MafI 1 UB03

March 15, 2017

3.1 Aequivalenzrealtionen

3.1.1

z.z.: genau dann euklidisch, wenn Aequivalenzrelation

"$\Rightarrow$":
Reflexivitaet ist bereits gegeben

Symmetrie:
$\forall a_1, a_2 \in A.a_1Ra_2 \Rightarrow^! a_2Ra_1 a_1Ra_1(aus\ Reflexivitaet)$

$\forall a_1, a_2 \in A(a_1Ra_2 \land a_1Ra_1) \Rightarrow a_2Ra_1$
$damit\ a_1Ra_2 \land a_1Ra_1 \Rightarrow a_2Ra_1$

Transitivitaet:
$\forall a_1, a_2, a_3 \in A.a_1, a_2, a_3 \in A.a_1Ra_2 \land a_2Ra_3 \Rightarrow^! a_1Ra_3$
$a_2Ra_1(aus\ Symmetrie)$
$\forall a_1, a_2, a_3 \in A.(a_2Ra_1 \land a_2Ra_3) \Rightarrow a_1Ra_3$
$damit\ a_1Ra_2 \land a_2Ra_3 \Rightarrow a_1Ra_3$

"$\Leftarrow$":
$\forall a, b, c \in A.(aRb \land aRc) \Rightarrow^! bRc$

$bRa(aus\ Symmetrie)$
$aus\ Transitivitaet:$
$bRa \land aRc \Rightarrow bRc$
$damit\ aRb \land aRc \Rightarrow bRc$

3.1.2

R ist keine Aequivalenzrealtion, da die Transitivitaet nicht gilt

$\{1, 2\} \cap \{2, 3\} \neq \emptyset$
$\{2, 3\} \cap \{3, 4\} \neq \emptyset$
$aber\ \{1, 2\} \cap \{3, 4\} = \emptyset$

3.2 Aequivalenzrealtionen und Partitionen

3.2.1

$\backsim_R = \{$
$(e,e),(f,d),(c,a),(b,f),$
$(a,a),(b,b),(c,c),(d,d),(f,f), \leftarrow \ Reflexivitaet$
$(d,f),(a,c),(f,b), \leftarrow \ Symmetrie$
$(b,d),(d,b) \leftarrow \ Transitivitaet \ \& \ Symmetrie$
$\}$

3.2.2

$M \backslash \backsim_R$ ist Partition basieredn auf Aequivalenzklassen
$M \backslash \backsim_R = \{\{a,c\},\{b,d,f\},\{e\}\}$
$= \{[a]_{\backsim_R},[b]_{\backsim_R},[e]_{\backsim_R}\}$

3.2.3

$$g(x) = \begin{cases} 1, & x = a \vee x = c \\ 2, & x = b \vee x = d \vee x = f \\ 3, & x = e \end{cases}$$

3.3 Maechtigkeit von Mengen

sei $P_e(\mathbb{N})$ die Menge aller unendlichen Teilmengen von $\mathbb{N}$.
z.z.: $P_e(\mathbb{N})$ abzaehlbar unendlich $\Leftrightarrow P_e(\mathbb{N}) \cong \mathbb{N}$

Es reicht, den Satz von Cantor, Bernstein und Schroeder nachzuweisen.
$P_e(\mathbb{N}) \leqq^! \mathbb{N}, \mathbb{N} \leqq^! P_e(\mathbb{N})$

$P_e(\mathbb{N}) \leqq \mathbb{N}:$
$f : \mathbb{N} \to P_e(\mathbb{N})$
$f(n) := \{n\},\ offensichtlich\ injektiv$

$\mathbb{N} \leqq P_e(\mathbb{N}):$
$g : P_e(\mathbb{N}) \to \mathbb{N}$
$g(X) := \sum_{n \in X} 2^n,\ nicht\ surjektiv$