L2 Informatique

Boughattas Sedki

U-Paris

29 novembre 2023

Théorème 1

$\chi_u(\lambda)$ est un polynôme de degré $n = \dim(E)$ en λ, de terme de plus haut degré donné par $(-1)^n\lambda^n$. Le terme de degré $(n-1)$ est $(-1)^{n-1}\operatorname{Tr}(u)\lambda^{n-1}$ et le terme de degré 0 est $\det(u)$.
L'ensemble des racines du polynôme χ_u dans $\mathbb{K}$ est $\mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(u)$, l'ensemble des valeurs propres de u.

Définition 1

Si $F_1, F_2, ..., F_n$ sont n sous-espaces vectoriels de E, on dit que la somme $\sum_{i=1}^{n} F_i$ est une somme directe si

$$\forall u \in F_1 + F_2 + ... + F_n, \ \exists! \ (u_1, u_2, ..., u_n) \in F_1 \times ... \times F_n \text{ tel que } \ u = \sum_{i=1}^{n} u_i.$$

On note la somme $\bigoplus_{i=1}^{n} F_i$ si les F_i sont en somme directe.

Proposition 1

Les sous-espaces propres sont en somme directe :

$$\sum_{\lambda \in \mathbf{Sp}(u)} E_\lambda(u) = \bigoplus_{\lambda \in \mathbf{Sp}(u)} E_\lambda(u).$$

Proposition 2

Dimension d'un sous-espace propre.
Soit λ une valeur propre et soit $m(\lambda)$ la multiplicité de λ comme racine du polynôme caractéristique. On a alors :

$$1 \leq \dim(E_\lambda(u)) \leq m(\lambda).$$

Définition 2

Une matrice $A \in M_n(\mathbb{K})$ est diagonalisable s'il existe une matrice inversible P et une matrice diagonale D dans $M_n(\mathbb{K})$ tels que $D = P^{-1}AP$.

Théorème 2

Un endomorphisme est diagonalisable si et seulement s'il existe une base de E formée de vecteurs propres de u.

Définition 3

Un endomorphime $u \in \mathscr{L}(E)$ est diagonalisable s'il existe une base $\mathscr{B}$ de E telle que $\operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$ est diagonale.

Théorème 3

Un endomorphisme est diagonalisable si et seulement s'il existe une base de E formée de vecteurs propres de u.

Théorème 4

Un endomorphisme $u \in \mathscr{L}(E)$ est diagonalisable si et seulement si $E = \bigoplus_{\lambda \in \mathbf{Sp}(u)} E_\lambda(u)$.

Définition 4

Un polynôme de $\mathbb{K}[X]$ est *scindé* s'il peut s'écrire comme le produit de polynômes de degré 1.

Théorème 5

Soit $u \in \mathscr{L}(E)$, alors u est diagonalisable si et seulement si

1. Son polynôme caractéristique χ_u est scindé ;
2. Pour toute valeur propre $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$ la dimension de l'espace propre associé à λ est égale à la multiplicité de λ comme racine du polynôme caractéristique :

$$\dim(E_\lambda(u)) = m(\lambda).$$

Théorème 6

Soit E un espace vectoriel de dimension n. Un endomorphisme $u \in \mathscr{L}(E)$ qui admet exactement n valeurs propres distinctes est diagonalisable.