

גלים ואופטיקה - 77305

תרגיל נומרי

בתרגיל זה נמצא פתרונות נומריים למסלולי הקרניים של קרני אור המוסטות כתוצאה מעידוש כבידתי. נניח מסה נקודתית בעלת מסה m הממוקמת בראשית הצירים. מקור אור נקודתי נמצא לאורך ציר z במרחק z_i מהמסה, ופולט קרניים באופן איזוטרופי. מקדם השבירה המושרה במרחב על ידי המסה הינו

$$n(r) = 1 + \frac{2Gm}{c^2 r}$$

לצורך החישובים הנומריים, נניח כי היחידות נבחרו כך ש- $2Gm/c^2 = 1$. ניתן לרשום בכל שפה שתמצאנה את ציור את הקוד.

חישוב זווית ההסטה

1. כיתבו תכנית המבצעת אינטגרציה למשוואות הקרניים עבור קרן $\vec{r}(s)$, בהינתן תנאי התחלה על מיקום הקרן והנגזרת. לצורך כך, הניחו כי המקור הנקודתי נמצא ב- $z_s = 1000$. ביחרו תנאי התחלה לכיוון הקרן כך שהקרן תוסט אך בהסטה קטנה (ביחרו זווית קטנה ביחס לכיוון z השלילי, 1-2 מעלות אמור להספיק). הניחו כי הקרן כולה מוכלת במישור $x - z$ (בנוסף 5 נק': הוכיחו מדוע ניתן להניח כי הבעיה מוכלת במישור) הערות:

- (א) זיכרו כי המשוואה הינה משוואה וקטורית.
 - (ב) ודאו כי אתם מבצעים מספיק צעדי אינטגרציה בשביל שהקרן אכן תעבור הסטה. אם s ההתחלתי הינו 0, אז אינטגרציה עד $s > 1500$ עם $\Delta s = 1 - 2$ אמור להספיק.
 - (ג) ודאו כי בכל רגע נתון, הפרמטריזציה מקיימת את התנאי לפרמטריזציה אורך קשת (ניתן לכפות זאת בכל צעד, אבל גם ללא הכפיה זה אמור להתקיים בקירוב טוב).
 - (ד) המשוואה הינה מסדר שני. ישנן שיטות אינטגרציה המאפשרות אינטגרציה ישירה של משוואה מסדר שני, אך מומלץ להמיר את המערכת ל-6 משוואות מסדר ראשון לעומת 3 משוואות מסדר שני.
2. חשבו את זווית הסטייה של הקרן פעם אחת על ידי הפתרון הנומרי ופעם אחת על ידי החישוב המקורב שעשינו בתרגול. מהו הכיוון ההתחלתי של הקרן עבורו השגיאה בין הקירוב לפתרון הנומרי עולה על 10%?

טבעת איינשטיין

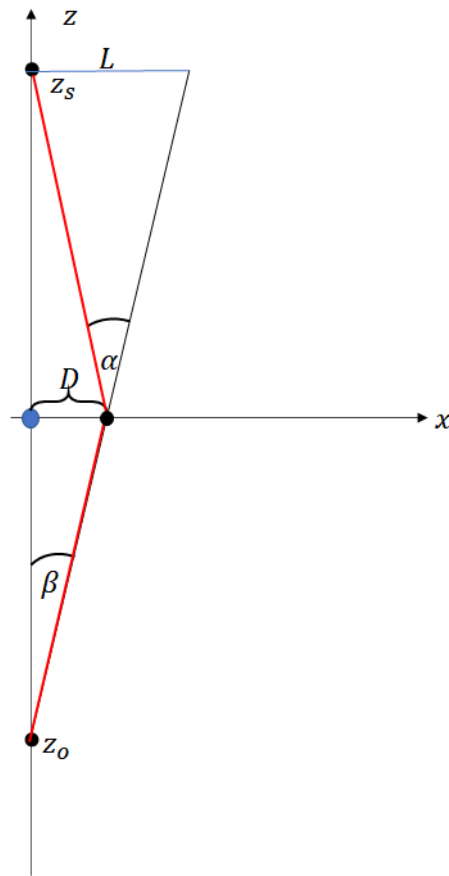
1. נניח כי מקור האור הנקודתי, המסה וצופה נמצאים על אותו הישר (נניח ציר z). נניח כי המרחק בין מקור האור למסה הינו z_s , בין המסה לצופה z_o ולכן המרחק בין הצופה למקור הינה $z_{os} = z_o + z_s$. כיוון שהבעיה עבור קרן נתונה הינה דו ממדית, נניח כי הקרן נעה במישור $x - z$. נסמן ב- D את הנקודה שבה חוצה הקרן את ציר ה- x . נסמן ב- β את הזווית בין ציר ה- z החיובי לקרן בנקודה בה הצופה נמצא (ראו

איור). בהנחה ש- $z_s, z_o \gg D$, ניתן לקרב את המסלול כמשולש עם קודקודים z_o, z_s, D . מצאו את הזווית β בגבול של זוויות קטנות (קרי α, β , כאשר α זווית ההסטה של הקרן שמצאנו בתרגול). התחילו במציאת האורך L .

2. מכיוון שישנה סימטריה גלילית סביב ציר z , הצופה יראה את מקור האור הנקודתי כטבעת שהינה חלק מחרוט עם זווית מפתח β . נניח כי מקור האור נמצא ב- $z_s = 1000$, והצופה נמצא ב- $z_o = -500$. נסמן ב- θ את הזווית בין הכיוון ההתחלתי של הקרן לציר z השלילי, וב- φ את הזווית במישור $x - y$ (כמו במערכת כדורית, רק ש- θ נמדדת מציר z השלילי ולא החיובי). חשבו את מסלולן של כל הקרניים היוצאות מהמקור בעלות זוויות $1^\circ \leq \theta \leq 2^\circ$ עם $\Delta\theta = 0.1^\circ$ ו- $0^\circ \leq \varphi \leq 360^\circ$ עם $\Delta\varphi = 15^\circ$ (סה"כ 240 קרניים).

3. סרטטו את ההיטל למישור $x - z$ של מסלולי הקרניים המגיעות ישירות לצופה. לשם כך, ביחרו את הקרניים שמרחקן מהצופה לאורך ציר z לא עולה על 1.

4. עיקבו אחר הקרניים למישור $x - y$ וסרטטו את הנקודות המתקבלות. חשבו את הרדיוס של המעגל שנוצר והשוו לקירוב מסעיף 1. המסקנה מסעיף זה שמקור אור נקודתי נמרח לאורך טבעת ברדיוס שמצאתם.



עידוש על ידי שתי מסות

כאשר ישנם שני עצמים מאסיביים, אינדקס השבירה האפקטיבי שהם משרים הינו בקירוב

$$n(\vec{r}) \approx 1 + \frac{2Gm_1}{c^2 |\vec{r} - \vec{r}_1|} + \frac{2Gm_2}{c^2 |\vec{r} - \vec{r}_2|}$$

כאשר \vec{r}_1, \vec{r}_2 הינם מיקומי המסות. נניח כי $m_1 = m_2 = m$ וכמקודם $2Gm/c^2$.

1. נמקם את המסות ב- $\vec{r}_{1,2} = (\pm 20, 0, 0)$. שנו את הקוד בהתאם, וחשבו את מסלולם של קרניים בתחום הזוויות $0 \leq \theta \leq 10^\circ$, $\Delta\theta = 0.5^\circ$ ו- $0^\circ \leq \varphi \leq 360^\circ$, $\Delta\varphi = 45^\circ$.

2. ביחרו את הקרניים המגיעות ישירות לצופה (כמו סעיף 3 בחלק הקודם), וסרטטו את התמונה שיראה הצופה אם הוא עומד ב $z_o = -1300$. במקרה זה, תמונת המקור הנקודתית הינה חמש העתקים של המקור במישור התמונה.