Contents

Chapter 1

Développements limités

1 Formule de Taylor-Young

Théorème 1.1. *Soit f une fonction définie au voisinage d'un point a, si f est n fois dérivable en a et si x est dans un voisinage de a, alors on peut écrire:*

$$f(x) = f(a) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(a)(x-a)^k}{k!} + o_a((x-a)^n).$$

Proof. □

2 Développements limités

2.1 Définitions

Définition 1.2. Soit a un réel et f une fonction définie sur $]a-\delta; a+\delta[$. On dit que f admet un développement limité d'ordre n au point a s'il existe un polynôme de degré n noté $\mathrm{PP}_n(f)$ tel que:
$f(x) = \mathrm{PP}_n(x-a) + o_a((x-a)^n)$
$f(x) = \alpha_0 + \alpha_1(x-a) + \alpha_2(x-a)^2 + \ldots + \alpha_n(x-a)^n + (x-a)^n\varepsilon(x-a)$ avec $\varepsilon(x-a) \underset{x \to a}{\longrightarrow} 0$.
PP_n s'appelle la partie principale du développement limité d'ordre n en a.

Remarque 1.3. En faisant le changement de fonction $g : x \longrightarrow f(x+a)$ on se ramène toujours au développement limité au point 0.

Remarque 1.4. La proposition précédente dit que: si f a un développement limité à l'ordre n en a, cela ne signifie pas que f' a un développement limité, ni même que f est dérivable en un point autre que a...

Par contre, si on connaît un développement limité de f à l'ordre n et si l'on sait que f' a un développement limité d'ordre $n-1$, la proposition ci-dessus nous dit que le développement limité de f s'obtient à partir de celui de f' en intégrant, donc le développement limité de f' s'obtient à partir de celui de f en dérivant terme à terme.

Notation. *$o(x^k)$ signifie $o_0(x^k)$.*

Proposition 1.5. *Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable. On suppose que $f'(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k(x-a)^k + o_a((x-a)^n)$, alors $f(x) = f(a) + \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{k+1}(x-a)^{k+1} + o_a((x-a)^{n+1})$.*

Définition 1.6. Soit $P = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k(x-a)^k$ un polynôme et $m \leq n$. On note $Tr_m(P)$ le polynôme $Q = \sum_{k=0}^{m} \alpha_k(x-a)^k$.

Proposition 1.7.

1. *Si f admet un développement limité à l'ordre n en 0, il est unique ($PP_n(f)$ est uniquement déterminé).*

2. *Si f admet un développement limité à l'ordre n en 0, alors f admet un développement limité à l'ordre k en 0 pour tout $k \leq n$, et $PP_k(f) = Tronc_k(PP_n(f))$.*

3. *f est continue en $0 \Leftrightarrow f$ admet un développement limité d'ordre 0 au point 0 dont le premier terme est $f(0)$.*

4. *f est dérivable en $0 \Leftrightarrow f$ admet un développement limité à l'ordre 1 au point 0.*

5. *Reformulation de Taylor-Young: si f est n fois dérivable en 0, alors f admet un développement limité d'ordre n en 0.* **Attention** *: si $n > 1$ la réciproque est fausse.*

Proof.

1. Supposons que $f(x) = P_1(x) + o(x^n) = P_2(x) + o(x^n)$ avec P_1, P_2 deux polynômes de degré au plus n.
   $Q = P_1 - P_2$ est un polynôme de degré au plus n
   $Q(x) = o(x^n) = o(1)$ car $o(x^n) \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 0$
   Donc le terme constant de $Q(x)$ est nul.
   Donc $Q(x) = xQ_1(x)$ avec $deg(Q_1) \leq n-1$.

$xQ_1(x) = o(x^n) \Rightarrow Q_1(x) = o(x^{n-1})$
On applique le même raisonnement : $Q_1(x) \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 0$
$Q_1(x) = xQ_2(x)$ avec $deg(Q_2) \leq n-2$
$Q(x) = x^2 Q_2(x)$, donc en itérant, on obtient :
$Q(x) = x^n Q_0(x)$ avec Q_0 de degré au plus 0. Mais alors
$Q(x) = o(x^n)$, donc $Q_0(x) = 0$

2. $f(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \ldots + \alpha_n x^n + o(x^n)$
$\Leftrightarrow f(x) = \sum_{j=0}^{n} \alpha_j x^j + o(x^n)$
$\Leftrightarrow f(x) = \sum_{j=0}^{k} \alpha_j x^j + \underbrace{\sum_{j=k+1}^{n} \alpha_j x^j + o(x^n)}_{o(x^j)}$

3. f est continue en 0.
$f(x) \underset{x \to 0}{\longrightarrow} f(0) \Leftrightarrow f(x) - f(0) \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 0$
$\Leftrightarrow f(x) - f(0) = o(1)$
$\Leftrightarrow f(x) = f(0) + o(1)$
$\Leftrightarrow$ f admet un développement limité d'ordre 0 en 0 dont le premier terme est $f(0)$.

4. f est dérivable en 0,
$\exists\, a \in \mathbb{R}$ tel que $\frac{f(x) - f(0)}{x} \underset{x \to 0}{\longrightarrow} a$
$\Leftrightarrow \frac{f(x) - f(0)}{x} - a \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 0$
$\Leftrightarrow \frac{f(x) - f(0)}{x} - a = o(1)$
$\Leftrightarrow \frac{f(x) - f(0)}{x} = a + o(1)$
$\Leftrightarrow f(x) - f(0) = ax + o(x)$
$\Leftrightarrow f(x) = f(0) + ax + o(x)$
$\Leftrightarrow$ f admet un développement limité à l'ordre 1 en 0 dont le premier terme est $f(0)$.

□

2.2 Calculs de développements limités

Première source de développements limités, la formule de Taylor-Young : si f est n fois dérivable en 0, f admet un développement limité à l'ordre n en 0 donné par

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + o(x^n).$$

Exemples 1.8. :

1. e^x admet un développement limité à l'ordre n en 0 pour tout $n \in \mathbb{N}$ donné par
$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n)$$
car $x \longrightarrow e^x$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et de dérivée e^x.

2. $(1+x)^\alpha$ est dérivable en 0 de dérivée $\alpha(1+X)^{\alpha-1}$ et est dérivable à l'ordre k au voisinage de 0, pour tout $k \in \mathbb{N}$, de dérivée k-ième :
$\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-k+1)(1+x)^{\alpha-k}$
Donc $(1+x)^\alpha$ admet un développement limité à l'ordre n en 0, $\forall n \in \mathbb{N}$, donné par :
$$(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!} x^k + o(x^n).$$

3. Si $\alpha = -1$, on obtient
$$\frac{1}{1+x} = 1 + \frac{-1}{1!}x + \frac{(-1)(-2)x^2}{2!} + \ldots + \frac{(-1)(-2)\ldots(-n)x^n}{n!} + o(x^n) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k + o(x^n).$$

4. Si $\alpha = \frac{1}{2}$, on obtient $\sqrt{1+x} = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\ldots\left(\frac{1}{2}-k+1\right)}{k!} x^k + o(x^n)$

5. De même, en dérivant on a
$$\cos(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k}}{2k!} + o(x^{2n})$$
et
$$\sin(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{k+1} x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+1}).$$

Proposition 1.9. *Si f et g sont deux fonctions qui admettent un développement limité à l'ordre n en 0 donnés par $f = P + o(x^n)$ et $g = Q + o(x^n)$ avec P et Q de degré $\leq n$, alors:*

1. *$f+g$ admet un développement limité à l'ordre n en 0 :*
   $f+g=(P+Q)+o(x^n)$.

2. *$f\cdot g$ admet un développement limité à l'ordre n en 0 :*
   $f\cdot g = Tr_n(P\cdot Q)+o(x^n)$

3. *Si $\lim\limits_{x\to 0} g(x)=0$, alors $f\circ g$ admet un développement limité à l'ordre n en 0 et $f\circ g = Tr_n(P(Q))+o(x^n)$*

Proposition 1.10. *Nous pouvons aussi utiliser la parité ou l'imparité pour calculer rapidement un développement limité:*
Soit f une fonction admettant un développement limité d'ordre n en 0 donné par $f=P+o(x^n)$.

- *Si f est une fonction paire, alors P est un polynôme pair.*
- *Si f est une fonction impaire, P est un polynôme impair.*

Exemple 1.11. $\tan(x)=x+\dfrac{x^3}{3}+o(x^3)=x+\dfrac{x^3}{3}+o(x^4)$ car $tan(x)$ est impaire.

Proposition 1.12. *Quotient.*
Si f admet un développement limité à l'ordre n en 0 et si $f(0)\neq 0$ alors $\dfrac{1}{f}$ admet un développement limité à l'ordre n en 0.

On utilise que $f(x)=f(0)+\sum_{k=1}^{n}\alpha_k x^k+o(x^n)$ et on obtient :

$$\frac{1}{f}=\frac{1}{f(0)+\sum_{k=1}^{n}\alpha_k x^k+o(x^n)}=\frac{1}{f(0)}\frac{1}{1+u}$$

où l'on pose $u=\sum_{k=1}^{n}\frac{\alpha_k}{f(0)}x^k+o(x^n)$. On utilise ensuite la composition des développements limités, vue plus haut.

Proposition 1.13. *Intégration et dérivation du développement limité.*
1) Soit f une fonction définie et dérivable au voisinage de 0. Si f' admet un développement limité à l'ordre n en 0, donné par $f'(x)=Q(x)+o(x^n)$, alors f admet un développement limité à l'ordre $n+1$ en 0, donné par :
$f(x)=f(0)+\displaystyle\int_0^x Q(t)\,\mathrm{d}t+o(x^{n+1})$
2) Si f admet un développement limité à l'ordre n en 0 donné par
$f(x)=P(x)+o(x^n)$, et si f' admet un développement limité à l'ordre $n-1$ en 0, alors :
$f'(x)=P'(x)+o(x^{n-1})$

Exemple 1.14. Posons $f(x)=\sqrt{1+x}$ et $g(x)=\sin(x)$.
On a $f(x)=1+\dfrac{x}{2}-\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{x^3}{16}+o(x^3)$ et $g(x)=x-\dfrac{x^3}{6}+o(x^3)$. Alors, on a :

1.

$$\begin{aligned}
\sqrt{1+x}+\sin(x) &= 1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+\frac{x^3}{16}+o(x^3)+x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)\\
&= 1+\frac{3x}{2}-\frac{x^2}{8}-\frac{5x^3}{48}+o(x^3);
\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
\sqrt{1+x}\,\sin(x) &= (1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+\frac{x^3}{16}+o(x^3))(x-\frac{x^3}{6}+o(x^3))\\
&= \mathrm{Tronc}_3\left((1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+\frac{x^3}{16})(x-\frac{x^3}{6})\right)+o(x^3)\\
&= \mathrm{Tronc}_3(x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{8}+\frac{x^4}{16}-\frac{x^3}{6}-\frac{x^4}{12}+\frac{x^5}{48}-\frac{x^6}{96})+o(x^3)\\
&= x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{8}-\frac{x^3}{6}+o(x^3)\\
&= x+\frac{x^2}{2}-\frac{7x^3}{24}+o(x^3);
\end{aligned}$$

3.

Développements limités usuels

(au voisinage de 0)

$$
\begin{aligned}
e^x &= 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n) \\
\mathrm{ch}(x) &= 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}) \\
\mathrm{sh}(x) &= x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2}) \\
\mathrm{th}(x) &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 - \frac{17}{315}x^7 + o(x^7) \\
\cos(x) &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}) \\
\sin(x) &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2}) \\
\tan(x) &= x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + o(x^7) \\
(1+x)^\alpha &= 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n) \\
\frac{1}{1+x} &= 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n) \\
\sqrt{1+x} &= 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{1.1.3.5\cdots(2n-3)}{2^n n!} x^n + o(x^n) \\
\frac{1}{\sqrt{1+x}} &= 1 - \frac{x}{2} + \frac{3}{8}x^2 - \frac{5}{16}x^3 + \cdots + (-1)^n \frac{1.3.5\cdots(2n-1)}{2^n n!} x^n + o(x^n) \\
\ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o(x^n) \\
\mathrm{argth}(x) &= x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+1}) \\
\arctan(x) &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+1}) \\
\mathrm{argsh}(x) &= x - \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{3}{8}\frac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^n \frac{1.3.5\cdots(2n-1)}{2^n n!} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2}) \\
\arcsin(x) &= x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{3}{8}\frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{1.3.5\cdots(2n-1)}{2^n n!} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2})
\end{aligned}
$$