TD1 - L2 Info - Gentiana DANILA

Ex1 : Si $f \underset{x_0}{\sim} \varphi$ et $g \underset{x_0}{\sim} \psi$, on que φ et ψ sont non nulles au voisinage de x_0, ou strictement positives ou strictement négatives,

c'est que $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{g(x)}{\psi(x)} = 1$. En d'autres termes

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \eta_1 > 0$ tq $\forall x \neq x_0$ vérifiant $|x - x_0| < \eta_1$

on a $\left| \frac{f(x)}{\varphi(x)} - 1 \right| < \varepsilon \iff |f(x) - \varphi(x)| < \varepsilon |\varphi(x)|$

et $\exists \eta_2 > 0$ tq $\forall x \neq x_0$ vérifiant $|x - x_0| < \eta_2$

on a $\left| \frac{g(x)}{\psi(x)} - 1 \right| < \varepsilon \iff |g(x) - \psi(x)| < \varepsilon |\psi(x)|$

Alors pour $\eta = \min(\eta_1, \eta_2)$ on a que $|x - x_0| < \eta$

$\Rightarrow |f(x) + g(x) - \varphi(x) - \psi(x)| \leq |f(x) - \varphi(x)| + |g(x) - \psi(x)|$

$< \varepsilon (|\varphi(x)| + |\psi(x)|) = \varepsilon |\varphi(x) + \psi(x)|$

La dernière égalité est vérifiée puisque φ et ψ sont de même signe au voisinage de x_0 (quitte à prendre un η plus petit on se retrouve dans ce voisinage).

Donc si φ et ψ sont strictement positives on a

$|\varphi| + |\psi| = \varphi + \psi = |\varphi + \psi|$ et si elles sont strictement négatives on a

$|\varphi| + |\psi| = -\varphi - \psi = -(\varphi + \psi) = |\varphi + \psi|$.

<u>Remarque</u>: On aurait pu travailler avec $x_0 = +\infty$ pour coller avec l'exemple.

Finalement on a que $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \eta > 0$ tq $\forall x \neq x_0$, $|x - x_0| < \eta \Rightarrow$

$\left| \frac{f(x) + g(x)}{\varphi(x) + \psi(x)} - 1 \right| < \varepsilon$ ce qui signifie $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) + g(x)}{\varphi(x) + \psi(x)} = 1$

donc que $f + g \underset{x_0}{\sim} \varphi + \psi$.

Ex 2

On a d'après la définition des équivalents (et sans hypothèse de non annulation de φ sur un voisinage de x_0) que

$f = u c_1 \varphi$ et $g = v c_2 \varphi$ avec $\lim_{x \to x_0} u(x) = \lim_{x \to x_0} v(x) = 1$. Par conséquent

$f + g = (u c_1 + v c_2)\varphi$ avec $\lim_{x \to x_0} (c_1 u(x) + c_2 v(x)) = c_1 + c_2$.

Si $c_1 + c_2 \neq 0$, en posant $w(x) = \dfrac{c_1 u(x) + c_2 v(x)}{c_1 + c_2}$ on a bien

$f + g = w(c_1 + c_2)\varphi$ avec $\lim_{x \to x_0} w(x) = 1$ donc que

$$f + g \underset{x_0}{\sim} (c_1 + c_2)\varphi$$

Et si $c_1 + c_2 = 0$, en posant $\varepsilon(x) = c_1 u(x) + c_2 v(x)$ on a bien $f + g = \varepsilon(x)\varphi$ avec $\lim_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0$ donc que

$f + g = o_{x_0}(\varphi)$.

Ex 3.

(1) On a $\ln(x^2+1) - \ln x = \ln\left(x^2\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)\right) - \ln x =$

$= \ln(x^2) + \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) - \ln x = 2\ln x - \ln x + \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)$

$= \ln(x) + \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)$.

Or $\lim_{x \to +\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) = 0$ donc $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x) + \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)}{\ln x} =$

$= 1 + \lim_{x \to +\infty} \dfrac{\ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)}{\ln x} = 1 + 0 = 1$ car

$\lim_{x \to +\infty} \dfrac{1}{\ln(x)} = 0$ et $\lim_{x \to +\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) = 0$

Par conséquent $\ln(x^2+1) - \ln(x) \underset{\infty}{\sim} \ln(x)$

(2) On a $\ln(x^2+1) - 2\ln(x) = \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)$ comme ci-dessus.

Alors $\lim\limits_{x\to\infty} x^2 \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) = \lim\limits_{X\to 0} \frac{\ln(1+X)}{X} = 1$

en posant $X = \frac{1}{x^2}$

limite apprise au lycée avec la règle de l'Hôpital ou la formule de Taylor

En conclusion $\ln(x^2+1) - 2\ln(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{x^2}$

Rappel formule de Taylor pour f dérivable sur $I =]a-r, a+r[$:

$$f(\underset{a+h}{\underset{\shortparallel}{x}}) = f(a) + f'(a)(\underset{h}{\underset{\shortparallel}{x-a}}) + \underbrace{(\overset{h}{\overset{\shortparallel}{x-a}})\varepsilon(\overset{h}{\overset{\shortparallel}{x-a}})}_{o(x-a)} \text{ avec } \lim_{x\to a} \varepsilon(x-a) = 0$$

Donc $\underset{a=0 \quad h=X}{\ln(1+X)} = \underset{\overset{\shortparallel}{0}}{\ln(1)} + \underbrace{\frac{1}{1+X}(0)}_{\overset{\shortparallel}{1}} X + X\varepsilon(X) = X + X\varepsilon(X)$

et $\lim\limits_{X\to 0} \frac{\ln(1+X)}{X} = 1$.

Ex 4.

On a $\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{1}{\sin x}} = \exp\left(\frac{1}{\sin x}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\right)$.

Or $\ln(1+x) \underset{0}{\sim} x$ d'où $\ln(1-x) \underset{0}{\sim} -x$ et $-\ln(1-x) \underset{0}{\sim} x$.

D'après l'exercice 2 on a que $\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \ln(1+x) - \ln(1-x) \underset{0}{\sim} 2x$.

On sait aussi que $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ donc $\sin x \underset{0}{\sim} x$.

Alors $\frac{\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)}{2x} \underset{0}{\sim} \frac{2x}{x} = 2$ donc $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)}{\sin x} = 2$.

On peut obtenir la même chose en travaillant comme en (*) ci-dessous.

Par conséquent

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{1}{\sin x}} = \lim_{x\to 0} \exp\left(\frac{\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)}{\sin x}\right) = e^2.$$

(*) On peut aussi voir que $\ln\left(1+\frac{2x}{1-x}\right) \sim \frac{2x}{1-x}$ par composition à gauche de $\ln(1+X) \sim X$ pour $X = \frac{2x}{1-x}$. Et $\frac{2x}{1-x} \sim 2x$. D'où $\frac{\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)}{\sin x} \underset{0}{\sim} \frac{2x}{\sin x} \underset{0}{\sim} 2$.

⚠ Attention : on n'a pas en général $f \underset{x_0}{\sim} g \Rightarrow e^f \underset{x_0}{\sim} e^g$ comme le montre l'exemple $x^2+x \underset{+\infty}{\sim} x^2$ et $\exp(x^2+x) \underset{\infty}{\not\sim} \exp(x^2)$ car $\exp(x) \underset{\infty}{\not\to} 1$. On a cependant $\lim\limits_{x_0} f-g = 0 \Leftrightarrow e^f \underset{x_0}{\sim} e^g$ (**) car ceci équivaut à $\lim\limits_{x_0} e^{f-g} = 1$. Ceci est vrai et peut s'appliquer ci-dessous.

Ex2 1) C'est correct car $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right) = 1$

2) C'est correct car $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2+n}{n^2} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right) = 1$

(on bien $n \underset{\infty}{\sim} n$ et $n \underset{\infty}{\sim} n+1$ et on multiplie ces équivalents)

3) C'est correct car $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln(10^6 n)}{\ln n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{6\ln 10 + \ln n}{\ln n} =$

$= \lim\limits_{n\to\infty} \frac{6\ln 10}{\ln n} + 1 = 1$

4) C'est incorrect car $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\exp(n+10^{-6})}{\exp n} = \lim\limits_{n\to\infty} \exp(10^{-6}) = e^{10^{-6}} \neq 1$.

5) C'est incorrect car $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\exp(2n)}{\exp n} = \lim\limits_{n\to\infty} \exp(n) = +\infty \neq 1$

6) C'est correct car $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln(n+1)}{\ln n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln(1+\frac{1}{n}) + \ln(n)}{\ln(n)} =$

(**) pouvant s'appliquer ici car $\lim\limits_{n\to\infty} n = \infty$ et $n \underset{\infty}{\sim} n+1$

$= \lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{\ln(1+\frac{1}{n})}{\ln n}\right) = 1$

(***) On a aussi un résultat analogue à (**) pour ln : si $f \underset{x_0}{\sim} g$ et $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \neq 1$ alors $\ln f \underset{x_0}{\sim} \ln g$ car $\lim\limits_{x\to x_0} \left(\frac{\ln f}{\ln g} - 1\right) = \lim\limits_{x\to x_0} \frac{\ln\left(\frac{f}{g}\right)}{\ln g} = 0$ vu que $\lim\limits_{x\to x_0} \ln g \neq 0$.

Ex6. 1) $u_n = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1} = \frac{n+1-n+1}{n^2-1} = \frac{2}{n^2-1}$ et $n^2-1 \sim n^2$

donc $u_n = \frac{2}{n^2-1} \sim \frac{2}{n^2}$.

2) $v_n = \sqrt{n-1}\left(\sqrt{\frac{n+1}{n-1}} - 1\right) = \sqrt{n-1}\left(\sqrt{\frac{n-1+2}{n-1}} - 1\right) =$

$= \sqrt{n-1}\left(\sqrt{1+\frac{2}{n-1}} - 1\right)$. On $\sqrt{1+x} - 1 \underset{0}{\sim} \frac{1}{2}x$ car

$f(x) - f(0) \underset{0}{\sim} f'(0)x$ si $f'(0) \neq 0$ et pour $f(x) = \sqrt{1+x}$

on a bien $f'(0) = \frac{1}{2}$. Donc $\sqrt{1+\frac{2}{n-1}} - 1 \sim \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{n-1} = \frac{1}{n-1}$

et $v_n = \sqrt{n-1}\left(\sqrt{1+\frac{2}{n-1}} - 1\right) \sim \frac{\sqrt{n-1}}{n-1} = \frac{1}{\sqrt{n-1}} \sim \frac{1}{\sqrt{n}}$ car

$\sqrt{n} \sim \sqrt{n-1}$ vu que $\sqrt{\frac{n-1}{n}} = \sqrt{1-\frac{1}{n}} \to 1$ quand $n \to \infty$.

Variante $u_n = \frac{2}{\sqrt{n}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}} + \sqrt{1-\frac{1}{n}}\right)} \sim \frac{1}{\sqrt{n}}$ car $\sqrt{1+\frac{1}{n}} + \sqrt{1-\frac{1}{n}} \sim 2$.

3) $w_n = \dfrac{n^3 - \sqrt{1+n^2}}{\ln n - 2n^2}$ on remarque que $n^3 - \sqrt{n^2+1} \sim n^3$

, car $\lim_{n\to\infty} \dfrac{n^3 - \sqrt{n^2+1}}{n^3} = \lim_{n\to\infty} 1 - \dfrac{n\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}{n^3} = 1$, et que

$\ln n - 2n^2 \sim -2n^2$, car $\lim_{n\to\infty} \dfrac{\ln n - 2n^2}{-2n^2} = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \dfrac{\ln n}{-2n^2}\right) = 1$

Alors $w_n \sim \dfrac{n^3}{-2n^2} = -\dfrac{n}{2}$.

4) On sait que $\sin x \underset{0}{\sim} x$ et $\dfrac{1}{\sqrt{n+1}} \neq 0$, $\forall n$.

Alors par composition à gauche on a

$$\sin \frac{1}{\sqrt{n+1}} \sim \frac{1}{\sqrt{n+1}} \sim \frac{1}{\sqrt{n}}$$

Pour le dernier équivalent on utilise

$\lim_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{1+\frac{1}{n}} = 1$.

On aurait pu aussi calculer $\lim_{n\to\infty} \left(\sin \dfrac{1}{\sqrt{n+1}}\right) / \left(\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}\right) = 1$

Ex 7.

1) En 0 c'est $\ln x$ qui "emporte" et en $+\infty$ c'est x

donc on a $x+1+\ln x \underset{0}{\sim} \ln x$ et $x+1+\ln x \underset{\infty}{\sim} x$,

Vérification : $\lim_{x\to 0} \dfrac{x+1+\ln x}{\ln x} = 1$, $\lim_{x\to\infty} \dfrac{x+1+\ln x}{x} = 1$

2) On a $\lim_{x\to 0} \cos(\sin x) = 1$ donc $\cos(\sin x) \underset{0}{\sim} 1$. En plus intéressant il y a l'équivalent de $\cos(\sin x) - 1 \underset{0}{\sim} -\sin^2 x/2 \underset{0}{\sim} -\frac{x^2}{2}$.

3) On a $\cosh(\sqrt{x}) = \dfrac{e^{\sqrt{x}} + e^{-\sqrt{x}}}{2} \underset{\infty}{\sim} \dfrac{e^{\sqrt{x}}}{2}$ car $\lim_{x\to\infty} \dfrac{e^{\sqrt{x}} + e^{-\sqrt{x}}}{e^{\sqrt{x}}} =$

$= 1 + \lim_{x\to\infty} \dfrac{1}{e^{2\sqrt{x}}} = 1$.

4) On a $\frac{\sin x}{x} \underset{0}{\sim} 1$ et $\tan x \underset{0}{\sim} x$ et $\ln(1+x^2) \underset{0}{\sim} x^2$

Donc $\frac{\sin x \ln(1+x^2)}{x \tan x} \underset{0}{\sim} \frac{x^2}{x} = x$

5) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(\sin x)}{\ln(x)} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\cos x}{\sin x} \cdot x = 1$

règle de l'Hôpital ou bien en passant par

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(\sin x) - \ln x}{\ln x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)}{\ln x} = 0 = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(\sin x)}{\ln x} - 1$

Donc $\ln(\sin x) \underset{0}{\sim} \ln x$

6) On a $\ln(1 + \cos x - 1) \underset{0}{\sim} \cos x - 1$ car $\ln(1+x) \underset{0}{\sim} x$

et on peut composer à gauche car $\cos x \neq 1$ au voisinage de 0.

Et $\cos x - 1 \underset{0}{\sim} -\frac{x^2}{2}$ car $1 - \cos x = 2\left(\sin\frac{x}{2}\right)^2$.

Donc $\ln(\cos x) \underset{0}{\sim} -\frac{x^2}{2}$.

Ex 8.

On a

$$b_n = \frac{1}{n^2} \ll a_n = \frac{1}{n} \ll c_n = \frac{\ln n}{n} \ll f_n = 1$$

$$f_n = 1 \ll e_n = n \ll g_n = \sqrt{n e^n} \ll d_n = \frac{e^n}{n^3} \text{ car}$$

$$\frac{b_n}{a_n} = \frac{1}{n} \longrightarrow 0 \qquad \frac{a_n}{c_n} = \frac{1}{\ln n} \longrightarrow 0 \qquad \frac{c_n}{f_n} = \frac{\ln n}{n} \longrightarrow 0$$

$$\frac{f_n}{e_n} = \frac{1}{n} \longrightarrow 0 \qquad \frac{e_n}{g_n} = \sqrt{\frac{n}{e^n}} \longrightarrow 0 \qquad \frac{g_n}{d_n} = \sqrt{\frac{n^7}{e^n}} \longrightarrow 0$$

Ex 9. On a

$$f_3(x) = \frac{1}{x} \ll 2 = f_4(x) \ll f_5(x) = \ln x \ll f_6(x) = \sqrt{x}\ln x \ll f_1(x) = x$$

$$f_1(x) = x \ll f_7(x) = \frac{e^x}{\sqrt{x}} \ll f_2(x) = e^x \quad \text{car}$$

$$\frac{f_3(x)}{f_4(x)} = \frac{1}{2x} \xrightarrow{\infty} 0 \quad , \quad \frac{f_4(x)}{f_5(x)} = \frac{2}{\ln(x)} \xrightarrow{\infty} 0 \quad , \quad \frac{f_5(x)}{f_6(x)} = \frac{1}{\sqrt{x}} \xrightarrow{\infty} 0$$

$$\frac{f_6(x)}{f_1(x)} = \frac{\ln x}{\sqrt{x}} \xrightarrow{\infty} 0 \quad , \quad \frac{f_1(x)}{f_7(x)} = \frac{\sqrt{x}\cdot x}{e^x} \xrightarrow{\infty} 0 \quad , \quad \frac{f_7(x)}{f_2(x)} = \frac{1}{\sqrt{x}} \xrightarrow{\infty} 0$$

Ex 10.

1) On a $\frac{\ln(1+x)+x^2}{x} = \frac{\ln(1+x)}{x} + x \xrightarrow{0} 1$ et $\frac{x^2+x^3}{x^2} = 1+x \xrightarrow{0} 1$

d'où les équivalents demandés, par conséquent

$$\frac{\ln(1+x)+x^2}{x^2+x^3} \underset{0}{\sim} \frac{x}{x^2} = \frac{1}{x} \quad \text{et donc}$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(1+x)+x^2}{x^2+x^3} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty .$$

2) On a $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 2x}{2x} = \lim\limits_{X \to 0} \dfrac{\sin X}{X} = 1$ pour $X = 2x$

on l'a bien par composition à gauche de $\sin X \underset{0}{\sim} X$

avec $X = 2x$.

De même $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan 3x}{3x} = \lim\limits_{X \to 0} \dfrac{\tan X}{X} = 1$

pour $X = 3x$ on l'a bien par composition à

gauche de $\tan X \underset{0}{\sim} X$ avec $X = 3x$.

On en déduit $\dfrac{\sin 2x}{\tan 3x} \underset{0}{\sim} \dfrac{2x}{3x} = \dfrac{2}{3}$

d'où $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\sin 2x}{\tan 3x} = \dfrac{2}{3}$.

Ex 11

1) $1-\cos x \underset{0}{\sim} \frac{x^2}{2}$ $\quad 1+2x \underset{0}{\sim} 1$ $\quad x^2-x^4 \underset{0}{\sim} x^2$

donc $\frac{(1-\cos x)(1+2x)}{x^2-x^4} \underset{0}{\sim} \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2}$ et

la limite recherchée est $\frac{1}{2}$.

2) $\sin\sqrt{x} \underset{0}{\sim} \sqrt{x}$ et $(x+3)\sqrt{x+3} \underset{0}{\sim} 3\sqrt{3}$

donc $x(3+x)\frac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{x}\sin\sqrt{x}} \underset{0}{\sim} 3\sqrt{3}$ et la limite

recherchée est $3\sqrt{3}$.

3) $\ln(1+\sin x) \underset{0}{\sim} \sin x \underset{0}{\sim} x$, $\tan 6x \underset{0}{\sim} 6x$

donc $\frac{\ln(1+\sin x)}{\tan 6x} \underset{0}{\sim} \frac{1}{6}$

4) On pose $y = x - \frac{\pi}{2}$ et on cherche alors (pour $x = y + \frac{\pi}{2}$)

$\lim_{y \to 0} \frac{\ln(\sin^2(y+\frac{\pi}{2}))}{y^2}$. Or $\sin(y+\frac{\pi}{2}) = \cos y$ d'où

$\ln(\sin^2(y+\frac{\pi}{2})) = \ln(1-\sin^2 y) \underset{0}{\sim} -\sin^2 y \underset{0}{\sim} -y^2$ d'où

$\frac{\ln(\sin^2(y+\frac{\pi}{2}))}{y^2} \underset{0}{\sim} -1$ et la limite recherchée vaut -1.

5) $\ln(1+\cos x - 1) \underset{0}{\sim} \cos x - 1 \underset{0}{\sim} -\frac{x^2}{2}$ et $1-\cos 2x \underset{0}{\sim} \frac{(2x)^2}{2} = 2x^2$

d'où $\frac{\ln(\cos x)}{1-\cos 2x} \underset{0}{\sim} -\frac{x^2}{4x^2} = -\frac{1}{4}$ et la limite recherchée vaut $-\frac{1}{4}$.

6) On a que $\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x+1}}{x+2} = 0$ donc $\ln\left(1-\frac{\sqrt{x+1}}{x+2}\right) \underset{\infty}{\sim} -\frac{\sqrt{x+1}}{x+2}$

Alors $\sqrt{4x+1}\,\ln\left(1-\frac{\sqrt{x+1}}{x+2}\right) \underset{\infty}{\sim} -\frac{\sqrt{(4x+1)(x+1)}}{x+2} \underset{\infty}{\sim} -2$ donc

la limite recherchée vaut -2.

7) Cette limite vaut $1-1=0$ sans besoin de passer par les équivalents. Cependant si on veut les utiliser on peut dire que $\lim_{x\to\infty} e^{\frac{1}{x^2}} - e^{\frac{1}{(x+1)^2}} = \lim_{x\to\infty} e^{\frac{1}{x^2}}\left(1-e^{\frac{1}{(x+1)^2}-\frac{1}{x^2}}\right)$

On $e^{\frac{1}{x^2}} \underset{\infty}{\sim} 1$ et $\frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{x^2} = \frac{-2x-1}{(x^2+x)^2} \xrightarrow[x\to\infty]{} 0$

Comme $1-e^{x} \underset{0}{\sim} -x$ on a que $1-e^{\frac{-2x-1}{(x^2+x)^2}} \underset{\infty}{\sim} \frac{2x+1}{(x^2+x)^2} \underset{\infty}{\sim} \frac{2}{x^3}$

Donc $e^{\frac{1}{x^2}} - e^{\frac{1}{(x+1)^2}} \underset{\infty}{\sim} \frac{2}{x^3}$ et la limite recherchée vaut bien 0.

8) On a $\left(\frac{x}{\sin x}\right)^{\frac{\sin x}{x-\sin x}} = \exp\left(\frac{\sin x}{x-\sin x}\ln\left(\frac{x}{\sin x}\right)\right)$ et

$\ln\left(\frac{x}{\sin x}\right) = \ln\left(1+\frac{x}{\sin x}-1\right)$ avec $\frac{x}{\sin x}-1 \xrightarrow[x\to 0]{} 0$

Alors $\ln\left(1+\frac{x}{\sin x}-1\right) \underset{0}{\sim} \frac{x}{\sin x}-1 = \frac{x-\sin x}{\sin x}$

Et $\frac{\sin x}{x-\sin x}\ln\left(\frac{x}{\sin x}\right) \underset{0}{\sim} \frac{\sin x}{x-\sin x} \cdot \frac{x-\sin x}{\sin x} = 1$

Par conséquent $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x-\sin x}\ln\left(\frac{x}{\sin x}\right) = 1$ et donc

$\lim_{x\to 0} \exp\left(\frac{\sin x}{x-\sin x}\ln\left(\frac{x}{\sin x}\right)\right) = e$

9) On a $1-\cos x \underset{0}{\sim} \frac{x^2}{2}$ et $\arctan x \underset{0}{\sim} x$ et $\tan x \underset{0}{\sim} x$ d'où

$\frac{(1-\cos x)\arctan x}{x\tan x} \underset{0}{\sim} \frac{x^2}{2}\,\frac{x}{x\cdot x} = \frac{x}{2}$ et la limite

recherchée vaut 0.

ex 12.

1) On calcule $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+2x)}{x\ln x}$ et on trouve, vu que

$\ln(1+2x) \underset{0}{\sim} 2x$, $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+2x)}{x\ln x} = \lim_{x\to 0} \frac{2x}{x\ln x} = \lim_{x\to 0} \frac{2}{\ln x} = 0$

Ceci signifie que $\ln(1+2x) = o_0(x\ln x) = O_0(x\ln x)$

2) On calcule $\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2+3x}\,\ln(x^2)\sin x}{x\ln x}$ et on trouve, vu

que $\frac{\sqrt{x^2+3x}}{x} \underset{\infty}{\sim} 1$ et que $\ln(x^2) = 2\ln x$,

$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2+3x}}{x} \frac{2\cancel{\ln(x)}}{\cancel{\ln x}} \sin x = \lim_{x\to\infty} 2\sin x$ qui n'existe pas. Or $|\sin x| \leq 1$

donc on cherche plutôt une majoration. En effet

$\left| \frac{\sqrt{x^2+3x}}{x} 2\sin x \right| = \left| \sqrt{1+\frac{3}{x}}\, 2\sin x \right| \leq 2\sqrt{1+\frac{3}{x}} < 4$ pour x

assez grand. Par conséquent $\sqrt{x^2+3x}\,\ln(x^2)\sin x = O_\infty(x\ln x)$

3) Il n'y a pas d'indétermination ici donc on peut calculer directement $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2+6}{x^2-4} = \frac{7}{-3} \underset{1}{\sim} \frac{x^2+6}{x^2-4}$.

4) On a $x+2^x \underset{+\infty}{\sim} 2^x$ car $\lim\limits_{x\to a} \frac{x}{2^x} = 0$

et $\sqrt{x+2^x} \underset{+\infty}{\sim} 2^{\frac{x}{2}}$ car $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{\frac{x+2^x}{2^x}} = \lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{1+\frac{1}{2^x}} = 1$.

Or $2^{\frac{x}{2}} = e^{\frac{x}{2}\ln 2} \xrightarrow[x\to\infty]{} \infty$ qui est la limite recherchée

5) On a $f(x) = \frac{x^2-5x+6}{x^3-8} = \frac{(x-2)(x-3)}{(x-2)(x^2+2x+4)} = \frac{x-3}{x^2+2x+4} \underset{2}{\sim} \frac{-1}{12}$

qui est la limite recherchée. On peut aussi poser $y = x-2$ et on obtient $f(x) = g(y) = \frac{y-1}{y^2+6y+12} \underset{0}{\sim} -\frac{1}{12}$.

6) On a $(1+x+x^2)^{\frac{1}{2}} - 1 \underset{0}{\sim} \frac{x+x^2}{2}$ car $(1+X)^\alpha - 1 \underset{0}{\sim} \alpha X$ pour $\alpha \neq 0$

$\left(\begin{array}{l}\text{en posant } X = x+x^2 \\ \text{et vu que } \lim\limits_{x\to 0} x+x^2 = 0\end{array}\right)$. Donc $f(x) = \frac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{x} \underset{0}{\sim} \frac{x+x^2}{2x} = \frac{x+1}{2}$

$\underset{0}{\sim} \frac{1}{2}$, qui est aussi la limite recherchée.

7) On a $|\sin(x)| \leq 1$ et $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$ donc $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$

mais on ne peut pas donner un meilleur équivalent en $+\infty$ de $\frac{\sin x}{x}$

car $\sin x$ n'a pas de limite en $+\infty$.

8) En $+\infty$ c'est e^x qui emporte sur les puissances de x donc

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3+e^x}{3x^3+1} = \lim_{x\to+\infty} e^x\left(\frac{x^3}{e^x}+1\right)\frac{1}{3x^3+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^3}\frac{1}{\left(3+\frac{1}{x^3}\right)} = +\infty$$

et on remarque que ce qui a compté dans le calcul de cette limite était $\frac{e^x}{3x^3}$ qui semble être l'équivalent de la fonction en $+\infty$.

Vérifions cela par un calcul de limite :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3+e^x}{1+3x^3}\cdot\frac{3x^3}{e^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{x^3}{e^x}+1}{\frac{1}{3x^3}+1} = 1.$$

9) $$\lim_{x\to1} \frac{x^3-2x^2-x+2}{x^3-3x^2+3x-1} = \lim_{x\to1} \frac{(x-1)(x+1)(x-2)}{(x-1)^3} = \lim_{x\to1} \frac{(x+1)(x-2)}{(x-1)^2} =$$

$= \lim_{x\to1} \frac{-2}{(x-1)^2} = -\infty$ et on voit que ce qui a compté dans le calcul de limite était $-\frac{2}{(x-1)^2}$ qui semble être l'équivalent de la fonction en 1. Vérifions cela par un calcul de limite : $\lim_{x\to1} \frac{(x+1)(x-2)}{(x-1)^2}\cdot\frac{(x-1)^2}{-2} = \lim_{x\to1} \frac{(x+1)(x-2)}{-2} = 1.$

10) On a $\sqrt{1+x}-1 \underset{0}{\sim} \frac{x}{2}$ et puisque $\lim_{x\to0} \frac{x}{2} = 0$

on peut passer au ln dans cette équivalence en vertu du résultat utile : Si $f \underset{a}{\sim} g$ et $\lim_a f = \lim_a g \neq 1$ alors $\ln f \underset{a}{\sim} \ln g$

car $\lim_a \left(\frac{\ln f}{\ln g}-1\right) = \lim_a \frac{\ln f-\ln g}{\ln g} = \lim_a \frac{\ln\left(\frac{f}{g}\right)}{\ln g} = \lim_a \frac{0}{\ln g} = 0$

car $\lim_a g \neq 1$ donc $\lim_a \ln g \neq 0$.

On a alors $\ln(\sqrt{1+x}-1) \underset{0^+}{\sim} \ln\frac{x}{2} = \ln x - \ln 2 \underset{0^+}{\sim} \ln x$. Donc $x\ln(\sqrt{1+x}-1) \underset{0^+}{\sim} x\ln x \xrightarrow[x\to0^+]{} 0$.

11) $\ln(x+\sqrt{x}) = \ln(\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)) = \ln\sqrt{x} + \ln(1+\sqrt{x}) \underset{0^+}{\sim} \ln\sqrt{x} = \frac{\ln x}{2}$

car $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\ln|\sqrt{x}| + \ln(1+\sqrt{x})}{\ln(\sqrt{x})} = \lim\limits_{x\to 0^+} 1 + \frac{\ln(1+\sqrt{x})}{\ln(\sqrt{x})} = 1$

Donc $2x\ln(x+\sqrt{x}) \underset{0^+}{\sim} x\ln x \xrightarrow[x\to 0^+]{} 0$.

12) $\frac{x^3-2x^2+3}{x\ln x} = \frac{x^2-2x+\frac{3}{x}}{\ln x} \underset{+\infty}{\sim} \frac{x^2}{\ln x}$ car

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2-2x+\frac{3}{x}}{\ln x} \cdot \frac{\ln x}{x^2} = 1$. Et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2}{\ln x} = +\infty$ car

les puissances emportent sur $\ln x$ en $+\infty$.

13) $\frac{e^{\sqrt{x}+1}}{x+2} = \frac{e\,e^{\sqrt{x}}}{x+2} \underset{+\infty}{\sim} \frac{e\cdot e^{\sqrt{x}}}{x}$ car $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e\,e^{\sqrt{x}}}{x+2} \cdot \frac{x}{e\cdot e^{\sqrt{x}}} = 1$

Et $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{e\cdot e^{\sqrt{x}}}{x} = 0$ car l'exponentielle emporte sur les puissances en $+\infty$.

En effet $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{e\,e^{\sqrt{x}}}{(\sqrt{x})^2} = \lim\limits_{y=\sqrt{x}\to+\infty} \frac{e\,e^{y}}{y^2} = 0$.

14) On a $\ln(1+3x) \underset{0}{\sim} 3x$ donc $\frac{\ln(1+3x)}{2x} \underset{0}{\sim} \frac{3}{2}$ qui est la limite recherchée en 0.

15) $x^x - 1 = e^{x\ln x} - 1 \underset{0^+}{\sim} x\ln x$ car $x\ln x \xrightarrow[x\to 0^+]{} 0$ et

$e^X - 1 \underset{0}{\sim} X$ (en posant donc $X = x\ln x$). Aussi $\ln(1+x) \underset{0}{\sim} x$

donc $\frac{x^x-1}{\ln(1+x)} \underset{0^+}{\sim} \frac{x\ln x}{x} = \ln x \xrightarrow[x\to 0^+]{} -\infty$

16) $\ln\left(\frac{x^3+4}{-x^2+1}\right) = \ln\left(\frac{x^2\left(x+\frac{4}{x^2}\right)}{x^2\left(-1+\frac{1}{x^2}\right)}\right) = \ln\left(\frac{x+\frac{4}{x^2}}{-1+\frac{1}{x^2}}\right) =$

$= \ln\left(\frac{-x-\frac{4}{x}}{1-\frac{1}{x^2}}\right) = \ln\left(-x-\frac{4}{x}\right) - \ln\left(1-\frac{1}{x^2}\right) \underset{-\infty}{\overset{(*)}{\sim}} \ln\left(-x-\frac{4}{x}\right) \underset{-\infty}{\overset{(**)}{\sim}} \ln(-x)$

Pour $(*)$ on a bien $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{\ln\left(-x-\frac{4}{x}\right) - \ln\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}{\ln\left(-x-\frac{4}{x}\right)} = \lim\limits_{x\to-\infty} 1 - \frac{\ln\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}{\ln\left(-x-\frac{4}{x}\right)} = 1$

et pour $(**)$ on a $-x-\frac{4}{x} \underset{-\infty}{\sim} -x$ et on peut appliquer le

dans cette équivalence car $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-x-\frac{4}{x}\right) = +\infty = \lim\limits_{x\to-\infty}(-x) \neq 1$.

Donc $\frac{2}{x+1}\ln\left(\frac{x^3+4}{1-x^2}\right) \underset{-\infty}{\sim} \frac{2\ln(-x)}{x+1} \underset{-\infty}{\sim} \frac{2\ln(-x)}{x} \xrightarrow[x\to-\infty]{} 0$

car les puissances emportent sur ln en $+\infty$. En effet

$\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{2\ln(-x)}{x} = \lim\limits_{y=-x\to\infty} \frac{2\ln y}{-y} = 0$.

17) $f(x) = (x-2)^2 \ln(x^3-8) = (x-2)^2\ln\left((x-2)(x^2+2x+4)\right) =$

$= y^2\ln\left(y(y^2+6y+12)\right) = g(y)$ en posant $y=x-2$

On doit maintenant étudier $g(y)$ en 0^+. On a

$g(y) = y^2\ln y + y^2\ln(y^2+6y+12) \underset{0^+}{\sim} y^2\ln y$ car

$\ln y + \ln(y^2+6y+12) \underset{0^+}{\sim} \ln y$. Et $\lim\limits_{y\to0^+} g(y) = 0 = \lim\limits_{x\to2^+} f(x)$.

Pour revenir à f on a bien sûr $f(x) \underset{2^+}{\sim} (x-2)^2\ln(x-2)$.

18) On a déjà étudié en 15 l'équivalent de $\frac{x^x-1}{\ln(1+x)}$ en 0^+

et on a obtenu $\ln x$. Alors $\frac{x(x^x-1)}{\ln(1+x)} \underset{0^+}{\sim} x\ln x \xrightarrow[x\to 0^+]{} 0$.

19) On a $\ln x - \ln(x+2) = \ln\left(\frac{x}{x+2}\right) = \ln\left(\frac{x+2-2}{x+2}\right) =$

$= \ln\left(1 - \frac{2}{x+2}\right) \underset{+\infty}{\sim} -\frac{2}{x+2} \underset{+\infty}{\sim} -\frac{2}{x}$ car $\ln(1-X) \underset{0}{\sim} -X$ et

pour $X = \frac{2}{x+2}$ on a bien $X \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$.

Alors $x(\ln x - \ln(x+2)) \underset{+\infty}{\sim} -2$ qui est la limite recherchée.

On peut écrire aussi $x\ln x - x\ln(x+2) = x\ln(x) - x\ln\left(x\left(1+\frac{2}{x}\right)\right) =$

$= x\cancel{\ln x} - x\cancel{\ln x} - x\ln\left(1+\frac{2}{x}\right) \underset{+\infty}{\sim} -x\cdot\frac{2}{x} = -2$.

20) $\frac{e^x - e^{x^2}}{x^2-x} \underset{+\infty}{\sim} \frac{-e^{x^2}}{x^2}$ car $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x - e^{x^2}}{x^2-x} \cdot \frac{x^2}{-e^{x^2}} =$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} \left(1 - e^{x-x^2}\right) = 1$. Et $\lim\limits_{x\to+\infty} -\frac{e^{x^2}}{x^2} = -\infty$.

21) $(1+x)^{\ln x} = e^{\ln x \ln(1+x)}$ et $\ln(1+x) \underset{0}{\sim} x$. Donc

$\ln x \ln(1+x) \underset{0^+}{\sim} x\ln x$. Comme $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x = 0 = \lim\limits_{x\to 0^+} \ln(x)\ln(1+x)$

on peut dire que $\lim\limits_{x\to 0^+}(\ln(x)\ln(1+x) - x\ln x) = 0$ et donc que

$e^{\ln x\ln(1+x)} \underset{0^+}{\sim} e^{x\ln x} \xrightarrow[x\to 0^+]{} 1$. Ça aurait été plus intéressant

de demander un équivalent pour $(1+x)^{\ln x} - 1$ et on aurait obtenu

$e^{\ln x\ln(1+x)} - 1 \underset{0^+}{\sim} \ln x \ln(1+x) \underset{0^+}{\sim} x\ln x$.

22) $\left(\frac{x+1}{x-3}\right)^x = e^{x \ln\left(\frac{x-3+4}{x-3}\right)}$. On a $\ln\left(\frac{x-3+4}{x-3}\right) = \ln\left(1+\frac{4}{x-3}\right)$

avec $\frac{4}{x-3} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$. Alors $\ln\left(1+\frac{4}{x-3}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{4}{x-3} \underset{+\infty}{\sim} \frac{4}{x}$

et donc $x \ln\left(\frac{x+1}{x-3}\right) \underset{+\infty}{\sim} x \cdot \frac{4}{x} = 4$. Donc $e^{x \ln\left(\frac{x+1}{x-3}\right)} \underset{+\infty}{\sim} e^4$

qui est la limite recherchée.

23) $\left(\frac{x^3+5}{x^2+2}\right)^{\frac{x+1}{x^2+1}} = e^{\frac{x+1}{x^2+1} \ln\left(\frac{x^3+5}{x^2+2}\right)}$

On a $\frac{x^3+5}{x^2+2} \underset{+\infty}{\sim} x$ et donc $\ln\left(\frac{x^3+5}{x^2+2}\right) \underset{+\infty}{\sim} \ln x$. Comme

$\frac{x+1}{x^2+1} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{x}$ on obtient $\frac{x+1}{x^2+1} \ln\left(\frac{x^3+5}{x^2+2}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{\ln x}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$

Alors $e^{\frac{x+1}{x^2+1} \ln\left(\frac{x^3+5}{x^2+2}\right)} \underset{+\infty}{\sim} e^{\frac{1}{x}\ln x} \underset{+\infty}{\sim} e^0 = 1$.

24) $\left(\frac{e^x+1}{x+2}\right)^{\frac{1}{x+1}} = e^{\frac{1}{x+1} \ln\left(\frac{e^x+1}{x+2}\right)}$ et $\frac{e^x+1}{x+2} \underset{+\infty}{\sim} \frac{e^x}{x}$

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ on a aussi $\ln \frac{e^x+1}{x+2} \underset{+\infty}{\sim} \ln\left(\frac{e^x}{x}\right) = x - \ln x$

Donc $\frac{1}{x+1} \ln\left(\frac{e^x+1}{x+2}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{x-\ln x}{x+1} \underset{+\infty}{\sim} 1$ et $e^{\frac{1}{x+1} \ln\left(\frac{e^x+1}{x+2}\right)} \underset{+\infty}{\sim} e$.

25) $\ln(1+x)^{\frac{1}{\ln x}} = e^{\frac{1}{\ln x} \ln(\ln(1+x))}$ et $\ln(1+x) \underset{0}{\sim} x$

donc $\ln(\ln(1+x)) \underset{0^+}{\sim} \ln x$ et $\frac{1}{\ln x} \ln(\ln(1+x)) \underset{0^+}{\sim} \frac{\ln x}{\ln x} = 1$.

Donc $e^{\frac{1}{\ln x} \ln(\ln(1+x))} \underset{0^+}{\sim} e^1 = e$.

26)

$$\frac{x^{(x^{x-1})}}{x^{(x^x)}} = x^{(x^{x-1}-x^x)} = e^{(x^{x-1}-x^x)\ln x}$$

$x^{x-1} - x^x = x^{x-1}(1-x)$ et $x^{x-1} = e^{(x-1)\ln x}$

On a donc (vu que $(x-1)\ln x \underset{+\infty}{\sim} x\ln x$)

$\lim\limits_{x\to\infty} x^{x-1} = +\infty = \lim\limits_{x\to\infty} \ln x$ et comme $\lim\limits_{x\to\infty} 1-x = -\infty$

La limite recherchée est

$\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^{(x^{x-1})}}{x^{(x^x)}} = \lim\limits_{x\to\infty} e^{x^{x-1}(1-x)\ln x} = \lim\limits_{x\to\infty} e^{f(x)} = 0$ car

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = -\infty$. Même si $f(x) \underset{+\infty}{\sim} -x^x \ln x$ on ne peut pas passer aux exponentielles dans cette équivalence

car $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) + x^x \ln x = +\infty \neq 0$.

27) $\dfrac{(x+1)^x}{x^{x+1}} = \dfrac{e^{x\ln(1+x)}}{e^{(x+1)\ln x}} = e^{x\ln\left(x(1+\frac{1}{x})\right) - x\ln x - \ln x} =$

$= e^{\cancel{x\ln x} + x\ln(1+\frac{1}{x}) - \cancel{x\ln x} - \ln x} = e^{x\ln(1+\frac{1}{x}) - \ln x}$.

On a $\ln(1+\frac{1}{x}) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{x}$ donc $x\ln(1+\frac{1}{x}) \underset{+\infty}{\sim} 1$

et $\lim\limits_{x\to\infty} -\ln x = -\infty$. Alors $\lim\limits_{x\to\infty} e^{x\ln(1+\frac{1}{x}) - \ln x} = 0$

On a aussi $e^{x\ln(1+\frac{1}{x}) - \ln x} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{e}{x}$ car $e^{x\ln(1+\frac{1}{x})} \underset{+\infty}{\sim} e$

et $e^{-\ln x} = \dfrac{1}{e^{\ln x}} = \dfrac{1}{x}$. La limite nulle tombe ainsi $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{e}{x} = 0$.

28) $\dfrac{x\sqrt{\ln(x^2+1)}}{1+e^{x-3}} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{x\sqrt{\ln(x^2)}}{e^{x-3}}$ car $x^2+1 \underset{+\infty}{\sim} x^2$

et $\ln(x^2+1) \underset{+\infty}{\sim} \ln(x^2)$

On $\dfrac{x\sqrt{\ln(x^2)}}{e^{x-3}} = \dfrac{x\sqrt{2\ln(x)}\,e^3}{e^x} = \dfrac{\sqrt{2}\,e^3\,x\sqrt{\ln x}}{e^x} \xrightarrow[x\to\infty]{} 0$ par croissance comparée.

29) $\dfrac{x+2}{x^2 \ln x} \underset{0^+}{\sim} \dfrac{2}{x^2 \ln x} \xrightarrow{x \to 0^+} -\infty$ par croissance comparée

(c-à-d en utilisant $\lim\limits_{x \to 0^+} x^2 \ln x = 0^-$ avec $x^2 \ln x < 0$ $\forall\, x \in]0,1[$)

30) On pose $x+1 = y$ pour étudier la limite de $g(y)$ en 0^+ pour

$$g(y) = f(x) = \left((y-1)^2 - 1\right) \ln\left(7(y-1)^3 + 4(y-1)^2 + 3\right) =$$

$$= y(y-2) \ln\left(7y^3 - 21y^2 + 21y - \cancel{7} + 4y^2 - 8y + \cancel{4} + \cancel{3}\right) =$$

$$= y(y-2) \ln\left(7y^3 - 17y^2 + 13y\right) =$$

$$= y(y-2) \ln\left(y(7y^2 - 17y + 13)\right) \underset{0^+}{\sim} -2y\left[\ln y + \ln(7y^2 - 17y + 13)\right]$$

$$\underset{0^+}{\sim} -2y \ln y \xrightarrow[y \to 0^+]{} 0$$

L'équivalent pour f en $(-1)^+$ est donc $-2(x+1)\ln(x+1)$.