lehrstuhl für programmiersysteme
Prof. Dr. B. Steffen

technische universität dortmund

Markus Frohme – Dawid Kopetzki – Oliver Rüthing – Philip Zweihoff

Übungen zur Vorlesung

Mathematik für Informatik 1

Wintersemester 2016/17

Übungsblatt 12

Für die Abgabe der Bearbeitungen stehen den Übungsgruppen Briefkästen im Verbindungsflur Erdgeschoss OH 14 - OH 12 zu zur Verfügung.
Die den einzelnen Übungsgruppen zugeteilten Briefkästen sind durch die Gruppennummer gekennzeichnet. Sie sind ferner mit dem Namen der Veranstaltung sowie Zeit und Ort der Übung kenntlich gemacht.

Bitte werfen Sie Ihre Bearbeitungen in den Ihrer Übungsgruppe zugeteilten Briefkasten bis zur unten aufgeführten Abgabefrist ein!

Schreiben Sie unbedingt immer Ihren vollständigen Namen, Ihre Matrikelnummer und Ihre Gruppennummer auf Ihre Abgaben!

Abgabefrist: 03.02.2017, 14:00 Uhr

Aufgabe 12.1 *Invertieren von Matrizen* (3+1 Punkt(e))

1. Es sei die Matrix $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -3 & 2 & 4 \\ 2 & -3 & 9 \end{pmatrix}$$

gegeben. Bestimmen Sie die zu A inverse Matrix.

2. Ist die Matrix auch über dem Körper $\mathbb{Z}_5$ invertierbar? Wenn ja, geben Sie die Inverse zu A an. Wenn nein, begründen Sie ihre Antwort.

Hinweis: Schreiben Sie die Matrix zunächst so um, dass alle Koeffizienten durch Ihre kanonischen Repäsentanten in $\mathbb{Z}_5$, also $0, 1, 2, 3, 4$, ersetzt werden.

Aufgabe 12.2 *Lineare Abbildungen* ((1+2)+1 Punkt(e))

1. Geben Sie in den beiden folgenden Teilaufgaben jeweils an, ob die Abbildung f linear ist. Wenn ja, beweisen Sie ihre Aussage. Wenn nein, geben Sie ein Gegenbeispiel an.

   a) Sei $V = \mathbb{R}^3$ und $f : V \to V$ gegeben durch $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 3x \\ 2x + y \\ y \cdot z \end{pmatrix}$.

   b) Sei V ein beliebiger $\mathbb{R}$-Vektorraum und ℓ eine lineare Abbildung von V nach $\mathbb{R}$. Definiere $f : V \to \mathbb{R}^2$ durch $f(\vec{v}) =_{df} \begin{pmatrix} -\ell(\vec{v}) \\ \ell(\vec{v}) + \ell(2 \cdot \vec{v}) \end{pmatrix}$.

2. Zeigen Sie: Die durch eine Matrix $A \in K^{2\times 3}$ bestimmte lineare Abbildung φ_A ist nicht injektiv.

   Hinweis: Satz 11.3.2 und Dimensionssatz 11.3.3 sind hilfreich.

Aufgabe 12.3 *Basistransformation* (1+3 Punkt(e))

Gegeben sind die Vektorräume $\mathbb{R}^3$ mit der Standardbasis $E_3 = \{(1,0,0)^t, (0,1,0)^t, (0,0,1)^t\}$ und $\mathbb{R}^2$ mit Standardbasis $E_2 = \{(1,0)^t, (0,1,)^t\}$. Die lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ sei definiert durch:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x + 2y + 3z \\ 2x + 3y + 4z \end{pmatrix}$$

1. Geben Sie die Matrix ${}_{E_2}[\varphi]_{E_3}$ von φ bezüglich der Standardbasen E_3 und E_2 an.

2. Bestimmen Sie die Matrix ${}_{B_2}[\varphi]_{B_3}$ von φ, wenn für $\mathbb{R}^3$ die Basis $B_3 = \{(1,2,-1)^t, (2,-1,2)^t, (3,1,-1)^t\}$ und für $\mathbb{R}^2$ die Basis $B_2 = \{(1,2)^t, (2,3)^t\}$ zugrunde gelegt wird.

Aufgabe 12.4 *Inverse von Matrizen* (Bonusaufgabe: 3+1 Punkte)

Für eine Matrix $A \in K^{n\times n}$ wird beim erfolgreichen Invertieren durch Gaußelimination eine linksinverse Matrix $U \in K^{n\times n}$ bestimmt, also eine für die gilt:

$$U \cdot A = E_n.$$

1. Zeigen Sie, dass allgemein für $A, B \in K^{n\times n}$ aus $B \cdot A = E_n$ auch $A \cdot B = E_n$ folgt.

2. Zeigen Sie, dass das Resultat aus Teil 1) nicht auf den Fall nichtquadratischer Matrizen übertragen werden kann. Hier folgt nämlich für $A \in K^{m\times n}$ und $B \in K^{n\times m}$ aus $B \cdot A = E_n$ im allgemeinen nicht $A \cdot B = E_m$. Geben Sie ein möglichst einfaches Gegenbeispiel dafür an.