lehrstuhl für programmiersysteme
Prof. Dr. B. Steffen

technische universität dortmund

Markus Frohme – Dawid Kopetzki – Oliver Rüthing – Philip Zweihoff

Übungen zur Vorlesung

Mathematik für Informatik 1

Wintersemester 2016/17

Übungsblatt 6

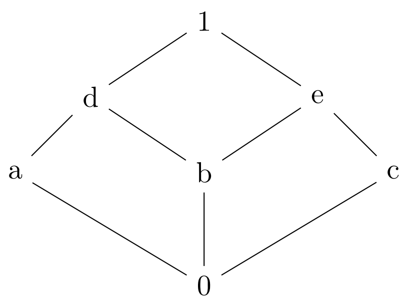
Für die Abgabe der Bearbeitungen stehen den Übungsgruppen Briefkästen im Verbindungsflur Erdgeschoss OH 14 - OH 12 zu zur Verfügung.
Die den einzelnen Übungsgruppen zugeteilten Briefkästen sind durch die Gruppennummer gekennzeichnet. Sie sind ferner mit dem Namen der Veranstaltung sowie Zeit und Ort der Übung kenntlich gemacht.

Bitte werfen Sie Ihre Bearbeitungen in den Ihrer Übungsgruppe zugeteilten Briefkasten bis zur unten aufgeführten Abgabefrist ein!

Schreiben Sie unbedingt immer Ihren vollständigen Namen, Ihre Matrikelnummer und Ihre Gruppennummer auf Ihre Abgaben!

Abgabefrist: 2.12.2016, 14:00 Uhr

Aufgabe 6.1 *Distributive Verbände* (1+1+2 Punkte)
Gegeben sei der durch das folgende Hasse-Diagramm festgelegte Verband:



1. Ist dieser Verband distributiv? Begründen Sie Ihre Antwort.
2. Bestimmen Sie alle Elemente des Verbandes, zu denen ein komplementäres Element existiert.

   Bilden diese Elemente einen Unterverband von V? Hierbei ist ein Unterverband S von V eine Teilmenge $S \subseteq V$, für die die folgende Abschlusseigenschaft gilt:

   $$\text{für alle } x, y \in S.\ x \curlywedge y \in S \text{ und } x \curlyvee y \in S.$$

   Begründen Sie Ihre Antwort.
3. Zeigen Sie:

   In einem distributiven Verband bildet die Menge der Elemente, zu denen es ein komplementäres Element gibt, einen Unterverband.

Aufgabe 6.2 *Boolescher Verband* (2+2 Punkte)
Gegeben sei der Boolesche Verband $(B, \curlywedge, \curlyvee)$ mit $B = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$, wobei für 2 natürliche Zahlen n und m $n \curlywedge m$ der größte gemeinsame Teiler und $n \curlyvee m$ das kleinste gemeinsame Vielfache von n und m ist.

1. Zeichnen Sie das zugehörige Hasse-Diagramm. Bestimmen Sie 0_B und 1_B und machen Sie komplementäre Elemente als solche in der Grafik kenntlich (z.B. mit der gleichen Farbe).
2. Es sei nun $A = \{3, 6, 15, 30\}$. Ist $(A, \curlywedge, \curlyvee)$ mit den oben genannten Definitionen von $\curlywedge, \curlyvee$ immer noch ein Boolescher Verband?

Aufgabe 6.3 *Vollständiger Verband* (4 Punkte)
Seien $(A, \curlywedge_A, \curlyvee_A)$ und $(B, \curlywedge_B, \curlyvee_B)$ vollständige algebraische Verbände. Wir definieren die algebraische Struktur $(A \times B, \curlywedge, \curlyvee)$ durch

$$(a_1, b_1) \curlywedge (a_2, b_2) = (a_1 \curlywedge_A a_2, b_1 \curlywedge_B b_2)$$

und

$$(a_1, b_1) \curlyvee (a_2, b_2) = (a_1 \curlyvee_A a_2, b_1 \curlyvee_B b_2)\,.$$

Zeigen Sie: $(A \times B, \curlywedge, \curlyvee)$ ist ein vollständiger algebraischer Verband.

Aufgabe 6.4 *Verband der Funktionen* (Bonusaufgabe: 2+2 Punkte)
Sei M eine Menge.

1. Beweisen Sie, dass dann $(\mathbb{Z}^M, \sqsubseteq)$ ein Verband ist, wobei für $f, g \in \mathbb{Z}^M$ definiert ist:[1]

$$f \sqsubseteq g \;\Leftrightarrow_{df}\; \forall m \in M.\ f(m) \leq g(m).$$

2. Ist $(\mathbb{Z}^M, \sqsubseteq)$ auch ein vollständiger Verband? Beweisen oder widerlegen Sie.

[1]Zur Erinnerung: $\mathbb{Z}^M$ bezeichnet die Menge aller Funktionen von M nach $\mathbb{Z}$.