Processus stochastiques

Ludovic d'Estampes & Pascal Lezaud

ludovic.destampes@enac.fr

ENAC - IENAC

Objectif du cours

Présenter les processus stochastiques les plus couramment utilisés en modélisation aléatoire (chaînes de Markov à temps discret et à temps continu, processus de Poisson).

- Décrire un processus stochastique
- Choisir les méthodes adaptées à l'étude de ce processus.
- Faire des hypothèses sur les valeurs prises par lui

- Évaluation par contrat de confiance : 1$^{\text{ère}}$ partie sur des questions de cours ($\sim$ 6 points), 2$^{\text{ème}}$ partie sur des exercices vus en cours ($\sim$ 6 points), 3$^{\text{ème}}$ partie sur des exercices originaux ($\sim$ 8 points)

Plan du cours

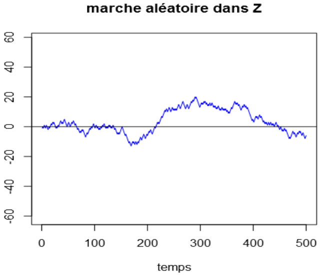
Plan du cours

Fonctions aléatoires ?

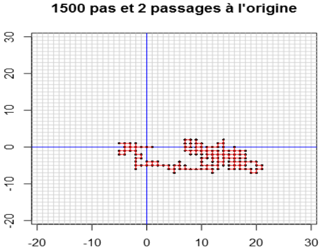
- Comment représenter une variable aléatoire ?
- Comment représenter un vecteur aléatoire ?
- Que se passe-t-il si la taille du vecteur tend vers l'infini ?

☞La théorie des processus stochastiques concerne l'étude des fonctions aléatoires. Un exemple fameux, le mouvement brownien décrit par Einstein (1905)

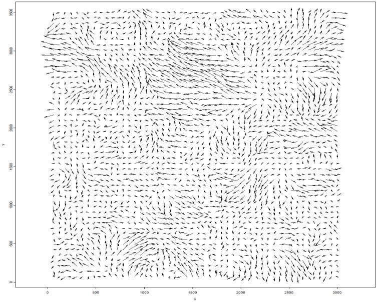
Exemples de processus : Marche aléatoire dans $\mathbb{Z}$



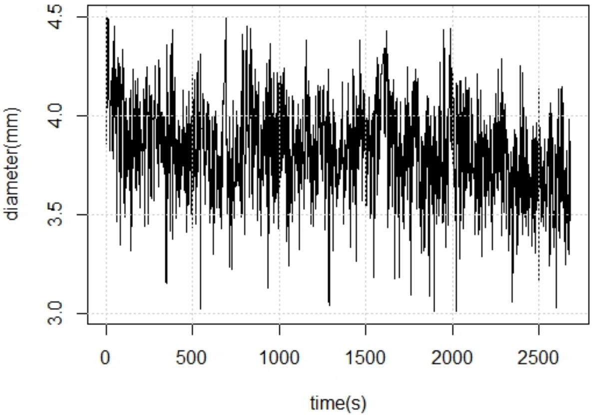
Exemples de processus : MA dans $\mathbb{Z}^2$



Exemples de processus : Champ de vent

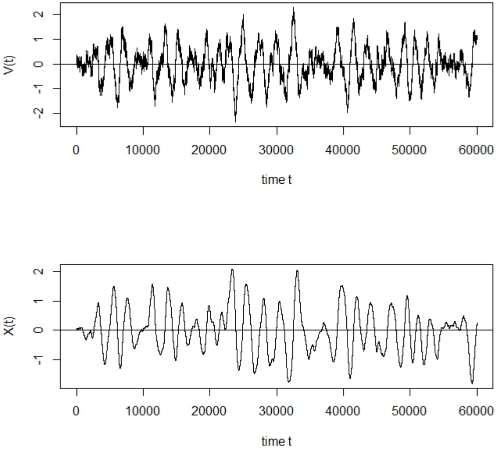


Exemples de processus : Autres exemples



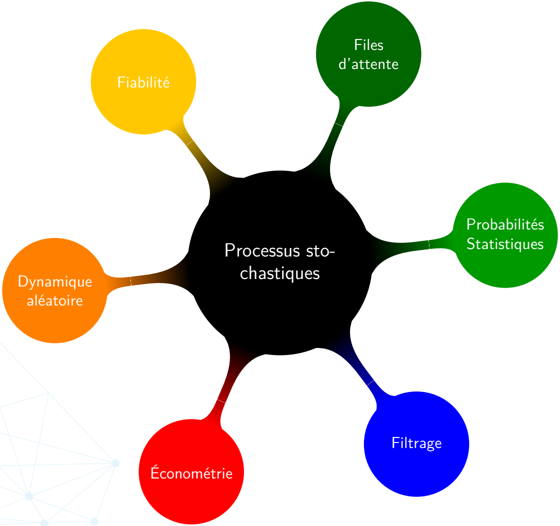
Diamètre pupillaire

Exemples de processus : Autres exemples



Dynamique perturbée : équation de Kramer

Articulation avec d'autres domaines



Plan du cours

Définition d'un processus stochastique

Définition 1.1

Un processus stochastique est une famille de variables aléatoires $(X_t)_{t\in T}$ *définies sur un même espace de probabilité* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *et à valeurs dans un espace mesurable* $(E, \mathcal{E})$*.*

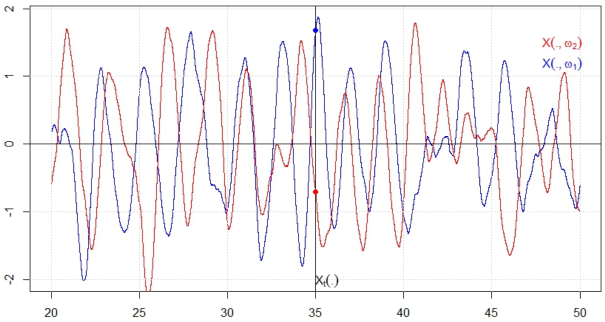
Pour tout $t \in T$, X_t est une variable aléatoire à valeur dans E, donc une application mesurable de $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ dans E.

☞ Dans la suite de cette introduction, sauf mention contraire, $T = [0, \infty)$, $E = \mathbb{R}^d$ et $\mathcal{E} = \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, la tribu borélienne.

Trajectoire du processus

Définition 1.2

Soit $\omega \in \Omega$, l'application $X(\omega) : T \to E$ définie par $X(\omega)(t) = X_t(\omega)$ est appelée trajectoire du processus associée à ω.



Plan du cours

Lois fini-dimensionnelles

- L'espace $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ est très souvent inaccessible, seul l'espace des trajectoires $E^T := \{x = (x_t)_{t \in T} \ : \ x_t \in E\}$ est observable.
- Par ailleurs, seules les lois fini-dimensionnelles du processus sont accessibles : soit $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall t_1 < t_2 < \ldots < t_n$ et $\forall A_1, \ldots, A_n$ avec chacun des $A_i \in \mathcal{E}$

$$\mu_{t_1,\cdots,t_n}(A_1 \times \cdots \times A_n) := \mathbb{P}(X_{t_1} \in A_1, \cdots, X_{t_n} \in A_n).$$

- On ne pourra donc pas distinguer deux processus ayant les mêmes lois fini-dimensionnelles.
- Mathématiquement, nous souhaitons construire un espace probabilisé $(E^T, \mathcal{E}^T, \mathbb{P}_X)$ tel que la probabilité $\mathbb{P}_X$, représentant la loi du processus X, vérifie les conditions suivantes :

$$\mathbb{P}_X\left(\{x \in E^T : x_{t_1} \in A_1, \cdots, x_{t_n} \in A_n\}\right) = \mu_{t_1,\cdots,t_n}(A_1 \times \cdots \times A_n),$$

pour tout n, $t_1 < \cdots < t_n \in T^n$ et $(A_1, \cdots, A_n) \in \mathcal{E}^{\otimes n}$

Théorème de Kolmogorov

- Il faut pour cela que les ensembles cylindriques

$$C(A_1, \cdots, A_n; t_1, \cdots, t_n) := \{x \in E^T : x_{t_1} \in A_1, \cdots, x_{t_n} \in A_n\}$$

appartiennent à la tribu $\mathcal{E}^T$. Ainsi, le plus simple est de choisir pour tribu $\mathcal{E}^T$, la tribu engendrée par les ensembles cylindriques.

- Reste à prouver l'existence d'une probabilité $\mathbb{P}_X$ sur l'espace des trajectoire. Ceci résulte du théorème de Kolmogorov :

Théorème 1.1 (Théorème de Kolmogorov)

Soit (X_t) un processus stochastique à valeurs dans un espace polonais (métrisable, séparable et complet) E, muni de sa tribu borélienne $\mathcal{E}$. Alors, il existe une unique probabilité $\mathbb{P}_X$ sur $(E^T, \mathcal{E}^T)$ telle que les lois fini-dimensionnelles $\mu_{t_1,\cdots,t_n}(A_1 \times \cdots \times A_n)$ du processus soient égales à $\mathbb{P}_X(C(A_1, \cdots, A_n; t_1, \cdots, t_n))$.

Plan du cours

Lien entre $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et $(E^T, \mathcal{E}^T, \mathbb{P}_X)$

Définition 1.3

Sur l'espace des trajectoires E^T, on définit pour tout $t \in T$, l'application coordonnée $\Pi_t \colon E^T \to E$, par $\Pi_t(x) = x_t$.

Proposition 1.1

Soit $(\Omega, \mathcal{F})$ un espace probabilisable. Une application $X \colon (\Omega, \mathcal{F}) \to (E^T, \mathcal{E}^T)$ est une variable aléatoire ssi pour tout $t \in T$, l'application $\Pi_t \circ X$ est une variable aléatoire de $(\Omega, \mathcal{F})$ dans $(E, \mathcal{E})$.

- Soit l'application $X \colon \Omega \to E^T$ associant à chaque ω la trajectoire $X(\omega)$ du processus. Alors, $(X_t)_{t \in T}$ est un processus stochastique ssi X est mesurable de $(\Omega, \mathcal{F})$ dans $(E, \mathcal{E})^T$.
- Ainsi le processus $X = (X_t)_{t \in T}$ s'identifie à la variable aléatoire X à valeurs dans E^T.
- De plus, la loi du processus $\mathbb{P}_X$ est la loi image de $\mathbb{P}$ par X.

Exercice

Exercice 1

1. Soit $E = \mathbb{R}$, $\mathcal{E} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $T = [0,1]$. Expliquer simplement pourquoi les deux événements suivant n'appartiennent pas forcément à $\mathcal{E}^T$.

$$A_1 = \{f \in E^T : \sup_{t\in[0,1]} |f(t)| < 1\},$$
$$A_2 = \{f \in E^T : \exists t \in [0,1], f(t) = 0\}.$$

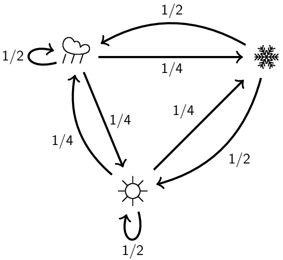
2. On se restreint à $\mathcal{C}([0,1];\mathbb{R}) \subset E^T$ muni de la tribu trace de $\mathcal{E}^T$ (c'est aussi la tribu borélienne pour la topologie de la convergence uniforme sur les compacts). Expliquer par un argument de densité dénombrable pourquoi A_1 et A_2 sont alors mesurables.

D'où l'importance des processus presque sûrement à trajectoires continues. Ces arguments s'étendent aux applications càdlàg (étude des processus de sauts).

Plan du cours

Exemple 1 : Temps à Toulouse

$$\begin{array}{c} \\ ❄ \\ 🌧 \\ ☀ \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} ❄ & 🌧 & ☀ \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 & 1/2 \end{pmatrix} \end{array}$$



- Il pleut aujourd'hui. Quelle est la probabilité qu'il neige dans deux semaines ?
- Nombre moyen de jours ensoleillés le mois prochain ?

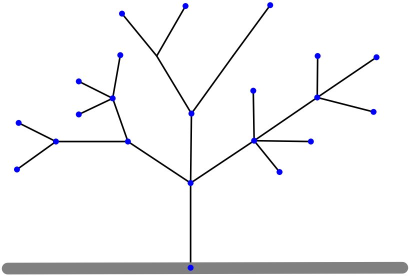
Exemple 2 : Marche aléatoire de l'ivrogne

A chaque pas, le marcheur choisit avec probabilité $2/3$ d'aller vers sa maison et avec probabilité $1/3$ d'aller vers le lac. S'il atteint le lac, il se noie, s'il atteint sa maison, il y reste.

- Quelle est la probabilité que le buveur se noie et celle qu'il atteigne son domicile ?
- Supposons, qu'il a atteint son domicile, combien de temps (ou de pas) lui a-t-il fallu en moyenne pour l'atteindre ?

Exemple 3 : marche aléatoire sur un graphe

Un chat grimpe à un arbre et choisit avec probabilité égale, parmi toutes les possibilités, soit de descendre soit de monter sur une branche voisine. Lorsqu’il arrive au sommet (feuille), il retourne sur ses pas et continue comme auparavant.



- Probabilité que le chat retrouve le sol ?
- Temps moyen avant de revenir au sol ?
- Probabilité d’un retour au sol, avant d’avoir visité une feuille ?

Plan du cours

Définition axiomatique d'une chaîne de Markov

Définition 2.1

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *un processus à valeurs dans* E *fini ou dénombrable, muni de la tribu* $\mathcal{P}(E)$. $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une* ***chaîne de Markov*** *(notée CM) homogène si elle possède les propriétés suivantes :*

1. $\mathbb{P}(X_{n+1} = x_{n+1} | X_n = x_n, \cdots, X_0 = x_0) = \mathbb{P}(X_{n+1} = x_{n+1} | X_n = x_n)$, *si* $\mathbb{P}(X_n = x_n, \cdots, X_0 = x_0) > 0$.
2. $\mathbb{P}(X_{n+1} = x_{n+1} | X_n = x_n) = \mathbb{P}(X_{m+1} = x_{n+1} | X_m = x_n)$.

- La 1° propriété s'appelle **propriété de Markov** (mathématicien Russe 1856–1922).
- La 2° propriété s'exprime en disant que la chaîne est **homogène en temps**.
- Si ν=distribution initiale, on note $\mathbb{P}_\nu = \sum_{u\in E} \nu(u)\mathbb{P}_u$.

Matrice stochastique

Exemple 2.1

L'espace d'états E d'une chaine de Markov est fini ou dénombrable.
Ex.1 : $E =$ {☼, 🌧, ❄}, Ex.2 : $E = \{0, 1, 2, \cdots, 300\}$, Ex. 3 : $E =$sommets de l'arbre ;

Définition 2.2

*On appelle **matrice stochastique** une matrice carrée* $M = (m_{ij})$, *où* $(i, j) \in [\![1; n]\!]^2$ *telle que*

$$\forall (i, j),\ 0 \leq m_{ij} \leq 1, \quad \textit{et} \quad \sum_{j=1}^{n} m_{ij} = 1, \ \textit{pour tout } i \in [\![1; n]\!].$$

☞ La définition d'une matrice stochastique peut s'étendre au cas où n est infini.

Matrice de transition

Définition 2.3

On appelle ***probabilité de transition*** *à l'instant n d'un état x à un état y la quantité suivante :*

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = y | X_n = x) = p_n(x, y) \ .$$

La matrice $P_n = (p_n(x, y))_{x,y \in E}$ est alors appelée la ***matrice de transition****.*

- Dans le cas d'une chaîne de Markov homogène, cette probabilité ne dépend ni de l'histoire du processus, ni de l'instant n.

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}(X_{n+1} = y | X_n = x, X_{n-1} = x_{n-1}, \cdots, X_0 = x_0) \\ &\quad = \mathbb{P}(X_{n+1} = y | X_n = x) = \mathbb{P}(X_{m+1} = y | X_m = x) = p(x, y) \ .\end{aligned}$$

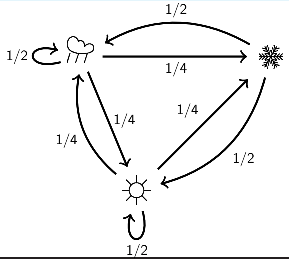
- Pour la suite, on posera P la matrice de transition de la chaîne de Markov. À noter que c'est une matrice stochastique.

Graphe d'une chaîne de Markov

Un graphe orienté Γ est un couple $\Gamma = (V, A)$ où V est un ensemble (fini ou dénombrable) de sommets et $A \subset V \times V$ un ensemble d'arcs. Un arc $[x, y]$ est orienté de x vers y.

Définition 2.4 (Graphe d'une CM)

Soit (X_n) une CM sur l'espace d'états E et de matrice de transition $P = (p(x,y))_{x,y\in E}$. Le graphe $\Gamma = \Gamma(P)$ associé à la CM a pour ensemble de sommets $V = E$, et $[x, y] \in A$ ssi $p(x, y) > 0$. On associe à l'arc $[x, y]$ le poids $p(x, y)$.



Simulation d'une CM

Exercice 2

Nous nous plaçons dans le cas où l'espace des états est fini.
On prendra $E = \{1, 2, 3, \ldots, N\}$.
Pour simuler une chaîne de Markov, un algorithme est nécessaire. Nous allons déterminer x_0, puis x_1, puis x_2,...
La première étape de l'algorithme consiste à simuler X_0. La seconde étape consiste à simuler X_{n+1} en fonction de X_n.
1) Si on pose :

$$\begin{array}{rcl} \Psi : [0;1] & \longrightarrow & E \\ x & \mapsto & \Psi(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \in [0; \mathbb{P}(X_0 = 1)[\\ 2 \text{ si } x \in [\mathbb{P}(X_0 = 1); \mathbb{P}(X_0 = 1) + \mathbb{P}(X_0 = 2)[\\ \vdots \\ N \text{ si } x \in [\sum_{i=1}^{N-1} \mathbb{P}(X_0 = i); 1] \end{cases} \end{array}$$

Montrer que $\Psi(U_0)$ a même loi que X_0 où U_0 est une loi uniforme sur $[0; 1]$.

Simulation d'une CM

Exercice 2 (suite)

2) Soit U_i des variables indépendantes et identiquement distribuées selon une loi uniforme sur $[0;1]$.
Si on pose :

$$\begin{array}{rcl} \Phi : E \times [0;1] & \longrightarrow & E \\ (i;x) & \mapsto & \Phi(i;x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \in [0; p_{i1}[\\ 2 \text{ si } x \in [p_{i1}; p_{i1} + p_{i2}[\\ \vdots \\ N \text{ si } x \in [\sum_{l=1}^{N-1} p_{il}; 1] \end{cases} \end{array}$$

où $P = (p_{ij})$ est la matrice de transition.
Montrer que $X_{n+1} = \Phi(X_n; U_{n+1})$ définit bien une chaîne de Markov de matrice de transition P.

Plan du cours

Transition en n étapes

Soit (X_n) une CM sur E de matrice de transition P ; calcul de

$$p^{(n)}(x,y) = \mathbb{P}_x(X_n = y) \ ?$$

$p^{(0)}(x,y) = \delta_{xy}$, et $p^{(1)}(x,y) = p(x,y)$.

Théorème 2.1 (Chapman-Kolmogorov)

1. $p^{(n+m)}(x,y) = \sum_{z \in E} p^{(n)}(x,z)p^{(m)}(z,y)$.
2. *Le nombre $p^{(n)}(x,y)$ est le coefficient en position (x,y) de la matrice P^n, puissance n-ème de P.*
3. *P^n est une matrice stochastique.*

Transition en n étapes

- Soit $\Gamma(P)$ le graphe associé à la CM. Un chemin de longueur n, $\gamma = x_0 x_1 \dots x_n$ est une suite de n arcs adjacents (si $n = 0$, $\gamma = x_0$).
- A chaque γ, on associe le poids $w(\gamma)$

$$w(\gamma) = p(x_0, x_1)p(x_1, x_2)\dots p(x_{n-1}, x_n) = \prod_{i=1}^{n} w([x_{i-1}, x_i]).$$

- Soit $\Pi_n(x,y)$ l'ensemble des chemins de longueur n reliant x à y, on lui associe le poids

$$w\left(\Pi_n(x,y)\right) = \sum_{\gamma \in \Pi_n(x,y)} w(\gamma)$$

- D'après la définition de la loi du processus

$$p^{(n)}(x,y) = \sum_{\gamma \in \Pi_n(x,y)} w(\gamma) = w\left(\Pi_n(x,y)\right).$$

Transition en n étapes

- $\gamma_1 = x_0 \dots x_n, \gamma_2 = y_0 \dots y_m$, avec $x_n = y_0$. Le chemin **concaténé** $\gamma_1 \circ \gamma_2$ est le chemin $x_0 \dots x_n (= y_0) y_1 \dots y_m$ de longueur $n+m$. On posera $\Pi_n(x,z) \circ \Pi_m(z,y)$ l'ensemble des chemins de longueur $n+m$ tel que $x_n = z = y_0$.
- $\Pi_{n+m}(x,y) = \biguplus_{z \in E} \Pi_n(x,z) \circ \Pi_m(z,y)$ (réunion disjointe), et $w(\Pi_n(x,z) \circ \Pi_m(z,y)) = w(\Pi_n(x,z)) w(\Pi_m(z,y))$.
- On a alors :

$$\begin{aligned} p^{(n+m)}(x,y) &= w\left(\Pi_{n+m}(x,y)\right) \\ &= \sum_z w(\Pi_n(x,z)) w(\Pi_m(z,y)) \\ &= \sum_z p^{(n)}(x,z) p^{(m)}(z,y). \end{aligned}$$

Exemple 1 : Il pleut aujourd'hui, alors la probabilité qu'il neige dans deux semaines est $p^{(14)}($🌧$,$ ❄$)$.

Mesures, fonctions sur E

- Soit (X_n) une CM de loi $\mathbb{P}_\nu$. La loi μ_n de la va X_n est une probabilité sur E définie par

$$\forall A \subset E, \quad \mu_n(A) = \sum_{x \in A} \mathbb{P}(X_n = x) = \sum_{x \in A} \mu_n(\{x\}).$$

- On peut montrer que $\mu_n(\{x\}) = \sum_{x_0 \in E} \nu(x_0) p^{(n)}(x_0, x) = (\nu P^n)(x)$.
- De même, si $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$,

$$\mathbb{E}_x\left[f(X_n)\right] := \mathbb{E}(f(X_n)|X_0 = x) = \sum_y f(y) p^{(n)}(x, y) = (P^n f)(x).$$

- $\boxed{\text{Si } f \geq 0, \text{ alors } P^n f \geq 0 \text{ et } P^n 1 = 1.}$

Exemple : nombre de visites

Exemple 2.2 (nombre de visites)

Soit $A \subset E$, on veut définir le nombre de visites de A par la CM. Posons $v_n^A = 1_A(X_n)$ avec la notation v_n^x si $A = \{x\}$. Alors le nombre de visites de A par la CM sur la période $[k, n]$ est

$$v_{[k,n]}^A := v_k^A + \cdots + v_n^A, \quad k \leq n,$$

et le nombre total de visites de A est $v^A = \sum_{n=0}^{\infty} v_n^A$.

$$\mathbb{E}_\nu(v_{[k,n]}^A) = \sum_{j=k}^{n} \sum_{x \in E} \sum_{y \in A} \nu(x) p^{(j)}(x, y)$$

Supposons qu'il pleuve aujourd'hui à Toulouse : le nombre moyen de jours de pluie durant le mois suivant est

$$\mathbb{E}_{\text{🌧}}(v_{[0,30]}^{\text{🌧}}) = \sum_{n=0}^{30} p^{(n)}(\text{🌧}, \text{🌧}).$$

Doudou, le hamster

Exercice 3

Il ne connaît que trois endroits dans sa cage : les copeaux où il dort, la mangeoire où il mange et la roue où il fait de l'exercice. Toutes les minutes, il peut soit changer d'activité, soit continuer celle qu'il était en train de faire. L'appellation processus sans mémoire n'est pas du tout exagérée pour parler de Doudou.

- Quand il dort, il a 9 chances sur 10 de ne pas se réveiller la minute suivante.
- Quand il se réveille, il y a 1 chance sur 2 qu'il aille manger et 1 chance sur 2 qu'il parte faire de l'exercice.
- Le repas ne dure qu'une minute, après il fait autre chose.
- Après avoir mangé, il y a 3 chances sur 10 qu'il parte courir dans sa roue, mais surtout 7 chances sur 10 qu'il retourne dormir.
- Courir est fatigant ; il y a 8 chances sur 10 qu'il retourne dormir au bout d'une minute. Sinon il continue en oubliant qu'il est déjà un peu fatigué.

1. Tracer le graphe de cette chaîne de Markov et donner sa matrice de transition.
2. Si on suppose que Doudou dort la première minute, quelle est la probabilité qu'il dorme la minute suivante ? Et celle d'après ?

Plan du cours

Temps d'arrêt

Définition 2.5

*Un **temps d'arrêt** est une variable aléatoire* $\mathbf{t}$ *prenant ses valeurs dans* $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$, *telle que* $\{\mathbf{t} \leq n\} = \{\omega \in \Omega | \mathbf{t}(\omega) \leq n\} \in \mathcal{F}_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, *où* $\mathcal{F}_n$ *désigne la sous-tribu de* $\mathcal{F}$ *engendrée par* $(X_0, \ldots, X_n)$.

- La sous tribu $\mathcal{F}_n$ s'interprète comme la connaissance disponible en observant le processus sur $[0, n]$. Nous avons $\mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}_{n+1}$, et la famille $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$ est appelée une **filtration** de $\mathcal{F}$. Cette notion, fondamentale dans l'étude des processus, modélise l'évolution temporelle.
- Un temps d'arrêt est donc une va $\mathbf{t}$, associée à la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$, telle que pour décider si $\mathbf{t} \leq n$, il suffit de connaître $\mathcal{F}_n$, donc l'évolution du processus jusqu'à l'instant n ; il n'y a pas besoin d'aller observer au-delà de n.

Temps d'atteinte

Exemple 2.3 (Temps d'atteinte ou de premier passage)

Soit $A \subset E$, les deux temps d'arrêt suivant sont très important

$$s^A = \inf\{n \geq 0 : X_n \in A\}, \quad \tau^A = \inf\{n \geq 1 : X_n \in A\}.$$

Si $A = \{x\}$, on écrira s^x et τ^x.

Si $X_0 = x$ alors $s^x = 0$, tandis que τ^x sera le premier temps de retour en x.

Exemple 2.4 (Temps de couverture)

Le temps de couverture est le premier instant n au bout duquel la chaîne a visité tous les états. $t_{cov} = \inf\{n \geq 1 : \cup_{k=0}^{n}\{X_n\} = E\}$.

Le **dernier** temps de visite d'un sous-ensemble $A \subset E$ n'est pas un temps d'arrêt (pourquoi ?).

Probabilités de transition - temps d'atteinte

Introduisons les quantités suivantes pour $x, y \in E$:

$$G(x,y) = \mathbb{E}_x(v^y), \quad F(x,y) = \mathbb{P}_x(\tau^y < \infty).$$

$G(x,y) =$ nombre moyen de visites en y en partant de x,
$F(x,y) =$ probabilité de visiter y en partant de x.
$F(x,x)$ est la probabilité de retour en x.

Proposition 2.1

Soit $f^{(n)}(x,y) = \mathbb{P}_x(\tau^y = n) = \mathbb{P}_x(X_n = y, X_i \neq y, 1 \leq i < n)$, *alors*

$$G(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} p^{(n)}(x,y)$$

$$F(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(x,y)$$

Plan du cours

Fonctions génératrices (I)

- À une suite de nombre réels ou complexes (a_n), on associe la série $\sum_n a_n z^n$, $z \in \mathbb{C}$ appelée fonction génératrice de (a_n).
- Soit (X_n) une CM sur E de matrice P, sa **fonction de Green** est la fonction génératrice des $G(x,y)$, notée

$$G(x,y|z) = \sum_{n=0}^{\infty} p^{(n)}(x,y) z^n, \quad x,y \in E,\ z \in \mathbb{C},$$

de rayon de convergence

$$r(x,y) = 1/\limsup_n (p^{(n)}(x,y))^{1/n} \geq 1.$$

Théorème 2.2

Si E est fini, alors $G(x,y|z)$ est une fraction rationnelle en z.

Fonctions génératrices (II)

- Soit $r = \inf\{r(x,y) : x, y \in E\}$. Pour $|z| < r$, on forme la matrice

$$\mathcal{G}(z) = (G(x,y|z))_{x,y\in E}.$$

- Alors avec la notation $P^0 = I$ pour $|z| < r$

$$\mathcal{G}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n P^n = I + zP\mathcal{G}(z)$$

- d'où formellement

$$\boxed{\mathcal{G}(z) = (I - zP)^{-1}}$$

Fonctions génératrices (III) : Exemple 1

$$\mathcal{G}(z) = \begin{pmatrix} 1 & -z/2 & -z/2 \\ -z/4 & 1-z/2 & -z/4 \\ -z/4 & -z/4 & 1-z/2 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$= \frac{1}{(1-z)(16-z^2)} \begin{pmatrix} (4-3z)(4-z) & 2z(4-z) & 2z(4-z) \\ z(4-z) & 2(8-4z-z^2) & 2z(2+z) \\ z(4-z) & 2z(2+z) & 2(8-4z-z^2) \end{pmatrix}$$

Nous pouvons donc répondre aux deux premières questions

$$G(\text{🌧}, \text{❄}|z) = \frac{z}{(1-z)(4+z)} = \frac{z}{5}\left(\frac{1}{1-z} + \frac{1}{4+z}\right)$$

$$= \sum_{n=1} \frac{1}{5}\left(1 - \frac{(-1)^n}{4^n}\right) z^n.$$

D'où $p^{(14)}(\text{🌧}, \text{❄}) = \frac{1}{5}\left(1 - \frac{(-1)^{14}}{4^{14}}\right)$, et $G(\text{🌧}, \text{☀}|z) = \frac{2z(2+z)}{(1-z)(4+z)(4-z)}$.
Par un développement en série, on peut sommer les valeurs des coefficients pour $n = 0, \cdots, 30$.

Plan du cours

1 Généralités sur les processus stochastiques

2 Chaînes de Markov à temps discret

- Exemples
- Définition d'une chaîne de Markov
- Transition en n étapes
- Temps d'arrêt : temps d'atteinte et de premier retour
- Fonction génératrice, fonction de Green
- Classification des états
- Récurrence - transience
- Mesure invariante - théorème ergodique

3 Chaînes de Markov à temps continu

4 Processus de Poisson homogènes

Relation d'équivalence

Pour $x, y \in E$, nous introduisons deux relations

1. $x \to y$ (y est **accessible** à partir de x), s'il existe $n \geq 0$ tel que $p^{(n)}(x, y) > 0$ (☞ $x \to x$ car $P^0 = I$).
2. $x \leftrightarrow y$ (x et y **communiquent**), si $x \to y$ et $y \to x$.

Proposition 2.2

La relation $\leftrightarrow$ est une relation d'équivalence sur les états.

Définition 2.6

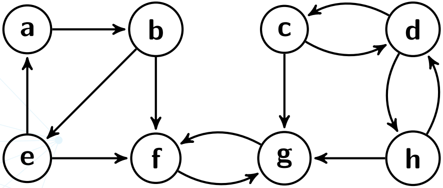
*Les classes d'équivalence pour la relation $\leftrightarrow$ sont appelées **classes irréductibles**. Elles correspondent aux composantes fortement connexes du graphe $\Gamma(P)$.*
*Une chaîne de Markov est dite **irréductible** si elle ne possède qu'une seule classe irréductible.*

Exemples

Exemple 2.5

Les CM du 1° et 3° exemples sont irréductibles. La CM pour le 2° exemple qui est une marche aléatoire sur $\{0, 1, \ldots, N\}$ admet trois classes irréductibles

$$\{0\}, \quad \{1, \ldots, N-1\}, \quad \{N\}.$$

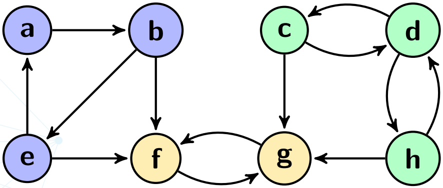


Exemples

Exemple 2.5

Les CM du 1° et 3° exemples sont irréductibles. La CM pour le 2° exemple qui est une marche aléatoire sur $\{0, 1, \ldots, N\}$ admet trois classes irréductibles

$$\{0\}, \quad \{1, \ldots, N-1\}, \quad \{N\}.$$



Ordre partiel sur les classes irréductibles (I)

- Si $C(x), C(y)$ désignent les classes irréductibles contenant respectivement x et y, alors $C(x) \to C(y)$ ssi $x \to y$.

Proposition 2.3

La relation $\to$ est une relation d'ordre partiel sur les classes irréductibles.

- En effet, $C(x) \to C(x)$,
  $(C(x) \to C(z))\&(C(z) \to C(y)) \Longrightarrow (C(x) \to C(y))$,
  $(C(x) \to C(y))\&(C(y) \to C(x)) \Longrightarrow (C(x) = C(y))$
- L'ordre est partiel, deux classes ne sont pas toujours comparables.
- Un **élément maximal** pour la relation d'ordre $\to$ est une classe $C(x)$ tel que si il existe y tel que $x \to y$ alors $y \in C(x)$. Il n'en existe pas toujours (par exemple, $\mathbb{N}$ et $\leq$ pour la relation d'ordre).

Ordre partiel sur les classes irréductibles (II)

Définition 2.7

*Les éléments maximaux pour l'ordre partiel $\to$ sur les classes irréductibles (si ils existent) sont appelés **classes essentielles**.*

- *Un état x est dit **essentiel** si $C(x)$ est une classe essentielle.*
- *Si $\{x\}$ est une classe essentielle, on dit alors que x est **absorbant**. Dans ce cas-là, $p(x,x) = 1$.*

Proposition 2.4

Il y a équivalence entre

(i) *C est essentielle ;*

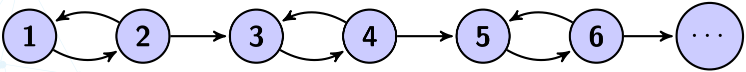
(ii) *si $x \in C$ et $x \to y$, alors $y \in C$;*

(iii) *si $x \in C$ et $x \to y$, alors $y \to x$.*

Ordre partiel sur les classes irréductibles (III)

- Si E est fini, il y a un nombre fini de classes irréductibles, il existe donc au moins une classe essentielle.

- C'est faux si E est infini, par exemple avec $E = \mathbb{N}^*$ et le graphe



Les classes irréductibles sont $\{1, 2\}, \{3, 4\}, \{5, 6\}, \ldots$; il n'y a pas d'élément maximal.

Exercice

Exercice 4

On lance indéfiniment un dé à 4 faces non pipé pour définir le processus $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec pour X_j le maximum des j premiers lancés du dé.

1. Montrer que (X_n) est une chaîne de Markov (on pourra introduire la variable aléatoire intermédiaire U_n uniforme sur $\{1,2,3,4\}$).
2. Donner sa matrice de transition et son graphe.
3. Déterminer la nature des états de cette chaîne.

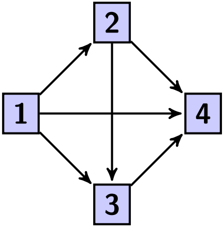
Exercice

Exercice 4

On lance indéfiniment un dé à 4 faces non pipé pour définir le processus $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec pour X_j le maximum des j premiers lancés du dé.

1. Montrer que (X_n) est une chaîne de Markov (on pourra introduire la variable aléatoire intermédiaire U_n uniforme sur $\{1,2,3,4\}$).
2. Donner sa matrice de transition et son graphe.
3. Déterminer la nature des états de cette chaîne.

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{2}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



Les classes irréductibles sont $\{1\},\{2\},\{3\},\{4\}$ et 4 est absorbant.

Périodicité d'une classe irréductible (I)

Dans ce qui suit C est une classe irréductible non triviale (non réduit à un seul état x tel que $p(x,x)=0$).

☞ Pour tout $x,y \in C$, il existe $k=k(x,y)$ tel que $p^{(k)}(x,y)>0$. Ceci valide l'existence de la quantité suivante.

Définition 2.8

*Soit $x \in C$, la **période** de x est le nombre*

$$d = \textit{pgcd}\{n>0 \ : \ p^{(n)}(x,x)>0\} \ .$$

Proposition 2.5

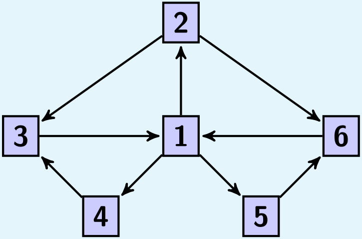
Le nombre d ne dépend pas du choix spécifique de $x \in C$. Il caractérise la classe irréductible C. On a alors, $d=d(C)$, où $d(C)$ est la période de C.

Définition 2.9

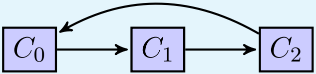
*Si $d(C)=1$, la classe C est dite **apériodique**.*

Périodicité d'une classe irréductible (II)

Exemple 2.6

- Ex.1 : $C = E = \{$❄, ☼, 🌧$\}$ et $p($☼, ☼$) > 0$, donc $d(C) = 1$.
- MA absorbante : $C = \{1, 2, \dots, N-1\}$ et $d(C) = 2$.
- 

Une seule classe irréductible de période 3. Soit $x_0 = 1$, alors $x_1 \in \{2, 4, 5\}$, $x_2 \in \{3, 6\}$, et enfin $x_3 = 1$, d'où le schéma suivant avec $C_0 = \{1\}, C_1 = \{2, 4, 5\}$ et $C_2 = \{3, 6\}$



Périodicité d'une classe irréductible (III)

Proposition 2.6

Si P est irréductible et de période d, alors P^d possède exactement d classes apériodiques, $C_0, \dots, C_{d-1}$, de telle façon que si la loi de X_0 est à support dans C_i, alors celle de X_1 est à support dans C_{i+1}, etc. On a en fait

$$C_0 \xrightarrow{1} C_1 \xrightarrow{1} \dots C_{d-1} \xrightarrow{1} C_0.$$

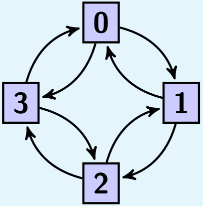
Corollaire 2.1

Si P est irréductible et de période $d > 1$, alors la chaîne ne converge pas en loi, autrement dit, la matrice P^n n'admet pas de limite.

Marche aléatoire sur le cercle $\mathbb{Z}/2n\mathbb{Z}$

Exemple 2.7

Soit $E = \{0, \ldots, 2n-1\}$ et $p(i, i \pm 1) = 1/2$ avec la convention $2n \equiv 0$. On voit que la CM est irréductible et de période $d = 2$. On peut montrer que $C_0 = \{\text{nombres pairs}\}, C_1 = \{\text{nombres impairs}\}$. Pour $n = 2$,



$$P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

On a alors :

$$P^2 = \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \qquad P^2 = \begin{array}{c} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{array} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} P^{2n+1} = P \\ P^{2n} = P^2 \end{cases}$$

Plan du cours

Récurrence - transience

Définition 2.10

*Un état $x \in E$ est dit **récurrent** pour P si*

$$F(x,x) = \mathbb{P}_x\left(\exists n > 0 : X_n = x\right) = 1 = \mathbb{P}_x(\tau^x < \infty).$$

*Dans le cas contraire, x est dit **transient**.*

- Donc x est récurrent pour P si partant de x la CM retourne en x avec probabilité 1.
- Si $\mathbb{P}_x(\tau^x < \infty) = 1$, alors la CM retourne une infinité de fois en x (propriété de Markov) ;
- Si $\mathbb{P}_x(\tau^x < \infty) < 1$, alors la probabilité que la CM retourne une infinité de fois en x est nulle : il n'y a pas de valeur intermédiaire (loi du zéro-un).

Loi du zéro-un

Soit $H(x,y) = \mathbb{P}_x\left(X_n = y \text{ pour une infinité de } n \in \mathbb{N}\right), \quad x, y \in E.$

Théorème 2.3

1. *L'état* x *est récurrent ssi* $H(x,x) = 1$.
2. *L'état* x *est transient ssi* $H(x,x) = 0$.
3. *Nous avons l'identité* $H(x,y) = F(x,y)H(y,y)$.

Proposition 2.7

1. $\forall (x,y) \in E,\ x \neq y,\ G(x,y) = F(x,y)G(y,y).$
2. $\forall x \in E,\ G(x,x) = \dfrac{1}{1 - F(x,x)}.$

Récurrence : une propriété de classe

Corollaire 2.2

- *Un état* x *est récurrent si* $G(x,x) = +\infty$.
- *Un état* x *est transient si* $G(x,x) < +\infty$.

Proposition 2.8

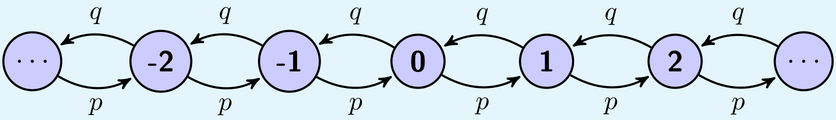
1. *La récurrence (et donc la transience) est une propriété de classe.*
2. *Toute classe non essentielle est transiente.*
3. *Toute classe récurrente est une classe essentielle.*
4. *Toute classe essentielle finie est récurrente.*

Marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$

Exemple 2.8

Soient p, q positifs tels que $p+q=1$. La MA sur $\mathbb{Z}$ est définie par

$$p(k,k+1)=p,\ p(k,k-1)=q,\ p(k,l)=0 \text{ si } |k-l|\neq 1.$$



La chaîne est irréductible et par symétrie

$$G(k,l|z)=G((k-l),0|z)=G(0,(l-k)|z).$$

On montre que $F(0,0|z)=1-\sqrt{1-4pqz^2}$, d'où $F(0,0|1)=1-|p-q|$.
Donc récurrence ssi $p=q=1/2$, *i.e.* qu'il n'y a pas de « dérive ».

Absorption par une classe récurrente

On pose $(R_l)_{l \in L}$ l'ensemble des classes récurrentes et $T = \{t_1, \dots, t_p\}$ l'ensemble des p états transients.

Proposition 2.9

Si on pose $h_l(x) = \mathbb{P}_x\left(\tau^{R_l} < +\infty\right)$, la probabilité d'atteindre R_l en partant de x, on a :

- $\forall x \in R_l, h_l(x) = 1.$
- $\forall x \in R_k, k \neq l, h_l(x) = 0.$
- $\forall x \in T, h_l(x) = \sum_{y \in R_l} p(x,y) + \sum_{y \in T} p(x,y) h_l(y).$

Proposition 2.10

Si on note $h_l = (h_l(x))_{x \in E}$, on déduit de la proposition précédente que

$$P.h_l = h_l$$

Exercice

Exercice 5

Les études à l'ENAC durent 3 ans. On suppose qu'à la fin de chaque année, un élève a une probabilité $p = 0{,}75$ de passer dans l'année supérieure (ou d'avoir son diplôme s'il est en troisième année), une probabilité $q = 0{,}2$ de redoubler et une probabilité $r = 0{,}05$ d'être renvoyé.
Soit (X_n) la place de l'étudiant dans le cursus après n années. X_n prend ses valeurs dans $\{$1ère année, 2ème année, 3ème année, diplômé, renvoyé$\}$.

1. En supposant que le processus est une chaîne de Markov à temps discret, calculer sa matrice de transition.
2. Calculer la probabilité qu'un élève obtienne son diplôme, à partir de chaque année du cursus.

Récurrence positive - récurrence nulle

Soit x un état récurrent pour une CM, nous souhaitons connaître le temps moyen de retour en x. Nous avons $\mathbb{P}_x(\tau^x < \infty) = 1$, et

$$\mathbb{E}_x(\tau^x) = \sum_{n=1}^{\infty} n f^{(n)}(x,x) = \lim_{z \to 1^-} F'(x, x|z).$$

Définition 2.11

Un état récurrent x est dit

- ***récurrent positif*** *si* $\mathbb{E}_x(\tau^x) < \infty$ *;*
- ***récurrent nul*** *si* $\mathbb{E}_x(\tau^x) = \infty$*.*

Exemple 2.9 (MA sur $\mathbb{Z}$)

La MA est récurrente ssi $p = q = \frac{1}{2}$. On a $F(0,0|z) = 1 - \sqrt{1 - z^2}$, donc $F'(0,0|z) = \frac{z}{\sqrt{1-z^2}}$, et $\lim_{z \to 1^-} F'(0,0|z) = \infty$. L'état 0 est récurrent nul.

Plan du cours

Mesure invariante

☞ Les mesures sont toujours supposées non identiquement nulles : elles chargent donc au moins un état.

Définition 2.12

Une mesure sur E est une ***mesure invariante*** *pour la CM de matrice de transition P, si $\mu P = \mu$.*

Remarque 2.1

Une mesure invariante n'est pas nécessairement une probabilité ; bien entendu, cela ne concerne que le cas E infini. Dans le cas contraire, par normalisation on obtient une probabilité invariante qui représente un « équilibre » en loi pour la chaîne.

Marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$

Exemple 2.10

- Rappel : $p(k,k+1) = p, p(k,k-1) = q$ avec $p+q=1$.
- Une mesure μ sera invariante si elle est positive et vérifie $q\mu(i+1) + p\mu(i-1) = \mu(i)$.
- Si $p = q = 1/2$, alors $\mu(i) = \mu(0) + i[\mu(1) - \mu(0)]$ pour tout $i \in \mathbb{Z}$. La mesure est positive si $\mu(0) = \mu(1)$. On obtient la mesure de comptage sur $\mathbb{Z}$, qui n'est pas une probabilité.
- Si $p \neq q$, alors $\mu(i) = A\left(\frac{p}{q}\right)^i + B$, $\mu(0) = A + B$ et $\mu(1) = A(\frac{p}{q}) + B$ d'où
$$\forall i \in \mathbb{Z},\ \mu(i) = \mu(0) + \frac{q}{q-p}\left[1 - \left(\frac{p}{q}\right)^i\right](\mu(1) - \mu(0)).$$
μ n'est positive que si $\mu(0) = \mu(1)$, donc si $A(p/q) = A$, ce qui est impossible si $p \neq q$, donc la MA n'admet pas de mesure invariante.

Existence d'une mesure invariante

Pour tout état récurrent $x \in E$, introduisons le nombre moyen de passages en y avant le premier retour en x, noté $\mu_x(y)$

$$\mu_x(y) = \mathbb{E}_x\left(\sum_{n=0}^{\tau^x-1} 1_{\{X_n = y\}}\right)$$

Remarque 2.2

- Notons que si x est absorbant, alors $\mu_x(y) = \delta_x(y)$.
- De plus, $\mu_x(y) > 0$ si et seulement si $x \to y$.
- $\mu_x(x) = \mathbb{P}_x(X_0 = x) = 1$.

Théorème 2.4

*Si P est la matrice de transition d'une CM **irréductible et récurrente** sur E, alors pour tout $x \in E$, la mesure μ_x définit une mesure invariante pour P qui vérifie $\mu_x(x) = 1$ et $0 < \mu_x(y) < \infty$, pour tout $x, y \in E$.*

Mesure invariante : cas général

☞ La formule $\tau^x = \sum_{y\in E} \sum_{n=0}^{\tau^x-1} 1_{\{X_n = y\}}$ donne $\mu_x(E) = \mathbb{E}_x(\tau^x)$. Si l'état x est récurrent positif, $\mu_x(E) < \infty$ et il existe une probabilité invariante (voir Remarque 2.1). Si l'état x est récurrent nul, $\mu_x(E) = \infty$.

Théorème 2.5

*Soit une CM **irréductible**. Toute mesure invariante μ charge tous les états et vérifie $\mu(y) \geq \mu(x)\mu_x(y)$ pour tout $x, y \in E$.*

- *Si la CM est **transitoire**, alors $\mu(E) = \infty$. En particulier, E est infini et il n'y a pas de probabilité invariante.*
- *Si la CM est **récurrente**, alors la mesure μ est proportionnelle à μ_x et on a :*

$$\mu(y) = \mu(x)\mu_x(y)$$

pour tout $x, y \in E$. En particulier, $\mu_x(y)\mu_y(x) = 1$.

Mesure invariante : cas récurrent

On dira que la chaîne de Markov est récurrente positive (resp. récurrente nulle), si tous ses états sont récurrents positifs (resp. récurrents nuls).

Théorème 2.6

*Soit une CM **irréductible récurrente**. Il y a alors deux cas distincts :*

1. *CM **récurrente positive** : il existe une unique probabilité invariante μ_P donnée par*
$$\mu_P(x)\mathbb{E}_x(\tau^x) = 1 \ ;$$
2. *CM **récurrente nulle** : $\mu(E) = \infty$ pour toute mesure invariante μ. En particulier, E est infini et il n'y a pas de probabilité invariante.*

Exercice

Exercice 6

Deux machines identiques fonctionnent indépendamment, chacune pouvant tomber en panne avec la probabilité q. Soit X_n le nombre de machines en panne au début de la n ème journée.
Si une machine tombe en panne, elle est réparée la nuit suivante et on ne peut réparer qu'une machine par nuit.

1. Montrer que X_n est bien une chaîne de Markov homogène. Donner sa matrice de transition.
2. Après avoir calculé $F(0,0|z)$, montrer que l'état 0 est récurrent positif. On admettra que la chaîne est récurrente positive (à faire en autonomie). Il existe donc une unique distribution invariante. Déterminer cette distribution invariante.
3. Reprendre la question 1, en supposant maintenant que la réparation a lieu pendant la journée suivante, au lieu de la nuit suivante.

Ergodicité (I)

Une trajectoire de longueur n d'une CM partant d'un état récurrent x se décompose en N_n^x excursions autour de x plus un reliquat, où $N_n^x = \text{card}\{0 \leq k \leq n-1 : X_k = x\}$ est le nombre de passages en x avant le temps n. La propriété de Markov suggère que ses excursions sont i.i.d.

Théorème 2.7

Soit (X_n) une CM ***irréductible****. Alors pour tout $x \in E$, et quelque soit la loi initiale*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{N_n^x}{n} \stackrel{p.s.}{=} \frac{1}{\mathbb{E}_x(\tau^x)}.$$

Si la CM est ***irréductible et récurrente****, alors pour tout $x, y \in E$, et quelque soit la loi initiale*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{N_n^x}{N_n^y} \stackrel{p.s.}{=} \frac{1}{\mu_x(y)}.$$

Ergodicité (II)

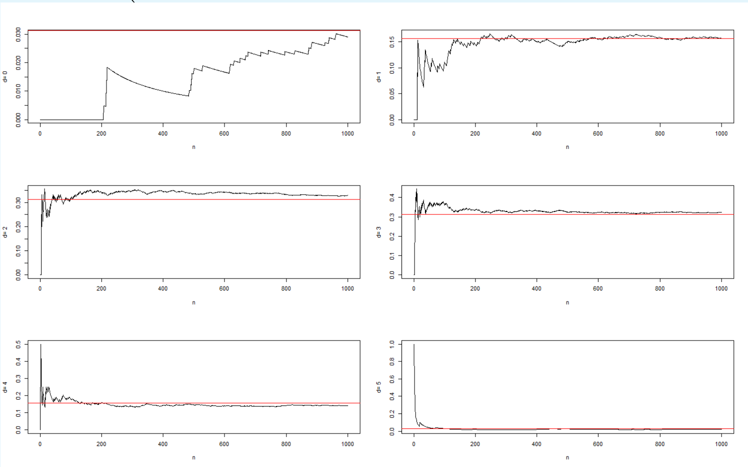
Remarque 2.3

- Ce théorème fournit un moyen d'estimer $\mathbb{E}_x(\tau^x)$ et μ_x par observation d'une seule trajectoire sur un temps très long. En effet, il suffit de compter le nombre de passages en x sur un intervalle de temps assez long, pour estimer $\mathbb{E}_x(\tau^x)$ comme le ratio n/N_n^x. Par contre, le théorème ne spécifie pas la vitesse de convergence et donc la grandeur de n.
- Dans le cas d'une CM irréductible récurrente positive, l'unique probabilité invariante est $\mu_P(x) = 1/\mathbb{E}_x(\tau^x)$. Cette probabilité est une mesure sur l'espace d'états qui, selon le théorème précédent, s'obtient comme limite d'une moyenne temporelle $\lim_n N_n^x/n$. Cette propriété d'égalité entre une moyenne temporelle et une moyenne sur un espace est appelée propriété d'**ergodicité**.

Application aux urnes d'Ehrenfest

Exemple 2.11

Loi invariante : $(0.03125\ 0.15625\ 0.31250\ 0.31250\ 0.15625\ 0.03125)$



Généralisation de l'ergodicité

Une fonction $f : E \to \mathbb{R}$ est μ-intégrable si $\mu(|f|) = \sum_{z \in E} \mu(z)|f(z)| < \infty$.

Théorème 2.8

*Soit (X_n) une CM **récurrente irréductible**, de loi initiale quelconque. Alors pour toute mesure invariante μ et toutes fonctions $f, g : E \to \mathbb{R}$ μ-intégrables, avec $g > 0$,*

$$\frac{f(X_1) + \cdots + f(X_n)}{g(X_1) + \cdots + g(X_n)} \underset{n\to\infty}{\overset{p.s}{\longrightarrow}} \frac{\mu(f)}{\mu(g)}.$$

*Si CM est **récurrente nulle**, pour toute fonction $f : E \to \mathbb{R}$ μ-intégrable*

$$\frac{f(X_1) + \cdots + f(X_n)}{n} \underset{n\to\infty}{\overset{p.s}{\longrightarrow}} 0.$$

*Si CM est **récurrente positive** et si μ_P est l'unique probabilité invariante, pour toute fonction $f : E \to \mathbb{R}$ μ_P-intégrable*

$$\frac{f(X_1) + \cdots + f(X_n)}{n} \underset{n\to\infty}{\overset{p.s}{\longrightarrow}} \mu_P(f).$$

Convergence étroite

Définition 2.13

Une suite de mesures (μ_n) sur un espace d'états E converge étroitement vers une mesure μ si pour toute fonction $f : E \to \mathbb{R}$ continue et bornée, la suite $(\mu_n f)$ converge vers μf.

Proposition 2.11

Soit (X_n) une suite de variables aléatoires sur E et μ_P une probabilité sur E, alors X_n converge en loi vers μ_P si et seulement si la loi de X_n converge étroitement vers μ_P.

☞ Le théorème précédent montre que pour une CM irréductible récurrente positive, alors la suite de mesures (νP^n) converge étroitement vers la probabilité invariante μ_P de la CM au sens de Césaro. Pour avoir une convergence étroite des lois (νP^n) vers μ_P au sens usuel, il faut que la CM soit apériodique (cf Corolllaire 2.1).

Variation totale

Définition 2.14

Pour quantifier l'écart entre deux probabilités μ et ν sur E, on utilise la distance en variation totale :

$$\|\mu - \nu\|_{VT} = \sup_{A \subset E} |\mu(A) - \nu(A)|.$$

☞ E étant au plus dénombrable, cette distance s'exprime par $\|\mu - \nu\|_{\mathsf{VT}} = \frac{1}{2} \sum_{x \in E} |\mu(x) - \nu(x)|$.

Proposition 2.12

Soit (X_n) une suite de variables aléatoires. La convergence en variation totale de la loi des (X_n) vers μ entraîne la convergence en loi de X_n vers μ.

Convergence en loi vers la distribution invariante

Théorème 2.9

*Soit P la matrice de transition d'une CM **irréductible, récurrente positive et apériodique** sur E. Soit μ_P son unique probabilité invariante, alors pour toute probabilité ν sur E :*

$$\lim_{n\to\infty} \|\nu P^n - \mu_P\|_{VT} = 0.$$

Ainsi, X_n converge en loi vers μ_P quelque soit la loi de X_0.
En particulier, le cas $\nu = \delta_x$ conduit à

$$\lim_{n\to\infty} p^{(n)}(x,y) = \mu_P(y) = \frac{1}{\mathbb{E}_y(\tau^y)}.$$

Convergence en loi : cas général

Théorème 2.10

Soit P la matrice de transition d'une CM ***irréductible, récurrente positive*** *sur E, de période d. Soit μ_P son unique probabilité invariante, alors pour tout $(x,y) \in E^2$, il existe un r ($0 \leq r < d$ et $r = 0$ si $x = y$) tel que, pour tout $s \neq r$,*

$$\lim_{n\to\infty} p^{(nd+r)}(x,y) = d\mu_P(y), \qquad p^{(nd+s)}(x,y) = 0.$$

Théorème 2.11

Soit P la matrice de transition d'une CM ***irréductible, récurrente nulle*** *sur E, alors, pour tout $(x,y) \in E^2$,*

$$\lim_{n\to\infty} p^{(n)}(x,y) = 0.$$

En particulier, x récurrent est nul si et seulement si $\lim_{n\to\infty} p^{(n)}(x,x) = 0$.

Récurrence positive : une propriété de classe

Corollaire 2.3

Soit x un état récurrent positif et $y \leftrightarrow x$, alors y est également récurrent positif. En outre $\mathbb{E}_y(\tau^x) < \infty$.

☞ Le caractère de **récurrence nulle ou positive** caractérise les classes irréductibles. On parlera donc de classe irréductible nulle ou positive. Par ex. la MA sur $\mathbb{Z}$ est récurrente nulle.

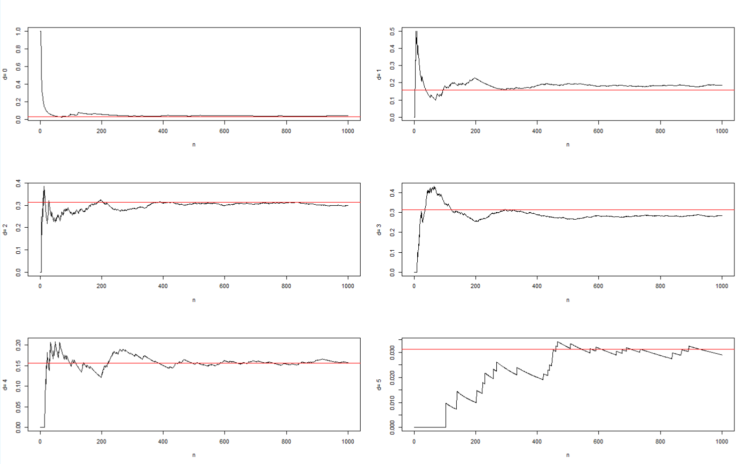
Corollaire 2.4

Soit C une classe essentielle finie, alors C est récurrente positive. Donc en particulier une CM finie irréductible est récurrente positive.

Application aux urnes d'Ehrenfest

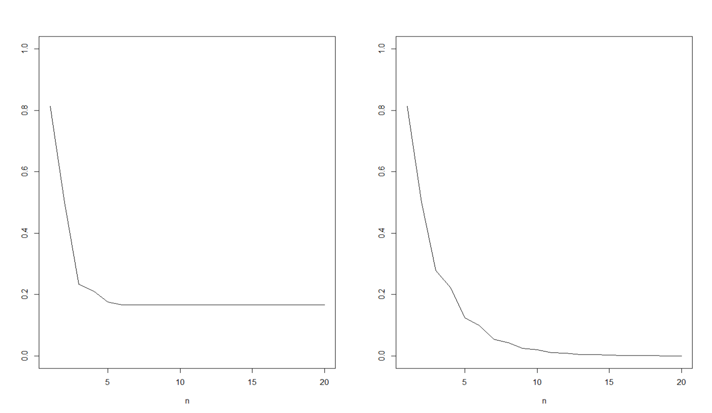
Exemple 2.12 (le cas apériodique)

Loi invariante : $(0.03125\ 0.15625\ 0.31250\ 0.31250\ 0.15625\ 0.03125)$



Convergence en loi : Urnes d'Ehrenfest

Exemple 2.13



Variations totales en fonction de n
(à gauche périodique, à droite apériodique)

Exercice

Exercice 7

Bob possède N paires de chaussures de sport. Tous les matins, Il fait son jogging et sort soit par la porte de devant, soit par celle de derrière (de façon équiprobable). En rentrant du jogging, il entre de façon équiprobable par l'une des deux portes. Sportif mais paresseux, Bob « range » ses chaussures de sport devant les deux portes de sa maison. S'il trouve une ou plusieurs paires de chaussures devant la porte de sortie, Bob fait son jogging avec une paire choisie au hasard et la dépose ensuite devant sa porte de rentrée. S'il ne trouve pas de chaussures devant sa porte de sortie, Bob court sans chaussure...

1. Mettre en évidence le caractère Markovien de l'évolution du nombre de paires de chaussures déposées devant la porte de devant, en précisant la matrice de transition et le graphe de la chaîne.
2. Donner les classes et leurs natures.
3. Écrire la matrice pour $N = 2$. On suppose qu'à l'instant $t = 0$, il y a autant de chances qu'il y ait 0, 1 ou les deux paires de chaussures devant la porte de devant. Calculer la probabilité qu'après le premier jogging, il y ait 0, 1 ou deux paires de chaussures. Conclusion ?

Plan du cours

Introduction

Étudier des phénomènes aléatoires en temps continu : *e.g.* les files d'attentes, la désintégration de particules, bruit dans un signal,...

Définition 3.1

Un processus $(X_t)_{t\geq 0}$ à valeurs dans $(E, \mathcal{E})$ est un ***processus de Markov*** *si pour tout $t, u \geq 0$*

$$\forall A \in \mathcal{E}, \quad \mathbb{P}\left(X_{t+u} \in A | \sigma(X_s; s \leq t)\right) = \mathbb{P}(X_{t+u} \in A | X_t).$$

☞ Lorsque E est dénombrable, on montre qu'il suffit de vérifier que pour tout $0 \leq t_1 \ldots \leq t_n$ et toute fonction bornée f

$$\mathbb{E}\left[f(X_{t_n}) | X_{t_1}, \ldots, X_{t_{n-1}}\right] = \mathbb{E}\left[f(X_{t_n}) | X_{t_{n-1}}\right].$$

Chapman-Kolmogorov

- Les trajectoires seront **càd et étagées**, *i.e.* partant de x on reste en x un temps strictement positif p.s.

Introduisons : $\mathbb{P}(X_t = y | X_s = x)$ si $\mathbb{P}(X_s = x) \neq 0$ et $s \leq t$.

- Chaîne homogène : $\mathbb{P}(X_{t+s} = y | X_s = x) = \mathbb{P}(X_t = y | X_0 = x)$.

Notations :

$$p_t(x, y) = \mathbb{P}(X_t = y | X_0 = x), \quad P_t = (p_t(x, y))_{x,y \in E}, \quad P_0 = Id$$

Théorème 3.1 (Chapman-Kolmogorov)

Soit $(X_t)_{t \geq 0}$ *une CM homogène sur* E *de probabilités de transitions* $p_t(x, y)$*. Alors*

$$p_{t+s}(x, y) = \sum_{z \in E} p_t(x, z) p_s(z, y).$$

Soit en notation matricielle

$$P_{t+s} = P_t P_s = P_s P_t.$$

Plan du cours

Temps de séjour (I)

- Soit ν la loi initiale du processus, alors la loi μ_t de X_t est

$$\mu_t(x) = \mathbb{P}_\nu(X_t = x) = \sum_{y \in E} \nu(y) p_t(y, x), \text{ i.e. } \boxed{\mu_t = \nu P_t}.$$

- Soit $F \subset E$, les temps aléatoires

$$D_F = \inf\{t \geq 0 \ : \ X_t \in F\}, \text{ et } T_F = \inf\{t > 0 \ : \ X_t \in F\}$$

sont des temps d'arrêt, pour la filtration $\mathcal{F}_t = \sigma(X_u; u \leq t)$, égaux p.s. ($E$ dénombrable et trajectoires càd étagées).

Proposition 3.1

Soit $T = \inf\{t > 0 \ : \ X_t \neq x\}$ le temps d'entrée dans le complémentaire de x. Alors

$$\mathbb{P}_x(T > t) = e^{-\lambda_x t},$$

où λ_x est une fonction finie positive ou nulle sur E.
De plus, si $\lambda_x \neq 0$, alors T et X_T sont indépendants.

Temps de séjour (II)

- Si $\lambda_x = 0$, alors $\mathbb{E}_x(T) = \infty$. L'état x est absorbant.
- Si $\lambda_x = \infty$, alors $\mathbb{P}_x(T > \epsilon) = 0$ pour tout $\epsilon > 0$, soit $\mathbb{P}_x(T > 0) = 0$ et donc $T = 0$ $\mathbb{P}_x$ p.s. (saut immédiat). Ceci est contradictoire avec l'hypothèse sur les trajectoires.

Hypothèse : $\sup_{x \in E} \lambda_x < \infty$.

- Cette hypothèse implique que, partant de x, la probabilité d'avoir plus d'un saut avant t est en $o(t)$ uniformément en x. Cela s'exprime aussi par $\lim_{t \downarrow 0} p_t(x, y) = \delta_x(y)$, soit

$$\lim_{t \downarrow 0} P_t = Id.$$

- Soit le i-ème instant de saut $T_i = \inf\{s > T_{i-1} \ : \ X_s \neq X_{T_{i-1}}\}$, alors l'hypothèse implique que $\sup_{n \in \mathbb{N}} T_n = \infty$: le processus de Markov n'explose pas. Ceci est toujours vrai si E est fini.

Plan du cours

Générateur infinitésimal (I)

Définition 3.2

La matrice Q *définie par :*

$$Q = P'(0) = \lim_{h \downarrow 0} \frac{P_h - Id}{h}$$

est appelée ***générateur infinitésimal*** *de la CM.*

Proposition 3.2

On a les deux égalités suivantes, $\forall (x, y) \in E, x \neq y$ *:*

$$\begin{aligned} p_h(x, y) &= q(x, y).h + o(h) \\ p_h(x, x) &= 1 + q(x, x).h + o(h) \end{aligned}$$

$q(x, y)$ *est alors appelé taux de transition instantané de* x *vers* y*.*

Générateur infinitésimal (II)

Corollaire 3.1

On en déduit les résultats suivants, $\forall (x,y) \in E, x \neq y$:

- $q(x,x) \leq 0$ *et* $q(x,y) \geq 0$.
- $q(x,x) = -\sum_{y \neq x} q(x,y) = -\lambda_x$.

Théorème 3.2 (Chapman-Kolmogorov)

Ces conditions conduisent aux équations différentielles :

$$\frac{d}{dt} P_t = Q P_t = P_t Q \quad t > 0,$$

dont la solution formelle est (avec $P_0 = Id$*)*

$$P_t = e^{Qt} := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(Qt)^n}{n!}.$$

Exercice

Exercice 8

Un appareil tombe en panne avec un temps exponentiel de paramètre λ et est réparé en un temps exponentiel de paramètre μ. Soit X_t l'état de l'appareil à l'instant t. On note $E = \{0, 1\}$ où 0 est l'état de panne et 1 l'état de marche.

1. Quelle est la matrice génératrice du processus ?
2. En supposant que l'on peut écrire (à vérifier)

$$Q = \begin{pmatrix} \mu & 1 \\ -\lambda & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -(\lambda+\mu) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda+\mu} & -\frac{1}{\lambda+\mu} \\ \frac{\lambda}{\lambda+\mu} & \frac{\mu}{\lambda+\mu} \end{pmatrix}$$

   calculer la matrice des probabilités de transition. ☞ On peut aussi exprimer Q^n en fonction de Q et en déduire directement l'expression.
3. Supposons que $\mu_0 = (0; 1)$. Calculer μ_t et sa limite lorsque t tend vers $+\infty$.

Plan du cours

Mesure invariante

- Soient ν la loi initiale du processus, et μ_t la loi de X_t : $\mu_t = \nu P_t$.
- Pour tout $x \in E$

$$\begin{aligned}\mu_{t+h}(x) - \mu_t(x) &= (\nu P_{t+h})(x) - (\nu P_t)(x) \\ &= (\nu P_t P_h - \nu P_t)(x) = \nu P_t(P_h - Id)(x)\end{aligned}$$

d'où $\lim_{h\downarrow 0} \frac{\mu_{t+h}(x)-\mu_t(x)}{h} = \nu P_t Q = \nu Q P_t$. On a donc

$$\boxed{\frac{d}{dt}\mu_t = \mu_t Q}$$

Définition 3.3

*π est une mesure **invariante** pour le chaîne de Markov si $\forall t > 0$, $\pi = \pi P_t$.*

Proposition 3.3

Les mesures invariantes sont solutions de l'équation $\boxed{\pi Q = 0}$

Comportement asymptotique

Si pour tout $x \in E$, il existe $\pi(x)$ tel que

$$\pi(x) = \lim_{t\to\infty} p_t(y, x)$$

indépendamment de y, on obtient une mesure invariante, donc solution de $\pi Q = 0$. Dans ce cas, la chaîne est dite **ergodique**.

Exemple 3.1 (Suite exercice 8)

Nous avons $Q = \begin{pmatrix} -\mu & \mu \\ \lambda & -\lambda \end{pmatrix}$ La solution de $\pi Q = 0$ est $\pi_1 = (\lambda/\mu)\pi_2$; avec la condition $\pi_1 + \pi_2 = 1$ on obtient $\pi_1 = \dfrac{\lambda}{\lambda+\mu}, \quad \pi_2 = \dfrac{\mu}{\lambda+\mu}$.

On vérifie que $\lim_{t\to\infty} P_t = \begin{pmatrix} \pi_1 & \pi_2 \\ \pi_1 & \pi_2 \end{pmatrix}$.

Plan du cours

Chaîne de Markov immergée (I)

- Soit $T_1 < \ldots < T_n < \ldots$ les instants de saut successifs de la chaîne. Plus précisément, $T_{n+1} = \inf\{t > T_n \ : \ X_t \neq X_{T_n}\}$, avec $T_{n+1}(\omega) = \infty$ si la chaîne ne sort pas de X_{T_n}.
- Soit $Y_i(\omega) := X_{T_i}(\omega) = X_{T_i(\omega)}(\omega)$, la suite des états visités à ces instants, on obtient ainsi un processus à temps discret sur E.
- La propriété de Markov de (X_t) suggère que (Y_n) est une CM.

Proposition 3.4

Le processus (Y_n) *est une CM de matrice de transition* $P = (p(x,y))$ *:*

si $\lambda_x \neq 0$, $p(x,y) = \begin{cases} \frac{q(x,y)}{\lambda_x} & x \neq y \\ 0 & x = y \end{cases}$

si $\lambda_x = 0$, $p(x,y) = \delta_x(y)$.

La CM (Y_n) *est appelée* ***chaîne immergée***.

Chaîne de Markov immergée (II)

☞ La nature des états de la chaîne (X_t) est la même que celle des états de la chaîne immergée (Y_n), exceptée pour la périodicité.

Exemple 3.2

Comme exemple d'utilisation de la chaîne de Markov immergée, on peut citer la simulation d'une chaîne de Markov à temps continue. Pour cela, on part du générateur infinitésimal Q et on en déduit les quantités suivantes : tous les λ_x avec la diagonale de Q et, avec la proposition précédente, la matrice de transition P de la chaîne de Markov immergée. On peut alors simuler la chaîne de Markov à temps continu comme suit :

- A l'instant $T_0 = 0$, la chaîne est dans l'état x.
- On simule un temps $T_1 \sim \mathcal{E}(\lambda_x)$ (temps de séjour dans l'état x).
- Puis à l'instant T_1, on saute vers un état y choisi selon la probabilité $p(x, y)$ (en utilisant les résultats de l'exercice 2).
- A l'instant T_1, la chaîne est dans l'état y, puis on simule T_2...

Chaîne de Markov immergée (III)

Proposition 3.5

Soit (X_t) *une CM de matrice* P_t *telle que* $\lambda_x > 0$ *pour tout* $x \in E$ *(et* $\sup \lambda_x < \infty$*). Si la chaîne immergée est irréductible, récurrente et admet une mesure invariante* μ*, alors il existe une unique mesure positive* π *(à une constante multiplicative près) invariante pour* P_t*. Elle est donnée par*

$$\pi(x) = \frac{\mu(x)}{\lambda_x}.$$

Proposition 3.6

Si de plus la chaîne immergée est récurrente positive, alors il existe une unique probabilité π_P *invariante pour* P_t *avec*

$$\forall x, y \in E, \quad \lim_{t \to \infty} p_t(x, y) = \pi_P(y).$$

Exercice : processus de naissance et de mort

Exercice 9

La salle d'attente d'un cabinet médical ne contient qu'une seule place. En comptant le patient qui peut se faire soigner, il ne peut donc y avoir dans le cabinet que 0, 1 ou 2 patients. L'intervalle d'arrivée entre deux patients est distribué selon une loi exponentielle de taux $\lambda = 2$. Le temps de traitement d'un patient est aussi distribué selon une loi exponentielle de taux $\mu = 4$. Soit X_t le nombre de patients à l'instant t.

1. Calculer le générateur infinitésimal Q.
2. Donner la matrice de transition de la chaîne immergée. En déduire la nature de la chaîne (irréductible ? transitoire ? récurrente positive ? récurrente nulle ?)

ENAC

Exercice issu de «Probabilités et Processus stochastiques» d'Yves Caumel, ISAE

Exercice 10

Un système est constitué de deux composants indépendants de durées de vie aléatoires de lois exponentielles $\mathcal{E}(\lambda_i), i = 1, 2$. Lorsque le composant i tombe en panne, il est remplacé par un composant de caractéristiques identiques ; la durée du remplacement du composant i défaillant est de loi $\mathcal{E}(\mu_i)$ et est indépendante de la durée de vie du composant.

Soit $X_t = (X_t^1, X_t^2)$ le vecteur aléatoire décrivant l'état du système parmi quatre états possibles : $e_1 = (0, 0), e_2 = (0, 1), e_3 = (1, 0), e_4 = (1, 1)$, où 0 désigne l'état de panne et 1 l'état de marche.

1. Déterminer la c.m.c. et son générateur infinitésimal. Pour cela, on calculera $\mathbb{P}(X_h = e_j / X_0 = e_i)$ pour tout $(i, j) \in \{1, 2, 3, 4\}^2$.
2. Déterminer son régime invariant dans le cas où $\lambda_1 = 0{,}1$, $\lambda_2 = 0{,}2$, $\mu_1 = 0{,}002$ et $\mu_2 = 0{,}003$.

Exercice : modèle épidémiologique simple

Exercice 11

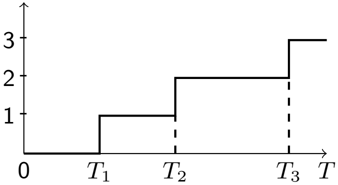
On considère une population de m individus qui à $t = 0$ contient un individu infecté par un virus, et donc $m - 1$ individus sains, mais susceptibles d'être contaminés. Un individu infecté le reste éternellement. On suppose que dans un intervalle de temps de longueur $h > 0$ tout individu infecté peut contaminer, avec une probabilité égale à $\alpha h + o(h)$ ($\alpha > 0$ donné) tout individu sain de la population. Soit $X(t)$, le nombre d'individus infectés à l'instant t.

1. Montrer que $\{X(t), t \geq 0\}$ est une chaîne de Markov à temps continu, et déterminer son générateur infinitésimal Q.
2. Écrire les équations différentielles de Kolmogorov. Déterminer $p_{ii}(t)$.
3. Dessiner le diagramme des transitions de la chaîne immergée de $\{X(t), t \geq 0\}$. La chaîne est-elle irréductible ? Que peut-on dire de l'état m ? Que valent les probabilités limites $\pi_j = \lim_{t \to +\infty} \mathbb{P}(X(t) = j)$?
4. Soit T le temps total jusqu'à ce que l'ensemble de la population soit infectée. Exprimer T en fonction des temps de séjour de la chaîne de Markov et calculer $\mathbb{E}[T]$ puis Var(T).

Plan du cours

Introduction

On cherche à modéliser les instants d'arrivées (ou le nombre d'arrivées) d'un phénomène aléatoire : arrivées d'avions sur une balise, de clients à un guichet, désintégration radioactive, sauts d'une chaîne de Markov à temps continus,. . .



On cherche à répondre à diverses questions :

- Quelle est la probabilité d'avoir 3 clients qui rentrent dans la file en 5 minutes ?
- Quelle est la probabilité qu'il y ait 4 sauts en 10 minutes ?
- Quelle est la probabilité qu'un avion arrive sur la balise entre 5 et 10 minutes, si deux avions sont arrivés en 7 minutes ?

Processus ponctuel (I)

Définition 4.1

- $(T_n)_n$ *est un* ***processus ponctuel*** *si*

$$\forall n, \forall \omega \in \Omega,\ (T_n(\omega) < \infty) \implies (T_{n-1}(\omega) < T_n(\omega)).$$

- $\{N_t, t \geq 0\}$ *est un* ***processus de comptage*** *si :*
  i) $N_t \in \mathbb{N}$ *;*
  ii) $s < t, N_s \leq N_t$ *;*
  iii) *Pour* $s < t$*,* $N_t - N_s$ *est égal au nombre d'événements qui se sont produits dans l'intervalle de temps* $]s, t]$*.*

$N_t - N_s$ *est appelé un* ***accroissement****.*

☞ $(T_n)_n$ processus ponctuel, $N_t = \sum_{n=1}^{+\infty} 1_{\{T_n \leq t\}}$ processus de comptage, et $\{N_t \geq n\} = \{T_n \leq t\}$.

Processus ponctuel (II)

Exemple de processus ponctuel : CM à temps continu avec le générateur infinitésimal suivant :

$$Q = \begin{pmatrix} -\lambda_1 & \lambda_1 & 0 & \cdots & \cdots \\ 0 & -\lambda_2 & \lambda_2 & 0 & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

On sait par définition (comme on ne fait qu'avancer !) que la matrice $P(t)$ est triangulaire supérieure.
Avec les équations de Kolmogorov ($P'(t) = P(t)Q$), on obtient :

$$\begin{cases} p'_{ii}(t) = -\lambda_i p_{ii}(t) \\ p'_{ij}(t) = \lambda_{j-1} p_{ij-1}(t) - \lambda_j p_{ij}(t) \end{cases}$$

Calcul de $\mathbb{P}(N_t = k)$ trop compliqué...

Plan du cours

Caractérisations (I)

Définition 4.2 (Inter-arrivées)

*$(T_n)_n$ processus ponctuel est un **processus de Poisson homogène** de paramètre λ (PPH(λ)) si les durées inter-arrivées $(T_n - T_{n-1})$ sont indépendantes et de même loi exponentielle de paramètre λ.*

Proposition 4.1 (Loi de Poisson)

$(T_n)_n$ processus ponctuel est un PPH(λ) ssi :

- $N_0 = 0$;
- (N_t) *est un processus à accroissements indépendants ;*
- $\forall 0 \leq s < t, N_t - N_s \sim \mathcal{P}(\lambda(t-s))$.

Caractérisations (II)

Proposition 4.2 (Événements rares)

$(T_n)_n$ *processus ponctuel est un PPH(λ) ssi* (N_t) *est un processus à accroissements indépendants et stationnaires (PAIS) et :*

$$\mathbb{P}(N_h = 1) = \lambda h + o(h) \text{ et } \mathbb{P}(N_h > 1) = o(h) \ .$$

Exemple 4.1

Soit (T_n) un PPH(λ), représentant des instants d'arrivées de défaillance, λ étant un taux de défaillance par mois.

- $\mathbb{P}$(2 défaillances en 3 mois)$= \mathbb{P}(N_3 = 2) = \mathrm{e}^{-3\lambda} \frac{(3\lambda)^2}{2!}$
- $\mathbb{P}$(2 défaillances entre 6 mois et 12 mois)$= \mathbb{P}(N_{12} - N_6 = 2) = \mathrm{e}^{-6\lambda} \frac{(6\lambda)^2}{2!}$
- $\mathbb{P}$(2 défaillances entre 6 mois et 12 mois $|$ 1 défaillance en 8 mois)

$$= \mathbb{P}(N_{12} - N_6 = 2 \mid N_8 = 1) = \frac{\mathbb{P}(N_{12}-N_6=2 \cap N_8=1)}{\mathbb{P}(N_8=1)}$$

$$= \frac{\mathbb{P}(N_6=0)\mathbb{P}(N_8-N_6=1)\mathbb{P}(N_{12}-N_8=1)+\mathbb{P}(N_6=1)\mathbb{P}(N_8-N_6=0)\mathbb{P}(N_{12}-N_8=2)}{\mathbb{P}(N_8=1)}$$

Exercice : Fiabilité

Exercice 12

En fiabilité, il est courant d'utiliser les processus de Poisson pour modéliser des instants de panne. Le paramètre λ est alors interprété comme le taux de défaillance.
Après avoir étudié la fiabilité des ILS, on observe que $\lambda = 0{,}007$ pannes/jour.

1. En utilisant la loi de N_t, calculer la probabilité qu'il y ait une panne sur une période d'un an.
2. En utilisant les propriétés (PAIS) du processus N, calculer la probabilité qu'il y ait trois pannes entre 100 et 200 jours, sachant qu'il y en a eu deux dans les 120 premiers jours.

Plan du cours

Loi conditionnelle des instants d'arrivées

Proposition 4.3

Soit (T_n) *un PPH(λ), on a :*

$$\mathbb{P}(T_1 \leq s | N_t = 1) = \begin{cases} \frac{s}{t} & \text{si} \quad s < t \\ 1 & \text{si} \quad s \geq t \end{cases}$$

☞ $T_1 | N_t = 1 \sim \mathcal{U}([0;t])$, c'est-à-dire qu'il est impossible de prédire l'instant où la panne va arriver.

Proposition 4.4

Soit $\{T_n,\ n = 1, 2, \ldots\}$ *un PPH(λ). Alors,* $\forall n = 1, 2, \ldots$ *:*

1. *La loi du vecteur* $(T_1, \ldots, T_n)$ *a pour densité*

$$f_{(T_1,\ldots,T_n)}(t_1, \ldots, t_n) \;=\; \lambda^n e^{-\lambda t_n} \mathbb{1}_{\{0<t_1<\cdots<t_n\}} \;.$$

2. *La loi conditionnelle de* $(T_1, \ldots, T_n)$ *sachant* $\{N_t = n\}$ *est la loi de la statistique d'ordre de* n *variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur* $[0, t]$.

Plan du cours

Superposition

Proposition 4.5

Soient (T^1) et (T^2) deux PPH indépendants de paramètre λ_1 et λ_2, de processus de comptage associés (N^1) et (N^2). Alors, $N = N^1 + N^2$ est un processus de comptage associé à un PPH($\lambda_1 + \lambda_2$).

Cette proposition et la suivante permettent de modéliser un trafic routier. En effet, si on compte le nombre de véhicules qui traversent un péage. Il suffit de regarder le nombre de voitures, le nombre de camions, le nombre de deux-roues, le nombre de camping-cars,. . .

Si chacun de ce type de véhicules peut être modélisé par un PPH, alors en comptant le nombre de véhicules total, on retrouve un PPH.

Effacement

Soit un processus de Poisson PPH(λ) dont les événements peuvent être classés en deux catégories, les évènements de type I et les évènements de type II.

On suppose que le type d'un évènement est indépendant des sauts et la probabilité que l'évènement soit de type I est égale à p, tandis que celle de l'évènement de type II est $1 - p$.

En quelque sorte, à chaque instant T_n, l'évènement observé est de type I avec probabilité p ou du type II avec probabilité $1 - p$.

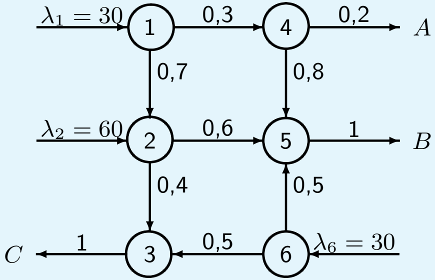
Proposition 4.6

Les deux processus ponctuels constitués, respectivement, de l'occurrence des évènements de type I et de type II sont des PPH de paramètres respectifs $p\lambda$ *et* $(1 - p)\lambda$. *De plus, ils sont mutuellement indépendants.*

Exercice : réseau routier

Exercice 13

Un réseau routier est représenté par le graphe suivant :



Le trafic arrivant au noeud 1 suit un processus de Poisson de paramètre $\lambda_1 = 30$ voitures/min, celui arrivant au noeud 2 suit un processus de Poisson de paramètre $\lambda_2 = 60$ voitures/min et celui arrivant au noeud 6 suit un processus de Poisson de paramètre $\lambda_6 = 30$ voitures/min.

Lorsqu'un véhicule quitte un noeud, il le fait dans une des directions indiquées par des flèches avec les probabilités écrites sur les flèches. Le but de l'exercice est de caractériser le trafic sortant du réseau aux points A, B et C.

Exercice : réseau routier

Exercice 13 (suite)

Nous allons poser N_t^1 (respectivement N_t^2, N_t^3, N_t^4, N_t^5 et N_t^6) le nombre de voitures qui arrivent au noeud 1 (respect. 2, 3, 4, 5 et 6) en t minutes.

1. Sachant que $N_t^1 = n$, quelle est la loi de la VAR N_t^4 ?

   En déduire la loi de N_t^4.
2. Soient N^1 et N^2 deux processus de comptage indépendants associés à deux processus de Poisson homogène (PPH) de paramètre λ_1 et λ_2. Montrer que $N = N^1 + N^2$ est un processus de comptage associé à un PPH de paramètre $\lambda_1 + \lambda_2$.
3. Déduire des deux questions précédentes que les processus N^A, N^B et N^C sont des processus de comptage associés à des processus de Poisson homogènes dont on déterminera les paramètres.