

Handout 10

Résiduels

1 Résiduels

1.1 Définition et propriétés élémentaires

Soit $L \subseteq \Sigma^*$ un langage et $u \in \Sigma^*$ un mot. Le *résiduel de L par rapport à u* , noté $u^{-1}L$, est défini comme suit :

$$u^{-1}L = \{w \in \Sigma^* \mid u \cdot w \in L\}$$

Autrement dit, on a pour tout mot $w \in \Sigma^*$:

$$w \in u^{-1}L \text{ si et seulement si } u \cdot w \in L$$

On a donc en particulier pour tout langage $L \in \Sigma^*$:

1. $\epsilon^{-1}L = L$
2. $(xy)^{-1}L = y^{-1}(x^{-1}L)$

1.2 Calculer les résiduels d'un langage rationnel

Quand le langage est donné par une expression rationnelle on peut directement calculer les résiduels. On donne des règles de calcul pour le résiduel par rapport à une lettre ; pour calculer les résiduels par rapport à un mot plus long on utilise les équations de la section 1.1. La fonction *eps* est définie dans le handout sur Glushkov.

$$\begin{aligned} a^{-1}\emptyset &= \emptyset \\ a^{-1}\epsilon &= \emptyset \\ a^{-1}a &= \epsilon \\ a^{-1}b &= \emptyset \quad b \in \Sigma, a \neq b \\ a^{-1}(r_1 + r_2) &= a^{-1}r_1 + a^{-1}r_2 \\ a^{-1}(r_1 r_2) &= \begin{cases} (a^{-1}r_1)r_2 & \text{si } \neg \text{eps}(r_1) \\ (a^{-1}r_1)r_2 \cup a^{-1}r_2 & \text{si } \text{eps}(r_1) \end{cases} \\ a^{-1}r^* &= (a^{-1}r)^* \end{aligned}$$

On obtient donc encore une propriété de clôture des langages rationnels : la classe des langages rationnels est close sous résiduel par un mot quelconque.

1.3 L'automate des résiduels pour un langage rationnel

Il s'agit d'une construction directe d'un automate déterministe pour une expression rationnelle, due à Brzozowski. Cette construction ne passe pas par l'étape intermédiaire des automates non déterministes, comme les constructions de Thompson (qui en plus utilise des ϵ -transitions) ou de Glushkov.

Étant donnée l'expression rationnelle r sur l'alphabet Σ , l'automate qui reconnaît $\mathcal{L}(r)$ est $(\Sigma, Q, q_0, F, \delta)$ donné par

- Q est l'ensemble de tous les résiduels de L , c'est-à-dire $\{w^{-1}L \mid w \in \Sigma^*\}$, calculé par la méthode donnée selon les règles de la section 1.2. Quand on obtient par le calcul d'un résiduel une expression rationnelle r' alors il faut simplifier r' afin de reconnaître le cas où une expression rationnelle équivalente à r' a déjà été calculée précédemment.
- $q_0 = r$
- $F = \{r' \in Q \mid \epsilon \in \mathcal{L}(r')\}$
- $\delta(r', a) = a^{-1}r'$

En pratique, on construit l'ensemble des états de l'automate des résiduels au fur et à mesure à partir de l'état initial.