MafI 1 UB07

March 21, 2017

7.1 Strukturtafeln und Gruppen

7.1.1

$+_6$	0	1	2	3	4	5
0	0	1	2	3	4	5
1	1	2	3	4	5	0
2	2	3	4	5	0	1
3	3	4	5	0	1	2
4	4	5	0	1	2	3
5	5	0	1	2	3	4

$*_6$	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5
2	0	2	4	0	2	4
3	0	3	0	3	0	3
4	0	4	2	0	4	2
5	0	5	4	3	2	1

7.1.2

z.z.:
$(\mathbb{Z}_6, +_6)$ soll Gruppe sein

Assoziativitaet
offensichtlich, da normale Addition assoziativ ist.

neutr. Element:
offensichtlich 0, da 0 das neutr. Element der normalen Addition ist.

inv. Element:
$\forall x \in \mathbb{Z}_6 \exists x' \in \mathbb{Z}_6 . x +_6 x' = 0 \Rightarrow x' = 6 - x$
inv. Element ex. auch, damit ist $(\mathbb{Z}_6, +_6)$ eine Gruppe

7.2 Permutationen, Zyklenschreibweise

7.2.1

$\sigma_1 = (123456)$
$\sigma_2 = (13652)(4)$
$\sigma_3 = (126)(354)$

7.2.2

$$\sigma_1 \circ \sigma_2 \circ \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 6 & 3 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix} = (1264)(3)(5)$$

7.3 Gruppe und Gruppenhomorphismus

7.3.1

$(a \oplus b)^{-1} = e \oplus (a \oplus b)^{-1} = e \oplus b \oplus b^{-1} \oplus (a \oplus b)^{-1} = a \oplus a^{-1} \oplus b \oplus b^{-1} \oplus (a \oplus b)^{-1} = a^{-1} \oplus b^{-1}$

7.3.2

"$\Rightarrow$" (h ist injektiv $\Rightarrow Kern(h) = \{e\}$):
$\Rightarrow$jedes Element hat max. ein Urbild
$\Rightarrow Kern(h)$ist max. einelementig

$h(e) \oplus' h(e) = h(e \oplus e) = h(e) = h(e) \oplus e'$
$h(e) = e'$

"$\Leftarrow$" ($Kern(h) = \{e\} \Rightarrow$ h ist injektiv):
Kontrraposition:
h nicht injektiv $\Rightarrow Kern(h) \neq \{e\}$

z.z.:
$\exists a \in G.h(a) = e'$
somit $a \in Kern(h) \wedge a \neq e$

sei h nicht injektiv:
$\exists x, x' \in G.x \neq x'.h(x) = h(x')$

So ist:
$e' = h(x) \oplus' h(x')^{-1} = h(x) \oplus' h(x')^{-1} = h(x) \oplus' h(x'^{-1})$
$= h(x \oplus x'^{-1}) \leftarrow$ (da x $\neq$ x')
$\neq e' \lightning$

7.4 Untergruppenverband

$V = \{V | V \subseteq G, V \cup G\}$
$\leq \subseteq V \times V$

$A \leq B \Leftrightarrow A \cup G$ von $B \Leftrightarrow A \subseteq B$

(i)
$z.z.:$
$< V, \leq >$ ist Verband

partielle Ordnung:
ist reflexiv, da $A \leq A$ durch $\forall A \in V.A = A$ gilt

antisymmetrisch:
$A, B \in V.A \leq B \wedge B \leq A$
$\Rightarrow A \subseteq B \wedge B \subseteq A$
$\Rightarrow A = B$

transitiv:
$A, B, C \in V.A \leq B \wedge B \leq C$
$\Rightarrow A \subseteq B \wedge B \subseteq C$
$\Rightarrow A \subseteq C \Rightarrow A \leq C$

(ii)
z.z.:
$< V, \leq >$ ist vollstaendiger Verband

$U \subseteq V$

$inf(U) = \bigcap_{X \in U} X$
$\forall X \in U. \bigcap_{X \in U} X \subseteq X$ damit untere Schranke

$\forall X \subseteq U \exists K.K \subseteq X$
$\Rightarrow K \subseteq \bigcap_{X \in U} X$

Damit $inf(U) \in V$ muss $inf(U) \cup G$ von G sein.

abgeshlossen:
$a, b \in inf(U)$
$\Rightarrow a, b \in \bigcap_{X \in U} X$
$\Rightarrow a, b \in X \forall X \in U \Rightarrow a \oplus b \in X \forall X \in U$
$\Rightarrow a, b \in inf(U)$

neutr. Element:

$e \in X \forall X \in U \Rightarrow e \in inf(U)$
inv. Element:
sei $a \in inf(U) \Rightarrow a \in X \forall X \in U \Rightarrow a^{-1} \in X \forall X \in U$
$\Rightarrow a^{-1} \in inf(U)$

damit ist $< V, \leq >$ ein vollstaendiger Verband