

# Höhere Analysis

Quirinus Schwarzenböck

18. Januar 2018

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Lebesgue Integral</b>	<b>3</b>
1.1	Grundlagen der Maß- & Integrationstheorie . . . . .	3
1.2	Konstruktion von Maßen . . . . .	5
1.3	Messbare Funktionen . . . . .	6
1.4	Integration . . . . .	7
1.5	Produktmaß . . . . .	9
1.6	Transformation . . . . .	11
<b>2</b>	<b><math>L^p</math>-Räume</b>	<b>12</b>
2.1	Ungleichungen . . . . .	13
2.2	Vollständigkeit . . . . .	14
2.3	Approximation . . . . .	14
<b>3</b>	<b>Fouriertransformation</b>	<b>16</b>
3.1	Definition und Umkehrbarkeit auf $L^1$ . . . . .	16
3.2	Fortsetzbarkeit auf $L^2$ . . . . .	18
<b>4</b>	<b>Differenzierbare Mannigfaltigkeiten</b>	<b>19</b>
4.1	Implizite Funktionen und Untermannigfaltigkeiten . . . . .	19
4.2	Integration einer Mannigfaltigkeit . . . . .	21

# 1 Lebesgue Integral

## 1.1 Grundlagen der Maß- & Integrationstheorie

**Definition** (Algebra &  $\sigma$ -Algebra)

Eine Algebra  $\mathcal{A}$  ist eine Familie von Teilmengen einer gegebenen Menge  $X$  mit folgenden Eigenschaften:

- $X \in \mathcal{A}$
- $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{A}$
- $A \in \mathcal{A} \rightarrow A^C := X \setminus A \in \mathcal{A}$

Falls zusätzlich  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$ , so spricht man von einer  $\sigma$ -Algebra.

**Lemma** Sei  $X$  eine Menge,  $\mathcal{A}$  eine  $\sigma$ -Algebra,  $(A_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ . Dann gehören auch  $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_n$  und beispielsweise  $A_1 \setminus A_2$  in  $\mathcal{A}$ .

**Definition** (erzeugte und relative  $\sigma$ -Algebra)

Allgemein ist  $\mathfrak{P}(X)$  die größte und  $\{x, \emptyset\}$  die kleinste  $\sigma$ -Algebra. Sei  $S \in \mathfrak{P}(x)$ , dann stellt

$$\Sigma(S) := \bigcup \{ \mathcal{A} \mid \mathcal{A} \text{ } \sigma\text{-Algebra mit } S \subseteq \mathcal{A} \}$$

eine  $\sigma$ -Algebra dar. Es ist die kleinste  $\sigma$ -Algebra die S enthält und wird als die *erzeugte*  $\sigma$ -Algebra bezeichnet.  $\Sigma(S)$  ist eindeutig bestimmt.

Ist  $X$  eine Menge mit  $\sigma$ -Algebra  $\mathcal{A}$  und  $Y \subset X$ , dann bezeichnen wir

$$\mathcal{A} \cap Y := \{ A \cup Y \mid a \in \mathcal{A} \}$$

als *relative*  $\sigma$ -Algebra auf  $Y$

**Definition** (Topologischer Raum)

Ein topologischer Raum ist ein Paar  $(X, \mathcal{O})$  bestehend aus den Mengen  $X$  und  $\mathcal{O} \in \mathfrak{P}(X)$  mit

- $\emptyset, X \in \mathcal{O}$
- $U, V \in \mathcal{O} \Rightarrow U \cap V \in \mathcal{O}$
- $(U_k)_{k \in I} \Rightarrow \bigcup_{k \in I} U_k \in \mathcal{O}$  für eine beliebige Indexmenge  $I$

Die Elemente von  $\mathcal{O}$  werden als offene Mengen bezeichnet.

**Bemerkung**  $\mathcal{O}$  ist abgeschlossen bezüglich endlichen Schnitten und abzählbaren Vereinigungen.

**Definition** (Borel- $\sigma$ -Algebra)

Ist  $X$  ein topologischer Raum,  $\mathcal{O} \in \mathfrak{P}(X)$ , so ist die Borel- $\sigma$ -Algebra  $\mathcal{B}(X)$  diejenige  $\sigma$ -Algebra, die von  $\mathcal{O}$  erzeugt wird (also diejenige  $\sigma$ -Algebra, die von den offenen Mengen erzeugt wird). Ihre Elemente heißen Borel-Mengen.

Notation:  $\mathcal{B}^n = \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ ,  $\mathcal{B} = \mathcal{B}^1$

**Definition** (Messraum, Maß, Maßraum)

Eine Menge  $X$  mit einer  $\sigma$ -Algebra  $\mathcal{A} \subset \mathfrak{P}(X)$  heißt *Messraum*. Ein *Maß* ist eine Abbildung  $\mu: \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$  mit:

- $\mu(\emptyset) = 0$
- $\sigma$ -Additivität

Die Elemente von  $\mathcal{A}$  heißen *messbar*,  $(x, \mu, \mathcal{A})$  heißt *Maßraum*

**Definition** ( $\sigma$ -Finitheit)

Ein Maß heißt  *$\sigma$ -finit*, falls eine abzählbare Überdeckung  $(X_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$  gibt, also  $X = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} X_k$ , mit  $\mu(X_k) < \infty \forall k$ .  $\mu$  heißt *endlich*, falls  $\mu(X) < \infty$ , und *Wahrscheinlichkeitsmaß*, falls  $\mu(X) = 1$

**Bemerkung** Für  $Y \in \mathcal{A}$  können wir die  $\sigma$ -Algebra  $\mathcal{A}$  zu

$$\mathcal{A}|_Y = \{A \in \mathcal{A} \mid A \subset Y\}$$

einschränken. Dann ist  $\mu|_Y(A) = \mu(A \cap Y)$ ,  $A \cap Y \in \mathcal{A}$  ein Maß und  $(Y, \mathcal{A}|_Y, \mu|_Y)$  ein Maßraum. Dieser ist  $\sigma$ -finit, falls  $(X, \mathcal{A}, \mu)$   $\sigma$ -finit ist.

**Satz** Für jeden Maßraum  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  und  $(A_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$  gilt:

- (i)  $A \subset B \Rightarrow \mu(A) \leq \mu(B)$  (Monotonie)
- (ii)  $\mu(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k) \leq \sum_{k \in \mathbb{N}} \mu(A_k)$  (Subadditivität)
- (iii)  $A_k \nearrow A \Rightarrow \mu(A_k) \nearrow \mu(A)$
- (iv)  $A_k \searrow A \Rightarrow \mu(A_k) \searrow \mu(A)$ , für  $\mu(A_1) < \infty$

**Definition** (Borel-Maß)

Sei  $X$  ein topologischer Raum mit Borel- $\sigma$ -Algebra  $\mathcal{B}(X)$ . Ein Maß  $\mu$  auf  $(X, \mathcal{B}(X))$  heißt *Borel-Maß*, falls es auf Kompakte stets endliche Werte annimmt.

**Definition** (Regularität)

Sei  $X$  ein topologischer Raum,  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  ein Maßraum. Das Maß  $\mu$  heißt *regulär von außen/innen*, wenn für  $A \in \mathcal{A}$  gilt:

$$\mu(A) = \inf\{\mu(U) \mid A \subset U, U \text{ offen}\}$$

$$\mu(A) = \sup\{\mu(K) \mid K \subset A, K \text{ kompakt}\}$$

Ein Maß heißt *regulär*, falls es regulär von außen und innen ist.

## 1.2 Konstruktion von Maßen

**Definition** (Dynkin-System)

Eine Familie  $\mathcal{D} \subset \mathfrak{P}(X)$  heißt *Dynkin-System*, falls gilt:

- $X \in \mathcal{D}$
- $A \in \mathcal{D} \Rightarrow A^c \in \mathcal{D}$
- $(A_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{D}, A_k \cap A_m = \emptyset \ \forall k, m, k \neq m \Rightarrow \dot{\bigcup}_{k \in \mathbb{N}} A_k \in \mathcal{D}$

**Bemerkung**

- Ein Dynkin-System ist abgeschlossen unter Mengensubtraktion:

$$A, B \in \mathcal{D}, B \subset A \Rightarrow A \setminus B \in \mathcal{D}$$

- Ist  $S \subset \mathfrak{P}(X)$ , so ist

$$\mathcal{D}(S) := \bigcap \{ \mathcal{D} \mid \mathcal{D} \text{ Dynkin-System, } S \in \mathcal{D} \}$$

das von  $S$  erzeugte Dynkin-System

**Lemma** Ist  $\mathcal{D}$  abgeschlossen unter endlichen Schnitten oder alternativ unter beliebigen endlichen Vereinigungen, so ist  $\mathcal{D}$  eine  $\sigma$ -Algebra

**Lemma** Sei  $S$  eine (nicht leere) Familie von Teilmengen einer Menge  $X$ , die unter endlichen Schnitten abgeschlossen ist, dann ist  $\mathcal{D}(S) = \Sigma(S)$

**Bemerkung** Voriges Lemma lässt sich wie folgt anwenden:

- Verifiziere eine Eigenschaft  $\varepsilon$  auf einer Menge  $S \subset \mathfrak{P}(X)$ , die abgeschlossen unter endlichen Schnitten ist
- Zeige, dass die Menge aller Mengen in  $\mathfrak{P}(X)$ , die  $\varepsilon$  enthalten ein Dynkin-System bildet
- Schließe, dass  $\varepsilon$  auf  $\Sigma(S)$  gilt

**Satz** (Eindeutigkeit von Maßen)

Sei  $(X, \Sigma, \mu)$  ein Maßraum mit  $\Sigma := \Sigma(S)$ ,  $S \subset \mathfrak{P}(X)$  eine Familie von Mengen, die abgeschlossen unter endlichen Schnitten ist. Weiter enthält  $S$  eine Folge aufsteigender Mengen  $(X_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset S$  mit  $X_k \nearrow X$  und  $\mu(X) < \infty \ \forall k \in \mathbb{N}$ . Dann ist  $\mu$  auf  $\Sigma$  durch die Werte auf  $S$  eindeutig bestimmt.

**Definition** (Prämaß)

Sei  $X$  eine Menge und  $\mathcal{A} \subset \mathfrak{P}(X)$  eine Algebra. Ein Prämaß auf  $X$  ist eine  $\sigma$ -additive Abbildung  $\mu(\mathcal{A}) \rightarrow [0, \infty]$  und  $\mu(\emptyset) = 0$ . Ein Prämaß auf einer  $\sigma$ -Algebra ist ein Maß.

**Corollar** Sei  $\mu$  ein  $\sigma$ -finite Prämaß auf einer Algebra  $\mathcal{A}$ . Dann gibt es höchstens eine Fortsetzung auf  $\Sigma(\mathcal{A})$

**Definition** (Äußeres Maß)

Eine Funktion  $\mu^*: \mathfrak{P}(X) \rightarrow [0, \infty]$  ist ein äußeres Maß auf  $X$ , falls die folgenden Eigenschaften erfüllt sind:

- $\mu^*(\emptyset) = 0$
- $\mu^*(A_1) \leq \mu^*(A_2)$ , falls  $A_1 \subset A_2$
- $\mu^*(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k) \leq \sum_{k \in \mathbb{N}} \mu^*(A_k)$

**Satz** (Fortsetzung äußerer Maße)

Sei  $\mu^*$  ein äußeres Maß auf einer Menge  $X$ . Wir sagen, die Menge  $A \subset X$  erfüllt die *Carathéodory-Bedingung*, falls

$$\mu^*(E) = \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^C) \quad \forall E \in X$$

gilt. Die Familie  $\Sigma$  aller Mengen die die Carathéodory-Bedingung erfüllen bildet eine  $\sigma$ -Algebra und  $\mu^*|_{\Sigma}$  ist ein vollständiges Maß, d. h. jede Teilmenge einer Nullmenge ist messbar. Maße erfüllen wegen ihrer  $\sigma$ -Additivität die Carathéodory-Bedingung.

**Lebesgue Maß**

Für ein verallgemeinertes Intervall der Form  $I = (a, b)$ ,  $[a, b)$ ,  $(a, b]$ ,  $[a, b]$  mit  $-\infty \leq a \leq b \leq +\infty$  setzen wir  $\lambda(I) := b - a \in [0, \infty]$ . Dies ergibt ein eindeutiges  $\sigma$ -finites Prämaß auf der Algebra  $\mathcal{A}$ , die aus Vereinigungen von Intervallen im obigen Sinne besteht.

Außerdem existiert eine  $\sigma$ -Algebra  $\Lambda \supset \mathcal{A}$ , so dass  $\lambda = \lambda^*$  ein Maß ist. Die Elemente von  $\Lambda$  heißen *Lebesgue-messbare* Mengen,  $\lambda$  ist das *Lebesgue-Maß*.

**1.3 Messbare Funktionen**

**Definition** Seien  $(X, \Sigma_X)$ ,  $(Y, \Sigma_Y)$  Messräume. Eine Funktion  $f: X \rightarrow Y$  heißt *messbar* ( $\Sigma_X - \Sigma_Y$ -messbar), falls  $f^{-1}(A) \in \Sigma_X \quad \forall A \in \Sigma_Y$ .

Ist  $X$  ein topologischer Raum und  $\Sigma_X$  die entsprechende Borel- $\sigma$ -Algebra, so nennen wir eine messbare Funktion *Borel-Funktion*.

**Bemerkung** Es genügt, Messbarkeit für ein Mengensystem  $S \subset \mathfrak{P}(Y)$  mit  $\Sigma(S) = \Sigma_Y$  zu überprüfen.

**Lemma** Eine Funktion  $f: (X, \Sigma) \rightarrow (\mathbb{R}^n, \mathcal{B}^n)$  ist genau dann messbar, wenn gilt

$$f^{-1} \in \Sigma \quad \forall I = \bigtimes_{j=1}^n (a_j, \infty), \quad a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$$

Insbesondere ist  $f$  genau dann messbar, wenn jede seiner Komponenten  $x \mapsto \langle f(x), e_l \rangle$ ,  $l = 1, \dots, n$  messbar ist. Eine komplexwertige Funktion ist genau dann messbar, wenn Real- und Imaginärteil messbar sind.

**Lemma** Seien  $(X, \Sigma_X)$ ,  $(Y, \Sigma_Y)$ ,  $(Z, \Sigma_Z)$  Messräume. Sind  $f: X \rightarrow Y$ ,  $g: Y \rightarrow Z$  messbar, dann ist auch  $g \circ f: X \rightarrow Z$  messbar. Sind  $\Sigma_X, \Sigma_Y$  Borel- $\sigma$ -Algebren und  $X, Y$  entsprechend topologische Räume, so ist jede stetige Funktion  $f: X \rightarrow Y$  messbar.

**Lemma** Sind  $f, g: (X, \Sigma_X) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B})$  messbar, so sind auch  $f \cdot g, f + g$  messbar.

**Lemma** Sei  $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$  eine Folge messbarer Funktionen  $(X, \Sigma) \rightarrow (\overline{\mathbb{R}}, \overline{\mathcal{B}})$ . Dann sind auch  $\sup_{k \in \mathbb{N}} f_k, \inf_{k \in \mathbb{N}} f_k, \limsup_{k \in \mathbb{N}} f_k, \liminf_{k \in \mathbb{N}} f_k$ , sowie  $\min(f, g), \max(f, g), |f|, f^\pm$  und alle Limites messbar.

## 1.4 Integration

**Definition** Eine messbare Funktion heißt *einfach*, falls ihr Bild endlich ist, d. h. es gibt Mengen  $A_1, \dots, A_m \in \Sigma, \alpha_1, \dots, \alpha_m \in \mathbb{R}$  mit

$$f = \sum_{j=1}^m \alpha_j \chi_{A_j}$$

Der Vektorraum der einfachen Funktionen wird mit  $S(X, \mu)$  bezeichnet.

**Definition** (Integral)

Das Integral einer nicht-negativen, einfachen Funktion über der Menge  $A \in \Sigma$  wird durch

$$\int_A f \, d\mu := \sum_{j=1}^m \alpha_j \mu(A \cap A_j)$$

erklärt, wobei wir  $0 \cdot \infty = 0$  vereinbaren.

**Lemma** Für  $f, g \in S(X, \mu)$ ,  $f, g \geq 0$  hat das Integral die folgenden Eigenschaften:

- (i)  $\int_A f \, d\mu = \int_X f \chi_A \, d\mu, A \in \Sigma$
- (ii)  $\int_{\bigcup_{k \in \mathbb{N}} B_k} f \, d\mu = \sum_{k \in \mathbb{N}} \int_{B_k} f \, d\mu$ , für paarweise disjunkte  $(B_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \Sigma$
- (iii)  $\int_A \alpha f \, d\mu = \alpha \int_A f \, d\mu$ , für  $\alpha \geq 0$

- (iv)  $\int_A (f + g) d\mu = \int_A f d\mu + \int_A g d\mu$
- (v)  $A \subset B, B \in \Sigma \Rightarrow \int_A f d\mu \leq \int_B f d\mu$
- (vi)  $f \leq g \Rightarrow \int_A f d\mu \leq \int_A g d\mu$

**Definition** (Integral)

Sei  $(X, \Sigma, \mu)$  ein Maßraum,  $A \in \Sigma, f: (X, \Sigma) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B})$  messbar und nicht negativ. Dann ist

$$\int_A f d\mu := \sup \left\{ \int_A g d\mu \mid g \in S(X, \mu), g \leq f, g \geq 0 \right\}$$

Bis auf (ii) und (iv) übertragen sich die Aussagen aus vorigem Lemma auf beliebige, nicht-negative, messbare Funktionen durch Approximation.

**Satz** (Monotone Konvergenz (Beppo Levi))

Sei  $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$  eine Folge messbarer, nicht negativer Funktionen  $f_k: (X, \mu) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B})$  mit  $f_k \nearrow f$ . Dann ist für  $A \in \Sigma$

$$\int_A f_k d\mu \rightarrow \int_A f d\mu$$

**Lemma** Ist  $f \geq 0$  messbar, so wird durch  $\nu(A) := \int_A f d\mu$  ein Maß mit  $\int g d\nu = \int fg d\mu$  für jedes messbare  $g \geq 0$  definiert und wir schreiben  $s\nu = f d\mu$ .

**Satz** (Lemma von Fatou)

Sei  $(X, \Sigma, \mu)$  ein Maßraum. Ist  $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$  eine Folge nicht-negativer Funktionen  $(x, \Sigma) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B})$ , so haben wir für ein beliebiges  $A \in \Sigma$

$$\int_A \liminf_{k \rightarrow \infty} f_k d\mu \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_A f_k d\mu$$

**Definition** (Nochmal Integral)

Sei  $(X, \Sigma, \mu)$  ein Maßraum,  $A \in \Sigma, f: (X, \Sigma) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B})$  messbar. Ist  $\int_A f^\pm d\mu < \infty$ , so nennen wir  $f$  über  $A$  integrierbar und setzen

$$\int_A f d\mu = \int_A f^+ d\mu - \int_A f^- d\mu \in \mathbb{R}$$

Die Menge der über  $A$  integrierbaren Funktionen bezeichnen wir mit  $\mathcal{L}^1(A, \mu)$ .

**Lemma** Unter dieser Bedingung ist das Integral linear und erfüllt sämtliche zuvor genannten Eigenschaften. Eine Funktion ist genau dann integrierbar, falls ihr Betrag integrierbar ist. Darüber hinaus gilt für integrierbare Funktionen  $f, g: X \rightarrow \mathbb{R}$

$$\left| \int_A f d\mu \right| \leq \int_A |f| d\mu$$

und die Dreiecksungleichung

$$\int_A |f + g| d\mu \leq \int_A |f| d\mu + \int_A |g| d\mu$$



**Lemma** Sei  $(X, \Sigma, \mu)$  ein Maßraum,  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  messbar

- (i) Wir haben  $\int_X |f| d\mu = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0$  für  $\mu$ -fast alle  $x \in X$
- (ii) Ist  $f$  außerdem integrierbar oder nicht negativ  $A \in \Sigma$ , so ist

$$\mu(A) = 0 \Leftrightarrow \int_A f d\mu = 0$$

**Lemma** (Mehr Fatou)

Sei  $(X, \Sigma, \mu)$  ein Maßraum,  $A \in \Sigma$ ,  $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$  eine Folge messbarer Funktionen  $X \rightarrow \mathbb{R}$  und  $g: X \rightarrow \mathbb{R}$  integrierbar, dann gilt

$$\int_A \liminf_{k \rightarrow \infty} f_k d\mu \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_A f_k d\mu, \text{ falls } g \leq f_k \forall k \in \mathbb{N}$$

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \int_A f_k d\mu \leq \int_A \limsup_{k \rightarrow \infty} f_k d\mu, \text{ falls } f_k \leq g \forall k \in \mathbb{N}$$

**Satz** (Dominierte Konvergenz)

Sei  $(X, \Sigma, \mu)$  ein Maßraum,  $A \in \Sigma$ ,  $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$  eine Folge messbarer Funktionen  $X \rightarrow \mathbb{R}$ , die punktweise fast überall gegen  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  konvergiert. Gibt es eine Majorante, d. h. eine integrierbare Funktion  $g: X \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $\sup |(f_k)_{k \in \mathbb{N}}| \leq g$ , so ist auch  $f$  integrierbar und wir haben  $\int_A f_k d\mu \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \int_A f d\mu$ .

**Bemerkung** Für stetige und Lebesgue-integrierbare Funktionen auf reellen Intervallen stimmen Riemann- und Lebesgueintegral überein.

## 1.5 Produktmaß

**Notation** Für Messräume  $(X_1, \Sigma_1)$ ,  $(X_2, \Sigma_2)$  bezeichnen wir die  $\sigma$ -Algebra, die alle „Rechtecke“ der Form  $A_1 \times A_2$  mit  $A_1 \in \Sigma_1, A_2 \in \Sigma_2$  enthält mit  $\Sigma_1 \otimes \Sigma_2$ .

**Lemma** (Schnitt-Eigenschaft)

Für Messräume  $(X_1, \Sigma_1)$ ,  $(X_2, \Sigma_2)$  und  $A \in \Sigma_1 \otimes \Sigma_2 \subset \mathfrak{P}(X_1 \times X_2)$  liegen die Schnitte

$$A_1(x_2) := \{x_1 \in X_1 \mid (x_1, x_2) \in A\}$$

$$A_2(x_1) := \{x_2 \in X_2 \mid (x_1, x_2) \in A\}$$

in  $\Sigma_1$ , bzw  $\Sigma_2$ .

**Corollar** Seien  $(X_1, \Sigma_1)$ ,  $(X_2, \Sigma_2)$  Messräume und  $f: (X_1 \times X_2, \Sigma_1 \otimes \Sigma_2) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B})$  messbar. Dann ist  $x_1 \mapsto f(x_1, x_2)$  für jedes  $x_2 \in X_2$  auf  $X_1$  messbar und entsprechend  $x_2 \mapsto f(x_1, x_2)$  für jedes  $x_1 \in X_1$  auf  $X_2$ .

**Satz** Sind  $(X_1, \Sigma_1, \mu_1), (X_2, \Sigma_2, \mu_2)$  Maßräume mit  $\sigma$ -finiten Maßen und  $A \in \Sigma_1 \otimes \Sigma_2$ . Dann sind die Abbildungen  $x_1 \mapsto \mu_2(A_2(x_1)), x_2 \mapsto \mu_1(A_1(x_2))$  auf  $X_1$ , bzw.  $X_2$  messbar und es ist

$$\int_A \mu_2(A_2(x_1)) d\mu_1(x_1) = \int_A \mu_1(A_1(x_2)) d\mu_2(x_2)$$

**Definition** Seien  $(X_1, \Sigma_1, \mu_1), (X_2, \Sigma_2, \mu_2)$  Maßräume mit  $\sigma$ -finiten Maßen. Für  $A \in \Sigma_1 \otimes \Sigma_2$  setzen wir

$$(\mu_1 \otimes \mu_2)(A) := \int_{X_1} \mu_2(A_2(x_1)) d\mu_1(x_1) = \int_{X_2} \mu_1(A_1(x_2)) d\mu_2(x_2)$$

**Lemma** Das Produktmaß ist für  $\sigma$ -finite Maße ebenfalls ein Maß und es ist eindeutig bezüglich  $(*)$ .

**Satz** (Fubini)

Seien  $(X_1, \Sigma_1, \mu_1), (X_2, \Sigma_2, \mu_2)$  Maßräume mit  $\sigma$ -finiten Maßen und  $f: (X_1 \times X_2, \Sigma_1 \otimes \Sigma_2) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B})$  messbar.

- (i) (Tonelli) Ist  $f$  nicht-negativ, so sind  $\int_{X_2} f(x_1, \cdot) d\mu_2(x_2)$  und  $\int_{X_1} f(x_1, \cdot) d\mu_1(x_1)$  als Funktion auf  $X_1$  bzw.  $X_2$  beide messbar und es gilt

$$\begin{aligned} \iint_{X_1 \times X_2} f(x_1, x_2) d(\mu_1 \otimes \mu_2)(x_1, x_2) &= \int_{X_1} \left( \int_{X_2} f(x_1, x_2) d\mu_2(x_2) \right) d\mu_1(x_1) \\ &= \int_{X_2} \left( \int_{X_1} f(x_1, x_2) d\mu_1(x_1) \right) d\mu_2(x_2) \end{aligned}$$

- (ii) Allgemein ist  $f \in \mathcal{L}^1(X_1 \times X_2, \mu_1 \times \mu_2)$  äquivalent zu

$$\begin{aligned} \int_{X_1} |f(x_1, \cdot)| d\mu_1(x_1) &\in \mathcal{L}^1(X_2, \mu_2) \\ \text{bzw. } \int_{X_2} |f(\cdot, x_2)| d\mu_2(x_2) &\in \mathcal{L}^1(X_1, \mu_1) \end{aligned}$$

und in diesem Fall gilt (i)

**Lemma** Seien  $(X_1, \Sigma_1), (X_2, \Sigma_2)$  Messräume,  $S_1 \in \Sigma_1, S_2 \in \Sigma_2$  mit  $\Sigma_{X_1}(S_1) = \Sigma_1, \Sigma_{X_2}(S_2) = \Sigma_2$ . Dann gilt

$$\Sigma := \Sigma_1 \otimes \Sigma_2 = \Sigma_{X_1 \times X_2}(S_1 \times S_2)$$

wobei  $S_1 \times S_2 = \{A_1 \times A_2 \mid A_1 \in S_1, A_2 \in S_2\}$ .

**Lemma** Gegeben seien Maßräume  $(X_j, \Sigma_j, \mu_j), j = 1, 2, 3$ , mit  $\sigma$ -finiten Maßen. Dann gilt  $(\Sigma_1 \otimes \Sigma_2) \otimes \Sigma_3 = \Sigma_1 \otimes (\Sigma_2 \otimes \Sigma_3)$  und  $(\mu_1 \otimes \mu_2) \otimes \mu_3 = \mu_1 \otimes (\mu_2 \otimes \mu_3)$ .

**Satz** (Lebesgue-Maß)

Das durch  $\lambda^n := \lambda_1 \otimes \lambda_2 \otimes \cdots \otimes \lambda_n$  definierte *Lebesgue-Maß* auf  $\mathbb{R}^n$  besitzt die folgenden Eigenschaften (im folgenden verwenden wir immer die Borel- $\sigma$ -Algebra):

- (i) Durch die Werte auf der Menge  $J$  sämtlicher Quader der Form  $I = \times_{j=1}^n I_j$ , wobei  $I_j$  Intervalle sind, ist  $\lambda^n$  eindeutig bestimmt.
- (ii) Für jedes  $B \in \mathcal{B}^n$  gilt:

$$\lambda^n(B) = \inf \left\{ \sum_{k \in \mathbb{N}} \lambda^n(A_k) \mid (A_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset J, B \subset \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k \right\}$$

- (iii) Das Maß  $\lambda^n$  ist translationsinvariant und bis auf Normierung das einzige Borelmaß mit dieser Eigenschaft.

**Bemerkung** Das Produktmaß zweier Maße ist im Allgemeinen nicht vollständig.

## 1.6 Transformation

**Lemma** (Bildmaß)

Seien  $(X, \Sigma_X)$ ,  $(Y, \Sigma_Y)$  Messräume,  $f: X \rightarrow Y$  messbar. Ist  $\mu$  ein Maß auf  $(X, \Sigma_X)$ , so wird durch

$$(f_*\mu)(B) := \mu(f^{-1}(B)), \quad B \in \Sigma_Y$$

ein Maß auf  $Y$  definiert, das *Bildmaß von  $\mu$  bezüglich  $f$* . Wir haben  $(f_*\mu)(B) = 0$   $\forall B \in \Sigma_Y$  mit  $B \cap f(X) = \emptyset$ .

**Satz** Sei  $(X, \Sigma, \mu)$  ein Maßraum,  $Y$  ein topologischer Raum,  $f: (X, \Sigma) \rightarrow (Y, \mathcal{B}(Y))$ ,  $g: (Y, \mathcal{B}(Y)) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B})$  messbar. Dann ist  $g \circ f: X \rightarrow \mathbb{R}$  genau dann  $\mu$ -fast überall nicht-negativ oder integrierbar, wenn das auf  $g$  bezüglich  $f_*\mu$  zutrifft und in diesem Fall gilt:

$$\int_Y g \, d(f_*\mu) = \int_X (g \circ f) \, d\mu$$

**Satz** (Transformationssatz)

Seien  $U, V \subset \mathbb{R}^n$  offen und  $f \in C^1(U, V)$  und  $f$  ein Diffeomorphismus, dann gilt  $(f^{-1})_*\lambda^n = |J_f|\lambda^n$ ,  $J_f = \det(Df)$  mit der Jacobi-Matrix  $Df$  und es gilt:

$$\int_U (g \circ f) |J_f| \, d\lambda^n = \int_V g \, d\lambda^n$$

für alle nicht-negativen oder integrierbaren Funktionen  $g: V \rightarrow \mathbb{R}$ .

## 2 $L^p$ -Räume

**Definition** ( $L^p$ -Norm)

Die  $L^p$ -Norm einer messbaren Funktion  $f: (X, \Sigma) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B})$  wird durch

$$\|f\|_{L^p} := \left( \int_X |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}, \quad p \in [1, \infty)$$

erklärt. Mit  $\mathcal{L}^p(X, \mu)$  bezeichnen wir die Menge aller messbaren Funktionen  $f: (X, \Sigma) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B})$ , deren  $L^p$ -Norm endlich ist. Zunächst ist die  $\mathcal{L}^p(X, \mu)$  wegen

$$|f + g|^p \leq 2^p \max(|f|, |g|)^p \leq 2^p(|f|^p + |g|^p)$$

ein Vektorraum.

**Lemma** Sei  $f: (X, \Sigma) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B})$  messbar. Dann gilt

$$\int_X |f|^p d\mu = 0 \Leftrightarrow f = 0 \text{ } \mu\text{-fast überall}$$

**Komische Zwischendefinition**

Also folgt  $\|g\|_{L^p} = 0 \Rightarrow g = 0 \text{ } \mu\text{-fast überall}$ . Wir setzen

$$\mathcal{N}(X, \mu) = \{f: (X, \Sigma) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}) \mid f \text{ messbar, } f(x) = 0 \mu - \text{f. ü}\}$$

Offenbar ist  $\mathcal{N}$  ein linearer Unterraum von  $\mathcal{L}^p$ . Insofern können wir den Quotientenraum bilden und definieren

$$L^p(X, \mu) := \mathcal{L}^p(X, \mu) / \mathcal{N}(X, \mu)$$

Für  $(X \subset \mathbb{R}^n)$  schreiben wir  $L^p(X) := L^p(X, \lambda^n)$ , dann ist die  $L^p$ -Norm wohldefiniert auf  $L^p$ . Man beachte, dass für ein  $f \in L^p(X, \mu)$  und  $x \in X$  der Wert  $f(x)$  i. A. nicht wohldefiniert ist.

Im Fall  $p = 2$  haben wir einen Hilbertraum, also einen vollständigen, normierten Raum (mit Skalarprodukt  $\langle f, g \rangle = \int_X f(x)g(x) d\mu(x)$ ) Im Fall  $p = \infty$  definieren wir das *essentielle Supremum* von  $f$

$$\begin{aligned} \|f\|_{L^\infty} &:= \inf \{s \geq 0 \mid \mu(\{x \in X \mid |f(x)| \geq s\}) = 0\} \\ &= \sup \{s \geq 0 \mid \mu(\{x \in X \mid |f(x)| \geq s\}) > 0\} \end{aligned}$$

Wir bezeichnen die Mengen der essentiellen beschränkten Funktionen mit  $B(X, \mu)$  und setzen wie gehabt

$$L^\infty(X, \mu) = B(X, \mu) / \mathcal{N}(X, \mu)$$

und  $\|f\|_{L^\infty(X, \mu)}$  ist nach Konstruktion unabhängig vom gewählten Vertreter.

## 2.1 Ungleichungen

**Erinnerung** (konvex)

Eine reelle Funktion heißt *konvex*, falls

$$\phi(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda\phi(x) + (1 - \lambda)\phi(y)$$

für alle  $x, y \in (a, b)$ ,  $\lambda \in (0, 1)$ , beziehungsweise *strikt konvex*, falls die strikte Ungleichung gilt. Jede Norm auf einem Vektorraum  $X$  ist konvex.

**Lemma** Die folgenden Aussagen gelten für jedes konvexe  $\phi : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ :

- (i) Die Funktion  $\phi$  ist lokal Lipschitz-stetig, d. h. für jedes kompakte Intervall  $I \subset (a, b)$  gibt es ein  $L_I < \infty$  mit  $|\phi(x) - \phi(y)| \leq L_I|x - y|$  für alle  $x, y \in I$ .
- (ii) Die links- und rechtsseitigen Ableitungen

$$\phi'_\pm(x) = \lim_{h \searrow 0} \frac{\phi(x \pm h) - \phi(x)}{\pm h}$$

existieren und sind monoton nicht fallend. Darüber hinaus existiert  $\phi'$  bis auf eine Nullmenge.

- (iii) Für ein festes  $\bar{x} \in (a, b)$  und jedes  $\alpha \in [\phi'_-(\bar{x}), \phi'_+(\bar{x})]$  gilt

$$\phi(y) \geq \phi(\bar{x}) + \alpha(x - \bar{x}) \quad \forall y \in (a, b)$$

Diese Ungleichung ist strikt für strikt konvexe  $\phi$  und  $y \neq \bar{x}$

**Satz** (Jensen)

Sei  $\phi : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  konvex für  $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ . Ist  $\mu$  ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf  $(X, \Sigma)$  und  $f \in \mathcal{L}^1(X, \mu)$  mit  $a < f(x) < b$  für alle  $x \in X$ , dann ist der negative Teil von  $\phi \circ f$  integrierbar und

$$\phi\left(\int_X f \, d\mu\right) \leq \int_X (\phi \circ f) \, d\mu$$

Ist  $\phi \geq 0$  nicht fallend,  $f \geq 0$  und  $\phi(b) := \lim_{x \nearrow b} \phi(x)$ , so gilt die Schlussfolgerung auch für nicht-integrierbare (messbare)  $f$ .

**Satz** (Hölder)

Seien  $p, q \in [1, \infty)$  mit  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$  (dual). Ist  $f \in L^p(X, \mu)$  und  $g \in L^q(X, \mu)$ , so folgt  $fg \in L^1(X, \mu)$  und

$$\|fg\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^p} \cdot \|g\|_{L^q}$$

**Zusatz** Im Fall  $p \in (1, \infty)$  ist  $y \mapsto |y|^p$  strikt konvex, s.d. Gleichheit impliziert, dass  $h = |f||g|^{1-q}$  konstant ist.

**Corollar** Für jedes  $f \in L^p(x, \mu)$  mit  $p \in [1, \infty)$  gilt

$$\|f\|_{L^p} = \sup \left\{ \int_X f g \, d\mu \mid g \in L^q(X, \mu), \|g\|_{L^q} = 1 \right\}$$

**Lemma** Sei  $\mu$  ein  $\sigma$ -finites Maß,  $f: (X, \Sigma) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B})$  messbar und  $p \in [1, \infty)$ . Gilt  $f \cdot s \in L^1$ , für jedes  $s \in S(X, \mu) \cap \mathcal{L}^1(X, \mu)$ , so folgt  $f \in L^p(x, \mu)$  und

$$\|f\|_{L^p} = \sup \left\{ \int_X f \cdot s \, d\mu \mid s \in S(X, \mu) \cap \mathcal{L}^1(X, \mu), \|s\|_{L^q} = 1 \right\}$$

**Satz** (Minkowski)

Seien  $\mu, \nu$  zwei  $\sigma$ -finite Maße auf Maßräumen  $(X, \Sigma, \mu)$ ,  $(Y, \Upsilon, \nu)$  und  $f$  eine  $(\mu \otimes \nu)$ -messbare Funktion. Dann haben wir für  $p \in [1, \infty)$

$$\left\| \int_Y f(\cdot, y) \, d\nu(y) \right\|_{L^p} \leq \int_Y \|f(\cdot, y)\|_{L^p} \, d\nu(y)$$

**Lemma** Sei  $p \in [1, \infty)$  und  $f_k \in L^p(X, \mu)$  mit  $M := \sup_{k \in \mathbb{N}} \|f_k\|_{L^p} < \infty$  konvergiere punktweise  $\mu$ -fast überall gegen eine Grenzfunktion  $f$ . Dann ist  $f \in L^p(X, \mu)$  und

$$\|f_k\|_{L^p}^p - \|f_k - f\|_{L^p}^p \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \|f\|_{L^p}^p$$

## 2.2 Vollständigkeit

**Satz** (Riesz-Fischer (Vollständigkeit))

Der Raum  $L^p(X, \mu)$  ist für  $p \in [1, \infty]$  vollständig und ein Banachraum.

**Corollar** Konvergiert eine Folge in  $L^p(X, \mu)$ ,  $p \in [1, \infty]$ , so gibt es eine Teilfolge, die punktweise  $\mu$ -fast überall konvergiert. Die Grenzwerte einer in  $L^p$  und  $L^q$ ,  $p, q \in [1, \infty]$  konvergierenden Folge stimmen fast überall überein.

## 2.3 Approximation

**Definition** Eine Teilmenge  $A$  eines topologischen Raums  $X$  heißt dicht, falls es zu jedem Punkt  $x \in X$  eine gegen  $x$  konvergierende Folge in  $A$  gibt.

Erinnerung: Eine Folge  $(\xi_k)_{k \in \mathbb{N}}$  konvergiert gegen ein  $\xi_0 \in X$ , falls es für jede offene Umgebung  $U$  von  $\xi_0$  (also  $U$  offen,  $\xi_0 \in U$ ) ein  $K = K(\xi_0, U) \in \mathbb{N}$  mit  $\xi_k \in U \, \forall k \geq K$  gibt.

**Satz** Sei  $X$  ein lokal kompakter (jeder Punkt liegt in einer kompakten Umgebung), metrischer Raum und  $\mu$  ein reguläres Borelmaß (endliche Werte auf Kompakte)

regulär von innen:  $\mu(A) = \sup \{ \mu(K) \mid A \supset K \text{ kompakt} \}$

regulär von außen:  $\mu(A) = \inf \{ \mu(U) \mid A \subset U \text{ offen} \}$

Dann ist die Menge  $C_c^0(X)$  aller stetigen Funktionen  $X \rightarrow \mathbb{R}$  mit *kompaktem Träger* dicht in  $L^p(X, \mu)$ ,  $p \in [1, \infty)$ . Hierbei wird für  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$

$$\text{supp } f := \overline{\{x \in X \mid f(x) \neq 0\}}$$

als *Träger* von  $f$  bezeichnet.

**Definition** (Faltung)

Für integrierbare  $f, g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  setzen wir:

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x+y)g(y) \, d\lambda^n(y) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x-y) \, d\lambda^n(y)$$

und bezeichnen den Ausdruck  $f * g$  als Faltung. Die Faltung selbst ist integrierbar.

**Lemma** Die Faltung besitzt die folgenden Eigenschaften:

- (i) Für  $x \in \mathbb{R}^n$  ist die Funktion  $f(x - \cdot)g(\cdot)$  genau dann integrierbar, wenn  $f(\cdot)g(x - \cdot)$  integrierbar ist. In diesem Fall gilt

$$(f * g)(x) = (g * f)(x)$$

- (ii) Für  $\phi \in C_c^k(\mathbb{R}^n)$ ,  $k \in \mathbb{N}$  und  $f \in L_{loc}^1(\mathbb{R}^n)$  (Menge aller lokal Lebesgue-Integrierbaren Funktionen) folgt  $f * \phi \in C^k(\mathbb{R}^n)$  und

$$\partial_\alpha(f * \phi) = (\partial_\alpha \phi) * f$$

für jede partielle Ableitungen einer Ordnung  $\leq k$ . Dabei ist  $\alpha$  ein sog. Multiindex.

- (iii) Für  $\phi \in C_c^k(\mathbb{R}^n)$ ,  $k \in \mathbb{N}$ ,  $f \in L_c^1(\mathbb{R}^n)$  (d. h. es gibt einen Repräsentanten mit kompaktem Träger) ist

$$f * \phi \in C_c^k(\mathbb{R}^n)$$

- (iv) Für  $\phi \in L^1(\mathbb{R}^n)$ ,  $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ ,  $p \in [1, \infty]$  gilt auch  $f * \phi \in L^p(\mathbb{R}^n)$  und wir haben

$$\|f * \phi\|_{L^p} \leq \|\phi\|_{L^1} \|f\|_{L^p} \text{ (Young-Ungleichung)}$$

**Definition** Eine Familie  $(\phi_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$  integrierbarer Funktionen  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  heißt *approximative Identität*, falls

- (i)  $\sup_{\varepsilon>0} \|\phi_\varepsilon\|_{L^1} < \infty$
- (ii)  $\int_{\mathbb{R}^n} \phi_\varepsilon \, d\lambda^n = 1 \, \forall \varepsilon > 0$
- (iii)  $\int_{\mathbb{R}^n \setminus B_r(0)} |\phi_\varepsilon| \, d\lambda^n \xrightarrow{\varepsilon \searrow 0} 0 \, \forall r > 0$

Ein *Glättungskern* ist eine nicht-negative Funktion  $\phi \in C_c^0(\mathbb{R}^n)$  mit  $\|\phi\|_{L^1} = 1$ .

**Bemerkung** Aus jedem Glättungskern erhält man durch

$$\phi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n} \phi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right), \quad \phi \in C_c^0(\mathbb{R}^n)$$

eine approximative Identität. Häufig zum Einsatz kommt der Standard-Glättungskern

$$x \mapsto \begin{cases} \exp\left(\frac{1}{|x|^2-1}\right), & \text{falls } |x| < 1 \\ 0, & \text{falls } |x| \geq 1 \end{cases}$$

**Bemerkung** Sei  $(\phi_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$  eine Approximative Identität und  $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ ,  $p \in [1, \infty)$ . Dann gilt

$$\|f * \phi_\varepsilon - f\|_{L^p} \xrightarrow{|\varepsilon| \searrow 0} 0$$

**Satz** Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  offen. Dann liegt die Menge  $C_c^\infty(\Omega)$  alle kompakten Funktionen dicht in  $L^p(\Omega)$  für  $p \in [1, \infty)$ .

## 3 Fouriertransformation

### 3.1 Definition und Umkehrbarkeit auf $L^1$

**Definition** (Fouriertransformation)

Für  $f \in L^1$  definieren wir

$$\hat{f}(p) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle p, x \rangle} f(x) \, d\lambda^n(x), \quad p \in \mathbb{R}^n$$

Offenbar ist  $\mathcal{F}: f \mapsto \hat{f}$  eine lineare Abbildung, die beschränkt ist. Eine lineare Abbildung  $A$  zwischen normierten Räumen  $X, Y$ ,  $A: X \rightarrow Y$  heißt beschränkt, falls es eine Konstante  $C > 0$  mit  $\|Ax\|_Y \leq C \cdot \|x\|_X \, \forall x \in X$  gibt.

Im Folgenden ist  $C_b^0(X) = C^0 \cap \mathcal{L}^\infty$  der Raum der stetigen und beschränkten Funktionen  $X \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $B \subset \mathbb{R}^n$ .

**Lemma** Die Fouriertransformation  $\mathcal{F}$  ist eine lineare beschränkte Abbildung  $L^1(\mathbb{R}^n) \rightarrow C_b^0(\mathbb{R}^n)$  mit

$$\|\hat{f}\|_{L^\infty} \leq \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \|f\|_{L^1}$$

Ist  $f$  nicht-negativ, so gilt Gleichheit.



**Lemma** Für  $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ ,  $a, p \in \mathbb{R}^n$ ,  $\lambda > 0$  gilt:

- (i)  $\widehat{f(\cdot + a)}(p) = e^{-i\langle a, p \rangle} \widehat{f}(p)$
- (ii)  $\widehat{e^{-i\langle \cdot, p \rangle} f}(p) = \widehat{f}(p)$
- (iii)  $\widehat{f(\lambda \cdot)}(p) = \frac{1}{\lambda^n} \widehat{f}\left(\frac{p}{\lambda}\right)$
- (iv)  $\widehat{f(-\cdot)}(p) = \widehat{f}(-p)$
- (v)  $\widehat{fg}, \widehat{f\widehat{g}} \in L^1$  mit  $\int_{\mathbb{R}^n} \widehat{fg} d\lambda^n = \int_{\mathbb{R}^n} f\widehat{g} d\lambda^n$

**Lemma** Sei  $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$  mit  $\lim_{|x| \rightarrow \infty} f(x) = 0$  und  $f, \partial_j f \in L^1(\mathbb{R}^n)$  für ein  $j \in \{1, \dots, n\}$ . Dann ist

$$\widehat{\partial_j f}(p) = ip_j \widehat{f}(p) \quad \forall p \in \mathbb{R}^n.$$

Sind umgekehrt  $f$  und  $(x \mapsto x_j f(x))$  in  $L^1$ , so ist  $\widehat{f}$  nach  $p_j$  differenzierbar und es gilt

$$\widehat{\cdot_j f}(p) = i\partial_j \widehat{f}(p) \quad \forall p \in \mathbb{R}^n$$

**Bemerkung** Das soeben bewiesene Resultat überträgt sich induktiv auf höhere Ableitungen. Für  $f \in C^k(\mathbb{R}^n)$ ,  $k \in \mathbb{N}$ ,  $\alpha \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^n$ ,  $|\alpha| \leq k$  setzen wir

$$\partial_\alpha f := \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial_{x_1}^{\alpha_1} \dots \partial_{x_n}^{\alpha_n}}$$

wobei  $x^\alpha := x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}$ ,  $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$  ist.  $\alpha$  ist ein *Multiindex*. Es gilt  $(\lambda x)^\alpha = \lambda^{|\alpha|} x^\alpha$ .

**Definition** (Schwarz-Raum)

Wir definieren

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) := \left\{ f \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \mid \forall \alpha, \beta \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^n : \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha (\partial_\beta f)(x)| < \infty \right\}$$

Die Elemente heißen *Schwarz-Funktionen* beziehungsweise *schnell-fallende Funktionen*.

**Bemerkung** Offenbar ist  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)$  für  $(p \in [1, \infty])$  und wegen  $C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  (insbesondere  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \neq \emptyset$ ) ist  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  für  $p \in [1, \infty)$  sogar dicht in  $L^p(\mathbb{R}^n)$ .

**Lemma** Die Fouriertransformation  $\mathcal{F}$  ist ein Operator  $\mathcal{F}: \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ . Insbesondere gilt für jeden Multiindex  $\alpha \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^n$ ,  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ,  $p \in \mathbb{R}^n$ :

$$\widehat{\partial_\alpha f}(p) = (ip)^\alpha \widehat{f}(p) \quad \text{und} \quad \widehat{\cdot^\alpha f}(p) = i^{|\alpha|} \partial_\alpha \widehat{f}(p)$$

**Komische Zwischenbemerkung** Das Abklingverhalten einer Funktion korrespondiert mit der Glattheit (Regularität) der Fourier-Transformierten. Insbesondere verschwindet die Fouriertransformierte einer integrierbaren Funktion im Unendlichen (nächstes Corollar).

Den Raum aller stetigen Funktionen  $f$ , die  $\lim_{|x| \rightarrow \infty} f(x) = 0$  erfüllen, bezeichnen wir mit  $C_0^0(\mathbb{R}^n)$

**Corollar** (Riemann-Lebesgue)

Die Fouriertransformierte bildet  $L^1(\mathbb{R}^n)$  auf  $C_0^0(\mathbb{R}^n)$  ab.

**Satz** (Fourierinversion)

Die Fouriertransformation ist eine (beschränkte, lineare) invertierbare Abbildung:

$$\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}^n) \rightarrow C_0^0(\mathbb{R}^n)$$

Die Inverse ist durch

$$f(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ipx - \frac{\varepsilon^2 |p|^2}{2}} \hat{f}(p) d\lambda^n(p)$$

gegeben, wobei der Grenzwert bezüglich der  $L^1$ -Norm zu verstehen ist.

**Corollar** Für  $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$  mit  $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)$  gilt  $\check{\check{f}} = f$ , wobei  $\check{f}(p) := \hat{f}(-p)$ , also

$$\check{f}(p) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ipx} f(x) d\lambda^n(x)$$

Insofern ist  $\mathcal{F}$  eine Bijektion auf  $F^1(\mathbb{R}^n) = \{f \in L^1(\mathbb{R}^n) \mid \hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)\}$  und insbesondere ist  $\mathcal{F}|_{\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  eine Bijektion.

**Lemma** (Plancherel-Identität)

Sei  $f \in F^1(\mathbb{R}^n)$ . Dann ist  $f, \hat{f} \in L^2(\mathbb{R}^n)$  und

$$\|f\|_{L^2}^2 = \|\hat{f}\|_{L^2}^2 \leq (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \|f\|_{L^1} \|\hat{f}\|_{L^1}$$

## 3.2 Fortsetzbarkeit auf $L^2$

**Satz** (Fortsetzung linearer Abbildungen)

Sei  $X$  ein normierter Raum mit dichter Teilmenge  $\mathcal{V}$ , und  $Y$  ein Banachraum. Ist  $A: \mathcal{V} \rightarrow Y$  eine lineare und beschränkte Abbildung (es gibt ein  $C_A > 0$  mit  $\|Ax\|_Y \leq C_A \|x\|_X \forall x \in \mathcal{V}$ ), so gibt es genau eine Fortsetzung  $\tilde{A}$ , also eine lineare und beschränkte Abbildung  $\tilde{A}: X \rightarrow Y$ ,  $\tilde{A}|_{\mathcal{V}} = A$ , die die Abschätzung mit derselben Konstante  $C_A$  erfüllt.

**Satz** (Plancherel)

Die Fouriertransformation  $\mathcal{F}$  lässt sich zu einer linearen und beschränkten Abbildung  $\mathcal{F}: L^2(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$  fortsetzen, die unitär ist, d. h.

$$\langle \widetilde{\mathcal{F}}(f), \widetilde{\mathcal{F}}(g) \rangle_{L^2} = \langle f, g \rangle_{L^2} \quad \forall f, g \in L^2(\mathbb{R}^n)$$

**Bemerkung** Solange der Integrand von  $\widehat{f}$  in  $L^1(\mathbb{R}^n)$  liegt, lässt sich  $\widetilde{\mathcal{F}}(f)$  direkt mit der Formel aus vorheriger Definition berechnen. In der Regel lässt sich  $\widetilde{\mathcal{F}}$  für  $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$  nur als Grenzwert einer Folge  $\widehat{f_k}$ ,  $(f_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ,  $f_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{\text{in } L^2} f$  darstellen.

**Lemma** Wir haben  $\|\widetilde{\mathcal{F}}(f)\|_{L^\infty} \leq (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \|f\|_{L^1} \quad \forall f \in L^1 \cap L^2$ .

## 4 Differenzierbare Mannigfaltigkeiten

### 4.1 Implizite Funktionen und Untermannigfaltigkeiten

**Definition**

- (i) Seien  $X, Y$  topologische Räume. Eine stetige Abbildung  $f: X \rightarrow Y$  die bijektiv ist und deren Inverse ebenfalls stetig ist, heißt *Homöomorphismus*
- (ii) Seien  $X, Y$  topologische Räume. Ein Homöomorphismus  $F: X \rightarrow Y$  heißt  *$(C^1\text{-})$ Diffeomorphismus*, wenn  $f \in C^1(X, Y)$ ,  $f^{-1} \in C^1(Y, X)$ . (Entsprechend für  $C^k$ ).

**Satz** (Umkehrsatz)

Sei  $\Omega \subset C^1(\mathbb{R}^n)$  eine nichtleere, offene Menge und  $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$ . Dann ist die Invertierbarkeit der Jacobimatrix  $Df(\xi)$  in  $\xi \in \Omega$  äquivalent zur Existenz einer lokalen  $C^1$ -Umkehrfunktion von  $f$  in einer Umgebung  $f(\xi)$ . Genauer gibt es eine offene Teilmenge  $\mathcal{V} \subset \Omega$ ,  $\mathcal{W} \subset \mathbb{R}^n$  mit  $\xi \in \mathcal{V}$  und  $F(\xi) \in \mathcal{W}$ ,  $\mathcal{W} \subset \text{Im } f$ , sodass  $f|_{\mathcal{V}}$  ein Diffeomorphismus  $\mathcal{V} \rightarrow \mathcal{W}$  ist. Insbesondere gilt

$$(D((f|_{\mathcal{V}})^{-1}))(f(x)) = (Df(x))^{-1} \quad \forall x \in \mathcal{V}$$

**Corollar** (Globaler Umkehrsatz)

Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  offen und nichtleer,  $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$ . Ist die Jacobi-Matrix  $Df(x)$  für alle  $x \in \Omega$  invertierbar und  $f$  injektiv, so liefert  $f$  einen Diffeomorphismus  $\Omega \rightarrow \mathcal{W} := \text{Im } f$ . Insbesondere ist  $\mathcal{W}$  offen und der vorherige Satz gilt für alle  $x \in \Omega$ .

**Satz** (implizite Funktion)

Seien  $k, m \in \mathbb{N}$ ,  $\Omega \subset \mathbb{R}^{k+m}$  eine offene Menge und  $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^m)$ . Es gebe ein  $(\xi, \nu) \in \Omega$  mit  $f(\xi, \nu) = 0$  und  $\det D_y f(\xi, \nu) \neq 0$ , wobei  $D_y f(x, y) = \left( \frac{\partial f_j}{\partial y_l}(x, y) \right)_{j,l=1,\dots,m}$ .

Dann gibt es eine offene Umgebung  $U \subset \mathbb{R}^k$  von  $\xi$  und  $V \subset \mathbb{R}^m$  von  $\xi$  und ein  $\phi \in C^1(U, V)$  mit

$$\begin{aligned} \{(x, y) \in U \times V \mid f(x, y) = 0\} &= \{(x, \phi(x)) \mid x \in U\} \\ D\phi(x) &= -(D_y f(x, \phi(x)))^{-1} D_x f(x, \phi(x)) \quad \forall x \in U \end{aligned}$$

**Definition** (Immersion)

Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  nichtleer und offen,  $\phi \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^m)$ ,  $m \geq n$ . Die Abbildung  $\phi$  heißt *Immersion*, falls der Rang von  $D\phi(x) \quad \forall x \in \Omega$  stets maximal ist (also gleich  $n$ ).

**Definition** (Untermannigfaltigkeit)

Seien  $m, n \in (\mathbb{N} \cup \{0\})$ ,  $m \leq n$ . Eine  $C^1$ -Untermannigfaltigkeit des  $\mathbb{R}^n$  mit Dimension  $m$  (kurz Mannigfaltigkeit) ist eine nichtleere Menge  $M \subset \mathbb{R}^n$  (Notation  $M^m$ ) mit der folgenden Eigenschaft:

Für jedes  $\xi \in M$  existiert eine offene Umgebung  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ,  $\xi \in \Omega$ , eine (offene) Menge  $U \subset \mathbb{R}^m$  und eine Immersion  $\phi \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$ , die  $U$  homöomorph auf  $\text{Im } \phi = M \cap \Omega$  abbildet.

Die Abbildung  $\phi$  heißt (lokale) Parametrisierung von  $M$  um  $\xi$ , ihre Umkehrung  $\phi^{-1}: M \cap \Omega \rightarrow U$  bzw. das Paar  $(\phi^{-1}, U)$  heißt *Karte* und eine Familie von Karten, deren Urbilder ganz  $M$  überdecken, bilden einen *Atlas*.

**Bemerkung** Die Dimension einer Mannigfaltigkeit ist wohldefiniert. Eine nichtleere Teilmenge des  $\mathbb{R}^n$  ist genau dann eine  $n$ -dimensionale Mannigfaltigkeit, wenn sie offen ist.

**Satz** Für  $m, n \in \mathbb{N}$ ,  $m \geq n$  und eine nichtleere Menge  $M \subset \mathbb{R}^n$  sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(i) (Untermannigfaltigkeit)

Für jedes  $\xi \in M$  gibt es eine offene Umgebung  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  von  $\xi$ , eine Menge  $U \subset \mathbb{R}^m$  und eine Immersion  $\phi \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$ , die  $U$  homöomorph auf  $M \cap \Omega = \phi(U)$  abbildet.

(ii) (Gleichheitsdefinierte Mannigfaltigkeit)

Zu jedem  $\xi \in M$  gibt es eine offene Umgebung  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  von  $\xi$  und eine Abbildung  $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^{n-m})$  mit  $\text{Rang}(Df(x)) = n - m \quad \forall x \in \Omega$  und  $M \cap \Omega = f^{-1}(\{0_{\mathbb{R}^{n-m}}\})$ .

(iii) (Graphendarstellung)

Zu jedem  $\xi \in M$  gibt es eine offene Umgebung  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  von  $\xi$ , eine offene Menge  $U \subset \mathbb{R}^m$  und ein  $g \in C^1(U, \mathbb{R}^{n-m})$  mit  $M \cap \Omega = \Pi(\text{Graph } g)$ , wobei  $\Pi \in GL(n)$  eine Permutationsmatrix ist.

Eine Permutationsmatrix  $\Pi$  ist durch einen Zykel  $\sigma \in \mathfrak{S}_n$  eindeutig charakterisiert und es gilt  $\Pi e_j = e_{\sigma(j)}$  für  $j = 1, \dots, n$ .

**Definition** (Tangential-/Normalraum)

Sei  $M \subset \mathbb{R}^n$  eine  $m$ -dimensionale Mannigfaltigkeit und  $\xi \in M$ . Ein Vektor  $v \in \mathbb{R}^n$  heißt *Tangentialvektor an  $M$  im Punkt  $\xi$* , falls es eine Kurve  $\gamma \in C^1((-\epsilon, \epsilon), M)$ ,  $\epsilon > 0$ , mit  $\gamma(0) = \xi$ ,  $\gamma'(0) = v$  gibt. Die Menge aller Tangentialvektoren bezeichnen wird *Tangentialraum an  $M$  im Punkt  $\xi$*  genannt und mit  $T_\xi M$  bezeichnet.

Der *Normalraum an  $M$  in  $\xi$*  ist das orthogonale Komplement  $N_\xi M = (T_\xi M)^\perp$ .

**Satz** Sei  $M \subset \mathbb{R}^n$  eine  $m$ -dimensionale Mannigfaltigkeit,  $\xi \in M$ ,  $m \leq n$ . Sei  $\phi \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$  eine lokale Parametrisierung von  $M$  um  $\xi$  mit  $\phi(0) = \xi$  und sei  $f$  wie im vorigen Satz (ii). Dann gilt

$$\begin{aligned} T_\xi M &= \text{Bild } D\phi(0) &= \ker Df(\xi) \\ N_\xi M &= (\text{Bild } D\phi(0))^\perp &= \text{span}(\nabla f_1(\xi), \dots, \nabla f_{n-m}(\xi)) \end{aligned}$$

Insbesondere ist  $T_\xi M$  wirklich ein Vektorraum und wir haben

$$\dim T_\xi M = m, \quad \dim N_\xi M = n - m$$

**Satz** (Tangentialebene)

Für jeden Punkt  $\xi$  einer Mannigfaltigkeit  $M$  mit  $\Xi = \xi + T_\xi M$

$$\frac{1}{r} \sup \{ \text{dist}(x, \Xi) \mid x \in M \cap B_r(\xi) \} \xrightarrow{r \searrow 0} 0$$

## 4.2 Integration einer Mannigfaltigkeit

**Ziel** Verallgemeinerung des Lebesgue Integrals.

**Zunächst:** Für eine lineare Abbildung  $T: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $n \geq m$ , und eine messbare Menge  $U \subset \mathbb{R}^m$  möchten wir den  $m$ -dimensionalen Flächeninhalt von  $T(U)$  angeben.

**Lemma** Sei  $T \in \mathbb{R}^{n \times m}$  mit Rang  $m$ ,  $n \geq m$ . Dann gibt es ein  $Q \in \mathbb{R}^{n \times m}$  und  $S \in \mathbb{R}^{m \times m}$  mit  $T = QS$ , wobei  $Q$  eine Isometrie ist, d. h.  $|Qv|_{\mathbb{R}^n} = |v|_{\mathbb{R}^m} \forall v \in \mathbb{R}^m$  und  $|\det S| = \sqrt{\det T^\top T}$ .