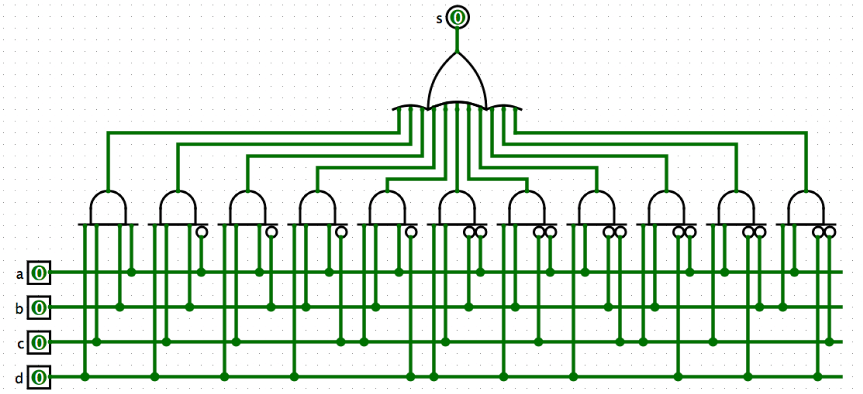
PF1 — Principes de Fonctionnement des Machines Binaires — 2022–2023

Semaines 11 & 12 – Circuits – TD/TP

Exercice 1 Soit le circuit suivant dont les entrées sont notées a, b, c et d et dont la sortie est notée s.



1. Donner une formule exprimant la fonction booléenne calculée par ce circuit.
2. Construire un tableau de Karnaugh pour cette fonction.
3. Simplifier la formule à l'aide du tableau de Karnaugh.
4. En déduire un circuit simplifié n'utilisant que des portes à deux entrées.

Exercice 2 On cherche à modéliser le système de contrôle de feux de circulation tricolores. On rappelle que tout feu possède trois lampes : une verte, une orange, une rouge. D'autre part, un feu passe de vert à orange, d'orange à rouge puis de rouge à vert. À un carrefour, on a des feux F_1 et F_2 synchronisés selon une horloge t, qui fournit au cours du temps et successivement seize valeurs (les entiers de 0 à 15) en bouclant indéfiniment : `0`, `1`, ..., `15`, `0`, `1`, ... Ces valeurs sont représentées sur quatre bits $t_3t_2t_1t_0$.
Le feu F_1 est rouge (prédicat que l'on note R_1) pour toutes les valeurs d'horloge dans l'intervalle $[0, 7]$, vert dans l'intervalle $[8, 13]$ (prédicat V_1) et orange dans l'intervalle $[14, 15]$ (prédicat O_1).
Le feu F_2 est vert dans l'intervalle $[0, 5]$ (prédicat V_2), orange dans l'intervalle $[6, 7]$ (prédicat O_2) et rouge dans l'intervalle $[8, 15]$ (prédicat R_2).

1. Donner la table de vérité pour les prédicats V_1, O_1, R_1, V_2, O_2 et R_2 en fonction de l'horloge t.
2. En lisant simplement cette table, donner une formule simple pour les fonctions $R_1(t)$ et $R_2(t)$.
3. En utilisant la méthode de Karnaugh, donner une formule simple pour les fonctions $V_1(t)$ et $V_2(t)$.
4. Donner par une méthode au choix une formule simplifiée pour les fonctions $O_1(t)$ et $O_2(t)$.
5. Dessiner le circuit qui prend en entrée les bits de l'horloge et fournit les six fonctions des feux.

Exercice 3 Donner les expressions booléennes les plus simples possibles déduites des tables de Karnaugh ci-dessous.

J_1		cd			
		00	01	11	10
ab	00	1	0	0	1
	01	0	0	0	1
	11	$\star$	$\star$	$\star$	$\star$
	10	1	0	$\star$	$\star$

J_2		cd			
		00	01	11	10
ab	00	0	$\star$	$\star$	0
	01	1	0	$\star$	$\star$
	11	1	0	0	1
	10	0	$\star$	$\star$	0

J_3		cd			
		00	01	11	10
ab	00	0	$\star$	1	$\star$
	01	$\star$	1	0	$\star$
	11	$\star$	0	1	$\star$
	10	1	0	1	1

J_4		cd			
		00	01	11	10
ab	00	1	0	$\star$	1
	01	1	1	0	$\star$
	11	1	1	$\star$	0
	10	1	0	$\star$	$\star$

Exercice 4 On cherche à réaliser le système de contrôle d'un château d'eau qui fonctionne ainsi :

— le château possède trois détecteurs de niveau de la cuve : d_1, qui est placé plus bas que d_2, qui est placé plus bas que d_3. Si un détecteur d_k est à l'air libre, sa fonction logique D_k vaut `0`, s'il est noyé elle vaut `1`.

— le remplissage s'effectue à l'aide de trois pompes p_1, p_2 et p_3. Lorsque le niveau est strictement inférieur au détecteur d_k, il faut actionner les pompes p_j pour $j \geq k$. Lorsque le niveau dépasse celui du détecteur d_k, la pompe p_k doit être arrêtée. Une pompe p_k envoie de l'eau dans la cuve si et seulement si sa fonction logique P_k vaut `1`.

— les détecteurs sont parfois capricieux et fournissent de fausses mesures (par exemple, un détecteur en bas indique qu'il est à l'air libre alors qu'un autre plus haut indique qu'il est sous l'eau). Dans ce cas, on active un signal d'alerte A (valant `1` si et seulement si les mesures sont incohérentes) et on ferme toutes les pompes.

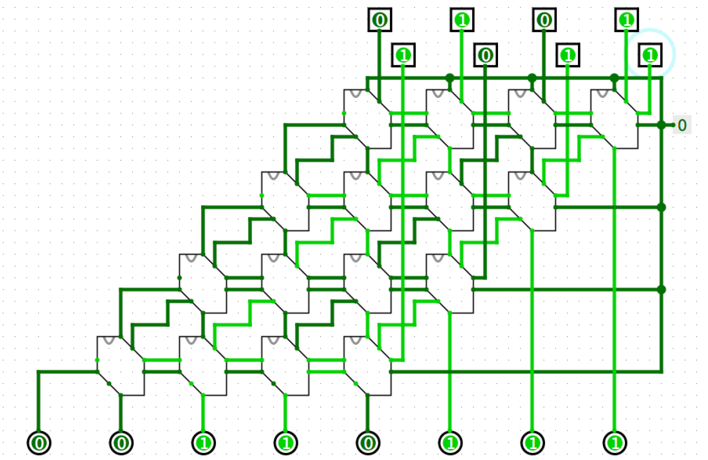
1. Fournir la table de vérité pour les fonctions logiques d'alerte $A(d_1, d_2, d_3)$ et d'alimentation de chacune des pompes $P_k(d_1, d_2, d_3)$ pour $1 \leq k \leq 3$.
2. Simplifier chacune des fonctions, en utilisant la méthode de Karnaugh si nécessaire (si ce n'est pas nécessaire, justifier).
3. Fabriquer un circuit avec les entrées correspondant aux détecteurs et les sorties correspondant à l'alerte et aux pompes en n'utilisant que des portes NON, ET et OU (avec un nombre quelconque d'entrées).
4. Fournir la table de vérité pour les fonctions logiques d'alimentation des pompes prenant en entrée la fonction d'alerte **et** les détecteurs, c'est-à-dire $P'_k(d_1, d_2, d_3, A(d_1, d_2, d_3))$.
5. Donner des formules simples pour les nouvelles fonctions P'_k d'alimentation des pompes.
6. Fabriquer un circuit correspondant (attention à bien fournir en sortie les fonctions pour les pompes mais aussi pour l'alerte) et n'utilisant que des portes NON, ET et OU à deux entrées.

Exercice 5 Reprendre les circuits `ADD1` et `ADD4` (vus en amphi 10) et les modifier pour obtenir des circuits réalisant soit l'addition soit la soustraction selon un code supplémentaire en entrée.

Exercice 6 On souhaite construire un circuit permettant de calculer la multiplication sur huit bits de deux entiers codés sur quatre bits.

1. Effectuer la multiplication en colonne des entiers `0101` et `1011` en notant tous les bits des calculs intermédiaires (même les `0` en tête), en écrivant toutes les multiplications individuelles (même celles par `0`) et en procédant aux additions le plus tôt possible (dès que deux opérandes sont disponibles).

					0	1	0
×					1	0	1
					□	□	□
			+	□	□	□	□
			□	□	□	□	□
		+	□	□	□	□	.
		□	□	□	□	□	□
	+	□	□	□	□	.	.
=	□	□	□	□	□	□	□



2. Cette façon de décomposer la multiplication permet d'isoler une opération complexe sur un bit, c'est-à-dire une combinaison d'un décalage de donnée d'un bit, d'une multiplication d'un bit par un bit et d'une addition sur un bit. Complexe mais unique, cette opération est répétée tout au long de la multiplication selon le schéma du circuit ci-dessus. Identifier les entrées et les sorties de cette cellule combinatoire de multiplication, donner sa table de vérité et construire le circuit correspondant.