technische universität dortmund

Thomas Schwentick
Gaetano Geck Martin Schuster

Lehrstuhl 1
Logik in der Informatik

WS 2016/17 — Übungsblatt 2 — 7.11.2016

Aufgabe 2.1 [Modellierung und Folgerung] **8 Punkte**

Hannah muss im DAP1-Praktikum eine Methode rekursiv programmieren, die zwei Listen a und b als Argumente erhält. Der Programmcode ist etwas unübersichtlich geraten und so bittet Hannah einen Tutor um Hilfe. Gemeinsam gehen sie den Code durch und können mit Sicherheit sagen, dass die Methode das folgende Verhalten aufweist:

1. Wenn Liste a nicht leer aber Liste b leer ist, dann endet die Rekursion.
2. Wenn die Rekursion nicht endet, dann hat Liste a gerade Länge oder Liste b ist leer.
3. Nur wenn mindestens eine Liste ungerade Länge besitzt, endet die Rekursion nicht.
4. Es kann nicht sein, dass Liste a gerade Länge hat und weder die Rekursion endet noch Liste b von gerader Länge ist.
5. Natürlich ist jede leere Liste stets von gerader Länge.

a) Modellieren Sie die beschriebene Situation mit den Mitteln der Aussagenlogik, indem Sie für jede Beobachtung i eine Formel φ_i angeben. Geben Sie zuvor die verwendeten aussagenlogischen Variablen *und deren intendierte Bedeutung* an. **(3,5 Punkte)**

b) Nach einem tiefen Schluck aus seiner Kaffeetasse lehnt sich der Tutor beruhigt zurück und teilt Hannah mit, dass der rekursive Aufruf in jedem Fall endet – unabhängig von der Länge der Listen. Zeigen sie durch Resolution, dass der Tutor recht hat.

Beschreiben und begründen Sie insbesondere, welche Klauselmenge Sie für die Resolution verwenden.

Hinweis: Sie können ohne weitere Begründung ausnutzen, dass zu einer Formel der Form $(\psi_1 \wedge \cdots \wedge \psi_m) \rightarrow (\chi_1 \vee \cdots \vee \chi_n)$ die Formel $\neg\psi_1 \vee \cdots \vee \neg\psi_m \vee \chi_1 \vee \cdots \vee \chi_n$ äquivalent ist. **(4,5 Punkte)**

Lösungsvorschlag:

a) Wahl der Variablen:

Variable	*intendierte Bedeutung*
E	die Rekursion endet
L_a	Liste a ist leer
G_a	Liste a hat gerade Länge
L_b	Liste b ist leer
G_b	Liste b hat gerade Länge

Modellierung der Aussagen:

1. $\varphi_1 = (\neg L_a \wedge L_b) \rightarrow E$
2. $\varphi_2 = \neg E \rightarrow (G_a \vee L_b)$
3. $\varphi_3 = \neg E \rightarrow (\neg G_a \vee \neg G_b)$
4. $\varphi_4 = \neg\big(G_a \wedge \neg(E \vee G_b)\big)$
5. $\varphi_5 = (L_a \rightarrow G_a) \wedge (L_b \rightarrow G_b)$

b) Behauptung des Tutors: $\psi = E$.

Schlussfolgerung:

Die Behauptung des Tutors ist genau dann korrekt, wenn ψ von jeder Belegung erfüllt wird, die alle Formeln in $\Phi = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \varphi_5\}$ erfüllen, das heißt, wenn $\Phi \models \psi$ gilt. Dies ist äquivalent zur Unerfüllbarkeit von $\chi = (\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \varphi_3 \wedge \varphi_4 \wedge \varphi_5) \wedge \neg\psi$.

Konjunktive Normalform: Wir weisen die Unerfüllbarkeit der Formel χ durch Resolution nach und bringen dazu die Formel in konjunktive Normalform. Dazu genügt es, die einzelnen Teilformel $\varphi_1, \ldots, \varphi_5, \psi$ in konjunktive Normalform zu bringen:

1. $\varphi_1 = (\neg L_a \wedge L_b) \to E \;\equiv\; L_a \vee \neg L_b \vee E = \varphi_1'$;
2. $\varphi_2 = \neg E \to (G_a \vee L_b) \;\equiv\; E \vee G_a \vee L_b = \varphi_2'$;
3. $\varphi_3 = \neg E \to (\neg G_a \vee \neg G_b) \;\equiv\; E \vee \neg G_a \vee \neg G_b = \varphi_3'$;
4. $\varphi_4 = \neg\big(G_a \wedge \neg(E \wedge G_b)\big) \;\equiv\; \neg G_a \vee \neg\neg(E \vee G_b) \;\equiv\; \neg G_a \vee E \vee G_b = \varphi_4'$;
5. $\varphi_5 = (L_a \to G_a) \wedge (L_b \to G_b) \;\equiv\; (\neg L_a \vee G_a) \wedge (\neg L_b \vee G_b) = \varphi_5'$;
6. $\neg\psi = \neg E$ ist bereits in KNF.

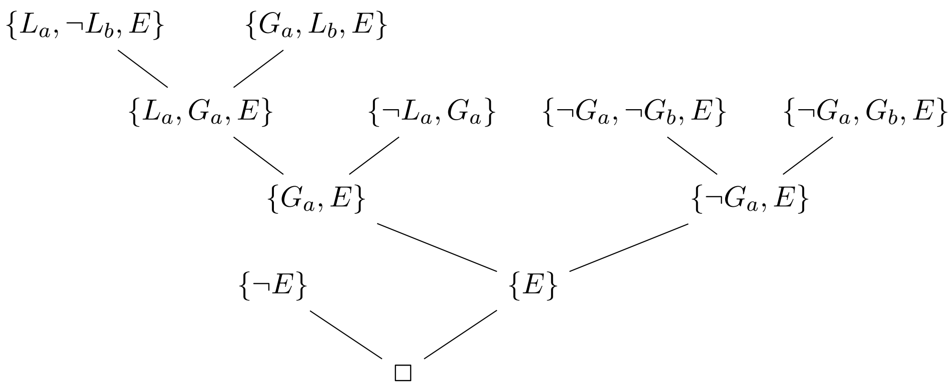
Entsprechend ergibt sich die KNF-Formel $\chi' = \varphi_1' \wedge \cdots \wedge \varphi_5' \wedge \neg\psi$ als

$$\big(L_a \vee \neg L_b \vee E\big) \wedge \big(E \vee G_a \vee L_b\big) \wedge \big(E \vee \neg G_a \vee \neg G_b\big) \wedge \big(\neg G_a \vee E \vee G_b\big) \wedge \big(\neg L_a \vee G_a\big) \wedge \big(\neg L_b \vee G_b\big) \wedge \neg E$$

und damit die Klauselmenge

$$\big\{\{E, L_a, \neg L_b\},\ \{E, G_a, L_b\},\ \{E, \neg G_a, \neg G_b\},\ \{E, \neg G_a, G_b\}, \{G_a, \neg L_a\},\ \{G_b, \neg L_b\},\ \{\neg E\}\big\}.$$

Resolution:



Da aus der Klauselmenge die leere Klausel $\square$ abgeleitet werden kann, ist die Klauselmenge bzw. die zugehörige Formel χ' unerfüllbar. Dementsprechend gilt $\Phi \models \psi$ und der Tutor liegt mit seiner Einschätzung richtig.

Aufgabe 2.2 [Erfüllbarkeit von Horn-Formeln] **6 Punkte**

Gegeben sei die Formel

$$\varphi = (\neg A \vee D \vee \neg B) \wedge \neg\big(C \wedge \neg(\neg D \vee \neg A)\big) \wedge B \wedge (A \vee \neg B \vee C) \wedge \big(\neg B \vee (E \wedge A)\big) \wedge (C \vee \neg F).$$

a) Formen Sie φ äquivalent zu einer Formel $\varphi' = \varphi'_1 \wedge \cdots \wedge \varphi'_m$ um, sodass $\varphi'_1, \ldots, \varphi'_m$ in Implikationsform sind. Begründen Sie, warum die Formel φ' *keine* Horn-Formel ist. **(2 Punkte)**

Umbenennungen

Wir betrachten im Folgenden eine spezielle Form der Substitution, sogenannte Umbenennungen. Eine *Umbenennung* u bildet Literale auf Literale ab, sodass für jede Variable A gilt

- *entweder* $u(A) = A$ und $u(\neg A) = \neg A$
- *oder* $u(A) = \neg A$ und $u(\neg A) = A$.

Für eine Formel ψ ist $u(\psi)$ die Formel, die entsteht, indem jedes Literal L in ψ durch $u(L)$ ersetzt wird. Für u^* mit $u^*(A) = A$, $u^*(\neg A) = \neg A$ und $u^*(B) = \neg B$, $u^*(\neg B) = B$ ergibt sich beispielsweise $u^*(A \wedge \neg B \wedge B) = A \wedge B \wedge \neg B$.

b) Geben Sie eine Umbenennung u an, welche die Formel φ' aus Teilaufgabe a) in eine Horn-Formel $\varphi'' = u(\varphi')$ überführt und möglichst viele Literale unverändert lässt. Geben Sie auch die entstehende Formel φ'' an. **(1 Punkt)**

c) Wenden Sie den Markierungsalgorithmus für φ'' aus Teilaufgabe b) an. Geben Sie die Reihenfolge der Markierung sowie die für jede Markierung verantwortliche Klausel an. Entscheiden Sie anhand der Zwischenergebnisse, ob φ'' erfüllbar ist. **(2 Punkte)**

d) Begründen Sie konkret, warum φ'' aus Teilaufgabe c) erfüllbarkeitsäquivalent zu φ' aus Teilaufgabe a) ist. **(1 Punkt)**

Lösungsvorschlag:

a) Beinahe jedes Konjunkt von φ lässt sich in eine äquivalente Formel in Implikationsform umformen. Lediglich $\big(\neg B \vee (E \wedge A)\big)$ muss durch Distribution in die Konjunktion $(\neg B \vee E) \wedge (\neg B \vee A)$ zweier Formeln in Implikationsform umgewandelt werden. Anschließend ergibt sich als Konjunktion all dieser Teilformeln die Gesamtformel φ':

$$\big((A \wedge B) \to D\big) \wedge \big((A \wedge C \wedge D) \to \bot\big) \wedge B \wedge \big(B \to (A \vee C)\big) \wedge (B \to E) \wedge (B \to A) \wedge (F \to C)$$

Die Formel ist keine Horn-Formel, da die Klausel $\big(B \to (A \vee C)\big) \equiv (A \vee \neg B \vee C)$ mehr als ein positives Literal besitzt.

b) Wir wählen die Umbenennung u mit $u(C) = \neg C$ und $u(\neg C) = C$ und die alle anderen Literale unverändert lässt. Dann ist $\varphi'' = u(\varphi')$ die Formel

$$\big((A \wedge B) \to D\big) \wedge \big((A \wedge D) \to C\big) \wedge B \wedge \big((B \wedge C) \to A\big) \wedge (B \to E) \wedge (B \to A) \wedge \big((C \wedge F) \to \bot\big)$$

c) Der Markierungsalgorithmus könnte die Markierungen beispielsweise in der folgenden Reihenfolge bestimmen:

Reihenfolge	1	2	3	4	5
markierte Variable	B	E	A	D	C
relevante Klausel	B	$(B \to E)$	$(B \to A)$	$\big((A \wedge B) \to D\big)$	$\big((A \wedge D) \to C\big)$

Die Formel φ'' ist erfüllbar. Dies bezeugt die durch die Markierungen vorgegebene Belegung α mit $\alpha''(B) = \alpha''(E) = \alpha''(A) = \alpha''(D) = \alpha''(C) = 1$ und $\alpha''(F) = 0$.

d) Da die Formel $\varphi'' = u(\varphi')$, wie in Teilaufgabe c) gesehen, erfüllbar ist, ist die Erfüllbarkeit der Formel φ' zu zeigen. Eine erfüllende Belegung α' für φ' ergibt sich, indem für jede Variable X definiert wird:

$$\alpha'(X) = [\![u(X)]\!]_{\alpha''}$$

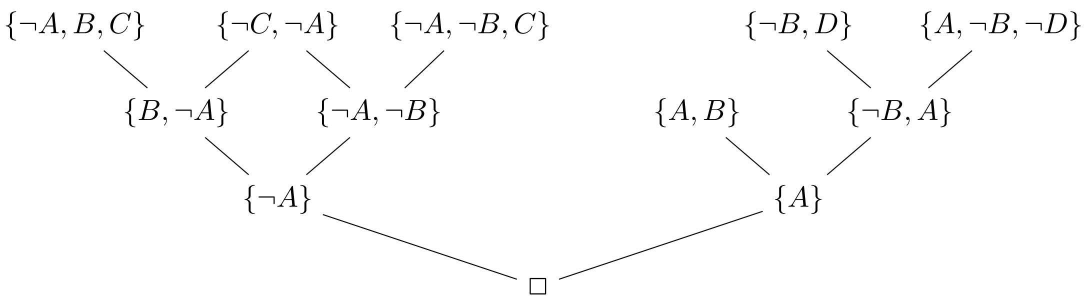
Konkret ergibt sich somit α' mit $\alpha'(B) = \alpha'(E) = \alpha'(A) = \alpha'(D) = 1$ und $\alpha'(C) = \alpha'(F) = 0$. Da α'' mindestens ein Literal je Klausel von φ'' erfüllt hat, erfüllt α' mindestens ein Literal je Klausel von φ'. Sei L_j ein von α'' erfülltes Literal aus der j-ten Klausel, dann enthält die j-te Klausel von φ' das Literal $u(L_j)$, für welches gilt $\alpha'(u(L_j)) = \alpha''(L_j) = 1$. Daher erfüllt α' jede Klausel von φ' und mithin φ'.

Aufgabe 2.3 [...und noch einmal Resolution] **3 Punkte**

Beweisen Sie durch aussagenlogische Resolution die Unerfüllbarkeit der Klauselmenge

$$\big\{\{\neg A, B, C\},\ \{\neg C, \neg A\},\ \{\neg A, \neg B, C\},\ \{A, B\},\ \{\neg B, D\},\ \{A, \neg B, \neg D\}\big\}.$$

Lösungsvorschlag:



Aufgabe 2.4 [Implikation] **3 Punkte**

Gegeben seien Formelmengen $\Phi = \{\varphi_1, \varphi_2\}$ und $\Psi = \{\psi_1, \psi_2\}$. Beweisen Sie, dass $\Phi \models \Psi$ genau dann gilt, wenn die Formel $(\varphi_1 \wedge \varphi_2) \to (\psi_1 \wedge \psi_2)$ allgemeingültig ist.

Hinweis: Eine Formelmenge Φ impliziert eine Formelmenge Ψ, wenn jedes Modell von Φ ein Modell von Ψ ist.

Lösungsvorschlag:

Wir beweisen beide Richtungen der Äquivalenz unabhängig voneinander. Der Kürze halber sei $(\varphi_1 \wedge \varphi_2) \to (\psi_1 \wedge \psi_2) = \chi$.

Wir zeigen zunächst: χ ist allgemeingültig $\Rightarrow$ $\Phi \models \Psi$. Dazu setzen wir voraus, dass χ allgemeingültig ist. Zu zeigen ist, dass jede Φ erfüllende Belegung α auch Ψ erfüllt. Wenn α die Formelmenge $\Phi = \{\varphi_1, \varphi_2\}$, also jede in ihr enthaltene Formel, erfüllt, dann gilt $[\![\varphi_1]\!]_\alpha = 1$ und

$[\![\varphi_2]\!]_\alpha = 1$ und mithin $[\![\varphi_1 \wedge \varphi_2]\!]_\alpha = 1$, also $[\![\neg(\varphi_1 \wedge \varphi_2)]\!]_\alpha = 0$. Aus der Allgemeingültigkeit von χ folgt insbesondere $[\![\chi]\!]_\alpha = 1$. Wir wissen, dass eine Implikation mit wahrer Prämisse nur wahr ist, wenn auch die Konklusion wahr ist, weshalb $[\![\psi_1 \wedge \psi_2]\!]_\alpha = 1$ gelten muss. Nun ergibt sich aus der Semantik-Definition der Konjunktion $[\![\psi_1]\!]_\alpha = 1 = [\![\psi_2]\!]_\alpha$. Belegung α erfüllt also beide Formeln ψ_1, ψ_2 aus Ψ, das heißt, es gilt $\alpha \models \Psi$.

Wir zeigen nun: $\Phi \models \Psi \Rightarrow \chi$ ist allgemeingültig. Vorausgesetzt sei nun $\Phi \models \Psi$. Sei α nun eine passende Belegung für χ. Zu zeigen ist $\alpha \models \chi$. Wir betrachten zwei Fälle:

1. Fall ($[\![\varphi_1 \wedge \varphi_2]\!]_\alpha = 0$): Dann gilt $[\![\chi]\!]_\alpha = 1$, da eine Implikation bei falscher Prämisse stets wahr ist.

2. Fall ($[\![\varphi_1 \wedge \varphi_2]\!]_\alpha = 1$): Dann gilt $[\![\varphi_1]\!]_\alpha = 1 = [\![\varphi_2]\!]_\alpha$ nach Semantik-Definition der Konjunktion und mithin $\alpha \models \Phi$. Unter der Voraussetzung folgt dann $\alpha \models \Psi$, also $[\![\psi_1]\!]_\alpha = 1 = [\![\psi_2]\!]_\alpha$. Nach der Semantik-Definition der Konjunktion gilt dann ferner $[\![\psi_1 \wedge \psi_2]\!]_\alpha = 1$ und deshalb $[\![\chi]\!]_\alpha = 1$, da Prämisse und Konklusion der Implikation unter χ wahr sind.

In beiden Fällen gilt also $\alpha \models \chi$.

Zusatzaufgabe [Der Endlichkeitssatz]
Sei V eine abzählbare Variablenmenge und $\mathcal{F} = \{\varphi_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ eine Menge aussagenlogischer Formeln mit Variablen aus V, so dass für alle natürlichen Zahlen n die folgenden Bedingungen gelten:

- Die aussagenlogische Formel $\varphi_{n+1} \to \varphi_n$ ist allgemeingültig.
- Die aussagenlogische Formel $\varphi_n \to \varphi_{n+1}$ ist nicht allgemeingültig.

a) Geben Sie ein Beispiel für eine solche Formelmenge an.

b) Zeigen Sie mit Hilfe des Endlichkeitssatzes: $\mathcal{F}$ ist erfüllbar.