Exercice 12

1. Il faut calculer la probabilité suivante $\mathbb{P}\left(N_{365}=1\right)$ car λ est en pannes/jour. De plus, la VAR N_t suit une loi de Poisson de paramètre λt. On a alors :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(N_{365}=1\right) &= \exp\left(-\lambda t\right).\frac{(\lambda t)^1}{1!} \\
&= \exp\left(-0{,}007\times 365\right)\times 0{,}007\times 365 \\
&= 0{,}1985
\end{aligned}$$

2. Il faut calculer la probabilité suivante $\mathbb{P}\left(N_{200}-N_{100}=3/N_{120}=2\right)$. On a :

$$\mathbb{P}\left(N_{200}-N_{100}=3/N_{120}=2\right) = \frac{\mathbb{P}\left(N_{200}-N_{100}=3\cap N_{120}=2\right)}{\mathbb{P}\left(N_{120}=2\right)}$$

Attention, les accroissements $N_{200}-N_{100}$ et N_{120} ne sont pas indépendants car ils se chevauchent. Il faut donc chercher un évènement équivalent à $N_{200}-N_{100}=3\cap N_{120}=2$ utilisant des accroissements indépendants. On peut montrer que :

$$\begin{aligned}
N_{200}-N_{100}=3\cap N_{120}=2 \iff\ & \left(N_{100}=0\cap N_{120}-N_{100}=2\cap N_{200}-N_{120}=1\right) \\
& \bigcup\left(N_{100}=1\cap N_{120}-N_{100}=1\cap N_{200}-N_{120}=2\right) \\
& \bigcup\left(N_{100}=2\cap N_{120}-N_{100}=0\cap N_{200}-N_{120}=3\right)
\end{aligned}$$

On a d'après les règles de probabilité sur l'indépendance et sur les évènements incompatibles.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(N_{200}-N_{100}=3\cap N_{120}=2\right) &= \mathbb{P}\left(N_{100}=0\right)\mathbb{P}\left(N_{120}-N_{100}=2\right)\mathbb{P}\left(N_{200}-N_{120}=1\right) \\
&\quad +\mathbb{P}\left(N_{100}=1\right)\mathbb{P}\left(N_{120}-N_{100}=1\right)\mathbb{P}\left(N_{200}-N_{120}=2\right) \\
&\quad +\mathbb{P}\left(N_{100}=2\right)\mathbb{P}\left(N_{120}-N_{100}=0\right)\mathbb{P}\left(N_{200}-N_{120}=3\right) \\
&= \mathrm{e}^{(-0{,}007\times 100)}\times \mathrm{e}^{(-0{,}007\times 20)}\times\frac{(0{,}007\times 20)^2}{2}\times \mathrm{e}^{(-0{,}007\times 80)} \\
&\quad \times 0{,}007\times 80+\mathrm{e}^{(-0{,}007\times 100)}\times 0{,}007\times 100\times \mathrm{e}^{(-0{,}007\times 20)} \\
&\quad \times 0{,}007\times 20\times \mathrm{e}^{(-0{,}007\times 80)}\times\frac{(0{,}007\times 80)^2}{2!}+\mathrm{e}^{(-0{,}007\times 100)} \\
&\quad \times\frac{(0{,}007\times 100)^2}{2}\times \mathrm{e}^{(-0{,}007\times 20)}\times \mathrm{e}^{(-0{,}007\times 80)}\times\frac{(0{,}007\times 80)^3}{3!} \\
&=
\end{aligned}$$

Comme $\mathbb{P}\left(N_{120}=2\right)=\mathrm{e}^{(-0{,}007\times 120)}\times\frac{(0{,}007\times 120)^2}{2}$, on en conclut que :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(N_{200}-N_{100}=3/N_{120}=2\right) &= \frac{\mathbb{P}\left(N_{200}-N_{100}=3\cap N_{120}=2\right)}{\mathbb{P}\left(N_{120}=2\right)} \\
&= \frac{20}{27}\lambda \mathrm{e}^{-80\lambda}[3+1200\lambda+80000\lambda^2].
\end{aligned}$$

Exercice 13 (Réseau routier)

1. (a) Sachant que $N_t^1=n$, N_t^4 est une loi binomiale. En effet, la voiture qui part du noeud 1 se rend soit au noeud 4, soit ne s'y rend pas.
   Les paramètres de cette loi sont N et P, où N est le nombre maximum de succès (ici, on a $N=n$) et P est la probabilité d'un succès sur une seule expérience (ici, $P=0{,}3$).
   On a donc $\mathcal{L}(N_t^4/N_t^1=n)=\mathcal{B}(n;0{,}3)$.

(b)

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(N_t^4 = k\right) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}\left(N_t^4 = k \cap N_t^1 = n\right) \\
&= \sum_{n=k}^{+\infty} \mathbb{P}\left(N_t^4 = k \cap N_t^1 = n\right) \\
&\quad \text{car si } n < k,\ \mathbb{P}\left(N_t^4 = k \cap N_t^1 = n\right) = 0 \text{ (on ne peut pas avoir plus de} \\
&\quad \text{voitures au noeud 4 que de voitures qui partent du noeud 1)} \\
&= \sum_{n=k}^{+\infty} \mathbb{P}\left(N_t^1 = n\right) \mathbb{P}\left(N_t^4 = k / N_t^1 = n\right) \\
&= \sum_{n=k}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda_1 t} \frac{(\lambda_1 t)^n}{n!} \binom{n}{k} (0{,}3)^k (0{,}7)^{n-k} \\
&= \mathrm{e}^{-\lambda_1 t} \frac{(0{,}3)^k}{k!} \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{(\lambda_1 t)^n \, (0{,}7)^{n-k}}{(n-k)!} \\
&= \mathrm{e}^{-\lambda_1 t} \frac{(0{,}3\lambda_1 t)^k}{k!} \underbrace{\sum_{n=k}^{+\infty} \frac{(\lambda_1 t)^{n-k} \, (0{,}7)^{n-k}}{(n-k)!}}_{} \\
&= \mathrm{e}^{-\lambda_1 t} \frac{(0{,}3\lambda_1 t)^k}{k!} \qquad\qquad \mathrm{e}^{0{,}7\lambda_1 t} \\
&= \mathrm{e}^{-0{,}3\lambda_1 t} \frac{(0{,}3\lambda_1 t)^k}{k!} \Rightarrow N_t^4 \sim \mathcal{P}(0{,}3\lambda_1 t)
\end{aligned}$$

2. Soient N^1 et N^2 deux processus de comptage indépendants associés à deux processus de Poisson homogène (PPH) de paramètre λ_1 et λ_2. Il faut démontrer les 3 propriétés suivantes :
   (a) $N_0 = 0$ p.s.
   (b) N est un PAI.
   (c) $N_t - N_s \sim \mathcal{P}((\lambda_1 + \lambda_2)(t - s))$

   (a) $N_0 = N_0^1 + N_0^2 = 0 + 0 = 0$ p.s.
   (b) Il faut montrer que $\forall t_0 < t_1 < \cdots < t_n$, $N_{t_0}, N_{t_1} - N_{t_0}, N_{t_2} - N_{t_1}, \ldots$ et $N_{t_n} - N_{t_{n-1}}$ sont indépendants deux à deux. On va donc se fixer k et j ($k \neq j$) et on va étudier la dépendance entre $N_{t_k} - N_{t_{k-1}}$ et $N_{t_j} - N_{t_{j-1}}$. On a d'après la définition de N :

$$\begin{aligned}
N_{t_k} - N_{t_{k-1}} &= N_{t_k}^1 + N_{t_k}^2 - N_{t_{k-1}}^1 - N_{t_{k-1}}^2 &= \left(N_{t_k}^1 - N_{t_{k-1}}^1\right) + \left(N_{t_k}^2 - N_{t_{k-1}}^2\right) \\
N_{t_j} - N_{t_{j-1}} &= N_{t_j}^1 + N_{t_j}^2 - N_{t_{j-1}}^1 - N_{t_{j-1}}^2 &= \left(N_{t_j}^1 - N_{t_{j-1}}^1\right) + \left(N_{t_j}^2 - N_{t_{j-1}}^2\right)
\end{aligned}$$

   Or

$$\begin{aligned}
&\left(N_{t_k}^1 - N_{t_{k-1}}^1\right) \perp\!\!\!\perp \left(N_{t_j}^1 - N_{t_{j-1}}^1\right) \text{(car } N^1 \text{ est un PAI)} \\
&\left(N_{t_k}^1 - N_{t_{k-1}}^1\right) \perp\!\!\!\perp \left(N_{t_j}^2 - N_{t_{j-1}}^2\right) \text{(car } N^1 \text{ et } N^2 \text{ sont indépendantes)} \\
&\left(N_{t_k}^2 - N_{t_{k-1}}^2\right) \perp\!\!\!\perp \left(N_{t_j}^1 - N_{t_{j-1}}^1\right) \text{(car } N^1 \text{ et } N^2 \text{ sont indépendantes)} \\
&\left(N_{t_k}^2 - N_{t_{k-1}}^2\right) \perp\!\!\!\perp \left(N_{t_j}^2 - N_{t_{j-1}}^2\right) \text{(car } N^2 \text{ est un PAI)}
\end{aligned}$$

   ce qui entraîne que $N_{t_k} - N_{t_{k-1}}$ et $N_{t_j} - N_{t_{j-1}}$ sont bien indépendantes.

(c)

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(N_t - N_s = k\right) &= \mathbb{P}\left(N_t^1 + N_t^2 - N_s^1 - N_s^2 = k\right) \\
&= \sum_{j \in \mathbb{N}} \mathbb{P}\left(N_t^1 - N_s^1 = k - j \cap N_t^2 - N_s^2 = j\right) \\
&= \sum_{j=0}^{k} \mathbb{P}\left(N_t^1 - N_s^1 = k - j \cap N_t^2 - N_s^2 = j\right) \\
&\qquad\qquad (\text{car } \forall j > k, \mathbb{P}\left(N_t^1 - N_s^1 = k - j \cap N_t^2 - N_s^2 = j\right) = 0) \\
&= \sum_{j=0}^{k} \mathbb{P}\left(N_t^1 - N_s^1 = k - j\right) \mathbb{P}\left(N_t^2 - N_s^2 = j\right) \\
&= \sum_{j=0}^{k} \mathrm{e}^{-\lambda_1(t-s)} \frac{(\lambda_1(t-s))^{k-j}}{(k-j)!} \mathrm{e}^{-\lambda_2(t-s)} \frac{(\lambda_2(t-s))^{j}}{j!} \\
&= \frac{\mathrm{e}^{-(\lambda_1+\lambda_2)(t-s)}}{k!} \underbrace{\sum_{j=0}^{k} \frac{k!}{j!(k-j)!} (\lambda_1(t-s))^{k-j} (\lambda_2(t-s))^{j}} \\
&= \frac{\mathrm{e}^{-(\lambda_1+\lambda_2)(t-s)}}{k!} \qquad (\lambda_1(t-s) + \lambda_2(t-s))^k \\
&= \mathrm{e}^{-(\lambda_1+\lambda_2)(t-s)} \frac{((\lambda_1+\lambda_2)(t-s))^k}{k!} \Rightarrow N_t - N_s \sim \mathcal{P}((\lambda_1+\lambda_2)(t-s))
\end{aligned}
$$

3. D'après 1 et 2, une partie de PPH est aussi un PPH et la somme de 2 PPH est un PPH. On en déduit donc que :
   - Noeud 1 : PPH(λ_1) ;
   - Noeud 4 : 0,3 Noeud 1 $\Rightarrow$ PPH $(0{,}3\lambda_1)$;
   - **Sortie *A*** : 0,2 Noeud 4 $\Rightarrow$ PPH $(0{,}06\lambda_1)$;
   - Noeud 2 : 0,7 Noeud 1 + PPH (λ_2) $\Rightarrow$ PPH $(0{,}7\lambda_1 + \lambda_2)$;
   - Noeud 6 : PPH(λ_6) ;
   - Noeud 3 (**sortie *C***) : 0,4 Noeud 2 + 0,5 Noeud 6 $\Rightarrow$ PPH $(0{,}28\lambda_1 + 0{,}4\lambda_2 + 0{,}5\lambda_6)$;
   - Noeud 5 (**sortie *B***) : 0,8 Noeud 4 + 0,6 Noeud 2 + 0,5 Noeud 6 $\Rightarrow$ PPH $(0{,}66\lambda_1 + 0{,}6\lambda_2 + 0{,}5\lambda_6)$