79** Ülesannet on mugav lahendada uurides ajavahemikku  $\Delta t$  ning vaadeldes, kuidas rongist eraldunud võimsus soojendab rongist möödunud õhu molekule.

**V80** Paisumisel gaasi poole tehtud tööd on kõige lihtsam leida  $p - V$  graafikult protsessi aluse alla pindalana. Lisaks tuleb kasuks termodünaamika I seadus.

**V81** Temperatuuri kasvades hakkab esimese anuma rõhk  $p_1$  suurenema ning mingil hetkel ületab see ventiili kriitilise rõhu  $\Delta p$ . Sellest hetkest alates hakkab ventiil õhku läbi laskma nõnda, et edaspidi anumate rõhud  $p_1$  ja  $p_2$  rahuldavad tingimust  $p_1 - p_2 = \Delta p$ .

**V82** Seibi alumise külje läheduses surub süsihappegaas teatud rõhuga seibi ülesse. Vastav jõud on ülemiselt küljelt tasakaalustatud nii õhurõhu, kui ka surumisjõu poolt.

**V83** Niiske õhu puhul on veeauru ja normaalsete õhu rõhkude summa võrdne atmosfäärirõhuga, kusjuures veeauru rõhk on leitav küllastunud veeauru tihedusest.

**V84** Esialgu on vesinik teatud temperatuurivahe võrra soojem kui helium, kuid pika aja möödudes on mölemad soojuslikus tasakaalus. Koormise nihe ongi põhjustatud gaaside soojenemisest tulenevast paisumisest.

**V85** Korstna sees voolav õhk tekib alarõhu, mis on avaldatav Bernoulli võrrandist. Rõhu langud korstna sees ja väljas peavad olema võrdsed.

**V86** Adiabaatilisel paisumisel muutub gaasi siseenergia  $c_V T_0$  osaliselt joa kineetiliseks energiaks  $\mu v^2/2$ . Düüs is peab kehtima energia jäävus. Seega, ajaühikus siseneval gaasihulgal on sama energia kui ajaühikus väljuval gaasil.

**V87** laserkiire kõrvalekaldenurk on leitav Snelli seaduse ja kiilu geomeetria rakendamisest.

**V88** Tasub teha selge joonis ning kasutada sarnaseid kolmnurki.

**V89** Selleks, et sisenev kiirte kimp oleks ka peale teise läätse läbimist paralleelne, peavad läätsede fookused ühtima.

**V90** Nõguspeegli pinnalt peegeldunud kiirte nurgapoolitajad läbivad peegli kõverusraadiuse keskpunkti.

**V91** Tasub koostada selge joonis ning murdumisnäitaja leidmiseks kasutada täis-nurksete kolmnurkade omadusi ja Snelli seadust.

**V92** Ülesande lahendamisel osutub tarvilikuks teadmine, et läätsele selle optilise teljega paralleelselt langevad kiired (või murtud kиrite pikendused nõgusa läätse puhul) koonduvad fookuses punktiks. Seega on ainus moodus kahe läätse abil saada süsteem, mis teisendab paralleelse kimbu uesti paralleelseks kimbuks sel-line, et läätsede fookused ühtivad.

**V93** Valguskiir siseneb prismaisse murdumata, sest kiir on normaali sihiline. Küll aga toimub murdumine prismast väljades. Kuna terve tahu ulatuses on langlemisnurk sama, tekib üks tahk paralleelse kiri tekimbu. Kuna meil on kaks murdvat tahku, on esialgne kiri tekimp pärast prisma läbimist jagunenud kaheks.

**V94** Nii täis- kui poolvarjude piirjoonte pikendused on valgusallika puutujad.

**V95** Allika heledus on ligikaudselt võrdeline vaatleja silmaava nurkläbimõõdu ruuduga allika asukohast vaadatuna.

**V96** Piisab kahe ettevaatlikult valitud kiri käikude vaatlemisest.

**V97** Ülesande mugavamaks lahendamiseks tuleb teha selge joonis ning raken-dada väikeste nurkade lähendust. Lisaks, kiire ja kuuli puutepunkti pinnanor-maal ühtib kuuli raadiusega.

**V98** On lihtne näha, et plaadist väljub endiselt paralleelne valgusvihk. Küll aga on selle levimise suund muutunud. Valguslaigu nihke leidmiseks on mugav vaa-delda kiert, mis läbib läätse optilist keskpunkti.

**V99** Mustaks värvitud tahkudelt valgus peegelduda ei saa, toimub neeldumine. Ülesande tingimus on täidetud, kui värvimata tahust kuupi sisenev valgus ei saa väljuda läbi kõrvaltahu (toimub sisepeegeldus).

**V100** Joonisel on kaks peegeldust ja üks peegelduse-peegeldus. Sellele vastab kolm võimalikku punktide konfiguratsiooni ning eeldatavasti on võimalik paari kavala argumendi põhjal osad konfiguratsioonid elimineerida (näiteks peab val-gusallikas olema mõlema peegli vahel).

**V101** Selleks, et kapillaarisein paistaks null-paksusega, peab kapillaarile puu-tujana langenud kiri napilt puudutama sisemist õõnsust. Sellisel juhul ei leidu ühte kiri, mis läbisid kapillaari seina ilma sisemise õõnsuse piirpinnale lan-gemata.

**V102** Suhteliselt kindel meetod on avaldada kõik ülesandes antud ja otsitavad muutujad võimalikult mugavate jooniselt leitavate suuruste kaudu ning loota, et saadud võrranditest on lihtne näha, kuidas lõppvastus avaldub  $k_1$  ja  $k_2$  kaudu. Häda korral tuleb lahendada kolmest võrrandist koosnev võrrandisüsteem ( $k_1, k_2$  ning otsitava suhte jaoks). Silmas peab pidama, et jooniselt valitud muutujad peavad ülesande geomeetria üheselt ära defineerima. Selleks sobivad näiteks läätse fookuskaugus ning pliatsi mõlema otsa kaugused läätsest.

**V103** Kriitilise langemisnurga all on valgus sakilisel poolel täieliku sisepeegeldumise piiril. Selleks, et antud tingimust langemisnurgaga siduda on kasulik joonestada suur ja selge joonis.

**V104** Kui nõogusläätsele langevad paralleelsed kiired, lõikuvald murdunud kiirte pikendused eesmisel fokaaltasandil.

**V105** Kuna silmani jõudvate kiirte jaoks kehtib  $r \ll L$  ning trajektoori kõverdumine toimub musta augu lähiümbruses, võib vaadelda kiire teekonda lihtsustatult: kiire liikumine musta auguni, hetkeline nurga muutus musta augu juures ning edasi sirge tee vaatlejani.

**V106** Sfäärilist akvaariumit saab vaadelda kui õhukest tasakumerat läätse, mis on surutud tasase küljega vastu sirgeseinalist akvaariumi. Lisaks peab arvestama, et läätses lõplikku kujutist tekitav kala ei vasta tegelikule kala asukohale, vaid akvaariumis murdumise tõttu asuvale kujutisele, mis on tegelikust kala asukohast  $n$  korda lähemal.

**V107** Kera ääres toimub pinnalt täielik sisepeegeldumine, kus peegeldunud kiired saavad alguse kas põrandalt või seinalt (ja olles seega kas valget või kollast värv). Murdumisnäitaja määramiseks on vaja jooniselt uurida sisepeegeldumise piirjuhu.

**V108** Kahe kujutamise tekkeks peab kumerpeegel asuma objektist  $A$  vasakul.  $A'$  leidmiseks peab määrama läätse fookuse, aga selleks peab silmas pidama asjaolu, et pole teada, kumb kujutistest  $K_1$  ja  $K_2$  kuulub objektile  $A$ .

**V109** Kärbsse näiline asukoht vastab kärbsest alguse saanud klaasist väljunud murdunud kiirte pikenduste lõikepunktile. Selle jaoks tasub vaadelda kahte kiirt: mõlemad saavad alguse kärbsest, aga üks väljub merevaigutükist pinnaga risti ja teine väikse nurga all. Edasi tuleb kiirte geomeetriat ettevaatlikult uurida ning rakendada Snelli seadust.

**V110** Allikat ja kujutist ühendav sirge läheb läbi läätse keskpunkti, kusjuures läätse keskpunkt peab jäama allika ja kujutise vahele, sest tegu on töelise kujutisega. Lisaks teame, et sirge kujutis on sirge, kusjuures need kaks sirget lõikuvald läätse tasandis.

**V111** Lisaks väikeste nurkade lähendusele lihtsustab ülesande geomeetriat võimalikult sümmeetriliste kiirte käikude uurimist. Näiteks on mugav vaadelda kiiri, mis peegelduvad risti peegli pinnaga.

**V112** Ülesandes on arvandmed valitud nõnda, et peeglite fookused ühtiksid. Tõepooltest, nõguspeeglite fookuskaugus on pool raadiusest ja peeglite vahemaa on võrdne peeglite fookuskauguste summaga. See tähendab, et peale igat edastagasi peegeldumist püsivad valguskimbu kiired paralleelselt, kusjuures kimp muutub 2 korda kitsamaks (sest fookuskauguste suhe on 2).

**V113** Ratta liikumist on mugavam vaadelda autodega seotud süsteemis.

**V114** Autode hulga pidevuse töttu on lõigul  $C$  teatud punkti ajaühikus läbivate autode arv võrdne lõikude  $A$  ja  $B$  vastavate arvude summaga.

**V115** Lihtsam on leida, kui palju aega kulus autol esimese  $4/5$  läbimiseks ning seejärel võtta  $t$  ja leitud aja vahe.

**V116** Ratturite sõiduaeg on leitav asjaolust, et esimene ja teine rattur läbisid sama pika vahemaa.

**V117** Möödasõidu käigus avaldub sõiduauto läbitud vahemaa ühtlase kiirenduse valemiga  $x = vt + \frac{at^2}{2}$ .

**V118** Kuna rongid kiirenevad konstantse kiirendusega, saame avaldada läbitud vahemaa liikumisvörrandist  $s(t) = vt + \frac{1}{2}at^2$ . Lisaks peab mõlema rongi kokku-põrkeni läbitavate vahemaade summa olema  $s = 2750$  m.

**V119** Lõppsageduse avaldamiseks esialgse sageduse kaudu võib Doppleri seadust kaks korda järjest kasutada.

**V120** Ülesannet on mugavam vaadelda emma-kumma autoga seotud taustsüsteemis.

**V121** Graafikult on näha, et ainult kahel mõõdetud ajahetkel oli sportlase kiirus keskmisest madalama väärtsusega. See tähendab, et peatus mahtus täielikult antud kahe perioodi sisse.

**V122** Laine levik toimub geomeetrilise optika seaduste kohaselt. Kehtib  $\sin \alpha_1 / \sin \alpha_2 = v_1/v_2$ , kus  $v_i$  ja  $\alpha_i$  on vastavalt keskkonna  $i \in \{1, 2\}$  laine leviku kiirus ja lange-misnurk eralduspinna normaali suhtes.

**V123** Ülesande geomeetria ning lööklaine koonuse nurga kaudu on võimalik avaldada lennuki koordinaadid stopperi käivitamise ja peatamise hetkedel. Leitud nihke kaudu on lennukiirust lihtsasti leitav.

**V124** Antud ülesandes on kolm tundmatut: pilu laius, katku kiirus ja piisa kujutise kiirus sensori tasandis. Lisaks kirjeldati kahte olukorda, mis seovad antud tundmatuid. Selgub, et nendest piisab, et määräata kolmandas olukorras triibu pikkust.

**V125** Liikudes  $B$  suunas on laeva kiirus  $v_0 + v(t)$  ning liikudes  $A$  suunas on kiirus  $-v_0 + v(t)$ . On võimalik näidata vastuväiteliselt, et selleks, et minimeerida sõiduaega kahe punkti vahel, peavad voolukiirused alguses ja lõpus olema võrdsed. Vastasel juhul saaks valida veel väiksema sõiduajaga plaani nihutades stardiaega emmas-kummast suunas.

**V126** Ülesannet on mugavam vaadelda õhu taustsüsteemis, sest siis on helilainefrondid kiirusega  $c$  kasvava raadiusega ja paigaloleva keskmega poolsfäärid. Helivõimsus jaotub ühtlaselt üle terve frondipinna, seega on tajutav võimsus pöördvördeline frondi pindalaga ehk frondi raadiuse ruuduga.

**V127** Olukorda on mugavam vaadelda veega seotud taustsüsteemis, sest siis liiguvad lained paadi trajektoori suhtes sümmeetriliselt (lainefrondid on paadi varasematest asukohtadest eemalduvad ringid).

**V128** Pildistamise hetkel pöörleb kogu ratas ümber hetkelise pöörlemistelje, mis läbib ratta ja maa puutepunkti. See tähendab, et iga ratta osake liigub mööda ringjoone kaart, mille keskpunktiks on ratta ja maa puutepunkt.

**V129 a)** Vastavalt sellele kas labad liiguvad salvestatavatele pikslite veergudele vastu või eemale, on labade kujutiste tihedus vastavalt suurem või väiksem.

**b)** Vaadeldes pildil ühte vertikaalset pikslite veergu ei ole moonutusi näha. Seega tasub uurida kui palju labasid erinevatel pikslite veergudel näha on.

**c)** Teades labade arvu on võimalik vaadelda täpselt kui palju üks laba salvestamise käigus liigub.

**V130** Valgus peegeldub tagasi kile ülemiselt ja alumiselt pinnalt. Peegeldus on minimaalne, kui vastavad kiired liituvad vastasfaasides. Selleks, et määräata mitu täislainepekkust optiliste teede vahesse mahub, tuleb vaadelda, kuidas minimeerida peegeldunud valguse hulka punase ja sinise valguse jaoks.

**V131** Heledad vöödid vastavad ülemiselt ja alumiselt pinnalt peegeldunud kiirte liitumisele samas faasis. Vaadates põrandat erinevate nurkade alt, muutub kiirte optiliste teekondade vahe piisavalt palju, et see vastaks 20-le lainepekkusele. Vastav optiliste teekondade vahe vahemik on leitav põranda geomeetriast.

**V132** Elektron sooritab solenoidi teljega risti tasandis ringliikumist. Antud ringliikumise periood on leitav kasutades Lorentzi ja tsentrifugaaljõu tasakaalutingimust.

**V133** Raamis indutseeritakse vool, sest takisti kukkudes suureneb raami läbiv magnetvoog, mis omakorda tekitab Faraday seaduse kohaselt raamis elektromootorjõu ja voolu. Seega on stabiilses režiimis raskusjöud ning takistit läbiva voolu poolt tekitatud Lorentzi jõud tasakaalus.

**V134** Lorentzi jõu tõttu liiguvad mölemad osakesed mööda ringjoont, kusjuures mölema osakese kiirusvektorite pöörlemise nurkkiirused on samad.

**V135** Traat võtab kaare kuju (sest Ampere'i jõud mõjub analoogselt täispuhutud palli puhul pallikestale ülerõhu poolt möjuva jõuga: lühikesele mõttelisele traadijupile mõjuv jõud on risti traadijupiga). Pinge leidmiseks on mugav vaadelda lühikest traadijupi lõiku ning kirja panna jõudude tasakaalu tingimuse.

**V136** Selleks, et venitada pooli väikse vahemaa  $\Delta\ell$  võrra pikemaks on vaja teha tööd, millest osa kulub magnetväljas salvestatud energia suurendamiseks ning teine osa kulub vooluallika poolt tehtud töö kompenseerimiseks. Magnetväljas salvestatud energia leidmiseks võib kasutada kas pooli koguenergia valemit  $\frac{LI^2}{2}$  või magnetvälja energiatihedust  $w = \frac{B^2}{2\mu_0}$ .

**V137** Magnetväljas liiguvad osakesed mööda ringjoont kiirusest sõltumatu perioodiga  $t = \frac{2\pi m}{qB}$ . Näeme, et ülesandes antud ajavahemik  $T$  vastab poolele täistii-rule. Antud tähelepanek võimaldab olukorra mugavamat skitseerimist. Iga kord kui elektriväli sisse lülitatakse, antakse osakesele väike elektriväljasihiline impulss.

**V138** Magnetväljas hakkab osake liikuma mööda ringjoont. Ringjoone raadius on avaldatav Lorentzi jõu ja kesktömbekiiruse võrdsusest. Märkame, et kui ringjoone raadius on piisavalt väike, väljub elektron tuldud suunas tagasi. Ringjoone suurenedes väljub elektron lõpuks vasakust küljest.

**V139** Magnetvälja väljalülitamise käigus muutub magnetvoog läbi silindri ristlöike, mis indutseerib Faraday seaduse kohaselt keeris-elektrivälja. Keeris-elektriväli mõjub omakorda silindri pinnal olevatele laengutele teatud jõuga ning paneb silindri pöörlema. Silindri pöörlemise kiiruse leidmiseks on mugav vaadelda lühikest ajavahemikku  $\Delta t$ , mille jooksul väheneb magnetvälvi  $\Delta B$  võrra.

**V140** Kangi kriitilise nurga korral kehtib varda jaoks jõumomentide tasakaal.

**V141** Kehtib Newtoni II seadus ning jõumomentide tasakaal (näiteks ühe toru otspunkti suhtes).

**V142** Tooreaktsiooni kääride telje sihiline komponent peab olema tasakaalustatud hõõrdejõu poolt.

**V143** Kuuli hoiab augus või „lükkab“ august välja üks ja sama jõud — kuulile mõjuv raskusjõud, mis on suunatud vertikaalselt alla. Kuul on augus, kui raskusjõu vektor läbib augu põhja ja kukub, kui see väljub sellest.

**V144** Libisemise piiril tasakaalustab lund katuselt alla lükkavat raskusjõudu hõõrdejõud, kusjuures hõõrdejõud mõjub vaid lume kuivale osale.

**V145** Koheldes hõõrdejõudu tundmatuna, võime kasti jaoks kirja panna Newtoni II seaduse nii  $x$ - kui ka  $y$ -telje jaoks. Hõõrdejõu maksimaalne väärthus on  $F_\mu = N\mu$ , kus  $N$  on tooreaktsioon.

**V146** Liivahunniku maksimaalse kõrguse saavutamiseks peavad pindmised liivakihid olema libisemise äärel. Seega tasub vaadelda jõudude tasakaalu pindmiste liivaterade jaoks.

**V147** Kriitilise hõõrdeteguri väärtsuse korral kehtib jõumomentide tasakaal tuulepoolsete rataste telje suhtes.

**V148** Kuna nöör on venimatu, on mõlemad hammasrattad paigal ja seega tasakaalus. Kehtib nii jõudude, kui ka jõumomentide tasakaal. Antud juhul on kõige mugavam vaadelda jõumomentide tasakaalu hammasrataste keskpunktide suhtes.

**V149** Kuulile mõjub raskusjõud, niidi pinge, tooreaktsioon ning hõõrdejõud kuuли ja kasti vahel. Süsteemi lahendamise standardmeetod on rakendada Newtoni II seadust nii  $x$ - kui ka  $y$ -telje jaoks ning jõumomentide tasakaalu tingimust. Elu teeb lihtsamaks tähelepanek, et hõõrdejõu ja tooreaktsiooni võib kombineerida üheks jõuks, mille nurk kasti vertikaali suhtes on kuni  $\arctan \mu$  ning seejärel täheldada, et tasakaalu korral peavad kuulile mõjuvad kolm jõudu lõikuma ühes punktis.

**V150** Prussi asend on stabiilne, kui väikse kõrvalekalde korral muutub prussi potentsiaalne energia suuremaks. Teisisõnu peab massikese kõrgemale töusma.

**V151** Ülesande lahendamine jaguneb kaheks osaks: (a) kas antud jõust piisab üle serva kantimiseks; (b) ega kLOTS seejuures libisema ei hakka. Mõlema analüüsimeks on mugav rakendada jõumomentide tasakaalu. Lisaks on kasulik teada, et hõõrdejõu ja tooreaktsiooni resultantjõu maksimaalne nurk vertikaali suhtes on  $\arctan \mu$ .

**V152** Et kuuli  $C$  kiirusvektor on risti sirgega  $AC$ , siis hetkeline pöörlemiskese asub sellel sirgel. Seega, kui kuul  $A$  hakkab libisema, siis on selle kiirusvektor samuti (ning järelikult ka hõõrdejõu vektor) risti sirgega  $AC$ . Piirjuhtumil, kui kuulide masside suhe on selline, et kuul  $A$  hakkab vaevu liikuma, on hetkeline pöörlemiskese väga lähedal punktile  $A$ .

**V153** Kehtib nii jõudude kui ka jõumomentide tasakaal. Ülesandes on kolm huviväärset punkti: rõnga keskpunkt, massikese ning võlli ja rõnga puutepunkt.

**V154** Pulgale mõjuvad neli erinevat jõudu: silindri ja pulga vaheline tooreaksioon, raskusjõud, maa ja pulga vaheline tooreaksioon ning hõõrdejõud. Pulga asend on stabiilne, kui jõudude ja jõumomentide tasakaalu tingimustest avaldatav hõõrdejõud ei ületa maksimaalset seisuhõõrdejõudu ning kui varda alaots ei tõuse õhku. Mõlemat tingimust väljendavad erinevad võrratused, mis peavad sammaegselt kehtima.

**V155** Konnale mõjub kolm jõudu: raskusjõud, rõhumisjõu ja hõõrdejõu resultant ning iminapa tekitatud tõmbejõud. Rõhumisjõu ja hõõrdejõu resultandi nurk pinnanormaali suhtes on kriitilisel juhul  $\arctan \mu$ . Tasakaalu korral peavad antud jõud üksteist ära tasakaalustama, ehk moodustuma kolmnurga.

**V156** Tasakaalu korral peab iga toru jaoks kehtima jõudude ning jõumomentide tasakaal. Alumiste torude jaoks on jõumomentide tasakaalu köige mugavam voodella maapinna puutepunkti suhtes, sest sellisel juhul on maapinna hõõrdejõu panus 0. Lisaks paneme tähele, et kahe alumise silindri vahel rõhumisjõudu ei ole, sest see kaob niipea, kui alumised silindrid natukenelegi üksteisest eemalduvad.

**V157** **a)** Jõu määramiseks on vajalik leida, kui palju muutub tungraua kõrgus ühe vända täispöördega. Selle jaoks võib rakendada Pythagorase teoreemi tungraua pikkuse jaoks ja seda diferentseerida.

**b)** Selleks, et tungraud oleks ilma väntamiseta hõõrdejõu töttu tasakaalus, peab hõõrdejõud täpselt kompenseerima eelnevas alamülesandes leitud väntamiseks kuluva jõu.

**V158** Tasakaalu korral peab kehtima jõumomentide tasakaal. Kuna kehadest süsteemile mõjuvad kolm jõudu, peavad jõudude pikendused lõikuma samas punktis, sest vastasel juhul saaksime valida kahe jõu pikenduse lõikepunktia ning selle punkti suhtes mõjuks kolmanda punkti poolt nullist erinev jõumoment. Lisaks paneme tähele, et kehadele A ja B mõjuvad sama absoluutväärtusega jõud (mõlemad on libisemise äärel) ning nende suunad on teada.

**V159** Ringikujulisel orbiidil on satelliidi kiirus kogu orbitaalperioodi jooksul konstantne ja seetõttu on varjus veedetud osa ajast võrdne orbiidi varjus oleva osa pikkuse ja kogu orbiidi pikkuse suhtega.

**V160** Kui väike prints kõnnib piki asteroidi ekvaatorit, mõjub talle gravitatsioonijõud, normaaljõud ning ringjoonelisest trajektoorist tingitud kesktõmbekiirendus. Hõljuma hakates normaaljõudu ei mõju ning kehtib jõudude tasakaal.

**V161** Sidesatelliidil kõrgus on leitav ringorbiidil mõjuva gravitatsioonijõu ja tsentrifugaaljõu tasakaalust.

**V162** Kosmosejaama trajektoori nihked on põhjustatud maa pöörlemisest ümber oma telje, kusjuures ühele ööpäevale vastava kosmosejaama nihke ja Maa ekvaatori pikkuse suhe on otseses sõltuvuses kosmosejaama ja maa pöörlemise nurkkiiruste suhtega.

**V163** **a)** Kuu ja Maa poolt avaldatavad jõud on otseselt leitavad abivalemi kaudu.  
**b)** Kaabli katkemispunktis on pinge maksimaalne. Pinge on leitav jõudude tasakaalust.

**V164** Satelliidi tüüpiline kiirus on võrreldav esimese paokiirusega, sest satelliitiide orbitaalraadiused ei erine üksteisest märkimisväärset. Ülesande eelduste kohaselt liiguvad satelliidid sarnaselt molekulidega gaasis. Gaasis molekuli vaba tee hindamisel arvestatakse, et molekul liigub ilma põrgeteta ligikaudu aja jooksul, mil tema kokkupõrke-ristlõige on katnud ruumala, milles asub tüüpiliselt üks osake.

**V165** Termodünaamika I seaduse kohaselt  $\Delta U = Q - A$ , kus  $Q$  on süsteemi antud soojushulk ning  $A$  on välisjõudude vastu tehtud töö. Antud üesande kontekstis on  $Q$  negatiivne ja  $A$  positiivne.

**V166** Kahe vastasserva vaheline takistus on  $R = \frac{\rho L}{S}$ , kus  $L$  on servade vaheline kaugus ja  $S$  ristlõikepindala.

**V167** Jääkera sees tekib ülerõhk õhu soojenemisest tulenevast rõhu tõusust. Seeaga on kõige kriitilisem moment vee sulamise temperatuuril.

**V168** Küttesüsteemis oleva vee ruumala esialgses olukorras ja töørežiimis on avaldatavad ülesandes antud valemiga.

**V169**  $P$ - $V$  teljestikus avaldub gaasi tehtud töö tsükli aluse pindalana. Alternatiivselt võib iga tsükli etapil tehtud töö leidmiseks rakendada termodünaamika esimest seadust.

**V170** Mõlema olukorra jaoks kehtib energia järvuse seadus, kusjuures vedelike tihedused ning erisoojused on tundmatud.

**V171** Varda pöörlemise käigus muutub hõõrdejõu  $F_h$  ületamiseks kulutatud töö soojuseks. Töö on leitav hõõrdejõu ja läbitud tee pikkuse korrustisenaga.

**V172** Ülesandes on kaks tundmatut: vee lõpptemperatuur ja termose erisoojus. Need on leitavad pannes süsteemi jaoks kirja soojusliku tasakaalu võrrandid.

**V173** Energia jäÄvuse seaduse kohaselt peab rauatükist eraldunud soojusenergia minema vee soojendamiseks ja aurustumiseks.

**V174** Energia jäÄvuse seaduse kohaselt peab jõhvikate soojendamiseks kuluv sooJushulk tulema vee jahtumise arvelt.

**V175** Vee aurustumise käigus kehtib energia jäÄvuse seadus. Seega tuleb väikese veekoguse aurustumiseks vajalik sooJushulk järelejäänuD vee temperatuuri langemise arvelt.

**V176** Kastmisvee anuma taha tekib kiirtega ristuvale tasandile ringikujuline vari. Samasugune vari tekiks ka ringist, mis paikneb risti päikesekiirtega. Seega neelavad võrdse raadiusega kera ja kiirtega risti olev ring valgust võrdsest, sõltumata päikesevalguse langemise nurgast.

**V177** Kehtib soojusbilanss lihvimise käigus eralduva soojuse ning sisse- ja väljavoolava vee soojusvoo vahel. Mugavuse mõttes võib vaadelda ajavahemikku  $\Delta t$  ning selle jooksul lihvil eralduvat ning vee poolt äraantavat sooJushulka.

**V178** Enne keema hakkamist pidid vees olevad mullid olema nii väiksed, et pindpinevuse poolt tekitatud lisarõhu ja õhurõhu summa jää suuremaks kui küllastunud veeauru röhk.

**V179** Soojusvoog läbi kihi paksusega  $d$ , pindalaga  $S$ , temperatuuride vahega  $\Delta T$  ja soojusuhtivuskoeffitsiendi  $D$  on  $Q = D \frac{S \Delta T}{d}$ . Statsionaarses olekus tasakaalustab jää ja vee eralduspinna ühe plaadi poolt tulev soojusvoog teiselt poolt tuleva soojusvoo täielikult ära.

**V180** Süsteemis kehtib energia jäÄvuse seadus. Nimelt ühe tunni jooksul läheb 95 % kahe liitri aurustumisel eraldunud energiast tundmatu massiga jahutusvee soojendamiseks  $\Delta T$  vörtra. Jahutusvee kiirus on leitav toru massivoo ja ristlöike pindala kaudu.

**V181** Ideaalse soojusmasina kasutegur avaldub kujul  $\eta = \frac{T_j - T_k}{T_j}$ , kus  $T$  on temperatuur kelvinites. Kasutegur on samas tehtud töö ja jahtusvedelikult võetud soojushulga suhe.

**V182** Spiraal kuumeneb temperatuurini, mil tekib soojuslik tasakaal spiraali ja ümbritseva keskkonna vahel. Teisisõnu spiraali takistil eralduv võimsus peab olema võrdne soojusvooga spiraalist toa õhku.

**V183** Soojusliku tasakaalu tingimuse kohaselt kulub radiaatori võimsus sissetuleva õhu soojendamiseks ja seinte soojuskadude kompenseerimiseks. Seinte soojuskaod on leitavad akna avamise eelsest tasakaalutingimusest.

**V184** Temperatuuri kasvu või langemise kiirus on võrdeline tuppa siseneva summaarse soojusliku võimsusega. Sellele vastab graafiku puutuja tõus. Tuulepuhuja sisse lülitamise ajahetkel oli graafiku tõusu muut võrdeline tuulepuhuja võimsusega.

**V185** Tasakaalulises olukorras on ruumist eemalduv soojuse hulk võrdne küttekehaga poolt toodetud soojusega. Selle põhjal saab leida esialgsest olukorrast keskkonna ja ruumi vahelise soojusvahetuse võrdelisusteguri ning saadud tulemust kasutada pärastise tasakaalulise temperatuuri leidmiseks.

**V186 a)** Kehtib soojuslik tasakaal sise- ja välisseina vahel. Nimelt on soojusvoog siseseinalt välisseinale võrdne siseseina poole kiiratava soojusvoo ja välisseinalt saabunud kiirguse peegeldunud osa summaga. Välisseina jaoks kehtib analoogne tasakaalutingimus.

**b)** Nüüd kehtivad sarnased voo tasakaalud iga seina paari vahel, aga õnneks on eelmise osa tulemus üldistatav ka mitme seina jaoks.

**V187** Kütteelement on soojuslikus tasakaalus ümbritseva keskkonnaga ning kaod keskkonda on võrdlised sise- ja välistemperatuuride vahega. Soojusliku tasakaalu temperatuur on määratav nn graafilise meetodiga, mis seisneb  $\sigma(t)$  ja teatud funktsiooni pingest lõikepunktli leidmises.

**V188** Rongi taustsüsteemis on rong paigal ning õhk uhab mööda kiirusega  $v$ , kusjuures õhu jaoks kehtib massi jäädvuse seadus.

**V189** Lihtsuse mõttes võib eeldada, et Kuu pinnale jõudev summaarne valgusvoog Päikeselt peegeldub ühtlaselt poolsfääriile, mille keskpunktiks on Kuu ja pinnna peal sub Maa.

**V190** Maja teatud punkt ja tema peegelkujutis mere pinnalt paiknevad sümmetriselt mere tasandiga vörreldest. See võimaldab vee tasandi leidmist.

**V191** Kõik objektid, mis ületavad fotol horisonti, peavad olema vähemalt sama kõrgel kui fotoaparaat.

**V192** Kuna anumad on ühendatud, on rõhud mõlemas anumas samal kõrgusel samad ja anumate vedeliku tasemed võrdsed.

**V193** Torudes oleva vee rõhk on avaldatav vedelikusammaste kõrguste kaudu. Lisaks kehtib mõlemas torus Bernoulli seadus ning vee pidevustingimus, st sama aja jooksul läbib mõlemat toru sama kogus vett.

**V194** Õhutakistuse puudumisel jõub veejuga märgini sama kiirusega nagu väljudes (energia jäädvusest tulenevalt). Jõu leidmiseks võib vaadelda ajavahemikku  $\Delta t$  ning selle jooksul üle antavat vee impulsist.

**V195** Veejoa väljumise kiirus on leitav energia jäävuse seadusest või alternatiivselt impulsi jäävusest. Mõlemad lähenemised on korrektsed, aga annavad numbrilise konstanti võrra erineva vastuse, mis on tingitud jäävusseaduste kehtivuse eelduste erinevusest. Tünni ja aluse kõrgused on leitavad valides graafikult kaks (või vajadusel rohkem) punkti ja lahendades tekinud võrrandisüsteemi.

**V196** Kuna vee juga kiireneb ühtlaselt, kehtib energia jäävuse seadus. Lisaks kehtib vee massi jäävus ristlõigete ulatuses.

**V197** Kolbile mõjuv jõud tekitab kolvi sees lisarõhu  $F/S$ . Kuna tegu on lamineeriva vooga, kehtib Bernoulli seadus. Alternatiivselt võib rakendada energia jäävust kolvi ees ja suudme juures.

**V198** Niisama sirges torus voolav vesi piki-sihilisi deformatsioone ei tekita. Kaarekujulise osa juures, aga survestab vesi väliskülge rohkem kui sisekülge ning tekitab piki-sihilisi pingeid. Pinge täpse suuruse määramiseks on mugav vaadelda kaarekujulist osa tervikuna ning uurida, kuidas vee impuls muutub kaarekujulisesse ossa sisenedes ja väljudes.

**V199** **a)** Juhul kui ookeani keskmise tiheduse ning lisarõhk on vastavalt  $\rho$  ja  $p$ , kehtib ülesandes mainitud kokkusurutavuse seos  $\rho \approx \rho_0(1 + \beta p)$ . Lisaks on vee rõhud ookeani põhjas kokkusurumatul ja kokkusurutud juhtudel võrdsed.

**b)** Tasub vaadelda väikest vee kogust massiga  $m$  ning selle ruumala muute sügavusel  $H$  voorreldes pinnaapealse olukorraga.

**V200** Omavõnkesageduse leidmiseks on harilikult kõige mugavam vaadelda väikest hälvet tasakaaluasendist ning uurida, kuidas süsteem edasi käitub. Ülesande kontekstis võib oletada, et õhuke veekiht ühes toru harus kandub teisele toru poolele. See põhjustab lisarõhu toru teises poolnes, mis üritab süsteemi tasakaaluasendisse tagasi viia.

# Lahendused

## L1 Kivi ★

Autor: Aigar Vaigu, lõppvoor, 2005, G 1

Läheme üle vabalt langevasse taustsüsteemi. Selles süsteemis liiguvad vabalt langevad kehad konstantse kiirusega. Kivi saavutab langevas süsteemis palli viskamise hetkeks,  $\Delta t$ , õhupalli suhtes suhetlike kiiruse  $u = g\Delta t$ ; see ei tohi olla suurem, kui maksimaalne viskekiirus  $v_{\max}$ . Seega

$$\Delta t \leq \frac{v_{\max}}{g}.$$

Avaldame palli viskekiiruse energia jäävuse seadusest:

$$\frac{mv_{\max}^2}{2} = mgh \quad \Rightarrow \quad v_{\max} = \sqrt{2gh}.$$

Maksimaalne viivituse aeg on seega

$$\Delta t_{\max} = \frac{v_{\max}}{g} = \sqrt{\frac{2h}{g}} \approx 2 \text{ s.}$$

## L2 Pallid ★

Autor: Tundmatu autor, lahtine, 2007, G 1

Ühesuguse massiga pallide elastse kokkupõrke tulemusena vahetavad nad oma kiirusevektorid (järeldub lihtsalt impulsi ja energia jäävusest massikeskme süsteemis vaadatuna). Seega võime sama hästi öelda, et pallid lähevad üksteisest vabalt läbi, kusjuures ühe palli algkiirus ja teise palli lõppkiirus on võrdsed nulliga. Kui Juku istub körgusel  $h$ , siis saame mõlema vabalt liikuva palli jaoks lennuajaks  $t = \sqrt{2h/g}$ . Seega tabavad pallid viskajaid üheaegselt.

*Alternatiivne lahendus*

Kui Juku visatud pall jõuab täpselt tagasi oma algkõrgusele, siis peab tema kiiruse absoluutväärtus vahetult kokkupõrke eel ja vahetult kokkupõrke järel olema sama. Elastse kokkupõrke korral kehtib energia jäävus, järelikult võrdub ka Juhani palli kiiruse absoluutväärtus vahetult kokkupõrke eel kiiruse absoluutväärtusega vahetult kokkupõrke järel. Seega liigub kumbki pall tuldud suunas tagasi nii, et liikumise ajagraafik on peegelsümmeetiline põrkehettke suhtes. Seega, kui nad startisid samaaegselt, siis nad ka finiseerivad samaaegselt.

**L3 Hobune ★**

Autor: Valter Kiisk, piirkonnnavoor, 2007, G 1

Vaba langemise aeg

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 3}{9,81}} \approx 0,78 \text{ s}$$

Seega otsitav kaugus on  $s = vt = 10 \text{ m/s} \cdot 0,78 \text{ s} = 7,8 \text{ m}$ .**L4 Eiffeli torn ★**

Autor: Aigar Vaigu, piirkonnnavoor, 2010, G 1

Kontrollime, kui kaua kukub raudkuul ülemiselt vaateplatvormilt  $h = 273 \text{ m}$  maapinnale.

$$h = \frac{gt^2}{2} \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2h}{g}} \approx 7,5 \text{ s.}$$

Alates hetkest, kui mõlemad kuulid langevad, on nende suhteline kiirus muutumatud, sest mõlemad kuulid on siis vabalt langevas taustsüsteemis paigal. Leiame esimese kuuli kiiruse teise kuuli kukutamise hetkel.

$$v = gt \approx 29,4 \text{ m/s.}$$

Ajavahemik kuulide maapinnale jõudmisel on sama mis kuulide kukutamiselgi, ehk  $t = 3 \text{ s}$ .

**L5 Kokkupõrge ★**

Autor: Andreas Valdmann, piirkonnnavoor, 2011, G 1

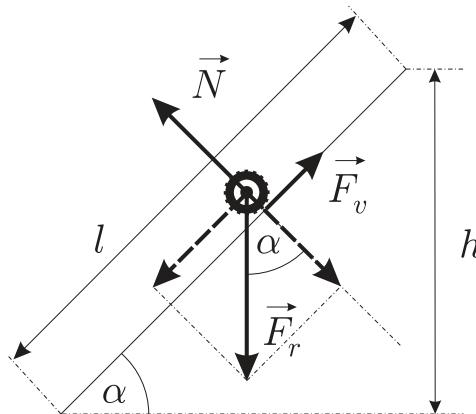
**a)** Autode kiirused on võrdsed ja vastassuunalised. Seetõttu on koguimpulss võrdne nulliga ja autod jäävad pärast kokkupõrget paigale. Kogu esialgne kineetiline energia kulub purustuste tekitamiseks. Selleks on  $2 \frac{mv_a^2}{2} = mv_a^2$ . Autode kiirused on  $50 \text{ km/h} = 13,9 \text{ m/s}$  ja koguenergia on  $289 \text{ kJ}$ .

**b)** Minnes üle massikeskme taustsüsteemi näeme, et olukord taandub eelmiseks olukorraks, seega kokkupõrke koguenergia on  $289 \text{ kJ}$ .

## L6 Tõus ★

Autor: Tundmatu autor, lahtine, 2005, G 2

Autole mõjuv veojõud on määratud tee ja rataste vahelise hõõrdeteguriga. Antud juhul hõõrdumine ei takista liikumist, vaid, vastupidi, on liikumise aluseks. Kui hõõrdetegur oleks võrdne nulliga, siis ei saaks auto üldse edasi liikuda. Kanname joonisele kõik autole mõjuvad jõud (vt joonist): raskusjõu  $F_r = mg$ , tooreaktsiooni  $N = mg \cos \alpha$  ja hõõrdejõuga võrdse veojõu  $F_v = \mu mg \cos \alpha$ .



Paneme kirja energia miinimumitingimuse mäkke tõusu jaoks:

$$E_h = E_0 + A,$$

kus  $E_h = mgh = mgl \sin \alpha$  on auto potentsiaalne energia mäe tipus,  $E_0 = mv^2/2$  on auto kineetiline energia mäe jalamil ning  $A = F_v l = \mu mgl \cos \alpha$  on auto mäkke vedamiseks hõõrdejõu poolt tehtud töö. Saame

$$mgl \sin \alpha = \frac{mv^2}{2} + \mu mgl \cos \alpha.$$

Sellest võrrandist saame avaldada otsitava hõõrdeteguri:

$$\mu = \tan \alpha - \frac{v^2}{2gl \cos \alpha} = \tan 5^\circ - \frac{(30 \cdot 1000/3600)^2}{2 \cdot 9,8 \cdot 200 \cdot \cos 5^\circ} \approx 0,07.$$

Arvestades, et libedal jääl võib hõõrdetegur langeda alla 0,05, võib meie auto teoreetiliselt koju jäädä, kui tee on libe ja teele pole õigeaegselt liiva pandud ning autol pole naastrehve all.

## L7 Keha ★

Autor: Tundmatu autor, lahtine, 2006, G 3

Ülesse visatud keha koordinaadi leidame võrrandist:

$$h = v_0 t - \frac{gt^2}{2}.$$

Iga antud  $v_0$  ja  $h$  jaoks annab see võrrand kaks  $t$  väärust:

$$t_{1,2} = \frac{v_0 \pm \sqrt{v_0^2 - 2gh}}{g}.$$

Nende kahe väärustuse vahe on ajavahemik, mis möödub kõrguse  $h$  kahe läbimise vahel keha poolt:

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{2\sqrt{v_0^2 - 2gh}}{g}. \quad (1)$$

Siit saame, et

$$v_0 = \sqrt{2gh + \frac{g^2 \Delta t^2}{4}}.$$

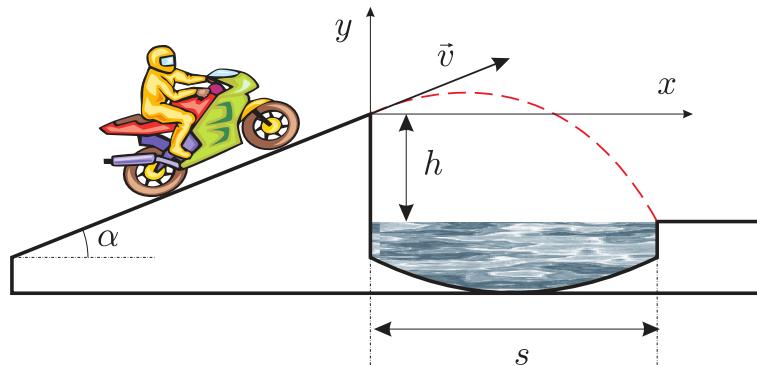
Kui valemis (1) võtta  $h = 0$ , siis saame ajavahemiku, mis möödub liikumise algusest kuni jõudmiseni tagasi algpunkti:  $\tau = 2v_0/g$ . Asendades siia varem saadud  $v_0$  väärustuse, saame:

$$\tau = 2\sqrt{\frac{2h}{g} + \frac{\Delta t^2}{4}}.$$

## L8 Mootorratas ★

Autor: Tundmatu autor, lahtine, 2007, G 5

Suuname koordinaatteljed nii, nagu näidatud joonisel.



Mootorratturi liikumist kirjeldavad seosed

$$x = vt \cos \alpha, \quad y = vt \sin \alpha - \frac{gt^2}{2},$$

kust saame

$$y = x \tan \alpha - \frac{gx^2}{2v^2 \cos^2 \alpha}.$$

See on parabooli võrrand. Asendades siia mootorratturi langemiskoha koordinaadid  $x = s$  ja  $y = -h$ , leiate minimaalse kiiruse

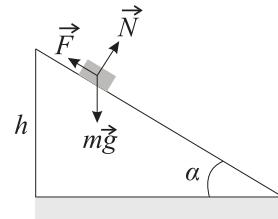
$$\begin{aligned} -h &= s \tan \alpha - \frac{gs^2}{2v^2 \cos^2 \alpha} \Rightarrow \frac{gs^2}{2v^2 \cos^2 \alpha} = h + s \tan \alpha \Rightarrow \\ \Rightarrow 2v^2 \cos^2 \alpha &= \frac{gs^2}{h + s \tan \alpha} \Rightarrow v^2 = \frac{gs^2}{2 \cos^2 \alpha (h + s \tan \alpha)} \Rightarrow \\ v &= \frac{s}{\cos \alpha} \sqrt{\frac{g}{2(h + s \tan \alpha)}}. \end{aligned}$$

### L9 Kelk ★

Autor: Tundmatu autor, lahtine, 2008, G 2

Kehtib energia jäädvuse seadus. Algul on kelk kõrgusel  $h$  ja omab potentsiaalset energiat  $mgh$ . See energia kulutatakse hõõrdejõu ületamise tööks mõlemal mäenõlval ja kelgu uueks tõusuks vajaliku potentsiaalse energi peale. Energia jäädvust väljendab valem

$$mgh = A_1 + A_2 + mgh_2, \quad (1)$$



kus  $h_2$  on kelgu lõppkõrgus. Hõõrdejõud mõlemal nõlval avaldub kujul  $F = \mu N = \mu mg \cos \alpha$ . Teepikkus laskumisel on  $s_1 = h / \sin \alpha$  ning tõusul  $s_2 = h_2 / \sin \alpha$ . Seega tehtud töö hõõrdejõu ületamiseks on

$$A_1 = Fs_1 = \mu mgh / \tan \alpha$$

ja

$$A_2 = Fs_2 = \mu mgh_2 / \tan \alpha.$$

Asendades saadud seosed valemisse (1) saame

$$h_2 = \frac{1 - \mu / \tan \alpha}{1 + \mu / \tan \alpha} h \approx 7 \text{ m}.$$

**L10 Hantel ★**

Autor: Mihkel Kree, lõppvoor, 2008, G 1

Kehale antakse energia  $E_k = \frac{mv^2}{2}$ . Massikese saab impulsi  $p_c = mv$  ning hakkab vertikaalsuunas liikuma kiirusega

$$v_c = \frac{p_c}{m+m} = \frac{v}{2}$$

ning süsteemi kuligliumise energia on seega

$$E_v = \frac{v_c^2(m+m)}{2} = \frac{mv^2}{4}.$$

Kui keha saavutab maksimaalse kõrguse, on tema kuligliumise energia täielikult muutunud potentsiaalseks energiaks ning süsteemi kineetiline energia on nüüd

$$E = E_k - E_v = \frac{mv^2}{4}.$$

**L11 Ping-pong ★**

Autor: Siim Ainsaar, lõppvoor, 2008, G 2

Kui pall tõuseb kahe järjestikuse põrke vahel (pärast i-ndat põrget) kõrgusele  $h_i$ , saame nende põrgete vahelise ajavahemiku  $t_i$ :

$$h_i = \frac{g\left(\frac{t_i}{2}\right)^2}{2} \implies t_i = 2\sqrt{\frac{2h_i}{g}}.$$

Igas lennu haripunktis on palli kiirus ja ka kineetiline energia null ning kogu-energia  $E_i$  potentsiaalne. Kui palli mass on  $m$ , siis  $E_i = mgh_i$  ja on võrdeline haripunkti kõrgusega  $h_i$ . Seega ka haripunkti kõrgus kahaneb pärast igat põrget  $k$  korda:  $h_{i+1} = \frac{h_i}{k}$ . Ilmselt selles seoses  $h_0 = h$ .

Kukkumise aeg enne esimest põrget:

$$t_0 = \frac{2h}{g}.$$

Nii saamegi koguaja:

$$\begin{aligned} t &= t_0 + t_1 + t_2 + \dots = \sqrt{\frac{2h}{g}} + 2\sqrt{\frac{2h}{gk}} + 2\sqrt{\frac{2h}{gk^2}} + 2\sqrt{\frac{2h}{gk^3}} + \dots = \\ &= \sqrt{\frac{2h}{g}} + 2\sqrt{\frac{2h}{gk}} \left[ 1 + \left( \frac{1}{\sqrt{k}} \right)^1 + \left( \frac{1}{\sqrt{k}} \right)^2 + \left( \frac{1}{\sqrt{k}} \right)^3 + \dots \right] = \\ &= \sqrt{\frac{2h}{g}} + \sqrt{\frac{2h}{gk}} \frac{1}{1 - \frac{1}{\sqrt{k}}} = \sqrt{\frac{2h}{g}} + 2\sqrt{\frac{2h}{g}} \frac{1}{\sqrt{k} - 1} = \\ &= \sqrt{\frac{2h}{g}} \left( 1 + \frac{2}{\sqrt{k} - 1} \right) = \frac{\sqrt{k} + 1}{\sqrt{k} - 1} \sqrt{\frac{2h}{g}}. \end{aligned}$$

**L12 Mürsk ★**

Autor: Mihkel Kree, piirkonnavor, 2009, G 2

Tähistame mürsu kiiruse lagunemishetkel  $v$ -ga. Vahetult pärast lagunemist peab ühe poole kiirus olema samuti  $v$ , kuid vastassuunaline. Olgu teise osa kiirus sel hetkel  $u$ . Impulsi jäädvuse töttu

$$Mv = \frac{M}{2}u - \frac{M}{2}v,$$

millega  $u = 3v$ . Vahetult pärast lagunemist kuulidel vertikaalne kiiruskomponent puudub, seetõttu võtab kummagi tüki langemine võrdsest aega. Teine tükki maandub kahurist kaugusele  $L + 3L = 4L$ .

**L13 Kerad ★**

Autor: Valter Kiisk, lahtine, 2010, G 1

Õõnes ja homogeenne kera eristuvad selle läbi, et esimese inertsimoment on suurem, sest mass on koondunud pöörlemistsentrist kaugemale, st sama nurkkiirusega pööreludes on pöörlemisega seotud kineetiline enregia suurem. Niisiis võrdse kineetilise energiaga omadamisel (näiteks sama kalpinda mööda alla veeredes) saavutab õõnes kera väiksema kiiruse (sest pöörlemisega seotud energia on suurem).

Vedelikku sisaldava kera korral kulub aga osa liikumise energiast paratamatult vedeliku sisehõordumise ületamiseks, seetõttu mehaanilise energiääävus on katsetes rikutud (näiteks lükkame kerad veerema; vedelikku sisaldav kera pidurdub iseenesest).

**L14 Sild ★**

Autor: Valter Kiisk, lõppvoor, 2010, G 1

Olgu sillala köverusraadius  $r$ . Pythagorase teoreemist

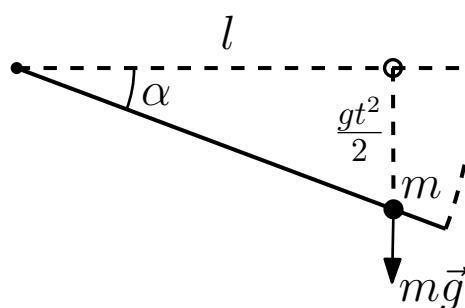
$$r^2 = (l/2)^2 + (r - h)^2 \implies 0 = l^2/4 - 2rh + h^2.$$

Kuna  $h \ll l$  ja seega  $h \ll r$ , siis  $h^2$  võib ära jäätta ja  $r = l^2/8h = 250$  m. Auto rasusjõu  $mg$  ja tooreaktsiooni  $N$  resultant annab kesktõmbekiirenduse  $v^2/r$ . Seega  $N = mg - mv^2/r \approx 8700$  N.

Kontakt rataste ja maapinna vahel hakkab kaduma, kui  $N = 0$ . Seega  $v = \sqrt{gr} \approx 180$  km/h.

**L15 Varras ★**

Autor: Stanislav Zavjalov, lõppvoor, 2011, G 2



Kuna varras on kaalutu, peab sellele mõjuv sumaarne jõud olema 0. Vastasel korral mõjuks sellele Newtoni III seaduse kohaselt lõpmatu jõud, mis pole füüsikaline. Sellest saab järel dada, et massile mõjuv normaaljõud on null ning hõõrde-ta libisemise töttu on ka vardaga paralleelne jõukomponent null. Seega ei mõju massile varda poolt ükski jõud ning mass on vabalanguses.

Aja  $t$  jooksul jõub mass langeda vahemaa  $\frac{gt^2}{2}$  ning varda ja horisontaali vaheline nurk avaldub kui (vt joonist)  $\tan \alpha = \frac{gt^2}{2t}$ .

### L16 Karatist ★★

Autor: Tundmatu autor, lahtine, 2007, G 6

Laua painumist käitleme sarnaselt vedru painumisega. Laua elastsusenergia enne purunemist on  $E = kx^2/2$ . Eeldame, et pärast plastset põrget toimuval liikumisel on mehaaniline energia jäüb ning lauajupp ja käsi peatuvad vahetult pärast lööki. Käe ja laua kokkupõrge – löök – on täielikult mitteelastne. Seega peab pärast lööki laua ja rusika kineetilisest energiast

$$W = \frac{(m + M)u^2}{2}$$

piisama laua deformeerimiseks.

$$E = W \Rightarrow u = \sqrt{\frac{kd^2}{m + M}},$$

kus  $u$  on laua ja käe kiirus pärast lööki. Löögi hetkel kehtib impulsi jäävus

$$(m + M)u = mv \Rightarrow v = \frac{m + M}{m}u.$$

Kokkuvõttes saame

$$v = \frac{m + M}{m} \sqrt{\frac{kd^2}{m + M}} = \sqrt{\frac{kd^2(m + M)}{m^2}},$$

$$v = \sqrt{\frac{1,4 \cdot 10^5 \cdot 0,02^2 \cdot (1,5 + 2)}{1,5^2}} \approx 9,3 \text{ m/s.}$$

**L17 Veenus ★★**

Autor: Mihkel Kree, lõppvoor, 2007, G 2

- a) Maksimaalse eemaldumise korral moodustub Maast, Veenusest ja Päikesest täisnurkne kolmnurk, mille täisnurga tipp on Veenus. Siit saame Veenuse ja Maa orbitaalraadiuste suhe

$$\alpha = \sin 46^\circ = 0,72.$$

- b) Veenuse tiirlemisperioodi saame Kepleri seadusest

$$T_V = T_M \sqrt{\alpha^3}.$$

Maa tiirlemise nurkkiirus  $\omega_M = \frac{2\pi}{T_M}$  ning Veenuse tiirlemise nurkkiirus  $\omega_V = \frac{2\pi}{T_V}$ . Nende suhtelise liikumise nurkkiirus

$$\Delta\omega = \omega_V - \omega_M = \omega_M \left( \frac{1}{\sqrt{\alpha^3}} - 1 \right)$$

ning suhtelise liikumise periood on

$$T_s = \frac{T_M}{\frac{1}{\sqrt{\alpha^3}} - 1} = 570 \text{ päeva.}$$

Järjestikuste eemaldumiste vaheline jäab Päikeselt vaadatuna nurk  $2 \cdot (90^\circ - 46^\circ) = 88^\circ$  või  $360^\circ - 88^\circ = 272^\circ$ , ehk päevades

$$T_s \frac{88}{360} = 140 \text{ päeva.}$$

ja

$$T_s \frac{272}{360} = 430 \text{ päeva.}$$

**L18 Auto ★★**

Autor: Mihkel Heidelberg, piirkonnnavoor, 2009, G 5

Vedavate rataste ja maa vahel mõjub mingi horisontaalsihiline hõõrdejõud  $F$ . Jõust ja kiirusest saame auto liikumisse mineva võimsuse  $N_l = Fv$ . Ratastele mõjub jõumoment  $Fr$ , mille tõttu mootori võimsus  $N_m = \omega Fr$ .

Kasutegur on niisiis

$$\nu = \frac{N_l}{N_m} = \frac{Fv}{F\omega r} = \frac{v}{\omega r}.$$

**L19 Vedru ★★**

Autor: Aigar Vaigu, piirkonnnavoor, 2010, G 4

Hetkel, mil tellis vedrust eemalduma hakkab, liigub vedru ülemine ots koos tellisega kiirusega  $v$  ülesse. Tellise kiirus on piisav, et kerkida tagasi esialgsele kõrgusele  $H \propto v^2$ . Eeldame, et vedru on pikisuunas ühtlane, sellisel juhul liigub vedru massikese ülemise ja alumise otsa keskmise kiirusega ülesse. Niisiis,  $v_{\text{vedru}} = v/2$ . Seega tõuseb vedru massikese kõrgusele  $h \propto v_{\text{vedru}}^2 = v^2/4$ , ehk

$$h = \frac{H}{4}.$$

**L20 Pendel ★★**

Autor: Taavi Pungas, piirkonnnavoor, 2011, G 7

Esialgse hinnangu perioodile,  $\tau = 2,425 \text{ s}$ , saame  $\tau_1 = t_2 - t_1$  ja  $\tau_2 = t_4 - t_3$  keskmisest. Seda kasutades näeme, et  $t_1$  ja  $t_3$  vahel pidi toimuma täpselt 24 võnget, samamoodi  $t_2$  ja  $t_4$  vahel. Saame kaks sõltumatut mõõtmist 24 võnke kestuse kohta:  $\tau'_1 = (t_3 - t_1)/24 = 2,4146 \text{ s}$  ja  $\tau'_2 = (t_4 - t_2)/24 = 2,4125 \text{ s}$ . Nende keskmine annab meie hinnangu pendli perioodi kohta,  $\tau' = 2,4135 \text{ s} \approx 2,414 \text{ s}$ .

**L21 Aerud ★★**

Autor: Tundmatu autor, piirkonnnavoor, 2005, G 6

Jõumomentide tasakaalu tingimus aeru jaoks tullide suhtes annab aerulabadele mõjuva keskmise jõu:  $F_l = Fa/b$ .

Tasakaalutingimus süsteemi paat+aerutaja+aerud jaoks annab võrrandi:

$$\frac{2Fa}{b} = \alpha v^2,$$

millest

$$v = \sqrt{\frac{2Fa}{\alpha b}} = 2 \text{ m/s}.$$

Kui aerulabad püsiksid tõmbamise ajal vee suhtes paigal, siis oleks võimsus

$$P = \frac{2vFa}{b} = 160 \text{ W}.$$

Et aga aerulabad nihkuvad ilmselt veidi tagasi, siis on tegelik võimsus mõnevõrra suurem.

**L22 Kivi ★★**

Autor: Tundmatu autor, lahtine, 2006, G 4

Kivile mõjuvaks kesktõmbejõuks on paela tõmbepinge  $T$  projektsioon tiirlemise tasapinnale  $F = T \sin \varphi$  (vt joonist), kus  $\varphi$  on nurk paela ja vertikaalsihi vahel. Newtoni teine seadus kivi liikumise jaoks mööda ringjoont raadiusega  $R$  näeb välja:

$$m\omega^2 R = T \sin \varphi, \quad (1)$$

kus  $\omega = 2\pi/\tau$  – kivi nurkkiirus ja  $m$  – kivi mass. Kuna vertikaalsuunas kivil kii-rendus puudub, järelikult kivile mõjuvate jõudude projektsioonid vertikaalteljele annavad summas nulli:

$$T \cos \varphi = mg. \quad (2)$$

Jagades valemi (1) valemiga (2), saame

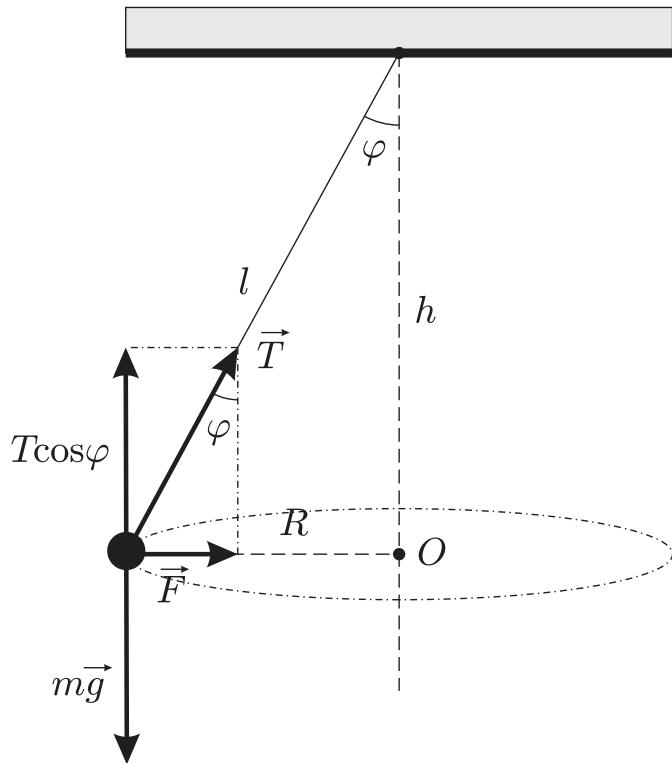
$$\tan \varphi = \frac{\omega^2 R}{g}.$$

Arvestades, et  $\tan \varphi = R/h$ , saame

$$\frac{\omega^2 R}{g} = \frac{R}{h} \quad \Rightarrow \quad \omega = \sqrt{\frac{g}{h}},$$

ehk

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{h}{g}} = 2 \cdot 3,14 \cdot \sqrt{\frac{1,25}{9,81}} \approx 2,24 \text{ s.}$$



### L23 Kaldpind ★★

Autor: Mihkel Rähn, piirkonnnavoor, 2006, G 4

Esimeseks põrkeks kogub pall kiiruse  $v = \sqrt{2gh}$ . Valime  $x$ -telje pikki kaldpinda ja  $y$ -telje risti kaldpinnaga. Seega mõjub pallile  $x$ -suunaline kiirendus  $a_x = g \sin \alpha$  ja  $y$ -suunaline kiirendus  $a_y = -g \cos \alpha$ . Märkame, et palli  $y$ -suunaline liikumine on efektiivselt sama nagu nõrgemas raskusväljas põrkumine, ehk pall hakkab kindla perioodiga üles-allta põrkuma. Põrgete vaheline aeg avaldub kui

$$\tau = \frac{2v_{0y}}{|a_y|} = \frac{2\sqrt{2gh} \cos \alpha}{g \cos \alpha} = \sqrt{8h/g},$$

kus  $v_{0x} = \sin \alpha \sqrt{2gh}$  ja  $v_{0y} = \cos \alpha \sqrt{2gh}$  on palli esimese põrke järgsed kiiruskomponendid.

$x$ -telje suunaline liikumisvõrrand avaldub kui

$$x = v_{0x}t + \frac{a_x t^2}{2}.$$

Peale viienda põrget, ajahetkel  $t = 4\tau$ , on palli  $x$ -koordinaat

$$x = \sin \alpha \sqrt{2gh} \cdot 4\sqrt{\frac{8h}{g}} + \frac{g \sin \alpha}{2} \cdot 16 \frac{8h}{g} = 80h \sin \alpha.$$

## L24 Kuulike ★★

Autor: Tundmatu autor, lahtine, 2008, G 5

Olgu  $\alpha$  nurk vertikaali ja varda vahel ning  $l$  niidi pikkus. Energia jäävuse seadusest  $v^2 = 2gl \cos \alpha$ , millest kiiruse vertikaalkomponendi ruut

$$v_y^2 = 2gl \cos \alpha \sin^2 \alpha = 2gl \cos \alpha (1 - \cos^2 \alpha).$$

Tähistades  $\cos \alpha = y$ , saame  $v_y^2$  maksimumi tingimuse, kui võtame sellest tuletise  $y$  järgi:

$$\frac{dv_y^2}{dy} = 2gl (1 - 3y^2) = 0,$$

millest  $y = 1/\sqrt{3}$  ja  $\alpha = \arccos(1/\sqrt{3}) \approx 55^\circ$ .

*Alternatiivne lahendus*

Ülesandes on öeldud, et kuulikese kiiruse vertikaalne komponent hakkab esialgu suurenema, kuid teatud hetkest alates vähenema. See tähendab seda, et kuulikese kiirenduse vertikaalne komponent oli alguses positiivne ning pärast muutus negatiivseks. Järelikult hetkel, kui kiiruse vertikaalne komponent on maksimaalne, on kiirenduse vertikaalne komponent null. Seega vaadeldaval hetkel võrdub kuulikese raskusjõu ju niidi tõmbjed jõud vertikaalsete projektsioonide summa nulliga, ehk siis

$$mg = T \cos \alpha. \quad (1)$$

Kuuli kesktõmbekiirendus on  $a_n = v^2/l$ , kus  $l$  on niidi pikkus. Seega Newtoni II seaduse põhjal

$$m \frac{v^2}{l} = T - mg \cos \alpha. \quad (2)$$

Energia jäävuse seadusest

$$v^2 = 2gl \cos \alpha. \quad (3)$$

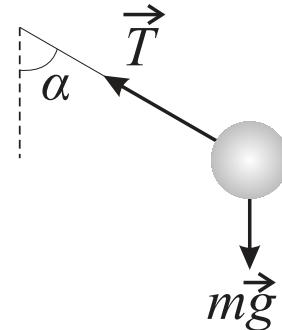
Asendades võrdusesesse (2) avaldised  $T$  ja  $v^2$  jaoks võrdustest (1) ja (3) saame

$$\frac{m \cdot 2gl \cos \alpha}{l} = \frac{mg}{\cos \alpha} - mg \cos \alpha,$$

millest

$$\frac{1}{\cos \alpha} - \cos \alpha = 2 \cos \alpha \Rightarrow \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Siit  $\alpha = \arccos(1/\sqrt{3}) \approx 55^\circ$ .



**L25 Veerev silinder ★★**

Autor: Andres Laan, lahtine, 2010, G 3

Eraldumiskõrgust on kõige lihtsam arvutada kasutades jõudude tasakaalu. Nii kaua kui veerev keha on alusega kontaktis, mõjub talle tooreaktsioon. Pinnalt eraldumise punktis muutub tooreaktsioon nulliks ja raskusjõu raadiusesihiline komponent saab võrdseks kesktõmbekiirendusega. Seega

$$\frac{mv^2}{R+r} = mg \cos \alpha,$$

kus  $\alpha$  on pinna kaldenurk eraldumispunktis (mis asub kõrgusel  $H = (r+R) \cos \alpha$ ). Vastav kiirus on leitav energia jäävuse seadusest, ehk võrdsustades gravitatsioonienergia muudu kulg- ja pöördliikumise kineetilise energiaga:

$$mg(R+r-H) = mv^2.$$

Elimineerides eelnevaist võrrandeist  $\cos \alpha$ , saame tulemuseks  $H = (r+R)/2$ .

**L26 Sfääär ★★★**

Autor: Andre Sääsk, lahtine, 2005, G 6

Kuna küsitudkse ainult minimaalset vajalikku kiirust (arvväärtust), siis ei pea me leidma ei viske nurka ega viske kohta. Vertikaalsuunalise kiiruse komponendi viske hetkel leiame energia jäävuse seadusest:

$$\frac{mv_{y0}^2}{2} = mg\Delta h = mg(2R-h) \Rightarrow v_{y0} = \sqrt{2g(2R-h)}.$$

Horisontaalsuunalise kiiruse komponendi leiame tingimusest, et sfääri ülemises punktis peab olema pallile mõjuv kesktõmbe kiirendus  $v^2/R$  võrdne pallile mõjuva raskuskiirendusega. Kuna sfääri ülemises punktis on  $v_y = 0$ , siis  $v = v_x$ . Kuna õhu takistust me ei arvesta, siis  $v_x = v_{x0}$  (kiiruse horisontaalsuunaline komponent ei muudu lennu ajal). Seega

$$\frac{v_{x0}^2}{R} = g \Rightarrow v_{x0} = \sqrt{gR}.$$

Teades kahte kiiruse komponenti, on lihtne leida kogu kiiruse viske hetkel:

$$v = \sqrt{v_{x0}^2 + v_{y0}^2} = \sqrt{gR + 2g(2R-h)} = \sqrt{g(5R-2h)} \approx 29 \text{ m/s}.$$

*Alternatiivne lahendus*

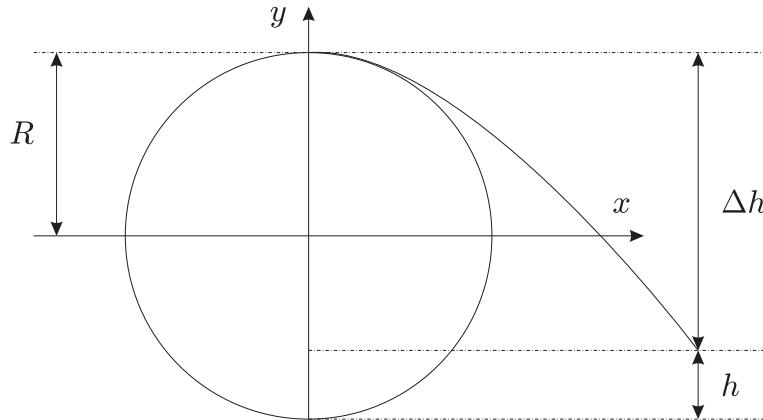
Lähemene ülesandele matemaatiliselt. Meil on ringjoon, parabool ning nende puutepunkt. Lahendades nende võrrandid puutepunkti leidmiseks peame saama ainult ühe lahendi, sest visatud pall ei tohi läbida kuplit. Koordinaatide alguspunkti paneme kera keskpunkti,  $y$ -telg on suunatud vertikaalselt üles,  $x$ -telg – horisontaalselt viske suunas.

Ringjoone võrrand

$$x^2 + y^2 = R^2.$$

Parabooli võrrand

$$y = ax^2 + bx + c.$$



Sümmeetriast  $y$ -telje suhtes on  $b = 0$ , palli ja kupli kokkupuutepunkti teades on  $x = 0$  puhul  $y = R$  (vt joonist). Seega  $c = R$  ja parabooli võrrand omandab kuju:

$$y = ax^2 + R.$$

Nüüd tuleb ühest võrrandist tundmatu asendada teise. Olgu selleks parabooli võrrandi  $y$ , mille asendame ringjoone võrrandisse:

$$\begin{aligned} x^2 + (ax^2 + R)^2 &= R^2, \\ x^2 + a^2x^4 + 2aRx^2 + R^2 &= R^2, \\ x^4 + \left(\frac{2aR+1}{a^2}\right)x^2 &= 0. \end{aligned}$$

Lahendades selle võrrandi, saame kolm lahendit:

$$x = 0, \quad x = \pm \sqrt{-\frac{2aR+1}{a^2}}.$$

Meile sobib ainult esimene lahend, sest teised kaks on imaginaarsed. Seega

$$2aR + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad a = -\frac{1}{2R}.$$

Nüüd on paras aeg analüüsida kiiruse komponente. Vaatleme kõigepealt kiiruse vertikaalset komponendi. Energia jäätvuse seadusest teame, et palli kineetiline energia viske alguses muundub palli potentsiaalseks energiaks trajektoori tippunktis:

$$\frac{mv_{0y}^2}{2} = mg\Delta h = mg(2R - h) \quad \Rightarrow \quad v_{0y} = \sqrt{2g(2R - h)}.$$

Teisest küljest, kiiruse võrrandist teame, et

$$v_{0y} = g\Delta t \quad \Rightarrow \quad \Delta t = \frac{v_{0y}}{g} = \frac{\sqrt{2g(2R - h)}}{g}.$$

Seega lennuaeg on paika pandud viskekohta arvestamata. Analüüsime parabooli võrrandit viskekohas

$$-R + h = ax^2 + R \Rightarrow x^2 = \frac{h - 2R}{a}.$$

Lennuaeg on juba määratud, seega mida väiksem on  $x$ , seda väiksema kiirusega võib pall läbida vahemaad viskekohast nullpunktiga vaadelduna  $x$ -teljel. Seega peab  $a$  olema võimalikult suur. Asendades suurima  $a$  saab

$$x = \sqrt{\frac{h - 2R}{-1/2R}} = \sqrt{2R(2R - h)}.$$

Kiiruse  $x$ -teljeline komponent teepikkuse ja aja suhtena on

$$v_{0x} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{g\sqrt{2R(2R - h)}}{\sqrt{2g(2R - h)}} = \sqrt{\frac{g^2 R}{g}} = \sqrt{gR}.$$

Liites komponendid saame minimaalse viske kiiruse:

$$v = \sqrt{v_{0x}^2 + v_{0y}^2} = \sqrt{gR + 2g(2R - h)} = \sqrt{g(5R - 2h)} \approx 29 \text{ m/s.}$$

Antud lahendus on hea näide sellest, kui pikk ja keeruline võib olla ülesande matemaatiline lahendus vörreledes füüsikalisega.

## L27 Anum ★★

Autor: Tundmatu autor, lahtine, 2005, G 7

Vaatame algul liikuva anumaga seotud taustsüsteemi. Kui põrnikas (massiga  $\rho V$ ) roomab mööda anuma põhja, siis selle peale liigub ka põrnikat ümbritlev vedelik. Põrnika liikumist võib mugavuse mõttes ette kujutada virtuaalse põrnika liikumisega, mille tihedus on  $\rho - \rho_0$ . Sellisel juhul liigub virtuaalne põrnikas vedelikku tõrjumata ning ülesanne taandub mugavamale dünaamika ülesandele.

Liigume nüüd põrandaga seotud taustsüsteemi. Vastavalt impulsi jäädvuse seadusele on põrnika ja anuma koguimpulss kogu aeg konstantne (sest põrnika+anuma süsteemile ei mõju väliseid jõude). Kuna see oli alguses 0, on põrnika ja anuma impulsid vastassuunalised ning absoluutväärtsuse poolest võrdsed. Olgu anuma kiirus põranda suhtes  $v$ . Siis põrnika kiirus põranda suhtes on  $u - v$ . Impulsi jäädvuse seadusest tulenevalt

$$\rho_0(V_0 + V)v = (\rho - \rho_0)V(u - v),$$

ehk

$$v = \frac{V(\rho_0 - \rho)}{\rho V + \rho_0 V_0} u.$$

**L28 Mullitaja ★★★**

Autor: Jaak Kikas, lõppvoor, 2005, G 7

Arvestades mullide arvu jäädvust on ruumiline vahemaa nende vahel võrdeline mullikeste kiirusega. Viimase leiate võrdsustades takistus- ja üleslükkejõu ning arvestades mullikese ruumala muutust rõhu muutumisel sügavuse vähenemisel. Mullikesele mõjuvad vee takistusjõud  $F$  ja üleslükkejõud  $F_A$ . Nende võrdusest

$$6\pi\eta Rv = g(\rho - \rho_{hk})V,$$

kus  $V$  on mullikese ruumala. Kuna ülesande tingimuste kohaselt  $\rho \ll \rho_{hk}$  ja tähistades indeksitega „H“ ja „0“ vastavalt situatsioone veekogu põhjas ja pinna läheosal, saame

$$6\pi\eta R_H v_H = g\rho V_H, \quad (1)$$

$$6\pi\eta R_0 v_0 = g\rho V_0. \quad (2)$$

Võrrandeid 1 ja 2 omavahel jagades ning kasutades seost  $V_i = (4/3)\pi R_i^3$ , saame mullikeste vahekauguse suhte

$$\frac{L_0}{L_H} = \frac{v_0}{v_H} = \frac{V_0 R_H}{V_H R_0} = \left( \frac{V_0}{V_H} \right)^{2/3}.$$

Kuna  $V_0 p_0 = V_H p_H$  ja  $p_H = p_0 + g\rho H$ , siis

$$\frac{L_0}{L_H} = \left( 1 + \frac{\rho g H}{p_0} \right)^{2/3} = 2,4,$$

st mullikeste vahemaa suureneb 2,4 korda.

## L29 Plokk ★★

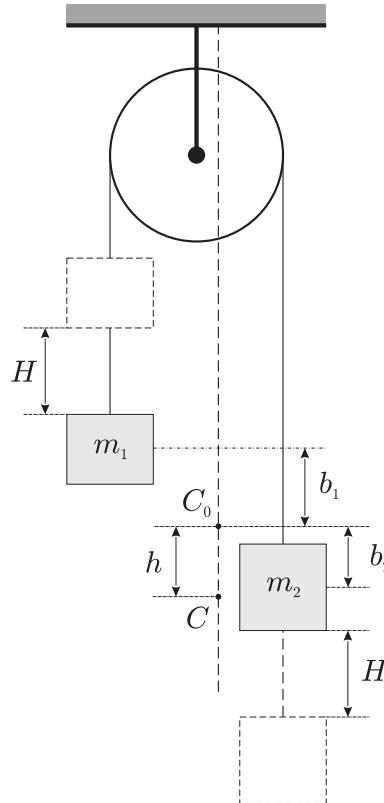
Autor: Tundmatu autor, lahtine, 2006, G 5

Kuna raskem keha hakkab liikuma allapoole ja kergem ülespoole, siis on selge, et süsteemi massikese hakkab liikuma allapoole.

Olgu süsteemi massikese alghetkel punktis  $C_0$  (vt joonist). Kehade massikeskmete kaugused süsteemi massikeskmest leiate tingimusest:

$$m_1 b_1 = m_2 b_2. \quad (1)$$

Aja  $t$  jooksul raskem keha liigub allapoole ja kergem liigub ülespoole kauguse  $H$  võrra:



$$H = at^2/2, \quad (2)$$

kus  $a$  on kehade kiirendus. Süsteemi massikese liigub sama aja jooksul kauguse  $h$  võrra, mille määrab tingimus:

$$m_2(H + b_2 - h) = m_1(H + b_1 + h).$$

Siit, arvestades valemeid (1) ja (2), leiate, et:

$$h = \frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1} H = \frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1} \frac{at^2}{2}. \quad (3)$$

Kiirenduse  $a$  leiate võrrandisüsteemist:

$$m_2a = m_2g - T, \quad m_1a = T - m_1g,$$

kus  $T$  on niidi tömbepinge. Avaldades  $a$  võrrandisüsteemist, saame

$$a = \frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1} g.$$

Asendades leitud väärtsuse valemisse (3), saame:

$$\begin{aligned} h &= \left( \frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1} \right)^2 \frac{gt^2}{2} = \frac{a_k t^2}{2} \Rightarrow \\ \Rightarrow \quad a_k &= \left( \frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1} \right)^2 g. \end{aligned}$$

### L30 Kada ★★★

Autor: Oleg Košik, lõppvoor, 2006, G 3

Olgu kivi kiirus lasu järel  $v$ . Kiiruse horisontaalsuunaline komponent on  $v_x = v \cos \alpha$  ja vertikaalsuunaline komponent  $v_y = v \sin \alpha$ . Kivi lennuaeg on

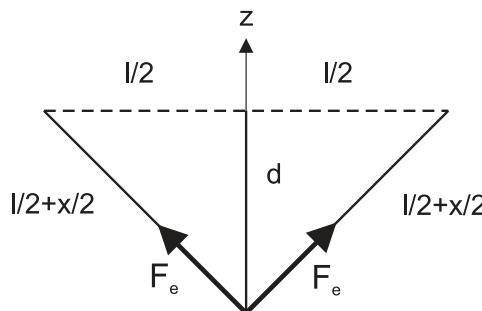
$$t = 2 \frac{v_y}{g} = 2 \frac{v \sin \alpha}{g}$$

ja lennukaugus

$$L = v_x t = \frac{2v^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g} = \frac{v^2 \sin 2\alpha}{g}.$$

Sit

$$v^2 = \frac{gL}{\sin 2\alpha}.$$



Kivi saavutab algkiiruse tänu kumminööri elastsele energiale. Kui nööri pikenemine vörreldes algolekuga on  $x$ , siis energia jäävuse seadusest saame

$$\frac{kx^2}{2} = \frac{mv^2}{2},$$

kust

$$x^2 = \frac{mv^2}{k} \Rightarrow x = \sqrt{\frac{mgL}{k \sin 2\alpha}} = 53,6 \text{ cm.}$$

Uurides ragulka geomeetriat näeme, et moodustuva täisnurkse kolmnurga hüpotenuus on  $l/2 + x/2$ . Otsitav kaugus, millele tuleb nööri tömmata, on seega

$$d = \sqrt{(l/2 + x/2)^2 - (l/2)^2} = 48,2 \text{ cm.}$$

Kumminööris tekib elastsusjõud  $F_e = kx$ . Jõud, millega tuleb nööri tömmata, võrdub selle jõu kahekordse projektsiooniga  $z$ -teljele:

$$F = 2kx \frac{d}{l/2 + x/2} \approx 46 \text{ N.}$$

### L31 Hooratas ★★

Autor: Valter Kiisk, lõppvoor, 2007, G 4

**a)** Hooratta kineetiline energia on  $K = \frac{1}{2}M\omega^2R^2$ , seega energia salvestustihedus  $w = E/M = \frac{1}{2}\omega^2R^2$ .

**b)** Olgu rõnga raadius  $r$  ja mass  $m$ . Mehaaniline pinge rõngas ( $\sigma$ ) on määratud tsentrifugaaljõuga, millega kahte rõnga poolt üksteisest eemale töugatakse. Vaatleme ühe rõnga poole väikest lõiku pikkusega  $\Delta l$ . Selle mass on  $\Delta m = (\Delta l/2\pi r)m$  ja sellele mõjub tsentrifugaaljõud suurusega  $\Delta F = \Delta m\omega^2r$ , kus  $\omega$  on pöörlemise nurkkiirus. Selle jõu projektsioon vertikaalsihile on (vt joonist)

$$\Delta F_{\parallel} = \Delta F \cos \alpha = \frac{m\omega^2}{2\pi} \Delta l \cos \alpha.$$

Ent  $\Delta l \cos \alpha$  on lõigu  $\Delta l$  projektsioon horisontaalsihile. Järelikult summaarne jõud, mis mõjub ühele rõnga poolele, avaldub kui

$$F = \sum \Delta F_{\parallel} = \frac{m\omega^2}{2\pi} 2r = \frac{m\omega^2 r}{\pi}.$$

Teiselt poolt,  $F = 2\sigma S$ , kus  $S$  on rõnga ristlõige. Viimase asendame seosest

$$m = \rho V = \rho(2\pi r S) \Rightarrow S = \frac{m}{2\pi r \rho}.$$

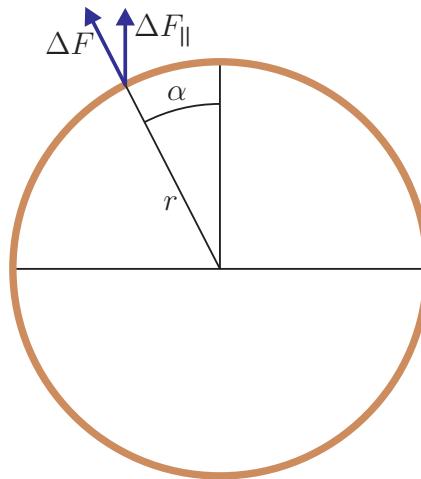
Kokkuvõttes saame

$$\sigma = \frac{F}{2S} = \omega^2 r^2 \rho.$$

Rõnga kineetiline energia

$$E = \frac{mv^2}{2} = \frac{m\omega^2 r^2}{2} = \frac{m\sigma}{2\rho},$$

millest  $E/m = \sigma/2\rho$ . Võttes  $\sigma = \sigma_{\max}$ , saame  $E/m = 800 \text{ kJ/kg}$ .



### L32 Maaler ★★★

Autor: Valter Kiisk, lahtine, 2010, G 5

Selgitame välja kummal juhul on maaga kokku puutudes inimese kiirus väiksem. Lihtsuse huvides vaatleme redelit ühtlase homogeense vardana (pikkus  $L$ , mass  $M$ ) ning inimest punktmassina  $m$ , mis on kinnitunud redeli ülemise otsa külge. Kui maaler laseks kohe redelist lahti, oleks tema kiirus maaga kokkupuute hetkel  $\sqrt{2Lg}$ . Kui aga maaler klammerdub redeli külge, tuleb lõppkiiruse  $v$  arvutamisel arvesse võtta ka redeli pöördliikumise tekitamiseks kuluvat energiat. Pikka ühtlast redelit võib esimeses lähenduses vaadelda kui homogeenset varrast, mis pöörleb ümber alumise otsa. Selleks hetkeks kui redel on jõudnud horisontaalasendisse, on tema nurkkiirus  $\omega = v/L$ . Niisiis redeli pöördliikumise energia sel hetkel avaldub  $ML^2\omega^2/6 = Mv^2/6$ . Nüüd energia jäavuse seadus annab

$$mgL + Mg\frac{L}{2} = \frac{mv^2}{2} + \frac{Mv^2}{6},$$

millega

$$v = \sqrt{\frac{3Lg(2m + M)}{3m + M}} = \sqrt{gL} \sqrt{2 + \frac{M}{3m + M}}.$$

Saadud tulemus ei ole ühelgi tingimusel väiksem kui  $\sqrt{2Lg}$ , nii et selles mõtted on kasulikum kohe redelist lahti lasta.

**L33 Benji-hüpe ★★**

Autor: Andreas Valdmann, piirkonnnavoor, 2010, G 6

Hüppe madalaimas punktis on hüppaja kiirus ja seetõttu ka kineetiline energia võrdne nulliga. Gravitatsioonivälja potentsiaalse energi muutus torni tipust selle punktini on võrdne köies tekkinud elastsusjõu energiaga:

$$mg(l + \Delta l_1) = \frac{k\Delta l_1^2}{2},$$

kus  $\Delta l_1$  on köie pikenemine. Lahendades ruutvõrrandi  $\Delta l_1$  suhtes ja ignoreerides negatiivset lahendit, saame

$$\Delta l_1 = \frac{mg + \sqrt{m^2g^2 + 2mgkl}}{k}.$$

Platvormi kõrgus on  $h_1 = l + \Delta l_1 + h$ . Arvuliselt,  $h_1 \approx 86$  m. Suurima kiiruse leidmisel lisandub energia võrrandisse kineetiline energia:

$$mg(l + \Delta l_2) = \frac{k\Delta l_2^2}{2} + \frac{mv^2}{2}.$$

Kiirendus muudab märki, kui elastsusjõud saab võrdseks gravitatsioonijõuga. See-tõttu on suurima kiiruse tingimuseks

$$mg = k\Delta l_2 \Rightarrow \Delta l_2 = \frac{mg}{k}.$$

Asetades antud tingimuse energia võrrandisse ja lahendades selle  $v$  suhtes, saame

$$v = \sqrt{\frac{g(gm + 2kl)}{k}} \approx 29 \text{ m/s.}$$

**L34 Vai ★★★★**

Autor: Jaak Kikas, piirkonnnavoor, 2006, G 10

Olgu raskuse kiirus enne lööki vaia pihta  $v$  ja raskuse ning vaia kiirus vahetult pärast lööki  $v'$ . Löögi jooksul säilib impuls (aga mitte energia)

$$p = mv = (m + M)v'.$$

Kiiruse  $v$  või impulsi  $p$  saame energia jäävuse seadusesest, näiteks kujul

$$\frac{p^2}{2m} = mgH.$$

Niisiis on peale lööki süsteem vai+raskus omandanud kiiruse  $v'$ . Hõõrdejõudude toimel peatuvad need teatava teepikkuse  $x$  jooksul, kusjuures tingimuste kohaselt löökide arv  $N \gg 1$  ning seega  $x \ll L$ . Hõõrdejõudude töö on seejuures võrdne energi muuduga.

Eelpooltoodu võib kirja panna kujul

$$(F_0 + kl)x = (M + m)gx + \frac{p^2}{2(m + M)},$$

kuid lõppvastuse leidmise seisukohast on meil lihtsam võrrutada summaarne hõõrdejõudude töö (mis on leitav nt graafiku  $F(l)$  aluse pindalana),

$$A_h = F_0L + \frac{kL^2}{2}.$$

summaarse dissipeeruva energiaga

$$E = \frac{Np^2}{2(m + M)} + (M + m)gL.$$

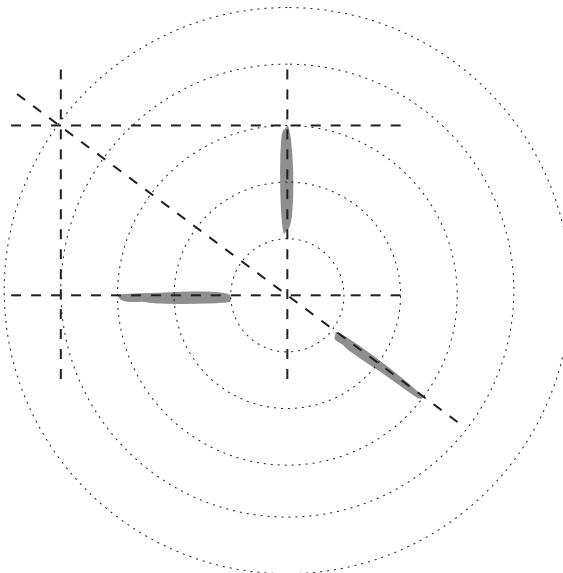
Võrdusest  $A_h = E$  saame (arvestades eelpooltoodud avaldisi  $A_h$ ,  $E$  ja  $p^2/2m$  jaoks)

$$N = \left( F_0 + \frac{kL}{2} - Mg - mg \right) \frac{(m + M)L}{m^2 g H}.$$

**L35 Klaaskuul ★★★★**

Autor: Aigar Vaigu, piirkonnavor, 2008, G 6

Tükikeste trajektooride järgi saab võrrelda kiiruste suundasid ja suuruseid, sest  $s = vt_s$ , kus  $t_s$  on säriaeg (alternatiivselt võib kasutada kaugust kukkumispunktist  $S = vt_S$ , kus  $t_S$  on ajavahemik mahakukkumishetkest säriaja lõpuni). Seega on jälgede pikkuste suhe (või jälgede lõpp-punktide kauguste suhe kukkumispunktist) võrdne kiiruste suhtega. Fotolt saame, et  $s_1 \approx s_2 \approx s_3$ , st  $v_1 \approx v_2 \approx v_3$ . Kuna kiiruste suunad on teada, siis on teada ka impulsside  $\vec{p}_1 = m_1 \vec{v}_1$ ,  $\vec{p}_2 = m_2 \vec{v}_2$  ja  $\vec{p}_3 = m_3 \vec{v}_3$  suunad. Kuna  $\vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3 = 0$ , siis moodustavad need vektorid kolmnurga. Et selle kolmnurga külgede suunad on teada, siis on teada selle kolmnurga nurkade suurused ning kolmnurk määratud sarnasusteguri täpsusega (et meid huvitavad külgede pikkuste suhted, siis sellest täpsusest piisab). Niisiis konstrueerime fotole kolmurga, mille küljed on vastavalt paralleelsed kolme kuulikillu jälgiga. Jooniselt leiame, et  $p_1 : p_2 : p_3$  suhtuvad kui  $3 : 4 : 5$ . Kombineerides seda nüüd eelmise tulemusega  $v_1 \approx v_2 \approx v_3$  saame, et  $m_1 : m_2 : m_3$  suhtuvad kui  $3 : 4 : 5$ .

**L36 Plokid ★★★**

Autor: Mihkel Kree, piirkonnavor, 2008, G 9

Rakendades Newtoni II seadust näeme, et kõik kolm keskmist koormist hakkavad liikuma võrdse kiirendusega  $a_0$ :

$$Ma_0 = 2T - Mg,$$

kus  $T$  on niidi pingi. Rakendades Newtoni II seaduste äärmiste koormiste jaoks saame

$$\gamma Ma_1 = T - \gamma Mg,$$

kus  $a_1$  on äärmiste koormiste kiirendus. Elimineerides niidi pinge  $T$  saame

$$2\gamma a_1 - a_0 = g - 2\gamma g.$$

Nööri venimatus avaldub kujul  $a_1 = -3a_0$ , millest tulenevalt

$$-2\gamma a_1 - \frac{a_1}{3} = (2\gamma - 1)g \quad \Rightarrow \quad a_1 = \frac{1 - 2\gamma}{2\gamma + 1/3}g.$$

Äärmised koormised hakkavad langema, kui  $a_1$  on negatiivne. Selle jaoks peab kehtima

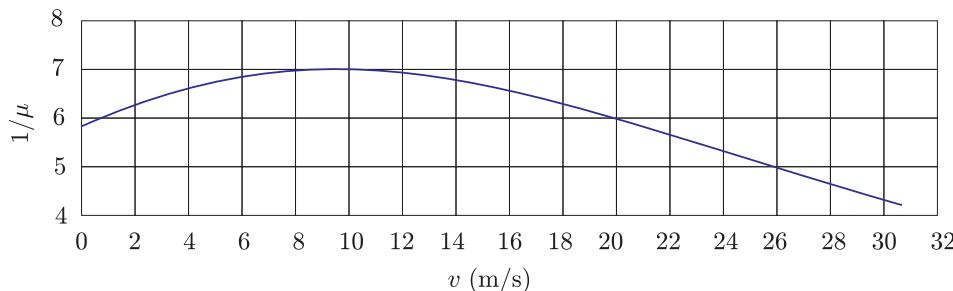
$$1 - 2\gamma < 0 \quad \Rightarrow \quad \gamma > \frac{1}{2}.$$

### L37 Rong ★★★★☆

Autor: Tundmatu autor, lahtine, 2006, G 10

**a)** Vaatame väikest kiiruste vahemikku  $\Delta v$ , mille sees võib kiirust  $v$  ja järelikult ka hõõrdetegurit  $\mu(v)$  lugeda konstanteks. Kiirendus on selle liikumisfaasi jooksul siis  $a = \mu(v)g$  ning kiiruse vähenemiseks kuuluv aeg

$$\Delta t = \frac{\Delta v}{a} = \frac{\Delta v}{\mu(v)g}.$$

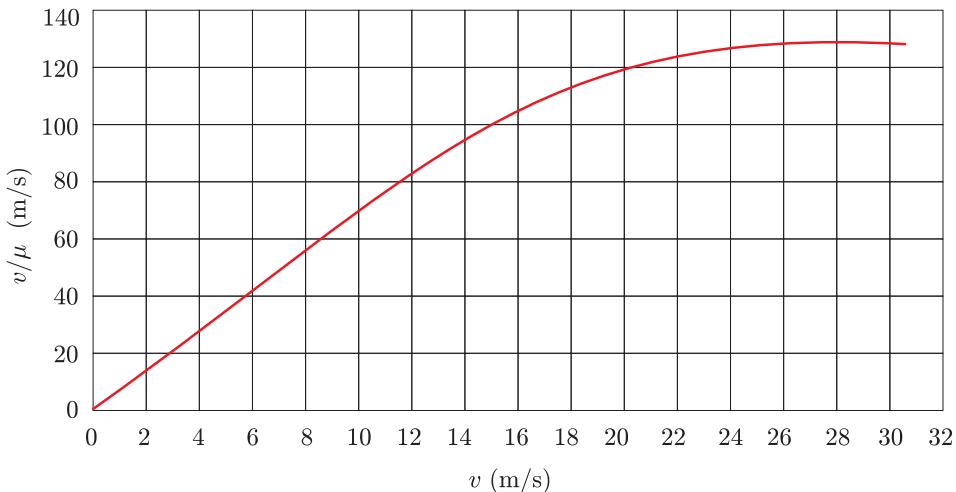


Summaarne aeg oleks summa üle kõigi selliste väikeste kiirusemuutustele. Konstrueerime esialgsest graafikust lähtudes suuruse  $1/\mu(v)$  sõltuvuse kiirusest  $v$  (vt joonist). Siis pidurdamiseks kuuluv aeg on selle sõltuvuse graafikualune pindala (kiirusest 0 kuni 100 km/h), jagatud  $g$ -ga. Seejuures peame silmas, et kiirus  $x$ -teljel peab olema meetrites sekundis (m/s). Vastuseks saame ligikaudselt 18 s.

**b)** Vaatame samasugust kiiruste vahemikku  $\Delta v$ , nagu esimeses osas. Ajaga  $\Delta t$  mille jooksul kiirus selle vörra väheneb, läbib rong teepikkuse

$$\Delta s = v\Delta t = \frac{v\Delta v}{\mu(v)g}.$$

Summaarne pidurdusmaa oleks summa üle kõigi selliste teepikkustele. Konstrueerime esialgsest graafikust lähtudes suuruse  $v/\mu(v)$  sõltuvuse kiirusest  $v$  (vt joonist). Siis pidurdusmaa on selle sõltuvuse graafikualune pindala (kiirusest 0 kuni 100 km/h), jagatud  $g$ -ga. Kiirus  $x$ -teljel on samuti meetrites sekundis (m/s). Vastuseks saame ligikaudselt 235 m.



Märkus. Integraalne avaldis pidurdusaja jaoks on kujul

$$t = \int_0^{v_0} \frac{dv}{\mu(v)g} = \frac{1}{g} \int_0^{v_0} \frac{dv}{\mu(v)},$$

kus  $v_0$  on rongi algkiirus. Pidurdusmaa pikkuse jaoks vastav avaldis on aga

$$s = \int_0^{v_0} \frac{vdv}{\mu(v)g} = \frac{1}{g} \int_0^{v_0} \frac{vdv}{\mu(v)}.$$

### L38 Värinaalarm ★★★★

Autor: Jaan Kalda, lahtine, 2011, G 9

Kuivõrd väike keha liigub alla hetkeliselt, siis süsteemi mobiil+keha masskese püsib paigal, mistöttu mobiil kerkib lauapinnast körgusele  $h = x \frac{m}{M}$ . Edasi hakkab mobiil raskusjõu toimel langema; lauapinnale jõudmiseks kuluv aeg  $t = \sqrt{2h/g}$ . Hõõrdejoud peatab mobiili ilma libisemata, kui  $\mu > \tan \alpha$ ; et  $\alpha \ll 1$ , siis võime eeldada, et see nii ka juhtub. Kui  $t = \sqrt{2h/g} < \tau$ , siis jõuab mobiil liikuda langemise jooksul lauapinna sihis vahemaa  $\delta = h \sin \alpha \approx h\alpha$ , mis annab keskmiseks kiiruseks

$$u = \frac{xm\alpha}{2\tau M}.$$

Kui  $\sqrt{2h/g} < \tau$ , siis ei jõua mobiil lõpuni langeda, vaid väikese keha kerkimine surub mobiili ennatlikult vastu lauda tagasi. Mobiil jõuab langeda vahemaa  $H = g\tau^2/2$  võrra, mis annab keskmiseks kiiruseks

$$u = \frac{H\alpha}{2\tau} = \frac{1}{4}g\tau\alpha.$$

Kokkuvõtlikult võib vastuse anda kujul

$$u = \min \left( \frac{xm\alpha}{2\tau M}, \frac{1}{4}g\tau\alpha \right).$$

**L39 Kuulid ★★★★**

Autor: Jaan Kalda, lõppvoor, 2006, G 10

Teisest ja kolmandast kuulist koosnevale süsteemile mõjus sel ajal, kui esimest kuuli lükati, esimese varda sihilise jõud, sest teatavasti mõjuvad kergetele varastele vaid varda sihilised pinged. Seega nihkus šarniirne ühenduspunkt esimese varda sihiliselt ning teine ja kolmas kuul omandasid sümmeetria tõttu ühesugused kiirused. Šarniirse ühenduspunkti kiirus on  $v_s = v_0 \cos 30^\circ$ , sest esimese varda pikkus ei muutu. Et nii teisele kui kolmandale kuulile mõjub ainult varda sihilise jõud, siis nende kiirus on ka varda sihilise; varda venimatusest juhtivalt  $v_2 = v_3 = v_s \cos 60^\circ = v_0 \sqrt{3}/4$ .

Pinged varastes on võrdsed, sest šarniirse ühenduspunkti massi võime lugeda nulliks ning talle mõjuv resultantjõud peab olema 0 ja jõudude tasakaalust tuginevalt peab varaste pingetest moodustuma võrdkülgne kolmnurk. Olgu varraste pingे  $T$ . Seega on kõigi kuulikeste kiirendused võrdsed,  $a_k = T/m$ . Läheme šarniirse ühenduspunkti seotud kulgevalt liikuvasse taustsüsteemi, mis liigub kiirendusega  $\ddot{a}$ . Selles süsteemis on esimese kuuli kiirus  $u_1 = v_0/2$  ning teiste kiirus  $u_2 = v_s \sin 60^\circ = \frac{3}{4}v_0$ . Selles süsteemis liiguavad kuulid ringjoont mööda. Iga kuuli jaoks saame välja kirjutada jõudude tasakaalu tingimuse projekteerituna vastava varda sihile (siis kaob vajadus teada kuulikese ringliikumise tangentsiaalkiirendust, sest see on teljega risti). Teise ja kolmanda kuuli tasakaalutingimus on võrreldes selgub, et inetrtsijõu  $-m\ddot{a}$  projektsioon kummalegi teljele peab olema üks ja sama, st  $\ddot{a}$  peab olema esimese varda sihilise. Seega saame kaks võrrandit:

$$\begin{aligned} mu_1^2/l + a &= T, \\ mu_2^2/l - a/2 &= T. \end{aligned}$$

Elimineerides neist võrrandeist  $a$ , saame

$$T = \frac{1}{3} \frac{m}{l} (u_1^2 + 2u_2^2)$$

ning otsitava kiirenduse

$$a_k = T/m = (u_1^2 + 2u_2^2) 3l = \frac{11}{24} v_0^2/l.$$

**L40 Mõõteriistad ★**

Autor: Koit Timpmann, lõppvoor, 2006, G 1

Olgu alguses ampermeetri ja voltmeetri pinged vastavalt  $U_A$  ja  $U_V$ . Jadaühenduse korral kehtib

$$U_A + U_V = 9 \text{ V}.$$

Peale takisti lisamist suurennes ampermeetrit läbiv vool ja seega ka pingel kaks korda. Teisisõnu ampermeetri uus pingel oli  $2U_A$ . Pingel voltmeetril aga vähenes kaks korda ja oli  $0,5U_V$ . Kirchhoffi pingel seaduse kohaselt

$$2U_A + 0,5U_V = 9 \text{ V}.$$

Lahendades kahest võrrandist koosneva võrrandisüsteemi, saame  $U_A = 3 \text{ V}$  ja  $U_V = 6 \text{ V}$ . Seega voltmeetril pingel oli alguses  $6 \text{ V}$  ning lõpus  $3 \text{ V}$ .

**L41 Elektriküünlad ★**

Autor: Valter Kiisk, piirkonnnavoor, 2009, G 4

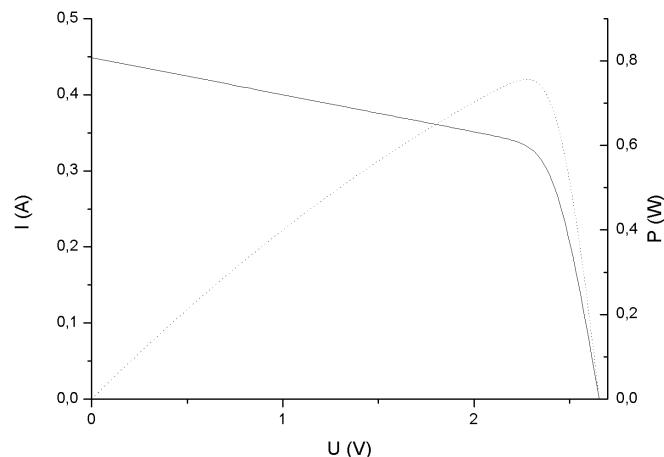
- a) Lambi nimivool on  $0,6 \text{ W} / 3 \text{ V} = 0,2 \text{ A}$ . 10 lampi tarbivad voolu  $10 \times 0,2 \text{ A} = 2 \text{ A}$ . Pingelang takistil on  $5 \text{ V} - 3 \text{ V} = 2 \text{ V}$ . Järelikult vajalik takistus on  $2 \text{ V} / 2 \text{ A} = 1 \Omega$ .
- b)  $1 \Omega$ -st takistit kasutades oli voolutugevus aheosas  $(4 \text{ V} - 2,3 \text{ V}) / 1 \Omega = 1,7 \text{ A}$ . Sellise koormuse tulemusel langes pinge vooluallika klemmidel 1 V võrra, seega alati sisetakistus on  $1 \text{ V} / 1,7 \text{ A} = 0,59 \Omega$ . Järelikult takisti  $R$  takistuse sobilik väärus oleks  $1 \Omega - 0,59 \Omega = 0,41 \Omega$ .

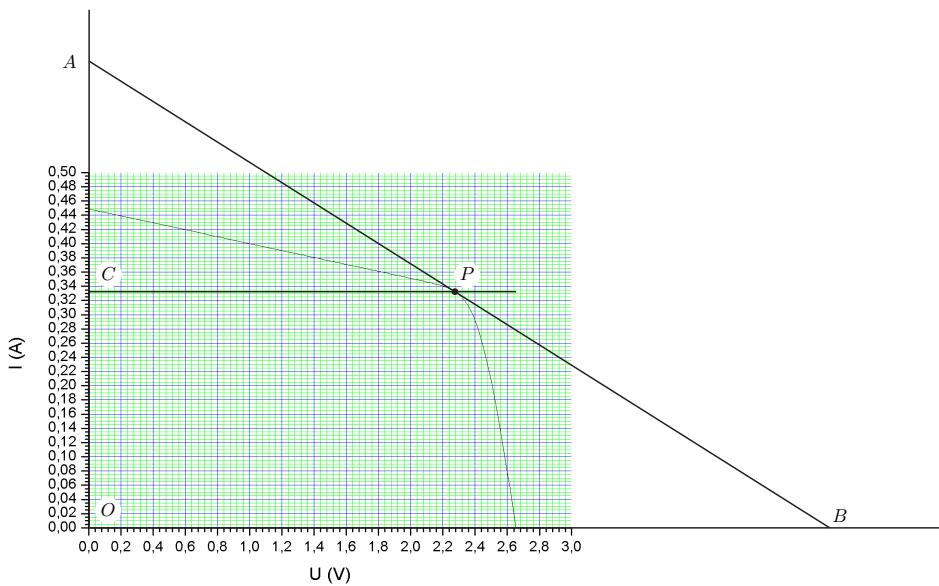
**L42 Päikesepaneel ★**

Autor: Mihkel Pajusalu, lõppvoor, 2010, G 3

Koormisel eralduv võimsus avaldub kui  $UI$ . Peame leidma punkti graafikul, mil antud avaldis on maksimaalne. Toore jõuga lähenedes saab graafikult erinevate punktide jaoks võimsuse välja arvutada ja ligikaudu maksimaalse võimsuse määrate. Saame  $U_{\max} \approx 2,28 \text{ V}$ ,  $I_{\max} \approx 0,33 \text{ A}$ . Seega vastav koormise takistus on

$$R = \frac{U_{\max}}{I_{\max}} \approx 6,9 \Omega$$

*Alternatiivne lahendus*



Võimsus  $N = UI$  on maksimaalne, kui võimsuse tulevis pingi järgi on null. Seega,

$$dN = d(UI) = dUI + UdI = 0,$$

ehk

$$I + U \frac{dI}{dU} = 0,$$

kus  $dI/dU$  on graafiku tõus. Vaatleme vastavaid suurusi graafiku punktis  $P$ . Joonise tähistustes,  $|OC| = I$ ,  $|CP| = U$  ja

$$\frac{|OA|}{|OB|} = \frac{|CA|}{|CP|} = -\frac{dI}{dU}.$$

Järelikult, kui me tahame, et  $P$  oleks otsitav võimsuse maksimumi punkt, peab kehtima

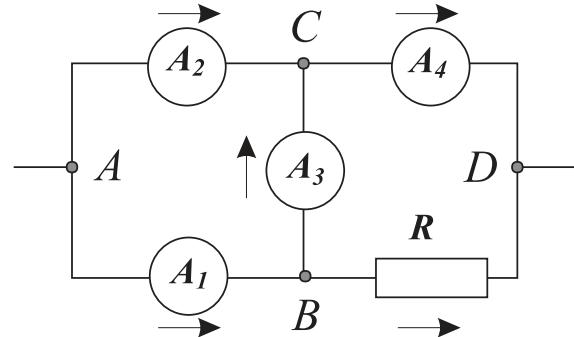
$$|OC| - |CP| \frac{|CA|}{|CP|} = 0 \implies |OC| = |CA| \implies |AP| = |PB|.$$

Joonlauaga veidi otsides pole sellist punkti  $P$  raske leida. Vastus on muidugi sama, mis esimeses lahenduses.

**L43 Ampermeetrid ★★**

Autor: Tundmatu autor, lahtine, 2008, G 4

Märgime skeemil voolude oletatavad suunad ning valime kontuurides  $ACB$  ja  $CDB$  liikumise suunaks päripäeva.



Kirchhoffi 2. seaduse põhjal kontuuris  $ACB$

$$I_2r - I_3r - I_1r = 0 \Rightarrow I_3 = I_2 - I_1 = 2 \text{ A.}$$

Kirchhoffi 1. seaduse põhjal punktis  $B$

$$I_1 = I_3 + I_R \Rightarrow I_R = I_1 - I_3 = 1 \text{ A.}$$

Kirchhoffi 1. seaduse põhjal punktis  $C$

$$I_4 = I_2 + I_3 = 7 \text{ A.}$$

Ning lõpuks Kirchhoffi 2. seaduse põhjal kontuuris  $CDB$

$$I_4r - I_R R + I_3r = 0 \Rightarrow 9r - R = 0 \Rightarrow R/r = 9.$$

**L44 Patarei ★★**

Autor: Taavi Pungas, piirkonnavor, 2011, G 6

Olgu patarei sisetakistus  $r$ . Mõlemas olukorras on patarei elektromotoorjõud sama, st  $I_1(R+r) = I_2(2R+r)$ . Seega,

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{R+r}{2R+r} = \frac{2R+r-R}{2R+r} = 1 - \frac{R}{2R+r} = 1 - \frac{1}{2 + \frac{r}{R}}. \quad (1)$$

a)  $r$  on väiksem kui  $R$ , aga samas peab  $r$  olema suurem kui 0. Seega  $0 \leq \frac{r}{R} < 1$  ja  $1 - \frac{1}{2+0} \leq I_2/I_1 < 1 - \frac{1}{2+1}$ , ehk  $1/2 \leq I_2/I_1 < 2/3$ .

b) Nüüd kehtib  $R < r$ , ehk  $I_2/I_1 > 2/3$ . Valemist (1) on näha, et  $I_2/I_1$  ülempiir on 1, seega  $2/3 < I_2/I_1 < 1$

**L45 Vooluring** ★★

Autor: Valter Kiisk, piirkonnavor, 2005, G 4

Teisest skeemist näeme, et vooluallika elektromotoorjõud  $\mathcal{E}$  võrdub voltmeetri näiduga,

$$\mathcal{E} = U_2.$$

Seega esimese skeemi jaoks

$$U_1 + I_1 r_a = \mathcal{E} = U_2,$$

teise skeemi jaoks

$$I_2 R + I_2 r_a = U_2,$$

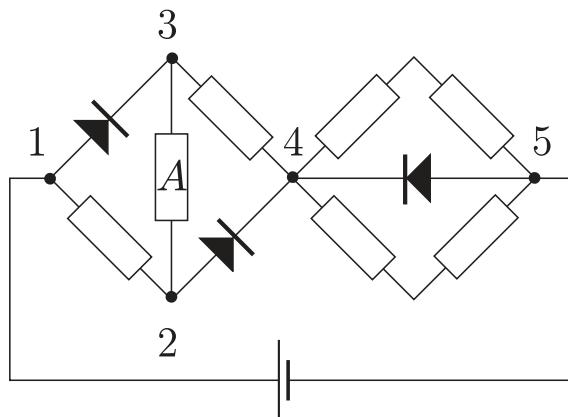
kus  $r_a$  on ampermeetri sisetakistus. Viimase elimineerimisel saame

$$R = \frac{I_1 U_2 + I_2 U_1 - I_2 U_2}{I_1 I_2} = \frac{U_2}{I_2} + \frac{U_1}{I_1} - \frac{U_2}{I_1}.$$

**L46 Takistid** ★★

Autor: Aigar Vaigu, lõppvoor, 2005, G 4

Paneme tähele, et pinge absoluutväärtus ahela otstele  $U$  ei muudu. Arvestades, et päripidise voolu korral võib dioodi klemmid lugeda lühistatust ning vastuvoolu korral isoleerituks, saame kummagi polaarsuse jaoks koostada algse ahela (joonis 1) asemel ekvivalentsed ahelad (joonised 2 ja 3).

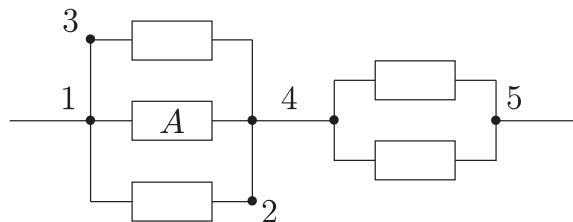


Joonis 1: Esialgne skeem

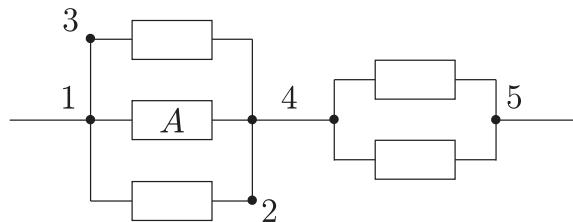
Leiame takistil  $A$  eralduva võimsuse päripinge puhul.

Takistil  $A$  eralduv võimsus on  $P_1 = I_1^2 R$ , kus

$$I_1 = \frac{I}{3} = \frac{1}{3} \frac{U}{r_1}$$



Joonis 2: Ekvivalentne skeem ühe polaarsuse puhul



Joonis 3: Ekvivalentne skeem teise polaarsuse puhul

on vaadeldavat takistit läbiva voolu tugevus ning

$$r_1 = \frac{R}{3} + R = \frac{4}{3}R$$

on kogu ahela takistus. Seega

$$P_1 = \frac{R}{9} \frac{U^2}{r_1^2} = \frac{U^2}{R} \frac{1}{9} \frac{9}{16} = \frac{1}{16} \frac{U^2}{R}.$$

Nüüd määrame takistil  $A$  eralduva võimsuse vastupidise polaarsusega.

Takistit  $A$  läbib vool  $I_2 = U/3R$ . Seega võimsus on

$$P_2 = \left( \frac{U}{3R} \right)^2 R = \frac{1}{9} \frac{U^2}{R}.$$

Võimsuste suhe

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{9}{16},$$

seega polaarsuse muutmisel muutub takistil  $A$  eralduv võimsus  $9/16$  korda.

#### L47 Elektriskeem ★★

Autor: Tundmatu autor, lahtine, 2006, G 2

Kondensaatori  $C_1$  plaadid on ühendatud läbi takistite  $R_1$  ja  $R_2$ . Seepärast laeng selle kondensaatori plaatidel on  $q_1 = 0$  (pärast seda, kui on lõppenud kondensaatorite  $C_2$  ja  $C_3$  laadimine). Kuna pärast kondensaatorite laadimist voolud skeemis ei kulge, pinget kondensaatoritel  $C_2$  ja  $C_3$  on võrdsed  $\mathcal{E}$ . Järelikult,  $q_2 = C_2 \mathcal{E}$  ja  $q_3 = C_3 \mathcal{E}$ .

**L48 Skeem ★★**

Autor: Tundmatu autor, lahtine, 2009, G 3

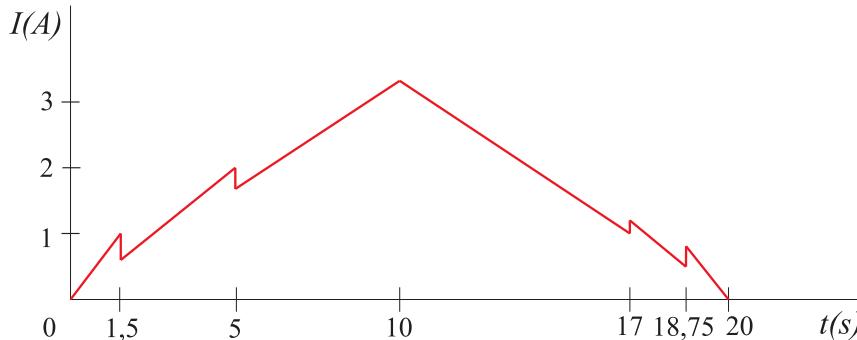
Süsteem saab töötada kolmes režiimis:

(I) Kõigi elementide takitus on  $1\Omega$ . Siis süsteemi kogutakistus on  $R_I = 1,5\Omega$ , vool  $I_I = \frac{U}{1,5}(A)$  ning pinge skeemi vasakpoolsel elemendil  $\frac{2}{3}U$  ja parempoolsetel elementidel  $\frac{1}{3}U$ .

(II) Vasakpoolse elemendi takitus on  $2\Omega$ , parempoolsemate elementide takitus on  $1\Omega$ . Siis süsteemi kogutakistus on  $R_I = 2,5\Omega$ , vool  $I_I = \frac{U}{2,5}(A)$  ning pinge vasakpoolsel elemendil  $\frac{4}{5}U$  ja parempoolsetel elementidel  $\frac{1}{5}U$ .

(III) Kõigi elementide takitus on  $2\Omega$ . Siis süsteemi kogutakistus on  $R_I = 3\Omega$ , vool  $I_I = \frac{U}{3}(A)$  ning pinge skeemi vasakpoolsel elemendil  $\frac{2}{3}U$  ja parempoolsetel elementidel  $\frac{1}{3}U$ .

Vaatame süsteemi käitumist, kui klemmipingi kasvab. Alguses töötab süsteem režiimis I kuni hetkeni, mil klemmipingi kasvab vääratuseni  $U = 1,5\text{ V}$ . Siis muutub vasakpoolse elemendi takistuse vääratus  $R_2 = 2\Omega$ -ks ning süsteem jätkab tööd režiimis II. Hetkel, mil klemmipingepinge kasvab vääratuseni  $U = 5\text{ V}$ , muutub ka parempoolsete elementide takistus  $R_2$ -ks ning süsteem jätkab tööd režiimis III. Vaatame süsteemi käitumist, kui klemmipingi kahaneb. Alguses töötab süsteem režiimis III kuni hetkeni, mil klemmipingi langeb vääratuseni  $U = 3\text{ V}$ . Siis muutub parempoolsete elementide takistuse vääratus tagasi  $R_1 = 1\Omega$ -ks ning süsteem jätkab tööd režiimis II. Hetkel, mil klemmipingepinge langeb vääratuseni  $U = 1,25\text{ V}$ , muutub ka vasakpoolse elemendi takistus tagasi  $R_1$ -ks ning süsteem jätkab tööd režiimis I. Voolutugevuse käitumine on esitatud graafikul.

**L49 Takisti ★★**

Autor: Jaan Kalda, piirkonnavor, 2007, G 7

Traadi ja pulga takistused pikkusühiku kohta on vastavalt  $r_r = \rho_r/s = 3,2\Omega/\text{m}$  ja  $r_g = \rho_g/S = 10\Omega/\text{m}$ . Olgu traadi ja pulga pikkused vastavalt  $l_r$  ja  $l_g$ . Arvestades temperatuurisõltuvusega, on takistused vastavalt

$$R_r = l_r r_r (1 + \alpha_r \Delta T) \text{ ja } R_g = l_g r_g (1 + \alpha_g \Delta T).$$

Järjestikühenduse korral on summaarne takistus

$$R = (l_r r_r + l_g r_g) + (l_r r_r \alpha_r + l_g r_g \alpha_g) \Delta T.$$

Temperatuurisõltuvus on minimaalne (lineaarses lähenduses olematu), kui

$$l_r r_r \alpha_r + l_g r_g \alpha_g = 0.$$

Sellisel juhul on takistus

$$R = l_r r_r + l_g r_g.$$

Nendest kahest võrrandist saame avaldada  $l_r$  ja  $l_g$ : esimesest võrrandist leiame  $l_r r_r = -l_g r_g \alpha_g / \alpha_r$ , mille asendamisel teise saame

$$R = l_g r_g \left( 1 - \frac{\alpha_g}{\alpha_r} \right) \Rightarrow l_g = \frac{R \alpha_r}{r_g (\alpha_g - \alpha_r)} \approx 5,6 \text{ cm.}$$

Analoogselt

$$l_r = \frac{R \alpha_g}{r_r (\alpha_g - \alpha_r)} \approx 13,6 \text{ cm.}$$

### L50 Kondensaatoriredel ★★★ Autor: Siim Ainsaar, piirkonnavor, 2007, G 8

Lõpmatust ahelast ühe lüli eemaldamisega mahtuvus ei muutu. Seetõttu võime tervet ahelat vaadelda kui jadaühendust  $C$ -st ning  $C$  ja  $C_k$  paralleluhendusest. Seega saame, kasutades veel asjaolu, et jadaühenduses liituvad mahtuvuse pöördväärtused ning rööpühenduses mahtuvused ise, võrrandi:

$$C_k = \frac{1}{1/C + 1/(C + C_k)}.$$

Teisendades, jõuame ruutvõrrandini:

$$C_k^2 + CC_k - C^2 = 0.$$

Seda lahendades, saame:

$$C_k = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} C \approx 0,6 C.$$

Negatiivse lahendi heitsime kõrvale.

### L51 Traat ★★★

Autor: Jaan Kalda, lõppvoor, 2008, G 7

Traadijupp pikkusega  $\delta$  omab ristlõikepindala  $s = S \cdot 1 \text{ mm}/\Delta$  ning takistust  $r = \rho \delta / s = \rho \delta \Delta \cdot 1 \text{ mm}^{-3}$ . Liites kokku kõikide väikeste juppide takistused näeme, et kogutakistus  $R = \rho A \cdot 1 \text{ mm}^{-3}$ , kus  $A$  on graafiku alune pindala (liita tuleb ka joonest  $\Delta = 1 \text{ mm}$  allapoole jäav osa). Joonise abil leiame  $A \approx 14 \text{ mm} \cdot \text{m}$  ning seega  $R \approx 14 \Omega$ .

**L52 Kondensaator ★★**

Autor: Aigar Vaigu, piirkonnnavoor, 2010, G 7

Patarei pinge on  $U = \text{const}$  ja vool ahelas, vastavalt ülesande tingimustele, on  $I = \text{const}$ . Patarei võimsus on

$$P_p = UI.$$

Energia kondensaatoris on

$$E = \frac{CU^2}{2},$$

kus kondensaatori mahtuvus on  $C = q/U$  ja laeng kondensaatoris  $q$ . Kondensaatorisse energia salvestamise kiirus on energia muutumise kiirus kondensaatoris ehk energia tuletis aja järgi,

$$P_C = \frac{dE}{dt} = \frac{dC}{dt} \frac{U^2}{2} = \frac{d(CU)}{dt} \frac{U}{2} = \frac{dq}{dt} \frac{U}{2}.$$

Arvestades, et laengu muutumise kiirus  $dq/dt$  on vool  $I$ , saame energi salvestamise kiiruseks kondensaatorisse

$$P_C = \frac{UI}{2}.$$

Näeme, et patareist „väljub“ energiat kaks korda kiiremini, kui seda salvestub kondensaatorisse. Energia, mis ajaühikus kondensaatorisse ei jõua läheb välisjõudule, mis muudavad kondensaatori mahtuvust selliselt, et  $I = \text{const}$ , vastu töö tegemiseks.

**L53 Kondensaatorid ★★**

Autor: Mihkel Rähn, piirkonnnavoor, 2006, G 7

**a)** Vooluallikas laeb mõlemad kondensaatorid elektromotoorjõuga võrdse pingeni, seega on  $q_{a1} = C_1\mathcal{E}$  ja  $q_{a2} = C_2\mathcal{E}$ .

**b)** Leiame, kui suure pinge kondensaatorid laaduvad. Voolutugevus ahelas on

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R_1 + R_2 + R_3 + r}.$$

Kondensaatoril  $C_1$  on laeng  $q_{b1} = C_1I(R_1 + R_2)$  ja kondensaatoril  $C_2$  on laeng  $q_{b2} = C_2IR_2$ .

**c)** Kehtib laengu jäävus, paralleelsetes ühenduses on pinged kondensaatoritel võrdsed. Summaarne laeng  $q = q_{b1} + q_{b2}$  ning mahtuvus  $C = C_1 + C_2$ . Pinge kondensaatoril on  $U = q/C$ . Laengud kondensaatoritel on  $q_{c1} = C_1U$  ja  $q_{c2} = C_2U$ .

**L54 Kondensaatorid ★★★**

Autor: Mihkel Kree, lõppvoor, 2009, G 3

Kogunegu keskmisele kondensaatorile (mahtuvusega  $3C$ ) laeng  $a$  ning nurgas paiknevatele kondensaatoritele (mahtuvusega  $3C$ ) laeng  $b$ . Vaatleme ülemist vaskpoolset kondensaatorit: selle negatiivsel plaadil on nüüd laeng  $-q + a + b$  ning positiivsel plaadil  $q + b$ . Saame võrrandi:

$$-(-q + a + b) = q + b \implies q - a - b = q + b \implies b = -a/2.$$

Lisaks saame pingete võrdsusest

$$\frac{a}{3C} = \frac{q + b}{C} + \frac{b}{3C} \implies a = 3q + 4b \implies a + 2a = 3q,$$

millest  $a = q$ .

**L55 Aku laadimine ★★★★**

Autor: Valter Kiisk, piirkonnavoor, 2008, G 8

Olgu aku klemmide pinge  $U$  ning voolutugevus  $I$ . Voolutugevus takistis  $R_2$  on seega  $U/R_2$  ja voolutugevus takistis  $R_1$  avaldub kui  $U/R_2 + I$ . Teise Kirchhoffi seaduse kohaselt

$$U + \left( \frac{U}{R_2} + I \right) R_1 = U_0 \quad \Rightarrow \quad UR_1 - (U_0 - U) R_2 + IR_1 R_2 = 0,$$

kus  $U_0 = 6$  V. Laadimisgraafikult leiame, et maksimaalne vool  $I = 0,1$  A vastab pingele  $U = 1,2$  V, kui aga  $U = 1,5$  V siis peab olema  $I = 0$ . Seega  $R_1$  ja  $R_2$  määramiseks saame võrrandisüsteemi

$$1,2R_1 - 4,8R_2 + 0,1R_1 R_2 = 0, \quad 1,5R_1 - 4,5R_2 = 0.$$

Selle lahend on  $R_1 = 12 \Omega$ ,  $R_2 = 4 \Omega$ .

**L56 Jõulukaunistus ★★★★**

Autor: Valter Kiisk, lõppvoor, 2010, G 8

Maksimaalne pinge, milleni kondensaator laadub, võrdub võrgupinge amplituud-väärtusega 311 V. Sellest takistile langeb pingे  $311 \text{ V} - 50 \times 3 \text{ V} = 161 \text{ V}$ . See-ga takistuse väärtus peab olema  $161 \text{ V}/20 \text{ mA} \approx 8 \text{ k}\Omega$  ja sellel eraldub võimsus  $161 \text{ V} \times 20 \text{ mA} \approx 3,2 \text{ W}$ . Peale pinge amplituudväärtuse saavutamist peab kondensaator olema suuteline vahelduvvoolu ühe perioodi (20 ms) jooksul valgusdiode ahelat toitma nii, et pingelang takistil (ja seega ka kondensaatoril endal) kukub mitte rohkem kui  $0,05 \times 161 \text{ V} = 8 \text{ V}$  võrra. Samas kondensaatorilt võetakse sama aja jooksul elektrilaeng  $20 \text{ mA} \times 20 \text{ ms} = 0,0004 \text{ C}$ . Seega nõutav mahtuvus on  $0,0004 \text{ C}/8 \text{ V} = 50 \mu\text{F}$ .

**L57 Närvirakk ★★★★**

Autor: Andres Laan, lõppvoor, 2011, G 9

Kuna laengud saavad voolata üle membraani kolme eri teed mööda ja kondensatorile kogunev laeng põhjustab köigile kolmele teele ühiselt mõjuva elektrostataatilise pinge  $U$ , siis on meil närviraku mudeldamiseks sobiv skeem, kus meil on rööbiti kolm vooluteed: kondensaatori voolutee, kaaliumi voolutee ja naatriumi voolutee

Kui saabub tasakaal, ei lähe voolu läbi kondensaatori. Selleks peab kaaliumi ja naatriumi voolu summa olema elektriliselt neutraalne. Kaalumi vool on  $(\mathcal{E}_K - U)/R_K$ . Naatriumi vool on  $(\mathcal{E}_{Na} - U)/R_{Na}$ . Võrrutades nende voolude summa nulliga saame pinge avaldiseks

$$U = \frac{R_K \mathcal{E}_{Na} + R_{Na} \mathcal{E}_K}{R_{Na} + R_K}.$$

Membraani kogulaeng on siis

$$q = CU = C \frac{R_K \mathcal{E}_{Na} + R_{Na} \mathcal{E}_K}{R_{Na} + R_K}.$$

**L58 Juhe ★★**

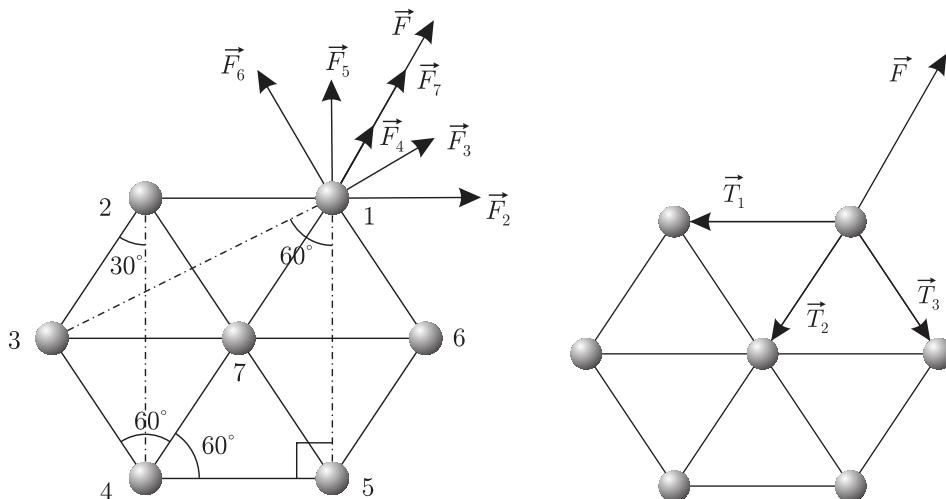
Autor: Tundmatu autor, lahtine, 2005, G 5

Valime mõttelise ühikulise pikkusega silindrilise kontuuri, mille raadius on  $r$ . Selle pindala on  $S = 2\pi r$ , sellest voolab läbi vool  $i$ . Voolutihedus tuleb seega

$$j = \frac{i}{2\pi r}.$$

**L59 Kuulikesed ★★**

Autor: Tundmatu autor, lahtine, 2005, G 4



Kõigepealt teeme kaks olulist tähelepanekut, lähtudes sümmeetria kaalutlustest:

- 1) Keskmise kuul jääb paigale.
- 2) Kõik 6 kuuli servades on samaväärised, neile mõjuvate jõudude suurused on samad, kuid jõudude suunad on erinevad — nad langevad kokku sirgetega, mis ühendavad vastava kuulikesele keskmise kuulikesega, ning, kuna laengud on samamärgilised, on suunatud keskmisest kuulikesest eemale.

Märgime joonisel ühele äärmisele kuulikesele mõjuvad jõud (vt joonist). Leiame jõudude väwärtused. Jõud  $F_2$ ,  $F_6$  ja  $F_7$  mõjuvad kuulikesele 1, vastavalt, kuulikeste 2, 6 ja 7 poolt:

$$F_2 = F_6 = F_7 = \frac{kq^2}{l^2}.$$

Jõud  $F_4$  mõjub kuulikesele 1 kuulikesese 4 poolt:

$$F_4 = \frac{kq^2}{(2l)^2} = \frac{kq^2}{4l^2}.$$

Jõud  $F_3$  ja  $F_5$  mõjuvad kuulikesele 1, vastavalt, kuulikeste 3 ja 5 poolt:

$$F_3 = F_5 = \frac{kq^2}{(2l \sin 30^\circ)^2} = \frac{kq^2}{(2l \cdot \sqrt{3}/2)^2} = \frac{kq^2}{3l^2}.$$

Summaarse jõu leiame projitseerides jõud radiaalsele teljele:

$$\begin{aligned} F &= F_7 + F_4 + 2F_2 \cos 60^\circ + 2F_3 \cos 30^\circ \\ &= \frac{kq^2}{l^2} + \frac{kq^2}{4l^2} + 2 \cdot 0,5 \cdot \frac{kq^2}{l^2} + 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{kq^2}{3l^2} = \frac{kq^2}{l^2} \left( 1 + \frac{1}{4} + 1 + \frac{\sqrt{3}}{3} \right) \\ &= \frac{kq^2}{l^2} \left( \frac{27 + 4\sqrt{3}}{12} \right). \end{aligned}$$

Kuna tegu on ühesuguste niitidega, mis venisid sama palju (niitide alg- ja lõpp-pikkused on ühesugused), siis pinged kõigis niitides on võrdsed:

$$\vec{F} = \vec{T}_1 + \vec{T}_2 + \vec{T}_3, \quad |\vec{T}_1| = |\vec{T}_2| = |\vec{T}_3|.$$

Siit:

$$F = T + 2T \cos 60^\circ = T(1 + 2 \cdot 0,5) = 2T.$$

Seega niitides on pinged

$$T = \frac{F}{2} = \frac{kq^2}{l^2} \left( \frac{27 + 4\sqrt{3}}{24} \right).$$

**L60 Tolmukübe ★★**

Autor: Aigar Vaigu, piirkonnnavoor, 2006, G 8

Olgu plaatide pindala  $S$ , plaatide vaheline kauguse  $d$ , kondensaatori mahtuvus ja pinge vastavalt  $C$  ja  $U$ . Avaldame elektrivälja tugevuse kondensaatori plaatide vahel:

$$C = \frac{\epsilon\epsilon_0 S}{d} \quad \text{ja} \quad C = \frac{q}{U},$$

kust

$$E = \frac{q}{\epsilon\epsilon_0 S}.$$

Arvestades, et pindtihedus  $\sigma = q/S$ , saame

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon\epsilon_0}.$$

Tolmukübemele mõjub raskusjõud  $mg$  ja elektrostaatiline jõud  $Eq$ . Tasakaalu korral  $mg = Eq$ . Tolmukübeme laeng on seega

$$q = \frac{mg}{E} = mg \frac{\epsilon\epsilon_0}{\sigma} \approx 0,33 \cdot 10^{-17} \text{ C}.$$

Kui polaarsust muuta, siis mõjub tolmukübemele jõud

$$F = mg + Eq = 2mg.$$

Kiirendus, millega tolmukübe hakkab langema on  $a = 2g$ .

**L61 Kuulikesed ★★**

Autor: Tundmatu autor, lahtine, 2007, G 7

Energia jäätvuse seaduse kohaselt

$$mgH + \frac{mv^2}{2} + \frac{kq^2}{H} = mgh + \frac{kq^2}{h},$$

kus peale gravitatsioonilise potentsiaalse energiia arvestasime ka elektrilise potentsiaaliga. Niisiis

$$\begin{aligned} h - \frac{v^2}{2g} - H - \frac{kq^2}{mgH} + \frac{kq^2}{mgh} &= 0, \\ h^2 - \left( \frac{v^2}{2g} + \frac{kq^2}{mgH} + H \right)h + \frac{kq^2}{mg} &= 0. \end{aligned}$$

Lahendades saadud ruutvõrrandi, saame

$$h = \frac{1}{2} \left( \frac{v^2}{2g} + \frac{kq^2}{mgH} + H \right) - \sqrt{\frac{1}{4} \left( \frac{v^2}{2g} + \frac{kq^2}{mgH} + H \right)^2 - \frac{kq^2}{mg}}.$$

Lahend „+“-märgiga ruutjuure ees oleks kaugusest  $H$  suurem ja vastaks maksimaalsele kõrgusele, mille saavutaks kuulike, kui ta saaks samasuguse kuid ülespoole suunatud algkiiruse.

**L62 Laetud rõngas ★★**

Autor: Tundmatu autor, lahtine, 2009, G 4

Punktis, mis asub rõnga teljel kaugusel  $d$  rõnga keskpunktist on rõnga poolt tekitatud välja potentsiaal

$$\phi_1 = k \frac{Q}{\sqrt{R^2 + d^2}} = k \frac{Q}{2R}.$$

Rõnga keskpunktis on rõnga poolt tekitatud välja potentsiaal

$$\phi_2 = k \frac{Q}{R}.$$

Et elektron saaks rõngast läbi lennata, peab tema kineetiline energia olema piisav potentsiaalide vahel  $U = \phi_2 - \phi_1$  läbimiseks. Piirjuhul saame

$$\frac{mv^2}{2} = e \left( k \frac{Q}{R} - k \frac{Q}{2R} \right) = k \frac{eQ}{2R}.$$

Siit

$$v_{\min} = \sqrt{k \frac{eQ}{mR}}.$$

**L63 Ioonmootor ★★**

Autor: Mihkel Pajusalu, lahtine, 2010, G 6

Ioonide kiiruse leiame energia jäävuse seadusest:

$$mu^2/2 = Ue \Rightarrow u = \sqrt{2Ue/m},$$

kus  $m = \mu/N_A$ . Impulsi jäävuse seadusest süsteemi "laev+kiirendatud kütus" jaoks saame (eeldusel, et  $M \gg m_k$ )

$$m_k u = Mv \Rightarrow m_k = Mv/u = Mv\sqrt{\mu/2N_A Ue} = 2,61 \text{ kg}.$$

Näeme, et tehtud eeldus  $m_k \ll M$  tõepoolest kehtib.

**L64 Lendav elektronkahur ★★**

Autor: Siim Ainsaar, lõppvoor, 2006, G 6

Olgu elektroni laengu absoluutväärustus  $e$  ja mass  $m_e$ . Ajaga  $t$  lahkub katoodilt hulk elektrone kogulaengu absoluutväärusega  $q = It$ . Elektronide arv, mis selle ajaga lendu läheb, on siis  $N = \frac{q}{e} = \frac{It}{e}$  ja mass  $m = Nm_e = \frac{Itm_e}{e}$ . Leiame ka, kui kiiresti need elektronid liiguvad. Üks elektron saab elektronkahuris kineetilise energi  $E = Ue$ . Samas  $E = \frac{m_e v^2}{2}$ , seega

$$v = \sqrt{\frac{2E}{m_e}} = \sqrt{\frac{2Ue}{m_e}}.$$

Ajaga  $t$  lendu läinud elektronide koguimpulss

$$p = mv = \frac{Itm_e}{e} \sqrt{\frac{2Ue}{m_e}} = It \sqrt{2U \frac{m_e}{e}}.$$

Et elektronkahur muudab aja  $t$  jooksul elektronide impulssi  $p$  võrra, siis mõjub temale keskmiselt jõud

$$F = \frac{p}{t} = I \sqrt{2U \frac{m_e}{e}} = I \sqrt{\frac{2U}{k}}.$$

Tõstmaks masinat õhku, peab see  $F$  ületama masinale (koos Tatikaga) mõjuva raskusjõu  $m_T g$ , st  $F \geq m_T g$  ehk

$$I \sqrt{U} \geq m_T g \sqrt{\frac{k}{2}} \approx 4,3 \cdot 10^8 \text{ A} \sqrt{\text{V}}.$$

Ilmselt peavad  $I$  ja  $U$  olema ebarealistlikult suured, sest televiisori puhul

$$I \sqrt{U} \approx 0,017 \text{ A} \sqrt{\text{V}}.$$

Seega pole Tatikal lootustki sellise masinaga lennata.

*Märkus.* Erirelatiivsusteooriat arvestades sama arutluskäiku läbi tehes saaksime, et täpsem valem on

$$F = I \sqrt{\frac{2U}{k} + \frac{U^2}{c^2}},$$

kus  $c \approx 3,0 \cdot 10^8 \text{ m/s}$  on valguse kiirus vaakumis. Seega võime relativistlikud efektid arvestamata jäätta vaid siis, kui

$$\frac{U^2}{c^2} \ll \frac{2U}{k}$$

ehk

$$U \ll \frac{2c^2}{k} \approx 1,0 \cdot 10^6 \text{ V}.$$

Arvestades vajalikku  $I \sqrt{U}$  suurusjärku, peab Tatikas niisiis kardetavasti ka relatiivsusteooriat uurima... Lendu tõusta ei suudaks ta aga sellegipoolest.

## L65 Elektronkiir ★★

Autor: Tundmatu autor, lahtine, 2008, G 7

Olgu  $v_0$  elektronide algiirus plaatide vahel sattumisel. Aeg, mille jooksul üks elektron viibib plaatide vahel, on  $t = \frac{b}{v_0}$ .

Plaatide vahel on elektriväli tugevusega  $E = \frac{U}{d}$ . Newtoni II seadusest  $eE = ma$  leiame, et elektron liigub plaatide vahel kiirendusega  $a = \frac{eU}{md}$ . Läbides plaatide vahelise tee, kalduvad elektronid vahemaa  $s_0$  esialgsest trajektoorist kõrvale, kus

$$s_0 = \frac{at^2}{2} = \frac{Ueb^2}{2dmv_0^2}.$$

Elektronide liikumise kiirus  $v$  plaatide vahelisest ruumist väljudes koosneb kahest komponendist:

– paralleelsest ekraaniga  $v_y = at = \frac{eUb}{mdv_0}$ ,

– risti ekraaniga  $v_x = v_0$ .

Seega veedavad elektronid plaatidest ekraanini aja  $t' = \frac{l}{v_x} = \frac{l}{v_0}$ . Selle aja jooksul lisandub täiendav ekraaniga paralleelne nihe

$$s' = v_y t' = \frac{eUbl}{mdv_0^2}.$$

Kogu nihe on niisiis

$$s = s_0 + s' = \frac{eUb}{mdv_0^2} \left( \frac{b}{2} + l \right).$$

Seega

$$v_0 = \sqrt{\frac{e}{m} \frac{Ub}{ds} \left( \frac{b}{2} + l \right)} \approx 1,58 \cdot 10^7 \text{ m/s}.$$

Sooritame kontrolli, kas elektroni nihe plaatide vahel on väiksem, kui plaatide vaheline kaugus:

$$s_0 = \frac{Ueb^2}{2dmv_0^2} = \frac{bs}{2l+b} = 3,5 \text{ mm} < d.$$

### L66 Kuup ★★

Autor: Jaan Kalda, piirkonnavor, 2008, G 7

Kui auku ei oleks, oleks väljatugevus sümmeetria töttu 0. Antud olukord on ekvivalentne auguta kuubi ja negatiivse pindlaenguga  $b \times b$  ruudu superpositiooniga. Negatiivne ruut moodustab laengu  $q = -\sigma b^2$  ning tekitab kuubi keskel väljatugevuse

$$E = \frac{\sigma b^2}{4\pi\epsilon_0 \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{\sigma b^2}{\pi\epsilon_0 a^2}.$$

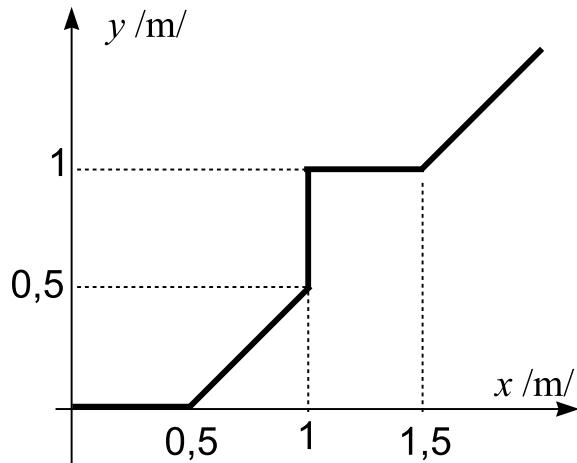
### L67 Liikuv laeng ★★

Autor: Jaan Kalda, piirkonnavor, 2009, G 6

Esimene impulss annab alguses laengule  $x$ -suunalise impulsi  $mv_x = qE_x\tau$ , millega

$$v_x = \frac{q}{m} E_x \tau = 1 \text{ m/s}.$$

Ajavahemiku  $t_1 = T/4$  jooksul kuni järgmise impulsini jõuab osake liikuda sirgjooneliselt piki  $x$ -telge kaugusele  $s_x = v_x T/4 = 0,5 \text{ m}$ . Seejärel saab ta impulsi  $y$ -telje sihis, mistõttu omandab ka kiiruse  $y$ -komponent samasuguse väärtsuse:  $v_y = v_x = 1 \text{ m/s}$  mistõttu ta liigub 45-kraadise nurga all, sooritades kuni järgmisse impulsini nii  $x$ - kui  $y$ -telje sihis niiske  $s_x = s_y = 0,5 \text{ m}$ . Järgmine impulss peatab  $x$ -telje sihilise (kuid muutmata  $y$ -sihilist) liikumise, nii et osake nihkub nüüd piki  $y$ -telge kaugusele  $s_y = 0,5 \text{ m}$ . Järgmine impulss peatab ka  $x$ -suunalise liikumise, nii et osake jäääb paigale. Edasi kordub protsess otsast peale. Eelpooltoodud tulemuste põhjal saame juuresoleva trajektoori.



Keskmise kiiruse leidame perioodi jooksul sooritatud nihke  $s = \sqrt{1+1}\text{m}$  perioodi  $T = 2\text{s}$  suhtena,  $v \approx 0,7\text{ m/s}$ .

### L68 Sfäärid ★★★

Autor: Kristian Kuppart, lahtine, 2011, G 8

Et sfäärid on traadiga ühendatud, siis nad omavad sama potentsiaali. Olgu ühe laeng  $Q_1$  ja teise laeng  $Q_2$ ; sellisel juhul  $kQ_1/R_1 = kQ_2/R_2$ . Jagades selle võrduse vasaku ja parema poole läbi  $R_1R_2$ -ga ja tähistades  $E_1 = kQ_1/R_1^2$  ning  $E_2 = kQ_2/R_2^2$ , saame  $E_1/R_2 = E_2/R_1$ , millest  $E_1/E_2 = R_2/R_1$ .

### L69 Kondensaatorid ★★★★

Autor: Oleg Košik, lõppvoor, 2005, G 8

Tegu on kondensaatorite jadaühendusega, mille tõttu laeng mõlemal kondensaatoril peab olema ühesugune. Kondensaatorite kogumahtuvuse leidame valemist

$$\frac{1}{C_0} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \quad \Rightarrow \quad C_0 = 1,2C.$$

Seega laeng on  $q = 1,2CU$ . Pinge kondensaatoril mahtuvusega  $2C$  on seega  $U_1 = q/C_1 = 0,6U$  ning kondensaatoril mahtuvusega  $3C$  vastavalt  $U_2 = 0,4U$ . Eeldame, et elektriväli on vaid kondensaatorite sees. Elektrivälja tugevus neis on nüüd vastavalt

$$E_1 = -\frac{U_1}{2d} = \frac{-0,3U}{d} \quad \text{ja} \quad E_2 = \frac{U_2}{d} = \frac{0,4U}{d}.$$

Kuna elektriväljad peavad olema suunatud vastupidistes suundades, siis ühe elektrivälja tugevuse võtsime negatiivseks. Määrame nüüd horisontaalsuunalise kii renduse seosest  $Eq = ma$ . Esimese kondensaatori puhul on see

$$a_2 = \frac{E_2 q}{m} = \frac{0,4Uq}{md}.$$

Vertikaalsuunaline kiirus on kogu aeg sama, selle tõttu aeg, mille jooksul asub osake mõlema kondensaatori elektrivälja mõjusfääril, on  $t = l/v$ . Selle aja jooksul muutub horisontaalsuunaline kiirus *at* võrra. Seega teisest kondensaatorist väljumise hetkel on osakese kiirus

$$v_h = ta_1 + ta_2 = t(a_1 + a_2) = \frac{0,1Uql}{mdv}.$$

Trajektoori kaldenurga tangens on järelkult

$$\tan \alpha = \frac{v_h}{v} = \frac{0,1Uql}{mdv^2}.$$

### L70 Kärbes ★★★

Autor: Stanislav Zavjalov, lahtine, 2010, G 7

Valime potentsiaali nullnivoooks kärbse asümpootilise asukoha (lõpmatuses). Olgu laeng  $Q$  koordinaatide alguspunktiks ning olgu  $x$ -telg horisontaalne ja  $y$ -telg vertikaalne. Kärbes peab püsima laengu lähedal köverduval null-potentsiaalil. Potentsiaal avaldub homogeense välja  $E$  potentsiaali ja punktlaengu potentsiaali superpositioonina, seega

$$E(d-y) - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{\sqrt{y^2+x^2}} = 0.$$

Ülesande sümmeetriast on selge, kärbse vahemaa on minimaalne  $x = 0$  korral, ehk teisisõnu kehtib  $E(d-y) = kQ/y$ . Antud võrrandist saame ruutvõrandi lahenditega

$$y_{1,2} = \frac{d}{2} \pm \sqrt{\frac{d^2}{4} - \frac{kQ}{E}} = \frac{d}{2} \left( 1 \pm \sqrt{1 - \frac{4kQ}{Ed^2}} \right).$$

Juhul kui laeng on väike, liigub kärbes ilmselgelt sirgjooneliselt. Ometigi leidub kaks lahendit. Lahendi kahesus tuleneb sellest, et laengu läheduses leidub samuti null-potentsiaaliga suletud köver. Laengu kasvades need kaks null-potentsiaaliga joont lähenevad üksteisele, kuni  $Q = \pi\epsilon_0 Ed^2$  juures puutuvad kokku ja edaspidi moodustub null-potentsiaalist juba üksainus köver, mis kulgeb ümber laengu. Seega vastab kärbse trajektoor ruutvõrandi suuremale lahendile:

$$y = \frac{d}{2} \left( 1 + \sqrt{1 - \frac{4kQ}{Ed^2}} \right).$$

**L71 Laetud klotsid ★★★**

Autor: Tundmatu autor, lahtine, 2006, G 9

Klots hakkab liikuma, kui sellele mõjuv elektrostaatiline jõud ületab maksimaalse-hõördejõu:

$$\frac{kq^2}{l^2} > \mu mg.$$

Klotside läbitava vahemaa leiame energia jäävuse seadusest. Punktis, milles klots peatub, on elektrostaatilise välja potentsiaalne energia väiksem, kui algpunktis. Potentsiaalsete energiate vahe muundub liikumise käigus klotside kineetiliseks energiaks, mis, omakorda, hõördejõu töö tulemusena muundub soojuseks.

Kui kuulide vahemaa liikuma hakkamisel oli  $l$  ning seisma jäämise hetkel  $L$ , siis muutus elektrostaatilises potentsiaalses energias on

$$\Delta E = \frac{kq^2}{l} - \frac{kq^2}{L}.$$

Hõördejõud  $\mu mg$  mõjub kummagile klotsile vahemaa  $(L - l)/2$  jooksul, seega kogu hõördejõu töö on

$$A = \mu mg(L - l).$$

Et need energia muudud on võrdsed, saame vahemaa  $L$  jaoks lihtsa võrrandi:

$$\begin{aligned} kq^2 \left( \frac{1}{l} - \frac{1}{L} \right) &= \mu mg(L - l) \Rightarrow \frac{kq^2}{\mu mg} \frac{L - l}{lL} = L - l \Rightarrow \\ &\Rightarrow L = \frac{kq^2}{\mu mgl} \end{aligned}$$

**L72 Kosmoseprügi ★★★**

Autor: Siim Ainsaar, lõppvoor, 2009, G 9

Massikeskme taustsüsteemis on kerade kaugus minimaalne hetkel, kui süsteem on paigal.  $d$  saame energia jäävuse seadusest, mis kehtib, kuna nöör puutehetkel mutrilise (sirgena) jõudu ei avalda ega muuda nii põrget plastseks.

Süsteemi masskeskme liikumiskiirus satelliidi süsteemis

$$v_c = \frac{mv}{m + 2M},$$

mutri algkiirus masskeskme süsteemis

$$w = v - v_c = v \left( 1 - \frac{m}{m + 2M} \right) = v \frac{2M}{m + 2M},$$

tehiskaaslase oma

$$W = v_c = \frac{mv}{m + 2M}.$$

Energia jäävus masskeskme taustsüsteemis on

$$\frac{mw^2}{2} + \frac{2MW^2}{2} + \frac{kq^2}{l} = \frac{kq^2}{d},$$

kust

$$\begin{aligned} d &= \frac{kq^2}{\frac{mw^2}{2} + MW^2 + \frac{kq^2}{l}} = \frac{kq^2}{\frac{mv^2}{2} \left( \frac{2M}{m+2M} \right)^2 + Mv^2 \left( \frac{m}{m+2M} \right)^2 + \frac{kq^2}{l}} = \\ &= \frac{1}{\frac{1}{l} + \frac{mMv^2}{kq^2(m+2M)}}. \end{aligned}$$

### *Alternatiivne lahendus*

Hetkel, kui keradevaheline kaugus on minimaalne, on satelliidi osad üksteise suhtes paigal. Seega liigub süsteem sel hetkel nagu jäik keha. Võtame inertsiaalse taustsüsteemi, kus tehiskaaslane oli enne kokkupõrget paigal, ja tähistame süsteemi kiiruse minimaalse kauguse saavutamise hetkel kui  $v_1$ .

Impulsi jäädvusest

$$mv = (m + 2M)v_1 \implies v_1 = \frac{mv}{m + 2M}.$$

Kehtib ka energia jäädvus.

$$\begin{aligned} \frac{mv^2}{2} + \frac{kq^2}{l} &= \frac{(m + 2M)v_1^2}{2} + \frac{kq^2}{d}, \\ \frac{mv^2}{2} + \frac{kq^2}{l} &= \frac{m^2v^2}{2(m + 2M)} + \frac{kq^2}{d}, \\ d &= \frac{\frac{kq^2}{l}}{\frac{mv^2}{2} + \frac{kq^2}{l} - \frac{m^2v^2}{2(m + 2M)}} = \frac{1}{\frac{1}{l} + \frac{mMv^2}{kq^2(m+2M)}}. \end{aligned}$$

### **L73 Jalgpall ★**

Autor: Tundmatu autor, lahtine, 2006, G 1

Iga pumpamiskäigu alguses atmosfääri õhk rõhuga  $p_0$  täidab pumba siseruumi ruumalaga  $v$ . Pumpamiskäigu lõpus on see õhk pallis, kus ta ruumala on  $V$  ja osarõhk  $p$ . Viimase saame leida Boyle-Mariotte'i seadusest:

$$p = \frac{p_0 v}{V}.$$

Pärast  $N$  pumpamiskäiku on rõhk pallis võrdne osarõhkude summaga:

$$p_N = Np = \frac{Nvp_0}{V} = \frac{40 \cdot 150 \cdot 0,1}{3000} = 0,2 \text{ MPa.}$$

**L74 Allveelaev ★**

Autor: Tundmatu autor, lahtine, 2007, G 3

Kuna temperatuur on jäav, kehtib seos  $pV = \text{Const}$ . Olgu laeva ruumala  $V$  ning õhu ruumala laevas peale ventiilide avamist  $v$ . Siis

$$p_0 V = (p_0 + \rho gh) v,$$

$$k = \frac{v}{V} = \frac{p_0}{p_0 + \rho gh} = \frac{0,1 \cdot 10^6}{0,1 \cdot 10^6 + 1,03 \cdot 10^3 \cdot 9,8 \cdot 42} \approx 0,19.$$

**L75 Tuukrid ★**

Autor: Ott Krikmann, piirkonnnavoor, 2007, G 4

Oletame, et tuuker pumpas pinna lähedal vesti õhku, mille ruumala oli  $V_0$ . Vee pinna lähedal oli rõhk võrdne välisrõhuga. Sukeldudes 25 m sügavusele, suureneb rõhk  $\Delta p = \rho gh$  rõrra. Summaarne rõhk sellel sügavusel on seega

$$p = p_0 + \Delta p = p_0 + \rho gh$$

Võrdusest  $pV = p_0 V_0$  leiame, et

$$\frac{V_0}{V} = \frac{p}{p_0} = \frac{p_0 + \rho gh}{p_0} = 3,33.$$

Seega, vestis oleva õhu ruumala väheneb endisega võrreldes 3,33 korda. Järelikult on vaja selle sügavusel suurendada õhu ruumala 3,33 korda, et saavutada hõlju mine.

**L76 Toaõhk ★**

Autor: Mihkel Rähn, lõppvoor, 2008, G 3

Summaarne kineetiline energia avaldub kui  $E = N \cdot \langle E_m \rangle$ , kus  $N$  on toas oleva gaasi molekulide arv ja  $\langle E_m \rangle$  ühe molekuli gaasi keskmise kineetiline energia. Kehtib

$$\langle E_m \rangle = \frac{3}{2} kT.$$

Ideaalse kaasi võrrandist saab avaldada toas olevate molekulide arvu  $N = pV/(kT)$  Pannes need kokku,  $E = \frac{3}{2} pV$ . Kuna toas on õhurõhk võrdne välisrõhuga ei sõltu toas olevate õhumolekulide summaarne kineetiline energia temperatuurist.

**L77 Gaasitermomeeter ★★**

Autor: Valter Kiisk, piirkonnnavoor, 2006, G 5

Olgu mõõteampulli ruumala  $V$  ning manomeetri ruumala  $V_m$ . Kui toatemperatuuril  $T_0$  täideti seade  $n$  mooli gaasiga, siis ideaalse gaasi olekuvõrrandi põhjal

$$\frac{p_0 V}{T_0} + \frac{p_0 V_m}{T_0} = nR.$$

Kuna manomeeter ja mõõteampull on kapillaari kaudu ühenduses, siis nende gaasirõhud on isegi temperatuuride erinedes ühesugused. Kui mõõteampull on temperatuuril  $T$ , siis (gaasi koguhulk jäab samaks)

$$\frac{pV}{T} + \frac{pV_m}{T_0} = nR.$$

Elimineerides  $n$  ja asendades  $V_m/V = \alpha$ , saame

$$T = \frac{pT_0}{p_0 + (p_0 - p)\alpha} \approx 20,5 \text{ K}.$$

**L78 Tuulik ★★**

Autor: Valter Kiisk, piirkonnnavoor, 2007, G 5

Tiiviku poolet haaratav pindala on

$$S = \frac{\pi d^2}{4},$$

Ajavahemikus  $\Delta t$  kandub läbi selle pinna õhumass  $\Delta m = vS\rho\Delta t$ , mille kinetiline energia on

$$\Delta E = \frac{\Delta mv^2}{2} = \frac{S\rho\Delta tv^3}{2},$$

millele vastab võimsus  $P_0 = S\rho v^3/2$ . Elektriiks õnnestub muundada osa  $\eta$  sellest:

$$P = \eta P_0 = \frac{\eta S \rho v^3}{2} = \frac{\eta \pi d^2 \rho v^3}{8} \approx 370 \text{ kW}.$$

**L79 Rong tunnelis ★★**

Autor: Eero Uustalu, lõppvoor, 2009, G 4

Õhu temperatuur tunnelis kasvab, kuna mootor soojendab tunneli läbimisel selles olevat õhku. Vaatleme rongi liikumist ajavahemiku  $\Delta t$  jooksul. Selle ajaga läbib rong vahemaa  $s = v\Delta t$  ja rongist mööduva õhu ruumala on  $\Delta V = \pi d^2 s/4$ . Õhu mass on  $m = \Delta V \rho$  ja moolide arv on

$$N = \frac{m}{M} = \frac{\Delta V \rho}{M} = \frac{\pi d^2 v \Delta t \rho}{4M}.$$

Ideaalse gaasi olekuvõrrandist  $pV = \frac{m}{M}RT$  saame avaldada  $\rho = \frac{m}{V} = \frac{pM}{RT}$ .

Rongi mootoris eraldub samal ajal soojushulk  $Q_1 = P\Delta t$ .

Üheaatomilise gaasi erisoojus jäaval ruumalal on  $C_1 = 3/2R$ . Seega on kaheatomilise gaasi erisoojus  $C_2 = 5/3 \cdot 3/2R = 5/2R$ . Gaasi erisoojus jäaval rõhul on seega  $C = 5/2R + R = 7/2R$ . Õhu soojendamiseks  $\Delta T$  võrra kulub soojushulk  $Q_2 = NC\Delta T$ . Võrdsustame soojushulgad  $Q_1$  ja  $Q_2$ .

$$NC\Delta T = P\Delta t.$$

Asendades leitud avaldised  $N$  ja  $C$  jaoks saame pärast teisendusi

$$\Delta T = \frac{8PT}{7\pi d^2 vp} = 2,25 \text{ K}.$$

**L80 Heelium ★★★**

Autor: Tundmatu autor, lahtine, 2008, G 6

Käitleme heeliumit üheaatomilise ideaalsegaasina. Paneme kirja olekuvõrrandid alg- ja lõppseisundi jaoks:

$$p_1 V_1 = nRT_1, \quad p_2 V_2 = nRT_2.$$

Paisumisel tehtav töö võrdub graafikul halliks värvitud trapetsi pindalaga:

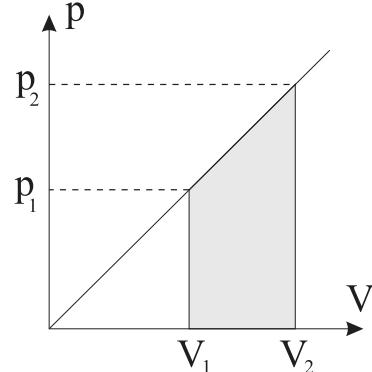
$$A = \frac{1}{2}(p_2 V_2 - p_1 V_1) = \frac{1}{2}nR(T_2 - T_1).$$

Termodynäamika I seaduse kohaselt

$$Q = A + \Delta U = \frac{1}{2}nR(T_2 - T_1) + \frac{3}{2}nR\Delta T = 2nR\Delta T.$$

Siit

$$\Delta T = \frac{Q}{2nR} \approx 6 \text{ K}.$$



**L81 Ūhk ★★**

Autor: Tundmatu autor, lahtine, 2009, G 7

Temperatuuri kasvades hakkab esimese anuma rõhk  $p_1$  suurenemama ning mingil hetkel ületab see ventili kriitilise rõhu  $\Delta p$ . Sellest hetkest alates hakkab ventiil õhku läbi laskma nõnda, et edaspidi anumate rõhud  $p_1$  ja  $p_2$  rahuldavad tingimust  $p_1 - p_2 = \Delta p$ . See tingimus jäab edaspidi alati täidetuks, sest ei saa tekkida olukorda, kus väiksema rõhuga anumas kasvaks rõhk kiiremini kui suurema rõhuga anumas. Korrektse lahenduse huvides peame siiski ka veendumata, kas rõhk üldse kasvab piisavalt suureks, et ventiil avaneks. Selleks peaks rõhk kasvama 10 % võrra, milleks omakorda peab temperatuuri tõstma vähemalt 10 % võrra – töepooltest, see on kooskõlas ülesandes antud arvudega:  $t_2 - t_1 > 30^\circ\text{C}$ . Algne gaasi hulk (moolides)

$$n = \frac{p_0 V_1}{R t_1}$$

on jääv suurus ning jaotub hiljem anumate vahel osadeks  $n_1$  ja  $n_2$  nõnda, et  $n = n_1 + n_2$ , ehk

$$\frac{p_0 V_1}{R t_1} = \frac{(p_2 + \Delta p) V_1}{R t_2} + \frac{p_2 V_2}{R t_2}.$$

Asendades  $\alpha = V_1/V_2$ , saame

$$\begin{aligned} p_0 \alpha \frac{t_2}{t_1} - \Delta p \alpha &= p_2(\alpha + 1), \quad \Rightarrow \\ p_2 &= \frac{\alpha}{\alpha + 1} \left( p_0 \frac{t_2}{t_1} - \Delta p \right). \end{aligned}$$

Kasutades arvutustes absoluutühikutesse teisendatud temperatuuride väärtsusi  $t_1 = 300\text{ K}$  ja  $t_2 = 400\text{ K}$ , saame vastuseks

$$p_2 = \frac{2}{3} \left( \frac{4}{3} - 1,1 \right) p_0 \approx 0,16 p_0.$$

**L82 Ūhuhoki ★★**

Autor: Mihkel Heidelberg, lõppvoor, 2010, G 6

Olukorras, kus aluse temperatuur on minimaalne, on rõhk seibi alumise külje vahetus läheduses võrdne süsihappegaasi aururõhuga. Seibi surutakse alla jõuga  $F$  ja kuna seibi pindala on  $\pi r^2$ , peab surumist tasakaalustav rõhk olema  $p = \frac{F}{\pi r^2}$ . Vaadeldes rõhkude tasakaalu seibi ülemise ja alumise pinna läheduses, saame et kuiva jää aururõhk on

$$p_{\text{kuiv}} = p + p_0 = p_0 + \frac{F}{\pi r^2} = 131,8\text{ kPa}.$$

Sellele vastab graafiku põhjal temperatuur  $\sim 195\text{ K}$ .

**L83 Šokk ★★★★**

Autor: Tundmatu autor, lahtine, 2006, G 8

Kuiva õhu tihedus

$$\rho_1 = \frac{\mu_1 p_0}{RT}.$$

Suhtelise niiskusega  $f$  auru tihedus

$$\rho' = f\rho_0 = \frac{\mu_2 p_2}{RT},$$

kus  $p_2$  on auru osarõhk. Siit:

$$p_2 = \frac{\rho_0 f RT}{\mu_2}.$$

Kuna niiske õhu rõhk on õhu ja auru osarõhkude  $p_1$  ja  $p_2$  summa, siis

$$p_1 = p_0 - p_2 = p_0 - \frac{\rho_0 f RT}{\mu_2}.$$

Õhu tihedus (ilma auruta) sellel osarõhul

$$\rho'' = \frac{\mu_1 p_1}{RT} = \frac{\mu_1 p_0}{RT} - \frac{\mu_1 f \rho_0}{\mu_2}.$$

Niiske õhu tihedus

$$\rho_2 = \rho' + \rho'' = \frac{\mu_1 p_0}{RT} - \left( \frac{\mu_1}{\mu_2} - 1 \right) f \rho_0.$$

Niiske ja kuiva õhu tiheduste suhe on seega

$$\begin{aligned} \frac{\rho_2}{\rho_1} &= 1 - \frac{(\mu_1 - \mu_2) f \rho_0 RT}{\mu_1 \mu_2 p_0} \\ &= 1 - \frac{(0,029 - 0,018) \cdot 0,9 \cdot 0,027 \cdot 8,31 \cdot 300}{0,029 \cdot 0,018 \cdot 10^5} \approx 0,987. \end{aligned}$$

**L84 Gaasid ★★★★**

Autor: Oleg Košik, lõppvoor, 2007, G 6

Kogu protsessi jooksul on mõlema gaasi rõhud võrdsed ja konstantsed. Olgu vesiniku moolide arv  $n_0$ . Kuna alguses on ka temperatuurid võrdsed, siis valemi  $n = \frac{pV}{RT}$  põhjal näeme, et heeliumi moolide arv peab olema  $3n_0$ . Konstantsel rõhul avaldub molaarne erisoojus kui  $C_P = \left(\frac{i}{2} + 1\right) R$  (see valem on tületatav ka teistest rohkem tuntud valemitest). Vesinik on kaheatomiline gaas, heelium aga üheaatomiline, seega  $i_{H_2} = 5$ ,  $i_{He} = 3$  ning järelikult  $C_{PH_2} = 7/2R$  ja  $C_{PHe} = 5/2R$ . Omandagu vesinik vahetult peale soojendamist temperatuuri, mis on algtemperatuurist  $\Delta T_1$  võrra kõrgem ning olgu terve süsteemi tasakaaluline lõpptemperatuur algtemperatuurist  $\Delta T_2$  võrra suurem. Heelium saab temperatuuride ühtlustumise ajal soojushulgaga  $3n_0 C_{PHe} \Delta T_2$ , mis peab võrduma vesiniku poolt ära antava soojushulgaga:

$$n_0 C_{PH_2} (\Delta T_1 - \Delta T_2) = 3n_0 C_{PHe} \Delta T_2,$$

ehk

$$\frac{7}{2}(\Delta T_1 - \Delta T_2) = 3 \cdot \frac{5}{2} \Delta T_2,$$

kust

$$\Delta T_2 = \frac{7}{22} \Delta T_1.$$

Kuna protsess on isobaariline ja nii alguses kui ka lõpus on gaaside temperatuurid võrdsed, siis kehtivad võrdused  $pV_{\text{H}_2} = n_{\text{H}_2}RT$ ,  $p(V_{\text{H}_2} + V_{\text{He}}) = (n_{\text{He}} + n_{\text{H}_2})RT = 4n_0RT$ . Siit tulenevalt kehtib ka

$$p\Delta V_{\text{H}_2} = n_0 R \Delta T_1,$$

$$p\Delta(V_{\text{H}_2} + V_{\text{He}}) = 4n_0 R \Delta T_2.$$

Järelikult

$$\frac{d_2}{d_1} = \frac{\Delta(V_{\text{H}_2} + V_{\text{He}})}{\Delta V_{\text{H}_2}} = \frac{4\Delta T_2}{\Delta T_1} = \frac{28}{22}.$$

Seega lõpus on koormus algusega võrreldes  $d_2 = \frac{28}{22}d_1 = 7 \text{ cm}$  kõrgemal, järelikult ta nihkub täiendavalt  $\Delta d = d_2 - d_1 = 1,5 \text{ cm}$  ülespoole.

### L85 Korsten ★★★★

Autor: Jaan Kalda, piirkonnnavoor, 2009, G 9

Ahjusuusse siseneva õhu röhk  $p_1$  on võrdne õhurõhuga ahjusuu kõrgusel ning korstnast väljuva õhu röhk  $p_2$  on võrdne õhurõhuga korstnasuu kõrgusel. Seega,  $p_2 = p_1 - \rho_0 gh$ , kus  $\rho_0$  tähistab välisõhu tihedust. Bernoulli seaduse kohaselt kehtib seos

$$p_1 = p_2 + \rho_0 gh + \rho \frac{v^2}{2} = p_1 - \rho_0 gh + \rho_0 gh + \rho \frac{v^2}{2},$$

kus  $\rho = T\rho_0/T_0$  on õhu tihedus korstnas ning  $v$  on otsitav kiirus. Seega,

$$v = \sqrt{2 \left( \frac{T}{T_0} - 1 \right) gh} \approx 3,5 \text{ m/s.}$$

*Märkus.* Ahjusuuhu voolava õhu kiiruse võib lugeda tühiselt väikseks, sest voolava õhuga piirkonna ristlõike pindala on ilmselt hulga suurem korstna ristlõikepind-alast.

Bernoulli seaduse võib tuletada ka energia jäädvuse seadusest. Samuti lugeda õigeks impulsibalansi abil saadav tulemus (mis tuleb  $\sqrt{2}$  korda väiksem), sest nõuti vaid hindamist.

**L86 Rakettmootor ★★★★**

Autor: Jaan Kalda, lahtine, 2010, G 10

Adiabaatilisel paisumisel muutub gaasi sisenergia  $c_V T_0$  osaliselt joa kineetiliseks energiaks  $\mu v^2/2$  (avaldised on siin ühe mooli gaasi jaoks); energia jäävuse seaduses tuleb siiski arvestada ka põlemiskambris juurde tekkivate gaaside poolt tehtavat tööd  $p_0 V_0$  ning ärvoolavate gaaside pidurdavat tööd  $p_1 V_1$ , mis on olekuvõrrandi töttu vastavalt võrdsed  $RT_0$ -ga ja  $RT_1$ -ga. Seega,

$$c_V T_0 + RT_0 = c_V T_1 + RT_1 + \mu v^2/2 \Rightarrow v^2 = 7R(T_0 - T_1)/\mu.$$

Veojõud on võrdne ajaühikus eemalduva gaasijoa impulsiga,

$$F = \dot{m}v = (\rho_1 S v) \cdot v = \rho_1 S v^2 = 7S \frac{R \rho_1 T_1}{\mu} \left( \frac{T_0}{T_1} - 1 \right).$$

Arvestades gaasi olekuvõrandit ja lähendust  $T_0 \gg T_1$  saame lõpptulemuseks

$$F = 7S p_1 T_0 / T_1.$$

**L87 Kiil ★**

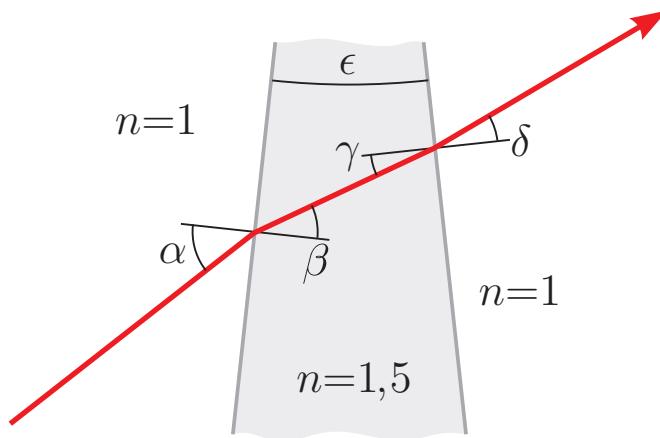
Autor: Valter Kiisk, lõppvoor, 2007, G 3

Kõik nurgad on tähistatud järgneval joonisel.  $\alpha$  on meelevaldne (kuigi  $\alpha \ll 1$ ).  $\beta = \alpha/n$ .  $\gamma = \beta - \epsilon$ .  $\delta = n\gamma = \alpha - n\epsilon$ . Kiire kõrvalekaldenurk

$$\phi = (\alpha - \beta) - (\delta - \gamma) = (\alpha - \delta) + (\gamma - \beta) = n\epsilon - \epsilon = \epsilon(n - 1).$$

Teades, et  $\phi = 5 \text{ mm}/2 \text{ m} = 0,0025 \text{ rad}$ , saame

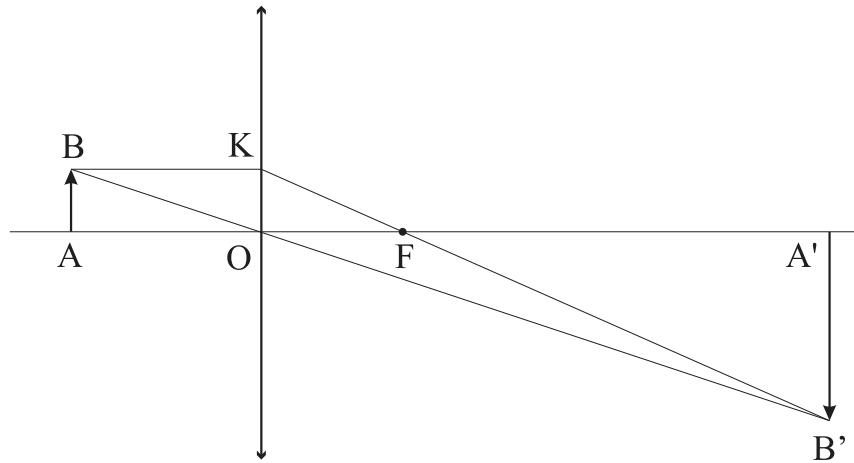
$$\epsilon = \frac{\phi}{n - 1} = 0,005 \text{ rad} = 0,29^\circ.$$



**L88 Lääts ★**

Autor: Tundmatu autor, lahtine, 2009, G 2

Kuna kujutis tekib ekraanile, siis on kujutis tegelik ning tegemist on koondava läätsega.



Olgu  $a$  kaugus esemest läätseni,  $k$  kaugus kujutisest läätseni ning  $f$  läätse fookuskaugus. Et kujutis on esemest 3 korda suurem, siis sarnastest kolmnurkadeest  $ABO$  ja  $A'B'O$

$$\frac{k}{a} = 3 \quad \Rightarrow \quad k = 3a.$$

Kujutis tekib kugusele  $d = 24$  cm, seega

$$a + k = 4a = 24 \text{ cm} \quad \Rightarrow \quad a = 6 \text{ cm}, k = 18 \text{ cm}.$$

Nüüd läätse valemist

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{k} = \frac{1}{f}$$

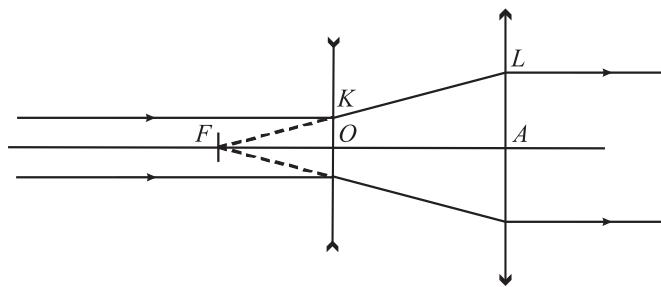
leiame, et  $f = 4,5$  cm.

*Märkus.* Läätsvalemi asemel võib fookuskauguse leidmiseks kasutada sarnaseid kolmnurki  $A'B'F$  ja  $OKF$ . Saame

$$\frac{k - f}{f} = 3 \quad \Rightarrow \quad f = \frac{k}{4} = 4,5 \text{ cm}.$$

**L89 Kiirtekimbu laiendi ★**

Autor: Koit Timpmann, piirkonnavor, 2010, G 3



Kuna esimese läätse optiline tugevus on negatiivne, on see nõgus. Selleks, et sienev paralleelne valgusvihk püsiks paralleelne peale süsteemist väljumist, peavad läätsede fookused ühtima. Olgu vastav ühine fookus  $F$ . Lisaks olgu läätsede keskpunktid  $O$  ja  $A$  ning siseneva kiirtekimbu kõige äärmine kiire lõikepunktid läbi läätsede  $K$  ja  $L$ .

Sellisel juhul saame kolmnurkade  $KOF$  ja  $LAF$  sarnasusest, et

$$\frac{|LA|}{|KO|} = \frac{|AF|}{|OF|}.$$

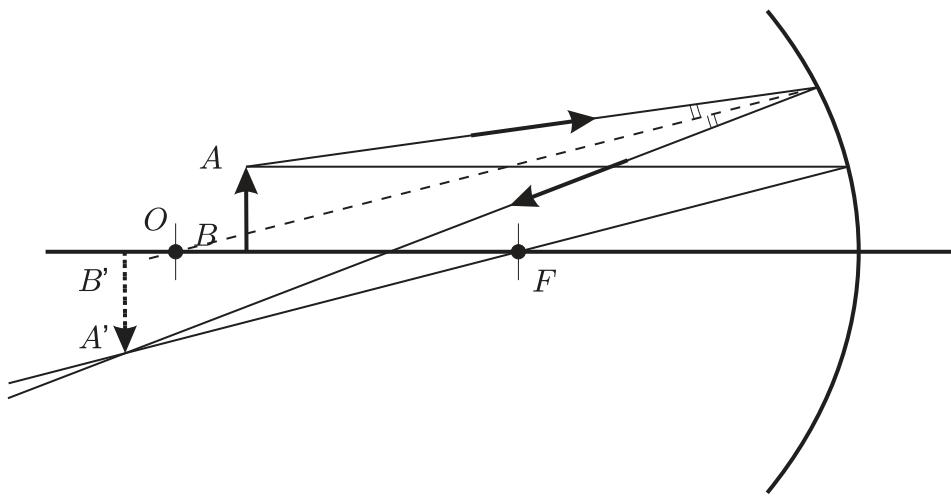
Kuna  $|AL| = 2,5|OK|$ , siis  $|AF| = 2,5|OF|$ , ehk läätsede vahekaugus on

$$|OA| = |AF| - |OF| = 1,5|OF| = 1,5 \left| \frac{1 \text{ m}}{-20} \right| = 7,5 \text{ cm}.$$

**L90 Nõguspeegel ★★**

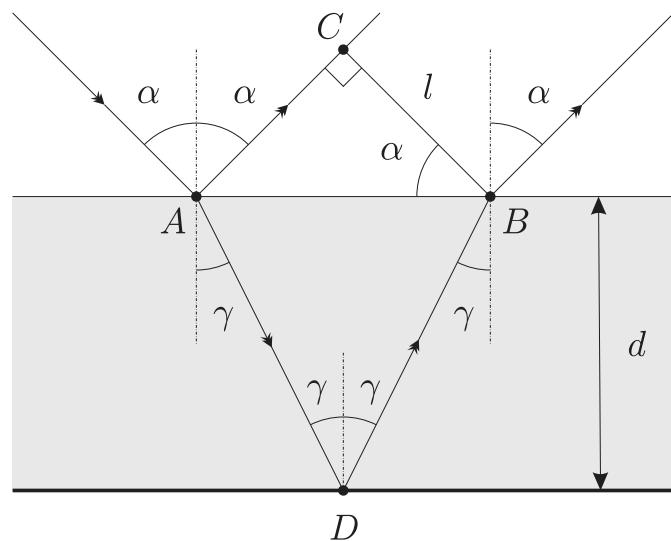
Autor: EFO žürii, lõppvoor, 2006, G 2

Jooniselt antud kiire kahe osa pikenduste lõikepunkt vastab nõguspeegli pinnale ning kiire nurgapoolitaja ja optilise peatelje lõikepunkt annab nõguspeegli kõverusaadiuse keskpunkti  $O$ . Fookuse leidmiseks paneme tähele, et nõguspeegli fookuskaugeus on pool kõverusaadiusest, kus kõverusaadiuse saame mõõta jooniselt. Edasi saame fookuse kaudu konstrueerida teise punktist  $A$  alguse saanud kiire käigu ning määrrata eseme kujutise asukoha.

**L91 Plaat ★★**

Autor: Tundmatu autor, lahtine, 2007, G 4

Kiirte käik plaadis on näidatud joonisel.



Nurk  $\angle ABC$  täisnurkses kolmnurgas  $ACB$  on  $\alpha$ , seetõttu  $|AB| = l/\cos \alpha$ . Teisest küljest, kolmnurgast  $ADB$  on näha, et  $|AB| = 2d \tan \gamma$ . Nurgad  $\alpha$  ja  $\gamma$  on seotud omavahel murdumisseadusega:

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \gamma} = n.$$

Lahendades need võrrandid, saame

$$n = \frac{\sin \alpha}{\sin(\arctan(\frac{l}{2d \cos \alpha}))} = \sin \alpha \sqrt{1 + \left(\frac{2d \cos \alpha}{l}\right)^2} \approx 1,8.$$

### L92 Valgusvihk ★★

Autor: Mihkel Kree, piirkonnavor, 2005, G 5

Ülesande lahendamisel osutub tarvilikuks teadmine, et läätsele selle optilise teljega paralleelselt langevad kiired (või murtud kiirte pikendused nõgusa läätse puul) koonduvad fookuses punktiks. Seega on ainus moodus kahe läätse abil saada süsteem, mis teisendab paralleelse kimbu uuesti paralleelseks kimbuks selline, et läätsede fookused ühtivad.

Esimene võimalus: kasutame kahte kumerläätse. Et kimbu diameeter suureneks, peab väiksema fookuskaugusega lääts olema eespool. Lihtsast geomeetriast (sarnased kolmnurgad) ilmneb, et tekkiva kiirtekimbu diameeter on  $D = df_2/f_1 = 2d$ .

Teine võimalus: kasutame ühte kumerat ja ühte nõgusat läätse. Kui kumer lääts oleks esimene, siis kimbu diameeter väheneks. Seega paigutame nõgusa läätse kumera läätse ette. Nõgus lääts tekitab näilise kujutise. Kumera läätse asetame nii, et selle fookus ühtiks nõgusläätse tekitatud ebakujutise asukohaga. Sarnastest kolmnurkatest leiame, et tekib kiirekimp diameetriga

$$D = \left| \frac{f_{\text{kumer}}}{f_3} d \right|.$$

$D$  omab suurimat väärust, kui kasutame suurema fookuskaugusega läätse,  $f_{\text{kumer}} = f_2$ . Niisiis

$$D = \left| \frac{f_2}{f_3} d \right| = 4d.$$

Näeme, et kiirtekimbu laiust saab suurendada maksimaalselt neli korda, kasutades selleks nõgusläätse ja kumerläätse ( $f_2 = 40 \text{ cm}$ ) nii, et nende fookused ühtkuid.

### L93 Biprisma ★★

Autor: Mihkel Kree, piirkonnnavoor, 2006, G 6

Valguskiir siseneb prismasse murdumata, sest kiir on normaali sihiline. Küll aga toimub murdumine prismast väljades. Kuna terve tahu ulatuses on langemisnurk sama, tekib üks tahk paralleelse kiirtekimbu (vt joonist). Kuna meil on kaks murdvat tahku, on esialgne kiirtekimp pärast prisma läbimist jagunenud kaheks. On lihtne märgata, et langemisnurk, millega kiired langevad murdvale tahule, on  $\alpha$ . Vastavalt murdumisseadusele saame murdumisnurga  $\gamma$  jaoks seose:

$$\sin \gamma = n \sin \alpha.$$

Väikeste nurkade jaoks lihtsustub see avaldis:  $\gamma = n\alpha$ . Kiir kaldus seega oma esialgsest sihist körvale nurga

$$\beta = \gamma - \alpha = (n - 1)\alpha$$

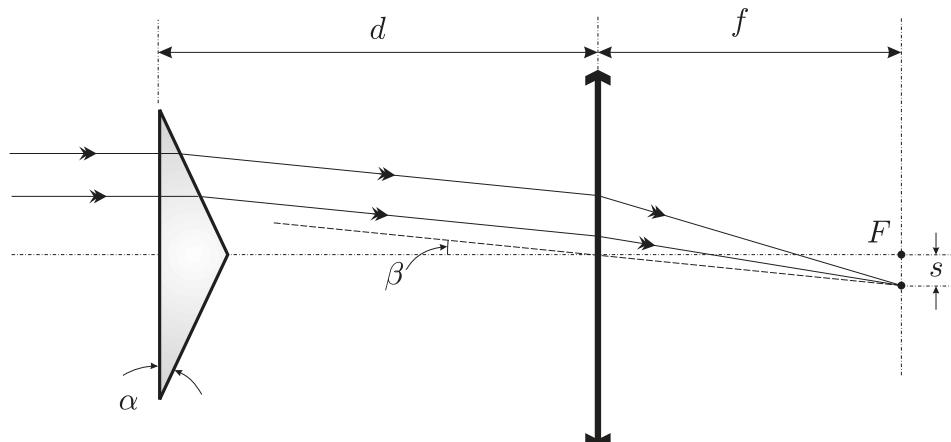
võrra.

Teame, et paralleelne kiirtekimp koondub kumerläätse fokaaltasandis. Seega tekitab fokaaltasandis asuvale ekraanile sümmeetriliselt kaks valgustäppi, teine teisele poolt optilist peatelge. Arvutame ka nende kaugused peateljest. Selleks kasutame läbi läätse keskpunkti tämmatud kiirt, mis asetseb peateljega nurga  $\beta$  all. Täisnurksest kolmnurgast saame valguspunkti kauguse peateljest:

$$s = f \tan \beta \approx f\beta = (n - 1)\alpha f.$$

Ilmselt ei sõltu ekraanil tekkiv pilt kaugusest  $d$ .

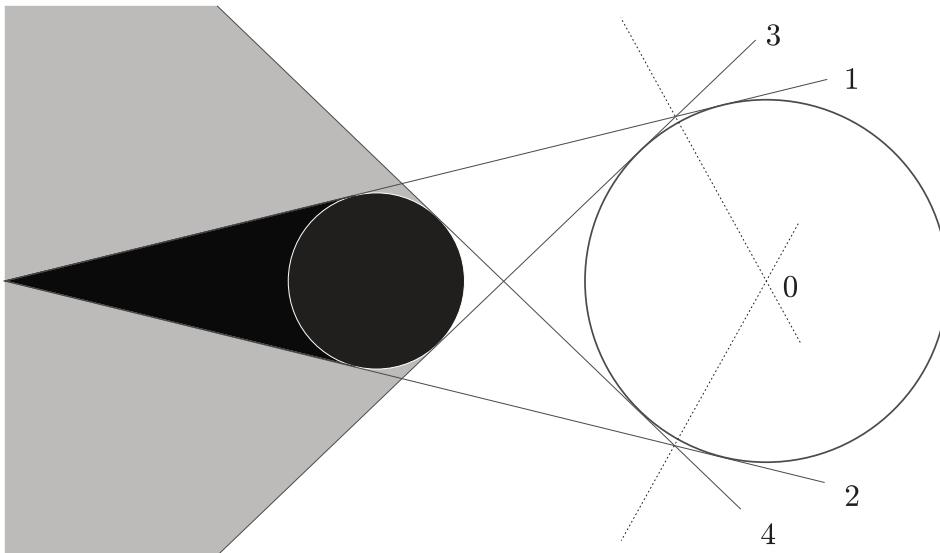
Et olla päris täpne, tuleks siiski märkida, et  $d$  kasvades piisavalt suureks hakkavad täpid muutuma tuhmimaks kuni lõpuks kaovad üldse, sest siis kiired enam läätse ei läbi.



### L94 Varjud ★★

Autor: Jaak Kikas, piirkonnavor, 2007, G 6

Kanname joonisele varjukoonuste piirjoonte pikendused (sirged 1-4). Valgusallikaks oleva kera lõikejoon joonise tasandiga on ringjoon, mille puutujateks on köik need sirged. Selle keskpunkti leidmiseks konstrueerime sirgete 1-3 ja 2-4 poolt moodustatud nurkade poolitajad (punktirjooned joonisel), nende lõikepunkt 0 on otsitava ringjoone keskpunktiks. Ringi raadiuse leidmiseks konstrueerime punktist 0 mõnele sirgetest 1-4 keskristssirge.



### L95 Veealune valgus ★★

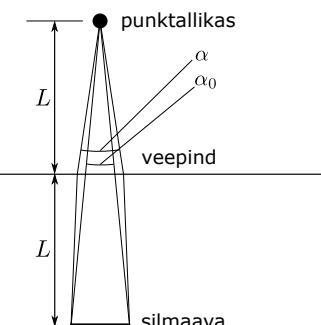
Autor: Jaak Kikas, lõppvoor, 2008, G 5

Allika heledus on ligikaudselt võrdeline vaatleja silmaava nurkläbimõõdu ruuduga allika asukohast vaadatuna. Olgu  $\alpha$  ja  $\alpha_0$  nurkläbimõõdud vastavalt veega täidetud ja veeta basseinis. Jooniselt

$$2L \tan(\alpha_0/2) = L \tan(\alpha/2) + L \tan(\beta/2),$$

kus langemis- ja murdumisnurkade  $\alpha/2$  ja  $\beta/2$  vahel kehtib seos

$$\frac{\sin(\alpha/2)}{\sin(\beta/2)} = n.$$



Kasutades väikeseid nurkade lähendust  $\tan \alpha \approx \sin \alpha \approx \alpha$ , saame

$$\left( \frac{\alpha}{\alpha_0} \right)^2 = \frac{4n^2}{(n+1)^2}.$$

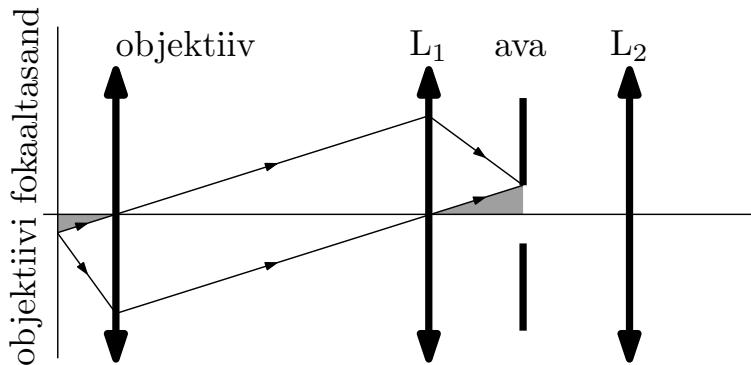
Arvestades ka peegeldumist veepinnalt, saame heleduste suhteks

$$\frac{I}{I_0} = \left( \frac{\alpha}{\alpha_0} \right)^2 (1 - r) = \frac{4(1 - r)n^2}{(n + 1)^2} = 1,28.$$

### L96 Konfookaalne mikroskoop ★★

Autor: Mihkel Rähn, lõppvoor, 2009, G 7

Lahenduse optiline skeem on toodud joonisel. Konstrueerimisel tuleb läätsede vahelised kiired joonestada paralleelsed ja läätsede keskpunkte läbivad. Sellisel juhul annavad need kiired eseme ja ava tasandil vastavalt eseme ja kujutise asukohad.



Värvitud kolmnurgad on NNN tunnuse järgi sarnased. Seetõttu kehtib võrdus

$$\frac{d}{2f_1} = \frac{r_{ese}}{f_{obj}},$$

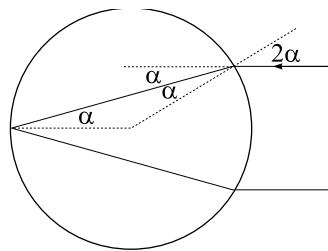
millest

$$r_{ese} = \frac{d \cdot f_{obj}}{2f_1}.$$

### L97 Klaaskuulike ★★

Autor: Jaan Kalda, lahtine, 2010, G 4

Tagasipeegelduv kiir peegeldub kuulikeses nii, nagu näidatud joonisel. Murdumisseadusest väikeste nurkade jaoks saame  $n = \sin 2\alpha / \sin \alpha \approx 2$ .



**L98 Kiilud ★★★**

Autor: Tundmatu autor, lahtine, 2006, G 6

On lihtne näha, et plaadist väljub endiselt paralleelne valgusvihk. Küll aga on selle levimise suund muutunud. Plaati sisenedes murdumist ei toimu, sest kiired liiguvad risti pinnaga. Kaldpinnale langevad kiired langemisnurga  $\varphi$  all, murdumisnurga  $\gamma$  saame murdumisseadusest:

$$n_1 \sin \varphi = n_2 \sin \gamma.$$

Meil on lubatud kasutada väikeste nurkade lähendust  $\sin \alpha \approx \alpha$ , mistõttu  $\varphi n_1 = \gamma n_2$ . Murdumise tõttu muutus kiire levimise suund nurga  $\varphi - \gamma$  võrra. Ühtlasi on lihtne näha, et see on ka langemisnurgaks plaadi välistasandile, sest esialgu liikus kiir risti plaadiga. Arvestades, et õhu murdumisnäitaja on 1, saame leida kiire murdumisnurga  $\delta$  plaadist väljumisel:

$$n_2(\varphi - \gamma) = \delta, \quad \delta = n_2 \left( \varphi - \frac{\varphi n_1}{n_2} \right) = \varphi(n_2 - n_1).$$

Valguslaigu nihet on nüüd lihtne leida. Vaatleme läätse optilist keskpunkti läbivat kiirt. Et see kiir läätses ei murdu, lõikab see fokaaltasandit teljest kaugusel

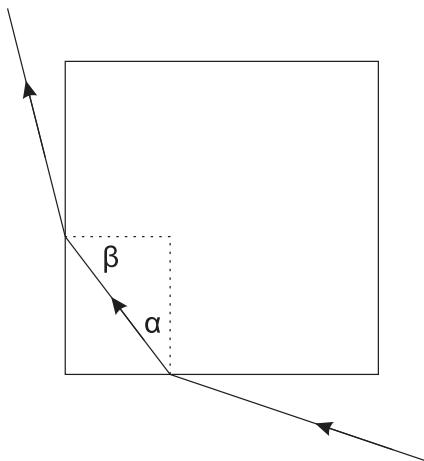
$$d = \delta f = \varphi f (n_2 - n_1).$$

**L99 Klaaskuup ★★★**

Autor: Tundmatu autor, piirkonnavor, 2009, G 7

Mustaks värvitud tahkudelt valgus peegelduda ei saa, toimub neeldumine. Ülesande tingimus on täidetud, kui värvimata tahust kuupi sisenev valgus ei saa väljuva läbi kõrvaltahu (toimub sisepeegeldus). Sisepeegelduse kriitilise nurga saame murdumisseadusest:

$$\sin \gamma_C = \frac{1}{n}.$$



Kiir siseneb kuupi, kui  $\alpha < \gamma_C$ . Langemisnurk kõrvaltahule on  $\beta = 90^\circ - \alpha$ . Kiir väljub kuubist, kui

$$\beta < \gamma_C, \quad \text{ehk} \quad 90^\circ < \gamma_C + \alpha < 2\gamma_C.$$

Et kiir ei saaks kuubist väljuda, peab kehtima:

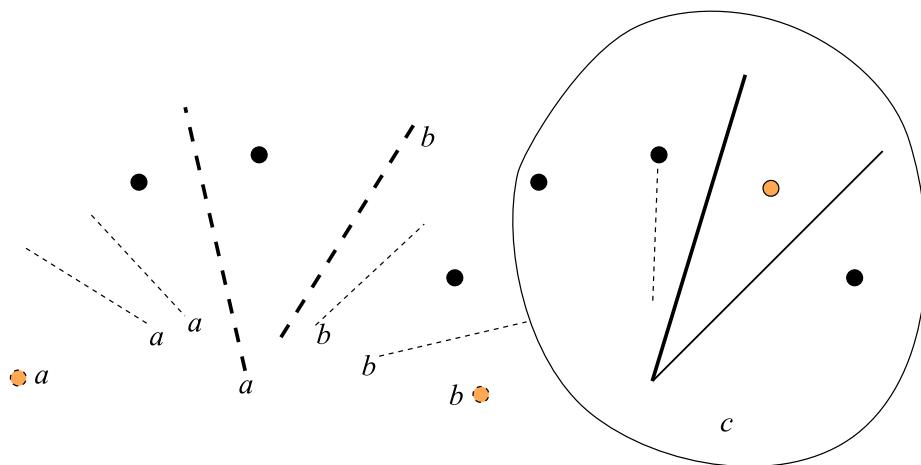
$$\gamma_C < 45^\circ, \quad \text{ehk} \quad n > 1 / \sin 45^\circ = \sqrt{2}.$$

### L100 Peeglid ★★

Autor: Jaan Kalda, piirkonnavor, 2009, G 8

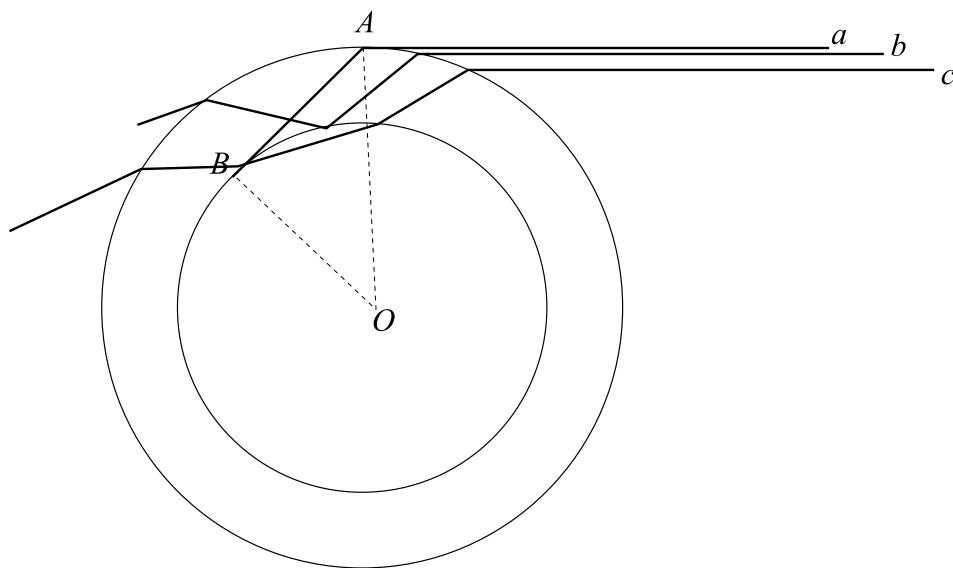
Kuna on teada, et üks antud punktidest on peegelduse peegeldus, siis peab üks tasapeeglitest kindlasti asuma peegelduse  $S_1$  ning selle peegelduse peegelduse  $S'_1$  sümmeetriateljal. Lisaks saab punkt  $S_1$  tekkida ainult siis, kui paigutada  $S_1$  ja allikas  $S$  vahel teine peegel. Järelikult peab kolmas antud punkt  $S_2$  olema allikas  $S$  peegeldus esimesena paigutatud peeglis, ehk see peegel asub nii  $S_1$  ja  $S'_1$  kui ka  $S$  ja  $S_2$  sümmeetriateljal. Teades seda, on lihtne määräta joonisel allikas  $S$  asukoht. Selleks, et tekiksid peegeldused ning peegelduse peegeldused, peab allikas asuma kahe peegli vahel nii, et mölemad peegeldavad küljed on sellele nähtavad. Kujustiste paariks  $S_1$  ja  $S'_1$  saab olla ainult kaks alumist punkti joonisel, kuna vastasel korral jäääks valgusallikas köigi kujutiste suhtes teisele poole peegleid olenemata sellest kas  $S_1$  ja  $S'_1$  jaoks valitakse ülemine ja vasakpoolne (joonisel  $a$ ) või ülemine ja parempoolne (joonisel  $b$ ).

Niisiis, esimeseks peeglikeks on kahe alumise punkti sümmeetriatelg ning allikaks ülemise punkti peegeldus selles peeglis. Teine peegel peab olema allikas ja parempoolse punkti sümmeetriatelg, sest kui see oleks allikas ja vasakpoolse punkti sümmeetriatelg, siis jäääks allikas jällegi peeglite vahelt välja.



### L101 Kapillaartoru ★★

Autor: Tundmatu autor, lahtine, 2009, G 8



Et kapillaarisein paistaks null-paksusega, peab kapillaarile puutujana (punktis  $A$ , vt joonist) langenud kiir  $a$  puudutama sisemist õönsust (punktis  $B$ ). Sellisel juhul pole ühtegi kiirt, mis läbiks kapillaari seina ilma sisemise õönsuse piirpinnale langemata (ning vaid kiir  $a$  teeb seda puutujana). Kolmnurk  $AOB$  on täisnurkne, seetõttu saame murdumisseadusest  $n = R/r$ .

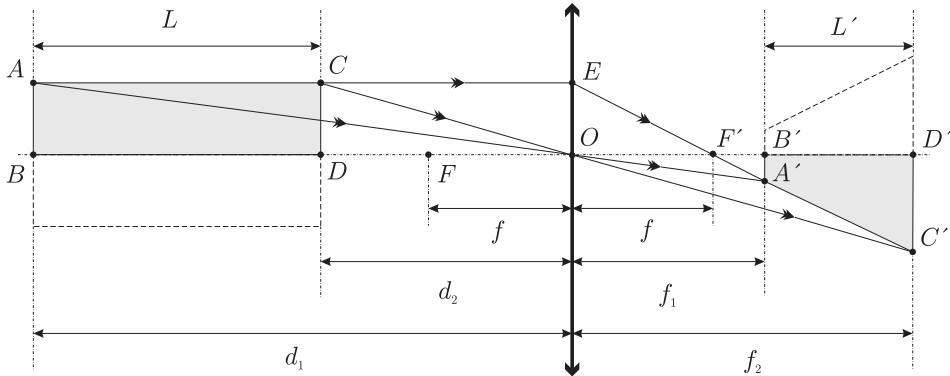
Ülesande olukorda edasi analüüsides paneme tähele, et ka võrratuse  $r > R/n$  korral puuduuvad kiired, mis langevad kapillaari välispinnale, kuid ei lange sisemise õönsuse piirpinnale; seega ka nende puhul näib kapillaari sein puuduuvat.

Veel paneme tähele, et igal juhul on siiski oluline erinevus ime-õhukese seinaga kapillaarist: kapillaari servale lähedaste kirite puhul toimub täielik sisepeegeldus sisemise õönsuse piirpinnalt (joonisel kiir  $b$ ). Visuaalselt paistab see peegel-kihina ja on selgelt eristatav, kui nt kapillaar täita värvilise gaasiga. Samas, see sisepeegeldus kaob, kui kapillaar täita värvilise vedelikuga, mille murdumisnäitaja on  $n$ .

### L102 Lääts ★★★

Autor: Tundmatu autor, lahtine, 2007, G 9

Olgu pliiatsi otste kaugused läätsest  $d_1 = |BO|$  ja  $d_2 = |DO|$  ning pliiatsi kujutise otste kaugused läätsest vastavalt  $f_1 = |B'O|$  ja  $f_2 = |D'O|$  (vt joonist).



Paneme kirja valemid suurendustegurite jaoks:

$$k = \frac{L'}{L}, \quad k_1 = \frac{|A'B'|}{|AB|}, \quad k_2 = \frac{|C'D'|}{|CD|}.$$

Sarnastest kolmnurkatest  $F'B'A'$  ja  $FOE$  leiame, et

$$\frac{|A'B'|}{|EO|} = \frac{|F'B'|}{|FO|} = \frac{f_1 - f}{f}.$$

Analoogiliselt, sarnastest kolmnurkatest  $F'D'C'$  ja  $FOE$  leiame, et

$$\frac{|C'D'|}{|EO|} = \frac{|F'D'|}{|FO|} = \frac{f_2 - f}{f}.$$

Kuna  $|EO| = |AB| = |CD|$ , siis

$$k = \frac{f_2 - f_1}{d_1 - d_2}, \quad k_1 = \frac{f_1 - f}{f}, \quad k_2 = \frac{f_2 - f}{f}.$$

Kasutades läätse valemit mõlema otsa jaoks:

$$\frac{1}{d_1} + \frac{1}{f_1} = \frac{1}{f} \quad \text{ning} \quad \frac{1}{d_2} + \frac{1}{f_2} = \frac{1}{f}$$

saame avaldada pikkused  $d_1$  ja  $d_2$  pikkuste  $f_1$  ja  $f_2$  kaudu:

$$d_1 = \frac{f_1 f}{f_1 - f}, \quad d_2 = \frac{f_2 f}{f_2 - f}.$$

Asendame saadud väärtsused suurendusteguri  $k$  avaldisse:

$$\begin{aligned} k &= \frac{f_2 - f_1}{f_1 - f} - \frac{f_2 f}{f_2 - f} = \frac{f_2 - f_1}{f} \frac{(f_1 - f)(f_2 - f)}{f_1(f_2 - f) - f_2(f_1 - f)} \\ &= \frac{f_2 - f_1}{f} \frac{(f_1 - f)(f_2 - f)}{f_1 f_2 - f_1 f - f_2 f_1 + f_2 f} = \frac{f_2 - f_1}{f} \frac{(f_1 - f)(f_2 - f)}{f_2 f - f_1 f} \\ &= \frac{f_2 - f_1}{f} \frac{(f_1 - f)(f_2 - f)}{f(f_2 - f_1)} = \frac{(f_1 - f)(f_2 - f)}{f^2}. \end{aligned}$$

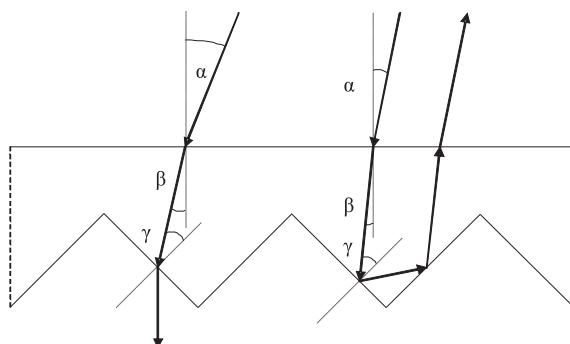
Võrreldes saadud avaldist varem saadud avaldistega  $k_1$  ja  $k_2$  jaoks, on lihtne näha, et

$$k = \frac{f_1 - f}{f} \frac{f_2 - f}{f} = k_1 k_2.$$

*Märkus.* Joonisel me mugavuse kaalutlusel tegelikult vaatleme vaid pool pliiatsit, aga on ilmne, et lahenduskäik kehtib ka terve pliiatsi kohta (joonisel on pliiatsi teine pool näidatud punktiirjoonega).

### L103 Hajuti ★★★★

Autor: Andreas Valdmann, piirkonnnavoor, 2010, G 8



Valgus läbib hajuti, kui nurk  $\gamma$  on väiksem täieliku sisepeegeldumise nurgast. Kriitilisel juhul  $\sin(\gamma_{\text{kr}}) = 1/n$ . Kuna  $\beta = 45^\circ - \gamma$ , siis  $\beta_{\text{kr}} = 45^\circ - \arcsin(1/n)$ . Nurkade  $\alpha$  ja  $\beta$  vahel kehtib murdumisseadus  $\sin(\alpha)/\sin(\beta) = n$ . Seega

$$\alpha_{\text{kr}} = \arcsin(n \sin(45^\circ - \arcsin(1/n))).$$

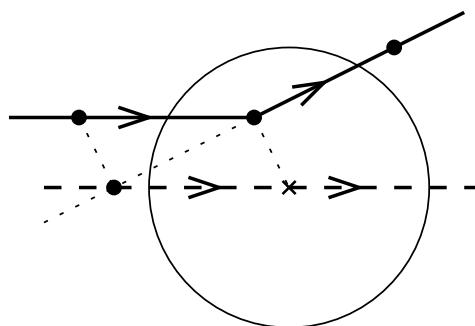
Vastuse saab viia kujule

$$\alpha_{\text{kr}} = \arcsin \left[ \frac{\sqrt{2}}{2} (\sqrt{n^2 - 1} - 1) \right] = 4,8^\circ.$$

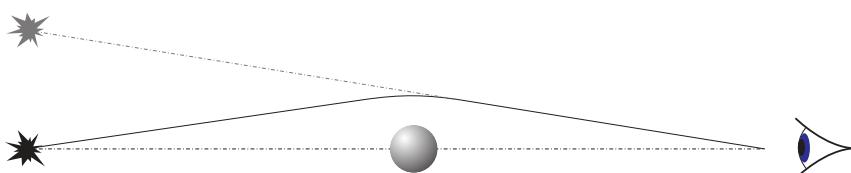
Kriitilisest väiksema  $\alpha$  korral (vt parempoolsemat kiirt) on tagasi pöörduv kiir paralleeline hajutile langenud kiirega. Kiire käigu pööramisel selgub, et tulemus ei muutu, kui esimene sisepeegeldus toimub  $45^\circ$ -st kraadist suurema nurga all. Sel juhul toimub nurga  $\gamma$  all teine sisepeegeldus.

**L104 Nõguslääts eestvaates** ★★★ Autor: Siim Ainsaar, piirkonnavor, 2011, G 10

Kui nõgusläätsele langevad paralleelsed kiired, lõikuvad murdunud kiirte pikendused eesmisel fokaaltasandil. Joonistame antud kiirega paralleelse abikiire (optilise kõrvotelje, joonisel  $AO$ ), mis läbib läätse optilist keskpunkti. See abikiir ei murdu, seega ühtib oma läätse läbimise järgse osa pikendusega. Tema lõikepunkt eesmise fokaaltasandiga (punkt  $A$ ) leiate täigast, et lõik  $AO$  on lõigu  $KL$  parallellüke. Küsitav murdunud kiir asub siis sirgel  $AL$ . Lääts asub täpselt oma fokaaltasandite vahel keskel, seetõttu pooltab punkt  $L$  lõigu  $AB$ , kus  $B$  on küsitav murdunud kiire lõikepunkt tagumise fokaaltasandiga. Järelikult saame punkti  $B$ , kui peegeldame punkti  $A$  punkti  $L$  suhtes ( $|AL| = |LB|$ ).



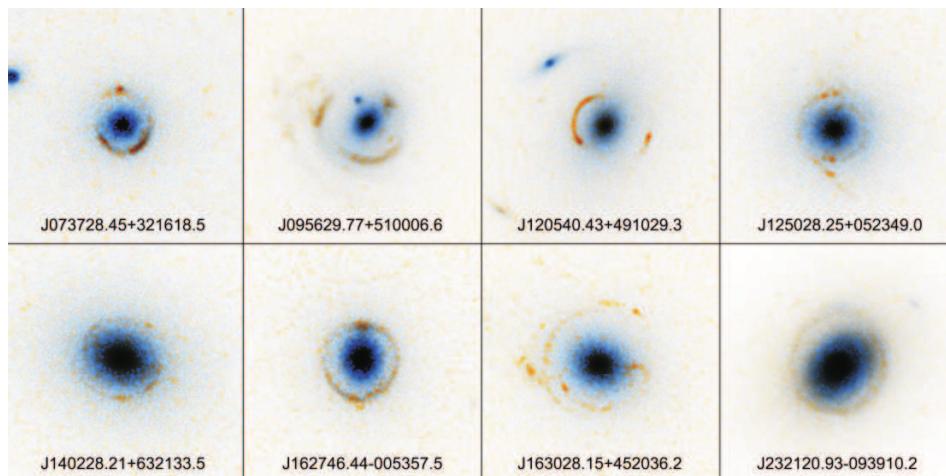
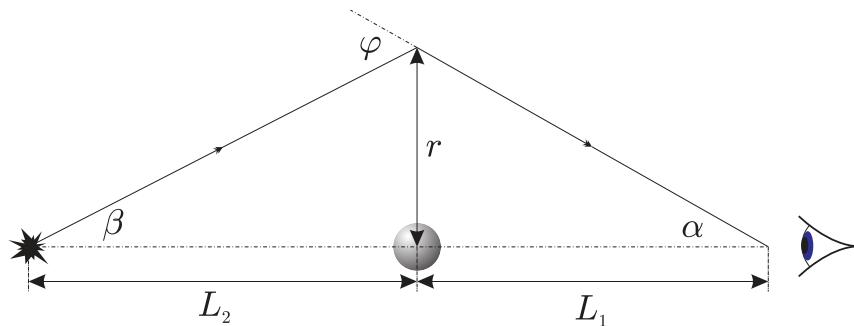
**L105 Gravitatsioonilääts** ★★★ Autor: Mihkel Kree, piirkonnavor, 2007, G 10  
Tähed väljunud kiired kõverduvad musta augu lähiümbruses (vt joonist).



Kujutise konstrueerimisel aga eeldatakse, et kiired on kogu tee otse liikunud. Et kiired jõuavad vaatlejani kõikjalt ümber musta augu, on kujutiseks ringjoon (eel-dusel, et täht on punkt).

Et silmani jõudvate kiirte jaoks kehtib  $r \ll L$  ning trajektoori kõverdumine toimub tähe lähiümbruses, võib vaadelda kiire teekonda lihtsustatult: sirge liikumine musta auguni, hetkeline nurga muutus musta augu juures ning edasi sirge tee vaatlejani (vt joonist). Joonisel arusaadavalalt on vertikaalskaala võrreldes horisontaalskaalaga oluliselt välja venitatud.

Järgnevalt leiate tähe nurkdiametri. Lihtsast geomeetriast järeltub, et  $\alpha + \beta = \varphi$ . Kaugused on suured ning nurgad väikesed, seega võime kasutada ligikaudseid valemeid  $\alpha = r/L_1$  ja  $\beta = r/L_2$ . Niisiis



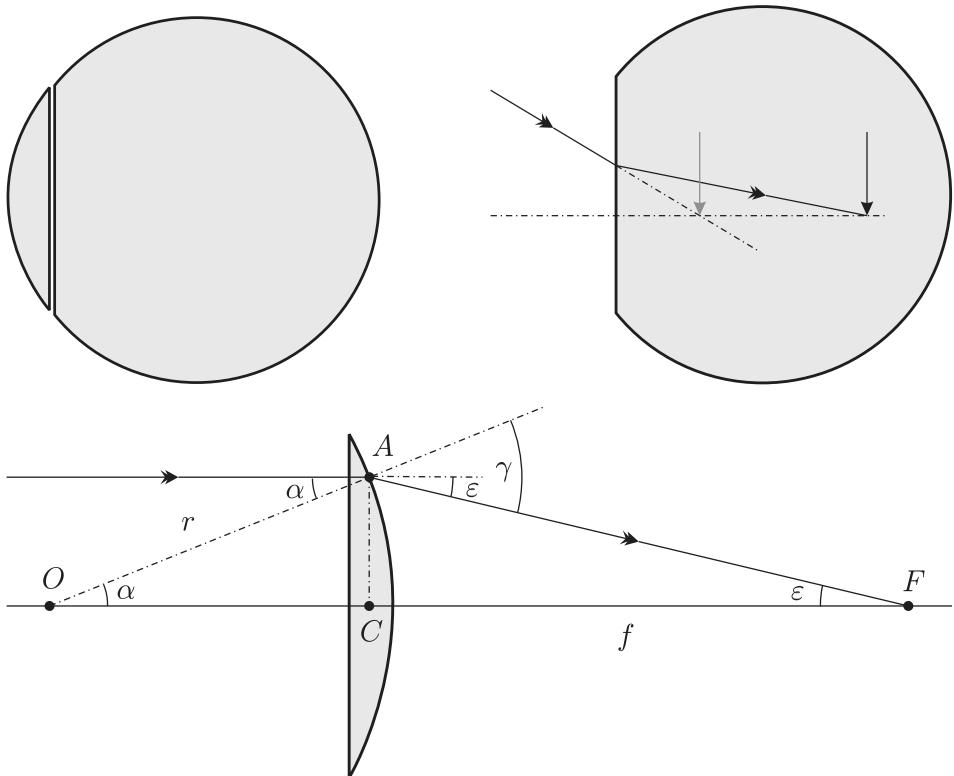
$$\frac{r}{L_1} + \frac{r}{L_2} = \frac{4GM}{c^2 r} \Rightarrow r = \sqrt{\frac{4GML_1 L_2}{c^2 (L_1 + L_2)}}.$$

Tähe kujutise nurkdiameeter on

$$\gamma = \frac{2r}{L_1} = \sqrt{\frac{4GML_2}{c^2 L_1 (L_1 + L_2)}}.$$

**L106 Akvaarium** ★★★★

Autor: Tundmatu autor, lahtine, 2005, G 10



Vaatleme sfäärilist akvaariumi kui õhukest tasakumerat läätse, mis on surutud tasase küljega vastu sirgeseinalist akvaariumi (vt jooniseid). Kasutades väiksteid nurkade lähendust on lihtne leida sellise õhukese läätse fookuskauguse  $f$  ( $f = |CF|$ ):

$$\gamma = \alpha n, \quad \varepsilon f = (\gamma - \alpha)f = \alpha r \quad \Rightarrow \quad f = \frac{r}{n - 1}.$$

Vee puhul

$$f = \frac{r}{1,3 - 1} \approx 3,3r.$$

Läätses näeme kala kujutist, mis tekib murdumisel akvaariumivees. See kujutis on  $n$  korda lähemal akvaariumi seinale, kui kala ise, st maksimaalne kaugus on

$$l_{\max} = \frac{2r}{n} \approx 1,5r,$$

mis on igal juhul väiksem, kui läätse fookuskaugus. Lääts tekitab sellest kujutisest omakorda kujutise, mille kauguse (läätsest)  $x$  saame läätsel valemist

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{l} - \frac{1}{x}.$$

On lihtne näha, et suurendus on kahe kujutise kauguste suhe:

$$\frac{1}{k} = \frac{l}{x} = 1 - \frac{l}{f},$$

seega suurendus on maksimaalne, kui  $l$  on maksimaalne:

$$\frac{1}{k_{\max}} = 1 - \frac{2(n-1)}{n} = \frac{2-n}{n} \Rightarrow k_{\max} = \frac{n}{2-n} \approx 1,86.$$

### L107 Kuup ★★★★☆

Autor: Jaan Kalda, lõppvoor, 2007, G 8

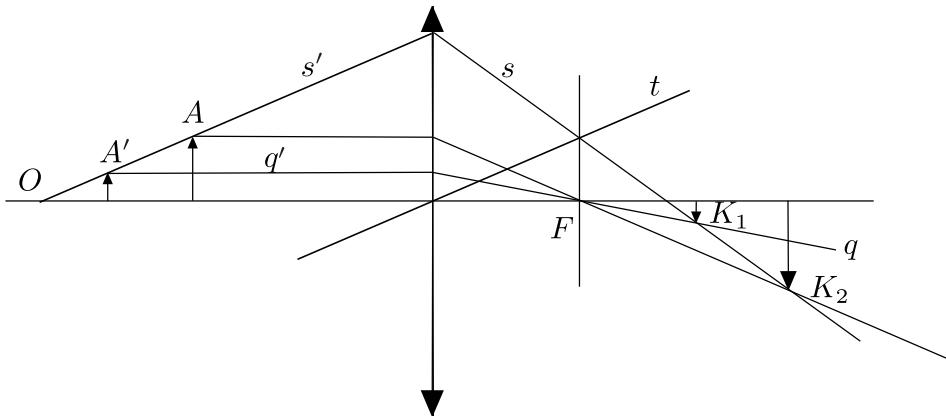
Välimine ringjoon on loomulikult kera välimine kontuur, tema raadius  $R_A$  on võrdne kera raadiusega foto mastaabis. Kerast eemal, piirkonnas  $D$ , näeb läbi kuubi põrandat, st piirkond  $D$  on valge. Piirkonnas  $A$  toimub täielik sisepeegeldumine kera pinnal, seega näeme me seal põranda peegeldust, mis on samuti valge. Mõõtmise teel võib veenduda, et piirkondade  $A$  ja  $B$  eraldusjoone raadius  $R_B$  on umbes  $\sqrt{2}$  korda väiksem  $R_A$ -st, st tegemist on põranda ja seinte eraldusjoone peegeldusega. Sestap on piirkond  $B$  kollane. Piirkondade  $B$  ja  $C$  eraldusjoon peab vastama täieliku sisepeegeldumise lõppemisele, st piirkonnas  $C$  on näha kera sisemust, mis on sinine, valge põranda taustal. Niisiis on piirkond  $C$  sinine. On lihtne näha, et täieliku sisepeegeldumise piirjuhul langemisnurga siinus on  $\sin \alpha = R_C/R_A = 1/n$ . Seega murdumisnäitaja  $n = R_A/R_C \approx 1,8$ .

### L108 Nõguspeegel ★★★★

Autor: Mihkel Kree, lõppvoor, 2007, G 9

Paneme tähele, et kõverustsenter  $O$ , objekt  $A$  ning kujutis  $A'$  kumerpeeglis asuvad samal sirgel. Seega, kui meil õnnestub leida sirge  $AA'$ , siis selle lõikepunkt optilise teljega annaks punkti  $O$ . Teisest küljest, kiir, mis läbib punkti  $A$  kujutist läätses,  $K_2$ , ja punkti  $A'$  kujutist,  $K_1$ , jätkub peale murdumist läätses sirgena  $s'$  ja läbib nii punkti  $A$  kui  $A'$ . Tänu sellele leiamegi sirge  $AA'$  ja punkti  $O$ .

Punkti  $A'$  leidmiseks konstrueerime esmalt fokaaltasandi  $F$ . Selleks leiame fokaaltasandis lebava punkti — sirge  $s$  lõikepunkt sirgega  $t$ , mis on paralleelne sirgega  $s'$  ja läbib läätse keskpunkti. Kujutisi  $K_1$  ja  $K_2$  ühendav sirge murdub nii, et selle pikenduse lõikepunkt optilise peateljega ongi otsitav kõverustsenter. Punkti  $A'$  leiame kui sirge  $s'$  lõikepunkt sirgega  $q'$ , mis peale murdumist läbib fookuse ja punkti  $K_1$  (sest  $K_1$  on  $A'$  kujutiseks).



### L109 Kärbes ★★★★

Autor: Aigar Vaigu, piirkonnnavoor, 2008, G 10

Olgu  $O$  pinna kõverusraadiuse keskpunkt ning  $K$  ja  $A$  vastavalt kärbs näiline ja tegelik asukoht. Allpool toodud joonis kujutab kärbsest alguse saanud kahe kiire  $AB$  ja  $AC$  edasist käiku. Kärbse näiline asukoht  $K$  vastab kärbsest alguse saanud murdunud kirite pikenduste lõikepunktile (joonisel  $KB$  ja  $KC$ ).

Arvestades väikeste nurkade korral kehtivat lähendust  $\tan \alpha \approx \sin \alpha \approx \alpha$ , võime murdumisseaduse kirjutada kujul:

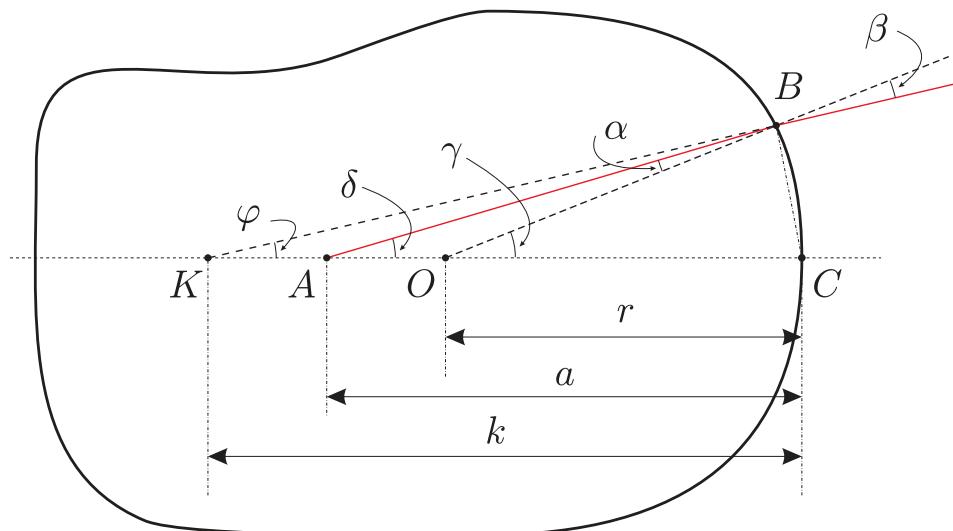
$$\frac{\sin \beta}{\sin \alpha} = n \approx \frac{\beta}{\alpha}$$

Kolmnurkade  $\triangle OCB$ ,  $\triangle ACB$  ja  $\triangle KCB$  kaudu avaldame kaare  $\widehat{BC}$

$$\gamma r = \delta a = \varphi k = \widehat{BC}.$$

Kolmnurkade  $\triangle KAB$  ja  $\triangle AOB$  kaudu avaldame nurga  $\angle BOC$

$$\alpha + \delta = \gamma \quad \text{ja} \quad \beta + \varphi = \gamma.$$



Saame

$$\begin{aligned} (\gamma - \alpha)a &= \gamma r \Rightarrow \gamma(a - r) = \alpha a \\ (\gamma - \beta)k &= \gamma r \Rightarrow \gamma(k - r) = \beta k. \end{aligned}$$

Paneme tähele, et need kaks võrrandit oleks saanud otse siinusteoreemist kolmnukade  $\triangle AOB$  ja  $\triangle KOB$  arvestusega, et tänu nurkade  $\varphi$ ,  $\delta$  ja  $\gamma$  väiksusele  $|KB| \approx k$  ja  $|AB| \approx a$ .

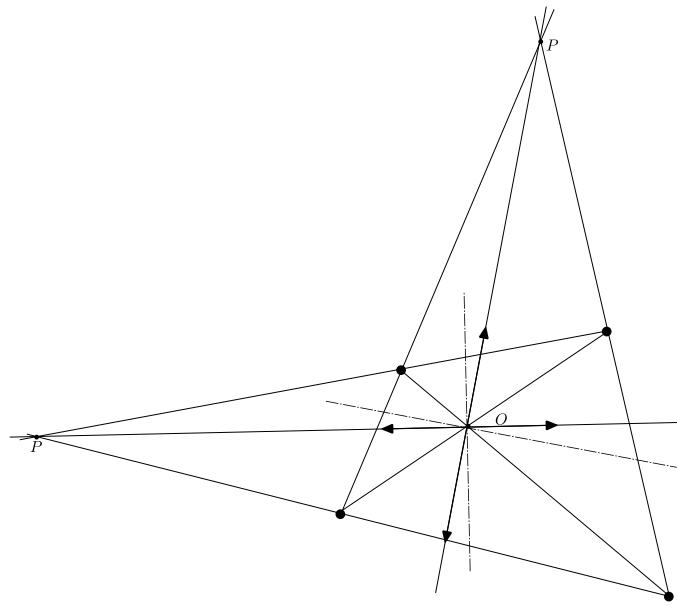
Arvestades, et  $\beta/\alpha \approx n$ , saame

$$\frac{a - r}{k - r} = \frac{a}{nk} \Rightarrow a = \frac{n rk}{nk - k + r} = \frac{1,6 \cdot 3 \cdot 5}{1,6 \cdot 5 - 5 + 3} = 4 \text{ mm.}$$

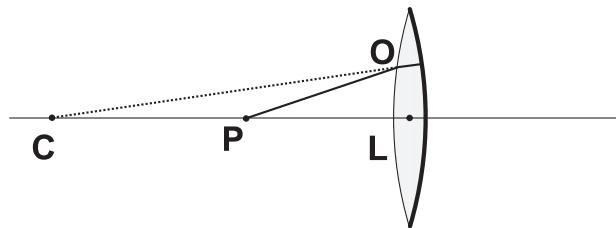
### L110 Punktallikad ★★★★

Autor: Jaan Kalda, lõppvoor, 2010, G 9

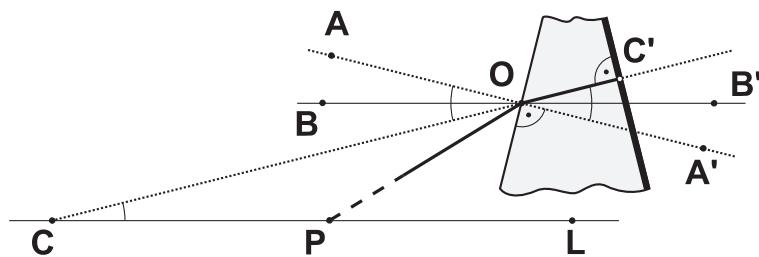
Allikat ja kujutist ühendav sirge läheb läbi läätse keskpunkti ning see punkt peab jääma allika ja kujutise vahelle, sest kujutis on töeline. Seetõttu saame läätse keskpunkti  $O$  leida kui löikude  $S_1S'_1$  ning  $S_2S'_2$  lõikepunkt, kus  $S_1$  ja  $S_2$  on allikad ning  $S'_1$  ja  $S'_2$  on vastavad kujutised. Et lõikepunkt tekiks, peavad  $S_1$  ja  $S'_1$  paiknema diagonaalselt. Edasi paneme tähele, et sirge kujutis on sirge, kusjuures need kaks sirget lõikuvad läätse tasandis. Et sirge  $S_1S_2$  kujutis on  $S'_1S'_2$ , siis nende lõikepunkt  $P$  võimaldab meil leida juba läätse tasandi  $OP$ ; optiline peatelg on punktist  $O$  tõmmatud ristsirge Läätse tasandi seisukohast pole oluline, kumb sirgetest ( $S_1S_2$  või  $S'_1S'_2$ ) on kujutis ja kumb originaal. Seetõttu tekib meil kaks oluliselt erinevat võimalust: kas need kaks sirged paiknevad ligikaudu horisontaalselt või ligikaudu vertikaalselt, vt joonist.



**L111 Optiline süsteem ★★★★** Autor: Andreas Valdmann, lõppvoor, 2011, G 8



Iga süsteemile langev valguskiir murdub läätse eesmisel pinnal, peegeldub tagumisel pinnal ja murdub uuesti. Lahenduse lihtsustamiseks vaatleme olukorda, kus kiirte käik on sümmeetriline. Sel juhul langeb murdunud kiir peegelpinnale risti, peegeldub otse tagasi ja teine murdumine on esimesega identne. Süsteemi sisenev ja sealt väljuv kiir lõikavad optilist peatelge ühes ja samas punktis  $P$ . Seal asuva punktobjekti kujutis langeb kokku objekti endaga.



Võtame vaatluse alla teljelähedase kiire  $PO$ , mille korral võime nurga  $\angle LPO$  lugeda väikeseks. Lõik  $OC'$  on optilise peateljega veelgi väiksema nurga all ja punktide  $O$  ning  $C'$  kaugus optilisest peateljest on ligikaudu võrdne. Uurime lähemalt läätse õhukest kihti, mille kõrgus on palju väiksem kõverusraadiusest  $r$ . Sel juhul võime kõverpinnad asendada nende puutujatega. Pindade ristsirged on joonisel tähistatud punktiirjoonega ning need lõikavad optilist peatelge läätse kõverustsentrites. Optiline kõrvaltelg  $BB'$  on parallelna optilise peateljega ning

$$\angle LCO = \angle B'OC' = \angle A'OB' = \angle BOC = \angle AOB \equiv \phi$$

ja murdumisnurk  $\angle A'OC' = 2\phi$ . Langemisnurgaks on  $\angle AOP$ . Murdumisseaduse rakendamisel kasutame väikese nurga lähindust

$$\frac{\sin(\angle AOP)}{\sin(\angle A'OC')} = n \approx \frac{\angle AOP}{\angle A'OC'},$$

millega

$$\angle AOP = n\angle A'OC' = 2n\phi.$$

Järgmisteks arvutusteks on vaja teada nurka

$$\angle LPO = \angle BOP = \angle AOP - \angle AOB = 2n\phi - \phi = (2n - 1)\phi.$$

Kuna lääts on õhuke ja punkt  $O$  ei ole kaugel optilisest peateljest, siis  $|CO| \approx |CL|$  ja  $|PO| \approx |PL|$  ning  $|CL| = r - \frac{d}{2} \approx r$ , kus  $d$  on läätse paksus keskkohas. Jällegi väikese nurga lähindust kasutades saame

$$|LO| = \angle LCO|CL| = \angle LPO|PL|,$$

millega

$$|PL| = \frac{\angle LCO}{\angle LPO}|CL| = \frac{\phi}{(2n - 1)\phi}r = \frac{r}{2n - 1}.$$

Viimaseks rakendame läätse valemit

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{k} = \frac{1}{f}$$

ja seost

$$|PL| = a = k = \frac{r}{2n - 1}$$

ning saame, et

$$f = \frac{|PL|}{2} = \frac{r}{2(2n - 1)}.$$

**L112 Sähvatus ★★★★**

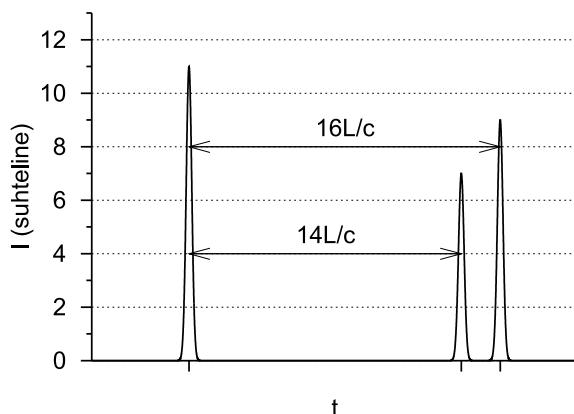
Autor: Mihkel Kree, lõppvoor, 2006, G 9

Alustuseks paneme tähele suurepärast seost arvandmetes. Nimelt ühtivad peeglite fookused, sest peeglite vahemaa on võrdne peeglite fookuskauguste summaga. Nõguspeegli fookuskaugus on teatavasti pool raadiusest. Paralleelne kiirtekimp koondub peegli fookuses. Seepärast jäab paralleelne kiirtekimp antud süsteemis pärast kahekordset peegeldumist ikkagi paralleelseks. Kuid paneme tähele, et kiire laius väheneb kaks korda, sest ühe läätse fookuskaugus on kaks korda suurem teise omast.

Valguskiir jäab niisiis peeglite vahele pendeldama seniks, kuni tema kaugus teljest on väiksem kui  $d_0/2 = 0,5 \text{ mm}$ , kusjuures esialgne kauguste vahemiks, mis jõuab peegliteni on  $d_2/2 = 48 \text{ mm}$  kuni  $d_1/2 = 80 \text{ mm}$ , ehk pilu läbimiseks peab valgusvihk koonduma  $d_2/d_0 = 96$  kuni  $d_1/d_0 = 160$  korda. Pärast  $n$ -kordset edasi-tagasi peegeldumist väheneb kiire kaugus teljest  $2^n$  korda. Paneme tähele, et 128 on kahe aste ( $2^7 = 128$ ). Seepärast väljub peeglike langenud kiir pilust kahes järgus: esimene osa pärast seitsmendat edasi-tagasi liikumist ning teine osa pärast kaheksandat. Üks edasi-tagasi liikumine peeglite vahel tekib ajalise viivise  $2L/c$ .

Kumerläätsel langev paralleelne kiirtekimp koondub fookuses, kusjuures fookuseni jõudmise aeg ei sõltu kiire asukohast (teljelähedased kiired läbivad paksema klaasikihi kui kaugemad kiired, klaasi läbib valgus aga aeglasemalt). Niisiis on fookuses oodata kolme impulsi: peegli ümbert tulnud osa, pärast seitset edasi-tagasi peegeldumist tulnud osa ning pärast kaheksat. Nende impulside ajaline vahe on vastavalt  $14L/c$  ja  $2L/c$ .

Nüüd tuleb veel leida impulside suhtelised intensiivsused, mis on võrdsed vastavate röngaste pindaladega esialgne kiire ristlõikes. Esimese peegli läbimõõdust väiksem osa ei läbige süsteemi. Kõige välimise rönga pindala on võrdeline arvuga  $192^2 - 160^2$ , järgmissele impulsile vastav rönga pindala  $128^2 - 96^2$  ning viimasele impulsile vastava rönga korral  $160^2 - 128^2$ . Need arvud suhtuvad kui:  $32^2(6^2 - 5^2) : 32^2(4^2 - 3^2) : 32^2(5^2 - 4^2) = 11 : 7 : 9$ .



**L113 Autod ★**

Autor: Oleg Košik, piirkonnavor, 2006, G 1

Vaatleme jalgratturi liikumist talle vastu sõitvate autode suhtes. Tema kiirus autode süsteemis on  $v = v_1 + v_2 = 120 \text{ km/h}$ . Seega katavad  $n_0 = 20$  autot vahemaa  $vt_0 = 10 \text{ km}$  ning terve maantee ulatuses on autosid

$$n = n_0 \frac{s}{vt_0} = 360.$$

**L114 Ummik ★**

Autor: Jaan Kalda, piirkonnavor, 2007, G 2

Lõigul  $C$  on teatud punkti ajalühikus läbivate autode arv  $N_C$  võrdne lõikude  $A$  ja  $B$  vastavate arvude summagaga:  $N_C = N_A + N_B$ . Olgu autode vahemaa  $a$  ja vaadeldav ajavahemik  $\tau$ . Siis  $N_i = v_i \tau / l$ , ehk

$$\frac{v_C \tau}{l} = \frac{v_A \tau}{l} + \frac{v_B \tau}{l} \Rightarrow v_C = v_A + v_B.$$

Et  $v_B = L_B / t_B$ , siis toodud arvude põhjal leiate

$$v_B = \frac{3 \text{ km}}{36 \text{ min}} = 5 \text{ km/h}$$

ning seega  $v_C = 8 \text{ km/h}$ . Lõpetuseks,  $t_A = L_A / v_A = 20 \text{ min}$  ja  $t_C = L_C / v_C = 15 \text{ min}$ . Niisiis kulub autol aega  $T = t_A + t_C = 35 \text{ min}$ .

**L115 Auto ★**

Autor: Tundmatu autor, lahtine, 2008, G 1

Olgu  $s$  läbitud vahemaa,  $a$  auto kiirendus ning  $\tau$  aeg, millega auto läbis esimese  $4/5$  teest. Kehtivad võrdused

$$s = \frac{at^2}{2}, \quad \frac{4}{5}s = \frac{a\tau^2}{2}.$$

Siihul  $\tau = 2t/\sqrt{5} \approx 13,4 \text{ s}$ . Seega otsitav ajavahemik on  $t - \tau \approx 1,6 \text{ s}$ .

**L116 Ratturid ★**

Autor: Tundmatu autor, lahtine, 2009, G 1

Olgu esimese ratturi sõiduaeg tundides  $t$ , siis teise ratturi sõiduaeg on  $t + 1$  ning kolmanda ratturi oma  $t + 2$ . Et esimene ja teine rattur sõitsid läbi sama pika vahemaa, saame võrrandi

$$30t = 20(t + 1),$$

kust saame  $t = 2$  tundi. Järelikult linnade  $A$  ja  $B$  vaheline kaugus on  $s = 302 = 60 \text{ km}$  kilomeetrit. Kolmanda ratturi keskmise kiirus oli seega

$$v_3 = \frac{s}{t + 2} = 15 \text{ km/h}.$$

### L117 Veok ★

Autor: Valter Kiisk, piirkonnnavoor, 2005, G 1

Tähistagu  $x$  teepikkust, mille sõiduauto läbib möödasöidi lõpuks (vt joonist) ja olgu  $t$  möödasöidi kuluv ajavahemik. Vahemaa  $x$  läbib sõiduauto ühtlase kiirendusega  $a$ , alustades algkiirusega  $v_1$ , seega

$$x = v_1 t + \frac{at^2}{2}.$$

Teiselt poolt, veoauto liikumise põhjal

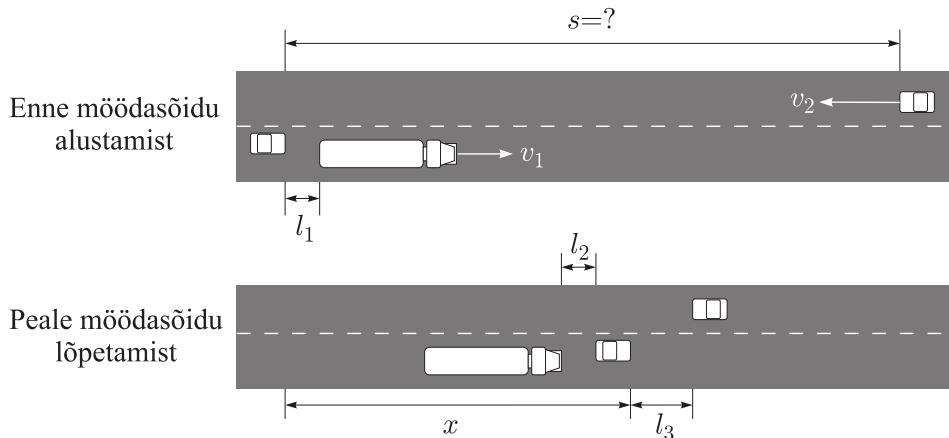
$$x = v_1 t + L_1 + L_2 + l_1 + l_2.$$

Kahe viimase avaldise võrdsustamisel saame

$$\frac{at^2}{2} = L_1 + L_2 + l_1 + l_2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2(L_1 + L_2 + l_1 + l_2)}{a}} \Rightarrow$$

$$s = v_1 t + L_1 + L_2 + l_1 + l_2 + v_2 t + l_3$$

$$s = (v_1 + v_2) \sqrt{\frac{2(L_1 + L_2 + l_1 + l_2)}{a}} + L_1 + L_2 + l_1 + l_2 + l_3 \approx 349 \text{ m}$$



#### Alternatiivne lahendus

Kasutame möödasöidi aja leidmiseks veoauto taustsüsteemi, kus möödasöitva auto algkiirus on  $u = 0$ :

$$\frac{at^2}{2} = L_1 + L_2 + l_1 + l_2.$$

Selle aja jooksul lähenevad veoauto ja vastutulev auto vahemaa

$$s_1 = (v_1 + v_2)t$$

võrra, mis tähendab, et möödasöitja algvahemaa on

$$s = s_1 + L_1 + L_2 + l_1 + l_2 + l_3,$$

st (asendades  $s_1$  ja  $t$  eelnevatest võrranditest)

$$s = (v_1 + v_2) \sqrt{\frac{2(L_1 + L_2 + l_1 + l_2)}{a}} + L_1 + L_2 + l_1 + l_2 + l_3 \approx 349 \text{ m}.$$

### L118 Rongiõnnetus ★

Autor: Oleg Košik, piirkonnnavoor, 2011, G 4

Teisendades kiirusühikuid, saame  $v_1 = 17,5 \text{ m/s}$  ning  $v_2 = 5 \text{ m/s}$ . Olgu  $t$  aeg, mis möödus kokkupõrkeni. Kaubarong läbis teepikkuse  $s_1 = v_1 t + \frac{1}{2} a_1 t^2$ . Elektrirong läbis teepikkuse  $s_2 = v_2 t + \frac{1}{2} a_2 t^2$ . Kuna  $s = s_1 + s_2$ , siis

$$s = (v_1 + v_2) t + \frac{1}{2} (a_1 + a_2) t^2.$$

Lahendades ruutvõrrandi, leiate  $t = 109 \text{ s}$ . Seega kaubarongi kiirus oli kokku-põrke hetkel  $v_k = v_1 + a_1 t = 6,6 \text{ m/s}$  ehk  $24 \text{ km/h}$ , elektrirongi oma  $v_e = v_2 + a_2 t = 21,4 \text{ m/s}$  ehk  $77 \text{ km/h}$ .

### L119 Sonar ★★

Autor: Oleg Košik, piirkonnnavoor, 2006, G 3

Sonarist saadetakse välja heli laine pikkusega  $\lambda_1 = v_h/f_1$ . Helilaine läheneb laevale kiirusega  $v_h - v$ , seega jõuab laevani helisignaal sagedusega

$$f_L = \frac{v_h - v}{\lambda_1} = f_1 \frac{v_h - v}{v_h}.$$

Peegeldudes laevalt tagasi liigub helisignaal laeva suhtes kiirusega  $v_h + v$ . Kuna laevalt peegeldunud kirt saab vaadelda kui saanud alguse laeva pardalt olevalt signaaliallikalt sagedusega  $f_L$ , on signaali laine pikkus  $\lambda_2 = (v_h + v)/f_L$ . Sonari vastuvõtjasse rannikul jõuab signaal sagedusega

$$f_2 = \frac{v_h}{\lambda_2} = f_L \frac{v_h}{v_h + v} = f_1 \frac{v_h - v}{v_h + v}.$$

Avaldame viimasesest võrdusest  $v$ :

$$v = v_h \frac{f_1 - f_2}{f_1 + f_2}.$$

*Alternatiivne lahendus*

Kasutame Doppleri valemit

$$f_2 = f_1 \frac{1 + v_2/v_h}{1 + v_1/v_h},$$

kus saatja ja vastuvõtja lähenevad üksteisele kiirustega vastavalt  $v_1$  ja  $v_2$ .

Kui signaal jõub rannikult laevani, siis antud olukorras on saatja kiirus  $v_1 = 0$  ja vastuvõtja kiirus  $v_2 = -v$ , sest vastuvõtja (laev) kaugeneb saatjast. Doppleri valem saab sel juhul kuju

$$f_L = f_1 \frac{v_h - v}{v_h},$$

kus  $f_l$  on laevani jõudva signaali sagedus.

Olukorras, kus signaal läheb laevalt tagasi rannikule, on saatja kiirus  $v_1 = -v$ , sest saatja (laev) kaugeneb vastuvõtjast (rannikult). Vastuvõtja kiirus on aga  $v_2 = 0$ . Vastavalt Doppleri valemile jõub sonari vastuvõtjasse rannikul signaal sage-dusega

$$f_2 = f_L \frac{v_h}{v_h + v} = f_1 \frac{v_h - v}{v_h + v}.$$

Avaldame viimasesest võrdusest  $v$ :

$$v = v_h \frac{f_1 - f_2}{f_1 + f_2}.$$

*Märkus.* kuivõrd iga realistliku laeva kiiruse puhul  $v \ll v_h$ , siis on lubatud kasutada ligikaudset Doppleri valemit

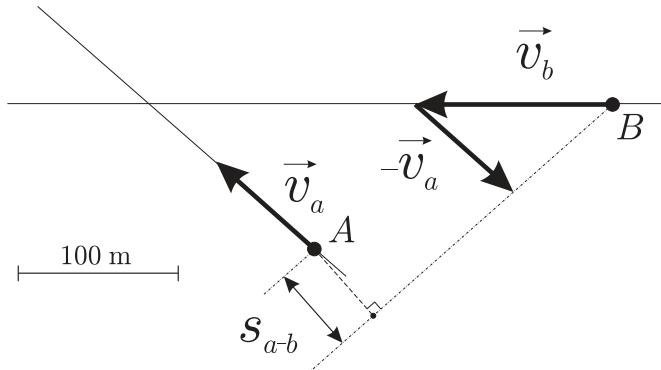
$$f \approx f_0 \left( 1 + \frac{v}{v_h} \right).$$

Sama lähendust saab kasutada ka esimese lahenduse puhul.

### L120 Autod ★★

Autor: Jaan Kalda, piirkonnavoor, 2008, G 2

Kanname joonisele autode  $A$  ja  $B$  kiirusvektorid suvalises mõõtkavas (st vektorite moodulid suhtuvad nagu 40:60). Leiame nende vektorite vahe, see on autode suheline kiirus. Tõmmates ühe auto juurest selle vektori sihilise sirge leiame tema trajektoori teise autoga seotud süsteemis. Teise auto kaugus sellest sirgest annab-ki vastuse. Mõõtkava arvestamine ja mõistlik numbriline tulemus annab 60 m.



**L121 GPS ★★**

Autor: Jaan Kalda, lõppvoor, 2009, G 5

Ajahetkel  $t_1 = 75$  s tervisesportlane veel jooksis, sest eelmise perioodi keskmise kiirus polnud veel alanenud ( $v_0 = 11$  km/h); et ajahetkeks  $t_2 = 90$  s oli keskmise kiirus langenud kiiruseni  $v_1 = 8$  km/h, siis oli ta seisnud juba ajavahemiku  $\tau_1$ , kus  $v_1 T = v_0(T - \tau_1)$  ning  $T = 15$  s. Seega,

$$\tau_1 = \left(1 - \frac{v_1}{v_0}\right) T.$$

Analoogselt, peale ajahetke  $t_2$  seisits sportlane veel ajavahemiku  $\tau_2$ , kus  $v_2 T = v_3(T - \tau_2)$  ning  $v_2 = 3$  km/h ja  $v_3 = 14$  km/h. Seega,

$$\tau_2 = \left(1 - \frac{v_2}{v_3}\right) T$$

ning kogu peatusaeg

$$\tau = \tau_1 + \tau_2 = T \left(2 - \frac{v_1}{v_0} - \frac{v_2}{v_3}\right) \approx 16 \text{ s.}$$

**L122 Tsunami ★★★**

Autor: Jaan Kalda, lõppvoor, 2005, G 6

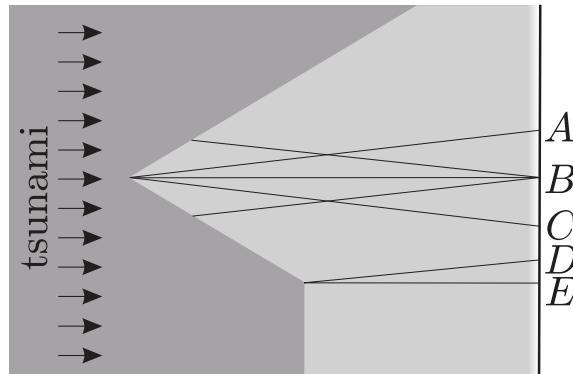
Laine levik toimub geomeetrilise optika seadustesse kohaselt: astangu juures on laine langemisnurga ja murdumisnurga suhe

$$\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{\sqrt{gh_1}}{\sqrt{gh_2}} = \sqrt{\frac{h_1}{h_2}} \quad \Rightarrow \quad \alpha_2 = \arcsin \left( \sin \alpha_1 \sqrt{\frac{h_2}{h_1}} \right).$$

Seal astangu osas, kus langemisnurk on  $0^\circ$ , murdumist ei toimu. Seal aga, kus  $\alpha_1 = 60^\circ$ , on murdumisnurk

$$\alpha_2 = \arcsin \left( \sin 60^\circ \sqrt{\frac{3200}{5000}} \right) \approx 44^\circ.$$

Seega kaldub laine esialgsest levimissuunast kõrvale nurga  $\beta = \alpha_1 - \alpha_2 = 16^\circ$  võrra. Niisiis jõuab rannalõigule  $AC$  kaks lainet ning rannalõigule  $DE$  ei jõua üldse lainet. Punkt  $B$  jõuavad mõlemad lained üheaegselt (sümmetria tõttu) ning seal ongi laine kõige kõrgem.



### L123 Hävituslennuk ★★★

Autor: Tundmatu autor, lahtine, 2011, G 7

Olgu hetkel, mil Mati käivitab stopperi lennuki horisontaalsuunaline kaugus temast  $x_1$ . Tähistame lennuki lennukõrguse  $H$ , posti pikkuse  $h$  ja kauguse  $L$ . Tekitib kaks kujutletavat täisnurkset sarnast kolmnurka, mille ühise nurga tipus asub Mati. Nendest saame (kasutades eeldust, et ilmselt  $l \ll H$ ):

$$\frac{H - l}{x_1} \approx \frac{H}{x_1} = \frac{h - l}{L}.$$

Kui lennuk on jõudnud üle Mati pea, jõuab temani lööklaine hetkel, mil lennuki horisontaalkaugus  $x_2$  Matist on

$$x_2 = \frac{H}{\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{H}{\tan\left(\arcsin\left(\frac{u}{v}\right)\right)} = \frac{H}{u} \sqrt{v^2 - u^2}.$$

Olgu  $\tau$  mõõdetud aeg. Stopperi käivitamise hetkest seiskamiseni liikus lennuk vahemaa

$$x_1 + x_2 = H \left( \frac{\sqrt{v^2 - u^2}}{u} + \frac{L}{h - l} \right) = v\tau \Rightarrow H = \frac{v\tau}{\left( \frac{\sqrt{v^2 - u^2}}{u} + \frac{L}{h - l} \right)} \approx 1630 \text{ m.}$$

### L124 Fotograaf ★★★★

Autor: Jaan Kalda, lõppvoor, 2011, G 6

Olgu pilu laius  $d$ , katiku kiirus  $u$  ja piisa kujutise kiirus sensori tasandis  $v$ . Katiku taustsüsteemis liigub piisa kujutis kiirusega  $u \pm v$ ; kui fotoaparaat on päripidi, siis tuleb võtta märk „+“ ja kui tagurpidi, siis „–“. Seega on piisa järel tekkimise aeg  $d/|u \pm v|$  ning järel pikkus  $l = vd/|u \pm v|$ . Olgu  $u \geq v$ ; siis

$$l_1 = \frac{vd}{u + v}, \quad l_2 = \frac{vd}{u - v}.$$

Jagades teise võrrandi esimesega saame

$$\frac{u+v}{u-v} = \frac{l_2}{l_1} = \frac{5}{3},$$

millega

$$3u + 3v = 5u - 5v,$$

ehk

$$u = 4v.$$

Kui fotoaparaat on portreeasendis, siis viibib piisa kujutis pilus ajavahemiku  $d/u$  jooksul ja jälje pikkus on seega

$$l_3 = vd/u.$$

Esimese võrrandiga läbi jagades leiate, et  $l_3/l_1 = 1 + \frac{v}{u} = \frac{5}{4}$  ning

$$l_3 = \frac{5}{4}l_1 = 150 \text{ pikselit.}$$

Kui  $u < v$ , siis muutub ainult teine võrrand,

$$l_2 = \frac{vd}{v-u},$$

mistõttu  $3u + 3v = 5v - 5u$  ja  $u = v/4$ , mistõttu

$$l_3 = 5l_1 = 600 \text{ pikselit.}$$

*Märkus.* Ülesande teksti põhjal on see üks kahest võimalikust vastusest; reaalselt, arvestades tüüpilist katku liikumiskiirust ( $18 \text{ mm läbimisaeg } \frac{1}{125} \text{ s} \implies u = 2,25 \text{ m/s} \implies v = 4u = 9 \text{ m/s}$ ) on siiski üsna raske saavutada, et  $v = 4u$ : pildistamine peaks toimuma ohtlikult lähedalt. Kui joa kõrgus oleks nt 100 m, siis vablangenud piisa kiirus oleks ca 44 m/s, mistõttu pildistamiskauguse ja objektiivi fookuskauguse suhe (st suurendustegur) tuleks  $44/9 \approx 5$  ning isegi teleobjektiivi (nt  $f = 300 \text{ mm}$ ) korral peaks fotograaf olema joast vaid 1,5 m kaugusel.

*Märkus 2.* Eeldusest, et „pilu laius on  $d$ “ võib jäada mulje, justkui eeldanuks me vaikimisi, et sensor ei jõua säritamise ajal täielikult avaneda. Ometigi kehtib lähendus ka siis, kui säriaeg on nii pikk, et sensor jõuab täielikult avaneda: piltlikult võib ette kujutada, et ikkagi mölemad kardinad liiguvad samaaegselt, kuid pilu laius on suurem sensori kõrgusest, st esimene kardin jõuab sensori kohalt eemale minna enne teise kardina saabumist.

### L125 Laev ★★★

Autor: Tundmatu autor, lõppvoor, 2007, G 5

Näitame, et laev peab sõitma nii, et voolukiirused stardihetkel  $t_s$  ja finišihetkel  $t_f$  on võrdsed,  $v(t_s) = v(t_f)$ . Teeme seda vastuväiteliselt. Vaatleme konkreetse mõttes liikumist  $B$  suunas, mil laeva kiirus kalda suhtes on  $v_0 + v(t)$ . Sellisel juhul on läbitud vahemaa  $L$  graafiku  $v(t)$  ja joone  $v = -v_0$  vahelise piirkonna pindala. Nihutame stardi ja finišiaega väikese ajavahemiku  $\Delta t$  vörra. Läbitav vahemaa muutub seejuures  $\Delta t(v_f - v_s) > 0$ , st sama aja jooksul läbitud vahemaa kasvab saades suuremaks  $L$ . Seega saaks sõideaega vähendada ning stardihetk polnud optimaalne.

Eelpoolselgitatud tingimustele (stardi- ja finišihetke kiirused on võrdsed, graafiku ja joone  $v = -v_0$  vaheline pindala võrdub 20 km-ga) vastavad stardiajad punktist  $A$  22.20 ja punktist  $B$  04.20.

### L126 Müra ★★★

Autor: Siim Ainsaar, lahtine, 2009, G 10

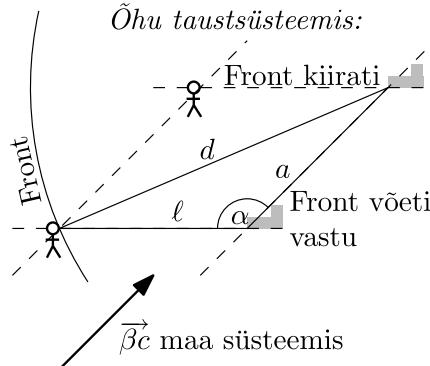
Õhu tastsüsteemis on helilainefronnid kiirusega  $c$  kasvava raadiuse ja paigaloleva keskmega poolsfäärid. Helivõimsus jaotub ühtlaselt üle terve frondipinna, seeaga on tajutav võimsus pöördvõrdeline frondi pindalaga ehk pöördvõrdeline frondi raadiuse ruuduga. Lisaks on võimsus ka võrdeline frontide vastuvõtmise sagedusega ehk võrdeline helisagedusega, aga nagu peagi leiame, on sagedus konstant. Õhu tastsüsteemis liiguvalt nii mat-

kaja kui ka jaam vastu esialgsele tuule suunale kiirusega  $\beta c$ . Järelikult kui front oli vastuvõtmise hetkeks raadiusega  $d = ct$ , siis selle kiirgamise algepunkt oli liikunud jaama suhtes alltuult kaugusele  $a = (\beta c)t = \beta d$ . Et see kaugus on kõigile frontidele ühesugune, on sama ka frontide teeloleku aeg ning aeg kahe frondi kiirgamise vahel võrdub ajaga nende vastuvõtmise vahel. Seega helisagedus ei muudu. Olgu jaama kaugus  $\ell$ . Rakendame tekkinud kolmnurgale koosinusteoreemi:

$$d^2 = a^2 + \ell^2 - 2a\ell \cos \alpha.$$

Kuna  $x = \left(\frac{\ell}{d}\right)^2$  ja  $\cos 135^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ , saame  $\sqrt{x}$  leidmiseks ruutvõrrandi, kusjuures  $\ell$  taandub välja (karakteristlik pikkusmõõde puudub).

$$\begin{aligned} \frac{\ell^2}{x} &= \frac{\beta^2 \ell^2}{x} + \ell^2 + \frac{\sqrt{2}\beta\ell^2}{\sqrt{x}} \\ x + \sqrt{2}\beta\sqrt{x} + \beta^2 - 1 &= 0 \\ x = \left( \frac{-\sqrt{2}\beta \pm \sqrt{2\beta^2 - 4\beta^2 + 4}}{2} \right)^2 &= \frac{(-\beta \pm \sqrt{2-\beta^2})^2}{2} = 1 \mp \beta\sqrt{2-\beta^2}. \end{aligned}$$



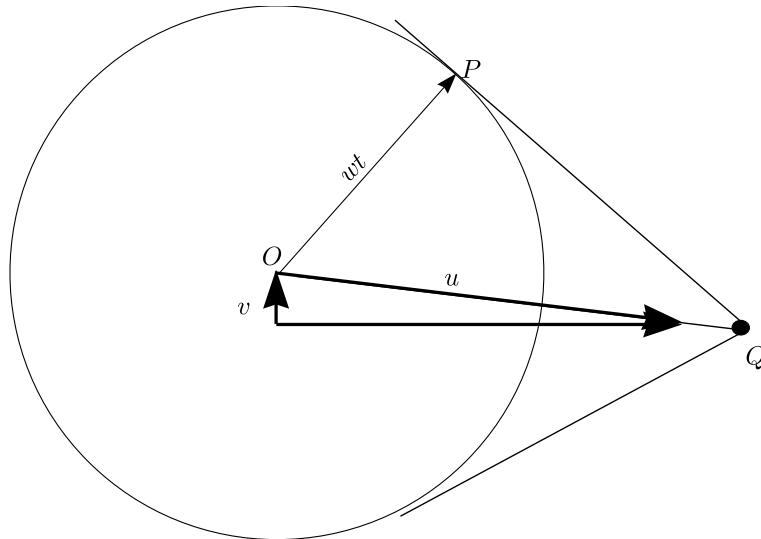
Heli jäab vaiksemaks, mistõttu  $x < 1$  ja peame valima miinusmärgiga lahend

$$x = 1 - \beta \sqrt{2 - \beta^2}.$$

### L127 Kaater ★★★★

Autor: Jaan Kalda, lõppvoor, 2009, G 8

- a)** Veega seotud taustsüsteemis liiguval lained paadi trajektoori suhtes sümmeetriliselt. Seega, veega seotud taustsüsteemis on paadi trajektoor lainetest moodustatud nurga poolitaja. Paadi kiirusest  $\vec{u}$ , jõe voolukiirusest  $\vec{v}$  ja paadi kiirusest maa suhtes moodustub kiiruste kolmnurk, vt joonis. Joonisel mõõdame selle kolmnurga teravama nurga siinuse,  $\sin \alpha = v/u = 0,26$ , milles  $v = 1,8 \text{ m/s}$ .

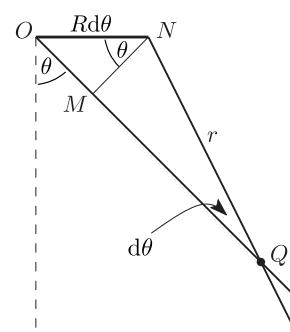


- b)** Kui paat tekitas teatud punktis häirituse, siis levis see ajaga  $t$  kaugusele  $wt$  (nähtavaks paadilaineks on selliste ringide mähisjoon), paat aga liikus kaugusele  $ut$ . Seega leiame jooniselt pikkuuste suhte abil  $w/u = |OP|/|OQ| = 0,64$ , milles  $w = 4,5 \text{ m/s}$ . Järelkult on vee sügavus  $h = w^2/g = 2 \text{ m}$ .

### L128 Kodarad ★★★★

Autor: Tundmatu autor, lahtine, 2011, G 10

- Kodara antud punkt näib kujutisel terav, kui selle kiirusvektor on suunatud pikki kodar, st antud punktis kodar ei liigu enese ristsihis. Olukorda võib selgitada juuresoleva joonise abil. Olgu  $R$  ratta raadius ja olgu selle keskpunkt  $O$ . Kui kodara pöördenurk on  $\theta$  ning see nurk muutub pildistamise jooksul nurga  $d\theta$  võrra, siis  $O$  on läbinud teatud vahemaa ( $R d\theta$ ), aga kodar on samuti pöördunud sama nurga ( $d\theta$ ) võrra. Joonisel on näha, et uuel ja vanal koda-ra asendil on üks ühine punkt, olgu see punkt  $Q$ . Nii

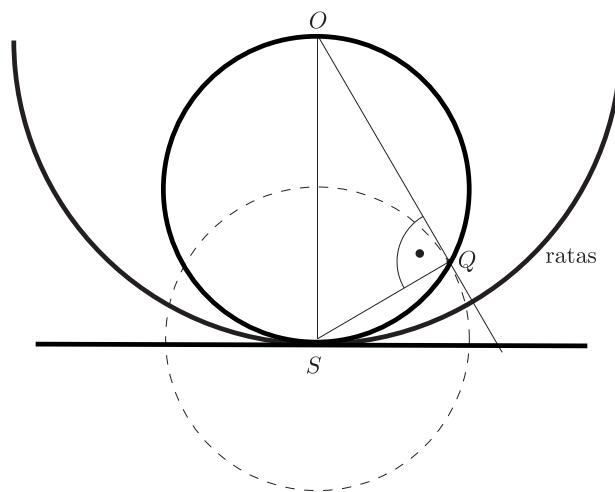


pildistamise alg- kui ka lõpphetkel asus selles punktis kodar, mistõttu kujutisel jäab see punkt selgelt näha (erinevalt teistest punktidest, kus kodar viibis vaid lühiajaliselt).

Kasutades eeltoodud joonist (kus tähistasime  $OQ = r$ ) võime avaldada lõigu  $MN$  pikkuse kahel viisil:  $R d\theta \cos \theta = r d\theta$ , kus paremal pool kasutasime väikese nurga lähdust  $\sin d\theta \approx d\theta$ . Seega  $R \cos \theta = r$ , mis tähendab, et (a) punkt  $Q$  on leitav kodara lõikepunktina ratta ja maa kontaktpunktist  $S$  kodarale tömmatud ristsirgega (vt järgnev joonis); (b) vaadeldes seda võrdust kui raadiuse  $r$  sõltuvust polaarnurgast  $\theta$  näeme, et ülejää nud kodarate teravalt kujutuvad punktid asuvad ringjoonel, mille diameetriks on ratta raadius  $OS$ .

#### *Alternatiivne lahendus*

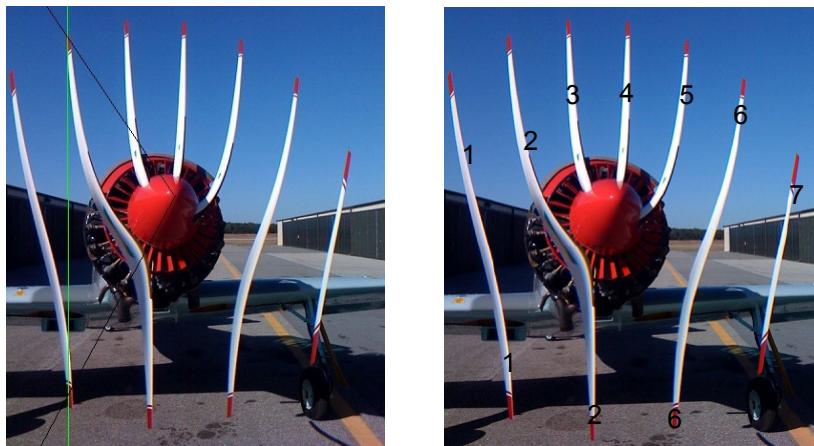
Pildistamise hetkel pöörleb kogu ratas ümber hetkelise pöörlemistelje, mis läbib ratta ja maa puutepunkti  $S$  (vt. joonist). Sellel hetkel liigub iga ratta osake mööda ringjoone kaart, mille keskpunktiks on  $S$ . Kui ühe sellisel moel liikuva punkti kiirus on mööda kodarat ( $OP$ ), siis see punkt kujutub fotol selgema. Seega me otsime selliseid punkte  $Q$ , mille juures  $\angle OQS$  on täisnurk. Piirdenurga omaduse põhjal peab selline punkt  $Q$  lebama ringjoonel, mille diameetriks on  $OS$  — sõltumata kodara kaldenurgast  $\theta$ .



#### **L129 Propeller ★★★★**

Autor: Andreas Valdmann, lõppvoor, 2010, G 10

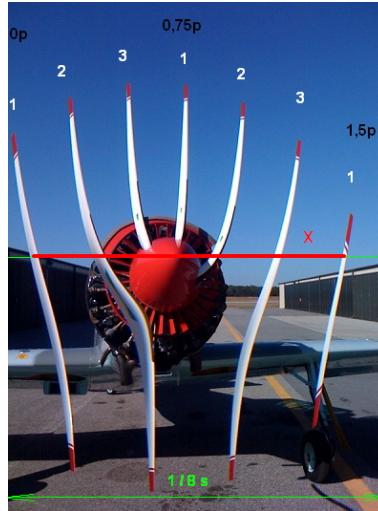
- a) Propeller pöörleb vastupäeva, sest pildi ülaosas liiguvalad vastu parajasti salvestataval pikseliveerule ja seetõttu paiknevad seal labade kujutised tihedamalt.
- b) Vasakpoolsel joonisel on ülalt alla tömmatud üks veerg millel on korraga peal maksimaalset 2 laba. Kui labasid oleks 2, peaks veerus paistma korraga vaid üks laba. Labad ise on kantud joonisele mustaga. Näha on, et labade vaheline nurk on suurem kui 90 kraadi ja seega propeller on 3-labaline.



### *Alternatiivne lahendus*

Tähistame labade tekitatud joonet numbritega 1 kuni 7 nii nagu näidatud parempoolsel joonisel. Joonise alumises servas eelneb joon 2 joonele 6. See tähendab, et joonele 2 vastav laba peab eelnema joonele 6 vastavale labale. Joonise ülemise serva põhjal võime analoogselt väita, et joonele 5 vastav laba peab eelnema joonele 6 vastavale labale. Järelikult peavad jooned 5 ja 2 vastama samale labale. Ülemises servas jäab joonte 5 ja 2 vahel veel 2 joont, st sellele labale vastavad jooned korduvad perioodiga 3 joont. See periood peab olema propelleri labade arvu  $n$  kordne. Et 3 on algarv, siis ainus variant on  $n = 3$ .

c) Iga kolmas triip pildil kujutab sama propellerilaba. Järgneval joonisel on valgega nummerdatud labad; propelleri telje körgusel on tömmatud joon mille kogupikkus moodustus pildistamise aja jooksul ehk kogupikkus on  $1/8$  s. Punasega on märgitud aeg millega laba number üks jõudis liikuda 1,5 pööret. (joonisel mustaga) Punase osa pikkus moodustab ligikaudu  $4/5$  pildi kogulaiusest. Seetõttu moodustab ka nende punktide ajaline intervall  $4/5$  pildi tegemise koguajast. Selle aja jooksul teeb propeller poolteist pööret. Ühes sekundis teeb propeller  $1,5/(1/8 \cdot 4/5) = 15$  pööret ja ühes minutis  $15 \cdot 60 = 900$  pööret.



### L130 Kile ★★★★

Autor: Jaan Kalda, lahtine, 2008, G 8

Valgus peegeldub tagasi kile ülemiselt ja alumiselt pinnalt. Risti langeva valguse puhul on nende vaheline optiliste teede pikkuse erinevus  $2n_1d$ , kus  $d$  on (otsitav) kile paksus. Peegeldus on minimaalne, kui need kiired liituvad vastasfaasis, st

$$2n_1d = \left( N + \frac{1}{2} \right) \lambda.$$

Kui tahetakse, et peegeldunud valgus oleks nõrk ka punase ja sinise valguse jaoks, siis tuleb täisarvu  $N$  väärtsus võtta võimalikult väike. Olgu  $\lambda - \Delta\lambda$  selline lainepikkus, mille puhul peegeldunud kiired liituvad samas faasis, st peegeldunud valgus on maksimaalse intensiivsusega. Sellisel juhul  $2n_1d = N(\lambda + \Delta\lambda)$ . Kahest võrdustest saame  $\Delta\lambda = \lambda/2N$ . Et antud juhul oleme huvitatud võimalikult suurest  $\Delta\lambda$  väärustusest, siis tuleb valida  $N = 1$ . Niisiis  $d = \lambda/4n_1 \approx 102$  nm.

### L131 Kunstinäitus ★★★★★

Autor: Jaan Kalda, lõppvoor, 2009, G 10

Kile ülemiselt ja alumiselt pinnalt peegeldunud kiirte optiliste teepikkuste erinevus on maksimaalne, kui kiir langeb pinnaga risti ning võrdne  $\Delta l_{\max} = 2n_1d$ , kus,  $d$  on kile paksus. Minimaalne on see siis, kui kiir langeb peaegu paralleelselt kilega (st horisontaalsel); sellisel juhul on optiliste teepikkuste vahe  $\Delta l_{\min} = 2n_1d/\cos\alpha - 2d\tan\alpha$ , kus  $\alpha$  on kiles leviva kiire nurk vertikaali suhtes,  $\sin\alpha = 1/n_1$ . Seega

$$\Delta l_{\min} = 2d/\cos\alpha(n_1 - \sin\alpha) = 2n_1d(1 - n_1^{-2})/\sqrt{1 - n_1^{-2}} = 2n_1d\sqrt{1 - n_1^{-2}}.$$

Kui muuta vaatesuunda vertikaalsest horisontaalseks, siis muutub optiliste teepikkuste vahe  $N\lambda$  võrra (sest selle protsessi käigus on võimalik registreerida  $N$

interferentsimaksimumi, mil optiliste teepikkuste vahe on laine pikkuse täisarv-kordne). Seega  $2n_1 d(1 - \sqrt{1 - n_1^{-2}}) = N\lambda$ , millest

$$d = N\lambda/2n_1(1 - \sqrt{1 - n_1^{-2}}) \approx 13 \mu\text{m}.$$

### L132 Solenoid ★★

Autor: Andres Laan, lõppvoor, 2011, G 5

Väljatugevus solenoidi sees on  $B = \mu nI$ , kus  $n$  on solenoidi traadi keerete arv pikkusühiku kohta,  $I$  seda läbiv vool ja  $\mu$  vaakumi magnetiline läbitavus. Väli on suunatud piki solenoidi telge. Kui selle välja suunaga on risti mingisugunegi kiirus  $v$ , siis ühe pöörde tegemiseks kulub aeg  $T = 2\pi m/eB$  (tuletatav Lorentzi ja tsentrifugaaljõu tasakaalust), kus  $m$  ja  $e$  on vastavalt elektroni mass ja laeng. Olgu elektronil ka solenoidi telje sihiline kiirus  $v$ . Ühikulises ajas läbib ta distantsi  $1/v$ . Selle aja sees teeb ta  $1/(vT)$  pööret. Nende pöörete arv ülesande püstituse kohaselt peab olema  $n$ . Seega

$$n = \frac{1}{vT} = \frac{eB}{2v\pi m} = \frac{e\mu nI}{2v\pi m}.$$

Sit saame  $v = e\mu I/(2\pi m)$ .

Telje sihiline komponent kiirusel on üheselt määratud. Teljega risti olev kiiruse komponent peab olema nullist suurem.

### L133 Langev takisti ★★

Autor: Andres Laan, piirkonnnavoor, 2011, G 8

Raami läbiva magnetvoo suuruse muutus põhjustab raamis elektromotoorjõu  $\mathcal{E} = d\Phi/dt = Blv$ . Elektromotoorjõud põhjustab raamis voolu  $I = \mathcal{E}/R$ . Magnetväljas mõjub vooluga juhtmele jõud  $F = BlI$ , mis peab olema tasakaalus raskusjõuga  $mg$ . Elimineerides  $I$  ja  $\mathcal{E}$  leiame

$$mg = \frac{B^2 l^2 v}{R} \Rightarrow v = \frac{mgR}{B^2 d^2}.$$

### Alternatiivne lahendus

Lahendus lähtub energia jäädvuse seadusest. Gravitatsioonijõu poolt tehtud töö võimsus on  $P = mgv$ . Elektrilise töö võimsus peab sellega võrduma, seega  $P = mgv = U^2/R$ . Pingi on leitav Faraday seadusest, mille kohaselt on pingi võrdne kontuuri läbiva magnetvoo muutumise kiirusega. Magnetvoo muutumise kiirus on  $d\Phi/dt = Bdv$ . Asendades selle eelmisesse võrrandisse ja avaldades  $v$  saame

$$v = \frac{mgR}{B^2 d^2}.$$

**L134 Laengud ★★★★**

Autor: Jaan Kalda, lahtine, 2011, G 6

Kuna Lorentzi jõud mõjub alati risti liikumissuunaga, liiguvad laengud mööda ringjooni, mille raadiuse leiame Newtoni teisest seadusest:

$$qvB = m \frac{v^2}{r} \quad \Rightarrow \quad R = mv/qB,$$

kusjuures ühe ringjoone keskpunkt on punktis  $(0, R)$  ja teisel  $(-R, 0)$ . Nende kiirusvektorid on alghetkel risti ja kuivõrd need pöörlevad ühesuguse kiirusega, siis jäavat risti ka edasise liikumise käigus, kusjuures suhtelise kiiruse vektor  $\vec{w} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2$  moodustab kummagi kiirusvektoriga 45-kraadilise nurga. Vahekaugus on maksimaalne, kui  $\vec{w}$  on risti laenguid ühendava sirgega, st laenguid ühendav sirge moodustab laengu asukohast tömmatud puutujaga (st laengu kiirusvektoriga) 45-kraadilise nurga; on lihtne näha, et see juhtub hetkel, mil laengud on punktides  $(0, 2R)$  ja  $(-2R, 0)$ , mis annab maksimaalseks vahekauguseks  $l = 2\sqrt{2}R = 2\sqrt{2}mv/qB$ .

*Alternatiivne lahendus*

Esitame laengute asukohad ajalises sõltuvuses kompleksarvudena komplekstasandil:

$$z_1 = R\mathbf{i} - R\mathbf{i}e^{i\omega t} \text{ ja } z_2 = -R + Re^{i\omega t},$$

kus  $\omega$  on tsüklotronsagedus. Nende vahekaugus

$$l = |z_1 - z_2| = |R(1 + \mathbf{i})(1 - e^{i\omega t})| = R\sqrt{2}|1 - e^{i\omega t}|$$

on maksimaalne, kui  $e^{i\omega t} = -1$ , mil  $l = 2\sqrt{2}R = 2\sqrt{2}mv/qB$ .

**L135 Traat ★★★★**

Autor: Jaan Kalda, lõppvoor, 2007, G 10

Traat võtab kaare kuju (sest Amper'i jõud mõjub analoogselt täispuhutud palli puhul pallikestale ülerõhu poolt mõjuva jõuga: lühikesele mõttelisele traadijupile mõjuv jõud on risti traadijupiga). Kaare raadiuse  $R$  saab leida järgmisest võrrandist:

$$a = 2R \sin(L/2R).$$

Väikese kaare-elemendi jaoks (pikkusega  $\alpha R$ ) välja kirjutatud Amper'i jõu ja mehaanilise pinge tasakaalust leiame pinge traadis:  $\alpha RIB = T\alpha$ . Eeldusel, et  $L \gg a$ , moodustub kaarest peaegu täisring, st  $R = L/2\pi$ ; seega

$$T = LIB/2\pi.$$

### L136 Pool ★★★★

Autor: Siim Ainsaar, lõppvoor, 2008, G 10

Venitame pooli väikese  $\Delta\ell$  võrra pikemaks ja avaldame tehtud töö ( $A$ ) kahel eri viisil. Ühelt poolt  $A = F_1 \Delta\ell$ . Samas salvestub osa kulutatud energiat ( $\Delta E_m$ ) magnetväljas ja ülejäänu ( $\Delta E_v$ ) kas eraldub vooluallika sisetakistusel (see peab nt. lühise korraljääva voolu hoidmiseks alati olemas olema) või, kui  $A < \Delta E_m$ , täiedatakse vooluallika töoga. Igal juhul:

$$A = \Delta E_m + \Delta E_v.$$

$\ell$  suurenedes  $B$  väheneb, mistõttu ilmselt  $\Delta E_m < 0$  ja vooluallika sisetakistusel eraldub energiat:

$$A > 0 \implies \Delta E_v > 0.$$

Vajalikud energiamuudud võime leida mitmel eri viisil.

*Esimene meetod.* Olgu kogu magnetvälja energia  $E_m$ . Selle energia ruumtihedus:

$$w = \frac{B^2}{2\mu_0} \implies E_m = w\ell S = \frac{\ell SB^2}{2\mu_0} \implies \Delta E_m = \frac{S\Delta(\ell B^2)}{2\mu_0} = \frac{INS \cdot \Delta B}{2}.$$

Toimugu pooli pikenemine ajaga  $\Delta t$  ja indutseerigu magnetvoo muutus poolil elekromotoorjõu absoluutväärtsusega  $E$ . Faraday induktsiooniseadusest:

$$\mathcal{E} = N \frac{|\Delta B| \cdot S}{\Delta t}.$$

Sii saamegi  $\Delta E_v$ :

$$\Delta E_v = I\mathcal{E}\Delta t = INS|\Delta B|.$$

*Teine meetod.* Leiame tiheda pooli induktiivsuse  $L$ :

$$NBS = LI \implies L = \frac{NBS}{I}.$$

Magnetvälja energia:

$$E_m = \frac{LI^2}{2} = \frac{NBSI}{2} \implies \Delta E_m = \frac{INS \cdot \Delta B}{2}.$$

Toimugu pooli pikenemine ajaga  $\Delta t$  ja indutseerigu magnetvoo muutus poolil elekromotoorjõu absoluutväärtsusega  $\mathcal{E}$ . Eneseinduktsioonielektromotoorjõud tuleneb Faraday induktsiooniseadusest:

$$\mathcal{E} = \frac{|\Delta(NBS)|}{\Delta t} = \frac{|\Delta(LI)|}{\Delta t} = \frac{NS|\Delta B|}{\Delta t},$$

kust saame:

$$\Delta E_v = I\mathcal{E}\Delta t = INS|\Delta B|.$$

*Ühine osa mõlemale lahendusele.* Leiame  $\Delta B$ , eeldades, et  $\Delta\ell$  on väike:

$$\Delta B = \mu_0 IN \Delta \left( \frac{1}{\ell} \right) = \mu_0 IN \left( \frac{1}{\ell + \Delta\ell} - \frac{1}{\ell} \right) = -\mu_0 IN \frac{\Delta\ell}{(\ell + \Delta\ell)\ell} \approx -\mu_0 IN \frac{\Delta\ell}{\ell^2}.$$

Lõpuks:

$$F = \frac{A}{\Delta\ell} = \left( -\frac{INS}{2} + INS \right) \frac{|\Delta B|}{\Delta\ell} = \frac{INS|\Delta B|}{2\Delta\ell} = \frac{\mu_0 I^2 N^2 S}{2\ell^2}.$$

*Märkus.* Paar sõna ülesande tekstis tehtud eelduse kohta, et kõik keerud hakavad otstest tõmbamisel eemalduma võrdse vahemaa võrra. Tegelikult see ei kehti, otstest tõmbamisel hakkaksid kõigepealt lahti hargnema otsmised keerud (ja märksa väiksema jõu juures). Ilmselt oleks võimalik keerdude ühtlane eemaldumine spetsiaalse mehaanilise konstruktsiooni abil, kui keerud poleks mitte klaaspulg, vaid vastava raamistiku peal. Aga selgub, et antud ülesande vastus realiseerub lihtsammas olukorras ka. Kui võtta kinni poolist kahest lähestikku asuvas kohas keskpaiga läheduses, siis allpoolleitav jõud on ühtlasi selline jõud, millega tõmbamisel saab natuke eemaldada pika poolikeskkohast vasakule- ja paremale poole jääävaid keerde (seda väidet me siinkohas tööstama ei hakka).

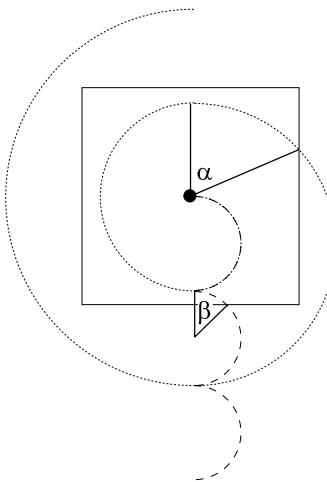
### L137 Laeng ★★★★

Autor: Oleg Košik, lahtine, 2010, G 8

Paneme tähele, et ajavahemik  $T$  on võrdne poolega tsüklotronperioodist (ajaga, mis kulub sellel laengul magnetväljas täistiiru tegemiseks). Seega antakse impulsimuut  $\Delta p = Eq\tau$  iga kord kiirusega paralleelselt (ii) või antiparalleelselt (i). Seega hakkab juhtumil (ii) impulss kasvama lineaarses sõltuvuses lülituste arvuga  $n = [t/T]$  (kus  $t$  on vaadeldav ajahetk ja nurksulud tähistavad täisosa):  $p = Eq\tau[t/T]$ . Et trajektoori köverusraadius on võrdeline impulsiga,  $R = v/\omega = p/qB$ , siis kasvab köverusraadius samuti lineaarselt  $n$ -ga, vt punktiirjoont joonisel. Juhtumil (i) paneb esimene jõuimpulss laengu liikuma, teine aga peatab liikumise. Tulemuseks on joonisel toodud laineline trajektoor (katkendjoon joonisel). Tuginedes nendele trajektooridele saame teha tabeli osakese eemaldumuse  $l = \max(x, y)$  jaoks  $x$  või  $y$ -teljest erinevatel ajahetkedel.

$t/T$	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5
$l/R$ (i)	1	2	2	2	3	4	4	4	5	6
$l/R$ (ii)	1	2	2	2	3	4	4	4	5	6

Nagu näha, toimub eemaldumine mõlemal juhul vaadeldavate ajahetkede jaoks täpselt ühekiiruselt. Siiski, kui kuubi poolküljepikkus ei ole mitte  $R$ -i täisarvkkordne, siis väljub (i) juhtumi korral osake pisi-natuke varem. Sellest võib aru saada uurides võrdlevalt kauguse  $l$  kasvufaase juhtumeil (i) ja (ii) ja juuresolevat joonist: antud ruudukujulise piirkonna jaoks väljumisaeg  $2T + \Delta t$ , kus täiendav ajavahemik juhtumil (ii)  $\Delta t = \pi\alpha/T$  juhtumil (i)  $\Delta t = \pi\beta/T$ . Kuivõrd  $\alpha > \beta$ , siis saamegi järel dada, et juhtumil (i) väljub osake varem. On võimalik näha, et võrratus  $\alpha > \beta$  kehitib peaegu alati – välja arvatud siis, kui kuubi külje pikkus on  $R$ -i paarisarvukordne. Ülesandes antud eelduse  $t \gg T$  tõttu muutub see väike väljumisaja erinevus tühiseks: aegade suhe sellel piirjuhul on 1.



### L138 Magnetvälja ★★★★

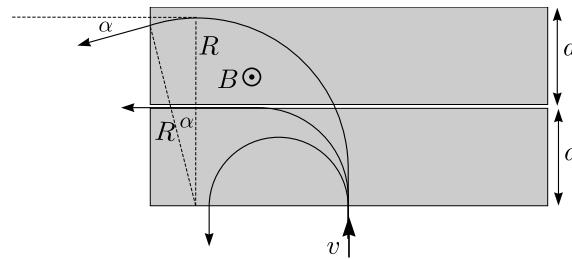
Autor: Jaan Kalda, piirkonna voor, 2010, G 9

Magnetväljas möjub elektronile Lorentzi jöud  $F = Bev$ , mis on kiirusega kogu aeg risti ning annab elektronile kesktõmbekiirenduse  $v^2/R$ , kus  $R$  on trajektoori köverusraadius. Newtoni teisest seadusest  $Bev = mv^2/R$ , millest  $R = vm/Be$ .

Et elektroni kiirus ei muudu (energia säilib!), siis ka köverusraadius ei muudu, st elektron liigub mööda ringjoont raadiusega  $R$ . Tuues sisse tähistuse  $v_0 = aBe/m$ , saame eelmise avaldise kirjutada kujul  $R = vm/Be = va/v_0$ .

Kui  $v < v_0$ , siis elektron teeb magnetväljas poolringi ning väljub tuldud suunas tagasi, st pöördenurk on  $\pi$  rad. Vastava graafikuosa eest.

Kui  $v \approx v_0$ , siis saab elektron väljuda mööda kitsast pilu, vt joonist, st pöördenurk on  $\pi/2$  rad. Vastava graafikuosa eest.

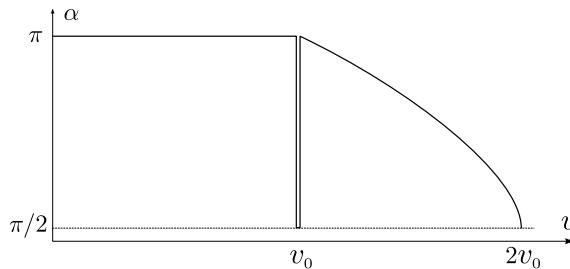


Kiiruse edasisel suurenemisel väljub elektron külgsuunas; joonise abil on lihtne näha, et väljumisnurk on

$$\alpha = \frac{\pi}{2} + \arcsin \frac{2a - R}{R} = \frac{\pi}{2} + \arcsin \left( 2 \frac{v_0}{v} - 1 \right).$$

Kvalitatiivselt mõistliku graafikuosa eest, st graafikuosa algab väärustuselt  $\pi$  rad ja lõppib väärustuse  $\pi/2$  rad juures.

Kokkuvõtvalt on sõltuvus  $\alpha(v)$  esitatud järgmisel lehekülgel oleval graafikul.



### L139 Silinder ★★★★☆

Autor: Tundmatu autor, lahtine, 2007, G 10

Vaatleme möttelist ringikujulist kontuuri, mis ühtib silindri külginna ristlõikega. Muutuv magnetväli tekitab suletud kontuuris elektromotoorjõu

$$\mathcal{E} = \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = \frac{S\Delta B}{\Delta t} = \frac{\pi R^2 \Delta B}{\Delta t}.$$

Sellise elektromotoorjõu olemasolu tähendab, et meil on teatud keeris-elektriväli  $E$ , mis on telgsümmeetrilisel juhtumil konstantne piki kontuuri ning seotud elektromotoorjõuga:

$$E = \frac{\mathcal{E}}{2\pi R} = \frac{1}{2} \frac{R\Delta B}{\Delta t}.$$

See elektriväli mõjud silindri külginnal olevale laengule  $q_i$  jõuga  $F_i = Eq_i$ , mis on risti teljelt tömmatud raadiusvektoriga. Seega on selle jõumoment telje suhtes  $M_i = Eq_i R$ . Summeerides üle kõikide laengute, saame tuua  $ER$  sulgude ette ning summaarne jõumoment avaldub kui  $M = EQR$ , kus  $Q$  on summaarne laeng. See tekitab nurkkiirenduse

$$\frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{M}{I_0},$$

kus  $I_0 = \frac{1}{2}mR^2$  on silindri inertsimoment telje suhtes. Asendades siia  $M$  ja  $E$  avaldised leiame

$$\frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{2EQR}{mR^2} = \frac{2QR}{mR^2} \frac{1}{2} \frac{R\Delta B}{\Delta t} = \frac{Q}{m} \frac{\Delta B}{\Delta t}.$$

Seega

$$\Delta\omega = \frac{Q}{m} \Delta B$$

ning võttes arvesse, et algne nurkkiirus ning lõpp-magnetväli on nullid, saame

$$\omega = \frac{Q}{m} B = \frac{2\pi R l \sigma}{\rho \pi R^2 l} B = \frac{2\sigma B}{\rho R}.$$

**L140 Pendel ★**

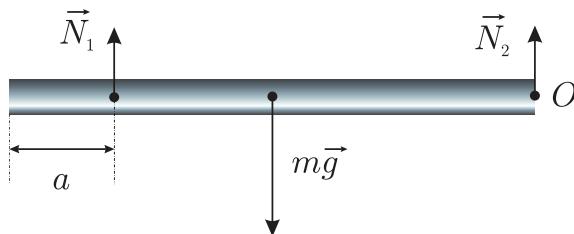
Autor: Mihkel Heidelberg, piirkonnavor, 2008, G 1

Koormisele mõjub raskusjõu moment  $mgl \sin \alpha$ . Kang püsib paigal, kui see on väiksem hõõrdejõu momendist  $M$ , seega  $mgl \sin \alpha < M$ , milles  $\sin \alpha < \frac{M}{mgl}$ .

**L141 Toru ★**

Autor: Tundmatu autor, lahtine, 2007, G 2

Newtoni kolmenda seaduse kohaselt on toru tooreaktsioonid  $N_1$  ja  $N_2$  suuruse poolest võrdsed otsitavate rõhumisjõududega (vt joonist).



Kuna jõudude summa peab tasakaalu asendis olema võrdne nulliga, siis

$$N_1 + N_2 - mg = 0.$$

Jõumomentide võrrand punkti O suhtes (võib valida suvalist punkti) on

$$N_1(l - a) = \frac{mgl}{2},$$

kust saame

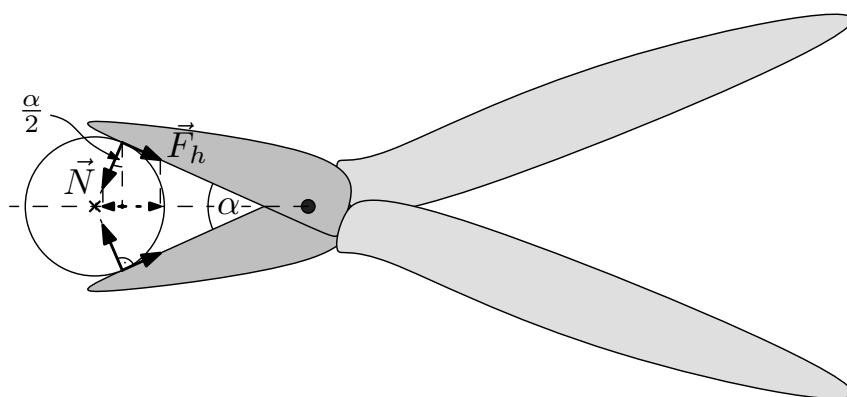
$$N_1 = \frac{mgl}{2(l - a)} = \frac{80 \cdot 9,8 \cdot 5}{2 \cdot (5 - 1)} = 490 \text{ N}.$$

Asendades  $N_1$  esimesesse võrrandisse, saame avaldise  $N_2$  jaoks:

$$N_2 = \frac{mg(l - 2a)}{2(l - a)} = \frac{80 \cdot 9,8 \cdot (5 - 2 \cdot 1)}{2 \cdot (5 - 1)} = 294 \text{ N}.$$

**L142 Nürinenud käärid ★**

Autor: Mihkel Kree, lõppvoor, 2009, G 1



Hõõrdejõud peab tasakaalustama tooreaktsiooni kääride telje sihilise komponendi (joonis). Lihtsast geomeetriast saame, et  $\mu = \tan \frac{\alpha}{2}$ .

**L143 Kuul ★★**

Autor: Tundmatu autor, lahtine, 2005, G 3

Kuuli hoiab augus või „lükkab“ august välja üks ja sama jõud — kuulile mõjuv raskusjõud, mis on suunatud vertikaalselt alla. Kuul on augus, kui raskusjõu vektor läbib augu põhja ja kukub, kui see väljub sellest. Esimesel juhul on raskusjõu moment suunatud augu poole, teisel juhul — august välja. Piirjuhul on kuul tasakalus, toetudes vaid punktile  $A$  (vt joonist). Sellel juhul on kuulile mõjuv raskusjõud suunatud otse punkti  $A$  poole, jõu õlg ning, järelikult ka jõumoment on võrdne nulliga.

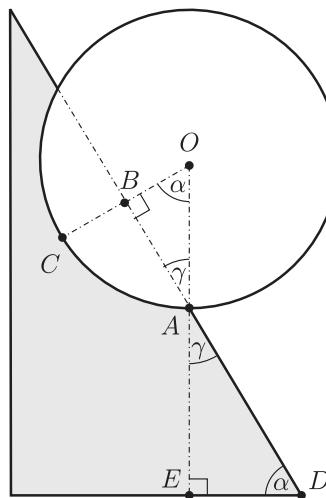
Vaatleme piirjuhu (vt joonist). Kuna lauaaugu sugavus  $|BC|$  on 2 korda väiksem, kui kuuli raadius  $r$ , saame kolmnurga  $AOB$  kohta kirjutada järgneva tingimuse:

$$\sin \gamma = \frac{r/2}{r} = \frac{1}{2} \Rightarrow \gamma = \arcsin \frac{1}{2} = 30^\circ.$$

Kuna punkti  $A$  tipunurgad on võrdsed, siis ka täisnurkse kolmnurga  $ADE$  üks-nurkatest on  $30^\circ$ . Järelikult

$$\alpha = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ.$$

Kui laua kaldenurk ületab  $60^\circ$ , kukub kuul lauaaugust välja.



**L144 Katus ★★**

Autor: Ott Krikmann, piirkonnavor, 2005, G 2

Vaatleme lund katusel kui kahte vastasmõjus olevat keha: üheks kehaks on lumi, mille all on vesi ning millele hõõrdejõud ei mõju ja teiseks kehaks kuival katusel olev lumi. Nende kahe osa vahel mõjuva jõu  $F$  võime lugeda katuse sihiliseks (selle sihi valime  $x$ -teljeks,  $y$ -telg on katuse sihiga risti). Arvestame, et lumi on ühtlase paksusega ja seega osade massid on võrdelised nende pikkustega:

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{l}{L-l}.$$

$y$ -telje sihiline tasakaaluvõrrand kuiva osa jaoks:

$$N_2 = m_2 g \cos \alpha,$$

kus  $N_2$  on kuivale osale mõjuva katuse rõhumisjõud.  $x$ -telje sihiline tasakaalu-võrrand vesise ja kuiva osa jaoks:

$$F = m_1 g \sin \alpha,$$

$$\mu N_2 = F + m_2 g \sin \alpha.$$

Elimineerides kahest viimastest võrrandist  $F$ -i leidame

$$\mu N_2 = (m_1 + m_2) g \sin \alpha.$$

Asendades siia  $N_2$  leidame

$$m_2 \mu g \cos \alpha = (m_1 + m_2) g \sin \alpha.$$

Jagades läbi  $m_2 g$ -ga ja asendades esimesest võrrandist suhte  $m_1/m_2$ , saame

$$\frac{L}{L-l} = \mu \cot \alpha,$$

millest

$$\frac{l}{L} = 1 - \mu^{-1} \tan \alpha \approx 0,16.$$

*Alternatiivne lahendus*

Vaatleme lund katusel tervikliku süsteemina. Valime  $x$ -teljeks katuse sihi,  $y$ -telg olgu katuse sihiga risti. Lumekihile mõjuvad järgnevad jõud: raskusjõud  $mg$ , katusepinna toereaktsioonijõud  $N$  ning hõõrdejõud

$$F_h = \frac{L-l}{L} \mu N.$$

Kordaja  $(L-l)/L$  tuleb sellest, et hõõrdejud mõjud vaid  $(L-l)$ -pikkusel katuseosal. Tasakaaluvõrrand  $y$ -telje jaoks on

$$N = mg \cos \alpha,$$

$x$ -telje jaoks aga

$$mg \sin \alpha = F_h = \frac{L-l}{L} \mu N.$$

Elimineerides kahest viimasesest võrrandist  $N$ -i leiate

$$mg \sin \alpha = \mu mg \cos \alpha \frac{L-l}{L}.$$

Saame, et

$$\frac{L-l}{L} = \frac{\tan \alpha}{\mu}.$$

Seega

$$\frac{l}{L} = 1 - \frac{\tan \alpha}{\mu} \approx 0,16.$$

### L145 Kast kaubikus ★★

Autor: Oleg Košik, lõppvoor, 2009, G 2

Kaubiku kiirendus on  $a = v_0/t = 2,5 \text{ m/s}^2$ . Newtoni II seaduse põhjal

$$\vec{N} + \vec{T} + \vec{F}_h + m\vec{g} = m\vec{a}.$$

Nööri pinge on minimaalne, kui hõördejud  $F_h$  saavutab maksimaalse väärtsuse  $\mu N$ . Projektsioon  $x$ -teljele:

$$T \sin \alpha + \mu N = ma;$$

$y$ -teljele:

$$N + T \cos \alpha - mg = 0.$$

Lahendades süsteemi leiate, et

$$T = m \frac{a - \mu g}{\sin \alpha - \mu \cos \alpha} \approx 14 \text{ N}.$$

### L146 Liivahunnik ★★

Autor: Roland Matt, piirkonnavoor, 2011, G 5

Liivahunniku maksimaalse kõrguse saavutamiseks peavad pindmised liivakihid olema libisemise äärel, ehk kehtib  $\tan(\alpha) = \frac{h}{R} = \mu$ , kus  $\alpha$  on nurk maa ja koonuse moodustaja vahel,  $R$  hunniku aluse raadius ja  $h$  hunniku kõrgus. Liiva ruumala on

$$V = \frac{1}{3} \pi R^2 h = \frac{1}{3} \pi R^3 \mu,$$

millest

$$R = \sqrt[3]{\frac{3V}{\pi \mu}}$$

ning seega hunniku aluse pindala on

$$S = \pi R^2 = \sqrt[3]{9\pi \left(\frac{V}{\mu}\right)^2} \approx 76,2 \text{ m}^2.$$

**L147 Tormituul ★★**

Autor: Mihkel Kree, lõppvoor, 2011, G 3

Tuule poolt avaldatav horistonaalsuunaline jõud  $F$  peab olema niisugune, et selle poolt tekitatud jõumoment  $Fb/2$  ületab raskusjõu poolt tekitatud jõumomendi  $Mga/2$ . Jõumomentide võrdsuse korral  $F = Mga/b$ . Et niisugune jõud autot libisema ei paneks, peab hõõrdejõud  $F_h = \mu Mg$  selle tasakaalustama, millest saame nõutud tingimuseks:  $\mu > a/b = 2/3$ .

**L148 Hammarsattad ★★★**

Autor: Siim Ainsaar, lõppvoor, 2010, G 4

Kasutame virtuaalse nihke meetodit: oletame, et nõör pole siiski päris venimatu ning saame esimest rattast pöörata väikese nurga  $\alpha$  vörra. Hõõre puudub, mistõttu salvestub kogu välise jõumomendi töö nõöri elasitusjõu potentsiaalseks energiaks. Välisjõumomendi töö on  $M\alpha$  (kui jõumomenti avaldab üks jõud õlaga  $\ddot{\alpha}$  ja suurusega  $M/\ddot{\alpha}$ , siis nihkub ta rakenduspunkt  $\alpha\ddot{\alpha}$  vörra ja töö on  $\alpha\ddot{\alpha}M/\ddot{\alpha} = M\alpha$ ). Väikesel nihkel ei jõua  $T$  oluliselt muutuda, seega peab nõöri venitamise töö olema  $Ts$ , kus  $s$  on nõöri pikenemine. Hambumusse jäavate hammarsrataste pinnapunktide läbitavad teepikkused on võrdsed — mõlemal  $\alpha r_1$ , järelikult  $s = 2\alpha r_1$  ja  $M\alpha = 2\alpha r_1 T$ , kust  $T = \frac{M}{2r_1}$ .

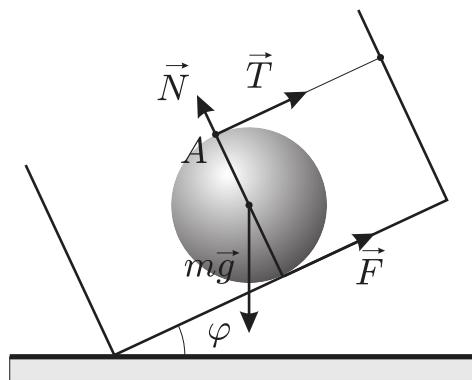
*Alternatiivne lahendus*

Ratastele mõjuvad jõud ja jõumomendid on tasakaalus. Lihtsaim on kirjutada jõumomentide tasakaalud rattaste tsentrite suhtes, kuna siis on völlide poolt avaldatava tundmatute jõudude õlad nullid. (Muidu saame lahenduse, kui avaldamme need jõud jõudude tasakaaluviõrranditest.) Rattad mõjutavad teineteist puutujasililise jõuga; kui teine ratas avaldab esimesele jõudu  $\vec{F}$ , siis avaldab Newtoni III seaduse järgi esimene teisele  $-\vec{F}$ . Jõumomentide tasakaal esimesele rattale on nii  $M = (F + T)r_1$  ning teisele  $T = F$ , sestap  $T = \frac{M}{2r_1}$ .

**L149 Kuul ★★**

Autor: Tundmatu autor, lahtine, 2006, G 7

Kõigepealt uurime kuulile mõjuvate jõudude projektsioone kasti põhjaga risti olevale teljele (vt joonist).



Nende projektsioonide summa peab olema võrdne nulliga. Projektsioone sellele teljele omavad vaid raskusjõud  $m\vec{g}$  ja kasti põhja tooreaktsioon  $\vec{N}$ . Järelikult  $N = mg \cos \varphi$  ja hõõrdejõud

$$F \leq \mu mg \cos \varphi. \quad (1)$$

Kuuli tasakaal sõltub selle võrratuse täitumisest.

Nüüd tuleb valida punkt, mille suhtes me hakkame määrama jõumomente. Valime punkti nii, et hõõrdejõu moment selle suhtes oleks nullist erinev, aga niidi tömbepinge  $T$  moment oleks võrdne nulliga (niidi pingi arvutamise välimiseks). Sellele tingimusele vastab punkt  $A$ , milles niit kinnitub kuuli külge. Selle punkti suhtes on hõõrdejõu õlg  $2r$  (kus  $r$  on kuuli raadius), raskusjõu õlg  $l = r \sin \varphi$ , ning jõudude  $N$  ja  $T$  õlad võrdsed nulliga. Jõumomentide summa on tasakaalu puhul võrdne nulliga, järelikult

$$2rF - mgr \sin \varphi = 0 \Rightarrow F = \frac{mg \sin \varphi}{2}.$$

Arvestades võrratust (1) leiame, et tasakaalu puhul

$$\mu mg \cos \varphi \geq \frac{mg \sin \varphi}{2} \Rightarrow \tan \varphi = 2\mu,$$

ehk

$$\varphi = \arctan(2\mu).$$

### L150 Toru ★★★

Autor: Aigar Vaigu, lõppvoor, 2010, G 5

Prussi võnkumine torul on stabiilne, kui prussi kõrvalekallutamisel väikese nurga  $\alpha$  võrra prussi masskese töuseb kõrgemale, kui alguses. Esialgne prussi massikeskme kõrgus on  $R + L/2$ . Masskeskme kõrgus kõrvalekallutamisel on

$$\left( R + \frac{L}{2} \right) \cos \alpha + R\alpha \sin \alpha,$$

ning peab kehtima

$$\left( R + \frac{L}{2} \right) \cos \alpha + R\alpha \sin \alpha > R + \frac{L}{2}.$$

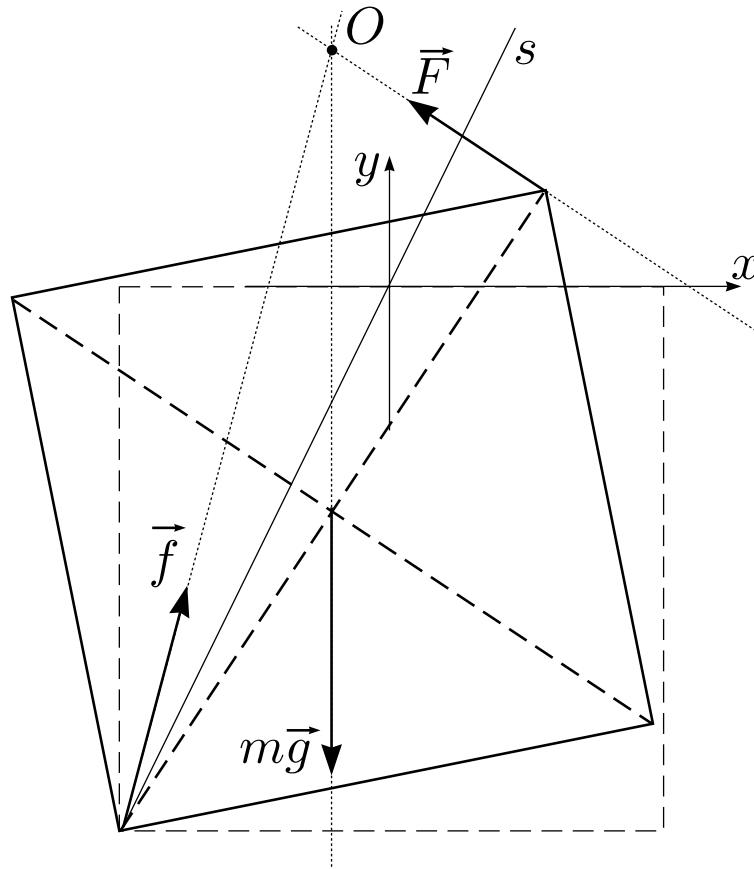
Kuna kõrvalekalde nurk on väike, siis võime arvestada, et  $\sin \alpha \approx \alpha$  ja  $\cos \alpha \approx 1 - \alpha^2/2$ . Lihtsustades ning avaldades  $L$ -i, saame, et võnkumised on väikeste kõrvalekallete korral stabiilsed, kui

$$L < 2R.$$

**L151 Kuubik ★★★**

Autor: Riho Taba, piirkonnavor, 2007, G 9

Ülesande lahendamine jaguneb kaheks osaks: (a) kas antud jõust piisab üle serva kantimiseks; (b) ega kLOTS seejuures libisema ei hakka. Analüüsides oletame, et kLOTS on juba kallutatud teatud nurga  $\varphi$  ( $0 \leq \varphi \leq 45^\circ$ ) võrra; seejuures selgub, et  $\varphi = 0$  on kõige ohtlikum olukord. Alternatiiv oleks väita intuitiivselt, et ohtlikuim on olukord  $\varphi = 0$  ning uurida ainult seda juhtumit;



(a) Vaatleme jõumomentide tasakaalu toetava nurga suhtes. Kompenseerimist vajab raskusjõu moment  $M_{1\max} = Fa \cos(45^\circ) \cos(\varphi + 45^\circ)$ , mille maksimaalväärtus on

$$M_{1\max} = \frac{mga}{2}, \quad M_{1\max} = \frac{10 \cdot 9,8 \cdot 0,1}{2} = 4,9 \text{ N m.}$$

Rakendatav jõud annab seda suurema momendi, mida suurem on õlg; õla maksimaalne pikkus ei sõltu nurgast  $\varphi$  ning on alati  $l = a\sqrt{2}$ . See väärtus saavutatakse siis, kui jõud on rakendatud maha toetuva serva suhtes vastasserva külge ning on risti ruudu diagonaaliga. Seega on antud jõu abil alati võimalik tekitada raskus-

jõudu kompenseeriv moment väärtsusega kuni

$$M_2 = Fl = Fa\sqrt{2} = 5,6 \text{ N m.}$$

Näeme, et  $M_{1\max} < M_2$ , st antud jõud on piisav kuubi keeramiseks.

(b) Vaatleme jõudude tasakaalu raskusjõu  $mg$  ja rakendatud jõu  $\vec{F}$  pikenduste lõikepunkti  $O$  suhtes, vt joonist. Aeglasel pööramisel on jõud tasakaalus, st hõõrdejõu ja tooreaktsiooni resultantjõud  $\vec{f}$  peab minema samuti läbi selle punkti. Et hõõrdetegur  $\mu = 0,5$ , siis nurk toetuspinna normaali (st vertikaalsihi) ja jõu  $\vec{f}$  vahel ei tohi olla suurem, kui  $\arctan \mu$ , st jõud  $\vec{f}$  ei tohi olla vähem püstine, kui sirges. Nii see ka tõepoolest on, sest punkt  $O$  jäääb alati piirkonda  $x \leq 0$  ja  $y > 0$ .

*Alternatiivne lahendus osa (b) jaoks*

Meil on vaja töestada, et aeglasel pööramisel kehtib kogu aeg võrratus

$$|F_x| = F \cos(45^\circ - \varphi) \leq N\mu,$$

kus  $N$  on laua tooreaktsioon. Paneme tähele, et vertikaalsest tasakaalutingimustest

$$N = mg - |F_y| = mg - F \sin(45^\circ - \varphi).$$

Me kasutame osast (a) teada olevat asjaolu, et kui hõõrdumist ei oleks, siis tasakaalu tagava jõu jaoks kehtib võrratus  $F < F_{\max}$ , seda asjaolu kasutame alljärgnevalt võrratuste ümber kirjutamisel.

Meile piisaks, kui suudaksime töestada, et

$$\mu[mg - F_{\max} \sin(45^\circ - \varphi)] \geq F_{\max} \cos(45^\circ - \varphi), \quad (1)$$

sest sellisel juhul

$$\begin{aligned} N\mu &= \mu[mg - F \sin(45^\circ - \varphi)] \geq \mu[mg - F_{\max} \sin(45^\circ - \varphi)] \geq \\ &\geq F_{\max} \cos(45^\circ - \varphi) \geq F \cos(45^\circ - \varphi) = |F_x|. \end{aligned}$$

Tõepoolest,  $N\mu \geq |F_x|$ . Võrratuse (1) töestamiseks kirjutame selle ümber ekvivalentset kujul

$$1 \geq \frac{F_{\max}}{\mu mg} [\mu \sin(45^\circ - \varphi) + \cos(45^\circ - \varphi)],$$

mis tõepoolest kehtib, sest

$$\begin{aligned} \frac{F_{\max}}{\mu mg} [\mu \sin(45^\circ - \varphi) + \cos(45^\circ - \varphi)] &= \\ &= \frac{F_{\max} \sqrt{\mu^2 + 1}}{\mu mg} \sin(45^\circ - \varphi + \arcsin[(\mu^2 + 1)^{-1}]) \leq \\ &\leq \frac{F_{\max} \sqrt{\mu^2 + 1}}{\mu mg} = \frac{40 \text{ N} \cdot \sqrt{5/4}}{49 \text{ N}} \approx 0,91 < 1. \end{aligned}$$

**L152 Kuulid ★★★★**

Autor: Jaan Kalda, lahtine, 2009, G 9

Et kuuli  $C$  kiirusvektor on risti sirgega  $AC$ , siis hetkeline pöörlemiskese  $O$  asub sellel sirgel. Seega, kui kuul  $A$  hakkab libisema, siis on selle kiirusvektor samuti (ning järelikult ka hõõrdejõu vektor) risti sirgega  $AC$ . Piirjuhtumil, kui kuulide masside suhe on selline, et kuul  $A$  hakkab vaevu liikuma, on punkt  $O$  väga lähedal punktile  $A$  ning seega on punkti  $B$  kiirusvektor (ja hõõrdejõu suund) risti sirgega  $AB$ . Hõõrdejõudude jõumomentide summa punkti  $C$  suhtes peab olema null; et punkti  $A$  rakendatud hõõrdejõu õlg on  $|AC|$  ning punkti  $B$  puhul on õlg  $|AC|/2$ , saame kriitiliseks masside suhteks  $1/2$ , st kuul  $A$  jäääb paigale, kui  $M_A/M_B > 1/2$ . *Märkus.* Uurides olukorda edasi ja vaadeldes üha vähenevaid  $M_A$  väärtsusi (alustades  $M_B/2$ -st ja lõpetades tühiselt väikeste massidega) paneme tähele, et punkt  $O$  nihkub piki sirget  $AC$ , alustades punkti  $A$  juurest, üha kaugemale punktidest  $A$  ja  $C$  ning läheneb piiril  $M_A \rightarrow 0$  punktile  $D$ , mis asub punktist  $A$  kaugusel  $|AC| - nõnda$ , et kolmnurk  $BCD$  on täisnurkne ning seetõttu punkti  $B$  rakendatud hõõrdejõu õlg läheneb nullile.

**L153 Rõngas ★★★★**

Autor: Jaan Kalda, lõppvoor, 2011, G 7

Olgu rõnga keskpunkt  $O$  ja massikese  $M$  ning võlli ja rõnga puutepunkt  $P$ . Vaadeltes jõumomentide tasakaalu punkti  $P$  suhtes näeme, et raskusjõud peab andma sarnaselt köigi teiste jõududega null-momendi, st lõik  $PM$  peab olema vertikaalne. Toereaktsiooni  $\vec{N}$  ja hõõrdejõu  $\vec{F}_h$  resultant peab komponeerima raskusjõu ja olema samuti vertikaalne. Pinnanormaali ja nimetatud resultantjõu vaheline nurk ei saa olla suurem kui  $\arctan \mu$ , vastasel korral algaks libisemine. Et pinnanormaaliks on sirge  $OP$ , siis

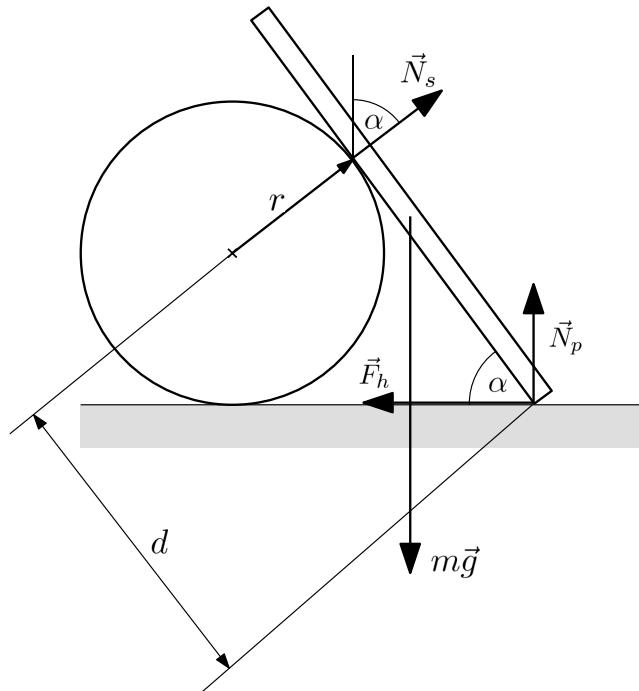
$$\angle OPM \leq \arctan \mu.$$

Rõnga pöörlemise käigus  $|OP| = R$  ja  $|OM| = R/2$ ; seega moodustub kolmnurk  $OPM$  lõikudest pikkusega  $R$  ja  $R/2$  ning järelikult on tipu  $P$  juures olev nurk maksimaalne, kui tipu  $M$  juures on täisnurk. Sel juhul

$$\mu = \tan \angle OPM = |MO|/|MP| = \frac{R}{2}/\sqrt{R^2 - \frac{1}{4}R^2} = 1/\sqrt{3} \approx 0,58.$$

**L154 Varras ★★★★**

Autor: Siim Ainsaar, lõppvoor, 2008, G 9



Vardale mõjuvad põranda ja silindri tooreaktsioonid (vastavalt  $\vec{N}_p$  ja  $\vec{N}_s$ ), hõördejõud  $\vec{F}_h$  ja raskusjõud  $m\vec{g}$  (vt ülemist joonist). Asend on stabiilne, kui jõudude ja jõumomentide tasakaalu tingimustest avaldatav hõördejõud ei ületa maksimaalset seisuhõördejõudu:

$$F_h \leq \mu N_p \quad (1)$$

ja varda alaots ei töuse õhku:

$$N_p \geq 0. \quad (2)$$

Siin ja edaspidi võiksime sama hästi rangeid võrratusi kasutada, täpne libisemise piir on realselt saavutamatu.

Jõudude tasakaal horisontaalsihis:

$$F_h = N_s \sin \alpha \quad (3)$$

ja varda sihis (võinuksime soovi korral valida ka muu sihi):

$$N_p \sin \alpha + F_h \cos \alpha = mg \sin \alpha. \quad (4)$$

Olgu  $d$  kaugus varda alaotsast toetuspunktini. Jõumomentide tasakaal varda allmisse otsta suhtes annab (jällegi oleksid muud punktid võrdväärselt kasutatavad):

$$mg \frac{\ell}{2} \cos \alpha = N_s d. \quad (5)$$

Avaldame jõud ja asendame võrratustesse:

$$(5), (3) \Rightarrow F_h = \frac{mg\ell}{2d} \sin \alpha \cos \alpha, \quad (6)$$

$$(6) \rightarrow (4) \Rightarrow N_p = mg \left( 1 - \frac{\ell}{2d} \cos^2 \alpha \right), \quad (7)$$

$$\begin{aligned} (6), (7) \rightarrow (1) &\Rightarrow \frac{\ell}{2\mu d} \sin \alpha \cos \alpha \leq 1 - \frac{\ell}{2d} \cos^2 \alpha \Rightarrow \\ &\Rightarrow \ell \leq \frac{2\mu d}{\cos \alpha (\sin \alpha + \mu \cos \alpha)}, \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} (7) \rightarrow (2) &\Rightarrow 1 - \frac{\ell}{2d} \cos^2 \alpha \geq 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \ell \leq \frac{2d}{\cos^2 \alpha} = \frac{2\mu d}{\mu \cos^2 \alpha}. \end{aligned} \quad (9)$$

(9) on leebem võrratus kui (8), mis on niisiis  $\ell$  ülempiiriks (paremal nimetajas on selleks positiivne liige,  $\sin \alpha$ , juures). Kuna rangemat alampiiri ei ole, jäääb selleks  $d$ .

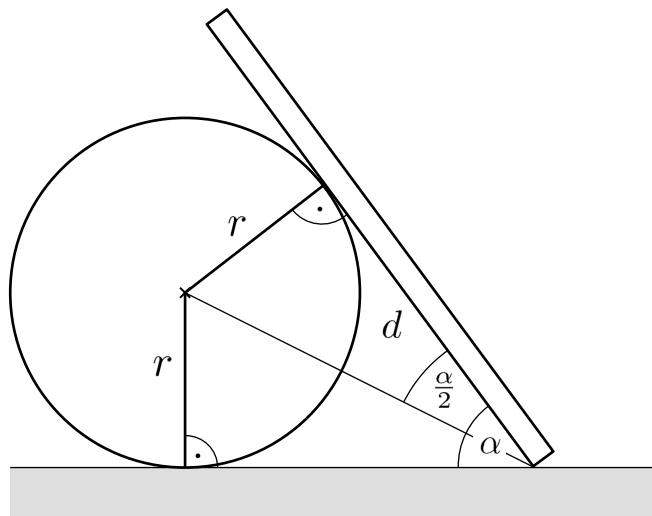
$d$  leidmiseks ühendame varda alaotsa silindri teljega (joonis 2). Tekib kaks võrdset kolmnurka, millest:

$$d = \frac{r}{\tan \frac{\alpha}{2}} = \frac{r \sin \alpha}{1 - \cos \alpha}, \quad (10)$$

$$\begin{aligned} (10) \rightarrow (8) \Rightarrow \ell &\leq \frac{2\mu r}{(\sin \alpha + \mu \cos \alpha) \cos \alpha \tan \frac{\alpha}{2}} = \\ &= \frac{2\mu r}{(1 + \mu \cot \alpha)(1 - \cos \alpha) \cos \alpha}. \end{aligned}$$

Kokkuvõttes

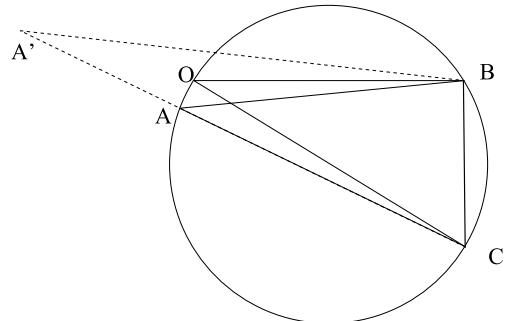
$$\frac{r \sin \alpha}{1 - \cos \alpha} \leq \ell \leq \frac{2\mu r}{(1 + \mu \cot \alpha)(1 - \cos \alpha) \cos \alpha}.$$



### L155 Konn ★★★★

Konnale mõjub kolm jõudu: raskusjõud  $m\vec{g} = \vec{BC}$ , mis on suunatud vertikaalselt alla, jõud  $\vec{F} = \vec{CA'}$ , mis on suunatud kaldpinna pinnanormaalili sihis (pinna sisse) ning rõhumisjõu ja hõõrdejõu resultant  $\vec{A'B}$ , mille nurk pinnanormaaliga  $\alpha = \angle CA'B$  ei ületa väärust arctan  $\mu$ . Need kolm vektorit moodustavad tasakaalu korral joonisel toodud kolmnurga  $A'BC$ . Joonisel on ilmne, et antud kaldenurga ( $A'C$  sihi) puhul saab konn minimeerida vajalikku jõudu (st lõigu  $A'C$  pikkust) suurendades nurga  $\alpha$  maksimaalse võimaliku vääruseni  $\alpha = \arctan \mu$  (mil  $A' = A$ ). Kui nüüd muuta pinna kaldenurka, siis joonistab punkt  $A$  ringjoone kaare (sest punktid  $B$  ja  $C$  on fikseeritud ning  $\angle BAC$  on konstantne ( $\arctan \mu$ )). Vajalik jõud (lõik  $AC$ ) on maksimaalne, kui lõik  $AC$  on ringi diameetrikus  $OC$ , st pinnanormaal moodustab horisondiga nurga arctan  $\mu$  (sest  $\angle OBC = 90^\circ$ ). Seega, sein on vertikaali suhtes kaldus arctan  $\mu$  võrra, moodustades põrandaga teravnurga.

Autor: Taavi Pungas, lahtine, 2010, G 9



#### Alternatiivne lahendus

Olgu iminapa tekitatud tõmbejõud  $F$ , hõõrdejõud  $F_h$  ja normaaljõud  $N$ . Jõudude tasakaalu tingimusest saame  $F_h = mg \sin \theta$  ja  $F = N + mg \cos \theta$ . Kui putukas rakendab minimaalset tarvilikku jõudu, siis

$$F_h = \mu N = mg \sin \theta,$$

ehk

$$N = \frac{mg \sin \theta}{\mu}.$$

Niisiis,

$$F = N + mg \cos \theta = \frac{mg \sin \theta}{\mu} + mg \cos \theta = mg \left( \frac{\sin \theta}{\mu} + \cos \theta \right).$$

Nüüd on vaja leida, millise  $\theta$  korral on  $F$  maksimaalne. Selleks katsume siinuse ja koosinuse summa avaldada ühe siinusena.

Otsime A ja B nii, et kehtiks võrdus

$$A \sin(\theta + B) = \frac{\sin \theta}{\mu} + \cos \theta.$$

Kuna

$$A \sin(\theta + B) = A \sin \theta \cos B + A \sin B \cos \theta,$$

siis  $A \sin B = 1$  ja  $A \cos B = \frac{1}{\mu}$ . Siit saame  $\tan B = \mu$  ja

$$A = \sqrt{\frac{1}{\mu^2} + 1} = \frac{1}{\mu} \sqrt{1 + \mu^2}.$$

Seega

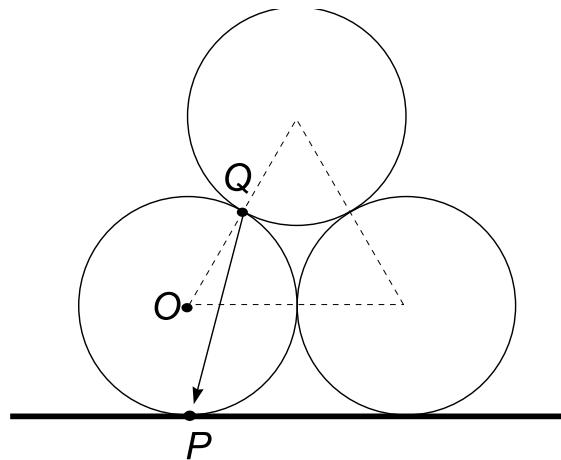
$$F = \frac{mg}{\mu} \sqrt{1 + \mu^2} \sin(\theta + \arctan \mu).$$

Siinuse suurim võimalik väärustus on  $\sin(90^\circ) = 1$ , ehk  $\theta + \arctan \mu = 90^\circ$ . Seega on otsitav nurk  $\theta = 90^\circ - \arctan \mu$ .

### L156 Torud ★★★★

Autor: Jaan Kalda, piirkonnavor, 2010, G 10

Kõige palt paneme tähele, et põhimõtteliselt võiks antud süsteemis toimida rõhumijsjoud kahe alumise silindri vahel, kuid see kaob niipea, kui alumised silindrid natukenelegi üksteisest eemalduvad; niisiis võime sellega mitte arvestada.



Esmalt oletame, et  $\mu$  on piisavalt suur, nii et vastu põrandat toetuvad torud pigem veerevad kui libisevad (kui  $k$  pole piisavalt suur). Vaatleme vastu põrandat toetuvale torule mõjuvate jõumomentide tasakaalu tingimust toru ja põranda kontakt-punkti  $P$  suhtes. Põranda röhumis- ja hõördeju õlg on null; ka raskusjõud  $mg$  õlg on null. Vaadeldavale torule mõjub veel vaid üksainus jõud — ülemise toru põhjustatud hõörde- ja röhumisjõu resultant, mis on rakendatud puutepunkti  $Q$  (vt joonist) ja kui tegemist on libisemise piirjuhuga (st veidigi väiksem hõördetegur  $k$  viiks libisemisele), siis moodustab see vektor pinnanormaaliga nurga arctan  $k$  (sest antud vektor moodustub üksteisega risti olevate röhumisjõu  $N$  ja hõördejõu  $F_h$  vektorite resultandina ning nurga tangens on  $F_h/N = k$ ). Et ülejäänuud jõudude moment oli null, siis peab ka selle jõu moment olema null, st jõu vektor peab olema suunatud punkti  $P$ . Et kolmnurk  $OQP$  on võrdhaarne (vt joonist), siis

$$k \geq \tan 15^\circ \approx 0,27.$$

Nüüd oletame, et  $k \geq \tan 15^\circ$  ning vaatleme libisemise piirjuhu punktis  $P$ . Seloleks vaatleme jõumomentide tasakaalu punkti  $Q$  suhtes. Silindrile mõjuv raskusjõud  $mg$  ning punktis  $P$  toimiv röhumisjõud  $\frac{3}{2}mg$  (mis kompenseerib poolteise silindri raskusjõu) on rakendatud sirge  $OP$  sihis ning nende summaarne jõumoment  $\frac{1}{4}mgR$  (kus  $R$  on silindri raadius) tasakaalustab hõördejõu momendi

$$\frac{3}{2}mg\mu(R + R \sin 60^\circ).$$

Siinjuures arvestasime, et punktis  $P$  toimiv hõördejõud on  $\mu$ -kordne röhumisjõud  $\frac{3}{2}mg$  ning on horisontaalne ja omab seetõttu õlga  $R + R \sin 60^\circ$ . Seega,

$$\mu \geq \frac{1}{6(1 + \sin 60^\circ)} = \frac{1}{6\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)} \approx 0,09.$$

### L157 Tungraud ★★★★☆

Autor: Valter Kiisk, lõppvoor, 2011, G 10

a) Olgu  $a$  tungraua vertikaalne ja  $b$  horisontaalne diagonaal; Pythagorase teoreemi põhjal  $a^2 + b^2 = \text{Const}$ , milles erinevates saame

$$2a\Delta a + 2b\Delta b = 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta a = \frac{-b\Delta b}{a} = -\cot \alpha \Delta b.$$

Siinjuures  $\Delta a$  ja  $\Delta b$  on tungraua kõrguse ja laiuse väikesed muutused. Vändaga ühe täispöörde tegemisel  $\Delta b = -3 \text{ mm}$ . Võrrutades tehtud töö  $2\pi l F_k$  (kus  $l$  on vända pikkus) potentsiaalse energiaga  $F\Delta a$ , saame

$$F_k = \frac{F \cot \alpha \Delta b}{2\pi l} \approx 24 \text{ N}.$$

*Alternatiivne lahendus*

Kui vändale rakendatakse pöördemomenti  $M$ , siis keerates seda väikese nurga  $\Delta\Phi$  võrra tehakse töod  $M\Delta\Phi$ . Kui vord hõõrdumine puudub, siis see töö peab olema sama mis  $F\Delta H$ , kus  $\Delta H$  on tungraua kõrguse muutus. Niisiis

$$M = F \frac{dH}{d\phi} = F \times \frac{dH}{d\alpha} \times \frac{d\alpha}{dL} \times \frac{dL}{d\phi},$$

kus  $L$  on tungraua äärmiste šarniirsete kinnituste vahekaugus. Ilmselt  $H = 2a \sin \alpha$ , kus  $a = 17\text{ cm}$ . Seega  $dH/d\alpha = 2a \cos \alpha$ . Teiselt poolt,  $L = 2a \cos \alpha$ , millest  $dL/d\alpha = -2a \sin \alpha$ . Vända üks täispõõre tingib  $L$  muutuse kruvikeerme sammu  $h$  võrra:  $\Delta L = -(\Delta\Phi/2\pi)h$ . Kokkuvõttes

$$M = F \times (2a \cos \alpha) \times \frac{1}{-2a \sin \alpha} \times \frac{-h}{2\pi} = \frac{Fh \cot \alpha}{2\pi}.$$

Tähistades vända õla pikkuse  $l$ , saame avaldada otsitava jõu:

$$F_k = \frac{M}{l} = \frac{Fh \cot \alpha}{2\pi l} \approx 24\text{ N}.$$

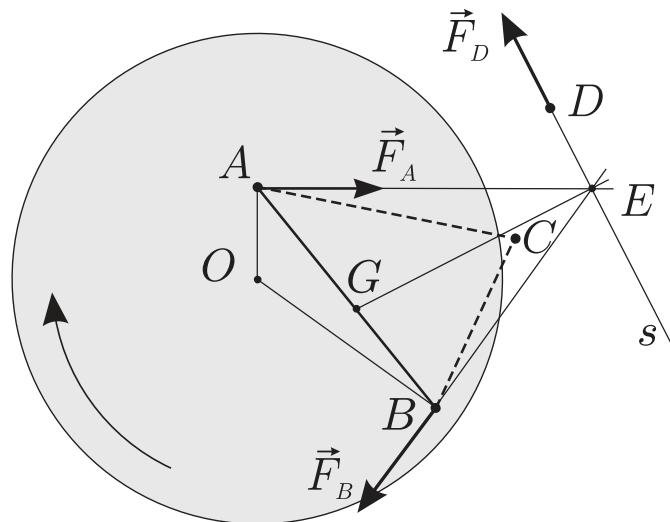
**b)** Kui hõõrdumist ei ole, siis läheb vändast pööramisel tehtav töö puhtalt auto potentsiaalse energia kasvatamiseks. Kui hõõrdumine on olemas tekstis kirjeldatud määral, siis vastupidises suunas pööramisel ei ole jõudu peaaegu vaja rakenda (tungraud püsib libisemise piiri peal) ja seega on potentsiaalse energi muut oma moodulilt vordne hõõrdejõudude töoga. Kui vändata päripidi (auto kergitamiseks), siis hõõrdejõu töö ei muutu (võrreldes sama nurga võrra vastupidi pööramisega) ja on seetõttu endiselt vordne potentsiaalse energi muuduga. Niisiis tuleb võrreldes hõõrdevaba pööramisega sooritada kaks korda suuremat tööd, st rakendatav jõud peab olema täpselt kaks korda suurem, kui esimeses osas. Seega  $F_1 = 2F = 48\text{ N}$ .

### L158 Platvorm ★★★★

Autor: Jaan Kalda, lõppvoor, 2005, G 10

**a)** Kolmnurk hakkab põranda suhtes liikuma, sest summaarne jõumoment punkti  $C$  suhtes koosneb kahest liidetavast, mis omavad ühte ja sama märki ning on nullist erinevad. Selles veendumiseks tuleb tömmata punktidesse  $A$  ja  $B$  rakendatud hõõrdejõudude pikendused  $AE$  ja  $BE$  ( $E$  on nende pikenduste löikepunkt), mis on risti vastavalt raadiustega  $OA$  ja  $OB$  (vt joonist).

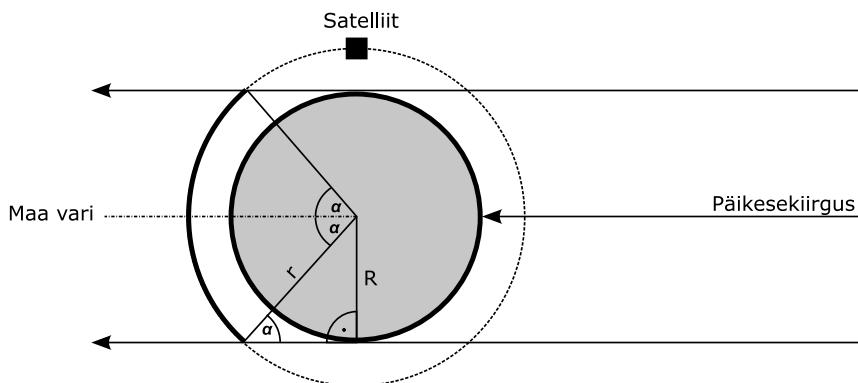
**b)** Süsteemile mõjub kolm horisontaalsunalist jõudu. Jõumomentide tasakaalu tingimusest järeltub et nende jõudude pikendused peavad lõikuma ühes punktis  $E$ . Olgu kolmas keha punktis  $D$ . Siis punkti  $D$  rakendatud hõõrdejõud peab olema suunatud piki sirget  $ED$ . Teisest küljest, jõudude tasakaalu tingimusest lähtuvalt peavad hõõrdejõudude vektorid moodustama vordhaarse kolmnurga  $\vec{F}_A + \vec{F}_B + \vec{F}_C = 0$  (vordhaarse, sest punktidesse  $A$  ja  $B$  rakendatud jõud on moodulilt võrdsed,  $|\vec{F}_A| = |\vec{F}_B|$ ).



Selletõttu peab vektorite  $\vec{F}_A$  ja  $\vec{F}_D$  vaheline nurk võrduma vektorite  $\vec{F}_D$  ja  $\vec{F}_B$  vahise nurgaga. Niisiis peab sirge  $ED$  ristuma nurga  $\angle AEB$  poolitajaga  $EG$ . See tähendab, et punktihulgaks  $X$  on sirge  $s$ , mis ristub nurga  $\angle AEB$  poolitajaga  $EG$ . Lõpetuseks paneme tähele, et hõõrdejõud  $\vec{F}_D$  peab olema moodulilt väiksem, kui  $\vec{F}_A$  ja  $\vec{F}_B$ , sest muidu toimiks kolmaka keha juures libisemine. Nii ka on, sest nuk  $\angle AEB$  on väiksem kui  $60^\circ$  ( $60^\circ$ , st võrdkühlse kolmnurga puhul oleks jõudude kolmurgas  $\vec{F}_A + \vec{F}_B + \vec{F}_C = 0$  kõik küljed võrdsed,  $60^\circ$  väiksemate nurkade puhul aga oleks vektor  $\vec{F}_C$  oma moodulilt teistest väiksem).

### L159 Satelliit ★

Autor: Mihkel Pajusalu, piirkonnavor, 2011, G 2



Ringikujulisel orbiidil on satelliidi kiirus kogu orbitaalperioodi jooksul konstantne ja seetõttu on varjus veedetud osa ajast võrdne orbiidi varjus oleva osa pikkuse ja kogu orbiidi pikkuse suhtega, mis on ülal toodud jooniselt leitav kui

$$k = \frac{2\alpha r}{2\pi r} = \frac{\arcsin\left(\frac{R}{r}\right)}{\pi} = 36,5\%$$

**L160 Väike prints ★**

Autor: Urmo Visk, piirkonnavaor, 2009, G 1

Kui väike prints könnib piki asteroidi ekvaatorit, mõjub talle gravitatsioonijõud, mis põhjustab kesktõmbekiirendust. Kaalugu väike prints  $m$  kilogrammi. Newtoni II seaduse põhjal

$$m \frac{v^2}{R} = G \frac{mM}{R^2} \Rightarrow v^2 = \frac{GM}{R}.$$

Asteroidi mass pole teada, kuid teada on asteroidi tihedus. Kui asteroidi raadius on  $R$ , siis on asteroidi ruumala  $V = \frac{4}{3}\pi R^3$  ja mass

$$M = \rho V = \frac{4}{3}\pi\rho R^3.$$

Asendades massi esialgsesse avaldisse saame

$$v^2 = \frac{GM}{R} = \frac{G}{R} \cdot \frac{4}{3}\pi\rho R^3 = \frac{4}{3}\pi\rho GR^2.$$

Siiet avaldame asteroidi raadiuse:

$$R = v \sqrt{\frac{3}{4\pi\rho G}} = \frac{v}{2} \sqrt{\frac{3}{\pi\rho G}} = 5 \text{ km}.$$

**L161 Eksinud satelliit ★★**

Autor: Tundmatu autor, lahtine, 2009, G 5

Leiame geostatsionaarse orbiidi raadiuse, olgu see  $r$ . Sellel orbiidil on satelliidi tiirlemise periood  $T = 24 \text{ h} = 86400 \text{ s}$  ning nurkkiirus  $\omega = \frac{2\pi}{T} = 7,27 \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-1}$ . Olgu satelliidi mass  $m$  ja Maa mass  $M$ . Satelliit liigub kesktõmbekiirendusega  $a = \omega^2 r$  ning talle mõjub gravitatsioonijõud

$$F_G = G \frac{Mm}{r^2}.$$

Newtoni II seaduse põhjal

$$G \frac{Mm}{r^2} = m\omega^2(R + h) \Rightarrow r^3 = \frac{GM}{\omega^2}.$$

Raskuskiirendus maapinnal võrdub  $g = G \frac{M}{R^2}$ , kust saame avaldada  $GM = gR^2$ . Saame nüüd asendada

$$r^3 = \frac{gR^2}{\omega^2} \Rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{gR^2}{\omega^2}} \approx 42300 \text{ km}.$$

Satelliidi orbitaaliikumise kiirus on seega  $v_0 = \omega r = 3,08 \text{ km/s}$ . Põrkekiirus on maksimaalne siis, kui „eksinud“ satelliit tiirleb samal ringorbiidil mis teised sidusatelliidid, kuid liikumise suund on vastupidine. Sel juhul

$$v = 2v_0 = 6,16 \text{ km/s}.$$

**L162 Kosmosejaam ★★**

Autor: Oleg Košik, lõppvoor, 2005, G 9

Maa pöörlemise tõttu ümber oma telje tekivad trajektoori nihked. Mõõdame nihke pikkuse ekvaatoril  $\Delta l$  ning ekvaatori pikkuse (ehk kogu kaardi laiuse)  $l$ . Nende suhe määrab kosmosejaama nurkkiiruse  $\omega_J$  ja maa pöörlemise nurkkiiruse  $\omega_M$  suhte:

$$\alpha = \frac{l}{\Delta l} = \frac{\omega_J}{\omega_M} \approx 15,7.$$

Arvestades, et maa pöörlemise nurkkiirus on  $\omega_M = 2\pi/T$ , kus  $T$  on ööpäeva pikus ehk 86 400 s, leiate

$$\omega_J = \alpha \omega_M = \frac{2\pi\alpha}{T}.$$

Kosmosejaamale mõjuv gravitatsioonijõud määrab kesktõmbekiirenduse:

$$mg' = m\omega_J^2 r = m\omega_J^2(R + h),$$

kus  $g'$  on raskuskiirendus kõrgusel  $h$  maapinnast. Gravitatsiooniseadusest teame, et raskuskiirendus on pöördvõrdeline kauguse ruuduga, milles

$$g' = g \left( \frac{R}{r} \right)^2 = g \left( \frac{R}{R+h} \right)^2.$$

Kombineerides kaks viimast võrrandit, saame

$$\omega_J^2(R + h) = g \left( \frac{R}{R+h} \right)^2,$$

kust ostitav kõrgus on

$$h = \sqrt[3]{\frac{gR^2}{\omega_J^2}} - R = \sqrt[3]{\frac{gR^2 T^2}{4\pi^2 \alpha^2}} - R \approx 359 \text{ km}.$$

*Märkus.* Tegelik kõrgus varieerub 350 ja 365 km vahel (Maa raadius ei ole kõikjal ühesugune). Siin  $\alpha$  väärus oli mõõdetud suhteliselt täpsete arvutigraafika vahenditega, joonlauga joonise mõõtmise korral esinevate ebatäpsuste tõttu võib vastus erineda tegelikust kuni 200 kilomeetri võrra.

**L163 Kuukaabel ★★★**

Autor: Siim Ainsaar, piirkonnavor, 2009, G 10

a) Maa avaldab kaablile jõudu

$$F_M = Gm_M\lambda \left( \frac{1}{r_M} - \frac{1}{D - r_K} \right),$$

analoogiliselt Kuu,

$$F_K = Gm_K\lambda \left( \frac{1}{r_K} - \frac{1}{D - r_M} \right).$$

Suhe on seega

$$\frac{F_M}{F_K} = \frac{m_M \left( \frac{1}{r_M} - \frac{1}{D - r_K} \right)}{m_K \left( \frac{1}{r_K} - \frac{1}{D - r_M} \right)} \approx 21,9.$$

b) Leiame kaablit pingutava jõu  $T(x)$  Kuu keskmest mingil kaugusel  $x$ . Sellest kaugusest Maa-poolset kaabliosa mõjutavad kolm jõudu: kaabli pinge  $T(x)$  ning Maa ja Kuu poolt avaldatavad raskusjõud. ( $x$ -st Kuu-poolset osa mõjutab ka otsa Kuu küljes hoidev jõud, selle arvutamiseks pole tarvidust.) Nimetatud jõud on tasakaalus, mistõttu

$$T(x) = G\lambda m_M \left( \frac{1}{r_M} - \frac{1}{D - x} \right) - G\lambda m_K \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{D - r_M} \right).$$

Kaabel katkeks seal, kus pingे on tugevaim, seega lahendame ekstreemumülesande ja leiame  $T(x)$  maksimumi. Seal tuletis  $T'(x) = 0$ . Kui saame ainult ühe mõistliku lahendi, pole ekstreemumi liigi määramiseks teist tuletist vajagi: teame, et kosmoses on  $T$  suurem kui kaabli otstes (taevakehapinnalt kaabliosade eralduspunkti eemaldades kasvab lähema keha tõmme alumisele, „tekkivale“ kaablipoolole ilmselt kiiremini kui kahaneb teise keha tõmme ülemisele; osade suhtelised massid muutuvad oluliselt erineva kiirusega), tänu millele (vähemalt) üks maksimum eksisteerib.

$$T'(x) = -\frac{G\lambda m_M}{(D - x)^2} + \frac{G\lambda m_K}{x^2} = 0 \implies x = \frac{D}{1 \pm \sqrt{\frac{m_M}{m_K}}}.$$

Miinusmärgiga lahend on negatiivsena mittefüüsikaline, seega otsitavaks kõrguseks osutub

$$h = \frac{D}{1 + \sqrt{\frac{m_M}{m_K}}} - r_K \approx 36\,200 \text{ km}.$$

**L164 Satelliidid ★★★★**

Autor: Mihkel Kree, lõppvoor, 2010, G 7

Lähtume analoogiast molekulaarfüüsikaga, kus ühe molekuli vaba tee hindamisel arvestatakse, et molekul liigub ilma põrgeteta tüüpiliselt aja jooksul, mil tema kokkupõrke-ristlõige on katnud ruumala, milles asub tüüpiliselt üks osake (see ruumala avaldub kui anuma ruumala jagatud osakeste arvuga). Kokkupõrke-ristlõige pole päris identne osakese enda ristlõikega – vaatleme näiteks kera-kujulisi osakesi raadiusega  $r$ , osakesed põrkuvad kui nende tsentrid ei ole teineteisest kaugemal kui  $2r$ , niisiis on ühe osakese kokkupõrke-ristlõige neli korda suurem tema ristlõikest.

Satelliidid liiguavad ruumiosas ruumalaga

$$V = \frac{4\pi}{3} [(R + h_2)^3 - (R + h_1)^3] \approx 1,2 \cdot 10^{12} \text{ km}^3.$$

Liikumisruum ühe satelliidi kohta on seega  $V/N$  (niisuguse ruumalaga suvaliselt valitud ruumiosast leiame tüüpiliselt ühe satelliidi).

Aja  $t$  jooksul katab ühe satelliidi kokkupõrke-ristlõige ruumala

$$V_t = 4Svt,$$

kus  $v$  on tüüpiline satelliidi liikumise kiirus. Me ei tee suurt viga, võttes  $v$  väärtsuseks esimese kosmilise kiiruse (kiirus sõltub raadiuse ruutjuurest ning suhteline viga oleks ainult  $\sqrt{\frac{6400+2000}{6400}} \approx 1,15$ ):

$$\frac{v^2}{R} = \frac{GM}{R^2} = g.$$

Niisiis,

$$V_t = \sqrt{gR}4St.$$

Eelneva arutluse kohaselt arvestame, et ühel satelliidil tuleb kokkupõrget oodata niisugune ajavahemik  $t$ , et  $V_t = V/N$ . Et meil on aga  $N$  satelliiti, siis esimese niisuguse kokkupõrkeni kulub  $N$  korda vähem aega. Seega,

$$\Delta t = \frac{V}{N^2 4S \sqrt{gR}} = \frac{1,2 \cdot 10^{12} \cdot 10^9}{4 \cdot 2,5^2 \cdot 10^6 \cdot 10 \cdot \sqrt{10 \cdot 64 \cdot 10^2 \cdot 10^3}} s = 6 \cdot 10^8 \text{ s},$$

ehk

$$\Delta t = \frac{6 \cdot 10^8}{3600 \cdot 24 \cdot 365} \approx 19 \text{ a.}$$

**L165 Balloon ★**

Autor: Jaan Susi, lõppvoor, 2005, G 3

Termodünaamika I seaduse kohaselt  $\Delta U = Q - A$ , kus  $Q$  on süsteemi antud soojushulk ning  $A$  on välisjõudude vastu tehtud töö. Antud ülesande kontekstis on  $Q$  negatiivne ja  $A$  positiivne ning  $A = p\Delta V$  ja  $Q = -\lambda\rho_v V$ . Niisiis,

$$\Delta U = -\lambda\rho_v V - p \left( \frac{V\rho_v}{\rho_j} - V \right) = -\rho_v V [\lambda + p (\rho_j^{-1} - \rho_v^{-1})].$$

Paneme tähele, et avaldis nurksulgudes peaks kujutama endast sulamissoojust normaaltingimustel (sest vee võib viia samasse lõppolekusse ka teisel viisil – muutes ta jäiks normaaltingimustel ning seejärel viies rõhu etteantud väärtsuse-ni; et jäää loeme kokkusurumatuks, siis rõhu tõstmisel tööd ei tehta). Paistab, et tegemist pole siiski päris hariliku veega, sest

$$\lambda + p (\rho_j^{-1} - \rho_v^{-1}) = 323 \text{ kJ/kg} \neq \lambda_0 = 334 \text{ kJ/kg}.$$

Arvandmete asendamisel leidame  $\Delta U = -3,23 \text{ MJ}$ .

**L166 Kütteklaas ★**

Autor: Jaak Kikas, lõppvoor, 2007, G 1

Kehtivad valemid

$$P = \frac{U^2}{R}, \quad R = \frac{\rho L}{S},$$

kus  $\rho$  on kattekihi eritakistus. Seega vastavalt orientatsioonile  $R_H = \rho b / da$  ja  $R_V = \rho a / db$ , kus  $d$  on kattekihi paksus. Niisiis,

$$P_H/P_V = a^2/b^2 = 0,25.$$

**L167 Jääkuul ★**

Autor: Urmo Visk, piirkonnavoor, 2008, G 4

Rõhk kuuli sees kasvab seetõttu, et õhk kuulis soojeneb. Ülesande teksti põhjal võime eeldada, et õhu temperatuur kuuli sees on võrdne tema seinte temperatuuriga. Meie ülesandeks on kontrollida, kui palju on rõhk kasvanud selleks hetkeks, kui seinad hakkavad sulama, st on saavutanud temperatuuri  $t_1 = 0^\circ\text{C}$ . Eeldame, et kera soojuspaisumine on tühine. Siis on õhu ruumala keras konstantne. Isohoorilises protsessis kehtib seos

$$\frac{p_1}{T_1} = \frac{p_0}{T_0}.$$

Tähistame indeksiga „0“ gaasi omadusi külmikus ja indeksiga „1“ omadusi temperatuuril, mille juures seinad hakkavad sulama. Niisiis

$$p_1 = p_0 \frac{T_1}{T_0}.$$

Kasutades seda tulemust saame avaldada rõhu suhtelise muutuse

$$\frac{\Delta p}{p_0} = \frac{p_1 - p_0}{p_0} = \left( \frac{T_1}{T_0} - 1 \right).$$

Leiame selle avaldise numbrilise väärtsuse:

$$\frac{\Delta p}{p_0} \approx 0,034 = 3,4\%.$$

See on selgelt väiksem, kui kuuli seinte purunemispiir, st kuul hakkab enne sulama (kuid puruneb ilmselt ülerõhu tõttu enne löplikku ära sulamist).

*Märkus.* Alternatiivse ja võrdväärsse lahendusena võib leida, millise õhutemperatuuri juures saavutaks suhteline ülerõhk väärtsuse 20 % (selleks tuleb 317 K ehk 44 °C) ja võrrelda seda jägi sulamistemperatuuriga.

### L168 Küttesüsteem ★

Autor: Tundmatu autor, piirkonnavor, 2011, G 3

Paisumisel lisanduva ruumala jaoks peab olema paisupaagis piisavalt lisaruumi. Vajalik ruumala on

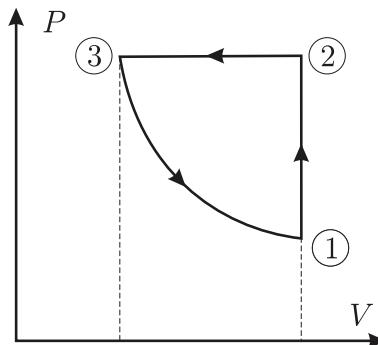
$$V - V_1 = V_0 (1 + \beta t_2) - V_0 (1 + \beta t_1) = \frac{V_1 \beta}{1 + \beta t_1} (t_2 - t_1).$$

Vajalik vaba ruum paisupaagis on seega  $V - V_1 \approx 4,01$ .

### L169 Ringprotsess ★

Autor: Riho Taba, piirkonnavor, 2006, G 2

Antud joonise saab teisendeda telgedega  $P$  ja  $V$  graafikuks, kus iga tsükli osa töö on arvuliselt võrdne antud graafiku osa alla jäava pindalaga (sest tehtud töö on  $P\Delta V$ ). Ideaalse gaasi töö protsessi osal  $1 \rightarrow 2$ :  $A_{1 \rightarrow 2} = 0$ , protsessi osal  $2 \rightarrow 3$ :  $A_{2 \rightarrow 3} < 0$  ning protsessi osal  $3 \rightarrow 1$ :  $A_{3 \rightarrow 1} > 0$ , kuid  $|A_{2 \rightarrow 3}| > |A_{3 \rightarrow 1}|$ , seega  $A_{1 \rightarrow 2 \rightarrow 3} < 0$ , ehk gaasi tehtud töö on negatiivne.



**L170 Vedelike segamine ★** Autor: Aleksei Vlassov, piirkonnavor, 2007, G 3

Olgu vedelike tihedused vastavalt  $\rho_1$  ja  $\rho_2$  ning erisoojused  $c_1$  ja  $c_2$ . Olgu otsitav temperatuur  $t_4$ . Paneme kirja energia jäätuse võrrandid mõlema segu jaoks:

$$\begin{cases} \rho_1 V c_1 (t_3 - t_1) = \rho_2 V c_2 (t_2 - t_3) \\ 2\rho_1 V c_1 (t_4 - t_1) = \rho_2 V c_2 (t_2 - t_4) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \rho_1 c_1 (t_3 - t_1) = \rho_2 c_2 (t_2 - t_3) \\ 2\rho_1 c_1 (t_4 - t_1) = \rho_2 c_2 (t_2 - t_4). \end{cases}$$

Korrutame esimese võrrandi vasaku poole läbi teise võrrandi parema poolega:

$$\rho_1 c_1 \rho_2 c_2 (t_3 - t_1) (t_2 - t_4) = 2\rho_1 c_1 \rho_2 c_2 (t_4 - t_1) (t_2 - t_3).$$

ehk

$$(t_3 - t_1) (t_2 - t_4) = 2(t_4 - t_1) (t_2 - t_3).$$

Siihul avaldame  $t_4$ :

$$t_4 = \frac{t_1 t_2 + t_2 t_3 - 2t_1 t_3}{2t_2 - t_1 - t_3} = 39^\circ\text{C}.$$

**L171 Tulehõõrumine ★**

Autor: Jaak Kikas, piirkonnavor, 2008, G 3

Varda pöörlemisel käigus muutub hõõrdejõu ületamiseks tehtud töö soojuseks. Toru otspinna ja aluse vahel mõjub hõõrdejõud  $F_h$ , mis võrdub pinnaga ristuvaga rõhumisjõu ja hõõrdeteguri korrutisega. Rõhumisjõuks on jõud  $F$ , millega surutakse toru vastu alust. Seega  $F_h = \mu F$ . Kui toru teeb ühe pöörde, siis läbib toru sein teepikkuse  $L = \pi D$ . Hõõrdejõu ületamiseks tehti ühe pöörde läbimisel töö  $A = F_h L$ . Kui toru pöörleb sagedusega  $f$ , siis aja  $t$  jooksul teebs toru  $N = f t$  pööret. Kokku eraldub toru pöörlemisel soojushulk

$$Q = AN = \mu F \pi D f \Delta t.$$

**L172 Termos ★**

Autor: Urmo Visk, piirkonnavor, 2009, G 3

Olgu  $c_x$  otsitav erisoojus.

Vaatleme esimest juhtu, kus termoses oli algsest külmem vesi. Kuna külmem vesi oli termosega soojuslikus tasakaalus, siis oli ka termose temperatuur  $t_1$ . Temperatuuride ühtlustumisel annab soojem vesi energiat ära. Külmem vesi ja termos saavad energiat juurde. Paneme kirja soojusliku tasakaalu võrrandi:

$$m_1 c (T_1 - t_1) + mc_x (T_1 - t_1) = m_2 c (t_2 - T_1). \quad (1)$$

Vaatleme teist juhtu, kus termoses oli algsest soojem vesi. Kuna soe vesi oli termosega soojuslikus tasakaalus, siis oli ka termose temperatuur  $t_2$ . Temperatuuride ühtlustumisel annavad termos ja soojem vesi energiat ära. Külmem vesi saab energiat juurde. Kirjutame soojusliku tasakaalu võrrandi:

$$m_1 c (T_2 - t_1) = m_2 c (t_2 - T_2) + mc_x (t_2 - T_2). \quad (2)$$

Lahutame teineteisest võrrandid (2) ja (1).

$$m_1 c (T_1 - T_2) + mc_x (T_1 - t_1) = m_2 c (T_2 - T_1) - mc_x (t_2 - T_2).$$

Tähistame  $T_2 - T_1 = \Delta T$ . Allpool on toodud  $c_x$  tuletuskäik eelnevast valemist.

$$\begin{aligned} -m_1 c \Delta T + mc_x (t_2 - t_1) &= m_2 c \Delta T + mc_x \Delta T \implies \\ -\Delta T c (m_2 + m_1) &= mc_x (\Delta T + t_1 - t_2) \implies \\ c_x &= -\frac{\Delta T c (m_2 + m_1)}{m (\Delta T + t_1 - t_2)} = 930 \text{ J/kg C}. \end{aligned}$$

### L173 Rauatükk ★

Autor: Oleg Košik, lahtine, 2010, G 2

Algne vee mass on  $M = \rho V = 1000 \text{ g}$ . Olgu väljaaurustunud vee mass  $m_0$ . Selle soojendamiseks keemistemperatuurini  $t = 100^\circ\text{C}$  ning aurustamiseks läheb vaja energiat

$$Q_1 = m_0(c_1(t - t_1) + L).$$

Ülejää nud vee soojendamiseks temperatuurini  $t_2$  läheb energiat

$$Q_2 = (M - m_0)c_1(t_2 - t_1).$$

Raua jahtumisel eraldub energia  $Q_3 = mc_2(t_0 - t_2)$ . Energia jäädvuse seaduse kohaselt  $Q_1 + Q_2 = Q_3$ , ehk

$$m_0(c_1(t - t_1) + L) + (M - m_0)c_1(t_2 - t_1) = mc_2(t_0 - t_2).$$

Sit

$$m_0 = \frac{mc_2(t_0 - t_2) - Mc_1(t_2 - t_1)}{c_1(t - t_2) + L} \approx 2 \text{ g}.$$

### L174 Jõhvikkad ★

Autor: Urmo Visk, piirkonnavor, 2010, G 2

Vee algtemperatuur oli  $t_1 = 100^\circ\text{C}$ . Olgu vee ja jõhvikkate massid vastavalt  $M$  ja  $m$ . Jõhvikkate soojendamiseks kuluv soojushulk tuleb vee jahtumise arvelt. Vee jahtumisel eralduv soojushulk oli

$$Q_j = Mc_V(t_1 - t).$$

Jõhvikkate soojendamise käigus tuli 1) soojendada külmunud jõhvikkad sulamistemperatuurini, 2) sulatada külmunud jõhvikkad ja 3) soojendada sulanud jõhvikkad vee temperatuurini. Leiate igas etapis kulunud soojushulga:

$$\begin{aligned} Q_{s1} &= mc_j(0 - t_2) = -mc_j t_2, \\ Q_{s2} &= mL, \\ Q_{s3} &= mc_v(t - 0) = mc_v t. \end{aligned}$$

Liidame jõhvivate soojendamiseks kulunud soojushulgad ja võrdsustame saadud summa vee jahtumisel eraldunud soojushulgaga. Saadud võrrandist avaldame vee ja jõhvivate masside suhte:

$$-mc_j t_2 + mL + mc_v t = Mc_V(t_1 - t),$$

kust

$$\frac{M}{m} = \frac{-c_j t_2 + L + c_v t}{c_V(t_1 - t)}.$$

Arvuliseks vastuseks saame 16.

### L175 Vesi ★

Autor: Taavi Pungas, lõppvoor, 2011, G 1

Energia jäävusest teame, et väikese koguse vee aurustumiseks kuluv soojushulk tuleb järelejäänud vee temperatuuri langemise arvelt.

Kuigi aurustumise alghetkel tekib veeaur temperatuuriga  $100^\circ\text{C}$ , on hiljem nii vee kui tekkiva veeauru temperatuur veidi madalam. Uuel temperatuuril aga ei ole enam väikese koguse vee aurustumiseks kuluv soojushulk otseselt arvutatav vee aurustumissoojusest temperatuuril  $100^\circ\text{C}$  (ülesandes antud  $L$ ).

Seega teeme lihtsustuse, et vee aurustumissoojus on selles temperatuurivahemikus kogu aeg  $L$ . Olgu esialgselt termoses oleva vee mass  $m$ . Saame  $0,01mL = 0,99mc_v\Delta t$ , mis annab vastuseks

$$\Delta t = \frac{1}{99} \frac{L}{c_v} = 5,4^\circ\text{C}.$$

### L176 Kastmisvesi ★★

Autor: Urmo Visk, piirkonnnavoor, 2008, G 5

Kastmisvee anuma taha tekib kiirtega ristuvale tasandile ringikujuline vari. Samasugune vari tekiks ka ringist, mis paikneb risti päikesekiirtega. Seega neelavad võrdse raadiusega kera ja kiirtega risti olev ring valgust võrdsest, sõltumata päikesevalguse langemise nurgast. Järelikult on veeanuma poolt ühes sekundis neelatav soojushulk  $P = \varepsilon\pi R^2$ . Päeva jooksul saadav soojushulk on  $Q = P\tau$ , kus ajavahemik

$$\tau = 22,5\text{ h} - 4,5\text{ h} = 18\text{ h} = 64\,800\text{ s}.$$

Teisest küljest kulub see soojus vee soojendamisele, st  $Q = C\Delta t$ , kus  $\Delta t$  on vee temperatuuri muutus ja vee soojusmahtuvus  $C = mc$ . Siinjuures vee mass  $m = (4/3)\pi R^3\rho$ . Niisiis

$$\pi R^2 \cdot \varepsilon\tau = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho c \Delta t,$$

millega

$$\Delta t = \frac{3\varepsilon\tau}{4c\rho R}$$

ja järelikult lõpptemperatuur on

$$t = t_0 + \frac{3\varepsilon\tau}{4c\rho R};$$

numbriliselt  $t \approx 28^\circ\text{C}$ .

**L177 Lihvimisketas ★★**

Autor: Ott Krikmann, piirkonnavor, 2005, G 3

Kettaal aja  $t = 1\text{ s}$  jooksul eraldub soojushulk

$$Q = \frac{\pi r^2 q}{s}.$$

Sama aja jooksul voolab vesi massiga

$$m = wt\rho.$$

Et jahutusvesi kannab kogu eralduva soojuse, siis võib koostada soojusbalansi võrrandi aja  $t = 1\text{ s}$  jaoks:

$$\frac{\pi r^2 q}{s} = wt\rho c(t_2 - t_1).$$

Siit võrrandist avaldame  $t_2$ :

$$t_2 = t_1 + \frac{\pi r^2 q}{swt\rho c} \approx 40^\circ\text{C}.$$

**L178 Vee keemine ★★**

Autor: Mihkel Kree, lõppvoor, 2008, G 6

Leiame pindpinevuse tõttu mullis tekkiva lisarõhu. See on teatavasti  $P = \frac{2\sigma}{r}$ . Seda saab mitmel moel töestada. Üks võimalus on vaadelda mulli keskpunkti läbi-vat tasandit, mis jaotab kera kaheks poolkeraks. Poolkerasid tömbab kokku pind-pinevusjoud  $F = 2\pi r\sigma$ . Jöudude tasakaalust peab see olema võrdne lisarõhu poolt tekitatud jõuga  $F = \pi r^2 \cdot P$ . Seega tekib pindpinevus mullis lisarõhu  $P = \frac{2\sigma}{r}$ . Samale tulemusele võiksime jõuda ka järgnevalt. Pindpinevuse pinnaenergia avaldub teatavasti kui  $E = \sigma 4\pi r^2$ . Suurendades raadiust väikese  $\Delta r$  võrra, on energia muut

$$\Delta E = 4\pi\sigma((r + \Delta r)^2 - r^2) \approx 8\pi\sigma r \Delta r.$$

Samas avaldub energia muut rõhu kaudu kui

$$A \approx pS\Delta r = 4\pi r^2 p \Delta r.$$

Kuna  $A = \Delta E$ , siis  $p = \frac{2\sigma}{r}$ .

Kuni 105 kraadini ei toimunud keemist, seega pidid mullid olema nii väiksed, et pindpinevuse poolt tekitatud lisarõhu ja õhurõhu summa jää suuremaks kui küllastunud veeauru rõhk:  $p_0 + \frac{2\sigma}{r} > p_{\text{aur}} = p_0 + 5 \cdot 3,5 \text{ kPa}$ , siit

$$r = \frac{2\sigma}{5 \cdot 3,5 \text{ kPa}} = 6,6 \mu\text{m}.$$

**L179 Vesi ja jää ★★**

Autor: Andres Laan, piirkonnavor, 2010, G 5

Soojusvoog läbi vee kihi on määrtud valemiga

$$Q = D \frac{S \Delta T}{l},$$

kus  $S$  on kihi pindala,  $l$  selle paksus,  $\Delta T$  kihi ülemise ja alumise pinna temperatuuride vahe ning  $D$  vastava vee faasi soojuhtivuskoeffitsient. Vaatleme vedela ja tahke faasi piirpinda. Antud pinna temperatuur on  $0^\circ\text{C}$ . Tahkest pooltest tulev soojusvoo võimsus on  $Q_t = D_t S T_1 / l_t$  ja vedelast faasist tuleva voo võimsus on  $Q_v = D_v S T_2 / l_v$ . Statsionaarses olukorras, kus piirpinna asukoht ei muutu, tasakaalustavad antud vood üksteist ära. Arvestades, et mõlema faasi pindalad on võrdsed, saame

$$\frac{D_t T_1}{l_t} = -\frac{D_v T_2}{l_v}.$$

Kasutame ära asjaolu, et tahke ja vedela kihi paksuste suhe oli alguses 4:

$$\frac{D_t}{D_v} = -\frac{T_2 l_t}{T_1 l_{v1}} = -\frac{-20 \cdot 4}{20 \cdot 1} = 4,$$

Teisel juhul

$$T'_2 = -\frac{D_t}{D_v} \frac{l'_v}{l'_t} T_1 = -4 \frac{l'_v}{l'_t} T_2 = 80^\circ\text{C}.$$

**L180 Destillaator ★★**

Autor: Koit Timpmann, lõppvor, 2010, G 2

Kahe liitri vee mass on  $m = 2 \text{ kg}$ . Kondenseerudes eraldub soojushulk  $Q = Lm$ . 95% eraldunud soojushulgast laheb jahutusvee soojendamiseks. Seosest  $\eta Lm = cM\Delta T$  saame jahutusvee massi

$$M = \frac{\eta Lm}{c\Delta T}.$$

Jahutusvee massi saame avaldada tiheduse ja ruumala kaudu ning ruumala oma-korda toru ristlõikepindala, voolu kiiruse ja aja kaudu:

$$M = \rho V = \rho Sl = \rho Svt.$$

Viies kokku need kaks võrrandit, saame avaldada kiiruse:

$$v = \frac{\eta Lm}{c\Delta T \rho St} \approx 0,12 \text{ m/s}.$$

**L181 Külmatusseade ★★** Autor: Tundmatu autor, piirkonnnavoor, 2005, G 8  
Külmatusseadme korral on tegu pööratud soojusmasinaga, idealse soojusmasina puhul kehtib seos

$$\frac{A}{Q_j} = \frac{T_j - T_k}{T_j},$$

kus mootori tehtud töö on leitav energia jäävusest

$$A = Q_j - Q_k.$$

Siinjuures  $Q_j$  ja  $Q_k$  on vastavalt jahutusvedelikule ära antud ja jahutatavalta kehalt ära võetud soojushulk. Elimineerides mittevajaliku suuruse  $Q_j$  saame

$$1 + \frac{Q_k}{A} = \frac{T_j}{T_j - T_k},$$

millest

$$Q_k = \frac{AT_k}{T_j - T_k} = 22,6 \text{ kJ}.$$

**L182 Elektripliit ★★** Autor: Tundmatu autor, lahtine, 2007, G 8

Spiraal kuumeneb temperatuurini, mil tekib soojuslik tasakaal spiraali ja ümbritseva keskkona vahel. Kuna spiraalil eraldub võimsus  $P = I^2R$ , peab kehtima  $P = N$  (soojuskadusid arvestamata), ehk

$$\kappa(T - T_0) = I^2 R_0 [1 + \alpha(T - T_0)].$$

Avaldades  $T$ , saame

$$T = T_0 + \frac{I^2 R_0}{\kappa - \alpha I^2 R_0}.$$

Kui  $\kappa \leq \alpha I^2 R_0$  suureneb temperatuur lõpmatuseni ning pliit põleb läbi.

**L183 Õhuaken ★★**

Autor: Jaan Kalda, lõppvoor, 2009, G 6

Soojusvahetuskiirus läbi seinte jms on

$$P_s = \alpha(t - t_0) = P \frac{t - t_0}{t_1 - t_0}.$$

Peale selle toimub soojusvahetus sissetuleva õhu abil  $P_1 = \dot{\nu} \frac{7}{2} R(t - t_0)$ , kus ajahikus sisenevate moolide arv on  $\dot{\nu} = v/V$  ja mooli ruumala  $V = RT/p_0 = 22,4 \text{ l/mol}$ . Seega soojusliku tasakaalu tingimuse saab kirja kujul

$$P = P \frac{t - t_0}{t_1 - t_0} + c_p \frac{v}{V}(t - t_0),$$

millest

$$t = t_0 + \frac{P}{\frac{P}{t_1 - t_0} + c_p \frac{v}{V}} \approx 13,2^\circ\text{C}.$$

**L184 Tuba ★★★**

Autor: Oleg Košik, lõppvoor, 2006, G 7

Temperatuuri kasvu või langemise kiirus on võrdeline tappa siseneva summaarse soojusliku võimsusega. Sellele vastab graafiku puutuja tōus. Ajahetkeni  $t = 1100$  min läheb soojus toast välja, peale seda lisandub kaotatavale võimsusele tuulepuhuja võimsus. Tuulepuhuja võimsusele vastab puutuja tōusu muut mingil temperatuuril. Näiteks hetke  $t = 1100$  min jaoks saame, et puutuja tōusu muut on (ligikaudu)  $8/1000 + 10,2/400 \approx 0,036$  °C/min. Graafiku abil leiate nüüd temperatuuri, mille korral soojuskadude võimsus võrdub tuulepuhuja võimsusega. Selle jaoks võib kasutada joonlauda tōusuga 0,036 °C/min ning määrata punkt graafikus, mis puutub antud sirget. Graafiku esimeses osas on selline punkt umbes temperatuuril  $T = 20$  °C. Seega toatemperatuur pika aja möödumisel on  $T = 20$  °C.

**L185 Küttekeha ★★★**

Autor: Mihkel Heidelberg, lõppvoor, 2007, G 7

Et ruumist eemalduva soojuse hulk on stabiilses olukorras võrdne küttekeha poolt-toodetud soojusega, siis  $P(T_2) = k(T_2 - T_1)$ ,  $k = \frac{P(T_2)}{T_2 - T_1}$ . Teisel juhul jäab  $k$  saamaks:

$$P(T_4) = \frac{P(T_2)}{T_2 - T_1} (T_4 - T_3),$$

kust on näha, et punkt  $(T_4, P(T_4))$  peab asetsema sirgel, mis läbib punkti  $(T_3, 0)$  ja on sama tōusuga ( $k$ ), kui punkte  $(T_2, P(T_2))$  ja  $(T_1, 0)$  ühendav sirge. Joonistades sellise sirge, saame graafikute lõikepunktist vastuse.

**L186 Soojuskiirgus ★★★**

Autor: Valter Kiisk, lõppvoor, 2006, G 8

**a)** Tähistame  $j_{s \rightarrow v}$  abil soojusvoogu pindalaühiku kohta, mis on suunatud siseseinalt välisseina poole. Vastassuunalist soojusvoogu tähistame  $j_{v \rightarrow s}$ ,  $j_{s \rightarrow v}$  on tingitud siseseina kiirgusest ja  $j_{v \rightarrow s}$  osalisest peegeldumisest. Analoogiliselt,  $j_{v \rightarrow s}$  on tingitud välisseina kiirgusest ja  $j_{s \rightarrow v}$  osalisest peegeldumisest. Seega siis

$$j_{s \rightarrow v} = \varepsilon \sigma T_s^4 + (1 - \varepsilon) j_{v \rightarrow s}$$

$$j_{v \rightarrow s} = \varepsilon \sigma T_v^4 + (1 - \varepsilon) j_{s \rightarrow v},$$

millega

$$j_{s \rightarrow v} = \sigma \frac{T_s^4 + (1 - \varepsilon) T_v^4}{2 - \varepsilon}, \quad j_{v \rightarrow s} = \sigma \frac{T_v^4 + (1 - \varepsilon) T_s^4}{2 - \varepsilon}.$$

Summaarne soojusvoog on

$$P = S j = S (j_{v \rightarrow s} - j_{s \rightarrow v}) = S \varepsilon \sigma \frac{T_v^4 - T_s^4}{2 - \varepsilon} \approx 22 \text{ W}.$$

**b)** Eelmise punkti vastusest selgub, et kahe seina vahel toimuv soojusvoog on võrdeline vahega  $T_2^4 - T_1^4$ . Seega on siin täielik analoogia elektriahelate teooriaga, kui  $T^4$  tölgendada pingena, soojusvoogu voolutugevusena ning  $(2 - \varepsilon)/(\sigma \varepsilon)$  takistusena. Viimane ei sõltu seinte vahekaugusest. Paigutades sise- ja välisseina vahele  $N$  ekraani, on tegemist  $N + 1$  ühesuguse takisti järgistikühendusega. Järelikult soojusvoog kahaneb  $N + 1$  korda.

### L187 Pooljuht ★★★★

Autor: Tundmatu autor, lahtine, 2008, G 10

Kütteelemendi takistus on

$$R = \frac{\rho L}{S} = \frac{L}{\sigma S},$$

kus  $\rho$  on eritakistus,  $L$  elemendi pikkus,  $S$  elemendi ristlõikepindala ja  $\sigma$  erijuhtivus. Elemendil eralduv võimsus on

$$N = \frac{U^2}{R} = \frac{S}{L} U^2 \sigma.$$

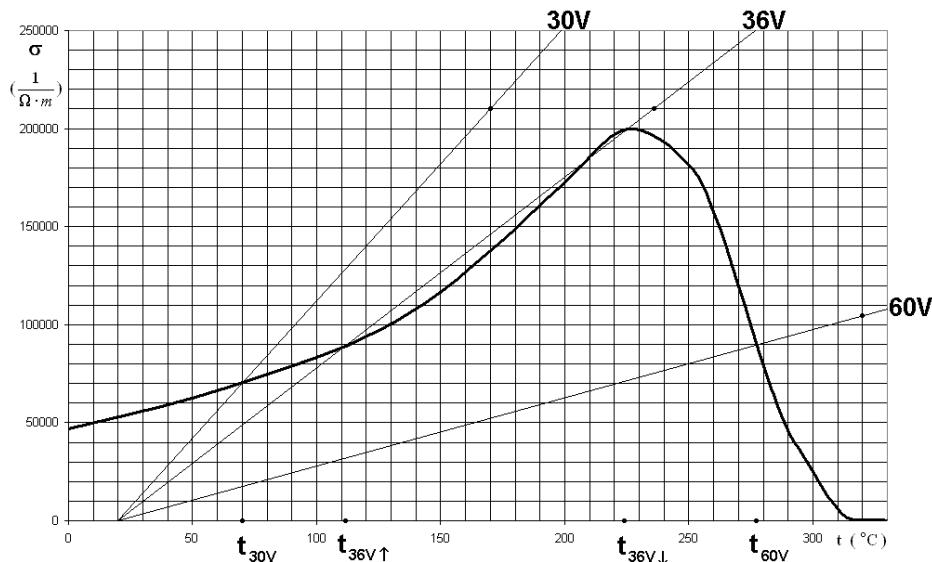
Võimsus, millega keha annab soojust ümbritsevale keskkonnale, on võrdeline temperatuuride vahega ja tasakaalulise temperatuuri puhul peab võrduma kehal eralduva võimsusega. Seega

$$N = k \Delta t = \frac{S}{L} U^2 \sigma.$$

Siit näeme, et

$$\frac{\sigma}{\Delta t} \cdot U^2 = k \frac{L}{S} = \text{Const}, \quad (1)$$

kus aga  $\frac{\sigma}{\Delta t}$  on sirge tõus erijuhtivuse graafikul, kus algpunktiks on  $t_v = 20^\circ\text{C}$  ja  $\sigma = 0$ .



Algtingimusi silmas pidades on pinge  $U_0 = 30 \text{ V}$  juures see tõus  $\left(\frac{\sigma}{\Delta t}\right)_{30} = \frac{7}{5}$  ning arvestades valemit (1) saame

$$\left(\frac{\sigma}{\Delta t}\right)_{30} \cdot U_0^2 = \left(\frac{\sigma}{\Delta t}\right)_{60} \cdot U_1^2 = \left(\frac{\sigma}{\Delta t}\right)_{36} \cdot U_2^2.$$

Siit

$$\left(\frac{\sigma}{\Delta t}\right)_{60} = \frac{U_0^2}{U_1^2} \left(\frac{\sigma}{\Delta t}\right)_{30} = \frac{7}{20},$$

$$\left(\frac{\sigma}{\Delta t}\right)_{36} = \frac{U_0^2}{U_2^2} \left(\frac{\sigma}{\Delta t}\right)_{30} = \frac{35}{36}.$$

Kanname vastavad sirged (alguspunktiga  $t = 20^\circ\text{C}$  ja  $\sigma = 0$ ) graafikule ja loeme vastavad tasakaalulised temperatuurid.

Saame  $U_1 = 60\text{ V}$  puhul  $t_1 = 277^\circ\text{C}$ .

Tekib huvitav nähtus, et tänu mittelineaarsusele on  $U_2 = 36\text{ V}$  puhul pingे tõstmisel ja langetamisel tasakaalulised temperatuurid erinevad, vastavalt pinge tõusu  $t_2 = 112^\circ\text{C}$  ja langetamisel  $t'_2 = 224^\circ\text{C}$ .

Paneme tähele,  $36\text{ V}$  puhul on graafikult loetavaid lahendeid justkui kolm, aga keskmise lahend  $207^\circ\text{C}$  on ebastabiilne. Nimelt olukorras, kus küttekeha on selles temperatuuril, viib väikenegi küttekeha temperatuuri töus võimsuse suurenemiseni ja langus vastavalt võimsuse vähenemiseni, ja seega temperatuur kasvab temperatuurini  $224^\circ\text{C}$  või langeb temperatuurini  $112^\circ\text{C}$ .

**L188 Tunnel ★**

Autor: Jaan Kalda, lahtine, 2008, G 3

Loeme õhu kokkusurumatuks. Sellisel juhul rongi ja tunneli seina vahel juurde voolanud õhu ruumala võrdub rongi eest välja surutud õhu ruumalaga:

$$(b^2 - a^2) u' = a^2 v,$$

kus  $u'$  on õhu kiirus tunneli suhtes. Seega otsitav kiirus on

$$u = v + u' = v \left( 1 + \frac{a^2}{b^2 - a^2} \right) = \frac{vb^2}{b^2 - a^2} = 90 \text{ km/h.}$$

Tegelikult on kiirus veidi väiksem, sest rongi ees surutakse õhk mingil määral kokku ja rongi ees ning taga tekib teatud õhuvool.

**L189 Kuu ★★**

Autor: Urmo Visk, lõppvoor, 2006, G 5

Olgu valgustatus (valgusvoog pinnaühiku kohta) päeval  $I_1$  ja öösel  $I_2$ . Kuna säri-aeg ja valgustatus on pöördvõrdelised, siis kehtib seos

$$t_1/t_2 = I_2/I_1.$$

Öösel valgustab Maad Kuult peegeldunud valgus. Kuna eeldati, et Kuu ja Maa on Päikesest võrdsel kaugusel, siis on valgustatus Kuul ka  $I_1$ . Kui Kuu pind oleks Maad ja Kuud (ning ühtlasi Päikest) ühendava teljega risti, siis oleks Kuu poolt tagasi (Maa poole) suunatud valgusvoo tihedus  $I_k = kI_1$ , kus  $k$  on Kuu pinna keskmise peegeldustegur (albedo). Kuu näiv keskpunkt seda ka on, aga servad mitte. Ometigi, visuaalne kogemus ütleb, et Kuu ketas näib kõikjal enam-vähem ühe heledune. Hinnanguliselt asendagem mötteliselt Kuu „pannkoogiga“, st kettaga, mille raadius on võrdne Kuu raadiusega.

Kuu pinnalt peegeldub Päikeselt sumaarde valgusvoog  $E = I_1 \pi r^2 k$  ning see jäätab ühtlaselt möttelise poolsfääri peale, mille keskpunktis asub Kuu ja pinna peal Maa. Seega jõuab Maale valgusvoog

$$I_2 = \frac{E}{2\pi R^2} = I_1 \frac{r^2 k}{2R^2}.$$

Seega

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{t_1}{t_2} = \frac{r^2 k}{2R^2},$$

ehk

$$k = \frac{t_1}{t_2} \frac{2R^2}{r^2} \approx 8 \text{ \%}.$$

**L190 Maja ★★★**

Autor: Jaan Kalda, lõppvoor, 2008, G 4

Maja teatud punkt  $P$  ja tema peegelkujutis mere pinnalt  $P'$  paiknevad sümmeetriselt mere tasandiga. Vaatleme mõttelist sirget  $PP'$ . Tema lõikepunkt merega  $O$  paikneb mõlemast otsast võrdsel kaugusel ning tänu sellele saame me joonisel punkti  $O$  kergelt määräta kui lõigu  $PP'$  keskpunkti. Maja kõrgus merepinnalt vastab vundamendi kaugusele punktist  $O$ , vt joonist. Mõõtes jooniselt akende vahkauguse  $|AB| = 9,5$  mm ja  $|OQ| = 58,5$  mm saame

$$H = 3 \text{ m} \cdot \frac{|OQ|}{|AB|} = 18,5 \text{ m.}$$

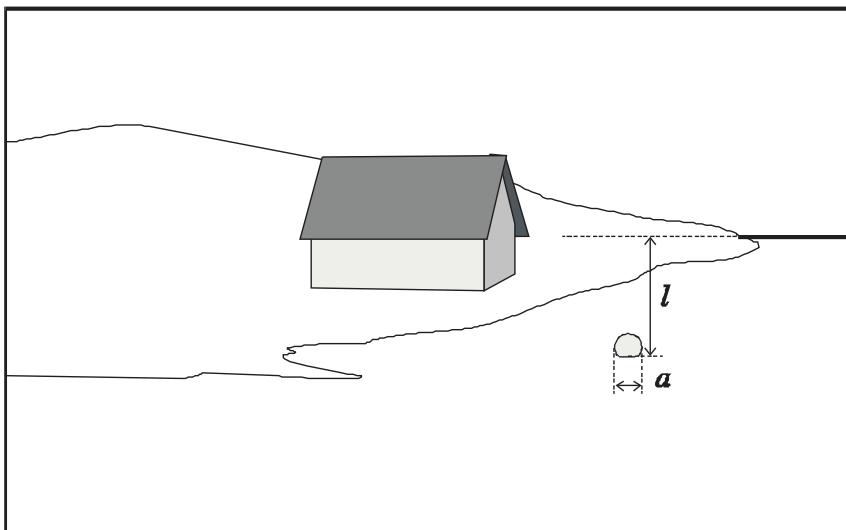


**L191 Maja ★★★**

Autor: Jaan Kalda, lahtine, 2008, G 9

Joonise põhjal võib oletada, et poi on märksa lähemal horisondist (ca 5 km), seega võib Maa kumerust mitte arvestada. Asetame mõtteliselt kahe-meetrise teiba poi kõrvale. Fotoaparaati ja teiba ülemist otsaühendav joon on horisontaalne ja seega läbib horisonti, mis tähendab, et teiba ots puudutab joonisel näha oleva horisondilõigu pikendust. Poi diameetri  $d$  leiame mõõtes joonisel pikkused  $a$  ja  $l$ :

$$d = 2 \text{ m} \cdot \frac{a}{l} = 45 \text{ cm}.$$

**L192 Vedelik ★**

Autor: Tundmatu autor, lahtine, 2005, G 1

Kuna anumad on ühendatud ning vedelikes antakse röhk igas suunas võrdselt edasi, on mõlemas anumas röhud samal körgusel võrdsed. Järelikult võib antud anumaid vaadelda ühe anumana, mille pindala on

$$S = \pi \left( \frac{d_1}{2} \right)^2 + \pi \left( \frac{d_2}{2} \right)^2 = \frac{\pi (d_1^2 + d_2^2)}{4}.$$

Väljasurutud vedeliku mass on võrdne lisatava ujuva keha massiga. Seega on li-sanduva vedeliku ruumala  $\Delta V = m/\rho$  ning körguse muut avaldub kui

$$\Delta h = \frac{\Delta V}{S} = \frac{4m}{\pi \rho (d_1^2 + d_2^2)}.$$

**L193 Veetoru ★★**

Autor: Taavi Pungas, lõppvoor, 2011, G 4

Bernoulli seadusest saame seose

$$\frac{\rho v_1^2}{2} + p_1 = \frac{\rho v_2^2}{2} + p_2.$$

Rõhu torudes leiame veesamba kõrguse järgi,  $p_1 = p_0 + \rho gh_1$  ja  $p_2 = p_0 + \rho gh_2$ , kus  $p_0$  on atmosfäärirõhk. Asendades  $p_1$  ja  $p_2$  esimeses seoses, saame vee kiiruse teises torus:

$$v_2 = \sqrt{v_1^2 + 2g(h_1 - h_2)}.$$

Et torud on ühendatud, peab läbi nende voolama sama aja jooksul sama kogus vett,  $v_1 S_1 = v_2 S_2$ . Kuna toru ristlöikepindala on  $S = \pi d^2/4$ , saame  $v_1 d_1^2 = v_2 d_2^2$ . Kokku,

$$\frac{d_1}{d_2} = \sqrt{\frac{v_2}{v_1}} = \left(1 + \frac{2g(h_1 - h_2)}{v_1^2}\right)^{1/4}.$$

**L194 Veekahur ★★★**

Autor: Oleg Košik, piirkonnavoor, 2005, G 7

Olgu veejoa kiirus kahurist väljudes  $v$ . Et märk ja kahur asuvad samal kõrgusel ning õhutakistus puudub, siis märgini jõuab veejuga samuti kiirusega  $v$ . Aja  $t$  jooksul väljub kahurist vesi massiga  $m = \rho Svt$ . Väljuva vee kineetiline energia on  $E = mv^2/2$  ning asendades massi leiame

$$E = \frac{\rho S v^3 t}{2}.$$

Seega saame avaldada kahuri võimsuse

$$N = \frac{E}{t} = \frac{\rho S v^3}{2} \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt[3]{\frac{2N}{\rho S}}.$$

Jõud, millega veejuga tabab märki, on määratud vee impulsiga:

$$F = \frac{mv}{t} \quad \Rightarrow \quad F = \frac{\rho S v^2 t}{t} = \rho S v^2.$$

Asendades  $v$  saame

$$F = \sqrt[3]{4N^2 \rho S} \approx 490 \text{ N}.$$

**L195 Veetünn ★★**

Autor: Mihkel Kree, lõppvoor, 2005, G 5

Leiame esmalt veejoa väljumise kiiruse. Kiiruse avaldis on tuntud Torricelli seadusena, kuid selle leidmiseks võime arutleda nõnda: avast väljuv juga omab kiineelist energiat  $mv^2/2$ , teisalt peab see olema võrdne potentsiaalse energiaga, mis saadakse vee ülemiselt pinnalt kuni auguni langedes:  $mg(1-x)h$ . Seega väljumiskiirus avaldub kui

$$v = \sqrt{2g(1-x)h}.$$

*Märkus.* impulsi jäävusest saaksime (võrreldes tünni vasakule ja paremale seinal mõjuvate rõhumisjoudude vahe avaldist ning veejoa impulsist) tulemuse  $v = \sqrt{g(1-x)h}$ . See avaldis kehtib siis, kui vee liikumine tünnis pole laminaarne ning energia ei säili (läheb veekeeristesse). Laminaarse (energiakadudeta) voolu korral tuleks rõhumisjoudude vahe leidmisel arvestada Bernoulli seadusest tingitud rõhu muutust, mistõttu impulsi jäävusest tuletatud vastus ei kehti. Kuivõrd antud ülesandes on voolu laminaarsuse küsimus jäetud täpsustamata, siis on mõlemad meetodid korrektsed.

Et veejoal vertikaalset kiiruskomponenti esialgu pole, kulub langemiseks aeg

$$\tau = \sqrt{\frac{2(H+xh)}{g}}.$$

Selle ajaga liigub aga veejuga horisontaalsihis kaugusele  $L = v\tau$  ehk:

$$L = 2\sqrt{(1-x)h(H+xh)},$$

mida aga ongi antud graafikul kujutatud.

Seega piisaks  $H$  ja  $h$  leidmiseks kahe joone punkti koordinaatide määramisest ning tekkiva võrrandisüsteemi lahendamisest. Et aga võimalikult lihtsalt tulemuseni jõuda, kasutame tähelepanekut, et  $x = 0$  korral  $L = 2\sqrt{hH}$ . Võtame graafikult lugemi punktis  $x = 0$  ning saame esimese võrrandi:  $hH = 9\text{ m}^2$ .

Nagu öeldud, võib teise võrrandi saada suvalise punkti abil, kuid uurime natuke ekstreemumtingimust. Tähistame esmalt  $\alpha = H/h$ ,  $L$  avaldub seega kui

$$L = 2h\sqrt{(1-x)(\alpha+x)}.$$

Kui võtame  $L$ -ist  $x$ -i järgi tuletise, näeme, et  $L$  omab ekstreemumväärust  $x = (1-\alpha)/2$  korral. Selle tulemiseni võib jõuda ka arutledes nõnda:  $y = (1-x)(\alpha+x)$  kujutab endast allapoole suunatud parabooli nullkohtadega 1 ja  $-\alpha$ , ekstreemumväärust on seega nende vahel ehk kohal  $x = (1-\alpha)/2$ . Asendame selle  $L$ -i avaldisse:

$$L = 2h\sqrt{\left(1 - \frac{1-\alpha}{2}\right)\left(\alpha + \frac{1-\alpha}{2}\right)} = 2h\frac{1+\alpha}{2} = h+H.$$

Seega saame teise võrrandi  $L$ -i maksimumväärust kasutades:

$$H+h = 10\text{ m}.$$

Nendest kahest lihtsast võrrandist tekkiva võrrandisüsteemi lahendamisel (viies need näiteks ruutvõrrandi kujule) leiame väärused:  $h = 9\text{ m}$  ja  $H = 1\text{ m}$ .

**L196 Veejuga ★★**

Autor: Siim Ainsaar, piirkonnnavoor, 2006, G 9

Leidmaks purgi täitumise aega, on meil vaja teada veevoolu kiirust mingil kõrgusel. Olgu see kiirus kraanitoru otsa juures  $v_0$  ning kaugusel  $h$  (seal, kus raadius on  $r_1$ )  $v_1$ . Kuna vool kiireneb ühtlaselt, siis

$$v_1^2 - v_0^2 = 2gh.$$

Ajaga  $\Delta t$  läbib iga veejoa ristlõiget sama kogus vett, sest seda ei kao kuhugi ega tule ka juurde:

$$\pi r_0^2 v_0 \Delta t = \pi r_1^2 v_1 \Delta t.$$

Seega

$$v_1 = v_0 \left( \frac{r_0}{r_1} \right)^2,$$

mille asetame avaldisse  $v_1^2 - v_0^2 = 2gh$ :

$$\begin{aligned} \left[ v_0 \left( \frac{r_0}{r_1} \right)^2 \right]^2 - v_0^2 &= 2gh \quad \Rightarrow \quad v_0^2 \left[ \left( \frac{r_0}{r_1} \right)^4 - 1 \right] = 2gh \quad \Rightarrow \\ \Rightarrow \quad v_0 &= \sqrt{\frac{2gh}{\left( r_0/r_1 \right)^4 - 1}} \end{aligned}$$

Ajaga  $t$  voobab purki veekogus, mille ruumala on

$$V = \pi r_0^2 v_0 t.$$

Avaldame viimasesest võrrandist aja  $t$ :

$$t = \frac{V}{\pi r_0^2 v_0} = \frac{V}{\pi r_0^2} \sqrt{\frac{\left( r_0/r_1 \right)^4 - 1}{2gh}} = \frac{V}{\pi \sqrt{2gh}} \sqrt{\frac{1}{r_1^4} - \frac{1}{r_0^4}} \approx 21 \text{ s.}$$

**L197 Veepüstol ★★**

Autor: Valter Kiisk, lõppvoor, 2006, G 4

Kuna me ei arvesta dissipatiivseid effekte, siis peab kehtima mehaanilise energiääävus. Liikugu kolb jõu  $F$  toimel kiirusega  $v_1$  ja olgu vee kiirus suudmes  $v_2$ . Kuna vee koguruumala ei muutu, siis  $v_1 S_1 = v_2 S_2$ . Ajavahemiku  $t$  vältel läbib kolb vahemaa  $x = v_1 t$  tehes tööd  $A = Fx$ . Vaatame, milline on sellele liikumisele vastav vee summaarne kineetilise energia muut. Ühelt poolt kolvi eest „kaob ära“ veehulk  $m = S_1 x \rho$ , mille kiirus oli  $v_1$ , teiselt poolt ilmub suudmesse sama kogus vett liikudes kiirusega  $v_2$ . Energia jäätuvus annab

$$A + \frac{mv_1^2}{2} = \frac{mv_2^2}{2}$$

ehk peale asendamist ja  $v_1$  elimineerimist

$$\frac{F}{S_1} + \frac{\rho v_2^2}{2} \frac{S_2^2}{S_1^2} = \frac{\rho v_2^2}{2}.$$

Aga  $d_2 \ll d_1$  ja  $S \propto d^2$ , seega ammugi  $S_2^2 \ll S_1^2$  ning teise liikme vasakul pool võrdusmärki võib ära jäätta. Avaldame  $v_2$ :

$$v_2 = \frac{1}{d_1} \sqrt{\frac{8F}{\pi\rho}} \approx 22,6 \text{ m/s.}$$

*Märkus.* Ülesande oleks saanud lahendada ka kiiremat teed pidi lähtudes Bernoul-li seadusest

$$p + \frac{\rho v^2}{2} = \text{Const},$$

mille me lahendamise käigus sisuliselt tuletasime.

### L198 U-toru ★★★

Autor: Tundmatu autor, lahtine, 2009, G 6

Olgu U-toru siseraadius  $r$  ja välisraadius  $R = \sqrt{2}r$ . Vaatleme eraldi U-toru kaarekujulist osa. Aja  $\Delta t$  jooksul siseneb sinna kiirusega  $v$  vee kogus massiga  $\Delta m = \rho\Delta V = \rho\pi r^2 vt$ , ning samasugune vee kogus voolab seal sama kiirusega välja, see- ga summaarne vee impulsi muutus aja  $\Delta t$  jooksul on  $\Delta p = 2\rho\pi r^2 v^2 t$ , ning jõud, millega vesi möjub sellele toru osale, on Newtoni teise seaduse põhjal

$$F = \Delta p / \Delta t = 2\rho\pi r^2 v^2.$$

Kaarekujuline toru osa on liikumatu, nii et vee poolt rakendatud jõud on tasakaalustatud kahe terastoru elastsusjõuga. Kui terastoru jäikusteguriks võtame  $k$ , siis on selge, et kehitib võrdus

$$F = k\Delta l + k\Delta l = 2k\Delta l,$$

kus  $\Delta l$  on ühe terastoru pikenemine. Teguri  $k$  avaldame ülesande tekstis toodud seose kaudu kui  $k = ES/l = E\pi(R^2 - r^2)/l = E\pi r^2/l$  (kogu ristlõike pindalast panustab jäikustegurisse ainult materjaliga kaetud osa) ning seega

$$2\rho\pi r^2 v^2 = 2E\pi r^2 \Delta l/l.$$

Sii saame ühe toru pikenemiseks  $\Delta l = \rho v^2 l / E$  ning kogu U-toru pikenemiseks

$$2\Delta l = 2\rho v^2 l / E.$$

**L199 Ookean ★★★★**

Autor: Tundmatu autor, lahtine, 2005, G 8

- a)** Tähistame vedeliku keskmise tiheduse pinnast sügavuseni  $h$  kui  $\rho$ . Kuna vedeliku mass on kokkusurumatu ja kokkusurutud olukordades võrdne, siis

$$\rho_0 h_0 = \rho h.$$

Kui tiheduse muut on väike, avaldub tiheduste muudu kui

$$\rho = \rho_0(1 + \beta p_{\text{keskmise}}),$$

kus  $p_{\text{keskmise}}$  on keskmise veele mõju röhk. Vee röhk sügavusel  $h'$  on  $p(h') = \rho g h'$ , ehk keskmise röhk avaldub kui  $p_{\text{keskmise}} = p(h' = h/2) = \rho g h/2$  ning

$$\rho = \rho_0 \left(1 + \frac{\beta \rho g h}{2}\right) = \frac{\rho_0 h_0}{h} \Rightarrow h \left(1 + \frac{\beta \rho g h}{2}\right) = h_0,$$

Viimasesest valemist saame avaldada sügavuste vahe  $\Delta h$ :

$$\Delta h = h_0 - h = \frac{\beta \rho g h^2}{2} \approx 36 \text{ m}.$$

- b)** Sügavusel  $H = 10\,000 \text{ m}$  on lisaröhk ligikaudu  $p \approx \rho g H$ . Sellele vastab ruumala muutus (ühe kuupmeetri kohta):

$$\delta = \frac{\Delta V}{V} = \beta \rho g H \approx 0,0484.$$

Kui veepinnal on ruumalaga  $V$  vee mass  $\rho V$ , siis sama vee massi ruumala sügavusel  $H$  on ligikaudu  $V(1 - \delta)$  ja tihedus seega:

$$\rho_H V(1 - \delta) = \rho V \Rightarrow \rho_H = \frac{\rho}{1 - \delta}.$$

Seega sellel sügavusel on vee tiheduse muutus:

$$\Delta \rho = \rho_H - \rho = \frac{\rho}{1 - \delta} - \rho = \frac{\rho \delta}{1 - \delta} \approx 51 \text{ kg/m}^3.$$

**L200 V-toru ★★★★**

Autor: Mihkel Kree, lõppvoor, 2008, G 8

Oletame, et vesi on tasakaalust hälbinud nii, et veekiht, mille kõrguse projektsioon toru sihis on  $\delta x$ , on kandunud nurga  $\alpha$  all olevast toru poolest teise. Veetaseme kõrguste erinevus toru kahe poole vahel on  $\delta h = \delta x(\cos(\alpha) + \cos(\beta))$ , mis tekib lisarõhu  $\delta P = \rho \delta h g$ . Lisarõhk mõjub vedelikule jõuga, mille toru sihiline komponent on

$$F = \delta PS = \rho \delta x (\cos(\alpha) + \cos(\beta)) g S.$$

See valem on sarnane vedrupendli valemiga  $F = k \delta x$ , kus

$$k = \rho (\cos(\alpha) + \cos(\beta)) g S.$$

Sellise pendli omavõnkesagedus avaldub kui

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\rho (\cos(\alpha) + \cos(\beta)) g S}{m}}.$$

Seega võime öelda, et toru pooli painutades väheneb vedeliku võnkumise sagedus

$$\sqrt{\frac{1}{2} (\cos \alpha + \cos \beta)}$$

korda.

# Õpilaste tulemused

## Füüsika lõppvoor

9. aprill 2005. a.

Gümnaasium

Koht	Nimi	Klass	Füüsikaõpetaja	Kokku	Järk
1	Aleksandr Morozenko	12	Nadežda Tšerkašina	58	I
2	Siim Ainsaar	12	Mart Kuurme	55	I
3	Karel Aru	12	Lilian Tambek	46	II
4	Ott Rebane	12	Mart Kuurme	43	II
5	Meelis Lootus	11	Elmu Mägi	42	II

## Füüsika lahtine võistlus

26. november 2005. a.

Vanem rühm

Koht	Nimi	Klass	Füüsikaõpetaja	Kokku	Järk
1	Aleksei Vlassov	12	Tatjana Beloussova	56	
2	Holger Haas	12	Elmu Mägi	54	
3	Mihkel Heidelberg	12	Aarne Silas	50	
4	Mikhail Verhovtsov	12	Esfira Zolotarjova	47	
5	Lauri Kaldamäe	12	Jaak Saukas	44	

## Füüsika lõppvoor

4. märts 2006. a.

Gümnaasium

Koht	Nimi	Klass	Füüsikaõpetaja	Kokku	Järk
1	Aleksei Vlassov	12	Tatjana Beloussova	58,5	I
2	Holger Haas	12	Elmu Mägi	50,5	II
3	Meelis Lootus	12	Elmu Mägi	50	II
4	Mihkel Heidelberg	12	Aarne Silas	45	II

**Füüsika lahtine võistlus****25. november 2006. a.****Vanem rühm**

Koht	Nimi	Klass	Füüsikaõpetaja	Kokku	Järk
1	Andres Laan	11	Mart Kuurme	62	
2	Marek Jarkovoi	12	Mart Kuurme	54	
3	Velle Toll	12	Indrek Peil	52	
3	Jaan Katus	12	Mart Kuurme	52	
5	Andrei Klevtsov	11	Jelena Guljajeva	46,5	
5	Andrei Lošitski	12	Nadežda Tšerkašina	46,5	

**Füüsika lõppvoor****17. märts 2007. a.****Gümnaasium**

Koht	Nimi	Klass	Füüsikaõpetaja	Kokku	Järk
1	Uku Hämarik	11	Maire Piirimäe	49	I
2	Stanislav Zavjalov	10	Gennadi Medkov	48	I
2	Marek Jarkovoi	12	Mart Kuurme	48	I
4	Priit Rinken	12	Madis Reemann	45	II

**Füüsika lahtine võistlus****24. november 2007. a.****Vanem rühm**

Koht	Nimi	Klass	Füüsikaõpetaja	Kokku	Järk
1	Stanislav Zavjalov	11	Gennadi Medkov	48	
2	Heiki Niglas	12	Kusta Rumma	46	
3	Karen Atabekjan	12	Tatjana Beloussova	45	
4	Vyatšeslav Žarinov	12	Nelli Afonina	41,5	
5	Andreas Valdmann	12	Madis Reemann	41	

**Füüsika lõppvoor**  
**8. märts 2008. a.**  
**Gümnaasium**

Koht	Nimi	Klass	Füüsikaõpetaja	Kokku	Järk
1	Andres Laan	12	Mart Kuurme	53,5	I
2	Heiki Niglas	12	Kusta Rumma	52,5	I
3	Taavi Pungas	11	Mart Kuurme	51	I
4	Stanislav Zavjalov	11	Gennadi Medkov	48,5	II
5	Uku Hämarik	12	Maire Piirimäe	48	II
6	Andrei Klevtsov	12	Jelena Guljajeva	45,5	II
7	Ardi Loot	11	Märt Kask	45	II
8	Heino Soo	11	Märt Kask	43	II

**Füüsika lahtine võistlus**  
**29. november 2008. a.**

Koht	Nimi	Klass	Füüsikaõpetaja	Kokku	Järk
1	Stanislav Zavjalov	12	Gennadi Medkov	59	
2	Taavi Pungas	12	Mart Kuurme	56	
3	Paavo Parmas	12	Aarne Silas	53	
4	Lauri Taaleš	12	Aarne Kivimäe	50	
5	Ardi Loot	12	Märt Kask	45	
	Jonatan Jöks	12	Toomas Reimann	45	

**Füüsika lõppvoor**  
**7. märts 2009. a.**

Koht	Nimi	Klass	Füüsikaõpetaja	Kokku	Järk
1	Stanislav Zavjalov	12	Gennadi Medkov	58	I
2	Ardi Loot	12	Märt Kask	54	I
3	Paavo Parmas	12	Aarne Silas	50	I
4	Mihkel Soolep	12	Mart Kuurme	42	II
5	Kadi Liis Saar	10	Mart Kuurme	41	II

**Füüsika lahtine võistlus****28. november 2009. a.****Vanem rühm**

Koht	Nimi	Klass	Füüsikaõpetaja	Kokku	Järk
1	Ants Remm	11	Siim Oks	50	I
2	Rauno Siinmaa	12	Elmu Mägi	47,5	I
3	Roland Matt	12		43	II
4	Janno Jöulu	11	Mart Kuurme	42,5	II
4	Madis Ollikainen	11	Erkki Soika	42,5	II

**Füüsika lõppvoor****6. märts 2010. a.****Gümnaasium**

Koht	Nimi	Klass	Füüsikaõpetaja	Kokku	Järk
1	Ants Remm	11	Siim Oks	51	I
2	Madis Ollikainen	11	Erkki Soika	49	I
3	Siim Liiser	11	Mart Kuurme	47,5	II
4	Kadi Liis Saar	11	Mart Kuurme	46,5	II
5	Andres Jaanson	11	Elmu Mägi	46	II
6	Gerli Viikmaa	12	Elmu Mägi	45,5	II
7	Sander Siim	11	August Alop	45	II
7	Kert Pütsepp	11	Mart Kuurme	45	II
9	Ivar Kiitam	11	Mart Kuurme	44,5	II

**Füüsika lahtine võistlus****27. november 2010. a.****Vanem rühm**

Koht	Nimi	Klass	Füüsikaõpetaja	Kokku	Järk
1	Jaan Toots	10	Toomas Reimann	58	I
2	Madis Ollikainen	12	Erkki Soika	53,5	II
3	Ants Remm	12	Siim Oks	53	II
3	Kristian Kuppart	12	August Alop	53	II
5	Andres Jaanson	12	Elmu Mägi	51,5	II
6	Erik Tamre	11	Mart Kuurme	51	II

**Füüsika lõppvoor****9. aprill 2011. a.****Gümnaasium**

Koht	Nimi	Klass	Füüsikaõpetaja	Kokku	Järk
1	Ants Remm	12	Siim Oks	61	I
2	Siim Liiser	12	Mart Kuurme	58	I
3	Jaan Toots	10	Toomas Reimann	57,5	I
4	Tanel Kiis	11	Vahur Pohlasalu	55	II
5	Deiwin Sarjas	11	Muia Keerutaja	53	II
6	Andres Jaanson	12	Elmu Mägi	51,5	II
7	Eero Vaher	12	Elmu Mägi	51	II
7	Kristian Kuppart	12	August Alop	51	II
7	Erik Tamre	11	Mart Kuurme	51	II
10	Janno Jõulu	12	Mart Kuurme	50,5	II

**Füüsika lahtine võistlus****26. november 2011. a.****Vanem rühm**

Koht	Nimi	Klass	Füüsikaõpetaja	Kokku	Järk
1	Jaan Toots	11	Toomas Reimann	61	I
2	Kaur Aare Saar	11	Guido Vegmann	57	I
3	Erik Tamre	12	Mart Kuurme	56	I
4	Tanel Kiis	12	Vahur Pohlasalu	53	II
4	Sandra Schumann	11	Mart Kuurme	53	II
6	Sergei Malõšev	12	Mihhail Emeljanov	51	II
7	Sergei Jakovlev	12	Elena Golubeva	50,5	II
8	Janno Veeorg	11	Toomas Reimann	50	II
9	Eva-Lotta Käspér	12	Siim Oks	48	II

# Autorite loetelu

Aigar Vaigu – Aalto Ülikool ja VTT Technical Research Centre of Finland  
Aleksei Vlassov – Tartu Ülikool  
Andre Sääsk – Tartu Ülikooli Narva kolledž  
Andreas Valdmann – Tartu Ülikool  
Andres Laan – Cambridge'i Ülikool  
Eero Uustalu – Tallinna Tehnikaülikool  
Jaak Kikas – Tartu Ülikool  
Jaan Kalda – Tallinna Tehnikaülikool  
Jaan Susi – Tartu Ülikool  
Koit Timpmann – Tartu Ülikool  
Kristian Kuppart – Tartu Ülikool  
Mihkel Heidelberg – Tartu Ülikool ja Tallinna Tehnikaülikool  
Mihkel Kree – Marseille' Ülikool ja Tartu Ülikool  
Mihkel Pajusalu – Tartu Ülikool ja Massachusettsi Tehnoloogia instituut  
Mihkel Rähn – Tartu Ülikool  
Oleg Košik – Tartu Ülikool  
Ott Krikmann – Eesti Maaülikool  
Riho Taba – Bristol Ülikool ja Imperial College  
Roland Matt – Tartu Ülikool ja ETH Zürich  
Siim Ainsaar – Tartu Ülikool ja Tallinna Tehnikaülikool  
Stanislav Zavjalov – Oxfordi Ülikool  
Taavi Pungas – Cambridge'i Ülikool ja Tartu Ülikool  
Urmo Visk - Tartu Ülikool  
Valter Kiisk – Tartu Ülikool