lehrstuhl für programmiersysteme
Prof. Dr. B. Steffen

technische universität dortmund

Markus Frohme – Dawid Kopetzki – Oliver Rüthing – Philip Zweihoff

Übungen zur Vorlesung

Mathematik für Informatik 1

Wintersemester 2016/17

Übungsblatt 9

Für die Abgabe der Bearbeitungen stehen den Übungsgruppen Briefkästen im Verbindungsflur Erdgeschoss OH 14 - OH 12 zu zur Verfügung.
Die den einzelnen Übungsgruppen zugeteilten Briefkästen sind durch die Gruppennummer gekennzeichnet. Sie sind ferner mit dem Namen der Veranstaltung sowie Zeit und Ort der Übung kenntlich gemacht.

Bitte werfen Sie Ihre Bearbeitungen in den Ihrer Übungsgruppe zugeteilten Briefkasten bis zur unten aufgeführten Abgabefrist ein!

Schreiben Sie unbedingt immer Ihren vollständigen Namen, Ihre Matrikelnummer und Ihre Gruppennummer auf Ihre Abgaben!

Abgabefrist: 13.01.2017, 14:00 Uhr

Aufgabe 9.1 *Ringe, Ringhomomorphismen* (2+2 Punkte)
Sei U die Menge der 2×2-Matrizen über dem Körper $\mathbb{R}$, deren Eintrag für die zweite Zeile und erste Spalte Null ist. Also

$$U =_{df} \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\}.$$

Die Addition und Multiplikation zweier Matrizen $x, y \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ ist wie folgt definiert:

$$\textbf{Addition:} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+a' & b+b' \\ c+c' & d+d' \end{pmatrix}$$

$$\textbf{Multiplikation:} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cdot a' + b \cdot c' & a \cdot b' + b \cdot d' \\ c \cdot a' + d \cdot c' & c \cdot b' + d \cdot d' \end{pmatrix}$$

1. $\langle \mathbb{R}^{2\times 2}, +, \cdot \rangle$ bildet mit der Matrixaddition und Matrixmultiplikation einen Ring mit 1. Zeigen Sie, dass $\langle U, +, \cdot \rangle$ ein Unterring von $\langle \mathbb{R}^{2\times 2}, +, \cdot \rangle$ ist.

   Hinweis: Die Eigenschaften der Verknüpfungen können durch die Abgeschlossenheit von U unter Matrixaddition und Matrixmultiplikation gezeigt werden.

2. Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\begin{aligned} h : U &\to \mathbb{R} \\ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} &\mapsto a \end{aligned}$$

ein Ringhomomorphismus von $\langle U, +, \cdot \rangle$ nach $\langle \mathbb{R}, +, \cdot \rangle$ ist.

Aufgabe 9.2 *Ideale* (2+2 Punkte)

Für den Ring der ganzen Zahlen $\langle \mathbb{Z}, +, \cdot \rangle$ ist bekanntlich für $n \in \mathbb{N}$ definiert:

$$n\mathbb{Z} \; =_{df} \{n \cdot z \mid z \in \mathbb{Z}\}.$$

So ist etwa $3\mathbb{Z} = \{0, 3, -3, 6, -6, 9, \ldots\}$.

1. Zeigen Sie, dass $n\mathbb{Z}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ein Ideal von $\mathbb{Z}$ ist.
2. Zeigen Sie, dass es in $\mathbb{Z}$ nur Ideale vom Typ $n\mathbb{Z}$ gibt.

   Hinweis: Betrachten Sie für ein von $\{0\}$ verschiedenes Ideal I die kleinste in I enthaltene positive Zahl n und zeigen Sie $n\mathbb{Z} = I$.

Aufgabe 9.3 *Symmetrische Gruppe* (3+1 Punkt(e))

1. Wir betrachten hier die aus der Vorlesung bekannte symmetrische Gruppe S_3. Sei $h : S_3 \to S_3$ ein Gruppenautomorphismus. Zeigen Sie: h^6 ist die Identität auf S_3, wobei h^6 die 6-malige Funktionskomposition von h sei, also $\underbrace{h \circ h \circ \cdots \circ h}_{6 \text{ mal}}$..

   Hinweis: Überlegen Sie sich, dass 2-Zykel unter h nur auf 2-Zykel abbilden können.
2. Gilt die Behauptung aus Teil (1) auch für beliebige S_3-Homomorphismen?

Aufgabe 9.4 *Iterierte Quersumme* (Bonusaufgabe: 1+2+2+1 Punkt(e))

1. Zeigen Sie, dass $h_9 : \langle \mathbb{Z}, +, \cdot \rangle \to \langle \mathbb{Z}_9, +_9, \cdot_9 \rangle$ mit $h_9(z) =_{df} z \mod 9$ ein Ringepimorphismus ist.
2. Zeigen Sie, dass für die Quersumme $qs(n)$ einer natürlichen Zahl $n \in \mathbb{N}$ gilt:

   $$h_9(n) = h_9(qs(n)).$$
3. Wir definieren wir die *iterierte Quersumme* einer natürlichen Zahl $n \in \mathbb{N}$ induktiv durch:

   $$qs^*(n) \; =_{df} \begin{cases} n & \text{falls } n \leq 9 \\ qs^*(qs(n)) & \text{sonst} \end{cases}$$

   Zeigen Sie, dass dann gilt: $h_9(n) = h_9(qs^*(n))$.
4. Bestimmen Sie unter Benutzung der Aufgabenteile 1) - 3) möglichst einfach:

   $$((123456789 + 88888888888) \cdot 992255) \mod 9.$$