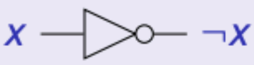
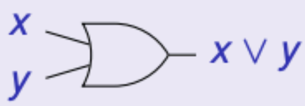
Négation — NOT

x	$\neg x$
0	1
1	0



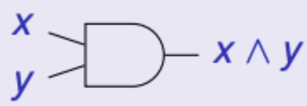
Disjonction — OR

x	y	$x \vee y$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1



Conjonction — AND

x	y	$x \wedge y$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1



Ou exclusif — XOR

x	y	$x \oplus y$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Conn. de Peirce — NOR

x	y	$x \downarrow y$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

Conn. de Sheffer — NAND

x	y	$x \uparrow y$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Représentation en norme IEEE-754 d'un nombre flottant

Chaque nombre réel x peut s'écrire sous la forme: $x = (-1)^{signe} \times 1, mantisse \times 2^{décalage}$
De plus $exposant = décalage + 2^{k-1} - 1$, où k est le nombre de bits pour l'exposant.

- **<u>Exemple:</u>** Convertir le nombre réel -1039 en binaire norme IEEE-754 en simple précision.
- **Le nombre est négatif** donc le bit de signe est 1.
- **La mantisse** :
  - On convertit en binaire le nombre 1039 : $(1039)_{10} = (0000010000001111,)_2$
  - On décale la virgule : $(0000010000001111,)_2 = (1,0000001111)_2 \times 2^{10}$.
  - La mantisse est $m = 0000001111$(on complète par des 0 pour avoir les 23 bits).
  - Le décalage est 10.
- **L'exposant** : sur k bits on a $exposant = décalage + 2^{k-1} - 1$:
  - On est en simple précision donc $k = 8$
  - $exposant = 10 + 2^{8-1} - 1 = 137$
  - On convertit 137 en binaire: $(137)_{10} = (10001001)_2$ donc $exposant = 10001001$

1	1 0 0 0 1 0 0 1	0 0 0 0 0 0 1 1 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
s	Exposant (8 bits)	Mantisse (23 bits)

- On peut également convertir en hexadécimal en regroupant les bits par 4: C4 81 E0 00

Donner la représentation binaire en virgule flottante, en simple précision, du nombre $-165,25$.

Représentation en norme IEEE-754 d'un nombre flottant

Exemple: On considère le nombre ci-dessous en binaire norme IEEE-754 en simple précision:

0	1 0 0 0 0 1 0 0	0 1 1 0 0 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
s	Exposant (8 bits)	Mantisse (23 bits)

Convertir ce nombre en décimal

- **Le bit de signe** est 0 donc le nombre est positif
- **L'exposant** : sur k bits, on a $exposant = décalage + 2^{k-1} - 1$:
  - On est en simple précision donc $k = 8$
  - On convertit l'exposant en décimal: $(10000100)_2 = (132)_{10}$
  - $132 = décalage + 2^{8-1} - 1 \iff 132 = décalage + 128 - 1 \iff décalage = 5$
- **La mantisse** :
  - Le décalage est 5.
  - La mantisse est $m = 01100110$.
  - On décale la virgule: $(1,01100110)_2 \times 2^5 = (101100,110)_2$.
  - On convertit en décimal le nombre:
    $(101100,110)_2 = 1 \times 2^5 + 1 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 1 \times 2^{-2} + 1 \times 2^{-2} = 44,75$

Donc ce nombre est égal à $+44,75$

Comment l'appliquer [modifier | modifier le code]

Pour la multiplication [modifier | modifier le code]

Supposons qu'on ait calculé 17 × 35. On remplace 17 par la somme de ses chiffres : 1 + 7 = 8, de même pour 35, remplacé par 3 + 5 = 8. Le résultat de 17 × 35 devrait avoir pour somme de ses chiffres la même que 8 × 8 = 64, soit 6 + 4 = 10, lui-même remplacé par 1 + 0 = 1.

La preuve par neuf appliquée au produit 17 × 35 s'applique ainsi : on calcule la somme des chiffres du résultat trouvé. Dans cet exemple, si cette somme est différente de 1, le calcul est faux. Si elle est égale à 1, il *peut* être juste.

Effectivement 17 × 35 = 595, or 5 + 9 + 5 = 19 et 1 + 9 = 10, lui-même remplacé par 1 + 0 = 1.

Pour l'addition [modifier | modifier le code]

La preuve par neuf fonctionne également pour vérifier le résultat d'une addition, il convient alors d'additionner les deux sommes des chiffres.

Supposons qu'on ait calculé 36994 + 99363. On remplace 36994 par la somme de ses chiffres : 3 + 6 + 9 + 9 + 4 = 31, lui-même remplacé par 3 + 1 = 4, de même pour 99363, remplacé par 9 + 9 + 3 + 6 + 3 = 30, lui-même remplacé par 3 + 0 = 3. Le résultat de 36994 + 99363 devrait avoir pour somme de ses chiffres la même que la somme 4 + 3 = 7.

La preuve par neuf appliquée à la somme 36994 + 99363 s'applique ainsi : on calcule la somme des chiffres du résultat trouvé. Dans cet exemple, si cette somme est différente de 7, le calcul est faux. Si elle est égale à 7, il *peut* être juste.

Effectivement 36994 + 99363 = 136357, or 1 + 3 + 6 + 3 + 5 + 7 = 25, lui-même remplacé par 2 + 5 = 7.

Astuces de calcul [modifier | modifier le code]

Comme 9 est congru à 0 modulo 9 (c.a.d. : 9 ≡ 0[9]), ces deux chiffres jouent le même rôle dans la preuve par neuf : on peut donc remplacer les 9 par des 0, ce qui revient à omettre les 9 dans les calculs des sommes des chiffres. Par exemple, le nombre 1999999992 sera, après plusieurs itérations, remplacé par la somme 1+2.

Lorsqu'on calcule la somme des chiffres, il est astucieux de regrouper ceux dont la somme donne 9, pour ensuite remplacer ce 9 par 0. Par exemple : 1+7+3+8+2 = (1+8)+(7+2)+3 donnera 3.

Preuve par onze [modifier | modifier le code]

Une technique similaire et moins connue est la *preuve par onze*, basée sur le fait que $10^n \equiv (-1)^n \pmod{11}$.

On remplace ici chaque nombre par la somme alternée de ses chiffres, formée en partant de la droite : 43726 devient 6-2+7-3+4=12 qui devient 2-1=1 ; de fait, 43726 = 11*3975 + 1.

Si le résultat brut est négatif, on ajoute 11 autant de fois que nécessaire pour se ramener entre 0 et 10. Pour un nombre comme 182, on obtient d'abord 2-8+1 = -5, finalement congru à 11-5 = 6 modulo 11.

La preuve par onze appliquée au produit 17×35 se déroule ainsi :

- à 17 on associe 7-1 = 6
- à 35 on associe 5-3 = 2
- au produit $6 \times 2 = 12$ est associé 2-1 = 1;
- par ailleurs, à $17 \times 35 = 595$ est associé 5-9+5 = 10-9 = 1.

Du fait de la concordance, le produit 595 est présumé juste (à un multiple de 11 près).

La *preuve par onze*, ou *preuve des comptables*, ne laisse passer que les rares permutations entre chiffres ayant des rangs de même parité : 43 726 est confondu avec 43 627 mais pas avec 43 762.

La combinaison de ces preuves par 9 et par 11 redonne la preuve par 99.