TD n°6

Lemme d'Arden - L'algorithme de Brzozowski et McCluskey

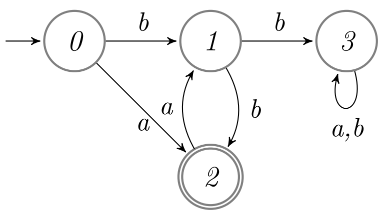
De l'Automate à l'Expression Rationnelle - Lemme d'Arden

Exercice 1 (Lemme d'Arden) *Utiliser le lemme d'Arden pour résoudre le système d'équations suivant :*

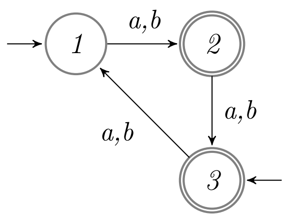
$$\begin{cases} L_1 = aL_2 + bL_4 \\ L_2 = aL_4 + bL_3 \\ L_3 = (a+b)L_3 + \epsilon \\ L_4 = aL_4 + \epsilon \end{cases}$$

Exercice 2 (De l'Automate à l'Expression Rationnelle) *Pour chacun des trois automates donnés au-dessous :*

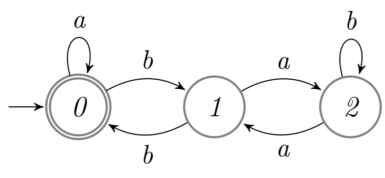
1. *Déterminer le système d'équations associé à $\mathcal{A}_i$.*
2. *Résoudre ce système en utilisant le lemme d'Arden. En déduire une expression rationnelle pour le langage $\mathcal{L}(\mathcal{A}_i)$.*



$\mathcal{A}_1$



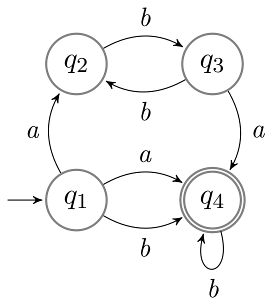
$\mathcal{A}_2$



$\mathcal{A}_3$

Exercice 3 (L'algorithme de Brzozowski et McCluskey) *Le but de cet exercice est de transformer un automate en une expression rationnelle par l'algorithme de Brzozowski et McCluskey.*

1. *Un automate est dit fortement normalisé s'il possède un état initial unique auquel aucune transition ne mène et un état final unique sans sortie transition.*
   — *L'automate $\mathcal{A}$ est-il fortement normalisé ?*
   — *Sinon, donnons un automate équivalent à $\mathcal{A}$ qui est fortement normalisé.Nous l'appelons $\mathcal{B}$.*



$\mathcal{A}$

2. *Nous voulons éliminer, un après l'autre, tous les états de $\mathcal{B}$ sauf l'état final et initial et produire un automate généralisé équivalent à $\mathcal{B}$. Nous procédons comme suit :*
   — *Nous notons $E_{p,q}$ l'expression rationnelle de l'état p vers q.*
   — *On élimine un état p et on remplace (ou on ajoute si nécessaire) l'expression rationnelle $E_{q,r}$ par $E_{q,r} + E_{q,p}E^{\star}_{p,p}E_{p,r}$ pour tous états q, r différent de p.*

   Éliminez tous les états de B sauf l'état initial et final en utilisant l'explication ci-dessus.
3. *Quelle est l'expression rationnelle de $\mathcal{A}$?*

Exercice 4 (Bonus) *Nous considérons l'alphabet $\Sigma_n = [1, n] \times [1, n]$ [1], et nous définissons :*

$$L = \{(a_1, a_2)(a_2, a_3)\cdots(a_m, a_{m+1}) \mid a_1 = 1,\ \ a_{m+1} = n,\ \ m \geqslant 1\}$$

1. *Donner un automate de taille linéaire (par rapport à n) reconnaissant L. Nous appelons cet automate $\mathcal{A}$.*
2. *Appliquez l'algorithme de Brzozowski et McCluskey pour obtenir une expression rationnelle pour L et et nous l'appelons r.*
3. *Quelle est la taille de l'expression rationnelle r ?*

1. $[1, n] = \{1, \cdots, n\}$