1. Soit $E = \{0, 1, \ldots, k\}$ et soit

$$P^{(n)} = \begin{pmatrix} p_{0,0}^{(n)} & p_{0,1}^{(n)} & \cdots & p_{0,k}^{(n)} \\ p_{1,0}^{(n)} & p_{1,1}^{(n)} & \cdots & p_{1,k}^{(n)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ p_{k,0}^{(n)} & \cdots & \cdots & p_{k,k}^{(n)} \end{pmatrix}, \text{ où } p_{i,j}^{(n)} = \mathbb{P}\left(X_n = j / X_0 = i\right)$$

Montrer que $P^{(m+n)} = P^{(m)}P^{(n)}$.

Soit $i,j \in E$, $p_{i,j}^{(m+n)} = \mathbb{P}(X_{m+n} = j \mid X_0 = i)$ les termes de la matrice.

$$p_{i,j}^{(m+n)} = \sum_{\ell=0}^{k} \mathbb{P}(X_{m+n} = j \cap X_m = \ell \mid X_0 = i)$$

$$= \sum_{\ell=0}^{k} \mathbb{P}(X_{m+n} = j \mid X_m = \ell \cap X_0 = i)\,\mathbb{P}(X_m = \ell \mid X_0 = i)$$

propriété de Markov

$$= \sum_{\ell=0}^{k} \mathbb{P}(X_{m+n} = j \mid X_m = \ell)\,\mathbb{P}(X_m = \ell \mid X_0 = i)$$

$$= \sum_{\ell=0}^{k} \mathbb{P}(X_n = j \mid X_0 = \ell)\,\mathbb{P}(X_m = \ell \mid X_0 = i)$$

$$= \sum_{\ell=0}^{k} p_{\ell,j}^{(n)} \cdot p_{i,\ell}^{(m)} \quad \text{d'où } p^{(m+n)} = p^{(m)}p^{(n)}$$

---

2. Soit une chaîne de Markov à temps discret, avec P, sa matrice de transition. Définir, sous forme d'expressions mathématiques, un état absorbant, un état transient, un état récurrent positif et un état récurrent nul. On pourra utiliser indifféremment les $p^{(n)}(x,y)$, les $f^{(n)}(x,y)$, $G(x,y)$ et/ou $F(x,y)$.

- <u>état absorbant</u> : $p_{ii} = 1$
- <u>état transient</u> : $\sum_{n=1}^{+\infty} f_{ii}^{(n)} < 1$ ou $\sum_{n=1}^{+\infty} p_{ii}^{(n)} < +\infty$
- <u>état récurrent positif</u> : $\sum_{n=1}^{+\infty} f_{ii}^{(n)} = 1$ (ou $\sum_{n=1}^{+\infty} p_{ii}^{(n)} = +\infty$) et $\sum_{n=1}^{+\infty} n f_{ii}^{(n)} < +\infty$
- <u>état récurrent nul</u> : $\sum_{n=1}^{+\infty} f_{ii}^{(n)} = 1$ (ou $\sum_{n=1}^{+\infty} p_{ii}^{(n)} = +\infty$) et $\sum_{n=1}^{+\infty} n f_{ii}^{(n)} = +\infty$

3. Soit (X_n) une chaîne de Markov à temps discret. Soit $f_{ii}^{(n)}$ les probabilités du temps de retour en i après n sauts. Définir, en fonction des $f_{ii}^{(n)}$, un état transient, récurrent nul, récurrent positif.

---

4. Quelle est la valeur de d pour la chaîne de Markov, marche aléatoire sur le cercle $\mathbb{Z}/2n\mathbb{Z}$? Et que représente les d sous-classes pour cette chaîne de Markov ?

Il est facile de voir que la période est égale à 2.

En effet, les chemins possibles pour aller de 0 à 0 sont de longueur 2, 4, 6, 8 ...

Les sous-classes sont alors les nombres pairs et les nombres impairs.

---

5. Expliquer brièvement la propriété d'ergodicité en utilisant une application de la loi forte des grands nombres.

Soit (X_n) une CM <u>irréductible</u>.

Alors $\forall x \in E$ et quelque soit la loi initiale $\lim_{n \to +\infty} \frac{N_n^x}{n} \overset{p.s.}{=} \frac{1}{\mathbb{E}(\tau^x)}$.

Dans le cas d'une chaîne récurrente positive, le terme est en fait la mesure de l'état x. Le résultat précédent montre alors qu'observer la chaîne pendant un temps assez long et compter le nombre de fois où on passe par l'état x (moyenne temporelle) revient à mesurer l'état x (moyenne spatiale). La relation entre moyenne temporelle et moyenne spatiale est ce qu'on appelle l'ergodicité.

6. Quelles sont les conditions pour que la chaîne de Markov soit ergodique ? Et quelle est alors la limite des $p^n(x, y)$ quand n tend vers $+\infty$?

Il faut que la chaîne de Markov (CM) soit irréductible, récurrente positive et apériodique.

Soit μ_P son unique probabilité invariante, alors pour toute probabilité ν sur E : $\lim\limits_{n \to +\infty} \| \nu \mathbb{P}^n - \mu_P \|_{VT} = 0$

Ainsi, X_n CV en loi vers μ_P quelque soit la loi de X_0.

En particulier, le cas $\nu = \delta_x$ conduit à :

$$\lim_{n \to +\infty} p^{(n)}(x, y) = \mu_P(y) = \frac{1}{E_y(\tau^y)}$$

---

7. Soit (X_t) une chaîne de Markov à temps continu. Montrer le résultat de Chapman-Kolmogorov, i.e. :

$$\forall t > 0, \forall s > 0, \quad P(t + s) = P(t)P(s) \ .$$

La matrice $P(t+s)$ est définie par ses termes $p_{i,j}(t+s) = \mathbb{P}(X_{t+s} = j \mid X_0 = i)$.

On a :
$$\begin{aligned}
p_{i,j}(t+s) &= \mathbb{P}(X_{t+s} = j \mid X_0 = i) \\
&= \sum_{l=0}^{k} \mathbb{P}(X_{t+s} = j \cap X_t = l \mid X_0 = i) \\
&= \sum_{l=0}^{k} \mathbb{P}(X_{t+s} = j \mid X_t = l \cap X_0 = i)\, \mathbb{P}(X_t = l \mid X_0 = i) \\
&= \sum_{l=0}^{k} \mathbb{P}(X_{t+s} = j \mid X_t = l)\, \mathbb{P}(X_t = l \mid X_0 = i) \\
&= \sum_{l=0}^{k} \mathbb{P}(X_s = j \mid X_0 = l)\, \mathbb{P}(X_t = l \mid X_0 = i) \\
&= \sum_{l=0}^{k} p_{i,l}(t)\, p_{l,j}(s)
\end{aligned}$$

Propriété de Markov

propriété d'homogénéité

D'où le résultat matriciel $\mathbb{P}(t+s) = \mathbb{P}(t)\mathbb{P}(s)$

8. Soit $Q = (q_{i,j})$ le générateur infinitésimal d'une chaîne de Markov à temps continu (X_t). Donner la matrice de transition de sa chaîne de Markov immergée, en fonction des $q_{i,j}$.

- si $q_{i,j} \neq 0$, $p_{i,j} = \begin{cases} \dfrac{q_{i,j}}{-q_{i,i}} & \text{si } i \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

- si $q_{i,j} \neq 0$, $p_{i,j} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq 0 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$

---

9. Donner 2 caractérisations d'un processus de Poisson.

→ <u>CARACTÉRISATION 1</u> : $(T_n)_n$ processus ponctuel est PPH(λ) ssi
- $N_0 = 0$;
- (N_t) est un processus à accroissements indépendants;
- $\forall\, 0 \leq s \leq t$, $N_t - N_s \sim \mathcal{P}(\lambda(t-s))$

→ <u>CARACTÉRISATION 2</u> : $(T_n)_n$ processus ponctuel est PPH(λ) ssi (N_t) est un processus à accroissements indépendants et stationnaires (PAIS) et $\mathbb{P}(N_h = 1) = \lambda h + o(h)$ et $\mathbb{P}(N_h > 1) = o(h)$.

10. Donner un exemple de processus ponctuel et un exemple de processus de comptage.

11. Généraliser, en le justifiant, la proposition 4.6 (effacement) à 3 types d'événements (type I avec probabilité p_1, type II avec probabilité p_2 et type III avec probabilité $1 - p_1 - p_2$).