Differentialgeometrie I

gehalten von Dr. Anna Siffert
im Sommersemester 2018

an der
Ruprecht-Karls-Universität Heidelberg

In LaTeX gesetzt von

Mathieu Kaltschmidt & Quirinus Schwarzenböck

aktueller Stand: ***22. April 2018***

Differentialgeometrie I

Dr. Anna Siffert

UNIVERSITÄT HEIDELBERG
ZUKUNFT SEIT 1386

Vorwort

Bei diesen Vorlesungsnotizen handelt es sich um kein offizielles Skript, sondern lediglich um die Umsetzung des Vorlesungsmitschriebs in LaTeX.
Für die Vollständigkeit & Richtigkeit des Inhalts wird deshalb keine Gewährleistung übernommen.
Bei Fragen, Korrekturen und Verbesserungsvorschlägen freuen wir uns über eine Nachricht.[1]
Die Dozentin Frau Dr. Siffert empfiehlt die nachfolgende Literatur zur Vertiefung des in der Vorlesung behandelten Stoffs:

Eine Inhaltsübersicht der in der Vorlesung behandelten Themen befindet sich auf der nächsten Seite.

[1]Mail an M.Kaltschmidt@stud.uni-heidelberg.de oder quirin.s@icloud.com

Inhaltsverzeichnis

1 Das erste Kapitel

Das wird wohl das erste Kapitel.

Definition 1.1 (Pythagoras)
Hallo das ist ein Test!

$$a^2 + b^2 = c^2 \tag{1.1}$$

Das war der Beweis!

Definition 1.2 (Pythagoras)

$$a^2 + b^2 = c^2 \tag{1.2}$$

Das war der Beweis!

1.3 Satz
Dies hier ist ein Blindtext zum Testen von Textausgaben. Wer diesen Text liest, ist selbst schuld. Der Text gibt lediglich den Grauwert der Schrift an. Ist das wirklich so? Ist es gleichgьltig, ob ich schreibe: Dies ist ein Blindtext oder Huardest gefburn? Kjift □ mitnichten! Ein Blindtext bietet mir wichtige Informationen. An ihm messe ich die Lesbarkeit einer Schrift, ihre Anmutung, wie harmonisch die Figuren zueinander stehen und prьfe, wie breit oder schmal sie lðuft. Ein Blindtext sollte mцglichst viele verschiedene Buchstaben enthalten und in der Originalsprache gesetzt sein. Er muss keinen Sinn ergeben, sollte aber lesbar sein. Fremdsprachige Texte wie Lorem ipsum dienen nicht dem eigentlichen Zweck, da sie eine falsche Anmutung vermitteln.

Beweis:
Dies hier ist ein Blindtext zum Testen von Textausgaben. Wer diesen Text liest, ist selbst schuld. Der Text gibt lediglich den Grauwert der Schrift an. Ist das wirklich so? Ist es gleichgültig, ob ich schreibe: Dies ist ein Blindtext oder Huardest gefburn? Kjift – mitnichten! Ein Blindtext bietet mir wichtige Informationen. An ihm messe ich die Lesbarkeit einer Schrift, ihre Anmutung, wie harmonisch die Figuren zueinander stehen und prüfe, wie breit oder schmal sie läuft. Ein Blindtext sollte möglichst viele verschiedene Buchstaben enthalten und in der Originalsprache gesetzt sein. Er muss keinen Sinn ergeben, sollte aber lesbar sein. Fremdsprachige Texte wie Lorem ipsum dienen nicht dem eigentlichen Zweck, da sie eine falsche Anmutung vermitteln. □

1.5 Lemma (Pythagoras)

$$a^2 + b^2 = c^2 \tag{1.3}$$

Das war der Beweis!

1.6 Korollar (Pythagoras)
Das ist ein Test

$$a^2 + b^2 = c^2 \tag{1.4}$$

Das war der Beweis!

Beispiel 1.7
Dies hier ist ein Blindtext zum Testen von Textausgaben. Wer diesen Text liest, ist selbst schuld. Der Text gibt lediglich den Grauwert der Schrift an. Ist das wirklich so? Ist es gleichgültig, ob ich schreibe: Dies ist ein Blindtext oder Huardest gefburn? Kjift – mitnichten! Ein Blindtext bietet mir wichtige Informationen. An ihm messe ich die Lesbarkeit einer Schrift, ihre Anmutung, wie harmonisch die Figuren zueinander stehen und prüfe, wie breit oder schmal sie läuft. Ein Blindtext sollte möglichst viele verschiedene Buchstaben enthalten und in der Originalsprache gesetzt sein. Er muss keinen Sinn ergeben, sollte aber lesbar sein. Fremdsprachige Texte wie Lorem ipsum dienen nicht dem eigentlichen Zweck, da sie eine falsche Anmutung vermitteln.

1.8 Satz
Dies hier ist ein Blindtext zum Testen von Textausgaben. Wer diesen Text liest, ist selbst schuld. Der Text gibt lediglich den Grauwert der Schrift an. Ist das wirklich so? Ist es gleichgьltig, ob ich schreibe: Dies ist ein Blindtext oder Huardest gefburn? Kjift □ mitnichten! Ein Blindtext bietet mir wichtige Informationen. An ihm messe ich die Lesbarkeit einer Schrift, ihre Anmutung, wie harmonisch die Figuren zueinander stehen und prьfe, wie breit oder schmal sie lðuft. Ein Blindtext sollte mųglichst viele verschiedene Buchstaben enthalten und in der Originalsprache gesetzt sein. Er muss keinen Sinn ergeben, sollte aber lesbar sein. Fremdsprachige Texte wie Lorem ipsum dienen nicht dem eigentlichen Zweck, da sie eine falsche Anmutung vermitteln.

Definition 1.9 (Differenzierbare Mannigfaltigkeit)
Eine ***differenzierbare Struktur*** auf einer topologischen Mannigfaltigkeit M ist ein ***maximaler C^∞-Atlas***. Eine ***differenzierbare Mannigfaltigkeit*** ist eine topologische Mannigfaltigkeit mit einer differenzierbaren Struktur.

Bemerkung
Man kann auch eine topologische Mannigfaltigkeit definieren, ohne das 2. Abzählbarkeitsaxiom zu fordern.

Aber: Dann bekommt man Mannigfaltigen mit ganz anderen Eigenschaften als diejenigen, die wir betrachten wollen.

Wichtig: Hausdorfsch + 2. Abzählberkeitsaxiom $\Rightarrow$ parakompakt, d. h. jede offene Überdeckung hat eine lokale Verfeinerung.

(V_j) heißt Verfeinerung von (U_j), falls $\forall V_j \exists U_j$ mit $V_j \subseteq U_j$
Lokal endlich: $\forall p \in X$ $\exists$ Umgebung U, die nur endlich viele U_i trifft
Parakompakt $\Rightarrow$ $\exists$ Partition der Eins f mit

$$f_i : V_i \subseteq X \to [0,1], \; \sum_{i \in I} f_i(x) = 1$$

Beispiel 1.11
Metrische Räume sind parakompakt.

Beispiel 1.12 (differenzierbare Mannigfaltigen)

1. $\mathbb{R}^n$ mit Atlas $\mathcal{A} = \{(\mathrm{id}, \mathbb{R}^n)\}$

2. V Vektorraum, B Basis mit $B = \{v_1, \cdots, v_n\}$, Atlas $\mathcal{A} = \{(\chi_B, V)\}$

$$\chi_B : V \to \mathbb{R}^n$$
$$v = \sum_{i=1}^n a_i v_i \mapsto \sum_{i=1}^n a_i e_i$$

   wobei $(e_1, \cdots, e_n)$ die Standartbasis ist.

3. $M \subseteq \mathbb{R}^n$, (χ_U, U) mit $\chi_U = \mathrm{id}|_U$, $V \subseteq M^n$, M differenzierbare Mannigfaltigkeit,
   $\mathcal{A} = \{(\chi_X, U)\}$ Atlas von M
   $\mathcal{A}_V = \{(\chi_V, U_V\}$ wobei $(\chi_V, U_V) = (\chi_{U \cap V}, U \cap V)$

4. $M_1 = S^1$, $M_2 = \mathbb{R}$, $M_1 \times M_2 =$ "unendlicher Zylinder" Seien $M_1^{n_1}, M_1^{n_2}$ differenzierbare Mannigfaltigkeiten, so ist $M_1 \times M_2$ ebenfalls eine differenzierbare Mannigfaltigkeitder Dimension $n_1 + n_2$.
   Atlas $\mathcal{A} = \{(x \times y, U \times V)\}$, wobei

$$(x, U) = \text{Karte von } M_1$$
$$(y, V) = \text{Karte von } M_2$$

   $(x \times y)(p_1, p_2) = (x(p_1), y(p_2))$

Graphik: Zylinder

Mannigfaltigke

Bemerkung
N mit der Teilraumtopologie und dem Atlas $\mathcal{A}_N = \{(\chi|_U, U \cap N)\}$ ist eine differenzierbare Mannigfaltigkeit.

Definition 1.14
Seien M, N differenzierbare Mannigfaltigkeiten. Eine ***Einbettung*** ist eine differenzierbare Abbildung

$$f : N \to M$$

sodass

h bin mir icht sicher ob as da wirklich eht

1. $f(N) \subset M$ eine Untermannigfaltigkeit
2. $f : N \to f(N)$ Diffeomorphismus

1.1 Tangentialraum

h weiß auch icht ob wir ei "Unterüber- chriften" sec- on nehmen

raphik: Tan- entialräume

Definition 1.15
1. Ein Tangentialvektor an M im Punkt $p \in M$ ist eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung

$$v : \mathcal{F}(M) \to \mathbb{R}$$

mit $v(fg) = v(f)g(p) + f(p)v(g)$.

2. Die Menge aller Tangentialvektoren an M in p heißt ***Tangentialraum*** von M in p: T_pM
T_pM ist ein Vektorraum.

Abbildungsverzeichnis