Chapitre IV

Matrices

1 Motivations.

Rappelons tout d'abord ce qu'est un système linéaire :

Définition On appelle système linéaire (à n lignes et m colonnes) la donnée d'un tableau de $n \times m$ coefficients réels (notés a_{ij} où i décrit $\{1 \dots n\}$ et j décrit $\{1 \dots m\}$) et d'un second membre de n coefficients réels b_i ($i \in \{1 \dots n\}$). Résoudre ce système linéaire c'est trouver m scalaires x_j tels que

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & \dots & + & a_{1m}x_m & = & b_1 \\ \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}x_1 & + & \dots & + & a_{nm}x_m & = & b_n \end{cases} \text{ ou bien } \begin{cases} \sum_{j=1}^m a_{1j}x_j & = & b_1 \\ \vdots & & \vdots \\ \sum_{j=1}^m a_{nj}x_j & = & b_n \end{cases}.$$

On parle de système linéaire homogène lorsque tous les coefficients b_i sont nuls, c'est-à-dire, lorsque le vecteur $b = (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ est nul.

On introduit alors la notion de matrice afin de simplifier l'écriture du système linéaire.

Définition On appelle matrice (à n lignes et m colonnes) la donnée d'un tableau de $n \times m$ réels :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}.$$

Définition Soit M une matrice de n lignes et m colonnes. Soit x_i la donnée de m réels. Nous les noterons en colonne soit X (ayant m lignes). Le produit de la matrice M par la colonne X (à droite) est une matrice colonne (ayant n lignes) notée $Y = MX$ et donnée par les formules :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^m a_{1j}x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^m a_{nj}x_j \end{pmatrix}.$$

Autrement dit on multiplie une matrice M par une matrice colonne X en multipliant, ligne par ligne, chaque coefficient de M par le coefficient correspondant de la colonne X et en ajoutant tout ces produits.

Remarque Avec ces notations, le système linéaire introduit plus haut s'écrit

$$MX = B$$

où B (resp. X) est la matrice colonne (ayant n lignes) (resp. m lignes) associée au vecteur b (resp. au vecteur $(x_1, \dots, x_m)$).

Remarque On pourra aussi associer au système $MX = B$ la matrice $(M|B)$ formée en rajoutant la colonne B à la matrice M . On parle parfois de matrice "augmentée". On constatera plus bas dans cette section que cette notation est bien adaptée à l'application de la méthode de Gauss.

Remarque Ces notations et ces définitions s'étendent aisément au cas complexe.

Exemple Résoudre les deux systèmes en fonction des paramètres b_1 et b_2

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}.$$

2 Résolution de systèmes linéaires. Méthode du pivot de Gauss

Reprenons le système

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^m a_{1j}x_j & = & b_1 \\ \vdots & & \vdots \\ \sum_{j=1}^m a_{nj}x_j & = & b_n \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} a_{11}x_1 & + & \dots & + & a_{1m}x_m & = & b_1 \\ \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}x_1 & + & \dots & + & a_{nm}x_m & = & b_n \end{cases} \text{ ou } MX = B\ .$$

Définition Méthode (du pivot) de Gauss.

On peut transformer un système linéaire en un système linéaire équivalent (c'est-à-dire ayant les mêmes solutions) en

- échangeant deux équations (puisqu'il suffit de les échanger à nouveau pour retrouver le système initial) ;
- multipliant une équation par un scalaire non nul (puisqu'il suffit de multiplier cette équation par l'inverse du scalaire pour retrouver le système initial) ;
- ajouter à une équation un multiple quelconque d'une autre équation (puisqu'il suffit alors de lui retrancher ce même multiple pour revenir en arrière).

Ces opérations sont dites élémentaires.

Remarque On remarquera que ces trois opérations élémentaires sont faciles à inverser à l'aide d'opérations élémentaires (échanger deux lignes qui viennent d'être échangées permet de revenir à l'ordre initial des équations ; multiplier une équation multipliée par un scalaire non nul par l'inverse de ce scalaire non nul permet de retrouver l'équation initiale et, enfin, retrancher à l'équation à laquelle vient d'être ajouté μ-fois une autre μ-fois cette dernière permet de revenir à l'équation initiale)

Théorème La méthode (du pivot) de Gauss.

Soit $MX = B$ un système linéaire. Il est équivalent (au sens où il admet le même ensemble de solutions) à un système (toujours de n équations) dit échelonné c'est à dire de la forme

$$\begin{cases} x_{j_1} + \sum_{j>j_1}^m u'_{1j}x_j & = & b'_1 \\ \vdots & & \vdots \\ x_{j_r} + \sum_{j>j_r}^m u'_{nj}x_j & = & b'_r \\ 0 & = & b'_{r+1} \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & = & b'_n \end{cases} .$$

Les entiers $j_k,\ k = 1 \dots r$ vérifient $1 \leq j_1 < i_2 < \dots < j_r \leq m$. Les inconnues $x_{j_1}, x_{j_2}, \cdots x_{j_r}$ sont appelées inconnues principales. Les autres des inconnues secondaires. Enfin les b'_i sont des combinaisons linéaires des b_i (dont on pourra remarquer qu'elles ne font intervenir que les b_{j_k} où $k \leq r$).

Pourquoi un système linéaire échelonné est-il plus simple ? Examinons-le. Les $n - r$ dernières équations ne comportent pas de variables. On parle parfois d'équations de compatibilité. Soit tous les scalaires b'_i $(i = r + 1, \dots, n)$ sont nuls et ces équations sont trivialement vérifiées. Soit l'une d'entre elles n'est pas possible et ce système ne peut avoir de solutions. Dans le cas où les équations de compatibilité sont satisfaites, reste donc à examiner les r premières équations. On remarque que l'équation

$$x_{j_r} + \sum_{j>j_r}^m u'_{nj}x_j = b'_r$$

permet d'exprimer l'inconnue principale x_{j_r} en fonction d'un scalaire et (éventuellement) une combinaison linéaire de variables d'indice j supérieur. Plus généralement les inconnues principales $x_{j_k}(1 \leq k < r)$

s'expriment également ainsi de proche en proche, en "remontant le système", en réinjectant les expressions des variables déjà trouvées dans celle qu'on cherche. On a donc bien résolu le système échelonné, et par voie de conséquence, le système initial.

Définition

L'entier r ainsi mis en évidence s'appelle le rang du système linéaire. C'est le nombre d'inconnues principales du système. On remarquera que cet entier est nécessairement plus petit ou égal à m et à n.

Remarque On remarquera que le rang r d'un système linéaire ne dépend pas du second membre (d'après le déroulement de la méthode de Gauss). On admettra que l'entier r ne dépend pas de l'ordre des opérations élémentaires lorsqu'on applique la méthode de Gauss, et que c'est donc un invariant de la matrice M.

Remarque Les indices d'indice étant plutôt désagréables, on va supposer que $i_k = k,\ k = 1 \ldots r$ (on peut toujours le faire quitte à renuméroter les variables du système). Le système échelonné

$$\begin{cases} x_{i_1} + \sum_{j>i_1}^{m} u'_{1j}x_j & = & b'_{i_1} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{i_r} + \sum_{j>i_r}^{m} u'_{nj}x_j & = & b'_{i_r} \\ 0 & = & b'_{r+1} \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & = & b'_n \end{cases}$$

sera donc pris sous la forme :

$$\begin{cases} x_1 + \sum_{j>1}^{m} u'_{1j}x_j & = & b'_1 \\ \vdots & & \vdots \\ x_r + \sum_{j>r}^{m} u'_{nj}x_j & = & b'_r \\ 0 & = & b'_{r+1} \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & = & b'_n \end{cases}.$$

En résumé, on peut transformer un système linéaire en un système linéaire équivalent (c'est-à-dire ayant les mêmes solutions) en

- échangeant deux équations (puisqu'il suffit de les échanger à nouveau pour retrouver le système initial) ;
- multipliant une équation par un scalaire non nul (puisqu'il suffit de multiplier cette équation par l'inverse du scalaire pour retrouver le système initial) ;
- ajouter à une équation un multiple quelconque d'une autre équation (puisqu'il suffit alors de lui retrancher ce même multiple pour revenir en arrière).

Ces opérations sont dites "élémentaires". L'intérêt d'appliquer des opérations élementaires sur un système linéaire est de se ramener à un système dit "échelonné", correspondant à une matrice plus simple avec des zéros et facile à résoudre.

Exemple Etudier l'existence et les solutions du système en fonction des paramètres b_1, b_2 et b_3 réels.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & -4 & 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

On le réécrira

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & -1 & 1 & b_1 \\ -1 & 2 & -1 & 1 & b_2 \\ 2 & -4 & 3 & -1 & b_3 \end{array}\right).$$

3 Calcul matriciel

Nous allons, dans ce paragraphe, revenir sur les matrices en tant qu'objets mathématiques et donner leurs principales propriétés.

3.2 Matrices. Propriétés. Exemples

Définition On note $\mathcal{M}(n,m;\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices à n lignes et m colonnes. Lorsque $n=m$, on parle de matrice carrée de taille n (ou d'ordre n) et on en note $\mathcal{M}(n;\mathbb{R})$ l'ensemble de ces matrices.

Remarque Soit M une matrice ayant n lignes et m colonnes. Soit X une matrice ayant m lignes et une unique colonne (matrice colonne correspondant à un vecteur). On a défini dans la section précédente le produit de M par X en posant $Y = MX$ où Y est une matrice colonne ayant n lignes définie par

$$1 \le h \le n \ ; \ y_h = \sum_{j=1}^{m} a_{h,j} x_j \ .$$

Définition On appelle matrice nulle la matrice dont tous les coefficients sont nuls. On appelle matrice identité la matrice carrée dont les coefficients diagonaux sont égaux à 1, les autres coefficients étant nuls. On la reverra plus en détail plus loin. Pour tout couple d'indices (i,j) ($i = 1,\dots,n$ et $j = 1,\dots,m$), on pourra aussi parfois utiliser la matrice E_{ij} dont tous les coefficients sont nuls sauf le coefficient de la i-ème ligne et de la j-ème colonne qui est égal à 1 .

Définition On dira que la matrice carrée est diagonale si tous les coefficients sont nuls à l'exception éventuelle des coefficients ayant le même indice de ligne et de colonne.

$$D = (d_1,\dots,d_n) = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & & d_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & & 0 & d_n \end{pmatrix}$$

On dira que la matrice carrée est scalaire si c'est une matrice diagonale avec tous les coefficients égaux à un scalaire λ.

$$D = (\lambda,\dots,\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \dots & & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

On dira que la matrice carrée est triangulaire supérieure (resp. inférieure) si tous les coefficients situés en dessous (resp. en dessus) de la diagonale sont nuls.

$$T^+ = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} & \dots & t_{1,n-1} & t_{1n} \\ 0 & t_{22} & t_{23} & \dots & t_{2,n-1} & t_{2,n} \\ 0 & 0 & t_{33} & \dots & t_{3,n-1} & t_{3,n} \\ \vdots & \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & & t_{n-1,n-1} & t_{n-1,n} \\ 0 & 0 & \dots & & 0 & t_{n,n} \end{pmatrix}$$

3.3 Opérations sur les matrices

Définition [Somme de deux matrices] Soient p et n deux entiers naturels non nuls. Soient A et B deux matrices ayant la même taille $n \times p$. Leur **somme** $C = A + B$ est la matrice de taille $n \times p$ définie par

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}.$$

En d'autres termes, on somme coefficients par coefficients.

Remarque On note indifféremment a_{ij} où $a_{i,j}$ pour les coefficients de la matrice A.

Exemple Que dire de l'addition $A + B$ et $A + B'$ avec les matrices ci-dessous ?

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 7 \end{pmatrix} \quad ; \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B' = \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Définition [Produit d'une matrice par un scalaire] Le produit d'une matrice $A = \big(a_{ij}\big)$ de $M_{n,p}(\mathbb{R})$ par un scalaire $\alpha \in \mathbb{R}$ est la matrice $\big(\alpha a_{ij}\big)$ formée en multipliant chaque coefficient de A par α. Elle est notée $\alpha \cdot A$ (ou simplement αA).

Exemple

$$\text{Si} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \alpha = 2 \quad \text{alors} \quad \alpha A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

La matrice $(-1)A$ est l'**opposée** de A et est notée $-A$. La **différence** $A - B$ est définie par $A + (-B)$.

Exemple

$$\text{Si} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 4 & -5 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 2 \\ 7 & -5 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{alors} \quad A - B = \begin{pmatrix} 3 & -5 & -2 \\ -3 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

On admettre que l'addition et la multiplication par un scalaire se comportent sans surprises vis à vis des propriétés de commutativité, d'associativité et de distributivité.

Définition

Soient p , m et n trois entiers naturels non nuls. Soit M une matrice ayant n lignes et m colonnes et N une matrice ayant m colonnes et p lignes. On définit le produit MN des matrices M et N comme la matrice ayant n lignes et p colonnes dont les colonnes sont les produits des lignes de M par les colonnes de N . En d'autres termes, les coefficients de la matrice MN sont donnés par

$$(i, k) \mapsto \sum_{j=1}^{m} a_{ij} b_{jk}$$

où i est l'indice de la ligne et k l'indice de la colonne de la matrice produit et l'on vient de définir une multiplication de l'espace $\mathcal{M}_{nm}(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_{mp}(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{R})$ donnée par

$$M \times N = (a_{ij}) \times (b_{jk}) = (c_{ik})$$

où

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^{m} a_{ij} b_{jk} \ .$$

Remarque On voit que le produit MN de deux matrices M et N est défini si et seulement si le nombre de colonnes de M est égal au nombre de lignes de N.

Remarque On notera que la multiplication par une matrice (carrée) scalaire coïncide avec la multiplication de tous les coefficients par ce même scalaire.

Remarque Si on regarde N comme p colonnes C_k juxtaposées (soit $N = (C_1 \dots C_p)$), on vérifie que MN est tout simplement la matrice dont les p colonnes sont les MC_i (au sens de la multiplication d'une matrice par une matrice colonne). Bref notre multiplication généralise bien la notion introduite précédemment.

Proposition On a

$$0N = M0 = 0 \ , \ \mathrm{Id}_m N = N \mathrm{Id}_p = N \text{ et } \mathrm{Id}_n M = M \mathrm{Id}_m = M \ .$$

Remarque [ATTENTION 1]

Le produit de deux matrices n'est en général pas commutatif ($n \geq 2$). Ainsi

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

mais

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \ .$$

Remarque [ATTENTION 2]

Le produit de deux matrices chacune non nulle peut quand même être nul. C'est ce que l'on vient de voir avec l'exemple ci-dessus

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \ .$$

Bref l'équation $MN = 0$ ne signifie pas nécessairement que M ou N soient nulles !

3.4 Propriétés du produit de matrices

Malgré les difficultés soulevées au-dessus, le produit vérifie les propriétés suivantes :

Proposition (admise)

1) $A(BC) = (AB)C$: associativité du produit,
2) $A(B+C) = AB+AC$ et $(B+C)A = BA+CA$: distributivité du produit par rapport à la somme,
3) $A \cdot 0 = 0$ et $0 \cdot A = 0$.

3.5 La matrice identité

La matrice carrée suivante s'appelle la **matrice identité** :

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Ses éléments diagonaux sont égaux à 1 et tous ses autres éléments sont égaux à 0. Elle se note I_n ou simplement I lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté sur la taille de la matrice.

On peut formaliser cela en introduisant le symbole de Kronecker. Si i et j sont deux entiers, on appelle **symbole de Kronecker**, et on note $\delta_{i,j}$, le réel qui vaut 0 si i est différent de j, et 1 si i est égal à j. Donc

$$\delta_{i,j} = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad i \neq j \\ 1 & \text{si} \quad i = j. \end{cases}$$

Dans le calcul matriciel, la matrice identité joue un rôle analogue à celui du nombre 1 pour les réels. C'est l'élément neutre pour la multiplication. En d'autres termes :

Proposition Si A est une matrice $n \times p$, alors

$$I_n A = A \qquad \text{et} \qquad AI_p = A.$$

4 Puissance d'une matrice

Dans l'ensemble $M_n(\mathbb{R})$ des matrices carrées de taille $n \times n$ à coefficients dans $\mathbb{R}$, la multiplication des matrices est une opération interne : si $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ alors $AB \in M_n(\mathbb{R})$.

En particulier, on peut multiplier une matrice carrée par elle-même : on note $A^2 = A \times A$, $A^3 = A \times A \times A$.

On peut ainsi définir les puissances successives d'une matrice :

Définition

Pour tout $A \in M_n(\mathbb{R})$, on définit les puissances successives de A par $A^0 = I_n$ et $A^{p+1} = A^p \times A$ pour tout $p \in \mathbb{N}$. Autrement dit, $A^p = \underbrace{A \times A \times \cdots \times A}_{p \text{ facteurs}}$.

Exemple Calculer A^p pour tout entier p avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

4.2 Formule du binôme

Comme la multiplication n'est pas commutative, les identités binomiales usuelles sont fausses. En particulier, $(A+B)^2$ ne vaut en général pas $A^2 + 2AB + B^2$, mais on sait seulement que

$$(A+B)^2 = A^2 + \mathbf{AB+BA} + B^2.$$

Proposition [Calcul de $(A+B)^p$ lorsque $AB = BA$]

Soient A et B deux éléments de $M_n(\mathbb{R})$ qui **commutent**, c'est-à-dire tels que $AB = BA$. Alors, pour tout entier $p \geqslant 0$, on a la formule

$$(A+B)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} A^{p-k} B^k$$

où $\binom{p}{k}$ désigne le coefficient du binôme.

Exemple Calculer A^p pour tout entier p avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. On écrira $A = N + I$ où I est la matrice Identité et où N est une matrice telle que $N^4 = 0$.

5 Matrices inversibles.

Définition

On dit que la matrice M carrée d'ordre n est inversible s'il existe une matrice N carrée d'ordre n telle que
$$MN = NM = \mathrm{Id_n} \ .$$

exemple L'inverse de la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ est la matrice $N = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Proposition Si elle existe, la matrice inversible de M est unique et notée M^{-1}.

Proposition

Soit A une matrice inversible. Alors A^{-1} est aussi inversible et on a : $(A^{-1})^{-1} = A$

Proposition

Soient A et B deux matrices inversibles de même taille. Alors AB est inversible et $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

Il faut bien faire attention à l'inversion de l'ordre !

De façon analogue, on montre que si $A_1, \ldots, A_m$ sont inversibles, alors
$$(A_1 A_2 \cdots A_m)^{-1} = A_m^{-1} A_{m-1}^{-1} \cdots A_1^{-1}.$$

Si C est une matrice quelconque de $M_n(\mathbb{R})$, nous avons vu que la relation $AC = BC$ où A et B sont des éléments de $M_n(\mathbb{R})$ n'entraîne pas forcément l'égalité $A = B$. En revanche, si C est une matrice inversible, on a la proposition suivante :

Proposition

Soient A et B deux matrices de $M_n(\mathbb{R})$ et C une matrice inversible de $M_n(\mathbb{R})$. Alors l'égalité $AC = BC$ implique l'égalité $A = B$.

Proposition (ADMISE)

Soit M une matrice inversible. Si l'on échelonne la matrice $(M|\mathrm{Id})$ (à l'aide d'opérations élémentaires) et que l'on obtient la matrice $(\mathrm{Id}|N)$, alors N est la matrice inverse de M.

5.2 Exemples

Déterminer les inverses des deux matrices
$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & -3 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$
et
$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$
soit en résolvant le système associé à ces matrices $MX = Y$ (quel que soit le vecteur colonne Y) soit en échelonnant la matrice $(M|\mathrm{Id})$.

Proposition

On suppose que M est une matrice carrée de taille n et inversible d'inverse M^{-1}. Alors pour tout $B \in \mathbb{R}^n$, le système linéaire $MX = B$ possède une unique solution $X = M^{-1}B$.

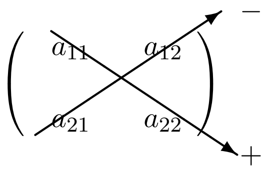
6 Déterminants

Le déterminant est un nombre que l'on associe à n vecteurs $(v_1, \ldots, v_n)$ de $\mathbb{R}^n$. On peut aussi définir le déterminant d'une matrice CARREE. Le déterminant permet de savoir si une matrice CARREE est inversible ou pas, et de façon plus générale, il joue un rôle important dans le calcul matriciel et la résolution de systèmes linéaires.

En dimension 2, le déterminant est très simple à calculer :

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc.$$

C'est donc le produit des éléments sur la diagonale principale moins le produit des éléments sur l'autre diagonale.



6.2 Cas général

Dans le cas plus général, on note le déterminant d'une matrice $A = (a_{ij})$ par :

$$\det A \qquad \text{ou} \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Propriétés du déterminant (admises)

(i) Le déterminant de la matrice A est linéaire par rapport à chaque vecteur colonne de la matrice, les autres étant fixées ;

(ii) Si la matrice A a deux colonnes identiques, alors son déterminant est nul ;

(iii) Le déterminant de la matrice identité I_n vaut 1.

Si on note C_i la i-ème colonne de A, alors on écrit aussi

$$\det A = \begin{vmatrix} C_1 & C_2 & \cdots & C_n \end{vmatrix} = \det(C_1, C_2, \ldots, C_n)\,.$$

Avec cette notation, la propriété (i) de linéarité par rapport à la colonne j s'écrit :
Pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$,

$$\det(C_1, \ldots, \lambda C_j + \mu C_j', \ldots, C_n) = \lambda \det(C_1, \ldots, C_j, \ldots, C_n) + \mu \det(C_1, \ldots, C_j', \ldots, C_n)$$

soit

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & \lambda a_{1j}+\mu a'_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & \lambda a_{ij}+\mu a'_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & \lambda a_{nj}+\mu a'_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \lambda \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \mu \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a'_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a'_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a'_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Exemples

$$\begin{vmatrix} 6 & 5 & 4 \\ 7 & -10 & -3 \\ 12 & 25 & -1 \end{vmatrix} = 5 \times \begin{vmatrix} 6 & 1 & 4 \\ 7 & -2 & -3 \\ 12 & 5 & -1 \end{vmatrix}$$

Car la seconde colonne est un multiple de 5. Autre exemple :

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 4-3 \\ 7 & -5 & 3-2 \\ 9 & 2 & 10-4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 7 & -5 & 3 \\ 9 & 2 & 10 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 7 & -5 & 2 \\ 9 & 2 & 4 \end{vmatrix}$$

Par linéarité sur la troisième colonne.

Remarque Nous connaissons déjà le déterminant de deux matrices mais c'est tout :

- Le déterminant de la matrice nulle 0_n vaut 0 (par la propriété (ii)),
- Le déterminant de la matrice identité I_n vaut 1 (par la propriété (iii)).

6.3 Propriétés liées aux opérations élémentaires sur les colonnes

On énonce ici des propriétés liées aux opérations élémentaires sur les colonnes mais les propriétés restent les mêmes si on les adapte pour les lignes.

Proposition

$A \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice ayant les colonnes $C_1, C_2, \ldots, C_n$. On note A' la matrice obtenue par une des opérations élémentaires sur les colonnes, qui sont :

1) $C_i \leftarrow \lambda C_i$ avec $\lambda \neq 0$: A' est obtenue en multipliant une colonne de A par un scalaire non nul. Alors $\det A' = \lambda \det A$.
2) $C_i \leftarrow C_i + \lambda C_j$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$ (et $j \neq i$) : A' est obtenue en ajoutant à une colonne de A un multiple d'une AUTRE colonne de A. Alors $\det A' = \det A$.
3) $C_i \leftrightarrow C_j$: A' est obtenue en échangeant deux colonnes distinctes de A. Alors $\det A' = -\det A$.

Plus généralement pour (2) : l'opération $C_i \leftarrow C_i + \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \lambda_j C_j$ d'ajouter une combinaison linéaire des AUTRES colonnes conserve le déterminant.

[ATTENTION] D'après le point (3) échanger deux colonnes (ou deux lignes) change le signe du déterminant.

Corollaire

Si une colonne C_i de la matrice A est combinaison linéaire des autres colonnes, alors $\det A = 0$.

6.4 Déterminants de matrices particulières

Calculer des déterminants n'est pas toujours facile. On a donné la formule pour les matrices carrées de taille 2. Il en existe aussi une pour les matrices carrés de taille 3. Cependant il est toujours facile de calculer le déterminant de matrices triangulaires et diagonales.

Proposition Le déterminant d'une matrice triangulaire supérieure (ou inférieure) est égal au produit des termes diagonaux.

Autrement dit, pour une matrice triangulaire $A = (a_{ij})$ on a

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \ \cdots \ a_{nn}.$$

Comme cas particulièrement important on obtient : **Corrolaire** Le déterminant d'une matrice diagonale est égal au produit des termes diagonaux.

Exemple On pourra toujours tenter de se ramener à des calculs sur des matrices triangulaires par des opérations élémentaires sur les lignes ou les colonnes de la matrice dont on cherche le déterminant, comme dans cet exemple :

Calculer $\det A$, où $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 1 & -6 & 6 \\ 5 & 9 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned}
\det A &= \det \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 1 & -6 & 6 \\ 5 & 9 & 1 \end{pmatrix} \\
&\quad \text{(opération } C_1 \leftrightarrow C_2 \text{ pour avoir un pivot en haut à gauche)} \\
&= (-1) \times \det \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ -6 & 1 & 6 \\ 9 & 5 & 1 \end{pmatrix} \\
&\quad (C_1 \leftarrow \tfrac{1}{3} C_1, \text{ linéarité par rapport à la première colonne}) \\
&= (-1) \times 3 \times \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 6 \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix} \\
&= (-1) \times 3 \times \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 10 \\ 3 & 5 & -5 \end{pmatrix} \qquad C_3 \leftarrow C_3 - 2C_1 \\
&= (-1) \times 3 \times \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & -55 \end{pmatrix} \qquad C_3 \leftarrow C_3 - 10C_2 \\
&= (-1) \times 3 \times (-55) \qquad \text{car la matrice est triangulaire} \\
&= 165
\end{aligned}$$

6.5 Déterminants d'un produit

On a admet le résultat général suivant (ADMIS) :

Théorème (admis)

Si A, B sont deux matrices carrées de même taille,

$$\det(AB) = \det(BA) = \det A \cdot \det B$$

6.6 Déterminants des matrices inversibles

Comment savoir si une matrice est inversible ? Il suffit de calculer son déterminant !

Proposition

Une matrice carrée A est inversible si et seulement si son déterminant est non nul. De plus si A est inversible, alors :

$$\det\left(A^{-1}\right) = \frac{1}{\det A}$$

6.7 Déterminants des matrices de taille 3

Les déterminants des matrices de taille 2 se calculent aisément par la formule rappelée au tout début du paragraphe sur les déterminants. On donne ici des formules générales pour le calcul du déterminant d'une matrice de taille 3 :

Proposition

Soit A la matrice de taille 3, $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix}$

Alors $\det(A) = a_{1,1} \times \det \begin{pmatrix} a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix} - a_{2,1} \times \det \begin{pmatrix} a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix} + a_{3,1} \times \det \begin{pmatrix} a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,2} & a_{2,3} \end{pmatrix}$

On dit qu'on a effectué un développement du déterminant par rapport à la première colonne. On pourra reconnaître en fait une sorte de généralisation du calcul du déterminant d'une matrice de taille 2.

On pourra adapter ce résultat pour comprendre que l'on peut en fait des développements par rapport à n'importe quelle colonne ou n'importe quelle ligne, à condition de bien gérer l'arrivée ou non des signes $-$.

Exemple 1 Le calcul du déterminant de la matrice A vue plus haut est en fait assez simple dans la mesure où il y a un 0 dans la première colonne.

On rappelle que $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 1 & -6 & 6 \\ 5 & 9 & 1 \end{pmatrix}$

En développant par rapport à la première colonne, il vient

Alors $\det(A) = 0 - 1 \times \det \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 9 & 1 \end{pmatrix} + 5 \times \det \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -6 & 6 \end{pmatrix}$,

soit

$\det(A) = -(3 \times 1 - 9 \times 2) + 5 \times (3 \times 6 + 6 \times 2) = -(-15) + 5 \times (30) = 165.$

En général, on pourra simplifier les calculs de déterminants en combinant des opérations élémentaires en première approche pour faire apparaître des zéro puis un développement par rapport à une ligne ou une colonne.

Exemple 2 Soit la matrice B donnée par $B = \begin{pmatrix} -1 & 9 & -4 \\ 1 & -6 & 6 \\ 5 & 9 & 1 \end{pmatrix}$.

On fait facilement apparaître un 0 en première ligne en ajoutant la deuxième ligne à la première ligne (on remplace L_1 par $L_1 + L_2$ ce qui ne change pas la valeur du déterminant de B).

Donc $\det(B) = \det(A)$ où A est la matrice précédente :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 1 & -6 & 6 \\ 5 & 9 & 1 \end{pmatrix}.$$

Donc $\det(B) = 165$ en développant comme ci-dessous par rapport à la première colonne (ou par rapport à la première ligne).

Pour les étudiants adeptes des calculs bestiaux, ils pourront toujours retenir et appliquer la formule ci-dessous, qui est un corrolaire immédiat (et donc il vaut mieux comprendre la méthode que d'apprendre par coeur) :

Corollaire Formule de Sarrus

Soit A la matrice de taille 3, $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix}$

Alors $\det(A) = a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3} + a_{2,1}a_{3,2}a_{1,3} + a_{3,1}a_{1,2}a_{2,3} - a_{1,1}a_{3,2}a_{2,3} - a_{2,1}a_{1,2}a_{3,3} - a_{3,1}a_{2,2}a_{1,3}$.