Chapitre III

Polynômes

1 Généralités

Dans la suite, on note $\mathbb{K}$ à la place de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1.2 Définition

Un polynôme P à coefficients dans $\mathbb{K}$ est une expression de la forme

$$P(X) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots + a_2 X^2 + a_1 X + a_0,$$

avec $n \in \mathbb{N}$ et $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$. L'ensemble des polynômes est noté $\mathbb{K}[X]$.

- Les a_i sont appelés les coefficients du polynôme P.
- Si tous les coefficients a_i sont nuls, P est appelé le polynôme nul, il est noté 0.
- On appelle le degré de P le plus grand entier i tel que $a_i \neq 0$; on le note $\deg P$. Pour le degré du polynôme nul on pose par convention $\deg(0) = -\infty$.
- Un polynôme de la forme $P = a_0$ avec $a_0 \in \mathbb{K}$ est appelé un polynôme constant. Si $a_0 \neq 0$, son degré est 0.

Définition Soit $P = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0 \in \mathbb{K}[X]$.
Pour un élément $x \in \mathbb{K}$, on note $P(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{K}$. On associe ainsi au polynôme P une fonction polynôme (que l'on note encore P)

$$P : \mathbb{K} \to \mathbb{K}, \quad x \mapsto P(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0.$$

1.3 Opérations sur les polynômes

- **Égalité.** Soient $P = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0$ et $Q = b_n X^n + b_{n-1} X^{n-1} + \cdots + b_1 X + b_0$ deux polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$.

  $$P = Q \quad \Longleftrightarrow \quad \forall i \quad a_i = b_i$$

  et on dit que P et Q sont égaux.
- **Addition.** Soient $P = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0$ et $Q = b_n X^n + b_{n-1} X^{n-1} + \cdots + b_1 X + b_0$. On définit :

  $$P + Q = (a_n + b_n) X^n + (a_{n-1} + b_{n-1}) X^{n-1} + \cdots + (a_1 + b_1) X + (a_0 + b_0)$$

- **Multiplication.** Soient $P = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0$ et $Q = b_m X^m + b_{m-1} X^{m-1} + \cdots + b_1 X + b_0$. On définit

  $$P \times Q = c_r X^r + c_{r-1} X^{r-1} + \cdots + c_1 X + c_0$$

  $$\text{avec } r = n + m \text{ et } c_k = \sum_{i+j=k} a_i b_j \text{ pour } k \in \{0, \ldots, r\}.$$

- **Multiplication par un scalaire.** Si $\lambda \in \mathbb{K}$ alors $\lambda \cdot P$ est le polynôme dont le i-ème coefficient est λa_i.

L'addition et la multiplication des polynômes se font sans problème. En particulier elles sont commutatives. On peut aussi définir la composition de deux polynômes comme on le fait pour la composition des fonctions.

Pour le degré il faut faire attention :

Proposition

Soient P et Q deux polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$.

$$\deg(P \times Q) = \deg P + \deg Q$$

$$\deg(P + Q) \leqslant \max(\deg P, \deg Q)$$

On note $\mathbb{K}_n[X] = \{P \in \mathbb{K}[X] \mid \deg P \leqslant n\}$. Si $P, Q \in \mathbb{K}_n[X]$ alors $P + Q \in \mathbb{K}_n[X]$.

1.4 Vocabulaire

Complétons les définitions sur les polynômes.

Définition

- Les polynômes comportant un seul terme non nul (du type $a_k X^k$) sont appelés monômes.
- Soit $P = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0$, un polynôme avec $a_n \neq 0$. On appelle terme dominant le monôme $a_n X^n$. Le coefficient a_n est appelé le coefficient dominant de P.
- Si le coefficient dominant est 1, on dit que P est un polynôme unitaire.

Exemple Quel est le degré du polynôme $P(X) = (X - 1)(X^n + X^{n-1} + \cdots + X + 1)$?

Remarque Tout polynôme est donc une somme finie de monômes.

2 Division, racines, factorisation des polynômes

2.2 Division des polynômes

Définition

Soient $A, B \in \mathbb{K}[X]$, on dit que B divise A s'il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $A = BQ$. On note alors $B|A$.

On dit aussi que A est multiple de B ou que A est divisible par B.

Théorème [Division euclidienne des polynômes] (admis)

Soient $A, B \in \mathbb{K}[X]$, avec $B \neq 0$, alors il existe un unique polynôme Q et il existe un unique polynôme R tels que :

$$A = BQ + R \quad \text{et} \quad \deg R < \deg B.$$

Q est appelé le quotient et R le reste et cette écriture est la division euclidienne de A par B.

Notez que la condition $\deg R < \deg B$ signifie $R = 0$ ou bien $0 \leqslant \deg R < \deg B$.

Enfin $R = 0$ si et seulement si $B|A$.

2.3 Racines d'un polynôme

Définition

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{K}$. On dit que α est une racine (ou un zéro) de P si $P(\alpha) = 0$.

Proposition

$$P(\alpha) = 0 \quad \iff \quad (X - \alpha) \text{ divise } P$$

Définition

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On dit que α est une racine de multiplicité k de P si $(X-\alpha)^k$ divise P alors que $(X-\alpha)^{k+1}$ ne divise pas P. Lorsque $k = 1$ on parle d'une racine simple, lorsque $k = 2$ d'une racine double, etc.

On dit aussi que α est une racine d'ordre k.

2.4 Théorème de d'Alembert-Gauss

Passons à un résultat essentiel de ce chapitre. Attention, ici on distingue les propriétés pour $\mathbb{R}[X]$ et pour $\mathbb{C}[X]$:

Théorème [Théorème de d'Alembert-Gauss] (admis)

Tout polynôme à coefficients complexes (c'est-à-dire dans $\mathbb{C}[X]$) de degré $n \geqslant 1$ a au moins une racine dans $\mathbb{C}$. Il admet exactement n racines si on compte chaque racine avec multiplicité.

Nous admettons ce théorème.

Exemple Soit $P(X) = aX^2 + bX + c$ un polynôme de degré 2 à coefficients réels : $a, b, c \in \mathbb{R}$ et $a \neq 0$.

- Si $\Delta = b^2 - 4ac > 0$ alors P admet 2 racines réelles distinctes $\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$.
- Si $\Delta < 0$ alors P admet 2 racines complexes distinctes $\dfrac{-b+i\sqrt{|\Delta|}}{2a}$ et $\dfrac{-b-i\sqrt{|\Delta|}}{2a}$.
- Si $\Delta = 0$ alors P admet une racine réelle double $\dfrac{-b}{2a}$.

En tenant compte des multiplicités on a donc toujours exactement 2 racines dans $\mathbb{C}$.

Exemple $P(X) = X^n - 1$ admet n racines distinctes.

Pour les polynômes à coefficients réels, c'est-à-dire dans $\mathbb{R}[X]$, nous avons le résultat plus faible suivant :

Theoreme

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré $n \geqslant 1$. Alors P admet au plus n racines dans $\mathbb{R}$.

Exemple Trouver les racines dans $\mathbb{R}$ et dans $\mathbb{C}$ du polynôme $P(X) = 3X^3 - 2X^2 + 6X - 4$. On calculera $P(\frac{2}{3})$.

2.5 Factorisation dans $\mathbb{C}[X]$ et $\mathbb{R}[X]$

Théorème

Pour $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré $n \geqslant 1$ la factorisation dans $\mathbb{C}$ s'écrit

$$P = \lambda (X-\alpha_1)^{k_1}(X-\alpha_2)^{k_2} \cdots (X-\alpha_r)^{k_r},$$

où $\lambda \in \mathbb{C}$, les $\alpha_1, ..., \alpha_r$ sont les racines distinctes de P et $k_1, ..., k_r$ sont leurs multiplicités respectives.

Exemple Factoriser dans $\mathbb{C}[X]$ le polynôme $P(X) = X^4 + 1$.

Si le polynôme est dans $\mathbb{R}[X]$ dans le théorème précédent, les α_i sont soit réels, soit deux à deux conjugués. En regroupant les termes deux à deux conjugués, on obtient

Théorème

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré $n \geqslant 1$. Alors la factorisation s'écrit

$$P = \lambda(X - \alpha_1)^{k_1}(X - \alpha_2)^{k_2} \cdots (X - \alpha_r)^{k_r} Q_1^{\ell_1} \cdots Q_s^{\ell_s},$$

où les α_i sont exactement les racines réelles distinctes de multiplicité k_i et les Q_i sont des polynômes irréductibles de degré 2, c'est-à-dire de la forme $Q_i = X^2 + \beta_i X + \gamma_i$ avec $\Delta = \beta_i^2 - 4\gamma_i < 0$.

Exemple Factoriser dans $\mathbb{R}[X]$ le polynôme $P(X) = X^5 - X^4 + X - 1$. On remarquera une racine évidente et on utilisera la factorisation de l'exemple précédent.

Exemple Le polynôme $P(X) = 2X^4(X-1)^3(X^2+1)^2(X^2+X+1)$ est décomposé en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$. Trouver sa décomposition dans dans $\mathbb{C}[X]$.

3 Formule de Taylor pour les polynômes

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ de degré $n \geqslant 1$ et $\alpha \in \mathbb{K}$. Alors on peut écrire

$$P(X) = P(\alpha) + P'(\alpha)(X - \alpha) + \frac{P''(\alpha)}{2}(X - \alpha)^2 + \cdots \frac{P^{(n)}(\alpha)}{n!}(X - \alpha)^n.$$

Exemple Le polynôme $P(X) = X^3+5X^2+10X+10$ se réécrit $P(X) = (X+1)^3+2(X+1)^2+3(X+1)+4$.

Proposition

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. Il y a équivalence entre :

(i) α est une racine de multiplicité k de P.

(ii) Il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P = (X - \alpha)^k Q$, avec $Q(\alpha) \neq 0$.

(iii) $P(\alpha) = P'(\alpha) = \cdots = P^{(k-1)}(\alpha) = 0$ et $P^{(k)}(\alpha) \neq 0$.

Remarque pour comprendre la proposition précédente Par analogie avec la dérivée d'une fonction, si $P(X) = a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n \in \mathbb{K}[X]$ alors le polynôme $P'(X) = a_1 + 2a_2X + \cdots + na_nX^{n-1}$ est le polynôme dérivé de P.