Exercice 2 : Simulation d'une chaîne de Markov

1. Il est clair que $\Psi(U_0)$ prend ses valeurs dans E, comme X_0. De plus :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\Psi(U_0)=i\right) &= \mathbb{P}\left(U_0 \in \Psi^{-1}(\{i\})\right) \\ &= \mathbb{P}\left(U_0 \in [\mathbb{P}\left(X_0 \leqslant i-1\right); \mathbb{P}\left(X_0 \leqslant i\right)[\right) \\ &= \int_{\mathbb{P}(X_0 \leqslant i-1)}^{\mathbb{P}(X_0 \leqslant i)} dx = \mathbb{P}\left(X_0 = i\right) \end{aligned}$$

2. Il faut démontrer trois choses :
   (a) (X_n) est une chaîne (elle prend bien des valeurs dans E et l'espace des temps est discret).Par définition, la fonction Φ prend ces valeurs dans E. De plus, de manière tout aussi évidente, on observe X_0, puis X_1 (en fonction de X_0), ...L'espace des temps est donc bien discret. Nous sommes bien en présence d'une chaîne.

   (b) (X_n) possède la propriété de Markov. Nous allons calculer la probabilité suivante : $\mathbb{P}\left(X_{n+1}=j \ / \ X_n = i_n \cap X_{n-1} = i_{n-1} \cap \cdots \cap X_0 = i_0\right)$ et montrer que cette probabilité ne dépend que i_n et j. On a :

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}\left(X_{n+1}=j \ / \ X_n = i_n \cap X_{n-1} = i_{n-1} \cap \cdots \cap X_0 = i_0\right) \\ &= \mathbb{P}\left(\Phi(X_n;U_{n+1})=j \ / \ X_n = i_n \cap X_{n-1} = i_{n-1} \cap \cdots \cap X_0 = i_0\right) \\ &= \mathbb{P}\left(\Phi(i_n;U_{n+1})=j \ / \ X_n = i_n \cap X_{n-1} = i_{n-1} \cap \cdots \cap X_0 = i_0\right) \\ &= \mathbb{P}\left(\Phi(i_n;U_{n+1})=j \ / \ \Phi(X_{n-1};U_n) = i_n \cap \Phi(X_{n-2};U_{n-1}) = i_{n-1} \cap \cdots \cap \Psi(U_0) = i_0\right) \\ &= \mathbb{P}(\Phi(i_n;U_{n+1})=j \ / \ \Phi(i_{n-1};U_n) = i_n \cap \Phi(i_{n-2};U_{n-1}) = i_{n-1} \cap \cdots \\ &\qquad \cdots \cap \Phi(i_0;U_1) = i_2 \cap \Psi(U_0) = i_0) \end{aligned}$$

   On constate alors que le "sachant que" est constitué d'événements dépendants du vecteur $(U_0, U_1, U_2, \ldots, U_n)$ et donc indépendant de U_{n+1} et donc que la probabilité revient au calcul de la probabilité suivante :

$$\mathbb{P}\left(X_{n+1}=j \ / \ X_n = i_n \cap X_{n-1} = i_{n-1} \cap \cdots \cap X_0 = i_0\right) = \mathbb{P}\left(\Phi(i_n;U_{n+1})=j\right)$$

   qui ne dépend bien que de i_n et j.

   (c) $\mathbb{P}\left(X_{n+1}=j / \ X_n = i\right) = p_{ij}$ où p_{ij} est un élément de la matrice de transition. D'après ce qui précède, il faut calculer la probabilité suivante : $\mathbb{P}\left(\Phi(i;U_{n+1}=j\right)$. On a :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\Phi(i;U_{n+1})=j\right) &= \mathbb{P}\left(U_{n+1} \in \Phi_i^{-1}(\{j\})\right) \\ &= \mathbb{P}\left(U_{n+1} \in \left[\sum_{l=1}^{j-1} p_{il}; \sum_{l=1}^{j} p_{il}\right[\right) \\ &= \int_{\sum_{l=1}^{j-1} p_{il}}^{\sum_{l=1}^{j} p_{il}} dx = p_{ij} \end{aligned}$$

Exercice 3 : Doudou le hamster

1.

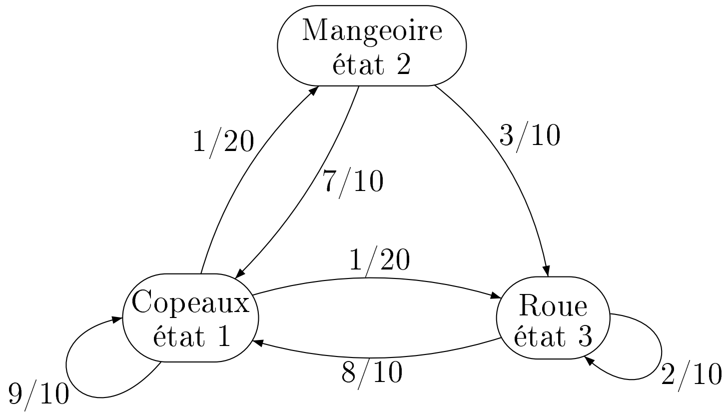

Figure 1 – Diagramme de transition

On a :

$$P = \begin{pmatrix} \frac{9}{10} & \frac{1}{20} & \frac{1}{20} \\ \frac{7}{10} & 0 & \frac{3}{10} \\ \frac{8}{10} & 0 & \frac{2}{10} \end{pmatrix}$$

2. Si Doudou dort la première minute, on a $\mathcal{P}(X_0) = (1; 0; 0)$. D'après le cours, on a :

$$\mathcal{P}(X_1) = \mathcal{P}(X_0)P = \left(\frac{9}{10}; \frac{1}{20}; \frac{1}{20}\right)$$

$$\mathcal{P}(X_2) = \mathcal{P}(X_1)P = \left(\frac{177}{200}; \frac{9}{200}; \frac{14}{200}\right)$$

La probabilité qu'il dorme la minute suivante est donc $\frac{9}{10}$ et $\frac{177}{200}$ celle d'après.

Exercice 4

1. On peut modéliser le problème : $X_{n+1} = \max(X_n; U_{n+1})$ où $U_{n+1} = \{1, 2, 3, 4\}$.

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}\left(X_{n+1} = j \ / \ X_n = i_1 \cap \cdots \cap X_0 = i_0\right) \\ &\quad = \mathbb{P}\left(\max(X_n; U_{n+1}) = j \ / \ X_n = i_n \cap \cdots \cap X_0 = i_0\right) \\ &\quad = \mathbb{P}\left(\max(i_n; U_{n+1}) = j \ / \ \max(X_{n-1}; U_n) = i_n \cap \max(X_{n-2}; U_{n-1}) = i_{n-1} \cdots \cap U_0 = i_0\right) \\ &\quad = \mathbb{P}\left(\max(i_n; U_{n+1}) = j \ / \ \max(i_{n-1}; U_n) = i_n \cap \max(i_{n-2}; U_{n-1}) = i_{n-1} \cdots \cap U_0 = i_0\right) \end{aligned}$$

Le « sachant que » dépend du vecteur $(U_0; U_1; U_2; \ldots; U_n)$ qui est bien indépendant de U_{n+1}. On en déduit que

$$\mathbb{P}\left(X_{n+1} = j \ / \ X_n = i_1 \cap \cdots \cap X_0 = i_0\right) = \mathbb{P}\left(\max(i_n; U_{n+1}) = j\right)$$

Le membre de droite ne dépend que de j et de i_n. On est donc bien en présence d'une chaîne de Markov. De plus, la loi de U_{n+1} ne dépend pas de n : la chaîne de Markov est donc homogène.

2.

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(X_1 = 1 \ / \ X_0 = 1\right) &= \mathbb{P}\left(\text{« dé donne 1 »}\right) = \frac{1}{4} \\
\mathbb{P}\left(X_1 = 2 \ / \ X_0 = 1\right) &= \mathbb{P}\left(\text{« dé donne 2 »}\right) = \frac{1}{4} \\
\mathbb{P}\left(X_1 = 3 \ / \ X_0 = 1\right) &= \mathbb{P}\left(\text{« dé donne 3 »}\right) = \frac{1}{4} \\
\mathbb{P}\left(X_1 = 4 \ / \ X_0 = 1\right) &= \mathbb{P}\left(\text{« dé donne 4 »}\right) = \frac{1}{4} \\
\mathbb{P}\left(X_1 = 1 \ / \ X_0 = 2\right) &= 0 \\
\mathbb{P}\left(X_1 = 2 \ / \ X_0 = 2\right) &= \mathbb{P}\left(\text{« dé donne 1 ou 2 »}\right) = \frac{2}{4} \\
\mathbb{P}\left(X_1 = 3 \ / \ X_0 = 2\right) &= \mathbb{P}\left(\text{« dé donne 3 »}\right) = \frac{1}{4} \\
\mathbb{P}\left(X_1 = 4 \ / \ X_0 = 2\right) &= \mathbb{P}\left(\text{« dé donne 4 »}\right) = \frac{1}{4} \\
\mathbb{P}\left(X_1 = 1 \ / \ X_0 = 3\right) &= 0 \\
\mathbb{P}\left(X_1 = 2 \ / \ X_0 = 3\right) &= 0 \\
\mathbb{P}\left(X_1 = 3 \ / \ X_0 = 3\right) &= \mathbb{P}\left(\text{« dé donne 1, 2 ou 3 »}\right) = \frac{3}{4} \\
\mathbb{P}\left(X_1 = 4 \ / \ X_0 = 3\right) &= \mathbb{P}\left(\text{« dé donne 4 »}\right) = \frac{1}{4} \\
\mathbb{P}\left(X_1 = 1 \ / \ X_0 = 4\right) &= 0 \\
\mathbb{P}\left(X_1 = 2 \ / \ X_0 = 4\right) &= 0 \\
\mathbb{P}\left(X_1 = 3 \ / \ X_0 = 4\right) &= 0 \\
\mathbb{P}\left(X_1 = 4 \ / \ X_0 = 4\right) &= 1
\end{aligned}
$$

On a donc :

$$
P = \begin{pmatrix} 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 2/4 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 3/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

3. Chaque état est une classe irréductible. D'après la matrice de transition P, on peut voir que "4" est une classe essentielle (elle est même absorbante). Les classes "1", "2" et "3" sont a priori transientes (ici, dès qu'on quitte un de ces états, nous n'y revenons plus).

Exercice 5

1. On a, d'après l'énoncé, les probabilités suivantes :

$$
\begin{aligned}
p &= \mathbb{P}\left(2 \mid 1\right) = \mathbb{P}\left(3 \mid 2\right) = \mathbb{P}\left(D \mid 3\right) \\
q &= \mathbb{P}\left(1 \mid 1\right) = \mathbb{P}\left(2 \mid 2\right) = \mathbb{P}\left(3 \mid 3\right) \\
r &= \mathbb{P}\left(R \mid 1\right) = \mathbb{P}\left(R \mid 2\right) = \mathbb{P}\left(R \mid 3\right) \\
1 &= \mathbb{P}\left(R \mid R\right) = \mathbb{P}\left(D \mid D\right)
\end{aligned}
$$

On a alors, en utilisant le classement des états de l'énoncé, soit (1,2,3,D,R) :

$$
P = \begin{pmatrix} q & p & 0 & 0 & r \\ 0 & q & p & 0 & r \\ 0 & 0 & q & p & r \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

2. En appliquant le résultat du cours, on doit résoudre le système suivant :

$$Ph_{\text{diplome}} = h_{\text{diplome}}$$

avec $h_{\text{diplome}} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Ce qui revient à résoudre le système suivant :

$$\begin{pmatrix} q & p & 0 & 0 & r \\ 0 & q & p & 0 & r \\ 0 & 0 & q & p & r \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} qa_1 + pa_2 = a_1 \\ qa_2 + pa_3 = a_2 \\ qa_3 + p = a_3 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a_1 = \dfrac{p^3}{(1-q)^3} \\ a_2 = \dfrac{p^2}{(1-q)^2} \\ a_3 = \dfrac{p}{1-q} \end{cases}$$

La probabilité qu'un élève obtienne son diplôme en partant de la $i^{\text{ème}}$ année est donc de $\dfrac{p^{4-i}}{(1-q)^{4-i}}$.

Exercice 6

1. (X_n) est bien une chaîne car elle ne peut prendre que deux valeurs 0 ou 1. On observe la chaîne tous les jours : c'est donc une chaîne à temps discret. De manière évidente, elle possède la propriété de Markov car le nombre de machines en panne le lendemain ne dépend que du nombre de machines en panne le jour même et d'une expérience aléatoire (la (ou les) machine(s) tombe(nt) en panne ou pas) qui est indépendante du passé (c'est-à-dire du nombre de machines en panne les jours précédents).

   Pour pouvoir donner sa matrice de transition, il faut calculer les 4 probabilités suivantes : $\mathbb{P}(X_1 = 0 \ / \ X_0 = 0), \mathbb{P}(X_1 = 1 \ / \ X_0 = 0), \mathbb{P}(X_1 = 0 \ / \ X_0 = 1)$ et $\mathbb{P}(X_1 = 1 \ / \ X_0 = 1)$.

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_1 = 0 \ / \ X_0 = 0) &= \mathbb{P}(\text{au moins une machine fonctionne à la fin de la journée}) \\ &= 1 - \mathbb{P}(\text{aucune machine ne fonctionne à la fin de la journée}) \\ &= 1 - q^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_1 = 1 \ / \ X_0 = 0) &= \mathbb{P}(\text{les deux machines tombent en panne}) \\ &= q^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_1 = 0 \ / \ X_0 = 1) &= \mathbb{P}(\text{la machine en marche fonctionne à la fin de la journée}) \\ &= 1 - q \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_1 = 1 \ / \ X_0 = 1) &= \mathbb{P}(\text{la machine en marche tombe en panne dans la journée}) \\ &= q \end{aligned}$$

   On a donc :

$$P = \begin{pmatrix} 1-q^2 & q^2 \\ 1-q & q \end{pmatrix}$$

2. La chaîne de Markov est irréductible (une classe d'équivalence, si $q \neq 0$), apériodique (car $1 - q^2 > 0$).
   On a :

$$\begin{aligned}
F(0,0|z) &= \sum_{n=1}^{\infty} f^{(n)}(0,0)z^n = f^{(1)}(0,0)z + \sum_{n=2}^{\infty} f^{(n)}(0,0)z^n \\
&= (1-q^2)z + \sum_{n=2}^{\infty} q^2 q^{n-2}(1-q)z^n = (1-q^2)z + (1-q)\sum_{n=2}^{\infty} q^n z^n \\
&= (1-q^2)z + (1-q)(qz)^2 \sum_{n=2}^{\infty} q^{n-2}z^{n-2} = (1-q^2)z + (1-q)(qz)^2\left(\frac{1}{1-qz}\right) \\
&= (1-q^2)z + (1-q)q^2\left(\frac{z^2}{1-qz}\right)
\end{aligned}$$

   Donc $F(0,0|1) = 1$ et donc 0 est un état récurrent. Calculons maintenant $F'(0,0|z)$. On a :

$$\begin{aligned}
F'(0,0|z) &= (1-q^2) + (1-q)q^2\left(\frac{2z(1-qz) - z^2(-q)}{(1-qz)^2}\right) \\
&= 1 - q^2 + (1-q)q^2\left(\frac{2z - qz^2}{(1-qz)^2}\right) = 1 - q^2 + (1-q)q^2 z\left(\frac{2-qz}{(1-qz)^2}\right)
\end{aligned}$$

   On a alors :

$$\begin{aligned}
F'(0,0|1) &= 1 - q^2 + (1-q)q^2\left(\frac{2-q}{(1-q)^2}\right) = (1-q^2) + q^2\left(\frac{2-q}{1-q}\right) \\
&= \frac{(1-q^2)(1-q) + q^2(2-q)}{1-q} = \frac{1-q+q^2}{1-q}
\end{aligned}$$

   Le calcul est du même type pour l'état 1. La chaîne est donc ergodique et ne possède donc qu'une distribution stationnaire. Pour la calculer, il faut résoudre $\pi P = \pi$. On a le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{l} \pi_1 q^2 + \pi_2 q = \pi_2 \\ \pi_1 + \pi_2 = 1 \end{array}\right. \implies \left\{\begin{array}{l} (1-\pi_2)q^2 + \pi_2 q = \pi_2 \\ \pi_1 + \pi_2 = 1 \end{array}\right.$$

$$\implies \left\{\begin{array}{l} \pi_1 = \dfrac{1-q}{1-q+q^2} \\ \pi_2 = \dfrac{q^2}{1-q+q^2} \end{array}\right.$$

3. Pour la question sur la chaîne de Markov, on utilise le même argument pour la première question, la seule différence vient du fait que cette fois-ci, 2 machines peuvent être en panne le lendemain matin. (X_n) prend donc 3 valeurs : 0,1 ou 2. La matrice de transition se calcule de manière similaire à la première question. Par exemple, pour passer de l'état 0 à l'état 0, il faut qu'aucune machine ne tombe en panne (proba $= (1-q^2)$) ; pour passer de l'état 0 à l'état 1, il faut qu'une seule machine tombe en panne sur les 2 qui fonctionnent (proba $= 2q(1-q)$) ; pour passer de l'état 0 à l'état 2, il faut que les 2 machines tombent en panne (proba $= q^2$). Ce qui donne la matrice suivante :

$$\begin{pmatrix} (1-q)^2 & 2q(1-q) & q^2 \\ 1-q & q & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

   La chaîne de Markov est irréductible, récurrente positive et apériodique : elle a donc une unique distribution stationnaire. On a le résultat suivant :

$$\pi = \left(\frac{1-q}{1+q-q^3}; \frac{2q-q^2}{1+q-q^3}; \frac{q^2-q^3}{1+q-q^3}\right).$$

Exercice 7

1. Si l'on ne regarde que la porte de devant, il est clair que le nombre de chaussures après le footing ne dépend que du nombre de chaussures du matin et d'une expérience aléatoire (choix de la porte de sortie et de la porte de rentrée) qui est indépendante du passé (c'est-à-dire du nombre de chaussures de la veille) : c'est une chaîne de Markov. De plus, les probabilités ne dépendent pas du temps, donc la chaîne est homogène. Concernant la matrice de transition, nous allons commencer par la première ligne de la matrice (transition de 0 paires de chaussure à 1, 2, ...).

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(X_1=1 \mid X_0=0\right) &= \mathbb{P}\left(\text{il sort par la porte de derrière et revient par la porte de devant}\right)\\ &= \frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\forall 2\leqslant i\leqslant N, \mathbb{P}\left(X_1=i \mid X_0=0\right) &= 0\\ \mathbb{P}\left(X_1=0 \mid X_0=0\right) &= 1-\sum_{i=1}^{N}\mathbb{P}\left(X_1=i \mid X_0=0\right)=\frac{3}{4}\end{aligned}$$

Pour les probabilités suivantes (nombre de chaussures compris entre 1 et $(N-1)$), on peut remarquer que le « pas » n'est que de 1 (soit il y a une paire de moins, soit il y a une paire de plus, soit il y a toujours le même nombre de paires).

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\text{une paire de moins}\right) &= \mathbb{P}\left(\text{il sort par la porte de devant et revient par la porte de derrière}\right)\\ &= \frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}\\ \mathbb{P}\left(\text{une paire de plus}\right) &= \mathbb{P}\left(\text{il sort par la porte de derrière et revient par la porte de devant}\right)\\ &= \frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}\\ \mathbb{P}\left(\text{même nombre de paire(s)}\right) &= \mathbb{P}(\text{il sort par la porte de devant et revient par la porte de devant}\\ &\quad \text{ou il sort par la porte de derrière et revient par la porte de derrière})\\ &= \frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

Pour la dernière transition (état N), on retrouve le même résultat que pour l'état 0, mais à l'envers. On a alors la matrice suivante :

$$P=\begin{pmatrix} 3/4 & 1/4 & 0 & \cdots & \cdots & 0\\ 1/4 & 1/2 & 1/4 & \ddots & & \vdots\\ 0 & 1/4 & 1/2 & 1/4 & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0\\ \vdots & & \ddots & 1/4 & 1/2 & 1/4\\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1/4 & 3/4 \end{pmatrix}$$

2. D'après la matrice de transition, il est clair que la chaîne est irréductible. De plus, elle est à espace d'états finis, elle est donc récurrente positive. Concernant la période, la diagonale de P est strictement positive : elle est donc apériodique (il suffisait de le voir pour l'état 0 par exemple).

3. Prenons $N=2$, on a :

$$P=\begin{pmatrix} 3/4 & 1/4 & 0\\ 1/4 & 1/2 & 1/4\\ 0 & 1/4 & 3/4 \end{pmatrix}$$

L'hypothèse concernant la loi initiale se traduit par : $\mathcal{P}(X_0) = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$. Il faut déterminer la loi X_1. D'après le cours, on a : $\mathcal{P}(X_1) = \mathcal{P}(X_0)P$, c'est-à-dire :

$$\mathcal{P}(X_1) = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) \begin{pmatrix} 3/4 & 1/4 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 1/4 & 3/4 \end{pmatrix} = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

La loi initiale est donc une distribution stationnaire. On peut montrer, par récurrence immédiate, que : $\mathcal{P}(X_n) = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$.