lehrstuhl für programmiersysteme
Prof. Dr. B. Steffen

technische universität dortmund

Markus Frohme – Dawid Kopetzki – Oliver Rüthing – Philip Zweihoff

Übungen zur Vorlesung

Mathematik für Informatik 1

Wintersemester 2016/17

Übungsblatt 11

Für die Abgabe der Bearbeitungen stehen den Übungsgruppen Briefkästen im Verbindungsflur Erdgeschoss OH 14 - OH 12 zu zur Verfügung.
Die den einzelnen Übungsgruppen zugeteilten Briefkästen sind durch die Gruppennummer gekennzeichnet. Sie sind ferner mit dem Namen der Veranstaltung sowie Zeit und Ort der Übung kenntlich gemacht.

Bitte werfen Sie Ihre Bearbeitungen in den Ihrer Übungsgruppe zugeteilten Briefkasten bis zur unten aufgeführten Abgabefrist ein!

Schreiben Sie unbedingt immer Ihren vollständigen Namen, Ihre Matrikelnummer und Ihre Gruppennummer auf Ihre Abgaben!

Abgabefrist: 27.01.2017, 14:00 Uhr

Aufgabe 11.1 *Linearkombination und lineare Abhängigkeit* (1+1+2 Punkte)

1. Gegeben sind die Vektoren $\vec{v}_1 = (3, 4, 5)$, $\vec{v}_2 = (-3, 4, 5)$, $\vec{v}_3 = (3, 4, -5)$ und $\vec{u} = (1, 1, 1)$ des Vektorraums $\mathbb{R}^3$. Stellen Sie $\vec{u}$ als Linearkombination der Vektoren $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ und $\vec{v}_3$ dar.
2. Sei $(V, +, \cdot)$ ein Vektorraum. $\vec{u}$, $\vec{v}$ und $\vec{w}$ seien beliebige Vektoren in V. Zeigen Sie:

   Die Vektoren $\vec{u} - \vec{v}$, $\vec{v} - \vec{w}$ und $\vec{w} - \vec{u}$ sind linear abhängig.

3. Gegeben sind die Vektoren $\vec{v}_1 = (1, 1, 1, 1)$, $\vec{v}_2 = (0, 2, -3, 0)$, $\vec{v}_3 = (1, 2, -1, 0)$ und $\vec{v}_4 = (1, 2, 2, -1)$ des Vektorraums $\mathbb{R}^4$. Zeigen Sie, dass die Vektoren $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, $\vec{v}_3$ und $\vec{v}_4$ linear unabhängig sind.

Aufgabe 11.2 *Untervektorraum und Dimensionssatz* (2+2 Punkte)

1. Zeigen Sie, dass $V_1 = \left(\left\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 = x_2 = x_3 = x_4\right\}, +, \cdot\right)$ und $V_2 = \left(\left\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\right\}, +, \cdot\right)$ Untervektorräume des $\mathbb{R}^4$ sind.
2. Bestimmen Sie $\dim V_1$, $\dim V_2$, $\dim (V_1 \cap V_2)$ und $\dim (V_1 + V_2)$.

Aufgabe 11.3 *Basis eines Erzeugendensystems* (4 Punkte)

1. Gegeben seien die folgenden Vektoren des $\mathbb{R}^5$:

$$\begin{aligned}\vec{v}_1 &= (4, 1, 1, 0, -2)\\ \vec{v}_2 &= (0, 1, 4, -1, 2)\\ \vec{v}_3 &= (4, 3, 9, -2, 2)\\ \vec{v}_4 &= (1, 2, 3, 4, 5)\\ \vec{v}_5 &= (0, -2, -8, 2, -4)\,.\end{aligned}$$

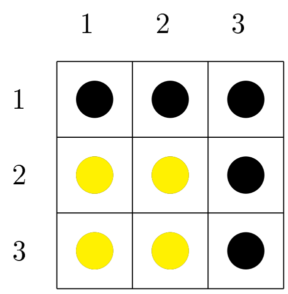
   Bestimmen Sie eine Basis für $\langle\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4, \vec{v}_5\}\rangle$.

Aufgabe 11.4 *Lights out* (Bonusaufgabe: 4 Punkte)
In dieser Aufgabe greifen wir die Übungsaufgabe 0.3 des ersten Präsenzblattes noch einmal auf.

In einem Spielfeld sind 9 Schalter in Form eines 3×3-Gitters angeordnet. Durch Drücken eines Schalters kann dieser ein- bzw. ausgeschaltet werden, wobei nach jedem Drücken der Zustand wechselt. Im eingeschalteten Zustand leuchtet der Schalter gelb auf, im ausgeschalteten Zustand ist der Schalter schwarz. Durch das Drücken eines Schalters wechselt aber nicht nur der gedrückte Schalter seinen Zustand, sondern auch alle direkt angrenzenden Schalter, das sind diejenigen Schalter, die oben, unten, links oder rechts am gedrückten Schalter anliegen.
Man überlegt sich leicht:

- Wird ein Schalter eine gerade Anzahl oft gedrückt, so hat dies keine Auswirkungen (ist also genau so, als hätte man den Schalter nicht gedrückt).
- Der Zustand eines Schalters hängt nur davon ab, wie oft er und seine anliegenden Nachbarn gedrückt worden sind. Die Reihenfolge, in der die Schalter gedrückt werden, spielt keine Rolle.

Gegeben sei nun die folgende Ausgangssituation:



Die Problemstellung kann dann als ein lineares Gleichungssystem über dem Körper $\mathbb{Z}_2$ formuliert werden. Das Drücken eines Schalters $s_{i,j}$ wird über eine Variable $x_{i,j}$ repräsentiert. Leuchtet der Schalter auf, so ist sein Wert 1, ansonsten 0. In unserem Beispiel hat der Schalter $s_{1,1}$ (der Schalter in der 1. Zeile und der 1. Spalte) den Wert 0, da er nicht leuchtet. Sein Wert hängt von den Schaltern $s_{1,1}$, $s_{1,2}$ und $s_{2,1}$ ab, so dass gelten muss

$$x_{1,1} \ +_2 \ x_{1,2} \ +_2 \ x_{2,1} = 0.$$

Für den Schalter $s_{2,2}$ in der 2. Zeile und 2. Spalte muss gelten

$$x_{1,2} \ +_2 \ x_{2,1} \ +_2 \ x_{2,2} \ +_2 \ x_{2,3} \ +_2 \ x_{3,2} = 1,$$

da sein Wert auch vom Drücken der anliegenden Schalter $s_{1,2}$, $s_{2,1}$, $s_{2,3}$ und $s_{3,2}$ abhängt. Stellt man diese Gleichungen für alle Schalter auf, so erhält man ein lineares Gleichungssystem (über $\mathbb{Z}_2$), das mit dem Gauß'schen Eliminationsverfahren gelöst werden kann. Finden Sie eine Reihenfolge, mit der Schalter zu drücken sind, so dass am Ende kein Schalter mehr aufleuchtet.