L2 Informatique

Boughattas Sedki

U-Paris

15 Novembre 2023

Matrices diagonales

Définition 1

On dit qu'une matrice carrée $A \in M_n(\mathbb{K})$ est diagonale si tous ses coefficients en dehors de la diagonale sont nuls. On note $\text{Diag}_n(\mathbb{K})$ ou $D_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices diagonales et on note $\text{diag}(a_1, a_2, \cdots, a_n)$la matrice diagonale dont les coefficients sont $d_{i,j} = 0$ si $i \neq j$ et $d_{i,i} = a_i$.

Exemples 1

1. La matrice nulle est diagonale.
2. La matrice identité I_n est diagonale.
3. Les matrices d'homothéties λI_n sont diagonales.

- $D_n(\mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbb{K})$ de dimension n.
- La matrice identité $I_n \in D_n(\mathbb{K})$.
- Si A et B sont diagonales, AB est diagonale.
- Si A et B sont diagonales, $AB = BA$.

Proposition 1

1. Le rang d'une matrice diagonale est donné par le nombre de coefficients non nuls.
2. En particulier, une matrice diagonale $D = \text{diag}(d_1, d_2, \cdots d_n)$ est inversible si et seulement si $\forall i \in \{1, \cdots, n\}, d_i \neq 0$. Dans ce cas, l'inverse de D est la matrice $D^{-1} = \text{diag}(d_1^{-1}, d_2^{-1}, \cdots d_n^{-1})$

Définition 2

Soit $T = (t_{i,j})$ une matrice dans $M_n(\mathbb{K})$. On dit que :

- T est triangulaire supérieure si $t_{i,j} = 0$ dès que $i > j$.
- T est triangulaire supérieure stricte si $t_{i,j} = 0$ dès que $i \geq j$.

On note $T_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices triangulaires supérieures et $T_n^s(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices triangulaires supérieures strictes.

On considère $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$, alors

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -3 \\ 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} -1 & 1 & -3 \\ 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = ?$$

$$\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & +1 \end{vmatrix}$$

Suivant la première colonne :

$$\det(A) = \begin{vmatrix} -1 & 1 & -3 \\ 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$(+)(-1)\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + (-)3\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} +$$

$$(+)0\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 2 - 6 + 0 = -4$$

$$\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & +1 \end{vmatrix}$$

Suivant la première ligne :

$$\det(A) = \begin{vmatrix} -1 & 1 & -3 \\ 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$(+)(-1)\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + (-)1\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} +$$

$$(+)(-3)\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 + 3 - 9 = -4$$

Théorème 1

Pour tout $n \geq 1$, il existe une unique application déterminant notée $\det : M_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ qui vérifie les propriétés suivantes :

(c_1) $\det(I_n) = 1$.

(c_2) det est une application linéaire par rapport à chaque colonne de la matrice.

(c_3) Si deux colonnes consécutives de la matrice A sont égales, alors $\det(A) = 0$.

Remarque 1

La condition (c_2) implique en particulier que si une colonne de A est nulle, alors $\det(A) = 0$.

Prouvons ce résultat par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

1) Commençons par l'initialisation. Pour $n = 1$ en posant

$$\det A = a$$

si $A = (a)$.

2) Pour $n = 2$ avec la définition usuelle : $\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc.$

- Pour la condition (c_1) , on a $\det\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} = 1.$
- Pour la condition (c_2) , si $A = \begin{pmatrix}\alpha a_1 + \mu b_1 & c_1\\ \alpha a_2 + \mu b_2 & c_2\end{pmatrix}$, on a

$$\begin{aligned}\det(A) &= (\alpha a_1 + \mu b_1)\cdot c_2 - c_1(\alpha a_2 + \mu b_2)\\ &= \alpha(a_1 c_2 - c_1 a_2) + \mu(b_1 c_2 - b_2 c_1)\end{aligned}$$

$$\det(A) = \alpha \det\begin{pmatrix}a_1 & c_1\\ a_2 & c_2\end{pmatrix} + \mu \det\begin{pmatrix}b_1 & c_1\\ b_2 & c_2\end{pmatrix}$$

- Pour la condition (c_3) : $\det\begin{pmatrix}a & a\\ b & b\end{pmatrix} = ab - ab = 0.$

3) Pour $n = 3$.
4) Pour $n = 4$.

Proposition 2

Si $\det$ est une application de $M_n(\mathbb{K})$ dans $\mathbb{K}$ qui vérifie les trois conditions mentionnées dans le théorème 1 alors :

- (P_1) si on échange deux colonnes consécutives dans une matrice, alors $\det(A)$ est multiplié par (-1).
- (P_2) si deux colonnes sont égales dans une matrice A, alors $\det(A) = 0$.

(P_3) si on échange deux colonnes dans une matrice A, alors $\det(A)$ est multiplié par (-1).

(P_4) si on multiplie une colonne dans une matrice A par λ, $\det(A)$ est multiplié par λ.

(P_5) si on ajoute à une colonne d'une matrice A une combinaison linéaire des autres colonnes de la matrice, alors $\det(A)$ reste inchangé.

Démonstration.

(P_1) **D'après** (c_3)**, on sait que :** $\det(C_1, ..., C_k + C_{k+1}, C_k + C_{k+1}, C_{k+2}, ..., C_n) = \ 0$ **car les** k**-ième et** $k+1$**-ième colonnes de cette matrice sont égales. Par ailleurs, on a aussi, pour la même raison,** $\det(C_1, ..., C_{k+1}, C_{k+1}, C_{k+2}, ..., C_n) = \det(C_1, ..., C_k, C_k, C_{k+2}, ..., C_n) = 0.$

$\square$

Démonstration.

(P_1) **En utilisant la linéarité, on obtient alors :**

$0 = \det(C_1, ..., C_k + C_{k+1}, C_k + C_{k+1}, C_{k+2}, ..., C_n) =$
$\det(C_1, ..., C_k, C_k + C_{k+1}, ..., C_n) +$
$\det(C_1, ..., C_{k+1}, C_k + C_{k+1}, ..., C_n) =$
$\det(C_1, ..., C_k, C_k, C_n) +$
$\det(C_1, ..., C_k, C_{k+1}, C_n) +$
$\det(C_1, ... C_{k+1}, C_k, C_n) +$
$\det(C_1, ..., C_{k+1}, C_{k+1}, C_n) =$
$\det(C_1, ..., C_k, C_{k+1}, ..., C_n) +$
$\det(C_1, ..., C_{k+1}, C_k, ..., C_n)$

On a donc bien :

$\det(C_1, ..., C_{k+1}, C_k, ..., C_n) = -\det(C_1, ..., C_k, C_{k+1}, ..., C_n).$ $\square$

Démonstration.

(P_2) **Supposons que les colonnes C_i et C_j sont égales. On a**

$\det(C_1, ..., C_i, C_{i+1}, ..., C_j, ..., C_n) =$

$(-1)\det(C_1, ..., C_{i+1}, C_i, C_{i+2}, ..., C_j, ..., C_n) =$

$(-1)^2\det(C_1, ..., C_{i+1}, C_{i+2}, C_i, ..., C_j, ..., C_n) =$

$(-1)^{j-i-1}\det(C_1, ..., C_{i+1}, C_{i+2}, ..., C_{j-1}, C_i, C_j,$
$...., C_n) = 0$

d'après la propriété (P_1) et la condition (c_3).

$\square$

(P_3) **D'après la propriété** (P_2)**, on sait que** $\det(C_1, ..., C_{i-1}, C_i + C_j, ...,$
$C_{i+1}, ..., C_{j-1}, C_i + C_j, C_{j+1}, ..., C_n) = 0.$
En utilisant la linéarité de $\det$ **par rapport à chaque colonne :**

$$0 = \det(C_1, ..., C_{i-1}, C_i + C_j, C_{i+1}, ..., C_{j-1}, C_i + C_j, C_{j+1}, ..., C_n) =$$
$$\det(C_1, ..., C_{i-1}, C_i, C_{i+1}, ..., C_{j-1}, C_i, C_{j+1}, ..., C_n) +$$
$$\det(C_1, ..., C_{i-1}, C_i, C_{i+1}, ..., C_{j-1}, C_j, C_{j+1}, ..., C_n) +$$
$$\det(C_1, ..., C_{i-1}, C_j, C_{i+1}, ..., C_{j-1}, C_i, C_{j+1}, ..., C_n) +$$
$$\det(C_1, ..., C_{i-1}, C_j, C_{i+1}, ..., C_{j-1}, C_j, C_{j+1}, ..., C_n)$$

Démonstration.

(P_3) **Donc**
$0 = \det(C_1, \ldots, C_{i-1}, C_i, C_{i+1}, \ldots., C_{j-1}, C_j,$
$C_{j+1}, \ldots, C_n) +$
$\det(C_1, \ldots, C_{i-1}, C_j, C_{i+1}, \ldots., C_{j-1}, C_i,$
$C_{j+1}, \ldots, C_n)$
d'où l'on déduit $(P3)$**.**

$\square$

Démonstration.

(P_4) **C'est une conséquence directe de la linéarité (condition (c_2)) de** $\det$ **par rapport aux colonnes**

$\square$

Démonstration.

(P_5) **Par linéatité par rapport à la j-ième colonne, on a**

$$\det\left(C_1, ..., \underbrace{C_j + \sum_{i\neq j} \lambda_i C_i}_{j}, ..., C_n \right) =$$

$$\det(C_1, ..., \underbrace{C_j}_{j}, ..., C_n) +$$

$$\sum \lambda_i \det(C_1, ..., \underbrace{C_i}_{i}, ..., \underbrace{C_i}_{j}, ..., C_n) =$$

$$\det(C_1, ..., \underbrace{C_j}_{j}, ..., C_n) \quad \textbf{D'après } (P_2).$$

$\square$

L'unicité est admise.

Théorème 2

Les propriétés $(c_1), (c_2), (c_3), (P_1), (P_2), (P_3), (P_4), (P_5)$ sont vérifiées lorsque dans l'énoncé on remplace "colonnes de la matrice" par "lignes de la matrice"

Le déterminant est donc multilinéaire par rapport aux lignes, et plus généralement toutes les propriétés relatives aux colonnes sont vraies pour les lignes.

Corollaire 1

Si $D \in M_n(\mathbb{K})$ est une matrice diagonale alors $\det(D) = \prod_{i=1}^{n} d_{ii}$.

Proposition 3

Si $T \in M_n(\mathbb{K})$ est une matrice triangulaire supérieure, alors

$$\det(T) = \prod_{i=1}^{n} t_{ii}.$$

Théorème 3

Soit $M \in M_n(\mathbb{K})$, $\det(M) = \det({}^tM)$.

Théorème 4

$$\det(M \cdot N) = \det(M) \cdot \det(N)$$

(le déterminant est multiplicatif).

Remarquons que

$$\det(M \cdot N) = \det(N \cdot M)$$

Proposition 4

Soit $M \in M_n(\mathbb{K})$ une matrice, on note $m_{i,j}$ les coefficients de M et $M_{i,j} \in M_{n-1}(\mathbb{K})$ la matrice obtenue en supprimant la i-ème ligne et la j-ème colonne de la matrice M. On a alors :

1. **pour tout j fixé,**
$$\det(M) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} m_{i,j} \det(M_{i,j})$$
("développement/colonne j").

2. **pour tout i fixé,**
$$\det(M) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} m_{i,j} \det(M_{i,j})$$
("développement/ligne i") ;

Proposition 5

M **inversible** $\Leftrightarrow det(M) \neq 0$ **et**

$$\det(M^{-1}) = \frac{1}{\det(M)}.$$

Démonstration.

$M \times M^{-1} = I_n$.

$\det(M) \cdot \det(M^{-1}) = \det(I_n) = 1.$ $\square$

Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -3 & 2 \\ 3 & 2 & 11 & 5 \\ 7 & -4 & 2 & -8 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} -1 & 1 & -3 & 2 \\ 3 & 2 & 11 & 5 \\ 7 & -4 & 2 & -8 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & -3 & 0 \\ 3 & 2 & 11 & 1 \\ 7 & -4 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \quad +1 \begin{vmatrix} -1 & 1 & -3 \\ 7 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} -1 & -2 & -3 \\ 7 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$+(-1) \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 7 & -2 \end{vmatrix} = \; 2 \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 7 & 1 \end{vmatrix} = \quad -16$$

Proposition 6

$(v_1, v_2, \cdots v_n)$ est une base de E si et seulement si $\det_{\mathscr{B}}(v_1, v_2, \cdots v_n) \neq 0$

Définition 3

Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ un endomorphisme et $\mathscr{B} = (\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n)$ une base de E. On définit le déterminant de u dans la base $\mathscr{B}$ par

$$\det_{\mathscr{B}}(u) = \det(\operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(u)).$$

Proposition 7

$\det_{\mathscr{B}}(u)$ ne dépend pas de la base $\mathscr{B}$!

Démonstration.

Soit $\mathscr{B}' = (\varepsilon'_1, \cdots, \varepsilon'_n)$ une autre base de E. Alors on a
$\text{Mat}_{\mathscr{B}'}(u) = P^{-1}\text{Mat}_{\mathscr{B}}(u)P$
avec P la matrice de passage de la base $\mathscr{B}$ à la base $\mathscr{B}'$. On a alors :

$$\begin{aligned}
\det_{\mathscr{B}'}(u) &= \det(\text{Mat}_{\mathscr{B}'}(u)) \\
&= \det\left(P^{-1}\text{Mat}_{\mathscr{B}}(u)P\right) \\
&= \det(P)\det(\text{Mat}_{\mathscr{B}}(u))\det(P^{-1}) \\
&= \det(\text{Mat}_{\mathscr{B}}(u)) = \det_{\mathscr{B}}(u).
\end{aligned}$$

$\square$

Proposition 8

Soient u et v deux endomorphismes de E.

1. On a $\det(u \circ v) = \det(u) \cdot \det(v)$.
2. On a u est bijectif si et seulement si $\det(u) \neq 0$.

Démonstration.

1. Soit $\mathscr{B} = (\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n)$, une base de E. On a $\det(u) = \det_{\mathscr{B}}(u(\varepsilon_1), ..., u(\varepsilon_n)) \neq 0$ si et seulement si $(u(\varepsilon_1), ..., u(\varepsilon_n))$ est une base de E si et seulement si $Im\ u = E$ si et seulement si u est surjective si et seulement si u est bijective.
2. On a : $\det(u \circ v) = \det \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u \circ v) = \det(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)\,\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(v)) = \det \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u) \det \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(v) = \det(u)\det(v)$

$\square$

Définition 4

- Un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ est une valeur propre de u s'il existe $x \in E \setminus \{0\}$ tel que $u(x) = \lambda x$.
  Un tel vecteur x est appelé vecteur propre associé à la valeur propre λ.
- On note $\mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(u)$ l'ensemble des valeurs propres de u dans $\mathbb{K}$ (le spectre de u).