MafI 1 UB05

March 15, 2017

5.1 induktives Definieren, strukturelle Induktion

5.1.1

$tm(\top) = \{\top\}$
$tm(\bot) = \{\bot\}$
$tm(V) = \{V\}$
$tm(\neg t_1) = \{\neg t1\} \cup tm(t_1)$
$tm(t_1 \wedge t_2) = \{t_1 \wedge t_2\} \cup tm(t_1) \cup tm(t_2)$
$tm(t_1 \vee t_2) = \{t_1 \wedge t_2\} \cup tm(t_1) \cup tm(t_2)$

5.1.2

I.A.:
$t \in \{\top, \bot\} \cup V \subseteq BT$
$|tm(t)| = |\{t\}| = 1 \leq 1 = l(t)$

I.V.:
Die Aussage gelte fuer bel., aber feste $t_1, t_2 \in BT$.

I.S.:
(i)
$|tm(\neg t_1)| = |\{\neg t_1\} \cup tm(t_1)| = |\{\neg t_1, t_1\}| = 2 \leq 2 = 1 + 1 = 1 + l(t_1)$

(ii)
$|tm(t_1 \vee t_2)| = |\{t_1 \vee t_2\} \cup tm(t_1) \cup tm(t_2)| = |\{t_1 \vee t_2, t_1, t_2\}| = 3 \leq 3 = 1+1+1 = 1 + l(t_1) + l(t_2) = l(t_1 \vee t_2)$

(iii)
$|tm(t_1 \wedge t_2)| = |\{t_1 \wedge t_2\} \cup tm(t_1) \cup tm(t_2)| = |\{t_1 \wedge t_2, t_1, t_2\}| = 3 \leq 3 = 1+1+1 = 1 + l(t_1) + l(t_2) = l(t_1 \wedge t_2)$

5.2 vollstaendige Induktion

5.2.1

I.A.:
$n = 0$
$\sum_{k=1}^{0} \frac{1}{k*(k+1)} = 0 = 1 - 1 = 1 - \frac{1}{0+1}$

I.V.:
Die Aussage gelte fuer bel., aber feste $n \in \mathbb{N}$

I.S.:
$z.z.:$
$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k*(k+1)} = 1 - \frac{1}{n+2}$

$n \to n+1$
$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k*(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k*(k+1)} + \frac{1}{(n+1)*(n+2)}$
$=^{I.V.} 1 - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)*(n+2)}$
$= 1 - \frac{1}{(n+1)*(n+2)}(n + 2 - (1))$
$= 1 - \frac{n+1}{(n+1)*(n+2)}$
$= 1 - \frac{1}{n+2}$

5.2.2

I.A.:
n = 0
$\sum_{k=0}^{0} k^3 = 0 = 0 * (0+1)^2 = \frac{1}{4} * 0^2 * (0+1)^2$

I.V.:
Die Aussage gelte fuer bel., aber feste $n \in \mathbb{N}$

I.S.:
$z.z.:$
$\sum_{k=0}^{n+1} k^3 = \frac{1}{4} * (n+1)^2 * (n+2)^2$

$n \to n+1$
$\sum_{k=0}^{n+1} k^3$
$= \sum_{k=0}^{n} k^3 + (n+1)^3$
$=^{I.V.} \frac{1}{4} * n^2 * (n+1)^2 + (n+1)^3$
$= \frac{1}{4} * (n+1)^2 * (n^2 + 4 * (n+1))$
$= \frac{1}{4} * (n+1)^2 * (n^2 + 4n + 4))$
$= \frac{1}{4} * (n+1)^2 * (n+2)^2$

5.3 verallgemeinerte Induktion, vollstaendige Induktion

5.3.1

I.A.:
fuer $a_i, i \in 0, 1, 2$
$a_0 = 0 = fib(0)$
$a_1 = 1 = fib(1)$
$a_2 = 1 = fib(0) + fib(1) = fib(2)$

I.V.:
Die Aussage gelte fuer alle Vorgaenge von $n \leq 3, n \in \mathbb{N}$

I.S.:
$a_n = \frac{1}{2} * a_{n-3} + \frac{1}{2} * 3 * a_{n-2} + \frac{1}{2} * a_{n-1} = \frac{1}{2} * (a_{n-3} + 3 * a_{n-2} + a_{n-1})$
$= \frac{1}{2} * (a_{n-3} + 2 * a_{n-2} + fib(n-2) + fib(n-1))$
$= \frac{1}{2} * (a_{n-3} + a_{n-2} + a_{n-2} + fib(n))$
$= \frac{1}{2} * (fib(n-3) + fib(n-2) + fib(n-2) + fib(n))$
$= \frac{1}{2} * (fib(n-1) + fib(n-2) + fib(n))$
$= \frac{1}{2} * (2 * fib(n))$
$= fib(n)$

5.3.2

I.A.:
$n = 0$
$0^2 + 0 + 2 = 2 \leftarrow \ gerade$

I.V.:
Die Aussage gelte fuer bel., aber feste $n \in \mathbb{N}$

I.S.:
$z.z.:$
$(n+1)^2 + n + 3 \leftarrow gerade$
$n \to n + 1$
$(n+1)^2 + n + 3 = (n+1) * ((n+1) + 1) + 2$
$= (n+1) * (n+2) + 2$
$= (n^2 + 3n + 2) + 2$
$= (n^2 + n + 2) + 2n + 2$
Nach I.V. ist $(n^2 + n + 2)$ gerade. Eine moegliche Def. fuer gerade zahlen waere $G = \{2 * n | n \in \mathbb{N}\}$
Offensichtlich gilt $2n, 2 \in G$ und dass die Addition von nur geraden Zahlen eine gerade Zahl ergibt.
Damit gillt $\forall n \in \mathbb{N}. n^2 + n + 2 \ ist \ gerade$

5.4 Teilbarkeitsrelation

5.4.1

- reflexiv, da $\forall x \in \mathbb{N}.x|x$ (k = 0)

-transitiv, da $\forall x, y, z \in \mathbb{N}.x|y \wedge y|z \Rightarrow x|z$ (x * k = z)

noch zu zeigen:
Teilbarkeitsrelation ist noethersch(!)
bzw. jede nichtleere Teilmenge bzgl. "I" ein minimales Element besitzt.

Sei $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{N}$
Ein minimales Element A ist ein Element, das keine Teiler hat.
0 wird von jeder Zahl $n \in \mathbb{N}$ geteilt.
daher kann 0 nur ein min. Element sein, wenn $A = \{0\}$
hat A mehr Elemente, so ist das naechst kleinste Element das minimale Element.

Beweis durch Widespruch:
$A = \{0, n, ..\}$
Annahme n sei Teiler:
$\exists m \in A.m|n$
$(i)\ m = 0$
$0|n,\ bzw.\ \frac{n}{0}\lightning$
$(ii) m = n$
$n|n,\ bzw.\ \frac{n}{n}\checkmark$
$(iii) m > n$
$\lightning,\ da\ m \nleq n$
Somit auch noetherschhe Ordnung

5.4.2