Chapitre II

Nombres complexes

1 Ecriture (ou forme) algébrique

1.2 Parties réelles et imaginaires

Propriété

Soit z un nombre complexe, z s'écrit de manière unique sous la forme $a+ib$ où a et b sont des réels. Cette écriture s'appelle écriture algébrique de z. On appelle partie réelle de z notée $\mathrm{Re}(z)$ le réel a et partie imaginaire de z notée $\mathrm{Im}(z)$ le réel b.

1.3 Règles de calcul

Propriété : addition et multiplication

Soient z et z' quelconques dans $\mathbb{C}$, $a+ib$ et $c+id$ leurs écritures algébriques :
- $z+z' = (a+ib)+(c+id) = (a+c)+i(b+d)$
- $zz' = (a+ib)(c+id) = (ac-bd)+i(ad+bc)$
- Si $z \neq 0$, $\dfrac{1}{z} = \dfrac{a}{a^2+b^2} - i\dfrac{b}{a^2+b^2}$

Propriété : linéarité des parties réelles et imaginaires

Soient z et z' quelconques dans $\mathbb{C}$, λ quelconque dans $\mathbb{R}$:
- $\mathrm{Re}(z+z') = \mathrm{Re}(z)+\mathrm{Re}(z')$
- $\mathrm{Im}(z+z') = \mathrm{Im}(z)+\mathrm{Im}(z')$
- $\mathrm{Re}(\lambda z) = \lambda\,\mathrm{Re}(z)$
- $\mathrm{Im}(\lambda z) = \lambda\,\mathrm{Im}(z)$

1.4 Réels et imaginaires purs

Définition

Tout nombre complexe de la forme $z = ib$ avec b **réel** est appelé imaginaire pur.
L'ensemble des imaginaires purs est noté $i\mathbb{R}$.

Propriété

Pour tout nombre complexe z, on a
- z est réel si et seulement si $\mathrm{Im}(z) = 0$,
- z est imaginaire pur si et seulement si $\mathrm{Re}(z) = 0$.

2 Représentation géométrique des nombres complexes

2.2 Affixe

Dans cette sous-section, on se place dans un plan affine P muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

Définition et propriété

On associe à tout nombre complexe z d'écriture algébrique $a + ib$ le point M de coordonnées (a, b) dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$. z détermine M de manière unique et inversement.
Le nombre z est appelée **affixe** du point M et du vecteur $\overrightarrow{OM}$. Sa partie réelle est l'abscisse de M dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$ et sa partie imaginaire l'ordonnée.

Notation : $M(z)$, $\overrightarrow{OM}(z)$

Propriété

- Soit deux vecteurs $\overrightarrow{w}(z)$ et $\overrightarrow{w'}(z')$, l'affixe du vecteur $\overrightarrow{w} + \overrightarrow{w'}$ est $z + z'$,
- Soit un réel k et un vecteur $\overrightarrow{w}(z)$, l'affixe du vecteur $k.\overrightarrow{w}$ est kz,
- Soit deux vecteurs $\overrightarrow{w}(z)$ et $\overrightarrow{w'}(z')$, $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{w'} \iff z = z'$.

2.3 Plan complexe

Pour simplifier cette représentation géométrique, on peut ne représenter que les affixes, sans les points ou les vecteurs. On fait alors abstraction du plan affine pour ne s'intéresser qu'aux nombres complexes. On parle de **plan complexe**. C'est la représentation géométrique habituelle des nombres complexes.

3 Conjugué

3.2 Définition

Soit z un nombre complexe d'écriture algébrique $a + ib$ (a et b réels), on appelle conjugué de z et on note $\bar{z}$ le nombre $a - ib$.

Interprétation géométrique
Dans le plan complexe, $\bar{z}$ est le symétrique de z par rapport à la droite des réels.

3.3 Règles de calcul

Propriété

Soient z et z' quelconques dans $\mathbb{C}$, on a :
- $\overline{\overline{z}} = z$ (la conjugaison est une involution),
- $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$ (compatibilité de la conjugaison avec l'addition),
- $\overline{zz'} = \overline{z}\,\overline{z'}$ (compatibilité de la conjugaison avec la multiplication),
- Si $z \neq 0$, $\overline{(1/z)} = 1/\overline{z}$ (compatibilité de la conjugaison avec l'inverse, conséquence de la propriété précédente).

Propriété importante

- $\mathrm{Re}(z) = \dfrac{1}{2}(z + \overline{z})$
- $\mathrm{Im}(z) = \dfrac{1}{2i}(z - \overline{z})$

3.4 Caractérisation des réels et imaginaires purs

Propriété

Soit z quelconque dans $\mathbb{C}$, on a :
$z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z = \overline{z}$
$z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow z = -\overline{z}$

4 Module

4.2 Définition

Soit z un nombre complexe d'écriture algébrique $a + ib$ (a et b réels), on appelle **module** de z et on note $|z|$ le réel positif $\sqrt{a^2 + b^2}$.

Module et valeur absolue
Si $z \in \mathbb{R}$, son module est égale à la valeur absolue définie pour les nombres réels, d'où le choix d'une même notation. On dit que le module des nombres complexes prolonge la valeur absolue des réels.

Interprétation géométrique
Soit $M(z)$ un point dans un plan affine muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$, alors $OM = |z|$.

4.3 Règles de calcul

Dans cette sous-section, z et z' sont des nombres complexes quelconques.

Propriété

- $|\overline{z}| = |z|$ (le module est invariant par conjugaison),
- $|zz'| = |z||z'|$ (compatibilité du module avec la multiplication),
- Si $z \neq 0$, $|1/z| = 1/|z|$ (compatibilité du module avec l'inverse, conséquence de la propriété précédente).

Propriétés importantes

- $|z| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z = 0$
- $|z|^2 = z\overline{z}$
- Si $z \neq 0$, $\dfrac{1}{z} = \dfrac{\bar{z}}{|z|^2}$

Propriété

Le module n'est pas compatible avec l'addition mais on a la formule :
$|z + z'|^2 = |z|^2 + 2\,\mathrm{Re}(z'\overline{z}) + |z'|^2$

4.4 Nombres complexes de module 1

Définition

On note $\mathbb{U}$ l'ensemble des nombres complexes de module 1.

Remarque : dans le plan complexe, $\mathbb{U}$ est le cercle de centre 0 et de rayon 1.

Propriété

Soient z et z' des nombres complexes de **module 1** :
- $\overline{z}$ est de module 1 ($\mathbb{U}$ est stable pour la conjugaison),
- zz' est de module 1 ($\mathbb{U}$ est stable pour la multiplication),
- $\dfrac{1}{z}$ est de module 1 ($\mathbb{U}$ est stable pour l'inverse).

Représentation graphique

Propriété

L'égalité entre inverse et conjugué caractérise les éléments de $\mathbb{U}$, c.a.d.
pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, $|z| = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{1}{z} = \overline{z}$

4.5 Inégalité triangulaire

Propriété

Pour tout z et z' dans $\mathbb{C}$, $|z + z'| \leqslant |z| + |z'|$

5 Argument

Dans cette section, on se place dans un plan affine P muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

5.2 Définition

Définition : congruence

Soit x, y et m des réels, on dit que a est congru à b modulo m et on note $a \equiv b\,[m]$ si et seulement si il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $a = b + k\,m$.

Remarque : la notation $a = b\,[m]$ est acceptée.

Définition : argument

Soit z un nombre complexe **non nul**, on considère le point $M(z)$ dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On appelle argument de z et on note $\arg z$ toute mesure de l'angle $(\vec{u}, \overrightarrow{OM})$.
On appelle argument principal la mesure de cet angle qui appartient à $[0, 2\pi[$ (d'autres définitions utilisent l'intervalle $]-\pi, \pi]$).

Remarque : l'argument est donc défini à $2k\pi$ près avec $k \in \mathbb{Z}$.
Par exemple, on écrit $\arg(1 + i) = \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$
ou bien $\arg(1 + i) \equiv \dfrac{\pi}{4} [2\pi]$ (congru à ... modulo ...)

Propriété

Soient $z \in \mathbb{C}^*$ et θ un argument de z, $\quad \cos\theta = \dfrac{\mathrm{Re}(z)}{|z|} \quad$ et $\quad \sin\theta = \dfrac{\mathrm{Im}(z)}{|z|}$.

5.3 Règles de calcul

Propriété

Pour tous nombres complexes z et z' non nuls, on a :
- $\arg(-z) \equiv \pi + \arg z [2\pi]$
- $\arg(zz') \equiv \arg z + \arg z' [2\pi]$
- $\arg(\frac{1}{z}) \equiv -\arg z [2\pi]$
- $\arg(\overline{z}) \equiv -\arg z [2\pi]$

Application : Soit $z \in \mathbb{C}^*$ et $n \in \mathbb{N}$, calculer $\arg(z^n)$ à partir de $\arg z$.

6 Rappel de trigonométrie

6.2 Formules d'addition

Propriété

Pour tous réels θ et θ' :
- $\cos(\theta + \theta') = \cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta'$.
- $\sin(\theta + \theta') = \cos\theta\sin\theta' + \sin\theta\cos\theta'$.

6.3 Formules de duplication

Propriété

Pour tout réel θ :
- $\cos(2\theta) = \cos^2\theta - \sin^2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = 1 - 2\sin^2\theta$.
- $\sin(2\theta) = 2\cos\theta\sin\theta$.

Corollaire : linéarisation du carré

Pour tout réel θ :
- $\cos^2\theta = \dfrac{1 + \cos(2\theta)}{2}$.
- $\sin^2\theta = \dfrac{1 - \cos(2\theta)}{2}$.

7 Ecriture trigonométrique (ou polaire)

7.2 Définition

Théorème

Soit z un nombre complexe **non nul**. En notant θ un argument de z et $r = |z|$, on a $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$.
Cette forme est appelée écriture trigonométrique (ou polaire) de z.
Dans cette écriture, r est un réel **positif** et est unique, θ est un réel déterminé à $2k\pi$ près ($k \in \mathbb{Z}$).

Remarque : attention à vérifier que r est positif.

7.3 Notation exponentielle

Définition et propriété (ADMISE)

On définit la notation exponentielle, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ par

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

Alors le nombre complexe $e^{i\theta}$ est un nombre complexe de module 1.

Propriété fondamentale

$\forall \theta, \theta' \in \mathbb{R}, \quad e^{i(\theta+\theta')} = e^{i\theta}\ e^{i\theta'}$.

Corollaire

- $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $e^{-i\theta} = (e^{i\theta})^{-1}$.
- $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $\forall p \in \mathbb{Z}$, $e^{ip\theta} = \left(e^{i\theta}\right)^p$.

Propriété fondamentale

Pour tout réel θ, $\quad \overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta} = \dfrac{1}{e^{i\theta}}$.

7.4 Notation exponentielle d'un nombre complexe non nul

Propriété

Soit $z \in \mathbb{C}^*$, en notant θ un argument de z et $r = |z|$, z peut s'écrire en notation exponentielle $z = re^{i\theta}$.

Remarque : c'est l'écriture couramment utilisée pour la forme trigonométrique.

7.5 Formules d'Euler

Propriété

Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$,
- $\cos\theta = \dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$
- $\sin\theta = \dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$

7.6 Formule de Moivre

Propriété

Pour tous réel θ et entier n, on a $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$

8 Racines carrées d'un nombre complexe

8.2 Ecriture algébrique des racines carrées d'un nombre complexe

Propriété

Tout nombre complexe z possède deux racines carrées opposées, distinctes si $z \neq 0$.

L

8.3 Equations du second degré à coefficients complexes

Propriété

Soient $a \neq 0$, b et c des nombres complexes et E l'équation $a\,z^2 + b\,z + c = 0$ d'inconnue complexe z.
On appelle discriminant de E le nombre complexe $\Delta = b^2 - 4\,ac$.
L'équation E admet pour solutions les nombres complexes $z_1 = \dfrac{-b+\delta_1}{2a}$ et $z_2 = \dfrac{-b+\delta_2}{2a}$ où δ_1 et $\delta_2 = -\delta_1$ sont les racines carrées de Δ.
Si $\Delta = 0$, ces deux solutions sont confondues, on dit que E admet une solution double.

9 Racines n-ièmes d'un nombre complexe

9.2 Définition

Soit Z un nombre complexe et un n un entier naturel non nul, on appelle racine n-ième de Z tout nombre complexe z vérifiant $z^n = Z$.

Cas particuliers :
- Pour $n = 2$, on parle des racines carrées.
- Pour $Z = 1$, on parle des racines n-ièmes de l'unité.

9.3 Existence et nombre de racines n-ièmes

Propriété

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, toute suite géométrique de raison $e^{i\frac{2\pi}{n}}$ est une suite périodique de période n qui prend n valeurs distinctes.

Propriété

Soit n un entier naturel non nul, tout nombre complexe non nul possède n racines n-ièmes **distinctes**.

9.4 Méthode de calcul

Propriété

Soient n un entier naturel non nul et Z un nombre complexe non nul de forme polaire $re^{i\theta}$, les n racines n-ième de Z sont les n termes successifs d'une suite géométrique de premier terme $z_0 = \sqrt[n]{r}\ e^{i\frac{\theta}{n}}$ et de raison $e^{i\frac{2\pi}{n}}$.
Cette suite est périodique de période n et ses n valeurs distinctes sont les nombres
$z_k = \sqrt[n]{r}\ e^{i(\frac{\theta+2k\pi}{n})}$ avec $k \in [0, n-1]$.

9.5 Racines n-ième de l'unité

Il s'agit des racines de 1.

Propriété

Soient n un entier naturel non nul, les n racines n-ièmes de l'unité sont les nombres $e^{i\frac{2k\pi}{n}}$ où k varie de 0 à $n-1$.

9.6 Interprétation géométrique pour les racines n-ième de l'unité

Propriété

Soient n un entier vérifiant $n \geqslant 2$ et Z un nombre complexe non nul de module 1, les n racines n-ièmes de Z sont les sommets d'un polygone régulier de centre 0 à n sommets dont le cercle circonscrit a pour rayon 1.

Propriété

Soient n un entier vérifiant $n \geqslant 2$ et Z un nombre complexe non nul de module 1, la somme des n racines n-ièmes de Z est nulle.