Examen Terminal
9 Janvier 2023, 13h-16h

Tous les documents sont interdits, ainsi que les calculatrices, téléphones portables et montres connectées. Une attention particulière sera portée sur la rédaction. Toute affirmation doit être justifiée. Le sujet se termine sur le verso de cette feuille.

***Exercice* 1 :** Calculer les limites suivantes :

$$(1)\ \lim_{x\to 0} \frac{1+\ln(1+x)-e^x}{1-\cos x} \qquad (2)\ \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{1+3x}-1-\sin(x)}{\sin(x^2)}$$

$$(3)\ \lim_{x\to +\infty} \sqrt{x^2+2x-1}-x \qquad (4)\ \lim_{x\to 0} \frac{x^x-1}{\ln(1+x)}$$

***Exercice* 2 :**

(1) Donner le développement limité de la fonction $\ln(1+x)$ à l'ordre 3 en 0.

(2) En déduire les réels a_0, a_1, a_2 et a_3 tels que pour tout x au voisinage de $+\infty$ on a : $\ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right) = a_0 + \dfrac{a_1}{x} + \dfrac{a_2}{x^2} + \dfrac{a_3}{x^3} + o\left(\dfrac{1}{x^3}\right)$.

(3) On considère la fonction $f(x) = x^2 \ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right)$. En utilisant ce qui précède, déterminer l'asymptote à la courbe de f au voisinage de $+\infty$.

(4) Préciser la position de la courbe par rapport à son asymptote.

***Exercice* 3 :** Soit $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ une application linéaire définie par :

$$f(x,y,z,t) = (x+z+t, x-y+2t, 2x-y+z+3t, y+z-t)$$

(1) Donner une base et un système d'équations de $\mathrm{Im}(f)$.

(2) Déterminer une base de $\ker(f)$.

(3) Les sous-espaces $\ker(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont-ils supplémentaires ?

***Exercice* 4 :** On considère l'application linéaire $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ de matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -2 & 2 & 1 \\ 4 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ dans la base canonique $\mathcal{C}$ de $\mathbb{R}^3$.

(1) Donner la définition d'une valeur propre et d'un vecteur propre de la matrice A.

(2) Montrer que le polynôme caractéristique $\chi_A(X) = \det(A - X\cdot I_3) = \begin{vmatrix} 3-X & -1 & -1 \\ -2 & 2-X & 1 \\ 4 & -2 & -1-X \end{vmatrix}$ est égal à $(X-1)^2(2-X)$.

(3) Donner une base pour chacun des sous-espaces $E_1 = \{u = (x,y,z) / g(u) = u\}$ et $E_2 = \{u = (x,y,z) / g(u) = 2u\}$.

(4) Donner une base $\mathcal{B}$ telle que la matrice de f dans cette base est une matrice diagonale.

Tournez la page svp

(5) Déterminer une matrice diagonale D et une matrice P tels que $D = P^{-1}AP$.

(6) Calculer D^n pour un entier $n \geq 0$.

(7) Calculer A^n pour un entier $n \geq 0$.

(8) On considère les suites (u_n), (v_n) et (w_n) définies par leur premier terme $u_0 = 1$, $v_0 = -1$ et $w_0 = 0$ et les relations suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} u_{n+1} & = & 3u_n - v_n - w_n \\ v_{n+1} & = & -2u_n + 2v_n + w_n \\ w_{n+1} & = & 4u_n - 2v_n - w_n \end{array} \right.$$

pour $n \geq 0$. On pose $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$. Exprimer X_{n+1} en fonction de A et X_n. En déduire u_n, v_n et w_n en fonction de n.

Barème indicatif :
Exercice 1 (1+1+1+1=4 points).
Exercice 2 (1+1+1+1=4 points).
Exercice 3 (1+1+1=3 points).
Exercice 4 (1+1+1+1+1+1+1+1=8 points).
1 point est réservé pour la rédaction.