Remarque générale : Pour le calcul du générateur infinitésimal, l'intervalle de temps utilisé (entre 0 et h) suppose qu'il ne se passe qu'au plus un seul événement. Mathématiquement, cela se traduit par l'ajout d'un $o(h)$ pour toutes les probabilités de la matrice P_h.

Comme le $o(h)$ est une fonction telle que $o(h)/h$ tend vers 0 lorsque h tend vers 0. Celle-ci n'a aucune influence sur le calcul du générateur infinitésimal.

Si on prend l'exemple de l'exercice 8, rigoureusement, il faudrait écrire :

$$\mathbb{P}\left(X_h = \text{"marche"} \ / \ X_0 = \text{"marche"}\right) = e^{-\lambda h} + o(h)$$

Si vous ne mettez pas le $o(h)$ sur vos copies le jour de l'examen, cela n'aura aucune incidence sur vos notes.

Exercice 8

1. Soit T le temps de bon fonctionnement et S le temps de réparation. On a :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(X_h = \text{"marche"} \ / \ X_0 = \text{"marche"}\right) &= \mathbb{P}\left(\text{l'appareil n'est pas tombé en panne}\right)\\ &= \mathbb{P}\left(T > h\right)\\ &= e^{-\lambda h}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(X_h = \text{"panne"} \ / \ X_0 = \text{"marche"}\right) &= \mathbb{P}\left(\text{l'appareil tombe en panne entre 0 et } h\right)\\ &= \mathbb{P}\left(T < h\right)\\ &= 1 - e^{-\lambda h}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(X_h = \text{"marche"} \ / \ X_0 = \text{"panne"}\right) &= \mathbb{P}\left(\text{l'appareil est réparé entre 0 et } h\right)\\ &= \mathbb{P}\left(S < h\right)\\ &= 1 - e^{-\mu h}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(X_h = \text{"panne"} \ / \ X_0 = \text{"panne"}\right) &= \mathbb{P}\left(\text{l'appareil n'est pas réparé}\right)\\ &= \mathbb{P}\left(S > h\right)\\ &= e^{-\mu h}\end{aligned}$$

On a alors :

$$P(h) = \begin{pmatrix} e^{-\mu h} & 1 - e^{-\mu h} \\ 1 - e^{-\lambda h} & e^{-\lambda h} \end{pmatrix}$$

En calculant la limite quand h tend vers 0 de $(P(h) - I_2)/h$, on obtient :

$$Q = \begin{pmatrix} -\mu & \mu \\ \lambda & -\lambda \end{pmatrix}$$

2. On peut montrer que : $Q^n = (-(\lambda+\mu))^{n-1}Q$. On a alors :

$$\begin{aligned}
P_t = \mathrm{e}^{tQ} &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(tQ)^n}{n!} \\
&= \mathrm{Id} + \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(t)^n(-(\lambda+\mu))^{n-1}}{n!}\right) Q \\
&= \mathrm{Id} - \frac{1}{\lambda+\mu}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^n(-(\lambda+\mu))^{n}}{n!}\right) Q \\
&= \mathrm{Id} - \frac{1}{\lambda+\mu}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-(\lambda+\mu)t)^{n}}{n!}\right) Q \\
&= \mathrm{Id} - \frac{1}{\lambda+\mu}\left(\mathrm{e}^{-(\lambda+\mu)t)} - 1\right) Q \\
&= \begin{pmatrix} \frac{\lambda}{\lambda+\mu} + \frac{\mu}{\lambda+\mu}\mathrm{e}^{-(\lambda+\mu)t} & \frac{\mu}{\lambda+\mu} - \frac{\mu}{\lambda+\mu}\mathrm{e}^{-(\lambda+\mu)t} \\ \frac{\lambda}{\lambda+\mu} - \frac{\lambda}{\lambda+\mu}\mathrm{e}^{-(\lambda+\mu)t} & \frac{\mu}{\lambda+\mu} + \frac{\lambda}{\lambda+\mu}\mathrm{e}^{-(\lambda+\mu)t} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

3. On sait que : $\mu_t = \mu_0 P_t$. On a donc :

$$\begin{aligned}
\mu_t &= (0;1)\begin{pmatrix} \frac{\lambda}{\lambda+\mu} + \frac{\mu}{\lambda+\mu}\mathrm{e}^{-(\lambda+\mu)t} & \frac{\mu}{\lambda+\mu} - \frac{\mu}{\lambda+\mu}\mathrm{e}^{-(\lambda+\mu)t} \\ \frac{\lambda}{\lambda+\mu} - \frac{\lambda}{\lambda+\mu}\mathrm{e}^{-(\lambda+\mu)t} & \frac{\mu}{\lambda+\mu} + \frac{\lambda}{\lambda+\mu}\mathrm{e}^{-(\lambda+\mu)t} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{\lambda}{\lambda+\mu} - \frac{\lambda}{\lambda+\mu}\mathrm{e}^{-(\lambda+\mu)t} & \frac{\mu}{\lambda+\mu} + \frac{\lambda}{\lambda+\mu}\mathrm{e}^{-(\lambda+\mu)t} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

En faisant tendre t vers $+\infty$, on obtient :

$$\lim_{n\to+\infty} \mu_t = \begin{pmatrix} \frac{\lambda}{\lambda+\mu} & \frac{\mu}{\lambda+\mu} \end{pmatrix}$$

Exercice 9 : Processus de naissance et de mort

1. Soit T le temps d'arrivée et S le temps de traitement. On a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_h = 0 \ / \ X_0 = 0) &= \mathbb{P}(\text{aucun patient n'arrive}) \\
&= \mathbb{P}(T > h) \\
&= e^{-\lambda h}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_h = 1 \ / \ X_0 = 0) &= \mathbb{P}(\text{un patient arrive}) \\
&= \mathbb{P}(T < h) \\
&= 1 - e^{-\lambda h}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_h = 2 \ / \ X_0 = 0) &= \mathbb{P}(\text{deux patients arrivent}) \\
&= o(h) \\
&\simeq 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_h = 0 \ / \ X_0 = 1) &= \mathbb{P}(\text{le patient est traité}) \\
&= \mathbb{P}(S < h) \\
&= 1 - e^{-\mu h}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_h = 1 \;/\; X_0 = 1) &= \mathbb{P}(\text{aucun patient n'arrive et le patient n'est pas traité}) \\ &= \mathbb{P}(S > h \cap T > h) = \mathbb{P}(S > h)\,\mathbb{P}(T > h) \\ &= e^{-\lambda h}e^{-\mu h} = e^{-(\lambda+\mu)h}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_h = 2 \;/\; X_0 = 1) &= \mathbb{P}(\text{un patient arrive}) \\ &= \mathbb{P}(T < h) \\ &= 1 - e^{-\lambda h}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_h = 0 \;/\; X_0 = 2) &= \mathbb{P}(\text{deux patients sont traités}) \\ &= o(h) \\ &\simeq 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_h = 1 \;/\; X_0 = 2) &= \mathbb{P}(\text{un patient est traité}) \\ &= \mathbb{P}(S < h) \\ &= 1 - e^{-\mu h}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_h = 2 \;/\; X_0 = 2) &= \mathbb{P}(\text{aucun patient n'est traité}) \\ &= \mathbb{P}(S > h) \\ &= e^{-\mu h}\end{aligned}$$

On a alors :

$$P(h) = \begin{pmatrix} e^{-\lambda h} & 1 - e^{-\lambda h} & 0 \\ 1 - e^{-\mu h} & e^{-(\lambda+\mu)h} & 1 - e^{-\lambda h} \\ 0 & 1 - e^{-\mu h} & e^{-\mu h} \end{pmatrix}$$

Remarquez que dans cette matrice $P(h)$, les sommes de lignes ne sont pas toutes égales à 1. En effet, il faudrait rajouter des $o(h)$ un peu partout… Ce qu'il faudra vérifier, c'est que les sommes de lignes du générateur infinitésimal soient toutes égales à 0. Ici, en calculant la limite quand h tend vers 0 de $(P(h) - I_3)/h$, on obtient :

$$Q = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & 0 \\ \mu & -(\lambda+\mu) & \lambda \\ 0 & \mu & -\mu \end{pmatrix}$$

2. En utilisant les résultats du cours, on obtient :

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{\mu}{\lambda+\mu} & 0 & \frac{\lambda}{\lambda+\mu} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

On voit alors que l'état "0" communique avec l'état "1" qui lui-même communique avec l'état "2". La chaîne est donc irréductible. Elle est à espace d'état fini : elle est donc récurrente positive (je rappelle que la périodicité n'a pas de sens dans le cas d'une chaîne de Markov à temps continu).

Exercice 10 : Issu de « Probabilités et Processus stochastiques » d'Yves Caumel, ISAE

1. Avant de commencer, notons T_1 (resp. T_2) le temps de bon fonctionnement du composant 1 (resp. 2) et S_1 (resp. S_2) le temps de réparation du composant 1 (resp. 2). On peut montrer alors que pour le composant 1 (pour le composant 2, la démonstration est analogue, en

remplaçant λ_1 par λ_2 et μ_1 par μ_2) :

$$\begin{array}{lcll}
\mathbb{P}\left(X_h^1=0/X_0^1=0\right) & = & \mathbb{P}\left(S_1>h\right)=\mathrm{e}^{-\mu_1 h} & \text{(il n'y a pas eu de réparation de 0 à } h\text{)}\\
\mathbb{P}\left(X_h^1=1/X_0^1=0\right) & = & \mathbb{P}\left(S_1<h\right)=1-\mathrm{e}^{-\mu_1 h} & \text{(il y a eu une réparation de 0 à } h\text{)}\\
\mathbb{P}\left(X_h^1=0/X_0^1=1\right) & = & \mathbb{P}\left(T_1<h\right)=1-\mathrm{e}^{-\lambda_1 h} & \text{(il y a eu une panne de 0 à } h\text{)}\\
\mathbb{P}\left(X_h^1=1/X_0^1=1\right) & = & \mathbb{P}\left(T_1>h\right)=\mathrm{e}^{-\lambda_1 h} & \text{(il n'y a pas eu de panne de 0 à } h\text{)}
\end{array}$$

On va maintenant pouvoir calculer les $\mathbb{P}(X_h=e_j/X_0=e_i)$ pour tout $(i,j)\in\{1,2,3,4\}^2$.

$$\begin{array}{rcl}
\mathbb{P}\left(X_h=(0,0)/X_0=(0,0)\right) & = & \mathbb{P}\left(X_h^1=0\cap X_h^2=0/X_0^1=0\cap X_0^2=0\right)\\
& \stackrel{\text{ind}}{=} & \mathbb{P}\left(X_h^1=0/X_0^1=0\right)\mathbb{P}\left(X_h^2=0/X_0^2=0\right)\\
& = & \mathrm{e}^{-\mu_1 h}\mathrm{e}^{-\mu_2 h}=\mathrm{e}^{-(\mu_1+\mu_2)h}\\
\mathbb{P}\left(X_h=(0,1)/X_0=(0,0)\right) & = & \mathbb{P}\left(X_h^1=0\cap X_h^2=1/X_0^1=0\cap X_0^2=0\right)\\
& \stackrel{\text{ind}}{=} & \mathbb{P}\left(X_h^1=0/X_0^1=0\right)\mathbb{P}\left(X_h^2=1/X_0^2=0\right)\\
& = & \mathrm{e}^{-\mu_1 h}(1-\mathrm{e}^{-\mu_2 h})\simeq 1-\mathrm{e}^{-\mu_2 h}\\
\mathbb{P}\left(X_h=(1,0)/X_0=(0,0)\right) & = & \mathbb{P}\left(X_h^1=1\cap X_h^2=0/X_0^1=0\cap X_0^2=0\right)\\
& \stackrel{\text{ind}}{=} & \mathbb{P}\left(X_h^1=1/X_0^1=0\right)\mathbb{P}\left(X_h^2=0/X_0^2=0\right)\\
& = & (1-\mathrm{e}^{-\mu_1 h})\mathrm{e}^{-\mu_2 h}\simeq 1-\mathrm{e}^{-\mu_1 h}\\
\mathbb{P}\left(X_h=(1,1)/X_0=(0,0)\right) & = & \mathbb{P}\left(X_h^1=1\cap X_h^2=1/X_0^1=0\cap X_0^2=0\right)\\
& \stackrel{\text{ind}}{=} & \mathbb{P}\left(X_h^1=1/X_0^1=0\right)\mathbb{P}\left(X_h^2=1/X_0^2=0\right)\\
& = & (1-\mathrm{e}^{-\mu_1 h})(1-\mathrm{e}^{-\mu_2 h})\simeq o(h)
\end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}
\mathbb{P}\left(X_h=(0,0)/X_0=(0,1)\right) & = & \mathbb{P}\left(X_h^1=0\cap X_h^2=0/X_0^1=0\cap X_0^2=1\right)\\
& \stackrel{\text{ind}}{=} & \mathbb{P}\left(X_h^1=0/X_0^1=0\right)\mathbb{P}\left(X_h^2=0/X_0^2=1\right)\\
& = & \mathrm{e}^{-\mu_1 h}(1-\mathrm{e}^{-\lambda_2 h})\simeq 1-\mathrm{e}^{-\lambda_2 h}\\
\mathbb{P}\left(X_h=(0,1)/X_0=(0,1)\right) & = & \mathbb{P}\left(X_h^1=0\cap X_h^2=1/X_0^1=0\cap X_0^2=1\right)\\
& \stackrel{\text{ind}}{=} & \mathbb{P}\left(X_h^1=0/X_0^1=0\right)\mathbb{P}\left(X_h^2=1/X_0^2=1\right)\\
& = & \mathrm{e}^{-\mu_1 h}\mathrm{e}^{-\lambda_2 h}\\
\mathbb{P}\left(X_h=(1,0)/X_0=(0,1)\right) & = & \mathbb{P}\left(X_h^1=1\cap X_h^2=0/X_0^1=0\cap X_0^2=1\right)\\
& \stackrel{\text{ind}}{=} & \mathbb{P}\left(X_h^1=1/X_0^1=0\right)\mathbb{P}\left(X_h^2=0/X_0^2=1\right)\\
& = & (1-\mathrm{e}^{-\mu_1 h})(1-\mathrm{e}^{-\lambda_2 h})\simeq o(h)\\
\mathbb{P}\left(X_h=(1,1)/X_0=(0,1)\right) & = & \mathbb{P}\left(X_h^1=1\cap X_h^2=1/X_0^1=0\cap X_0^2=1\right)\\
& \stackrel{\text{ind}}{=} & \mathbb{P}\left(X_h^1=1/X_0^1=0\right)\mathbb{P}\left(X_h^2=1/X_0^2=1\right)\\
& = & (1-\mathrm{e}^{-\mu_1 h})\mathrm{e}^{-\lambda_2 h}\simeq 1-\mathrm{e}^{-\mu_1 h}
\end{array}$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(X_h=(0,0)/X_0=(1,0)\right) &= \mathbb{P}\left(X_h^1=0\cap X_h^2=0/X_0^1=1\cap X_0^2=0\right)\\
&\overset{\text{ind}}{=} \mathbb{P}\left(X_h^1=0/X_0^1=1\right)\mathbb{P}\left(X_h^2=0/X_0^2=0\right)\\
&= (1-\mathrm{e}^{-\lambda_1 h})\mathrm{e}^{-\mu_2 h}\simeq 1-\mathrm{e}^{-\lambda_1 h}\\
\mathbb{P}\left(X_h=(0,1)/X_0=(1,0)\right) &= \mathbb{P}\left(X_h^1=0\cap X_h^2=1/X_0^1=1\cap X_0^2=0\right)\\
&\overset{\text{ind}}{=} \mathbb{P}\left(X_h^1=0/X_0^1=1\right)\mathbb{P}\left(X_h^2=1/X_0^2=0\right)\\
&= (1-\mathrm{e}^{-\lambda_1 h})(1-\mathrm{e}^{-\mu_2 h})\simeq o(h)\\
\mathbb{P}\left(X_h=(1,0)/X_0=(1,0)\right) &= \mathbb{P}\left(X_h^1=1\cap X_h^2=0/X_0^1=1\cap X_0^2=0\right)\\
&\overset{\text{ind}}{=} \mathbb{P}\left(X_h^1=1/X_0^1=1\right)\mathbb{P}\left(X_h^2=0/X_0^2=0\right)\\
&= \mathrm{e}^{-\lambda_1 h}\mathrm{e}^{-\mu_2 h}\\
\mathbb{P}\left(X_h=(1,1)/X_0=(1,0)\right) &= \mathbb{P}\left(X_h^1=1\cap X_h^2=1/X_0^1=1\cap X_0^2=0\right)\\
&\overset{\text{ind}}{=} \mathbb{P}\left(X_h^1=1/X_0^1=1\right)\mathbb{P}\left(X_h^2=1/X_0^2=0\right)\\
&= \mathrm{e}^{-\lambda_1 h}(1-\mathrm{e}^{-\mu_2 h})\simeq 1-\mathrm{e}^{-\mu_2 h}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(X_h=(0,0)/X_0=(1,1)\right) &= \mathbb{P}\left(X_h^1=0\cap X_h^2=1/X_0^1=0\cap X_0^2=1\right)\\
&\overset{\text{ind}}{=} \mathbb{P}\left(X_h^1=0/X_0^1=1\right)\mathbb{P}\left(X_h^2=0/X_0^2=1\right)\\
&= (1-\mathrm{e}^{-\lambda_1 h})(1-\mathrm{e}^{-\lambda_2 h})\simeq o(h)\\
\mathbb{P}\left(X_h=(0,1)/X_0=(1,1)\right) &= \mathbb{P}\left(X_h^1=0\cap X_h^2=0/X_0^1=0\cap X_0^2=1\right)\\
&\overset{\text{ind}}{=} \mathbb{P}\left(X_h^1=0/X_0^1=0\right)\mathbb{P}\left(X_h^2=0/X_0^2=1\right)\\
&= (1-\mathrm{e}^{-\lambda_1 h})\mathrm{e}^{-\lambda_2 h}\simeq 1-\mathrm{e}^{-\lambda_1 h}\\
\mathbb{P}\left(X_h=(1,0)/X_0=(1,1)\right) &= \mathbb{P}\left(X_h^1=0\cap X_h^2=0/X_0^1=0\cap X_0^2=1\right)\\
&\overset{\text{ind}}{=} \mathbb{P}\left(X_h^1=0/X_0^1=0\right)\mathbb{P}\left(X_h^2=0/X_0^2=1\right)\\
&= \mathrm{e}^{-\lambda_1 h}(1-\mathrm{e}^{-\lambda_2 h})\simeq 1-\mathrm{e}^{-\lambda_2 h}\\
\mathbb{P}\left(X_h=(1,1)/X_0=(1,1)\right) &= \mathbb{P}\left(X_h^1=0\cap X_h^2=0/X_0^1=0\cap X_0^2=1\right)\\
&\overset{\text{ind}}{=} \mathbb{P}\left(X_h^1=0/X_0^1=0\right)\mathbb{P}\left(X_h^2=0/X_0^2=1\right)\\
&= \mathrm{e}^{-\lambda_1 h}\mathrm{e}^{-\lambda_2 h}
\end{aligned}$$

On a alors :

$$P(h)=\begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-(\mu_1+\mu_2)h} & 1-\mathrm{e}^{-\mu_2 h} & 1-\mathrm{e}^{-\mu_1 h} & 0\\ 1-\mathrm{e}^{-\lambda_2 h} & \mathrm{e}^{-(\mu_1+\lambda_2)h} & 0 & 1-\mathrm{e}^{-\mu_1 h}\\ 1-\mathrm{e}^{-\lambda_1 h} & 0 & \mathrm{e}^{-(\lambda_1+\mu_2)h} & 1-\mathrm{e}^{-\mu_2 h}\\ 0 & 1-\mathrm{e}^{-\lambda_1 h} & 1-\mathrm{e}^{-\lambda_2 h} & \mathrm{e}^{-(\lambda_1+\lambda_2)h}\end{pmatrix}$$

et donc

$$\lim_{h\to 0}\frac{P(h)-I_4}{h}=Q=\begin{pmatrix} -(\mu_1+\mu_2) & \mu_2 & \mu_1 & 0\\ \lambda_2 & -(\mu_1+\lambda_2) & 0 & \mu_1\\ \lambda_1 & 0 & -(\lambda_1+\mu_2) & \mu_2\\ 0 & \lambda_1 & \lambda_2 & -(\lambda_1+\lambda_2)\end{pmatrix}$$

2. Plusieurs solutions sont possibles.
   (a) La plus brutale : résoudre $\pi Q=0$.

$$\left\{\begin{array}{l} -(\mu_1+\mu_2)\pi_1+\lambda_2\pi_2+\lambda_1\pi_3=0\\ \mu_2\pi_1-(\mu_1+\lambda_2)\pi_2+\lambda_1\pi_4=0\\ \mu_1\pi_1-(\lambda_1+\mu_2)\pi_3+\lambda_2\pi_4=0\\ \pi_1+\pi_2+\pi_3+\pi_4=1\end{array}\right. \Longrightarrow A\pi=b$$

Vu la forme de b, nous allons utiliser la règle de Cramer, le calcul le plus long étant celui du déterminant de A.

$$\begin{aligned}
\text{dét}A &= \begin{vmatrix} -(\mu_1+\mu_2) & \lambda_2 & \lambda_1 & 0 \\ \mu_2 & -(\mu_1+\lambda_2) & 0 & \lambda_1 \\ \mu_1 & 0 & -(\lambda_1+\mu_2) & \lambda_2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \\
&= -(\mu_1+\mu_2)\begin{vmatrix} -(\mu_1+\lambda_2) & 0 & \lambda_1 \\ 0 & -(\lambda_1+\mu_2) & \lambda_2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \\
&\qquad -\lambda_2\begin{vmatrix} \mu_2 & 0 & \lambda_1 \\ \mu_1 & -(\lambda_1+\mu_2) & \lambda_2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \\
&\qquad +\lambda_1\begin{vmatrix} \mu_2 & -(\mu_1+\lambda_2) & \lambda_1 \\ \mu_1 & 0 & \lambda_2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \\
&= (\mu_1+\mu_2)(\mu_1+\lambda_2)(-\lambda_1-\mu_2-\lambda_2)-(\mu_1+\mu_2)\lambda_1(\lambda_1+\mu_2) \\
&\qquad -\lambda_2\mu_2(-\lambda_1-\mu_2-\lambda_2)-\lambda_1\lambda_2(\mu_1+\lambda_1+\mu_2) \\
&\qquad +\lambda_1\mu_1(\mu_1+\lambda_2+\lambda_1)-\lambda_1\lambda_2(\lambda_2+\mu_1+\mu_2) \\
\text{dét}A &= -(\lambda_1+\mu_1)(\lambda_2+\mu_2)(\lambda_1+\mu_1+\lambda_2+\mu_2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{dét}A_1 &= \begin{vmatrix} 0 & \lambda_2 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & -(\mu_1+\lambda_2) & 0 & \lambda_1 \\ 0 & 0 & -(\lambda_1+\mu_2) & \lambda_2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} \lambda_2 & \lambda_1 & 0 \\ -(\mu_1+\lambda_2) & 0 & \lambda_1 \\ 0 & -(\lambda_1+\mu_2) & \lambda_2 \end{vmatrix} \\
&= -\lambda_2\lambda_1(\lambda_1+\mu_2)-(\mu_1+\lambda_2)\lambda_1\lambda_2 = -\lambda_1\lambda_2(\lambda_1+\mu_1+\lambda_2+\mu_2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{dét}A_2 &= \begin{vmatrix} -(\mu_1+\mu_2) & 0 & \lambda_1 & 0 \\ \mu_2 & 0 & 0 & \lambda_1 \\ \mu_1 & 0 & -(\lambda_1+\mu_2) & \lambda_2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -(\mu_1+\mu_2) & \lambda_1 & 0 \\ \mu_2 & 0 & \lambda_1 \\ \mu_1 & -(\lambda_1+\mu_2) & \lambda_2 \end{vmatrix} \\
&= -(\mu_1+\mu_2)\lambda_1(\lambda_1+\mu_2)-\lambda_1(\mu_2\lambda_2-\lambda_1\mu_1) = -\lambda_1\mu_2(\lambda_1+\mu_1+\lambda_2+\mu_2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{dét}A_3 &= \begin{vmatrix} -(\mu_1+\mu_2) & \lambda_2 & 0 & 0 \\ \mu_2 & -(\mu_1+\lambda_2) & 0 & \lambda_1 \\ \mu_1 & 0 & 0 & \lambda_2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -(\mu_1+\mu_2) & \lambda_2 & 0 \\ \mu_2 & -(\mu_1+\lambda_2) & \lambda_1 \\ \mu_1 & 0 & \lambda_2 \end{vmatrix} \\
&= -\mu_1\lambda_1\lambda_2-\lambda_2((\mu_1+\mu_2)(\mu_1+\lambda_2)-\lambda_2\mu_2) = -\mu_1\lambda_2(\lambda_1+\mu_1+\lambda_2+\mu_2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{dét}A_4 &= \begin{vmatrix} -(\mu_1+\mu_2) & \lambda_2 & \lambda_1 & 0 \\ \mu_2 & -(\mu_1+\lambda_2) & 0 & 0 \\ \mu_1 & 0 & -(\lambda_1+\mu_2) & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -(\mu_1+\mu_2) & \lambda_2 & \lambda_1 \\ \mu_2 & -(\mu_1+\lambda_2) & 0 \\ \mu_1 & 0 & -(\lambda_1+\mu_2) \end{vmatrix} \\
&= \mu_1\lambda_1(\mu_1+\lambda_2)-(\lambda_1+\mu_2)((\mu_1+\mu_2)(\mu_1+\lambda_2)-\lambda_2\mu_2) = -\mu_1\mu_2(\lambda_1+\mu_1+\lambda_2+\mu_2)
\end{aligned}$$

D'après la règle de Cramer, on obtient la solution suivante pour le système linéaire :

$$\begin{aligned}\pi &= \begin{pmatrix}\frac{\text{dét}A_1}{\text{dét}A} & \frac{\text{dét}A_2}{\text{dét}A} & \frac{\text{dét}A_3}{\text{dét}A} & \frac{\text{dét}A_4}{\text{dét}A}\end{pmatrix}\\ &= \frac{1}{(\lambda_1+\mu_1)(\lambda_2+\mu_2)}\begin{pmatrix}\lambda_1\lambda_2 & \lambda_1\mu_2 & \mu_1\lambda_2 & \mu_1\mu_2\end{pmatrix}\end{aligned}$$

(b) La plus astucieuse : utiliser l'indépendance des deux composants.

On a d'après l'exercice 8 pour les deux composants, les deux distributions stationnaires :

$$\begin{aligned}\pi^{(1)} &= \begin{pmatrix}\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\mu_1} & \frac{\mu_1}{\lambda_1+\mu_1}\end{pmatrix}\\ \pi^{(2)} &= \begin{pmatrix}\frac{\lambda_2}{\lambda_2+\mu_2} & \frac{\mu_2}{\lambda_2+\mu_2}\end{pmatrix}\end{aligned}$$

On peut alors penser que pour l'état $(0;0)$, on a par indépendance $\pi_1 = \pi_1^{(1)} \times \pi_1^{(2)} = \frac{\lambda_1}{\lambda_1+\mu_1} \times \frac{\lambda_2}{\lambda_2+\mu_2}$.

En procédant de la même manière pour les trois autres états, on obtient le même π que dans la réponse précédente. Il reste quand même à vérifier que $\pi Q = 0$.

(c) La moins intuitive (la plus probabiliste) : utiliser le produit de Kronecker. On a d'après l'exercice 8, les deux générateurs infinitésimaux.

$$Q_1 = \begin{pmatrix}-\mu_1 & \mu_1\\ \lambda_1 & -\lambda_1\end{pmatrix} \qquad Q_2 = \begin{pmatrix}-\mu_2 & \mu_2\\ \lambda_2 & -\lambda_2\end{pmatrix}$$

Le produit de Kronecker de deux matrices A et B est défini par :

$$A \otimes B = \begin{pmatrix}a_{11}B & a_{12}B & \cdots\\ a_{21}B & a_{22}B & \cdots\\ \cdots & \cdots & \cdots\end{pmatrix}$$

On a alors pour deux matrices (2×2).

$$A \otimes I_2 = \begin{pmatrix}a_{11} & 0 & a_{12} & 0\\ 0 & a_{11} & 0 & a_{12}\\ a_{21} & 0 & a_{22} & 0\\ 0 & a_{21} & 0 & a_{22}\end{pmatrix} \qquad I_2 \otimes B = \begin{pmatrix}B & 0\\ 0 & B\end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow A \otimes I_2 + I_2 \otimes B = \begin{pmatrix}a_{11}+b_{11} & b_{12} & a_{12} & 0\\ b_{21} & a_{11}+b_{22} & 0 & a_{12}\\ a_{21} & 0 & a_{22}+b_{11} & b_{12}\\ 0 & a_{21} & b_{21} & a_{22}+b_{22}\end{pmatrix}$$

Remarque : En prenant $A = Q_1$ et $B = Q_2$, on peut montrer que $A \otimes I_2 + I_2 \otimes B = Q$.

De plus, une des propriétés du produit de Kronecker est la suivante :

$$(\pi^{(1)} \otimes \pi^{(2)})(A \otimes I_2 + I_2 \otimes B) = \pi^{(1)}A \otimes \pi^{(2)} + \pi^{(1)} \otimes \pi^{(2)}B.$$

Appliquons cette propriété avec $A = Q_1$ et $B = Q_2$, on a :

$$\begin{aligned} & (\pi^{(1)} \otimes \pi^{(2)})(Q_1 \otimes I_2 + I_2 \otimes Q_2) = \pi^{(1)}Q_1 \otimes \pi^{(2)} + \pi^{(1)} \otimes \pi^{(2)}Q_2\\ \Longrightarrow\ & (\pi^{(1)} \otimes \pi^{(2)})Q = \pi^{(1)}Q_1 \otimes \pi^{(2)} + \pi^{(1)} \otimes \pi^{(2)}Q_2\end{aligned}$$

Or par hypothèse sur les distributions stationnaires, on a $\pi^{(1)}Q_1 = 0$ et $\pi^{(2)}Q_2 = 0$, ce qui entraîne que $(\pi^{(1)} \otimes \pi^{(2)})Q = 0$, où $\pi^{(1)} \otimes \pi^{(2)}$ est la mesure produit. Elle se calcule comme dans l'item précédent.

Exercice 11 : Modèle épidémiologique simple

1. Soit $t_{n+1} > t_n > \cdots > t_0$ des instants quelconques. Le nombre d'individus infectés à l'instant t_{n+1}, $X_{t_{n+1}}$, dépend du nombre d'individus infectés à t_n, X_{t_n}, et du nombre d'individus infectés pendant l'intervalle de temps $]t_n, t_{n+1}]$. Ce dernier ne dépend probabilistiquement que de X_{t_n} puisque les nouvelles infections ne peuvent se faire qu'à partir des individus infectés à t_n avec une probabilité égale à $\alpha(t_{n+1} - t_n) + o(t_{n+1} - t_n)$. La propriété de Markov est donc bien vérifiée

$$\mathbb{P}\left(X_{t_{n+1}} = j / X_{t_n} = i, X_{t_{n-1}} = i_{n-1}, \ldots, X_{t_0} = i_0\right) \;=\; \mathbb{P}\left(X_{t_{n+1}} = j / X_{t_n} = i\right)$$

et $\{X_t, t \geqslant 0\}$ est bien une chaîne de Markov à temps continu.

Un individu infecté le reste éternellement donc la population infectée ne peut que croître. Il s'agit d'un processus de naissance pure. Les probabilités de passer de i à $i+k$ individus infectés avec $k \geqslant 2$ donnent lieu à un $o(h)$ (multiplication des $\alpha h + o(h)$), et la probabilité de transition de i à $i+1$ est la probabilité que 1 individu parmi les $m-i$ individus sains soit contaminé par un des i individus infectés, soit $\mathbb{P}(X_{t+h} = i+1/X_t = i) = i(m-i)(\alpha h + o(h))$, puisque chaque individu infecté est susceptible de contaminer un individu sain. Les taux de transition valent donc $\forall i \in [\![1; m-1]\!]$:

$$q_{ij} \;=\; \lim_{h \to 0} \frac{\mathbb{P}(X_{t+h} = j/X_t = i)}{h} \;=\; \begin{cases} (m-i)i\alpha, & j = i+1 \\ 0, & j \neq i+1, \quad j \neq i \end{cases},$$

On a alors la matrice génératrice suivante :

$$Q = \begin{pmatrix} -(m-1)\alpha & (m-1)\alpha & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -2(m-2)\alpha & 2(m-2)\alpha & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & -(m-1)\alpha & (m-1)\alpha \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Le processus $\{X_t\}$ est un processus de naissance pure avec $q_{ij} = 0$ pour $j > i+1$ et $j < i$, et les équations *avant* de Kolmogorov s'écrivent

$$\frac{dp_{ij}(t)}{dt} \;=\; \sum_k p_{ik}(t) q_{kj} \;=\; p_{ij-1}(t) q_{j-1j} + p_{ij}(t) q_{jj}, \quad j = 1, 2, , \ldots$$

Un individu infecté le reste éternellement, d'où $p_{ij}(t) = 0$ pour $j < i$, et les équations avant se simplifient pour donner

$$\begin{array}{rcl} p'_{ii}(t) & = & -\lambda_i p_{ii}(t) \\ p'_{ij}(t) & = & \lambda_{j-1} p_{ij-1}(t) - \lambda_j p_{ij}(t), \quad j > i \end{array} \qquad \text{avec} \quad \lambda_i = q_{ii+1} = (m-i)i\alpha. \tag{1}$$

La première équation donne $(p_{ii}(0) = 1)$ $p_{ii}(t) = e^{-\lambda_i t}$. On remarque que $p_{ii}(t) = \mathbb{P}(T_i > t)$, où T_i est le temps de séjour dans l'état i, puisque une fois l'état i quitté (vers l'état $j > i$), la chaîne ne peut plus y revenir.

La suite de cette correction ne fait pas partie de l'énoncé, mais est intéressante pour voir comment utiliser ces équations de Kolmogorov dans un cas concret.
La seconde équation s'écrit alors

$$e^{\lambda_j t}\lambda_{j-1}p_{ij-1}(t) \;=\; e^{\lambda_j t}\left(p'_{ij}(t)+\lambda_j p_{ij}(t)\right) \;=\; \frac{d}{dt}\left(e^{\lambda_j t}p_{ij}(t)\right).$$

Or $p_{ij}(t)=0$ pour $j>i$, d'où en intégrant,

$$p_{ij}(t) \;=\; \lambda_{j-1}e^{-\lambda_j t}\int_0^t e^{\lambda_j u}p_{ij-1}(u)\,du, \quad j>i.$$

Les probabilités peuvent alors se calculer de manière récursive, et on obtient par exemple

$$\begin{aligned} p_{ii+1}(t) &= \lambda_i e^{-\lambda_{i+1}t}\int_0^t e^{\lambda_{i+1}u}e^{-\lambda_i u}\,du \;=\; \frac{\lambda_i e^{-\lambda_{i+1}t}}{\lambda_{i+1}-\lambda_i}\left(e^{(\lambda_{i+1}-\lambda_i)t}-1\right) \\ &= \frac{\lambda_i}{\lambda_{i+1}-\lambda_i}\left(e^{-\lambda_i t}-e^{-\lambda_{i+1}t}\right) \end{aligned}$$

Les équations *arrières* de Kolmogorov s'écrivent

$$\frac{d}{dt}p_{ij}(t) \;=\; \sum_k q_{ik}p_{kj}(t) \;=\; q_{ii}p_{ij}(t)+q_{ii+1}p_{i+1j}(t),$$

ce qui donne, puisque $p_{ij}(t)=0$ pour $j<i$,

$$\begin{aligned} p'_{ii}(t) &= \lambda_i p_{ii}(t) \\ p'_{ij}(t) &= \lambda_i p_{ij}(t)+\lambda_i p_{i+1j}, \quad j>i. \end{aligned}$$

La première équation est identique à la première des équations avant de Kolmogorov (1), et la seconde peut se résoudre de la même manière que la seconde des équations avant de Kolmogorov pour donner

$$p_{ij}(t) \;=\; \lambda_i e^{-\lambda_i t}\int_0^t e^{\lambda_i u}p_{i+1j}(u)\,du, \quad j>i.$$

Cette équation permet également de calculer de manière récursive les $p_{ij}(t)$.

3. Il est immédiat qu'aucun état i ($i=1,\ldots,m-1$) ne communique avec aucun autre, puisque une fois quitté, un état donné n'est jamais revisité. L'état m est lui *absorbant* : une fois dans cet état, la chaîne y reste. La chaîne n'est donc pas irréductible, et le théorème de convergence ne s'applique pas. Les états $i=1,2\ldots,m-1$ sont *transients*, l'état m est *récurrent positif*, et la chaîne possédant un nombre fini d'états, $\pi_i=0$, pour $i=1,\ldots,m-1$ et $\pi_m=1$.
4. Soit T_i le temps de séjour dans l'état i, qui représente donc le temps pour passer de i à $i+1$ individus infectés. Alors le temps total T jusqu'à ce que l'ensemble de la population soit infectée vaut

$$T \;=\; \sum_{i=1}^{m-1} T_i.$$

Les T_i, temps de séjour dans l'état $i=1,\ldots,m-1$, suivent une loi exponentielle de paramètre λ_i (cf question 2), d'où

$$\mathbb{E}[T] \;=\; \sum_{i=1}^{m-1}\mathbb{E}[T_i] \;=\; \frac{1}{\alpha}\sum_{i=1}^{m-1}\frac{1}{i(m-i)}.$$

La question sur la variance est hors-sujet, car nous n'avons pas montré en cours que les temps de séjour sont indépendants entre eux.
Les v.a. T_i sont indépendantes, ce qui permet d'écrire

$$\mathrm{Var}(T) \;=\; \sum_{i=1}^{m-1}\mathrm{Var}(T_i) \;=\; \frac{1}{\alpha^2}\sum_{i=1}^{m-1}\left(\frac{1}{i(m-i)}\right)^2.$$