

**Exercice 1.** *Récursion mutuelle.*

```

1 public class Parite {
2     public static boolean pair(int n) { //on suppose que n >= 0
3         if (n == 0) {
4             return true;
5         } else {
6             return impair(n - 1);
7         }
8     }
9
10    public static boolean impair(int n) { //on suppose que n >= 0
11        if (n == 0) {
12            return false;
13        } else {
14            return pair(n - 1);
15        }
16    }
17
18    public static void main(String[] args) {
19        System.out.println(pair(5));
20        System.out.println(impair(5));
21    }
22 }

```

1. Que affiche le programme ?
2. Annoter le code.
3. Décrire les classes Bloc dont vous aurez besoin et traduire le programme.
4. Décrire l'évolution de la pile d'appel (chaque push, chaque pop).
5. Que se passe-t-il si on appelle `pair(-5)` au lieu de `pair(5)` ?  
Comment pouvez-vous modifier le code pour que les fonctions `pair` et `impair` renvoient la parité d'un nombre entier arbitraire ?

**Exercice 2.** *Jeu de Nim.*

Le *jeu de Nim* (à un seul tas) est un jeu à 2 joueurs dont le principe est le suivant : partant d'un tas de  $n$  allumettes, chaque joueur doit, à son tour, retirer 1, 2 ou 3 allumettes. Celui qui retire la dernière allumette perd.

1. Soit  $G(n)$  la fonction valant `true` si le premier joueur a une stratégie gagnante lorsque le tas contient  $n$  allumettes, et `false` sinon. Exprimer récursivement  $G(n)$ .
2. Écrire une fonction récursive `gagnant(n)` qui détermine si le premier joueur a une stratégie gagnante lorsque le tas initial contient  $n$  allumettes.
3. Écrire une fonction `gagnantRapide(n)` plus efficace utilisant la technique de mémorisation.

**Exercice 3.** *Écharpes.*

La boutique du Racing92 voudrait diversifier ses écharpes pour que chaque supporter ait un exemplaire unique. Les écharpes actuelles sont rayées bleu ciel et blanc, avec 24 bandes de même largeur. Le fabricant propose, toujours sur la même longueur, d'alterner aléatoirement des bandes simples et doubles – par exemple :



1. Exprimer le nombre  $E(n)$  d'écharpes possibles pour une longueur équivalant à  $n$  bandes simples. Quelle suite reconnaissez-vous ?

Le Racing92 espère vendre plus d'écharpes que cela, sans remettre en cause leur unicité, et demande d'alterner, toujours aléatoirement, des bandes simples, doubles et triples.

2. Quelle est la relation de récurrence pour le nombre  $R(n)$  d'écharpes possibles dans ce cas ?
3. Écrire une fonction récursive `echarpesR92(n)` calculant le nombre possible d'écharpes pour une longueur totale équivalant à  $n$  bandes simples.
4. Dessiner l'arbre des appels à la fonction `echarpesR92` à partir d'un appel à `echarpesR92(6)`.
5. Utiliser la technique de mémoïsation pour écrire une fonction `echarpesR92Rapide` plus efficace.
6. Dessiner l'arbre des appels à `echarpesR92Rapide` à partir de `echarpesR92Rapide(5)`. Combien d'appels seront effectués si l'on appelle `echarpesR92Rapide(24)` ?

**Exercice 4.** *Les binomiaux, déguisés.*

Le Stade Français est vite submergé de demandes de ses supporters qui veulent eux aussi leur écharpe unique. Mais le club trouve que les écharpes du Racing92 ne respectent pas suffisamment l'équilibre des deux couleurs. Il décide donc d'opter pour une technique différente : chaque écharpe aura l'équivalent de 12 bandes (simples) marine et 12 bandes roses, sans la contrainte d'alterner systématiquement les couleurs – par exemple :



1. Écrire une relation de récurrence pour le nombre  $S(m, r)$  d'écharpes possibles avec  $m$  bandes marine et  $r$  bandes roses.
2. Écrire une fonction récursive `echarpesSF(m,r)` calculant  $S(m, r)$ .
3. Dessiner l'arbre des appels à la fonction `echarpesSF` à partir d'un appel à `echarpesSF(3,2)`.
4. Utiliser la technique de mémoïsation pour écrire une fonction `echarpesSFRapide` plus efficace.
5. Dessiner l'arbre des appels à `echarpesSFRapide` à partir de `echarpesSFRapide(3,2)`. Combien d'appels seront effectués si l'on appelle `echarpesRapide(12,12)` ?

**Exercice 5.** *Écharpes, encore.*

Certains supporters du Stade Français préfèrent les écharpes rayées marine, rose et blanc. La boutique demande donc au fabricant de créer des écharpes tricolores à 8 bandes de chaque couleur.

1. Quelle est la récurrence vérifiée par le nombre  $T(m, r, b)$  d'écharpes tricolores possibles avec  $m$  bandes marine,  $r$  bandes roses et  $b$  bandes blanches ?
2. Écrire une fonction `echarpesTricoloresRapide` calculant  $T(m, r, b)$  en utilisant la technique de mémoïsation.