TD n°1

Langages et expressions rationnelles

Exercice 1 (Facteurs et occurrences)

1. *Compter les occurrences des lettres* a *et* b *dans les mots suivants :* a^3cbbca, $titi$, $aabgjdd$.
2. *Donner l'ensemble des couples de mots* (u, v) *tels que* $uv = abaac$.
3. *Un mot* u *est un* facteur *d'un mot* v *si* u *apparaît à l'intérieur de* v *:* v *s'écrit* w_1uw_2 *pour certains mots* w_1 *et* w_2 *(qui peuvent être vides). Le nombre d'*occurrences *d'un facteur* u *dans un mot* w *est le nombre de façons de voir* u *comme facteur de* w.

   Donner le nombre d'occurrences du facteur aba *dans le mot* $v = abababba$.
4. *Déterminer un mot de longueur 7 sur l'alphabet* $\{a, b, c\}$ *ayant le plus petit (respectivement, le plus grand) nombre possible de facteurs différents.*

Exercice 2 (Opérations sur les langages)

1. *Calculer* $\mathcal{LM}$ *pour les couples de langages suivants :*
   (a) $\mathcal{L} = \{a, ab, bb\}$ *et* $\mathcal{M} = \{\varepsilon, b, a^2\}$ *;*
   (b) $\mathcal{L} = \emptyset$ *et* $\mathcal{M} = \{a, ba, bb\}$ *;*
   (c) $\mathcal{L} = \{\varepsilon\}$ *et* $\mathcal{M} = \{a, ba, bb\}$ *;*
   (d) $\mathcal{L} = \{aa, ab, ba\}$ *et* $\mathcal{M} = \{a, b\}^*$.
2. *Montrer que le produit est une opération distributive par rapport à l'union, c'est-à-dire que, pour tous langages* $\mathcal{L}$, $\mathcal{M}$ *et* $\mathcal{N}$, *on a :* $\mathcal{L}(\mathcal{M} \cup \mathcal{N}) = (\mathcal{LM}) \cup (\mathcal{LN})$. *Montrer que le produit n'est pas distributif par rapport à l'intersection.*
3. *Pour chacune des égalités entre langages, dire si elle est correcte (justifier) ou incorrecte (donner un contre-exemple) :*
   (a) $\mathcal{M}^* = \mathcal{M}^* \cdot \mathcal{M}^*$
   (b) $\mathcal{M}^* = (\mathcal{M} \cdot \mathcal{M})^*$
   (c) $\mathcal{M}^* = \mathcal{M} \cdot \mathcal{M}^*$
   (d) $\mathcal{M}^* = (\mathcal{M}^*)^*$
   (e) $\mathcal{M} \cdot (\mathcal{N} \cdot \mathcal{M})^* = (\mathcal{M} \cdot \mathcal{N})^* \cdot \mathcal{M}$
   (f) $(\mathcal{M} \cup \mathcal{N})^* = \mathcal{M}^* \cup \mathcal{N}^*$
   (g) $(\mathcal{M} \cap \mathcal{N})^* = \mathcal{M}^* \cap \mathcal{N}^*$
   (h) $(\mathcal{M} \cup \mathcal{N})^* = (\mathcal{M}^* \cdot \mathcal{N}^*)^*$
   (i) $(\mathcal{M} \cup \mathcal{N})^* = (\mathcal{M}^* \cdot \mathcal{N})^* \cdot \mathcal{M}^*$

Exercice 3 (Écriture d'expressions rationnelles) *Donner une expression rationnelle pour le langage sur l'alphabet* $\{a, b\}$ *des mots :*

1. *contenant exactement un a ;*
2. *contenant exactement deux a ;*
3. *contenant au moins deux a ;*
4. *contenant au moins un a et un b ;*
5. *contenant un nombre pair de a ;*
6. *contenant le facteur aa ;*
7. *ne contenant pas le facteur aa ;*
8. *ne contenant pas le facteur ab ;*
9. *ne contenant pas le facteur aba ;*
10. *contenant le même nombre de a que de b.*

Exercice 4 (Commutation) *Soient* u *et* v *deux mots. On dit que* u *et* v commutent *si l'on a* $uv = vu$*. Montrer que* u *et* v *commutent si et seulement s'il existe un mot* w *et deux entiers positifs ou nuls* m *et* n *vérifiant* $u = w^m$ *et* $v = w^n$*.*