Université de Paris
Licence L2 (S3)
2022-2023

Département de Sciences Exactes
Algèbre et analyse élémentaires III
MI3

Examen Terminal
9 Janvier 2023, 13h-16h

Tous les documents sont interdits, ainsi que les calculatrices, téléphones portables et montres connectées. Une attention particulière sera portée sur la rédaction. Toute affirmation doit être justifiée. Le sujet se termine sur le verso de cette feuille.

***Exercice* 1 :** Calculer les limites suivantes :

(1) $\lim_{x\to 0} \frac{1+\ln(1+x)-e^x}{1-\cos x}$ (2) $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{1+3x}-1-\sin(x)}{\sin(x^2)}$

(3) $\lim_{x\to +\infty} \sqrt{x^2+2x-1}-x$ (4) $\lim_{x\to 0} \frac{x^x-1}{\ln(1+x)}$

Réponse :

(1) $\lim_{x\to 0} \frac{1+\ln(1+x)-e^x}{1-\cos x}$.

On commence par chercher un équivalent au dénominateur : $1-\cos(x) \sim x^2/2$, donc on utilisera un DL_2 du numérateur.

$1+\ln(1+x)-e^x = 1+x-x^2/2-1-x-x^2/2+o(x^2) \sim -x^2$.

Ainsi $\frac{1+\ln(1+x)-e^x}{1-\cos x} \sim \frac{-x^2}{\frac{x^2}{2}} \sim -2$.

Donc

$$\lim_{x\to 0} \frac{1+\ln(1+x)-e^x}{1-\cos x} = -2$$

(2) $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{1+3x}-1-\sin(x)}{\sin(x^2)}$.

Le dénominateur $\sin(x^2)$ est équivalent à x^2.

$\sqrt[3]{1+x} = 1+\frac{1}{3}x-\frac{1}{9}x^2+o(x^2)$ et $\sin(x) = x+o(x^2)$.

Donc $\sqrt[3]{1+3x} = 1+x-x^2+o(x^2)$, ce qui donne

$\sqrt[3]{1+3x}-1-\sin(x) = -x^2+o(x^2) \sim -x^2$

Ainsi $\frac{\sqrt[3]{1+3x}-1-\sin(x)}{\sin(x^2)} \sim \frac{-x^2}{x^2} \sim -1$

Donc

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{1+3x}-1-\sin(x)}{\sin(x^2)} = -1$$

(3) $\lim_{x\to +\infty} \sqrt{x^2+2x-1}-x$.

Posons $t = 1/x$, alors t est dans un voisinage de 0 quand x est dans un voisinage de ∞.

On a : $\sqrt{x^2+2x-1} = x\sqrt{1+(2/x-1/x^2)} = x\sqrt{1+(2t-t^2)}$, comme t proche de 0, alors $2t-t^2$ est aussi proche de 0.

Or au voisinage de 0, on a le DL_1 : $\sqrt{1+t} = 1 + \frac{t}{2} + o(t)$,
donc $\sqrt{1+(2t-t^2)} = 1 + \frac{2t-t^2}{2} + o(t) = 1 + t + o(t)$.
Ainsi $\sqrt{x^2+2x-1} = x\sqrt{1+(2t-t^2)} = x(1+t+o(t)) = x(1+1/x+o(1/x)) = x+1+o(1)$.
D'où $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+2x-1} - x = \lim\limits_{x\to+\infty} (x+1+o(1)) - x = 1$.

(4) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^x - 1}{\ln(1+x)}$.

Remarquons d'abord que $x^x = e^{x\ln(x)}$.
On rappelle que $e^x - 1 \sim x$ quand la quantité x est proche de 0.
On sait que $\lim\limits_{x\to 0} x\ln(x) = 0$. Ainsi si x est proche de 0 alors la quantité $x\ln(x)$ est aussi proche de 0, donc d'après la remarque et le rappel ci-dessus on $x^x - 1 = e^{x\ln(x)} - 1 \sim x\ln(x)$.
D'autre part $\ln(1+x) \sim x$, donc on a : $\dfrac{x^x-1}{\ln(1+x)} \sim \dfrac{x\ln(x)}{x} \sim \ln(x)$, d'où

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^x - 1}{\ln(1+x)} = -\infty$$

***Exercice* 2 :**

(1) Donner le développement limité de la fonction $\ln(1+x)$ à l'ordre 3 en 0.

Réponse : $\ln(1+x) = x - x^2/2 + x^3/3 + o(x^3)$.

(2) En déduire les réels a_0, a_1, a_2 et a_3 tels que pour tout x au voisinage de $+\infty$ on a :
$\ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right) = a_0 + \dfrac{a_1}{x} + \dfrac{a_2}{x^2} + \dfrac{a_3}{x^3} + o\left(\dfrac{1}{x^3}\right)$.

Réponse : On a $\ln(1+x) = x - x^2/2 + x^3/3 + o(x^3)$ quand la quantité x est proche de 0.
Quand x tend vers ∞, alors la quantité $1/x$ est proche de 0.
Alors on a $\ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right) = \ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{2x^2} + \dfrac{1}{3x^3} + o\left(\dfrac{1}{x^3}\right)$.
D'où $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, $a_2 = -1/2$ et $a_3 = 1/3$.

(3) On considère la fonction $f(x) = x^2 \ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right)$. En utilisant ce qui précède, déterminer l'asymptote à la courbe de f au voisinage de $+\infty$.

Réponse : D'après ce qui précède, pour x proche de ∞ on a :
$f(x) = x^2 \ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right) = x^2\left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{2x^2} + \dfrac{1}{3x^3} + o\left(\dfrac{1}{x^3}\right)\right) = x - 1/2 + \dfrac{1}{3x} + o(1/x)$.
Donc

$$f(x) = x - 1/2 + \frac{1}{3x} + o(1/x)$$

et la droite $y = x - 1/2$ est une asymptote à la courbe de f en $+\infty$.

(4) Préciser la position de la courbe par rapport à son asymptote.

Réponse : On a

$$f(x) = x - 1/2 + \frac{1}{3x} + o(1/x)$$

avec $y = x - 1/2$ une asymptote à la courbe de f en $+\infty$.
Donc $f(x) - (x - 1/2) = \frac{1}{3x} + o(1/x) > 0$ quand x tend vers $+\infty$.
Ainsi la courbe est au dessus de l'asymptote en $+\infty$.

***Exercice* 3 :** Soit $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ une application linéaire définie par :

$$f(x,y,z,t) = (x+z+t, x-y+2t, 2x-y+z+3t, y+z-t)$$

(1) Donner une base et un système d'équations de $\mathrm{Im}(f)$.

Réponse : $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ est la matrice de f dans la base canonique.

$\mathrm{Im}(f)$ est générée par les quatre vecteurs colonnes u_1, u_2, u_3 et u_4 de la matrice A.

Un pivot en ligne de la matrice correspondante $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & x \\ 1 & -1 & 0 & 2 & y \\ 2 & -1 & 1 & 3 & z \\ 0 & 1 & 1 & -1 & t \end{pmatrix}$ donne la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & x \\ 0 & -1 & -1 & 1 & y-x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -x-y+z \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2x+z+t \end{pmatrix}$$

D'où $\left\{ \begin{array}{rrrrl} -x & -y & +z & & = 0 \\ -2x & & +z & +t & = 0 \end{array} \right.$ est un système d'équations de $\mathrm{Im}(f)$.

La matrice finale du pivot en ligne : $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & x \\ 0 & -1 & -1 & 1 & y-x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -x-y+z \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2x+z+t \end{pmatrix}$ nous donne que la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ est aussi un échelonnement en ligne de la matrice A.

Le premier coefficient non nul de la première ligne est dans la première colonne, le vecteur u_1 est aussi dans la première colonne de A, donc u_1 fait partie de la base de $\mathrm{Im}(f)$.

Le premier coefficient non nul de la ligne suivante est dans la deuxième colonne, le vecteur u_2 est aussi dans la deuxième colonne de A, donc u_2 fait partie de la base de $\mathrm{Im}(f)$.

Donc (u_1, u_2) est une base de $\mathrm{Im}(f)$.

(2) Déterminer une base de $\ker(f)$.

Réponse : $(x,y,z,t) \in \ker(f)$ si et seulement si $\left\{ \begin{array}{rrrrl} x & & +z & +t & = 0 \\ x & -y & & +2t & = 0 \\ 2x & -y & +z & +3t & = 0 \\ & y & +z & -t & = 0 \end{array} \right.$ ssi $\left\{ \begin{array}{rrrrl} x & & +z & +t & = 0 \\ & y & +z & -t & = 0 \end{array} \right.$

ssi $x = -z-t$, $y = -z+t$.

Donc $(x,y,z,t) \in \ker(f)$ si et seulement si $(x,y,z,t) = (-z-t, -z+t, z, t) = z(-1,-1,1,0) + t(-1,1,0,1)$.

D'où $(-1,-1,1,0), (-1,1,0,1)$ est une base de $\ker(f)$.

(3) Les sous-espaces $\ker(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont-ils supplémentaires ?

Réponse : Ils est facile de voir que la juxtaposition des bases de $\ker(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ forment une base de $\mathbb{R}^4$, donc ils sont supplémentaires.

***Exercice* 4 :** On considère l'application linéaire $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ de matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -2 & 2 & 1 \\ 4 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ dans la base canonique $\mathcal{C}$ de $\mathbb{R}^3$.

(1) Donner la définition d'une valeur propre et d'un vecteur propre de la matrice A.

Réponse :

(2) Montrer que le polynôme caractéristique $\chi_A(X) = \det(A - X\cdot I_3) = \begin{vmatrix} 3-X & -1 & -1 \\ -2 & 2-X & 1 \\ 4 & -2 & -1-X \end{vmatrix}$ est égal à $(X-1)^2(2-X)$.

Réponse :

$$\chi_A(X) = \begin{vmatrix} 3-X & -1 & -1 \\ -2 & 2-X & 1 \\ 4 & -2 & -1-X \end{vmatrix} = \begin{array}{c} \\ \left|\begin{array}{ccc} 3-X & -1 & 1-X \\ -2 & 2-X & 1-X \\ 4 & -2 & 1-X \end{array}\right| \end{array} \begin{array}{c} C_1+C_2+C_3 \\ \\ \\ \end{array} =$$

$$(1-X)\begin{vmatrix} 3-X & -1 & 1 \\ -2 & 2-X & 1 \\ 4 & -2 & 1 \end{vmatrix}^{C_1+C_2+C_3} = (1-X)\begin{vmatrix} 3-X & -1 & 1 \\ -5+X & 3-X & 0 \\ 1+X & -1 & 0 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \\ L_2 - L_1 \\ L_3 - L_1 \end{array} =$$

$$(1-X)\left(-(-5+X)-(1+X)(3-X)\right) = (1-X)(X^2-3X+2) = (1-X)(X-1)(X-2) = (X-1)^2(2-X)$$

(3) Donner une base pour chacun des sous-espaces $E_1 = \{u = (x,y,z)/g(u) = u\}$ et $E_2 = \{u = (x,y,z)/g(u) = 2u\}$.

Réponse : (i) $(x,y,z) \in E_1$ ssi $g(x,y,z) = (x,y,z)$ ssi $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ ssi $\begin{cases} 3x - y - z = x \\ -2x + 2y + z = y \\ 4x - 2y - z = z \end{cases}$ ssi

$\begin{cases} 2x - y - z = 0 \\ -2x + y + z = 0 \\ 4x - 2y - 2z = 0 \end{cases}$

Un pivot nous donne $u = (1,0,2), v = (0,1,-1)$ base de E_1.

(ii) $(x,y,z) \in E_1$ ssi $g(x,y,z) = (x,y,z)$ ssi $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ ssi $\begin{cases} 3x - y - z = 2x \\ -2x + 2y + z = 2y \\ 4x - 2y - z = 2z \end{cases}$ ssi

$\begin{cases} x - y - z = 0 \\ -2x + z = 0 \\ 4x - 2y - 3z = 0 \end{cases}$

Un pivot nous donne $w = (1,-1,2)$ comme base de E_2.

(4) Donner une base $\mathcal{B}$ telle que la matrice de f dans cette base est une matrice diagonale.

Réponse : (u,v) est une base de E_1, w est une base de E_2, E_1 et E_2 sont supplémentaires, donc $\mathcal{B} = (u,v,w)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

On a : $g(u) = u$, $g(v) = v$ et $g(w) = 2w$. Donc la matrice de g dans la base $\mathcal{B}$ est donnée par :

$$M_{\mathcal{B}}(g) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} g(u) & g(v) & g(w) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ u \\ v \\ w \end{array}$$

qui est diagonale.

Notons $\mathcal{D}$ cette dernière.

(5) Déterminer une matrice diagonale D et une matrice P tels que $D = P^{-1}AP$.

Réponse : Si on note $\mathcal{C}$ la base canonique alors alors $A = M_{\mathcal{C}}(g)$; et si on considère

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

la matrice de passage de $\mathcal{C}$ à $\mathcal{B}$, alors la formule de changement de base donne :

$$M_{\mathcal{B}}(g) = P^{-1}M_{\mathcal{C}}(g)P$$

c-à-d

$$D = P^{-1}AP$$

(6) Calculer D^n pour un entier $n \geq 0$.

Réponse : $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, donc

$$D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$$

(7) Calculer A^n pour un entier $n \geq 0$.

Réponse : On a $D = P^{-1}AP$, donc $A = PDP^{-1}$, ce qui donne $A^n = PD^nP^{-1}$ avec

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

et

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2^n \\ 0 & 1 & -2^n \\ 2 & -1 & 2^{n+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+2^{n+1} & 1-2^n & 1-2^n \\ 2-2^{n+1} & 2^n & -1+2^n \\ -4+2^{n+1} & 2-2^{n+1} & 3-2^{n+1} \end{pmatrix}$$

$$\boxed{A^n = \begin{pmatrix} -1+2^{n+1} & 1-2^n & 1-2^n \\ 2-2^{n+1} & 2^n & -1+2^n \\ -4+2^{n+1} & 2-2^{n+1} & 3-2^{n+1} \end{pmatrix}}$$

(8) On considère les suites (u_n), (v_n) et (w_n) définies par leur premier terme $u_0 = 1$, $v_0 = -1$ et $w_0 = 0$ et les relations suivantes :

$$\begin{cases} u_{n+1} &= 3u_n - v_n - w_n \\ v_{n+1} &= -2u_n + 2v_n + w_n \\ w_{n+1} &= 4u_n - 2v_n - w_n \end{cases}$$

pour $n \geq 0$. On pose $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$. Exprimer X_{n+1} en fonction de A et X_n. En déduire u_n, v_n et w_n en fonction de n.

Réponse :

$$X_{n+1} = AX_n.$$

X_n est une suite géométrique de premier élément X_0, donc

$$X_n = A^n X_0$$

$$\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+2^{n+1} & 1-2^n & 1-2^n \\ 2-2^{n+1} & 2^n & -1+2^n \\ -4+2^{n+2} & 2-2^{n+1} & 3-2^{n+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2+2^n+2^{n+1} \\ 2-2^n-2^{n+1} \\ -6+3.2^{n+1} \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\left\{ \begin{array}{lcl} u_n & = & -2+3\cdot 2^n \\ v_n & = & 2-3\cdot 2^n \\ w_n & = & -6+3.2^{n+1} \end{array} \right.}$$

Barème indicatif :
Exercice 1 (1+1+1+1=4 points).
Exercice 2 (1+1+1+1=4 points).
Exercice 3 (1+1+1=3 points).
Exercice 4 (1+1+1+1+1+1+1+1=8 points).
1 point est réservé pour la rédaction.