lehrstuhl für programmiersysteme
Prof. Dr. B. Steffen

technische universität dortmund

Markus Frohme – Dawid Kopetzki – Oliver Rüthing – Philip Zweihoff

Übungen zur Vorlesung

Mathematik für Informatik 1

Wintersemester 2016/17

Übungsblatt 1

Für die Abgabe der Bearbeitungen stehen den Übungsgruppen Briefkästen im Verbindungsflur Erdgeschoss OH 14 - OH 12 zu zur Verfügung.
Die den einzelnen Übungsgruppen zugeteilten Briefkästen sind durch die Gruppennummer gekennzeichnet. Sie sind ferner mit dem Namen der Veranstaltung sowie Zeit und Ort der Übung kenntlich gemacht.

Bitte werfen Sie Ihre Bearbeitungen in den Ihrer Übungsgruppe zugeteilten Briefkasten bis zur unten aufgeführten Abgabefrist ein!

Schreiben Sie unbedingt immer Ihren vollständigen Namen, Ihre Matrikelnummer und Ihre Gruppennummer auf Ihre Abgaben!

Abgabefrist: 28.10.2016, 14:00 Uhr

Aufgabe 1.1 *Aussagenlogik* (2+2 Punkte)
Sie sind der Gewinner einer Quizshow. Vor Ihnen befinden sich nun drei Boxen. Eine der Boxen enthält einen stattlichen Goldbarren, die anderen beiden sind leer. Sie müssen sich nun für eine der Boxen entscheiden. An jeder Box ist ein Hinweis angebracht, welcher lautet:

Box 1: Diese Box ist leer

Box 2: Das Gold ist nicht in dieser Box

Box 3: Das Gold ist in Box 2

Der Quizmaster teilt Ihnen nun zum Abschluss mit, dass nur ein Hinweis richtig ist, die anderen beiden falsch. In welcher Box befindet sich der Goldbarren?

1. Modellieren Sie das Problem mittels aussagenlogischer Formeln. Verwenden Sie dazu die elementaren Aussagen $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ und $\mathcal{B}_3$, die genau dann den Wert w (wahr) haben, wenn die entsprechende Box den Goldbarren enthält und f (falsch) sonst. Modellieren Sie die Tatbestände möglichst direkt und verzichten Sie auf weitergehende Vereinfachungen der Formeln.

2. Finden Sie mit Hilfe einer Wahrheitstafel heraus, in welcher Box sich der Goldbarren befindet.

Aufgabe 1.2 *Logische Umformungen* (1+1+2 Punkte)

In Lemma 2.1 des Buches wurde gezeigt, dass die folgenden Äquivalenzen für beliebige Aussagen $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ und $\mathcal{C}$ gelten:

$$\begin{aligned}\mathcal{A} \wedge \mathcal{B} &\equiv \mathcal{B} \wedge \mathcal{A} \\ \mathcal{A} \vee \mathcal{B} &\equiv \mathcal{B} \vee \mathcal{A}\end{aligned} \tag{Kommutativität}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{A} \wedge (\mathcal{B} \wedge \mathcal{C}) &\equiv (\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}) \wedge \mathcal{C} \\ \mathcal{A} \vee (\mathcal{B} \vee \mathcal{C}) &\equiv (\mathcal{A} \vee \mathcal{B}) \vee \mathcal{C}\end{aligned} \tag{Assoziativität}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{A} \wedge (\mathcal{A} \vee \mathcal{B}) &\equiv \mathcal{A} \\ \mathcal{A} \vee (\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}) &\equiv \mathcal{A}\end{aligned} \tag{Absorption}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{A} \wedge (\mathcal{B} \vee \mathcal{C}) &\equiv (\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}) \vee (\mathcal{A} \wedge \mathcal{C}) \\ \mathcal{A} \vee (\mathcal{B} \wedge \mathcal{C}) &\equiv (\mathcal{A} \vee \mathcal{B}) \wedge (\mathcal{A} \vee \mathcal{C})\end{aligned} \tag{Distributivität}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{A} \wedge \neg\mathcal{A} &\equiv \mathsf{F} \\ \mathcal{A} \vee \neg\mathcal{A} &\equiv \mathsf{T}\end{aligned} \tag{Negation}$$

Zeigen Sie unter ausschließlicher Verwendung dieser Regeln über semantische Äquivalenz:

1. Neutralität:
   $$\begin{aligned}\mathsf{T} \wedge \mathcal{A} &\equiv \mathcal{A} \\ \mathsf{F} \vee \mathcal{A} &\equiv \mathcal{A}\end{aligned}$$
2. Idempotenz:
   $$\begin{aligned}\mathcal{A} \wedge \mathcal{A} &\equiv \mathcal{A} \\ \mathcal{A} \vee \mathcal{A} &\equiv \mathcal{A}\end{aligned}$$
3. Doppelnegation:
   $$\neg\neg\mathcal{A} \equiv \mathcal{A}$$

Aufgabe 1.3 *Mengen und Mengenäquivalenzen* (2+2 Punkte)

A, B, D und E seien Teilmengen einer gemeinsamen Grundmenge M.

1. Zeigen Sie unter ausschließlicher Verwendung der Mengengesetze, die in Lemma 2.3 des Buches aufgeführt sind, die beiden folgenden Mengengleichungen.
   a) $\left(A^{\mathsf{C}} \cup B^{\mathsf{C}}\right)^{\mathsf{C}} \cup \left(A^{\mathsf{C}} \cup B\right)^{\mathsf{C}} = A.$
   b) $((A \cup B)^{\mathsf{C}} \cap E)^{\mathsf{C}} \cup (D \cap A) = A \cup B \cup E^{\mathsf{C}}.$
2. Zeigen Sie: $A = B$ genau dann, wenn $\mathfrak{P}(A) = \mathfrak{P}(B)$.
   (Zur Erinnerung: für eine Menge X bezeichnet $\mathfrak{P}(X)$ die Potenzmenge von X.)

Aufgabe 1.4 *Mengen* (Bonusaufgabe: 2+2 Punkte)

1. Beweisen Sie, dass für alle Mengen A und B gilt:

$$A \cap B \neq \emptyset \;\Rightarrow\; (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \neq A \cup B.$$

2. Beweisen oder widerlegen Sie

$$\mathfrak{P}(A \setminus B) = \mathfrak{P}(A) \setminus \mathfrak{P}(B).$$