

MafI 1 UB03

January 14, 2017

3.1 Aequivalenzrelationen

3.1.1

z.z.: genau dann euklidisch, wenn Aequivalenzrelation

" \Rightarrow ":

Reflexivitaet ist bereits gegeben

Symmetrie:

$\forall a_1, a_2 \in A. a_1 R a_2 \Rightarrow^! a_2 R a_1$ (aus Reflexivitaet)

$\forall a_1, a_2 \in A. (a_1 R a_2 \wedge a_1 R a_1) \Rightarrow a_2 R a_1$

damit $a_1 R a_2 \wedge a_1 R a_1 \Rightarrow a_2 R a_1$

Transitivitaet:

$\forall a_1, a_2, a_3 \in A. a_1 R a_2 \wedge a_2 R a_3 \Rightarrow^! a_1 R a_3$
 $a_2 R a_1$ (aus Symmetrie)

$\forall a_1, a_2, a_3 \in A. (a_2 R a_1 \wedge a_2 R a_3) \Rightarrow a_1 R a_3$

damit $a_1 R a_2 \wedge a_2 R a_3 \Rightarrow a_1 R a_3$

" \Leftarrow ":

$\forall a, b, c \in A. (a R b \wedge a R c) \Rightarrow^! b R c$

$b R a$ (aus Symmetrie)

aus Transitivitaet :

$b R a \wedge a R c \Rightarrow b R c$

damit $a R b \wedge a R c \Rightarrow b R c$

3.1.2

R ist keine Aequivalenzrelation, da die Transitivitaet nicht gilt

$\{1, 2\} \cap \{2, 3\} \neq \emptyset$

$\{2, 3\} \cap \{3, 4\} \neq \emptyset$

aber $\{1, 2\} \cap \{3, 4\} = \emptyset$

3.2 Aequivalenzrelationen und Partitionen

3.2.1

$$\begin{aligned} \sim_R = \{ & \\ & (e, e), (f, d), (c, a), (b, f), \\ & (a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (f, f), \leftarrow \text{Reflexivitaet} \\ & (d, f), (a, c), (f, b), \leftarrow \text{Symmetrie} \\ & (b, d), (d, b) \leftarrow \text{Transitivitaet \& Symmetrie} \\ & \} \end{aligned}$$

3.2.2

$M \setminus \sim_R$ ist Partition basierend auf Aequivalenzklassen

$$\begin{aligned} M \setminus \sim_R &= \{\{a, c\}, \{b, d, f\}, \{e\}\} \\ &= \{[a]_{\sim_R}, [b]_{\sim_R}, [e]_{\sim_R}\} \end{aligned}$$

3.2.3

$$g(x) = \begin{cases} 1, & x = a \vee x = c \\ 2, & x = b \vee x = d \vee x = f \\ 3, & x = e \end{cases}$$

3.3 Mächtigkeit von Mengen

sei $P_e(\mathbb{N})$ die Menge aller unendlichen Teilmengen von \mathbb{N} .

z.z.: $P_e(\mathbb{N})$ abzählbar unendlich $\Leftrightarrow P_e(\mathbb{N}) \cong \mathbb{N}$

Es reicht, den Satz von Cantor, Bernstein und Schroeder nachzuweisen.

$$P_e(\mathbb{N}) \leq^! \mathbb{N}, \mathbb{N} \leq^! P_e(\mathbb{N})$$

$$P_e(\mathbb{N}) \leq \mathbb{N} :$$

$$f : \mathbb{N} \rightarrow P_e(\mathbb{N})$$

$$f(n) := \{n\}, \text{ offensichtlich injektiv}$$

$$\mathbb{N} \leq P_e(\mathbb{N}) :$$

$$g : P_e(\mathbb{N}) \rightarrow \mathbb{N}$$

$$g(X) := \sum_{n \in X} 2^n, \text{ nicht surjektiv}$$