lehrstuhl für programmiersysteme
Prof. Dr. B. Steffen

technische universität dortmund

Markus Frohme – Dawid Kopetzki – Oliver Rüthing – Philip Zweihoff

Übungen zur Vorlesung

Mathematik für Informatik 1

Wintersemester 2016/17

Übungsblatt 8

Für die Abgabe der Bearbeitungen stehen den Übungsgruppen Briefkästen im Verbindungsflur Erdgeschoss OH 14 - OH 12 zu zur Verfügung.
Die den einzelnen Übungsgruppen zugeteilten Briefkästen sind durch die Gruppennummer gekennzeichnet. Sie sind ferner mit dem Namen der Veranstaltung sowie Zeit und Ort der Übung kenntlich gemacht.

Bitte werfen Sie Ihre Bearbeitungen in den Ihrer Übungsgruppe zugeteilten Briefkasten bis zur unten aufgeführten Abgabefrist ein!

Schreiben Sie unbedingt immer Ihren vollständigen Namen, Ihre Matrikelnummer und Ihre Gruppennummer auf Ihre Abgaben!

Abgabefrist: 16.12.2016, 14:00 Uhr

Aufgabe 8.1 *Gruppen und Strukturtafeln* (1+3 Punkte)

1. Sei $\langle G, \oplus \rangle$ eine endliche Gruppe. Beweisen Sie, dass in der Strukturtafel von $\langle G, \oplus \rangle$ jedes Element von G in jeder Zeile und jeder Spalte genau einmal vorkommt.

2. Gegeben sei eine Gruppe $\langle \{a, b, c, d, e, f\}, \oplus \rangle$. Ergänzen Sie die folgende Strukturtafel:

$\oplus$	a	b	c	d	e	f
a			e	b		
b	e	f				
c				a		
d	c		b			
e		c			d	
f						

Erläutern und begründen Sie kurz Ihre Vorgehensweise. Sie dürfen dabei (unbewiesen) die Aussage aus 1. verwenden.

Aufgabe 8.2 *Gruppen und Gruppenhomomorphismen* (2+2 Punkte)
Sei $\langle G, \oplus \rangle$ eine Gruppe. Für ein beliebiges $a \in G$ ist $\lambda_a : G \to G$, die sogenannte *Linkstranslation* um a, definiert durch:

$$\lambda_a(x) \ =_{df} \ a \oplus x.$$

1. Zeigen Sie, dass die Menge der Linkstranslationen

   $$T \ =_{df} \ \{\lambda_a \mid a \in G\}$$

   mit der üblichen Funktionskomposition, also $\langle T, \circ \rangle$, eine Gruppe ist.

2. Zeigen Sie, dass die Abbildung $h : \langle G, \oplus \rangle \to \langle T, \circ \rangle$ mit $h(a) \ =_{df} \ \lambda_a$ ein injektiver Gruppenhomomorhismus ist.

Aufgabe 8.3 *Unterring und Nullring* (3+1 Punkte)

1. Sei $\langle A, \oplus, \odot \rangle$ ein Ring und $B \subseteq A$. Zeigen Sie:

   $\langle \{a \in A \mid b \odot a = a \odot b \text{ für alle } b \in B\}, \oplus, \odot \rangle$ ist ein Unterring von $\langle A, \oplus, \odot \rangle$.

   Hinweis: Folgende Aussage dürfen Sie dabei verwenden.
   Für alle $a, b \in A$ gilt: $a \odot (-b) = (-a) \odot b = -(a \odot b)$ und $(-a) \odot (-b) = a \odot b$.

2. Ein Ring, der nur 0 enthält, heißt *Nullring*. Zeigen Sie:

   Ein Ring, in dem $0 = 1$ gilt, ist ein Nullring.

Aufgabe 8.4 *Homomorphismen* (Bonusaufgabe: 4 Punkte)
Seien $\langle G, \oplus_G \rangle$, $\langle H, \oplus_H \rangle$ Gruppen und $\varphi : \langle G, \oplus_G \rangle \mapsto \langle H, \oplus_H \rangle$ ein Gruppenhomomorphismus. Beweisen Sie: $G/\mathit{Kern}(\varphi)$ ist isomorph zu $\mathit{Bild}(\varphi)$.