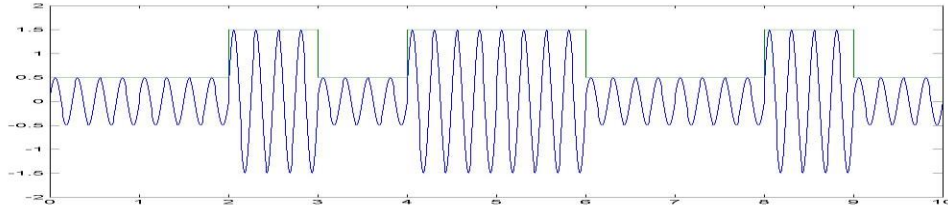


מבוא לתקשורת דיגיטאלית (שיטות אפנון דיגיטאליות)

בשידור מידע דיגיטאלי משתמשים בווריאציה של האפנונים האנלוגיים עם דגשים מיוחדים למידע בינארי.

(Amplitude Shift Keying) ASK

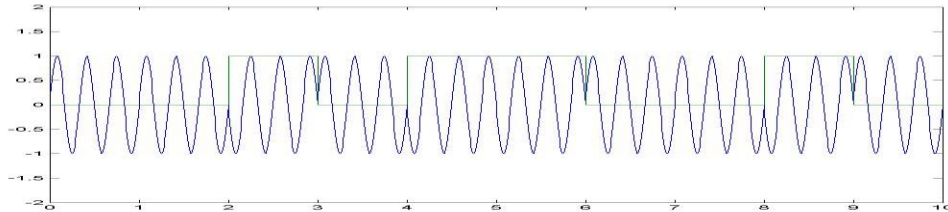
מקביל ל AM. ב-Binary-ASK (B-ASK) המידע באפנון הינו בינארי – אמפליטודה שמקבילה ל 0 ואמפליטודה שמקבילה ל 1 יוצרות רצף פולסים שמכפיל את הגל הנושא. יש לשים לב שהייצוג של 0 איננו בהכרח אמפליטודה 0 – אם מקדם המודולציה M קטן מ 1, לדוגמא:

$$v(t) = 0.5(1 - M \cdot a(t))\cos(\omega_0 t)$$


בשיטה זו מועבר ביט יחיד ע"י סמל בודד (סמל=אמפליטודה). הזמן המוקצה לשידור סמל מסומן ב- T_s ובחישוב הספקטרום לשידור סמל בודד נקבל כי רוחב הסרט הנדרש לשידור סמל בודד (סינוס במעטפת מלבן ברוחב T_s) הוא $B=2/T_s$, כלומר רוחב הסרט הנדרש הוא פעמיים קצב השידור בביטים לשנייה (כיוון שכל סמל מייצג ביט אחד)

(Binary Phase Shift Keying) B-PSK

מקבילה ל PM. תדר מרכזי אחד ומידע בינארי שמתבטא במופע (פאזה) של האות המאופנן. באפנון BPSK (Binary PSK) המופע הוא 0° לייצוג של הביט 0 ו 180° לייצוג של הביט 1.



מה יהיה הספקטרום של האות המשודר באופן כללי? לדוגמא לשם חישוב הספקטרום של PSK בקצב מקסימאלי 010101 – האות הוא סכום של שני גלים ריבועיים האחד כפול $\cos(\omega_0 t)$ והשני כפול ב $-\cos(\omega_0 t)$ = $\cos(\omega_0 t + \pi)$. כלומר פשוט $\cos(\omega_0 t)$ מוכפל בגל ריבועי הנע בין 1 ל-1 (מופיע בתרגיל) באפנון אנלוגי השיטות הנפוצות הן ווריאציות של AM ו FM. באפנון דיגיטאלי שיטת האפנון הנפוצה מעבר ל-ASK היא PSK. הסיבה לכך היא הפשטות של מנגנון הגילוי ב PSK – הכפלה במתנד מקומי בתדר הגל הנושא ובאותו מופע (נעילת פאזה). לאחר ההכפלה וסינון תדרים נמוכים (LPF) מתקבל חזרה המידע המאפנן:

$$v(t) = a(t) \cos(\omega_0 t) + (1 - a(t))(\cos(\omega_0 t + \pi)) = (2a(t) - 1) \cos(\omega_0 t) \Rightarrow$$

$$v(t) \cdot \cos(\omega_0 t) = (2a(t) - 1) \cos^2(\omega_0 t) = (2a(t) - 1)(1 + \cos(2\omega_0 t)) / 2$$

$$S_{\text{det}}(t) = \text{Lowpass}\{v(t) \cdot \cos(\omega_0 t)\} = \text{Lowpass}\{(2a(t) - 1)(1 + \cos(2\omega_0 t)) / 2\} = a(t) - 1/2$$

כאשר במעבר האחרון הנחנו כי $a(t)$ משתנה לאט משמעותית מפעמיים תדר הגל הנושא וכי תדר הקיטעון של פילטר מעביר הנמוכים נקבע כך שישנן את רכיב התדר $2\omega_0$ ויותר את $a(t)$ – כלומר תדר הקיטעון נקבע ע"פ קצב השינוי של $a(t)$ שהוא קצב שידור הסמלים. במרחב הזמן זמן האינטגרציה של הגלאי מעביר הנמוכים ($\text{rect}(t/T)$ איתו עושים קונבולוציה) מתאים לזמן לסמל $T = T_{\text{symbol}}$.

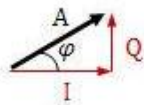
מרחב הסמלים – constellation diagram

כלי עזר שבו נהוג להציג מודולציה דיגיטלית מכונה **constellation-diagram** שהוא ייצוג ב"מרחב הסמלים" של האות: אם נסתכל על אות כללי, $v(t)$ כחלקו הממשי של אות המרוכב: $v(t) = \text{Re}\{A(t)e^{i(\omega_0 t + \phi(t))}\} = \text{Re}\{E_x e^{i\omega_0 t}\}$ נראה כי בכל רגע ערך המודולציה של האות (הסמל), המייצג את האינפורמציה באות, מעבר לתדר הגל הנושא המתנדנד בזמן כ- $e^{i\omega_0 t}$ הוא מספר מרוכב E_x המייצג את האמפליטודה והפאזה הרגעית של האות בכל רגע, כלומר את האמפליטודה והפאזה של כל סמל. מספר מרוכב זה, E_x מיוצג כווקטור במישור המרוכב:

$$[x, y] = [\text{Re}\{E_x\}, \text{Im}\{E_x\}] = [A(t)\cos(\phi(t)), A(t)\sin(\phi(t))] = [I, Q]$$

אשר אורכו מייצג את אמפליטודת האות והזווית שלו ביחס לציר ה-x החיובי היא הפאזה הרגעית של האות. הרכיבים הממשי והמדומה של האמפליטודה המרוכבת E_x מכונים גם I ו-Q בהתאמה כאשר I מייצג את הרכיב המתנדנד In-phase עם הגל הנושא הקוסינוסואידלי ו-Q הוא הרכיב המתנדנד בפאזה של 90 מעלות לאת זה: in Quadrature. המסגרת הבאה מסכמת זאת:

$$A\cos(2\pi f_c t + \varphi) = A\cos(2\pi f_c t)\cos(\varphi) - A\sin(2\pi f_c t)\sin(\varphi)$$



$$I = A \cos(\varphi)$$

$$Q = A \sin(\varphi)$$

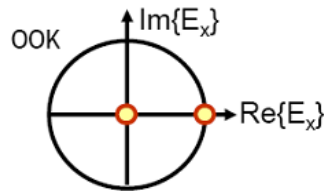
$$A \cos(2\pi f_c t + \varphi) = I \cos(2\pi f_c t) - Q \sin(2\pi f_c t)$$

where I is the amplitude of the in-phase carrier

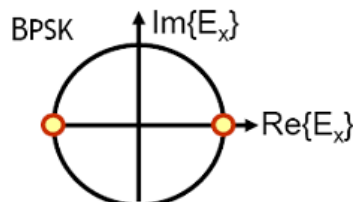
Q is the amplitude of the quadrature-phase carrier

כלומר כל סמל משודר יוצג כנקודה (קצה הווקטור) במישור המרוכב (דו-מימדי)

במקרה של B-ASK מיפוי קידוד האותות למרחב הסמלים יוצג כשתי נקודות, כאשר כל נקודה מייצגת את אחד ה"סמלים" (הביטים 0 או 1). עבור עומק מודולציה $M=1$ מכונה שיטה זו גם בשם On-Off-Keying (OOK), והצגתה במרחב הסמלים היא שתי נקודות על ציר הממשיים בעלי אמפליטודה שונה:



גם בשיטת BPSK כל סמל מייצג ביט בודד. במרחב הסמלים ייוצגו שתי הנקודות המייצגות את הסמלים ע"י שתי נקודות ע"ג מישור הממשיים (פאזה 0 או 180 וגודל (מרחק מהראשית) שווה):



ניתן לראות כי המרחק בין הסמלים ב-BPSK גדול מהמרחק בין המלים ב-BASK ולכן השיטה תהיה יותר חסינה לרעש (BER נמוך יותר)

(Quadrature PSK) QPSK

QPSK היא שיטת אפנון פאזה דיגיטלית היעילה פי 2 מ BPSK מבחינת קצב השידור בביטים לשניה לרוחב סרט נתון. ניתן להסתכל על שיטה זו בשני אופנים: הראשון הוא ששיטה זו משדרת בו זמנית סכום של שני ערוצי BPSK שבאחד מהם הגל הנושא הוא סינוס במקום קוסינוס: אם נסתכל על אקספוננט המתנווד בתדר הגל הנושא: $\exp(i\omega t) = \cos(\omega t) + i \sin(\omega t)$, נבחין שניתן לאפנן את האמפליטודה של כל אחד מהגורמים בנפרד בערך "1" או בערך "-1" ועדיין להשתמש באותו רוחב הסרט. למעשה יצרנו צמד רצפי BPSK המשודרים בו זמנית בהפרש מופע של 90° ביניהם באותו מרחב תדרים. הגילוי של כל אחד מהאותות מתבצע על ידי הכפלה במתנד מקומי עם מופע 0° לרצף ראשון (קוסינוס) ומופע 90° לרצף השני (סינוס) (תרגיל בית: להראות שאכן מתבצע גילוי נכון של המידע ללא הפרעות בין הרצפים כאשר מכפילים במתנד המקומי). הסכום משודר בתור:

$$v(t) = (2a_1(t) - 1) \cos(\omega_0 t) + (2a_2(t) - 1) \sin(\omega_0 t)$$

נוכיח שבהכפלה בקוסינוס ומיצוע על זמן סמל מתקבלת אמפליטודת רכיב הקוסינוס בלבד:

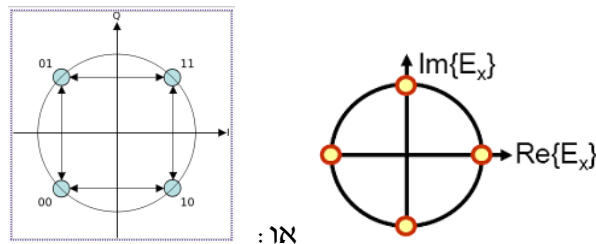
$$\begin{aligned} LPF\{v(t) \cdot \cos(\omega_0 t)\} &= LPF\{(2a_1(t) - 1) \cos^2(\omega_0 t) + (2a_2(t) - 1) \cos(\omega_0 t) \sin(\omega_0 t)\} \\ &= LPF\{(2a_1(t) - 1)(1 + \cos(2\omega_0 t)) / 2 + (2a_2(t) - 1) \sin(2\omega_0 t) / 2\} = a_1(t) - 1/2 \end{aligned}$$

האות המשודר באפנון QPSK, $v(t)$, הוא כאמור חיבור של סינוס וקוסינוס באמפליטודות ± 1 וזה (מזהויות טריגונומטריות בסיסיות) לשידור אות קוסינוס באמפליטודה קבועה ובעל פאזה שיכולה לקבל ארבעה ערכים שונים:

$$v(t) = (2a_1(t) - 1) \sin(\omega_0 t) + (2a_2(t) - 1) \cos(\omega_0 t) = A \cos(\omega_0 t + \phi(t))$$

כאשר הפאזה ϕ יכולה לקבל כל אחד מ-4 הערכים $45^\circ, 135^\circ, 225^\circ, 315^\circ$.

בהתאם לכך, אם נסתכל על ייצוג האות במישור המרוכב: $v(t) = \text{Re}\{A(t)e^{i[\omega_0 t + \phi(t)]}\}$ נראה כי **ייצוגו הוא וקטור בעל אמפליטודה קבועה ופאזה היכולה לקבל אחת מ-4 פאזות אפשריות** (כל צמד ביטים מיוצג על ידי אחד מארבעה מופעים $(45^\circ, 135^\circ, 225^\circ, 315^\circ)$ או לעתים משתמשים באופן דומה בפאזות $0^\circ, 90^\circ, 180^\circ, 270^\circ$. עניין של הגדרת מהי הפאזה "0" בלבד). כלומר במרחב הסמלים ייוצגו הסמלים השונים בשיטת מודולציה QPSK ע"י 4 נקודות (4 נקודות לכל אחת מאפשרויות הפאזה \sin ו- \cos)



או:

תהליך הגילוי הקוהרנטי של אות QPSK (הכפלה בקוסינוס ומיצוע ובמקביל הכפלה בסינוס ומיצוע) הוא למעשה התהליך הכללי שמתבצע בגילוי של שיטות מודולציה אמפליטודה ופאזה אחרות – למעשה גילוי קוהרנטי הוא הדרך לתרגם כל אות נקלט לערכי I ו-Q של הסמלים שהוא מכיל, והצגתו במרחב הסמלים. דיאגרמת בלוקים של תהליך כזה עבור אות נקלט $v(t)$ תינתן ע"י:

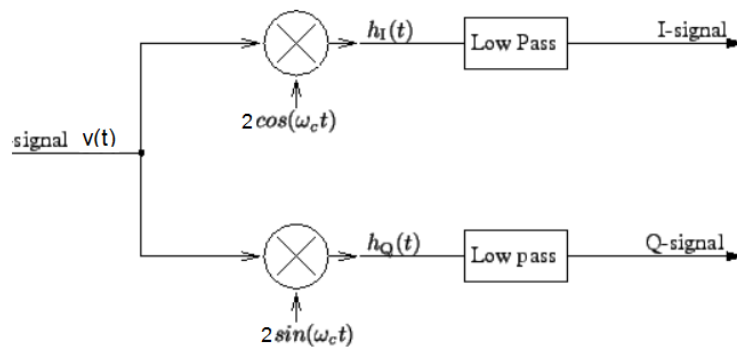


Figure N.2: A block diagram for extracting the I- and Q-signals

כאשר הסינון מעביר הנמוכים (Lowpass filter) מתבצע ע"י אינטגרציה של האות במשך הזמן לשידור סמל, T_s (כך שתדר הקיטעון שלו $f_{\text{cutoff}} \approx 1/T_s$). כלומר תהליך הפענוח המלא עבור הסמל ה-nי מתוך האות הנקלט $v(t)$ ניתן ע"י:

$$I(t = t_n = nT_s) = \int_{t-T_s}^t v(t) \cdot 2\cos(\omega_0 t) dt$$

$$Q(t = t_n = nT) = \int_{t-T_s}^t v(t) \cdot 2\sin(\omega_0 t) dt$$

נשים לב שפעולת המקלט היא למעשה "הטלה" של האות הנקלט על רכיב הקוסינוס או הסינוס (שהיא למעשה דומה גם לפעולת קורלציה עם אות הקוסינוס או הסינוס) ננתח בקצרה את התהליך עבור אות בעל אפנון כללי של אמפליטודה ופאזה: $v(t) = a(t)\cos(\omega_0 t + \phi(t))$. נתחיל מרכיב ה-I:

$$I = LPF\{v(t) \cdot 2\cos(\omega_0 t)\} = LPF\{a(t)\cos(\omega_0 t + \phi(t)) \cdot 2\cos(\omega_0 t)\}$$

$$I = LPF\{a(t)[\cos(2\omega_0 t + \phi(t)) + \cos(\phi(t))]\} = a(t)\cos(\phi(t))$$

קיבלנו את התוצאה הרצויה, כאשר במעבר האחרון הנחנו כי $a(t)$ ו- $\phi(t)$ משתנים משמעותית לאט יותר מתדר הגל הנושא וכי פילטר מעביר הנמוכים מכיון כך שמסנן את הרכיב המתנוודד ב- $2\omega_0$ ומותיר את הרכיבים המשתנים לאט יותר (תדר הקיטעון של ה-LPF מכיון ע"פ תדר השתנות המודולציה ב- $a(t)$ ובפאזה, שהוא קצב שידור הסמלים – כלומר זמן אינטגרציה מכיון לזמן לסמל)

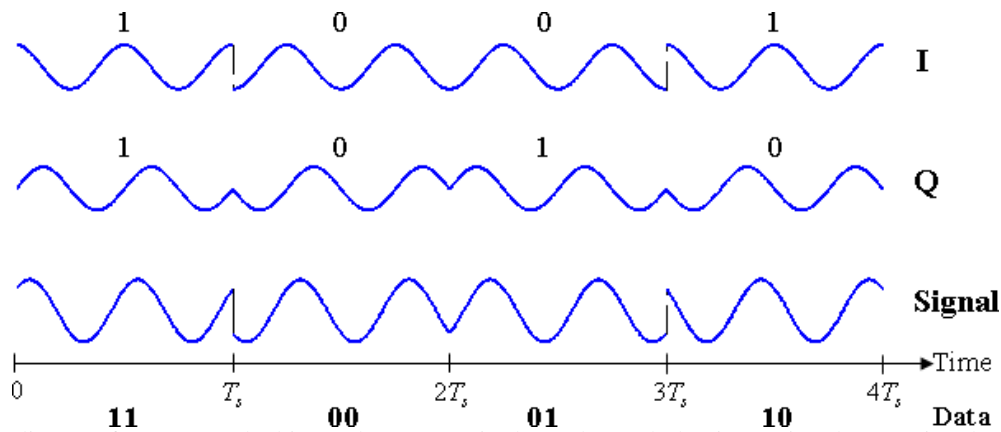
בצורה דומה נקבל את רכיב ה-Q לאחר מכפלה בסינוס ומיצוע על זמן לסמל:

$$Q = LPF\{v(t) \cdot 2\sin(\omega_0 t)\} = LPF\{a(t)\cos(\omega_0 t + \phi(t)) \cdot 2\sin(\omega_0 t)\}$$

$$Q = LPF\{a(t)[\sin(2\omega_0 t + \phi(t)) + \sin(\phi(t))]\} = a(t)\sin(\phi(t))$$

בשיטת QPSK כל סמל מייצג שני ביטים (ולכן קצב ההעברה כפול לאותו רוחב סרט).

בציר הזמן יראה האות כך:

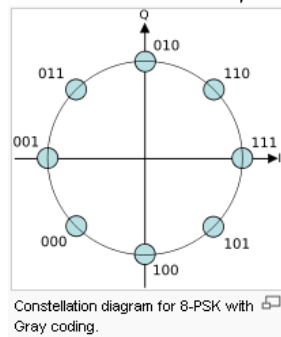


Timing diagram for QPSK. The binary data stream is shown beneath the time axis. The two signal components with their bit assignments are shown the top and the total, combined signal at the bottom. Note the abrupt changes in phase at some of the bit-period boundaries.

נשים לב כי בשיטות שתוארו עד כה המידע המאפנן הכיל **מעברים חדים** בין 0 ל 1 – פולסים מרובעים – שיוצרים רוחב סרט רחב להעברתם. באופן מעשי ברצוננו להמעיט ככל האפשר במעברים חדים של האות המאופנן ועדיין לקבל הפרדה טובה בין 0 ו 1 במידע המשודר וזה יכול להתבצע ע"י שיטות מתקדמות יותר כדוגמת GMSK עליהן נפרט בהמשך.

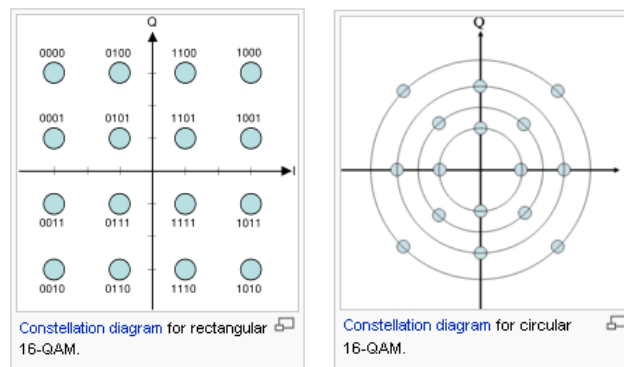
M-PSK

שימוש ביותר מופעים (פאזות) באפנון QPSK. באפנון הרגיל משתמשים ב 4 פאזות. ניתן להרחיב את השימוש ל 8, 16 ואף 32 פאזות, כך שבאותו רוחב סרט מועבר יותר מידע. במרחב הפזה מעגל היחידה מחולק ל M חלקים כאשר כל ווקטור מייצג $\log_2 M$ ביטים. ייצוג הקידוד במרחב הסמלים יכול לכן יותר נקודות, אך המרווחים בין הנקודות קטנים יותר :



(M-Quadrature Amplitude Modulation) M-QAM

שילוב של QPSK עם שינוי אמפליטודה של האות, כאשר M הוא 16, 32 או 64. במרחב הפאזות האפשריות האותות מגדירים ריבוע, בניגוד לעיגול היחידה שבו משתמשים ב M-PSK. הגילוי מתבצע כמו ב QPSK על ידי הכפלה במתנד מקומי בשני ערוצים עם הפרש פאזה. דוגמאות לייצוג קידוד M-QAM במרחב הסמלים :



באופן כללי, ניתן לומר כי שיטת שידור M-QAM או M-PSK העושה שימוש ברוחב סרט B (ב-Hz) תוכל לשדר $0.5B \log_2 M$ ביטים לשניה

(Frequency Shift Keying) FSK

שיטה דיגיטאלית המקבילה ל-FM אנלוגי. במקרה הבינארי B-FSK שני תדרים $f_2=f_0-\Delta f$ ו- $f_1=f_0+\Delta f$ סביב גל נושא בתדר מרכזי f_0 מייצגים 1 ו 0 בהתאמה. בדרך כלל מקיימים מספר מחזורים שלם של הגל הנושא בכל זמן פולס T_s כך שהחלפת התדר נעשית בלי קפיצות פאזה: $N/f_0=T_s$ כאשר N מספר שלם.

האות המשודר בשיטת BFSK הוא:

$$v(t) = a(t)\cos((\omega_0 + \Delta\omega)t) + (1 - a(t))\cos((\omega_0 - \Delta\omega)t)$$

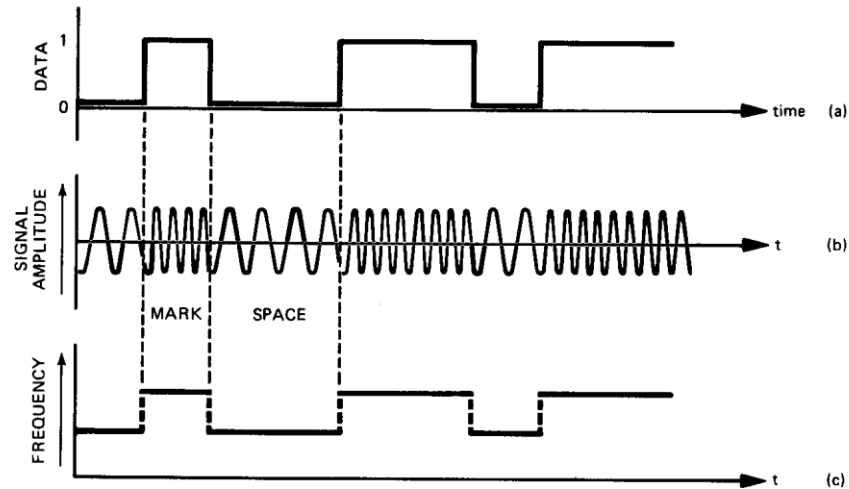
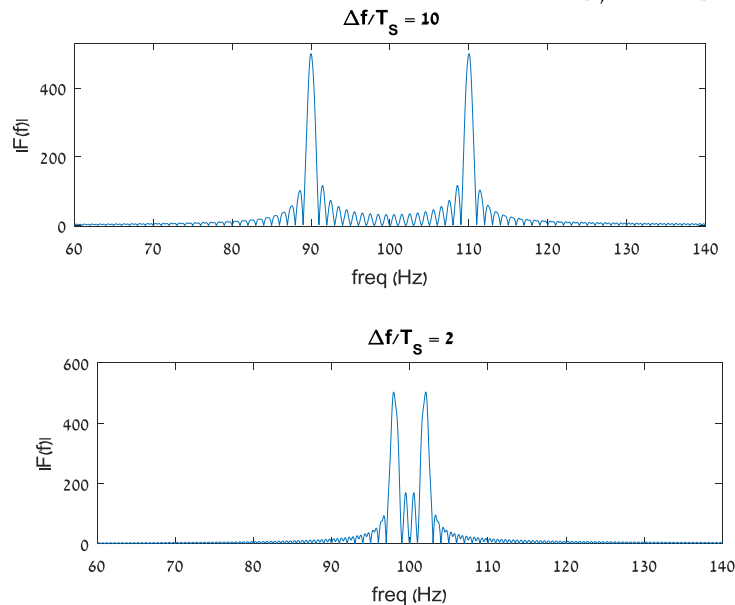
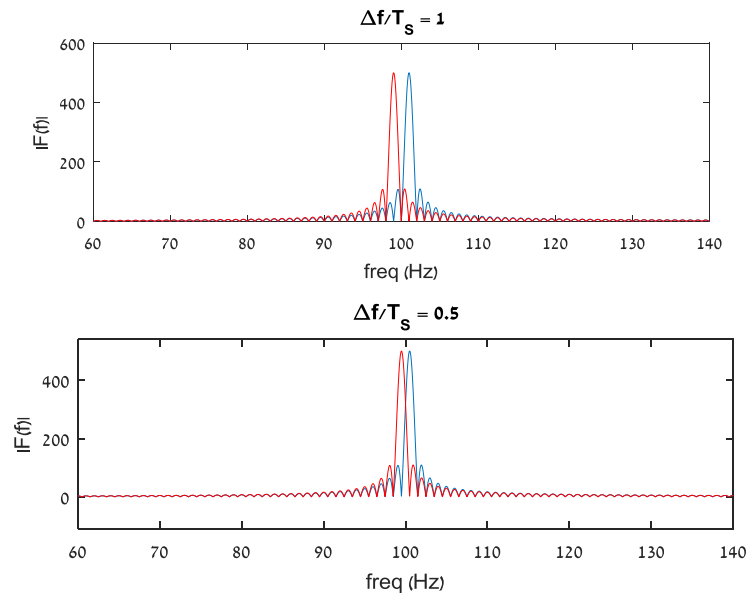


Figure 1. FSK modulation. Binary data (a) frequency modulates the carrier to produce the FSK signal (b) which has the frequency characteristic (c).

איך תיבחר הסטת התדר Δf המינימאלית שתאפשר להבחין בין סיביות (ביטים) שונים? (מעוניינים בהסטת תדר מינימאלית כדי לתפוס כמה שפחות רוחב סרט בשידור)

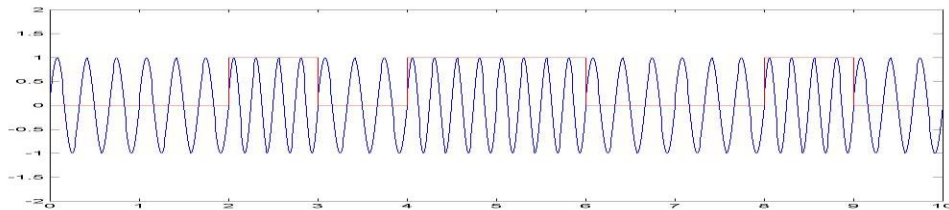
בתחום התדר – כל אחד מהביטים המשודרים הוא sinc סביב התדר f_1 או f_2 . כדי להבדיל בין ביט 1 לביט 0 עלינו להיות מסוגלים להבחין בין שני הסינקים הללו, כלומר מסדר ראשון נרצה למנוע מה-sinc של כל ביט לחפוף זה על זה: לדוגמא מוצג גרף של השידור עבור ביט 0 וביט 1 עבור $\Delta f=0.5/T_s, \Delta f=1/T_s, \Delta f=2/T_s, \Delta f=10/T_s$





ננתח את התנאי לחוסר חפיפה: נתון כי ישנם שני תדרים f_1 ו- f_2 המייצגים שני סמלים והמשודרים בזמן לסמל של T_s . בתחום התדר הספקטרום של כל אחד מהסמלים יהיה sinc ברוחב $2/T_s$ הממוקד סביב התדר f_1 או f_2 . כדי שהסינקים לא יחפפו זה על זה נדרוש כי הם יהיו רחוקים זה מזה לפחות כחצי רוחבם (התדר בו הם מתאפסים), כלומר: $2\Delta f = f_1 - f_2 \geq 1/T_s$. ניתן להגיע לתנאי המדויק גם מדרישה בתחום הזמן: כדי לקבוע מהו התדר של כל סמל, ניתן לחשוב על פעולת המקלט כ"ספירה" של מספר המחזורים שהאות עושה בזמן הסמל. אם נדרוש כי יהיה הבדל של לפחות זמן מחזור אחד בזמן לסמל בין שני הביטים (באחד מהם האות עושה מחזור אחד פחות/יותר) נקבל:

נניח שיש לנו שני תדרים f_1 ו- f_2 המייצגים שני סמלים והמשודרים בזמן לסמל של T_s ההבדל בין מספר המחזורים לכל תדר יהיה: $N_1 - N_2 = T_s(f_1 - f_2)$ ואם נדרוש שהפרש זה יהיה $N_1 - N_2 \geq 1$ אז נקבל: $f_1 - f_2 \geq 1/T_s$ כמו שקיבלנו בדרישה לאי-חפיפה בתדר. דוגמא לאות המקיים דרישה זו בזמן ניתנת למטה: (באדום – אות הביטים, בכחול האות המאופקן)



הגילוי של אות FSK יכול להתבצע ע"י גילוי FM רגיל ולאחריו סף החלטה לגבי כל סמל האם הוא "0" או "1". צורה נוספת היא ע"י matched-filter למעשה הטלה של האות הנקלט על הסמל שאנו מצפים לקבל עבור "0" וכנ"ל עבור "1" ולאחר מכן סף החלטה. כיום מקלטי FM ו-FSK רבים ממומשים באופן דיגיטלי ע"י PLL: Phase-locked-loop

(Offset QPSK) OQPSK

זהו ל QPSK כאשר יש הפרש זמן של $\frac{1}{2}$ ביט במעברים בין שני הערוצים. ז"א, כאשר ערוץ ה \cos מחליף פאזה (משנה ערך) הערוץ השני נשאר קבוע. היתרון הוא שלאות המשולב כל מעבר פאזה הוא של 90° בלבד – בין $1+i$ ל $1-i$, לדוגמה, או בין $1+i$ ל $-1+i$. הקפיצות שמתקבלות באות המשודר קטנות יותר מאשר ב QPSK ללא הבדל הזמנים בין רצפי המידע – כאשר שני הרצפים משנים מצב באותו הזמן.

(Minimum Shift Keying) MSK

פיתוח של OQPSK שמשמש בפולסים מוחלקים (\sin) במקום פולסים רבועים עבור המידע. על ידי הכפלה באמפליטודה שהיא חצי מחזור של \sin , במעבר בין 0 ל 1 האמפליטודה היא 0 ולכן אין קפיצות של האות – האות המשודר רציף. היתרון הוא פחות הפרעות לשידורים סמוכים וניצול יעיל יותר של רוחב הסרט. קיימת זהות בין מימוש MSK ואפנון FSK, ובדרך כלל מימוש MSK הוא באפנון תדר. כדי לראות את הזהות נפתח את הביטוי ל FSK

$$\begin{aligned}v(t) &= a(t)\sin((\omega + \Delta\omega)t) + (1 - a(t))\sin((\omega - \Delta\omega)t) \\&= \sin((\omega - \Delta\omega)t) + a(t)(\sin(\omega + \Delta\omega)t - \sin((\omega - \Delta\omega)t)) = \\&= \sin(\omega t)\cos(\Delta\omega t) - \cos(\omega t)\sin(\Delta\omega t) + a(t)\cos(\omega t)\sin(\Delta\omega t) = \\&= \sin(\omega t)\cos(\Delta\omega t) + (a(t) - 1)\cos(\omega t)\sin(\Delta\omega t)\end{aligned}$$

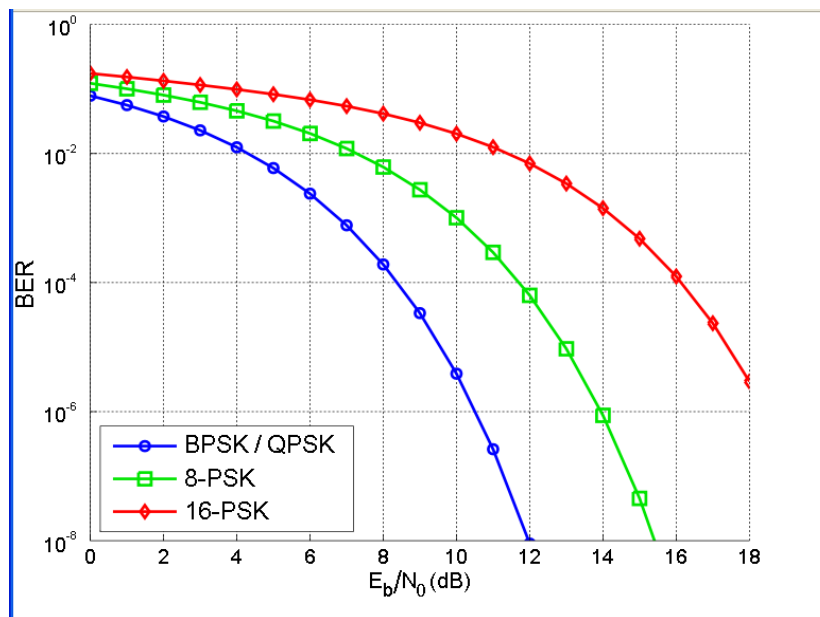
גילוי באמצעות הכפלה ב $\cos(\omega t)$ ייתן את המידע כאשר כל פולס מוכפל ב $\sin(\Delta\omega t)$. האות המשודר הוא סכום של שני אותות FSK בהפרש פאזה של 90° .

(Gaussian MSK) GMSK

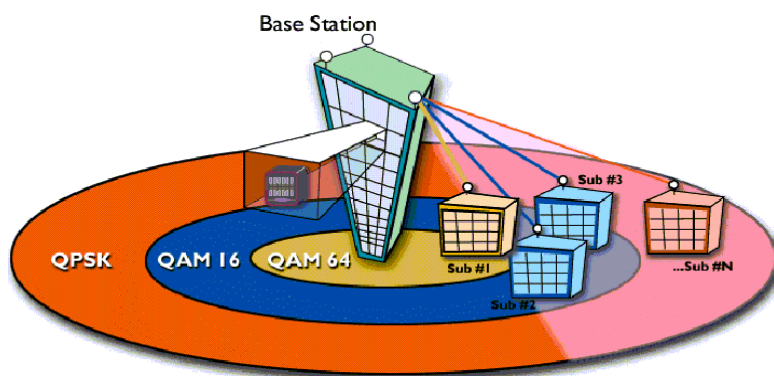
פיתוח של MSK שבו אפליטודת כל פולס מידע היא גאוסיאן. האות המאופנן חלק ללא מעברים חדים או נגזרות חדות – מינימום הפרעה לתדרים שכנים. מערכות מוכרות שמשמשות ב GMSK הינן DECT, GSM. מימוש GMSK נעשה בדרך כלל באפנון תדר, כמו ב MSK.

שימוש באפנונים שונים – תלות ביחס אות לרעש (SNR)

לכאורה, עדיף להשתמש באפנון שנותן מקסימום מידע באותו רוחב סרט – כלומר לשדר כמה שיותר ביטים בכל סמל – לצמצם את הרווחים במרחב הסמלים. המגבלה הינה רעש – ככל שההבדל בין אותות קרובים קטן יותר, תוספת רעש תגרום ליותר טעויות בזיהוי נכון של האות. ה"תשלום" על קצב הביטים הגבוה יותר הוא הגדלת קצב השיגאות (BER – Bit Error rate), ולכן שיטות המקודדות יותר משתי פאזות עדיפות על BPSK כאשר יחס האות לרעש בערוץ אינו נמוך מדי (כך שמתאפשר BER מספק עליו ניתן להתגבר באמצעות תיקון שגיאות – לדוגמא 10^{-7}). ניתן לראות זאת בגרף הבא: עבור יחס אות לרעש נתון בערוץ (המיוצג ע"י ציר ה-x: אנרגיה לביט מחולקת ברעש), קצב השיגאות ב-BPSK/QPSK נמוך יותר מביטות המאפנות ע"י יותר משתי פאזות (ומעבירות יותר מידע)



האותות החסינים ביותר לרעש הם BPSK ו QPSK. כיוון ש QPSK משתמש בחצי מרוחב הסרט, זו השיטה העדיפה. כאשר קיים עודף הספק – שידור בתא שטח סלולרי קטן, לדוגמה – ניתן לצופף יותר אותות באותו רוחב סרט על ידי מעבר לשיטות אפנון כמו QAM-16 או QAM-64.

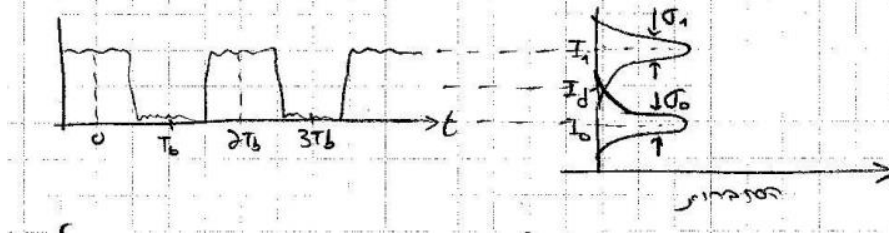


לינק נחמד בנוגע לשידורים דיגיטליים בלינק לוויני:

<http://www.w-tech.co.il/Articles/Item.asp?ArticleID=2986&CategoryID=295>

חישוב Bit Error-Rate BER

ננתח מקרה פשוט כדוגמת קליטת אות BASK. לאחר גילוי המעטפת נקבל אות שללא נוכחות רעש משתנה בזמן בין שני ערכים "0" ו-"1", ובנוכחות רעש מתפלג סביב ערכים אלו ע"פ התפלגות הרעש:



מטרת המקלט היא להחליט בכל רגע נתון האם נקלט הביט "0" או "1". כדי להחליט על כך מוגדרת רמת סף החלטה: I_d , זוהי רמת הסף מעליה נקבע רמת "1" ומתחתיה רמה "0". אם הרעש מתפלג גאוסיינית ייתכן מצב שבו שני הגאוסיונים יהיו מעל או מתחת לערך של רמת הסף גם אם שודר "1" וגם אם שודר "0". הסתברות לשגיאה נקראת BER=Bit Error Ratio. לדוגמא עבור מקרה של ביט אחד שגיאה לכל 10^9 ביטים ה $BER = 10^{-9}$ (קצב השגיאות (מספר השגיאות בשניה) שהוא ההסתברות לשגיאה כפול קצב שידור הביטים מכונה bit-error-rate וגם הוא מסומן לעתים כ BER לרוע המזל)

נפתור את הבעיה באופן כללי

$$P(0) = P(1) = \frac{1}{2} \text{ נניח כי הסתברות לשידור 1 או 0 הוא חצי}$$

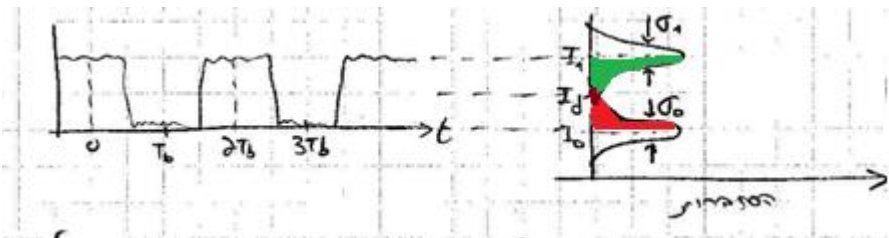
$$P(\text{error}) = \frac{\text{the probability to send "0" } \cdot \text{the probability to receive 1 while sending 0}}{\text{the probability to send "1" } \cdot \text{the probability to receive 0 while sending 1}} + \frac{\text{the probability to send "1" } \cdot \text{the probability to receive 0 while sending 1}}{\text{the probability to send "0" } \cdot \text{the probability to receive 1 while sending 0}}$$

$$BER = P_{\text{error}} \times (\text{transmitted bits per second})$$

נרצה לחשב את ההסתברות הנ"ל. לשם כך נניח כי פילוג צפיפות הסתברות הרעש במתח הוא גאוסייני (כמו במקרה של רעש תרמי) ולכן נקבל-

$$P(0|1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_1^2}} \int_{-\infty}^{I_d} \exp\left(-\frac{(I-I_1)^2}{2\sigma_1^2}\right) dI \quad (\text{השטח בירוק})$$

$$P(1|0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_0^2}} \int_{I_d}^{\infty} \exp\left(-\frac{(I-I_0)^2}{2\sigma_0^2}\right) dI \quad (\text{השטח באדום})$$



נשתמש בהגדרה ל-erfc שהוא האינטגרל על גאוסייני:

$$\operatorname{erfc}(x) \equiv \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{\infty} e^{-y^2} dy$$

ולכן נוכל לרשום בצורה אלגנטית יותר:

$$P(0|1) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\frac{I_1 - I_d}{\sqrt{2\sigma_1^2}} \right)$$

$$P(1|0) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\frac{I_d - I_0}{\sqrt{2\sigma_0^2}} \right)$$

נציב חזרה בביטוי של P_{error} ונקבל כי

$$P_{\text{error}} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\frac{I_1 - I_d}{\sqrt{2\sigma_1^2}} \right) + \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\frac{I_d - I_0}{\sqrt{2\sigma_0^2}} \right) \right]$$

נשים לב כי P_{error} תלוי ברמת הסף. לכן השאלה היא מהי רמת הסף האופטימלית שתביא למינימיזציה של ההסתברות לשגיאה. כדי למצוא אותה נגזור ונשווה ל-0 ועבור הערך הנ"ל מתקבל BER מינימלי

לאחר גזירה מתקבל כי (נגזרת של erfc היא גאוסיינ ע"פ הגדרה)

$$\frac{(I_d - I_0)^2}{2\sigma_0^2} = \frac{(I_1 - I_d)^2}{2\sigma_1^2} + \ln \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_0} \right)$$

ברוב המקרים $\sigma_1 \approx \sigma_0$ ניתן להניח הנחה זאת מכיוון ש $\sigma^2 = \sigma_s^2 + \sigma_T^2$ באשר

$$\sigma_s = \text{Shot noise}$$

$$\sigma_T = \text{Johnson noise}$$

במקרים בהם רעש שוט הוא רעש חלש יחסית לרעש התרמי נקבל:

$$\ln \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_0} \right) \approx 0$$

ולכן בהנחה של מקרה פרטי שבו $\sigma_1 = \sigma_0$ נקבל

$$I_d = \frac{I_0 + I_1}{2}$$

בדיוק באמצע (דבר שלא מפתיע אותנו) – נשים לב שאם $I_0 = -I_1$, כמו שקורה בכל אחד מערוצי I -ו- Q בשידור BPSK/QPSK זרם/מתח הסף יהיה $I_d = 0$ (גם כן שלא במפתיע)

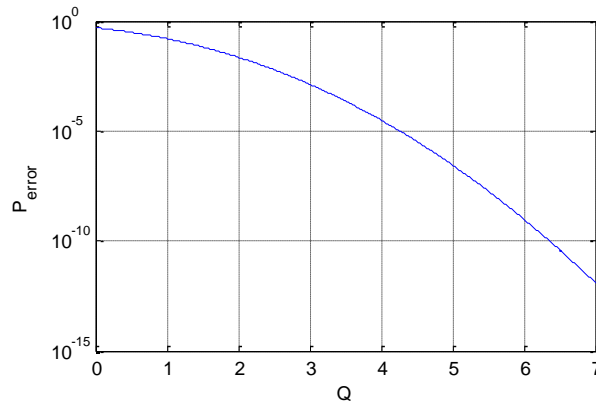
כאשר רמת הסף נבחרת כרמת הסף האידיאלית הזו נקבל כי

$$P_{\text{error}} = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\frac{Q}{\sqrt{2}} \right)$$

כאשר Q הוא מדד של המרחק בין "1" לבין "0" ביחס לרוחב גאוסייני הרעש (σ_1, σ_2) והוא מוגדר כך:

$$Q = \frac{I_1 - I_0}{\sigma_1 + \sigma_0}$$

נסתכל על התוצאה בצורה גרפית



כעת הגענו לשלב החשוב באמת: ושאלה מעשית שנשאלת (גם במבחן): מהו יחס האות לרעש SNR שעבורו נקבל BER נמוך מסף מסוים? או באופן מקביל (הפוך): מהו ה-BER שאנו מצפים לקבל ב-SNR נתון כלשהו?

נקשר בין מה שעשינו עד כה ל-SNR: ה-SNR הוא כאמור היחס בין הספק האות להספק הרעש. כיוון שההספק מתכונתי למתח בריבוע ה-SNR יחושב עפ'י יחסי ריבועי המתחים. לדוגמה בעת שידור הביט "1" יחס האות לרעש יהיה:

$$SNR = \frac{I_1^2}{\sigma_1^2}$$

(באופן כללי, בעת שידור הביט "0" יחס האות לרעש יכול להיות שונה, גם מכיון שהמתח המשודר שונה וגם מכיון שהרעש יכול להשתנות, למשל במקרה של רעש שוט).

דוגמא: בגילוי שידורים מסוג QPSK/BPSK המתח המתגלה במוצא המקלט הקוהרנטי בכל אחד מערוצי ה-I או ה-Q הוא ללא רעש בעל ערך $I_1 = -I_0$. לכן נקבל כי $Q = I_1/\sigma_I \sqrt{2}$ ולכן:

$$P_{err} = 0.5 \operatorname{erfc}(I_1/\sigma_I \sqrt{2}) = 0.5 \operatorname{erfc}(\sqrt{SNR/2})$$

כאשר ה-SNR הוא ה-SNR במוצא ערוצי ה-I או ה-Q במקלט הקוהרנטי.

נהוג לבטא את הביטוי לשגיאה גם באמצעות היחס בין האנרגיה לביט E_b וצפיפות הספק הרעש N_0 (בוואט להרץ). כיון שהספק האות הוא האנרגיה לביט כפול קצב הביטים (מספר הביטים לשנייה), ובמקרה של QPSK קצב הביטים הוא $bps = B$, נקבל:

$$P_{signal} = E_b B$$

$$P_{noise} = (N_0/2) B$$

(פקטור החצי ברעש הוא מהגדרת ה-bilateral spectral density)

$$SNR = P_{signal}/P_{noise} = 2E_b/N_0$$

ולכן ההסתברות לשגיאה בשידורי QPSK תהיה:

$$P_e = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}} \right)$$

נפתור בעיה מספרית:

נניח למשל רעש תרמי בלבד עבור מערכת בטמפרטורת החדר העושה שימוש בגל מתח הנע בין אמפליטודת 0Volt ל-0.1mV ע"י גודל של $R=50\text{ Ohm}$, לייצוג ביטים בקצב 1GBPS מהו הספק הרעש התרמי במערכת? הנוסחה לרעש תרמי היא: $P = k_B T \Delta f$, נותר לנו רק לקבוע את רוחב הסרט של המערכת: מהו רוחב הסרט לשידור גל ריבועי בקצה הנ"ל? הזמן לכל ביט: $T_{bit}=10^{-9}s$ ולכן בקירוב רוחב הסרט הנדרש הוא: $\Delta f=1/T_{bit}=10^9\text{Hz}$ ולכן הרעש התרמי יהיה:

$$P_{thermal}=1.38*10^{-23}(\text{J/K})*300(\text{K})*10^9(1/s)=4*10^{-12}\text{Watt (J/s)}$$

מהו הספק האות?

$$P_{signal}=V_s^2/R = 10^{-8}/50 = 2*10^{-10}\text{ Watt}$$

$$SNR = P_{signal}/P_{noise} = 2e-10/4e-12 = 50$$

יחס האות לרעש הוא: 50

מהי ההסתברות לשגיאה וה-BER עבור יחס אות לרעש זה?

$$SNR = 50 = \frac{I_1^2}{\sigma_1^2} = \left\{ Q = \frac{I_1 - 0}{\sigma_1 + \sigma_1} = \frac{I_1}{2\sigma_1} \right\} = 4Q^2$$

$$Q = \sqrt{50/4} = 3.53$$

נציב כדי לקבל את ההסתברות לשגיאה:

$$P_{error} = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\frac{3.53}{\sqrt{2}} \right) = 2 \cdot 10^{-4}$$

ולבסוף נחשב את ה-BER:

$$BER = P_{error} * 10^9 \text{bps} = 2 * 10^5 \text{bps}$$

ריבוב (Multiplexing) דיגיטלי - CDMA

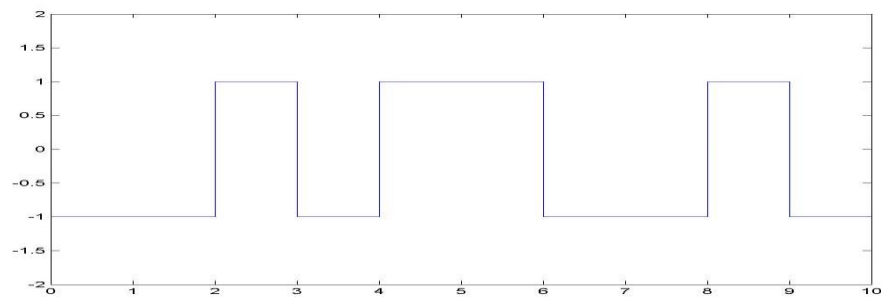
במערכות דיגיטליות משתמשים בריבוב זמן (TDM) וריבוב תדר (FDM) בדומה למערכות אנאלוגיות. השמות בהם משתמשים הם TDMA – Time Division Multiple Access, ו FDMA – Frequency Division Multiple Access. השוני בשם נועד להבדיל בין ריבוב דיגיטלי לאנאלוגי. צורת ריבוב נוספת היא CDMA – Code Division Multiple Access. צורת ריבוב זו היא דיגיטאלית בבסיסה ומשתמשים בה כמעט בכל הרשתות הסלולריות מדור שלישי (3G). אם נסתכל על מרחב דו-ממדי של זמן מול תדר, נקבל שב FDMA כל מכשיר משדר בתדר משלו וההפרדה בין מכשירים מתבססת על הפרדה בין תדרים. רוחב הסרט בו משדרים מוגבל כדי למנוע הפרעות.

ב TDMA כל מכשיר יכול לשדר ברוחב סרט גדול מאשר FDMA וההפרדה בין מכשירים מתבססת על הפרדה בזמני השידור – חלונות שידור שונים. השיטה יותר יעילה מאשר FDMA אך מצריכה 'זמנים מתים' בתחילת וסוף כל חלון זמן כדי למנוע הפרעות. בנוסף אם יש זמנים שבהם אין מידע להעביר בערוץ מסויים המערכת לא מנוצלת היטב. ניתן גם לשלב בין TDMA ו FDMA על ידי חלוקת חלונות זמן-תדר לקבלת הפרדה מקסימלית בין משתמשים.

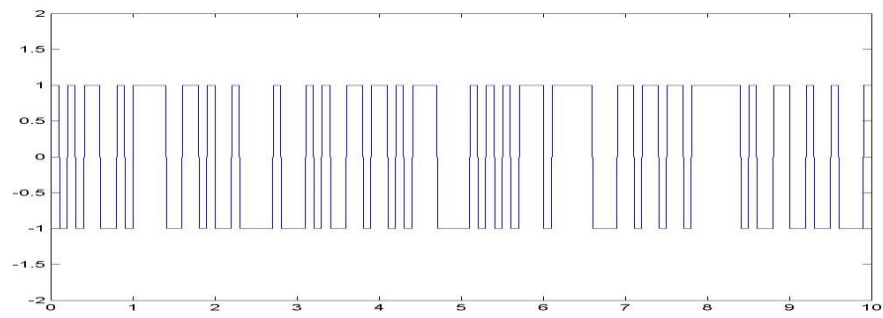
ב CDMA כל מכשיר משתמש בכל מרחב הזמן-תדר על ידי **הרחבה של ספקטרום השידור בעזרת הכפלה של המידע המקורי ברצף דיגיטלי כמו-אקראי (Pseudo Random)**. שיטה זו פותחה במקור לשידור רחב סרט של אותות – Direct Sequence Spread Spectrum – DSS. היחס בין רוחב הסרט המקורי של המידע ורוחב הסרט לאחר ההכפלה הוא מקדם ההרחבה של רוחב הסרט, ומבטא את היחס בין קצב הביטים באות המקודד לאות המקורי. בהתכלות במרחב זמן-תדר שידור CDMA משתמש בכל המרחב – רוחב הסרט מכסה את כל הרוחב האפשרי והשידור רציף. ניתן גם לשלב CDMA עם TDMA או FDMA על ידי הגבלת זמני או תדרי השידור. ההפרדה בין משדרים שונים באותו תא מתבצעת באמצעות קצצת קודים שונים לכל משתמש. אם ניקח רצף בינארי אקראי, רצף אידיאלי (אקראי וחסר זכרון) יהיה בעל אוטו-קורלציה של פונקציה δ - מקסימום (1) בזמן 0 וערך נמוך מאד (0) בכל זמן אחר. גילוי האות נעשה על ידי הכפלה בקוד המקורי, ואותות בעלי קורלציה 0 עם האות לא יפריעו או יגרמו להפרעה מינימלית. הדרך המקובלת היא לתת לכל משדר את אותו הרצף עם הפרש זמנים שונה בין משדרים. ההבדל בהפרש הזמנים צריך להיות גדול מהבדל אפשרי בזמני הגעה עקב מרחק או חזרות מרובות.

דוגמה להרחבה ספקטראלית ע"י הכפלה בקוד CDMA: (יש להוסיף את הרצף והקוד עצמו ולשפר הגרפים)

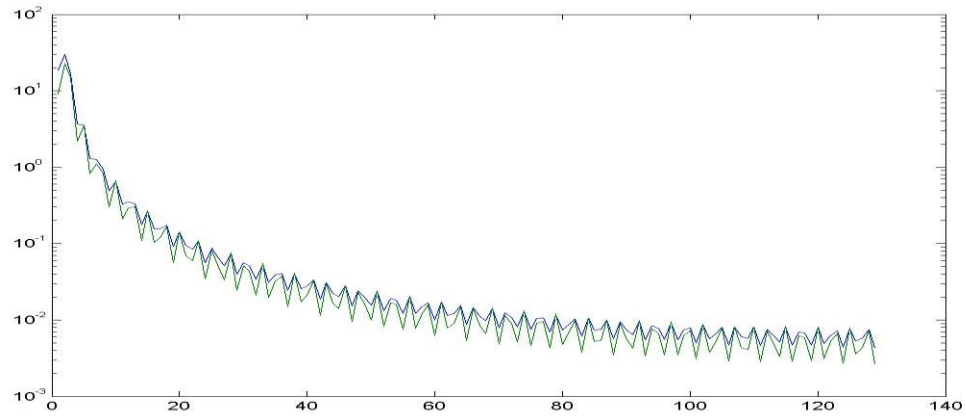
האות המקורי (המידע) כתלות בזמן (ביטים "0" או "1") :



האות הנ"ל לאחר הכפלתו ברצף הפסאודו-אקראי, אות זה ישודר למעשה במערכת ה-CDMA :



ספקטרום האות המקורי, ניתן לראות כי רוחב הסרט קטן מ-5 (נניח ירידה מתחת לעוצמה של 10).



ספקטרום אות ה-CDMA, רוחב הסרט גדל פי 4 לערך.

