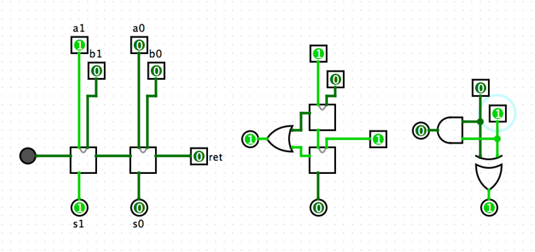
Principes de fonctionnement des machines binaires

2022–2023

Matthieu Picantin

- numération et arithmétique
- numération et arithmétique en machine
- codes, codages, compression, crypto
- contrôle d'erreur (détection, correction)
- logique et calcul propositionnel
- circuits numériques



(si) on manipule rarement les très très très graaaaaaaaaands nombres
(si) on manipule rarement les nombres avec une graaaaande précision

Choix de fixer la taille des représentations

- architectures communes 32 ou 64 bits: arithmétique sur des nombres représentés sur 32 ou 64 bits

$$2^{32} \sim 4,3 \times 10^{9} \qquad 2^{64} \sim 18,4 \times 10^{18}$$

- une infinité de choix pour représenter des réels!

Normes IEEE 754 `binary32`

$$\begin{array}{ccccc}
\boxed{1} & & \boxed{11000110} & & \boxed{10010011110000111000000} \\
s & & e & & m \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
(-1)^{s} & \times & 2^{e-B} & \times & 1 \bullet m \\
(-1)^{1} & \times & 2^{198-127} & \times & 1.10010011110000111000000_2
\end{array}$$

environ $-3.7240626.10^{21}$

Normes IEEE 754 — binary32

$$\boxed{1} \quad \boxed{11000110} \quad \boxed{10010011110000111000000}$$

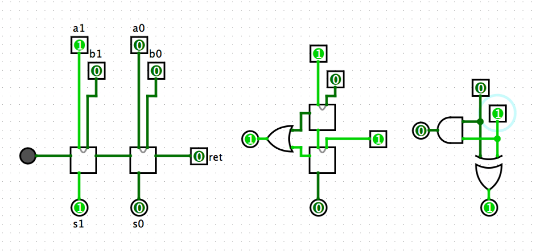
$$\begin{array}{ccccc} s & & e & & m \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ (-1)^s & \times & 2^{e-B} & \times & 1 \bullet m \\ (-1)^1 & \times & 2^{198-127} & \times & 1.10010011110000111000000_2 \end{array}$$

environ $-3.7240626.10^{21}$

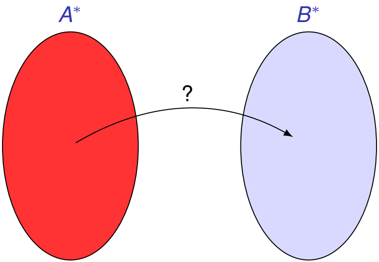
- pour $0 < e < e_{max}$, nombre normal de valeur $(-1)^s \times 1.m \times 2^{e-B}$
- pour $e = 0$, nombre dénormalisé de valeur $(-1)^s \times 0.m \times 2^{1-B}$
- pour $e = e_{max}$ et $m = 0$, deux valeurs $-\infty$ et $+\infty$
- pour $e = e_{max}$ et $m \neq 0$, valeur indéterminée `NaN` (Not-a-Number)

- mode arrondi au plus près (mode par défaut)
- mode arrondi vers zéro
- mode arrondi vers plus l'infini
- mode arrondi vers moins l'infini

- numération et arithmétique
- numération et arithmétique en machine
- codes, codages, compression, crypto
- contrôle d'erreur (détection, correction)
- logique et calcul propositionnel
- circuits numériques



Comment passer d'une représentation par des mots sur un alphabet donné A
en une représentation par des mots sur un alphabet donné B ?

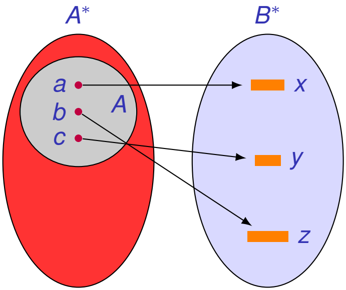


- représenter des objets dans un système numérique (codage)
- économiser de l'espace / de la bande passante (compression)
- résister aux altérations, pertes ou mutations (contrôle d'erreur)
- rendre illisibles aux non-initiés des données (cryptographie)

Comment passer d'une représentation par des mots sur un alphabet donné A
en une représentation par des mots sur un alphabet donné B ?

- Alphabet de n lettres:
  $\Sigma = \{a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}\}$
- Mot: suite finie de lettres
  $m = m_0 m_1 \cdots m_{\ell-1}$ avec $m_i \in \Sigma$
  - ℓ: longueur $|m|$ du mot m
- Langage Σ^*: l'ensemble des mots pouvant être écrits sur Σ
  - tous les mots de longueur 0
  - tous les mots de longueur 1
  - tous les mots de longueur 2
  - ...

- Alphabet de 3 lettres:
  $$\{a, b, c\}$$
- Mot: par exemple
  $$w = aba^3b^2cbac \in \{a, b, c\}^{11}$$
  (de longueur $|w| = 11$)
- Langage $\{a, b, c\}^*$: l'ensemble des mots sur l'alphabet $\{a, b, c\}$
  $$\{\varepsilon,$$
  $$a, b, c,$$
  $$aa, ab, ac, ba, bb, bc, ca, cb, cc,$$
  $$\ldots\}$$



On définit un codage des lettres de A en des mots de B^* à l'aide d'une fonction $\tau : A \to B^*$.

Le codage par τ d'un mot $m = m_0 m_1 \cdots m_{\ell-1}$ de A^* consiste alors à coder chaque lettre et à concaténer les codages dans l'ordre:

$$\tau(m) = \tau(m_0)\tau(m_1)\cdots\tau(m_{\ell-1}).$$

(τ est alors un morphisme de A^* dans B^*)

On doit pouvoir retrouver le mot originel: le morphisme τ doit être injectif !

Autrement dit, l'ensemble $\mathcal{C} = \tau(A) = \{ ▬, ▬, ▬ \}$ doit être un code:

tout mot de $\mathcal{C}^*$ doit se décomposer d'une seule façon sur $\mathcal{C}$.

Exemples avec $A = \{a, b, c\}$ et $B = \{0, 1\}$

$$\begin{cases} \tau_1(a) = 00 \\ \tau_1(b) = 11 \\ \tau_1(c) = 111110 \end{cases}$$

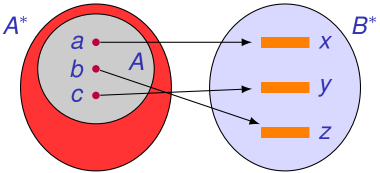
τ_1 définit bien un codage

$\Leftrightarrow \mathcal{C}_1 = \{00, 11, 111110\}$ est un code.

$$\begin{cases} \tau_2(a) = 0 \\ \tau_2(b) = 01 \\ \tau_2(c) = 10 \end{cases}$$

τ_2 ne définit pas un codage

quid de 010: est-ce 0 10 ou 01 0?



- Si les images des lettres de A par τ sont toutes d'une même longueur k, le code $\tau(A)$ est dit de longueur fixe

$$\exists k : \tau(A) \subseteq B^k$$

- Il faut/suffit d'avoir $k \geq \log_{|B|}(|A|)$ pour coder A sur B^* (puis coder A^* sur B^*)

• $A = \{a, b, c\}$ et $B = \{0, 1\}$ donnent $k \geq 2$, par exemple $\begin{cases} \tau_3(a) = 00 \\ \tau_3(b) = 01 \\ \tau_3(c) = 10 \end{cases}$

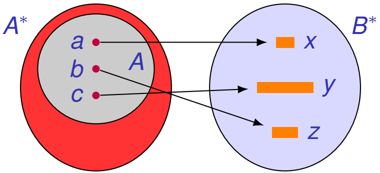
• $A = \{a, b, \ldots, z\}$ et $B = \{0, 1\}$ donnent $k \geq 5$, par exemple $\begin{cases} \tau_4(a) = 00000 \\ \quad\vdots \\ \tau_4(z) = 11001 \end{cases}$

• $A = \{A, B, \ldots, Z, a, b, \ldots, z, 0, 1, \ldots, 9\}$ et $B = \{0, 1\}$ donnent $k \geq 6$, etc.

- Le décodage est facile à partir du découpage du mot image en blocs de k lettres

• $0100001000 = 01\ 00\ 00\ 10\ 00$ est le codage par τ_3 de *baaca*
• $0100001000 = 01000\ 01000$ est le codage par τ_4 de *hh*

- Si les images des lettres de A par τ ne sont pas toutes de même longueur, le code $\tau(A)$ est de longueur variable



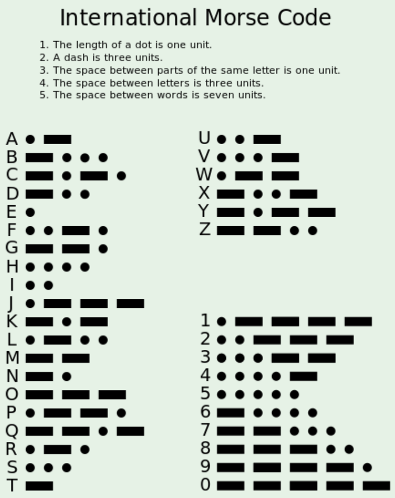
- Ces codes sont utiles si la fréquence des symboles de A n'est pas uniforme
- Ces codes sont en général plus difficiles à construire et/ou à décoder
- Parmi eux, les codes préfixes sont les plus faciles à construire et à décoder

Un code préfixe est un code dans lequel aucun mot n'est le préfixe d'un autre mot

Un codage préfixe est un codage pour lequel aucune image d'une lettre n'est le préfixe de l'image d'une autre lettre

$\{0, 10, 110, 1110\}$ est un exemple de code préfixe
$\{0, 01, 011, 0111\}$ n'est pas un code préfixe (mais un code suffixe!)

Exemple de code de longueur variable



Exemple de code de longueur fixe

ASCII étendu

ISO/CEI 8859-15																
	x0	x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	x8	x9	xA	xB	xC	xD	xE	xF
0x	*non utilisé*															
1x																
2x		!	"	#	$	%	&	'	(	)	*	+	,	-	.	/
3x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	:	;	<	=	>	?
4x	@	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O
5x	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	[	\	]	^	_
6x	`	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	o
7x	p	q	r	s	t	u	v	w	x	y	z	{	|	}	~	
8x	*non utilisé*															
9x																
Ax		¡	¢	£	€	¥	Š	§	š	©	ª	«	¬		®	¯
Bx	°	±	²	³	Ž	µ	¶	·	ž	¹	º	»	Œ	œ	Ÿ	¿
Cx	À	Á	Â	Ã	Ä	Å	Æ	Ç	È	É	Ê	Ë	Ì	Í	Î	Ï
Dx	Ð	Ñ	Ò	Ó	Ô	Õ	Ö	×	Ø	Ù	Ú	Û	Ü	Ý	Þ	ß
Ex	à	á	â	ã	ä	å	æ	ç	è	é	ê	ë	ì	í	î	ï
Fx	ð	ñ	ò	ó	ô	õ	ö	÷	ø	ù	ú	û	ü	ý	þ	ÿ

Un code compresseur permet d'obtenir une représentation plus compacte

- en vue de transmission (économie de bande passante)
- en vue de stockage (économie d'espace)

Compression **conservative** ou **sans perte**: le message originel peut être reconstruit à l'identique en inversant la fonction

- ce type de compression est recherché avec du texte par exemple

Compression **non conservative** ou **avec perte**: le message originel n'est pas reconstruit à l'identique, mais un message similaire est obtenu à l'inversion

- souvent le cas des images et des sons : il n'est pas nécessaire que des détails quasi-invisibles-sensibles soient conservés ou transmis
- cette compression permet d'obtenir de très bons taux de compression

Quotient de compression

- $q = \text{volume initial}/\text{volume final}$

  plus une compression sera forte,

  plus le quotient de compression sera lui aussi élevé

Taux de compression

- $\tau = \text{volume final}/\text{volume initial}$ $\left(\tau = \dfrac{1}{q}\right)$

  plus ce taux de compression est faible,

  plus la taille du fichier compressé résultant est faible

- $\tau = 1 - \text{volume final}/\text{volume initial}$ $\left(\tau = 1 - \dfrac{1}{q}\right)$

  plus ce taux de compression est élevé,

  plus la taille du fichier compressé résultant est faible

Coder avec des mots courts (*resp.* longs)
les lettres les plus fréquentes (*resp.* rares)

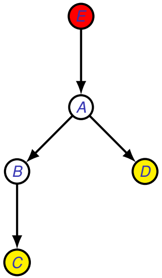
- Alphabet $\{a, b, c\}$ avec a très fréquente, b moyennement et c rare
- On peut utiliser $\tau_5(a) = 0$, $\tau_5(b) = 10$ et $\tau_5(c) = 11$
  - Ainsi $\tau_5(aaabaaabbaaaac) = 000100001010000011$, soit 18 bits
  - Un codage de longueur fixe (disons 2 bits/caractère) aurait donné 28 bits

Lettre	Fréquence	Lettre	Fréquence
e	12,10	p	2,49
a	7,11	g	1,23
i	6,59	b	1,14
s	6,51	v	1,11
n	6,39	h	1,11
r	6,07	f	1,11
t	5,92	q	0,65
o	5,02	y	0,46
l	4,96	x	0,38
u	4,49	j	0,34
d	3,67	k	0,29
c	3,18	w	0,17
m	2,62	z	0,15

Fréquence des caractères dans Wikipédia en français

Coder avec des mots courts (*resp.* longs)
les lettres les plus fréquentes (*resp.* rares)

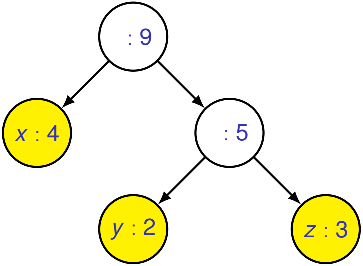
- Comment obtenir un codage à partir des fréquences des lettres ?
- On construit un arbre: c'est une structure constituée de nœuds
  - un nœud permet de désigner d'autres nœuds
  - un nœud qui ne désigne rien est une feuille
  - un nœud non désigné est appelé racine



- A, B, C, D, E : nœuds
- E désigne A, A désigne B et D, B désigne C
- E : racine
- C, D : feuilles

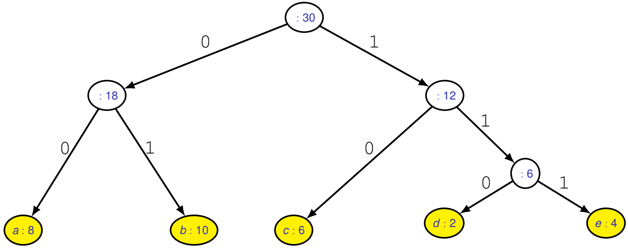
Coder avec des mots courts (*resp.* longs)
les lettres les plus fréquentes (*resp.* rares)

- Comment obtenir un codage à partir des fréquences des lettres ?
- On construit un arbre, ici de sorte que
  - chaque feuille porte une lettre et sa fréquence associée
    (ou son nombre d'occurrences)
  - chaque nœud porte la somme des fréquences des nœuds qu'il désigne



Coder avec des mots courts (*resp.* longs)
les lettres les plus fréquentes (*resp.* rares)

- Comment obtenir un codage à partir des fréquences des lettres ?
- On construit un arbre de Huffman, selon l'algorithme:
  - on part de la forêt des arbres réduits à de simples feuilles (portant chacune une lettre pondérée par sa fréquence)
  - tant qu'il reste au moins deux arbres (dans la forêt),
    on sélectionne deux arbres dont les fréquences des racines sont les plus petites
    on construit un arbre dont le nœud racine désigne les deux arbres sélectionnés
    et dont la fréquence est simplement la somme des fréquences



  - on étiquette chaque paire de branche l'une par `0` (gauche) et l'autre par `1` (droite)