

# 200 EESTI FÜÜSIKAOLÜMPIAADI ÜLESANNET AASTATEST 2012 – 2018

koos vihjete ja lahendustega

Koostas Taavet Kalda

2018

© Autoriõigused: Eesti Matemaatika Selts, Tallinna Tehnikaülikool, Tartu Ülikool, ülesannete autorid ja Taavet Kalda.

Kogumiku koostamist toetasid: Eesti Matemaatika Seltsi fond “Benoit Mandelbroti Jälgedes”, Robert Kitt ja Tallinna Tehnikaülikool.

Korrektor Lauri Vanamölder  
Kaanekujundaja Rael Kalda  
Saatesõna Robert Kitt ja Jaan Kalda

Kirjastanud Tallinna Tehnikaülikooli eelõppeosakond

# Saateks

## Hea füüsikahuviline!

Sa hoiad käes Eesti füüsikaolümpiaadide ülesannete kogu. Juba pelgalt asjaolu, et Sa sellise kogumiku oled avanud ja neid ridu loed, teeb Sind eriliseks. Sul on huvi looduse ja meid ümbritseva keskkonna vastu ning Sa tahad ennast proovile panna ülesandeid lahendades. Ei ole mingit vahet, kas näed end tulevikus teadlase, ettevõtja või avaliku elu tegelasena. Võime lahendada probleeme elust enesest tuleb igal elualal kasuks. Füüsikas on veel see eelis, et eksisteerivad superuniversaalsed tõed – loodusseadused, mis kehtivad igal ajal ja igal hetkel.

Olümpiaadiülesannete kogu on nagu kestva spordis. Tulemuse saavutamiseks tuleb pikalt pingutada. Mõni ülesanne jääb kummitama mitmeks päevaks, enne kui leiad idee lahenduseks. Ilmselt on mõned ülesanded ka üle jõu käivad. Kuid kõige parem tunne on siis, kui pikalt mõeldud lahenduskäik annab tulemuse ning ülesanne saab lahendatud ilma vastust piilumata. Sama on ka spordis: kui distantsti lõikad, ei ole finišijoont ületades see päris õige tunne. Seega on käesolev kogu peamiselt akadeemiline meelelahutus, mille preemiaks võib olla hea koht olümpiaadil või vähemasti füüsikatunnis.

Nagu öeldud, annavad füüsikaolümpiaadid ja füüsika laiemalt väga hea platvormi kõikideks elujuhtumiteks, kus on vaja lahendada mõnd keerulist probleemi. Just füüsikute võime eristada olulist ebaolulisest ning lahendusvõrrandi koostamisel kasutada ainult sisuliselt olulisi mõjureid teeb füüsika teiste teaduste hulgas eriliseks. Samas tuleb seda pragmaatilist maailmavaadet pidevalt õlitada uute teadmiste ja kogemustega ning õppida ka ammu lahendatud ülesannetest.

Soovin, et käesolev ülesannete kogu oleks Sulle piisavalt kerge, et leida rõõmu õigetest lahendustest, ning piisavalt raske mõistmaks, et elus ei tule midagi lihtsalt.

Robert Kitt

Loodusteaduste doktor, TTÜ tehniline füüsika 2005. a

Eesti võistkonna liige rahvusvahelistel füüsikaolümpiaadidel 1994. ja 1995. a

## Olümpiaadiülesanded kui meelelahutus

Füüsikaolümpiaadid on olnud üle poole sajandi üheks olulisemaks faktoriks noortes füüsikahuvi äratamisel. Erinevalt koolitunnis pakutavatest ülesannetest nõuavad olümpiaadiülesanded leidlikkust ja sarnaselt mõttemängudele pakuvad lahendamisrõõmu. Kooliülesanded on reaallaladel võimekate laste jaoks liiga lihtsad, mistõttu võib füüsika tunduda igav. Selliste õpilaste ande tõhusaks arendamiseks on vaja midagi keerulisemat – midagi sellist, nagu pakutakse olümpiaadidel.

Eesti füüsikaolümpiaadid (EFO) on tänu oma püsivalt nooruslikule žüriile suutnud pakkuda füüsikasõpradele puremiseks uudseid ning intrigeerivaid pähkleid. Žürii nooruslikkust on aidanud hoida see, et endised olümpiaadivõitjad, sõltumata sellest, mis riigis ja mis ülikoolis nad edasi õppima asuvad, liituvad harilikult žüriiga. Värske veri tähendab värskeid ideid ja vaheldusrikkaid ülesandeid. Ülikooliõpingute lõppemise järel kipub noorte žüriiliikmete aktiivsus vähenema, sest tulevad töökohustused, aga selleks ajaks on žüriiga liitunud juba mitmed nooremad üliõpilased.

Läbi aastakümnete on kogunenud aukartustäratav hulk ülesandeid – suurepärase materjal füüsikahuvilisel noorel oma ande arendamiseks. Need on leitavad küll internetilehtedelt, kuid ülesannete kirjastamine on jäänud unarusse. Internetis leiduvate ülesandevaramute häda on selles, et ülesanded on sorteerimata ning õpilasel, kes otsib mingil teemal teatud raskusastmega ülesannet, võib selle leidmisega olla tükk tegu. Halvematel juhtudel võib õpilane sattuda vigase ülesande peale: selliseid on küll väga vähe (käesoleva kogumiku statistika põhjal ca 2%), aga õpilasele võib niisugune ülesanne mõjuda eksitavalt ja ebakindlust tekitavalt.

2017. aastaks oli eelmise EFO ülesannete kogumiku väljaandmisest möödunud enam kui kaks aastakümnet. Osaliselt täidab tekkinud lünka Mihkel Kree ja Kristian Kupperti toimetatud ning Eesti Energia toel Tartu Ülikooli teaduskooli poolt äsja kirjastatud saja ülesandega vihik “Elekter ja termodünaamika”. Ometigi on häid ülesandeid kogunenud palju rohkem!

### Tänuavaldused

Käesoleva vihikuga on vahefinišisse jõudnud Robert Kiti, kunagise rahvusvahelise füüsikaolümpiaadi Eesti võistkonna liikme ning praeguse Swedbank Eesti peadirektori algatus EFO ülesannetearhiivi süstematiseerimiseks ja kirjastamiseks. Tänaigem sel puhul kõiki asjaosalisi: projekti algatajat ja Eesti matemaatika- ning füüsikaolümpiaadide edendamiseks mõeldud stipendiumifondi “Benoit Mandelbroti Jälgedes” asutajat Robert Kittit; EFO žürii liikmeid kollegiaalse ja entusiastliku töö eest ülesannete koostamisel, autoriõiguste valdajaid – ülesannete autoreid (vt nimekirja kogu-

miku lõpus) ja Tartu Ülikooli — ülesannete avaldamise loa eest; Haridus- ja Teadusministeeriumi olümpiaadide järjepideva rahastamise eest; Tartu Ülikooli teaduskooli olümpiaadide organiseerimise eest; Tallinna Tehnikaülikooli eelõpet kogumiku kiire kirjastamise eest.

### **Füüsika kui elukutse — edasiõppimise võimalused**

Käesoleva kogumiku eesmärgiks on tõsta lugeja huvi füüsika vastu — näidata, et füüsika tegeleb põnevate ning eluliste probleemidega. Füüsika ei õpeta mitte ainult Newtoni seadusi, Maxwelli võrrandeid jms, vaid eelkõige õpetab mõtlemisviisi ja strateegiaid, kuidas läheneda elulistele probleemidele: võimet koostada keeruliste nähtuste lihtsaid mudeleid, eraldades olulise ebaolulisest. Sestap ei maksa imestada, et füüsika erialal ülikooli lõpetanud on tööturul kõrgelt hinnatud. Füüsikaharidusega inimesed suudavad oma oskusi rakendada kõikjal, mh uudsete tehnoloogiate arendamisel, andmekaeves, investeerimisfirmades, panganduses jne.

Neil, kellel füüsikaolümpiaadi ülesannete lahendamine edeneb hästi, tasub tõsiselt kaaluda haridustee jätkamist füüsikaga seotud erialadel ülikoolis. Eestis on selleks mitmeid võimalusi, eeskätt tuleb mainida Tallinna Tehnikaülikooli rakendusfüüsika õppekava ning Tartu Ülikooli füüsika, keemia ja materjaliteaduse õppekava. Füüsikaga on tihedalt seotud ka peaaegu kõik Tallinna Tehnikaülikooli inseneri ja loodusteaduskonna õppekavad (nt elektroenergeetika ja mehhatroonika, maapõueressursid, materjalitehnoloogia, ehituse ja biomeditsiiniga seotud õppekavad jne) ning Tartu Ülikooli õppekavad “Geoloogia ja keskkonnatehnoloogia” ning “Loodusteadused ja tehnoloogia” (viimane on inglise keeles). Tasub samuti teada, et nii Tartu Ülikool kui Tallinna Tehnikaülikool võtavad olümpiaadidel edukalt osalenud õpilasi vastu nn eritingimustel, st õppurid ei pea täitma lävendinõudeid. Tartu Ülikooli puhul peab õpilane tulema üleriigilisel olümpiaadil 5 parema hulka 11. või 12. klassi arvestuses või 10 parema hulka üldpingereas, Tallinna Tehnikaülikoolis piisab reaalinete olümpiaadidel lõppvooru pääsemisest.

### **Füüsikale keskenduvad õppekavad Eesti ülikoolides**

Et lihtsustada õpilastel õppekava valikut, peatume lähemalt kahe vahetult füüsika nime pealkirjas sisaldava õppekava võrdlusel.

Nii Tallinna Tehnikaülikooli rakendusfüüsika õppekava rakendusfüüsika peerialal kui ka Tartu Ülikooli füüsika, keemia ja materjaliteaduse õppekava füüsika peerialal on võimalik saada laiapõhjaline ja süsteemne füüsikaharidus, mis katab enam-vähem võrdse arvu loengutundidega sellised baasteemad nagu termodünaamika, elektrodünaamika, optika, kvant-

mehaanika ja erirelatiivsusteooria. Siiski on nende õppekavade vahel märkimisväärsed erinevusi.

Tartu Ülikooli õppekavas antakse värskele sisseastujale, kes ei suuda kohe teha kindlat valikut füüsika, keemia ja materjaliteaduse vahel, võimalus lükata otsuse tegemine aasta võrra edasi: esimese aasta jooksul antakse talle kiire ülevaade kõigist kolmest teadusharust ning seejärel saab ta teha teadliku valiku. Tallinna Tehnikaülikoolis on samuti võimalik lükata valiku tegemine aasta võrra edasi, aga valida saab ühest küljest rakendusfüüsika ning teisest küljest okeanograafia ja meteoroloogia vahel.

Tartu Ülikooli õppekavas on füüsika kogutundide arv suurem, seda ühest küljest oluliselt suurema hulga füüsika praktikumide ning teisest küljest selliste täiendavate füüsikapeatükkide tõttu nagu "Spektroskoopia", "Globaalfüüsika" ja "Tuumafüüsika eksperimentaalmeetodid", aga ka ülevaatekursus "Füüsikaline maailmapilt" ning meetodikeskne õppeaine "Loodusteadusliku meetodi seminar".

Tallinna Tehnikaülikoolis seevastu on suurendatud tähelepanu all mehaanika (nt eraldi kursus on elastsusteooriast), sest mehaanikal on oluline roll peaaegu kõigis tehnikateaduste harudes; tänapäevafüüsika teemasid esindab kursus "Sissejuhatus osakestefüüsikasse ja kosmoloogiasse". Rohkem on ka informaatikat ning matemaatikat, muu hulgas pannakse rõhku statistilistele meetoditele ja suurandmete analüüsile. Suurandmetega tuleb tänapäeval tegemist teha paljude rakendusfüüsika elukutsete puhul, nt okeanograafias ja majandusfüüsikas, aga ka füüsikas endas, nt osakestefüüsikas. Tallinna Tehnikaülikooli õppekavas on suurem osakaal valikainetel, nt võib valida järgmisi kursusi: "Astrofüüsika ja kosmonautika", "Majandusfüüsika alused", "Hüdro- ja aeromehaanika", "Eksperimentid tehnika" ja "Füüsikalised uurimismeetodid".

Praktikavõimalusi on nii Tartus kui Tallinnas võrdselt palju. Tartu füüsikaõppuritel on võimalik teha lõputöö ja saada teadustöö kogemus füüsika instituudis, kus uurimisteemade valik on lai. Tallinnas saab füüsikakeskset praktikat ning lõputööd teha nii Keemilise ja Bioloogilise Füüsika Instituudis kui ka Tallinna Tehnikaülikooli küberneetika instituudis, võimalike uurimisteemade osaline loetelu on leitav lehelt [www.taltech.ee/fyysika-teemad](http://www.taltech.ee/fyysika-teemad).

Nimetatud õppekavade kohta on võimalik täiendavalt lugeda lehtedelt [www.taltech.ee/fyysika](http://www.taltech.ee/fyysika) ja [www.ut.ee/et/ut-oppekavad/fuusika-keemia-materjaliteadus](http://www.ut.ee/et/ut-oppekavad/fuusika-keemia-materjaliteadus).

Jaan Kalda

Tallinna Tehnikaülikooli küberneetika instituut, professor  
võistkonna mentor rahvusvahelistel füüsikaolümpiaadidel aastast 1994

# Sisukord

<b>Sissejuhatus</b>	8
<b>Ülesanded</b>	9
Dünaamika . . . . .	9
Elektriahelad . . . . .	22
Elektrostaatika . . . . .	30
Gaasid . . . . .	33
Geomeetriline optika . . . . .	38
Kinemaatika . . . . .	46
Magnetism . . . . .	50
Staatika . . . . .	53
Taevamehaanika . . . . .	56
Termodünaamika . . . . .	57
Varia. . . . .	62
Vedelike mehaanika . . . . .	65
<b>Vihjed</b>	68
<b>Lahendused</b>	90
<b>Õpilaste tulemused</b>	219
<b>Autorite loetelu</b>	225

# Sissejuhatus

Siia on koondatud 200 gümnaasiumi ülesannet Eesti füüsikaolümpiaadi piirkonnavoorudest, lõppvoorudest ja lahtistest võistlustest. Igale ülesandele on juurde kirjutatud paarilauseline vihje. Juhul kui õpilane jääb ülesannet lahendades toppama, on tal võimalik vihjet lugeda ning teisele katsele minna.

Ülesanded on jaotatud teemade kaupa ning teemasiseselt raskuse järgi. Raskustaset tähistatakse kuni viie tärniga. Ülesannete lihtsamaks otsimiseks on ülesannete numbrite ette pandud "Ü", vihjete ette "V" ja lahenduste ette "L". Näiteks ülesande 133 teksti number on kujul Ü133. Iga ülesande juures on kirjas ka selle autor ning olümpiaadi vooru lühinimetuse, lisaks lühendid P 1, G 1 jne, kus tähed tähistavad põhikooli- ja gümnaasiumiastet. Näiteks G 9 viitab gümnaasiumiastme 9. ülesandele.

Kogumiku koostamise käigus eemaldati erinevatel põhjustel 4 ülesannet, mis asendati 2011. aasta füüsika lahtise võistluse ülesannetega.

Lisaks leiate kogumiku lõpust kogumiku poolt kaetud lahtiste ja lõppvoorude esimese ja teise järgu saanud õpilaste ning ülesannete autorite nimikirja.



# Ülesanded

## Dünaamika

### Ü1 Lendav pudel ★

Autor: Erkki Tempel, piirkonnavor, 2014, G 1

Pooleliitrises pudelis, mille põhja on tehtud  $0,4\text{ V}$  väike auk pindalaga  $S$ , on  $m$  grammi vett. Pudeli keeratakse kork pealt ning pudel visatakse õhku algkiirusega  $v$ . Kui kiiresti voolab vesi pudeli põhjas olevast august välja siis, kui pudel veel üles liigub? Kui kiiresti voolab vesi august välja sel hetkel, kui pudel alla kukub? Põhjendage.

### Ü2 Potsataja ja pähkliid ★

Autor: Erkki Tempel, piirkonnavor, 2014, G 2

Rongi viimase vaguni katusel istub Potsataja, kes loobib maha pähkliid. Potsataja viskab ühe pähkli maapinna suhtes horisontaalselt rongi liikumisega vastassuunas algkiirusega  $u$ . Samal hetkel viskab ta ka teise pähkli samuti maapinna suhtes horisontaalselt ning sama algkiirusega  $u$ , kuid risti rongi liikumise suunaga. Rong liigub ühtlaselt ja sirgjooneliselt kiirusega  $v$  ning pähkliid visatakse maapinna suhtes kõrguselt  $h$ . Kui kaugel teineteisest pähkliid maanduvad? Õhutakistust mitte arvestada.

### Ü3 Kurv ★

Autor: Mihkel Rähn, lahtine, 2016, G 2

Kiirusega  $v = 90\text{ km/h}$  sõitev auto läbib kurvi raadiusega  $R = 250\text{ m}$ . Kui suur peab olema tee külgekalle (kraadides), et autos istujad ei tunneks kurvist tingitud külgsuunalist jõudu? Raskuskiirendus  $g = 9,8\text{ m/s}^2$ .

### Ü4 Kadunud rahakott ★

Autor: Eero Vaher, lahtine, 2012, G 2

Suusahüppemäe hoovõturada asub nõlval, mille tõusunurk on  $\alpha$ . Hoovõturaja alumine ots on horisontaalne. Suusahüppaja alustas hoovõttu kõrguselt  $h$ , kuid kohe hoovõtu alguses kukkus tal rahakott taskust välja. Kui kaugale äratõukepunktist (mööda horisontaali) rahakott lendab, kui see liigub ilma takistusega?

### Ü5 Kivi ★

Autor: Taavi Pungas, lahtine, 2013, G 1

Juku avastas maast välja turritamas poolkerakujulise kivi. Mõõtes mõõdulindiga selle ümbermõõdu, sai ta tulemuseks  $a = 2,4\text{ m}$ . Edasi võttis ta taskust tikutopsi ja hakkas seda poolkera tipust alates natukesehaaval allapoole liigutama, kuni lõpuks tikutops kivilt maha libises. Mõõdulindiga mööda poolkera mõõtes sai ta tipu ja libisemispaiga vaheliseks kauguseks  $b = 20\text{ cm}$ . Kui suur oli kivi ja tikutopsi vaheline hõõrdeegur?

**Ü6 Kelgutaja ★**

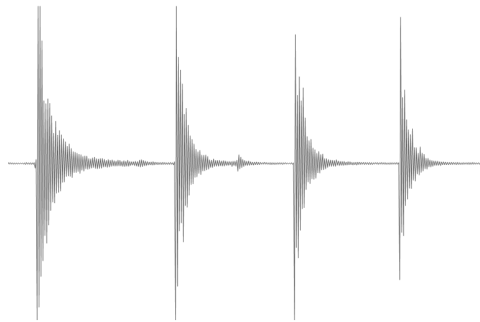
Autor: Taavi Pungas, piirkonnavaor, 2013, G 4

Lapsel kulus ühtlase kaldega nõlvast kõrgusega  $h = 2,0\text{ m}$  alla kelgutamiseks  $t = 3,0\text{ s}$ . kui suur vähemalt pidi sel juhul olema nõlva kaldenurk  $\alpha$ , kui ta alustas sõitu paigalseisust?

**Ü7 Pall ★**

Autor: Taivo Pungas, lõppvoor, 2013, G 2

Madis analüüsis arvutiprogrammiga palli põrkamisest tehtud helilindistust ja sai joonisel toodud graafiku, mis näitab helisignaali kuju. Kui on teada, et pärast kolmandat põrget tõusis pall täpselt  $1\text{ m}$  kõrgusele, leidke palli maksimaalne kõrgus pärast esimest põrget.

**Ü8 Kaubarong ★**

Autor: Mihkel Rähn, lahtine, 2014, G 1

Kaubarongi massiga  $m = 5000\text{ t}$  veab vedur võimsusega  $N = 2500\text{ kW}$ . Veerehõõrdeegur rataste ja rööpa vahel on  $\mu = 0,002$ .

a) Leidke rongi kiirus  $v_1$  horisontaalsel teel.

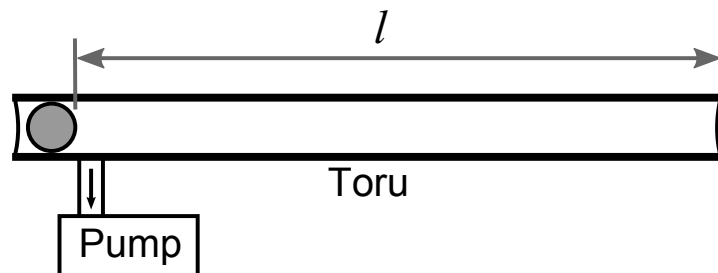
b) Leidke rongi kiirus  $v_2$  tõusul üks sentimeeter ühe meetri kohta.

Õhutakistusega mitte arvestada.

**Ü9 Vaakumkahur ★**

Autor: Andreas Valdmann, lahtine, 2014, G 2

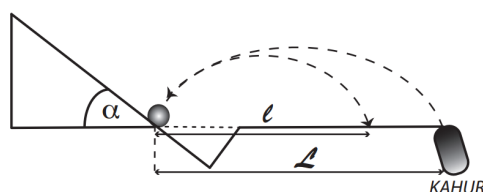
Joonisel on kujutatud niinimetatud vaakumkahur. Laadimiseks pistetakse laske-  
moonaks olev pall vaakumkahuri toru vasakpoolsest otsast sisse. Seejärel kaetakse toru mõlemad otsad kergestirebeneva õhukindla membraaniga, näiteks fooliumi-  
ga, ning pumbatakse torust õhk välja. Nüüd on vaakumkahur laskevalmis. Tulis-  
tamiseks purustatakse vasakpoolne membraan, mille tagajärjel hakkab pall toru  
parempoolse otsa poole sööstma. Piisavalt pika toru korral purustab pall parem-  
poolse membraani ning lendab torust välja. Olgu palli läbimõõt võrdne toru si-  
seläbimõõduga  $d = 4,0\text{ cm}$ , palli mass  $m = 24\text{ g}$  ja asugu pall enne tulistamist  
 $l = 150\text{ cm}$  kaugusel toru parempoolsest otsast. Kui suur on palli kiirus vahetult  
enne parempoolse membraani läbimist? Õhurõhk on  $P_0 = 100\text{ kPa}$ . Hõõrdumise-  
ga pole tarvis arvestada.



### Ü10 Mängukahur ★

Autor: EFO žürii, lahtine, 2016, G 1

Mängukahurist tulistatakse kummipall nii, et see põrkab risti kaldpinnaga, kahurist horisontaalkaugusel  $L$ . Pall põrkab kaldpinnast tagasi kaugusele  $l$  (vt joonis). Leidke, kui suur osa energiast neeldus põrkel. Kaldpinna kaldenurk on  $\alpha$ .



### Ü11 Kõievedu ★

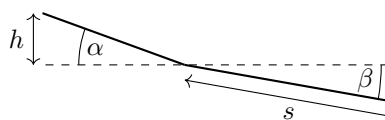
Autor: Oleg Košik, piirkonnavor, 2016, G 2

Eero ja Oleg võistlevad kõieveos nii, et kogu võistluse ajal on köis horisontaalne. Eero mass  $m_1 = 110 \text{ kg}$  ja Olegi mass  $m_2 = 85 \text{ kg}$ . Hõõrdetegur talla ja põranda vahel  $\mu = 0,30$  on mõlemal mehel sama. Kumb mees võib? Millise maksimaalse kiirendusega saab võitja sundida kaotajat liikuma, nii et ta ise veel paigale jääks? Raskuskiirendus  $g = 9,8 \text{ m/s}^2$ .

### Ü12 Vastlaliug ★

Autor: Moorits Mihkel Muru, lõppvoor, 2017, G 1

Juss leidis vastlaliu laskmiseks künka, mille läbilõige koosneb kahest sirglõigust, nagu näha joonisel, edasi on horisontaalne maa. Esimese nõlvaosa kõrgus on  $h = 2 \text{ m}$  ja selle kalle  $\alpha = 20^\circ$ , teise osa pikkus on  $s = 20 \text{ m}$  ja kalle  $\beta = 5^\circ$ . Jussi mass koos kelguga on  $m = 47 \text{ kg}$  ja hõõrdetegur lume ja kelgu vahel on  $\mu = 0,08$ , raskuskiirendus  $g = 9,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ . Leidke, kui pikk on Jussi vastlaliug.



### Ü13 Alpinist ★★

Autor: Kaur Aare Saar, lahtine, 2013, G 3

Alpinist massiga  $m = 75 \text{ kg}$  on kinnitatud elastse nööri külge pikkusega  $L = 6 \text{ m}$ . Nööri teine ots on kinnitatud kalju külge. Olles roninud 6 meetri kõrgusele kinnituskohast, ta kukub. Leidke, kui suur võib olla ülimalt nööri elastsustegur  $k$ , teades, et suurim nööri tõmbejõud, mida inimene talub, on  $T = 25mg$ . Õhutakistust ärge arvestage.

**Ü14 Langevarjuhüpe ★★**

Autor: Taavi Pungas, piirkonnavaor, 2014, G 5

Juku massiga  $m = 60 \text{ kg}$  ja tema isa Juhan massiga  $M = 90 \text{ kg}$  otsustasid teha langevarjuhüppe. Neile pandi selga ühesugused langevarjud massiga  $m_v = 10 \text{ kg}$  ning nad lükati lennukist välja. Mõlema langevarjud avanesid täielikult ühesugusel kõrgusel  $h$ , pärast mida saavutasid hüppajad tühise aja jooksul konstantse kiiruse ja liuglesid sellel kiirusel maapinnani. Jukul kulus langevarju avanemisest maapinnani jõudmiseks aega  $t = 110 \text{ s}$ . Kui pikk aeg  $T$  kulus selleks Juhanil? Langevarjule õhu poolt mõjuv takistusjõud on võrdeline langemiskiiruse ruuduga. Lihtsuse mõttes loeme hüppajatele endile mõjuva õhutakistuse tühiselt väikeseks.

**Ü15 Kelk ★★**

Autor: Joonas Kalda, piirkonnavaor, 2016, G 4

Juku tahab kalguga ületada jääga kaetud jõge. Ta startib lumega kaetud kaldalt, mis on horisondiga  $\alpha = 15^\circ$  nurga all. Jõe laius  $l = 10 \text{ m}$ , kelgu ja lume vaheline hõõrdeegur  $\mu_1 = 0,20$ , kelgu ja jää vaheline hõõrdeegur  $\mu_2 = 0,10$ . Kui kõrgele veepinnast peab kallas ulatuma, et Juku libiseks teise kaldani?

**Ü16 Pidurdus ★★**

Autor: Eero Vaher, lõppvaor, 2016, G 2

Auto sõidab teel, mille kõrguse muut teepikkuse kohta on  $k = \frac{1}{30}$ . Ühesuguse algkiiruse ning pidurdusjõu korral jääb auto ülesmäge liikudes seisma vahemaa  $s_1 = 25 \text{ m}$  jooksul, allamäge liikudes aga vahemaa  $s_2 = 30 \text{ m}$  jooksul. Mis on auto algkiiruse  $v$  väärtus? Raskuskiirendus  $g = 9,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ .

**Ü17 Kahurikuul ★★**

Autor: Hans Daniel Kaimre, lõppvaor, 2016, G 3

Juku arvutas koolitunnis ülivõimsast kahurist otse üles lastud kuuli maksimaalseks kõrguseks  $H = 400 \text{ km}$ . Ta ei arvestanud aga seda, et sellistel kõrgustel gravitatsioonivälja muutus on juba märkimisväärne ning ei saa eeldada, et raskusjõud on konstantne. Leidke, kui kõrgele kuul tegelikult lendaks. Maa raadius  $R = 6400 \text{ km}$ . Õhutakistusega mitte arvestada.

**Ü18 Pendel ★★**

Autor: Andreas Valdmann, piirkonnavaor, 2017, G 3

Nööri ja koormisest koosnev pendel võngub nii, et amplituudasendis on nööri ja vertikaalsihi vaheline nurk  $\alpha = 60^\circ$ . Mitu korda erinevad võnkumise käigus suurim ja vähim pinged nööris?

**Ü19 Mäenõlv ★★**

Autor: Jonatan Kalmus, lõppvaor, 2017, G 2

Kui suure maksimaalse kaldenurgaga  $\alpha$  mäenõlvast on võimalik jalgrattaga konstantse kiirusega üles sõita? Ratturi mass on  $m$ , jalgratta mass  $M$ , pedaali vända pikkus  $r_1$ , eesmise hammasratta raadius  $r_2$ , tagumise hammasratta raadius  $r_3$ , ratta raadius  $r_4$ . Eeldada, et ratturi massikese püsib sõitmise käigus ratta suhtes paigal ja sõitja kannab kogu oma kehakaalu vajuval pedaalil. Hõõrdeegur pinna ja ratta vahel on piisavalt suur libisemise vältimiseks. Mehaanilise hõõrdumise

jõuülekandes mitte arvestada ning veerehõõrdejõu võib lugeda tühiseks. Eeldada, et jalgratta keskmine kiirus püsib ligikaudselt konstante ja kiiruse suhteline muutus veerand väärtamisperioodi jooksul on tühiselt väike.

*Märkus.* Ülesande teksti on olümpiaadil esineva versiooniga võrreldes kohandatud.

**Ü20 Korvpall ★★**

Autor: Aigar Vaigu, lõppvoor, 2017, G 4

Kui täita korvpall õhu asemel heeliumiga, siis lennu kaugus muutub. Korvpalli läbimõõt  $D = 23$  cm, kesta mass  $m = 0,63$  kg, õhu tihedus  $\rho_0 = 1,2$  kg/m<sup>3</sup>, heeliumi tihedus  $\rho_{\text{He}} = 0,17$  kg/m<sup>3</sup>. Mitu korda kaugemale on võimalik visata heeliumiga täidetud korvpalli võrreldes õhuga täidetud korvpalliga, kui nende algkiirused on võrdsed? Arvutustes õhutakistusega mitte arvestada.

**Ü21 Veoauto ★★**

Autor: Kristian Kuppart, lahtine, 2011, G 3

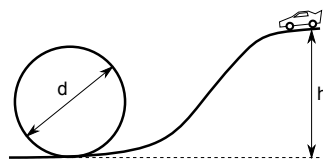
Veoauto kastis kõrgusega  $H$  on vedelik, mille pinna kõrgus kasti põhjast on  $h$ , kusjuures  $h > \frac{H}{2}$ . Kui suure kiirendusega  $a$  saab veoauto liikuda, ilma et vedelik kastist välja voolaks? Veoauto kasti pikkus on  $L$ .

*Märkus.* Auto kiirendab sujuvalt ning tänu sellele vedelik võnkuma ei hakka.

**Ü22 Surmasõlm ★★**

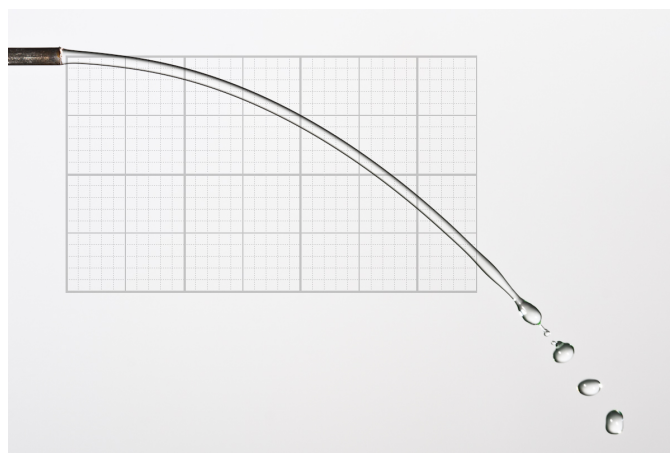
Autor: Andreas Valdmann, piirkonnavor, 2012, G 5

Mudelauto rada on kujutatud joonisel: auto alustab kaldtee tipus seisvast asendist, kogub laskumisel kiirust ja teeb silmuses surmasõlme. Mis on minimaalne kõrgus  $h$ , et auto silmuse läbimisel alla ei kukuks? Silmuse läbimõõt on  $d$ . Hõõrdumisega arvestada ei ole vaja.



**Ü23 Veejuga ★★** Autor: Mihkel Kree, lõppvoor, 2012, G 2

Pildil on foto horisontaalsest torust väljuva veejoaga ning teljestik, mille väikseim jaotis on võrdne veejoa läbimõõduga selle algkõrgusel. Ühtlase kiirusega voolava veejoa alla pandud mõõteklaas ruumalaga  $V = 150 \text{ cm}^3$  täitus ajaga  $t = 5 \text{ min}$ . Leidke toru siseläbimõõt.



**Ü24 Lasketiir ★★**

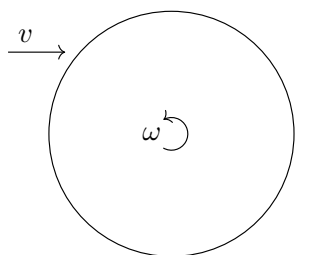
Autor: Aigar Vaigu, piirkonnavor, 2016, G 6

Siselasketiirus tulistatakse vintpüssist, mille kuuli kiirus  $v = 320 \text{ m/s}$ , kaugusel  $s = 30 \text{ m}$  olevat märklauda. Laskur sihib püssiga samal kõrgusel olevat märki ja tabab seda otse kümnesse. Hinnake, kui kaugele sihtmärgist satuks kuul, kui relva enne laskmist keerata ümber sihtimistelje 180 kraadi? Õhutakistusega mitte arvestada.

**Ü25 Silinder ★★**

Autor: Kaur Aare Saar, lõppvoor, 2016, G 4

Silinder massiga  $m$  ja raadiusega  $R$  libiseb tasapinnal kiirusega  $v$  ja nurkkiirusega  $\omega$ . Kui libisemine on lõppenud, liigub silinder kiirusega  $v$  esialgses vastupidises suunas. Leidke silindri esialgne nurkkiirus.



**Ü26 Veok ringteel ★★**

Autor: Jonatan Kalmus, piirkonnavor, 2018, G 5

Veok sõidab ringteel kõverusraadiusega  $R$  ühtlase kiirusega. Leida veoki maksimaalne võimalik kiirus, eeldusel et hõõrdetegur on piisavalt suur libisemise vältimiseks. Veoki massikeskme kõrgus maapinnast on  $h$  ja veoki laius  $l$ . Raskuskiirendus on  $g$ .

**Ü27 Kloori molekul ★★★**

Autor: Ants Remm, lahtine, 2012, G 6

Kloori molekul, mis liigub kiirusega  $v = 600 \text{ m/s}$ , neelab footoni lainepikkusega  $\lambda = 350 \text{ nm}$  ning jaguneb kaheks aatomiks. Ühe aatomi kiiruseks mõõdetakse  $u = 1600 \text{ m/s}$ , mis on risti molekuli esialgse kiirusega. Leidke kloori molekuli seoseenergia, kui kõik osakesed olid minimaalse siseenergiaga seisundis. Plancki konstant on  $h = 6,6 \cdot 10^{-34} \text{ Js}$ , valguse kiirus on  $c = 3,0 \cdot 10^8 \text{ m/s}$ , kloori aatomnumber on 35 ning Avogadro arv on  $N_A = 6,0 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$ . Footoni energia avaldub valemiga  $E = \frac{hc}{\lambda}$ . Eeldada, et footoni impulss on tühine võrreldes Kloori impulsi.

**Ü28 Kiik ★★★**

Autor: Andres Põldaru, lahtine, 2014, G 5

Kiige ühe otsa peal kaugusel  $l_1$  kiige pöörlemisteljest asub mass  $m_1$ . Kiige teise otsa peale, mis on pöörlemisteljest kaugusel  $l_2$ , kukub kõrguselt  $h$  mass  $m_2$ . Kokkupõrge on absoluutselt mitteelastne ning kiik on kokkupõrkehetkel horisontaalne. Kiige mass on väga väike ja sellega ei pea arvestama. Kui kiiresti liigub esimene mass vahetult pärast kokkupõrget?

**Ü29 Vesiniku ioniseerimine ★★★**

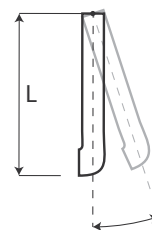
Autor: Jaan Toots, lahtine, 2015, G 6

Kui suur on vähim vesiniku aatomit ioniseerida suutva vaba prootoni kineetiline energia  $K_0$ ? Eeldage, et elektron on vesiniku aatomis paigal ning elektromagnetiline vastasmõju aatomi tuuma ja vaba prootoni vahel on tühine. Vesiniku seoseenergia  $E_0 = 13,6 \text{ eV}$ , prootoni mass  $m_p = 1,67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$  ja elektroni mass  $m_e = 9,11 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$ .

**Ü30 Veetoru ★★★**

Autor: Kristian Kuppert, piirkonnavor, 2015, G 5

Veetoru pikkusega  $L$  on kinnitatud seina külge nii, et see saab vertikaaltasandis vabalt pöörelda. Veetoru mass koos seda täitva veega on  $M$ . Toru ots ristlõikepindalaga  $S$  on ülejäänud toruga võrreldes 90 kraadi pööratud (vt joonist) ning sellest voolab välja vesi kiirusega  $v$  ja tihedusega  $\rho$ . Kui suure nurga all vertikaali suhtes paikneb toru telg? Raskuskiirenduse väärtus on  $g$ .



**Ü31 Põrge ★★★**

Autor: Mihkel Kree, piirkonnavor, 2015, G 6

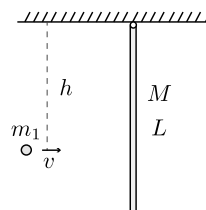
Algselt paigal olev rippuv varras massiga  $M$  ning pikkusega  $L$  on fikseeritud ülemisest otsast vabalt pöörleva kinnitusega. Varda inertsimoment otspunkti suhtes on  $I = \frac{1}{3}ML^2$ . Teraspall massiga  $m_1$  lendab vastu varrast ning tabab seda kaugusel  $h$  riputuspunktist. Põrge on elastne, st soojuskadudeta. Huvitaval kombel jääb teraskuul pärast põrget hetkeks paigale ning hakkab seejärel vertikaalselt alla langema. Leidke kauguse  $h$  väärtus, mille korral niisugune seismajäämine võimalik on.

**Ü32 Rattur ★★★**

Autor: Ardi Loot, lahtine, 2016, G 6

Rattur massiga  $m = 100$  kg sõidab ilma vāntamata alla määnõlvalt langemisnurgaga  $\theta_1 = 4,8^\circ$  (nurk horisondi ja määnõlva vahel) ja märkab, et piisavalt pika nõlva korral on tema lõppkiiruseks  $v_1 = 50$  km/h. Kaks korda väiksema nõlva korral ( $\theta_2 = 2,4^\circ$ ) on ratturi lõppkiirus aga  $\Delta v = 15$  km/h võrra väiksem. Leidke, kui suur peab olema ratturi vāntamise võimsus, et horisontaalsel teel hoida kiirust  $v = 20$  km/h. Kui suur osa võimsusest kulub tuuletakistuse ületamiseks? Eeldage, et tegemist on tuulevaikse ilmaga ja raskuskiirendus  $g = 9,8$  m/s<sup>2</sup>.

*Märkus.* Arvestada tuleks nii kiirusest sõltumatu hõõrdejõuga kui ka tuuletakistusega, mis on võrdeline kiiruse ruuduga.

**Ü33 Kaks kuuli ja vedru ★★★**

Autor: Rasmus Kisel, piirkonnavor, 2017, G 7

Vedru erinevatesse otstes on kinnitatud väikesed kuulid, millest ühe mass on  $M$  ning teise oma tundmatu. Kogu süsteem pannakse pöörlema nii, et tundmatu massi kaugus pöörlemiskesksest on võrdne vedru esialgse pikkusega. Mis on selle pöörlemise periood, kui vedru jäikus on  $k$ ? Vedru mass on võrreldes kuulide massidega tühine.

**Ü34 Reisirong ★★★**

Autor: Moorits Mihkel Muru, lõppvoor, 2017, G 5

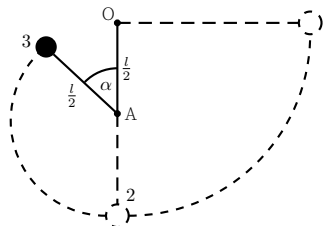
Reisirong sõidab mööda raudtee ringjoone kaarekujulist lõiku ühtlaselt aeglustudes. Lõigu pikkus on  $s$  ja rongil kulub selle läbimiseks aeg  $t$ . Pärast selle lõigu läbimist on rongi liikumise suund muutunud nurga  $\varphi$  võrra ja lõigu alguses oli rongi kiirus  $\alpha$  korda suurem, kui see on lõigu lõpus. Leidke seos rongis istuva reisija massi  $m$  ja tema kaalu  $P$  vahel, kui reisirong on parajasti selle lõigu keskpunktis. Leidke reisija mass, kui  $P = 840$  N,  $s = 1,5$  km,  $t = 60$  s,  $\alpha = 1,5$ ,  $\varphi = 60^\circ$  ja  $g = 9,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ .

**Ü35 Kaheosaline pendel ★★★**

Autor: Hans Daniel Kaimre, lõppvoor, 2018, G 4

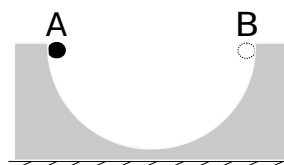


Punktis O kinnitatud niidi pikkusega  $l$  otsas ripub väike kuulike. Kuulike viiakse kõrvale ja vabastatakse tõuketa asendist 1. Kuuli jõudes asendisse 2, kohtub niit joonise tasandiga risti olevat varrast punktis A, mis asub punktist O kaugusel  $l/2$  sellega samal vertikaalil. Lei-da, millise nurga  $\alpha$  väärtuse korral niidi pinge  $T = 0$  (asend 3). Õhutakistust ja hõõrdumist vardal arvestama ei pea.



**Ü36 Veerev pall ★★★** Autor: Hans Daniel Kaimre, piirkonnavoor, 2016, G 8

Klotsist on välja lõigatud poolsilindrikujuline tükk raadiusega  $R$ . Klots seisab siledal hõõrdevabal horisontaalsel pinnal (vaata joonist). Klotsi mass on  $M$ . Punktist A lükatakse liikuma mööda silindrikujulise väljalõike pinda väike pall raadiusega  $r$  ning massiga  $m$ . Kui palju on nihkunud klots hetkeks, mil pall jõuab punkti B?



**Ü37 Pidurdamine ★★★★★**

Autor:

Tanel Kiis, lahtine, 2012, G 7

Keha massiga  $M$  kukub vabalt raskusjõu toimele kiirendusega  $g$ . Tema kiirust proovitakse muuta, tulistades maalt otse üles iga  $t$  sekundi tagant väikeseid kuulikesi massiga  $m$ , mis pörkavad elastselt otse tagasi. Kui suur peab olema kuulikeste kiirus  $u$ , et pärast iga pörget oleks langeva keha kiirus üks ja seesama  $v$ ? Võib eeldada, et väikeste kuulikeste kiiruse muut raskusjõu toimele on tühine ja  $m \ll M$ .

**Ü38 Robin Hood ★★★★★**

Autor: Madis Ollikainen, piirkonnavoor, 2012, G 9

Robin Hood on täpsuslaskmisvõistlustel, kus tal tuleb tabada märklauda, mis asub  $L = 200$  m kaugusel. Millise nurga  $\alpha$  all horisontaalsihi suhtes peab Robin vibust laskma, et tabada täpselt märklauda keskpunkti? Vibu vinnamisel teeb ta tööd  $A = 500$  J ning vibu kasutegur on  $\eta = 0,17$ . Noole mass on  $m = 54$  g ja see lastakse lendu märklauda keskpunktist  $h = 70$  cm võrra kõrgemalt. Õhutakistusega ärge arvestage. Raskuskiirenduseks lugege  $g = 9,8 \text{ m/s}^2$ .

**Ü39 Sportauto ★★★★★**

Autor: Mihkel Rähn, lõppvoor, 2014, G 7

Leidke esirattaveolise sõiduauto maksimaalne kiirendus. Auto mass on  $m$ , esi- ja tagarataste telgede vahe  $b$ , massikeskme kõrgus  $h$  ning massikeskme horisontaalne kaugus tagateljest  $s$ . Hõõrdetegur rataste ja maa vahel on  $\mu$ .

**Ü40 Latt ★★★★★**

Autor: Kaur Aare Saar, lahtine, 2015, G 8

Pikka horisontaaltasapinnal lebavat latti lükatakse ühest otsast muutumatu kiirusega ning risti latiga. Kui kaugel sellest lati otsast asub lati pöörlemistelg? Lati pikkus on  $L$ . Hõõrdetegur lati ja tasapinna vahel on kõikjal ühesugune.

**Ü41 Õõnes kera ★★★★★**

Autor: Tanel Kiis, piirkonnavoore, 2013, G 9

Jukul on rauast kera ( $\rho_{\text{Fe}} = 7,9 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$ ) raadiusega  $r = 10 \text{ cm}$  ja massiga  $m = 30 \text{ kg}$ . Juku teab, et kera sees on sfääriline õõnsus, mille keskpunkti kaugust  $d$  kera keskpunktist ta üritab leida. Selleks riputas ta kuuli kaks korda nööri otsa rippuma, kasutades riputuskohtadeks kera vastaspunkte. Ühel korral moodustas neid kinnituspunkte ühendav telg horisondiga nurga  $\alpha = 60^\circ$ , teisel korral aga nurga  $\beta = 45^\circ$ . Leidke  $d$ .

**Ü42 Jalgpallurid ★★★★★**

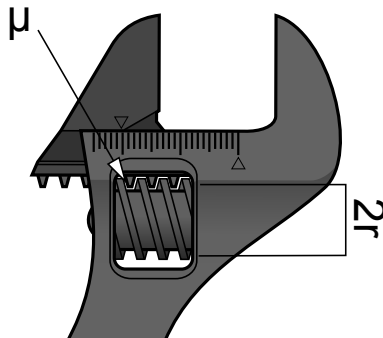
Autor: Andreas Valdmann, lõppvoor, 2013, G 9

Kaks jalgpallurit proovisid trikilööki, kus kaks palli õhus kokku põrkavad. Jalgpallurid seisis teineteisest  $d = 20 \text{ m}$  kaugusel ja andsid samal ajahetkel sooritatud löögiga kumbki oma pallile algkiiruse  $v = 15 \text{ m/s}$ . Mis piirkonnas võisid pallid lennol kokku põrgata? Vastuseks tehke pealtvaates joonis, kuhu on kantud jalgpallurite asukohad ja kõikvõimalike kokkupõrkepunktide piirkond. Esitage ka selle piirkonna mõõdud. Võimalike kokkupõrkepunktide kõrgust maapinnast pole vaja eraldi välja arvutada ega joonisele kanda. Raskuskiirendus on  $g = 9,8 \text{ m/s}^2$ .

**Ü43 Mutrivõti ★★★★★**

Autor: Andres Põldaru, lahtine, 2015, G 9

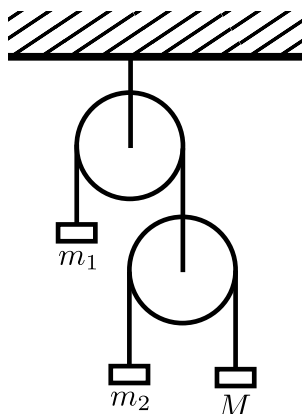
Kui suur peab olema reguleeritava mutrivõtme keerete arv pikkusühiku kohta  $n$ , et mutreid saaks kõvasti kinni keerata? Hõõrdetegur kokkupuutepindade vahel on  $\mu$  ja raadius reguleerija teljest kokkupuutepinnani on  $r$ .



**Ü44 Plokid ★★★★★**

Autor: Taavet Kalda, lahtine, 2017, G 8

Joonisel on kujutatud kahest ploki ja kolmest raskusest, massidega  $m_1$ ,  $m_2$  ja  $M$  koosnevat süsteemi. Nöörid on venimatud ning nööride ja plokkide massid on tühised võrreldes raskuste massidega. Hõõre ploki ja nööri vahel on tühiselt väike. Missugune peaks olema  $M$  väärtus selleks, et  $M$  jääks esialgu paigale, kui süsteem lahti lasta?

**Ü45 Mänguauto ★★★★★**

Autor: Jaan Kalda, lahtine, 2017, G 9

Mänguauto telgede vaheline kaugus on  $L$  ning massikese asub võrdsel kaugusel telgedest kõrgusel  $h$  horisontaalpinnast. Auto esimesed rattad saavad vabalt pöörlelda ja on tühise massiga, tagumised rattad on aga jäigalt kinni kiilunud ega pöörle üldse. Auto lebab horisontaalsel pinnal, rataste ja horisontaalpinna vaheline hõõrdetegur on  $\mu$ , raskuskiirendus on  $g$ .

Horisontaalpinda hakatakse liigutama kõrge sagedusega horisontaalselt edasi-tagasi: ühe poolperioodi jooksul on pinna kiirusvektor suunatud auto tagaratastelt esiratastele ning teise poolperioodi jooksul on see vastassuunaline; mõlema poolperioodi jooksul püsib kiiruse moodul konstantsena; võngutamisel liigutatakse pinda nii kiiresti, et auto libiseb pinna suhtes kogu aeg kas ühes või teises suunas. Millise keskmise kiirendusega hakkab liikuma auto?

**Ü46 Killud ★★★★★**

Autor: Jaan Kalda, lahtine, 2012, G 10

Savikuulike massiga 10 g kukkus vertikaalselt alla siledale horisontaalsele põrandale ja läks kolmeks killuks. Killud lendasid laiali ja peatusid punktides, mis on näidatud juuresoleval joonisel (ülaltvaade, ristiga on märgitud kukkumiskoht). Määrake kildude massid. Joonisel (lisalehel) võib teha lisakonstruksioone ja mõõtmisi. Võite lugeda, et killud hakkasid kohe pärast kukkumist üles pörkamata libisema, õhuhõõre on tühine ja liugehõõrdetegur ei sõltu kiirusest.

**Ü47 Liivakell ★★★★★**

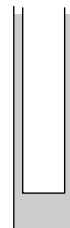
Autor: Roland Matt, lõppvoor, 2012, G 8

Uurime liivakella mudelit. Liivakell koosneb silindrilisest torust pikkusega  $L$ , mis on keskelt eraldatud ühtlaselt aukudega läbistatud plaadiga, millest liiv saab läbi voolata. Heas lähenduses ei sõltu liiva aukude läbimise massikiirus  $w$  ülemises anumast olevast liivahulgast. Liivakell asetatakse kaalule töörežiimis (kui liiv voolab) ja siis, kui kogu liiv on alla voolanud. Milline on kaalunäitude vahe? Liiva tihedus on  $\rho$  ja liivakella ristlõikepindala on  $S$ . Eeldage, et hetkel kukkuvat liiva mass on tühine võrreldes liiva kogumassiga.

**Ü48 Silindrilised anumad ★★★★★**

Autor: Jaan Kalda, lõppvoor, 2014, G 8

Silindriline anum siseraadiusega  $R = 30$  mm on täidetud veega. Teine tühi silindriline anum raadiusega  $r = 25$  mm, mille mass on tühiselt väike, on surutud koaksiaalselt suurema silindri sisse nii, et selle vettesukeldunud osa pikkus  $L = 300$  mm (vt joonist). Leidke sisemise silindri kiirendus vahetult pärast seda, kui see vabaks lastakse. Vee pindpinevuse ning viskoossusega arvestada pole tarvis.

**Ü49 Vedru ★★★★★**

Autor: Mihkel Kree, lõppvoor, 2015, G 8

Kasti sees on vedru külge riputatud koormis. Nii kast kui koormis on massiga  $m$ . Vedru mass on tühiselt väike ning selle jäikustegur on  $k$ . Kastil lastakse kõrguselt  $h$  vabalt maha kukkuda nii, et langemise ajal on koormis tasakaaluolekus. Kokkupõrkel pehme pinnaga jääb kast hetkeliselt paigale. Kast on piisavalt kõrge selleks, et koormis vastu kasti ei põrkaks. Vedrut ei suruta ühelgi hetkel täielikult kokku.

**a)** Milline on vähim kõrgus  $h_m$ , millelt kukkudes hüppab kast tagasi üles?

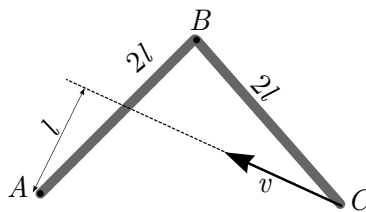
**b)** Kastil lasti kukkuda punktis a) leitud algkõrguselt  $h \approx h_m$ . Kui pika ajavahemiku  $t$  veedab kast maapinnal enne üles kerkimist?

*Märkus.* Pange tähele, et vabalangemises olev koormis on kaaluta olekus ning seetõttu on vedru langemise ajal välja venitamata. Maapinnale jõudes pole koormis enam tasakaaluasendis ning hakkab seetõttu uue tasakaaluasendi ümber võnkuma nurksagedusega  $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ .

**Ü50 Vardad ★★★★★**

Autor: Jaan Kalda, lahtine, 2017, G 10

Juuresoleval joonisel on kujutatud kahest vardast pikkusega  $2l$  koostatud šarniirne konstruktsioon. Ühe varda otspunkt on fikseeritud liikumatuna punkti  $A$  ning teise varda otspunkt  $C$  liigub konstantse kiirusega  $v$  piki sihti, mis möödub punktist  $A$  kaugusel  $l$ . Leidke varaste ühenduspunkti  $B$  kiirendus hetkel, mil punktide  $A$  ja  $C$  vahekaugus on  $2l$ .

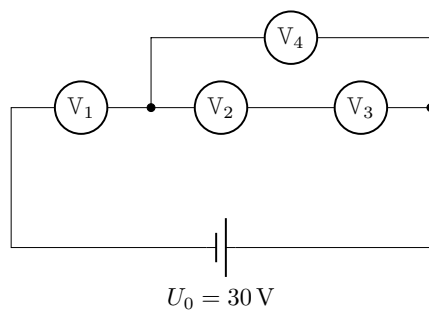


## Elektriahelad

### Ü51 Voltmeetrid ★

Autor: Eero Vaher, piirkonnavaor, 2016, G 1

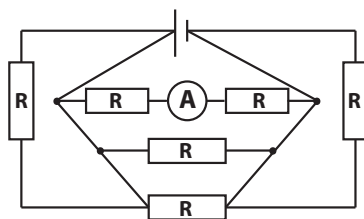
Elektriskeemis on pingeallikas pingega  $U_0 = 30 \text{ V}$  ning neli ühesugust voltmeetrit. Kui suur on iga voltmeetri näit?



### Ü52 Voltmeeter ★

Autor: Erkki Tempel, piirkonnavaor, 2017, G 1

Joonisel näidatud elektriskeemis on ideaalne ampermeeter, mis näitab voolutugevust  $I$ . Ampermeeter asendatakse ideaalse voltmeetriga. Kui suur on voltmeetri näit? Kõikide takistite takistus on  $R$ .



### Ü53 Lambid ★

Autor: Mihkel Kree, piirkonnavaor, 2015, G 2

Pingeallikaga on rööbiti ühendatud kaks lampi, kusjuures üks lampidest põleb  $k$  korda suurema võimsusega kui teine. Seejärel ühendatakse need lambid sama pingeallikaga jadamisi. Mitu korda muutub lampidel eralduv koguvõimsus? Kas see muutub suuremaks või väiksemaks?

**Ü54 Elektriskeem ★★**

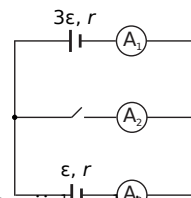
Autor: Oleg Košik, piirkonnavaor, 2013, G 5

Joonisel toodud skeemil on ampermeetrid ideaalsed; patareide elektromotoorjõud ja sisetakistused on märgitud nende juurde. Leidke ampermeetrite näidud, kui

a) lüliti on suletud;

b) lüliti on lahti.

Märkus. praktikas tohib sellist skeemi kasutada vaid siis, kui olakse veendunud, et tekkivad voolud jäävad ampermeetrite mõõtepiirkonda!



**Ü55 Tetraeeder ★★**

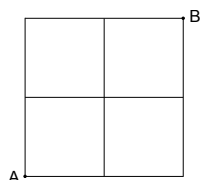
Autor: Eero Vaher, lahtine, 2014, G 4

Tetraeedri (neljast võrdkülgsest kolmnurgast koosneva püramiidi) servadeks on ühesugused takistid takistusega  $R$ . Leidke tetraeedri kahe tipu vaheline takistus.

**Ü56 Ruudustik ★★**

Autor: Taavi Pungas, lõppvoor, 2014, G 1

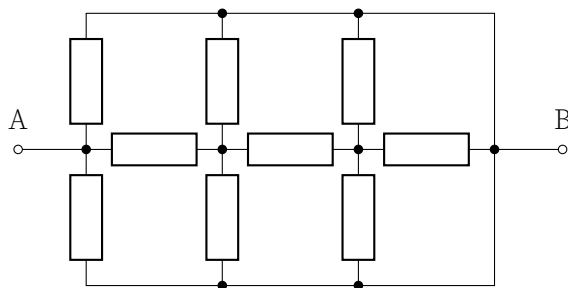
Traadist on valmistatud  $2 \times 2$  ruudustik (vt joonist), iga väikese ruudu külje takistus on  $r = 1 \Omega$ . Leidke punktide A ja B vaheline takistus.



**Ü57 Takistid ★★**

Autor: Hans Daniel Kaimre, lahtine, 2015, G 2

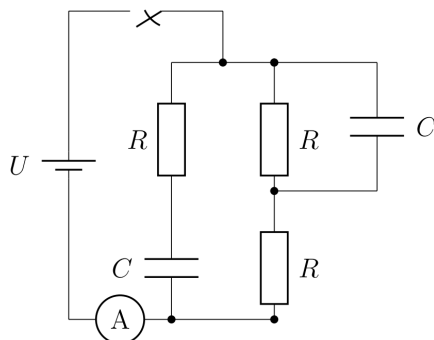
Leidke ühesugustest takistitest koosneva ahela kogutakistus  $R_{AB}$ . Iga takisti takistus on  $R$ .



Ü58 Elektriskeem ★★

Autor: Kristian Kuppart, lahtine, 2016, G 3

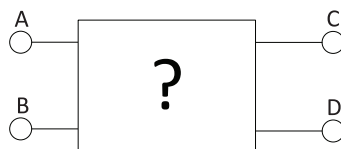
Leidke juuresoleval skeemil voolutugevus  $I$  läbi ampermeetri kahel juhul: vahetult pärast lüliti sulgemist ja pika aja möödumisel. Eeldada, et kondensaatorid on enne lüliti sulgemist laadimata. Patarei lugeda ideaalseks.



Ü59 Must kast ★★

Autor: Kristian Kuppart, lõppvoor, 2013, G 4

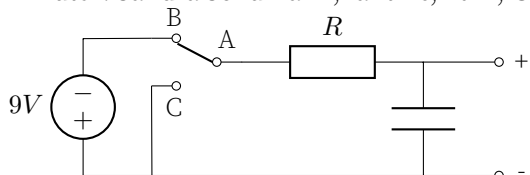
Joonisel näidatud musta kasti kõik klemmid ühendatakse korraaks kokku. Seejärel, kui klemmide A ja B külge ühendada patarei pingega  $U$  ja klemmide C ja D külge voltmeeter, on voltmeetri näit alghetkel  $U$ . Mõõtmise järel ühendatakse kõik klemmid veel korraaks kokku. Kui ühendada sama patarei klemmide C ja D külge ning voltmeeter klemmide A ja B külge, on voltmeetri näit alghetkel  $\frac{U}{2}$ . Teades, et mustas kastis on ainult identsed kondensaatorid, joonistage musta kasti skeem.



Ü60 Elektroonikaskeem ★★

Autor: Sandra Schumann, lahtine, 2017, G 4

Joonisel on antud teatud elektroonikaseadme ühe osa skeem, mis koosneb 9 V vooluallikast, takistist ja kondensaatorist koosnevast filtrist, väljundklemmidest ja lülitist. Lüliti kaks võimalikku asendit on “sees” (ühendatud on A ja B) ning “väljas” (ühendatud on A ja C). Antud olukorras ei ole väljundklemmide külge midagi ühendatud.



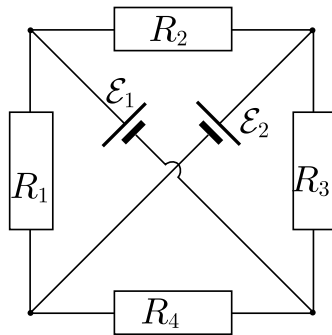
Kui toodud skeemis viia lüliti asendist “sees” asendisse “väljas” (st lülitada seade välja) ja muuta seejärel vooluallika polaarsus vastupidiseks, siis töötab elektroonikaseade pärast sisselülitamist endiselt. Kui aga vooluallika polaarsust muuta ilma seadet välja lülitamata, siis põleb takisti  $R$  läbi. Eeldusel, et takisti põleb läbi niipea, kui sellel eralduv võimsus ületab 0,25 W, leia  $R$  minimaalne ja maksimaalne võimalik väärtus.



**Ü61 Elektriline sild ★★★**

Autor: Jaan Kalda, lõppvoor, 2012, G 3

Joonisel toodud skeemis on tegemist ühesuguste takistitega takistustega  $R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = R$  ning ühesuguste ideaalsete patareidega elektromotoorjõududega  $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_2 = \mathcal{E}$ . Leidke voolutugevused takistites (st  $I_1, I_2, I_3$  ja  $I_4$  avaldised suuruste  $R$  ja  $\mathcal{E}$  kaudu).



**Ü62 Must kast ★★★**

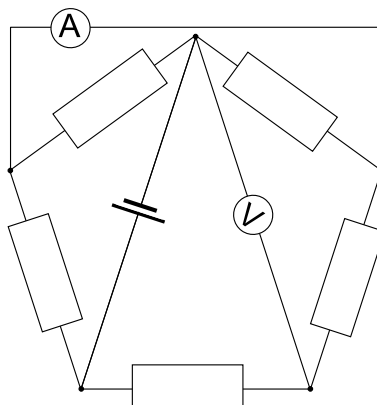
Autor: Jaan Kalda, lõppvoor, 2015, G 4

Mustas kastis on kolmest takistist ja ideaalsest ampermeetrist koosnev skeem. Lisaks on mustal kastil kolm väljundklemmi  $A$ ,  $B$  ja  $C$ . Kui rakendada pinge  $U = 12\text{ V}$  klemmide  $A$  ja  $B$  vahele, siis on ampermeetri näit  $I_{AB} = 2\text{ A}$ . Klemmide  $A$  ja  $C$  puhul on lugem  $I_{AC} = 4\text{ A}$  ning klemmide  $B$  ja  $C$  puhul  $I_{BC} = 6\text{ A}$ . Joonistage mustas kastis olev skeem ning märkige sellele takistite takistused.

**Ü63 Viisnurk ★★★**

Autor: Jaan Kalda, lõppvoor, 2017, G 6

Leidke joonisel toodud skeemis ampermeetri ja voltmeetri näidud. Kõik takistid on takistusega  $R = 1\ \Omega$ , pinge patarei klemmidel  $U = 7\text{ V}$ .



**Ü64 12 lampi ★★★**

Autor: Valter Kiisk, piirkonnavor, 2018, G 8

Juku käsutuses on 12 ühesugust taskulambipirni ning patarei, mille klemmipinge on täpselt 5 korda suurem pirni nimipingest. Lisaks leidis ta juhtumisi takisti, mille takistus on parajasti pool lambi hõõgniidi takistusest töörežiimis (viimase sai ta teada jagades lambi soklile kirjutatud nimipinge ja -voolu omavahel).

**a)** Kuidas tuleb ühendada nimetatud komponendid elektriahelasse, et kõik 12 pirni põleksid normaalheledusega?

**b)** Mitu korda kasvab (või kahaneb) lampide koguvõimsus, kui üks lampidest läbi põleb? Lampide takistuse sõltuvust temperatuurist võib jätta arvestamata.

**Ü65 Elektriahela energia ★★★**

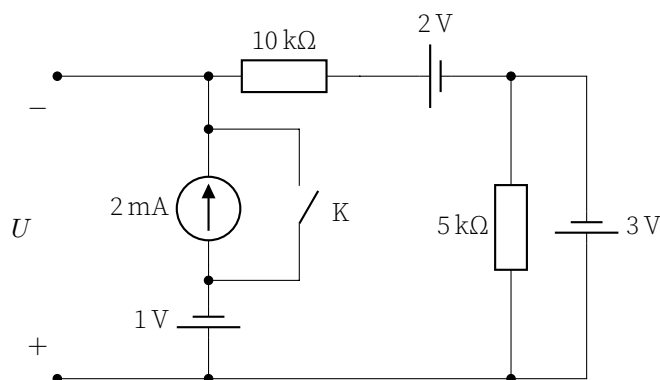
Autor: Eero Vaher, piirkonnavor, 2014, G 8

Suletud elektriahelas on jadamisi ühendatud takisti takistusega  $R = 100 \Omega$ , kondensaator mahtuvusega  $C = 200 \text{ nF}$ , tühise aktiivtakistusega induktiivpool induktiivsusega  $L = 10 \text{ mH}$  ning sobivalt ühendatud ideaalsed mõõteseadmed. Hetkel  $t_0$  mõõdeti voolutugevuseks läbi kondensaatori  $I = 300 \text{ mA}$  ning pingeks poolil  $U = 50 \text{ V}$ . Teada on, et mõõtmise hetkel on vool poolis suunatud kõrgema potentsiaaliga piirkonnast madalama potentsiaaliga piirkonda. Kas mõõtmise hetkel  $t_0$  oli rohkem energiat poolil või kondensaatoril?

**Ü66 Vooluallikad ★★★**

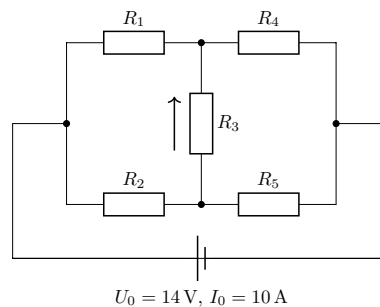
Autor: Sandra Schumann, lõppvoor, 2016, G 7

Vaatleme joonisel näidatud elektriskeemi, kus noolega tähistatud skeemielement on konstantse voolu allikas voolutugevusega  $I = 2 \text{ mA}$  noolega tähistatud suunas. Leidke pinge  $U$  väljundklemmidel ja voolutugevus läbi takisti  $R = 10 \text{ k}\Omega$  kahe juhu jaoks: **a)** kui lüliti  $K$  on suletud ja **b)** kui lüliti on avatud.

**Ü67 Takistuste tuvastamine ★★★**

Autor: Eero Vaher, lõppvoor, 2018, G 7

Vooluallikaga on ühendatud viis takistit. Neist kolme takistus on  $1\ \Omega$ , ülejäänud kaks on tundmatu, kuid ühesuguse takistusega. Vooluallika pinge  $U_0 = 14\ \text{V}$  ning voolutugevus selles  $I_0 = 10\ \text{A}$ . Pinge ja voolutugevus kolmandal takistil on vastavalt  $U_3 = 2\ \text{V}$  ning  $I_3 = 2\ \text{A}$ . Joonisel on märgitud elektrivoolu suund takistis  $R_3$ . Määrake kõigi takistite takistused.

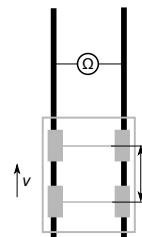


#### Ü68 Raudtee ★★★★★

Autor:

Mihkel Pajusalu, piirkonnavaor, 2012, G 8

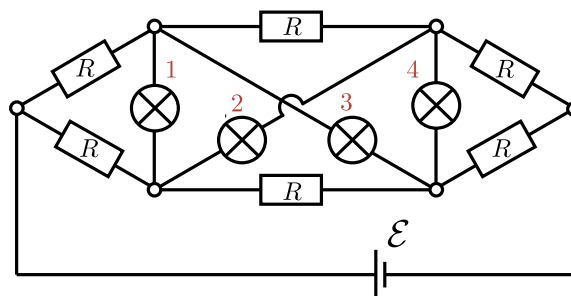
Mõõdame raudteel elektritakistust kahe kõrvutise rööpa vahel nii, nagu joonisel. Rööbastel sõidab vagun kiirusega  $v$ . Olgu vagunil kaks rattapaari, mille vahekaugus on  $l$ . Joonistage graafik takistuse muutumisest ajas alates hetkest, kui vaguni esimene rattapaar on mõõtepunkti ees sellest kaugusel  $l/2$ , kuni ajani, kui tagumine rattapaar on mõõtepunkti taga sellest kaugusel  $l/2$ . Mõlema rattapaari takistuseks olgu  $r$  ja rööpa takistus pikkusühiku kohta  $\rho$ .



#### Ü69 Lambid ★★★★★

Autor: Mihkel Kree, lahtine, 2013, G 9

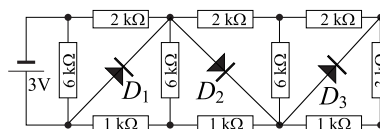
Juku ehitas kodus niisuguse elektriskeemi nagu joonisel näidatud, kasutades selleks kuut ühesugust takistit takistusega  $R = 10\ \Omega$ , nelja ühesugust lampi takistusega  $r = 20\ \Omega$  ning pingeallikat elektromotoorjõuga  $\mathcal{E} = 5\ \text{V}$ . Arvutage igas lambis (joonisel tähised 1, 2, 3, 4) eralduv võimsus. Pingeallika sisetakistusega mitte arvestada.



#### Ü70 Diodid ★★★★★

Autor: Jaan Kalda, lahtine, 2012, G 8

Millised võimsused eralduvad skeemil märgitud diodidel? Diodide voolu võib lugeda nulliks kõikide vastupingete jaoks ning samuti ühest voldist väiksemate päripingete jaoks; suvalise pärioolu puhul on diodi pinge  $1,0\ \text{V}$ .

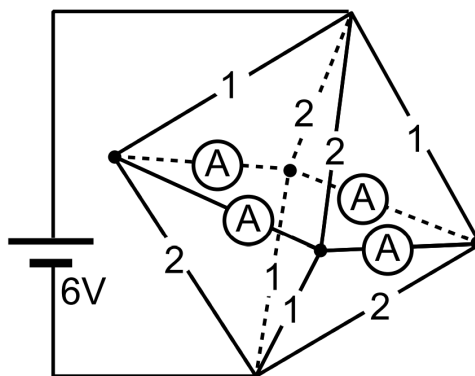


Takistite takistused ja elektromotoorjõu väärtus on toodud joonisel. Dioodi skeemitähise noole suund näitab päriveroolu suunda.

### Ü71 Oktaeeder ★★★★★

Autor: Jaan Kalda, lahtine, 2016, G 8

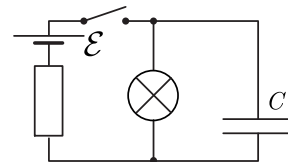
Juuresolev skeem kujutab traadist oktaeedrit, iga traadi juurde on kirjutatud selle takistus oomides. Ampermeetreid ühendavad traadid on tühiselt väikese takistusega. Leidke ampermeetrite näidud.



### Ü72 Kondensaator ★★★★★

Autor: Jaan Kalda, lõppvoor, 2018, G 9

Vaatleme joonisel kujutatud elektriskeemi, mis koosneb kondensaatorist mahtuvusega  $C$ , patareist elektromotoorjõuga  $\mathcal{E}$ , takistist ja hõõglambist, mida võib lugeda mittelinearseks takistiks (pinge sõltub voolust mittelineaarselt). Algselt oli kondensaator laenguta ja lüliti oli avatud. Seejärel suleti lüliti lühikeseks ajaks, misjärel see avati uuesti ning hoiti lahtisena seni, kuni kondensaator oli täielikult tühjenenud. Selle aja jooksul, mil lüliti oli suletud, eraldus kogu skeemil soojushulk  $Q_1$ ; lüliti avamise järel eraldus täiendavalt veel soojushulk  $Q_2$ . Leidke laeng, mis läbis hõõglambi sel perioodil, kui lüliti oli suletud.

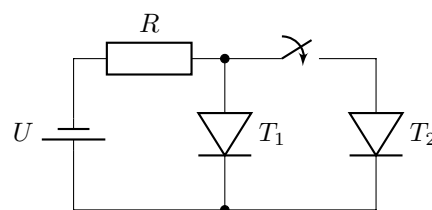


### Ü73 Türistor ★★★★★

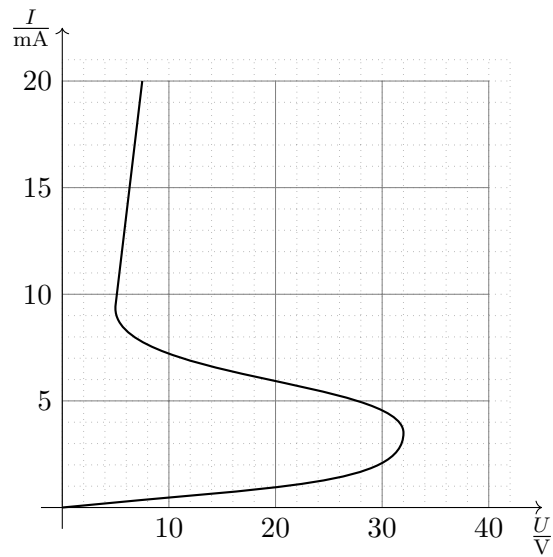
Autor: Jaan Toots, lõppvoor, 2015, G 10

Türistori (diodisarnase elemendi) volt-ampere karakteristik on juuresoleval graafikul. Kaks sellist türistori on ühendatud pingellika ja takistiga kõrvalolevasse skeemi. Takistus  $R = 2 \text{ k}\Omega$ .

a) Alguses on lüliti avatud. Pingellika pinget suurendatakse lineaarselt  $t = 42 \text{ s}$



jooksul väärtuselt  $U_0 = 0 \text{ V}$  kuni väärtu-  
seni  $U_a = 42 \text{ V}$ . Skitseerige ahelat läbiva  
voolutugevuse  $I(t)$  sõltuvus ajast. Milline on voolutugevuse lõppväärtus  $I_a$ ?  
**b)** Leidke lõppvoolutugevused mõlemas türistoris, kui lülitati suletakse ilma ahelale  
rakendatud pinget  $U_a$  muutmata.



## Elektrostaatika

### Ü74 Kondensaator ★

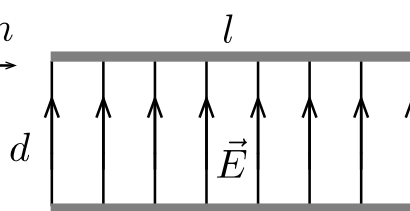
Autor: Madis Ollikainen, lahtine, 2012, G 3

Füüsikatudeng leidis vanade demonstratsioonideks mõeldud eksperimentaalseadmete hulgast ühe plaatkondensaatori. Noore füüsikuna tundis ta kohe hirmsat soovi sellega veidi mängida. Ta mõõtis kondensaatori plaatide vahekauguseks  $d$  ning seejärel laadis kondensaatori pingeni  $U$ . Nüüd asetas ta kondensaatori plaatide vahele ühe kuulikese, mis kukkus alumise plaadi peale ja siis hakkas uuesti ülespoole tõusma. Kuulikesel kulus alumiselt plaadilt ülemiseni jõudmiseks aeg  $t$ . Leidke kuulikese massi ja alumiselt plaadilt saadud laengu suhe.

### Ü75 Elektron ★★

Autor: Mihkel Kree, lahtine, 2017, G 3

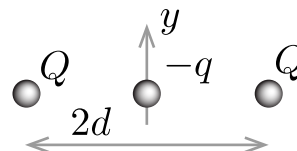
Elektron liigub vaakumis ning siseneb  $q, m$  paralleelsete plaatide vahel paiknevasse ruumipiirkonda selle ülemisest servast nii, et elektroni kiirusvektor on paralleelne plaatidega (vt joonist). Kui suur on elektroni minimaalne võimalik kiirus  $v_{\min}$  plaatide vahelisest ruumipiirkonnast väljumisel? Plaatide pikkus on  $l$  ja nende vahekaugus  $d$ . Plaatide vahel on ühtlane elektriväli  $\vec{E}$  ning ääreefektidega pole vaja arvestada. Elektroni laeng on  $q$  ning mass  $m$ . Gravitatsioonijõuga pole vaja arvestada.



### Ü76 Laengud ★★★

Autor: Mihkel Kree, piirkonnavor, 2017, G 9

Kaks kera, kumbki laenguga  $Q$ , on liikumatult fikseeritud nii, et nende keskpunktide kaugus on  $2d$ . Täpselt nende kerade keskele paigutatakse kolmas kera laenguga  $-q$  ning massiga  $m$ , mis saab liikuda ainult mööda  $y$ -telge (vt joonis). Leidke selle kolmanda kera väikeste  $y$ -suunaliste võnkumiste periood  $T$ .



### Ü77 Pendel ★★★★★

Autor: Jonatan Kalmus, lõppvoor, 2018,

G 6

Elektriliselt isoleeritud metallkuul massiga  $M$  ja laenguga  $Q > 0$  ripub vertikaalse vedru otsas jäikusega  $k$  tasakaaluasendis gravitatsiooniväljas  $g$ . Nüüd tekitatakse vertikaalne elektriväli tugevusega  $E$ , mis on esialgu suunatud alla ning edaspidi alati kuuli liikumise suunas. Eeldada, et elektriväli muutub hetkeliselt. Leida kuuli kaugus algsest asukohast ajahetkel  $t = 7\pi\sqrt{\frac{M}{k}}$ .

**Ü78 Koonus ★★★★★**

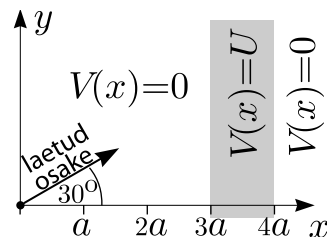
Autor: Stanislav Zavjalov, piirkonnavor, 2012, G 10

Ühtlaselt laetud koonus kõrgusega  $H$  tekitab oma tipus  $S$  potentsiaali  $\varphi_0$ . Sellest lõigatakse ära väiksem koonus kõrgusega  $h$ , mis on suure koonusega sarnane, kahe koonuse tipud ühtivad. Seejärel eemaldatakse väiksem koonus lõpmatusesse. Milline on uus potentsiaali väärtus punktis  $S$ ?

**Ü79 Laengud ★★★★★**

Autor: Jaan Kalda, lõppvoor, 2012, G 9

Positiivselt laetud osake kiirendatakse koordinaatide alguspunktis pinge  $4U$  (kus  $U > 0$ ) abil teatud kiirusele, mis lebab  $x - y$  tasandis  $30^\circ$ -kraadise nurga all  $x$ -telje suhtes, vt joonist. Elektriline potentsiaal  $V(x, y) \equiv V(x)$  sõltub ainult  $x$ -koordinaadist: kui  $3a < x < 4a$ , siis  $V(x) = U$  ning vastasel korral  $V(x) = 0$ ; peale elektrostaatilise jõu osakesele mingeid muid jõude ei mõju ning  $a > 0$ .



a) Visandage laengu trajektoori  $x - y$ -tasandis (geomeetrilisi mõõtmeid ja nurki pole vaja märkida).

b) Nüüd on laetud osakeste allikaks koordinaatide alguspunktis asuv koaksiaalne vaakumdiod, mistõttu pinge  $4U$  abil kiirendatud osakesi liigub isotroopselt (võrdsel hulgal) kõigis  $x - y$ -tasandi suundades;  $z$ -suunaline kiiruskomponent on kõigil osakestel 0. Milline osa kõigist kiiratud osakestes jõuab ruumipiirkonda  $x > 4a$ ?

**Ü80 Kondensaator ★★★★★**

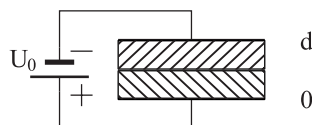
Autor: Stanislav Zavjalov, lõppvoor, 2013, G 10

Ruudukujuliste plaatidega kondensaator plaadi pindalaga  $S$  ning plaatidevahelise kaugusega  $d \ll \sqrt{S}$  on laetud pingeni  $U_0$  ning seejärel patareist lahti ühendatud. Kondensaatori sisse viiakse ruudukujuline juhtiv plaat, samuti pindalaga  $S$  ning paksusega  $d/2$ , kuni plaat on täielikult kondensaatori sees. Protsessi jooksul plaat ei puutu kokku kondensaatori plaatidega ning on nendega paralleelne. Kui palju tööd tehti plaadi sisseviimisel? Selgitage, kas plaat tõmbus ise sisse või pidid välisjõud selle sisse lükkama. Servaefekte pole vaja arvesse võtta. Vaakumi dielektriline läbitavus on  $\epsilon_0$ .

**Ü81 Kondensaator ★★★★★**

Autor: Jaan Kalda, lahtine, 2017, G 7

Plaatkondensaator mahtuvusega  $C$  omab plaatidevahelist kaugust  $d$ . Plaatide vahele asetatakse kaks dielektrilist plaati paksusega  $d/2$ . Ühe plaadi dielektriline läbitavus on  $\epsilon$ , teisel  $2\epsilon$ . Milline on nüüd kondensaatori mahtuvus? Milline laeng on plaatide eralduspinnal, kui kondensaatorile rakendatakse pinge  $U_0$ ?



**Ü82 Laengutega pulk ★★★★★**

Autor: Jaan Kalda, piirkonnavor, 2015, G 10

a) Dielektrikust pulk massiga  $m$  ja pikkusega  $L$  kannab kummaski otsas positiivset laengut  $q$  (keskosa on laenguta, seega kogulaeng on  $2q$ ). Piirkonnas  $x < 0$  on  $x$ -telje sihiline elektriväli tugevusega  $E_0$  ja piirkonnas  $x > 0$  — sama tugev  $x$ -teljega antiparalleelne elektriväli. Pulga keskpunkt on koordinaatide alguspunktis ja pulk on paralleelne  $x$ -teljega. Pulgale antakse  $x$ -telje sihiline algkiirus  $v$ . Leidke võnkumiste periood. Pulk on paigaldatud nii, et see ei saa pöörelda, vaid üksnes liikuda  $x$ -telje sihis.

b) Leidke väikeste võnkumiste periood siis, kui konfiguratsioon on muus osas sama, kuid punktlaengute asemel on kogulaeng  $Q$  jaotunud ühtlaselt üle terve pulga.

**Ü83 Kuulid ★★★★★**

Autor: Jaan Kalda, lahtine, 2016, G 10

Kaks metallkuulikest raadiusega  $R$  on ühendatud peenikese metalltraadi abil ja asuvad homogeenises elektriväljas tugevusega  $E$ . Metalltraadi pikkus on  $l$ , kusjuures  $l \gg R$ . Süsteem on tasakaalus. Leidke mehaaniline pinge  $T$  traadis.

**Ü84 Kaks kuuli ★★★★★**

Autor: Jaan Kalda, lõppvoor, 2018, G 10

Kaks ühesugust metallkuuli raadiusega  $R$  ja massiga  $m$  on ühendatud peenikese terastraadiga pikkusega  $L \gg R$ . Piirkonnas  $x \geq 0$  on elektriväli tugevusega  $E$ , mis on suunatud piki  $x$ -telge; piirkonnas  $x < 0$  elektriväli puudub. Alghetkel on kuulid paigal ja üksteisest kaugusel  $L$ , nii et traat on pingul ning paralleelne  $x$ -teljega; ühe kuuli keskpunkt asub punktis  $x = R$  ning teine kuul — piirkonnas  $x < 0$ . Visandage kvalitatiivselt kuulide kiiruse graafik sõltuvuses ajast (kvantitatiivset ajaskaalat ei ole vaja) ning leidke nende kiirus punkti  $x = 2L$  läbimisel. Terastraadi mahtuvus lugeda tühiselt väikeseks.

**Ü85 Kolm kuuli ★★★★★**

Autor: Jaan Kalda, lõppvoor, 2016, G 10

Kolm väikest kuuli massiga  $m$  kannavad ühesuguseid elektrilaenguid  $q$  ning on ühendatud isoleerivast materjalist niitide abil võrdhaarseks kolmnurgaks  $ABC$ , kus  $\angle BAC = 120^\circ$  ning selle nurga tipus asuva kuuli  $A$  vastaskülje niidi pikkus  $|BC| = L$ . Niit  $BC$  lõigatakse katki. Leidke a) kuuli  $A$  maksimaalne kiirus edasise liikumise käigus ning b) kuulikeste kiirendused vahetult pärast niidi läbi lõikamist. Gravitatsioonilise vastasmõjuga mitte arvestada.



## Gaasid

### Ü86 Õhupall ★

Autor: Eero Vaher, lõppvoor, 2015, G 1

Heeliumiga täidetud õhupall suudab tõsta koormist massiga kuni  $M = 200$  kg. Kui suur on õhupalli ruumala  $V$ ? Koormise ruumala lugeda tühiseks. Õhupalli kesta mass on arvestatud koormise massi sisse. Õhu tihedus on  $\rho = 1,2$  kg/m<sup>3</sup>, õhu rõhk  $p = 100$  kPa, õhu temperatuur  $T = 20$  °C. Heeliumi molaarmass on  $\mu = 4,0$  g/mol, ideaalse gaasi konstant  $R = 8,3$  J · mol<sup>-1</sup> · K<sup>-1</sup>.

### Ü87 Õhupalli vägi ★★

Autor: Eero Vaher, lahtine, 2013, G 4

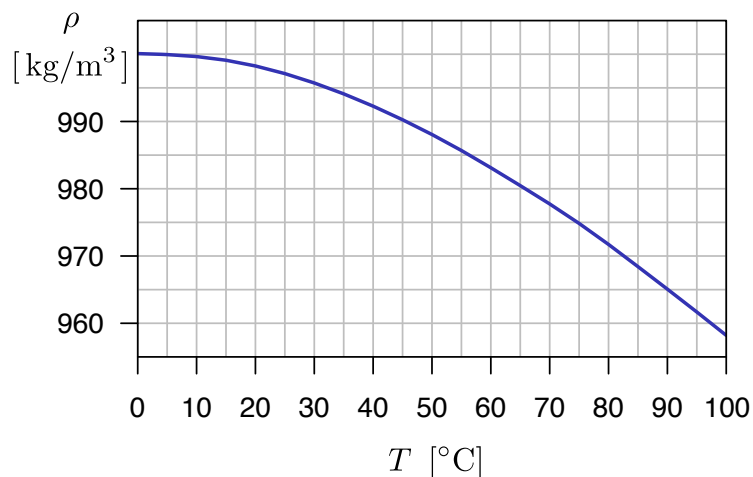
Heeliumiga täidetud õhupall suudab Maal tõsta õhku koormise massiga kuni 100 kg. Kui suure massiga koormise suudaks samasugune õhupall üles tõsta Marsil (õhupalli kesta massi loeme koormise massi hulka)? Koormise ruumala lugege tühiseks. Õhu tihedus Maal on  $\rho_0 = 1,2$  kg/m<sup>3</sup>, õhu rõhk Maal  $p_0 = 100$  kPa, õhu temperatuur Maal  $T_0 = 20$  °C, "õhu" tihedus Marsil  $\rho_1 = 0,015$  kg/m<sup>3</sup>, "õhu" rõhk Marsil  $p_1 = 600$  Pa, "õhu" temperatuur Marsil  $T_1 = -60$  °C. Heeliumi molaarmass on  $\mu = 4,0$   $\frac{\text{g}}{\text{mol}}$ , ideaalse gaasi konstant  $R = 8,3$   $\frac{\text{J}}{\text{K mol}}$ .

### Ü88 Paisupaak ★★

Autor: Mihkel Kree, lõppvoor, 2014, G 3

Maja küttesüsteem sisaldab suurt akumulatsioonipaaki, kus hoitakse ringlevat sooja vett, ning paisupaaki, et kompenseerida vee soojuspaisumist. Paisupaak on fikseeritud ruumalaga anum, millest osa võtab enda alla õhk ning ülejäänu täidab küttesüsteemist pärinev vesi, mis saab vabalt süsteemi tagasi voolata. Hetkel, mil kogu vesi oli toatemperatuuril  $t_0 = 20$  °C, täideti paisupaak suruõhuga nii, et õhu ruumala paagis oli  $V_1 = 0,080$  m<sup>3</sup> ning rõhk  $p_1 = 1,5 p_0$ , kus  $p_0 = 0,10$  MPa on atmosfäärirõhk. Kogu süsteemis oleva vee ruumala toatemperatuuril on  $V_0 = 1,0$  m<sup>3</sup>.

Torustikus on ka avariiventil, et vältida torude lõhkemist. Ventil avaneb, kui rõhk torustikus ületab atmosfäärirõhku  $\Delta p = 1,2 p_0$  võrra. Millise temperatuurini saab vett süsteemis soojendada, ilma et avariiventil avaneks? Metalli soojuspaisumise-ga mitte arvestada. Vee tiheduse sõltuvus temperatuurist on toodud graafikul. Eeldage, et graafiku kuju ei sõltu rõhust (vaadeldavad rõhumuutused on selleks liiga väikesed). Samuti eeldage, et õhu temperatuur paisupaagis püsib toatemperatuuril  $t_0$ .



### Ü99 Balloon ★★

Autor: Kaur Aare Saar, lahtine, 2015, G 3

Pikk silindrikujuline balloon raadiusega  $r = 0,3 \text{ m}$  on tehtud terasest, mis talub pindalaühiku kohta jõudu kuni  $\sigma = 250 \text{ MPa}$ . Leidke suurim balloonis oleva gaasi rõhk, mida balloon talub. Ballooni seina paksus on  $t = 2 \text{ mm}$ .

### Ü90 Saunauks ★★

Autor: Mihkel Kree, piirkonnavoore, 2016, G 5

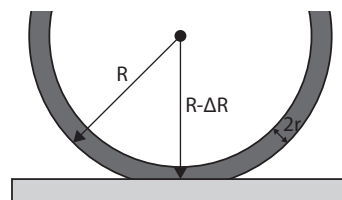
Sauna leiliruumis ruumalaga  $V = 10 \text{ m}^3$  on õhu temperatuur  $t = 90^\circ \text{C}$ . Kerisele visatakse leilik veekogus  $m = 150 \text{ g}$ , mis koheselt aurustub. Mõtleme hüpoteetiliselt, et leiliruum on hermeetiliselt suletud. Missuguse jõuga peaksid saunalised ust pindalaga  $A = 2,0 \text{ m}^2$  käepidemest kinni hoidma, et see lahti ei läheks? Gaasikonstant  $R = 8,3 \text{ J}/(\text{mol} \cdot \text{K})$  ning vee molaarmass  $\mu = 18 \text{ g/mol}$ . Kui ülesande õigesti lahendate, siis küllap avastate, et leitud jõud on ebatavaliselt suur. Selgitage ühe lausega, miks tegelikult saunas ukse kinnihoidmiseks nii suurt jõudu pole vaja rakendada.

### Ü91 Rattamatk ★★

Autor: Ardi Loot, lahtine, 2017, G 5

Juku on rattamatkal ning soovib ratta tagumist rehvi natuke rohkem täis pumbata. Et oleks lihtsam, kulutab Juku palju vaeva ja pakib raske matkavarustuse pakiraa- milt maha ja keerab ratta tagurpidi (rattad taeva poole). Hinnake, mitu protsenti vähem jõudu peab ta pumpamisel rakendama võrreldes olukorraga, kui tagumine ratas on koormatud?

Ratta raadius  $R = 33,0 \text{ cm}$ , rehvi raadius  $r = 2,5 \text{ cm}$ , tagumisele rattale toetuv mass (ratas koos matkavarustusega)  $m = 30 \text{ kg}$ , koormatud rehvi rõhk  $p = 150 \text{ kPa}$  (mõõdetud õhurõhu



suhtes), õhurõhk  $p_0 = 100 \text{ kPa}$  ja raskuskiirendus  $g = 9,8 \text{ m/s}^2$ .

*Vihje.* Koormamata rattarehvi ruumala on antud valemiga  $V = 2\pi^2 (R - r) r^2$  ning see väheneb koormamisel  $\Delta V \approx S \cdot \Delta R/2$  võrra, kus  $S \approx 2\pi \Delta R \sqrt{Rr}$  on rehvi kokkupuutepinna suurus maaga ja  $\Delta R \ll r$  on rehvi deformatsiooni ulatus (vt joonist).

**Ü92 Silinder külmkapis ★★**

Autor: Rasmus Kisel, piirkonnavor, 2017, G 6

Suletud silindris sisemise raadiusega  $R$  ja sisemise kõrgusega  $h$  on vedelik, mis võtab enda alla teatud osa  $k$  silindri siseruumalast. Silinder on algselt toatemperatuuril  $T_1$ . Silinder asetatakse sügavkülmikusse, kus on konstantne temperatuur  $T_2$ , mis on madalam silindris oleva aine sulamistemperatuurist. Teada on, et silindris oleva aine tihedus on vedelas olekus  $\rho_0$  ja tahkes olekus  $\lambda\rho_0$ . Leidke, mitu korda suureneb silindris oleva õhu rõhk võrreldes esialgsesega pärast vedeliku tahkumist. Eeldage, et vedeliku tahkumisel silindri mõõtmed ei muutu.

**Ü93 Kuumaõhupall ★★★**

Autor: Andreas Valdmann, piirkonnavor, 2012, G 6

Mis temperatuurile tuleb kuumaõhupalli sees õhk kütta, et õhupall lendu tõuseks? Välisõhu temperatuur  $t = 20^\circ\text{C}$ , õhupalli ruumala  $V = 3000 \text{ m}^3$  ja ei muutu. Õhupalli kesta ja laadungi kogumass  $m = 700 \text{ kg}$  ja õhu tihedus 20 kraadi juures  $\rho_{20} = 1,2 \text{ kg/m}^3$ .

**Ü94 Korvpall ★★★**

Autor: Andreas Valdmann, lõppvoor, 2012, G 4

NBA standarditele vastava korvpalli mass on  $m = 600 \text{ g}$ , ümbermõõt  $C = 76 \text{ cm}$  ning ülerõhk palli sees  $p_1 = 55 \text{ kPa}$ . Kui sügavale vee alla tuleks korvpall suruda, et see iseenesest põhja hakkaks vajuma? Vee tihedus  $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$ , raskuskiirendus  $g = 9,8 \text{ m/s}^2$  ja õhurõhk veepinnal  $p_0 = 100 \text{ kPa}$ . Võib eeldada, et sukeldamise jooksul palli sees õhutemperatuur ei muutu ja palli kesta ruumala on tühine.

**Ü95 Veeklaas ★★★**

Autor: Siim Ainsaar, piirkonnavor, 2013, G 7

Silindrilisse klaasi, mille kõrgus on  $H$  ja põhja raadius  $r$ , valati vett kõrguseni  $h$ . Klaas kaeti paberilehega ja keerati tagurpidi; paberi ja klaasi vahelt voolas välja veekogus ruumalaga  $V$ . Kui paberit enam kinni ei hoitud, jäi see sellegipoolest klaasi külge, ülejäänud vesi püsis klaasis. Kui suur oli maksimaalselt paberi mass  $m$ ? Õhurõhk oli  $p_0$ , raskuskiirendus  $g$  ning vee tihedus  $\rho$ . Kasutati kriitpaberit, mis vett ei imanud. Paberist lahtilaskmise hetkel olid õhu ja vee temperatuurid võrdsed.

**Ü96 Paisupaak ★★★**

Autor: Ardi Loot, lahtine, 2016, G 7

Selleks, et vältida küttesüsteemis vee paisumise tulemusena tekkivat ülerõhku, lisatakse süsteemi paisupaak. See koosneb silindrist ruumalaga  $V$ , mis on jaotatud vabalt liikuva õhukese vaheseinaga kaheks osaks. Üks neist osadest täidetakse suruõhuga ( $T_0 = 20^\circ\text{C}$ ) rõhuni  $p_0$ , võttes enda alla kogu silindri ruumala. Seejärel ühendatakse silindri teine osa küttesüsteemiga temperatuuril  $T_1 = T_0$  ning süsteem täidetakse veega, kuni saavutatakse rõhk  $p_1 = 300\text{ kPa}$  ning vee koguruumala süsteemis  $V_s = 100\text{ L}$ . Täitmise lõppedes on paisupaagist  $\beta = 10\%$  täidetud veega. Talvel suureneb kütmise tõttu süsteemis oleva vee ruumala  $\alpha = 1\%$  võrra, ning selle tulemusena tõuseb süsteemi rõhk  $p_2$ -ni, kusjuures paisupaagis olev õhk soojeneb temperatuurini  $T_2 = 40^\circ\text{C}$ . Leidke, kui suur peab olema paisupaagis õhu algne rõhk  $p_0$  ja minimaalne paisupaagi ruumala  $V$ , et vee paisumise tulemusena tekkiv lisarõhk  $\Delta p = p_2 - p_1$  poleks suurem kui  $50\text{ kPa}$ .

**Ü97 Terasanum ★★★★★**

Autor: Valter Kiisk, piirkonnavor, 2017, G 8

Sfäärilise terasanuma sisediameeter on  $d = 0,5\text{ m}$  ja mass  $m = 25\text{ kg}$ . Maksimaalselt mitu liitrit gaasi (arvestatuna normaalrõhule) õnnestuks säilitada sellises anumas kõrge rõhu all? Terasa tihedus on  $\rho = 7,9\text{ g/cm}^3$  ja maksimaalne talutav tõmbejõud pindalaühiku kohta  $\sigma = 450\text{ MN/m}^2$ . Normaalrõhk on  $p_0 = 101,3\text{ kPa}$ .

**Ü98 Õhupall ★★★★★**

Autor: Ardi Loot, lõppvoor, 2017, G 7

Juku tahab õhupalli täis pumbata. Tal on suur pump, mille otsas olev ventiil on alguses suletud. Ta paneb pumba otsa õhupalli, seejärel vajutab pumbale peale, kuni rõhk pumbas tõuseb  $p$ -ni. Kokku surumise tõttu tõuseb pumbas oleva õhu temperatuur  $T$ -ni. Juku keerab ventiili lahti ja õhupall täitub aeglaselt, samal ajal vajub pumba käepide järjest allapoole. Juku vajutab kogu protsessi vältel pumbale täpselt sama suure jõuga kui alguses. Mis on õhu temperatuur õhupallis, kui see on täis pumbatud? Soojuskadudega läbi pumba ja õhupalli seinte mitte arvestada, samuti õhupalli kummi venitamisel tehtud tööga mitte arvestada. Väline õhurõhk ja temperatuur on  $p_0$  ja  $T_0$ . Õhu soojumahtuvus konstantsel ruumalal on  $c_V$ .

**Ü99 Kuumaõhupall ★★★★★**

Autor: Ants Remm, piirkonnavor, 2014, G 10

Juku läheb lendama kerakujulise kuumaõhupalliga, mille raadius  $r = 8,7\text{ m}$ , mass koos reisijatega  $M_0 = 390\text{ kg}$  ning lisaks on kütusena kaasas  $M_k = 20\text{ kg}$  propaani. Kui kaua saab kesta Juku õhupallilend?

Õhupall on kaetud kattega, mis vähendab soojusjuhtivust ning soojuskiirgust tühiste väärtusteni. Tööolukorras imbub õhk läbi õhupalli kesta kiirusega  $\lambda = 500\text{ g/s}$ . Õhurõhk ja temperatuur lennukõrgusel on  $p_0 = 100\text{ kPa}$  ja  $T_0 = 10^\circ\text{C}$ . Propaani kütteväärtus  $k = 50\text{ MJ/kg}$ . Õhu keskmine molaarmass  $\mu = 29\text{ g/mol}$  ning soojusmahtuvus konstantsel rõhul  $C_p = 1,0 \frac{\text{kJ}}{\text{K}\cdot\text{kg}}$ . Universaalne gaasikontant on  $R = 8,3 \frac{\text{J}}{\text{K}\cdot\text{mol}}$ .

**Ü100 Kerkiv õhupall ★★★★★**

Autor: Jaan Kalda, lõppvoor, 2018, G 8

Ilusa päikeselise ilma korral on harilikult tegemist nn adiabaatilise atmosfääriga. See tähendab, et õhumassid on pidevas üles-alla liikumises. Kerkides õhk paisub ja jahtub adiabaatiliselt; pideva segunemise tõttu on kerkiva õhumassi temperatuur võrdne seda antud kõrgusel ümbritsevate õhumasside temperatuuriga. On võimalik näidata, et sellisel juhul kahaneb temperatuur lineaarselt kõrgusega,  $T = T_0 - \frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{\mu g h}{R}$ , kus  $\gamma = 1,4$  on õhu adiabaadinäitaja,  $\mu = 29$  g/mol – õhu keskmine molaarmass,  $g = 9,81$  m/s<sup>2</sup> – vabalangemise kiirendus,  $R = 8,31$  J/mol K – gaasikonstant, ja  $h$  – kõrgus maapinnast; õhutemperatuur maapinnal  $T_0 = 293$  K. Venimatust kuid vabalt painduvast nahast valmistatud õhupall mahutab maksimaalselt ruumala  $V_0$  jagu gaasi; see täidetakse sellise koguse heeliumiga, mis võtab maapinnal enda alla ruumala  $V_0/2$ . Õhupall lastakse lahti ja see hakkab aeglaselt kerkima; lugeda, et õhupallis oleva heeliumi temperatuur on kogu aeg võrdne ümbritseva õhu temperatuuriga. Hinnake, millisel kõrgusel  $h_1$  on õhupalli tõstejõud 1% võrra väiksem kui maapinnal. Teilt oodatakse sellist hinnangut kõrgusele, mille suhteline viga pole suurem ühest kümnendikust, kusjuures vea piisavat väiksust pole vaja tõestada.

*Märkus.* Adiabaatilise protsessi korral kehtib seos  $pV^\gamma = \text{Const}$ , kus  $p$  tähistab gaasi rõhku ja  $V$  – ruumala.

## Geomeetriline optika

### Ü101 Segadus optikalaboris ★

Autor: Roland Matt, lahtine, 2011, G 1

Optik koristas vana laborit ja leidis sealt ühe markeerimata nõguslääts ja ühe kumerlääts. Nende optiliste tugevuste määramamiseks paigutas ta läätse üksteise taha ja lasi neist läbi kaks paralleelset laserkiirt, mille vahekaugus oli  $x_1 = 1,0$  cm. Ta muutis läätse vahekaugust seni, kui süsteemist väljunud kiired olid jällegi paralleelsed (seda kontrollis ta, määrates nende vahekaugust paberilehekesega erinevatel kaugustel), nüüd oli kiirte vahekauguseks  $x_2 = 26$  mm. Sellises olukorras oli läätsevaheliseks kauguseks  $d = 32$  cm. Millise optilise tugevusega olid läätse?

### Ü102 Lääts ★

Autor: Koit Timpmann, piirkonnavor, 2016, G 3

Punkt  $A$  ja selle tõeline kujutis  $A'$  asuvad läätse optilisest peateljest vastavalt 4 cm ja 1 cm kaugusel. Punktist  $A$  kuni selle kujutiseni  $A'$  on otsejoones 15 cm. Kui suur on läätse fookuskaugus?

### Ü103 Valgusallika kujutis ★

Autor: EFO žürii, lahtine, 2017, G 2

Sama suure fookuskauguse absoluutväärtusega  $f$  kumer- ja nõguslääts asuvad nii, et nende fookused ning optilised peateljed ühtivad. Läätsede ees optilisel peateljel kumerläätselt kaugusel  $1,5f$  asub punktvalgusallikas  $A$ . Leidke punktvalgusallika kujutise asukoht läbi kahe läätse. Tehke joonis.

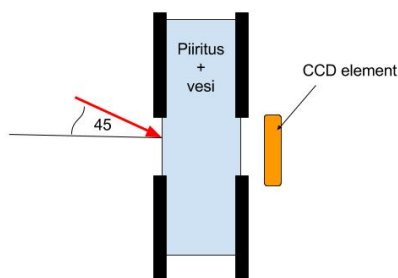
### Ü104 Piiritusetehas ★

Autor: Aigar Vaigu, piirkonnavor, 2017, G 4

Piiritusetehases mõõdetakse piirituse ja vee segus oleva piirituse mahuprotsenti joonisel näidatud optilise seadme abil, kus segu paikneb kanalis laiusel  $d = 1$  cm. Kui suure vahemaa võrra muutub seadme fototundlikul elemendil kiire asukoht, kui piiritus mahuprotsendiga 40 % asendatakse piiritusega mahuprotsendiga 85 %? Võib eeldada, et segu murdumisnäitaja  $n_{\text{segu}}$  on lineaarne kombinatsioon vee ja piirituse murdumisnäitajatest

$$n_{\text{segu}} = X n_{\text{piiritus}} + (1 - X) n_{\text{vesi}},$$

kus  $X$  on piirituse mahuline sisaldus vahemikus 0 – 1 ja  $n_{\text{piiritus}} = 1,3615$  ning  $n_{\text{vesi}} = 1,3330$ .



**Ü105 Kaks valgusallikat ★**

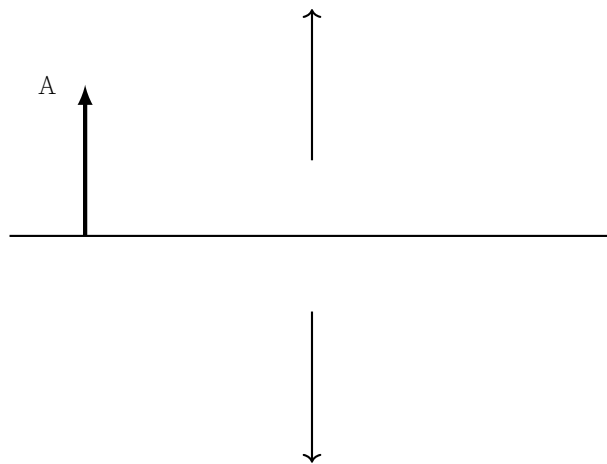
Autor: EFO žürii, piirkonnavoore, 2018, G 2

Kaks punktikujulist valgusallikat asuvad kumerläätse optilisel peateljel erinevates punktides. Nendest valgusallikatest läätse abil tekitatud kujutised kattuvad. On teada, et üks valgusallikas asub läätse keskpunktist  $a = 18\text{ cm}$  kaugusel. Kui kaugel sellest valgusallikast asub teine valgusallikas? Läätse fookuskaugus  $f = 9\text{ cm}$ .

**Ü106 Poolitatud lääts ★**

Autor: Hans Daniel Kaimre, lõppvoore, 2018, G 1

Kersti paneb kokku optilise skeemi, nii et koondav lääts on objektist ja ekraanist, kuhu terav kujutis tekib, võrdsel kaugusel. Ta jätab objekti ja ekraani asukoha samaks, kuid lõikab läätse optilise peatelje juurest pooleks ning nihutab kaks tekkinud poolikut läätse optilisest peateljest eemale. Joonistage lisalehel uue skeemi jaoks kiirte käik. Objekt on tähistatud A-ga.

**Ü107 Kärbes ★★**

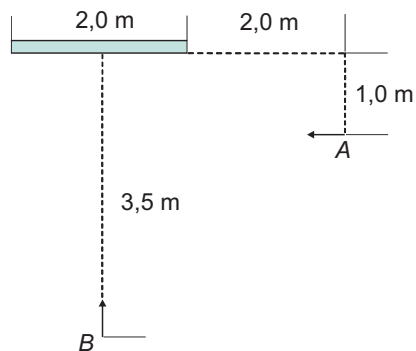
Autor: Taavi Pungas, lahtine, 2012, G 4

Kumerläätse optilisel peateljel, kaugusel  $a$  läätsest, lendab kärbes. Kärbe kiirus on  $v$  ning tema suund on risti optilise peateljega. Leidke kärbe kujutise kiirus (nii suund kui väärtus). Läätse fookuskaugus on  $f < a$ .

**Ü108 Peegel ★★**

Autor: Oleg Košik, piirkonnavoore, 2012, G 1

Suure ruumi seinal on  $2,0\text{ m}$  laiune peegel. Peegli kõrval  $2,0\text{ m}$  kaugusel peeglist ja  $1,0\text{ m}$  kaugusel seinast seisab inimene, kes hakkab liikuma paralleelselt peegli kiirusega  $1,0\text{ m/s}$ . Samal hetkel hakkab minema mööda peegli keskjooni peegli poole kiirusega  $1,0\text{ m/s}$  tema tuttav, kes alghetkel seisab  $3,5\text{ m}$  kaugusel peeglist. Millise aja pärast märkavad tuttavad teineteist peeglis?



### Ü109 Läätsed ★★

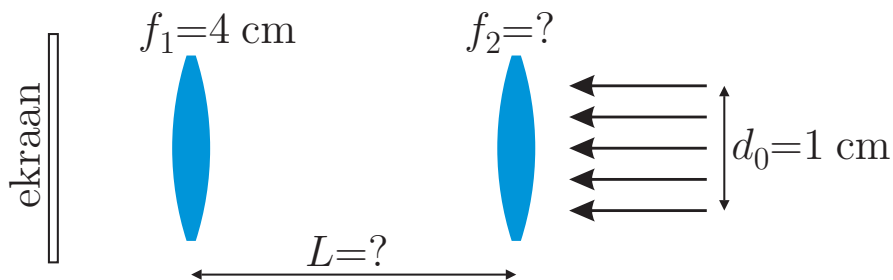
Autor: Tanel Kiis, lõppvoor, 2013, G 1

Jukul on suur hulk nõgusläätsi, mille fookuskauguste leidmiseks ta konstrueeris lihtsa süsteemi. Ta suunas optilise peateljega paralleelse laserikiire läbimõõduga  $2R$  tuntud fookuskaugusega  $f_1$  koondava läätse keskpunkti, pärast mida koondus laserkiir ekraanil ühte punkti. Kui nüüd panna fookuskaugusega  $f_2$  nõguslääts võrdsele kaugusele koondavast läätsest ja ekraanist, on laserkiire läbimõõt ekraanil  $2r$ . Leidke  $f_2$  eeldusel, et  $2f_2 < f_1$ .

### Ü110 Valgustamine ★★

Autor: Valter Kiisk, lõppvoor, 2015, G 2

Lääts fookuskaugusega  $f_1 = 4 \text{ cm}$  on paigutatud nii, et läätsele suunatud paralleelsete valguskiirte kimp diameetriga  $d_0 = 1 \text{ cm}$  koondub ekraanil ühte punkti. Mõnikord on tarvis valgustada ekraanil suuremat ala, kuid läätse nihutamine või valgusallika vahetamine pole võimalik. Kui suur peab olema olemasolevast läätsest paremale paigutatava lisäläätse fookuskaugus  $f_2$ , et ekraanil tekiks ühtlaselt valgustatud laik diameetriga  $d = 2 \text{ cm}$ , kui läätsede vahekaugus on  $L$ ?



### Ü111 Optiline kiud ★★

Autor: Andreas Valdmann, lahtine, 2016, G 4

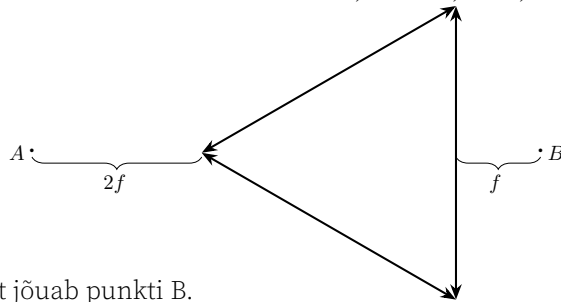
Optiline kiud koosneb silindrikujulisest klaassüdamikust murdumisnäitajaga  $n_1 = 1,46$  ja seda toruna ümbritsevast kattedest murdumisnäitajaga  $n_2 = 1,44$ . Leidke pikast optilisest kiust väljuva valguskoonuse tipunurk, lähtudes klassikalisest optikast.



### Ü112 Kolmläätis ★★

Autor: Andres Põldaru, lahtine, 2016, G 5

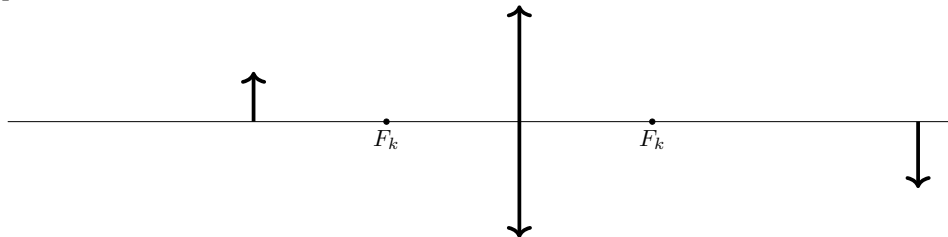
Kolm läätsed on kokku pandud nii, et nendest tekib võrdkülgne kolmnurk. Läätsedel on üks ühine fookus. Punktvalgusallikas pannakse punkti A, mis on kolmnurga tipust kaugusel  $2f$ , kus  $f$  on läätsede fookuskaugus. Põhjendada konstrueerimise teel, kas osa valgusest jõuab punkti B.



### Ü113 Puuduv lääts ★★

Autor: Eero Vaher, piirkonnavoore, 2017, G 5

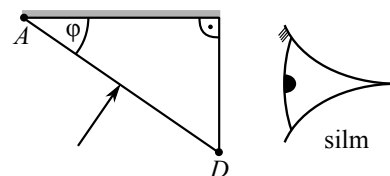
Esemelt lähtuv valgus läbib esmalt nõgusläätsed ning seejärel kumerläätsed. Joonisel on kujutatud eseme, kumerläätsed ning lõpuks tekkiva kujutise asukohad ning kumerläätsede fookused  $F_k$ . Konstrueerige lisalehel nõgusläätsed ning selle eseme poolse fookuse  $F_n$  asukohad.



### Ü114 Periskoopprillid ★★★

Autor: Andreas Valdmann, lõppvoore, 2014, G 4

Kui liiga kaua järjest raamatut lugeda, võib kael pikast allapoole vaatamisest ära väsida. Selle vältimiseks on välja mõeldud erilised prillid, mille abil saab pead kallutamata alla vaadata. Prillide põhiliseks elemendiks on joonisel kujutatud prisma, mille pealmine tahk on kaetud valgust peegeldava materjaliga. Prisma tipunurk  $\varphi$  on valitud selliselt, et kui prismasse sisenev valguskiir on pinnaga risti, siis on seda ka väljuv kiir. Prisma on tehtud materjalist murdumisnäitajaga  $n = 1,5$ .



a) Lõigul  $AD$  on punktid  $B$  ja  $C$ , mis jagavad selle kolmeks piirkonnaks:  $AB$ ,  $BC$  ning  $CD$ . Sõltuvalt sellest, millisele piirkonnale kiir langeb, on kiire käiguks prismas kolm põhimõtteliselt erinevat võimalust. Tehke joonis kiirte käigust kõigi juhtude jaoks.

b) Leidke nurga  $\varphi$  väärtus.

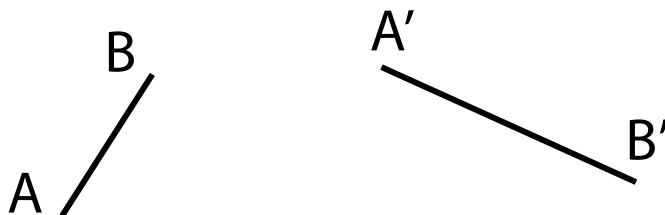
c) Olgu külje  $AD$  pikkus  $l$ . Kui kaugel asuvad punktid  $B$  ja  $C$  tipust  $A$ ?

d) Miks on prillides üldsegi vaja kasutada suhteliselt keerulist prismaga süsteemi, selle asemel et kiirte kallutamiseks kasutada ühte tasapeeglit?

**Ü115 Lääts ★★★**

Autor: Mihkel Kree, lahtine, 2015, G 5

Joonisel on kujutatud objekt AB ning sellest kumerläätses tekkinud tõeline kujutis A'B'. Leidke konstrueerimise teel läätse keskpunkti ning fookuse asukoht.



**Ü116 Peegelpõhi ★★★**

Autor: Sandra Schumann, lõppvoor, 2018, G 3

Peegelpõhjaga tühja anumasse paigutatakse koondav klaaslääts nii, et läätse optiline peatelg on risti anuma põhjaga. Läätse kaugus anuma põhjast on  $l = 10$  cm. Läätsel suunatakse paralleelne valgusvihk, mis koondub pärast läätse läbimist mingis punktis A. Siis valatakse anum vett täis (lääts jääb vee alla). Valgusvihk koondub endiselt samas punktis A. Leidke läätse fookuskaugus  $f$  õhus.

Klaasi murdumisnäitaja  $n_k = 1,49$ , vee murdumisnäitaja  $n_v = 1,33$ , õhu oma  $n_0 = 1,0$ . Murdumisnäitaja näitab, kui mitu korda on valguse kiirus vaakumis suurem kui aines.

Märkus. Läätse fookuskauguse  $f_v$  leidmiseks vees kehtib valem

$$f_v = f \cdot \frac{n_k n_v - n_0 n_v}{n_k n_0 - n_0 n_v}.$$

**Ü117 Fookuskaugus ★★★**

Autor: Eero Vaher, piirkonnavor, 2015, G 8

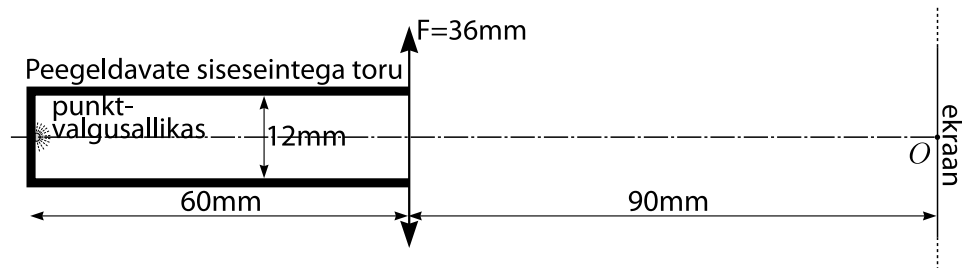
Õhukese tasanõgusa läätse parem külg on hõbetatud. Kui suur on sellise optilise elemendi fookuskaugus  $f$  vasakult langeva valguse jaoks? Läätse nõgusa osa kõverusraadius on  $R$ , läätse materjali murdumisnäitaja ümbritseva keskkonna suhtes on  $n$ .



**Ü118 Toru ★★★★★**

Autor: Jaan Kalda, lõppvoor, 2012, G 6

Peegeldavate siseseintega toru põhjas on punktvalgusallikas, vt joonist. Toru sisediaameeter on  $d = 12 \text{ mm}$ , toru pikkus  $l = 60 \text{ mm}$ . Vastu toru lahtist otsa on paigutatud koondav lääts fookuskaugusega  $F = 36 \text{ mm}$  ning toru otsast kaugusele  $L = 90 \text{ mm}$  ekraan, millele kinnitatud millimeeterpaberile on märgitud lõikepunkt optilise peateljega  $O$ . Visandage kujutis, mida võib näha ekraanil.



**Ü119 Mikroskoop ★★★★★**

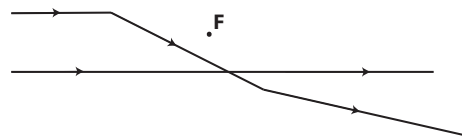
Autor: Valter Kiisk, lõppvoor, 2013, G 7

Nn digitaalne mikroskoop koosneb piki optilist peatelge nihutatavast läätest (objektiivist), mis tekitab vaadeldavast esemest tõelise kujutise elektroonilise maatriksensori pinnale. Terav kujutis tekib objektiivi kahe erineva asendi korral. Vastavate joonsuurenduste suhteks määrati 25. Kummas asendis ja mitu korda on sensori pinnauhikule langev kiirgusvõimsus suurem? Võib eeldada, et läätsede mõõtmed on palju väiksemad tema kaugusest objektist.

**Ü120 Optiline skeem ★★★★★**

Autor: Erkki Tempel, lahtine, 2014, G 7

Kõrvaloleval joonisel on kujutatud kahe algselt paralleelse kiire käik läbi kahe ühesuguse kumerlääts, mis ei asetse paralleelselt. Läätsede fookused ühtivad ning asuvad punktis  $F$ . Konstrueerige skeemile läätsed koos optiliste peatelgedega.



**Ü121 Luup ★★★★★**

Autor: Valter Kiisk, lõppvoor, 2016, G 6

Kui asetada poolkera-kujuline klaaskeha (lääts) tasapinnalise poolega vastu paberit, on võimalik vähemalt läätses keskosa ümbruses näha paberi pinna suurendatud kujutist. Kui mitmekordne kujutis saadakse, vaadeldes kauguselt, mis on hulga suurem läätses mõõtmetest? Klaasi murdumisnäitaja  $n = 1,5$ .

**Ü122 Nurgapeegel ★★★★★**

Autor: Andreas Valdmann, lõppvoor, 2016, G 8

Jukul oli katsetamiseks kolm ruudukujulist tasa-  
peeglit. Ühte peeglisse vaadates ja paremat silma  
kinni pigistades nägi ta endast joonisel kujutatud  
peegelpilti. Järgmisena paigutas Juku kolm peeg-  
lit sedasi, et need moodustasid kuubi kolm tahku,  
millel on üks ühine tipp. Sealjuures jäid peegelpin-  
nad kuubi sisemisele poolele. Joonistage peegel-  
pilt, mida paremat silma kinni pigistav Juku endast  
otse nurgapeegli nurka vaadates nägi ja põhjenda-  
ge tulemust konstrueerimise teel.

**Ü123 Ring ja ellips ★★★★★**

Autor: Jaan Kalda,

lõppvoor, 2015, G 7

Juuresoleval joonisel on kujutatud ring ja sellest koondava läätse poolt tekitatud  
kujutis. Leidke läätse keskpunkt, optiline peatelg ja fookus.

**Ü124 Kaamera ★★★★★**

Autor: Ardi Loot, lõppvoor, 2017, G 8

Juku pildistab virmalisi iseehitatud kaamera, mis koosneb ruudukujulisest val-  
gustundlikust elemendist küljepikkusega  $2h = 2,0\text{ cm}$  ja kumerläätses fookuskau-  
gusega  $f = 14\text{ cm}$ . Jukule ei meeldi, et kaamera on niivõrd suur ja ta tahab, et  
kaamera oleks maksimaalselt  $L_m = 7,0\text{ cm}$  pikk (kaamera pikkus on kaugus val-  
gustundlikust elemendist välimise läätseni). Selleks paigaldab ta vana kumerlääts  
asemel uue kumerlääts fookuskaugusega  $f_2 = 3,0\text{ cm}$  valgustundlikust elemen-  
dist kaugusele  $L_m$ . Kui suure fookuskaugusega ja kui kaugele kumerläätses peaks  
Juku süsteemi lisama ühe nõguslääts, et säiliks kaamera esialgne vaatenurk?

**Ü125 Klaassilinder ★★★★★**

Autor: Jaan Kalda, lõppvoor, 2014, G 10

Klaassilindri välispinnal märgitakse markeriga punkt. Kui seda silindrit vaadata suurelt kauguselt (hulga suuremalt kui silindri raadius) nii, et punkt paistab läbi silindri selle sümmeetriateljel olevat, siis on lisaks näha veel kahte punkti kujutist. Üks kujutis on näha ühel ja teine teisel pool sümmeetriatelge. Kui silindrit keerata ümber oma sümmeetriatelje, siis teatud hetkel sulavad kaks punkti kujutist kokku ning kaovad ära. Kolmas kujutis jääb alles. Kui silindrit edasi keerata, siis hetkel, kui selle pöördenurk algasendi suhtes on  $15^\circ$ , kaob ka kolmas kujutis, nõnda et markeriga tehtud punkti polegi enam näha. Kui suur on klaasi murdumisnäitaja?

## Kinemaatika

### Ü126 Rong ★

Autor: Koit Timpmann, piirkonnavor, 2013, G 1

Kaubarong läbis kahe jaama vahelise teelõigu keskmise kiirusega 36 km/h. Kogu sõiduajast  $\frac{2}{5}$  vältel liikus rong ühtlaselt kiirenevalt, siis  $\frac{2}{5}$  vältel liikus jääva kiirusega ning viimase  $\frac{1}{5}$  vältel pidurdas ühtlaselt aeglustuvalt. Kui suur oli rongi maksimaalne kiirus kahe jaama vahelisel teel?

### Ü127 Rongivile ★

Autor: Mihkel Kree, lahtine, 2015, G 1

Rong läheneb jaamale sirgjooneliselt ning muutumatu kiirusega. Veduri juht laseb vilet kestusega  $t_0 = 10$  s, peatuses rongi ootav jaamaülem mõõdab vile kestuseks aga  $t_1 = 9$  s. Arvutage rongi liikumise kiirus  $v$ . Heli kiirus õhus  $c = 340$  m/s.

### Ü128 Kaubarong ★

Autor: Erkki Tempel, piirkonnavor, 2015, G 1

Tavaliselt sõidab kaubarong ühtlase kiirusega  $v = 72$  km/h, kuid seekord hilines jaama  $\Delta t = 5$  min. Raudteel olid hooldetööd ning rong pidi mingi aja sõitma kiirusega  $v_h = 18$  km/h. Rongi kiirendus pidurdamisel oli  $a_p = 0,2$  m/s<sup>2</sup> ning kiirendamisel  $a_k = 0,1$  m/s<sup>2</sup>. Kui pika tee sõitis rong kiirusega 18 km/h?

### Ü129 Kiirabiauto ★

Autor: Sandra Schumann, lahtine, 2017, G 1

Jukust sõitis tänaval mööda kiirabiauto. Juku kuulis, et möödumisel langes kiirabiauto sireeni toon väikese tertsi võrra. Kui kiiresti sõitis kiirabiauto? Heli kiirus õhus Juku juures oli  $v_h = 343 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ . Eeldada, et Juku kaugus kiirabiauto sirgjoonelisest trajektoorist on tühiselt väike. Doppleri seadus annab seose sageduste ja liikumiskiiruste vahel.

$$\frac{f_v}{f_a} = \frac{v_h + v_v}{v_h + v_a},$$

kus  $f_v$  on vastuvõtja mõõdetud heli sagedus,  $f_a$  on allika tekitatud heli sagedus,  $v_v$  on heli vastuvõtja kiirus ja  $v_a$  on heliallika liikumise kiirus.

*Vihje.* Väike terts on muusikaline intervall, mis vastab 1,5-toonisele erinevusele heli sageduses. Üks oktav tähistab 2-kordset erinevust heli sageduses ja vastab 6 toonile. Eeldada, et toonid on jaotatud oktavis nõnda, et kui kolme helisageduse  $f_1, f_2, f_3$  jaoks kehtib  $\frac{f_2}{f_1} = \frac{f_3}{f_2}$  ja  $f_1$  ning  $f_2$  vahel on üks toon, siis on ka  $f_2$  ja  $f_3$  vahel üks toon.

### Ü130 Pidurdus ★

Autor: Mihkel Rähn, piirkonnavor, 2017, G 2

Kaks autot sõidavad teineteise järel kiirustega  $v = 50$  km/h. Esimene auto pidurdab maksimaalselt, mida nähes tagumise auto juht samuti pidurdab maksimaalselt. Esimese auto pidurid rakenduvad samal hetkel, kui süttivad pidurituled. Tagumise auto juhul kulub esimese auto piduritulede süttimisest kuni oma auto pidurite rakendumiseni  $t = 1,5$  s. Teekatte hõõrdetegur  $\mu = 1$  ning raskuskiirendus  $g = 9,8$  m/s<sup>2</sup>.

a) Kui suur peaks olema autodevaheline vahemaa sõidu ajal, et pidurdamisel ei toimuks tagant otsasõitu?

b) Kui autodevaheline vahemaa enne pidurdamist on  $l = 5 \text{ m}$ , siis kui suur on autode kiirus üksteise suhtes kokkupõrke hetkel?

**Ü131 Jalgrattur ★★**

Autor: Jaan Kalda, lõppvoor, 2013, G 3

Poiss mõõdab jalgrattaga sõites tuule kiirust enda suhtes: kui ta sõidab piki teed ühes suunas kiirusega  $10 \text{ km/h}$ , saab ta tulemuseks  $20 \text{ km/h}$ , ning kui ta sõidab vastassuunas kiirusega  $20 \text{ km/h}$ , siis saab ta tulemuseks samuti  $20 \text{ km/h}$ . Kui kiiresti maa suhtes puhub tuul?

**Ü132 Viul ★★**

Autor: Jaan Toots, lõppvoor, 2014, G 2

Viiulikeelt pikkusega  $L$  kaugusel  $\frac{3}{7}L$  ühest otsast alla vajutades ning lühemal osal poognaga tõmmates kõlab mingi põhisagedusega heli. Samal kaugusel  $\frac{3}{7}L$  keelt ainult puudutades (alla vajutamata), on kõlav heli erinev. Milline on nende kahe põhisageduse suhe?

**Ü133 Pöördlava ★★★**

Autor: Taavi Pungas, piirkonnavor, 2012, G 4

Sageli on teatrilava põranda osaks pöörlev ketas. Näitleja soovib sellise ketta kõrval olevast punktist  $A$  ajaga  $t$  jõuda võimalikult kaugele mõnda teise ketta kõrval olevasse punkti. Kus asub selline kaugeim sihtpunkt  $B$ ? Väljendage vastus nurgana  $\alpha = \angle AOB$ , kus  $O$  on ketta keskpunkt. Näitleja kõnnib kiirusega  $v$ , ketta pöörlemisperiood on  $T$  ja raadius  $r$ . Võite eeldada, et  $\alpha < 180^\circ$ .

**Ü134 Pallivise ★★★**

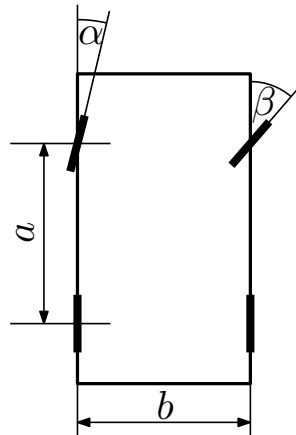
Autor: Eero Vaher, lõppvoor, 2015, G 5

Juku elab silindrikujulises kosmosejaamas, mille pöörlemine tekitab kunstliku raskusjõu. Jaama raadius on  $R$ , selle pöörlemise nurkkiirus  $\omega$ . Juku viskab palli otse üles algkiirusega  $v = \frac{\sqrt{3}}{3}\omega R$ . Kui kaugele Jukust mööda jaama pinda pall maاندub?

**Ü135 Rehvid ★★★**

Autor: Siim Ainsaar, lõppvoor, 2012, G 5

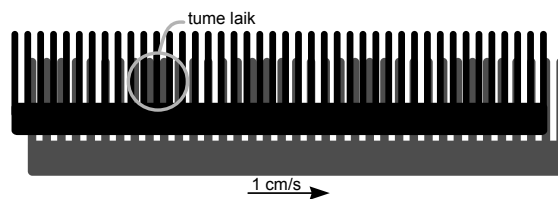
Et autorehvid kuluksid vähimal määral, tasub auto ehitada nii, et kurvis pöörduksid esirattad eri nurga võrra. Leidke selles mõttes parim parema esiratta pöördenurk  $\beta$  paremkurvis, kus vasaku esiratta oma on  $\alpha$ . Rataste vahekaugus on pikkupidi  $a$  ja laiupidi  $b$  (vt joonist).



**Ü136 Kammid ★★★**

Autor: Jaan Kalda, lõppvoor, 2014, G 5

Kaks kammi on asetatud üksteise taha nii, nagu näidatud joonisel. Halli kammi liigutatakse kiirusega  $v = 1 \text{ cm/s}$  ning musta kammi hoitakse paigal. Millise kiirusega ja millises suunas liiguvad tumedad laigud?



**Ü137 Päikese pöörlemine ★★★★★**

Autor: Mihkel Kree, lahtine, 2014, G 10

Maa pöörleb ümber oma telje perioodiga  $T_m \approx 24 \text{ h}$ . Ka Päike pöörleb ümber oma telje. Selles võib veenduda näiteks päikeseplekkide liikumist jälgides, aga selles ülesandes kasutame hoopis infot Päikese ketta serval paiknevatest ekvaatori punktidest A ja B kiiratud spektrite kohta. Osutub, et kui mõõdetakse naatriumi kollase neeldumisjoone lainepikkusi, siis punktidest A ja B kiiratud spektritest saadakse selle lainepikkuse jaoks veidi erinevad väärtused. Mõõdetud lainepikkused erinevad teineteisest  $\Delta\lambda = 7,8 \text{ pm} = 7,8 \cdot 10^{-12} \text{ m}$  võrra. Naatriumi kollase neeldumisjoone laboratoorne lainepikkus on  $\lambda_0 = 590 \text{ nm}$ , valguse kiirus  $c = 3,0 \cdot 10^8 \text{ m/s}$ , Päikese raadius  $r = 700\,000 \text{ km}$ . Leidke Päikese ekvatoriaalpiirkonna pöörlemisperiood  $T_p$ .



**Ü138 Traatrõngad ★★★★★**

Autor: Jaan Kalda, lõppvoor, 2014, G 9

Kaks ühesugust traatrõngast raadiusega  $R$  on üksteise vahetus läheduses, rõngaste tasandid on paralleelsed ning rõngad puudutavad üksteist punktides  $A$  ja  $B$ . Kaa-rele  $AB$  vastav kesknurk on vaadeldaval ajahetkel  $\alpha$ . Alumine rõngas on paigal, ülemine pöörleb nurkkiirusega  $\omega$  ümber punkti  $A$  läbiva ning rõngaste tasandite-ga risti oleva telje. Leidke rõngaste puutepunkti  $B$  kiirus antud ajahetkel.

**Ü139 Anemomeeter ★★★★★**

Autor: Jaan Kalda, lahtine, 2016, G 9

Ultraheli anemomeeter mõõdab tuule kiirust sel teel, et määrab aja, mis kulub helisignaali allikast sensoriteni jõudmiseks. Olgu heliallikas koordinaatide al-guspunktis  $O = (0; 0)$  ning kolm sensorit punktides koordinaatidega  $A = (0; a)$ ,  $B = (a; 0)$  ja  $C = (-a; 0)$ , kus  $a = 211,1 \text{ mm}$  (loeme lihtsustavalt, et nii heliallika kui ka sensorite mõõtmed on tühised). Anemomeetrit hoitakse nii, et kõik sensorid paiknevad ühes ja samas horisontaaltasandis ning helisignaali sensoriteni jõud-mise aegadeks mõõdetakse vastavalt  $t_A = 627,0 \mu\text{s}$ ,  $t_B = 625,2 \mu\text{s}$  ja  $t_C = 603,4 \mu\text{s}$ . Milline on tuule kiirus? Arvutustes võite kasutada mõistlikke lihtsustavaid lähen-dusi.

**Ü140 Kaater ★★★★★**

Autor: Jaan Kalda, lõppvoor, 2016, G 9

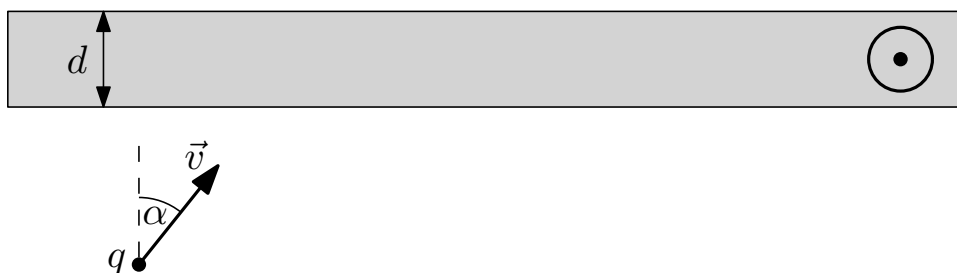
Kaater sõitis  $l = 4 \text{ km}$  kaugusel otse lõuna suunas asuvale saarele. Alguses võe-ti suund esimesele meremärgile, seejärel pöörati teise suunas ning lõpuks võeti kurss otse saare peale; seega koosnes trajektoor kolmest sirglõigust. Kaatrilt mõõ-deti tuule kiirust ja suunda: esimest lõiku sõideti  $t_1 = 3 \text{ min}$  ja tuule kiiruseks mõõ-deti  $v_1 = 15 \text{ m/s}$  ning tajutav suund oli otse idast, teist lõiku sõideti  $t_2 = 1,5 \text{ min}$  ja tuule kiiruseks mõõdeti  $v_2 = 10 \text{ m/s}$  ning tajutav suund oli otse kagust (lõuna-ida vahelt), kolmandat lõiku sõideti  $t_3 = 1,5 \text{ min}$  ja tuule kiiruseks mõõdeti  $v_3 = 5 \text{ m/s}$  ning tajutav suund oli otse edelast (lõuna-lääne vahelt). Mis oli tegelik tuule kiirus? Märkus. Eri lõikudel võis paadi kiirus olla erinev, kuid iga lõigu kestel hoiti kons-tantne; pööramiseks ja kiirendamiseks kulunud aeg oli tühine; tuule tegelik suund ja kiirus ei muutunud.

## Magnetism

### Ü141 Magnetpeegel ★★

Autor: Kristian Kuppart, lahtine, 2013, G 2

Positiivse laenguga  $q$  ja kiirusega  $v$  osake liigub ristkülikukujulise riba poole nii, et tema kiirusvektor moodustab riba normaalgiga nurga  $\alpha$ . Riba paksus on  $d$  ja seal paikneb homogeenne  $z$ -telje suunaline magnetväli induksiooniga  $B$  (paberi tasandist meie poole suunatud). Millise maksimaalse langemisnurga  $\alpha_{\max}$  korral osake veel läbib magnetvälja? On teada, et ribaga risti sellesse sisenev osake läbib riba.



### Ü142 Generaator ★★

Autor: Andreas Valdmann, lahtine, 2013, G 5

Teatud tüüpi elektrigeneraatoris pöörleb väljundiga ühendatud juhtmekontuur püsimagnetitega tekitatud magnetväljas, muutes mehaanilise töö elektrienergiaks. Sellise generaatori külge oli tarbijana ühendatud elektrilamp. Esialgu aeti generaatorit ringi nurkkiirusega  $\omega_0$ , mille tulemusel eraldus lambis võimsus  $P_0$ . Mingil hetkel suurendati generaatori pöörlemissagedust 2 korda.

- a) Kui suur oli lambis eralduv võimsus pärast pöörlemissageduse suurendamist?
- b) Kui suur oli generaatori ringiajamiseks tarvilik jõumoment enne ja pärast pöörlemissageduse suurendamist?

Võib eeldada, et generaator töötas kadudeta ehk kogu tema ringiajamisel tehtav töö kandus üle tarbijale. Ühtlase sagedusega pöörlemisel on generaatorit ringiajav jõumoment konstantne. Samuti võib eeldada, et lambi takistus ei sõltu teda läbiva voolu tugevusest.

### Ü143 Tiirlev kuulike ★★★

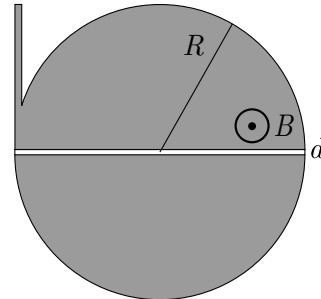
Autor: Eero Vaher, lahtine, 2013, G 6

Olgu meil positiivselt laetud kuulike massiga  $m$ . On teada, et kui kuulike liiguks kiirusega  $v$  sellega ristivas magnetväljas induksiooniga  $B$ , siis oleks selle trajektoriks ringjoon raadiusega  $r$ . Kui suure laenguga  $q$  peab olema teine sama massiga kuulike, et esimene kuulike liiguks teise kuulikese elektriväljas sama kiirusega samal trajektoril? Eeldage, et kahe kuulikese süsteemile ei mõju väliseid jõude. Kõiki liikumisi vaadeldakse laboratoorses taustsüsteemis.

**Ü144 Tsüklotron ★★★**

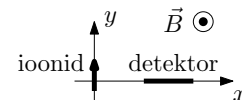
Autor: Kristian Kuppart, piirkonnavor, 2018, G 10

Vaatleme tsüklotroni – teatud tüüpi osakestekii-  
rendi toimimist. Tsüklotron koosneb silindrikuju-  
lisest piirkonnast raadiusega  $R$ , kus on homogeen-  
ne magnetväli tugevusega  $B$ , ning õhukesest ri-  
bakujulisest piirkonnast laiussega  $d$ , kus on homo-  
geenne ribaga risti olev elektrivälja tugevusega  $E$ .  
Elektrivälja suunda muudetakse perioodiliselt vas-  
tassuunaliseks nii, et osakeste igal riba läbimisel on  
elektrivälja suund osakeste kiirusvektoriga sama-  
suunaline. Samuti on tsüklotroni ühes ääres osa-  
keste tsüklotronist väljumiseks kitsas kanal. Alus-  
tagu osakesed liikumist tsüklotroni kesktühiselt  
vähke algkiirusega. Mitu täisringi  $n$  teevad osake-  
sed tsüklotronis enne väljumist? Osakeste laeng on  
 $q$  ja mass  $m$ . Eeldada, et  $n \gg 1$ .



**Ü145 Mass-spektromeeter ★★★★★** Autor: Kristian Kuppart, piirkonnavor, 2013, G 10

Laboris oli uurimiseks hulk mingit atomaarset ainet, mille  
molaarmassiks mõõdeti  $\mu_1$ . Ühekordselt ioniseeritud ainet  
(iga aatom oli kaotanud ühe elektroni) kiirendati elektriväl-  
jas potentsiaalide vahel  $U$  ja suunati magnetvälja indukt-  
siooniga  $B$  (vaadake joonist). Magnetinduksioon oli joonise tasandiga risti, ioo-  
nide algkiirus oli  $y$ -telje suunaline, magnetväli asus piirkonnas  $y > 0$  ning aine  
sisenes magnetvälja punktis  $(0, 0, 0)$ .



Täheldati, et väike kogus ainet langes  $x$ -teljel asuvale detektorile kauguse  $d$  võrra  
kaugemal kohast, kuhu langes põhiosa ainet. Sellest järeldati, et aine hulgas oli  
väike osa isotoopi erineva molaarmassiga. Leidke selle isotoobi molaarmass  $\mu_2$ .  
Avogadro arv on  $N_A$  ja elektroni laeng on  $-e$ .

**Ü146 Magnetväli ★★★★★**

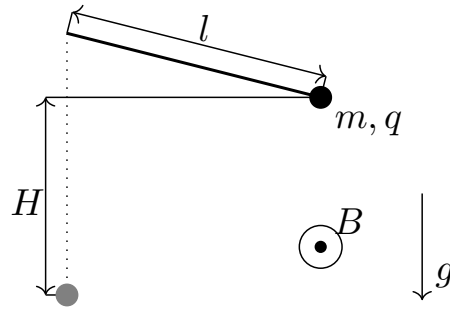
Autor: Jaan Kalda, piirkonnavor, 2015, G 9

Piirkonnas  $0 < y < a$  on  $z$ -teljega paralleelne homogeenne magnetväli indukt-  
siooniga  $B$ ; piirkondades  $y < 0$  ja  $y > a$  magnetväli puudub. Osake massiga  $m$  ja  
laenguga  $q$  siseneb kiirusega  $v$  magnetväljaga piirkonda paralleelselt  $y$ -teljega üle  
joone  $y = 0$ . Visandage osakese kiirusvektori ja  $y$ -telje vaheline nurk pärast seda,  
kui osake on piirkonnast  $0 < y < a$  väljunud funktsioonina kiirusest  $v$ .

**Ü147 Laetud pendel ★★★★★**

Autor: Eero Vaher, lahtine, 2015, G 10

Väike laetud kuulike massiga  $m$  ja laenguga  $q$  ripub venimatu pikkusega  $l$  niidi ot-  
sas magnetväljas induksiooniga  $B$ . Kuulike viiakse niiti sirgena hoides kõrgusele  
 $H = \frac{7}{8}l$  ning lastakse siis lahti. Raskuskiirendus on  $g$  ning magnetvälja suund on  
risti pendli võnketasandiga. Samuti on teada, et kehtib  $q^2 B^2 l = \frac{3}{4} m^2 g$ . Milline on  
kuulike trajektoori?



**Ü148 Elektronid ★★★★★**

Autor: Jaan Kalda, lõppvoor, 2017, G 10

Ruumipiirkonnas  $x > -a$  ( $a > 0$ ) on homogeenne  $z$ -telje sihiline magnetväli induktsiooniga  $B$ . Koordinaatide alguspunktis on elektronide allikas, mis kiirgab elektrone võrdse arvul kõikidesse suundadesse (üle ruuminurga  $4\pi$ ). Kõikide elektronide kiirus on  $v$ . Tasandis  $x = -a$  on ekraan. Kui elektronid laenguga  $e$  ja massiga  $m$  põrkuvad vastu ekraani, siis on kokkupõrkepunktis näha helendust. Leidke helenduva laigu  $y$ -telje sihiline läbimõõt tasandil  $z = 0$  eeldusel, et vähemalt osa elektronidest jõuavad ekraanini. Samal tasandil leida, kus kohas on laigu helenduse intensiivsus kõige suurem. Milline on selle laigu  $z$ -telje sihiline pikkus tasandil  $y = 0$ ?

## Staatika

### Ü149 Rõngas ★★

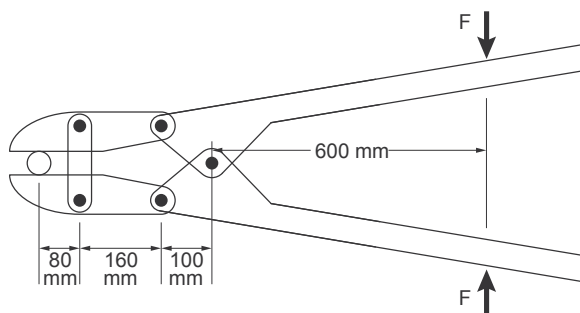
Autor: Taavi Pungas, piirkonnavaor, 2014, G 6

Lae külge on nööri, mille pikkus on  $L$ , kinnitatud kerge plastmassrõngas raadiusega  $R$ , mille küljes on omakorda raske metallist mutter. Mutrit saab mööda rõngast libistada. Rõnga ja mutri vaheline hõõrdetegur on  $\mu$ . Juku tahab mutrit mööda rõngast nihutades saavutada olukorda, kus mutri ja lae vahekaugus  $h$  oleks võimalikult väike, aga süsteem püsiks veel ilma välise sekkumiseta tasakaalus. Leidke vähim vahekaugus  $h_{\min}$ , mille Juku võib saavutada. Eeldage, et rõnga mass on mutri omaga võrreldes tühiselt väike.

### Ü150 Poldilõikur ★★★

Autor: Mihkel Rähn, piirkonnavaor, 2015, G 7

Leida, kui suurt jõudu avaldab poldilõikuri tera poldile (vt joonis), kui käepidemetele avaldatud jõud on  $F = 90 \text{ N}$ .



### Ü151 Klotsid ★★★

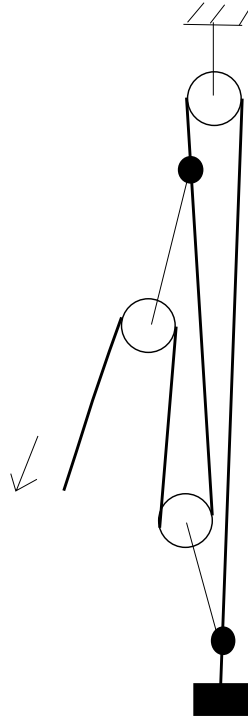
Autor: Mihkel Rähn, piirkonnavaor, 2014, G 7

Horisontaalsel laual asuva klotsi massiga  $m_1$  peale on asetatud teine klots massiga  $m_2$ . Kahe klotsi vaheline seisuhõõrdetegur on  $\mu_2$ . Alumise klotsi ja laua vaheline liugehõõrdetegur on  $\mu_1$ . Leidke maksimaalne horisontaalne jõud  $F$ , millega võib alumist klotsi tõmmata, ilma et ülemine klots libiseks.

### Ü152 Polüspast ★★★

Autor: Mihkel Rähn, lõppvaor, 2014, G 6

Jäälõhesse kukkunud alpinisti väljatõmbamiseks on käepärastest vahenditest (kolm plokki ja nöörijupid) koostatud polüspast. Lihtsustatud joonisel on jämeda joonega märgitud põhikõis, mille ühes otsas on kukkunu ning teisest otsast vinnatakse. Plokid on peene joonega kujutatud nööri abil kinnitatud mittelibiseva sõlmega (joonisel täidetud ring) põhikõie külge. Leidke polüspasti ülekandetegur nii hõõrdumist arvestamata kui ka eeldusel, et hõõrdumine vähendab jõuülekannet igal plokil 35%. Eeldage, et kõik jõud on vertikaalsed.



**Ü153 Kelk ★★★**

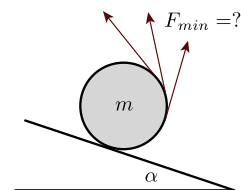
Autor: Andreas Valdmann, piirkonnavor, 2018, G 9

Juku läks sõpradega kelgutama. Teel tagasi istusid Juku kaks sõpra kelgule ja Juku üritas kelku horisontaalsel lumisel teel enda järel vedada. Kui suur on minimaalne kelgunööri nurk maapinnaga, mille korral on Jukul võimalik kelk liikuma tõmmata? Juku mass  $m_1 = 60 \text{ kg}$  ja hõõrdetegur Juku saabaste ning lume vahel  $\mu_1 = 0,30$ . Kelgu mass koos Juku sõpradega  $m_2 = 110 \text{ kg}$  ja hõõrdetegur kelgu ning lume vahel  $\mu_2 = 0,20$ .

**Ü154 Niidirull ★★★★★**

Autor: Mihkel Kree, lahtine, 2013, G 8

Silinder massiga  $m$ , millele on keritud õhuke niit, asetatakse kaldpinnale nurgaga  $\alpha$ . Millise minimaalse jõuga  $F_{\min}$  tuleb nõõrist hoida, et silinder paigale jääks (vt joonist)? Hõõrdetegur pinna ja silindri vahel on nii suur, et libisemist ei toimu.



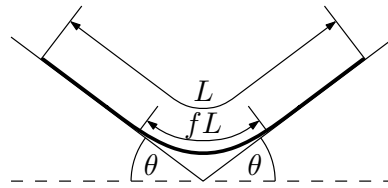
**Ü155 Jalgrattur ★★★★★** Autor: Andres Põldaru, lahtine, 2014, G 8

Jalgrattur sõidab alla ühtlase kallakuga nõlvast. Kui ta vajutab pidureid täpselt nii kõvasti, et tagumine ratas on peaaegu õhku tõusmas, siis tema kiirus mäest alla sõites ei muutu. Jalgratturist ja rattast koosneva süsteemi massikeske asub täpselt kahe ratta vahel kaugusel  $h$  maapinnast, rataste telgede vahekaugus on  $d$ . Kui suur on nõlva ja horisontaalsihi vaheline nurk  $\alpha$ ? Kui suur peab olema ratta ja kaldpinna vaheline hõõrdeegur  $\mu$ , et jalgrattur saaks kirjeldatud moel pidurdada?

**Ü156 Nöör rennis ★★★★★**

Autor: Stanislav Zavjalov, lahtine, 2012, G 9

Kaks plaati moodustavad V-kujulise horisontaalse renni. Mõlemad plaadid on horisontaaltasapinna suhtes nurga  $\theta$  all. Rennis on jupp ühtlase massijaotusega nööri pikkusega  $L$ , mis asub tervikuna renniga ristuv tasandis nii, et mõlema plaadiga puutub kokku sama palju nööri. Renni põhja kohal ei toetu nöör enam pikkuse  $fL$  ulatuses plaatidele. Leidke  $f$ , kui nöör on libisemise piiril. Hõõrdeegur nööri ja plaatide vahel on  $\mu = 1$ .



**Ü157 Katus ★★★★★**

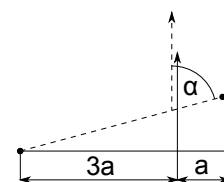
Autor: Jaan Kalda, lõppvoor, 2017, G 9

Kaks jäika traadijuppi pikkusega  $L$  on ühendatud otsapidi (nt niidiga seotud) nii, et nende otspunktid on kontaktis ja nende vaheline nurk saab takistuseta muutuda, moodustades V-kujulise figuuri. See traadist moodustis asetatakse horisontaalse libedapinnalise silindri peale nõnda, et tasakaaluasendis moodustub traadist “katus” (tagurpidi “V”) tipunurgaga  $\alpha$ . Massijaotus traadis on ühtlane, hõõre traadi ja silindri vahel puudub. a) Milline on silindri raadius  $R$ ? b) Milline võrratus peab olema rahuldatud, et see asend oleks stabiilne (uurida stabiilsust vaid “katuse” kui terviku pöördumise suhtes, eeldades et traatidevaheline nurk ei muutu)?

**Ü158 Niidiga hantel ★★★★★**

Autor: Jaan Kalda, lõppvoor, 2015, G 9

Horisontaalpinnal lebab hantel, mis koosneb kaalutust vardast pikkusega  $l = 4a$  ning selle otstele kinnitatud kahest ühesuguse massi ja hõõrdeeguriga väikesest klotsist. Varda külge kaugusele  $a$  ühest klotsist on seotud pikk niit. Algul on niidi suund horisontaalne ja risti vardaga. Niiti aeglaselt tõmmates hakkab hantel pöörduma, sest alguses nihkub vaid üks klots. Milline on nurk  $\alpha$  varda ja niidi vahel siis, kui ka teine klots nihkuma hakkab?



## Taevamehaanika

### Ü159 Maa pöörlemisperiood ★

Autor: Eero Vaher, piirkonnavaor, 2014, G 3

Keskmiseks päikeseööpäevaks ehk tavatähenduses ööpäevaks nimetatakse keskmist perioodi, mille jooksul Päike näib Maaga seotud vaatlaja jaoks tegevast taevast täisringi. Keskmise päikeseööpäeva pikkuseks on 24 h ehk 86 400 s. Maal kulub ühe tiiru tegemiseks ümber Päikese 365,256 keskmist päikeseööpäeva. Maa pöörlemis-suund ümber oma telje ühtib selle tiirlemissuunaga Päikese ümber. Leidke nende andmete põhjal Maa pöörlemisperiood sekundi täpsusega.

### Ü160 Orbiit ★★

Autor: Mihkel Pajusalu, lahtine, 2014, G 3

Taevakehad tiirlevad teatavasti elliptilistel orbiitidel. Ka Kuu orbiit ümber Maa on elliptiline. Kui Kuu kõige väiksem kaugus Maa-Kuu süsteemi massikeskmest (mille selles ülesandes võib lugeda ühtivaks Maa keskpunktiga) on  $r_1 = 360\,000\text{ km}$  ja orbitaalkiirus sellel kaugusel on  $v_1 = 1,1\text{ km/s}$ , siis kui suur on ligikaudu suurim kaugus Maa ja Kuu vahel? Maa massiks võtta  $M = 6,0 \cdot 10^{24}\text{ kg}$  ja gravitatsioonikonstandiks  $G = 6,7 \cdot 10^{-11} \frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2}$ .

### Ü161 Päikese tihedus ★★

Autor: Eero Vaher, piirkonnavaor, 2013, G 6

Leidke Päikese keskmine tihedus  $\rho$ . Maa tiirlemisperiood on  $T = 1$  aasta, gravitatsioonikonstant  $G = 6,7 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2$ , Maa kaugus Päikesest  $R = 1,5 \cdot 10^{11}\text{ m}$ , Päikese nurkläbimõõt Maalt vaadatuna on  $\alpha = 0,54^\circ$  (see on nurk, mis moodustub kahe kiire vahel, mis on tõmmatud vaatlaja silma juurest Päikese diameetri otspunktide juurde).

### Ü162 Ühendatud satelliidid ★★

Autor: Eero Vaher, piirkonnavaor, 2018, G 6

Kaks satelliiti, mõlemad massiga  $m$ , tiirlevad ümber planeedi massiga  $M \gg m$  ringorbiitidel raadiustega  $R_1$  ning  $R_2 = 2R_1$ . Satelliidid on omavahel ühendatud tühise massiga pinges trossiga pikkusega  $R_1$ , mille tõttu on mõlema satelliidi tiirlemisperiood  $T$ . Mitu korda on satelliitide joonkiirused  $v_1$  ja  $v_2$  suuremad või väiksemad joonkiirustest  $v'_1$  ja  $v'_2$ , millega satelliidid tiirleksid oma orbiitidel trossi puudumisel?

### Ü163 Satelliit ★★★

Autor: Eero Vaher, lõppvaor, 2013, G 5

Geostatsionaarseks orbiidiks nimetatakse sellist orbiiti, millel asuv satelliit Maa suhtes ei liigu. Kui suur on maa-ala, mida sellisel orbiidil olevalt satelliidilt jälgida saab? Vastuseks esitage selle maa-ala läbimõõt mõõdetuna mööda Maa pinda. Gravitatsioonikonstant  $G = 6,7 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2$ , Maa mass  $M = 6,0 \cdot 10^{24}\text{ kg}$ , Maa raadius  $r = 6400\text{ km}$ , Maa pöörlemisperiood  $t = 24\text{ h}$ .



## Termodünaamika

### Ü164 Vee jäätumine ★

Autor: Jaak Kikas, lahtine, 2012, G 1

0,5 kg jääkuubikuid asetati 1 l vette algtemperatuuriga  $0^{\circ}\text{C}$ . Milline peab olema jää algtemperatuur, et kogu vesi jäätuks? Jää sulamissoojus on  $330 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}}$ , erisoojus  $2,1 \text{ kJ}/(\text{kg}^{\circ}\text{C})$ . Soojusvahetust keskkonnaga ei toimu. Vee tihedus  $\rho = 1000 \text{ kg}/\text{m}^3$ .

### Ü165 Veepudel ★

Autor: Koit Timpmann, piirkonnavor, 2013, G 2

Külma ilmaga oli autosse ununenud 2,0-liitrine täis veepudel. Auto juurde tulnud autojuht Koit ei uskunud oma silmi: temperatuur autos oli  $-3^{\circ}\text{C}$ , aga vesi pudelis ei olnud külmunud. Koidule tuli meelde, et ta oli kunagi kuulnud, et väga puhas vedelik võib olla vedelas olekus ka allpool tahkumistemperatuuri. Selle kontrollimiseks võttis ta pudeli ja raputas seda ning suhteliselt kiiresti muutus selles osa veest jääks. Mitu grammi jääd tekkis pudelisse? Vee erisoojus  $c = 4200 \text{ J}/(\text{kg}^{\circ}\text{C})$  ja tihedus  $\rho = 1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ , jää sulamissoojus  $\lambda = 340 \text{ kJ}/\text{kg}$ .

### Ü166 Hõõrdkeevitus ★

Autor: Ants Remm, lõppvoor, 2012, G 1

Suhteliselt uus keevitustehnoloogia on hõõrdkeevitus. See seisneb selles, et üks liidetavatest detailidest pannakse pöörlema ning surutakse vastu teist. Kui tekkinud soojus on detailid peaaegu sulamistemperatuurini kuumutanud, jäetakse pöörlev detail seisma ning suure rõhu all moodustub side. Vaatame olukorda, kus kaks vasest torujuppi tahetakse kokku keevitada. Leidke, kui suure jõuga peab pöörlemise ajal torusid kokku suruma, et tekiks piisavalt suur soojushulk  $\Delta t = 6 \text{ s}$  jooksul. Toru pöörlemiskiirus on  $f = 1200$  pööret minutis. Lihtsustatult võib eeldada, et mõlema toru otsast kuumeneb ühtlaselt  $l = 0,5 \text{ cm}$  pikkune jupp. Torude diameeter on  $D = 8 \text{ cm}$ , seina paksus  $d = 5 \text{ mm}$ . Torud on alguses toatemperatuuril  $T_0 = 20^{\circ}\text{C}$ . Liitumine toimub temperatuuril  $T_1 = 810^{\circ}\text{C}$ . Vase hõõrdetegur iseendaga on  $\mu = 0,96$ , tihedus  $\rho = 8,9 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$  ning erisoojus  $c = 390 \frac{\text{J}}{\text{kg}^{\circ}\text{C}}$ . Soojuskadudega ümbritsevasse keskkonda mitte arvestada.

### Ü167 Münt jääs ★

Autor: Erkki Tempel, piirkonnavor, 2015, G 3

Jäätüki sisse on jäätunud münt massiga  $m_m = 10 \text{ g}$  ja tihedusega  $\rho_m = 8900 \text{ kg}/\text{m}^3$ . Jäätüki ja mündi temperatuur on  $0^{\circ}\text{C}$ . Jäätükk ilma mündita kaalub  $m_j = 130 \text{ g}$ . See jäätükk visatakse anumasse, milles on  $V_v = 400 \text{ ml}$  vett algtemperatuuriga  $T$ . Kui suur peab olema vee minimaalne algtemperatuur  $T$ , et jäätükk koos mündiga vajuks pärast soojusliku tasakaalu saabumist põhja? Soojusvahetust väliskeskkonnaga mitte arvestada. Vee erisoojus  $c = 4200 \text{ J}/(\text{kg}^{\circ}\text{C})$  ning jää sulamissoojus  $\lambda = 330 \text{ kJ}/\text{kg}$ . Jää tihedus  $\rho_j = 900 \text{ kg}/\text{m}^3$  ja vee tihedus  $\rho_v = 1000 \text{ kg}/\text{m}^3$ .

**Ü168 Soojusvaheti ★**

Autor: Kaur Aare Saar, lõppvoor, 2016, G 1

Tagasivoolu soojusvahetis jahutatakse sissetulevat naftat temperatuuriga  $T_n = 90^\circ\text{C}$  temperatuurini  $T_0 = 20^\circ\text{C}$ . Jahutusvesi liigub soojusvahetis vastupidises suunas naftaga ja siseneb soojusvahetisse temperatuuriga  $T_v = 10^\circ\text{C}$ . Vesi liigub kiirusega  $v_v = 6\text{ m}^3/\text{min}$  ja nafta liigub kiirusega  $v_n = 15\text{ m}^3/\text{min}$ . Leidke, millise temperatuuriga väljub soojusvahetist vesi? Vee erisoojus  $c_v = 4200\frac{\text{J}}{\text{kg}\cdot^\circ\text{C}}$  ja nafta erisoojus  $c_n = 1800\frac{\text{J}}{\text{kg}\cdot^\circ\text{C}}$ . Vee tihedus  $\rho_v = 1000\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$  ja nafta tihedus  $\rho_n = 850\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ .

**Ü169 Küttesüsteem ★★**

Autor: Oleg Košik, piirkonnavor, 2012, G 2

Talvel siseneb koolimaja küttesüsteemi vesi algtemperatuuriga  $t_0 = 60^\circ\text{C}$  ning väljub sealt temperatuuriga  $t_1 = 40^\circ\text{C}$ . Koolimaja soojuskadude võimsus on  $N = 100\text{ kW}$ . Kooli siseneva ja sealt väljuva veetoru sisediameeter on  $D = 100\text{ mm}$ . Leidke veevoolu kiirus neis torudes. Vee erisoojus  $c = 4200\text{ J}/(\text{kg}\cdot^\circ\text{C})$ , tihedus  $\rho = 1000\text{ kg}/\text{m}^3$ .

**Ü170 Veekeedukann ★★**

Autor: Erkki Tempel, lahtine, 2015, G 4

Veekeedukann küttekeha võimsusega  $N$  on täidetud veega. Kannu tila ava pindala on  $S$ . Milline on suurim joonkiirus, millega veeaur kannu avast väljub? Vee aurustumissoojus on  $L$ , ideaalse gaasi konstant on  $R$ , õhurõhk on  $p$  ning vee molaarmass on  $\mu$ . Veekeedukannu kasutegur soojuskadusid arvestades on  $\gamma$ .

**Ü171 Radiaator ★★**

Autor: Ardi Loot, piirkonnavor, 2018, G 3

Toas on vesiradiaator nimivõimsusega  $P_n = 2,0\text{ kW}$ . Mis on selle radiaatori tegelik võimsus ja tagasivoolava vee temperatuur, kui radiaatorit läbib küttevesi kiirusega  $q = 1,01/\text{min}$ , pealevoolava küttevee temperatuur  $T_p = 70^\circ\text{C}$  ja toatemperatuur  $T_0 = 22^\circ\text{C}$ ? Kui suur on radiaatori maksimaalne võimsus antud pealevoolu- ja toatemperatuuri korral? Vee erisoojus  $c_v = 4200\text{ J}/(\text{kg}\cdot\text{K})$  ja tihedus  $\rho_v = 1000\text{ kg}/\text{m}^3$ .

*Märkus.* Radiaatori nimivõimuseks nimetatakse selle küttevõimust fikseeritud pealevoolu- ( $T_{pn} = 75^\circ\text{C}$ ), tagasivoolu- ( $T_{tn} = 65^\circ\text{C}$ ) ja toatemperatuuri ( $T_{0n} = 20^\circ\text{C}$ ) korral.

*Vihje.* Võib eeldada, et radiaatori tegelik võimsus on võrdeline pealevoolu- ja tagasivoolutemperatuuride keskmise ja toatemperatuuri vahega.

**Ü172 Kasvuhooneefekt ★★★**

Autor: Kristian Kuppart, lahtine, 2017, G 6

Vaatleme järgnevat Maa atmosfääri lihtsustatud mudelit, kus Maad ümbritsev atmosfäärikiht a) peegeldab kosmosesse tagasi  $\mu = 30\%$  pealelangevast päikesekiirgusest ning ülejäänud laseb läbi ilma kiirgust neelamata; b) neelab täielikult kogu maapinnalt tuleva infrapunakiirguse. Päikeselt tulev kiiritustihedus on  $w_0 = 1400\frac{\text{W}}{\text{m}^2}$ . Leidke maapinna keskmine temperatuur.

*Vihje.* kehtib Stefan-Boltzmanni seadus – musta keha poolt kiiratud võimsus pindalaühiku kohta avaldub kui  $w = \sigma T^4$ , kus  $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot \text{K}^4}$ . Eeldada, et maapind kiirgab ainult infrapunakiirgust, ning et teda saab selle jaoks lugeda absoluutselt mustaks kehaks. Samuti neelab maapind kogu temani jõudva päikesevalguse.

### Ü173 Kauplus ★★★★★

Autor: Oleg Košik, lõppvoor, 2013, G 8

Suurematel hoonetel on sageli eeskojad. Miks? Vaadelgem kauplust, millele ehitati nii kitsas eeskoda, et läbi kaupluse seinte toimuvaid soojuskadusid see juurdeehitis ei mõjuta. Kaupluse ukse avamisel vahetub läbi avatud ukse teatud kogus õhku. Lugegem õhk kõikjal hästi segunenuks, st läbi lahtise ukse läheb õuest eeskotta õuetemperatuuril õhk; kõigi uste jaoks teeme analoogilised eeldused. Samuti eeldame, et ühe ukseavamisega vahetuva õhu hulk ei sõltu temperatuuride vahest ning et uste ja eeskoja seinte soojusjuhtivusest tingitud soojuskadod on tühised võrreldes õhu vahetumisest tingitutega.

Vaatleme olukorda enne eeskoja ehitamist. Jahedal aprillipäeval oli kaupluse lahtioleku aegne välistemperatuur stabiilselt  $T_1 = 4^\circ\text{C}$ . Öösel, kui kauplus on kinni, oli välistemperatuur stabiilselt  $T_2 = 0^\circ\text{C}$ . Kaupluse elektriradiaatorite tööd juhib termostaat, mis hoiab sisetemperatuuri püsivalt  $T_0 = 20^\circ\text{C}$  juures. Öösel oli radiaatorite keskmine võimsus  $P_2 = 5,0 \text{ kW}$  ning päeval  $P_1 = 4,6 \text{ kW}$ . Päeval toimib kaks efekti: (a) inimesed avavad aeg-ajalt ust; (b) inimeste kehasoojus ning kaupluse valgustid panustavad kütmissse teatava lisavõimsusega.

Pärast eesruumi ehitamist selgus, et sama välistemperatuuri ning külastajate arvu juures vähenes radiaatorite päevane keskmine võimsus  $P_3 = 3,8 \text{ kW}$ -ni. Millist võimsust toodavad kaupluses olevad inimesed ja valgustid, kui eeldada, et soojusvahetuse võimsus on võrdeline temperatuuride vahega?

### Ü174 Küttesüsteem ★★★★★

Autor: Taavi Pungas, piirkonnavor, 2014, G 9

Vaatleme kortermaja küttesüsteemi lihtsustatud mudelit. Kahekordse maja kummalgi korrusel on üks korter. Loeme korterid täiesti ühesugusteks. See tähendab, et katus ja põrandad on hästi soojustatud ning soojuskadusid arvestame ainult läbi maja seinte.

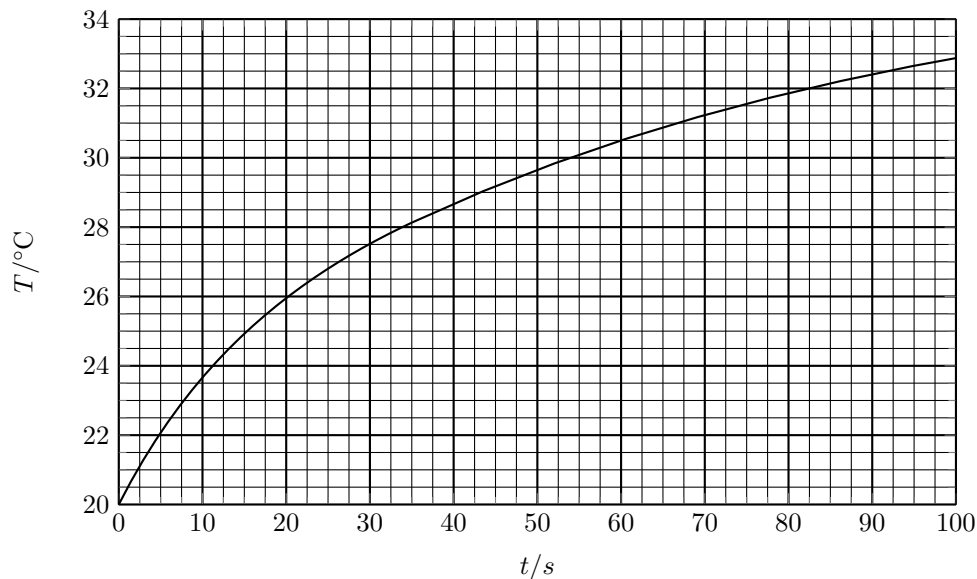
Keldris asub katel, mis kütab vee temperatuurini  $t_1 = 68^\circ\text{C}$ . Vesi liigub kõigepealt ülemisse korterisse ning läbib seal 10 ribiga radiaatori. Seejärel juhitakse vesi alumisse korterisse, kus see läbib 11 ribiga radiaatori. Pärast seda liigub vesi tagasi katlasse ning sinna jõudses on vee temperatuur  $t_2 = 60^\circ\text{C}$ . Eeldame, et vesi jahutub ainult radiaatorites. Küttesüsteem on ehitatud nii, et mõlemas korteris oleks täpselt sama sisetemperatuur  $t$ . Leidke temperatuur  $t$ .

*Teadmiseks:* soojuskadu läbi mingi seina on võrdeline selle pindalaga ja temperatuuride vahega seespool ja väljaspool seina. Eeldage, et mööda radiaatorit liikudes langeb vee temperatuur lineaarselt läbitud vahemaaga.

**Ü175 Veesoojendi ★★★★★**

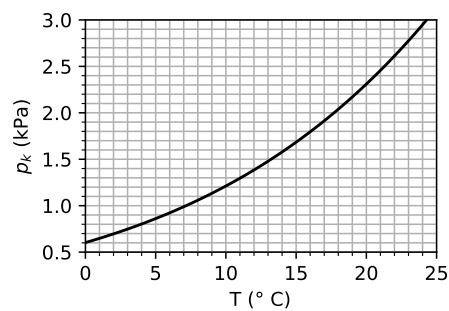
Autor: Andres Põldaru, piirkonnavor, 2016, G 10

Veesoojendis võimsusega  $P = 2,0 \text{ kW}$  on algselt vesi massiga  $m_0$  temperatuuril  $T_0 = 20^\circ\text{C}$ . Soojendisse voolab ühtlasel kiirusel juurde vett temperatuuril  $T_0$  nii, et ajaühikus lisanduva vee mass  $\mu = \text{Const}$ . Soojendi saab täis ja vett hakkab ülevast olevast avast välja voolama. Temperatuur jätkab tõusmist, stabiliseerudes  $36^\circ\text{C}$  juures. Soojendis oleva vee temperatuurigraafik on toodud allpool. Leidke  $m_0$  ja  $\mu$ . Eeldage, et peale väljavoolava vee muid soojuskadusid pole ja soojendis olev vesi on alati ühtlase temperatuuriga. Vee erisoojus  $c = 4,2 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}\cdot\text{K}}$ .


**Ü176 Soojustus ★★★★★**

Autor: Ardi Loot, lõppvoor, 2018, G 5

Seina soojustus koosneb sisemisest (soojusjuhtivus  $k_1 = 0,07 \text{ W}/(\text{m}\cdot\text{K})$ ) ja välimisest kihist (soojusjuhtivus  $k_2 = 0,05 \text{ W}/(\text{m}\cdot\text{K})$ ). Nende kihtide vahel on kile, et takistada õhu liikumist läbi seina. Millist tingimust peab rahuldama sisemise soojustuskihi pakus  $L_1$ , et vältida veeauru kondenseerumist seinas? Seina paksus  $L = L_1 + L_2 = 30 \text{ cm}$ ,  $L_2$  on välimise soojustuskihi paksus, toa temperatuur  $T_1 = 20^\circ\text{C}$ , suhteline õhuniiskus toas  $\eta_1 = 60\%$  ja välis-temperatuur  $T_2 = -20^\circ\text{C}$ . Küllastunud veeauru osarõhu sõltuvus temperatuurist on toodud joonisel.

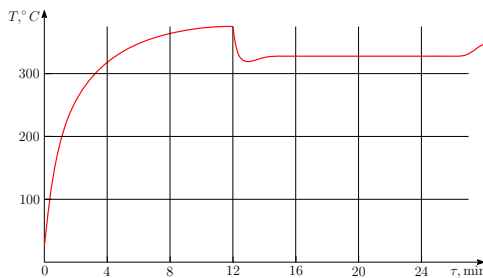


*Märkus.* Eeldada, et temperatuur muutub soojustuskihis lineaarselt kaugusega ja muutuse kiirus on pöördvõrdeline soojusjuhtivusega.

**Ü177 Ahi ★★★★★**

Autor: Stanislav Zavjalov, lõppvoor, 2012, G 7

Väikese metallisulatusahju kütteelemendi võimsus on  $P_0 = 50 \text{ W}$ . Toatemperatuuril olev ahi lülitakse sisse ja umbes 12 minuti pärast, kui selle temperatuur praktiliselt enam ei kasva, pannakse ahju mitu eelsoojendatud pliitükikest summaarse massiga  $m = 265 \text{ g}$ . Juuresoleval graafikul (suuremalt lisalehel) on toodud ahju temperatuuri sõltuvus ajast. Leidke selle põhjal pliisulamissoojus  $\lambda$ .



**Ü178 Gaasiküte ★★★★★**

Autor: Ardi Loot, piirkonnavor, 2017, G 10

Poolsfäärikujulist telki raadiusega  $R = 4 \text{ m}$  köetakse gaasipuhuriga. Seinte soojusjuhtivus on  $U = 3 \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K})$ . Ühe massiühiku gaasi põletamisel eraldub  $D = 2,25$  massiühikut vett. Gaasi kütteväärtus on  $k = 40 \text{ MJ/kg}$ . Välisõhu temperatuur on  $T_0 = -10^\circ\text{C}$  ja õhuniiskust  $\eta_0 = 50\%$ . Kui suur peab olema gaasikütte võimsus  $P$  ja telgi ventileerimise õhuruumala  $Q$  ajaühikus, et hoida telgis temperatuuri  $T_1 = 15^\circ\text{C}$  ja õhuniiskust  $\eta_1 = 80\%$ ? Kui suur osa küttevõimusest kulub ventileeritava õhu soojendamiseks ja mitu korda tunnis vahetub telgi õhk? Õhu tihedus  $\rho_\delta = 1,2 \text{ kg/m}^3$  ja soojusmahtuvus  $c_\delta = 1,0 \text{ kJ}/(\text{kg} \cdot \text{K})$ . Temperatuuril  $T_0 = -10^\circ\text{C}$  mahub õhu ruumalaühikusse maksimaalselt  $G_0 = 2,3 \text{ g/m}^3$  veeauru ning temperatuuril  $T_1 = 15^\circ\text{C}$  vastavalt  $G_1 = 12,8 \text{ g/m}^3$ . Eeldada, et soojakaod läbi telgi põranda puuduvad.

**Ü179 Must kuup ★★★★★**

Autor: Mihkel Pajusalu, lahtine, 2014, G 9

Olgu väga hea soojusjuhtivusega materjalist absoluutselt must kuup paralleelses valgusvihu, mille intensiivsus (võimsus ristlõikepindala kohta) on  $I$ . Milline on maksimaalne ja minimaalne stabiilne temperatuur  $T_{\max}$  ja  $T_{\min}$ , mille kuup saavutab sõltuvalt selle asendist kiirguse leviku suuna suhtes?

## Varia

### Ü180 Kontraktsioon ★

Autor: EFO žürii, piirkonnavoore, 2018, G 1

Omavahel segatakse  $V_v$  liitrit vett ja  $V_p$  liitrit piiritust nii, et tekkinud lahuse ruumala  $V = 1 \text{ dm}^3$  ning lahuses on massi järgi  $p = 44,1\%$  piiritust. Leidke omavahel segatud vee ja piirituse ruumalad  $V_v$  ja  $V_p$ . Lahuste kokkuvalamisel esineb  $\gamma = 6\%$ -line kontraktsioon – saadud lahuse ruumala on  $6\%$  väiksem kui vee ja piirituse ruumalade summa. Vee tihedus  $\rho_v = 1000 \text{ kg/m}^3$  ning piirituse tihedus  $\rho_p = 790 \text{ kg/m}^3$ .

### Ü181 Mobiililaadija ★★

Autor: Mihkel Kree, piirkonnavoore, 2014, G 4

Leiutajad on pakkunud välja toreda seadme matkainimestele oma telefoni laadimiseks. Ühe saapa talle sisse pannakse mehhanism, mis toimib amortisaatorina. Iga kord kui kannale toetutakse, muundatakse mehaaniline töö väikese elektrigeneraatori abil elektrienergiaks. Oletame, et matkaja mass  $m = 60 \text{ kg}$  ja ühe sammu ajal vajub tald kokku  $h = 5 \text{ mm}$  võrra. Antud seadme kasutegur  $\eta = 0,2$ . Matkaja keskmiseks sammupaari pikkuseks ehk kahe järjestikuse samale kannale astumise vahemaaks võtame  $d = 1,5 \text{ m}$ . Nüüd tuleb vaid ühendada telefon juhtmega saapa külge ja aku laadimine võib alata.

Arvestage, et tüüpilises nutitelefonis on liitium-polümeeraku, mis töötab pingel  $U = 3,7 \text{ V}$ . Samuti arvestage, et kui telefon töötab keskmisel voolutugevusel  $I_k = 130 \text{ mA}$ , suudaks aku vastu pidada  $T = 10$  tundi. Arvutage, kui pika maa peab matkaja maha kõndima, et tühi telefoni aku uuesti täis laadida.

### Ü182 Laser ★★

Autor: Valter Kiisk, lõppvoore, 2017, G 3

Laserkiir ühtlase diameetriga  $d = 1 \text{ mm}$  langeb risti kiilukujulise klaasplaadi esimesele pinnale (pindade vaheline nurk  $\varphi = 2^\circ$ ). Laserkiire koosseisus on monokromaatsed komponendid lainepikkustega  $\lambda_1 = 355 \text{ nm}$  ja  $\lambda_2 = 532 \text{ nm}$ . Klaasi murdumisnäitajad nendel lainepikkustel on vastavalt  $n_1 = 1,48$  ja  $n_2 = 1,46$ . Leidke kaugus  $l$  klaasplaadist, kus erineva lainepikkusega valguskiired on teineteisest täielikult eraldunud.

### Ü183 Pindpinevus ★★

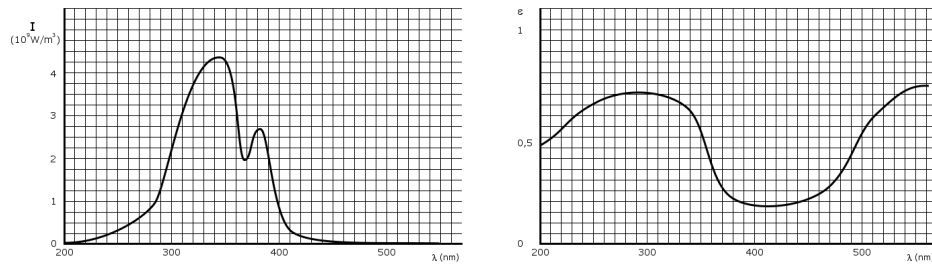
Autor: Koit Timpmann, lahtine, 2011, G 2

Klaastoru (raadius  $r_1$ ) asetatakse jämedama klaastoru sisse nii, et nende teljed ühtivad. Seejärel pannakse mõlemad püsti vette. Leidke, kui suur peaks olema jämedama toru siseraadius  $r_2$ , et veetase oleks mõlemas klaastorus sama. Eeldage, et torude seinad on tühiselt õhukesed.

**Ü184 Smurf solaariumis ★★**

Autor: Ants Remm, lahtine, 2011, G 4

Smurf veetis solaariumi lampide all ajavahemiku  $t = 10$  min. Kui suure soojushulga  $Q$  sai Smurf? Joonistel on toodud Smurfile langenud valguse spekter  $I$  (intensiivsus lainepikkuse kohta sõltuvalt valguse lainepikkusest, ühik  $10^9 \text{ W/m}^3$ ) ning Smurfi neeldumisspekter  $\varepsilon$  (neelatud ja peale langenud valguse intensiivsuste suhte sõltuvus valguse lainepikkusest). Smurfi efektiivne pindala, kuhu langeb valgus, on  $S = 0,1 \text{ m}^2$ .



**Ü185 Valgustid ★★**

Autor: Valter Kiisk, piirkonnavoore, 2016, G 7

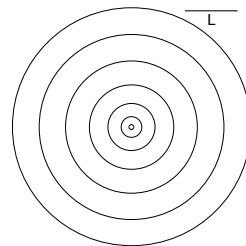
Luminestsentstorust kaugusel  $l_1 = 15$  cm mõõdeti valgustatuseks  $L_1 = 8400$  lx. Luminestsentstoru võib lugeda hulga pikemaks kaugusest  $l_1$ . Seevastu üksikut LED-pirnist kaugusel  $l_2 = 30$  cm mõõdeti valgustatuseks  $L_2 = 2600$  lx. Kontoriruumis kulgevad luminestsentstorud ühe sirge katkematu rivina üle kogu ruumi, paiknedes töötasapinnast kõrgusel  $h_1 = 1,8$  m. Laualambi LED-pirn paikneb kõrgusel  $h_2 = 40$  cm laua pinnast. Kui suur valgustatus saavutatakse otse valgusti all eraldi üldvalgustuse ja kohtvalgustuse kasutamisel?

*Märkus.* valgustatus iseloomustab ajaühikus pinnaühikule langevat valgusenergiat.

**Ü186 Tiik ★★★**

Autor: Taavi Pungas, lõppvoor, 2013, G 6

Vaatleme tiiki visatud kivi ümber tekkinud lainetust. Kui kivi kukub vette, tekib suur hulk erinevate lainepikkustega häiritusi, millest igaüks levib omaette kiirusega. Nende liitumisel moodustub lainehari, mille liikumist saame vaadelda. Joonisele (suuremalt lisalehele) on iga kindla ajavahemiku järel kantud selle laineharja asukoht, mõõtkavaks sirglõik pikkusega  $L$ . Laineharja kiirus  $v$  sõltub seda parasjagu moodustavate komponentide lainepikkustest  $\lambda$  ja vee sügavusest  $h$ . Kui kivi vettekukkumisest möödunud aeg  $t$  on väike, siis koosneb lainehari lainepikkustest  $\lambda \ll h$  ning laineharja kiirus sõltub ajast seose  $v \approx \frac{gt}{\pi}$  järgi. Kaugemal, kus laineharja moodustavad häiritused lainepikkusega  $\lambda \gg h$ , liigub see kiirusega  $v \approx \sqrt{hg}$ . Hinnake sügavust  $h$  eeldusel, et see oli terve tiigi ulatuses sama. Vastus andke suhtena  $h/L$ .



**Ü187 Radoon ★★★**

Autor: Mihkel Kree, lõppvoor, 2016, G 5

Graptoliitargilliit (tuntud ka diktüoneemakilda nime all) on Põhja-Eestis paljanduv setteline savikivim, mis sisaldab hulgaliselt haruldasi elemente, muu hulgas uraani. Üks tonn kivimit sisaldab 300 g uraan-238 isotoopi. Uraani levinuima isotoobi, aatommassiga 238, poolestusaeg  $\tau_U = 4,5$  miljardit aastat ning selle lagunemisahela vaheetapiks on radioaktiivne element radoon, aatommassiga 222 ning poolestusajaga  $\tau_{Rn} = 3,8$  päeva. Radoon on gaas, mida peetakse kopsuvähi tekitajaks, sest sissehingamisel satuvad organismi selle radioaktiivsed laguproduktid. Seetõttu sätestavad vastavad normatiivid, et hoonete ruumiõhus peab radooni aktiivsus olema väiksem kui  $200 \text{ Bq/m}^3$ , kus Henri Becquereli järgi nimetatud ühik Bq tähistab üht tuuma lagunemist sekundis.

Matkaja tõi matkalt pahaaimamatult koju kaasa ühe graptoliitargilliidi tükikese massiga  $m$  ning paigutas selle magamistuppa kapi peale. Arvestage lihtsustatult, et magamistoas ruumalaga  $V = 25 \text{ m}^3$  õhuvahetust ei toimu ning et kogu tekkiv gaasiline radoon väljub kivimist. Leidke kivimitükikese suurim ohutu mass  $m$ , nii et sellest tingitud radooni aktiivsus jääks veel lubatud normidesse, kui kivimit hoitakse pikka aega toas.

Märkus. aatommassiühik  $u = 1,7 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$ .

**Ü188 Vihmasadu ★★★**

Autor: Jaan Kalda, piirkonnavoor, 2012, G 7

Viilkatusega maja katus on peegelsümmeetriline: vertikaalne sümmeetriatasand on ida-läänesuunaline ning katuse põhja- ja lõunaküljed on omavahel risti. Mõlemal katusepoolel on vihmaveerenn, mis kogub katusele langeva vee ning suunab selle tünni. Sajab vihma ning puhub lõunatuul  $u = 6,0 \text{ m/s}$ ; lõunaküljel paiknev tünn täitub 2,0 korda kiiremini kui põhjaküljel paiknev tünn; võib lugeda, et katuse läheduses piiskade langemissuund oluliselt ei muutu. Milline on piiskade langemise keskmine kiirus (st kiiruse vertikaalkomponent)?

**Ü189 Lööklaine ★★★**

Autor: Jaan Kalda, lõppvoor, 2015, G 6

Elektrostaatiliselt lööklainet, mis levib kiirusega  $w$  piki  $x$ -telge, võib kirjeldada elektrilise potentsiaali abil:  $U = 0$  kui  $x < wt$  ning  $U = U_0$  kui  $x > wt$ . Millise kiiruse  $v$  omandab lööklaine mõjul algselt paigal seisnud osake massiga  $m$  ning laenguga  $q$ ? Vastus andke sõltuvana potentsiaalibarjääri kõrgusest  $U_0$ . Pöörake tähelepanu asjaolule, et see, kummale poole barjääri osake jääb, sõltub  $U_0$  väärtusest.

**Ü190 Õhupalli vari ★★★★★**

Autor: Jaan Kalda, lahtine, 2013, G 10

Päikesepaistelisel päeval hõljub õhus kerakujuline läbipaistmatu õhupall, mis jätab horisontaalsele maapinnale varju, kusjuures poolvarju pikkus on 5,0 m ja laius 2,5 m ning täisvarju pikkus 1,0 m. Kui suur on palli läbimõõt ja kui kõrgel see on maapinnast? Päikese näiv nurkläbimõõt (see on nurk, mis moodustub kahe kiire vahel, mis on tõmmatud vaatleja silma juurest Päikese diameetri otspunktide juurde) oli sel päeval  $\alpha = 0,53^\circ$ .



## Vedelike mehaanika

### Ü191 Tünn ★

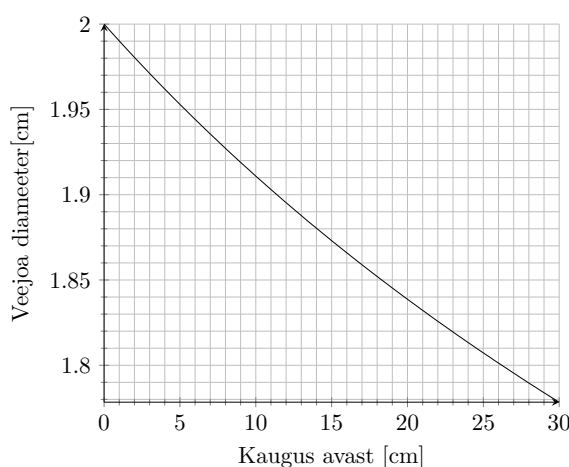
Autor: Koit Timpmann, piirkonnavoore, 2012, G 3

Vees ujuva tühja tünni ruumalast on  $1/10$  vee sees. Pärast tünni täitmist tundmatu vedelikuga jääb tünn vee peale ujuma, kuid nüüd on vee sees  $9/10$  tünni ruumalast. Kui suur on tünni valatud vedeliku tihedus? Vee tihedus on  $1000 \text{ kg/m}^3$ .

### Ü192 Auk tünnis ★★

Autor: Hans Daniel Kaimre, lõppvoor, 2018, G 2

Suure vett täis tünni põhjas on auk, kust voolab vett välja. Graafikul on esitatud väljuva veejoo läbimõõdu sõltuvus kaugusest tünni põhjast  $l$ . Leidke veetaseme kõrgus tünnis.



### Ü193 Ujuv kuup ★★

Autor: Koit Timpmann, lõppvoor, 2015, G 3

Õhukeseseinaline hermeetiline kuup ujub vee pinnal. Vee tihedus on  $\rho$ , kuubi mass koos selles oleva gaasiga  $m$  ja selle serva pikkus  $a$ . Milline on vähim gaasi algrõhk kuubis  $p$ , mille korral kuup ei upuks, kui selle põhja tekiks auk? Õhurõhk on  $p_0$ , raskuskiirendus on  $g$ .

### Ü194 Pump ★★

Autor: Ardi Loot, piirkonnavoore, 2018, G 4

Kaevust sügavusega  $h = 5,0 \text{ m}$  tahetakse pumbata vett. Pump asub maapinnal ning selle veevõtutoru (täidetud veega) on siseläbimõõduga  $d = 16 \text{ mm}$  ja pikkusega, mis on võrdne kaevu sügavusega.

**a)** Kui suur peab olema pumba võimsus  $P$ , et pumbata vett vooluhulgaga  $q = 30 \text{ l/min}$ ? Pumba kasutegur on  $\eta = 25 \%$ .

**b)** Missugune on maksimaalne kaevu sügavus  $h_m$ , mille korral on võimalik sellist tüüpi pumbaga kaevust vett pumbata?

Arvestada, et torus olevale veesambale mõjub lisaks teistele jõududele ka hõõrdejõud, mis põhjustab rõhu vähenemist toru pikkuse  $l$  kohta  $\Delta p = c_h q^2 l / d^5$ , kus  $c_h = 40 \text{ Pa} \cdot \text{s}^2 / \text{m}^2$ . Vee tihedus  $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$ , raskuskiirendus  $g = 9,8 \text{ m/s}^2$  ja õhurõhk  $p_0 = 100 \text{ kPa}$ .

**Ü195 Klots vedelikes ★★★**

Autor: Erkki Tempel, lahtine, 2014, G 6

Silindrilises anum asub põhja pindalaga  $S$  kaks mittesegunevat vedelikku tihedusega  $\rho_1$  ja  $\rho_2$ . Anumasse asetatakse kuubikujuline klot ruumalaga  $V$  ning tihedusega  $\rho_k$  ( $\rho_1 > \rho_k > \rho_2$ ). Klot on täielikult vedelike sees ega puuduta anuma põhja.

a) Kui suur osa klotsist asub alumises vedelikus?

b) Kui palju muutub kahe vedeliku eralduspinna kõrgus pärast kloti asetamist anumasse?

**Ü196 Kuup veega ★★★**

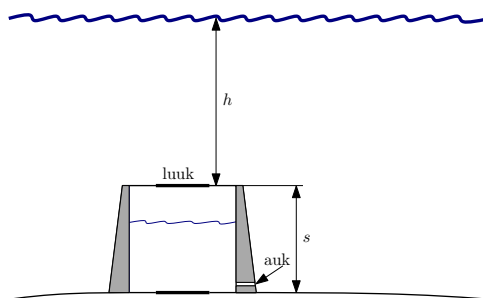
Autor: Jonatan Kalmus, piirkonnavor, 2018, G 7

Leidke veekoguse mass, mis tuleb valada kuupi, et see oleks võimalikult stabiilne, ehk süsteemi massikeske oleks võimalikult madalal. Kuubi külje pikkus on  $a$ , mass  $M$ , vee tihedus  $\rho$ . Kuubi seina paksusega mitte arvestada. Kuup on täielikult sümmeetriline ehk sellel on olemas kõik 6 identset tahku.

**Ü197 Allveelaev ★★★**

Autor: Mihkel Heidelberg, lahtine, 2012, G 5

Salaagent Bond põgeneb allveelaevalt selle torni kaudu. Tornis on algselt rõhk sama mis õhurõhk vee peal:  $p_0 = 100 \text{ kPa}$ . Pärast torni ja ülejäänud allveelaeva eraldava luugi sulgemist teeb ta seina sisse augu (vaata joonist), misjärel täitub torn osaliselt veega. Seejärel avab Bond torni laeluugi ja ujub koos vabaneva õhuga pinnale.



a) Kui paks on õhukiht, mis jääb torni enne torni laeluugi avamist ja pärast vee sissevoolamise lõppemist?

b) Kui suur ja mis suunas (üles või alla) on õhu ja vee poolt laeluugile avaldatav summaarne jõud enne avamist, kui veetase torni sees on jäänud paigale?

Luugi pindala  $S = 0,50 \text{ m}^2$ , veetase luugi kohal  $h = 25 \text{ m}$ , torni kõrgus  $s = 2,0 \text{ m}$ . Vee tihedus  $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$ , raskuskiirendus  $g = 9,8 \text{ m/s}^2$ .

**Ü198 Kauss ★★★**

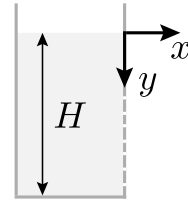
Autor: Taavi Pungas, lahtine, 2013, G 7

Silindrikujuline metallkauss massiga  $M = 1 \text{ kg}$  ja ruumalaga  $V_1 = 3 \text{ dm}^3$  ujub vannis. Mari teeb eksperimenti ja valab ühtlaselt  $t = 1 \text{ s}$  jooksul kõrguselt  $h = 1,5 \text{ m}$  kaussi kannutäie vett ruumalaga  $V_2 = 1,5 \text{ dm}^3$ . Ennustage eksperimenti tulemust: kas kauss läheb põhja või ei? Põhjendage oma ennustust arvutustega. Vee tihedus  $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$ .

**Ü199 Veejoad ★★★★★**

Autor: Mihkel Kree, lahtine, 2015, G 7

Vertikaalse silindrilise anuma seina sisse on paljudele erinevatele kõrgustele tehtud pisikesed augud, millest voolab välja vett. Anumasse valatakse aeglaselt vett juurde nii, et veetase anumal püsib muutumatuna kõrgusel  $H$ . Leidke, millisesse ruumipiirkonda saab anumast väljuv vesi jõuda ehk avaldage veejogade mähispinna võrrand  $xy$ -teljestikus. Eeldage, et erinevad veejoad üksteist ei mõjuta.

**Ü200 U-toru ★★★★★** Autor: Erkki Tempel, piirkonnavor, 2016, G 9

U-torusse ühtlase ristlõikepindalaga  $S$  on valatud vesi tihedusega  $\rho_v$ , nii et üle poole U-torust on veega täidetud ja kummagi täitmata osa pikkus on  $h$ . U-toru üks ots suletakse hermeetiliselt ning teise torusse valatakse aeglaselt õli kuni U-toru ülemise servani. Kui suur oli õli tihedus  $\rho_o$ , kui on teada, et lisatud õlisamba kõrgus oli  $l$ ? Atmosfäärirõhk on  $p_0$ .

# Vihjed

- V1** Nii pudelile kui veele mõjuvad täpselt samad jõud ning neid visatakse sama algkiirusega.
- V2** Antud olukorda on mugavam vaadelda rongiga kaasa liikuvas taustsüsteemis.
- V3** Autos istujad ei tunne külgsuunalist jõudu siis, kui summaarne jõud on tee pinnaga risti.
- V4** Hoovõturaja alumises otsas on rahakott omandanud teatud horisontaalse kiiruse. Edasi hakkab rahakott liikuma mööda paraboolset trajektoori, kuni see taas vastu mäe nõlva kukub.
- V5** Tikk hakkab poolkera pealt maha libisema siis, kui raskusjõu pinnaga paralleelne komponent ületab hõõrdejõu.
- V6** Fikseeritud  $h$  ja  $t$  puhul on nõlva kalle vähim siis, kui hõõrdejõud puudub.
- V7** Palli lennu kõrgus sõltub vastavale kõrgusele jõudmise aja ruudust.
- V8** a) Horisontaalsel teel peab kaubarong ületama takistava hõõrdejõu.  
b) Lisaks hõõrdejõule peab rong nüüd ületama ka raskusjõu.
- V9** Pall jaotab kahuritoru kaheks kambriks. Pärast vasakpoolse membraani purustamist hakkab vasakpoolses kambris olev gaas palli paremale poole suruma.
- V10** Kuna pall maandub kaldpinnale risti, siis liigub pall sellel hetkel nurgaga  $\alpha$  vertikaali suhtes. Seega tulistatakse pall kahurist välja samuti nurga  $\alpha$  all vertikaali suhtes ning pall põrkab kaldpinnalt tagasi sama nurga all.
- V11** Vastavalt Newtoni III seadusele on nööri tõmme mõlema mehe jaoks sama suur, kuid vastupidises suunas. Lisaks nööri tõmbele mõjub kummalegi mehele vastassuunas hõõrdejõud.
- V12** Hõõrdejõu tõttu kulutatud energia sõltub läbitud teepikkusest ja selle kaldest, potentsiaalse energia vahe sõltub kõrguse muutust.

- V13** Jõudes kukkumise madalaimasse punkti, on alpinisti potentsiaalne energia läinud üle vedru potentsiaalseks energiaks. Pannes vastava seose kirja, on võimalik leida nööri pikenemise  $x$ .
- V14** Nii Jukule kui ka Juhanile mõjub sama koefitsiendiga õhu hõõrdejõud, mis on raskusjõu poolt täielikult tasakaalustatud.
- V15** Piirjuhul läheb kogu Juku potentsiaalne energia hõõrdejõu poolt eraldatud soojusenergiaks.
- V16** Auto kineetiline energia kulub pidurdusjõu ületamiseks ning potentsiaalse energia muuduks.
- V17** Selleks, et leida tegelikku kuuli kõrgust Maa pinnast, võib rakendada energia jäävuse seadust kuuli laskmise hetkel ja trajektoori kõrgeimas punktis.
- V18** Koormisele mõjuvad kolm jõudu: niidi pinge, raskuskiirendus ja kesktõmbekiirendus. Lisaks peab resultantjõud olema risti nööriga, sest vastasel juhul peaks koormise kiirenemisel nööri venima või lühenema.
- V19** Poole pedaalipöörde jooksul peab ratturi poolt tehtav töö kompenseerima ratta massikeskme tõusmisest kaasneva potentsiaalse energia muudu.
- V20** Kõige kaugema viskekauguse jaoks on optimaalne viskenurk  $45^\circ$ . Viskekaugus sõltub pallile mõjuvast kiirendusest, mida saab omakorda leida, kasutades Archimedese jõudu.
- V21** Veepind võtab asendi, mis on risti sellele mõjuva resultantjõuga. Liikudes veoautoga seotud süsteemi, näeme, et resultantkiirendus on  $\vec{g} - \vec{a}$ .
- V22** Autole mõjuvad raskusjõud ja tee toereaktsioon. Silmuses püsimiseks ei tohi toereaktsioon kaduda. Kriitiline olukord tekib silmuse ülemises punktis, sest siis on auto kiirus vähim ning raskusjõud tõmbab autot maksimaalselt teest eemale.
- V23** Torust väljuv vesi liigub nagu vabalt langev keha horisontaalsuunalise algkiirusega  $v$ . Seega on veejuga parabooli kujuga, mille parameetrid saab jooniselt mõõta.

- V24** Kuul liigub mööda paraboolselt trajektoori, kusjuures kiiruse horisontaalne komponent püsib konstantne, st  $v_x = \text{Const} = v \cos \alpha$ , ning vertikaalne komponent on ühtlaselt kiirenev  $v_y = v \sin \alpha - gt$ .
- V25** Silindri impulsimoment ei muutu telje suhtes, mis läbib silindri ja pinna kontaktpunkte, sest hõõrdejõul puudub jõuõlg selle telje suhtes.
- V26** Liiga suure kiiruse korral hakkab veok tsentrifugaaljõu tõttu väliskurvis oleva serva suhtes ümber pöörama. Seega peab piirjuhul antud telje jaoks kehitiima jõumomentide tasakaal.
- V27** Jagunemise käigus peab säilima summaarne impulss ning energia. Osakeste kiirusi on mugavam vaadelda komponentide kaupa. Selleks võib võtta, et  $x$ -telg on molekuli esialgse suunaga paralleelne ning  $y$ -telg sellega risti.
- V28** Kokkupõrke käigus kehtib mõlema massi jaoks kangireegel. Lisaks kehtib kokkupõrge seni, kuni massid pöörlevad ümber kiige sama nurkkiirusega.
- V29** Vesiniku aatomi ioniseerimiseks peab elektroni kineetiline energia olema suurem kui  $E_0$ . Elektroni ja prootoni kokkupõrke käigus säilib nii summaarne kineetiline energia kui ka impulss.
- V30** Toru lõpus järsult pöörav vesi surub toru teatud jõuga külgsuunas. Antud jõud on leitav, kui vaadelda ajaühikus väljuva veehulga impulsimuutu siseneva veega võrreldes.
- V31** Kuna põrge on elastne, säilib põrke käigus kineetiline energia. Impulsi kohta sama aga ei saa öelda, sest põrke ajal mõjuvad kinnituspunktile jõud. Küll aga säilib süsteemis summaarne impulsimoment kinnituspunkti suhtes, sest põrke ajal on kinnituspunktile mõjuvate jõudude õlad nullid ning põrge toimub nii kiiresti, et raskusjõuga pole vaja arvestada.
- V32** Ratturile mõjuvad laskumisel kolm jõudu: mäest allaviiv raskusjõud, takistav hõõrdejõud ning tuuletakistus. Rattur on saavutanud lõppkiiruse, kui need jõud on tasakaalustunud.
- V33** Vaatamata sellele, et tundmatu kuuli mass ja vedru jäikus pole teada, võib neid ikkagi tundmatutena kasutada ning loota, et need lõppvastuses välja taanduvad.

- V34** Reisijale mõjub kolm omavahel ristiolevat kiirendust: raskuskiirendus, kesktõmbekiirendus ja joonkiirendus.
- V35** Niidis kaob tõmbejõud, kui raskusjõu niidisuunaline komponent saab võrdseks tsentrifugaaljõuga. Kuuli kiirus asendis 3 on leitav energia jäävuse seadusest.
- V36** Märkame, et kuna hõõrdejõud puudub, ei mõju süsteemile summaarset jõudu. Seega jääb klotsi ja palli summaarne massikese paigale.
- V37** Kuna suur keha liigub kahe pörke vahel teatud vahemaa võrra allapoole, ei toimu kokkupõrked iga  $t$  tagant vaid natukene tihedamalt. Selleks, et leida, missuguse impulsi kuulike suurele kehale üle kannab, tasub kokkupõrget vaadelda suure keha süsteemis. Eelduse  $m \ll M$  kohaselt on kokkupõrge võrreldav seinaga kokku põrkamisega.
- V38** Noole algkiirus on leitav lähteandmetest. Edasi peab nool tabama punkti koordinaatidega  $(200\text{ m}; -0,7\text{ m})$  alguspunkti suhtes. Selle jaoks saab kirja panna liikumisvõrrandi nii  $x$ - kui ka  $y$ -koordinaadi jaoks.
- V39** Olukorda on mugav vaadelda autoga kaasa kiirenevas taustsüsteemis. Sellisel juhul rakendub autole kuus jõudu ning peab kehtima jõudude ning jõumomentide tasakaal.
- V40** Latile mõjub igas punktis hõõrdejõud, mis on vastupidine selle punkti liikumissuunale. Kogu mingile osale mõjuv hõõrdejõud on seega võrdeline selle osa pikkusega. Lisaks on teada, et hõõrdejõud üritavad takistada nii lati kulgliikumist kui ka selle pöörlemist.
- V41** Õõnsusega kera saab vaadelda positiivse tihedusega täidetud kera ja õõnsuse suuruse negatiivse tihedusega kera superpositsioonina. Sellisel juhul saab mugavalt kirja panna jõumomentide tasakaalu mõlema stsenaariumi jaoks.
- V42** Lihtsuse huvides tasub pallide kiiruse komponentide järgi vaadelda. Vertikaalne komponent  $v_z$ , horisontaalkomponent pikki jalgpallureid ühendavat sirget  $v_y$  ning risti selle sirgega  $v_x$ . Kokkupõrke hetkel peab risti jalgpallureid ühendava sirgega läbitud vahemaa mõlemal pallil sama olema.

- V43** Esimesena on vaja leida, missugune on keermete pinnanormaali ja pöörlemistelje vaheline nurk  $\alpha$ . Selleks on mugav vaadelda mutrivõtme pinna jaotust. Selleks, et mutreid saaks kõvasti kinni keerata, peab hõõrdejõud tasakaalustama keermete suunas mõjuva jõu komponendi.
- V44** Paneme tähele, et niidi pinge alumises nööris on kaks korda väiksem kui ülemises nööris. Selles saab veenduda, kui vaadelda alumisele plokile mõjuvaid jõudusid. Lisaks saab mõlema nööri jaoks kirja panna nende venimatuse tingimuse.
- V45** Auto taustsüsteemis mõjub auto massikeskmele jõud  $Ma$ , kus  $a$  on auto kiirendus. Lisaks mõjub tagaratastele hõõrdejõud ning mõlemale rattale toereaktsioon. Ülesande eelduste kohaselt peab mõlema poolperioodi jooksul kehtima jõudude ja jõumomentide tasakaal.
- V46** Kildude koguimpulss on null, seega moodustavad impulsivektorid kolmnurga, mille sarnasustegurid on võimalik kildude liikumissuundadest taastada. Sarnaselt saab toimida kildude kineetilise energia ja libisemiskaugusega.
- V47** Juhul, kui süsteemi massikeskme kõrgus on  $x(t)$ , siis Newtoni II seaduse kohaselt  $M\ddot{x}(t) = F - Mg$ , kus  $M$  on süsteemi kogumass ja  $F$  kaalu näit. Seega taandub ülesanne  $x(t)$  leidmisele liivakella töörežiimis.
- V48** Üks võimalus sisemise silindri kiirenduse leidmiseks on rakendada virtuaalse nihke meetodit. Selle jaoks tuleb vaadelda, kuidas muutub süsteemi kineetiline ja potentsiaalne energia siis, kui sisemine silinder kerkib vahe-maa  $x$  võrra. Olles avaldanud süsteemi koguenergia  $x$  kaudu, võib sellest tuletise võtta ning võrdsustada selle 0-ga.
- V49** Vastu maapinda kukkudes jääb kast hetkeliselt paigale ning koormis hakkab võnkuma ümber uue tasakaaluasendi ehk ümber punkti, kus vedru pinge tasakaalustab koormisele mõjuva raskusjõu. Järgneva liikumise käigus on kõige kriitilisem punkt see, kus koormis on kõige kõrgemas punktis. Sellisel juhul on kastile mõjuva vedru jõud maksimaalne.
- V50** Punkti  $B$  kiirust on võimalik leida, kasutades varraste venimatust ning asjaolu, et  $A$  on fikseeritud. Punkti  $B$  kiirenduse  $AB$ -sihilist komponenti saab leida kesktõmbekiirenduse kaudu ning kiirenduse suuna määramiseks on kasulik minna kiirusega  $\vec{v}$  liikuvasse taustsüsteemi.



- V51** Kuna voltmeetrit on ühesugused, võib need asendada takistustega  $R$ .
- V52** Jooniselt näeme, et äärmised takistid on lühistatud, mistõttu need mõõteriistade näitu ei mõjuta.
- V53** Kuigi pingellika pinge ja lampide takistused pole teada, võib neid kasutada muutujatena ja vaadata, kas need taanduvad lõppvastuses välja.
- V54** Mõlema kontuuri jaoks saab rakendada Ohmi seadust või Kirchhoffi seadusi.
- V55** Takistuse leidmiseks tasub tetraeedri pinna jaotus joonistada ning ära kasutada sümmeetriat.
- V56** Sümmeetria kaalutlustel saab skeemis sama potentsiaaliga punkte kokku ühendada.
- V57** Kogutakistuse määramist lihtsustab skeemi kavalam ümber joonistamine.
- V58** Kuna kondensaatorid on enne lüliti sulgemist laadimata, on ka pinge nende klemmidel 0.  
Pärast pika aja möödumist on kondensaatorite laeng jõudnud stabiliseerida ehk vool läbi kondensaatorite on 0. Teisisõnu võib kondensaatorid efektiivselt skeemist lahti ühendada.
- V59** Asjaolu, et voltmeeter näitab  $\frac{U}{2}$ , vihjab kondensaatorite jadaühendusele  $C$  ja  $D$  vahel.
- V60** Esimesel tekstis kirjeldatud juhul on kondensaatori pinge elektriskeemi siselülitamise hetkel 0 V, sest lüliti "väljasendis" on takisti ja kondensaator jadamisi ühendatud. Teisel juhul on kondensaatori pinge koheselt pärast vooluallika polaarsuse muutmist 9 V. Nende teadmistega saab leida takisti pinge mõlemal juhul ja kirja panna vastavad tingimused takisti läbipõlemise ja mitte läbipõlemise jaoks.
- V61** Peegelsümmeetria tõttu ülemises ja alumises takistis ( $R_2$  ja  $R_4$ ) vool puudub.

- V62** Takistid saavad omavahel olla kas kolmnurk- või tähtühenduses. Ampermeeter ei saa olla otse väljundklemmide vahele lülitatud, sest siis põleks see vastavale klemmipaarile pinge rakendamisel läbi. Samuti ei saa see olla ühegi takistiga rööbiti lülitatud, sest siis ei läbiks vastavat takistit kunagi vool ning sisuliselt tähendaks see takisti asendamist null-takistusega.
- V63** Elektriskeemi käitumisest arusaamiseks tasub skeem selgemalt ümber joonistada, nii et ampermeeter on asendatud juhtmega ja voltmeeter lihtsalt kõrvaldatud.
- V64** Eesmärk on leida elektriskeem, kus igale lambile langeb viiendik klemmipingest. Mõistlik on kõigepealt proovida võimalikult lihtsaid korrapäraseid lampide konfiguratsioone. Näiteks saab lambid asetada rööpühendusse, kus igas harus on kas 1, 2, 3, 4, 6 või 12 lampi.
- V65** Kuna tegemist on jadaühendusega, siis on voolutugevus läbi kõikide vooluelementide sama. Lisaks peab pingelang üle kõikide vooluelementide olema 0.
- V66** Kuna elektriskeemis on mitu patareid ja vooluallikat, tuleb Kirchhoffi seadused ettevaatlikult iga kontuuri jaoks kirja panna. Juhul, kui lüliti on suletud, on vooluallikas efektiivselt lühistatud ning ülejäänud süsteemi järelt ei mõjuta.
- V67** Takistuste leidmiseks tasub kõik  $1\ \Omega$  takistuste kombinatsioonid läbi vaadata ning süstemaatiliselt valed konfiguratsioonid elimineerida.
- V68** Ülesandes peab käsitlema kahte juhtu: a) kui mõõtepunkt ei asu vaguni rataste vahel ja b) kui mõõtepunkt asub vaguni rataste vahel. Mõlemal juhul käitub tekkiv elektriskeem isemoodi.
- V69** Paneme tähele, et sümmeetria tõttu on lampide 1 ja 4 otspunktide potentsiaalid võrdsed.
- V70** Oluline on tähele panna, et diodidel saab pärioolu korral pingeks olla ainult 1,0 V. Tasub vaadata, kas rohkem kui ühel diodil saab üldse vastava skeemi korral selline pinge olla.

- V71** Et ampermeetrite sisetakistus on 0, siis võime need lühistada: kõigis nendes tippudes, kuhu viivad ampermeetrid, on potentsiaalid võrdsed. Sümmeetria tõttu peab see potentsiaal jääma täpselt patareiklemmide potentsiaalide vahepeale, seega on igale takistile rakendatud pinge 3 V.
- V72** Pärast lüliti avamist eraldub kogu energia kondensaatorilt lambis soojuseks. Lisaks on kogu vabanev soojusenergia võrdne patarei kogutööga.
- V73** Kirchhoffi esimese seaduse põhjal peab suvalise pinge ja voolutugevuse korral kehtima  $V = U - IR$ , kus  $V$  on pinge türistoril. Kandes vastava funktsiooni volt-amperkarakteristikule on näha, et mingi pinge  $U$  korral on  $I$  ja  $V$  jaoks kuni kolm lahendit, kusjuures negatiivse tõusuga punkt ei ole stabiilne, kuna vastaks negatiivsele takistusele. Antud informatsiooniga on võimalik määrata, kuidas türistorit läbiv vool muutub pingeallika pinge tõstmisel.
- V74** Kuulikesele mõjub nii raskusjõud kui ka elektrostaatiline jõud. Nende tulemusena hakkab kuul konstantse kiirendusega vertikaalselt üles liikuma.
- V75** Plaatide vahel mõjub elektronile elektrivälja poolt allapoole suunatud kiirendus. Seega on elektroni kiirus plaatide vahelisest ruumist väljumisel minimaalne siis, kui elektroni trajektoor möödub alumise plaadi parema otsa lähedalt.
- V76** Väikeste  $y$ -suunaliste võnkumiste jaoks on kasulik vaadata, missugune jõud kerale mõjub, kui seda väikse distantssi  $y$  võrra tasakaaluasendist eemale nihutada.
- V77** Elektrivälja lisamisel nihkub kuuli tasakaaluasend kas üles või alla, sõltuvalt elektrivälja suunast. Seega on igat poolperioodi mõistlik eraldi vaadata, sest selle raames liigub kuul ümber fikseeritud tasakaaluasendi.
- V78** Vastuse leidmiseks ei pea leidma täpset avaldist koonuse tipu potentsiaali jaoks, vaid piisab võrdelisuse seaduse leidmisest koonuse laengu ja lineaarmõõtmega suhtes. Potentsiaalide jaoks kehtib ka superpositsiooniprintsiip ehk lõplik potentsiaal on esialgse koonuse potentsiaali ja äralõigatud koonuse potentsiaali vahe.

- V79** Kuivõrd potentsiaal sõltub ainult  $x$ -koordinaadist, on elektriväli kõikjal  $x$ -telje sihiline ning impulsi  $y$ -komponent säilib. Täielik “sisepeegeldus” toimub siis, kui positiivse  $x$ -suunaga seotud kineetiline energia on suurem kui  $qU$ .
- V80** Metallplaati sisse viies kondensaatori plaatide laeng säilib, aga pinge muutub. Kuna metallplaadi sees elektrivälja ei ole, on pingelang üle kondensaatori kaks korda väiksem, sest elektriväljaga täidetud piirkond väheneb  $d/2$  võrra.
- V81** Mahtuvuse leidmiseks võib kondensaatorit vaadelda kui kahte jadamisi ühendatud dielektrikuga kondensaatorit. Selleks asetame mõttelise metallplaadi dielektrilise kihi eralduspinnale. Eralduspinna laengu leidmiseks võib rakendada Gaussi teoreemi mõttelise “karbi” jaoks, mis hõlmab piirpinda.
- V82** a) Seni kuni üks laeng on piirkonnas  $x > 0$  ning teine piirkonnas  $x < 0$ , on pulgale mõjuv summaarne jõud 0; see tähendab, et pulk liigub konstantse kiirusega. Kui mõlemad laengud on piirkonnas  $x > 0$ , mõjub pulgale elektrivälja poolt summaarne konstante jõud.  
b) Antud juhul sõltub pulgale mõjuv jõud lineaarselt pulga nihkest  $x$ .
- V83** Metallkeradele indutseeritakse elektrivälja poolt võrdsed ja vastasmärgilised laengud  $\pm q$ ; kuivõrd traat on peenike, siis võime ignoreerida sellel olevaid laenguid. Kuna metallkuulid käituvad nagu elektriline dipool, on süsteem tasakaalus siis, kui metalltraat on paralleelne elektriväljaga. Et traat on juhtivast materjalist, siis on süsteem ekvipotentsiaalne.
- V84** Elektriväli indutseerib kuulidele vastasmärgilised laengud, mis tagavad, et kuulide potentsiaalid on võrdsed.
- V85** a) Kuulide ruutkeskmine kiirus on maksimaalne siis, kui elektriline potentsiaal on minimaalne, st siis, kui nõõride vahel on sirgnurk. Rakendades sümmeetriat ja impulsi ning energia jäävust, on võimalik antud olukorras kuulide kiirused leida.  
b) Paneme tähele, et  $A$  kiireneb sümmeetria tõttu vertikaalselt. Peale kuulide vahelise tõukejõu tuleb arvestada ka niidi pingega.
- V86** Suurima võimaliku koormise massi korral on õhupalli keskmine tihedus võrdne õhu tihedusega.

- V87** Nii Maal kui ka Marsil peab õhupallile mõjuv üleslükkejõud kompenseerima koormise raskusjõu. Üleslükkejõud sõltub õhu tihedusest ning õhu tihedus on leitav ideaalse gaasi olekuvõrrandist.
- V88** Ideaalse gaasi olekuvõrrandiga on võimalik määrata, mis õhu ruumalaga avariiventiil avaneks. Õhu ruumala muutust on aga võimalik avaldada vajaliku vee tiheduse muudu.
- V89** Kuna balloon on silindrikujuline, on pinged selle telje sihis ning sellega ristuvast sihis erinevad. Mõlemal juhul peab ballooni seinas olev jõud tasakaalustama balloonisisese gaasi rõhu põhjustatud jõu.
- V90** Kerisele visatud vee tekitatud lisarõhk on leitav ideaalse gaasi olekuvõrrandist. See rõhk mõjub ühtlaselt üle kogu ukse laiuse, seega tuleb uksele mõjuva jõumomendi arvutamisel võtta jõu õlaks pool ukse laiusest.
- V91** On selge, et rehvi pumpamisel on rakendatav jõud võrdeline rehvis oleva rõhuga (õhurõhu suhtes). Rakendades jõudude tasakaalutingimust rehvi kokkupuutepinnale maaga, on võimalik leida kokkupuutepinna pindala, millest saab omakorda avaldada rehvi deformatsiooni ning rattarehvi ruumala muudu. Rattarehvi ruumala muutust tingitud rehvi siserõhu muutust on võimalik avaldada ideaalse gaasivõrrandiga.
- V92** Enne ja pärast jää sulamist saab kasutada ideaalse gaasi olekuvõrrandit. Lisaks saab aine massi jäävusest leida gaasi ruumalamuudu.
- V93** Õhupalli lendu tõusmise piiril peab kuumaõhupalli keskmine tihedus olema võrdne välisõhu tihedusega.
- V94** Sügavale vee alla sukeldamisel surub veesamba rõhk palli kokku. Pall hakkab ise põhja vajuma, kui tema ruumala väheneb nii palju, et pallile mõjuv üleslükkejõud saab väiksemaks raskusjõust ehk palli keskmine tihedus muutub väiksemaks vee tihedusest.
- V95** Klaasi sees olevate õhu molekulide arv jääb samaks, aga ruumala suureneb. Seega tekib klaasi sees veepinna kohal alarõhk. Teisest küljest väheneb paberikohal veesamba kõrgus, mis vähendab hüdrostaatilist rõhku. Tekkinud summaarne alarõhk peab kompenseerima paberikohal raskusjõu.

- V96** Antud ülesandes on kolm tundmatut: paisupaagis oleva õhu moolide arv, paagi esialgne rõhk ning ruumala. Lisaks on tekstis kirjeldatud kolme tingimust, mida paak täitma peab; igaühe jaoks saab kirja panna ideaalse gaasi olekuvõrrandi.
- V97** Anuma tugevuse määrab ilmselt seina paksus. Gaasi rõhust tingitud mehaaniline tõmbepinge anuma seintes ei tohi ületada väärtust  $\sigma = 450 \text{ MPa}$ . Tõmbepinge leidmiseks tasub anum mõtteliselt jaotada kahes poolsfääriks ning vaadelda neile mõjuvate jõudude tasakaalu.
- V98** Tasub vaadata, kuidas muutub õhupalli temperatuur, kui sinna teatud ruumala  $V$  õhku sisse pumbata. Temperatuuri leidmiseks saab rakendada termodünaamika esimest seadust.
- V99** Selleks, et kuumaõhupall õhuks püsiks, peab sees olev õhk olema piisavalt madala tihedusega, et üleslükkejõud tasakaalustaks kuumaõhupalli raskusjõu. Kui õhupalli sees on õhk temperatuuril  $T$ , siis õhupalli pooridest imbub välja soe õhk temperatuuril  $T$ , samas kui õhupalli siseneb õhk temperatuuril  $T_0$ . Propaani põletamine peab vastava soojuskao kompenseerima.
- V100** On võimalik näidata, et seni, kuni heelium pole võtnud enda alla veel kogu õhupalli ruumala, püsib tõstejõud konstante.
- V101** Selleks, et kiirtekimp laieneks ja jääks paralleelseks, pidi optik paigutama nõguslääts kumerlääts ette niimoodi, et läätsede fookused ühtiksid nõguslääts ees. Fookuste ühtimises saab veenduda, kasutades lääts valemite ning arvestades, et paralleelse kiirtekimbu kujutis asub lõpmatuses.
- V102** Pärast selge joonise joonestamist taandub ülesanne geomeetria peale.
- V103**  $A$  asukoha leidmiseks võib kasutada lääts valemite.
- V104** Ainus muutus kiire teekonnas toimub segu sees. Murdumisnäitaja muutuse tõttu hakkab kiir segus teise nurga all liikuma. Vastavat nurga muutust ning seejärel ka  $y$ -suunalist nihet on võimalik leida Snelli seaduse abil.
- V105** Selleks, et kaks valgusallikat sama kujutise annaksid, peab üks olema näiline ja teine tegelik.

- V106** Objekti kaugus läätsest on üheselt ära määratud sellega, et lääts on objektist ja kujutisest ühel kaugusel. Kiirte edasise käigu jaoks tuleb mõlemat läätsede poolt eraldi vaadata.
- V107** Kärbsse kiiruse leidmiseks on kasulik vaadelda, kuidas kärbsede poolt aja  $t$  jooksul läbitud lõik pikkusega  $vt$  läbi läätsede välja venib.
- V108** Tuttavad märkavad üksteist sellel hetkel, kui kiir, mis saab alguse ühest inimesest ning pörkab vastu peegli paremat nurka, jõuab teise inimeseni. Antud olukorra jaoks saab koostada joonise ning vastavad tingimused kirja panna.
- V109** Ülesande lahendamiseks tasub vaadelda kõige äärmist kiirt, mis kumerläätsesse siseneb, ning abijoontega määratleda, kuidas vastav kiir optilist süsteemi läbib. Seejärel saab ära kasutada sarnaseid kolmnurki.
- V110** Antud juhul tasub vaadelda kõige äärmisi süsteemi sisenevaid kiiri.
- V111** Pikas optilises kius jäävad levima vaid sellised kiired, mille jaoks toimub südamikuga ja katte lahtuspinnal täielik sisepeegeldumine.
- V112** Pärast mõningast geomeetriat selgub, et  $A$  on kahe vasakul oleva läätsede fookuses; seega on punktist  $A$  tulevad kiired pärast vastavate läätsede läbimist paralleelsed.
- V113** Nõguslääts tekitab esemest näiva kujutise ning kumerlääts tekitab näivast kujutisest tõelise kujutise. Kuna kumerläätsede asukoht on teada, saab tagurpidi lähenedes rekonstrueerida näilise kujutise asukoha.
- V114** Nurga  $\varphi$  leidmiseks tuleb vaadelda kiirt, mis siseneb lõiku  $AB$ .
- V115** Läätsede asukoha leidmiseks tasub vaadata geomeetriliselt omapäraseid kiiri ja kuidas need läbi läätsede murduvad. Selleks sobivad näiteks kiired  $AB$ ,  $AA'$  ja  $BB'$ .
- V116** Paneme tähele, et valemi järgi keskkonna murdumisnäitaja suurenedes, kuid läätsede murdumisnäitaja samaks jäädes läätsede fookuskaugus suureneb. Seega on ainus viis, kuidas valguskiired saaksid ka pärast anuma vett täis valamist samas punktis koonduda, see, kui vees peegelduksid valguskiired põhjas olevalt peeglist ja seejärel koonduksid samas punktis, kus enne.

- V117** Läätsse fookuskauguse leidmiseks tasub vaadelda valguskimpu, mille suund on paralleelne optilise peateljega. Sellisel juhul tekitavad kiired näilise kujutise läätsse fookusesse.
- V118** Kui peegeldavate silindriliste seinte asemel oleks kaks tasapeeglit, siis tekitab optilise peateljega risti punktallika kujutiste lõpmatu jada (peegeldus, peegelduse peegeldus jne). Iga peegeldus tekitab läbi läätsse ekraanil uue kujutise. Tasapeeglite juhtu on võimalik ka silindrilise peegli peale laiendada.
- V119** Mõlemad teravustatavuse asendid on üksteise suhtes sümmeetrilised. See tähendab seda, et kui esimeses asendis on läätsse kaugus esemest  $a$  ja sensorist  $b$ , siis teises asendis on vastavad kaugused ümber vahetatud.
- V120** Algselt paralleelsed kiired koonduvad pärast läätsse läbimist fokaaltasandis. Seega on võimalik esimese läätsse fokaaltasand rekonstrueerida, teades fookuse asukohta ja kahe kiire löikepunkti.
- V121** Poolkera kumera pinna keskosa võib vaadelda omaette õhukese läätsena, mille fookuskaugus ja kaugus paberi pinnast määravad kujutise suurenemine. Läätsse fookuskauguse leidmiseks on kasulik vaadelda valguskiirt, mis liigub paralleelselt optilise peateljega. Pärast läätses murdumist koondub kiir fookusesse.
- V122** Juku näo kujutise leidmiseks tasub kõigepealt vaadelda, kuidas Juku silmad peeglites kujutisi tekitavad. Kuna peeglid on üksteise suhtes täisnurga all, on selge, et otse nurgapeegli nurka vaadates on näha kolmandat järku kujutis.
- V123** Esimesena tuleks alustada läätsse keskpunkti leidmisega, seejärel paika panna läätsse orientatsioon ning fookus. Keskpunkti leidmiseks tasub vaadata kiiri, mis puutuvad nii ringi kui ka ellipsit.
- V124** Tekitagu lõpmatuses asuv objekt läbi kumerläätsse ja nõgusläätsse vastavalt kujutised  $A'$  ja  $A$ . Kaamera vaatenurk on leitav, vaadates olukorda, kus  $A$  asub valgustundliku elemendi ääres. Sellisel juhul on kaamera vaatenurk  $A'$  poolt kaetav nurk kumerläätsse keskpunktist vaadatuna.



- V125** Tähistame märgitud punkti  $A$ -ga ja silindri keskpunkti  $O$ -ga. Antud ülesande kontekstis tasub vaadelda funktsiooni  $f(\alpha) = \delta$ , mis kirjeldab punktist  $A$  alguse saanud kiire silindrist väljumise nurka  $\delta$  kiire  $AO$  suhtes funktsioonina stardinurgast  $\alpha$  kiire  $AO$  suhtes. Silindri algasendit kirjeldab  $f(\alpha) = 0$  kolme lahendiga. Lisaks on teada, et  $f(\alpha) = 15^\circ$  on lahenditeta.
- V126** Kiirendamise ning pidurdamise käigus on rongi keskmine kiirus  $v_{\max}/2$ .
- V127** Tasub vaadata, kuidas heli poolt läbitav vahemaa muutub vile laskmise alguses ja lõpus.
- V128** Peale teejupi, kus rong sõidab kiirusega 18 km/h, tulevad rongil ajakaod ka teelõikudel, kus rong pidurdab ja kiireneb.
- V129** Nii kiirabiauto lähenemise kui ka kaugenemise jaoks saab kirja panna Doppleri seaduse. Lisaks on sageduste suhe üheselt määratud asjaoluga, et kiirabiauto sireeni toon langes väikese tertsi võrra.
- V130** a) Kõige suurem kokkupõrke oht on siis, kui esimene on jõudnud täielikult seiskuda (selles saab veenduda, kui liikuda tagumise autoga kaasa liikuvasse taustsüsteemi).  
b) Kahe liikuva objekti suhtelist liikumist on kasulik uurida liikuvast taustsüsteemis.
- V131** Vaadeldes tuule ja jalgratturi kiirusi vektoritena, on võimalik geomeetriselt konstrueerida vastavad tekstis toodud tingimused ning geomeetria põhjal tuule kiirus välja arvutada.
- V132** Tekkival seisulainel peavad olema sõlmed mõlemas keele võnkumise osa otspunktis. Viiuli keelt puudutades peab ka keele puutepunkt sõlmpunkt olema.
- V133** Näitleja liikumist on mugav vaadelda kettaga seotud taustsüsteemis. Sellisel juhul pöörleb maapind nurkkiirusega  $\frac{2\pi}{T}$  ning näitleja kõnnib ketta peal kiirusega  $v$ .
- V134** Palli lendu on mugav vaadelda laboratoorses taustsüsteemis. Sellisel juhul liigub pall pärast viset ühtlaselt ning sirgjooneliselt, kusjuures selle kiiruse vertikaalsihiline komponent on  $v$  ning horisontaalsihiline komponent  $\omega R$ .

- V135** Selleks, et autorehvid kuluksid vähimal määral, peavad rattad pöörama ühtse kehana. Kuna rattad ei libise, asub pöörlemiskese rataste teljel.
- V136** Kui hall kamm liigub ühe pii võrra, on uus pilt identne esialgsega ning järelilikult on tume laik liikunud ühe "lainepikkuse" võrra.
- V137** Mõõdetud lainepikkuste erinevus tuleneb mõõdetud punktide kiiruste vahet vaateleja suhtes. Kui Päikese pöörlemise nurkkiirus ekvaatoril on  $v$ , siis üks ekvaatori ots eemaldub vaatelejast kiirusega  $v$  ja teine läheneb kiirusega  $v$ . Antud kiirusele vastav lainepikkuse muut on leitav Doppleri nihkest.
- V138** Liikudes süsteemi, mis pöörleb nurkkiirusega  $\omega/2$ , on võimalik olukorra sümmeetriat ära kasutada.
- V139** Leviaegade suhtelised erinevused on väikesed, seega võib lugeda, et helikiirus on hulga suurem tuule kiirusest. Heli levikut on kasulik vaadata tuulega seotud taustsüsteemis.
- V140** Ülesandes antud algandmed kirjeldavad kaatri liikumist tuule suhtes. See-ga tasub olukorda vaadelda tuulega kaasa liikuvast taustsüsteemis.
- V141** Magnetväljas hakkab osake liikuma mööda ringjoont, mille raadius on leitav jõudude tasakaalust. Maksimaalse nurga korral väljub osake magnetri-bast eraldusjoonega paralleelselt.
- V142** Elektrivool generaatori mähises (juhtmekontuuris) tekib elektromagnetili-se induktiooni toime ning seda protsessi kirjeldab Faraday seadus  $\varepsilon = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$ , kus  $\varepsilon$  on voltides mõõdetav elektromotoorjõu suurus ning  $\Delta\Phi$  on juhtmekontuuri läbiva magnetvoo muutus, mis toimub ajavahemiku  $\Delta t$  jooksul.
- V143** Magnetväljas ringliikumisel käitub Lorentzi jõud kesktõmbejõuna. Analoog-selt on teisel juhul kesktõmbejõud kuloniline jõud kahe kuuli vahel, kus-juures peab tähelepanu pöörama sellele, et kuulid tiirlevad ümber ühise massikeskme.
- V144** Osakesed hakkavad tsüklotronis liikuma päripäeva mööda järjest suurene-va raadiusega poolringjooni. Osake väljub tsüklotronist, kui tema trajektoo-ri raadius kasvab sama suureks tsüklotroni raadiusega  $R$ .

- V145** Osakeste kiirus magnetvälja sisenedes on avaldatav energia jäävusest. Magnetväljas algab ringliikumine, kusjuures detektorini jõutakse pärast poole ringjoone läbimist. Teisisõnu on detekteeritud  $x$ -koordinaat  $2R$ , kus  $R$  on ringjoone raadius.
- V146** Laeng sooritab magnetväljas ringliikumist; mida suurem on magnetväli, seda suurem on ringi raadius. Enne ja pärast ringliikumist on osakese trajektoor sirge, kusjuures ülemine ringjooneks on ilma murdepunktita, st sirgjooned on ringjoone puutujaks.
- V147** Kuulikesele mõjuvad raskusjõud, niidi pinge ning Lorentzi jõud. Kuulike püsib ringjoone kaare kujulisel trajektooriga seni, kuni Lorentzi jõud ja niidi pinge ületavad ülejäänud jõudude niidisihilise komponendi. Vastav kriitiline nurk on leitav energia jäävuse seadusest ning jõudude tasakaalust.
- V148** Elektronid hakkavad liikuma mööda  $z$ -teljelise heeliksi, kusjuures heeliksi raadius on võrdeline  $x - y$  suunalise kiirusega. Seega liiguvad kõik elektronid  $x - y$  tasandis mööda ringjoont.
- V149** Selleks, et süsteem oleks tasakaalus, peab mutter asuma täpselt nööri kinetuspunkti all.
- V150** Jõu ülekanne toimub kangi põhimõttel, kus summaarne jõumoment pöördteelje suhtes on võrdne nulliga. Vastavad jõumomentide tasakaalu saab kirja panna nii käepideme kui ka lõiketerade jaoks.
- V151** Ülemine klots ei libise, kui kiirendusest põhjustatud jõud ei ületa seisuhõõrdejõudu. Kui ülemine klots ei libise, võib kahte klotsi käsitleda ühtse kehana, mille kiirendus võib maksimaalselt olla  $\mu_2 g$ .
- V152** Hõõrdevaba ploki korral on pinge põhikõies jääv, muutub vaid selle suund. Lisaks peab tasakaalutingimuse rahuldamiseks ploki kinnituse pinge olema võrdne ploki läbiva põhikõie pingete summaga. Lahendamise jaoks on mugav alustada päästja poolsest otsast ning öelda, et vastav tõmbejõud on  $F$ .
- V153** Mõistlik on nööri pinge jaotada horisontaalseks ja vertikaalseks komponendiks  $T_x$  ja  $T_y$ . Sellisel juhul kasvab Juku saabastele mõjuv toereaktsioon  $T_y$  võrra ning kelgule mõjuv toereaktsioon kahaneb  $T_y$  võrra. Minimaalse kelnööri nurga puhul on Jukust tulenev hõõrdejõud võrdne kelgu hõõrdejõuga.

- V154** Silindril peab kehtima nii jõudude kui ka jõumomentide tasakaal. Jõumomentide tasakaalu on mugav vaadelda telje suhtes, mis läbib toetuspunkti, sest siis on hõõrdejõu ja toereaktsiooni jõuõlg 0.
- V155** Kuna tagumine ratas on õhku tõusmas, siis sellele jõude ei rakendu. Ainsad jalgrattale mõjuvad jõud on raskusjõud ning jõud esiratta ja maapinna kontaktpunktis. Lisaks on teada, et peab kehtima nii jõudude kui jõumomentide tasakaal iga punkti suhtes.
- V156** Nööri mõjuvad kolm jõudu: raskusjõud, nööri toereaktsioon ning hõõrdejõud. Selleks, et tasakaalutingimusi kirja panna on mugav vaadelda õhus rippuvat osa ja plaadil lebavat osa eraldi. Seejuures peab arvestama ka nööri ja plaadi kokkupuutepunktis mõjuva nööri pingega.
- V157** Traadile mõjuvad kolm jõudu: raskusjõud ja traatide kontaktpunktis ning traadi ja silindri puutepunktis mõjuvad rõhumisjõud. Selleks, et traat tasakaalus oleks, peavad nende jõudude pikendused lõikuma ühes punktis (vastasel korral mõjuks kahe jõu lõikumispunkti suhtes kolmas jõud traadile nullist erineva jõumomendiga ja traat hakkaks liikuma). Stabiilsuse analüüsis saab tähele panna, et kui "katus" pöörleb tervikuna, siis selle massikese liigub mööda ringjoont.
- V158** Pulgale mõjuvad kolm jõudu. Kuna niiti tõmmatakse aeglaselt, võib eeldada, et süsteemis kehtib nii jõudude kui ka jõumomentide tasakaal. Jõumomentide tasakaalu tõttu peavad jõudude rakendussirged lõikuma ühes punktis.
- V159** Maa tiirlemise tõttu erineb Maa täispöörete arv aastas keskmiste päikese-ööpäevade arvust ühe võrra.
- V160** Peale energia jäävuse kehtib ka impulsimomendi jäävus Maa keskpunkti suhtes.
- V161** Maa jõudude tasakaalust on võimalik avaldada Päikese mass ning Päikese nurkdiameetrist Päikese raadius.
- V162** Kasutades trossi pinget tundmatuna, saab mõlema satelliidi jaoks kirja panna jõudude tasakaalu.

- V163** Geostatsionaarse orbiidi raadius on leitav jõudude tasakaalust ning orbiidi perioodist.
- V164** Vee jäätumisel eralduv soojushulk peab täpselt ära kuluma jää soojendamiseks.
- V165** Vee jäätumisel eraldunud soojushulk kulub alajahtunud vee soojendamiseks jäätumistemperatuurini.
- V166** Ühest küljest on hõõrdumisest tekkiv soojushulk hõõrdejõu ja toru ääre poolt läbitud vahemaa korrutis. Teisest küljest on soojushulk avaldatav toru soojusmahtuvusest ja lõpptemperatuuri ning algtemperatuuri vahest.
- V167** Jäätükk koos mündiga hakkab uppuma siis, kui selle keskmine tihedus on võrdne vee tihedusega. Jää sulamiseks vajaminev energia saadakse vee jahutamisel eraldunud energiast.
- V168** Nafta jahtumisel eraldunud soojus kulub vee soojendamiseks.
- V169** Aja  $\Delta t$  jooksul peab koolimajja siseneva ja väljuva vee soojushulkade vahe olema võrdne soojuskadudega läbi seinte.
- V170** Suurima kiiruse saavutab veeaur siis, kui vesi on kuumutatud keemistemperatuurini. Sellisel juhul kulub kogu küttekeha võimsus vee aurustamiseks.
- V171** Vesiradiaatori soojusvahetust toaga kirjeldavat võrdetegurit on võimalik leida nimivõimsuse kaudu. Lisaks soojusvahetusele saab radiaatori võimsust siduda radiaatorit läbiva vee siseenergia kaoga.
- V172** Lisaks läbi atmosfääri tulevale päikesekiirgusele tuleb arvestada atmosfääri poolt kiiratava võimsusega. Juhul, kui Maa pinnalt jõuab atmosfääri kiirgus võimsusega  $P_m$ , siis atmosfäär kiirgab Maast välja ja Maale sisse kiirgust võimsusega  $\frac{P_m}{2}$ .
- V173** Soojusvahetus eesruumi ja õue vahel peab olema sama suur kui soojusvahetus eesruumi ja kaupluse vahel. Seega püsib päeval ajal eesruumi temperatuur  $\frac{T_0+T_1}{2} = 12^\circ\text{C}$  ning eesruumi ehitusega vähenesid ukse lahtikäimisest tingitud soojuskaod 2 korda.

- V174** Et korterid on identsed ning nende sisetemperatuurid on samad, peavad ka soojuskaod läbi nende seinte olema võrdsed. Seega annab katlast tulev kuum vesi poole oma soojusest ära ülemises korteris ja poole alumises. Lisaks on radiaatori poolt ära antav soojusvõimsus võrdeline torude keskmise temperatuuriga ning radiaatori ribide kogupindalaga.
- V175** Alguses on lisanduva vee temperatuur võrdne soojendis oleva vee temperatuuriga ja vett välja ei voola; seega muutub vee temperatuur ainult soojendilt saadava soojuse tõttu. Stabiilsel temperatuuril on ajaühikus väljavoolava vee soojendamiseks kulunud energia võrdne soojendi võimsusega.
- V176** Selleks, soojustuskihtide vahel oleval kilel vältida kondenseerumist, ei tohi kile asukohas temperatuur langeda alla kastepunkti. Kastepunkt on leitav graafikult, leides veeauru osarõhu toatemperatuuril ning seejärel leides sellele vastava kastepunkti.
- V177** On teada, et hetkeline efektiivne soojusvõimsus on võrdeline temperatuuri ja aja graafiku puutuja tõusuga. Enne pliitüki lisamist on ainsad soojuskaod läbi seinte; mida suurem on ahju temperatuur, seda suuremad on kaod. Pärast pliitüki lisamist läheb osa ahju võimsust veel plii sulatamiseks.
- V178** Telk peab olema soojuslikus ja niiskuslikus tasakaalus. Peale soojakadudele läbi seinte läheb osa soojusest kaotsi ventileeritava õhuga.
- V179** Soojustasakaalu korral kiirgab kuup sama palju kui see neelab. Kiirataav võimsus on leitav Stefan-Boltzmanni seadusest ning neelataav võimsus kuubi projektsiooni pindalast kiirguse leviku suunaga risti oleval tasandil. On selge, et maksimaalse temperatuuriga peab kuubi projektsiooni pindala olema maksimaalne ja minimaalse temperatuuriga minimaalne.
- V180** Esialgu võib leida piirituse ja vee massid ning nende kaudu vastavad ruumalad.
- V181** Algandmetest on võimalik leida, kui palju energiat ühe sammu tegemine genereerib ning kui palju energiat telefoni aku hoiustab. Nende suhe määrab vajalike sammude arvu.

- V182** Eri värvi komponendid on täielikult eraldunud juhul, kui plaadist väljuvate laserkiirte tsentrite vaheline kaugus distant sil  $l$  saab võrdseks kiire diameetriga.
- V183** Reservuaari veetasemest ülespoole jääva vee kaalu peab tasakaalustama kapillaarjõud vee ja klaasi kontaktjoonel.
- V184** Kuna kogu Smurfile langenud valgusest  $I$  neeldub Smurfil vaid  $I \cdot \varepsilon$ , kujutab  $I \cdot \varepsilon$  graafik Smurfil neeldunud valguse intensiivsust lainepikkuse kohta sõltuvalt lainepikkusest. Graafiku alune pindala annabki Smurfil neeldunud soojushulga.
- V185** Kirjeldatud eeldustel luminesentsstoru (ja nendest moodustatud rivi) võib vaadelda lõpmata pika joonvalgusallikana, mille valgusvoog jaotub ühtlaselt silindripinnale, mille pindala on võrdeline silindri raadiusega. Kuna kogu energia jaguneb silindri pinna peale, siis valgustatus on pöördvõrdeline kaugusega. Sarnase argumentatsiooniga saab ka leida LED-lambi valgustatuse sõltuvuse kaugusest.
- V186** Jooniselt on võimalik mõõta ringide läbimõõdud. Kasutades lühikese lainepikkusega lainete kiiruse valemit, on esimeste ringide raadiuste põhjal võimalik arvutada kulunud ajavahemikud.
- V187** Iga lagunev uraani tuum jõuab oma lagunemisahelas radoonini. Tasakaalulisel juhul tähendab see, et ajaühikus lagunevate uraani tuumade arv on võrdne ka nii ajaühikus tekkivate kui ka lagunevate radooni tuumade arvuga.  
Lagunevate uraani tuumade arv on leitav, kui uurida uraani tuumade koguarvu avaldist  $N_U(t) = N_0 2^{-\frac{t}{\tau}}$ . Diferentseerides saame, et ajaühikus lagunevate uraani tuumade arv on  $\frac{\Delta N_U(t)}{\Delta t} = \frac{N_0 \ln 2}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} = \frac{N_U(t) \ln 2}{\tau}$ .
- V188** Horisontaalsuunalise tuule tõttu langevad vihmapiisad teatud nurga all vertikaali suhtes. Kuna lõunaküljel olev tünn täitub kaks korda kiiremini, siis lõunakatusel ristlõikepindala peab langevate piiskade risttasandis olema kaks korda suurem kui põhjaküljel.
- V189** Osakese energia säilib vaid lööklaine taustsüsteemis. Seega tasub vaadelda liikumist vastavas taustsüsteemis.

- V190** Kuna täisvari on poolvarjust märksa väiksem ja Päikese nurkläbimõõt on ka väike, peab õhupall maapinnast suhteliselt kaugel olema. Seega võib maapinna läheduses lugeda varju koonuseid ligikaudu silindriteks. Pane me tähele, et poolvarju koonuse läbimõõt maapinna läheduses on 2,5 m, sest poolvarju laius (väikseim mõõde) vastab koonuse läbimõõdule. Analogselt on täisvarju koonuse läbimõõt  $1,0 \text{ m} \cdot \frac{2,5 \text{ m}}{5,0 \text{ m}} = 0,5 \text{ m}$ .
- V191** Tünnile mõjuv üleslükkejõud peab olema võrdne raskusjõuga.
- V192** Väljuva veejoa kiirus on leitav Bernoulli seadusest või energia jäävusest. Lisaks on väljuvas joas vooluhulk igas ajaühikus sama, st  $Av = \text{Const}$ , kus  $A$  ja  $v$  on vastavalt joa ristlõikepindala ja kiirus.
- V193** Kuubi vettevajumisel on kõige kriitilisem hetk see, kui kuubi ülemine tahk on parajasti vee alla vajunud, sest siis hakkab kuubile mõjuma suurim üleslükkejõud.
- V194** a) Torus olevale veesambale mõjub raskusjõud, takistusjõud ning pumba poolt avaldatud jõud. Ühtlase pumpamise korral kehtib jõudude tasakaal.  
b) Pump paneb vee alarõhku tekitades liikuma. Kuna pump asub maapinnal, tekib minimaalne alarõhk juhul, kui pump tekitab vaakumi.
- V195** Kuna klots on tasakaalus, peab kuubile mõjuv summaarne üleslükkejõud olema võrdne gravitatsioonijõuga. Selle jaoks on mugav võtta alumisse vedelikku jäänud kuubi osa ruumala tundmatuna.
- V196** Süsteemi massikese on võimalikult madalal siis, kui veesamba kõrgus ühtib süsteemi massikeskme kõrgusega. Selles saab veenduda, kui vaadelda, mis juhtub väikese veekoguse lisamisel või eemaldamisel.
- V197** a) Vee sissevoolu lõppedes on hüdrostaatilised rõhud vees torni sees ja väljas tasakaalus. Õhurõhk torni sees vee kohal on võrdne hüdrostaatilise rõhuga samal tasemel tornist väljas.  
b) Luugile mõjub altpool torni sees oleva õhu rõhk ning ülevalt vee hüdrostaatiline rõhk.
- V198** Kausile mõjub valamise käigus raskusjõud, üleslükkejõud ning vee sissekukkumisest tulenev rõhumisjõud. Rõhumisjõud on leitav vaadeldes, misuguse impulsi  $\Delta p$  kukkuv vesi ajavahemiku  $\Delta t$  jooksul kausile üle annab. Sellisel juhul on rõhumisjõud  $F = \frac{\Delta p}{\Delta t}$ .



- V199** Selleks, et määrata, mis ruumipiirkonda vesi jõuab, võib vaadelda punkti koordinaatidega  $(x, y)$  ning üritada määrata, missuguselt algekõrguselt peaks veejuga alguse saama, et sellesse punkti jõuda. Kui lahendit ei ole, antud ruumipunkti vesi ei jõua.
- V200** Õli valamise tulemusena langeb vee tase  $l - h$  võrra selles torus, kuhu õli kallati, ning tõuseb sama taseme võrra teises torus. Kuna süsteem on tasakaalus, peavad mõlemad vedelikusambad U-toru alumises punktis sama rõhku avaldama.

# Lahendused

## L1 Lendav pudel ★

Autor: Erkki Tempel, piirkonnavor, 2014, G 1

Mõlemat juhtu, millal pudel liigub üles ning pudel liigub alla, võib vaadelda kui vabalangemist. Kuna pudelile ja veele mõjuvad jõud on vabalangemise korral samasugused, siis vesi ei voola pudelist välja kummalgi juhul. Seega vee väljavoolu kiirus on 0 m/s.

## L2 Potsataja ja pähklid ★

Autor: Erkki Tempel, piirkonnavor, 2014, G 2

Lahenduse lihtsustamiseks läheme üle rongiga seotud taustsüsteemi. Sellisel juhul võib rongi liikumise jätta arvestamata ning vaadelda pähklite loopimist seisvalt rongilt. Pähklite liikumisel vaatleme kahte komponenti: vertikaalne kukkumine kiirusega  $g$  ning ühtlane horisontaalne liikumine kiirusega  $u$ . Pähklid jõuavad maapinnani ajaga  $t = \sqrt{2h/g}$ . Sama ajaga liigub kumbki pähkel horisontaalselt vahemaa  $s = u\sqrt{2h/g}$  võrra. Pealtvaates on pähklite trajektoorid täisnurkse võrdhaarse kolmnurga kaatetiteks. Pähklite omavaheline kaugus  $l$  maandumishetkel on võrdne kolmnurga hüpotenuusi pikkusega, mille leiame Pythagorase teoreemist:

$$l = \sqrt{2s^2} = 2u\sqrt{\frac{h}{g}}.$$

## L3 Kurv ★

Autor: Mihkel Rähn, lahtine, 2016, G 2

Olgu auto külgakalle  $\alpha$  ning autole mõjuv summaarne jõud  $N$ . Kuna autos olivad ei tunne külgsuunalist jõudu, on  $N$  teega risti ja seega nurga  $\alpha$  all vertikaali suhtes. Jõu võrrandid maaga seotud teljestikus on:

$$\begin{aligned}mg &= N \cos \alpha, \\ N \sin \alpha &= \frac{mv^2}{R}.\end{aligned}$$

Lahendades võrrandisüsteemi, saame

$$\alpha = \arctan\left(\frac{v^2}{Rg}\right) = 14^\circ.$$

**L4 Kadunud rahakott ★**

Autor: Eero Vaher, lahtine, 2012, G 2

Hoovõturaja alumise otsani jõudes on rahakott omandanud kineetilise energia  $E = \frac{mv^2}{2} = mgh$ , kusjuures algkiirus  $v = \sqrt{2gh}$  on horisontaalne. Kui valime koordinaatide alguspunktiks hoovõturaja alumise otsa, määravad rahakoti lennutrajektoori võrrandid  $x = vt$  ja  $y = -gt^2/2$ . Rahakott maandub siis, kui selle trajektoori ja nõlva kirjeldav joon  $y = -x \tan \alpha$  lõikuvad. Seega

$$-gt^2/2 = -vt \tan \alpha,$$

$$t = \frac{2v \tan \alpha}{g},$$

ehk

$$x = 4h \tan \alpha.$$

**L5 Kivi ★**

Autor: Taavi Pungas, lahtine, 2013, G 1

Olgu libisema hakkamise hetkel pinna kaldenurk  $\alpha$ . Mõtleme esmalt, kuidas on seotud see  $\alpha$  väärtus hõõrdeteguriga  $\mu$ . Topsile mõjuva raskusjõu  $mg$  jagame pinnaga risti olevaks komponendiks  $F_{\perp} = mg \cos \alpha$  ning pinnaga paralleelseks komponendiks  $F_{\parallel} = mg \sin \alpha$ . Kivi pind avaldab topsile toereaktsiooni  $N = F_{\perp}$  ning maksimaalset hõõrdejõudu  $F_h = \mu N$ . Tops libiseb maha, kui  $F_{\parallel} > F_h$ . Kriitilisel hetkel saame võrrandi  $F_{\parallel} = F_h$  ehk

$$\mu \cos \alpha = \sin \alpha, \quad \text{millest} \quad \tan \alpha = \mu.$$

Kaldenurk  $\alpha$  on ühtlasi võrdne vertikaali ja kivi keskpunktist libisemispaika tõmmatud joone vahelise nurgaga ja suhtub täisringi  $360^\circ$  samuti kui kaarepikkus  $b$  suhtub ümbermõõtu  $a$ ,  $\alpha = 360^\circ \cdot b/a$ . Seega  $\mu = \tan(360^\circ \cdot b/a)$  ning arvuliseks vastuseks saame

$$\mu = \tan(30^\circ) = \frac{1}{\sqrt{3}} \approx 0,58.$$

**L6 Kelgutaja ★**

Autor: Taavi Pungas, piirkonnavor, 2013, G 4

Laps kelgutab vahemaa  $l = h/\sin \alpha$ . Fikseeritud  $h$  ja  $t$  puhul on nõlva kalle vähim siis, kui hõõrdejõud puudub. Sel juhul on raskusjõu ja toereaktsiooni resultantjõu suund mööda nõlva alla ning see annab kulgule kiirenduse  $a = g \sin \alpha$ . Kiirendus on konstantne, seega  $l = \frac{at^2}{2}$ . Asendades vahemaa ja kiirenduse avaldised, saame

$$\frac{h}{\sin \alpha} = \frac{gt^2 \sin \alpha}{2},$$

millest leiame

$$\alpha = \arcsin \left( \sqrt{\frac{2h}{gt^2}} \right).$$

Kasutades ülesandes toodud lähteandmeid, saame arvuliseks vastuseks  $\alpha = 12^\circ$ .

**L7 Pall ★**

Autor: Taivo Pungas, lõppvoor, 2013, G 2

$h \propto t^2$ , kus  $h$  on maksimaalse tõusu kõrgus ja  $t$  on sellele kõrgusele tõusmiseks kulunud aeg.

Olgu  $t_i$  aeg, mis kulus pallil pärast  $i$ -ndat põrget maksimaalsele kõrgusele tõusmiseks. Kuna iga piik graafikul tähistab üht põrget, siis võime mõõta graafikult 3. ja 4. põrke alguste vahelise kauguse  $d_3$ , kusjuures  $t_3 = kd_3$  (kus  $k$  on mingi võrdetegur), ning 1. ja 2. põrke alguste vahelise kauguse  $d_1$ , kusjuures  $t_1 = kd_1$ . Seega  $\frac{t_1}{t_3} = \frac{d_1}{d_3}$ , kust

$$h_1 = h_3 \left( \frac{t_1}{t_3} \right)^2 = h_3 \left( \frac{d_1}{d_3} \right)^2 \approx 1,7 \text{ m.}$$

**L8 Kaubarong ★**

Autor: Mihkel Rähn, lahtine, 2014, G 1

Jagades tuntud töö valemi  $A = Fs + \Delta E$  ajaga, saame võimsuse jaoks võrrandi

$$N = Fv + \frac{\Delta E}{t},$$

mille kohaselt veduri võimsus on tasakaalustatud takistusjõudude ja kiiruse korutise ning potentsiaalse energia  $E$  muutumise kiiruse summaga. Hõõrdejõud on  $F = \mu mg$ . Horisontaalsel teel potentsiaalne energia ei muutu ning avaldades saame

$$v_1 = \frac{N}{\mu mg} = 92 \text{ km/h.}$$

Tõusul toimub potentsiaalse energia  $E = mgh$  suurenemine, kus  $h = s \sin a$  ning  $\sin a = \frac{1 \text{ cm}}{100 \text{ cm}}$ . Seega

$$\frac{\Delta E}{t} = \frac{smg}{t} \sin a = mgv \sin a.$$

Seega teisel juhul

$$N = umgv_2 + mgv_2 \sin a,$$

millest

$$v_2 = \frac{N}{mg(u + \sin a)} = 15 \text{ km/h.}$$

**L9 Vaakumkahur ★**

Autor: Andreas Valdmann, lahtine, 2014, G 2

Pall jaotab kahuritoru kaheks kambriks. Enne tulistamist on mõlemas kambri rõhk võrdne nulliga. Vasakpoolse membraani purustamisel täitub vasak pool torust välisõhuga ning palli poolte vahel tekib rõhkude vahe  $\Delta P = P_0 - 0 = P_0$ . Pallile hakkab mõjuma jõud, mis on võrdne palli ristlõikepindala ja rõhkude vahe korrutisega:  $F = P_0 \pi d^2 / 4$ . Newtoni 2. seaduse abil saame leida palli kiirenduse  $a = F/m$ . Ühtlaselt kiireneva liikumise korral kehtib seos

$$l = \frac{v^2 - v_0^2}{2a},$$

kus  $l$  on läbitud vahemaa ning  $v_0$  ja  $v$  on vastavalt alg- ja lõppkiirus. Kuna palli algkiirus on võrdne nulliga ning tahame leida lõppkiirust, siis avaldame

$$v = \sqrt{2la} = \sqrt{\frac{2lP_0\pi d^2}{4m}} = d\sqrt{\frac{lP_0\pi}{2m}}.$$

Kasutades ülesandes antud arvvaartusi, saame palli kiiruseks vahetult enne parempoolse membraani läbimist  $v = 130 \text{ m/s}$ . Membraani purustamiseks kulub energiat ning seetõttu on palli väljumiskiirus sellest veidi väiksem, kuid võite ise- gi ette kujutada, et õhuke fooliumileht ei takista 470 km/h kihutava palli lendu just märkimisväärselt.

**L10 Mängukahur ★**

Autor: EFO žürii, lahtine, 2016, G 1

Kuna pall maandub kaldpinnale risti, siis liigub pall sellel hetkel nurga  $\alpha$  all vertikaali suhtes. Seega tulistatakse pall kahurist välja ka nurga  $\alpha$  all vertikaali suhtes ning pall pörkab kaldpinnalt tagasi ka sama nurga all. Palli horisontaalne kiiruse komponent on  $v \sin(\alpha)$  ja vertikaalne komponent on  $v \cos(\alpha)$ . Trajektoori kõige ülemises punktis on vertikaalne kiiruse komponent null ja on kulunud pool kogu liikumise ajast  $t$ . Aja  $t/2$  jooksul muutub kiirus raskuskiirenduse tõttu  $gt/2$  võrra, seega  $gt/2 = v \cos(\alpha)$ , millest  $t = 2v \cos(\alpha)/g$ . Horisontaalne kiirus ei muutu liikumise jooksul. Horisontaalselt läbitud vahemaa on

$$s = vt \sin(\alpha) = \frac{2v^2 \cos(\alpha) \sin(\alpha)}{g} = \frac{v^2 \sin(2\alpha)}{g}.$$

Seega kahurist tulistades oli palli algkiirus  $v_1$ , kus

$$v_1^2 = \frac{Lg}{\sin(2\alpha)},$$

ning tagasipörkel  $v_2$ , kus

$$v_2^2 = \frac{lg}{\sin(2\alpha)}.$$

Tulistamise ja tagasipörkamise hetkel oli pallil ainult kineetiline energia:

$$E_1 = \frac{mv_1^2}{2} = \frac{mLg}{2 \sin(2\alpha)}, \quad E_2 = \frac{mv_2^2}{2} = \frac{mlg}{2 \sin(2\alpha)}.$$

Seega pörkel kaduma läinud energia osakaal on

$$\frac{E_1 - E_2}{E_1} = \frac{L - l}{L}.$$

### L11 Kõievedu ★

Autor: Oleg Košik, piirkonnavor, 2016, G 2

Olgu nööri tõmme  $T$ . Vastavalt Newtoni III seadusele on nööri tõmme mõlema mehe jaoks sama suur, kuid vastupidises suunas. Lisaks nööri tõmbele mõjub kummalegi mehele vastassuunas hõõrdejõud, mille maksimaalne väärtus on võrdeline raskusjõuga. Seetõttu hakkab esimesena liikuma kergem mees, kelleks on Oleg.

Vaatame, millise maksimaalse kiirendusega hakkab Oleg liikuma. Jõudude tasakaal Eero jaoks:

$$T - \mu m_1 g = 0.$$

Olegi puhul kehtib aga Newtoni II seadus:

$$T - \mu m_2 g = m_2 a.$$

Avaldades esimesest võrrandist  $T = m_1 g$  ja asendades teise võrrandisse, leiame

$$a = \frac{m_1 - m_2}{m_2} \mu g \approx 0,86 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

### L12 Vastlaliug ★

Autor: Moorits Mihkel Muru, lõppvoor, 2017, G 1

Hõõrdejõu tõttu kulutatud energia sõltub läbitud teepikkusest ja selle kaldest, potentsiaalse energia vahe sõltub kõrguse muudust. Esimesel lõigul vabaneb potentsiaalne energia  $E_1 = mgh$  ja hõõrdejõu mõjul liikumiseks kaotatakse energia

$$A_1 = \mu \cdot mg \cos \alpha \cdot \frac{h}{\sin \alpha} = \mu mgh \cot \alpha.$$

Teisel lõigul vabaneb potentsiaalne energia  $E_2 = mgs \sin \beta$  ja hõõrdejõu tõttu kaotatakse energia

$$A_2 = \mu \cdot mg \cos \beta \cdot s = \mu mgs \cos \beta.$$

Seega nõlva lõppedes on kelgutajal alles kineetiline energia

$$\begin{aligned} \Delta E &= E_1 - A_1 + E_2 - A_2 = \\ &= mgh(1 - \mu \cot \alpha) + mgs(\sin \beta - \mu \cos \beta) = 787,4 \text{ J}. \end{aligned}$$

Tasase maa peal enam potentsiaalset energiat ei vabane, aga kineetiline energia väheneb hõõrdumise tõttu. Kelk libiseb tasase maa peal

$$l = \frac{\Delta E}{F_h} = \frac{\Delta E}{\mu mg} = 21,4 \text{ m}.$$

Seega kogu vastlaliu pikkus on

$$\frac{h}{\sin \alpha} + s + l = 47,2 \text{ m.}$$

### L13 Alpinist ★★

Autor: Kaur Aare Saar, lahtine, 2013, G 3

Alpinist kukub  $2L + x$  võrra, kus  $x$  on nööri pikenemine. Jõudes kukkumise kõige madalamasse punkti, kus kineetiline energia puudub, on gravitatsiooniline potentsiaalne energia  $mg(2L + x)$  üle läinud vedru potentsiaalseks energiaks  $kx^2/2$ . Seega energia jäävuse seadus väljendub kujul

$$mg(2L + x) = \frac{kx^2}{2}.$$

Maksimaalse nööri pingest  $T = kx = 25mg$  avaldame  $x = 25mg/k$  ning asendades selle eelnevasse võrrandisse, saame

$$4mgL + \frac{50m^2g^2}{k} = \frac{25^2m^2g^2}{k}.$$

Lihtsustamiseks korrutame võrrandit  $k$ -ga ning jagame  $4mgL$ -ga, saame

$$k = \frac{(25^2 - 50)mg}{4L} \approx 18 \text{ kN/m.}$$

(Huvitav on ka pikenemine  $x$  välja arvutada, saame  $x \approx 1 \text{ m.}$ )

### L14 Langevarjuhüpe ★★

Autor: Taavi Pungas, piirkonnavaor, 2014, G 5

Kui Juku kiirus oli konstantne ( $v$ ), tasakaalustusid temale mõjuv raskusjõud ja õhu hõõrdejõud:  $(m + m_v)g = kv^2$ , kus  $k$  on mingi koefitsient. Ka Juhanile mõjuvad jõud olid konstantse kiirusega  $u$  langedes tasakaalus,  $(M + m_v)g = ku^2$ . Neist kahest võrrandist saame seose

$$\frac{m + m_v}{M + m_v} = \frac{v^2}{u^2}.$$

Teisalt  $v = h/t$  ja  $u = h/T$ , seega  $v/u = T/t$ . Siit

$$\frac{T^2}{t^2} = \frac{m + m_v}{M + m_v},$$

$$T = t \cdot \sqrt{\frac{m + m_v}{M + m_v}} = 92 \text{ s.}$$

**L15 Kelk ★★**

Autor: Joonas Kalda, piirkonnavor, 2016, G 4

Olgu jõe ületamiseks vajalik kõrgus  $h$  ja Juku mass koos kelguga  $m$ . Startides on Jukul potentsiaalne energia  $E_{\text{pot}} = mgh$ , mis muundub kelgu liikumisel soojuseks hõõrdejõu kaudu. Kaldal tuleb Jukul läbida distant  $s = h/\sin(\alpha)$ . Hõõrdejõu väärtus kaldpinnal on  $F_h = \mu_1 mg \cos(\alpha)$ . Hõõrdejõu poolt tehtud töö on  $A_1 = F_h s = \mu_1 mgh/\tan(\alpha)$ . Jää peal tuleb läbida distant  $l$  ja hõõrdejõu poolt tehtud töö on  $A_2 = \mu_2 mgl$ . Piirjuhul läheb kogu potentsiaalne energia soojusenergiaks:

$$E_{\text{pot}} = A_1 + A_2,$$

$$h = \frac{\mu_1 h}{\tan(\alpha)} + \mu_2 l,$$

$$h \cdot \left(1 - \frac{\mu_1}{\tan(\alpha)}\right) = \mu_2 l,$$

$$h = \frac{\mu_2 l \tan(\alpha)}{\tan(\alpha) - \mu_1} \approx 3,9 \text{ m}.$$

**L16 Pidurdus ★★**

Autor: Eero Vaher, lõppvoor, 2016, G 2

Olgu auto mass  $m$  ning pidurdusjõud  $F$ . Auto kineetiline energia kulub pidurdusjõu ületamiseks ning potentsiaalse energia muuduks. Ülesmäge sõites

$$\frac{mv^2}{2} = Fs_1 + mg\Delta h_1.$$

Kõrguse muut ning auto poolt läbitud teepikkus on omavahel seotud avaldisega  $\Delta h_1 = ks_1$ , seega

$$\frac{mv^2}{2} = (F + mgk)s_1.$$

Allamäge sõites kehtib analoogiliselt

$$\frac{mv^2}{2} = (F - mgk)s_2.$$

Vasakute poolte võrdsusest järeldub paremate poolte võrdsus

$$(F + mgk)s_1 = (F - mgk)s_2$$

ehk

$$F = \frac{s_2 + s_1}{s_2 - s_1} mgk.$$

Kiiruse jaoks saame energia jäävusest avaldised

$$v = \sqrt{2gks_1 \left( \frac{s_2 + s_1}{s_2 - s_1} + 1 \right)}$$



või

$$v = \sqrt{2gks_2 \left( \frac{s_2 + s_1}{s_2 - s_1} - 1 \right)}.$$

Mõlemad saab ümber kirjutada kujule

$$v = \sqrt{4gk \frac{s_1 s_2}{s_2 - s_1}} = 14 \text{ m/s} = 50,4 \text{ km/h}.$$

### L17 Kahurikuul ★★

Autor: Hans Daniel Kaimre, lõppvoor, 2016, G 3

Lähtume sellest, et kehtima peab energia jäävuse seadus. Kui laskmise hetkel on kuuli kiirus  $v$ , siis on alghetkel energia  $E_1 = mv^2/2 - GMm/R$ , kus  $M$  on Maa mass ja  $m$  kuuli mass. Kõige kõrgemal olles on kuuli vertikaalne kiirus 0, seega energia avaldub kui  $E_2 = -GMm/(R+h)$ , kus  $h$  on kuuli kõrgus Maa pinnast. Energia jäävuse seadusest lähtuvalt peavad need energiad olema võrdsed:

$$E_1 = E_2 \quad \rightarrow \quad \frac{mv^2}{2} - \frac{GMm}{R} = -\frac{GMm}{R+h}.$$

On öeldud, et juhul kui gravitatsioonivälja tugevus oleks igas punktis kuuli trajektooriga võrdne raskuskiirendusega Maa pinnal, lendaks kuul kõrgusele  $H$ . Ehk  $mv^2/2 = mgH$  ja asendades  $g = GM/R^2$  saame  $v^2/2 = GMH/R^2$ . Asendades selle ülalpool olevasse võrdsusse, saame:

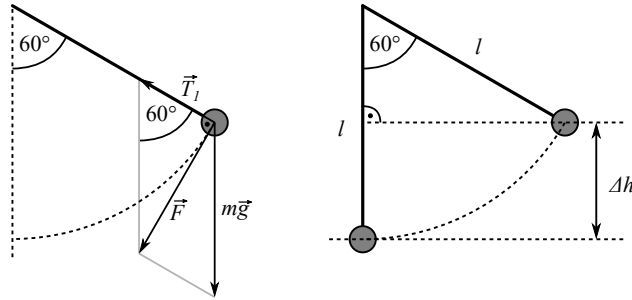
$$\frac{GMm}{R^2} H - \frac{GMm}{R} = -\frac{GMm}{R+h} \quad \rightarrow \quad \frac{H}{R^2} - \frac{1}{R} = -\frac{1}{R+h},$$

$$h = \frac{R^2}{R-H} - R = \frac{RH}{R-H} \approx 427 \text{ km}.$$

### L18 Pendel ★★

Autor: Andreas Valdmann, piirkonnavor, 2017, G 3

Olgu pendli pikkus  $l$  ja koormise mass  $m$ . Amplituudiasendis (joonisel vasakul) on pendel paigal ja koormisele mõjuvad raskusjõud  $m\vec{g}$  ning nööri pinget  $\vec{T}$ . Nende jõudude summa  $\vec{F}$  on suunatud piki koormise trajektoori ehk on risti nööriga (resultantjõul  $\vec{F}$  ei saa olla piki nööri suunatud komponenti, sest vastasel korral peaks koormise kiirendamisel nöör pikenema või lühenema). Täisnurksest kolmnurgast leiame, et amplituudiasendis on pinget nööris  $T_1 = mg \cos(60^\circ) = mg/2$ . Amplituudiasendist eemaldumisel toimub kaks muutust: nurk  $\alpha$  väheneb ja koormisele hakkab mõjuma kesktõmbekiirendus, mis on nööri pingega vastassuunaline. Kuna mõlemad muutused suurendavad pinget nööris, siis on pinget vähim just amplituudiasendis.



Eelnevale argumentidele toetudes on pinge nõoris suurim pendli tasakaaluasendis:  $T_2 = m(g + a)$ , kus  $a = v^2/l$  on koormisele mõjuv kesktõmbekiirendus ja  $v$  koormise kiirus. Kiiruse  $v$  leidmiseks kasutame energia jäävuse seadust, mille kohaselt on koormise potentsiaalse energia muut tasakaaluasendi ja amplituudiasendi vahel võrdne kineetilise energiaga tasakaaluasendis:  $mg\Delta h = mv^2/2$ . Parempoolselt jooniselt näeme, et kõrguste erinevus  $\Delta h = l[1 - \cos(60^\circ)] = l/2$ . Seega  $a = 2g\Delta h/l = g$  ja  $T_2 = 2mg$ . Niisiis erinevad suurim ja vähim pinge nõoris  $T_2/T_1 = 4$  korda.

#### L19 Mäenõlv ★★

Autor: Jonatan Kalmus, lõppvoor, 2017, G 2

Vaatleme poole pedaalipöörde jooksul toimuvat protsessi. Selle käigus liigub vajuv pedaal ratturi taustsüsteemis  $2r_1$  võrra allapoole, st ratturi poolt tehtud töö pooleperioodi jooksul on  $A = 2mgr_1$ . Teisest küljest peab ratturi poolt tehtud töö kompenseerima massikeskme potentsiaalse energia kasvu  $\Delta E_P = (M + m)gh$ , kus  $h$  on ratta vertikaalne nihe.

Poole pedaalipöörde jooksul liigub ratas pikki mäenõlva väntmehhanismi ülekannete tõttu vahemaa  $l = \frac{\pi r_2 r_4}{r_3}$ . Massikeskme vertikaalne nihe on seega  $h = l \sin \alpha$ . Niisiis, kriitilise kaldenurgaga kehtib  $A = \Delta E_P$ , ehk

$$2mgr_1 = (M + m)g \frac{\pi r_2 r_4}{r_3} \sin \alpha.$$

Seega

$$\alpha = \arcsin \left( \frac{2\pi m r_1 r_3}{(M + m) r_2 r_4} \right).$$

#### L20 Korvpall ★★

Autor: Aigar Vaigu, lõppvoor, 2017, G 4

Kui palli algkiirus on  $v$ , siis kiiruse vertikaalne ja horisontaalne komponent on vastavalt  $v \sin \theta$  ja  $v \cos \theta$ , kus  $\theta$  on viskenurk. Pall liigub mööda parabooli ja poole lennuaja möödudes on vertikaalne kiiruse komponent null. Kuna kiirendus  $a$  on konstantne, siis  $\frac{at}{2} = v \sin \theta$ , kust  $t = \frac{2v \sin \theta}{a}$ . Horisontaalne kiiruskomponent on konstantne, seega on horisontaalselt läbitud vahemaa

$$L = v \cos \theta t = \frac{v^2}{a} \cdot 2 \sin \theta \cos \theta = \frac{v^2}{a} \sin(2\theta).$$

Kõige kaugemale saab palli mõlemal juhul visata siis, kui viskenurk on 45 kraadi. Seega nurk kahe palli puhul ei muutu ja oluline on see, et kaugus on pöördvõrdeline kiirendusega

$$L \propto 1/a.$$

Peame arvestama, et lisaks palli enda raskusjõule mõjub pallile ka üleslükkejõud ja ka pallis oleva gaasi raskusjõudu tuleb arvestada, seega on kahele pallile mõjuvad kiirendused erinevad. Kuna korvpalli kest on õhukene, siis on korvpalli sees oleva gaasi ruumala  $V = \frac{4}{3}\pi \left(\frac{D}{2}\right)^3$ . Pallidele mõjuvateks summaarseteks jõududeks tuleb kahel juhul

$$F_{hk} = \rho_0 V g - (m + \rho_0 V)g = -mg,$$

$$F_{He} = \rho_0 V g - (m + \rho_{He} V)g = -mg + (\rho_0 - \rho_{He})Vg.$$

Kuna jõud on võrdelised kiirendustega, siis jõudude suhe on ka kiirenduste suhe.

$$\frac{a_{hk}}{a_{He}} = \frac{F_{hk}}{F_{He}} = \frac{mg}{mg - (\rho_0 - \rho_{He})Vg}.$$

Kuna viske kaugus on võrdeline kiirenduse pöördväärtusega ( $L \propto 1/a$ ), saame kauguste suhteks

$$\frac{L_{He}}{L_{hk}} = \frac{a_{hk}}{a_{He}} = \frac{mg}{mg - (\rho_0 - \rho_{He})Vg} = 1 + \frac{(\rho_0 - \rho_{He})V}{mg - (\rho_0 - \rho_{He})Vg}.$$

Seega saab heeliumiga täidetud korvpalli visata  $\frac{m}{m - (\rho_0 - \rho_{He})V}$  korda kaugemale.

## L21 Veoauto ★★

Autor: Kristian Kuppart, lahtine, 2011, G 3

Läheme veoautoga seotud taustsüsteemi, mis liigub kulgevast kiirendusega  $\vec{a}$ . Selles süsteemis mõjub kehadele lisaks raskusjõule veel inertsijõud  $-m\vec{a}$ , mis on olemuselt identne raskusjõuga. Seega võtab veepind asendi, mis on risti inertsijõu ja raskusjõu resultandiga,  $m(\vec{g} - \vec{a})$ . Olgu vedelikupinna algasendi keskpunkt  $O$  ja parempoolne otspunkt  $A$  ning uue asendi parempoolne otspunkt  $B$ . Sellisel juhul on kolmnurk  $OAB$  sarnane vektoritele  $-\vec{a}$  ja  $\vec{g}$  ehitatud täisnurkse kolmnurgaga (nurkade võrdsuse tõttu):  $|AB| = |OA| \cdot a/g$ . Maksimaalse kiirenduse korral ühtib punkt  $B$  kasti ülemise servaga, st  $|AB| = H - h$ . Niisiis

$$a = g \frac{|AB|}{|OA|} = 2g \frac{H - h}{L}.$$

**L22 Surmasõlm ★★**

Autor: Andreas Valdmann, piirkonnavor, 2012, G 5

Autole mõjuvad raskusjõud ja tee toereaktsioon. Silmuses püsimiseks ei tohi toereaktsioon kaduda. Nende jõudude resultandi silmuse keskele suunatud komponent moodustab kesktõmbejõu. Selle suurus sõltub auto kiirusest:

$$F_c = m \frac{v^2}{R},$$

kus  $R$  on silmuse raadius. Kriitiline olukord tekib silmuse ülemises punktis, kus auto kiirus on vähim ja raskusjõud tõmbab autot risti teest eemale. Piirjuhul seal toereaktsioon puudub ning raskusjõud on ise kesktõmbejõud:

$$mg = \frac{mv^2}{d/2},$$

kus  $m$  on auto mass ja  $v$  kiirus. Energia jäävuse seaduse kohaselt on auto kõrgus ja kiirus otseselt seotud:

$$mgh' = \frac{mv^2}{2},$$

kus  $h'$  on algpunkti ja uuritava punkti kõrguste vahe. Saadud võrrandit eelmisega läbi jagades saame vajaliku kõrguste erinevuse algpunkti ja silmuse haripunkti vahel:

$$h' = \frac{d}{4}.$$

Otsitud kogukõrgus on silmuse läbimõõdu võrra suurem ja

$$h = h' + d = 1,25d.$$

**L23 Veejuga ★★**

Autor: Mihkel Kree, lõppvoor, 2012, G 2

Vaatleme torust väljuvat veeosakest kui vabalt langevat keha horisontaalsuunalise algkiirusega  $v$ , mille horisontaalsuunaline kaugus kasvab ajas lineaarselt  $s = vt$ , vertikaalsuunaline aga kui  $h = \frac{1}{2}gt^2$ . Järelikult  $h \sim s^2$  ning veejoa kuju on matemaatiliselt kirjeldatav parabooli võrrandiga  $y = kx^2$ , kus  $x$  ja  $y$  on veejoa koordinaadid joonisel toodud teljestiku ühikutes (nullpunktiks valime teljestiku ülemise vasakpoolse nurga,  $x$ -telg olgu suunatud paremale ning  $y$ -telg alla). Määramaks joonise abil võrdetegurit  $k$ , valime mõned täisarvuliste koordinaatiga punktid  $(x, y)$ , millest juga läbi läheb, näiteks  $(19,5)$ ,  $(24,8)$  ja  $(34,16)$ . Arvutades iga punkti jaoks suhte  $x^2/y$ , leiame et  $k = 0,014$ .

Arvestades järgnevalt, et teljestiku ühikule vastab füüsikaline pikkus  $d$  (veejoa läbimõõt, mille loeme võrdseks toru sisediaameetriga), võime teisendada kaugused  $s$  ja  $h$  teljestiku ühikutesse:

$$x = \frac{s}{d} = \frac{vt}{d}, \quad \text{ja} \quad y = \frac{h}{d} = \frac{gt^2}{2d} = \frac{gd}{2v^2} \frac{v^2 t^2}{d^2} = \frac{gd}{2v^2} x^2,$$

millest saame kiirust ja diameetrit omavahel siduva võrrandi

$$k = \frac{gd}{2v^2} \quad \text{ehk} \quad \frac{v^2}{d} = \frac{g}{2k}. \quad (1)$$

Nüüd arvestame aja  $t$  jooksul torust läbi voolanud vee ruumalaks  $Svt$ , kus  $S$  on toru sisepindala, millest saame teise kiirust ja diameetrit sisaldava võrrandi

$$V = \frac{\pi d^2}{4} vt \quad \text{ehk} \quad vd^2 = \frac{4V}{\pi t}. \quad (2)$$

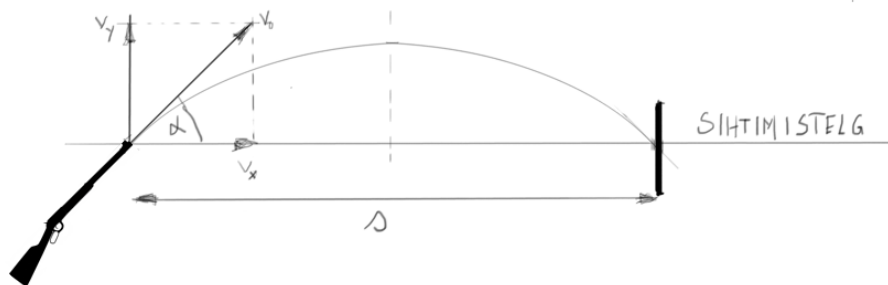
Võttes võrrandi (2) ruutu ning jagades läbi võrrandiga (1), taandub kiirus välja ning alles jääb

$$d^5 = \frac{16V^2}{\pi^2 t^2} \frac{2k}{g}, \quad \text{millest} \quad d = \left( \frac{32V^2 k}{\pi^2 t^2 g} \right)^{\frac{1}{5}} = 1 \text{ mm}.$$

#### L24 Lasketiir ★★

Autor: Aigar Vaigu, piirkonnavaor, 2016, G 6

Vastavalt ülesande tekstile ei arvesta me õhutakistust. Esmalt tuleb leida, missuguse nurga  $\alpha$  all on relva vintraud suunatud ülespoole, et tabada märklaua keskmesse ehk “kümnesse” vintpüssi normaalse asendi korral. Kuuli trajektoor on sümmeetriline, seega kuuli kogu lennuaeg  $t$  on kaks korda suurem kui aeg  $t_{\text{tip}}$ , mis kulub trajektoori kõrgeimasse punkti jõudmiseks (vt joonis).



Järgnevalt kirjeldame kuuli liikumist liikumisvõrranditega horisontaalse liikumise jaoks

$$s = v_x t$$

ja vertikaalse liikumise jaoks

$$v_y - gt_{\text{tip}} = v_y - g \frac{t}{2} = 0,$$

kus  $g$  on raskuskiirendus  $9,81 \text{ m/s}^2$ ,  $s$  märklaua kaugus  $30 \text{ m}$  ning  $v_x$  ja  $v_y$  vastavalt horisontaal- ja verikaalsuunaline algkiirus.

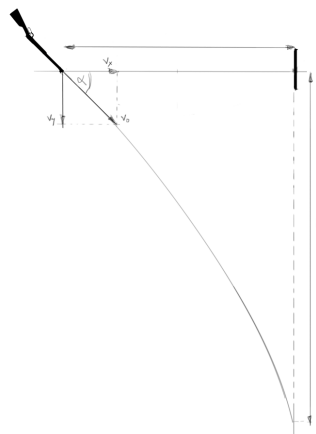
Neid kahte võrrandit kombineerides saame leida nurga  $\alpha$ :

$$\begin{aligned} s &= v_x t \Rightarrow t = \frac{s}{v_x}, \\ v_y - g \frac{t}{2} &= 0, \\ v_y - g \frac{s}{2v_x} &= 0, \\ 2v_x v_y &= gs. \end{aligned}$$

Avaldame viimses reas  $v_x$  ja  $v_y$  algkiiruse  $v_0$  ja trigonomeetriliste funktsioonide kaudu ning kasutame kahekordse nurga siinuse valemit  $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$ . Saame, et

$$\begin{aligned} 2v_x v_y &= gs, \\ 2v_0^2 \sin \alpha \cos \alpha &= gs, \\ v_0^2 \sin 2\alpha &= gs, \\ \sin 2\alpha &= \frac{gs}{v_0^2}. \end{aligned}$$

Kui nüüd keerata relva ümber sihtimistelje 180 kraadi, siis kui enne oli relvatoru nurga  $\alpha$  võrra suunatud üles, on relvatoru nüüd sama nurga jagu suunatud alla (vt joonis), seega jäävad kuuli horisontaal- ja vertikaalsuunalised kiirused oma arvvaartuselt samaks. Kuuli märklaua tabamise koha leiame kuuli vertikaalsuunalisest liikumisvõrrandist, arvestades et kuuli lastakse allapoole:



$$h = v_y t + \frac{gt^2}{2}.$$

Asendame liikumisvõrrandisse kuuli lennuaja  $t$  ja vertikaalsuunalise kiiruse  $v_y$  horisontaalsuunalise kiiruse  $v_x$  kaudu vastavalt  $t = s/v_x$  ja  $v_y = gs/2v_x$ . Saame:

$$\begin{aligned} h &= v_y \frac{s}{v_x} + \frac{gs^2}{2v_x^2}, \\ h &= \frac{gs}{2v_x} \frac{s}{v_x} + \frac{g}{2} \left( \frac{s}{v_x} \right)^2, \\ h &= \frac{gs^2}{v_x^2}, \\ h &= \frac{gs^2}{v_0^2 \cos^2 \alpha}. \end{aligned}$$

Kuna nurk  $\alpha$  on meil teada, saame arvutada koha, kus kuul märklauda tabab. Võib aga kasutada trigonomeetria seoseid. Saame:

$$\begin{aligned} h &= \frac{gs^2}{v_0^2 \cos^2 \alpha} \\ &= \frac{gs^2}{v_0^2} \frac{2}{1 + \cos 2\alpha} \\ &= \frac{gs^2}{v_0^2} \frac{2}{1 + \sqrt{1 - \sin^2 2\alpha}} \\ &= \frac{gs^2}{v_0^2} \frac{2}{1 + \sqrt{1 - \left(\frac{gs}{v_0^2}\right)^2}} \\ &= \frac{2gs^2}{v_0^2 + \sqrt{v_0^4 - (gs)^2}}. \end{aligned}$$

Rehkendus annab tulemuseks:

$$h = \frac{2 \cdot 9,81 \text{ m/s}^2 \cdot (30 \text{ m})^2}{(320 \text{ m/s})^2 + \sqrt{(320 \text{ m/s})^4 - (9,81 \text{ m/s}^2 \cdot 30 \text{ m})^2}} \approx 8,6 \text{ cm}.$$

## L25 Silinder ★★

Autor: Kaur Aare Saar, lõppvoor, 2016, G 4

Silindri impulsimoment ei muutu telje suhtes, mis läbib silindri ja pinna kontakt-punkte, sest hõõrdejõul puudub moment selle telje suhtes. Olgu esialgne nurkkiirus  $\omega$ . Esialgne impulsimoment on seega

$$h_1 = -mvR + I\omega = -mvR + mR^2\omega,$$

kus seest tühja silindri jaoks  $I = mR^2$ . Pärast libisemist on nurkkiirus  $\frac{v}{R}$ . Seega impulsimoment on

$$h_2 = mvR + I\frac{v}{R} = 2mvR.$$

Impulsimomendi jäävusest  $h_1 = h_2$  saame, et  $\omega = \frac{3v}{R}$ .

Märkus. Võis lahendada ka seest täis silindri jaoks. Siis  $I = \frac{mR^2}{2}$  ja saame  $\omega = \frac{5v}{R}$ .

**L26 Veok ringteel ★★**

Autor: Jonatan Kalmus, piirkonnavaor, 2018, G 5

Kui veok libisema ei hakka, piirab tema maksimaalset kiirust tsentrifugaaljõud, mis võib veoki külili lükata. Veoki masskeskmele mõjub horisontaalselt raskusjõud  $F_R = mg$  ning vertikaalselt tsentrifugaaljõud  $F_T = m \frac{v^2}{R}$ . Vaatleme veoki projektsiooni vertikaalsele laiusega paralleelsele tasandile. Saame kirja panna kangireegli veoki väliskurvis oleva alumise nurga jaoks (väliskurvis oleva ratta välimise punkti ja maa kontakt), mille ümber tsentrifugaaljõu jõumoment veokit keerama hakkab. Ümber selle punkti keerab veokit ühtpidi raskusjõu jõumoment  $\tau_R = F_R \frac{l}{2}$  ning teistpidi tsentrifugaaljõu jõumoment  $\tau_T = F_T h$ . Piirjuhul on need jõumomendid võrdsed ning saame võrrandi

$$mg \frac{l}{2} = \frac{mv^2}{R} h,$$

kust saame avaldada maksimaalse kiiruse:

$$v = \sqrt{\frac{Rgl}{2h}}.$$

**L27 Kloori molekul ★★★**

Autor: Ants Remm, lahtine, 2012, G 6

Siin ülesandes saab lähtuda energia jäävusest: kloori molekuli seoseenergia  $E_s$  on võrdne vahega, kus footoni energiast  $\frac{hc}{\lambda}$  ja esialgsest mehaanilisest energiast  $E_0 = 2m_{\text{Cl}} \frac{v^2}{2}$  on maha lahutatud kloori aatomite mehaaniline energia pärast jagunemist

$$E_1 = m_{\text{Cl}} \frac{v_1^2}{2} + m_{\text{Cl}} \frac{v_2^2}{2}.$$

Olgu  $x$ -telg paralleelne molekuli esialgse liikumisega. Teame, et üks aatomitest liikus pärast jagunemist risti  $x$ -teljega. See tähendab, et  $v_{1x} = 0$  ning  $v_{1y} = u$ . Impulsi jäävuse seadusest saame ka teise aatomi kiiruse komponendid  $v_{2x} = 2v$  ja  $v_{2y} = -u$ . Nüüd saab panna kirja energia jäävuse:

$$\frac{hc}{\lambda} + m_{\text{Cl}} v^2 = E_s + m_{\text{Cl}} \frac{u^2}{2} + m_{\text{Cl}} \frac{4v^2 + u^2}{2} = E_s + 2m_{\text{Cl}} v^2 + m_{\text{Cl}} u^2.$$

Sealt saab avaldada  $E_s$ , arvestades, et  $m_{\text{Cl}} = \frac{\mu_{\text{Cl}}}{N_A}$ , kus  $\mu_{\text{Cl}} = 35 \cdot 10^{-3} \text{ kg/mol}$ .

$$E_s = \frac{hc}{\lambda} - m_{\text{Cl}} v^2 - m_{\text{Cl}} u^2 = \frac{hc}{\lambda} - \frac{\mu_{\text{Cl}}}{N_A} (v^2 + u^2) = 4,0 \cdot 10^{-19} \text{ J} = 2,5 \text{ eV}.$$



**L28 Kiik ★★★**

Autor: Andres Põldaru, lahtine, 2014, G 5

Massi  $m_2$  kiirus kokkupõrkehetkel on  $v_0 = \sqrt{2gh}$ . Kokkupõrke ajal avaldab pealekukkuv mass jõudu kiigele ning kiik omakorda esimesele massile. Nende jõudude jaoks kehtib kangireegel:  $F_1 l_1 = F_2 l_2$ . Lisaks kehtib Newtoni teine seadus  $F_1 = m_1 a_1$  ja  $F_2 = m_2 a_2$ . Kokku saame  $m_1 a_1 l_1 = m_2 a_2 l_2$ . Kuna kiirendus on kiiruse muutus, siis  $m_1 l_1 \Delta v_1 = m_2 l_2 \Delta v_2$ . Mitteelastne kokkupõrge kestab seni, kuni massid pöörlevad ümber kiige telje sama nurkkiirusega (kui pealekukkuv mass liiguks suurema nurkkiirusega, painutaks ta kiike ja kiirendaks esimest massi kuni nurkkiirused on ühtlustunud) ehk  $\frac{v_1}{l_1} = \frac{v_2}{l_2}$ , millest saame  $\frac{\Delta v_1}{l_1} = \frac{v_0 - \Delta v_2}{l_2}$ . Asendades  $\Delta v_2$  eelnevalt saadud võrrandist ja arvestades, et esimene mass oli alguses paigal ehk kiiruse muut võrdub lõppkiirusega, saame

$$v_1 = \frac{l_1 l_2 m_2 v_0}{m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2} = \frac{l_1 l_2 m_2 \sqrt{2gh}}{m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2}.$$

Teine lahenduskäik kasutab impulsi jäävust pöörlemistelje suhtes. Kuna kiige ja masside süsteem saab vabalt ümber telje pöörelda ja väliseid jõumomente selle punkti suhtes pole, on impulsimoment jääv. Kui valiksime mingi muu punkti, peaksime arvestama maapinna ja kiige vahelisi jõude. Nurkkiiruste võrdsuse tingimus jääb samaks, mis eelmise lahenduse puhul. Saame võrrandisüsteemi, mille lahend on ülalt juba tuttav.

$$m_2 v_0 l_2 = m_1 v_1 l_1 + m_2 v_2 l_2,$$

$$\frac{v_1}{l_1} = \frac{v_2}{l_2}.$$

**L29 Vesiniku ioniseerimine ★★★**

Autor: Jaan Toots, lahtine, 2015, G 6

Käsitleme prootoni ja elektroni interaktsiooni elastse kokkupõrkena. Olgu prootoni algkiirus  $\vec{u}$ , lõppkiirus  $\vec{v}$  ning elektroni kiirus vahetult pärast põrget  $\vec{w}$ . Esialgu võime eirata elektroni kuulumist vesiniku aatomisse. Energia jäävusest

$$\frac{1}{2} m_p u^2 = \frac{1}{2} m_p v^2 + \frac{1}{2} m_e w^2$$

ning impulsi jäävusest

$$m_p \vec{u} = m_p \vec{v} + m_e \vec{w}.$$

Viimase võrrandi mõlema poole skalaarkorrutisest iseendaga saame

$$m_p^2 u^2 = m_p^2 v^2 + m_e^2 w^2 + 2m_p m_e \vec{v} \cdot \vec{w}.$$

Asendame  $u$  energia jäävusest.

$$m_p(m_p v^2 + m_e w^2) = m_p^2 v^2 + m_e^2 w^2 + 2m_p m_e \vec{v} \cdot \vec{w},$$

järelikult

$$(m_p - m_e)w^2 = 2m_p \vec{v} \cdot \vec{w} = 2m_p v w \cos \theta,$$

kus  $\theta$  on vektorite  $\vec{v}$  ja  $\vec{w}$  vaheline nurk. Elektroni eemaldamine vesiniku aatomist on võimalik, kui elektroni koguenergia  $E > 0$ . Seega üritame maksimeerida elektroni kineetilist energiat ning ühtlasi ka kiirust  $w$  kokkupõrke tagajärjel.

$$W = \max \left( \frac{2m_p v}{m_p - m_e} \cos \theta \right) = \frac{2m_p v}{m_p - m_e}.$$

Energia võrrandist saame

$$K_0 = \frac{1}{2}m_p u^2 = \frac{1}{2}m_p \left( \frac{(m_p - m_e)W}{2m_p} \right)^2 + \frac{1}{2}m_e W^2 = \frac{(m_p + m_e)^2}{8m_p} W^2.$$

Ioniseerimiseks  $K_e = \frac{1}{2}m_e W^2 > E_0$  ehk

$$K_0 > \frac{E_0(m_p + m_e)^2}{4m_p m_e} = 6,25 \text{ keV}.$$

### L30 Veetoru ★★★

Autor: Kristian Kuppert, piirkonnavor, 2015, G 5

Kui toru otsast voolab välja vesi kiirusega  $v$ , siis ajaühikus torust väljunud vee hulk on  $\frac{\Delta m}{\Delta t} = \rho S v$ . Paneme kirja Newtoni II seaduse torust väljunud veehulga jaoks:

$$F = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{\Delta(mv)}{\Delta t} = v \frac{\Delta m}{\Delta t}.$$

Kuna vesi saab ajaühikus sellise impulsi, peab järelikult Newtoni III seaduse tõttu mõjuma torule sama suur ja vastassuunaline jõud. Paneme kirja jõumomentide tasakaalu võrrandi toru kinnituskoha suhtes:

$$\frac{MgL \sin \alpha}{2} = FL.$$

Asendades sisse  $\frac{\Delta m}{\Delta t}$  ning avaldades  $\alpha$ , saame

$$\alpha = \arcsin \left( \frac{2\rho v^2 S}{Mg} \right).$$

**L31 Põrge ★★★**

Autor: Mihkel Kree, piirkonnavoore, 2015, G 6

Elastse põrke korral säilib kineetiline energia. Teisalt ei saa me aga rääkida impulsi jäävusest, sest põrke ajal mõjuvad ka kinnituspunkti suured jõud. Küll aga säilib süsteemi summaarne impulsimoment kinnituspunkti suhtes, sest põrke ajal kinnituspunkti mõjuvate jõudude õlad on siis nullid ning põrge toimub nii kiiresti, et raskusjõuga pole vaja arvestada.

Paneme esmalt kirja energia jäävuse seaduse. Algselt on kuulil kineetiline energia  $E_k = m_1 v^2/2$ . Pärast põrget on vardal kineetiline energia  $E_v = I\omega^2/2$ , kus  $\omega$  on lati pöörlemise nurkkiirus. Niisiis,

$$\frac{m_1 v^2}{2} = \frac{I\omega^2}{2}.$$

Asume nüüd impulsimomendi seadust avaldama. Enne põrget on liikuva kuuli impulsimoment kinnituspunkti suhtes  $L_k = m_1 v h$  ning vahetult pärast põrget on pöörleva varda impulsimoment  $L_v = I\omega$ . Niisiis,

$$m_1 v h = I\omega.$$

Nüüd on jäänud veel lahendada neist kahest võrrandist koosnev süsteem ning avaldada otsitav kõrgus  $h$ . Võib lahendada asendusvõttega, aga võime ka näiteks võtta teise võrrandi mõlemad pooled ruutu ning jagada läbi esimese võrrandiga, saades

$$m_1 h^2 = I, \quad \text{millest} \quad h = \sqrt{\frac{I}{m_1}} = \sqrt{\frac{M}{3m_1}} L.$$

**L32 Rattur ★★★**

Autor: Ardi Loot, lahtine, 2016, G 6

Ratturile mõjuvad laskumisel kolm jõudu: mäest allaviiv raskusjõud ( $F_a = mg \sin(\theta)$ ) ning takistavad hõõrdejõud ( $F_h \cos(\theta)$ ), väikese nurga tõttu võib  $\cos(\theta)$  ära jätta) ja tuuletakistus ( $F_t = cv^2$ , kus  $c$  on kordaja). Rattur on saavutanud lõppkiiruse, kui need jõud on tasakaalustunud. Kuna lõppkiirus on teada kahe eri langemisnurga korral, on võimalik kirja panna võrrandisüsteem hõõrdejõu  $F_h$  ja tuuletakistuskordaja  $c$  leidmiseks ( $v_2 = v_1 - \Delta v$ )

$$\begin{cases} mg \sin(\theta_1) &= F_h \cos(\theta_1) + cv_1^2 \\ mg \sin(\theta_2) &= F_h \cos(\theta_2) + cv_2^2. \end{cases}$$

Lahendades süsteemi saab avaldada:

$$F_h = mg \cdot \frac{v_1^2 \sin(\theta_2) - v_2^2 \sin(\theta_1)}{v_1^2 \cos(\theta_2) - v_2^2 \cos(\theta_1)} \approx 1,7 \text{ N},$$

$$c = mg \cdot \frac{\sin(\theta_1) \cos(\theta_2) - \sin(\theta_2) \cos(\theta_1)}{v_1^2 \cos(\theta_2) - v_2^2 \cos(\theta_1)} \approx 0,42 \text{ kg/m}.$$

Kasutades saadud tulemusi on lihtne arvutada ratturile mõjuvad takistusjõud ja sellele ületamiseks kuluv võimsus horisontaalsel teel kiirusega  $v$ :

$$F = F_h + cv^2 \approx 14,5 \text{ N},$$

$$P = Fv = mgv \cdot \frac{\sin(\theta_1)(v^2 \cos(\theta_2) - v_2^2) - \sin(\theta_2)(v^2 \cos(\theta_1) - v_1^2)}{v_1^2 \cos(\theta_2) - v_2^2 \cos(\theta_1)},$$

$$P \approx 80,8 \text{ W}.$$

Tuuletakistuse ületamiseks kulub  $cv^2/F = 88,5\%$  koguvõimsusest.

### L33 Kaks kuuli ja vedru ★★★

Autor: Rasmus Kisel, piirkonnavor, 2017, G 7

Olgu tundmatu mass  $m$ , vedru algne pikkus  $l$  ning vedru pikkus pöörlemise ajal  $d$ . Ülesandes oli antud, et massi  $m$  kaugus pöörlemiskeskmele on pöörlemise ajal  $l$ . Massi  $M$  kaugus pöörlemiskeskmele on seega  $d - l$ . Kuna vedru pikenes  $d - l$  jagu, siis tekib vedrus pinget  $F = k(d - l)$ . Selle pinget peab vedru mõlemas otsas tasakaalustama vastava kuuli tsentrifugaaljõud. Vaatleme jõudude tasakaalu tuntud massil  $M$ :

$$M\omega^2(d - l) = k(d - l),$$

kus  $M\omega^2(d - l)$  on massile  $M$  mõjuv tsentrifugaaljõud. Siit järeldame, et  $\omega^2 = \frac{k}{M}$ . Seega on pöörlemise periood:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{M}{k}}.$$

### L34 Reisirong ★★★

Autor: Moorits Mihkel Muru, lõppvoor, 2017, G 5

Reisijale mõjub kolm omavahel ristiolevat kiirendust: raskuskiirendus, kesktõmbekiirendus ja joonkiirendus. Leiame kõigepealt, kui suur on rongi liikumissuunaline kiirendus. Olgu rongi algkiirus  $v_a$  ja lõppkiirus  $v_l$ . Sellisel juhul kehtib seos  $v_a/v_l = \alpha \Rightarrow v_a = \alpha v_l$ . Kuna kiirus muutub ühtlaselt (lineaarselt), siis avaldub keskmine kiirus koguteepikkuse ja aja jagatisena ning samuti alg- ja lõppkiiruse keskmisena.

$$\frac{v_a + v_l}{2} = \frac{(\alpha + 1)v_l}{2} = \frac{s}{t} \Rightarrow v_l = \frac{2s}{(\alpha + 1)t}.$$

Liikumissuunaline kiirendus on

$$a_t = \frac{v_a - v_l}{t} = \frac{(\alpha - 1)v_l}{t} = \frac{2(\alpha - 1)s}{(\alpha + 1)t^2}.$$

Järgmiseks uurime kesktõmbekiirendust. Selle jaoks on vaja leida trajektoori raadius, mis ringi korral on  $r = s/\varphi$ , sest liikumissuuna muutus on võrdne ringjoonel

läbitud nurgaga. Leiame kiiruse  $v_k$  trajektoori keskpunktis. Selleks kasutame üldist ühtlaselt kiireneval/aeglustuval liikumisel kehtivat valemit  $d = (v_2^2 - v_1^2)/(2a)$ , mis meie uuritava juhul tuleb

$$\frac{s}{2} = \frac{v_k^2 - v_a^2}{2a_t}.$$

Sellest avaldame

$$\begin{aligned} v_k &= \sqrt{v_a^2 + a_t s} = \sqrt{\left(\frac{2\alpha s}{(\alpha+1)t}\right)^2 + \frac{2(\alpha-1)s^2}{(\alpha+1)t^2}} = \\ &= \sqrt{\frac{4\alpha^2 s^2 + 2(\alpha-1)(\alpha+1)s^2}{(\alpha+1)^2 t^2}} = \\ &= \frac{s}{(\alpha+1)t} \sqrt{6\alpha^2 - 2}. \end{aligned}$$

Seega kesktõmbekiirendus on

$$a_r = \frac{v_k^2}{r} = v_k^2 \frac{\varphi}{s} = \frac{2s\varphi}{(\alpha+1)^2 t^2} [3\alpha^2 - 1].$$

Viimane kiirendus on raskuskiirendus ja selle tähistame  $g$ -ga. Kuna kõik kiirendused on risti, siis resultantkiirenduse leidmiseks tuleb liita kiirenduste ruudud ja võtta sellest ruutjuur.

$$\begin{aligned} a &= \sqrt{g^2 + a_t^2 + a_r^2} = \\ &= \sqrt{g^2 + \left(\frac{2(\alpha-1)s}{(\alpha+1)t^2}\right)^2 + \left(\frac{2s\varphi}{(\alpha+1)^2 t^2} [3\alpha^2 - 1]\right)^2}. \end{aligned}$$

Kaalu ja massi vahel kehtib seos

$$P = ma \Rightarrow m = \frac{P}{a}.$$

Kui sisestame antud väärtused valemisse, saame reisija kiirenduseks  $a \approx 9,83 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$  ja massiks  $m \approx 85,4 \text{ kg}$ .

**L35 Kaheosaline pendel ★★★**

Autor: Hans Daniel Kaimre, lõppvoor, 2018, G 4

Niidis kaob tõmbejõud, kui raskusjõu niidisuunaline komponent saab võrdseks tsentrifugaaljõuga. Märgistame nurga niidi ning horisontaaljoone vahel  $\theta$ -ga. Tsentrifugaaljõud avaldub kui  $F_t = mv^2/r = 2mv^2/l$  ning raskusjõu niidisuunaline komponent  $F_{rn} = mg \sin \theta$ . Need peavad võrduma, seega:

$$\frac{2mv^2}{l} = mg \sin \theta \Rightarrow v^2 = \frac{gl \sin \theta}{2}.$$

Võttes potentsiaalse energia nivoo nullpunktiks asendi 2, saame et kuuli energia asendis 1 on  $E_1 = mgl$ . Asendis 3 on aga kuulikese energia  $E_3 = mv^2/2 + mg(1 + \sin \theta)l/2$ . Kuna kehtib energia jäävuse seadus, peab kehtima  $E_1 = E_3$ :

$$mgl = \frac{mv^2}{2} + mg(1 + \sin \theta)\frac{l}{2} \Rightarrow v^2 = gl(1 - \sin \theta).$$

Pannes kaks avaldist  $v^2$  jaoks omavahel võrduma, saame:

$$\frac{gl \sin \theta}{2} = gl(1 - \sin \theta) \Rightarrow \frac{3}{2} \sin \theta = \frac{3}{2} \cos \alpha = 1 \Rightarrow \alpha = \arccos \frac{2}{3}.$$

**L36 Veerev pall ★★★**

Autor: Hans Daniel Kaimre, piirkonnavor, 2016, G 8

Olgu  $x$ -suunaline kiirus pallil  $v_{x1}$  ning klotsil vastassuunas  $v_{x2}$ . Kuna hõõrdejõud pinnaga puudub, siis süsteemile horisontaalseid jõude ei mõju ja kehtib horisontaalse impulsi jäävuse seadus  $mv_{x1} = Mv_{x2}$ , kust  $\frac{v_{x1}}{v_{x2}} = \frac{M}{m}$ . Kuna see peab kehtima igal ajahetkel, siis järelikult kehtib ka  $\frac{s_{x1}}{s_{x2}} = \frac{M}{m}$ , kus  $s_{x1}$  ja  $s_{x2}$  on vastavalt palli ja aluse horisontaalsuunas läbitud vahemaad. Kui pall on jõudnud teise otsa, siis palli nihe klotsi suhtes on  $2(R - r)$  (vahemaa palli keskmest punktis A palli keskmest punktis B), seega

$$s_{x1} + s_{x2} = 2(R - r).$$

Avaldades  $s_{x1} = s_{x2} \frac{M}{m}$  ja asendades eelmisesse võrrandisse, saame

$$s_{x2} = 2(R - r) \frac{m}{M + m}.$$

**L37 Pidurdamine ★★★★★**

Autor: Tanel Kiis, lahtine, 2012, G 7

Kaks naaberkuulikest lendavad üksteisest kaugusel  $ut$ . Hetkest, mil neist esimene põrkab suure kehaga, kulub teise kuulikese põrkeni aega  $T = \frac{ut}{u+v}$ . Liikudes suure massi süsteemi, näeme et enne kokkupõrget läheneb väike kuul kiirusega  $v + u$ . Pärast kokkupõrget lahkub väike kuul vastassuunas samasuguse kiirusega. Seega on kokkupõrke jooksul üle kantud impulss  $\Delta p = 2m(v + u)$ . Antud impulss peab tasakaalustama langevat keha kiirendava raskusjõu:

$$F = \frac{\Delta p}{T} = \frac{2m(v + u)}{T} = \frac{2m(v + u)^2}{ut} = Mg.$$

Lihtsustame antud avaldist ning leiame  $u$ :

$$u^2 + u \left( 2v - \frac{Mgt}{2m} \right) + v^2 = 0,$$

$$u = \frac{Mgt}{4m} - v \pm \sqrt{\frac{Mgt}{4m} \left( 2v - \frac{Mgt}{4m} \right)}.$$

Näeme, et  $u$  jaoks on kaks lahendit. Seega ongi  $u$  jaoks kaks võimalikku väärtust.

**L38 Robin Hood ★★★★★**

Autor: Madis Ollikainen, piirkonnavoore, 2012, G 9

Kõigepealt leiame noole algkiiruse. Selle leiame noolele antud kineetilise energia kaudu.

$$E_K = \frac{mv^2}{2},$$

$$E_K = \eta A \Rightarrow$$

$$v = \sqrt{\frac{2\eta A}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 0,17 \cdot 500}{0,054}} \approx 56,1 \text{ m/s}.$$

Paneme tähele, et noole kiiruse horisontaalne komponent on

$$v_{\text{horisontaal}} = v \cdot \cos \alpha.$$

ja vertikaalne komponent on

$$v_{\text{vertikaal}} = v \cdot \sin \alpha.$$

Kui nool lendab aja  $t$ , siis

$$v \cos \alpha \cdot t = L,$$

$$v \sin \alpha \cdot t - \frac{gt^2}{2} = -h.$$

(Kuna nool lastakse lendu märklaua keskpunktist  $h$  võrra kõrgemalt.)

Nüüd avaldame ülemisest võrrandist  $\sin \alpha$ :

$$\cos \alpha = \frac{L}{vt} \Rightarrow \sin \alpha = \sqrt{1 - \left(\frac{L}{vt}\right)^2} = \sqrt{\frac{v^2 t^2 - L^2}{v^2 t^2}}.$$

Asendame selle alumisse võrrandisse

$$\begin{aligned} vt \cdot \sqrt{\frac{v^2 t^2 - L^2}{v^2 t^2}} &= \frac{gt^2}{2} - h \Rightarrow \\ v^2 t^2 - L^2 &= h^2 - hgt^2 + \frac{g^2 t^4}{4} \Rightarrow \\ \frac{g^2}{4} \cdot t^4 - (hg + v^2) \cdot t^2 + (h^2 + L^2) &= 0. \end{aligned}$$

Lahendame ruutvõrrandi  $t^2$  suhtes:

$$\begin{aligned} t_{1,2}^2 &= \frac{(hg + v^2) \pm \sqrt{(hg + v^2)^2 - 4 \cdot \frac{g^2}{4} (h^2 + L^2)}}{2 \cdot \frac{g^2}{4}} \Rightarrow \\ t_1^2 &= 117 \text{ s}^2 \Rightarrow t_1 = \pm \sqrt{116} = \pm 10,8 \text{ s}, \\ t_2^2 &= 14,3 \text{ s}^2 \Rightarrow t_2 = \pm \sqrt{14,3} = \pm 3,77 \text{ s}. \end{aligned}$$

On selge, et negatiivne aeg ei oma antud juhul füüsikalist tähendust. Tuleb välja, et Robin võib noolt lasta kahe erineva nurga,  $\alpha_1$  ja  $\alpha_2$  all:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \arccos \frac{L}{vt_1} = \arccos \frac{200}{56 \cdot 10,8} \approx 71^\circ, \\ \alpha_2 &= \arccos \frac{L}{vt_2} = \arccos \frac{200}{56 \cdot 3,78} \approx 19^\circ. \end{aligned}$$

### L39 Sportauto ★★★★★

Autor: Mihkel Rähn, lõppvoor, 2014, G 7

Minnes üle autoga seotud mitteinertsiaalsesse taustsüsteemi, tuleb lisada veojõule  $F_v$  vastassuunaline arvvaärtuselt võrdne inertsiaaljõud  $F_i$ , mis rakendub masskeskmele. Olgu toereaktsioonid esiteljel  $N_1$  ja tagateljel  $N_2$ . Jõudude võrrandid:

$$\begin{aligned} F_v &= \mu N_1, \\ F_v &= F_i, \\ N_1 + N_2 &= mg, \\ ma &= F_v. \end{aligned}$$

Saame kirja panna ka jõumomentide võrrandi tagatelje jaoks

$$F_i h + N_1 b - mgs = 0.$$

Lahendades võrrandisüsteemi, saame

$$a = \frac{gs}{h + \frac{b}{\mu}}.$$



**L40 Latt ★★★★★**

Autor: Kaur Aare Saar, lahtine, 2015, G 8

Olgu lati mass  $m$ , raskuskiirendus  $g$  ning hõõretegur  $\mu$ . Latile mõjub igas punktis hõõrdejõud, mis on vastupidine selle punkti liikumissuunale. Kogu mingile osale mõjuv hõõrdejõud on seega võrdeline selle osa pikkusega. Lati lükatavast otsast kaugemale osale mõjuv hõõrdejõud mõjub siis samas suunas rakendatavale jõule ning lati lähemas otsas mõjub hõõrdejõud sellele vastu. Hõõrdejõud üritavad takistada nii lati kulgliikumist kui ka selle pöörlemist. Kui latti pidevalt otsast lükatakse, peab tekkima olukord, kus lisaks lükkava jõu ning hõõrdejõudude tasakaalule kehtib ka nende jõudude momentide tasakaal. Need momendid peavad olema tasakaalus suvalise punkti suhtes. Otstarbekas on vaadelda jõumomente lati lükatava otsa suhtes, sest seal on lükkava jõu moment null. Olgu lati pöörlemistelje kaugus lükatavast otsast  $x$ . Saame

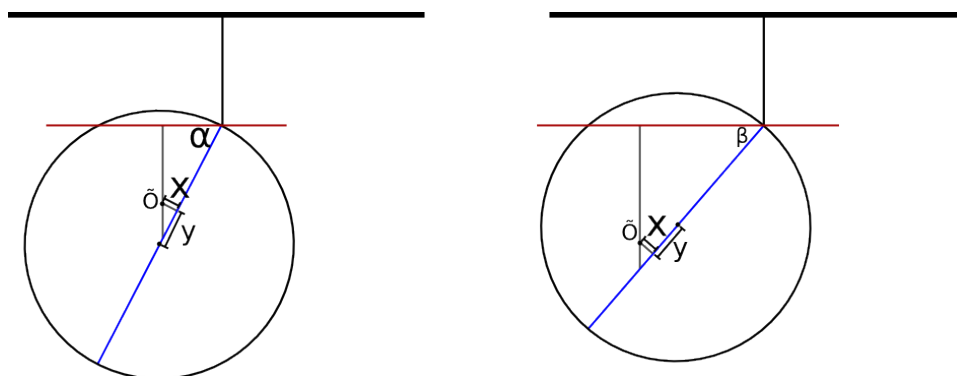
$$\mu mg \cdot \frac{x}{L} \cdot \frac{x}{2} = \mu mg \cdot \frac{L-x}{L} \cdot \left( x + \frac{L-x}{2} \right)$$

ning

$$x = \frac{\sqrt{2}}{2} L.$$

**L41 Õõnes kera ★★★★★**

Autor: Tanel Kiis, piirkonnavor, 2013, G 9



Kui tegemist poleks õõnsa keraga, oleks selle mass  $M = \frac{4}{3}\pi r^3 = 33 \text{ kg}$ . Mudeldame õõnsusega kera kui tervet kera, mille sees on negatiivse massiga  $m' = 3 \text{ kg}$  kera. Kera pöörab ennast nii, et tema massikeske jääks kinnituspunkti alla. Olge õõnsuse keskpunkti ( $\tilde{O}$ ) asukoha koordinaadid kera keskpunkti suhtes  $x$  ja  $y$ . Nende leidmiseks kasutame jõumomentide tasakaalu nööri kinnituspunkti suhtes. Saame võrrandisüsteemi:

$$Mr \cos \alpha = m'(r - y + x \tan \alpha) \cos \alpha,$$

$$Mr \cos \beta = m'(r + y + x \tan \beta) \cos \beta.$$

Õõnsuse ja kera keskpunktide vaheline kaugus on  $d = \sqrt{x^2 + y^2}$ ,

$$d = \frac{2r(\frac{M}{m'} - 1)}{\tan \alpha + \tan \beta} \sqrt{1 + \frac{1}{4}(\tan \alpha - \tan \beta)^2} = 0,8 \text{ cm.}$$

#### L42 Jalgpallurid ★★★★★

Autor: Andreas Valdmann, lõppvoor, 2013, G 9

Vaatame pallide algkiiruse komponentide kaupa. Olgu 1. palli algkiiruse vertikaalkomponent  $v_{1\text{vert}}$  ning horisontaalkomponent pikki jalgpallureid ühendavat sirget  $v_{1\text{piki}}$  ja risti selle sirgega  $v_{1\text{risti}}$ . Teise palli jaoks on vastavad komponendid  $v_{2\text{vert}}$ ,  $v_{2\text{piki}}$  ja  $v_{2\text{risti}}$ . Kokkupõrke hetkel peavad mõlemad pallid olema läbinud ristsuunas võrdse vahemaa. Kuna pallide ristsuunaline kiirus ei muutu, siis peab kehtima  $v_{1\text{risti}} = v_{2\text{risti}}$ .

Kokkupõrkeks peavad pallid olema jõudnud ka samale kõrgusele. See tingimus on ilmselt täidetud, kui pallide algsed vertikaalkiirused on võrdsed, mille korral on pallid igal ajahetkel samal kõrgusel. Oletame, et pallid võiksid teatud hetkel samale kõrgusele jõuda ka juhul, kui näiteks esimese palli algne vertikaalkiirus on väiksem. Pallide tõusuaeg on arvatav valemist  $t = v_{\text{vert}}/g$ . Seega pöördub esimene väiksema vertikaalsuunalise algkiirusega pall varem tagasi. Kui teine pall lõpuks laskuma hakkab, siis liigub esimene pall juba maa poole. Kuna mõlemad pallid kiirenevad võrdselt raskuskiirendusega, siis on laskumisel esimese palli kiirus alati suurem ja teine pall ei jõua selle pallide õhusoleku ajal järele. Seega pole kokkupõrge erinevate vertikaalkiiruste korral võimalik ja peab kehtima  $v_{1\text{vert}} = v_{2\text{vert}}$ . Kuna algkiirused olid moodulilt võrdsed ja  $v^2 = v_{\text{vert}}^2 + v_{\text{piki}}^2 + v_{\text{risti}}^2$ , siis peavad ka algkiiruste pikikomponendid olema absoluutväärtuselt võrdsed. Võimalikud kokkupõrkekohad on mõlemast jalgpallurist võrdsel kaugusel ja nende punktihulk moodustab maapinna tasandile projekteerituna sirge, mille otspunktide kaugus mõlemast jalgpallurist on määratud palli maksimaalse lennukaugusega. Selle leidmiseks avaldame näiteks lennuaja, mis on võrdne kahekordse ajaga, mis kulub raskusjõu mõjul vertikaalkiiruse kahanemiseks nullini

$$t = 2 \frac{v_{\text{vert}}}{g}.$$

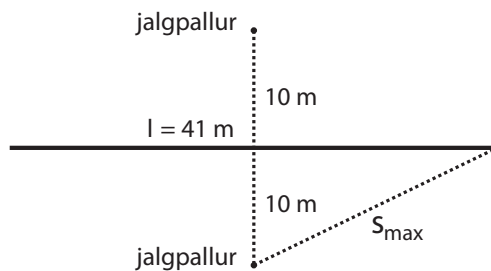
Selle ajaga liigutakse horisontaalsihis vahemaa

$$s = v_{\text{hor}} t = 2 \frac{v_{\text{hor}} v_{\text{vert}}}{g}.$$

Suurim lennukaugus saavutatakse, kui  $v_{\text{vert}} = v_{\text{hor}} = v/\sqrt{2}$  ja seega  $s_{\text{max}} = v^2/g$ . Täisnurksest kolmnurgast leiame kokkupõrkepunktide piirkonna pikkuse

$$l = 2\sqrt{s_{\text{max}}^2 - (d/2)^2} = 2\sqrt{\frac{v^4}{g^2} - \frac{d^2}{4}},$$

mille arväärtus on 41 m.



### L43 Nutrivõti ★★★★★

Autor: Andres Põldaru, lahtine, 2015, G 9

Kui keermes on liikunud piki regulaatori telje teepikkuse  $x$  võrra, on need pöördunud nurga  $\varphi = 2\pi n x$  võrra ning liikunud teljega risti teepikkuse  $y = \varphi r = 2\pi n x r$  võrra. Olgu  $\alpha$  nurk pinnanormaali ja pöörlemistelje vahel. Saame

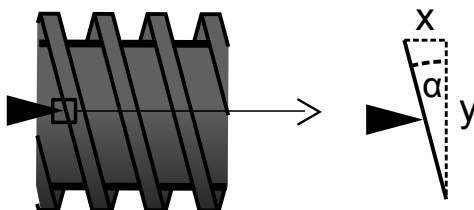
$$\tan(\alpha) = \frac{x}{y} = \frac{x}{2\pi n x r} = \frac{1}{2\pi n r}.$$

Mõjugu keermetele regulaatori telje suunaline jõud  $F$ . Keermete suunas mõjuv jõu komponent on  $F \sin \alpha$ , mille peab tasakaalustama hõõrdejõud suurima võimaliku väärtusega  $\mu F \cos \alpha$ . Saame

$$\mu \geq \tan \alpha = \frac{1}{2\pi n r}$$

ehk

$$n \geq \frac{1}{2\pi r \mu}.$$



**L44 Plokid ★★★★★**

Autor: Taavet Kalda, lahtine, 2017, G 8

Olgu ülemisele ja alumisele plokile toetuvate nööride pinged vastavalt  $T_1$  ja  $T_2$  ning raskuste  $m_1$ ,  $m_2$  ja  $M$  kiirendused vastavalt  $a_1$ ,  $a_2$  ja  $a$  (gravitatsiooniga samasuunalised). Kuna raskus  $M$  peab alguses paigal olema, st  $a = 0$ . Nööride venimatus annab kaks lisatingimust. Esiteks, ülemise nööri venimatuses peab alumise plokki kiirendus olema  $-a_1$ . Teiseks, alumise nööri venimatuses saab järeldada, et alumine plokk liigub kiirendusega  $\frac{a_2+a}{2} = \frac{a_2}{2} = -a_1$ , sest  $m_2$  ja  $M$  liiguvad keskmiselt sama palju kui alumine plokk. Kuna nöörid on kaalutud, on nende pinge igas punktis sama. Paneme alumise plokki ja iga raskuse jaoks Newtoni 2. seaduse kirja:

$$0 = 2T_2 - T_1, \quad \text{- alumine plokk} \quad (1)$$

$$m_1 a_1 = m_1 g - T_1, \quad \text{- esimene raskus} \quad (2)$$

$$m_2 a_2 = m_2 g - T_2, \quad \text{- teine raskus} \quad (3)$$

$$0 = Mg - T_2, \quad \text{- uuritav raskus} \quad (4)$$

$$\frac{a_2}{2} = -a_1. \quad \text{- nööride venimatus} \quad (5)$$

Tekkinud võrrandisüsteemis on 5 võrrandit ja 5 tundmatut. Seega on  $M$  üheselt määratud.

(1) ja (4) annavad  $T_2 = Mg$  ja  $T_1 = 2Mg$ . Asendame (5) ja saadud seosed võrranditesse (2) ja (3):

$$m_1 a_1 = m_1 g - 2Mg, \quad (6)$$

$$-2m_2 a_1 = m_2 g - Mg. \quad (7)$$

Liidame (6) ja (7) kokku kaaludega  $\frac{2}{m_1}$  ja  $\frac{1}{m_2}$ :

$$0 = 2g - 4\frac{Mg}{m_1} + g - \frac{Mg}{m_2},$$

ehk

$$M = \frac{3}{\frac{4}{m_1} + \frac{1}{m_2}} = \frac{3m_1 m_2}{4m_2 + m_1}.$$

**L45 Mänguauto ★★★★★**

Autor: Jaan Kalda, lahtine, 2017, G 9

Vaatleme auto taustsüsteemis tasakaalutingimusi: tagumiste rataste ja maapinna suhtes välja kirjutatud jõumomentide tasakaalu tingimus:

$$\frac{MgL}{2} = N_e L \pm Mah,$$

millest

$$N_e = \frac{M}{2}g \pm Ma\frac{h}{L}.$$

Seega hõõrdejõud

$$F_h = (Mg - N_e)\mu = \left(\frac{M}{2}g \mp Ma\frac{h}{L}\right)\mu = Ma,$$

kusjuures pluss ja miinus vahelduvad üle poolperioodi. Siit saame avaldada

$$a = \frac{\mu g}{2(1 \pm \mu h/L)}.$$

Seega keskmine kiirendus

$$\langle a \rangle = \frac{g\mu^2 h}{2L(1 - \mu^2 h^2/L^2)}.$$

#### L46 Killud ★★★★★

Autor: Jaan Kalda, lahtine, 2012, G 10

Kildude koguimpulss on null, seega moodustavad impulsivektorid kolmnurga, mille saame sarnasusteguri täpsusega taastada kildude liikumissuundade abil. Sellest kolmnurgast saame küljepikkuste suhete mõõtmise abil teada algimpulsside suhted  $p_1 : p_2 : p_3 = 72 : 24 : 59$  (need numbrid on kolmnurga külgede pikkused millimeetrites). Kildude libisemiskaugused suhtuvad kui algkiiruste ruudud – mõõtmiste abil saame teada

$$v_1^2 : v_2^2 : v_3^2 = 72 : 30 : 21$$

ning ruutjuure võtmise järel ka kiiruste suhted

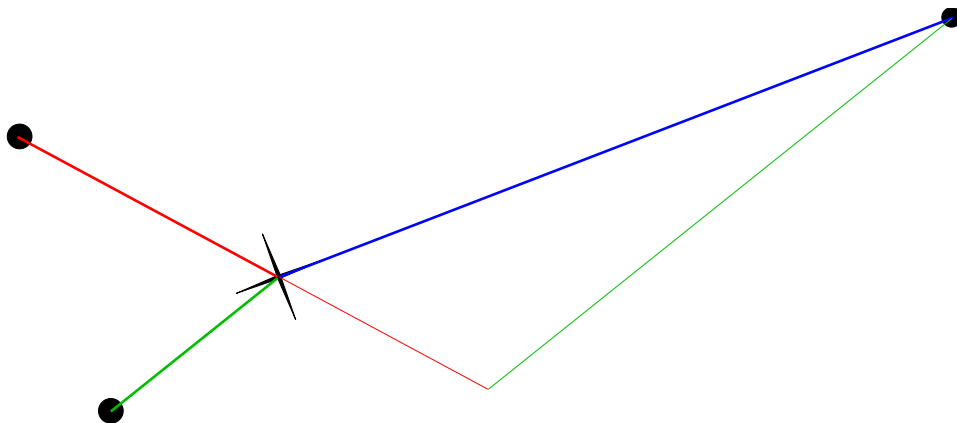
$$v_1 : v_2 : v_3 = 8,5 : 5,5 : 4,6.$$

Jagades impulsside suhted kiiruste suhtega, saame teada masside suhted

$$m_1 : m_2 : m_3 = 8,5 : 4,4 : 12,8$$

ning teades kogumassi ka massid eraldi võetuna,

$$m_1 = 10 \text{ g} \cdot \frac{8,5}{8,5 + 4,4 + 12,8} = 3,3 \text{ g}, m_2 = 10 \text{ g} \cdot \frac{4,4}{25,7} = 1,7 \text{ g}, m_3 = 10 \text{ g} \cdot \frac{12,8}{25,7} = 5,0 \text{ g}.$$



**L47 Liivakell ★★★★★**

Autor: Roland Matt, lõppvoor, 2012, G 8

Olgu kogu liivahulga kõrgus  $H$  ja liiva kõrgus alumises anumasse  $h$ . Alumisest anumasse voolab liiv massikiirusega  $w$ .

Paneme kirja liivakella masskeskme koordinaadi:

$$x = \frac{\frac{h}{2}S\rho + (\frac{L}{2} + \frac{H-h}{2})(H-h)S\rho}{HS\rho} = \frac{2h^2 + LH - Lh + H^2 - 2Hh}{2H}.$$

Kui liivakella massikeske omab kiirendust, peab masskeskme koordinaadi teine tuletis aja järgi olema nullist erinev. Järeldusena Newtoni II seadusest võib öelda, et liivakellale peab mõjuma masskeskme kiirendusele vastav lisajõud – see ongi kaalu näidu muutus, mida otsime. Võtame nüüd masskeskme koordinaadist kaks korda järjest ajalisi tuletisi, pidades meeles, et liivataseme kõrguse  $h$  tuletis aja järgi (muutumiskiirus) on seotud otseselt liiva voolu massikiirusega  $v$  järgnevalt:

$$w = S\rho\dot{h}.$$

Täpiga suuruse peal tähistame vastavat ajalisi tuletisi. Peame meeles, et  $h$  muutumise kiirendus (teine tuletis aja järgi) peab võrduma nulliga ning et  $L$  ja  $H$  on konstantsed suurused, mistõttu nende tuletised on nullid.

$$\dot{x} = \frac{4h\dot{h} - L\dot{h} - 2H\dot{h}}{2H}.$$

Võtame veelkord tuletist:

$$a = \ddot{x} = \frac{4h\ddot{h} + 4\dot{h}^2 - L\ddot{h} - 2H\ddot{h}}{2H} = \frac{2\dot{h}^2}{H} = \frac{2w^2}{HS^2\rho^2}.$$

Kogu liivakellas oleva liiva mass on  $m = SH\rho$ . Liivakellale mõjuv täiendav jõud (kaalu näidu muutus):

$$F = ma = \frac{2w^2}{S\rho}.$$

**L48 Silindrilised anumad ★★★★★**

Autor: Jaan Kalda, lõppvoor, 2014, G 8

Kui tühi anum kerkib vahemaa  $x$  võrra, siis tema all vabaneb ruumala  $\pi r^2 x$ , mille täidab silindritevahelisest ruumist pärit vesi. Vajugu nivoo vahemaa  $y$  võrra; ruumalade võrdsuse tõttu  $\pi r^2 x = \pi(R^2 - r^2)y$ , seega

$$y = x \frac{r^2}{R^2 - r^2}.$$

Kui  $x \ll L$ , siis süsteemi potentsiaalne energia väheneb vee ülevaalt alla ümberpaigutamise tõttu suuruse

$$E_p = g\rho\pi r^2 x L$$

võrra. Energia balansis võime ignoreerida sisemise silindri otsa juures toimuva vee liikumise kineetilist energiat, kuna selles osaleva vee hulk on väga väike võrreldes langeva vee hulgaga. Seetõttu vee kineetiline energia

$$E_k = \frac{1}{2} \rho \pi (R^2 - r^2) L \dot{y}^2,$$

kus  $\dot{y}$  tähistab  $y$  tuletist aja järgi. Võttes energia jäävuse seadusest  $gr^2 \dot{x} = \frac{1}{2} (R^2 - r^2) \dot{y}^2$  tuletise aja järgi, leiame

$$gr^2 \dot{x} = (R^2 - r^2) \dot{y} \ddot{y}.$$

$x$  ja  $y$  vahelise seose tõttu kehtib võrdus  $r^2 \dot{x} = (R^2 - r^2) \dot{y}$ , mistõttu

$$\ddot{y} = g \Rightarrow \ddot{x} = g \frac{R^2 - r^2}{r^2} \approx 4,3 \text{ m/s}^2.$$

#### L49 Vedru ★★★★★

Autor: Mihkel Kree, lõppvoor, 2015, G 8

a) Hetkeks, mil kast maapinnale jõuab, on koormis omandanud kiiruse  $v_i = \sqrt{2gh}$ . Seejärel hakkab vedru võnkuma ümber uue tasakaaluasendi ehk ümber punkti, kus vedru pinge tasakaalustab koormisele mõjuva raskusjõu:  $ky_0 = mg$ . Tasakaaluasendisse jõudmiseks peab koormis veel täiendavalt läbima kauguse  $y_0 = \frac{mg}{k}$ . Olgu vedru võnkumise amplituud  $A$ . Kõige ülemises punktis jääb koormis hetkeks seisma ning kokkusurutud vedru avaldab nii koormisele kui kastile jõudu  $k(A - y_0)$ . Kast hüppab üles tingimusel  $mg = k(A - y_0)$ , millest

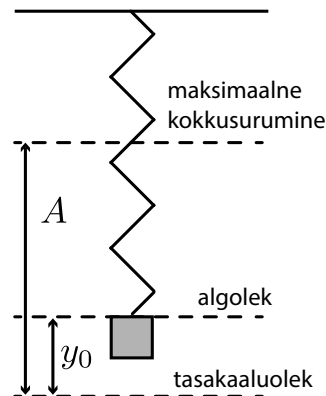
$$A = \frac{mg}{k} + y_0 = 2y_0.$$

Rakendame nüüd energia jäävust. Võnkumise ülemises punktis on kineetiline energia muutunud gravitatsiooni ja vedru potentsiaalseks energiaks.

$$mgh = \frac{mv_i^2}{2} = mg(A - y_0) + \frac{1}{2} k(A - y_0)^2 = \left(1 + \frac{1}{2}\right) mgy_0 = \frac{3}{2} mgy_0,$$

millest saame otsitavaks kõrguseks

$$h_{\min} = \frac{3}{2} y_0 = \frac{3mg}{2k} = \frac{3g}{2\omega^2}.$$



**b)** Teisele küsimusele vastates lähtume harmoonilise võnkumise omadustest. Veenume esmalt, et konstantse jõu  $mg$  lisamine nihutab tasakaaluasendit, kuid jätab võnkumist kirjeldava võrrandi samaks. Tõepoolest, lugedes koordinaadi  $y$  alguspunktiks uue tasakaaluasendi, on meie vedru võnkumine kirjeldatav võrrandiga

$$ma = m\ddot{y} = -k(y - y_0) - mg = -ky.$$

Sellise võnkumise nurksagedus on muidugi  $\omega = \sqrt{k/m}$  ning periood  $T = \frac{2\pi}{\omega}$ . Kui hakkaksime aega lugema hetkest, mil koormis läbib tasakaaluasendit, siis kuluks vedru maksimaalselt kokku surumiseks kolm veerandperioodi ( $\frac{3}{4}T$ : kast liigub alla, tagasi tasakaaluasendisse ja üles), sest langemiskõrguse  $h = h_{\min}$  korral saab kast hüpata vaid koormise kõige ülemises asendis. Paraku ei alusta me aja arvestamist mitte tasakaaluasendist, vaid hetkest, mil vedru on välja venitamata. Peame seega arvesse võtma lisaega  $\Delta t$ , mis kulub koormisel vahemaa  $y_0$  läbimiseks. Kuna koormis ei liigu konstantse kiirendusega, siis seos  $s = at^2/2$  siin ei kehti.  $\Delta t$  leidmiseks lähtume harmoonilise võnkumise faasist  $\varphi$ , mis kulub algasendist tasakaaluasendisse jõudmiseks. Seda faasi on lihtne avaldada koordinaatide abil, pidades silmas, et amplituud  $A$  vastab koordinaadi faasinihkele  $\pi/2$  tasakaaluasendi suhtes. Nimelt  $y_0 = A \sin \varphi$ , millest

$$\varphi = \arcsin(y_0/A) = \arcsin(1/2) = \frac{\pi}{6}.$$

Faasi  $\varphi$  läbimiseks kuluv aeg on

$$\Delta t = \frac{\varphi}{\omega} = \frac{1}{12}T.$$

Järelikult veedab kast maapinnal kuni üles kerkimiseni aja

$$t = \frac{3}{4}T + \Delta t = \frac{5}{6}T = \frac{5\pi}{3\omega}.$$



**L50 Vardad ★★★★★**

Autor: Jaan Kalda, lahtine, 2017, G 10

Vaadeldaval hetkel on kiirusvektori ja  $AC$  vahelise nurga siinus  $\frac{1}{2}$ , st nurk ise on  $30^\circ$  ja seetõttu  $AB$  on risti kiirusvektoriga. Järelikult on punkti  $B$  kiirusvektori suund sama, mis  $\vec{v}$ . Varda  $BC$  venimatuse tõttu peavad otspunktide kiirusvektorite projektsioonid varda sihile olema võrdsed. Et nurgad nende kiirusvektorite ja varda sihiga on võrdsed, siis peavad ka kiiruste moodulid olema võrdsed. Niisiis punkti  $B$  kiirus on  $\vec{v}$ . Seetõttu on punkti  $B$  kesktõmbekiirendus  $v^2/2l$ . Punktil  $B$  võib olla veel mingi tangentsiaalkiirendus, hetkel me teame vaid kogukiirenduse projektsiooni  $AB$  sihile. Läheme nüüd kiirusega  $\vec{v}$  liikuvasse taustsüsteemi, kus punkt  $C$  on kogu aeg paigal ja punkt  $B$  on hetkeliselt paigal. Et  $B$  on hetkeliselt paigal, siis selle kesktõmbekiirendus pöörlemisel ümber  $C$  on antud hetkel null, st  $B$  kiirenduse vektor on risti  $BC$ -ga. Seega me teame kiirenduse suunda ja projektsiooni  $v^2/2l$  sihile  $AB$  (mis moodustab vektori suunaga nurga  $30^\circ$ ). Selle põhjal saame avaldada kiirenduse mooduli

$$a = \frac{v^2}{2l \cos 30^\circ} = \frac{v^2}{\sqrt{3}l}.$$

**L51 Voltmeetrid ★**

Autor: Eero Vaher, piirkonnavaor, 2016, G 1

Voltmeetrid mõõdavad alati pingelangu enda klemmidel, kusjuures pingelangud on määratud voltmeetrite takistustega. Olgu iga voltmeetri takistus  $R$ . Kogu skeemi takistus on

$$R_k = \left( \frac{1}{R} + \frac{1}{2R} \right)^{-1} + R = \frac{5}{3}R.$$

Pingelang esimesel voltmeetril on

$$U_1 = \frac{R}{R_k} U_0 = 18 \text{ V}.$$

Pingelang neljandal voltmeetril on  $U_4 = U_0 - U_1 = 12 \text{ V}$  ning pingelangud teisel ja kolmandal voltmeetril on

$$U_2 = U_3 = \frac{U_4}{2} = 6 \text{ V}.$$

**L52 Voltmeeter ★**

Autor: Erkki Tempel, piirkonnavaor, 2017, G 1

Jooniselt näeme, et äärmised takistid on lühistatud, mistõttu need mõõteriistade näitu ei mõjuta. Ampermeeter on jadamisi kahe takistiga, mistõttu on ampermeetriga harus kogutakistus  $2R$ . Seega on kogupinge selles harus võrdne patarei pingega

$$U = I \cdot 2R.$$

Asendades ampermeetri voltmeetriga, näitab voltmeeter patarei pinget, kuna tegemist on ideaalse voltmeetriga, mille takistus on lõpmatu. Sellest tulenevalt voltmeetriga haru vool ei läbi ja temaga jadamisi ühendatud takistid voltmeetri näitu ei mõjuta.

$$U_{\text{voltmeeter}} = 2RI.$$

**L53 Lambid ★**

Autor: Mihkel Kree, piirkonnavaor, 2015, G 2

Olgu pingevalika pinge  $U$ . Paralleelühenduse korral langeb kummalegi lambile samuti pinge  $U$ . Olgu lampide takistused  $R_1$  ja  $R_2$ , neil eralduvad võimused on siis  $P_1 = U^2/R_1$  ja  $P_2 = U^2/R_2$ . Et ülesande tingimuste kohaselt on nende võimsuste suhe  $k$ , saame avaldada seose takistute vahel:

$$P_1 = kP_2, \quad \text{millest} \quad R_1 = R_2/k \quad \text{ehk} \quad R_2 = kR_1. \quad (1)$$

*Märkus.* üldisust kitsendamata võinuksime samaväärselt öelda ka:  $P_1 = P_2/k$ .

Ühendades need lambid nüüd jadamisi, on ahela kogutakistuseks  $R_1 + R_2$  ning kummaski lambis võrdne voolutugevus  $I = U/(R_1 + R_2)$ . Lampidel eralduvad võimsused on nüüd vastavalt  $P'_1 = I^2 R_1$  ja  $P'_2 = I^2 R_2$ .

Koguvõimsuste suhe kahel juhul on seega

$$\gamma = \frac{P'_1 + P'_2}{P_1 + P_2} = \frac{I^2(R_1 + R_2)}{U^2(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2})} = \frac{R_1 R_2}{(R_1 + R_2)^2}.$$

Et saada avaldises lahti tundmatutest takistustest, peame ühe neist asendame teise kaudu seose (1) abil, saades otsitavaks koguvõimsuste suhteks

$$\gamma = \frac{R_1^2 k}{R_1^2(1+k)^2} = \frac{k}{(1+k)^2}.$$

Vastates lisaküsimusele, näeme et  $\gamma < 1$  ehk jadaühenduses koguvõimsus väheneb.

**L54 Elektriskeem ★★**

Autor: Oleg Košik, piirkonnavor, 2013, G 5

a) Tekib kaks kontuuri, milles igaühes on üks vooluallikas ning kaks ampermeetrit. Voolud ampermeetritel 1 ja 3 leiame Ohmi seadusest:  $I_1 = \frac{3\varepsilon}{r}$ ,  $I_3 = \frac{\varepsilon}{r}$ , voolu ampermeetril 2 aga Kirchhoffi I seadusest:

$$I_2 = I_1 + I_3 = \frac{4\varepsilon}{r}.$$

b) Ilmselt  $I_2 = 0$ . Tekib üks kontuur, mis sisaldab kahte vooluallikat. Voolutugevuse kontuuris leiame Kirchhoffi II seadusest:

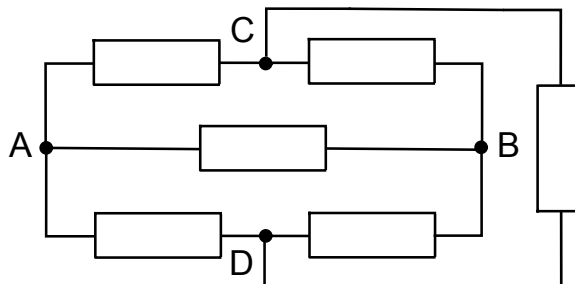
$$I_1 = I_3 = \frac{3\varepsilon - \varepsilon}{r + r} = \frac{\varepsilon}{r}.$$

**L55 Tetraeedri ★★**

Autor: Eero Vaher, lahtine, 2014, G 4

Alloleval joonisel on toodud tetraeedri ekvivalentskeem. Sümmeetriakaalutlustel ei saa tippude C ja D vaheline takisti mõjutada tippude A ja B vahelist takistust, järelkult võib selle skeemilt eemaldada. Allesjääva skeemi takistust on lihtne leida.

$$R_{AB} = \left( \frac{1}{R+R} + \frac{1}{R+R} + \frac{1}{R} \right)^{-1} = \frac{R}{2}.$$

**L56 Ruudustik ★★**

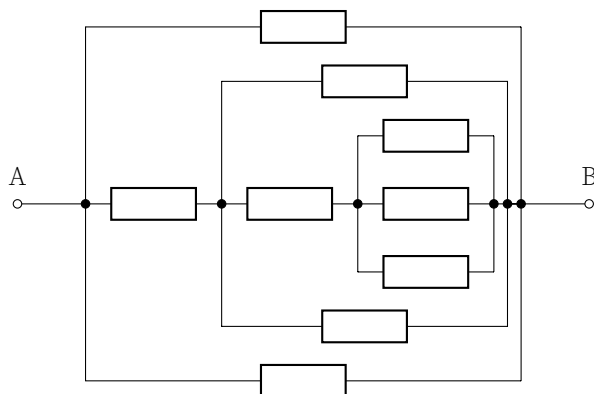
Autor: Taavi Pungas, lõppvoor, 2014, G 1

Sümmeetria tõttu on ruudustiku kaks tähistamata nurka ja keskpunkt sama potentsiaaliga, mistõttu võid need kolm punkti kokku ühendada. Saadud skeem jaotub ilusti rööp- ja jadaühendusteks, nende abil saame punktide A ja B vaheliseks takistuseks  $R = 1,5\Omega$ .

**L57 Takistid ★★**

Autor: Hans Daniel Kaimre, lahtine, 2015, G 2

Teades, et ühesuguse potentsiaaliga punkte võib ahelas vabalt lahti ja kokku ühendada, saame ülesandes esitatud elektriskeemi viia allolevale kujule.



$$R_{AB} = (2R^{-1} + (R + (2R^{-1} + (R + (3R^{-1})^{-1})^{-1})^{-1})^{-1})^{-1} = \frac{15}{41}R.$$

**L58 Elektriskeem ★★**

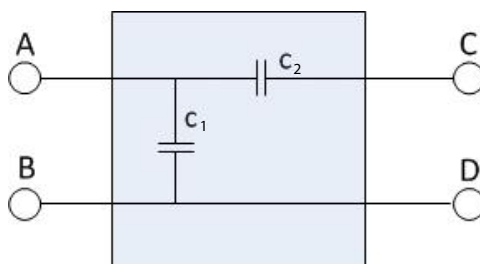
Autor: Kristian Kuppart, lahtine, 2016, G 3

Vahetult pärast lüliti sulgemist ei ole parempoolsele kondensaatorile laengut jõudnud koguneda, mis tähendab, et pinge tema klemmidel  $U = \frac{q}{C} = 0$ . Parempoolsest ülemisest takistist esimesel hetkel voolu läbi ei lähe. Sama mõttekäik kehtib vasakpoolse kondensaator kohta, niisiis voolutugevus  $I = \frac{2U}{R}$ . Pika aja möödumisel on mõlemad kondensaatorid efektiivselt lahti ühendatud, kogu vool läheb läbi keskmise haru:  $I = \frac{U}{2R}$

**L59 Must kast ★★**

Autor: Kristian Kuppart, lõppvoor, 2013, G 4

Sobiv skeem on näiteks selline:



Kui klemmide A ja B külge ühendada patarei ja klemmide C ja D külge voltmeeter, siis läbi kondensaatori  $C_2$  vool ei lähe ning ta ei laadu. Pinge temal on 0 ning voltmeeter näitab  $U$ .

Kui aga patarei ühendada klemmide C ja D külge ja voltmeeter klemmide A ja B külge, laaduvad mõlemad kondensaatorid üheaegselt ning pinge  $U$  jaotub nende vahel võrdselt. Voltmeeter näitab  $\frac{U}{2}$ .

#### L60 Elektroonikaskeem ★★

Autor: Sandra Schumann, lahtine, 2017, G 4

Vaatame vooluallika polaarsuse vahetamist olukorras, kus seade vahepeal välja lülitatakse.

Kondensaatoril olevaks pingeks saab pärast mõne aja möödumist 0 V. Kui seade uuesti sisse lülitada, siis läheb aega, enne kui kondensaatoril olev pinge suureneb, ja takistil  $R$  on seetõttu vähemalt hetkeliselt pinge 9 V. Selles olukorras ei tohi takistil eralduv võimsus ületada maksimaalset väärtust  $P_{\max} = 0,25 \text{ W}$ .

$$P_{\max} > \frac{U^2}{R},$$

$$R > \frac{U^2}{P_{\max}} = \frac{(9 \text{ V})^2}{0,25 \text{ W}} = 324 \Omega.$$

Kui seadet mitte välja lülitada, jääb vooluallika eemaldamisel kondensaatorile pinge 9 V. Pärast vooluallika polaarsuse vahetamist saab takisti endale vähemalt hetkeliselt patarei ja kondensaatori liitunud pinge  $9 \text{ V} + 9 \text{ V} = 18 \text{ V}$ . Selles olukorras ületab takistil eralduv võimsus väärtuse  $P_{\max} = 0,25 \text{ W}$ .

$$P_{\max} < \frac{U_2^2}{R},$$

$$R < \frac{U_2^2}{P_{\max}} = \frac{(18 \text{ V})^2}{0,25 \text{ W}} = 1296 \Omega.$$

*Märkus.* Tegelikuses ei põle reaalsed takistid kohe läbi maksimaalse võimsuse hetkelisel kergel ületamisel, seega on takisti maksimaalne võimalik väärtus märkimisväärselt väiksem ja kondensaatori mahtuvuse väärtus peab sellise olukorra tekitamise jaoks olema väga suur. Täpsed piirid aga sõltuvad konkreetsest takistist ja selle kvaliteedist.

#### L61 Elektriline sild ★★★

Autor: Jaan Kalda, lõppvoor, 2012, G 3

Sümmeetria tõttu ülemises ja alumises takistis ( $R_2$  ja  $R_4$ ) vool puudub. Tõepoolest, oletagem et ühes neist (nt  $R_2$ -s) läheb vool vasakult paremale. Peegeledame joonist vertikaaltelje suhtes:  $R_1$  ja  $R_3$  ning  $\mathcal{E}_1$  ja  $\mathcal{E}_2$  vahetavad kohad, kuid takistite ning elektromotoorjõudude võrdsuse tõttu skeem ei muutu. Peegelduse käigus peaks nüüd vool muutma suuna vastupidiseks ning minema paremalt vasakule; esialgse ja peegelduse tulemusel saadud skeemi ekvivalentsuse tõttu peaks aga vool olema endiselt vasakult paremale, mis viib vastuoluni. Järelikult on vool  $R_2$ -s ja  $R_4$ -s null ning skeemilt võib vastavad juhtmed kõrvaldada. Järele jääb  $R_1$ ,  $\mathcal{E}_2$ ,  $R_4$  ja  $\mathcal{E}_1$  jadaühendus, mistõttu on voolutugevus ahelas, sh  $R_1$ -s ja  $R_3$ -s leitav kui  $I = 2\mathcal{E}/2R = \mathcal{E}/R$ .

**L62 Must kast ★★★**

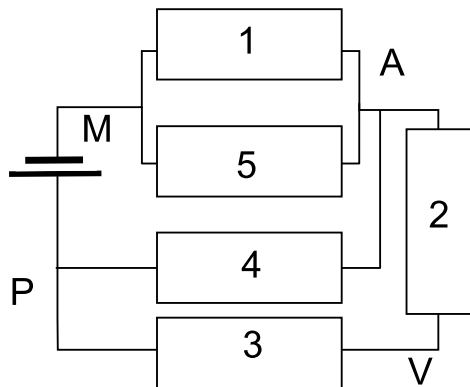
Autor: Jaan Kalda, lõppvoor, 2015, G 4

Takistid saavad omavahel olla kas kolmnurk- või tähtühenduses. Ampermeeter ei saa olla otse väljundklemmide vahele lülitatud, sest siis põleks see vastavale klemmipaarile pinge rakendamisel läbi. Samuti ei saa see olla ühegi takistiga rööbiti lülitatud, sest siis ei läbiks vastavat takistit kunagi vool ning sisuliselt tähendaks see takisti asendamist null-takistusega. Sildühendus vajaks viit elementi, meil on aga vaid neli. Niisiis peab ampermeeter olema ühendatud järjestikku ühe takistusega. Tähtühenduse korral ei näitaks ampermeeter voolu, kui pinge on rakendatud vastasklemmidele. Seega saab mustas kastis olla vaid kolmnurkühendus. Kui pinge rakendada nende klemmide vahele, mille vaheline kolmnurga külg ei sisalda ampermeetrit, siis on ampermeetri ahelas kaks järjestikust takistit, järelkult on takistus suurem ja vool väiksem. Ampermeeter peab seega olema sellel kolmnurga küljel, mis ühendab klemme  $B$  ja  $C$ , sest siis on voolutugevus suurim. Nüüd on lihtne leida kolmnurkühenduse küljel  $BC$  oleva takistuse väärtus:  $R_{BC} = U/I_{BC} = 2\ \Omega$ . Kui pinge rakendada klemmidele  $A$  ja  $B$ , siis moodustavad kolmnurga küljed  $AC$  ja  $CB$  ampermeetrit sisaldava järjestikühenduse,  $R_{AC} + R_{BC} = U/I_{AB} = 6\ \Omega$  ning  $R_{AC} = 6\ \Omega - 2\ \Omega = 4\ \Omega$ . Analoogselt leiame, et  $R_{AB} + R_{BC} = U/I_{AC} = 3\ \Omega$  ning  $R_{AB} = 3\ \Omega - 2\ \Omega = 1\ \Omega$ .

**L63 Viisnurk ★★★**

Autor: Jaan Kalda, lõppvoor, 2017, G 6

Joonistame lihtsustatud skeemi, arvestades et ampermeeter ja voltmeeter on ideaalsed. See tähendab, et ampermeetri võib asendada juhtmega ja voltmeetri lihtsalt kõrvaldada. Tähistame uue skeemi sõlmpunktid tähtedega  $P$  – patarei plussklemm;  $M$  – patarei miinusklemm;  $A$  – ampermeetri asukoht;  $V$  – voltmeetri alumine klemm. Takistid tähistame numbritega ühest viieni, liikudes päripäeva ja alustades viisnurga ülemisest tipust paremale jäävast takistist. Tulemus on toodud joonisel oleval skeemil.



Kirchoffi vooluseaduse tõttu on ampermeetri vool võrdne takistite 4 ja 5 voolude vahega, sest see osa voolust, mis läks läbi takisti 4, aga ei läinud läbi takisti 5, pidi järelkult läbi ampermeetri minema. Voltmeetri näit on võrdne klemmide  $M$  ja  $V$

vahelise pingega. Skeemis on takistid 1 ja 5 paralleelselt, seega on nende takistus kokku  $\frac{1}{2}\Omega$ . Takisti 4 on paralleelselt takistite 2 ja 3 jadaühendusega, seega on nende takistus

$$\frac{1}{\frac{1}{\Omega} + \frac{1}{2\Omega}} = \frac{2}{3}\Omega.$$

Terve skeemi kogutakistus on seega

$$R_K = \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{3}\right)\Omega = \frac{7}{6}\Omega,$$

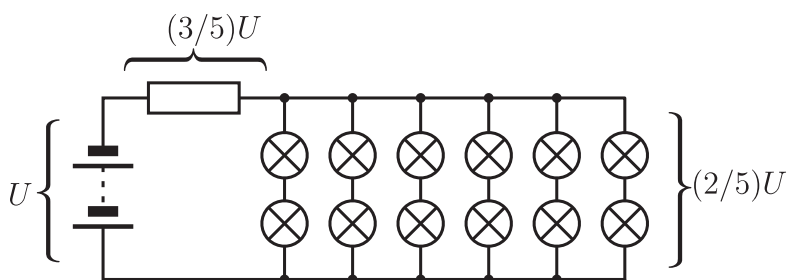
koguvool seega  $I = \mathcal{E}/R_K = 6\text{ A}$ . Takistitest 1 ja 5 läheb sama palju voolu läbi, mistõttu takisti 5 vool on  $I_5 = \frac{1}{2}I = 3\text{ A}$  ja pingelang sellel takistil on 3 V. Seega on punktide A ja P vahel pinge 4 V ja vool läbi takisti 4 on  $I_4 = \frac{4\text{ V}}{\frac{1}{2}\Omega} = 4\text{ A}$ . Ampermeetri näit on seega  $I_4 - I_5 = 1\text{ A}$ .

Pinge M ja V vahel on patarei pingest väiksem takisti 3 pinge võrra. Kuna punktide A ja P vahel oli pinge 4 V, siis arvestades, et takistid 2 ja 3 on samasugused ning jadamisi ühendatud, on takistil 3 pinge 2 V. See annab voltmeetri pingeks  $7\text{ V} - 2\text{ V} = 5\text{ V}$ .

#### L64 12 lampi ★★★

Autor: Valter Kiisk, piirkonnavor, 2018, G 8

a) Ilmselt tuleb takisti voolu piiramiseks ühendada järjestikku vooluallikaga (ükski teine kombinatsioon, sh takisti ärajätmine, ei võimalda kõiki 12 lampi lülitada nominaalpingele). Lambid saab põhimõtteliselt ahelasse ühendada 1-, 2-, 3-, 4-, 6- või 12-kaupa jadamisi ja seejärel rööbiti (st kõik lambid on ahelasse lülitatud ühetaoliselt). Iga kombinatsiooni korral arvutame esmalt ahela erinevate osade takistuse (ühikutes  $R$ , mis on üksiku lambi takistus) ja seejärel arvestame pinge jagunemist elementidel proportsionaalselt takistusega. Erinevate variantide kontrollimine näitab, et lambile langeb nominaalpinge näiteks juhul, kui ühendada lambid kahekaupa jadamisi ja seejärel 6 sellist ahelat rööbiti. Seega, õige skeem on selline, nagu kujutatud joonisel.



Kuni kõik lambid põlevad, langeb igale lambile pinge  $U/5$ , kus  $U$  on pingeallika klemmipinge. Koguvõimsus on vastavalt

$$P_1 = 12 \times \frac{U^2}{25R} = \frac{12U^2}{25R},$$

kus  $R$  on üksiku lambi takistus. Kui üks lampidest põleb läbi, siis ka sellega järjestikku ühendatud pirn lõpetab töötamise. Järele jääb vaid 5 rööbiti ühendatud ahelat ja seega lampide kogutakistus on  $2R/5$ . Võttes nüüd arvesse pinge jagunemist ahelas, saab pinge igal lambil olema

$$U \times \frac{2R/5}{2R/5 + R/2} \times \frac{1}{2} = \frac{2}{9}U$$

ja lampide koguvõimsus vastavalt

$$P_2 = 10 \times \frac{4U^2}{81R} = \frac{40U^2}{81R}.$$

Seega koguvõimsus kasvab  $P_2/P_1 = 250/243 \approx 1,029$  korda.

*Märkus.* Leidub veel mitu sobivat skeemi. Toome mõned neist.

- Ühendame lambid kolmekaupajadamisi ja seejärel 4 sellist ahelat rööbiti. Sel juhul osas *b*) kahaneb lampide koguvõimsus 1,080 korda.
- Ühendame lambid neljakauparööbiti ja seejärel 3 sellist plokki jadamisi takistiga. Sel juhul osas *b*) kahaneb lampide koguvõimsus 1,024 korda.

Töötavaid skeeme leidub rohkemgi.

#### L65 Elektriahela energia ★★★

Autor: Eero Vaher, piirkonnavor, 2014, G 8

Kuna tegemist on jadaühendusega, on ka voolutugevus läbi takisti ning pooli 300 mA. Poolis oli seega hetkel  $t_0$  energia

$$E_L = \frac{LI^2}{2} = 0,45 \text{ mJ}.$$

Summaarne pingelang takistil ning poolil peab olema võrdne kondensaatori pingega. Antud pooli pinge suuna korral saame kondensaatori pingeks  $U_C = IR + U$ . Kondensaatori energia on hetkel  $t_0$

$$E_C = \frac{CU_C^2}{2} = 0,64 \text{ mJ},$$

seega oli hetkel  $t_0$  rohkem energiat kondensaatoril.



**L66 Vooluallikad ★★★**

Autor: Sandra Schumann, lõppvoor, 2016, G 7

a) Kui lüliti on suletud, siis vooluallika vool saab läbi lüliti ringi käia ja ei mõjuta midagi. Võime selle asendada juhtmega. Lisaks paneme tähele, et  $5\text{ k}\Omega$  takisti ei mõjuta kuidagi pinget  $10\text{ k}\Omega$  takisti otstel. Liikudes  $10\text{ k}\Omega$  takisti vasakult poolt vastupäeva mööda skeemi edasi, saame, et potentsiaalide erinevus (pinge) sellel takistil on

$$U = -1\text{ V} + 3\text{ V} - 2\text{ V} = 0\text{ V}.$$

Selle abil saame leida voolutugevuse läbi takisti:

$$I = \frac{U}{R} = \frac{0\text{ V}}{10\text{ k}\Omega} = 0\text{ mA}.$$

Pinge  $U$  on lihtsalt patarei pinge  $U = 1\text{ V}$ .

b) Lüliti on avatud. Alustame seekord voolutugevusest. Me teame, et tänu konstantse voolu allikale läbib  $10\text{ k}\Omega$  takistit vool tugevusega  $I = 2\text{ mA}$ . Selle abil saame leida pinge takisti otstel:

$$U_R = IR = 2\text{ mA} \cdot 10\text{ k}\Omega = 20\text{ V}.$$

Liites takistil olevale pingele kahe patarei pinged otsa, saame märke jälgides leida pinge

$$U = 20\text{ V} - 2\text{ V} + 3\text{ V} = 21\text{ V}.$$

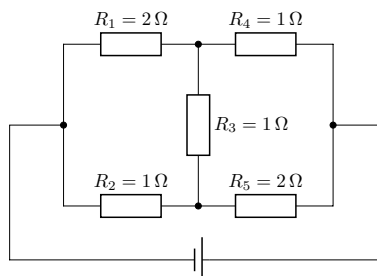
**L67 Takistuste tuvastamine ★★★**

Autor: Eero Vaher, lõppvoor, 2018, G 7

Elektrivoolul on võimalik ahelat läbida kolmel moel: läbi ülemise haru (takistid  $R_1$  ja  $R_4$ ), läbi keskmise haru (takistid  $R_2$ ,  $R_3$  ja  $R_4$ ) ning läbi alumise haru (takistid  $R_2$  ja  $R_5$ ). Pingelang igal takistil on võrdne selle takistuse ning seda läbiva voolutugevuse korrutisega ning pingelangude summa kõigil kolmel teekonnal peab olema võrdne pingega vooluallikal. Niisiis  $I_1 R_1 + I_4 R_4 = I_2 R_2 + I_3 R_3 + I_4 R_4 = I_2 R_2 + I_5 R_5 = U_0$ . Neist võrranditest saab tuletada avaldised  $I_1 R_1 = I_2 R_2 + I_3 R_3$  ning  $I_3 R_3 + I_4 R_4 = I_5 R_5$ , mis kirjeldavad pingelange skeemi vasakul ning paremal poolel. Lisaks saame panna kirja võrrandid voolutugevuste jaoks:  $I_1 = I_0 - I_2$ ,  $I_4 = I_1 + I_3$  ning  $I_5 = I_2 - I_3$ .

Paneme tähele, et kui  $R_1 = R_2$  ja  $R_4 = R_5$ , siis sümmeetriakaalutlustel peaks kehtima  $R_3 = 0$ .

On ilmne, et  $R_3 = 1\Omega$ . Oletame esmalt, et  $R_1 = R_4 = R_3$ . Sellisel juhul avaldub pingelang ülemises harus kujul  $(2I_1 + I_3)R_3 = U_0$ , millest järeldub  $I_1 = 6\text{ A}$  ning  $I_2 = 4\text{ A}$ . Vaadeldes voolu teekonda läbi keskmise haru, saame kirjutada  $I_2 R_2 + U_3 + (I_1 + I_3)R_3 = U_0$ , millest saab järeldada  $R_2 = R_5 = 1\Omega$ . Selline skeem rahuldab eespool mainitud sümmeetriat, seega tehtud eeldus pole tõene.



Oletame nüüd, et  $R_2 = R_5 = R_3$ . Skeemi alumise haru jaoks saame kirjutada  $(2I_2 - I_3)R_3 = U_0$  ehk  $I_2 = 8 \text{ A}$  ning  $I_1 = 2 \text{ A}$ . Pingelangud skeemi vasakus pooles peavad rahuldama võrrandit  $I_1 R_1 = (I_2 + I_3)R_3$ , millest järeldub  $R_1 = 5 \Omega$ . Sellisel juhul on aga pingelang skeemi ülemisel harul  $(2I_1 + I_3)R_1 = 30 \text{ V} \neq U_0$ .

Oletame nüüd, et  $R_1 = R_5 = R_3$ . Pingelang skeemi keskmisel harul on  $I_2 R_2 + U_3 + (I_0 - I_2 + I_3)R_2 = U_3 + (I_0 + I_3)R_2 = U_0$  ehk  $R_2 = R_4 = 1 \Omega$ . Tegemist on juba vaadeldud juhuga.

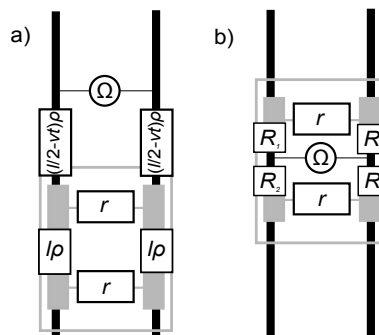
Ainus järelejäänud võimalus on  $R_2 = R_4 = R_3$ . Skeemi vasakust poolest saame  $(I_0 - I_2)R_1 = I_2 R_3 + U_3$ , paremast  $(I_2 - I_3)R_1 = U_3 + (I_0 - I_2 + I_3)R_3$ . Nende põhjal  $(I_0 - I_3)R_1 = 2U_3 + (I_0 + I_3)R_3$  ehk  $R_1 = 2 \Omega$ . On lihtne veenduda, et leitud väärtused rahuldavad kõiki võrrandeid pingelangude jaoks.

### L68 Raudtee ★★★★★

Autor: Mihkel Pajusalu, piirkonnavor, 2012, G 8

Ülesandes peab käsitlema kahte juhtu: a) kui mõõtepunkt ei asu vaguni rataste vahel ja b) kui mõõtepunkt asub vaguni rataste vahel. On ka näha, et ülesanne on sümmeetriline mõõtepunkti suhtes, st takistuse käitumine enne seda, kui vaguni keskpunkt möödub mõõtepunktist ja pärast seda, on üksteise peegelpildid. Vaatleme alguses juhtu a). On näha, et sellel juhul on vagunil fikseeritud takistus, millele liitub vaguni ja mõõtepunkti vahele jäävate rööbastek takistus.

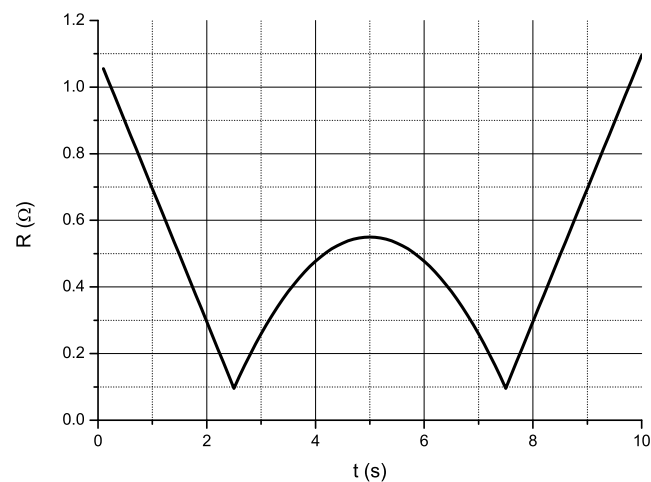
$$R = 2(l/2 - vt)\rho + \frac{1}{\frac{1}{r} + \frac{1}{r+2l\rho}}.$$



Seejärel vaatleme juhtu b). Sellel juhul moodustub takistus kahest rööpühenduses olevast osast, mille takistus muutub vaguni liikumise käigus.  $R_1 = (l - vt')\rho$  ja  $R_2 = vt'\rho$ , kus  $t' = t - s/v$  on aeg, mis on möödunud hetkest, kui esimene rattapaar möödus mõõtepunktist. Seega saab takistuse käitumise leida valemist:

$$R = \frac{1}{\frac{1}{r+2R_1} + \frac{1}{r+2R_2}} = \frac{1}{\frac{1}{r+2(l-vt')\rho} + \frac{1}{r+2vt'\rho}}.$$

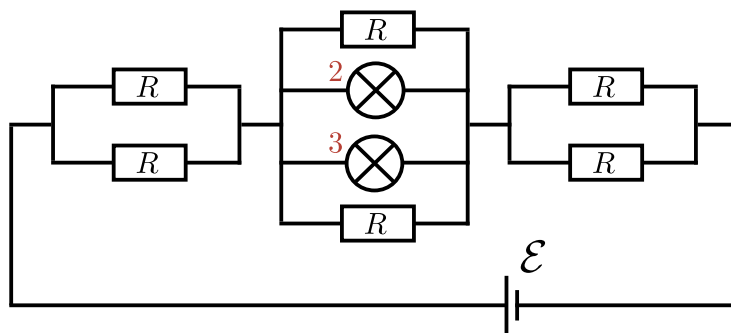
Tulemuseks on graafik:



### L69 Lambid ★★★★★

Autor: Mihkel Kree, lahtine, 2013, G 9

Paneme tähele, et skeemi sümmeetria tõttu ei läbi vool lampi 1, sest selle otstel on võrdsed potentsiaalid. Sama kehtib lampi 4 kohta. Joonistame skeemi ümber, ühendades lampi 1 otspunktid omavahel kokku, sama teeme ka lampi 4 otspunktidega. Saame võrdlemisi lihtsa skeemi, mis koosneb kolmest jadamisi ühendatud paralleelühendusest, nagu joonisel näidatud.



Arvutame ahela kogutakistuse

$$R_t = \frac{R}{2} + \frac{1}{\frac{1}{R} + \frac{1}{r} + \frac{1}{r} + \frac{1}{R}} + \frac{R}{2} = \frac{4}{3}R,$$

kus arvestasime, et  $r = 2R$ , kusjuures keskmise paralleelühenduse takistuseks tuli  $R_k = R/3$ , mis moodustab  $1/4$  osa kogutakistusest, seega langeb keskmisele osale

ka  $1/4$  osa patarei pingest ehk  $V_k = \mathcal{E}/4 = 5/4 \text{ V}$ . Nüüd on juba lihtne avaldada lampides 2 ja 3 eralduv võimsus

$$P_2 = P_3 = \frac{V_k^2}{r} = \frac{25}{16 \cdot 20} \text{ W} \approx 0,08 \text{ W}.$$

Lampides 1 ja 4 mõistagi võimsust ei eraldu.

#### L70 Diodid ★★★★★

Autor: Jaan Kalda, lahtine, 2012, G 8

Esimesele diodile ( $D_1$ ) ei saa langeda üle ühe voldi, mistõttu järgnevatele ( $D_2$  ja  $D_3$ ) peab langema alla ühe voldi (takisti võtab ka endale teatud pinge). Seetõttu on ülejäänud diodid suletud, st nullvooluga ning need võib skeemilt "välja lõigata". Selle tulemusel moodustub esimese diodi taha jada- ja rööpühenduste kombinatsioon kogutakistusega  $4 \text{ k}\Omega$ , millele langeb diodipinge  $1 \text{ V}$  ning mida läbib vool  $1 \text{ V}/4 \text{ k}\Omega = 0,25 \text{ mA}$ . Esimesele kahe kilo-oomisele takistile langeb pinge  $3 \text{ V} - 1 \text{ V} = 2 \text{ V}$ , mistõttu selle vool on  $2 \text{ V}/2 \text{ k}\Omega = 1 \text{ mA}$ . Järelikult on esimese diodi vool  $1 \text{ mA} - 0,25 \text{ mA} = 0,75 \text{ mA}$  ning võimsus  $0,75 \text{ mA} \cdot 1 \text{ V} = 0,75 \text{ mW}$ . Suletud diodidel võimsust loomulikult ei eraldu.

#### L71 Oktaeder ★★★★★

Autor: Jaan Kalda, lahtine, 2016, G 8

Et ampermeetrite sisetakistus on 0, võime need lühistada: kõigis nendes tippudes, kuhu viivad ampermeetrid, on potentsiaalid võrdsed. Sümmeetria tõttu peab see potentsiaal jääma täpselt patareiklemmide potentsiaalide vahepeale, seega on igale takistile rakendatud pinge  $3 \text{ V}$ . Niisiis on 1-oomistes takistites vool  $3 \text{ A}$  ja 2-oomistes  $1,5 \text{ A}$ . Sümmeetria tõttu jaguneb see voolude vahe igas tipus võrdselt kahe naaber-ampermeetri vahel, st kõikide ampermeetrite näidud on  $0,75 \text{ A}$ .

#### L72 Kondensaator ★★★★★

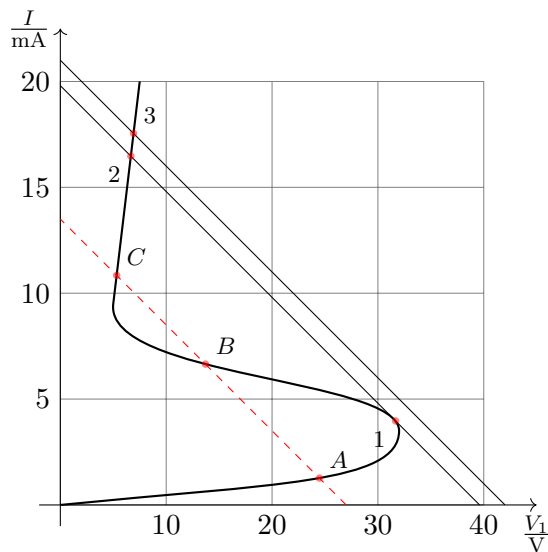
Autor: Jaan Kalda, lõppvoor, 2018, G 9

Teises staadiumis eralduv soojus on võrdne kondensaatori energiaga lüliti avamise hetkel,  $Q_2 = q_C^2/2C$ , kus  $q_C$  on kondensaatori laeng sel hetkel. Kogu vabanev soojusenergia on võrdne patarei kogutööga

$$A = (q_C + q_R)\mathcal{E} = Q_1 + Q_2,$$

kus  $q_R$  on otsitav lampi läbiv laeng. Seega

$$q_R = \frac{Q_1 + Q_2}{\mathcal{E}} - \sqrt{2CQ_2}.$$



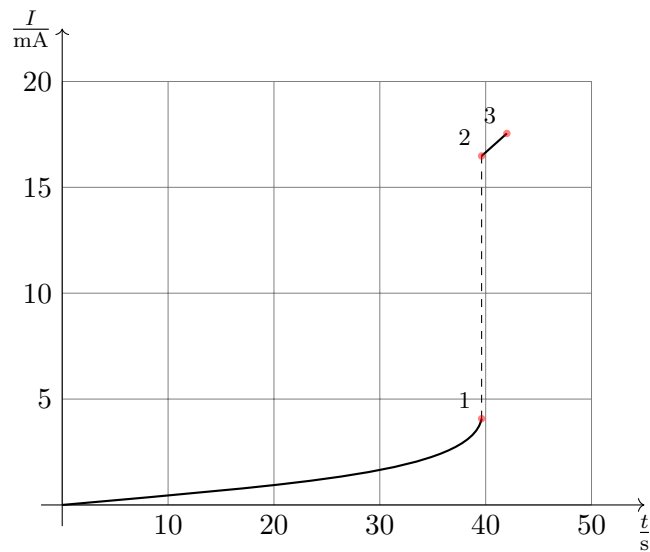
### L73 Türistor ★★★★★

Autor: Jaan Toots, lõppvoor, 2015, G 10

Kirchhoffi esimese seaduse põhjal peab suvalise pinge ja voolutugevuse korral kehtima  $V_1 = U - IR$ , kus  $V_1$  on pinget türistoril  $T_1$ . Füüsiliselt reaalsed on sellised olukorrad, kus  $V_1$  ja  $I$  on türistori volt-amperkarakteristiku poolt lubatud. Üldjuhul on mingi pinget  $U$  korral kuni kolm lahendit (punane sirge graafikul); punkt  $B$  ei ole stabiilne, kuna vastaks negatiivsele takistusele, ning punktid  $A$  ja  $C$  on lubatud, kuid vastavad erinevatele režiimidele, mis sõltuvad sellest, kuidas punkti ni jõutud on. Ülaltoodu põhjal on võimalik skitseerida voolutugevuse graafik. Alguses suureneb voolutugevus ligikaudu lineaarselt, sest türistor käitub sarnaselt lineaarsele takistile takistusega  $r_1 = 20 \text{ k}\Omega$ , mistõttu on voolutugevuse graafiku algne tõus  $\frac{1}{R+r_1} = \frac{1}{22 \text{ k}\Omega}$ . Punkti 1 (pinge 39,6 V, voolutugevus 4,1 mA) läheduses hakkab voolutugevus kiiresti kasvama ning hüppab punkti 2 (pinge 39,6 V, voolutugevus 16,5 mA). Edasi käitub türistor taas lineaarselt takistusega  $r_2 = 0,24 \text{ k}\Omega$  kuni lõpp-punkti 3 (pinge 42 V, voolutugevus 17,5 mA). Voolutugevuse  $I_a$  saab täpsemalt leida, kasutades Kirchhoffi seaduseid ja türistori takistust lineaarselt lähendades. Siis saame  $I_a = 17,54 \text{ mA}$ .

Pärast lüliti sulgemist lahendame vooluringi lähtuvalt Kirchhoffi seadustest.  $U = IR + V_1 = IR + V_2$ ,  $I = I_1 + I_2$ , kus  $I_1^0 = -11,5 \text{ mA}$  on türistori volt-amperkarakteristiku teise lineaarse osa algordinaat. Lahendamiseks eeldame, et  $T_2$  on lineaarses režiimis enne hüpet (sarnaselt punktile  $A$ ) ning  $T_1$  pärast hüpet (sarnaselt punktile  $C$ ). Saame  $I_1 = I_1^0 + \frac{V_1}{r_2}$  ja  $I_2 = \frac{V_2}{r_1}$ . Lahendades saame türistoride pingeteks  $V_1 = V_2$ , voolutugevuseks läbi takisti  $I = I_1^0 + V_1/r_1 + V_1/r_2$ , pingeks vooluallikal

$$U = I_1^0 R + V_1 R/r_2 + V_1 R/r_1 + V_1$$



ning pingeteks türistoridel

$$V_1 = V_2 = \frac{U - I_1^0 R}{R/r_1 + R/r_2 + 1} = 6,84 \text{ V}.$$

Seega  $I_1 = 17,2 \text{ mA}$  ja  $I_2 = 0,34 \text{ mA}$ , mis õigustab tehtud eelduseid.

#### L74 Kondensaator ★

Autor: Madis Ollikainen, lahtine, 2012, G 3

Kuulikele mõjub nii raskusjõud  $mg$  kui ka elektrostaatiline jõud  $QE = QU/d$ . Nendest leiame kiirenduse  $a$ :

$$F = QE - mg \Rightarrow a = \frac{F}{m} = \frac{U}{d} \frac{Q}{m} - g.$$

Konstantse kiirendusega liikudes on plaatidevahelise kauguse ja selle läbimiseks kuluva aja seos  $d = \frac{at^2}{2}$ . Niisiis

$$d = \frac{\left(\frac{U}{d} \frac{Q}{m} - g\right) t^2}{2} \Rightarrow \frac{2d}{t^2} = \frac{U}{d} \frac{Q}{m} - g.$$

Siit saame massi ja laengu suhteks

$$\frac{m}{Q} = \frac{t^2 U}{(2d + gt^2) d}.$$

**L75 Elektron ★★**

Autor: Mihkel Kree, lahtine, 2017, G 3

Elektriväljas liikuvale elektronile mõjub allapoole suunatud vertikaalne jõud  $qE$ , millele vastab elektroni kiirendus  $a = qE/m$ . Seega võime elektroni liikumist analüüsida analoogiliselt õhku visatud kivi liikumisega: a) elektron liigub mööda parabolse trajektoori; b) elektroni kiiruse horisontaalkomponent  $v_0$  ei muutu; c) elektroni kiiruse vertikaalkomponent kasvab ajas kujul  $v_y = at$ ; d) elektroni horisontaalne nihe kasvab ajas kujul  $x = v_0 t$ ; e) elektroni vertikaalne nihe kasvab ajas kujul  $y = at^2/2$ .

Elektroni kiirus plaatide vahelisest ruumist väljumisel on minimaalne siis, kui elektroni trajektoor möödub alumise plaadi parema otsa lähedalt. Sellest väiksema kiiruse korral lendaks elektron vastu alumist plaati ning ei pääseks seetõttu plaatide vahelisest ruumist välja.

Olgu elektroni algkiirus  $v_0$ . Elektronil kulub plaatide vahelise ruumi läbimiseks aeg  $t = l/v_0$ , mille jooksul peab vertikaalne nihe olema võrdne plaatide vahelise kaugusega  $d = at^2/2$ . Siit saame avaldada elektroni plaatide vahel liikumise aja  $t = \sqrt{2d/a}$ , elektroni vertikaalse kiiruse plaatide vahelisest ruumist väljumisel  $v_y = at = \sqrt{2ad}$  ning elektroni minimaalse vajaliku algkiiruse  $v_0 = l/t = \sqrt{al^2/2d}$ . Nüüd saame avaldada otsitava minimaalse lõppkiiruse mooduli:

$$v_{\min} = \sqrt{v_y^2 + v_0^2} = \sqrt{2ad + \frac{al^2}{2d}} = \sqrt{\frac{qE(4d^2 + l^2)}{2md}}.$$

**L76 Laengud ★★★**

Autor: Mihkel Kree, piirkonnavor, 2017, G 9

Olgu keskmise kera nihe  $y$ . Keskmise kera kaugus kummastki äärmisest kerast on nüüd  $l = \sqrt{d^2 + y^2}$ . Kumbki äärmine kera mõjutab keskmist kera jõuga  $F = \frac{kqQ}{l^2}$ , mille vertikaalkomponent on  $F_y = -\frac{y}{l}F$ . Kokku mõjub keskmisele kerale vertikaaljõud  $2F_y$ , millest saame seose keskmise kera kiirenduse jaoks  $ma = 2F_y$ . Et  $y \ll d$ , siis  $l \approx d$ , millest saame lihtsustada liikumisvõrrandi kujule

$$a = -\frac{2kQq}{md^3}y.$$

See võrrand kirjeldab harmoonilist võnkumist perioodiga

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{md^3}{2kQq}}.$$

*Märkus.* perioodi ja sageduse valem on võimalik leida analoogiast vedru võnkumisega, kus  $ma = -kx$  ja  $T = 2\pi\sqrt{m/k}$ .

**L77 Pendel ★★★★★**

Autor: Jonatan Kalmus, lõppvoor, 2018, G 6

Kuna liikumine toimub vaid vertikaalsihis, võtame  $x$ -teljeks vertikaalsihi suunaga alla. Algsest jõudude tasakaalust saame

$$Mg = kx_0,$$

kust kuuli algkõrgus on  $x_0 = \frac{Mg}{k}$ . Teame, et vedru otsa asetatud kuuli pool võnkeperioodi on

$$\tau = \pi \sqrt{\frac{M}{k}}.$$

On selge, et see ei sõltu gravitatsioonivälja tugevusest. Kuna nii gravitatsioonivälja kui ka elektrivälja poolt tekitatud jõud käituvad analoogselt, võime järeldada, et võnkeperiood ei sõltu ka elektrivälja tugevusest ning jääb konstantseks. Seega muudab elektrivälja jõud vaid kuuli tasakaaluasendit iga kord, kui kuul muudab oma liikumissuunda (sest ülesandes on öeldud, et elektriväli on alati kuuli liikumise suunas) ehk iga poole võnkeperioodi  $\tau$  järel. Alla liikumisel on elektriväli suunatud alla ning saame kirja panna uue jõudude tasakaalu

$$Mg + Eq = kx_{\downarrow}.$$

Seega on tasakaaluasend alla liikumisel

$$x_{\downarrow} = \frac{Mg}{k} + \frac{Eq}{k} = x_0 + \Delta x.$$

Analoogselt saame leida tasakaaluasendi üles liikumisel, kuid nüüd on elektriväli suunatud üles:

$$x_{\uparrow} = \frac{Mg}{k} - \frac{Eq}{k} = x_0 - \Delta x.$$

On selge, et algselt elektrivälja sisselülitamisel, kui elektriväli on alla suunatud, muutub tasakaaluasend hetkeliselt vastavaks, kuid kuuli asukoht jääb algselt samaks. Seega pole kuul enam tasakaalus, vaid uuest tasakaaluasendist kaugusel  $\Delta x$  ning hakkab võnkuma amplituudiga  $A_1 = \Delta x$  tasakaaluasendi  $x_{\downarrow}$  ümber. Aja  $\tau$  järel on kuul jõudnud kaugusele  $x_0 + 2\Delta x$ . Kuna kuul hakkab nüüd üles liikuma, muutub ka kuuli tasakaaluasend koos elektriväljaga vastavaks ning üles minnes võngub kuul juba amplituudiga  $A_2 = 3\Delta x$  tasakaaluasendi  $x_{\uparrow}$  ümber. On selge, et iga tasakaaluasendi vahetumisega kasvab kuuli amplituud edaspidi  $2\Delta x$  võrra. Tasakaaluasend vahetub aga iga ajavahemiku  $\tau$  järel. Nüüd leiame kuuli asukohta ülesandes antud ajahetkel, milleks on  $7\tau$ . Selle aja jooksul liigub kuul korra algasendist alla, ning teeb siis 3 täisvõnget, jõudes nende järel uuesti alla. Pärast algasendist alla jõudmist on kuuli asukoht  $x_0 + 2\Delta x$ . Seejärel liigub kuul üles asendisse  $x_0 - 4\Delta x$  ja uuesti alla asendisse  $x_0 + 6\Delta x$ . Kauguse absoluutväärtus algasendist suureneb seega iga  $\tau$  järel  $2\Delta x$  võrra.  $7\tau$  järel on kaugus tasakaaluasendist seega  $7 \cdot 2\Delta x = 14\Delta x$ . Nagu enne selgeks tegime, on kuul seega küsitud ajahetkel  $7\tau$  algasendist  $x_0$   $14\Delta x = 14 \frac{Eq}{k}$  võrra all pool.



**L78 Koonus ★★★★★**

Autor: Stanislav Zavjalov, piirkonnavor, 2012, G 10

Punktlaengu  $q'$  poolt tekitatud potentsiaal on

$$\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q'}{r}.$$

Seega koonuse poolt tekitatud potentsiaal selle tipus on võrdeline summaarse laenguga ning pöördvõrdeline koonuse mõne lineaarmõõtmega. Olgu suurema koonuse laeng  $Q$  ja väiksema (mis on osa suuremast koonusest)  $q$ , siis nende sarnasuse tõttu

$$\frac{q}{Q} = \frac{h^3}{H^3}.$$

Kui suurem koonus tekitab punktis  $S$  potentsiaali  $\varphi_0$ , siis väiksem koonus (olles veel suurema koonuse osana) tekitab seal potentsiaali  $\varphi_1$ , mille kohta kehtib seos

$$\frac{\varphi_1}{\varphi_0} = \frac{q}{h} \frac{H}{Q} = \frac{h^2}{H^2},$$

kust avaldame

$$\varphi_1 = \varphi_0 \frac{h^2}{H^2}.$$

Potentsiaali jaoks kehtib superpositsiooniprintsiip, seega väiksema koonuse eemaldamine toob kaasa vastava panuse kadumise. Seega otsitav uus potentsiaal on

$$\varphi' = \varphi_0 - \varphi_1 = \varphi_0 \left(1 - \frac{h^2}{H^2}\right).$$

**L79 Laengud ★★★★★**

Autor: Jaan Kalda, lõppvoor, 2012, G 9

**a)** Kui võrd potentsiaal sõltub ainult  $x$ -koordinaadist, siis on elektriväli kõikjal  $x$ -telje sihiline ning impulsi  $y$ -komponent säilib. Seega, kui osake siseneb kõrgema potentsiaaliga piirkonda, siis väheneb vaid kiiruse  $x$ -komponent ning trajektoor on selline, nagu oleks valguskiirel optiliselt hõredamat kihti läbides.

**b)** Täielik "sisepeegeldus" toimub siis, kui positiivse  $x$ -suunaga seotud kineetiline energia on suurem kui  $qU$ , mis vastab kiirusvektori ja  $x$ -telje vahelisele nугale

$$\arccos \sqrt{\frac{qU}{4qU}} = \frac{\pi}{3}.$$

Ainult sellest nurgast väiksemate nurkade puhul saab osake läbida kõrgema potentsiaaliga kihti ning selliset osakeste suhteline hulk on

$$\xi = \frac{\pi}{3} \div \pi = \frac{1}{3}.$$

**L80 Kondensaator ★★★★★**

Autor: Stanislav Zavjalov, lõppvoor, 2013, G 10

Plaatkondensaatori mahtuvus on  $C = \epsilon_0 S/d$ , ning seega esialgu on kondensaatoril laeng

$$Q_0 = CU_0 = \epsilon_0 SU_0/d$$

ning koguenergia

$$E = CU_0^2/2 = \epsilon_0 SU_0^2/2d.$$

Et kondensaator on patareist lahti ühendatud, laeng säilib; aga pinge muutub, kui viime sisse metallplaadi.

Olgu metallplaadi kaugus ühest kondensaatori plaadist  $x$ , siis on tegemist kahe jadamisi plaatkondensaatoriga, üks plaadivahelise kaugusega  $x$  ning teine kaugusega  $d - (d/2 + x) = d/2 - x$ . Uute kondensaatorite kogumahtuvuse  $C'$  leiame seosest

$$1/C' = 1/C(x) + 1/C(d/2 - x) = \frac{x}{\epsilon_0 S} + \frac{d/2 - x}{\epsilon_0 S} = \frac{d/2 - x + x}{\epsilon_0 S} = \frac{d}{2\epsilon_0 S},$$

kust  $C' = 2C$ . Seega süsteemi uus koguenergia on

$$E' = Q_0^2/2C' = \epsilon_0 SU_0^2/4d$$

ning ei sõltu plaadi täpsest asukohast kondensaatori sees. Süsteemi uue ja vana koguenergia vahe peab võrduma välisjõudude poolt sooritatud tööga, mis sel juhul tuleb negatiivne:

$$E' = E + A \rightarrow A = E' - E = -\epsilon_0 SU_0^2/4d.$$

Et välisjõu töö on negatiivne, tõmbub plaat ise kondensaatori sisse.

**L81 Kondensaator ★★★★★**

Autor: Jaan Kalda, lahtine, 2017, G 7

Vaatleme kahe dielektrikuga kondensaatorit kui kahte järjestikku ühendatud plaatkondensaatorit. Selleks asetame mõttelise metallplaadi dielektriliste kihtide eralduspinnale. Ühel kondensaatoril on seal laeng  $+q$ , teisel  $-q$ , seega vaba laeng on mõttelisel metallplaadil null (nii nagu vaja, sest tegelikult seal ju metallplaati pole). Alge dielektrikuga kondensaatori mahtuvus  $C = \epsilon_0 S/d$ . Mõtteliste kondensaatorite mahtuvused on  $C_1 = S\epsilon_0\epsilon/(d/2) = 2\epsilon C$  ja  $C_2 = S\epsilon_0 2\epsilon/(d/2) = 4\epsilon C$ , seega summaarse mahtuvuse pöördväärtus

$$C' = \frac{C_1 C_2}{(C_1 + C_2)} = \frac{4}{3}\epsilon C.$$

Dielektrikuga kondensaatori mahtuvus erineb dielektrikuga kondensaatori mahtuvusest, sest lisaks vabale laengule  $q$  metallplaadil on veel dielektriku pinnal vastasmärgiline dielektriku polarisatsioonist tingitud (dielektrikust mitte-eraldav) laeng  $-q'$ . Summaarne laeng  $Q = q - q'$  on selline, nagu on antud pinge puhul samasugusel, ilma dielektrikuga kondensaatoril. Olgu ühe mõttelise kondensaatori kogulaeng (vaba laeng + dielektriku laeng)  $Q_1 = q - q'_1$  ja teisel  $Q_2 = q - q'_2$ ,

siis sellel plaadil, mis jääb dielektrikute eralduspinnale, on kondensaatori plaatide laengumärke arvestades kogulaeng  $Q_1 - Q_2 = q'_2 - q'_1$ . Seega, dielektrikute eralduspinnal oleva kogulaengu  $q'_2 - q'_1$  saame leida, kui selliste dielektrikute kondensaatorite laengute vahe, mille pinge võrdub vastavale dielektrikukihile langeva pingega.

Mõttelistel kondensaatoritel on ühesugune laeng, seose  $U = q/C$  tõttu on pinge pöördvõrdeline mahtuvusega, st ühele poole (kus dielektriline läbitavus on  $\epsilon$ ) langeb pinge  $2U_0/3$  ja teisele poole (kus dielektriline läbitavus on  $2\epsilon$ )  $U_0/3$ . Kui dielektriku kihti ei oleks, siis oleks kummagi mõttelise kondensaatori mahtuvus  $2C$ . Seega laeng mõttelistel kondensaatoritel oleks vastavalt  $Q_1 = 4U_0C/3$  ja  $Q_2 = 2U_0C/3$ , mistõttu kogulaeng dielektrikute eralduspinnal

$$q' = Q_1 - Q_2 = 2CU_0/3.$$

#### Alternatiivne lahendus

Olgu kondensaatori plaadil laeng  $q$ , siis Gaussi teoreemist kondensaatori plaadi jaoks saame seose  $SD = q$ , millest  $D = q/S$ . Dielektrikute eralduspinnal on  $D$ -vektori normaalkomponent pidev, seega piirkonnas, kus dielektriline läbitavus on  $\epsilon$ , on  $E_1 = D/\epsilon\epsilon_0$ , teises piirkonnas  $E_2 = D/2\epsilon\epsilon_0$ . Järelikult

$$U_0 = E_1 \frac{d}{2} + E_2 \frac{d}{2} = (Dd/2\epsilon\epsilon_0)(1 + \frac{1}{2}) = \frac{3}{4}Qd/\epsilon\epsilon_0S,$$

millest

$$C' \equiv Q/U_0 = \frac{4}{3}\epsilon\epsilon_0S/d = \frac{4}{3}C\epsilon.$$

Laengu piirpinnal  $q'$  leiame Gaussi teoreemi abil mõttelise "karbi" jaoks, mis hõlmab piirpinda:

$$q' = (E_1 - E_2)\epsilon_0S = DS/2\epsilon = q/2\epsilon = U_0C'/2\epsilon = \frac{2}{3}CU_0.$$

#### L82 Laengutega pulk ★★★★★

Autor: Jaan Kalda, piirkonnavor, 2015, G 10

a) Seni, kuni üks laeng on piirkonnas  $x > 0$  ning teine piirkonnas  $x < 0$ , on pulgale mõjuv summaarne jõud 0, mis tähendab, et pulk liigub konstantse kiirusega.

Alumisest asendist üles liikudes läbib pulk niisuguses režiimis (mil eri laengud viibivad eri piirkondades) vahemaa  $L$  ning sellele kuluv aeg on  $L/v$ ; sama kaua kulub ka antud vahemaa ülevaalt alla läbimiseks, mis panustab kogu perioodi jaoks  $t_1 = 2L/v$ . Täispunktid anda sõltumata sellest, kas  $t_1$  on leitud poolperioodide kaupa (nagu siin) või veerand- või täisperioodi abil.

Kui mõlemad laengud on piirkonnas  $x > 0$ , siis mõjub pulgale summaarne konstantne jõud  $2E_0q$  ning Newtoni II seaduse kohaselt liigub pulk konstantse kiirendusega  $a = 2E_0q/m$ . Pulk siseneb antud piirkonda kiirusega  $v$  ning väljub kiirusega  $-v$ , mistõttu kiiruse muut on  $2v$ ; teisalt, kiiruse muut on kiirenduse ja aja korruktis, seega nimetatud piirkonnas viibimise aeg on  $2v/a = mv/E_0q$ . Et sama protsess

kordub ka piirkonnas  $x < 0$ , siis kogupanus võnkumisperioodi on  $t_2 = 2mv/E_0q$  ning lõppvastust

$$T = \frac{2L}{v} + \frac{2mv}{E_0q}.$$

**b)** Kui pulk on nihkunud vahemaa  $x$  võrra, siis ühes piirkonnas viibiva pulgaosa pikkus on vähenenud  $x$  võrra ning teises piirkonnas kasvanud  $x$  võrra; eri piirkondades viibivatele samapikkustele pulgalõikudele mõjuvad jõud kompenseerivad üksteist ning kompenseerimata jääb lõikude pikkuste vahe  $2x$ , millele vastab laeng  $q = 2xQ/L$  ning resultantjõud  $F = 2xQE_0/L$ . Seega kirjeldab pulga liikumist võrrand

$$a = \ddot{x} = -2xQE_0/Lm;$$

see on pendli võrrand, kus kiirendust ja nihet siduv võrdetegur annab ringsageduse ruudu,  $\omega^2 = 2QE_0/Lm$ . Seega periood

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{Lm}{2QE_0}}.$$

### L83 Kuulid ★★★★★

Autor: Jaan Kalda, lahtine, 2016, G 10

Metallkeradele indutseeritakse elektrivälja poolt võrdsed ja vastasmärgilised laengud  $\pm q$ ; kui võrd traat on peenike, siis võime ignoreerida sellel olevaid laenguid. Et traat on juhtivast materjalist, on süsteem ekvipotentsiaalne, ning võrdne süsteemi sümmeetriatasandis lõpmatuses paiknevate punktide potentsiaaliga:

$$E\frac{l}{2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R} \Rightarrow q = 2lE\pi\epsilon_0 R.$$

Seetõttu mõjub kummalegi kuulile elektrostaatiline jõud  $qE$ , mille tasakaalustab niidi pinget:

$$T = 2lE^2\pi\epsilon_0 R.$$

### L84 Kaks kuuli ★★★★★

Autor: Jaan Kalda, lõppvoor, 2018, G 10

Elektriväli indutseerib kuulidele vastasmärgilised laengud, mis tagavad, et kuulide potentsiaalid on võrdsed. Olgu esimese kuuli koordinaat  $z$ ; siis väline väli tekitab kuulide vahel potentsiaalide vahe  $Ez$ ; see peab võrduma kuulidele indutseeritud laengute  $\pm q$  tekitatud potentsiaalide vahega

$$\frac{kq}{R} - \frac{(-q)k}{R} = \frac{2kq}{R}.$$

Seega  $q = EzR/2k$ . Esimesele kuulile mõjub elektriväljas jõud  $Eq = E^2zR/2k$ ; näeme, et see on võrdeline kaugusega ja toimib sarnaselt vedruga. Seega teeb summaarne jõud tööd  $E^2z^2R/4k$ . Kui ka teine kuul siseneb elektrivälja, siis muutub

summaarne jõud hetkeliselt nulliks ning kuulid jätkavad liikumist konstantse kiirusega, mis on leitav energia jäävuse seadusest:

$$\frac{E^2 z^2 R}{4k} = \frac{2mv^2}{2},$$

millest

$$v = \frac{Ez}{2} \sqrt{\frac{R}{km}}.$$

Seni, kui kuulid kiirenevad, on liikumisvõrrandiks

$$\ddot{z} = \frac{E^2 z^2 R}{4km},$$

millest nii  $z$  kui  $v = \dot{z}$  on eksponentsiaalsed funktsioonid ajast. Seega on kiiruse graafikuks eksponentsiaalselt kasvav kõver, mis läheb hüppeliselt üle kontsantseks funktsiooniks (hetkel, kui ka teine kuul siseneb elektrivälja).

### L85 Kolm kuuli ★★★★★

Autor: Jaan Kalda, lõppvoor, 2016, G 10

**a)** Sümmeetria tõttu on äärmiste kuulide kiirused sama magnituudiga, aga sümmeetriatelje suhtes peegeldatud. Kuulide ruutkeskmise on maksimaalne siis, kui elektriline potentsiaalne energia on minimaalne, st siis, kui nööride vahel on sirg-nurk. Veendume, et antud olukorras on  $A$  kiirus maksimaalne. Olgu  $A$  kiirus  $\vec{v}$ , äärmiste kuulide  $\vec{v}$ -ga paralleelne kiiruse komponent  $w$  ning ristkomponent  $u$ . Impulsi jäävusest  $v = 2w$ . Kuna ainsana muutub kahe äärmise kuuli vahekaugus, saame kirja panna energia jäävuse seaduse alghetkel ning siis, kui äärmiste kuulide vahekaugus on  $d$ :

$$\frac{kq^2}{L} = \frac{3mv^2}{4} + mu^2 + \frac{kq^2}{d}.$$

Seega

$$v = \sqrt{\frac{4}{3} \left( \frac{kq^2}{m} \left( \frac{1}{L} - \frac{1}{d} \right) - u^2 \right)}.$$

Näeme, et  $v$  on maksimaalne siis, kui  $d$  on maksimaalne ja  $|u|$  minimaalne.  $d$  on maksimaalne siis, kui nööride vahel on sirg-nurk, siis ka  $u = 0$ . On selge, et antud olukord vastab maksimaalsele  $v$  väärtusele. Geomeetriast,  $d = L / \cos 60 = \frac{2L}{\sqrt{3}}$ . Niisiis,

$$v = \sqrt{\frac{4}{3} \frac{kq^2}{m} \left( \frac{1}{L} - \frac{\sqrt{3}}{2L} \right)} = q \left( \sqrt{3} - 1 \right) \sqrt{\frac{k}{3mL}}.$$

*Märkus.* Äärmiste kuulide maksimaalse kiiruse leidmine on keerulisem. Nende kiirus ei ole maksimaalne, kui nöörid on ühel sirgel.

**b)** Joonisel laeng  $A$  liigub sümmeetria tõttu vertikaalselt, seega niidi  $AB$  hetkeline pöörlemiskese peab asuma horisontaaljoonel  $OA$ . Massikese  $M$  jääb paigale,

mistõttu niidi punkt  $D$ , mis jagab lõigu  $AB$  vahekorras 2:1, liigub horisontaalselt, seetõttu punkti  $D$  ja hetkelist pöörlemiskeset  $O$  ühendav sirge peab olema vertikaalne. Nüüd saab ilmseks, et  $O$  on võrdkülgse kolmnurga  $ABE$  keskpunkt, mistõttu lõik  $OB$  on vertikaali suhtes  $30^\circ$  nurga all ning seega punkt  $B$  hakkab liikuma horisontaali suhtes  $30^\circ$  nurga all ning selles sihis peab olema ka laengu  $B$  kiirendus. Projitseerides laengu  $B$  jaoks Newtoni II seaduse lõigu  $AB$  ristsihile, saame

$$ma \cos 30^\circ = \cos 60^\circ \frac{kq^2}{L^2},$$

millest

$$a = \tan 30^\circ \frac{kq^2}{mL^2} = \frac{kq^2}{mL^2 \sqrt{3}}.$$

Impulsi jäävuse tõttu on laengu  $A$  kiirendus  $2a \sin 30^\circ = a$ , st sama, mis teistel laengutel.

### L86 Õhupall ★

Autor: Eero Vaher, lõppvoor, 2015, G 1

Suurima võimaliku koormise massi korral on õhupalli keskmine tihedus võrdne õhu tihedusega ehk  $\rho = \frac{m+M}{V}$ , kus  $m$  on õhupallis oleva gaasi mass. Siit saame avaldada  $m = \rho V - M$ . Lisaks kehtib ideaalse gaasi seadus  $pV = \frac{m}{\mu} RT$ , millest saame  $m = \frac{pV\mu}{RT}$ . Nende kahe võrrandi põhjal saame kirjutada

$$\frac{pV\mu}{RT} = \rho V - M$$

ehk

$$V = \frac{M}{\rho - \frac{p\mu}{RT}} = 193 \text{ m}^3.$$

### L87 Õhupalli vägi ★★

Autor: Eero Vaher, lahtine, 2013, G 4

Õhupallile mõjub Maal üleslükkejõud  $F = \rho_0 V g$ , kus  $V$  on õhupalli ruumala ning  $g$  raskuskiirendus. Piirjuhul peab see olema võrdne koormisega õhupallile mõjuva raskusjõuga  $F_g = (M_0 + m)g$ , kus  $m$  on õhupalli gaasi mass ning  $M_0$  maksimaalne koormise mass Maal. Saame  $M_0 + m = \rho_0 V$ . Ideaalse gaasi seadusest saame

$$V = \frac{mRT_0}{\mu p_0},$$

seega

$$M_0 = m \left( \frac{\rho_0 RT_0}{\mu p_0} - 1 \right).$$

Marsil annaks analoogiline mõttekäik maksimaalseks koormise massiks

$$M = m \left( \frac{\rho_1 RT_1}{\mu p_1} - 1 \right),$$

seega

$$M = \frac{\left(\frac{\rho_1 RT_1}{\mu p_1} - 1\right)}{\left(\frac{\rho_0 RT_0}{\mu p_0} - 1\right)} M_0 \approx 160 \text{ kg}.$$

Kui õpilane tõlgendas sõnapaari “samasesugune õhupall” nii, et õhupalli ruumala peab samaks jääma, loetakse õigeks ka järgnev lahendus.

Õhupallile mõjuva üleslükkejõu peab piirjuhul tasakaalustama õhupallile mõjuv raskusjõud, seega  $\rho_0 V = M_0 + m_0$ , kus  $V$  on õhupalli ruumala ning  $m_0$  õhupallis oleva heeliumi mass. Õhupalli massi saame leida ideaalse gaasi seadusest

$$m_0 = \frac{V \mu p_0}{RT_0}.$$

See annab meile ruumala jaoks võrrandi

$$V = \frac{M_0}{\rho_0 - \frac{\mu p_0}{RT_0}}$$

ning suurimaks Marsil õhku tõstetavaks massiks

$$M + m_1 = \frac{M_0 \rho_1}{\rho_0 - \frac{\mu p_0}{RT_0}},$$

kus  $M$  on koormise mass ning  $m_1$  õhupalli sees oleva heeliumi mass Marsil. Õhupalli sees oleva heeliumi massi saame leida ideaalse gaasi seadusest. Saame

$$M = \frac{M_0}{\rho_0 - \frac{\mu p_0}{RT_0}} \left( \rho_1 - \frac{\mu p_1}{RT_1} \right) \approx 1,3 \text{ kg}.$$

### L88 Paisupaak ★★

Autor: Mihkel Kree, lõppvoor, 2014, G 3

Et avariiventiil avaneks, peab rõhk süsteemis kasvama väärtuseni  $p = p_0 + \Delta p = 2,2p_0$ . Paisupaagis olev õhk on seega kokku pressitud ruumalale  $V_2 = V_1 p_1 / p$  (gaasi olekuvõrrandist konstantsel temperatuuril), mis tähendab, et vesi sai paisuda ruumala  $\Delta V = V_1 - V_2 = \frac{7}{22} V_1$  võrra. See aga moodustab

$$\alpha = \frac{\Delta V}{V_0} = \frac{7}{22} \frac{V_1}{V_0} \approx 0,025 = 2,5\%$$

vee algsest ruumalast. Et vee mass jääb samaks, tähendab see tiheduse kahanemist väärtuseni

$$\rho' = \left( \frac{1}{1 + \alpha} \right) \rho_0 \approx (1 - \alpha) \rho_0 = 975 \text{ kg/m}^3.$$

Temperatuuri ja tiheduse sõltuvuse graafikult loeme, et see vastab temperatuurile  $t_{\max} = 75^\circ \text{C}$ .

**L89 Balloon ★★**

Autor: Kaur Aare Saar, lahtine, 2015, G 3

Kuna balloon on silindrikujuline, on pinged selle telje sihis ning sellega ristuvast sihis erinevad. Mõlemal juhul peab ballooni seinas olev jõud tasakaalustama balloonisese gaasi rõhu põhjustatud jõu. Teljesihilise pinge jaoks saame võrrandi  $\pi r^2 p_1 = 2\pi r t \sigma$  ehk  $p_1 = \frac{2t\sigma}{r}$ . Pinge ballooni teljega ristuvast sihis leiame silindrit poolitavat mõttelist ristkülikukujulist lõiget vaadeldes. Jõudude tasakaalust saame  $2rh p_2 = 2ht\sigma$ , kus  $h \gg r$  on ballooni kõrgus, ehk  $p_2 = \frac{t\sigma}{r}$ . Ballooni poolt talutav rõhk on neist kahest väiksem ehk

$$p = \frac{t\sigma}{r} = 16,7 \text{ bar.}$$

**L90 Saunauks ★★**

Autor: Mihkel Kree, piirkonnavor, 2016, G 5

Kerisele visatakse  $n = m/\mu$  mooli vett, mis aurustudes tekitab hermeetiliselt suletud ruumis lisarõhu, mis on leitav gaasi seadusest:  $\Delta p = nRT/V$ . See rõhk avaldab uksele jõudu  $F = \Delta p A$ . See jõud mõjub ühtlaselt üle kogu ukse pinna, niisiis tuleb uksele mõjuva jõumomendi arvutamisel võtta jõu õlaks pool ukse laius. Et aga ust kinni hoides rakendaksid saunalised oma jõu  $F_1$  käepidemele, kus jõu õlaks on terve ukse laius, siis saame öelda, et saunalised peaksid ukse kinnihoidmiseks rakendama jõudu

$$F_1 = \frac{F}{2} = \frac{mRTA}{2\mu V} = 2500 \text{ N.}$$

Leitud jõud on tõepoolest ebaloomulikult suur. Lisaküsimuse vastuseks võime öelda, et kerisel aurustunud sadakond liitrit veeauru surub üleliigse õhu igasugustest piludest kiiresti välja ja seetõttu märkimisväärset ülerõhku uksele ei avaldugi.

**L91 Rattamatk ★★**

Autor: Ardi Loot, lahtine, 2017, G 5

Koormatud rehvi kokkupuutepinnale maaga mõjuvad ühelt poolt rehvi sees oleva suruõhu poolt jõud  $(p_0 + p)S$  ning teiselt poolt õhurõhu poolt tekitatud jõud  $p_0 S$  ja maapinna reaktsioonijõud  $mg$ . Nende jõudude tasakaalutingimus annab meile võrrandi  $(p_0 + p)S = p_0 S + mg$ . Kasutades avaldist rehvi kokkupuutepinna suurus  $S \approx 2\pi \Delta R \sqrt{Rr}$  sõltuvusest deformatsioonist  $\Delta R$ , saame leida, et rehvi on deformeeritud

$$\Delta R = \frac{mg}{2\pi p \sqrt{Rr}} \approx 3,4 \text{ mm} \quad (1)$$

võrra.

Rehvi koormuse eemaldamise tulemusena suureneb selle ruumala  $\Delta V \approx S \cdot \Delta R/2 \approx 3,4 \text{ cm}^3$  võrra ja seetõttu väheneb suruõhu rõhk rehvis  $\Delta p$  võrra. Kasutades ideaalse gaasi võrrandit, saame tingimuse

$$(p_0 + p)(V - \Delta V) = (p_0 + p - \Delta p)V$$



ja selle lahendamisel

$$\Delta p = (p_0 + p) \frac{\Delta V}{V} \approx 224 \text{ Pa.} \quad (2)$$

On selge, et rehvi pumpamisel on rakendatav jõud võrdeline rehvis oleva rõhuga (õhurõhu suhtes) ja seega peab ta rakendama vaid

$$\frac{\Delta p}{p} = \frac{(p + p_0) m^2 g^2}{8\pi^3 p^3 (R - r) r^2 \sqrt{Rr}} \approx 0,15 \%$$

võrra vähem jõudu võrreldes olukorraga, kui rehvi on koormatud.

## L92 Silinder külmkapis ★★

Autor: Rasmus Kisel, piirkonnavor, 2017, G 6

Oletame, et silindris oleva õhu rõhk oli algselt  $p_0$ . Kuna aine mass jääb samaks, siis kui tihedus läheb  $\lambda$  korda suuremaks, peab aine ruumala minema  $\lambda$  korda väiksemaks. Seega pärast tahkumist täidab tahkis silindrist osa  $k' = \frac{k}{\lambda}$ . Leiame pärastise õhurõhu  $p_2$ . Ideaalse gaasi olekuvõrrandi kohaselt  $pV = nRT$  ning seega kehtivad algse ja pärastise seisuga kohtades järgmised võrrandid:

$$p_0 V_0 = nRT_1,$$

$$p_2 V_2 = nRT_2.$$

Siit leiame, et

$$p_2 = p_0 \frac{V_0 T_2}{V_2 T_1},$$

kus  $V_0$  on gaasi esialgne ruumala ning  $V_2$  gaasi ruumala hiljem. Teame aga, et  $V_0 = (1 - k)V_{\text{kogu}}$  ja  $V_2 = (1 - k')V_{\text{kogu}}$  ning seega saame õhurõhu pärast tahkumist:

$$p_2 = p_0 \frac{T_2 \lambda (1 - k)}{T_1 (\lambda - k)}.$$

Pärastise ja esialgse rõhu suhe on seega:

$$\frac{p_2}{p_0} = \frac{T_2 \lambda (1 - k)}{T_1 (\lambda - k)}.$$

**L93 Kuumaõhupall ★★★**

Autor: Andreas Valdmann, piirkonnavor, 2012, G 6

Õhupallile mõjub ühes suunas üleslükkejõud, mis võrdub väljasurutud külma õhu kaaluga  $\rho_{20}Vg$ . Vastassuunas mõjub raskusjõud nii kestale ja laadungile ( $mg$ ) kui ka kuumale õhule õhupalli sees ( $\rho_k Vg$ , kus  $\rho_k$  on kuumade õhu tihedus). Õhupall tõuseb lendu, kui üleslükkejõud saab võrdseks raskusjõuga:

$$\rho_{20}Vg = mg + \rho_k Vg,$$

millest avaldub

$$\rho_{20} = \rho_k - \frac{m}{V}.$$

Õhu tihedus väheneb temperatuuri kasvamisega vastavalt ideaalse gaasi olekuvõrrandile

$$pV = \frac{m}{M}RT.$$

Avaldades õhu tiheduse, saame

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{pM}{RT}.$$

Õhupall on alt lahti ja õhurõhk palli sees on võrdne välisõhu rõhuga. Seetõttu on ülaltoodud võrrandis  $p$ ,  $M$  ja  $R$  konstantsed ning kahe erineva temperatuuri jaoks kirjapandud võrrandeid läbi jagades näeme, et

$$\frac{\rho_{20}}{\rho_k} = \frac{T_k}{T_{20}}.$$

Avaldades  $T_k$  ja kasutades lendutõusmise tingimust, saame:

$$T_k = \frac{\rho_{20}T_{20}}{\rho_k} = \frac{\rho_{20}T_{20}}{\rho_{20} - \frac{m}{V}} = \frac{T_{20}}{1 - \frac{m}{\rho_{20}V}}.$$

Ülaltoodud valemis tuleb kasutada absoluutset temperatuuri (kelvinites). Null kraadi Celsiuse skaalas on 273 K ja välisõhu temperatuur on seega  $20^\circ\text{C} = 20\text{ K} + 273\text{ K} = 293\text{ K}$ . Nüüd saamegi välja arvutada temperatuuri õhupalli sees, milleks on  $T_k = 364\text{ K} = 91^\circ\text{C}$ .

**L94 Korvpall ★★★**

Autor: Andreas Valdmann, lõppvoor, 2012, G 4

Sügavale vee alla sukeldamisel surub veesamba rõhk palli kokku. Pall hakkab ise põhja vajuma, kui tema ruumala väheneb nii palju, et pallile mõjuv üleslükkejõud saab väiksemaks raskusjõust ehk palli keskmine tihedus muutub väiksemaks vee tihedusest. Kriitilisel sügavusel  $\rho = m/V$ , kus  $V$  on kokkusurutud korvpalli ruumala. Lõpptulemusena otsime vedelikusamba kõrgust, mis tekitab piisava rõhu, et palli ruumala väheneks väärtuseni  $V = m/\rho$ . Seepärast leiame esmalt pallis oleva õhu rõhu ja ruumala vahelise seose. Sukeldamata pallis on rõhk võrdne õhurõhu ja palli kesta tekkivast elastsusjõust tingitud rõhu summaga:  $p_0 + p_1$ . Kriitilisel sügavusel moodustab palli ruumala alla 10 % oma esialgsest väärtusest, mis tähendab,

et pall on lõmmi vajutatud ja elastsusjõud enam rolli ei mängi. Rõhk pallis on siis võrdne vedelikusamba rõhu ja õhurõhu summaga:  $p_v + p_0$ . Boyle'i-Mariotte'i seadusest on teada, et konstantse temperatuuri juures on ideaalse gaasi rõhk ja ruumala pöördvõrdelises sõltuvuses ehk

$$\frac{p_0 + p_1}{p_0 + p_v} = \frac{V_0}{V}.$$

Sellest valemist saame avaldada vedelikusamba kriitilise rõhu:

$$p_v = (p_0 + p_1) \frac{V_0}{V} - p_0.$$

Teades, et vedelikusammas kõrgusega  $h$  tekitab rõhu  $p_v = \rho gh$ , leiame samaväärse avaldise kriitilise sügavuse jaoks:

$$h = \frac{(p_0 + p_1) \frac{V_0}{V} - p_0}{\rho g}.$$

Nüüd tuleb veel palli alg- ja lõppruumala avaldada ülesandes etteantud suuruste kaudu. Lõppruumala on juba lahenduse alguses leitud ( $V = m/\rho$ ). Algruumala jaoks kasutame ringi ümbermõõdu ja kera ruumala valemeid

$$C = 2\pi r \text{ ja } V_0 = \frac{4}{3}\pi r^3,$$

millest saame, et  $V_0 = C^3/6\pi^2$  ning lõpuks

$$h = \frac{(p_0 + p_1) \frac{C^3 \rho}{6\pi^2 m} - p_0}{\rho g}.$$

Kriitilise sügavuse arvuline väärtus on  $h = 190$  m.

#### L95 Veeklaas ★★★

Autor: Siim Ainsaar, piirkonnavoore, 2013, G 7

Õhu ruumala klaasis enne vee väljavoolamist on  $V_0 = \pi r^2(H - h)$ . Pärast väljavoolamist oli õhu ruumala  $V_1 = V_0 + V$  ja vee ruumala  $V_2 = \pi r^2 h - V$ . Veesamba kõrgus  $h_2 = \frac{V_2}{\pi r^2}$ , nii et vee kaalust tingitud lisarõhk põhjale

$$p_2 = \rho gh_2 = \frac{\rho g V_2}{\pi r^2}.$$

Õhurõhk vee kohal tuleneb isothermi olekuvõrrandist,  $p_1 = \frac{p_0 V_0}{V_1}$ . Paberilehele mõjuvad jõud on tasakaalus:

$$mg + \pi r^2(p_1 + p_2) = \pi r^2 p_0.$$

Kõik kokku pannes

$$m = \frac{\pi r^2 p_0}{g} - \frac{\pi r^2 p_0 (H - h)}{g \left( H - h + \frac{V}{\pi r^2} \right)} - \rho (\pi r^2 h - V) = \frac{p_0 V}{g \left( H - h + \frac{V}{\pi r^2} \right)} + \rho (V - \pi r^2 h).$$

**L96 Paisupaak ★★★**

Autor: Ardi Loot, lahtine, 2016, G 7

Juhul, kui paisupaak pole veel küttesüsteemiga ühendatud, on terve paisupaak täidetud õhuga. Seega saab kirja panna ideaalse gaasi olekuvõrrandi:

$$p_0 V = nRT_0, \quad (1)$$

kus  $n$  on paagis oleva õhu moolide arv ja  $R$  universaalne gaasikonstant. Teisalt on nõutud, et juhul, kui süsteem täidetakse rõhuni  $p_1$ , peab olema paisupaagist osa  $\beta$  täidetud veega; seega osa  $\gamma = 100\% - \beta$  on täidetud õhuga. Kuna vahesein on vabalt liikuv, siis peavad silindris asuva vee ja õhu rõhud olema võrdsed. Seega saab kirja panna teise olekuvõrrandi:

$$p_1 \gamma V = nRT_0. \quad (2)$$

Lahendades võrranditest (1) ja (2) tekkinud süsteemi, saame

$$p_0 = \gamma p_1 = 270 \text{ kPa}.$$

Paisupaagi minimaalse ruumala  $V$  leiame tingimusest, et  $\Delta p \leq 50 \text{ kPa}$ . On selge, et kui vee ruumala suureneb  $\Delta V = \alpha V_s = 1 \text{ L}$  võrra, siis paagis oleva õhu ruumala väheneb sama palju. Seega saame kirja panna

$$p_2 (\gamma V - \Delta V) = nRT_2. \quad (3)$$

Lahendades võrranditest (1) ja (3) tekkinud süsteemi, saame

$$p_2 = p_0 \frac{V}{\gamma V - \Delta V} \cdot \frac{T_2}{T_0}$$

ning tingimus paisupaagi ruumala jaoks avaldub seega

$$V \geq \frac{(p_1 + \Delta p) T_0}{(p_1 + \Delta p) T_0 - p_1 T_2} \cdot \frac{\Delta V}{\gamma} \approx 13,2 \text{ L}.$$

**L97 Terasanum ★★★★★**

Autor: Valter Kiisk, piirkonnavor, 2017, G 8

Anuma tugevuse määrab ilmselt seina paksus  $h$ . Selle leiame terase ruumala  $V_t$  abil, mille omakorda leiame anuma massi  $m$  ja terase tiheduse  $\rho$  kaudu. Eeldades, et  $h$  on hulga väiksem anuma raadiusest  $r$ , siis  $V_t \approx 4\pi r^2 h$ , seega  $m = \rho V_t \approx 4\pi r^2 h \rho$ , millest  $h \approx m / (4\pi r^2 \rho) \approx 4 \text{ mm}$ , mis kinnitab meie lähendi  $h \ll d$  kehtivust. Gaasi rõhust tingitud mehaaniline tõmbepinge  $\sigma_1$  anuma seintes ei tohi ületada väärtust  $\sigma = 450 \text{ MPa}$ .  $\sigma_1$  leidmiseks lõikame anuma mõtteliselt kaheks poolsfääriks. Gaasi rõhk  $p$  tekitab kummalegi poolsfäärile teatud summaarse rõhumisjõu  $F$ , mis surub neid poolsfääre üksteisest eemale.  $F$  leidmiseks jaotame sfääri mõtteliselt kaheks eraldiseisvaks poolsfääri kujuliseks kinniseks piirkonnaks. Kumbagi piirkonda võime vaadelda tasaakaalus kinnise süsteemina ja seega on

tema sisemised rõhu poolt tekitatud jõud tasakaalus. Sellest järeldame, et poolsfäärilise osa ringikujulisele põhjale pindalaga  $\pi r^2$  mõjub sama summaarne jõud sisemise rõhu poolt, mis poolsfääri pinnale. Kuna need jõud on võrdsed, siis mõjub poolsfäärile summaarne jõud sisemise rõhu poolt  $\pi r^2 p$  ja arvestades ka välist rõhku  $F = \pi r^2 (p - p_0)$ , kus  $p_0$  on välisrõhk (101,3 kPa). Kuna anuma seina ristlõikepindala on  $S = 2\pi r h$ , siis  $\sigma = F/S = r(p - p_0)/2h$ . Siit  $p = 2\sigma h/r + p_0 \approx 14,61$  MPa. Eeldades, et tegemist on ideaalse gaasiga, siis anumasse oleva gaasi ruumala, kui ta oleks samal temperatuuril, aga normaalarõhul, leiab valemi  $p_0 V = p V_a$  abil, kus  $V_a = \frac{4}{3}\pi r^3$  on anuma ruumala. Saame

$$V = \frac{p}{p_0} V_a \approx 9400 \text{ L}.$$

### L98 Õhupall ★★★★★

Autor: Ardi Loot, lõppvoor, 2017, G 7

Enne ventiili avamist oli õhk temperatuuril  $T$  ja õhu rõhk oli  $p$ . Lisaks tähistame, et õhu ruumala oli enne ventiili avamist  $V$  ja moolide arv oli  $n$ . Gaasil oli soojusenergia  $E_1 = c_V n T$ . Kui kolvi pindala on  $S$  ja kolvi liikumise amplituud on  $L$ , siis Juku teeb konstantsel jõul  $F$  kolvi lõpuni alla vajutades tööd:

$$A_1 = FL = \frac{F}{S} SL = pV.$$

Analoogselt kehtib üldisemalt  $\Delta A = p \Delta V$ . Olgu pärast õhupalli täitumist õhupalli ruumala  $V_2$  ja gaasi temperatuur selles  $T_2$ . Kuna õhupalli kummi pinget lugeme tühiseks, siis on rõhk palli sees kogu aeg võrdne välise rõhuga  $p_0$  (välja arvatud vahetult ventiili lähedal, kust õhk sisse voolab ja rõhk muutub läbi ventiili minekul, aga vaatleme rõhku ventiilist eemal, õhupalli pinna lähedal). Et suruda õhupallist väljaspool olevat õhku eemale, teeb õhupallis olev gaas tööd  $A_2 = p_0 V_2$ , arvestades seda, et rõhk õhupalli seinte lähedal on konstantselt väline õhurõhk  $p_0$ . Lõppolekus on täidetud õhupallis soojuslik energia  $E_2 = c_V n T_2$ . Energia jäävuse tõttu peab soojusenergiate vahe võrduma summaarse tööga

$$E_2 - E_1 = A_1 - A_2 \quad \rightarrow \quad c_V n T_2 - c_V n T = pV - p_0 V_2.$$

Töö märgid valisime arvestades seda, et Juku tehtud töö  $A_1$  andis gaasile soojusenergiat juurde, aga gaas ise tegi töö  $A_2$ , mis võttis soojusenergiat vähemaks. Nii alg- kui lõppolekus kehtib ideaalse gaasi seadus, vastavalt  $pV = nRT$  ja  $p_0 V_2 = nRT_2$ . Nende abil saame energia jäävuse seadusest kirjutada

$$c_V n T_2 - c_V n T = nRT - nRT_2 \quad \rightarrow \quad n(c_V + R)(T_2 - T) = 0.$$

Viimasest seosest saame  $T_2 = T$ . Õhutemperatuur ei muutunud.

**L99 Kuumaõhupall ★★★★★**

Autor: Ants Remm, piirkonnavoort, 2014, G 10

Ideaalse gaasi seadusest avaldub õhu tihedus sõltuvalt temperatuurist kujul  $\rho = \frac{p\mu}{RT}$ . Raskusjõu ning üleslükkejõu tasakaalust saame

$$Mg = Vg(\rho_0 - \rho) = \frac{p\mu Vg}{R} \left( \frac{1}{T_0} - \frac{1}{T} \right),$$

kus  $M = M_0 + \frac{1}{2}M_k$  on õhupalli keskmine mass lennu vältel ning  $V = \frac{4}{3}\pi r^3$  on õhupalli ruumala. Kuna õhupalli pooridest imbub välja soe õhk temperatuuril  $T$ , kuid sisenev õhk on väliskeskonna temperatuuril  $T_0$ , tuleb sees olevat õhku pidevalt soojendada võimsusega

$$P = \lambda C_p(T - T_0).$$

Selle võimsuse saavutamiseks tuleb põletada propaani kiirusega  $\frac{P}{k}$  ning kütuse lõppemiseks kuluv aeg on

$$t = \frac{M_k k}{P} = \frac{M_k k}{\lambda C_p(T - T_0)} = \frac{M_k k(p\mu V - MRT_0)}{\lambda C_p M R T_0^2} = 15 \text{ h.}$$

**L100 Kerkiv õhupall ★★★★★**

Autor: Jaan Kalda, lõppvoort, 2018, G 8

Seni, kui heelium pole võtnud enda alla veel kogu õhupalli ruumala, püsib tõstejõud konstante. Tõepoolest,  $F = \rho_a g V_p$ , kus  $\rho_a$  on õhu tihedus ja  $V_p$  – pallis oleva gaasi ruumala. Paneme tähele, et seni kuni palli nahk ei ole pinguldunud, on pallis oleva gaasi rõhk ja temperatuur võrdsed antud hetkel palli ümbritseva õhu rõhu ja temperatuuriga. Et  $\rho_a = p\mu/RT$ , kus  $p$  ja  $T$  tähistavad rõhku ja temperatuuri antud kõrgusel, ja samal ajal  $V_p = \frac{mRT}{p\mu_p}$  (kus  $\mu_p$  tähistab heeliumi molaarmassi ning  $m$  selle kogumassi), siis üleslükkejõud

$$F = \rho_a V_p g = mg \frac{\mu}{\mu_p}.$$

Üheprotsendiline vähenemine on nii väike, et me võime lugeda otsitava kõrguse võrdseks kõrgusega, kus eelpooltoodud tulemuseni jõudmiseks tehtud eeldus heeliumi ruumala kohta enam ei kehti, st see võrdsustub  $V_0$ -ga. Gaasi olekuvõrrand ütleb, et  $V \propto T/p$  ( $\propto$  tähistab võrdelisust); arvestades, et pallis oleva heeliumi ja ümbritseva õhu temperatuurid ja rõhud on võrdsed, võime järeldada, et see on kõrgus, mille juures on õhu jaoks suhe  $T/p$  kasvanud 2 korda võrreldes maapinnalähedase olukorraga.

Mõttelise õhuruumala  $V$  jaoks on suhe  $T/p$  võrdeline  $V$ -ga. Seega peab mõttelise õhuruumala kerkimisel maapinnalt antud kõrguseni selle ruumala kasvama kaks korda. Et tegemist on adiabaatilise atmosfääriga, siis õhuruumala  $V$  kerkimisel järgivad selle karakteristikud adiabaadiseadust  $pV^\gamma = \text{Const}$ ; kombineerides seda

ideaalse gaasi seadusega  $pV/T = \text{Const}$  saame  $V^{\gamma-1}T = \text{Const}$ . Et  $V$  peab kasvama 2 korda, siis  $T$  peab kahanema  $2^{\gamma-1} = 2^{0.4}$  korda. Seega

$$\frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{\mu g h}{R} = T_0(1 - 2^{-0.4}),$$

millest

$$h = \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{R}{\mu g} T_0(1 - 2^{-0.4}) \approx 7250 \text{ m}.$$

### L101 Segadus optikalaboris ★

Autor: Roland Matt, lahtine, 2011, G 1

Selleks, et kiirtekimp laienuks ja jääks paralleelseks, pidi optik paigutama nõguslääts kumerlääts ehte niimoodi, et läätsede fookused ühtiksid nõguslääts ees. Tähistades nõguslääts fookuskauguse  $f_n$  ja vastavalt kumerläätsel  $f_k$ , saame kirja panna  $d = f_k - f_n$ . Vaatame üht kiirt, mis langeb nõgusläätsle paralleelselt läätsede optiliste peatelgedega, läätsede keskpunktist kaugusel  $x_1$ . Teine kiir liikugu lihtsuse mõttes mööda süsteemi optilist peatelge. See kiir läbib kumerlääts tema keskpunktist kaugusel  $x_2$ . Tekkivatest sarnastest kolmnurkadest saame kirja panna

$$\frac{x_1}{f_n} = \frac{x_2}{f_k} = \frac{x_2}{f_k - d},$$

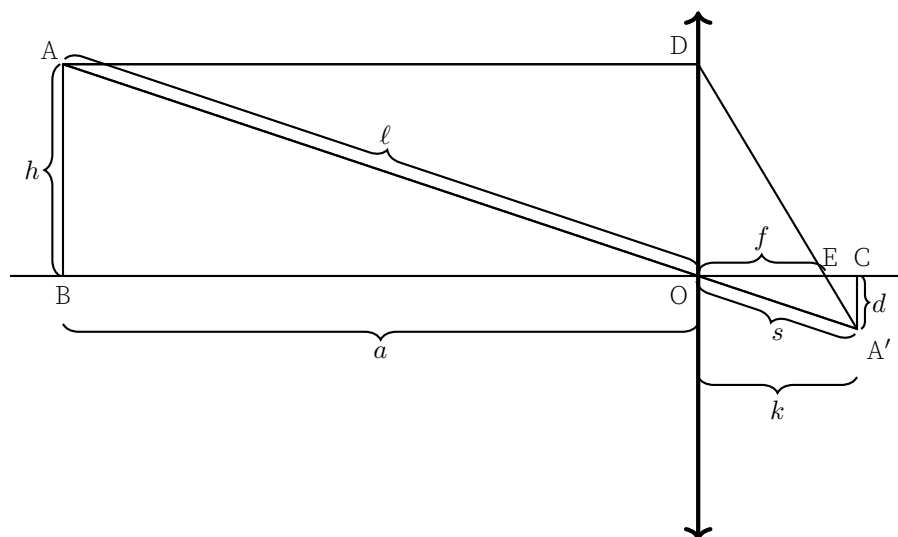
millest

$$f_k = \frac{x_2 d}{x_2 - x_1} = 52 \text{ cm}, \quad f_n = f_k - d = 20 \text{ cm}.$$

Optilised tugevused saame, võttes fookuskauguste pöördväärtused:  $D_k \approx 1,9 \text{ dptr}$  ja  $D_n = 5 \text{ dptr}$ .

### L102 Lääts ★

Autor: Koit Timpmann, piirkonnavaor, 2016, G 3



Sarnastest kolmnurkadest  $\triangle ABO$  ja  $\triangle A'CO$  saame  $\frac{h}{\ell} = \frac{d}{s}$ . Kuna  $\ell + s = 15$  cm, siis:

$$\frac{4 \text{ cm}}{\ell} = \frac{1 \text{ cm}}{15 \text{ cm} - \ell} \rightarrow \ell = 12 \text{ cm}, s = 3 \text{ cm}.$$

Täisnurksest kolmnurgast  $\triangle A'CO$  saame  $k^2 = \sqrt{s^2 - d^2}$ . Sarnastest kolmnurkadest  $\triangle DOE$  ja  $\triangle A'CE$  saame:

$$\frac{h}{f} = \frac{d}{k - f} \rightarrow f = \frac{hk}{h + d} \approx 2,26 \text{ cm}.$$

*Alternatiivne lahendus*

$\ell$  ja  $s$  leiame sarnaselt eelmisele lahendusele. Seejärel leiame kujutiste kaugused lääts tasandist:  $a = \sqrt{\ell^2 - h^2}$ ,  $k = \sqrt{s^2 - d^2}$ . Fookuskauguse leiame lääts valemil abil:

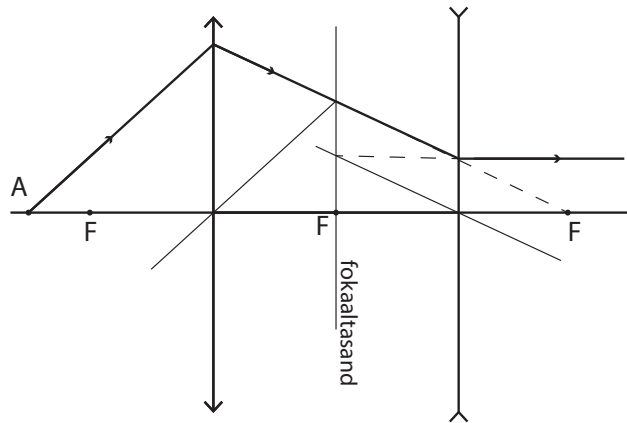
$$\frac{1}{a} + \frac{1}{k} = \frac{1}{f} \rightarrow f = \frac{ak}{a + k} \approx 2,26 \text{ cm}.$$

### L103 Valgusallika kujutis ★

Autor: EFO žürii, lahtine, 2017, G 2

Valgusallika kujutist ei tekigi (või tekib lõpmatuse), kuna pärast teise lääts läbimist on valguskiired paralleelsed optilise peateljega.

Valguskiired on paralleelsed, kuna valgusallika  $A$  kujutis läbi kumerlääts tekiks nõguslääts parempoolsesse fookusesse. Seega kumerlääts läbinud kiired langevad nõgusläätsel nii, et nad koonduksid parempoolses fookuses. Kuna nõguslääts hajutab valgust, siis on kiired pärast nõguslääts läbimist paralleelsed, mistõttu valgusallika kujutist ei teki (või tekib see lõpmatuse).





**L104 Piiritusetehas ★**

Autor: Aigar Vaigu, piirkonnavaor, 2017, G 4

Murdumisseaduse järgi kehtib valguse murdumisel

$$n_0 \sin(\alpha_0) = n_1 \sin(\alpha_1),$$

kus  $n_0$  ja  $n_1$  on vastavalt esimese ja teise keskkonna murdumisnäitajad ning  $\alpha_0$  ja  $\alpha_1$  on vastavalt langemis- ja murdumisnurk. Seda valemit saab iteratiivselt jätkata järgmise murdumise jaoks kolmanda keskkonna piiril, kui keskkonnad on paralleelsete kihtidena:

$$n_0 \sin(\alpha_0) = n_1 \sin(\alpha_1) = n_2 \sin(\alpha_2) = \dots$$

Selle abil näeme, et kehtib  $\sin(\alpha_j) = \frac{n_0}{n_j} \sin(\alpha_0)$ . See tähendab seda, et kiire murdumisnurk sõltub ainult hetke keskkonna murdumisnäitajast ja mitte sellest, kas ja kui mitu erinevat kihti varasemalt on läbitud. Seetõttu saame ignoreerida kanalit ümbritsevat klaasist või muust materjalist kihti, arvutamaks kiire nurka kanal. Samuti, kuna ainult piirituse ja vee segu murdumisnäitaja muutub, siis ainult kanalis on kiirte liikumisenurgad erinevad. Mujal on kiire liikumine täpselt sama, ainult pärast segu läbimist on kiir nihutatud, kui segu murdumisnäitajat muuta. Segus kehtib:

$$\sin(\alpha_{\text{segu}}) = \frac{n_0}{n_{\text{segu}}} \sin \alpha_0 = \frac{1}{\sqrt{2}n_{\text{segu}}},$$

kus  $\sin(\alpha_0) = 1/\sqrt{2}$  ja õhus  $n_0 = 1$ . Kiire nihe kanali sees piki kanali suunda on lihtsa geomeetria abil

$$y = d \tan(\alpha_{\text{segu}}).$$

Kasutades seost  $\tan(\phi) = \frac{\sin(\phi)}{\cos(\phi)} = \frac{\sin(\phi)}{\sqrt{1-\sin(\phi)^2}}$  saame

$$y = d \frac{\sin(\alpha_{\text{segu}})}{\sqrt{1-\sin(\alpha_{\text{segu}})^2}} = \frac{d}{\sqrt{2}\sqrt{n_{\text{segu}}^2 - \frac{1}{2}}}.$$

Nüüd leiame  $y$  kahel juhul, kui  $X = 0,40$  siis  $y = 6,184$  mm ja kui  $X = 0,85$  siis  $y = 6,104$  mm. Saame  $y$  erinevuseks

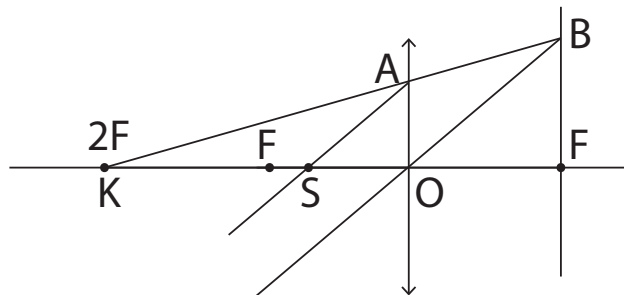
$$|\Delta y| \approx 80 \mu\text{m}.$$

**L105 Kaks valgusallikat ★**

Autor: EFO žürii, piirkonnavoore, 2018, G 2

*Esimene lahendus*

Kui optilisel peateljel paiknev valgusallikas asub läätsest 18 cm kaugusel, mis on võrdne kahekordse fookuskaugusega, siis selle valgusallika kujutis asub teisel pool läätse läätsest samuti kahe fookuskaugusel ehk 18 cm kaugusel. Et kahe valgusallika kujutised kattuksid, peab teine kujutis olema näilik. Konstrueerime valgusallika asukoha, kui kujutise asukoht on teada.



Sarnastest kolmnurkadest  $\triangle KAO$  ja  $\triangle KBF$  saame, et

$$\frac{AO}{BF} = \frac{KO}{KF} = \frac{2f}{3f} = \frac{2}{3}.$$

Teisest sarnaste kolmnurkade paarist  $\triangle SAO$  ja  $\triangle OBF$  saame, et

$$\frac{AO}{BF} = \frac{OS}{FO} = \frac{b}{f},$$

kus  $b$  on teise valgusallika kaugus läätsest. Ühendades kaks seost, saame

$$\frac{KO}{KF} = \frac{OS}{FO} \Rightarrow \frac{2}{3} = \frac{b}{f} \Rightarrow b = \frac{2f}{3} = 6 \text{ cm}.$$

Teine valgusallikas peab asuma läätsest 6 cm kaugusel ning kahe valgusallika kaugus teineteisest on  $6 \text{ cm} + 18 \text{ cm} = 24 \text{ cm}$ .

*Teine lahendus*

Sarnaste kolmnurkade asemel saame kasutada läätse valemit. Teades, et valgusallikas asub läätsest  $a = 18 \text{ cm}$  kaugusel ning läätse fookuskaugus on  $f = 9 \text{ cm}$ , saame leida kujutise kauguse  $k$  läätsest:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{k} = \frac{1}{f} \Rightarrow k = 18 \text{ cm}.$$

Teise valgusallika kujutis peab olema samuti samas punktis, kus esimese valgusallika oma, seega peab teise valgusallikaga tekitatud kujutis olema näiline ning valgusallikas peab asuma kujutisega samal pool läätse. Kasutades läätse valemit, leiame teise valgusallika asukoha

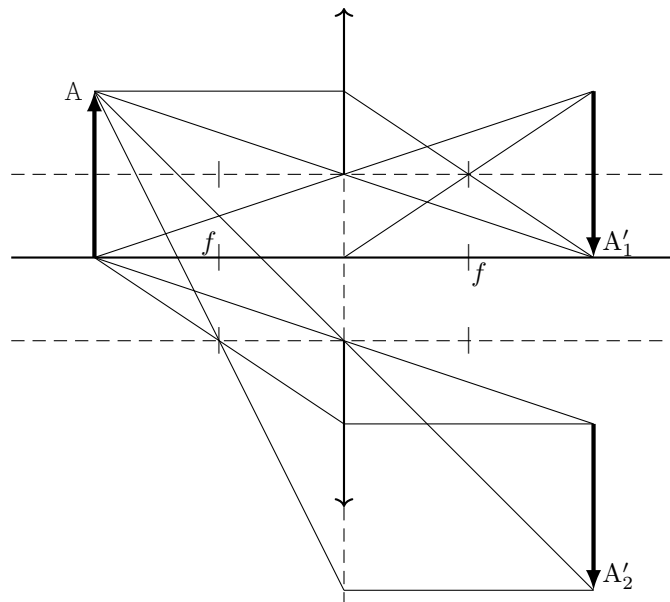
$$\frac{1}{a} - \frac{1}{k} = \frac{1}{f} \Rightarrow a = 6 \text{ cm}.$$

Teine valgusallikas peab asuma läätest 6 cm kaugusel ning kahe valgusallika kaugus teineteisest on  $6\text{ cm} + 18\text{ cm} = 24\text{ cm}$ .

### L106 Poolitatud lääts ★

Autor: Hans Daniel Kaimre, lõppvoor, 2018, G 1

Ülesande püstituses on öeldud, et esialgse skeemi korral on lääts objektist ja kujutisest võrdsel kaugusel. Selline olukord realiseerub, kui nii objekt kui ka kujutis asuvad läätest kahekordses fookuskauguses, kusjuures süsteemi suurendus on 1 (objekt ja kujutis on sama suured). Lääts poolekslõikamisel ja poolde nihutamisel joonisel toodud skeemi järgi saame kaks uut lääts, mille fookuskaugused on endiselt samad, kuid optilised peateljed on nihkes. Seega tekib ekraanile kaks samasuurt kujutist kui enne, mis on omavahel vertikaalselt nihutatud ning mille intensiivsus on võrreldes esialgse kujutisega tunduvalt vähenenud. Seejuures paneme konstrueerimisel tähele, et kuigi reaalselt läätest väljapool olevast piirkonnast kiiri läbi ei lähe, saame neid siiski kujutise konstrueerimiseks kasutada.



### L107 Kärbes ★★

Autor: Taavi Pungas, lahtine, 2012, G 4

Kärbe trajektoor lühikese aja  $t$  jooksul on sirgjoon pikkusega  $h = vt$ . Konstrueerime joonisel kärbe kujutise trajektoori. Sarnastest kolmnurkadest saame leida kujutise trajektoori pikkuse  $h'$ :

$$\frac{h}{a-f} = \frac{h'}{f} \Rightarrow h' = \frac{f}{a-f}h.$$

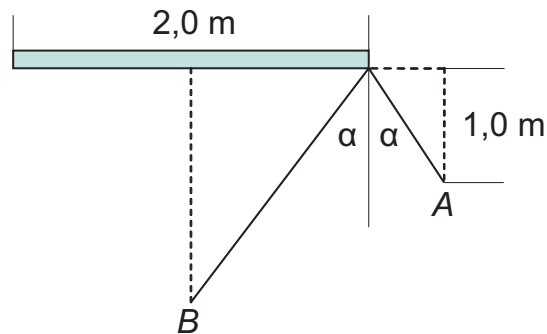
Kujutise kiirus on seega

$$v' = \frac{h'}{t} = \frac{f}{a-f} \frac{h}{t} = \frac{f}{a-f} v.$$

ning see on vastassuunaline kərbse kiirusega.

**L108 Peegel ★★**

Autor: Oleg Košik, piirkonnavor, 2012, G 1



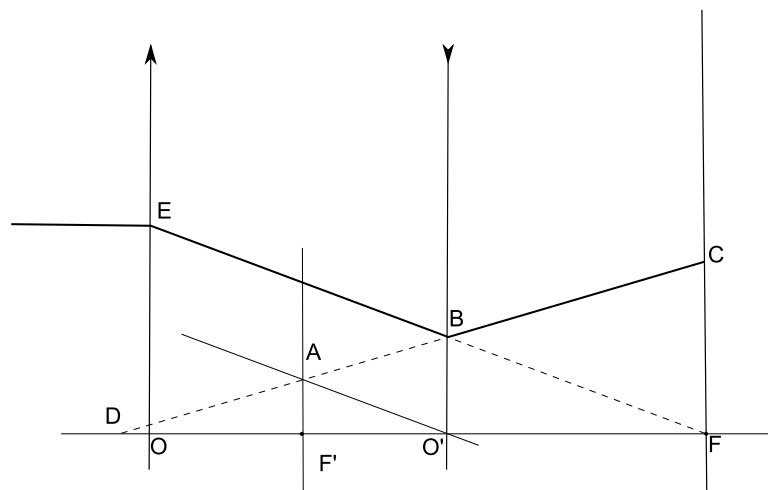
Joonisel on kujutatud hetk  $t$ , mil tuttavad märkavad teineteist. Selleks hetkeks läbis  $A$  teepikkuse  $2 - 1 \cdot t$  ning  $B$  läbis teepikkuse  $3,5 - 1 \cdot t$ . Sarnastest kolmnurkadest saame

$$\frac{1}{3,5 - t} = \frac{2 - t}{1}.$$

Tekib ruutvõrrand, mille lahenditeks on  $t = 1,5$  s ja  $t = 4,0$  s, neist vastuseks on esimene lahend.

**L109 Läätsed ★★**

Autor: Tanel Kiis, lõppvoor, 2013, G 1



Joonisel on mõned meid huvitavad sarnased kolmnurgad:

ja

Lisaks teame osade lõikude pikkusi:  $|EO| = R$ ,  $|OF| = f_1$ ,  $|F'O'| = f_2$  ja  $|CF| = r$ . Seda teades saab moodustada neljast võrrandist koosneva lineaarvõrrandisüsteemi.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{|EO|}{|OF|} = \frac{|AF'|}{F'O} \\ \frac{|EO|}{|OF|} = \frac{|BO'|}{O'F} \\ \frac{|AF'|}{|F'D|} = \frac{|CF|}{|FD|} \\ \frac{|AF'|}{|F'D|} = \frac{|BO'|}{|O'D|}, \end{array} \right.$$

Pärast süsteemi lahendamist saame tulemuseks  $f_2 = \frac{R}{4r} f_1$ .

[illegible]

Selles lahenduses kasutame läätse valemit  $-\frac{1}{f} = \frac{1}{a} - \frac{1}{k}$ .  $f$  ees on miinus, kuna tegemist on noguslatsega, ja  $k$  ees on miinus, kuna tegemist on näiva kujutisega. Kasutades kiirte pooratavuse printsiipi vaatame hoopis olukorda, kus tekib objektist  $CF$  näiv kujutis  $AB$ . Lisaks kasutame kolmnurkade sarnasust:  $\Delta CFO' \sim \Delta ABO'$  ja  $\Delta DOF \sim \Delta ABF$ .

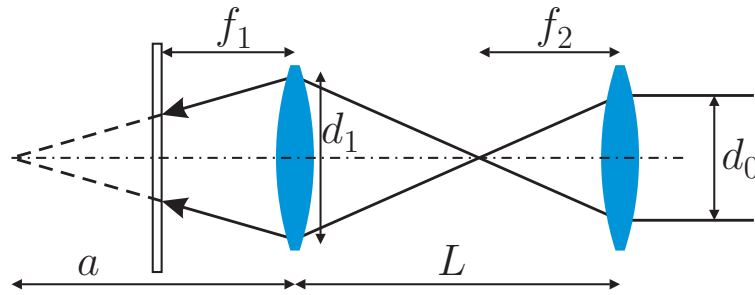
$$\begin{cases} \frac{|CF|}{|FO'|} = \frac{|AB|}{|BO'|} \\ \frac{|DO|}{|OF|} = \frac{|AB|}{|BF|} \\ -\frac{1}{f_2} = \frac{1}{|FO'|} - \frac{1}{|BO'|}, \\ \begin{cases} \frac{r}{f_1} = \frac{|AB|}{|BO'|} \\ \frac{R}{f_1} = \frac{|AB|}{\frac{f_1}{2} - |BO'|} \end{cases} \\ -\frac{1}{f_2} = \frac{1}{\frac{f_1}{2}} - \frac{1}{|BO'|}. \end{cases}$$

Selle vorrandsiisteemi lahendamisel saame  $f_2 = \frac{R}{4r} f_1$ .

#### L110 Valgustamine ★★

Autor: Valter Kiisk, lõppvoor, 2015, G 2

Vaatleme kõige äärmiste valguskiirte liikumist läbi siisteemi.



Pärast lisalatse läbimist koonduvad valguskiired punktiks lisalatsest kaugusel  $f_2$  ehk kaugusel  $L - f_2$  algsest läätsest. Läätse valemi

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{L - f_2} = \frac{1}{f_1}. \quad (1)$$

põhjal tekib sellest punktist omakorda punkt kujutis kaugusele  $a$  esimesest läätsest. Sarnastest kolmnurkadest saame veel kaks võrrandit:

$$\frac{d_1}{d_0} = \frac{L - f_2}{f_2}, \quad (2)$$

$$\frac{d}{a - f_1} = \frac{d_1}{a}. \quad (3)$$

Kahest esimesest võrrandist saame suuruse  $\frac{1}{L-f_2}$  avaldamisel

$$\frac{1}{a} + \frac{d_0}{d_1 f_2} = \frac{1}{f_1} \implies \frac{d_0}{d_1 f_2} = \frac{a - f_1}{a f_1}. \quad (4)$$

Viimasest kahest võrrandist saame avaldada suuruse  $d_1(a - f_1)/a$ , mille põhjal saame  $d = d_0 \frac{f_1}{f_2}$ . Seega valguslaigu suurus ekraanil sõltub ainult lisatud läätse fookuskaugusest, aga mitte läätsedevahelisest kaugusest  $L$ . Valguslaik diameetriga 2 cm tekib kui  $f_2 = f_1 d_0/d = 2$  cm.

### L111 Optiline kiud ★★

Autor: Andreas Valdmann, lahtine, 2016, G 4

Pikas optilises kius jäävad levima vaid sellised kiired, mille jaoks toimub südamikujade ja katte lahutuspinnal täielik sisepeegeldumine. Kui valgus langeb lahutuspinnale täieliku sisepeegeldumise piirnurgast väiksema nurga all, siis toimub korraga nii peegeldumine kui ka murdumine. Pärast mitmeid peegeldusi väheneb nende kiirte intensiivsus praktiliselt nullini, sest peaaegu kogu valgus on kiu külgedelt välja murdunud. Täieliku sisepeegeldumise piirnurk

$$\alpha = \arcsin(n_2/n_1) = 80,5^\circ.$$

Piirnurgale vastavad kiired levivad kiu telje suhtes nurga  $90^\circ - \alpha$  all. Pärast kiu otsast väljamurdumist on nende kiirte nurk kiu telje suhtes

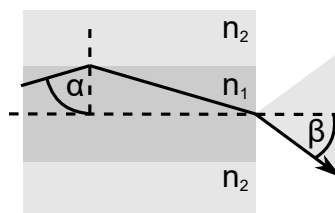
$$\beta = \arcsin[n_1 \sin(90^\circ - \alpha)] = \arcsin[n_1 \cos(\alpha)].$$

Valguskoonuse tipunurk  $\theta$  on sellest kaks korda suurem:

$$\theta = 2\beta = 2 \arcsin[n_1 \cos(\alpha)] = 28^\circ.$$

Kuna  $\cos(\arcsin(a)) = \sqrt{1 - a^2}$ , siis on võimalik vastus esitada kujul

$$\theta = 2 \arcsin(\sqrt{n_1^2 - n_2^2}).$$



**L112 Kolmläätis ★★**

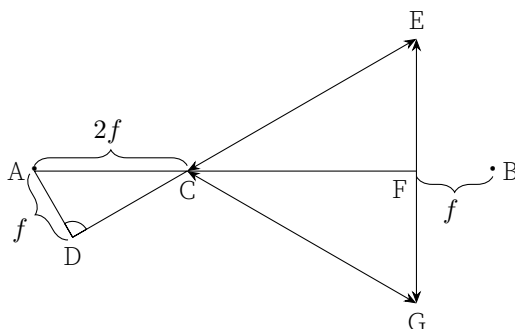
Autor: Andres Põldaru, lahtine, 2016, G 5

Kõigil kolmel läätsel on sama fookuskaugus, sest neil on üks ühine fookuspunkt, milleks on kolmnurga keskpunkt. Kolmnurgad  $\triangle ACD$  ja  $\triangle CEF$  on sarnased, sest nad on täisnurksed kolmnurgad, mille ühise tipu  $C$  juures olevad nurgad on samad. Seega

$$\frac{|AD|}{|AC|} = \frac{|EF|}{|EC|},$$

millest

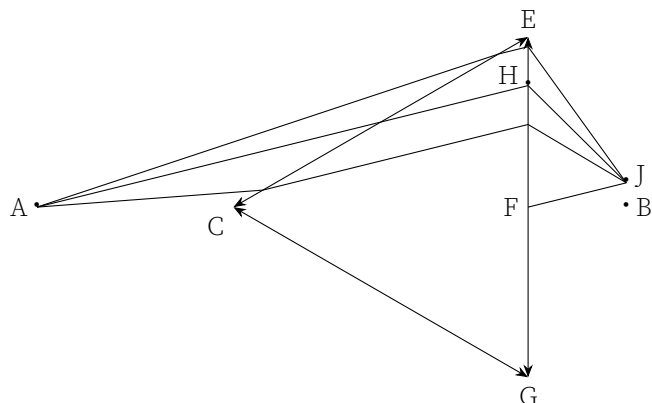
$$|AD| = \frac{|AC|}{2} = f.$$



Saame järeldada, et punkt  $A$  asub mõlema läätse  $CE$  ja  $CG$  fokaaltasandites. Kui läätsele langevad paralleelsed kiired, siis need koonduvad fokaaltasandis ühte punkti ja seega teistpidi mõeldes peavad fokaaltasandi ühest punktist pärinevad kiired olema pärast läätse läbimist paralleelsed. Nende paralleelsete kiirte nurka on võimalik määrata nii, et tõmbame punktist  $A$  ühe kiire läbi läätse  $CE$  või  $CG$  keskpunkti. Läätse keskpunkti läbiv kiir ei murdu ja liigub samas suunas edasi. Alumisel joonisel läbib kiir  $AH$  läätse keskpunkti ja teised kiired on konstrueeritud selliselt, et pärast läätse läbimist on nad sellega pralleelsed.

Pärast esimese läätse läbimist koonduvad läätsele  $EG$  langevad paralleelsed kiired fokaaltasandi ühte punkti  $J$ . Selle punkti leidmiseks joonistame läätse  $EG$  keskpunkti  $F$  läbiva kiire, mis on kiirega  $AH$  paralleelne, ja leiame selle kiire lõikumispunkti  $J$  fokaaltasandiga. Jooniselt on näha, et ükski kiir punkti  $B$  ei jõua, sest nad kõik kõik koonduvad punkti  $J$  ja vertikaalseid kiiri ei ole. Läätse  $CG$  jaoks on konstruktsioon sama, ainult peegelpildis  $AB$  suhtes ja seega ka sealt ei jõua valgus punkti  $B$ .





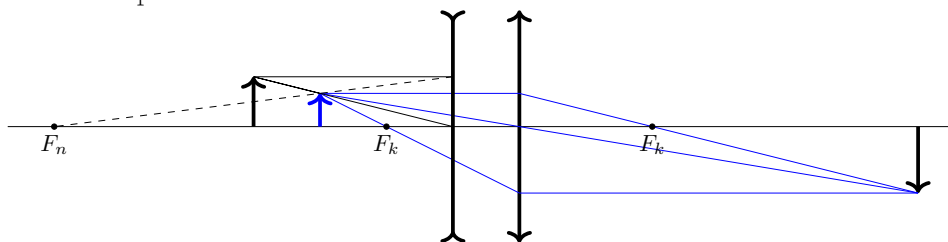
#### Alternatiivne lahendus

Analoogselt võime vaadata hoopis seda, kui punktis  $B$  on valgusallikas. Kui punktist  $A$  pärinevad kiired jõuavad punkti  $B$ , siis peavad ka punktist  $B$  pärinevad kiired jõudma punkti  $A$ . Punkt  $B$  on läätse  $EG$  fokaaltasandis ja tekitab paralleelse kiirtekimbu. Sarnaselt eelmise lahendusega see kiirtekimp koondub pärast teise läätse läbimist selle läätse fokaaltasandi ühte punkti, mis ei ole  $A$ . Fokaaltasand on läätsega paralleelne ja kui kiired koonduvad selles tasandis mingisse punktist  $A$  erinevasse punkti, siis järelikult punkti  $A$  valgus ei jõua.

#### L113 Puuduv lääts ★★

Autor: Eero Vaher, piirkonnavaor, 2017, G 5

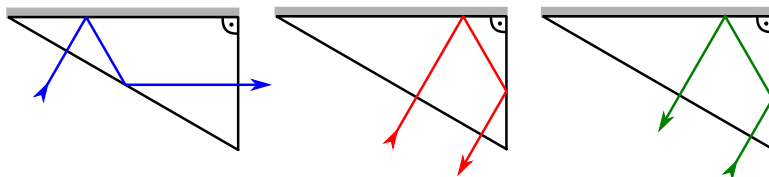
Nõguslääts tekitab esemest näiva kujutise ning kumerlääts tekitab näivast kujutisest tõelise kujutise. Teades kumerläätses asukohta ja fookuseid ning tõelise kujutise asukohta, on võimalik leida näiva kujutise asukoht (joonisel kujutatud sinisega; kujutatud on kolme kiirt, kuid konstrueerimiseks piisab kahest). Teades eseme ning nõgusläätses tekitatud näiva kujutise asukohti, on läätse asukoha ning selle esemepoolse fookuse leidmine lihtne.



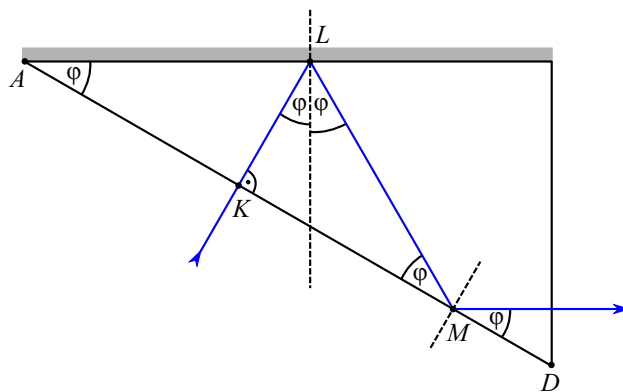
**L114 Periskoopprillid ★★★**

Autor: Andreas Valdmann, lõppvoor, 2014, G 4

a) Kuna sisenevad ja väljuvad kiired on prisma pinnaga risti, siis keskkondade lahuspiiril nende suund ei muutu. Kui kiir langeb prismale lõigul  $AB$ , siis peegeldub see esmalt prismale ülemisel tahul, seejärel alumisel tahul ning väljub prismast läbi parempoolse tahu (vt joonist). Kui kiir langeb prismale lõigul  $BC$ , siis peegeldub see ülemisel tahul, siis parempoolsel tahul ning väljub läbi alumise tahu ja ei jõuagi silma. Kui kiir langeb prismale lõigul  $CD$ , siis peegeldub see esmalt parempoolsel tahul, seejärel ülemisel tahul ning väljub jällegi läbi alumise tahu.



b) Vaatleme kiirt, mis siseneb prismasse lõigul  $AB$ . Kuna sisenev kiir on pinnaga risti, siis tekib täisnurkne kolmnurk  $AKL$  (vt joonist). Kolmnurga üheks teravnurgaks on  $\varphi$  ja seega on teise teravnurga suurus  $90^\circ - \varphi$ . Kuna viimane nurk on esimesel peegeldumisel langemisnurga täiendnurgaks, siis on ka langemisnurk  $\varphi$ . Peegeldumisseadusest järeldub, et esimene peegeldumisnurk on samuti  $\varphi$ . Kuna prismast väljuv kiir on paralleelne prisma ülemise tahuga, siis on teisel peegeldumisel peegeldumisnurk langemisnurga täiendnurk ja seega ka langemisnurga täiendnurk  $\varphi$ . Näeme, et täisnurkse kolmnurga  $KLM$  teravnurgad on  $\varphi$  ja  $2\varphi$ . Kuna kolmnurga sisenurkade summa on  $180^\circ$ , siis  $\varphi = (180^\circ - 90^\circ)/3 = 30^\circ$ .

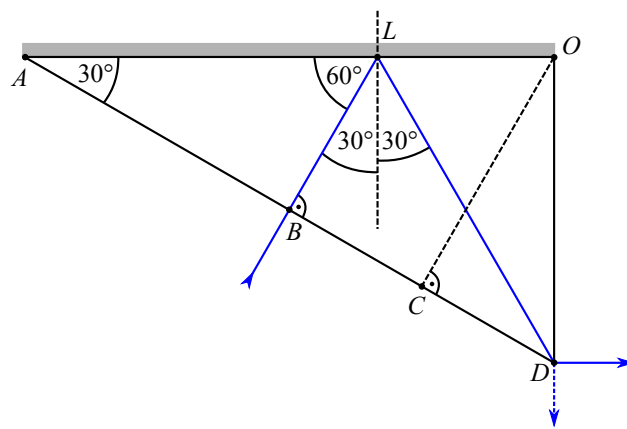


*Märkus.* Nüüd, kui prisma tipunurk on leitud, saame veenduda, et kui pinnaga risti sisenenud kiir peegeldub prisma alumiselt või parempoolselt tahult, siis on need peegeldumised täielikud. Eelmisest alaülesandest on näha, et nendel juhtudel on langemisnurgaks  $90^\circ - \varphi = 60^\circ$ . Täieliku sisepeegeldumise piirnurk on  $\alpha = \arcsin(1/n) = 42^\circ$ . Langemisnurk  $60^\circ$  on sellest suurem ehk toimub täielik sisepeegeldumine.

c) Kui kiir siseneb prismasse punktis  $B$ , siis läbib väljuv kiir punkti  $D$  (vt joonist). Märkus. Väljuva kiire suund pole sel juhul üheselt määratud, kuid see ei oma ülesande lahendamisel tähtsust.

Kasutades eelmises alaülesandes saadud  $\varphi$  väärtust, on näha, et kolmnurgad  $ABL$  ja  $BDL$  on teineteise peegeldused lõigu  $BL$  suhtes (öeldakse, et need kolmnurgad on kongruentsed). Seega on lõikude  $AB$  ja  $BD$  pikkused võrdsed, millest järeldub, et  $|AB| = l/2$ . Kui kiir siseneb prismasse punktis  $C$ , siis peegeldub see punktis  $O$  otse tagasi ning väljub prismast punktis  $C$ . Täisnurksetest kolmnurkadest saame, et  $|AO| = \cos(30^\circ)|AD|$  ja  $|AC| = \cos(30^\circ)|AO|$  ehk punkti  $C$  kaugus punktist  $A$  on

$$|AC| = \cos^2(30^\circ)|AD| = \frac{3}{4}l.$$

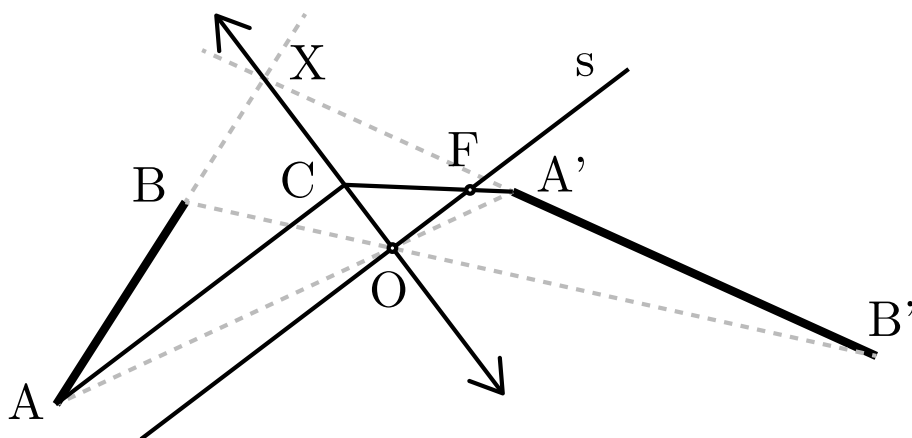


d) Ühe tasapeegli kasutamisel paistab tekst peegelpildis. Seetõttu tuleb teksti õigetpidi nägemiseks kasutada süsteemi, kus toimub paarisarv peegeldusi.

**L115 Lääts ★★★**

Autor: Mihkel Kree, lahtine, 2015, G 5

Paneme esmalt tähele, et läätsesse keskpunkti läbivad kiired  $AA'$  ja  $BB'$  ei murdu. Seega paikneb läätsesse keskpunkt  $O$  lõikude  $AA'$  ja  $BB'$  lõikepunktis. Teisalt märkame, et valguskiir  $AB$  murdub valguskiireks  $A'B'$ . Niisiis, pikendades lõike  $AB$  ja  $A'B'$ , leiame nende lõikepunkti  $X$ . Sellega oleme konstrueerinud läätsesse tasandi  $OX$ . Läätsesse optilise peatelje leiame, kui tõmbame läätsesse tasandiga ristuva sirge  $s$  läbi läätsesse keskpunkti  $O$ . Fookuse  $F$  leidmiseks konstrueerime näiteks peateljega paralleelse kiire  $AC$ , mis murdub läbi fookuse.



**L116 Peegelpõhi ★★★**

Autor: Sandra Schumann, lõppvoor, 2018, G 3

Paneme tähele, et valemi järgi, kui keskkonna murdumisnäitaja suureneb, aga läätsesse murdumisnäitaja jääb samaks, siis läätsesse fookuskaugus suureneb. Seega on ainus viis, kuidas valguskiired saaksid ka pärast anuma vett täis valamist samas punktis koonduda, see, kui vee sees valguskiired peegelduksid põhjas olevalt peeglist ja seejärel koonduksid samas punktis, kus enne.

Läätsesse kaugus anuma põhjast on  $l = 10$  cm. Olgu läätsesse fookuskaugus õhus  $f$ . Siis on tema fookuskaugus vees järelikult  $2l - f$ . Valemi põhjal saame, et

$$\begin{aligned} \frac{f}{2l - f} &= \frac{n_k n_0 - n_0 n_v}{n_k n_v - n_0 n_v} \Rightarrow \\ f(n_k n_v - n_0 n_v) &= (2l - f)(n_k n_0 - n_0 n_v) \Rightarrow \\ n_k n_v f - n_0 n_v f &= 2l n_k n_0 - 2l n_0 n_v - n_k n_0 f + n_0 n_v f \Rightarrow \\ f(n_k n_v + n_k n_0 - 2n_0 n_v) &= 2l n_0 (n_k - n_v) \Rightarrow \\ f &= \frac{2l n_0 (n_k - n_v)}{n_k n_v + n_k n_0 - 2n_0 n_v}. \end{aligned}$$

Seega on lääts fookuskaugus

$$f = \frac{2 \cdot 10 \text{ cm} \cdot 1,0 \cdot (1,49 - 1,33)}{1,49 \cdot 1,33 + 1,49 \cdot 1,0 - 2 \cdot 1,0 \cdot 1,33} = 3,94 \text{ cm} \approx 4 \text{ cm}.$$

### L117 Fookuskaugus ★★★

Autor: Eero Vaher, piirkonnavaor, 2015, G 8

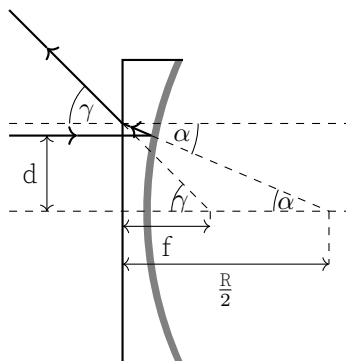
Langegu läätsel vasakult valguskiir, mille suund on paralleelne optilise teljega ning mille kaugus sellest on  $d$ . Lääts sisenedes valgus oma levimissuunda ei muuda, kuna langeb läätsel selle pinnaga risti. Hõbetatud pind toimib kumerpeegli-  
na, mille fookuskaugus on  $\frac{R}{2}$ . Kui peegeldunud valguskiire nurk optilise peatelje suhtes on  $\alpha$ , siis läätsest väljunud kiire ning optilise peatelje vaheline nurk on murdumiseaduse põhjal  $\sin \gamma = n \sin \alpha$ . Kuna lääts on õhuke, asetsevad punktid, kus valguskiir peegeldus ning kus see murdus, üksteisele väga lähedal. Seetõttu võime kirjutada

$$d = \frac{R}{2} \tan \alpha = f \tan \gamma.$$

Õhukese lääts korral on selle nõgusa osa kõverusraadius oluliselt suurem fookuskaugusest, mis lubab kasutada väikeste nurkade lähendust ehk  $\alpha \approx \sin \alpha \approx \tan \alpha$  ning  $\gamma \approx \sin \gamma \approx \tan \gamma$ . Tulemuseks saame

$$f = \frac{R}{2n}.$$

Tasub teada, et avaldis sfäärilise peegli fookuskauguse jaoks kehtibki ainult väikeste peegeldumisnurkade korral. Suurte peegeldumisnurkade korral ilmneb sfääriline aberratsioon ning ei ole võimalik rääkida ühest fookusest.



**L118 Toru ★★★★★**

Autor: Jaan Kalda, lõppvoor, 2012, G 6

Kõigepealt paneme tähele, et punktallika kujutis tekib läätsest kaugusele

$$l = \left( \frac{1}{36} - \frac{1}{60} \right)^{-1} \text{ mm} = 90 \text{ mm},$$

st ekraanil. Kui peegeldavate silindriliste seinte asemel oleks kaks tasapeeglit, siis tekiks punktallika kujutiste lõpmatu jada (peegeldus, peegelduse peegeldus jne), kus kahe naaberkujutise vahekaugus on võrdne peeglite vahekaugusega 12 mm. Läheme nüüd silindrilise juhtumi juurde. Joonise tasandis lebava kiire jaoks on kiirekäik täpselt sama, mis tasapeegli puhul, st joonise tasandis tekivad kujutised samuti perioodilise rivina, kus kujutiste vahekaugus on 12 mm. Joonise tasandit võib pöörata suvaliselt ümber süsteemi sümmeetriatelje; see tähendab, et kujutised on tegelikult “laiali määratud” mööda kontsentrilisi ringjooni raadiustega  $n \times 12 \text{ mm}$ , kus  $n$  on täisarv. Läätse tekitab neist ringidest ekraanile  $\frac{90}{60}$  korda suurendatud kujutise, kus kontsentriliste ringide raadiusteks on  $R = n \times 18 \text{ mm}$ .

**L119 Mikroskoop ★★★★★**

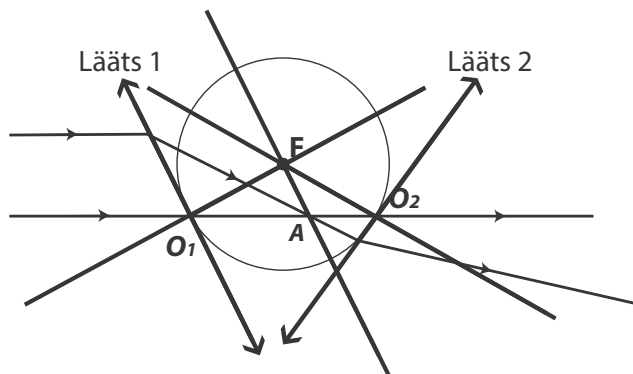
Autor: Valter Kiisk, lõppvoor, 2013, G 7

Esimeses teravustatavas asendis, kus lääts on objektile lähemal kui sensorile (st suurendus  $> 1$ ), olgu läätse kaugus esemest  $a$  ja sensorist  $b$ . Kujutise joonsuurendus on seega  $k = b/a$ . Teises asendis on nimetatud kaugused lihtsalt ümbervahe-  
tatud ja suurendus vastavalt  $l = a/b$ . Niisiis  $25 = k/l = b^2/a^2$ .

Analüüsime nüüd esimesele asendile vastavate kauguste näitel sensori valgustatuse küsimust. Kuivõrd joonsuurendus on  $k$ , siis pindalamuutust iseloomustav tegur on vastavalt  $k^2$ . Lisaks kujutise suurusele mõjutab selle heledust ka valguse hulk, mis pääseb läbi objektiivi. Vaadeldava eseme igast punktist lähtub valgus, mis on enam-vähem ühtlaselt hajutatud üle kõigi suundade, seega läätse läbiva kiirguse hulk on proportsionaalne selle osaga mõttelise sfääri pinnast, mille lõikab välja läätse apertuur:  $\Omega = d^2/a^2$ , kus  $d$  on läätse diameeter. Kokkuvõttes saame, et kujutise heledus on võrdeline suurusega  $\Omega/k^2 = d^2/b^2 \propto b^{-2}$ . Teises asendis, kus lääts on sensorile lähemal, on sama näitaja vastavalt  $a^{-2}$ , seega sel juhul on kujutise heledus suurem  $a^{-2}/b^{-2} = b^2/a^2 = 25$  korda.

**L120 Optiline skeem ★★★★★**

Autor: Erkki Tempel, lahtine, 2014, G 7



Algselt paralleelsed kiired koonduvad pärast läätse läbimist fokaaltasandis (punkt A). Kuna alumine kiir ei murdu, peab see läbima läätse keskpunkti. Seega lääts 1 on paralleelne joonistatud fokaaltasandiga (kiir läbib punkte A ja F) ning läbib punkti  $O_1$ . Kuna tegemist on kahe ühesuguse läätsega ning nende fookused asuvad punktis F, siis ring raadiusega  $FO_1$  läbib alumist kiirt punktis  $O_2$ , mis on teise läätse keskpunktiks. Nüüd saame kergesti joonistada ka teise läätse, kuna teame ülemise kiire murdumiskohta ning läätse keskpunkti asukohta.

**L121 Luup ★★★★★**

Autor: Valter Kiisk, lõppvoor, 2016, G 6

Poolkera kumera pinna keskosa võib vaadelda omaette õhukese läätse, mille fookuskaugus  $f$  ja kaugus paberi pinnast (võrdne kumerpinna raadiusega  $R$ ) määravad kujutise suurenduse. Selle ekvivalentse läätse fookuskauguse määramiseks vaatleme valguskiirt, mis liigub paralleelselt optilise peateljega ja pärast murdmist koondub fookusesse (vt joonis). Kui valguskiir levib optilise peatelje lähedal, siis kõik murdumisel tekkivad nurgad on väikesed, nii et saame tingimuse

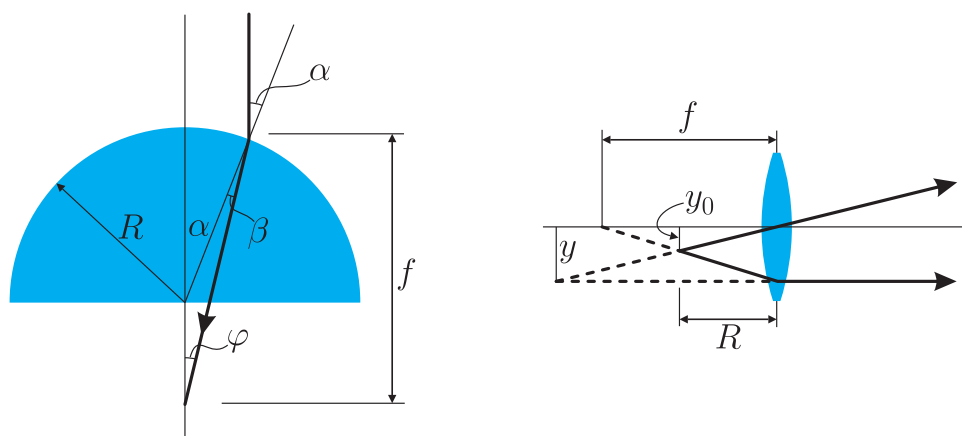
$$\alpha R \approx f\varphi.$$

Ilmselt

$$\varphi = \alpha - \beta = \alpha - \alpha/n = \alpha(1 - 1/n).$$

Nende seoste kombineerimisel nurgad taanduvad välja ja saame  $f = nR/(n - 1)$ . Ilmselt eseme (paberi pinna) kaugus läätsest on  $R$ , kusjuures  $f > R$ , järelikult tekib näiline kujutis kusagil paberi taga. Kõik kaugused on siiski  $R$  suurusjärgus, seega suurelt distantisilt silmaga vaadeldav suurendus (st nurksuurendus) on praktiliselt sama mis joonsuurendus  $y/y_0$ . Kujutise konstrueerimisel tekkivatest sarnastest kolmnurkadest saame

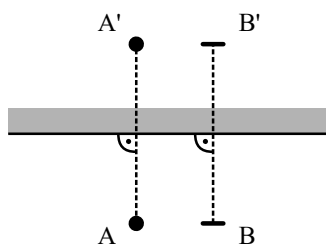
$$\frac{y}{y_0} = \frac{f}{f - R} = n = 1,5.$$



### L122 Nurgapeegel ★★★★★

Autor: Andreas Valdmann, lõppvoor, 2016, G 8

Vaatame kõigepealt kujutise tekkimist tasapeeglis. Joonisel 1 on olukord pealtvaates. A on Juku lahtine silm ja  $A'$  selle kujutis. Kinnine silm ja selle kujutis on vastavalt B ja  $B'$ . Näeme, et parema silma kinnipigistamisel paistab ka peeglis kinnisena vaatleja suhtes parempoolne silm.

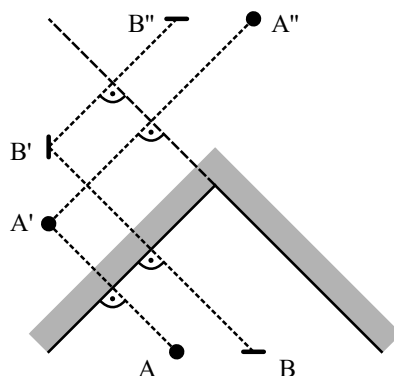


Joonis 1: Kujutis tasapeeglis

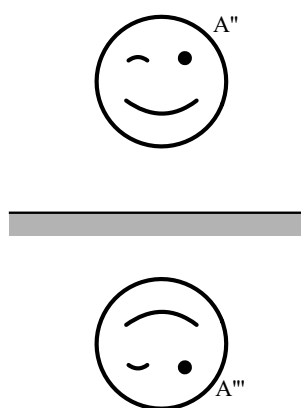
Olgu kolmest peeglist üks horisontaalne ja kaks ülejäänut vertikaalsed, kusjuures Juku vaatab otse vertikaalsete peeglite kokkupuutejoone poole. Joonisel 2 on see olukord pealtvaates. Vaatame vertikaalsete peeglite mõju. Esmalt konstrueerime silma A kujutise  $A'$  vasakpoolses peeglis. Seejärel konstrueerime kujutise  $A'$  kujutise  $A''$  parempoolses peeglis. Toimime samamoodi kujutise  $B''$  konstrueerimisel ja paneme tähele, et seekord on peegelpildil vasak ja parem pool vahetatud ning kinnisena paistab peeglites vasakpoolne silm.

Võtame nüüd arvesse horisontaalse peegli mõju. Joonisel 3 on otsevaates teist järku kujutis  $A''$  ning selle kujutis  $A'''$  horisontaalses peeglis. Näeme, et horisontaalne peegel pöörab pildi “pea peale”. Seega näeb Juku nurgapeeglis ennast sellisena, nagu on joonisel 3 kujutis  $A'''$ .





Joonis 2: Kujutis kahes peeglis

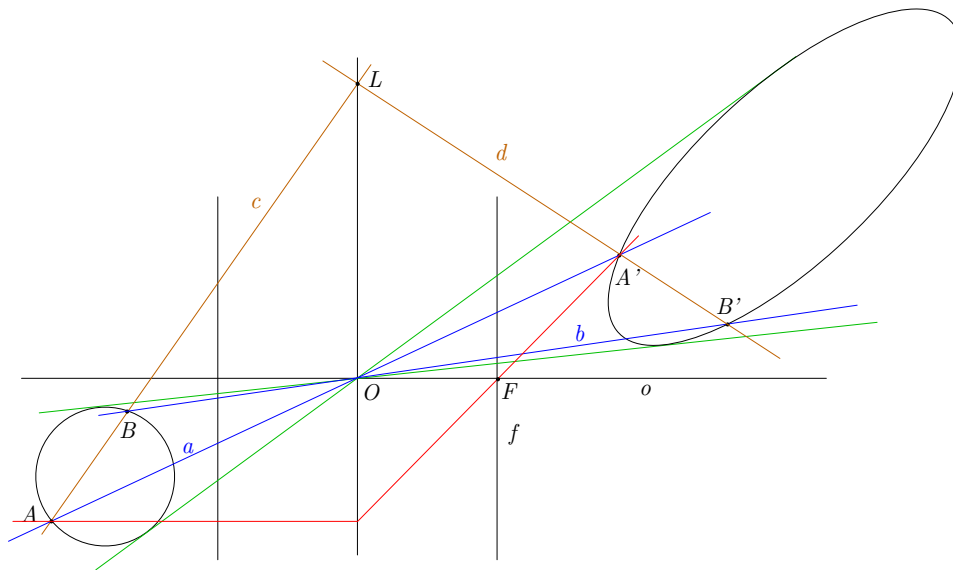


Joonis 3: Peegeldumine horisontaalselt peeglilt

### L123 Ring ja ellips ★★★★★

Autor: Jaan Kalda, lõppvoor, 2015, G 7

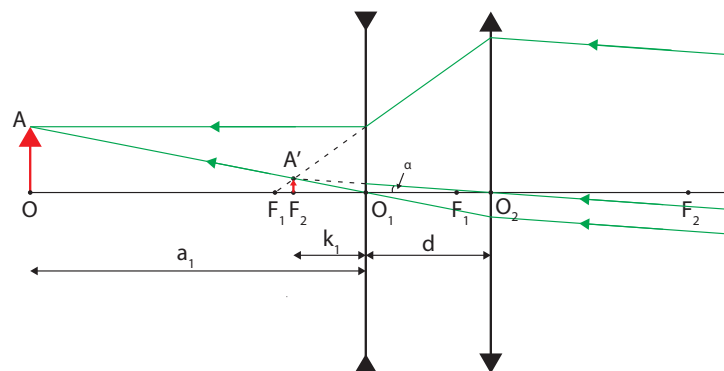
Läätse keskpunkt  $O$  on ringile ja ellipsile tõmmatud puutujate lõikepunkt, kuna puutepunktid peavad olema originaalkujutise paarid ning neid ühendavad sirged peavad läbima läätse keskpunkti. Läätse tasandi leidmiseks valime ringil kaks punkti,  $A$  ja  $B$ , ning leiame nende kujutised ellipsil  $A'$  ja  $B'$  sirgete  $AO$  ja  $BO$  ning ellipsi lõikepunktidenä. Kui originaal on ringi kahest lõikepunktist see, mis asub läätsest kaugemal, siis selle kujutis on see, mis on läätsele lähemal (ja vastupidi), sest tõeline kujutis on pööratud tagurpidi. Kiir  $AB$  peab murduma läätse kiireks  $A'B'$ , murdepunkt annab meile punkti  $L$  läätsele ning sirge  $OL$  on läätse tasandiks. Optilise peatelje  $o$  leiame sirgele  $OL$  punktist  $O$  tõmmatud ristsirgena. Fookuse leidmiseks tõmbame punktist  $A$  kiire, mis on paralleelne  $o$ -ga ja murdub läätsele punkti  $A'$  läbivaks kiireks, mille lõikepunkt  $o$ -ga annab fookuse  $F$ .



#### L124 Kaamera ★★★★★

Autor: Ardi Loot, lõppvoor, 2017, G 8

On selge, et kuna virmalised asuvad kaugel, peab terava kujutise tekkimiseks olema valgustundlik element esialgse läätse fookuses, st kaugusel  $f = 14 \text{ cm}$ . Kuna läätse keskpunkti läbiv kiir suunda ei muuda, saame esialgseks vaatenurgaks  $2\alpha = 2 \arctan(h/f)$ .



Joonisel on kujutatud kompaktse kaamera skeem. Vaatleme lihtsuse huvides olukorda tagurpidi, vaadeldav objekt asub fototundliku elemendi asemel ning kujutis konstrueeritakse lõpmatuses (kiirte pööratavuse printsiip). Nõgusläätse, mis on paigutatud kaugusele  $d$  kumerläätselt, tekitab objektist  $A$  näiva kujutise  $A'$ . Seda

näivat kujutist vaadeldakse kumerläätses, mis konstrueerib sellest kujutise lõp-  
matuses. Kirja saab panna järgnevad võrrandid:

$$\frac{1}{k_1} - \frac{1}{a_1} = \frac{1}{f_1}, \quad (1)$$

$$k_1 + d = f_2, \quad (2)$$

$$a_1 + d = L_m. \quad (3)$$

Neist esimene määrab nõgusa läätse poolt näiva kujutise asukoha. Teine võrrand garanteerib, et kumerlääts konstrueerib sellest kujutise lõpmatuses. Kolmas võrrand tagab, et kogu süsteem oleks kompaktne. Lisaks eeltoodud võrranditele on vaja säilitada ka esialgse kaamera vaatenurk. Selleks märkame, et joonisel toodud nurk  $\angle A'O_2F_2 = \alpha$ . Seetõttu saame kirja panna:

$$\frac{h'}{f_2} = \frac{h}{f}, \quad (4)$$

kus  $h'$  tähistab kujutise  $A'$  kõrgust, mille saame leida kolmnurkade  $OAO_1$  ja  $F_2A'O_1$  sarnasusest

$$h' = h \frac{k_1}{a_1}. \quad (5)$$

Lahendades võrranditest (1) - (5) tekkinud süsteemi, saame

$$f_1 = \frac{f_2 f (L_m - f_2)}{(f - f_2)^2} \approx 1,39 \text{ cm},$$

$$d = \frac{f_2(f - L_m)}{f - f_2} \approx 1,91 \text{ cm}.$$

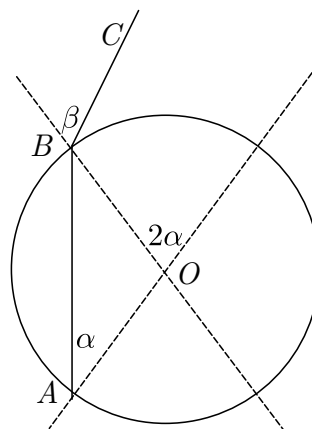
#### L125 Klaassilinder ★★★★★

Autor: Jaan Kalda, lõppvoor, 2014, G 10

Tähistame märgitud punkti  $A$ -ga ning murdugu sealt lähtunud kiir punktis  $B$  nii, et suundub eemale läbi punkti  $C$  (vt joonist). Sihi  $BC$  suunast kaugelt vaadatuna näeme tumeda punkti asukohana punkti  $B$ . Uurime, kuidas sõltub kiire  $BC$  leviku suund, mida kirjeldame  $AO$  ja  $BC$  vahelise nurga  $2\alpha - \beta$  abil, kiire algsest levikusuunast  $\alpha$ :

$$2\alpha - \beta = 2\alpha - \arcsin(n \sin \alpha).$$

Silindri algasendi korral  $2\alpha - \arcsin(n \sin \alpha) = 0$ , mille üks lahend  $\alpha = 0$  annab keskmise näiva punkti ning kaks külgmist tumedat punkti vastavad võrrandi  $\sin(2\alpha) = n \sin \alpha$  ülejäänud lahenditele vahemikus  $-45^\circ < \alpha < 45^\circ$ . Kui pöörata nüüd



silindrit nurga  $\delta$  võrra, siis vastavad näivad punktid võrrandi

$$2\alpha - \arcsin(n \sin \alpha) = \delta$$

lahenditele. Võrrandi vasakul pool on funktsioon, mis väikeste nurkade puhul käitub kui  $(2 - n)\alpha$ ; suuremate nurkade puhul teise liidetava suhteline mõju kasvab. Seega juhul  $2 > n$ , on tegemist väikeste nurkade puhul kasvava funktsiooniga, mis läheb suuremate nurkade puhul üle kahanevaks; juhul  $2 < n$  on see aga monotoonselt kahanev funktsioon. Kuivõrd  $\delta = 0$  puhul on kolm lahendit, siis peab olema tegemist esimese juhtumiga,  $2 > n$ . Nende pöördnurkade  $\delta$  puhul, mis on suuremad selle funktsiooni lokaalsest maksimumist, on võrrandil vaid üks lahend. Funktsioon saavutab globaalse maksimumi täieliku sisepeegelduse piirjuhul

$$n \sin \alpha = -1,$$

mis annab pöördnurga

$$90^\circ - 2 \arcsin \frac{1}{n} = 15^\circ \Rightarrow n = 1 / \sin 37,5^\circ = 1,64.$$

#### L126 Rong ★

Autor: Koit Timpmann, piirkonnavor, 2013, G 1

Olgu rongi maksimaalne kiirus  $v$  ning kogu sõiduaeg  $t$ . Kiirendamise jooksul on keskmine kiirus  $v/2$  ning sellele kulub aega  $\frac{2t}{5}$ . Pidurdamine võtab aega  $\frac{t}{5}$  ning ka selle jooksul on keskmine kiirus  $v/2$ . Kogu sõidu keskmine kiirus on seega

$$v_k = \frac{\frac{2t}{5} \frac{v}{2} + \frac{2t}{5} v + \frac{t}{5} \frac{v}{2}}{t} = \frac{7}{10} v.$$

Kokku,

$$v = \frac{10}{7} v_k \approx 51 \text{ km/h}.$$

#### L127 Rongivile ★

Autor: Mihkel Kree, lahtine, 2015, G 1

Tähistagu  $L$  veduri kaugust jaamaülemast hetkel, mil vedurijuht alustab vile laskmisega. Heli levimiseks jaamaülemast kulub sel juhul aeg  $\tau_A = L/c$ . Vile lõppedes on veduri kaugus jaamaülemast  $L - vt_0$ , kus  $v$  on rongi liikumise kiirus. Heli levimiseks sellelt kauguselt kulub aeg  $\tau_B = (L - vt_0)/c$ . Alustagu vedurijuht vile laskmisega hetkel  $\tau_0$  ning lõpetagu hetkel  $\tau_0 + t_0$ . Jaamaülem kuuleb vile algust hetkel  $\tau_0 + \tau_A$  ning vile lõppu hetkel  $\tau_0 + t_0 + \tau_B$ . Nende ajahetkede vahe  $t_1$  on mõistagi jaamaülema mõõdetud vile kestus. Seega saame võrrandi

$$t_1 = t_0 + \tau_B - \tau_A = t_0 - \frac{v}{c} t_0,$$

millest

$$v = \frac{t_0 - t_1}{t_0} c = 34 \text{ m/s}.$$

**L128 Kaubarong ★**

Autor: Erkki Tempel, piirkonnavaor, 2015, G 1

Leiame ajad, mille jooksul rong pidurdas ning kiirendas:

$$t_p = \frac{v - v_h}{a_p}, \quad t_k = \frac{v - v_h}{a_k}.$$

Rong läbis selle ajaga vahemaa

$$s_p = \frac{v^2 - v_h^2}{2a_p}, \quad s_k = \frac{v^2 - v_h^2}{2a_k}.$$

Sõites ühtlaselt 72 km/h, oleks rong läbinud selle vahemaa ajaga

$$t_{py} = \frac{s_p}{v}, \quad t_{ky} = \frac{s_k}{v}.$$

Seega aja kaotus pidurdamisel ning kiirendamisel on

$$\Delta t_p = t_p - t_{py}, \quad \Rightarrow \quad \Delta t_p = \frac{(v - v_h)^2}{2va_p} = 28,125 \text{ s},$$

$$\Delta t_k = t_k - t_{ky}, \quad \Rightarrow \quad \Delta t_k = \frac{(v - v_h)^2}{2va_k} = 56,25 \text{ s}.$$

Kuna rong hilines aja  $\Delta t$ , siis saame leida aja  $\Delta t_h$ , mille rong kaotas ühtlaselt sõites:

$$\Delta t_h = \Delta t - \Delta t_p - \Delta t_k = 215,625 \text{ s}.$$

Kui rong läbis aeglaselt (18 km/h) sõites vahemaa  $s_h$ , siis kulus tal selleks aega

$$t_h = \frac{s_h}{v_h}.$$

Sõites kiirusega 72 km/h oleks ta selle vahemaa läbinud ajaga

$$t_{hy} = \frac{s_h}{v}.$$

Teades, et  $\Delta t_h = t_{hy} - t_h$ , saame avaldada teepikkuse  $s_h$ :

$$s_h = \frac{vv_h \Delta t_h}{v - v_h} = 1437,5 \text{ m} \approx 1,4 \text{ km}.$$

**L129 Kiirabiauto ★**

Autor: Sandra Schumann, lahtine, 2017, G 1

Olgu kiirabiauto kiirus  $v$  ja auto poolt tekitatava heli sagedus  $f_0$ . Rakendame valemit kahel juhul: auto lähenemisel ja eemaldumisel.

Auto lähenemisel:

$$f_1 = \left( \frac{v_s}{v_s - v} \right) f_0.$$

Auto eemaldumisel:

$$f_2 = \left( \frac{v_s}{v_s + v} \right) f_0.$$

Kuna helisageduste erinevus kuue tooni võrra vastab kahekordsele erinevusele sagedustes, siis vastab ühetoonine erinevus  $2^{\frac{1}{6}}$ -kordsele erinevusele ja pooleteistoonine erinevus  $\left(2^{\frac{1}{6}}\right)^{\frac{3}{2}} = 2^{\frac{1}{4}}$ -kordsele erinevusele. Seega saame:

$$2^{\frac{1}{4}} = \frac{f_1}{f_2} = \frac{\left(\frac{v_s}{v_s - v}\right)f_0}{\left(\frac{v_s}{v_s + v}\right)f_0} = \frac{v_s + v}{v_s - v},$$

$$v_s + v = 2^{\frac{1}{4}}v_s - 2^{\frac{1}{4}}v,$$

$$(2^{\frac{1}{4}} + 1)v = (2^{\frac{1}{4}} - 1)v_s,$$

$$v = \frac{2^{\frac{1}{4}} - 1}{2^{\frac{1}{4}} + 1}v_s = \frac{2^{\frac{1}{4}} - 1}{2^{\frac{1}{4}} + 1} \cdot 343 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 29,64 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 107 \frac{\text{km}}{\text{h}}.$$

Saame vastuseks  $107 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ .

**L130 Pidurdus ★**

Autor: Mihkel Rähn, piirkonnavor, 2017, G 2

**a)** Kuna autod pidurdavad maksimaalselt, siis on nende aeglustused võrdsed ning pidurdamise teepikkused on sama pikad. Seega, kui tagumise auto nina on pidurite rakendumisel samas kohas, kus eesmise auto saba oli piduritulede süttides, siis sellel piirjuhul veel otsasõitu ei toimu. Leiame vahemaa, millal see täpselt nii on:

$$s = vt = 50 \text{ km/h} \cdot 1,5 \text{ s} = 20,8 \text{ m}.$$

**b)** Vaatleme liikumist taustsüsteemis, mis liigub kiirusega  $v$  autodega samas suunas. Selles taustsüsteemis on autode esialgne kiirus null ja esimese auto pidurdamisel hakkab ta selle taustsüsteemi suhtes ühtlaselt kiirenema kiirendusega, mis on leitav seosest  $F = ma$ , kus  $F = \mu mg$ , seega  $a = \mu g$ . Esmalt tuleb kindlaks teha, kas kokkupõrge leiab aset enne või pärast tagumise auto pidurite rakendumist. Kui kokkupõrge toimuks enne tagumise auto pidurdama hakkamist, siis kehtiks kokkupõrke ajal  $l = at^2/2$ , millest

$$t = \sqrt{2l/ug} = 1,0 \text{ s}.$$

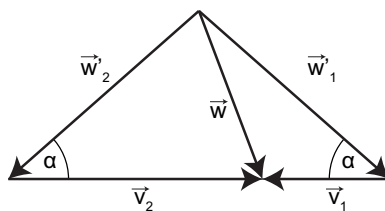
Kuna see on väiksem kui 1,5 sekundit, siis toimub autode kokkupõrge enne teise auto pidurite rakendumist autodevahelise kiirusega  $\Delta v = at = 36 \text{ km/h}$ .

**L131 Jalgrattur ★★**

Autor: Jaan Kalda, lõppvoor, 2013, G 3

Jalgratturi mõõdetav tuul  $\vec{w}'$  on tuule kiirusvektori  $\vec{w}$  ja jalgratturi kiirusvektori  $\vec{v}$  vahe  $\vec{w}' = \vec{w} - \vec{v}$ . Olgu jalgratturi kiirusvektorid  $\vec{v}_1$  ja  $\vec{v}_2$  ning tuule kiirusvektorid  $\vec{w}'_1$  ja  $\vec{w}'_2$  vastavalt ühele ja teisele poole sõites.

Antud juhul teame ainult kiirusi, mitte nende suundi. Teades eelnevalt, et mõõdetud tuule kiirus on sama suur mõlemas suunas liikudes, saab kiirusvektorid esitada võrdhaarse kolmnurgana. (Kolmnurga mõlemad pooled vastavad erinevas suunas sõitmisele ning vastavad ülal mainitud valemile. Kuna tuule vektor on mõlemal juhul sama ja kiirused paralleelsed, saab selle konstrueerida nagu joonisel.)



Koosinusteoreemist:

$$\begin{cases} |\vec{w}|^2 = |\vec{w}'_1|^2 + |\vec{v}_1|^2 - 2|\vec{w}'_1||\vec{v}_1|\cos\alpha \\ |\vec{w}|^2 = |\vec{w}'_2|^2 + |\vec{v}_2|^2 - 2|\vec{w}'_2||\vec{v}_2|\cos\alpha. \end{cases}$$

Teades, et  $|\vec{v}_2| = 2|\vec{v}_1|$  ja et  $|\vec{w}'_1| = 2|\vec{w}'_2|$ , saame esimese võrrandi korrutada kahega ja teise sellest lahutada.

$$|\vec{w}|^2 = |\vec{w}'_1|^2 - 2|\vec{v}_1|^2.$$

Ehk tuule tegelik kiirus on:

$$|\vec{w}| = \sqrt{|\vec{w}'_1|^2 - 2|\vec{v}_1|^2} \approx 14 \text{ km/h.}$$

**L132 Viiul ★★**

Autor: Jaan Toots, lõppvoor, 2014, G 2

Tekkival seisulainel peavad olema sõlmed mõlemas keele võnkuva osa otspunktis, seega võngub alla vajutades osa pikkusega  $\frac{3}{7}L$ , millele vastab lainepikkus  $\lambda_0 = \frac{6}{7}L$ . Puudutades võngub kogu keel ning on kolm tingimust: sõlmpunktid on mõlemas otsas ning lisaks puudutatavas punktis. Seega peab sellest punktist mõlemale poole mahtuma täisarv poollainepikkusi. Võnkuvate osade suhe on  $\frac{3/7}{1-3/7}$  ehk  $\frac{3}{4}$ . 3 ja 4 on ühistegurita. Seega peab jääma võnkuvatele pooltele vastavalt 3 ja 4 poollainepikkust. Vaadeldes pikkusega  $\frac{3}{7}L$  keele poolt, taipame et  $\lambda = \frac{2L}{7}$  ning

$$\frac{\nu}{\nu_0} = \frac{\lambda_0}{\lambda} = 3.$$

**L133 Pöördlava ★★★**

Autor: Taavi Pungas, piirkonnavoort, 2012, G 4

Kettaga kaasapöörlevas taustsüsteemis peab näitleja liikuma mööda sirgjoont (et maksimeerida vahemaa). Aja  $t$  jooksul liigub ketas edasi nurga  $360^\circ \frac{t}{T} = 2\pi \frac{t}{T}$  võrra. Ketta peale astudes ja mööda seda kõndides saab näitleja ise edasi liikuda nurga  $2 \arcsin \frac{vt}{2r}$  võrra (näitleja peab jõudma tagasi ketta äärele ja sestap moodustab tema trajektoor ketta kõõlu). Kokku saame, et

$$\alpha = 360^\circ \frac{t}{T} + 2 \arcsin \frac{vt}{2r} = 2\pi \frac{t}{T} + 2 \arcsin \frac{vt}{2r}.$$

**L134 Pallivise ★★★**

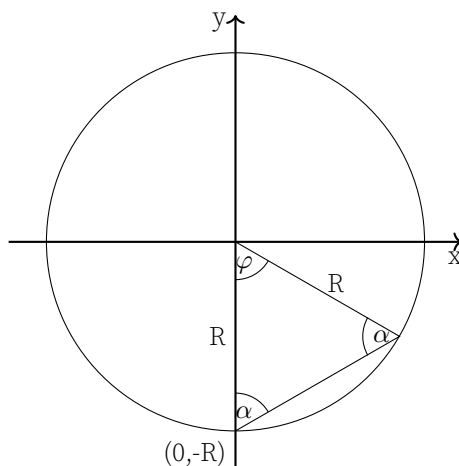
Autor: Eero Vaher, lõppvoort, 2015, G 5

Vaatleme palli lendu jaama teljega seotud inertsiaalses taustsüsteemis. Olgu Juku koordinaadid palli viskamise hetkel  $(0, -R)$ . Sellisel juhul liigub pall pärast viset ühtlaselt ning sirgjooneliselt, kusjuures selle kiiruse vertikaalsihiline komponent on  $v$  ning horisontaalsihiline komponent  $\omega R$ . Järelikult  $\tan \alpha = \frac{\omega R}{v}$ , millest saame  $\alpha = \frac{\pi}{3}$ . Kuna kehtib  $\varphi = \pi - 2\alpha$ , siis saame järeldada, et ka  $\varphi = \frac{\pi}{3}$  ning pall läbib enne jaama pinnani jõudmist teepikkuse  $R$ . Palli kiirus on

$$\sqrt{v^2 + \omega^2 R^2} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \omega R,$$

seega on pall õhus aja  $t = \frac{\sqrt{3}}{2\omega}$ , mille jooksul jõuab jaam pöörduda nurga  $\theta = \omega t = \frac{\sqrt{3}}{2}$  võrra. Järelikult näeb Juku otse üles visatud palli maanduvat enda ees kaugusel

$$(\varphi - \theta) R = \left( \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) R.$$

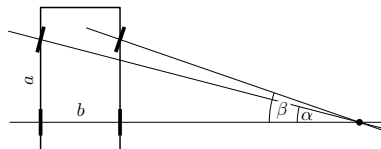




**L135 Rehvid ★★★**

Autor: Siim Ainsaar, lõppvoor, 2012, G 5

Rattad tuleb pöörata suunda, mis ühtib nende liikumissuunaga. Ilmselt asub auto pöörlemisel tagarataste telgedega samal sirgel. Samas asub see optimaaljuhul ka nii vasaku kui ka parema esiratta teljel. Seega otsitav nurk



$$\beta = \operatorname{arccot} \left( \frac{a \cot \alpha - b}{a} \right) = \operatorname{arccot} \left( \cot \alpha - \frac{b}{a} \right).$$

**L136 Kammid ★★★**

Autor: Jaan Kalda, lõppvoor, 2014, G 5

Kui hall kamm liigub ühe pii võrra, on uus pilt identne esialgsega ning järelikult on tume laik liikunud ühe "lainepikkuse" võrra. Ühe laikude "lainepikkuse" kohta tuleb 7 halli kammi piide "lainepikkust", seega liiguvad hallid laigud 7 korda kiiremini kui hall kamm:  $v = 7 \text{ cm/s}$ .

**L137 Päikese pöörlemine ★★★★★**

Autor: Mihkel Kree, lahtine, 2014, G 10

Olgu Päikese pöörlemise joonkiirus ekvaatoril  $v$ . Kuna punktid A ja B lähenevad meile ja kaugenevad meist kiirusega  $v$ , siis mõõdetavad lainepikkused  $\lambda_A$  ja  $\lambda_B$  erinevad algsest lainepikkusest  $\lambda_0$  Doppleri nihke tõttu. Punktist A näib kiirguvat lühem lainepikkus  $\lambda_A = \lambda_0(1 - v/c)$  ning punktist B pikem  $\lambda_B = \lambda_0(1 + v/c)$ .

Kes Doppleri valemit peast ei tea, võib arutleda ka järgnevalt. Liikugu kiirguse allikas meie poole kiirusega  $v$ . Lainepikkusele  $\lambda_0$  vastava laine sagedus on  $f_0 = \frac{c}{\lambda_0}$ , järelikult võime mõelda, et lainehari kiiratakse iga intervalli  $\tau = 1/f_0 = \lambda_0/c$  järel, mis vastab laine perioodile. Kiiratagu mingil hetkel esimene lainehari. Ühe perioodi jooksul liigub see kaugusele  $x = c\tau$ ; allikas ise liigub aga selle aja jooksul meile lähemale  $\Delta x = v\tau$  võrra ja kiirgab sealt järgmise laineharja. Niisiis tundub meile kui vaatlejale, et kahe laineharja vaheline kaugus ehk lainepikkus on

$$\lambda' = x - \Delta x = (c - v)\tau = \lambda_0(1 - v/c).$$

Punktidest A ja B mõõdetud lainepikkuste erinevus avaldub niisiis kui

$$\Delta\lambda = \lambda_B - \lambda_A = 2\lambda_0 v/c,$$

kust saame lihtsalt avaldada joonkiiruse  $v = c\Delta\lambda/2\lambda_0$  ning selle abil ka pöörlemisperioodi:

$$T_p = \frac{2\pi r}{v} = \frac{4\pi r\lambda_0}{c\Delta\lambda} = \frac{4 \cdot 3.14 \cdot 7 \cdot 10^8 \cdot 5.9 \cdot 10^{-7}}{3 \cdot 10^8 \cdot 7.8 \cdot 10^{-12}} \text{ s} \approx 26 T_m.$$

Päike ei ole tahke keha, selle erinevad laiuskraadid pöörlevad erineva nurkkiirusega. Pooluselähedastel piirkondadel kulub ühe täispöörde tegemiseks umbes 34 päeva.

**L138 Traatrõngad ★★★★★**

Autor: Jaan Kalda, lõppvoor, 2014, G 9

Läheme süsteemi, mis pöörleb nurkkiirusega  $\omega/2$ ; seal on näha, et löikepunkt ei pöörle, vaid liigub radiaalselt. Seega, laboratoorses süsteemis on selle nurkkiirus  $\omega/2$ ; sellise nurkkiirusega pöörleb kõõl  $AB$ ; et kesknurk on kahekordne piirde-nurk, siis raadius  $OB$  (kus  $O$  on seisva rõnga keskpunkt) pöörleb nurkkiirusega  $\omega$  ning järelikult on löikepunkti kiirus samaselt võrdne  $\omega R$ -ga.

**L139 Anemomeeter ★★★★★**

Autor: Jaan Kalda, lahtine, 2016, G 9

Leviaegade suhtelised erinevused on väikesed, seega võime lugeda, et helikiirus on hulga suurem tuule kiirusest. Vaatleme heli levikut õhuga seotud taustsüsteemis, kus sensorite suhtelise nihke  $x$ - ja  $y$ -telje sihilised komponendid ( $s_x = u_x \frac{a}{c_s}$  ja  $s_y = u_y \frac{a}{c_s}$ ) on samuti väikesed:  $s_x, s_y \ll a$ ;  $u_x$  ja  $u_y$  tähistavad tuule kiiruse komponente ning  $c_s$  - heli kiirust. Rängelt võttes pidanuksid siin valemeis olema täpsed lennuajad  $t_A, t_B$  ja  $t_C$ , kuid nihked ise on väikesed ning leviaegade väikeste vahede tõttu tuleb viga juba tühiselt väike. Niisiis saame leviaegade jaoks avaldised:

$$\begin{aligned} t_A &= \frac{1}{c_s} \left( a + u_y \frac{a}{c_s} \right), \\ t_B &= \frac{1}{c_s} \left( a + u_x \frac{a}{c_s} \right) \quad \text{ja} \\ t_C &= \frac{1}{c_s} \left( a - u_x \frac{a}{c_s} \right), \end{aligned}$$

millest  $\frac{a}{c_s} = \frac{1}{2}(t_B + t_C)$ ,

$$u_x = \frac{c_s^2}{a} \left[ t_B - \frac{1}{2}(t_B + t_C) \right] = c_s \frac{t_B - t_C}{t_B + t_C} = 2a \frac{t_B - t_C}{(t_B + t_C)^2} \approx 6,1 \text{ m/s}$$

ning

$$u_y = \frac{c_s^2}{a} \left[ t_A - \frac{1}{2}(t_B + t_C) \right] = 2a \frac{2t_A - t_B - t_C}{(t_B + t_C)^2} \approx 7,1 \text{ m/s}.$$

Seega on tuule kiirus  $u = \sqrt{u_x^2 + u_y^2} \approx 9,4 \text{ m/s}$ .

**L140 Kaater ★★★★★**

Autor: Jaan Kalda, lõppvoor, 2016, G 9

Vaatleme kaatri liikumist õhu suhtes: alguses  $l_1 = t_1 v_1 = 2700 \text{ m}$  itta, siis  $l_2 = t_2 v_2 = 900 \text{ m}$  kagusse ning lõpuks  $l_3 = t_3 v_3 = 450 \text{ m}$  edelasse. Kokkuvõttes nihkuti lõunasuunas

$$L_S = \frac{l_2 + l_3}{\sqrt{2}} \approx 955 \text{ m}$$

ning idasuunas

$$L_E = l_1 + \frac{l_2 - l_3}{\sqrt{2}} \approx 3018 \text{ m},$$

maa suhtes aga nihkuti  $l$  võrra lõunasse. Seetõttu pidi õhk liikuma  $L_E$  võrra läände ning  $l - L_S$  võrra lõunasse. Siit saame tuule tugevuseks

$$v_t = \frac{\sqrt{L_S^2 + (l - L_S)^2}}{t_1 + t_2 + t_3} \approx 11,9 \text{ m/s} \approx 12 \text{ m/s}.$$

### L141 Magnetpeegel ★★

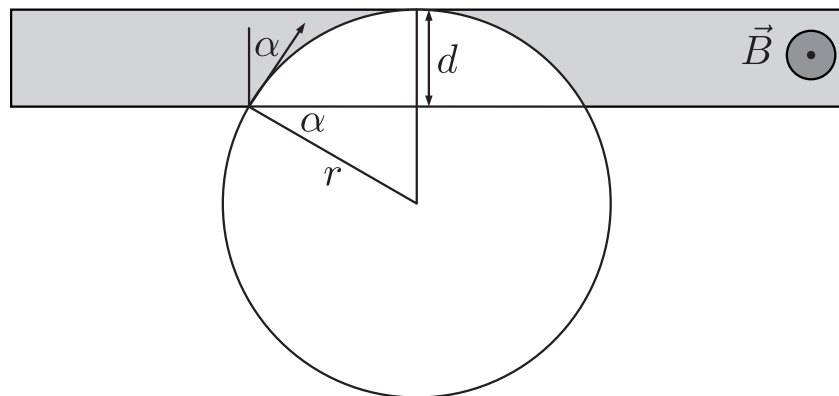
Autor: Kristian Kuppart, lahtine, 2013, G 2

Magnetvälja sattununa hakkab osake liikuma mööda ringjoone kaart, mille kõverusraadiuse saame leida, kui mõtleme, et ringliikumiseks vajaliku kesktõmbejõu annab Lorentzi jõud:

$$m \frac{v^2}{r} = qvB, \quad \text{millest} \quad r = \frac{mv}{qB}.$$

Kui langemisnurk  $\alpha$  on piisavalt väike, läbib osake magnetvälja riba. Kui hakkame  $\alpha$ -t suurendama, saabub olukord, kus ühel hetkel osake enam magnetvälja riba ei läbi, vaid “peegeldub” tagasi. Sellel piirjuhul (vt joonist):

$$r \sin \alpha_{\max} + d = r, \quad \text{millest} \quad \alpha_{\max} = \sin^{-1} \left( 1 - \frac{d}{r} \right).$$



**L142 Generaator ★★**

Autor: Andreas Valdmann, lahtine, 2013, G 5

a) Elektrivool generaatori mähises (juhtmekontuuris) tekib elektromagnetilise induktiooni toime ning seda protsessi kirjeldab Faraday seadus

$$\varepsilon = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t},$$

kus  $\varepsilon$  on voltides mõõdetav elektromotoorjõu suurus ning  $\Delta\Phi$  on juhtmekontuuri läbiva magnetvoo muutus, mis toimub ajavahemiku  $\Delta t$  jooksul. Magnetvoo suurus  $\Phi$  sõltub mähise asendist generaatori magnetite suhtes. Mähise pöörlemisageduse suurendamisel 2 korda kulub magnetvoo muutmiseks  $\Delta\Phi$  võrra 2 korda vähem aega ja seetõttu suureneb elektromotoorjõud 2 korda. Kuna generaatoris kaod puuduvad, siis võib tema sisetakistuse lugeda nulliks ning antud juhul on generaatori klemmipinget  $U$  alati võrdne tema elektromotoorjõuga. Lambis eralduv võimsus avaldub kujul

$$P = UI = \frac{U^2}{R},$$

Kus  $I$  on voolutugevus lambis ning  $R$  on lambi takistus. Kuna viimane ei muutu, siis järelikult suureneb pinget kahekordsel suurendamisel võimsus  $2^2 = 4$  korda. Seega  $P_1 = 4P_0$ .

b) Jõumomendi avaldamise näitlikustamiseks kujutame ette, et generaatorit pööratakse vändaga, mille öla pikkus on  $l$  ning mille otsale avaldatakse tangentsiaalselt jõudu  $F$ . Pöördemoment  $M$  avaldub kui  $M = Fl$ . Kadude puudumisel on generaatori pööramise võimsus võrdne lambil eralduva võimsusega. Definitsioonist teame, et mehaaniline võimsus on töö tegemise kiirus ehk

$$P = \frac{A}{\Delta t},$$

kus  $A$  on ajavahemiku  $\Delta t$  jooksul tehtud töö, mis avaldub omakorda jõu ja nihke korrutisena  $A = F\Delta s$ . Nihe  $\Delta s$  kujutab antud juhul vända otspunkti tangentsiaalset liikumist, milleks kulus ajavahemik  $\Delta t$ . Vända otspunkti nihe avaldub kui  $\Delta s = \Delta\phi l$ , kus  $\Delta\phi$  on nihkele vastav pöördenurk. Niisiis saame avaldada mehaanilise võimsuse:

$$P = F \frac{\Delta s}{\Delta t} = Fl \frac{\Delta\phi}{\Delta t}.$$

Paneme tähele, et avaldises esinev  $\Delta\phi/\Delta t$  on vända pöörlemise nurkkiirus  $\omega$ . Kõrvutades tulemust varem leitud jõumomendi avaldisega, saame lihtsa seose  $P = M\omega$ . Esialgel juhul oli generaatorit pöörav jõumoment seega  $M_0 = P_0/\omega_0$ . Kuna  $\omega_1 = 2\omega_0$  ja  $P_1 = 4P_0$ , siis oli pöördemoment pärast sageduse suurendamist

$$M_1 = P_1/\omega_1 = 2P_0/\omega_0.$$

**L143 Tiirlev kuulike ★★★**

Autor: Eero Vaher, lahtine, 2013, G 6

Olgu positiivse laenguga kuulikese laeng  $Q$ . Kuulikesele mõjuks kirjeldatud magnetväljas Lorentzi jõud suurusega  $F_L = QvB$ . See jõud oleks kuulikesele mõjuvaks kesktõmbejõuks  $F_k = \frac{mv^2}{r}$ . Saame  $QvB = \frac{mv^2}{r}$ . Kaks isoleeritud võrdse massiga kuulikest tiirlevad ümber ühise massikeskme, seega on nende omavaheline kaugus  $d = 2r$ . Kuulikesi ringorbiidil hoidvaks kesktõmbejõuks on kuloniline jõud suurusega

$$F_C = \frac{kqQ}{d^2} = \frac{kqQ}{4r^2}.$$

Kuna teineteise ümber tiirlevad laengud peavad olema vastasmärgilised, siis  $|F_C| = -F_C$ . Võrdsustades kesktõmbejõu ning kulonilise jõu suuruse, saame

$$\frac{mv^2}{r} = -\frac{kqQ}{4r^2}$$

ehk

$$QvB = -\frac{kqQ}{4r^2}.$$

Lõpptulemuseks saame

$$q = -\frac{4vBr^2}{k}.$$

**L144 Tsüklotron ★★★**

Autor: Kristian Kuppart, piirkonnavor, 2018, G 10

Osakesed hakkavad tsüklotronis liikuma päripäeva mööda järjest suureneva raadiusega poolringjooni. Osakese trajektoori raadius avaldub kui  $r = mv/qB$ , kus  $v$  on osakese kiirus. Osake väljub tsüklotronist, kui tema trajektoori raadius kasvab sama suureks tsüklotroni raadiusega  $R$ , sel juhul tema kiirus  $v = qBR/m$ . Ühe täisringi jooksul saab osake elektriväljalt kineetilise energia  $\varepsilon_k = 2qEd$ , kuna osake läbib selle aja jooksul riba 2 korda. Seega on osakese kiirus tsüklotronist väljumisel

$$\frac{mv^2}{2} = 2qEdn, \quad v^2 = \frac{4qEdn}{m}.$$

Avaldades neist võrranditest  $n$ , saame  $n = \frac{qB^2R^2}{4mEd}$ .

**L145 Mass-spektromeeter ★★★★★** Autor: Kristian Kuppart, piirkonnavor, 2013, G 10

Potentsiaalide vahes  $U$  saab kiirendatud laetud osake kineetilise energia

$$\frac{mv^2}{2} = qU,$$

siit avaldame osakese kiiruse:

$$v = \sqrt{\frac{2qU}{m}}.$$

Kuna magnetväli on kiirusega risti, hakkab laetud osake magnetvälja jõudes liikuma seal mööda ringjoone kaart, kus ringjoone raadius  $R = \frac{mv}{qB}$ . Selleks ajaks, kui osake jõuab detektorini, on ta läbinud pool ringjoonest. Olgu  $m_2$  raskema isotoobi mass ja  $m_1$  kergema isotoobi mass. Sel juhul

$$2 \left( \frac{m_1 v_1}{qB} - \frac{m_2 v_2}{qB} \right) = d,$$

ehk

$$m_2 v_2 = \frac{qBd}{2} + m_1 v_1.$$

Arvestades, et  $v_1 = \sqrt{\frac{2eU}{m_1}}$  ja  $v_2 = \sqrt{\frac{2eU}{m_2}}$ , kus  $e$  on elementaarlaeng, saame eelmise võrrandi ümber kirjutada kui

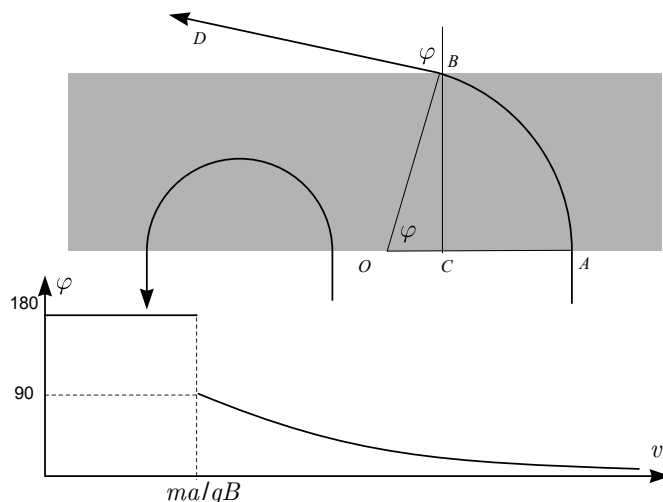
$$\sqrt{m_2} = \sqrt{m_1} + \frac{Bd}{2} \sqrt{\frac{e}{2U}}.$$

Võttes arvesse, et  $m_2 = \frac{\mu_2}{N_A}$  ja  $m_1 = \frac{\mu_1}{N_A}$ , kus  $N_A$  on Avogadro arv, saame:

$$\mu_2 = N_A \left( \sqrt{\frac{\mu_1}{N_A}} + \frac{Bd}{2} \sqrt{\frac{e}{2U}} \right)^2.$$

**L146 Magnetväli ★★★★★**

Autor: Jaan Kalda, piirkonnavoore, 2015, G 9



Laeng sooritab magnetväljas ringliikumist, vt joonis; ringi raadiuse leiame Newtoni II seadusest  $Bqv = mv^2/R$ , millest  $R = \frac{mv}{qB}$ . Enne ja pärast ringliikumist on trajektooriks sirge, kusjuures üleminek ringjooneks on ilma murdepunktita, st sirgjooned on ringile puutujaks. Väikeste kiiruste korral, kui  $R < a$ , st  $v < \frac{Bqa}{m}$ , siis läheb osake otse tagasi, st väljumisnurk  $\varphi = \pi \text{ rad} = 180^\circ$ . Väljudes on kiirusvektor risti ringi raadiusega, st  $\angle OBD = \frac{\pi}{2}$ , mistõttu  $\varphi = \angle COB$ . Seega,

$$\varphi = \arcsin \frac{BC}{BO} = \arcsin \frac{a}{R} = \arcsin \frac{qBa}{mv}.$$

**L147 Laetud pendel ★★★★★**

Autor: Eero Vaher, lahtine, 2015, G 10

Kuulikesele mõjuvad raskusjõud  $F_g$ , niidi pinge  $T$  ning Lorentzi jõud  $F_L$ . Kuulike püsib ringjoone kaarekujulisel trajektooriga seni, kuni sellele mõjuvate jõudude projektsioonid niidi sihile rahuldavad võrrandit  $T + F_L - F_g \cos \alpha = F_k$ , kus  $\alpha$  on niidi kõrvalekalde nurk tasakaaluasendist ning  $F_k$  on ringjoone kaarel püsimiseks tarvilik kesktõmbejõud. Kuulikesel ringjoone kaarekujulisest trajektooriga kõrvalekaldeumisel ei saa niidi olla pinges. Järelikult pole kuulikesel trajektooriga enam ringjoone kaar juhul  $F_L > F_g \cos \alpha + F_k$ . Olgu  $v$  kuulikesel kiirus nurga  $\alpha$  korral, mille saame leida energia jäävusest

$$\frac{mv^2}{2} = -mg\Delta h,$$

kus  $\Delta h = l \cos \alpha - l + H$  on kuulikese kõrguse muut. Järelikult

$$v = \sqrt{2g(l \cos \alpha - l + H)} = \sqrt{2gl \left( \cos \alpha - \frac{1}{8} \right)}$$

ning lahendamist vajav võrrand on  $qBv = mg \cos \alpha + \frac{mv^2}{l}$  ehk

$$qB \sqrt{2gl \left( \cos \alpha - \frac{1}{8} \right)} = mg \cos \alpha + 2mg \left( \cos \alpha - \frac{1}{8} \right).$$

Mõlemaid pooli ruutu võttes saame

$$2q^2 B^2 gl \left( \cos \alpha - \frac{1}{8} \right) = m^2 g^2 \left( 3 \cos \alpha - \frac{1}{4} \right)^2.$$

Kuna  $2q^2 B^2 l = \frac{3}{2} m^2 g$ , siis võime selle võrrandi viia kujule

$$\frac{3}{2} \cos \alpha - \frac{3}{16} = 9 \cos^2 \alpha - \frac{3}{2} \cos \alpha + \frac{1}{16}.$$

Saame ruutvõrrandi  $9 \cos^2 \alpha - 3 \cos \alpha + \frac{1}{4} = 0$  ehk  $9 \left( \cos \alpha - \frac{1}{6} \right)^2 = 0$ . Kuna selle ruutvõrrandi kaks lahendit on võrdsed, siis kas  $F_L \leq F_g \cos \alpha + F_k$  või  $F_L \geq F_g \cos \alpha + F_k$  iga  $\alpha$  korral. Vaadeldes juhtu  $\cos \alpha = \frac{1}{8}$  näeme, et  $F_L \leq F_g \cos \alpha + F_k$  ning järelikult on kuulikese trajektoor ringjoone kaar raadiusega  $l$ , mille otspunktide kõrgus tasakaaluasendist on  $\frac{7}{8}l$ .

#### L148 Elektronid ★★★★★

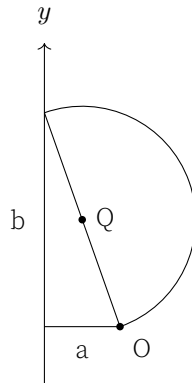
Autor: Jaan Kalda, lõppvoor, 2017, G 10

Maksimaalse  $y$ -telje sihilise läbimõõdu leidmiseks vaatleme osakesi, mis liiguvad  $x - y$ -tasandis. Sellisel juhul on elektroni trajektoori ringjoon, sest magnetvälja poolt mõjuv jõud  $F = evB$  on konstantse suurusega ja kiirusega kogu aeg risti. Raadiuse saame leida, pannes magnetvälja poolt mõjuva jõu võrduma kesktõmbejõuga:

$$\frac{mv^2}{R} = evB \quad \Rightarrow \quad R = \frac{mv}{Be}.$$

Kõik selles tasandis olevad elektronid liiguvad sama raadiusega ringjoonel ja eri nurkade all liikuva elektronide trajektoorid saab leida seda ringjoont lihtsalt pöörates ümber punkti O. Kõige kaugemale  $y$ -telje positiivses suunas jõuab elektron siis, kui ekraani tabades on ta algpunktist võimalikult kaugel ehk läbinud täpselt pool ringjoone kaart, vaata joonist:



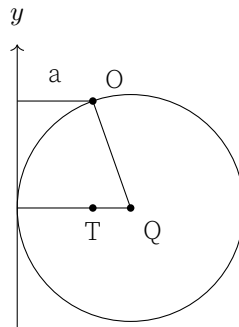


Kuna ekraan on kaugusel  $a$  elektronide allikast, siis Pythagorase teoreemi järgi saame laigu maksimaalseks  $y$  väärtuseks

$$b = \sqrt{4R^2 - a^2} = \sqrt{4\left(\frac{mv}{Be}\right)^2 - a^2}.$$

Siit näeme, et väiksemale  $R$ -ile vastab väiksem läbimõõt ja maksimaalne  $y$ -telje sihiline läbimõõt on tõesti siis, kui osake liigub  $x - y$ -tasandis, nagu ka alguses väitsime.

Ringjoone kaart ümber punkti  $O$  pöörates näeme, et minimaalne  $y$ -suunalise väärtuse korral on ringjoon ekraanile puutujaks, vaata joonist:



Kuna lõigu QT pikkus on  $R - a$ , siis lõigu OQ  $y$ -suunalise komponendi saab leida Pythagorase teoreemi abil

$$y_{\min} = -\sqrt{R^2 - (R - a)^2} = -\sqrt{2aR - a^2} = -\sqrt{\frac{2amv}{Be} - a^2}.$$

Seega laigu  $y$ -suunaline läbimõõt on

$$L = \sqrt{\frac{2amv}{Be} - a^2} + \sqrt{4\left(\frac{mv}{Be}\right)^2 - a^2}.$$

Selle laigu peal on heledus kõige suurem maksimaalse  $y$  väärtuse korral, sest see vastab elektroni  $y$ -telje sihilise kõrvalekalde  $\Delta_y$  ekstreemumile. Kui tähistame elektroni stardinurga  $\alpha$  abil, siis

$$\frac{d\Delta_y}{d\alpha} = 0,$$

st väikeses stardinurga vahemikus  $\Delta\alpha$  saavad kõik elektronid peaaegu täpselt samasse sihtpunkti.

Leiame  $z$ -telje sihilise läbimõõdu tasandis  $y = 0$ . Kõige kaugemale  $z$ -teljel jõuavad need on osakesed, mille heeliksikujuline trajektoor puudutab tasandit  $x = -a$  ("ülaltvaates"  $x - y$ -tasandile puudutab ringjoonekujuline trajektoor raadiusega  $r = \frac{a}{2}$  joont  $x = -a$ ) ja mis stardivad  $y - z$ -tasandis, st algkiirusega, mille  $x$ -projektsioon  $v_x = 0$ . Edasi leiame

$$\frac{a}{2} = \frac{mv_y}{Be} \Rightarrow v_y = \frac{aBe}{2m} \Rightarrow v_z = \sqrt{v^2 - \left(\frac{aBe}{2m}\right)^2}.$$

Sellise algkiirusega elektronide teekond kestab pool tsüklotronperioodist. Perioodi saab leida seosest

$$T = \frac{2\pi R}{v} = \frac{2\pi m}{Be}.$$

Pool perioodi on seega

$$t = \frac{T}{2} = \frac{\pi m}{Be}$$

ning laigu  $z$ -telje sihiliseks mõõtmeks saame

$$2 \cdot tv_z = \pi \sqrt{\left(\frac{2mv}{Be}\right)^2 - a^2}.$$

#### L149 Rõngas ★★

Autor: Taavi Pungas, piirkonnavor, 2014, G 6

Et süsteem oleks tasakaalus, peab mutter asuma täpselt nööri kinnituspunkti all. Teiseks: maksimaalse mutri kõrguse korral on rõnga kaldenurk mutri asukohas  $\alpha$ , kus  $\tan \alpha = \mu$  - siis on mutter täpselt libisemise piiril. Sel juhul on ka mutrini tõmmatud raadiuse ja vertikaali vahel nurk  $\alpha$ . Tekkinud kolmnurgast näeme, et

$$h = L + 2R \cos \alpha = L + \frac{2R}{\sqrt{1 + \mu^2}}.$$

**L150 Poldilõikur ★★★**

Autor: Mihkel Rähn, piirkonnavor, 2015, G 7

Jõu ülekandmine toimub kangi põhimõttel, kus jõumoment pöördtelje suhtes summaarselt on võrdne nulliga. Käepideme korral

$$600 \text{ mm} \cdot 90 \text{ N} - 100 \text{ mm} \cdot F_k = 0 \quad \Rightarrow \quad F_k = 540 \text{ N},$$

kus  $F_k$  on käepidemetelt lõiketeradele mõjuv jõud. Analoogselt lõiketerade korral

$$160 \text{ mm} \cdot F_k - 80 \text{ mm} \cdot F_l = 0 \quad \Rightarrow \quad F_l = 2F_k,$$

kus  $F_l$  on lõikuri poolt poldile avaldatud jõud.

Nendest võrranditest saame leida lõiketeradele mõjuva jõu  $F_l$

$$F_l = 1080 \text{ N}.$$

**L151 Klotsid ★★★**

Autor: Mihkel Rähn, piirkonnavor, 2014, G 7

Ülemine klot ei libise, kui kiirendusest põhjustatud jõud ei ületa seisuhõõrdejõudu. Ülemise klotsi jaoks saab avaldada maksimaalse kiirenduse, mille korral klot veel ei libise, Newtoni teisest võrrandist  $a_2 = \mu_2 g$ . Kui ülemine klot ei libise, siis võib kahte klotsi käsitleda ühe kehana. Newtoni teine võrrand klotsisüsteemi kohta on

$$(m_1 + m_2)a_{12} = -\mu_1(m_1 + m_2)g + F.$$

Piirjuhul on kiirendused  $a_{12}$  ja  $a_2$  võrdsed. Asendades eelnevalt leitud kiirenduse  $a_2$  võrrandisse liikmena  $a_{12}$ , saame

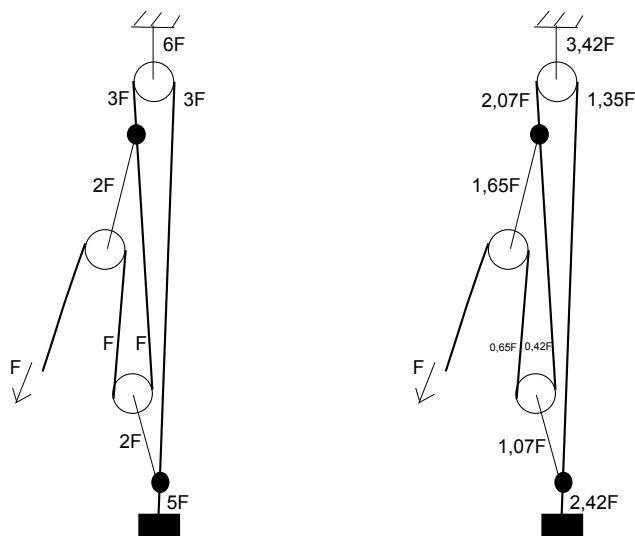
$$F = (m_1 + m_2)(\mu_1 + \mu_2)g.$$

Ülesannet võib lahendada ka koostades Newtoni teise võrrandi alumise klotsi kohta, võttes arvesse mõlemad hõõrdejõud.

**L152 Polüspast ★★★**

Autor: Mihkel Rähn, lõppvoor, 2014, G 6

Hõõrdevaba ploki korral on pinge põhiköies jääv, muutub vaid selle suund. Hõõrdeva ploki korral osa põhiköie pingest kandub plokile, kusjuures esimeses lähenduses alla ja ülesse suunatud hõõrdejõud kompenseerivad üksteist. Tasakaalutimise rahuldamiseks peab ploki kinnituse pinge olema võrdne ploki läbiva põhiköie pingete summaga. Mittelibisevate sõlmede korral peab alla ja üles suunatud pingete vahel valitsema tasakaal. Lahendamist on mugav alustada, kui määrata päästjapoolseks tõmbejõuks  $F$  ning alustada sellest otsast polüspasti läbimist. Hõõrdevabal juhul on jõuülekanne  $\frac{5}{1}$ , hõõrde korral  $\frac{2,4}{1}$ .



### L153 Kelk ★★★

Autor: Andreas Valdmann, piirkonnavor, 2018, G 9

Esiteks näeme, et kui Juku tõmbaks kelgunööri horisontaalselt, siis ei hakkaks kelk liikuma ükskõik kui suure tõmbejõu korral, sest Jukule mõjuv hõõrdejõud on väiksem kui kelgu liikumapanemiseks vajalik jõud:

$$\mu_1 m_1 g < \mu_2 m_2 g.$$

Esimesena hakkavad libisema hoopis Juku tallad.

Kui Juku tõmbab nööri teatud nurga all ülespoole, siis tekib nööris vertikaalne jõu komponent  $F_v$ , mis tõstab kelku ülespoole ja surub Jukut allapoole. Seega mõjub Jukule tema libisemise piiril hõõrdejõud  $F_{h1} = \mu_1 (m_1 g + F_v)$  ja kelgule tema libisemise piiril hõõrdejõud  $F_{h2} = \mu_2 (m_2 g - F_v)$ . Kuna küsiti minimaalset nurka, siis peab kelk olema libisemise piiri napilt ületanud ja Juku sellele napilt alla jääma ehk piirjuhul  $F_{h1} = F_{h2} = F_h$ , kus  $F_h$  tähistab nööris tekkiva jõu horisontaalset komponenti. Jõudude tasakaalu võrrandist

$$\mu_1 (m_1 g + F_v) = \mu_2 (m_2 g - F_v)$$

saame avaldada nööris tekkiva jõu vertikaalse komponendi:

$$\mu_1 m_1 g + \mu_1 F_v = \mu_2 m_2 g - \mu_2 F_v,$$

$$F_v (\mu_1 + \mu_2) = g (\mu_2 m_2 - \mu_1 m_1),$$

$$F_v = g \frac{\mu_2 m_2 - \mu_1 m_1}{\mu_1 + \mu_2}.$$

Jõu horisontaalkomponendi leidmiseks asendame saadud tulemuse näiteks Jukule mõjuva hõõrdejõu võrrandisse

$$F_h = \mu_1 \left( m_1 g + g \frac{\mu_2 m_2 - \mu_1 m_1}{\mu_1 + \mu_2} \right)$$

ja avaldame:

$$\begin{aligned} F_h &= g\mu_1 \frac{m_1(\mu_1 + \mu_2) + \mu_2 m_2 - \mu_1 m_1}{\mu_1 + \mu_2} = \\ &= g\mu_1 \frac{\mu_2 m_1 + \mu_2 m_2}{\mu_1 + \mu_2} = g\mu_1 \mu_2 \frac{m_1 + m_2}{\mu_1 + \mu_2}. \end{aligned}$$

Nurk kelgunööri ja maapinna vahel on

$$\alpha = \arctan \left( \frac{F_v}{F_h} \right) = \arctan \left( \frac{\mu_2 m_2 - \mu_1 m_1}{\mu_1 \mu_2 (m_1 + m_2)} \right) = 21^\circ.$$

#### L154 Niidirull ★★★★★

Autor: Mihkel Kree, lahtine, 2013, G 8

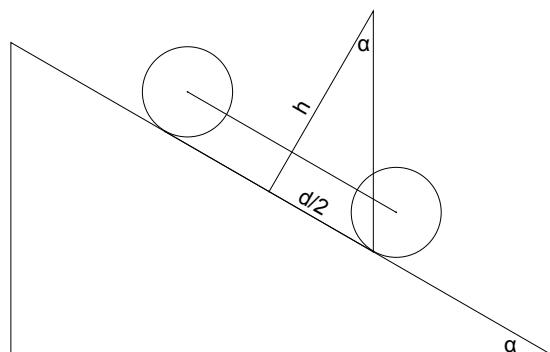
Vaatleme silindrile mõjuvate jõumomentide tasakaalu telje suhtes, mis läbib toetuspunkti. Pinna toereaktsiooni ja hõõrdejõu vektorid läbivad toetuspunkti, mistõttu need jõumomendi ei tekita. Jõumomendi tekitavad kaks jõudu: silindri keskele rakendatud raskusjõud  $mg$  ja nööri tõmbejõud  $F$ . Arvutades lihtsast kolmnurgast raskusjõu õla, saame jõumomendiks  $\tau = mgr \sin \alpha$ . Tasakaalu korral tekitab tõmbejõud  $F$  sama suure, kuid vastassuunalise jõumomendi  $-\tau$ . Minimaalsele jõule peab vastama maksimaalne jõuõlg. Veendume, et kui jõud  $F$  rakendada toetuspunkti diameetraalselt vastas olevasse punkti, saame maksimaalse õla  $2r$ , millele vastab minimaalne tõmbejõud

$$F_{\min} = \frac{\tau}{2r} = \frac{mg \sin \alpha}{2}.$$

#### L155 Jalgrattur ★★★★★

Autor: Andres Põldaru, lahtine, 2014, G 8

Kuna tagumine ratas on õhku tõusmas, siis sellele jõude ei rakendu. Ainsad jalgrattale mõjuvad jõud on raskusjõud ning jõud esiratta ja maapinna kontaktpunktis. Kuna jalgratas liigub ühtlase kiirusega ning ei hakka pöörlema ega ümber kukkuma, peab jalgrattast ja ratturist koosnevale süsteemile mõjuvate jõudude summa ja ka jõumoment iga punkti suhtes olema null. Raskusjõu tugevus ja suund on teada. Teine jõud peab olema sama suur ja vastassuunaline, et raskusjõudu tasakaalustada. Lisaks peavad jõud paiknema ühel sirgel, et jalgratas koos ratturiga ei hakkaks pöörlema. Järelikult peab massikese olema esiratta ja maapinna kontaktpunkti kohal ning hõõrdejõu ja toereaktsiooni summa on vertikaalne. Lihtsast geomeetriast saame  $\alpha = \arctan\left(\frac{d}{2h}\right)$  ja  $\mu \geq \frac{d}{2h}$ .



**L156 Nöör rennis ★★★★★**

Autor: Stanislav Zavjalov, lahtine, 2012, G 9

Olgu kogu nööri mass  $m$ . Vaatleme nööri paremat poolt. Nööri pinge vertikaalkomponent nööri ja plaadi kokkupuutepunktis,  $T \sin \theta$ , peab tasakaalustama õhus rippuva osa kaalu  $\frac{f}{2}mg$ . Nüüd vaatleme plaadil lebavat osa, selle mass on  $\frac{1-f}{2}m$ . See-ga nii toereaktsioon kui ka maksimaalne hõõrdejõud (kuna  $\mu = 1$ ) on  $\frac{1-f}{2}mg \cos \theta$ . Hõõrdejõud peab olema tasakaalus raskusjõu komponendiga piki nööri,  $\frac{1-f}{2}mg \sin \theta$ , ning pingega  $T = \frac{fmg}{2 \sin \theta}$ :

$$\frac{fmg}{2 \sin \theta} + \frac{1-f}{2}mg \sin \theta = \frac{1-f}{2}mg \cos \theta.$$

Siit saame avaldada vastuse

$$f = \frac{1 - \tan \theta}{1 + \tan \theta} \tan \theta.$$

**L157 Katus ★★★★★**

Autor: Jaan Kalda, lõppvoor, 2017, G 9

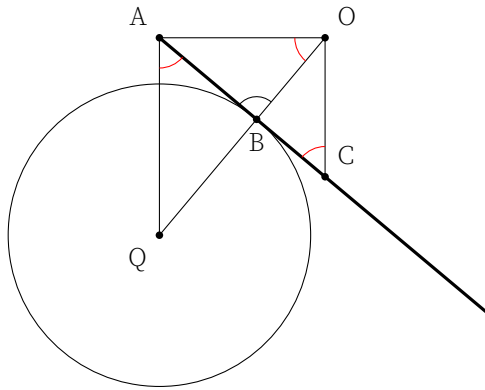
Kahe traadi kontaktpunktis  $A$  (vaata joonist allpool) mõjutavad traadid sümmeetria ja Newtoni III seaduse tõttu üksteist horisontaalsete vastassuunaliste jõududega; traadi ja silindri puutepunktis  $B$  mõjub traadile rõhumisjõud, mis on traadiga risti ning seetõttu läbib selle jõu pikendus silindri telge  $Q$ . Raskusjõud on rakedatud traadi keskpunkti  $C$ . Et traat on tasakaalus ja talle mõjuvad kolmes punktis jõud, siis nende jõudude pikendused peavad lõikuma ühes punktis  $O$  (vastasel korral mõjuks kahe jõu lõikumispunkti suhtes kolmas jõud traadile nullist erineva jõumomendiga ja traat hakkaks liikuma). Niisiis peavad punktist  $A$  tõmmatud horisontaal, punktist  $C$  tõmmatud vertikaal ning sirge  $QB$  pikendus kõik lõikuma ühes punktis. Paneme tähele, et  $\angle ACO = \alpha/2$  ja  $\angle AOB = \alpha/2$ , seetõttu

$$|AO| = |AC| \sin(\alpha/2) = (L/2) \sin(\alpha/2),$$

$$|AB| = |AO| \sin(\alpha/2) = (L/2) \sin^2(\alpha/2)$$

ning

$$R = |QB| = |AB| \tan(\alpha/2) = (L/2) \sin^3(\alpha/2) / \cos(\alpha/2).$$



Stabiilsuse analüüsi juures paneme tähele, et kui “katus” pöörleb tervikuna, siis massikese liigub mööda ringjoont ning küsimus on vaid selles, kas see on kõrgemal või madalamal kui silindri telg  $Q$ ; viimasel juhul on massikese algasendis madalaimas positsioonis ning süsteem on stabiilne. Seega on stabiilsuse tingimuseks

$$|AQ| < |AC| \cos(\alpha/2).$$

Kui sellesse võrratusse asendame

$$|AQ| = |AB| / \cos(\alpha/2) = (L/2) \sin^2(\alpha/2) / \cos(\alpha/2)$$

ja

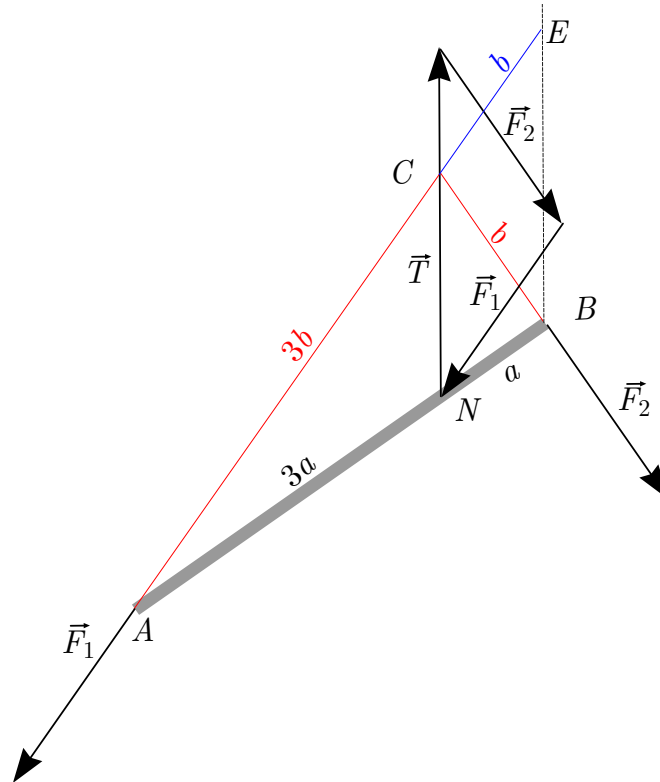
$$|AC| \cos(\alpha/2) = (L/2) \cos(\alpha/2),$$

siis saame, et  $\sin^2(\alpha/2) < \cos^2(\alpha/2)$ . Kuna katuse korral peab kehtima  $0 < \frac{\alpha}{2} < 90$ , siis nii  $\sin$  kui  $\cos$  on positiivsed ja võime võtta mõlemalt poolt ruutjuure. Saame tingimuse  $\sin(\alpha/2) < \cos(\alpha/2)$ , mis kehtib kui  $\alpha < \pi/2$ . Paneme tähele, et viimast tingimust võib esitada erinevatel viisidel, kasutades  $R$ ,  $L$  ja  $\alpha$  vahelist seost.

#### L158 Niidiga hantel ★★★★★

Autor: Jaan Kalda, lõppvoor, 2015, G 9

Pulgale mõjuvad kolm jõudu. Jõumomentide tasakaalu tõttu peavad nende jõudude rakendussirged lõikuma ühes punktis, olgu see punkt  $C$ . Olgu niidi rakenduspunkt  $N$  ja pulga otspunktid  $A$  ning  $B$ , vt joonis. Kuna enne klotsi  $A$  paigalt nihkumist pöörleb pulk ümber selle, siis punkti  $B$  kiirusvektor on risti  $AB$ -ga, sama kehtib punkti  $B$  rakendatud hõõrdejõu vektori jaoks; sestap  $\angle ABC = \frac{\pi}{2}$ . Et nihkumise hetkel on hõõrdejõud võrdsed, siis jõudude kolmnurk  $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{T}$  on võrdhaarne, järelikult on võrdhaarne ka jõudude kolmnurgaga sarnane kolmnurk  $CBE$  (sirge  $BE$  on tõmmatud paralleelsena  $\vec{T}$ -ga ja  $E$  asub  $\vec{F}_1$  rakendussirgel, vt joonis). Olgu  $|CB| = b$ ; siis ka  $|CE| = b$ . Seetõttu kolmnurkade  $ANC$  ja

$$\angle BNC = \arctan \frac{b}{a} = \arctan \sqrt{2} \approx 0,96 \text{ rad} \approx 55^\circ.$$


Autor: Eero Vaher, piirkonnavor, 2014, G 3

$$P = \frac{365,256}{366,256} \cdot 86\,400\,\text{s} = 86\,164\,\text{s} = 23\,\text{h}56\,\text{min}4\,\text{s}.$$

Päike teeb tähtiiru taevas sagedusega  $f_k = \frac{1}{86\,400\text{ s}}$ . Maa tiirlemise sagedus on  $f_t = \frac{1}{365,256\cdot 86\,400\text{ s}}$ . Kuna Maa pöörlemis- ja tiirlemissuunad ühtivad, siis kehtib



võrrand  $f_k = f_p - f_t$ , kus  $f_p$  on Maa pöörlemise sagedus. Siit saame avaldada Maa pöörlemisperioodi

$$P = \frac{1}{f_p} = \frac{1}{f_k + f_t} = 86\,164\,\text{s} = 23\,\text{h}56\,\text{min}4\,\text{s}.$$

*Märkused.*

- Nimetuse keskmine päikeseööpäev tingib asjaolu, et Maa elliptilise orbiidi tõttu on Päikese näiv nurkkiirus taevas veidi muutlik.
- Maa tiirlemisperioodi nimetatakse ka sideeriliseks aastaks.
- Enamasti mõistetakse aastana troopilist, mitte sideerilist aastat, mis on defineeritud pööripäevade kordumise põhjal. Troopilise ning sideerilise aasta erinevuse põhjustab Maa telje pretsessioon. Igapäevaelus ei ole olulised mitte Maa pöörlemine ning tiirlemine vaid hoopis Päikese ööpäevane liikumine taevas ning aasta-aegade kordumine, mistõttu laialdaselt kasutatavad ööpäeva ning aasta mõisted erinevadki Maa pöörlemis- ning tiirlemisperioodidest.

## L160 Orbiit ★★

Autor: Mihkel Pajusalu, lahtine, 2014, G 3

Selles ülesandes kasutame lähendust, et väikese massiga (olgu selleks  $m$ ) punkt-mass Kuu tiirleb ümber suure punkt-massi Maa. Paneme tähele, et Kuu gravitatsioonilise potentsiaalse energia ja kineetilise energia summa on jääv.

$$\frac{mv_1^2}{2} - G\frac{Mm}{r_1} = \frac{mv_2^2}{2} - G\frac{Mm}{r_2}.$$

Samuti on kõigil orbiitidel liikuvatel kehal del muutumatu impulsimoment. Kuna orbiidid on ellipsid, siis suurimal ja vähimal kaugusel Maast on Kuu orbitaalkiirus risti Kuud Maaga ühendava sirgega. Seega saab kirjutada impulsimomendi jäävuse seaduse suurima ja vähima kauguse jaoks kujul

$$mv_1r_1 = mv_2r_2.$$

Kuu mass taandub mõlemast jäävusseadusest välja. Saame süsteemi

$$\frac{v_1^2}{2} - G\frac{M}{r_1} = \frac{v_2^2}{2} - G\frac{M}{r_2},$$

$$v_1r_1 = v_2r_2.$$

Süsteemi lahenditeks on  $r_2 = r_1$ , mis ei vasta elliptilisele orbiidile, ja

$$r_2 = \frac{1}{\frac{2GM}{r_1^2 v_1^2} - \frac{1}{r_1}} \approx 430\,000\,\text{km}.$$

**L161 Päikese tihedus ★★**

Autor: Eero Vaher, piirkonnavaor, 2013, G 6

Päikese raadius on  $r = R \sin \alpha/2$  ja ruumala  $V = 4\pi r^3/3$ . Maa joonkiirus oma orbiidil ümber Päikese on  $v = \frac{2\pi R}{T}$ . Et Maa püsiks oma orbiidil, peab sellele mõjuma kesktõmbejõud  $F = \frac{mv^2}{R}$ , kus  $m$  on Maa mass. See kesktõmbejõud on teadagi Maa ja Päikese vaheline gravitatsioonijõud  $G\frac{mM}{R^2}$ , kus  $M$  on Päikese mass, seega

$$\frac{mv^2}{R} = G\frac{mM}{R^2}.$$

Saame

$$M = \frac{Rv^2}{G}.$$

Päikese tihedus avaldub seosest  $\varrho = \frac{M}{V}$ ,

$$\varrho = \frac{Rv^2}{G} \frac{3}{4\pi r^3} = \frac{24\pi R^3}{GT^2 \sin^3 \alpha} = 1,4 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3.$$

**L162 Ühendatud satelliidid ★★**

Autor: Eero Vaher, piirkonnavaor, 2018, G 6

Trossi puudumisel peab satelliidile mõjuv kesktõmbejõud olema võrdne sellele mõjuva raskusjõuga. Esimese satelliidi jaoks

$$\frac{mv_1'^2}{R_1} = G\frac{Mm}{R_1^2},$$

millest järeldub

$$v_1' = \sqrt{\frac{GM}{R_1}}$$

ning analoogiliselt

$$v_2' = \sqrt{\frac{GM}{R_2}}.$$

Kuna satelliidid on trossiga ühendatud, siis seesmisele satelliidile mõjuv kesktõmbejõud peab olema sellele mõjuva raskusjõu ning trossi pinge vahe ning välisele satelliidile mõjuv kesktõmbejõud peab olema sellele mõjuva raskusjõu ning trossi pinge summa. Niisiis

$$\begin{cases} \frac{mv_1'^2}{R_1} = G\frac{Mm}{R_1^2} - T, \\ \frac{mv_2'^2}{R_2} = G\frac{Mm}{R_2^2} + T. \end{cases}$$

Kuna  $v_1 = 2\pi R_1/P$  ning  $v_2 = 2\pi R_2/P$ , siis saame kirjutada

$$\frac{4\pi^2}{P^2} (R_1 + R_2) = GM \frac{R_2^2 + R_1^2}{R_1^2 R_2^2}.$$

Tehes asenduse  $R_2 = 2R_1$ , saame

$$\frac{2\pi R_1}{P} = \sqrt{\frac{5GM}{12R_1}},$$

ning asendusest  $R_1 = \frac{R_2}{2}$  järeldub

$$\frac{2\pi R_2}{P} = \sqrt{\frac{10GM}{3R_2}}.$$

Sisemine satelliit tiirleb niisiis trossi tõttu  $\sqrt{12/5}$  korda väiksema ning välimine  $\sqrt{10/3}$  korda suurema joonkiirusega.

### L163 Satelliit ★★★

Autor: Eero Vaher, lõppvoor, 2013, G 5

Satelliidile orbiidil mõjuv kesktõmbejõud on Maa poolt satelliidile avaldatav gravitatsioonijõud. Saame

$$\frac{mv^2}{R} = G \frac{Mm}{R^2},$$

kus  $m$  on satelliidi mass ja  $R$  orbiidi raadius. Kuna geostatsionaarne satelliit Maa suhtes ei liigu, peab selle tiirlemisperiood olema samuti 24 h. Saame  $v = \frac{2\pi R}{t}$ . Neist võrranditest saame

$$4\pi^2 R^3 = GM \Rightarrow R = \sqrt[3]{\frac{GMt^2}{4\pi^2}} = 42\,400 \text{ km}.$$

Maa keskpunkt, satelliit ning satelliidilt nähtava maa-ala serval asetsev suvaline punkt moodustavad täisnurkse kolmnurga, mille hüpotenuusiks on satelliidi orbiidi raadius ning üheks kaatetiks Maa raadius. Maa keskmes asuvaks nurgaks saame  $\alpha = \arccos \frac{r}{R}$ , kuid kuna meid huvitab satelliidilt nähtava ala läbimõõt, peame leidma nurga  $2\alpha$ . Sellele nurgale vastav kaare pikkus Maa pinnal on  $d = 2r\alpha$  (kui nurk on radiaanides). Lõppvastuseks saame

$$d = 2r \arccos \left( \frac{r}{\sqrt[3]{\frac{GMt^2}{4\pi^2}}} \right) = 18\,000 \text{ km}.$$

**L164 Vee jäätumine ★**

Autor: Jaak Kikas, lahtine, 2012, G 1

Vee jäätumisel eralduv soojushulk  $m_{\text{vesi}}\lambda$  peab täpselt ära kuluma jää soojendamiseks:

$$m_{\text{vesi}}\lambda = c_j m_j (t - t_0),$$

kus  $\lambda$  on jää sulamissoojus,  $t = 0^\circ\text{C}$  on jää lõpptemperatuur ja  $t_0$  on otsitav jää algtemperatuur. Vee massi saame selle ruumalast,  $m_{\text{vesi}} = \rho V_{\text{vesi}}$ . Nendest kahest seosest saame avaldada

$$t_0 = t - \frac{\rho V_{\text{vesi}} \lambda}{c_j m_j} = -314^\circ\text{C}.$$

Ehk jää temperatuur peaks olema alla absoluutse nulli ja seega pole võimalik selle koguse jääkuubikutega kogu vett jääks muuta.

**L165 Veepudel ★**

Autor: Koit Timpmann, piirkonnavor, 2013, G 2

Vesi jäätub temperatuuril  $0^\circ\text{C}$ . Vee jäätumisel eraldunud soojushulk läheb alajah-  
tunud vee soojendamiseks jäätumistemperatuurile. Niisiis,

$$cm\Delta t = \lambda m_j$$

ja

$$m_j = \frac{4200 \text{ J/kgK} \cdot 2 \text{ kg} \cdot 3^\circ\text{C}}{340\,000 \text{ J/kg}} = 74 \text{ g}.$$

**L166 Hõõrdkeevitus ★**

Autor: Ants Remm, lõppvoor, 2012, G 1

Hõõrdumisest tekkiv soojushulk

$$Q = F_h \Delta s = F \mu \Delta s = \pi f D \Delta t.$$

Teiselt poolt on torude soojendamiseks vaja minev soojushulk

$$Q = 2mc\Delta T = 2\rho V c \Delta T,$$

kus  $m$  ja  $V$  on ühe toruotsa soojeneva osa mass ja ruumala. Kuna toru seinad on diameetrist kordades õhemad, võib hinnata ruumalaks  $V = \pi D dl$ . Kokkuvõttes saame, et

$$F \mu \pi f D \Delta t = 2 \pi D dl \rho c (T_1 - T_0),$$

$$F = \frac{2 dl \rho c (T_1 - T_0)}{\mu f \Delta t} \approx 1200 \text{ N}.$$

**L167 Münt jääs ★**

Autor: Erkki Tempel, piirkonnavoort, 2015, G 3

Jäätükk koos mündiga hakkab uppuma siis, kui sellele mõjub raskusjõud on võrdne üleslükkejõuga. Tähistame uppumise hakkamise hetkel mündi ümber oleva jää massi  $m$  ning ruumala  $V$ . Sellisel juhul mõjub jäätükile enne uppuma hakkamist raskusjõus  $F_r = (m_m + m)g$  ning üleslükkejõud

$$F_y = \rho_v g(V + V_m) = \rho_v g \left( \frac{m}{\rho_j} + \frac{m_m}{\rho_m} \right).$$

Kuna raskusjõud ja üleslükkejõud on uppumise hakkamise hetkel võrdsed, saame avaldada mündi ümber olnud jää massi  $m$ :

$$m = \frac{\rho_j m_m (\rho_m - \rho_v)}{\rho_m (\rho_v - \rho_j)} = 79,9 \text{ g}.$$

Sulanud jää mass  $m_s$  on seega

$$m_s = m_j - m = m_j - \frac{\rho_j m_m (\rho_m - \rho_v)}{\rho_m (\rho_v - \rho_j)}.$$

Jää sulamiseks vajaminev energia  $Q = \lambda m_s$  saadakse vee jahtumisel eraldunud energiast  $Q = cm_v \Delta T$ . Võrdsustades viimased avaldised ning avaldades  $\Delta T$ , saame

$$\Delta T = \frac{\lambda m_s}{cm_v}.$$

Asendades siia sulanud jää massi  $m_s$ , saame temperatuuri muutuseks

$$\Delta T \approx 9,8^\circ\text{C}.$$

Kuna vee lõpptemperatuur pärast soojusvahetuse lakkamist on  $0^\circ\text{C}$ , peab vee algtemperatuur olema  $9,8^\circ\text{C}$ .

**L168 Soojusvaheti ★**

Autor: Kaur Aare Saar, lõppvoort, 2016, G 1

Nafta jahtumisel eraldunud soojus kulub vee soojendamiseks:  $Q_{\text{nafta}} = Q_{\text{vesi}}$ ,

$$m_n c_n \Delta t_n = m_v c_v \Delta t_v \Rightarrow$$

$$\rho_n v_n c_n \Delta t_n = \rho_v v_v c_v \Delta t_v \Rightarrow \Delta t_v = \frac{\rho_n v_n c_n \Delta t_n}{\rho_v v_v c_v} \approx 64^\circ\text{C}.$$

Seega väljub vesi soojusvahetist temperatuuril  $T = 64^\circ\text{C} + 10^\circ\text{C} = 74^\circ\text{C}$ .

**L169 Küttesüsteem ★★**

Autor: Oleg Košik, piirkonnavaor, 2012, G 2

Mingi ajavahemiku  $\Delta t$  jooksul kaotab koolimaja väliskeskkonda soojust  $Q_1 = N\Delta t$ , sama palju soojust peavad andma selle aja jooksul talle radiaatorid. Toru ristlõike pindala on  $S = \frac{\pi D^2}{4}$ . Aja  $\Delta t$  jooksul küttesüsteemi siseneva ja ühtlasi sellest väljuva vee ruumala on seega  $V = Sv\Delta t$ , kus  $v$  on otsitav veevoolu kiirus, ning mass  $m = \rho V = \rho Sv\Delta t$ . Radiaatorites eraldub soojushulk  $Q_2 = mc(t_0 - t_1)$ . Kuna  $Q_1 = Q_2$ , saame võrrandi

$$N\Delta t = \rho \frac{\pi D^2}{4} v \Delta t c (t_0 - t_1),$$

millest

$$v = \frac{4N}{\pi D^2 \rho c (t_0 - t_1)} = 0,15 \text{ m/s}.$$

**L170 Veekeedukann ★★**

Autor: Erkki Tempel, lahtine, 2015, G 4

Suurima kiiruse saavutab veeaur siis, kui vesi on kuumutatud keemistemperatuurini  $T = 100^\circ\text{C} = 373 \text{ K}$ . Veekeedukannu tehtud töö  $A = \gamma N t$  läheb siis vee aurustamiseks ehk  $A = Q = Lm$ . Seega aja  $t$  jooksul aurustunud vee mass on

$$m = \frac{\gamma N t}{L}$$

ning ruumala

$$V = \frac{\gamma N t R T}{L p \mu}.$$

Kuna veeaur pääseb välja avast pindalaga  $S$ , siis peab aja  $t$  jooksul eraldanud veeaur läbima vahemaa  $s = V/S$  ning veeauru väljumise kiiruseks saame

$$v = \frac{s}{t} = \frac{\gamma N t R T}{L p \mu S}.$$

**L171 Radiaator ★★**

Autor: Ardi Loot, piirkonnavaor, 2018, G 3

Leiame radiaatorit kirjeldava võrdeteguri  $c_r$ . Kuna radiaatori väljundvõimus on võrdeline pealevoolu- ja tagasivoolutemperatuuride keskmise ja toatemperatuuri vahetusega, siis

$$P_n = c_r \left( \frac{T_{pn} + T_{tn}}{2} - T_{0n} \right)$$

ja võrrandit lahendades saame

$$c_r = \frac{2P_n}{T_{pn} + T_{tn} - 2T_{0n}} = 40 \text{ W/K}.$$

Nüüd paneme kirja võrrandisüsteemi radiaatori tegeliku võimuse ja tagasivoolu-temperatuuri jaoks

$$\begin{cases} P = c_r \left( \frac{T_p + T_t}{2} - T_0 \right) \\ P = \Gamma c_v \rho_v (T_p - T_t) \end{cases}$$

Esimene kirjeldab radiaatori väljundvõimust ja teine peale- ja tagasivoolutemperatuuride vahel tingitud energiaülekanne. Lahendades võrrandid saame

$$\begin{aligned} P &= \frac{2\Gamma c_v \rho_v c_r (T_p - T_0)}{2\Gamma c_v \rho_v + c_r} \approx 1,49 \text{ kW} \\ T_t &= \frac{2\Gamma T_p c_v \rho_v + c_r (2T_0 - T_p)}{2\Gamma c_v \rho_v + c_r} \approx 48,7^\circ \text{C}. \end{aligned}$$

Radiaatori maksimaalne võimsus on võimalik leida piirjuhuna, kui radiaatorit läbiv vooluhulk  $\Gamma$  kasvab väga suureks. Või veelgi lihtsamalt: kui mõista, et sellisel juhul saab tagasivoolutemperatuur võrdseks pealevoolutemperatuuriga ning maksimaalne võimsus avaldub

$$P_{max} = c_r (T_p - T_0) \approx 1,92 \text{ kW}.$$

#### L172 Kasvuhooneefekt ★★★

Autor: Kristian Kuppart, lahtine, 2017, G 6

Päikselt jõuab maale koguvõimsus  $P_p = w_0 (1 - \mu) \pi R^2$ , kus  $R$  on maa raadius. Kuna atmosfäär on maalt tuleva kiirguse jaoks läbimatu, peab tasakaalu korral atmosfäär väljapoole kiirgama selle sama võimsuse:  $P_p = P_a$ , kus  $P_a$  on atmosfääri poolt väljapoole kiiratud võimsus. Maalt kiiratud võimsus avaldub kui  $P_m = 4\pi R^2 \sigma T_m^4$ , kus  $T_m$  on maapinna temperatuur. Tasakaalu korral on see võrdne Päikeselt ja atmosfäärist tagasi kiirgunud võimsuste summaga:

$$P_m = P_p + P_a = 2P_p.$$

Maakera temperatuur avaldub kui:

$$T_m = \sqrt[4]{\frac{w_0 (1 - \mu)}{2\sigma}} = 303 \text{ K}.$$

**L173 Kauplus ★★★★★**

Autor: Oleg Košik, lõppvoor, 2013, G 8

Soojusvahetus eesruumi ja õue vahel peab olema sama suur kui soojusvahetus eesruumi ja kaupluse vahel. Seega püsib päeval ajal eesruumis temperatuur  $T_4 = \frac{T_0 + T_1}{2} = 12^\circ\text{C}$  kraadi ning eesruumi ehitusega vähenesid ukse lahtikäimisest tingitud soojuskaod 2 korda. See vähenemine oli  $\Delta P = P_1 - P_3 = 0,8\text{ kW}$ , seega enne eesruumi ehitamist olid vastavad soojuskaod

$$P_0 = 2\Delta P = 1,6\text{ kW}.$$

Päeval ajal on temperatuuride vahe õuega  $\Delta T_1 = 16^\circ\text{C}$  ning öisel ajal  $\Delta T_2 = 20^\circ\text{C}$ . Seega, kui päeval oleks kauplus kinni, siis kaupluse radiaatorid peaks töötama võimsusega

$$P'_1 = P_2 \frac{\Delta T_1}{\Delta T_2} = 4,0\text{ kW}.$$

Kaupluse lahtioleku tõttu kütavad inimesed ja valgustid võimsusega  $P_x$  ja uksest läks kaduma  $P_0$ . Seega saame võrduse

$$P'_1 = P_1 + P_x - P_0,$$

kust leiame  $P_x = 1,0\text{ kW}$ .

**L174 Küttesüsteem ★★★★★**

Autor: Taavi Pungas, piirkonnavor, 2014, G 9

Et korterid on identsed ning nende sisetemperatuurid on samad, peavad ka soojuskaod läbi nende seinte olema võrdsed:  $N_{k1} = N_{k2}$ . Seega annab katlast tulev kuum vesi poole oma soojusest ära ülemises korteris ja poole alumises, mistõttu kahe korteri vahelises torus on vee temperatuur  $t_{\text{toru}} = (t_1 + t_2)/2$ . Et korterite temperatuur on ajas konstantne, on mõlemas korteris soojuskaod läbi seinte võrdsed radiaatori küttevõimsusega. Ülemises korteris on radiaatori küttevõimsus

$$N_{k1} = k \left[ \frac{1}{2}(t_1 + t_{\text{toru}}) - t \right],$$

kus  $k$  on mingi koefitsient ja  $\frac{1}{2}(t_1 + t_{\text{toru}})$  on radiaatori keskmine temperatuur. Sarnaselt on alumises korteris radiaatorite küttevõimsus kokku

$$N_{k2} = 1,1k \left[ \frac{1}{2}(t_{\text{toru}} + t_2) - t \right],$$

kus kordaja 1,1 tuleb sellest, et radiaatori pindala on 1,1 korda suurem. Kokku

$$k \left[ \frac{1}{2}(t_1 + t_{\text{toru}}) - t \right] = 1,1k \left[ \frac{1}{2}(t_{\text{toru}} + t_2) - t \right],$$

$$t = 5 \left( \frac{11}{10}t_2 - t_1 + \frac{1}{10}t_{\text{toru}} \right) = \frac{1}{4}(23t_2 - 19t_1) = 22^\circ\text{C}.$$



**L175 Veesoojendi ★★★★★**

Autor: Andres Põldaru, piirkonnavoore, 2016, G 10

Alguses on lisanduva vee temperatuur võrdne soojendis oleva vee temperatuuriga ja vett välja ei voola; seega muutub vee temperatuur ainult soojendilt saadava soojuse tõttu:  $\Delta Q = cm_0\Delta T = P\Delta t$ . Kui ajahetk  $\Delta t$  on piisavalt väike, saame tõusu  $\Delta T/\Delta t \approx 0,45 \frac{^\circ\text{C}}{\text{s}}$ , mis tuleb graafikult mõõta ajahetkel  $t = 0$ . Tõusu saab leida, tõmmates graafikul puutuja ajahetkel  $t = 0$ , mis läbib ligikaudu punkti  $T = 24,5^\circ\text{C}$  ja  $t = 10$  s. Massiks saame:

$$m_0 = \frac{P}{c \frac{\Delta T}{\Delta t}} \approx \frac{2000 \text{ W}}{4200 \frac{\text{J}}{\text{kg}^\circ\text{C}} \times 0,45 \frac{^\circ\text{C}}{\text{s}}} \approx 1,1 \text{ kg}.$$

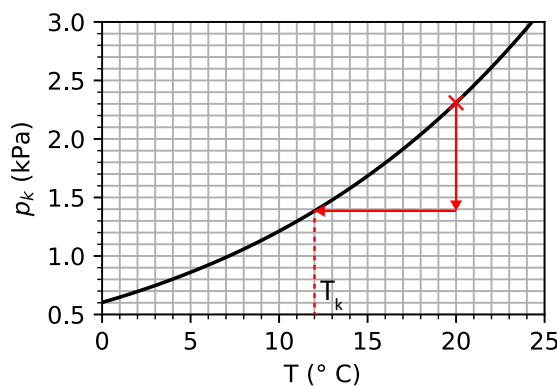
Stabiilne temperatuur saavutatakse siis, kui ajaühikus väljavoolava vee soojendamiseks kulunud energia on võrdne soojendi võimsusega. Sellest saame seose  $P = \mu c(T - T_0)$ , kust võttes stabiilseks temperatuuriks  $T = 36^\circ\text{C}$ , saame voolukiiruseks:

$$\mu = \frac{P}{c(T - T_0)} \approx \frac{2000 \text{ W}}{4200 \frac{\text{J}}{\text{kg}^\circ\text{C}} \times 16^\circ\text{C}} \approx 0,03 \frac{\text{kg}}{\text{s}} = 30 \frac{\text{g}}{\text{s}}.$$

**L176 Soojustus ★★★★★**

Autor: Ardi Loot, lõppvoore, 2018, G 5

Toas oleva niiske õhu levikut piirab soojustuskihtide vahel olev kile. Selleks, et vältida kondenseerumist, ei tohi kile asukohas temperatuur langeda alla kastepunkti. Kastepunkti saame leida graafiku alusel, leides alguses küllastunud veeauru osarõhu toatemperatuuril, arvutades sellest  $\eta_1 = 60\%$  ja seejärel leides sellele vastava kastepunkti  $T_k = 12,0^\circ\text{C}$ .



Järgmiseks on vaja leida avaldis temperatuuri jaoks kile asukohas ( $T$ ). Eeldades, et temperatuur muutub soojustuskihis lineaarselt kaugusega ja muutuse kiirus on pöördvõrdeline soojusjuhtivusega, saame liikudes seest välja kirja panna kaks võrrandit:

$$\begin{cases} T = T_1 - \frac{\alpha}{k_1} L_1 \\ T_2 = T - \frac{\alpha}{k_2} L_2, \end{cases}$$

kus  $\alpha$  on tundmatu võrdetegur. Nende võrrandite lahendamine annab

$$T = \frac{k_2 T_2 L_1 + k_1 T_1 L_2}{k_2 L_1 + k_1 L_2}.$$

Ja lõpetuseks, tuleb leida sisemise soojustuskihi paksus  $L_1$  piirjuhul, kui kile temperatuur võrdub kastepunktiga

$$L_1 = L \frac{k_1 (T_1 - T_k)}{k_1 T_1 - k_2 T_2 - (k_1 - k_2) T_k} \approx 7,8 \text{ cm}$$

ja kondenseerumise vältimiseks peab sisemise soojustuskihi paksus olema sellest väiksem.

#### L177 Ahi ★★★★★

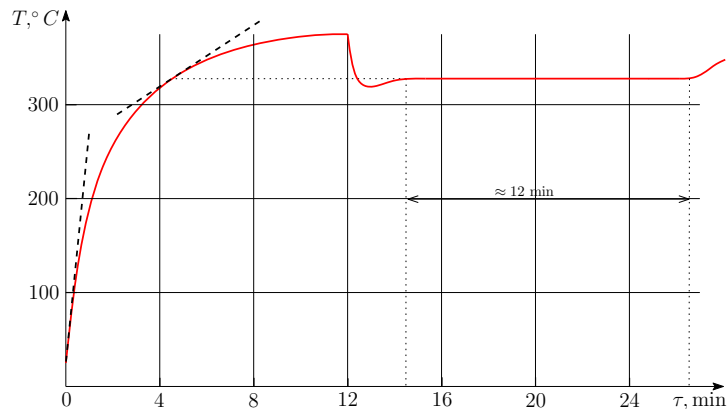
Autor: Stanislav Zavjalov, lõppvoor, 2012, G 7

On teada, et hetkeline efektiivne soojusvõimsus on võrdeline temperatuuri ja aja graafiku puutuja tõusuga (ja võrdelisuskonstandiks on ahju soojusmahtuvus). Kuna esialgu on ahi toatemperatuuri juures, soojuskadusid esimestel hetketel peaaegu ei esine ja tiigli soojusvõimsusele  $P_0 = 50 \text{ W}$  vastab puutuja tõus  $\approx 250 \frac{^\circ\text{C}}{\text{min}}$  (vt. joonist). On aga selge, et pika aja möödumisel tuleb soojuskadudega arvestada – see ongi põhjus, miks ahju temperatuuri kasv kahaneb. Kui ahju sisse pannakse plii, langeb temperatuur kuni plii sulamistemperatuurini,  $\approx 327^\circ\text{C}$  – ahju kogu efektiivne võimsus kulub plii sulatamiseks (sest selle enda temperatuur ei muutu). Graafiku vasakult poolelt leiame, et temperatuuri  $\approx 327^\circ\text{C}$  juures puutuja tõusuks oli  $\approx 45 \frac{^\circ\text{C}}{\text{min}}$ , seega selle temperatuuri juures efektiivne võimsus on

$$\frac{45}{250} P_0 \approx 0,18 P_0.$$

Sellise võimsuse juures kuulub massi  $m$  plii sulatamiseks  $\Delta\tau \approx 12 \text{ min}$  aega (mille leiame graafikult). Seega,  $0,18 P_0 \Delta\tau = \lambda m$ , kust

$$\lambda = \frac{0,18 P_0 \Delta\tau}{m} = \frac{0,18 \cdot 50 \text{ W} \cdot 12 \cdot 60 \text{ s}}{0,265 \text{ kg}} = 24,5 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}}.$$



### L178 Gaasiküte ★★★★★

Autor: Ardi Loot, piirkonnavor, 2017, G 10

Telk peab olema soojuslikus ja niiskuslikus tasakaalus. Telk kaotab sooja läbi telgi seinte soojusjuhtivuse tõttu:

$$P_s = SU\Delta T \approx 7,54 \text{ kW},$$

kus  $S = 2\pi R^2 \approx 100,5 \text{ m}^2$  ja  $\Delta T = T_1 - T_0 = 25 \text{ }^\circ\text{C}$ , ning telgi ventileerimise tõttu:

$$P_v = Q\rho_0 c_0 \Delta T \approx Q \cdot (30,0 \text{ kW} \cdot \text{s/m}^3).$$

Soojusliku tasakaalu korral

$$P_p = P_s + P_v \approx 7,54 \text{ kW} + (Q \cdot 30,0 \text{ kW} \cdot \text{s/m}^3). \quad (1)$$

Niiskusliku tasakaalu jaoks peab ventileerimine telgist välja viima samapalju niiskust kui gaasi põletamisel tekib. Sooja õhu väljaviskel viiakse ajaühikus telgist välja niiskust  $\Gamma_v = QG_1\eta_1 \approx Q \cdot (10,2 \text{ g/m}^3)$  ning külma õhu sissevooluga siseneb telki ajaühikus  $\Gamma_s = QG_0\eta_0 \approx Q \cdot (1,15 \text{ g/m}^3)$  niiskust. Võimsusega  $P_p$  gaasiküte eraldab ajaühikus  $\Gamma_p = D \cdot P_p/k \approx P_p \cdot (10^{-5} \cdot 5,63 \text{ kg/(kW} \cdot \text{s)})$  niiskust. Tasakaalu korral

$$\Gamma_p = \Gamma_v - \Gamma_s$$

ehk

$$P_p \cdot (10^{-5} \cdot 5,63 \text{ kg/(kW} \cdot \text{s)}) \approx Q \cdot (9,09 \text{ g/m}^3). \quad (2)$$

Lahendades tasakaaluvõrranditest (1) ja (2) tekkinud süsteemi saame

$$\begin{aligned} Q &= \frac{SU\Delta T}{\gamma K/D - \rho c_0 \Delta T} \approx 206 \text{ m}^3/\text{h} \\ P_p &= \frac{Q\gamma k}{D} \approx 9,26 \text{ kW} \\ \gamma &= G_1\eta_1 - G_0\eta_0 \approx 9,09 \text{ g/m}^3. \end{aligned}$$

Ventileerimisele kulub  $P_v/P_p \approx 18,6 \%$  küttevõimsusest ja telgis vahetub õhk  $Q/V \approx 1,54$  korda tunnis ( $V = \frac{2}{3}\pi R^3$ ).

**L179 Must kuup ★★★★★**

Autor: Mihkel Pajusalu, lahtine, 2014, G 9

Ülesandes esitatud tingimuste kohaselt on see kuup musta keha kiirgur ja see neelab kõik sellele langenud kiirguse. Olenemata asendist on kuubi poolt kiiratud koguvõimsus sõltuv ainult kuubi temperatuurist ja selle küljetahu pindalast  $A$ . Kuubil on teatavasti 6 tahku. Seega on kuubi kiiratud koguvõimsus Stefani-Boltzmanni seaduse järgi

$$P = 6A\sigma T^4.$$

Tasakaaluolukorras on kuubi poolt neelatav võimsus ja kiiratud võimsus võrdsed. Kuubi poolt neelatav võimsus on võrdeline kuubi projektsiooniga valguskiirtega risti olevale tasandile. Selle projektsiooni suurus sõltub kuubi asendist valguskiirte suhtes. Olgu  $\alpha$  tegur, mis näitab kui palju on kuubi projektsioon suurem selle küljepindalast. Sellel juhul saame tasakaaluolukorra

$$6A\sigma T^4 = \alpha AI,$$

millest saame tasakaalulise temperatuuri sõltuvuse kuubi asendist.

$$T(\alpha) = \sqrt[4]{\frac{\alpha I}{6\sigma}}.$$

Nüüd tuleb leida kõrgeim ja madalaim temperatuur. Selleks on vaja leida suurim ja vähim  $\alpha$ . Vaadates kuubi geomeetriat, on üsnagi lihtne järeldada, et minimaalne võimalik  $\alpha$  on 1. See vastab olukorrale, kus kuubi üks külg on valgusvooga risti.

$$T_{\min} = \sqrt[4]{\frac{I}{6\sigma}}.$$

Maksimaalse juhu leidmine on aga keerukam. Selleks leidub geomeetrilisi meetodeid, kuid üks lihtsaim meetod on kasutada teadmist, et pinnaühiku projektsioon pinnale on võrdeline selle pinnanormaali  $\vec{n}$  ja valgusvoo suuna  $\vec{i} = \vec{I}/I$  vahelise nurga koosinusega. Ühikvektorite korral

$$A_{\text{projektsioon}} = A\vec{n} \cdot \vec{i} \Rightarrow \alpha = \Sigma \vec{n} \cdot \vec{i}.$$

Kuubil saavad olla valgusvoo suunas kõige rohkem kolm tahku korraga. Tähistame need kui  $x$ ,  $y$  ja  $z$  ning nende pinnanormaalid kui  $\vec{n}_x$ ,  $\vec{n}_y$  ja  $\vec{n}_z$ . Seega

$$\alpha = (\vec{n}_x + \vec{n}_y + \vec{n}_z) \cdot \vec{i}.$$

Kui me defineerime taustsüsteemi, kus kuubi küljed on risti vastavate telgedega, siis lihtsustub antud valem  $\vec{i}$  komponentide summaks

$$\alpha = i_x + i_y + i_z.$$

Kuna  $\vec{i}$  on ühikvektor, siis

$$i_x^2 + i_y^2 + i_z^2 = 1.$$

On näha, et  $\alpha$  on maksimaalne kui kuubi diagonaal on suunatud valgusvoo suunas ehk kõikide külgede komponendid on võrdsed. Seega

$$\begin{aligned} \alpha_{\max} &= 3i_x \\ 3i_x^2 &= 1 \end{aligned} \Rightarrow \alpha_{\max} = \sqrt{3}.$$

Järelikult

$$T_{\max} = \sqrt[4]{\frac{\sqrt{3}I}{6\sigma}}.$$

ehk temperatuur varieerub  $\sqrt[4]{3} \approx 1,15$  korda.

### L180 Kontraktsioon ★

Autor: EFO žürii, piirkonnavoore, 2018, G 1

Tähistame võetud vee massi  $m_v$  ning piirituse massi  $m_p$ . Teades, piirituse massiprotsenti  $p = 44,1\%$ , saame leida vee ja piirituse masside suhte.

$$\frac{m_p}{m_p + m_v} = 0,441 \Rightarrow m_p = 0,789m_v.$$

Teades lahuse kontraktsiooni  $\gamma = 6\%$ , saame kirjutada seose

$$(V_v + V_p)0,94 = V.$$

Avaldades vee ja piirituse ruumalad massi ja tiheduse kaudu, saame

$$\frac{m_v}{\rho_v} + \frac{m_p}{\rho_p} = 1,064V.$$

Masside suhtest saime, et  $m_p = 0,789m_v$ . Asendades selle eelmisesse võrrandisse, saame leida vee ja piirituse massid.

$$\frac{m_v}{1 \text{ kg/dm}^3} + \frac{0,789m_v}{0,79 \text{ kg/dm}^3} = 1,064 \cdot 1 \text{ dm}^3 \Rightarrow m_v = 532 \text{ g},$$

$$m_p = 0,789m_v = 420 \text{ g}.$$

Vee ja piirituse ruumalad on seega

$$V_v = \frac{m_v}{\rho_v} = 532 \text{ cm}^3,$$

$$V_p = \frac{m_p}{\rho_p} = 532 \text{ cm}^3.$$

**L181 Mobiililaadija ★★**

Autor: Mihkel Kree, piirkonnavoore, 2014, G 4

Leiame ühel sammul saadava energia, arvestades et kannale toetub jõud  $F = mg$ . Vajudes kõrguse  $h$  võrra, tehakse tööd  $A_1 = mgh$ , millest aku laadimiseks saadav elektrienergia on  $W_1 = \eta A_1$ . Aku täislaadimiseks vajaliku energia leiame keskmise võimsuse  $P = UI_k$  ja aja  $T$  korrutisena  $W = UI_k T$ , mille kogumiseks vajalik sammude arv on

$$N = \frac{W}{W_1} = \frac{3.7 \cdot 0.13 \cdot 10 \cdot 3600}{0.2 \cdot 60 \cdot 9.8 \cdot 0.005} \approx 29400.$$

Laadimiseks vajaliku jalutuskäigu pikkuseks saame

$$s = Nd = 44 \text{ km}.$$

**L182 Laser ★★**

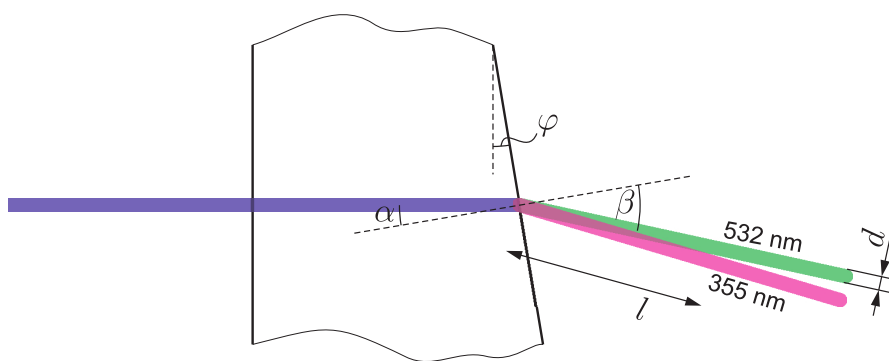
Autor: Valter Kiisk, lõppvoore, 2017, G 3

Eri värvi komponendid on täielikult eraldunud juhul, kui plaadist väljuvate laserkiirte tsentrite vaheline kaugus distantil  $l$  saab võrdseks kiire diameetriga (vt joonis). Vastavalt ülesande andmetele on kõik nurgad väikesed, nii et murdumisega  $n_\alpha \sin \alpha = n_\beta \sin \beta$  võib võtta  $\sin \alpha \approx \alpha$  ja  $\sin \beta \approx \beta$  (kus  $\alpha$  ja  $\beta$  mõõdetakse radiaanides). Järelikult seos nurkade vahel muutub lineaarseks:  $n_\alpha \alpha \approx n_\beta \beta$ . Tänu sellele ei oleks ka lõppvastuse leidmise seisukohalt oluline valguse täpne langemisnurk klaasplaadile (tingimusel, et see nurk on  $\ll 1$ ). Antud ülesande juhul langeb valgus esimesele pinnale risti. Sel juhul langemisnurk teisele pinnale ( $\alpha$ ) on võrdne nurgaga  $\varphi$  ja murdumisnurk vastavalt  $\beta = n\alpha = n\varphi$ , kus  $n$  on klaasi murdumisnäitaja. Komponentide suundade erinevus on vastavalt  $\Delta\beta = \Delta n\varphi = (n_1 - n_2)\varphi$ . Kuna nurk  $\Delta\beta$  on väike, siis kiirte tsentrite vaheline kaugus on  $\Delta\beta l$ , kui nad on kaugusel  $l$  plaadi teisest pinnast. Et nad oleks täielikult eraldunud, peab kehtima

$$l\Delta\beta = l(n_1 - n_2)\varphi = d,$$

kust saame

$$l = \frac{d}{(n_1 - n_2)\varphi} = 1,4 \text{ m}.$$



**L183 Pindpinevus ★★**

Autor: Koit Timpmann, lahtine, 2011, G 2

Vaatleme jõudude tasakaalu kummaski torus: reservuaari veetasemest ülespoole jääva vee kaalu  $\rho ghS$  tasakaalustab kapillaarjõud  $\sigma p \cos \alpha$ , kus  $p$  on vee ja klaasi kontaktjoone kogupikkus,  $h$  – veetaseme kõrgus kapillaaris,  $S$  – toru ristlõikepindala ja  $\alpha$  – nurk veepinna puutuja ja klaasi pinna vahel, mis sõltub märgamise määrast, kuid on mõlema toru jaoks sama (õigeks loetakse ka lahendused, kus eeldades täielikku märgamist jäetakse tegur  $\cos \alpha$  ära). Niisiis  $h = \sigma p \cos \alpha / \rho g S$ . Suure toru jaoks  $p_2 = 2\pi(r_2 + r_1)$  ja  $S_2 = \pi(r_2^2 - r_1^2)$ ; väikse toru jaoks  $p_1 = 2\pi r_1$  ja  $S_1 = \pi r_1^2$ . Seosest  $h_1 = h_2$  saame  $p_2/p_1 = S_2/S_1$ , millest ülaltoodud avaldiste asendamise teel omakorda saame  $1 + r_2/r_1 = (r_2/r_1)^2 - 1$ . Viimane seos kujutab endast suhte  $x = r_2/r_1$  jaoks ruutvõrrandit  $x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$  (negatiivne lahend ei oma füüsikalist tähendust). Niisiis  $r_1 = 2r_2$ .

**L184 Smurf solaariumis ★★**

Autor: Ants Remm, lahtine, 2011, G 4

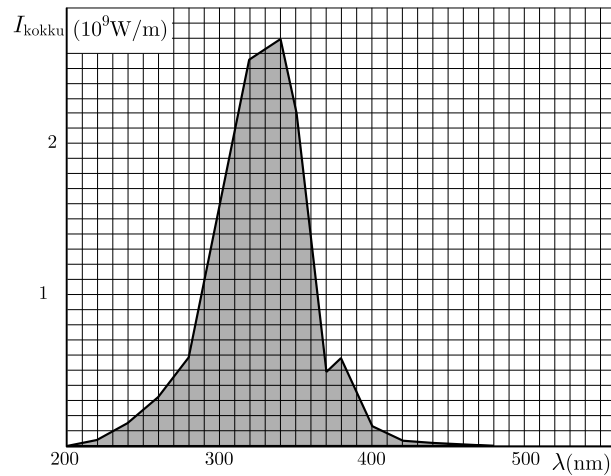
Kuna kogu Smurfile langenud valgusest  $I$  neeldub Smurfil vaid  $I \cdot \varepsilon$ , kujutab  $I \cdot \varepsilon$  graafik Smurfil neeldunud valguse intensiivsust lainepikkuse kohta sõltuvalt lainepikkusest. Konstrueerime nimetatud graafiku. Selleks loeme jooniselt erinevate  $\lambda$  väärtustele vastavad  $I$  ja  $\varepsilon$  väärtused ning arvutame nende korrutised, vt tabelit. Tabeli põhjal konstrueeritud joonise ning loeme graafiku alla jäänud pindala, mis on võrdne Smurfil neeldunud valguse intensiivsusega

$$I_{\text{kokku}} = (162 + \frac{74}{2}) \cdot 1 \frac{\text{W}}{\text{m}^2} = 199 \frac{\text{W}}{\text{m}^2}.$$

Kuna kiirguse intensiivsus näitab võimsust pindalaühiku kohta, saab Smurf kokku soojushulga

$$Q = I_{\text{kokku}} S t = 199 \frac{\text{W}}{\text{m}^2} \cdot 0,1 \text{ m}^2 \cdot 10 \text{ min} \cdot 60 \frac{\text{s}}{\text{min}} \approx 12 \text{ kJ}.$$

$\lambda$ (nm)	200	220	240	260	280	300	320	340	350
$I$ ( $10^9 \cdot \frac{\text{W}}{\text{m}^3}$ )	0,00	0,05	0,24	0,45	0,85	2,25	3,75	4,35	4,25
$\varepsilon$	0,46	0,54	0,62	0,68	0,70	0,70	0,68	0,62	0,53
$I \cdot \varepsilon$ ( $10^9 \cdot \frac{\text{W}}{\text{m}^3}$ )	0,00	0,03	0,15	0,31	0,60	1,58	2,55	2,70	2,25
$\lambda$ (nm)	360	370	380	400	420	440	460	480	
$I$ ( $10^9 \cdot \frac{\text{W}}{\text{m}^3}$ )	3,25	2,00	2,70	0,85	0,20	0,10	0,05	0,00	
$\varepsilon$	0,37	0,25	0,22	0,18	0,18	0,20	0,23	0,33	
$I \cdot \varepsilon$ ( $10^9 \cdot \frac{\text{W}}{\text{m}^3}$ )	1,20	0,50	0,59	0,15	0,04	0,02	0,01	0,00	



### L185 Valgustid ★★

Autor: Valter Kiisk, piirkonnavor, 2016, G 7

Kirjeldatud eeldustel luminesentsstoru (ja nendest moodustatud rivi) võib vaadelda lõpmata pika joonvalgusallikana, mille valgusvoog jaotub ühtlaselt silindripinnale, mille pindala on võrdeline silindri raadiusega. Kuna kogu energia jaguneb silindri pinna peale, siis valgustatus on pöördvõrdeline kaugusega,  $L \propto 1/r$ . Et kaugusel  $r = 0,15 \text{ m}$  oleks valgustatus  $L = 8400 \text{ lx}$ , peab valgustatuse valem olema  $L = 8400 \text{ lx} \times \frac{0,15 \text{ m}}{r}$ . Järelikult luminesentslampide abil saadakse valgustatuseks töölaua

$$8400 \text{ lx} \times \frac{0,15 \text{ m}}{1,8 \text{ m}} \approx 700 \text{ lx}.$$

Seevastu LED-lamp on pigem punktvalgusallikas, mille valgusvoog jaotub sfääri pinnale, mille pindala on ruutsõltuvuses sfääri raadiusest. Seega  $L \propto 1/r^2$  ja et kaugusel  $r = 0,3 \text{ m}$  oleks valgustatus  $L = 1500 \text{ lx}$ , peab kehtima  $L = 1500 \text{ lx} \times \left(\frac{0,3 \text{ m}}{r}\right)^2$ . Töölaua kaugusel  $r = 0,4 \text{ m}$  lambist on valgustatus

$$2600 \text{ lx} \times \left(\frac{0,3 \text{ m}}{0,4 \text{ m}}\right)^2 \approx 1500 \text{ lx}.$$



**L186 Tiik ★★★**

Autor: Taavi Pungas, lõppvoor, 2013, G 6

Mõõdame jooniselt ringide läbimõõdud, saame 0,1; 0,4; 0,9; 1,6; 2,5; 3,5 ja 4,5 ühikut  $L$ -i. Näeme, et alguses on liikumine ühtlaselt kiirenev ehk kehtib  $\lambda \ll h$  seos

$$r \approx \frac{gt^2}{2\pi}.$$

Sellest saame arvutada esimestele ringidele vastavad ajahetked valemiga  $t = \sqrt{2\pi r/g}$ :

$$\sqrt{\frac{\pi L}{10g}}, 2\sqrt{\frac{\pi L}{10g}}, 3\sqrt{\frac{\pi L}{10g}}, 4\sqrt{\frac{\pi L}{10g}}, 5\sqrt{\frac{\pi L}{10g}}.$$

Näeme, et joonise tegemiseks kasutatud ajavahemik oli

$$T = \sqrt{\frac{\pi L}{10g}}.$$

Hiljem on liikumine ühtlane, kiirusega

$$v = \frac{L}{T} = \sqrt{\frac{10Lg}{\pi}}.$$

Teisalt teame, et  $v \approx \sqrt{hg}$ , seega tiigi sügavus on

$$h \approx \frac{v^2}{g} = \frac{10L}{\pi},$$

ehk

$$h/L = \frac{10}{\pi} \approx 3,2.$$

**L187 Radoon ★★★**

Autor: Mihkel Kree, lõppvoor, 2016, G 5

Iga lagunev uraani tuum jõuab oma lagunemisahelas radoonini. Tasakaalulisel juhul tähendab see, et ajaühikus lagunevate uraani tuumade arv on võrdne ka nii ajaühikus tekkivate kui ka lagunevate radooni tuumade arvuga. Niisiis, ajaühikus lagunevate radooni tuumade arv  $\Delta N_R/\Delta t$  on määratud uraani tuumade koguarvu  $N_U$  ja uraani poolestusaja  $\tau$  kaudu kujul

$$\frac{\Delta N_R}{\Delta t} = \frac{N_U \ln 2}{\tau}.$$

Uraani tuumade arvu saame selle kogumassi  $m_U = \frac{0,3}{10^3}m$  ja ühe aatomi massi  $m_1 = 238 \cdot u$  suhtena:

$$N_U = \frac{m_U}{m_1} = 1,26 \cdot 10^{-6} \frac{m}{u}.$$

Et radooni aktiivsus (lagunemiste arv ruumalaühikus ajaühiku kohta) ruumis peab piirjuhul rahuldama tingimust

$$\frac{\Delta N_R}{\Delta t} = 200 \cdot V,$$

saame kivimitüki ohutu massi ülempiiriks

$$m = \frac{200 \cdot V u \tau}{1,26 \cdot 10^{-6} \ln 2} = 1,4 \text{ kg}.$$

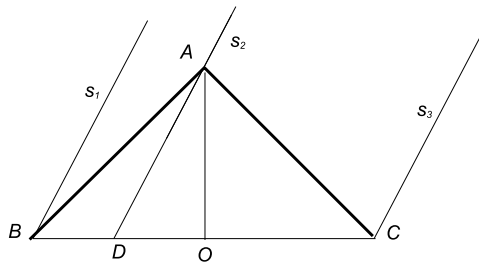
### L188 Vihmasadu ★★★★★

Autor: Jaan Kalda, piirkonnavor, 2012, G 7

Tähistame katuse vertikaallõikel harja tähega  $A$ , räästad tähtedega  $B$  ja  $C$  ning lõigu  $BC$  keskpunti tähega  $O$ . Tähistame sümbolitega  $s_1$ ,  $s_2$  ja  $s_3$  selliste piiskade trajektoore, mis tabavad vastavalt põhjaräästast punktis  $B$ , harja punktis  $A$  ning lõunaräästast punktis  $C$ . Sirgete  $s_1$  ja  $s_2$  vahelisse ribasse jäävad piisad tabavad põhjakatust ning sirgete  $s_2$  ja  $s_3$  vahelisse ribasse jäävad piisad tabavad lõunakatust. Seega on veehulkade suhe võrdne ribade laiuste suhtega, mis omakorda on võrdne lõikude  $BD$  ja  $CD$  pikkuste suhtega, kus  $D$  on sirge  $s_2$  lõikepunkt lõiguga  $BC$ . Seetõttu  $|BD| = \frac{1}{3}|BC|$  ning järelikult

$$|DO| = |BO| - |BD| = \frac{1}{6}|BC|.$$

Paneme tähele, et vihmapiiskade kiirusvektori horisontaal- ja vertikaalkomponentide suhe on võrdne lõikude  $DO$  ja  $OA = \frac{1}{2}BC$  pikkuste suhtega; et  $\frac{|AO|}{|DO|} = 3$ , siis piiskade langemise kiirus on  $3u = 18 \text{ m/s}$ .



**L189 Lööklaine ★★★★★**

Autor: Jaan Kalda, lõppvoor, 2015, G 6

Läheme üle lööklainega seotud taustsüsteemi, milles osake läheneb lööklainele kiirusega  $w$ . Energia jäävusest saame, et juhul kui osake läbib lööklainet, siis

$$mw^2/2 = qU_0 + mu^2/2,$$

kus  $u$  on osakese kiirus pärast lööklainega kohtumist. Sellest saame

$$u = \sqrt{w^2 - 2qU_0/m}.$$

Tagasi laboratoorsesse süsteemi minnes saame kiiruseks

$$v = u - w = \sqrt{w^2 - 2qU_0/m} - w,$$

mis kehtib, kui  $mw^2 > 2qU_0$ . Vastasel juhul peegeldub osake lööklainelt ning  $u = -w$  ja  $v = -2w$ .

**L190 Õhupalli vari ★★★★★**

Autor: Jaan Kalda, lahtine, 2013, G 10

Et Päikese nurksuurus on väike, siis maapinna lähedal võime lugeda varjukoonused silindriteks: joonisel tähendab see, et loeme  $AH$  paralleelseks  $DG$ -ga,  $CF$ -ga ja  $BE$ -ga. Paneme tähele, et  $|AD| = 2,5$  m, sest kaldu langevate kiirte puhul on kera varju laius (väiksem mõõde) maapinnal võrdne varjukoonuse läbimõõduga. See tähendab, et  $CB$  pikkus on 0,5 m ja  $AB$  pikkus on  $\frac{2,5-0,5}{2}$  m = 1 m. Et palli läbimõõt on võrdne  $AC$ -ga, siis  $|KL| = 1 + 0,5$  m = 1,5 m. Nurk  $\angle KJL$  moodustab sirgnurgast murdosa  $0,5/180 = 1/360$ , mis tähendab, et lõik  $KL$  moodustab punkti  $J$  ümber tõmmatud poolringjoonest raadiusega  $R = |JK|$  samasuguse murdosa; selle kaare pikkus on  $\pi R$ , st  $|KL| = \pi R/360$ , millest

$$R = 360|KL|/\pi \approx 172 \text{ m}.$$

Sarnastest kolmnurkadest  $JKL$  ja  $JBC$  leiame, et

$$|BK| = |JK| \frac{|KL| - |BC|}{|KL|} \approx 114 \text{ m}.$$

Ligikaudu sarnastest kolmnurkadest  $KAM$  ja  $ADG$  leiame, et

$$|KM| \approx |KA| \frac{|DA|}{|AG|} \approx 57 \text{ m}.$$



**L192 Auk tünnis ★★**

Autor: Hans Daniel Kaimre, lõppvoor, 2018, G 2

Veepiiril olevat vett saame vaadelda kui vedelikku vett kõrgusel  $h$ , mille kiirus on null ning kus rõhk peab olema võrdne õhurõhuga. Tünni põhjast väljuv juuga ava juures on  $h$  võrra madalamal, rõhk peab samamoodi olema võrdne õhurõhuga, kuid juga liigub kiirusega  $v$ . Bernoulli seadusest saame kirja panna, et  $\rho gh = \rho v^2/2$ , kust saame et  $v^2 = 2gh$ . Alternatiivselt saame kirja panna energia jäävuse seaduse väikese veekoguse  $\Delta m$  jaoks, mille kaugus anuma põhjast on  $h$ :  $gh\Delta m = \Delta m \frac{v^2}{2}$ , kus oleme arvestanud, et vedeliku ülemisel piiril on vee voolamiskiirus praktiliselt 0, ning et energiakadudega ei arvesta.

Väljuvas joas peab vooluhulk ajaühikus olema sama, mis tähendab, et kehtib  $A_1 v_1 = A_2 v_2$ , kus  $A$  ja  $v$  on vastavalt joa ristlõikepindala ja kiirus. Kuna  $A = \pi d^2/4$ , saame seose ümber kirjutada kujule  $v_2 = (d_1^2/d_2^2)v_1$ . Raskuskiirendusega liikuva keha läbitud teepikkus alg- ja lõppkiiruste kaudu avaldub kui:

$$l = \frac{v_2^2 - v_1^2}{2g} \Rightarrow l = \frac{\frac{d_1^4}{d_2^4} v_1^2 - v_1^2}{2g} \Rightarrow v_1^2 = \frac{2gl}{\frac{d_1^4}{d_2^4} - 1}.$$

Vaatleme juhtu, kus  $v_1 = v$  on kiirus kohe ava juures. Sel juhul saame kaks avaldist  $v^2$  jaoks võrduma panna:

$$2gh = \frac{2gl}{\frac{d_1^4}{d_2^4} - 1} \Rightarrow h = \frac{l}{\frac{d_1^4}{d_2^4} - 1}.$$

Veejoa läbimõõdu ava juures leiame graafikult punktist  $l = 0$ , teise punkti valime ise suvaliselt: Valides selleks (28,1,79), saame vastuseks  $h = 28/(2^4/1,79^4 - 1) = 50$  cm.

**L193 Ujuv kuup ★★**

Autor: Koit Timpmann, lõppvoor, 2015, G 3

Vaatleme olukorda, kus kuup on sellesse sisenenud vee tõttu parajasti veepinna alla vajunud, sest siis hakkab kuubile mõjuma suurim üleslükkejõud. Piirjuhul on kuubile mõjuv üleslükkejõud ja raskusjõud tasakaalus ehk  $F_r = F_y$ . Olgu kuupi tunginud vee mass  $M$ , mis avaldub kuubis oleva vee kõrguse  $h$  kaudu kui  $M = \rho a^2 h$ . Jõudude tasakaalu põhjal

$$F_r = F_y \Rightarrow (m + \rho a^2 h)g = \rho g a^3,$$

seega

$$h = \frac{\rho a^3 - m}{\rho a^2} = a - \frac{m}{\rho a^2}.$$

Vesi ei tungi enam kuupi, kui õhu rõhk kuubis tasakaalustab vee rõhu ehk  $p_0 + \rho g(a - h) = p_2$ , kus  $p_2$  on õhu rõhk kuubis. Saame

$$p_2 = p_0 + \rho g \left( a - a + \frac{m}{\rho a^2} \right) = p_0 + \frac{gm}{a^2}.$$

Õhu ruumala kuubis on

$$V_2 = a^3 - a^2h = a^3 - a^2 \left( a - \frac{m}{\rho a^2} \right) = \frac{m}{\rho}.$$

Enne augu tekkimist oli rõhu ruumala  $V = a^3$ . Kuna õhu temperatuur ei muutunud, siis  $pV = p_2V_2$  ning algne rõhk  $p$  kuubis oli

$$p = \frac{p_2V_2}{V} = \frac{(p_0 + \frac{gm}{a^2}) \cdot \frac{m}{\rho}}{a^3} = \frac{m(p_0a^2 + gm)}{a^5\rho}.$$

#### L194 Pump ★★

Autor: Ardi Loot, piirkonnavor, 2018, G 4

a) Torus olevale veesambale mõjub raskusjõud  $F_r$ , takistusjõud  $F_h$  ja pumba poolt avaldatav jõud  $F_p$ . Ühtlase pumpamise korral kehtib jõudude tasakaal  $F_r + F_h = F_p$ . Raskusjõud on arvutatav leides torus oleva vee massi

$$F_r = mg = \rho Shg \approx 9,85 \text{ N},$$

kus toru ristlõikepindala  $S = \pi d^2/4$ . Hõõrdejõu, mis on tingitud vee liikumisest torus, leiame ülesande tekstis antud rõhulangu valemiga, kui korrutame selle toru ristlõikepindalaga.

$$F_h = \Delta p S = c_h Q^2 h S / d^5 \approx 9,59 \text{ N}.$$

Pumba võimsus on antud valemiga  $P = F_p v / \eta$ , kus  $v = Q/S$  on vee liikumise kiirus torus. Jõudude tasakaalust saame

$$P = (F_r + F_h) \frac{Q}{S\eta} = \frac{Qh}{d^5\eta} (\rho g d^5 + c_h Q^2) \approx 193 \text{ W}.$$

b) Kuna pump asub maapinnal, siis peab pump tekitama vee liigutamiseks alarõhu. Maksimaalne alarõhk on juhul, kui pump tekitab vaakumi. Sellisel piirjuhul surub õhurõhk veesammast ülespoole jõuga  $p_0 S$  ja pumba töötamiseks peab see jõud olema vähemalt sama suur kui veesambale mõjuv raskusjõud  $p_0 S = \rho Sh_m g$ . Maksimaalne kaevu sügavus on seega  $h_m = p_0 / (\rho g) \approx 10,2 \text{ m}$ .

#### L195 Klots vedelikes ★★★

Autor: Erkki Tempel, lahtine, 2014, G 6

Kuna klotsi tihedus on ülemisest vedelikust suurem ning alumisest vedelikust väiksem, jääb klots kahe vedeliku piirpinnale ujuma. Klotsile mõjub sellisel juhul klotsi raskusjõud  $F_r = m_{\text{klots}} g = \rho_k V g$ , ning vedelike üleslükkejõud

$$F_y = F_{y1} + F_{y2} = \rho_1 g V_x + \rho_2 g (V - V_x),$$

kus  $V_x$  on alumises vedelikus oleva klotsi ruumala ning  $V - V_x$  on ülemises vedelikus oleva klotsi ruumala. Raskusjõud ja üleslükkejõud on võrdsed, seega saame võrrandi

$$\rho_k V g = \rho_1 g V_x + \rho_2 g (V - V_x).$$

Sellest saab avaldada

$$V_x = \frac{V(\rho_k - \rho_2)}{\rho_1 - \rho_2}.$$

Alumise vedeliku nivoo tõuseb ruumala  $V_x$  võrra. Kuna anuma põhjapindala on  $S$ , siis tõuseb vedelike eraldusnivoo  $\Delta h$  võrra, kusjuures

$$\Delta h = \frac{V_x}{S}.$$

Asendades siia  $V_x$ , saame

$$\Delta h = \frac{V(\rho_k - \rho_2)}{S(\rho_1 - \rho_2)}.$$

### L196 Kuup veega ★★★

Autor: Jonatan Kalmus, piirkonnavor, 2018, G 7

*Esimene lahendus*

Tähistame otsitava vee massi  $m$ , veesamba kõrguse  $h$  ning süsteemi massikeskme kõrguse  $l$ . Kuna kuup on sümmeetriline, asub selle massikeskme kõrgusel  $\frac{a}{2}$ . Vee massikeskme asub veekoguse keskel ehk kõrgusel  $\frac{h}{2}$ . Kui kuup on tühi, siis ühtib süsteemi massikeskme kuubi massikeskmeaga ehk  $l = \frac{a}{2}$  ning veesamba kõrgus  $h = 0$ . Kui nüüd kuubi põhja aeglaselt vett valada, hakkab veesamba kõrgus  $h$  kasvama ning süsteemi massikeskme kõrgus  $l$  vähenema, kuna kogu lisatud vesi asub algsest süsteemi massikeskmest all pool. Süsteemi massikeskme kõrgus  $l$  ei saa vee lisamisega enam alaneda, kui see ühtib veesamba kõrgusega  $h$ , sest kui selles olukorras vett juurde lisada, oleks äsja juurde lisatud veekogus eelnevast süsteemi massikeskmest kõrgemal ning süsteemi massikeskme kõrgus hakkaks kasvama. Seega, massikeskme on võimalikult madalal olukorras, kui süsteemi massikeskme kõrgus ühtib veesamba kõrgusega ehk  $l = h$ . Rakendades kangi reeglit saame:

$$M\left(\frac{a}{2} - l\right) = m\left(l - \frac{h}{2}\right).$$

Teades seost  $l = h$  ja vee massi  $m = \rho a^2 h$  ning asendades need eelnevasse võrrandisse:

$$M\left(\frac{a}{2} - h\right) = \rho a^2 h\left(h - \frac{h}{2}\right).$$

Siit saame  $h$  jaoks ruutvõrrandi:

$$\begin{aligned} \rho a^2 h^2 + 2Mh - Ma &= 0, \\ h &= \frac{-2M \pm \sqrt{4M^2 + 4\rho a^3 M}}{2\rho a^2}. \end{aligned}$$

Kuna negatiivne lahend ei sobi, saame

$$h = \frac{M(\sqrt{1 + \frac{\rho a^3}{M}} - 1)}{\rho a^2}.$$

Otsitav veekoguse mass on seega

$$m = \rho a^2 h = M \left( \sqrt{1 + \frac{\rho a^3}{M}} - 1 \right).$$

*Teine lahendus*

Minimaalsele süsteemi massikeskmele vastavat veesamba kõrgust on võimalik leida ka tuletise abil. Kuubi sümmeetria tõttu asub selle massikese kõrgusel  $\frac{a}{2}$  ning vee massikese kõrgusel  $\frac{h}{2}$ . Rakendades kangi reeglit saame:

$$M \left( \frac{a}{2} - l \right) = m \left( l - \frac{h}{2} \right).$$

Sellest tuleb avaldada süsteemi massikeskme kõrgus  $l$  ning otsida  $h$ -d, kui  $\frac{dl}{dh} = 0$ . Teades, et vee mass on  $m = \rho a^2 h$ :

$$l = \frac{Ma + \rho a^2 h^2}{2(M + \rho a^2 h)},$$

$$\frac{dl}{dh} = \frac{4\rho a^2 h(M + \rho a^2 h) - 2\rho a^2 (Ma + \rho a^2 h^2)}{4(M + \rho a^2 h)^2} = 0.$$

Siit saame lihtsustades ning  $\rho a^2$ -ga läbi jagades  $h$  jaoks ruutvõrrandi:

$$\rho a^2 h^2 + 2Mh - Ma = 0.$$

See on identne eelnevalt saadud ruutvõrrandiga ning seega on ka saadav vastus on sama:

$$m = M \left( \sqrt{1 + \frac{\rho a^3}{M}} - 1 \right).$$

### L197 Allveelaev ★★★

Autor: Mihkel Heidelberg, lahtine, 2012, G 5

Vee sissevoolu lõppedes on hüdrostaatilised rõhud vees torni sees ja väljas tasakaalus, samuti on õhu temperatuur võrdsustunud vee omaga (vahepeal võib õhu temperatuur kokkusurumise tõttu veidi tõusta). Õhurõhk torni sees on võrdne hüdrostaatilise rõhuga tornis vee piiril. Rõhkude tasakaalust saame avaldada õhukihi paksuse:

$$\rho g(h + d) + p_0 = p_0 \frac{s}{d},$$

$$d^2 \rho g + d(p_0 + h \rho g) - s p_0 = 0,$$

$$d = \frac{(\pm \sqrt{(p_0 + h \rho g)^2 + 4s \rho g p_0} - p_0 - h \rho g)}{2 \rho g}.$$

Lähteülesandele vastab positiivne lahend  $d \approx 57$  cm. Kuna luugile mõjub altpoolt torni sees oleva õhu rõhk, mis vastab hüdrostaatilisele rõhule sügavusel  $d + h$ , saame, et summaarne jõud mõjub ülespoole:

$$F = A(\rho g(d + h) + p_0 - \rho g h - p_0) = A \rho g d \approx 2800 \text{ N}.$$



Kui Bond torni vett sisse ei laseks, oleks vee ja õhu poolt summaarne luugile mõjuv jõud allapoole  $A\rho gh \approx 120 \text{ kN}$ . Eeldusel, et luuk avaneb väljapoole, seda inimjõul lahti ei saa.

**L198 Kauss ★★★★★**

Autor: Taavi Pungas, lahtine, 2013, G 7

Olgu mingil hetkel kausis oleva vee mass  $m$ . Siis mõjuvad kausile raskusjõud  $(M + m)g$ , üleslükkejõud  $F$  ja vee sissekukkumisest tulenev rõhumisjõud  $F$ . Kõrguselt  $h$  kukkudes saavutab vesi kiiruse  $v = \sqrt{2gh}$ , ajavahemiku  $\Delta t$  jooksul jõuab kaussi veekogus massiga

$$\Delta m = \frac{\rho V_2 \Delta t}{t}.$$

Seega kannab kaussi langev vesi kausile ajavahemikus  $\Delta t$  üle impulsi  $\Delta p = \Delta m v$ , mistõttu mõjub kausile jõud

$$F = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{\Delta m v}{\Delta t} = \frac{\rho V_2 \sqrt{2gh}}{t}.$$

Et kauss ei läheks põhja, peab üleslükkejõud teised kaks jõudu tasakaalustama. Maksimaalne võimalik üleslükkejõud on  $\rho V_1 g$  ehk 29 N, samas kui teised kaks jõudu annavad kokku maksimaalselt

$$(M + \rho V_2)g + \frac{\rho V_2 \sqrt{2gh}}{t} = 33 \text{ N}.$$

Näeme, et maksimaalne üleslükkejõud jääb liiga väikseks, et kaussi ujumas hoida, seega läheb kauss põhja.

**L199 Veejoad ★★★★★**

Autor: Mihkel Kree, lahtine, 2015, G 7

Vaatleme veejuga, mis väljub anumast asukohast  $y = h$ . Selle kohal oleva vee-samba kõrgus on  $h$  ning energia jäävusest saame avaldada väljuva joa algkiiruse  $v = \sqrt{2gh}$ . Vabalt langev veejuga on parabool, kusjuures ühe osakese ajalisi liikumisi saame kirjeldada võrranditega  $x = vt$  ja  $y = h + gt^2/2$ . Pärast esimesest võrrandist aja avaldamist saame teisest parabooli võrrandi

$$y = h + \frac{gx^2}{2v^2} = h + \frac{x^2}{4h}.$$

Mõtiskleme nüüd, kuidas määrata kindlaks ruumipiirkonda, millesse saavad langevad veejoad jõuda. Võiksime valida ruumipunkti  $(x, y)$  ning küsida, milliselte algkõrguselt  $h$  alustades on võimalik sinna jõuda. Sobiva algkõrguse  $h$  leidmiseks tuleks lahendada ruutvõrrand  $h^2 - yh + x^2/4 = 0$ . Kui selle võrrandi diskriminant on positiivne, leidub  $h$  jaoks kaks erinevat lahendit ning punkti  $(x, y)$  on võimalik jõuda kahelt algkõrguselt. Kui diskriminant on negatiivne, puuduvad reaalarvulised lahendid ning punkti  $(x, y)$  pole võimalik jõuda. Neid kahte juhtu eraldab piirjoon, kus diskriminant on null ehk  $y^2 - x^2 = 0$ , millest saame avaldada piirjoone ehk veejugade mähispinna võrrandi  $y = x$ .

**L200 U-toru ★★★★★**

Autor: Erkki Tempel, piirkonnavaor, 2016, G 9

Pärast õli kallamist torusse langeb vee tase  $\Delta h$  võrra selles torus, kuhu kallati õli, ning teises torus veetase tõuseb  $\Delta h$  võrra. Õli ja vee piirpinna kõrgusel on rõhk mõlemas U-toru harus sama. Õliga täidetud harus avaldab õli vee ja õli piirpinnale rõhku

$$p_1 = \rho_{\text{õ}} g l + p_0.$$

Teises (suletud) U-toru harus tekitab kokkusurutud õhk rõhu  $p_{\text{õhk}}$ . Õhu kokkusurumist võime vaadelda isotermilise protsessina, kus  $pV = \text{Const.}$  Seega

$$p_0 \cdot S h = p_{\text{õhk}} \cdot S(h - \Delta h) \quad \Rightarrow \quad p_{\text{õhk}} = \frac{p_0 h}{h - \Delta h}.$$

Vee ja õli nivoo kõrgusel avaldavad teises harus vesi ja õhk rõhku

$$p_2 = \rho_v g(2\Delta h) + p_{\text{õhk}}.$$

Rõhud  $p_1$  ja  $p_2$  on võrdsed ning  $\Delta h = l - h$ , seega saame kirja panna seose

$$\rho_{\text{õ}} g l + p_0 = \rho_v g 2(l - h) + \frac{p_0 h}{h - (l - h)}.$$

Avaldades viimasest seosest õli tiheduse  $\rho_{\text{õ}}$ , saame

$$\rho_{\text{õ}} = \frac{l - h}{l} \left( 2\rho_v + \frac{p_0}{g(2h - l)} \right).$$

# Õpilaste tulemused

<b>Füüsika lõppvoor</b> <b>10. märts 2012. a.</b> <b>Gümnaasium</b>					
Koht	Nimi	Klass	Füüsikaõpetaja	Kokku	Järk
1	Erik Tamre	12	Mart Kuurme	59,5	I
2	Jaan Toots	11	Toomas Reimann	57	I
3	Tanel Kiis	12	Vahur Pohlasalu	54,5	II
4	Kristjan Kongas	8	Irja Tuus	53,5	II
5	Kaur Aare Saar	11	Guido Vegmann	51,5	II
6	Taivo Pungas	12	Rain Vellerind	51	II
7	Eva-Lotta Käsper	12	Siim Oks	50	II
8	Tõnis Laasfeld	11	Virgi Einaste	49	II

<b>Füüsika lahtine võistlus</b> <b>1. detsember 2012. a.</b> <b>Vanem rühm</b>					
Koht	Nimi	Klass	Füüsikaõpetaja	Kokku	Järk
1	Kristjan Kongas	9	Olav Kongas	62,5	I
2	Andres Põldaru	12	Tiiu Niidas	62	I
3	Kristo Ment	12	Elmu Mägi	59	II
3	Jaan Toots	12	Toomas Reimann	59	II
5	Tõnis Laasfeld	12	Virgi Einaste	56,5	II
6	Kaur Aare Saar	12	Siim Oks	56	II
6	Janno Veeorg	12	Toomas Reimann	56	II

<b>Füüsika lõppvoor</b> <b>13. aprill 2013. a.</b> <b>Gümnaasium</b>					
Koht	Nimi	Klass	Füüsikaõpetaja	Kokku	Järk
1	Jaan Toots	12	Toomas Reimann	63,5	I
2	Andres Põldaru	12	Tiiu Niidas	61	I
2	Sandra Schumann	12	Rain Vellerind	61	I
4	Kristjan Kongas	9	Olav Kongas	58,5	II
5	Kaur Aare Saar	12	Siim Oks	55,5	II
6	Tõnis Laasfeld	12	Virgi Einaste	52	II
6	Joonas Kalda	10	Aarne Silas	52	II
6	Kristo Ment	12	Elmu Mägi	52	II
9	Janno Veeorg	12	Toomas Reimann	51,5	II
10	Andres Erbsen	12	Rain Vellerind	50,5	II

<b>Füüsika lahtine võistlus</b> <b>30. november 2013. a.</b> <b>Vanem rühm</b>					
Koht	Nimi	Klass	Füüsikaõpetaja	Kokku	Järk
1	Kristjan Kongas	10	Kätlin Hein	64	I
2	Rasmus Kisel	11	Erkki Soika	58	II
3	Kaarel Kree	12	Siim Oks	55,5	II
4	Taavet Kalda	9	Virgi Roop	55	II

**Füüsika lõppvoor****12. aprill 2014. a.****Gümnaasium**

Koht	Nimi	Klass	Füüsikaõpetaja	Kokku	Järk
1	Kristjan Kongas	10	Mart Kuurme	61,5	I
2	Oliver Nisumaa	10	Mart Kuurme	60,5	I
3	Mari Liis Pedak	12	Mart Kuurme	54	II
4	Kaur Kristjuhan	12	Siim Oks	50,5	II
5	Rasmus Kisel	11	Erkki Soika	50	II
6	Simmo Saan	11	Madis Reemann	49,5	II
7	Joonas Kalda	11	Aarne Silas	49	II
7	Timothy H. C. Tamm	12	Erkki Soika	49	II
9	Jonatan Kalmus	10	Madis Reemann	48	II
9	Egert Männisalu	11	Aarne Silas	48	II

**Füüsika lahtine võistlus****22. november 2014. a.****Vanem rühm**

Koht	Nimi	Klass	Füüsikaõpetaja	Kokku	Järk
1	Kristjan Kongas	11	Mart Kuurme	66	I
1	Taavet Kalda	10	Jaan Kalda	66	I
3	Hans Daniel Kaimre	12	Madis Reemann	62	II
3	Rasmus Kisel	12	Erkki Soika	62	II
5	Oliver Nisumaa	11	Mart Kuurme	60	II
6	Edward Ereht	11	Mart Kuurme	59,5	II
7	Joonas Kalda	12	Aarne Silas	59	II
8	Jonatan Kalmus	11	Madis Reemann	58	II

<b>Füüsika lõppvoor</b> <b>11. aprill 2015. a.</b> <b>Gümnaasium</b>					
Koht	Nimi	Klass	Füüsikaõpetaja	Kokku	Järk
1	Taavet Kalda	10	Neeme Lumi	60	I
2	Kristjan Kongas	11	Mart Kuurme	57,5	I
3	Jonatan Kalmus	11	Madis Reemann	47,5	II
4	Hans Daniel Kaimre	12	Madis Reemann	45	II
5	Kaarel Hänni	10		44,5	II
6	Simmo Saan	12	Madis Reemann	44	II
7	Richard Luhtaru	8	Erkki Tempel	43	II
7	Andres Unt	11	Mart Kuurme	43	II

<b>Füüsika lahtine võistlus</b> <b>28. november 2015. a.</b> <b>Vanem rühm</b>					
Koht	Nimi	Klass	Füüsikaõpetaja	Kokku	Järk
1	Kristjan Kongas	12	Mart Kuurme	57	I
2	Taavet Kalda	11	Toomas Reimann	56	I
3	Kaarel Hänni	11	Toomas Reimann	53	I
4	Oliver Nisumaa	12	Mart Kuurme	48,5	II
5	Richard Luhtaru	9	Erkki Tempel	47	II
6	Jonatan Kalmus	12	Madis Reemann	45	II

<b>Füüsika lõppvoor</b> <b>9. aprill 2016. a.</b> <b>Gümnaasium</b>					
Koht	Nimi	Klass	Füüsikaõpetaja	Kokku	Järk
1	Kristjan Kongas	12	Mart Kuurme	72,5	I
2	Taavet Kalda	11	Toomas Reimann	70,5	I
3	Richard Luhtaru	9	Erkki Tempel	67,5	II
4	Kaarel Hänni	11	Toomas Reimann	64	II
5	Oliver Nisumaa	12	Mart Kuurme	60,5	II
6	Jonatan Kalmus	12	Madis Reemann	58	II

<b>Füüsika lahtine võistlus</b> <b>26. november 2016. a.</b> <b>Vanem rühm</b>					
Koht	Nimi	Klass	Füüsikaõpetaja	Kokku	Järk
1	Paul Kerner	12	Tamara Jevsejeva	62	I
2	Kaarel Hänni	12	Toomas Reimann	60	I
3	Kaarel Kivisalu	9	Mart Kuurme	58	I
4	Richard Luhtaru	10	Siim Oks	55	II
4	Taavet Kalda	12	Toomas Reimann	55	II
6	Roman Oleinik	11	Mikhail Emeljanov	54	II
7	Adrian Kirikal	11	Toomas Reimann	52	II
7	Konstantin Dukatš	9	Aleksander Tšerkašin	52	II
9	Airon Oravas	11	Toomas Reimann	51	II

<b>Füüsika lõppvoor</b> <b>15. aprill 2017. a.</b> <b>Gümnaasium</b>					
Koht	Nimi	Klass	Füüsikaõpetaja	Kokku	Järk
1	Taavet Kalda	12	Toomas Reimann	59	I
2	Konstantin Dukatš	9	Aleksander Tšerkašin	55	II
2	Richard Luhtaru	10	Siim Oks	55	II
4	Kaarel Hänni	12	Toomas Reimann	53,5	II
5	Kaarel Kivisalu	9	Mart Kuurme	53	II

<b>Füüsika lahtine võistlus</b> <b>2. detsember 2017. a.</b> <b>Vanem rühm</b>					
Koht	Nimi	Klass	Füüsikaõpetaja	Kokku	Järk
1	Richard Luhtaru	11	Taavet Kalda	61	I
2	Konstantin Dukatš	10	Aleksander Tšerkashin	57	I
3	Kaarel Paal	10	Toomas Reimann	46	II
4	Nikita Poljakov	12	Toomas Reimann	45	II
5	Kaarel Kivisalu	10	Toomas Reimann	44	II
6	Adrian Kirikal	12	Toomas Reimann	43	II
6	Urmas Luhaäär	11	Peet-Märt Irtd	43	II

<b>Füüsika lõppvoor</b> <b>14. aprill 2018. a.</b> <b>Gümnaasium</b>					
Koht	Nimi	Klass	Füüsikaõpetaja	Kokku	Järk
1	Konstantin Dukatsš	10	Aleksander Tšerkashin	63	I
2	Kaarel Kivisalu	10		61	I
3	Richard Luhtaru	11	Taavet Kalda	58	I
4	Karl Paul Parmakson	11	Riina Murulaid	49,5	II
4	Roman Oleinik	12	Mikhail Emeljanov	49,5	II
6	Kaarel Paal	10	Toomas Reimann	48	II
6	Toomas Tennisberg	11	Madis Reemann	48	II
8	Adrian Kirikal	12	Toomas Reimann	46	II



# Autorite loetelu

Aigar Vaigu – Aalto Ülikool ja VTT Technical Research Centre of Finland  
Andreas Valdmann – Tartu Ülikool  
Andres Põldaru – Tartu Ülikool  
Ants Remm – Tartu Ülikool ja ETH Zürich  
Ardi Loot – Tartu Ülikool  
Eero Vaher – Tartu Ülikool ja Leideni Ülikool  
Erkki Tempel – Eesti Füüsika Selts ja Pärnu Sütevaka Humanitaargümnaasium  
Hans Daniel Kaimre – Tartu Ülikool  
Jaan Kalda – Tallinna Tehnikaülikool  
Jaan Toots – Cambridge'i Ülikool ja Oxfordi Ülikool  
Jonatan Kalmus – Tallinna Tehnikaülikool  
Joonas Kalda – Cambridge'i Ülikool  
Kaur Aare Saar – Cambridge'i Ülikool ja Oxfordi Ülikool  
Koit Timpmann – Tartu Ülikool  
Kristian Kuppert – Tartu Ülikool  
Madis Ollikainen – Tartu Ülikool ja ETH Zürich  
Mihkel Heidelberg – Tartu Ülikool ja Tallinna Tehnikaülikool  
Mihkel Kree – Marseille' Ülikool ja Tartu Ülikool  
Mihkel Pajusalu – Tartu Ülikool ja Massachusettsi Tehnoloogiainstituut  
Mihkel Rähn – Tartu Ülikool  
Moorits Mihkel Muru – Tartu Ülikool  
Oleg Košik – Tartu Ülikool  
Rasmus Kisel – Cambridge'i Ülikool  
Roland Matt – Tartu Ülikool ja ETH Zürich  
Sandra Schumann – Harvardi Ülikool ja Tartu Ülikool  
Siim Ainsaar – Tartu Ülikool ja Tallinna Tehnikaülikool  
Stanislav Zavjalov – Oxfordi Ülikool  
Taavet Kalda – Oxfordi Ülikool  
Taavi Pungas – Cambridge'i Ülikool ja Tartu Ülikool  
Taivo Pungas – ETH Zürich  
Tanel Kiis – Tartu Ülikool  
Valter Kiisk – Tartu Ülikool