Processus stochastiques
Questions de cours

IENAC
Automne 2024

1. Soit $E = \{0, 1, \ldots, k\}$ et soit
$$P^{(n)} = \begin{pmatrix} p_{0,0}^{(n)} & p_{0,1}^{(n)} & \cdots & p_{0,k}^{(n)} \\ p_{1,0}^{(n)} & p_{1,1}^{(n)} & \cdots & p_{1,k}^{(n)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ p_{k,0}^{(n)} & \cdots & \cdots & p_{k,k}^{(n)} \end{pmatrix}, \text{ où } p_{i,j}^{(n)} = \mathbb{P}\left(X_n = j / X_0 = i\right)$$
Montrer que $P^{(m+n)} = P^{(m)} P^{(n)}$.

2. Soit une chaîne de Markov à temps discret, avec P, sa matrice de transition. Définir, sous forme d'expressions mathématiques, un état absorbant, un état transient, un état récurrent positif et un état récurrent nul. On pourra utiliser indifféremment les $p^{(n)}(x, y)$, les $f^{(n)}(x, y)$, $G(x, y)$ et/ou $F(x, y)$.

3. Soit (X_n) une chaîne de Markov à temps discret. Soit $f^{(n)}(x, x)$ les probabilités du temps de retour en x après n sauts. Définir, en fonction des $f^{(n)}(x, x)$, un état transient, récurrent nul, récurrent positif.

4. Quelle est la période d pour la chaîne de Markov, marche aléatoire sur le cercle $\mathbb{Z}/2n\mathbb{Z}$? Et que représente les d sous-classes pour cette chaîne de Markov ?

5. Expliquer brièvement la propriété d'ergodicité en utilisant une application de la loi forte des grands nombres.

6. Quelles sont les conditions pour que la chaîne de Markov soit ergodique ? Lorsqu'en plus, la chaîne est apériodique, quelle est alors la limite des $p^n(x, y)$ quand n tend vers $+\infty$?

7. Soit (X_t) une chaîne de Markov à temps continu. Montrer le résultat de Chapman-Kolmogorov, i.e. :
$$\forall t > 0, \forall s > 0, \quad P(t + s) = P(t)P(s) \; .$$

8. Soit $Q = (q_{i,j})$ le générateur infinitésimal d'une chaîne de Markov à temps continu (X_t). Donner la matrice de transition de sa chaîne de Markov immergée, en fonction des $q_{i,j}$.

9. Donner 2 caractérisations d'un processus de Poisson.

10. Donner un exemple de processus ponctuel et un exemple de processus de comptage.

11. Généraliser, en le justifiant, la proposition 4.6 (effacement) à 3 types d'événements (type I avec probabilité p_1, type II avec probabilité p_2 et type III avec probabilité $1 - p_1 - p_2$).