

Autor: Imię i nazwisko

# Metody numeryczne w technice

(kierunek informatyka)

## Projekt 1

### Metody Rungego-Kutty

Napisać procedury realizujące algorytmy metod Rungego-Kutty rzędu trzeciego i rzędu czwartego (argumenty:  $f$ ,  $x_0$ ,  $y_0$ ,  $h$ ,  $n$ ).

Korzystając z napisanych procedur wyznaczyć rozwiązanie przybliżone zagadnienia początkowego:

$$\begin{cases} y'(x) = \frac{x y(x) - y^2(x)}{x^2}, \\ y(1) = 2. \end{cases}$$

Obliczenia wykonać dla 20 kroków o długości 0.1.

Na wspólnym rysunku wykreślić rozwiązanie dokładne oraz uzyskane rozwiązania przybliżone. Wykreślić także, na jednym rysunku, błędy uzyskanych rozwiązań przybliżonych.

## Rozwiązanie

In[1]:= (\*Metoda Rungego - Kutty rzędu 3-go\*)

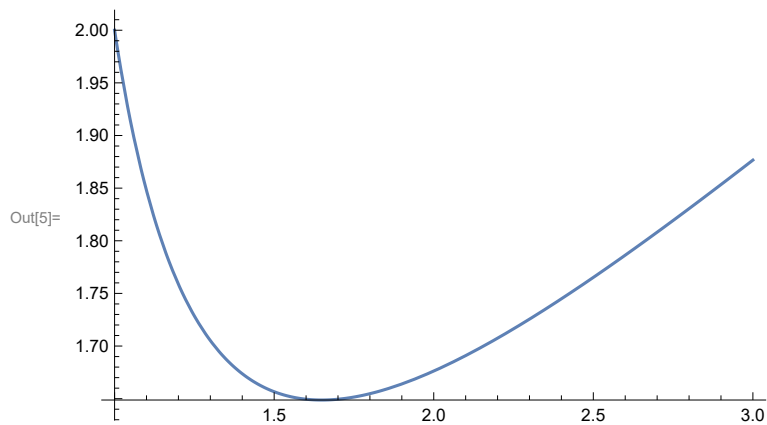
(\* Rozwiązanie dokładne \*)

roz = DSolve[{y'[x] ==  $\frac{x * y[x] - (y[x])^2}{x^2}$ , y[1] == 2}, y[x], x]

[rozwiązywanie równań różniczkowych]

Out[1]:=  $\left\{ \left\{ y[x] \rightarrow \frac{2x}{1 + 2 \log[x]} \right\} \right\}$

```
In[5]:= pdok = Plot[roz[[1, 1, 2]], {x, 1, 3}, PlotRange -> All]
```



In[29]: (\*Metoda aproksymacji  
Rungiego – Kutty rzędu 3-go\*)

```
Clear [metodaRK3] ;
```

wyczyść

```
metodaRK3[f_, x0_, y0_, h_, n_] := Module[{xw, yw, k1, k2, k3, wynik},
```

```
xw = Table[x0 + i * h, {i, 0, n}];
```



```
yw = Table[0, {i, 0, n}];
```



```
yw[[1]] = y0;
```

**Do [**

Lrób

```
k1 = f[xw[[i]], yw[[i]]];
```

```
k2 = f[xw[[i]] + h / 2, yw[[i]] + h * k1 / 2];
```

```
k3 = f[xw[i + 1], yw[i] - h * k1 + 2 * h * k2];
```

$$y_w[i+1] = y_w[i] + h / 6 * (k1 + 4 k2 + k3),$$

```
{i, 1, n}];
```

```
wynik = Transpose[{xw, yw}];
```

transpozycja

Return [wynik]

**L**zwóć

1

(\* Obliczenia \*)

```
In[31]:= f[x_, y_] :=  $\frac{x * y - y^2}{x^2}$ ;
```

```
x0 = 1;
```

```
y0 = 2;
```

```
h = 0.1;
```

```
n = 20;
```

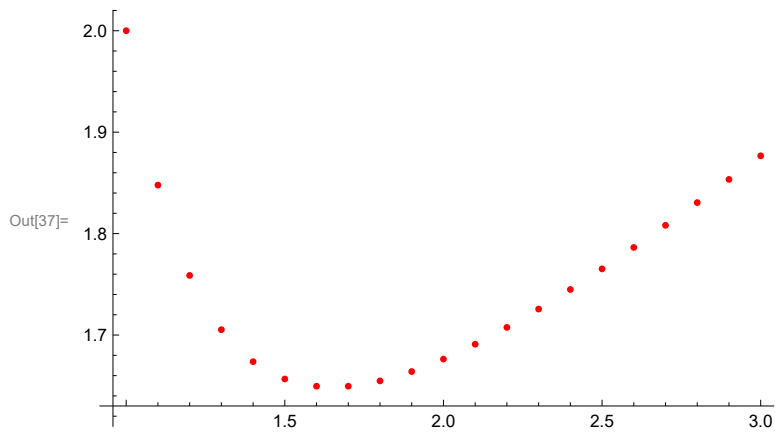
```
(* Rozwiązanie przykładu metodą Rungiego - Kuty rzędu 3 *)
```

```
wynik3 = metodaRK3[f, x0, y0, h, n]
```

```
Out[36]= {{1., 2.}, {1.1, 1.84781}, {1.2, 1.75876}, {1.3, 1.70529}, {1.4, 1.67376}, {1.5, 1.65667},  
{1.6, 1.64954}, {1.7, 1.64954}, {1.8, 1.6548}, {1.9, 1.66402}, {2., 1.6763},  
{2.1, 1.69096}, {2.2, 1.70752}, {2.3, 1.7256}, {2.4, 1.74491}, {2.5, 1.76523},  
{2.6, 1.78637}, {2.7, 1.80819}, {2.8, 1.83057}, {2.9, 1.85343}, {3., 1.87668}}
```

```
In[37]:= p3 = ListPlot[wynik3, PlotStyle -> {Red, PointSize -> 0.01}]
```

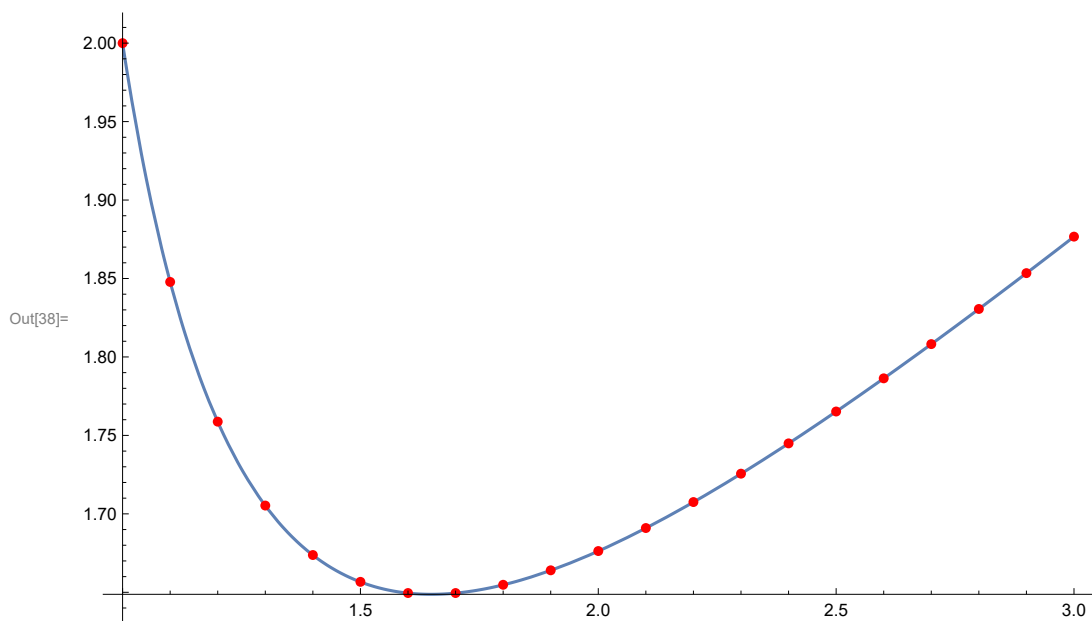
[\[wykres danych z listy\]](#) [\[styl grafiki\]](#) [\[czere...](#) [\[rozmiar kropki\]](#)



```
In[38]:= (* Wykres rozwiązania dokładnego i przybliżonego *)
```

```
Show[pdok, p3]
```

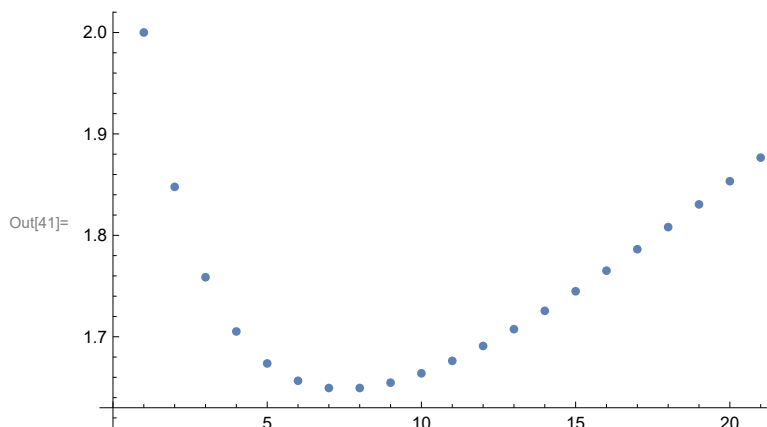
[\[pokaż\]](#)



```
In[40]:= (* Wartości rozwiązania dokładnego w węzłach siatki *)
ydok = Table[roz[[1, 1, 2]] /. {x → wynik3[[i, 1]]}, {i, 1, Length[wynik3]]]
      |tabela|          |długość|
```

```
Out[40]:= {2., 1.84778, 1.7587, 1.70522, 1.6737, 1.65661, 1.64948,
1.64948, 1.65474, 1.66396, 1.67624, 1.69091, 1.70747, 1.72555,
1.74486, 1.76517, 1.78631, 1.80813, 1.83052, 1.85338, 1.87663}
```

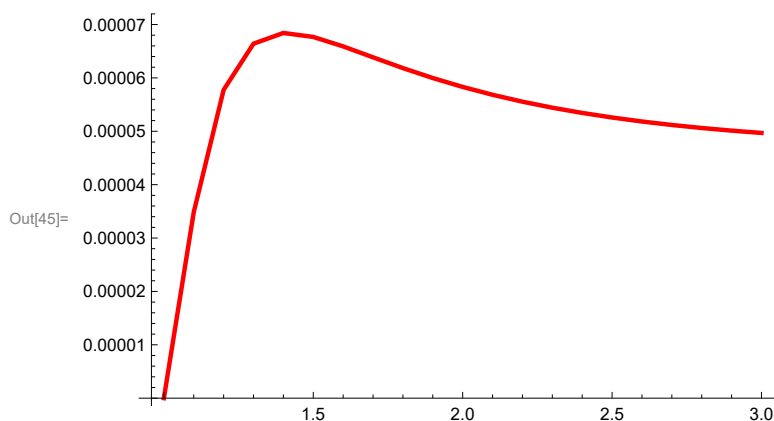
```
In[41]:= ListPlot[ydok]
      |wykres danych z listy|
```



```
In[42]:= (* Błędy w węzłach siatki *)
bledy3 = Table[{wynik3[[i, 1]], Abs[wynik3[[i, 2]] - ydok[[i]]], {i, 1, Length[wynik3]]}
      |tabela|          |wartość bezwzględna|          |długość|
```

```
Out[42]:= {{1., 0.}, {1.1, 0.0000348491}, {1.2, 0.0000577547}, {1.3, 0.0000664135},
{1.4, 0.0000684173}, {1.5, 0.0000676717}, {1.6, 0.0000659031},
{1.7, 0.0000638544}, {1.8, 0.0000618383}, {1.9, 0.0000599772},
{2., 0.0000583096}, {2.1, 0.0000568373}, {2.2, 0.0000555468}, {2.3, 0.0000544198},
{2.4, 0.0000534368}, {2.5, 0.00005258}, {2.6, 0.000051833}, {2.7, 0.0000511818},
{2.8, 0.0000506141}, {2.9, 0.0000501194}, {3., 0.0000496887}}
```

```
In[45]:= wb3 = ListPlot[bledy3, Joined → True, PlotStyle → {Red, Thickness → 0.007}]
      |wykres danych z listy| |połączone| |prawda| |styl grafiki| |czerwień| |grubość|
```



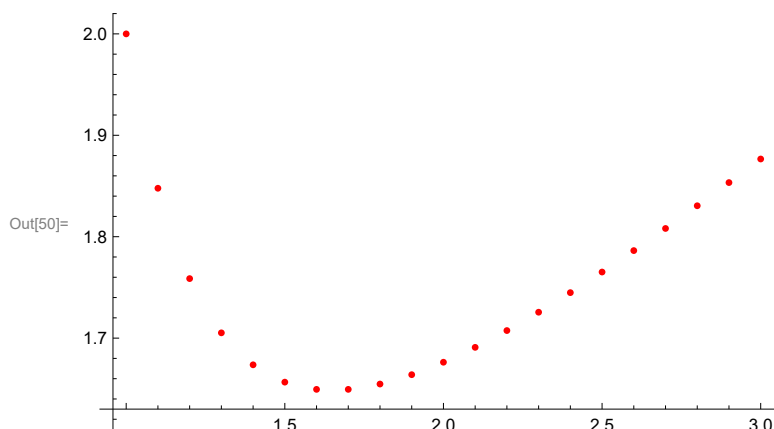
# (\*Metoda aproxymacji Rungiego – Kutty rzędu 3-go\*)

```
In[46]:= metodaRK4[f_, x0_, y0_, h_, n_] := Module[{xw, yw, k1, k2, k3, , k4, wynik},
  |moduł
  xw = Table[x0 + i * h, {i, 0, n}];
  |tabela
  yw = Table[0, {i, 0, n}];
  |tabela
  yw[[1]] = y0;
  Do[
    |rób
    k1 = f[xw[[i]], yw[[i]]];
    k2 = f[xw[[i]] + h / 2, yw[[i]] + h * k1 / 2];
    k3 = f[xw[[i]] + h / 2, yw[[i]] + h * k2 / 2];
    k4 = f[xw[[i + 1]], yw[[i]] + h * k3];
    yw[[i + 1]] = yw[[i]] + h / 6 * (k1 + 2 k2 + 2 k3 + k4),
    {i, 1, n}];
  wynik = Transpose[{xw, yw}];
  |transpozycja
  Return[wynik]
  |zwróć
]
```

```
In[52]:= wynik4 = metodaRK4[f, x0, y0, h, n]
```

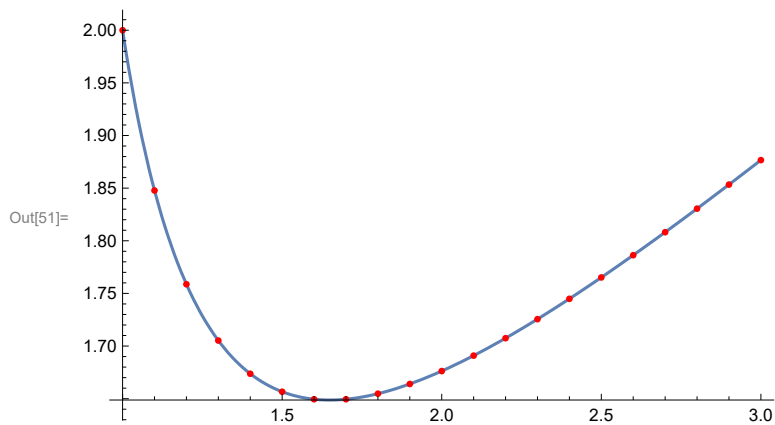
```
Out[52]= {{1., 2}, {1.1, 1.84777}, {1.2, 1.75869}, {1.3, 1.70521}, {1.4, 1.67369}, {1.5, 1.6566},
{1.6, 1.64947}, {1.7, 1.64947}, {1.8, 1.65473}, {1.9, 1.66395}, {2., 1.67623},
{2.1, 1.6909}, {2.2, 1.70746}, {2.3, 1.72554}, {2.4, 1.74485}, {2.5, 1.76517},
{2.6, 1.78631}, {2.7, 1.80813}, {2.8, 1.83052}, {2.9, 1.85337}, {3., 1.87662}}
```

```
In[50]:= p3 = ListPlot[wynik3, PlotStyle -> {Red, PointSize -> 0.01}]
|wykres danych z listy |styl grafiki |cze... |rozmiar kropki
```



In[51]:= Show[pdok, p3]

[pokaż](#)



In[53]:= bledy4 = Table[{wynik4[[i, 1]], Abs[wynik4[[i, 2]] - ydok[[i]]], {i, 1, Length[wynik4]}}

[tabela](#)

[wartość bezwzględna](#)

[długość](#)

Out[53]= {{1., 0.}, {1.1,  $9.0154 \times 10^{-6}$ }, {1.2,  $9.92737 \times 10^{-6}$ }, {1.3,  $9.45313 \times 10^{-6}$ },  
 {1.4,  $8.79684 \times 10^{-6}$ }, {1.5,  $8.20053 \times 10^{-6}$ }, {1.6,  $7.70183 \times 10^{-6}$ },  
 {1.7,  $7.29277 \times 10^{-6}$ }, {1.8,  $6.95742 \times 10^{-6}$ }, {1.9,  $6.68094 \times 10^{-6}$ },  
 {2.,  $6.45126 \times 10^{-6}$ }, {2.1,  $6.25901 \times 10^{-6}$ }, {2.2,  $6.09694 \times 10^{-6}$ }, {2.3,  $5.95945 \times 10^{-6}$ },  
 {2.4,  $5.84218 \times 10^{-6}$ }, {2.5,  $5.7417 \times 10^{-6}$ }, {2.6,  $5.6553 \times 10^{-6}$ }, {2.7,  $5.58078 \times 10^{-6}$ },  
 {2.8,  $5.51638 \times 10^{-6}$ }, {2.9,  $5.46066 \times 10^{-6}$ }, {3.,  $5.41243 \times 10^{-6}$ }}

In[57]:= wb4 = ListPlot[bledy4, Joined → True, PlotStyle → {Green, Thickness → 0.007}]

[wykres danych z listy](#)

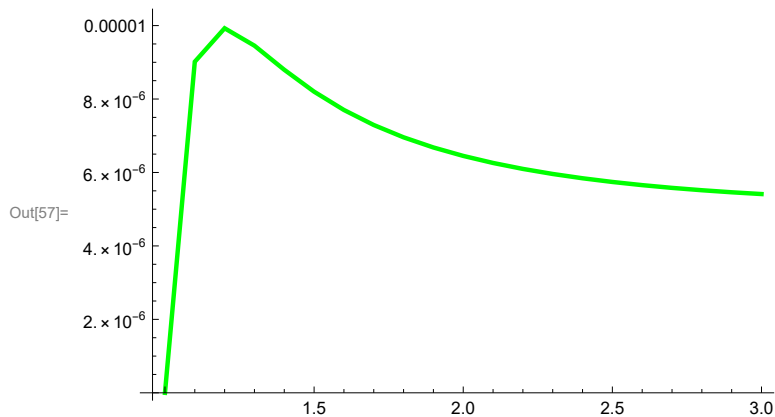
[połączone](#)

[prawda](#)

[styl grafiki](#)

[zielony](#)

[grubość](#)



In[58]:= Show[wb3, wb4]

[pokaż](#)

