

MafI 1 UB07

January 24, 2017

7.1 Strukturtafeln und Gruppen

7.1.1

$+_6$	0	1	2	3	4	5
0	0	1	2	3	4	5
1	1	2	3	4	5	0
2	2	3	4	5	0	1
3	3	4	5	0	1	2
4	4	5	0	1	2	3
5	5	0	1	2	3	4
$*_6$	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5
2	0	2	4	0	2	4
3	0	3	0	3	0	3
4	0	4	2	0	4	2
5	0	5	4	3	2	1

7.1.2

z.z.:

$(\mathbb{Z}_6, +_6)$ soll Gruppe sein

Assoziativitaet

offensichtlich, da normale Addition assoziativ ist.

neutr. Element:

offensichtlich 0, da 0 das neutr. Element der normalen Addition ist.

inv. Element:

$$\forall x \in \mathbb{Z}_6 \exists x' \in \mathbb{Z}_6. x +_6 x' = 0 \Rightarrow x' = 6 - x$$

inv. Element ex. auch, damit ist $(\mathbb{Z}_6, +_6)$ eine Gruppe

7.2 Permutationen, Zyklenschreibweise

7.2.1

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= (123456) \\ \sigma_2 &= (13652)(4) \\ \sigma_3 &= (126)(354)\end{aligned}$$

7.2.2

$$\sigma_1 \circ \sigma_2 \circ \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 6 & 3 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix} = (1264)(3)(5)$$

7.3 Gruppe und Gruppenhomomorphismus

7.3.1

$$(a \oplus b)^{-1} = e \oplus (a \oplus b)^{-1} = e \oplus b \oplus b^{-1} \oplus (a \oplus b)^{-1} = a \oplus a^{-1} \oplus b \oplus b^{-1} \oplus (a \oplus b)^{-1} = a^{-1} \oplus b^{-1}$$

7.3.2

" \Rightarrow " h ist injektiv:

\Rightarrow jedes Element hat max. ein Urbild

$\Rightarrow \text{Kern}(h)$ ist max. einelementig

$$h(e) \oplus' h(e) = h(e \oplus e) = h(e) = h(e) \oplus e'$$

$$h(e) = e'$$

" \Leftarrow " $\text{Kern}(h) = \{e\} \Rightarrow h$ ist injektiv:

Kontrapposition:

h nicht injektiv $\Rightarrow \text{Kern}(h) \neq \{e\}$

z.z.:

$$\exists a \in G. h(a) = e'$$

somit $a \in \text{Kern}(h) \wedge a \neq e$

sei h nicht injektiv:

$$\exists x, x' \in G. x \neq x'. h(x) = h(x')$$

So ist:

$$e' = h(x) \oplus' h(x)^{-1} = h(x) \oplus' h(x')^{-1} = h(x) \oplus' h(x'^{-1}) = h(x \oplus x'^{-1}) \neq e' \nmid$$

7.4 Untergruppenverband

$$V = \{V \mid V \subseteq G, V \cup G\}$$
$$\leq \subseteq V \times V$$

$$A \leq B \Leftrightarrow A \cup G \text{ von } B \Leftrightarrow A \subseteq B$$

(i)

z.z.:

$< V, \leq >$ ist Verband

partielle Ordnung:

ist reflexiv, da $A \leq A$ durch $\forall A \in V. A = A$ gilt

antisymmetrisch:

$$A, B \in V. A \leq B \wedge B \leq A$$

$$\Rightarrow A \subseteq B \wedge B \subseteq A$$

$$\Rightarrow A = B$$

transitiv:

$$A, B, C \in V. A \leq B \wedge B \leq C$$

$$\Rightarrow A \subseteq B \wedge B \subseteq C$$

$$\Rightarrow A \subseteq C \Rightarrow A \leq C$$

(ii)

z.z.:

$< V, \leq >$ ist vollständiger Verband

$$U \subseteq V$$

$$\inf(U) = \bigcap_{X \in U} X$$

$$\forall X \in U. \bigcap_{X \in U} X \subseteq X \text{ damit untere Schranke}$$

$$\forall X \subseteq U \exists K. K \subseteq X$$

$$\Rightarrow K \subseteq \bigcap_{X \in U} X$$

Damit $\inf(U) \in V$ muss $\inf(U) \cup G$ von G sein.

abgeschlossen:

$$a, b \in \inf(U)$$

$$\Rightarrow a, b \in \bigcap_{X \in U} X$$

$$\Rightarrow a, b \in X \forall X \in U \Rightarrow a \oplus b \in X \forall X \in U$$

$$\Rightarrow a, b \in \inf(U)$$

neutr. Element:

$$e \in X \forall X \in U \Rightarrow e \in \inf(U)$$

inv. Element:

$$\begin{aligned} \text{sei } a \in \inf(U) &\Rightarrow a \in X \forall X \in U \Rightarrow a^{-1} \in X \forall X \in U \\ &\Rightarrow a^{-1} \in \inf(U) \end{aligned}$$

damit ist $\langle V, \leq \rangle$ ein vollstaendiger Verband