L2 informatique - Année 2023–2024

Université Paris Cité

TD d'Éléments d'Algorithmique n° 6

*** Les exercices marqués d'une étoile sont à faire à la maison.**

Exercice 1. *Le Terminal.*

Nous considérons les algorithmes suivants :

Algorithm 1 Algorithme PUISS

Entrée : n et k deux entiers naturels.

1: **fonction** PUISS(k, n)
2: **si** $n = 0$ **alors**
3: **retourne** 1
4: **sinon**
5: **retourne** $(k \cdot \text{PUISS}(k, n-1))$

Algorithm 2 Algorithme PUISSAUX

Entrée : n, k, et a trois entiers naturels.

1: **fonction** PUISSAUX(k, n, a)
2: **si** $n = 0$ **alors**
3: **retourne** a
4: **sinon**
5: **retourne** PUISSAUX$(k, (n-1), (a * k))$

1. Comment réutiliser PUISSAUX pour créer un algorithme équivalent à PUISS (on appelera cet algoritme PUISSTER) ?
2. Calculer à la main, PUISS(5,3), et PUISSTER(5,3), en suivant rigoureusement les instructions. Que constatez-vous ?
3. Prouver que, étant donné un tableau T de longueur t et $n \in \{0, \ldots, t-1\}$, l'algorithme SOMME(T, n) ci-dessous calcule la somme des éléments du sous-tableau $T[n, \ldots, t-1]$.
4. En vous inspirant de la question 1, et de PUISSAUX, adaptez l'algorithme SOMME afin de le rendre moins gourmand en mémoire.

Algorithm 3 Algorithme SOMME

Entrée : T un tableau de taille t et n un entier.

1: **fonction** SOMME(int [ ] T, int n)
2: $t \leftarrow$ longueur de T
3: **si** $n \geq t$ **alors**
4: **retourne** 0
5: **sinon**
6: **retourne** $(T[n] + \text{SOMME}(T, n+1))$

Dans les exercices suivants, on utilise les classes `Liste` et `Cellule` pour les listes chaînées.

```
class Liste {
  Cellule head;
}
```

```
class Cellule {
  int key;
  Cellule next;
}
```

Exercice 2. *Bâteau.*

1. Quelle liste est stockée dans `L` après la suite d'instructions suivantes ? (Faites un dessin.)

```
1 a := new Cellule(1, nil)
2 b := new Cellule(2, a)
3 c := new Cellule(3, nil)
4 a.next := c
5 b.key := 4
6 L := new List(b)
```

2. On suppose que la liste `M` contient la suite de valeurs $(1, 2, 3, 4, 5)$. Écrivez la suite d'instructions qui mute `M` pour qu'elle contienne $(1, 2, 4, 5)$ sans créer aucune nouvelle cellule et sans jamais modifier la valeur contenue dans une cellule.
3. On suppose maintenant que la liste `N` contient la suite de valeurs $(1, 2, 4, 5)$. Écrivez la suite d'instructions qui mute `N` pour qu'elle contienne $(1, 2, 3, 4, 5)$, en créant une seule nouvelle cellule.

Exercice 3. *Manipulation de listes.*

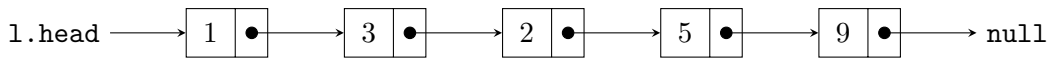
1. Écrivez un algorithme qui prend en entrée une liste `L` non vide et retourne son élément maximal.
2. Écrivez un algorithme qui prend en entrée une liste `L` et retourne 1 si `L` est triée, et 0 sinon (la liste vide est triée).
3. Écrivez un algorithme qui prend en entrée une liste `L` et retourne une liste contenant les mêmes éléments mais dans l'ordre inverse.

Exercice 4. *Fonction mystère – contrôle continu 2020.*

```
boolean auxMystere(int a, int b, boolean c){
  return  ((c and  a < b) or  ( (not c)  and  b < a));
}

boolean mystere(Cellule c, boolean val){
  if (c == null or c.next == null)
     return true;
  if (auxMystere(c.key,c.next.key, val))
     return mystere(c.next,  not val);
  return false;
}
```

On considère une liste chaînée `l` de type `Liste` contenant un pointeur vers la cellule de tête et dont les cellules, de type `Cellule`, contiennent dans l'ordre des clefs de valeurs 1, 3, 2, 5, 9.



1. Quelle est la valeur de la clé `l.head.next.next.key` ?
2. Lister tous les appels récursifs des fonctions `auxMystere` et `mystere` effectués lors de l'appel `mystere(l.head,true)`.
3. Quel est le résultat renvoyé par l'appel `mystere(l.head,true)` ?
4. Pour quelles listes `liste` l'appel `mystere(liste.head,true)` renvoie-t-il `true` ?
5. Pour quelles listes `liste` l'appel `mystere(liste.head,false)` renvoie-t-il `true` ?
6. L'algorithme est-il récursif terminal ?

Exercice 5. *Tri Fusion.*

1. Ecrire un algorithme `fusion` qui prend en entrée deux listes chainées triées l et l' et qui renvoie la fusion triée de ces listes (c'est à dire une liste chainée triée contenant tous les éléments de l, et l'). Pour une complexité en espace optimale, votre algorithme ne doit créer aucune nouvelle cellule.
2. ***** Implémenter un algorithme récursif de tri qui utilise la fonction `fusion`. Prouvez la correction de votre algorithme par récurrence.