Université Paris Diderot Paris 7
Licence L2 (S3)
2019-2020

Département de Sciences Exactes
Algèbre et analyse élémentaires III
MI3

(Un) Corrigé de l'examen Partiel

9 Novembre 2019

Durée : 3 heures.

1. **Exercice 1.** On considère les trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$

$$u_1 = (1,-1,1)\ ,\ u_2 = (1,0,1) \text{ et } u_3 = (0,1,-1)\ .$$

   (a) Forment-ils un système libre dans $\mathbb{R}^3$?

   (b) Tout vecteur de $\mathbb{R}^3$ est-il engendré par le système $\{u_1, u_2, u_3\}$?

   (c) Trouver les scalaires λ, μ, ν tels que

$$e_2 = (0,1,0) = \lambda u_1 + \mu u_2 + \nu u_3\ .$$

Indications.

(a) Étudions les combinaisons linéaires de ces trois vecteurs qui sont nulles soit

$$\lambda u_1 + \mu u_2 + \nu u_3 = 0 \Leftrightarrow \lambda(1,-1,1) + \mu(1,0,1) + \nu(0,1,-1) = (0,0,0)$$

ou

$$\lambda u_1 + \mu u_2 + \nu u_3 = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \\ \nu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\ .$$

Par la méthode du pivot de Gauss, on a successivement

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \\ \nu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \\ \nu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

puis

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \\ \nu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \\ \nu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\ .$$

Notre système est donc un système homogène de rang 3 de trois équations à trois inconnues. Il admet donc une unique solution : la solution nulle. Donc le système $\{u_1, u_2, u_3\}$ est libre.

(b) Dire que tout vecteur $u = (x, y, z)$ de $\mathbb{R}^3$ est-il engendré par le système $\{u_1, u_2, u_3\}$ c'est dire que le système

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \\ \nu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

admet au moins une solution en (λ, μ, ν) . Or ce système d'équations est de rang 3 et il est équivalent à

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \\ \nu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \\ \nu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ x+y \\ z-x \end{pmatrix}$$

puis

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \\ \nu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \\ \nu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ x+y \\ x-z \end{pmatrix} .$$

Ce système admet une unique solution. Donc tout vecteur de $\mathbb{R}^3$ est bien engendré par le système $\{u_1, u_2, u_3\}$. Ce système est libre et générateur dans $\mathbb{R}^3$. C'est donc une base de $\mathbb{R}^3$. On voit de plus que les solutions sont

$$\nu = x - z \ , \ \mu = x + y - \nu = y + z \text{ et } \lambda = x - \mu = x - y - z \ .$$

(c) Trouver les scalaires λ, μ, ν tels que

$$e_2 = (0, 1, 0) = \lambda u_1 + \mu u_2 + \nu u_3$$

c'est appliquer le pivot de Gauss à la matrice :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

soit

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

et

$$\begin{cases} \lambda + \mu & = & 0 \\ \mu + \nu & = & 1 \\ \quad -\nu & = & 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda & = & -1 \\ \mu & = & 1 \\ \nu & = & 0 \end{cases} .$$

Mais nous aurions pu appliquer la (fin de la) question précédente :

$$\nu = 0\ ,\ \mu = 1 + 0 = 1 \text{ et } \lambda = 0 - \mu = -1\ .$$

Finalement on remarque que la matrice de passage de la base $\{u_1, u_2, u_3\}$ à la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est donnée (grâce à la fin de la deuxième question) par

$$\begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \\ \nu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\ .$$

On remarquera bientôt en cours que

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\ .$$

2. **Exercice 2**. Déterminer les limites suivantes :
   (a) $\lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt[3]{x^3 + x^2 + 1} - \sqrt[3]{x^3 - x^2 + 1} \right)$
   (b) $\lim_{x \to 0} \dfrac{\cos(x) - 1}{\sin(x^2)}$

   Indications.
   (a) Pour déterminer $\lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt[3]{x^3 + x^2 + 1} - \sqrt[3]{x^3 - x^2 + 1} \right)$, nous pouvons utiliser une identité remarquable ou utiliser un développement limité en posant $h = \frac{1}{x}$. On a

$$\sqrt[3]{x^3 + x^2 + 1} = x \sqrt[3]{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^3}} = x \sqrt[3]{1 + h + h^3}\ .$$

Mais

$$\sqrt[3]{1+u} = (1+u)^{\frac{1}{3}} = 1 + \frac{u}{3} + \frac{\frac{1}{3} \times \frac{-2}{3}}{2} u^2 + u^2 \epsilon(u) = 1 + \frac{u}{3} - \frac{u^2}{9} + u^2 \epsilon(u)$$

si u tend vers 0 . Pour notre expression cela donne

$$\sqrt[3]{x^3 + x^2 + 1} = x \left(1 + \frac{h + h^3}{3} - \frac{(h + h^3)^2}{9} + h^2 \epsilon(h) \right)$$

puisque $u \sim_{h \to 0} h$. A l'ordre 2 , nous avons donc

$$\sqrt[3]{x^3 + x^2 + 1} = x \left(1 + h - \frac{h^2}{9} + h^2 \epsilon(h) \right) = x + 1 - \frac{1}{9x} + \frac{\epsilon(x)}{x}\ .$$

De façon analogue, nous avons

$$\sqrt[3]{x^3 - x^2 + 1} = x\sqrt[3]{1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^3}} = x\sqrt[3]{1 - h + h^3}$$

soit

$$\sqrt[3]{x^3 - x^2 + 1} = x\left(1 + \frac{-h + h^3}{3} - \frac{(-h + h^3)^2}{9} + h^2\epsilon(h)\right)$$

et

$$\sqrt[3]{x^3 - x^2 + 1} = x\left(1 - h - \frac{h^2}{9} + h^2\epsilon(h)\right) = x - 1 - \frac{1}{9x} + \frac{\epsilon(x)}{x} \ .$$

Donc

$$\sqrt[3]{x^3 + x^2 + 1} - \sqrt[3]{x^3 - x^2 + 1} = \left(x + 1 - \frac{1}{9x}\right) - \left(x - 1 - \frac{1}{9x}\right) + \frac{\epsilon(x)}{x} = 2 + \frac{\epsilon(x)}{x} \ .$$

Bref

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt[3]{x^3 + x^2 + 1} - \sqrt[3]{x^3 - x^2 + 1}\right) = 2 \ .$$

Il nous faudrait faire un développement limité à l'ordre 3 (au moins) pour savoir cette cette limite (asymptote horizontale) se fait par valeur supérieure ou non.

(b) On sait que

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + x^3\epsilon(x)$$

et

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + x^3\epsilon(x)$$

soit

$$\sin(x^2) = x^2 - \frac{x^6}{6} + x^6\epsilon(x) = x^2 + x^3\epsilon(x) \ .$$

Donc

$$\frac{\cos(x) - 1}{\sin(x^2)} = \frac{1 - \frac{x^2}{2} + x^3\epsilon(x) - 1}{x^2 + x^3\epsilon(x)} = \frac{-\frac{x^2}{2} + x^3\epsilon(x)}{x^2 + x^3\epsilon(x)}$$

et

$$\frac{\cos(x) - 1}{\sin(x^2)} = \left(-\frac{1}{2} + x\epsilon(x)\right)(1 - x\epsilon(x)) = -\frac{1}{2} + x\epsilon(x) \ .$$

Donc

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos(x) - 1}{\sin(x^2)} = -\frac{1}{2} \ .$$

On peut aussi dire que

$$\cos(x) - 1 \sim_{x\to 0} -\frac{x^2}{2} \text{ et } \sin(x^2) \sim_{x\to 0} x^2$$

donc

$$fraccos(x) - 1\sin(x^2) \sim_{x\to 0} -\frac{1}{2}\,.$$

3. **Exercice 3**. On considère les quatre vecteurs de $\mathbb{R}^4$ suivant :

   $w_1 = (1,0,1,0)$, $w_2 = (1,1,-1,-1)$, $w_3 = (0,1,1,0)$ et $w_4 = (0,-1,2,1)$.

   On notera F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par ces quatre vecteurs. Soit $u = (2,1,5,1)$.

   (a) Montrer que u est un vecteur de F .

   (b) Le système $\{u, w_1\}$ est-il libre ? Même question pour $\{u, w_2\}$, $\{u, w_3\}$ et $\{u, w_4\}$.

   (c) Compléter le vecteur u par un ou plusieurs vecteurs w_i de façon à ce que le système $\{u, w_{j_1}, \ldots\}$ soit à la fois libre et générateur dans F .

   Indications.

   (a) Le vecteur u est un vecteur de F si et seulement s'il existe des coefficients réels $(\lambda, \mu, \nu, \rho)$ tels que

   $$u = \lambda w_1 + \mu w_2 + \nu w_3 + \rho w_4\,.$$

   Cela revient à étudier le système

   $$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \\ \nu \\ \rho \end{pmatrix}$$

   ou encore à appliquer le pivot de Gauss à

   $$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 & 6 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

   soit

   $$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 & 6 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

puis

$$\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&0&0&2\\0&1&1&-1&1\\1&-1&1&2&6\\0&-1&0&1&1\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&0&0&2\\0&1&0&-1&-1\\0&1&1&-1&1\\0&-2&1&2&4\end{array}\right)$$

et

$$\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&0&0&2\\0&1&1&-1&1\\1&-1&1&2&6\\0&-1&0&1&1\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&0&0&2\\0&1&0&-1&-1\\0&0&1&0&2\\0&0&1&0&2\end{array}\right)$$

et finalement

$$\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&0&0&2\\0&1&1&-1&1\\1&-1&1&2&6\\0&-1&0&1&1\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&0&0&2\\0&1&0&-1&-1\\0&0&1&0&2\\0&0&0&0&0\end{array}\right).$$

Ce système (de rang 3) admet donc une infinité de solutions à 1 paramètre. Donc u est bien engendré par les quatre vecteurs générateurs de F donc appartient à F .

Lorsque l'on résout le système on obtient

$$\begin{cases}\lambda+\mu &= 2\\ \mu-\rho &= -1\\ \nu &= 2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\lambda &= 2-\mu\\ \rho &= 1+\mu\\ \nu &= 2\end{cases}$$

(μ pouvant prendre toute valeur réelle).

(b) D'après le cours, le système $\{u, w_1\}$ sera libre si et seulement si le vecteur w_1 n'est pas proportionnel au vecteur u ($w_1 \notin \mathbb{R}u$). C'est évident car deux des coordonnées de w_1 sont nulles ce qui ne peut être le cas d'un multiple (non nul) de u . De façon analogue, on vérifie facilement que $\{u, w_2\}$, $\{u, w_3\}$ et $\{u, w_4\}$ sont libres car non proportionnels deux à deux.

(c) Utilisons le raisonnement du théorème de la base incomplète. On peut compléter le vecteur u par le vecteur w_1 tout d'abord d'après ce qui précède. Étudions si w_3 est un vecteur engendré par u et w_1 . Cela revient à étudier le rang de

$$\begin{pmatrix}1&2&0\\0&1&1\\1&6&1\\0&1&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&0\\0&1&1\\0&4&1\\0&1&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&0\\0&1&0\\0&0&1\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

Donc le système $\{u, w_1, w_3\}$ est de rang 3 (c'est un système libre). Lorsque l'on a la notion de dimension, on a terminé. En effet, les 4 vecteurs engendrant F sont de rang 3 d'après la première question. Donc F est de dimension 3 . Or le système $\{u, w_1, w_3\}$ est un système de 3 vecteurs libres dans F . Il est nécessairement générateur d'après le cours. Ici, il conviendrait donc d'être sûr que les vecteurs w_2 et w_4 soient bien engendrés par $\{u, w_1, w_3\}$. Cela peut se voir avec

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 6 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

soit

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 6 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Ce qui montre bien que chacun des vecteurs w_2 et w_4 est une combinaison linéaire des vecteurs $\{u, w_1, w_3\}$.

4. **Exercice 4**. On souhaite comparer, lorsque x tend vers $+\infty$, les deux fonctions
$$f(x) = \frac{\ln(x^2 + 2x + 1)}{2} \text{ et } g(x) = \frac{\ln(x^3 + 3x^2 + 1)}{3}.$$

   (a) Donner le développement limité à l'ordre 2 de $\ln(1 + 2h + h^2)$ lorsque h tend vers 0 . En déduire le développement limité à l'ordre 2 de la fonction $f(x) - \ln(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$ [on pourra poser $h = \frac{1}{x}$].

   (b) Donner le développement limité à l'ordre 2 de $\ln(1 + 3h + h^3)$ lorsque h tend vers 0 . En déduire le développement limité à l'ordre 2 de la fonction $g(x) - \ln(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$ [on pourra de même poser $h = \frac{1}{x}$].

   (c) Montrer que les deux fonctions $f(x)$ et $g(x)$ sont équivalentes à la fonction $h(x) = \ln(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$. Montrer que le graphe de la fonction $h(x) = \ln(x)$ est asymptote aux deux graphes de $y = f(x)$ et $y = g(x)$ (lorsque x tend vers $+\infty$).

   (d) Positionner le graphe de $y = f(x)$ et $y = g(x)$ l'un par rapport à l'autre (lorsque x tend vers $+\infty$).

Indications.

(a) Le développement limité à l'ordre 2 de $\ln(1+2h+h^2)$ (lorsque h tend vers 0) est donné par

$$\ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + u^2\epsilon(u)$$

lorsque u tend vers 0 . Ici on a $u = 2h + h^2$ donc $u \sim_{h\to 0} 2h$. Soit

$$\ln(1+2h+h^2) = 2h + h^2 - \frac{(2h+h^2)^2}{2} + h^2\epsilon(h) = 2h - h^2 + h^2\epsilon(h) .$$

On peut aussi remarquer que

$$\ln(1+2h+h^2) = \ln\left((1+h)^2\right) = 2\ln(1+h) = 2h - h^2 + h^2\epsilon(h) .$$

On en déduit que

$$\ln(x^2+2x+1) = 2\ln(x) + \ln\left(1+2h+h^2\right) = 2\ln(x) + 2h - h^2 + h^2\epsilon(h)$$

soit

$$f(x) - \ln(x) = h - \frac{h^2}{2} + h^2\epsilon(h) .$$

(b) On a de même

$$\ln(1+3h+h^3) = 3h + h^3 - \frac{(3h+h^3)^2}{2} + h^2\epsilon(h) = 3h - \frac{9h^2}{2} + h^2\epsilon(h) .$$

Donc

$$\ln(x^3+3x^2+1) = 3\ln(x) + \ln\left(1+3h+h^3\right) = 3\ln(x) + 3h - \frac{9h^2}{2} + h^2\epsilon(h) .$$

Soit

$$g(x) - \ln(x) = h - \frac{3h^2}{2} + h^2\epsilon(h) .$$

(c) La différence entre la fonction $h(x) = \ln(x)$ et les fonctions $y = f(x)$ et $y = g(x)$ tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$. Donc ces trois graphes sont bien asymptotes. Par ailleurs

$$\frac{f(x)}{\ln(x)} = \frac{\ln(x) + h - \frac{h^2}{2} + h^2\epsilon(h)}{\ln(x)} = 1 + \frac{h}{\ln(x)} + \frac{h}{\ln(x)}\epsilon(x)$$

et cette expression tend bien vers 1 si x tend vers $+\infty$. On procède de façon analogue avec $g(x)$.

(d) On voit que

$$f(x)-g(x)=f(x)-\ln(x)+\ln(x)-g(x)=h-\frac{h^2}{2}+h^2\epsilon(h)-(h-\frac{3h^2}{2}+h^2\epsilon(h))$$

soit

$$f(x)-g(x)=h^2+h^2\epsilon(h)\ .$$

Donc le signe de cette expression est celui de h^2 lorsque h tend vers 0 .
Donc le graphe de g est situé au dessous de celui de f .

Ci-dessous le graphe de f est en bleu, celui de g en vert et celui de ln est en rouge.

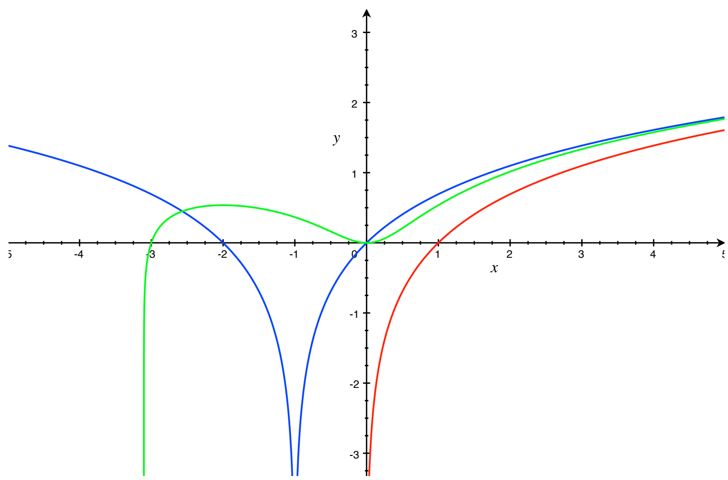

FIGURE 1 – Graphes comparés des fonctions f , g et ln