lehrstuhl für programmiersysteme
Prof. Dr. B. Steffen

technische universität dortmund

Markus Frohme – Dawid Kopetzki – Oliver Rüthing – Philip Zweihoff

Übungen zur Vorlesung

Mathematik für Informatik 1

Wintersemester 2016/17

Übungsblatt 3

Für die Abgabe der Bearbeitungen stehen den Übungsgruppen Briefkästen im Verbindungsflur Erdgeschoss OH 14 - OH 12 zu zur Verfügung.
Die den einzelnen Übungsgruppen zugeteilten Briefkästen sind durch die Gruppennummer gekennzeichnet. Sie sind ferner mit dem Namen der Veranstaltung sowie Zeit und Ort der Übung kenntlich gemacht.

Bitte werfen Sie Ihre Bearbeitungen in den Ihrer Übungsgruppe zugeteilten Briefkasten bis zur unten aufgeführten Abgabefrist ein!

Schreiben Sie unbedingt immer Ihren vollständigen Namen, Ihre Matrikelnummer und Ihre Gruppennummer auf Ihre Abgaben!

Abgabefrist: 11.11.2016, 14:00 Uhr

Aufgabe 3.1 *Äquivalenzrelationen* (3+1 Punkt(e))

1. Eine binäre Relation $R \subseteq A \times A$ heißt *euklidisch*, falls gilt:

$$\forall\, a, b, c \in A.\ (a\, R\, b\ \wedge\ a\, R\, c)\ \Rightarrow\ b\, R\, c.$$

   Zeigen Sie, dass eine reflexive Relation $R \subseteq A \times A$ genau dann euklidisch ist, wenn R eine Äquivalenzrelation ist.

2. Sei $A =_{df} \mathfrak{P}(\mathbb{N}) \setminus \emptyset$. Betrachten Sie die Relation $R \subseteq A \times A$ definiert durch:

$$a\, R\, b \Leftrightarrow_{df} a \cap b \neq \emptyset$$

   .

   Beweisen oder widerlegen Sie: R ist eine Äquivalenzrelation.

Aufgabe 3.2 *Äquivalenzrelationen und Partitionen* (2+1+1 Punkt(e))
M sei die Menge $\{a, b, c, d, e, f\}$ und $R \subseteq M \times M$ folgende Relation:

$$R =_{df} \{(e, e), (f, d), (c, a), (b, f)\}.$$

1. Geben Sie die (bezüglich Mengeninklusion) kleinste Äquivalenzrelation $\sim_R$ an, die R umfasst.
2. Geben Sie die zu $\sim_R$ gehörige Partition $M/\sim_R$ von M an.
3. Geben Sie eine Funktion $g : M \to \mathbb{N}$ an, deren Urbildpartition $\{\{a, c\}, \{b, d, f\}, \{e\}\}$ ist.

Aufgabe 3.3 *Mächtigkeit von Mengen* (4 Punkte)
Gemäß Vorlesung ist $\mathfrak{P}(\mathbb{N})$ überabzählbar. Zeigen Sie, dass die Menge aller endlichen Teilmengen von $\mathbb{N}$ hingegen abzählbar unendlich ist.

Hinweis: Der Satz von Cantor, Bernstein und Schröder (Satz 3.4) darf verwendet werden.

Aufgabe 3.4 *Erstes Cantorsches Diagonalverfahren* (Bonusaufgabe: 4 Punkte)
Sei $d_C : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ die auf Seite 63 des Buches "Grundlagen der höheren Informatik - Induktives Vorgehen" eingeführte Funktion zum ersten Cantorschen Diagonalverfahren, hier in der Variante:

$$d_C(m, n) =_{df} (\sum_{i=0}^{m+n} i) + m.$$

Beweisen Sie, dass d_C bijektiv ist.

Hinweis: Für den Nachweis der Injektivität bietet sich eine Fallunterscheidung nach $m + n$ an.