MafI 1 UB06

March 21, 2017

6.1 Distributive Verbaende

6.1.1

$d \curlywedge (a \curlyvee c) = d \curlywedge 1 = d$
$(d \curlywedge a) \curlyvee (d \curlywedge c) = a \curlyvee 0 = a$
$\Rightarrow$ nicht distributiv

6.1.2

Tupel der komp. Elemente: $\{(1,0),(a,e),(d,c),(a,c)\}$

$d \curlywedge e = b, b \notin S$
$\Rightarrow$ kein Unterverband

6.1.3

Menge der Elemente mit komplementaeren Elementen von V: S
$z.z.:$
$\forall x, y \in S.(x \curlywedge y) \in S \land (x \curlyvee y) \in S$

$x, y, \tilde{x}, \tilde{y} \in S$
$\tilde{x}, \tilde{y}$ sind disjunkte Komplementaere von x, y

$(x \curlywedge y) \curlywedge (\tilde{x} \curlyvee \tilde{y}) = (x \curlywedge y \curlywedge \tilde{x}) \curlyvee (x \curlywedge y \curlywedge \tilde{y})$
$= 0 \curlyvee 0 = 0$

$(x \curlywedge y) \curlyvee (\tilde{x} \curlyvee \tilde{y}) = (x \curlyvee y \curlyvee \tilde{x}) \curlywedge (x \curlyvee y \curlyvee \tilde{y})$
$= 1 \curlywedge 1 = 1$
Damit hat $x \curlywedge y$ das komplementaere Element $(\tilde{x} \curlyvee \tilde{y})$, sowie $x \curlyvee y$ $(\tilde{x} \curlyvee \tilde{y})$.
Damit sind diese Elemente auch in S.

6.2 Boolscher Verband

6.2.1

$$\begin{array}{ccccc} & & 30 & & \\ 6 & & 15 & & 10 \\ & 3 & 2 & 5 & \\ & & 1 & & \end{array}$$

Die komplementaeren Elemente in Tupeln sind:
$\{(5,6),(3,10),(2,15),(1,30)\}$

mit $\{(x_{n_0}, y_{n_0}), ...\} \rightarrow^{Relationsoperator} \{x_{n_0}$ '$Relationsoperator$' $y_{n_0}, ...\}$:
$\{(5,6),(3,10),(2,15),(1,30)\} \rightarrow^{\curlywedge} \{1\}$
$\{(5,6),(3,10),(2,15),(1,30)\} \rightarrow^{\curlyvee} \{30\}$
damit dann auch $1_B = 30, 0_B = 1$

6.2.2

z.z.:
A abgeschlossen unter $(\curlywedge, \curlyvee)$

z.z.:
$\forall x, y \in A.\exists(x \curlyvee y), \forall x, y \in A.\exists(x \curlywedge y))$

$\{(x_{n_0}, y_{n_0}), ...\} \rightarrow^{Relationsoperator}$
$= \{(y_{n_0}, x_{n_0}), ...\} \rightarrow^{Relationsoperator} \{x_{n_0}$ '$Relationsoperator$' $y_{n_0}, ...\}$
$a \in A$

$\{(3,a)\} \rightarrow^{\curlyvee} \{(a)\}$,
$\{(30,a)\} \rightarrow^{\curlyvee} \{(30)\}$,
$\{(6,(a \neq 3)),(15,(a \neq 3))\} \rightarrow^{\curlyvee} \{(30)\}$,

$\{(3,a)\} \rightarrow^{\curlywedge} \{(3)\}$,
$\{(30,a)\} \rightarrow^{\curlywedge} \{(a)\}$,
$\{(6,(a \neq 30)),(15,(a \neq 30))\} \rightarrow^{\curlywedge} \{(3)\}$,

Es folgt, dass A bzgl. $(\curlywedge, \curlyvee)$ abgeschlossen ist.

z.z.:
A ist distributiv

es gilt: $(A \subseteq B) \wedge A$ abgeschlossen
damit ist A dann auch wie B distributiv

z.z.:

$\exists 0_A, 1_A \in A. \forall x \in A \exists \bar{x} \in A. x \curlywedge \bar{x} = 0_A \wedge x \curlyvee \bar{x} = 1_A$

Diese existieren zu der Menge aller Komplementaeren Elemente:
$S \subseteq A, S = \{(3, 30), (6, 15)\}$

wie bereits gezeigt:
$\{(3, a)\} \rightarrow^{\curlywedge} \{(3)\}$,
$\{(6, (a \neq 30)), (15, (a \neq 30))\} \rightarrow^{\curlywedge} \{(3)\}$,
$\{(30, a)\} \rightarrow^{\curlyvee} \{(30)\}$,
$\{(6, (a \neq 3)), (15, (a \neq 3))\} \rightarrow^{\curlyvee} \{(30)\}$,

daraus folgt:
$0_A = 3, 1_A = 30$

6.3 Vollstaendiger Verband

6.3.1

Assoziativitaet, Kommutativitaet, Absorption sind offensichtlich

Vollstaendigkeit:

sei $X \subseteq A \times X$ eine Menge mit:
$X_A = \{a \in A | \exists b \in B.(a,b) \in X\}$
$X_B = \{b \in B | \exists a \in A.(a,b) \in X\}$

so gilt fuer $(a,b) \in X$ bel.:
$(inf(X_A), inf(X_B)) \preceq (a,b)$, da
$inf(X_A, a) = inf(X_A)$
$inf(X_B, b) = inf(X_B)$
analog fuer sup...

6.3.2 Verband der Funktionen

hier gabs keine Mitschriften