Université Paris Cité – UFR d'Informatique
L2 Informatique, Math-Info, Bio-Info, Japonais-Info

Automates et analyse lexicale
Année 2023–2024

TD n°8

Lemme de l'Étoile & Propriétés de Clôture

Exercice 1 (Lemme de l'étoile) *On rappelle le lemme de l'étoile :*

> *Soit $\mathcal{L}$ un langage reconnaissable. Il existe un entier N tel que tout mot $u \in \mathcal{L}$ de taille supérieure ou égale à N admet une factorisation $u = xyz$ satisfaisant :*
> — $y \neq \epsilon$ *et* $|xy| \leq N$
> — $xy^kz \in \mathcal{L}$ *pour tout entier* $k \geq 0$.

Pour chacun des langages suivants, montrer s'il est reconnaissable ou non.

1. $\{a^m b^n : m, n \in \mathbb{N}\}$
2. $\{a^m b^n : m < n\}$
3. $\{a^n b^n\}$
4. $\{u^2 : u \in \{a, b\}^*\}$
5. $\{a^{2n} : n \in \mathbb{N}\}$
6. $\{a^{n^2} : n \in \mathbb{N}\}$
7. $\{a^p : p \text{ premier}\}$

Pour aller plus loin dans la non-rationalité...

Démontrer la non-rationalité d'un langage en utilisant les propriétés de clôture de $Rat = Rec$.

Le lemme d'itération n'est pas le seul outil pour montrer qu'un langage n'est pas rationnel. Pour cela on peut aussi utiliser les propriétés de clôture de la famille $Rat = Rec$ à condition de connaître déjà quelques langages non rationnels.

Vous connaissez déjà beaucoup de ces propriétés dont certaines dérivent de la définition même de $Rat = Rec$ alors que d'autres ont été démontrées ou indiquées en cours ou en TD.
On sait notamment que $Rat = Rec$ est clos sous : $\cup, \cdot, ^*, \cap, \mathcal{C}$ (complémentaire), $\setminus$ (différence d'ensembles), Δ (différence symétrique), $\sim$ (miroir), par préfixes, ...

Vous connaissez déjà également certains langages non rationnels dont vous pourrez vous servir, par exemple le langage $L_0 = \{a^n b^n | n \in \mathbb{N}\}$ que l'on a déjà démontré non rationnel par le lemme de l'étoile (Exo1 ci-dessus).

Exemple d'application.
On veut montrer que $L_1 = \{w \in \{a, b\}^* || w|_a = |w|_b\}$ n'est pas rationnel.
On remarque que : $L_1 \cap a^*b^* = L_0$. Or, si L_1 était rationnel alors son intersection avec un autre langage rationnel (dans ce cas a^*b^*) le serait aussi car $Rat = Rec$ est clos sous intersection. Mais on sait que cette intersection est L_0, qui n'est pas rationnel, donc L_1 ne peut pas l'être.

Note. Pour appliquer cette principe, il faut exprimer un langage dont on a déjà montré la non-rationnalité (dans l'exemple L_0) en fonction du langage dont on veut montrer la non-rationnalité (dans l'exemple L_1), de langages rationnels (dans l'exemple a^*b^*) et d'opérations sous lesquelles $Rat = Rec$ est fermée (dans l'exemple $\cap$, mais parfois on a besoin d'utiliser plusieurs opérations).

Exercice 2 *Utiliser les propriétés de clôture pour montrer que les langages décrits ci-dessous ne sont pas rationnels.*

1. $\{a^p : p \text{ non premier}\}$
2. $\{a^m b^n : m + n \text{ est un carré}\}$
3. $\{a^m b^n : m \neq n\}$
4. $\{u \in \{a, b, c\}^* : |u|_a = |u|_b\}$
5. $\{a^m b^n c^{m+n} : m, n \in \mathbb{N}\}$
6. $\{a^{n+2} b^n : n \in \mathbb{N}\}$
7. $\{uav : u, v \in \{a, b\}^*, \ |u| = |v|\}$
8. $\{u\widetilde{u} : u \in \{a, b\}^*\}$
9. $\{u^2 : u \in \{a, b\}^*\}$
10. $\{a^m b^n : m \geq n\}$
11. $\{a^m b^n : m < n\}$

Exercice 3 *Démontrer que le langage $\{a^n ba^{2n} : n \in \mathbb{N}\}$ n'est pas rationnel en utilisant uniquement les propriétés de fermeture de la classe $Rec = Rat$ et le fait que $\{a^n b^n : n \in \mathbb{N}\}$ n'est pas rationnel.*

Suggestion : combiner l'inverse d'un morphisme $\varphi : \{a, b, c\}^* \longrightarrow \{a, b\}^*$, l'intersection avec un langage rationnel de $\{a, b, c\}^*$ et un autre morphisme $\psi : \{a, b, c\}^* \longrightarrow \{a, b\}^*$. Un telle combinaison d'opérations préservant la rationalité est dite une transduction.