María José Sedano Castañeda C.U. 157500

Examen Final

1. Gradiente Conjugado.

1.1. P.D. Si $p_1, p_2, \ldots, p_l \neq \bar{0}$ satisfacen que:

$$p_i^T A p_j = 0 \quad \forall i \neq j$$

y A es simétrica positiva definida, ent. los vectores son l.i.

Dem.

Lo anterior implica demostrar que para $\alpha_i \in \mathbb{R}$ con $i=1,\ldots,l$ tenemos

$$\sum_{i=1}^{l} \alpha_i p_i = 0 \Rightarrow \alpha_i = 0 \quad \forall i.$$

Ahora, procedamos diciendo que $\exists\, \alpha_j \neq 0$ con α_j fija tenemos por otro lado

$$\sum_{i=1}^{l} \alpha_i p_i = \bar{0}$$

tenemos a la matriz A simétrica positiva def, multiplicando por la izquierda

$$A \sum_{i=1}^{l} \alpha_i p_i = A0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{l} A\alpha_i p_i = A\bar{0} = \bar{0}$$

mult. p_j^T por la izquierda tenemos

$$p_j^T \sum_{i=1}^{l} \alpha_i A p_i = p_j^T \bar{0} \Rightarrow \sum_{i=1}^{l} \alpha_i p_j^T A p_i = 0$$

por hipótesis $p_j^T A p_i = 0 \quad \forall i \neq j$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{l} \alpha_i p_j^T A p_i = \alpha_j p_j^T A p_j = 0$$

sabemos además que $x^T A x > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^l$

entonces $\alpha_j p_j^T A p_j = 0 \Leftrightarrow \alpha_j = 0$ ↯

$\therefore \alpha_j = 0$ así tenemos. $\sum_{i=1}^{l} \alpha_i p_i = 0$

con $\alpha_i = 0 \quad \forall i = 1, \ldots, l$

$\therefore \{p_1, \ldots, p_l\}$ es l.i. ∎

Scanned with CamScanner

1.2. Dado el resultado 1.1.
¿Por qué el gradiente conjugado converge a lo más más en n iteraciones?

Recordemos el teorema:
"Para cualquier $x_0 \in \mathbb{R}^n$ la sucesión $\{x_k\}$ generado por el algoritmo de gradiente conjugado converge a la solución x^* del sistema lineal en a lo más n pasos."

Para nuestro caso tomamos el sistema lineal definido anteriormente con $\sum_{i=1}^{l} \alpha_i p_i$ considerando la sucesión $x_{k+1} = x_k + \alpha_k p_k$. que usa el método.

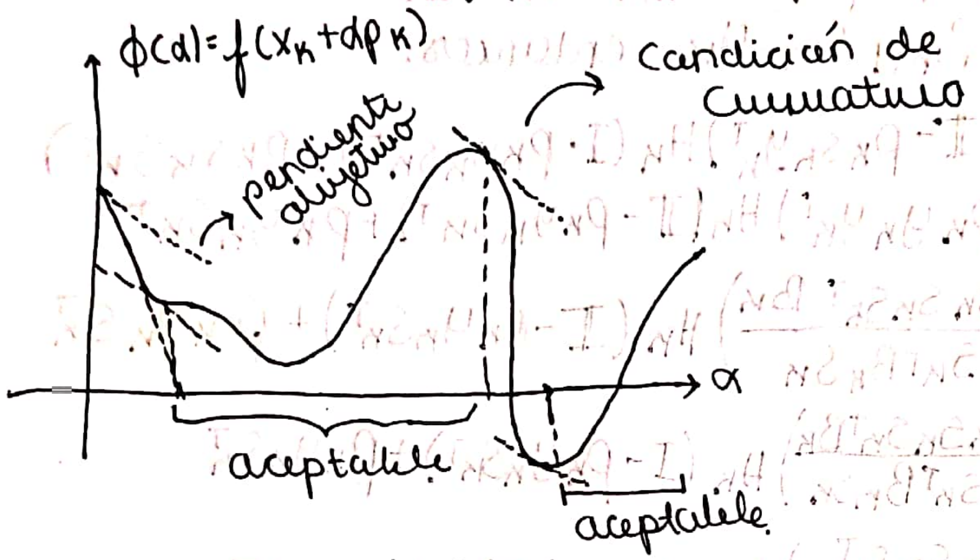
Scanned with CamScanner

2. Quasi-Newton.

2.1. Muestre que la segunda condición fuerte de Wolfe implica la condición de curvatura

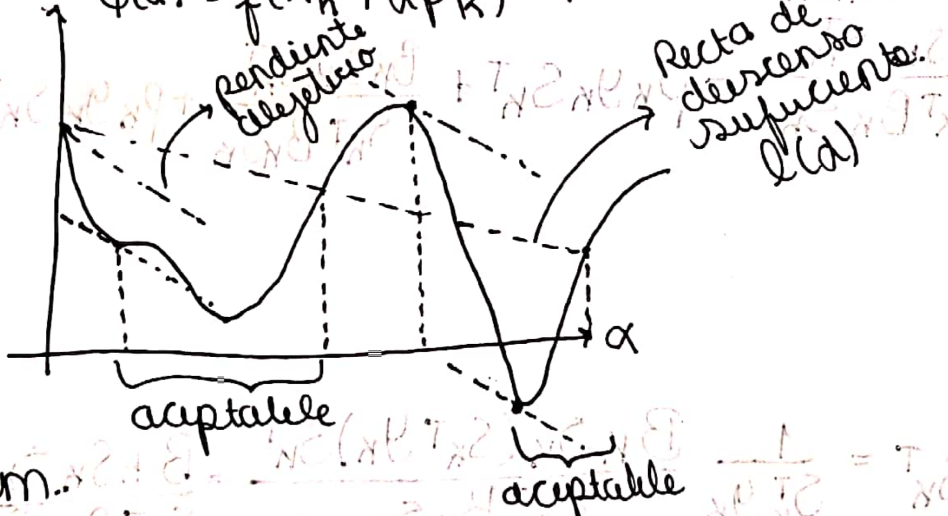
$$s_k^T y_k > 0$$

(Borrador de dibujos.)



condiciones de Wolfe

$\phi(\alpha) = f(x_k+\alpha p_k)$



Dem.

Tenemos que la segunda condición fuerte de Wolfe es:

$$|\nabla f(x_k+\alpha_k p_k)^T p_k| \leq c_2 |\nabla f(x_k)^T p_k|$$

$$\Rightarrow \nabla f(x_k+\alpha_k p_k)^T p_k \geq -c_2 |\nabla f(x_k)^T p_k| = c_2 \nabla f(x_k)^T p_k$$

si p_k es la dirección de descenso tenemos:

$$\nabla f(x_k+\alpha_k p_k)^T p_k - \nabla f(x_k)^T p_k = (c_2-1)\nabla f(x_k)^T p_k > 0$$

Porque tenemos $c_2<1$, si mult. por α_k ambas ladas, tenemos que $s_k = \alpha_k p_k$ y $y_k = \nabla f(x_k + \alpha_k p_k) - \nabla f(x_k)$ ■

2.2. Verifique que B_{k+1} y H_{k+1} son inversas la una de la otra.

Dem.

Tenemos que probar que $B_{k+1} H_{k+1} = I$

Notemos que $B_{k+1} s_k = y_k$ entonces:

$$
\begin{aligned}
B_{k+1} H_{k+1} &= B_{k+1}\left((I - \rho_k s_k y_k^T) H_k (I - \rho_k y_k s_k^T) + \rho_k s_k s_k^T\right) \\
&= (B_{k+1} - \rho_k y_k y_k^T) H_k (I - \rho_k y_k s_k^T) + \rho_k y_k s_k^T \\
&= \left(B_k - \frac{B_k s_k s_k^T B_k}{s_k^T B_k s_k}\right) H_k (I - \rho_k y_k s_k^T) + \rho_k y_k s_k^T \\
&= \left(B_k - \frac{B_k s_k s_k^T B_k}{s_k^T B_k s_k}\right) H_k (I - \rho_k y_k s_k^T) + \rho_k y_k s_k^T \\
&= \left(I - \frac{B_k s_k s_k^T}{s_k^T B_k s_k}\right)(I - \rho_k y_k s_k^T) + \rho_k y_k s_k^T \\
&= I - \frac{B_k s_k s_k^T}{s_k^T B_k s_k} - \rho_k y_k s_k^T + \frac{B_k s_k s_k^T}{s_k^T B_k s_k} + \rho_k y_k s_k^T \\
&= I \quad ■
\end{aligned}
$$

Obs.

$$
\rho_k \frac{B_k s_k s_k^T}{s_k^T B_k s_k} y_k s_k^T = \frac{1}{s_k^T y_k} \frac{B_k s_k (s_k^T y_k) s_k^T}{s_k^T B_k s_k} = \frac{B_k s_k s_k^T}{s_k^T B_k s_k}.
$$

Scanned with CamScanner