technische universität dortmund

Thomas Schwentick
Gaetano Geck   Martin Schuster

Lehrstuhl 1
Logik in der Informatik

WS 2016/17   Übungsblatt 4   5.12.2016

Aufgabe 4.1 [Quizfragen] **6 Punkte**

Beurteilen Sie die Richtigkeit folgender Aussagen. Begründen Sie Ihr Urteil stichhaltig in jeweils ein bis zwei Sätzen.

a) Es gibt nur endlich viele paarweise *nicht* äquivalente aussagenlogische Formeln $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ mit aussagenlogischen Variablen A_1, A_2, A_3.

b) Es gibt nur endlich viele paarweise *nicht* äquivalente modallogische Formeln $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ mit aussagenlogischen Variablen A_1, A_2, A_3.

c) Ist φ eine unerfüllbare modallogische Formel, so ist $\psi = \neg\Diamond\varphi$ eine Tautologie.

d) Die prädikatenlogische Formel $\forall x \exists y R(x,y) \rightarrow \exists y \forall x R(x,y)$ ist eine Tautologie.

Lösungsvorschlag:

a) **Richtig.** Nicht äquivalente Formeln unterscheiden sich in der Ergebnisspalte der Wahrheitstabelle. Bei drei Variablen besitzt die Wahrheitstabelle $2^3 = 8$ Zeilen, wobei jeweils der Wert wahr oder falsch angenommen werden kann. Es gibt also nur $2^{2^3} = 2^8 = 256$, und damit endlich viele, verschiedene Wahrheitstabellen (nicht äquivalente Formeln).

b) **Falsch.** Es gibt unendlich viele nicht äquivalente modallogische Formeln, etwa $\{\varphi_i \mid i \in \mathbb{N}_0\}$ mit $\varphi_i = \underbrace{\Diamond \dots \Diamond}_{i\text{-mal}}(A_1 \vee \neg A_1)$ für jedes $i \in \mathbb{N}_0$. Für die Kripke-Strukturen

$$\mathcal{K}_i = \Big(\{1, \dots, i+1\}, \{(1,2), (2,3), \dots, (i, i+1)\}, P\Big)$$

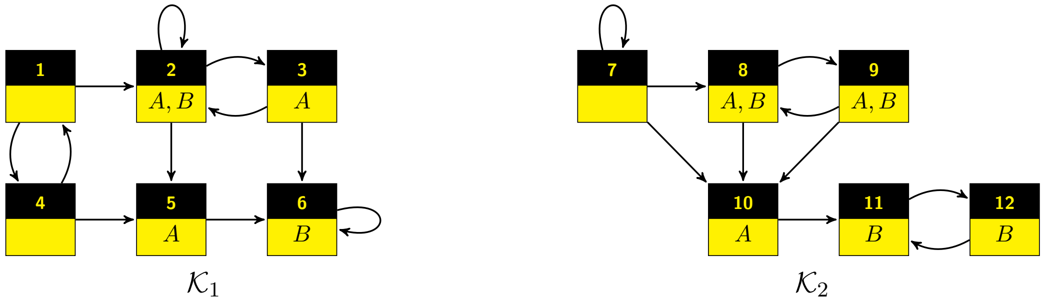
mit $P(s) = \emptyset$ für jedes $s \in \{1, \dots, i+1\}$ und jedes $i \in \mathbb{N}_0$ gilt dann $(\mathcal{K}_i, 1) \models \varphi_i$, aber $(\mathcal{K}_i, 1) \not\models \varphi_{i+1}$ und mithin $\varphi_i \not\equiv \varphi_{i+1}$.

c) **Richtig.** Da φ unerfüllbar ist, gilt diese Formel in keiner Welt irgendeiner Kripkestruktur. Deshalb ist es in keiner Welt irgendeiner Kripkestruktur möglich, in eine Welt überzugehen, in der φ gilt. Demnach ist $\Diamond\varphi$ unerfüllbar und mithin $\neg\Diamond\varphi$ eine Tautologie.

d) **Falsch.** Ein Gegenbeispiel bildet die Struktur $\mathcal{A} = \big(\{0,1\}, R^{\mathcal{A}}\big)$ mit $R^{\mathcal{A}} = \{(0,0), (1,1)\}$. Es gilt $\mathcal{A} \models \forall x \exists y R(x,y)$, aber $\mathcal{A} \not\models \exists y \forall x R(x,y)$.

Aufgabe 4.2 [Bisimulation und Abwicklung] **6 Punkte**

Gegeben seien die folgenden Kripke-Strukturen:



a) Wenden Sie den Algorithmus aus der Vorlesung zur Bestimmung aller Paare (s, t) mit $(\mathcal{K}_1, s) \sim (\mathcal{K}_2, t)$ an. **(2 Punkte)**

b) Geben Sie eine Formel φ an, sodass $(\mathcal{K}_1, 2) \models \varphi$ und $(\mathcal{K}_2, 8) \not\models \varphi$ gelten. **(2 Punkte)**

c) Geben Sie die Abwicklung von $(\mathcal{K}_1, 2)$ für die ersten drei Ebenen an (Ebene 1 enthält die Wurzel). **(2 Punkte)**

Lösungsvorschlag:

a) Initial ergibt sich die Relation S:

Welt s_1 in $\mathcal{K}_1$	1	2	2	3	4	5	6	6
Welt s_2 in $\mathcal{K}_2$	7	8	9	10	7	10	11	12

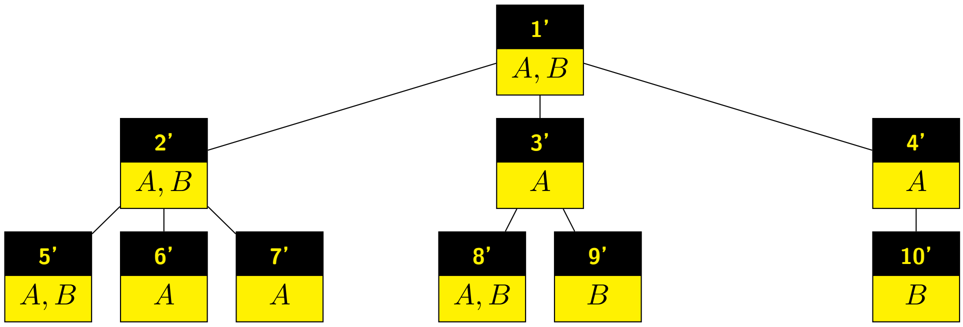
In den anschließenden Iterationen werden folgende Paare entfernt:

1. Paar $(1, 7)$ wegen $(7, 10) \in E_2$ (zweites If);
2. Paar $(3, 10)$ wegen $(3, 2) \in E_1$ (erstes If);
3. Paar $(4, 7)$ wegen $(7, 10) \in E_2$ (zweites If);
4. Paar $(2, 8)$ wegen $(2, 3) \in E_1$ (erstes If);
5. Paar $(2, 9)$ wegen $(2, 3) \in E_1$ (erstes If);

sodass sich zuletzt die Relation $S = \{(5, 10), (6, 11), (6, 12)\}$ ergibt.

b) Es sei $\varphi = \Diamond\big(\neg B \wedge \Diamond(A \wedge B)\big)$. Dann ist $(\mathcal{K}_1, 2) \models \varphi$, da von Welt 2 nach Welt 3 übergegangen werden kann (wo $\neg B$ gilt) und von dort aus wieder zurück nach Welt 2 gewechselt werden kann (wo $A \wedge B$ gilt). Hingegen ist $(\mathcal{K}_2, 8) \not\models \varphi$, da zur Erfüllung von $\neg B$ in Welt 10 gewechselt werden müsste, von dort aus aber keine Welt erreicht werden kann, in der $A \wedge B$ gilt.

c) Die Abwicklung für die ersten drei Ebenen ist



Aufgabe 4.3 [Syntax der Prädikatenlogik] **3 Punkte**

a) Geben Sie alle Terme der Formel $R\Big(f\big(g(c), h(d)\big), x\Big) \wedge R\Big(y, f\big(g(x), f(c, d)\big)\Big)$ an. Zeichnen Sie dabei die Grundterme aus. **(1 Punkt)**

b) Geben Sie für jedes Vorkommen jeder Variable in $\forall x\big(S(x, y) \wedge \exists y \forall z R(x, y, z)\big) \wedge \forall y T(x, y, z')$ an, ob es frei oder gebunden ist. Welches sind die freien Variablen der Formel? **(1 Punkt)**

c) Entscheiden Sie für jede der folgenden Zeichenketten, ob es sich um eine prädikatenlogische Formel handelt oder nicht. Falls es sich nicht um eine Formel handelt, warum nicht (handelt es sich um einen prädikatenlogischen Term oder keines von beiden)?

1. $\exists z R\big(x, f(y)\big)$ 2. $R(S(y), x)$ 3. $f(y, y, z)$ 4. $R\Big(x, h\big(x, h(y)\big)\Big)$

(1 Punkt)

Lösungsvorschlag:

a)
- **Grundterme:** c, d, $g(c)$, $h(d)$, $f(g(c), h(d))$, $f(c, d)$.
- **Terme:** alle Grundterme und x, y, $g(x)$, $f(g(x), f(c, d))$.

b) Die Formel enthält die freien Variablen x, y, z':

$$\psi(x, y, z') = \forall x\big(S(x, y) \wedge \forall y \exists z R(x, y, z)\big) \wedge \forall y T(x, y, z')$$

- **freie Variablen:**
  - x, da frei in $\forall y T(x, y, z')$;
  - y, da frei in $S(x, y)$;
  - z', da frei in $\forall y T(x, y, z')$.
- **gebundene Variablenvorkommen:**
  - x in $S(x, y)$, gebunden durch $\forall x\big(S(x, y) \wedge \dots\big)$;
  - x in $\forall y \exists z R(x, y, z)$, gebunden durch $\forall x\big(\dots \wedge \forall y \exists z R(x, y, z)\big)$;
  - y in $\exists z R(x, y, z)$, gebunden durch $\forall y \exists z R(x, y, z)$;
  - z in $R(x, y, z)$, gebunden durch $\exists z R(x, y, z)$;
  - y in $T(x, y, z')$, gebunden durch $\forall y T(x, y, z')$.

c) 1. **Formel.** Schon $R\big(x, f(y)\big)$ ist eine Formel und $\exists z R\big(x, f(y)\big)$ demnach auch.
2. **Keine Formel, kein Term.** Relationssymbole können nicht verschachtelt werden: $S(y)$ ist kein Term, sondern eine Formel.
3. **Keine Formel, aber ein Term.**
4. **Keine Formel, kein Term.** Dasselbe Funktionssymbol h tritt mit unterschiedlicher Stelligkeit auf.

Aufgabe 4.4 [Prädikatenlogische Formeln interpretieren und erstellen] **5 Punkte**

Zwei Bitstrings v und w der Länge $n+1$ können durch eine Struktur

$$\mathcal{A}_{v,w} = \big(\{0,\dots,n\}, \leq, V_0, V_1, W_0, W_1\big)$$

für eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}_0$ beschrieben werden. Dabei sei $\leq$ die übliche lineare Ordnung auf den Positionen $\{0,\dots,n\}$. Ferner kodieren die Mengen V_0, V_1 bzw. W_0, W_1 die Bitwerte von v und w an den Positionen. (Analog zur Repräsentation einzelner Zeichenketten – wie im Folienskript beschrieben – gilt: Für jede Position $i \in \{0,\dots,n\}$ ist $i \in V_0$, falls das i-te Bit von v den Wert 0 hat, und $i \in V_1$, falls das i-te Bit von u den Wert 1 hat. Insbesondere gilt für jede Position i entweder $i \in V_0$ oder $i \in V_1$. Analog kodieren W_0 und W_1 den Bitstring w.)
Beispielsweise beschreibt die Struktur $\big(\{0,1,2\}, \leq, V_0, V_1, W_0, W_1\big)$ mit den Mengen $V_0 = \{0\}$, $V_1 = \{1,2\}$ und $W_0 = \{0,2\}$, $W_1 = \{1\}$ die Wörter $v = 011$ und $w = 010$.

a) Beschreiben Sie, welche Eigenschaften die Bitstrings v und w besitzen, wenn $\mathcal{A}_{v,w}$ die Formel φ_1 bzw. die Formel φ_2 erfüllt. Beschreiben Sie insbesondere den Zusammenhang zwischen den von Ihnen genannten Eigenschaften und den Teilformeln. Geben Sie zudem zwei konkrete Bitstrings v, w der Länge 5 an, welche die Eigenschaft besitzen. **(3 Punkte)**

(i) $\varphi_1 = \exists x\Big[\forall y(x \leq y) \wedge V_0(x)\Big] \wedge \forall x\Big[V_0(x) \leftrightarrow W_1(x)\Big]$ **[1,5 Punkte]**

(ii) $\varphi_2 = \forall x \forall y\Big[\big(V_0(x) \wedge V_1(y)\big) \rightarrow (x \leq y)\Big]$ **[1,5 Punkte]**

b) Geben Sie eine Formel an, die genau dann von $\mathcal{A}_{v,w}$ erfüllt wird, wenn die Bitstrings v und w sich in genau einem Bit unterscheiden. Begründen Sie die Korrektheit Ihrer Formel. **(2 Punkte)**

Lösungsvorschlag:

a) **(i)** Der Bitstring v muss mit 0 beginnen: Teilformel $\exists x[\forall y(x \leq y) \wedge V_0(x)]$ kann nur erfüllt werden, wenn $\exists x[\forall y(x \leq y)]$ erfüllt wird. Es gilt $0 \leq 0, 1, \dots, n$, jedoch $i \not\leq 0$ für jedes $i > 0$. Entsprechend gilt $\forall y(x \leq y)$ nur, wenn x die Position i bezeichnet, und wegen $V_0(x)$ muss dann $0 \in V_0$ gelten.

Um die zweite Teilformel $\forall x[V_0(x) \leftrightarrow W_1(x)]$ zu erfüllen, muss der Bitstring w der bitweisen Invertierung von v entsprechen: Bitstring v hat an Position i genau dann den Bitwert 0, wenn Bitstring w den Bitwert 1 hat.

Beispiel-Bitstrings sind $v = 01100$ und $w = 10011$.

(ii) Bitstring w ist beliebig, da sich Formel φ_2 auf die Mengen W_0, W_1 nicht bezieht. Bitstring v besteht aus einer beliebigen Anzahl von 0-Bits, gefolgt von einer beliebigen Anzahl 1-Bits, also von der Form $0 \dots 0$ oder von der Form $0 \dots 01 \dots 1$ oder von der Form $1 \dots 1$.

Um die Formel zu erfüllen, muss für alle Positionen i, j mit 0-Bit an in i und 1-Bit in j gelten, dass $i \leq j$ ist. Aufgrund der Disjunktheit von V_0 und V_1 gilt dann sogar $i < j$.

Beispiel-Bitstrings sind $v = 00011$ und $w = 10101$.

b) Eine Formel, die genau dann von $\mathcal{A}_{v,w}$ erfüllt wird, wenn sich v und w in genau einem Bit unterscheiden, ist

$$\psi = \exists x \Big[\underbrace{\big(V_0(x) \leftrightarrow W_1(x)\big)}_{\psi_1} \wedge \underbrace{\forall y \big((V_0(y) \leftrightarrow W_1(y)) \rightarrow (x \leq y \wedge y \leq x)\big)}_{\psi_2} \Big].$$

Die existentiell quantifizierte Variable x soll der Position i entsprechen, in der sich v und w unterscheiden. Dieser Unterschied ist zur Erfüllung der Teilformel ψ_1 nötig: In v steht genau dann ein 0-Bit an Position i, wenn in w ein 1-Bit an Position i steht. Teilformel ψ_2 fordert darüber hinaus, dass für jede Position j, quantifiziert durch die Variable y, unterschiedliche Bitwerte in v und w bedingen, dass $i \leq j$ und $j \leq i$, mithin $j = i$ ist, Unterschiede also nur an Position i auftreten.