technische universität dortmund

Thomas Schwentick
Gaetano Geck Martin Schuster

Lehrstuhl 1
Logik in der Informatik

WS 2016/17 Übungsblatt 1 24.10.2016

Aufgabe 1.1 [Modellierung] **5 Punkte**

Modellieren Sie die folgenden Situationen mit Hilfe der Aussagenlogik. Geben Sie dazu zunächst die verwendeten aussagenlogischen Variablen **und deren intendierte Bedeutung** an. Stellen Sie anschließend jeweils **eine** aussagenlogische Formel auf, die den Sachverhalt beschreibt.

a) Die Kaffeemaschine gibt nur dann Kaffee aus, wenn Bohnen eingefüllt sind und der Satzbehälter nicht voll ist. **(2 Punkte)**

b) Der kleine Tim hat auf dem Flohmarkt ein elektronisches Spielzeug mit drei Schaltern und zwei Leuchten erstanden und versucht nun, herauszufinden, wie es funktioniert. Folgende Regeln hat er bereits gefunden:

Wenn entweder der rechte oder der mittlere Schalter oben steht, dann leuchtet das grüne Licht. Das blaue Licht leuchtet nicht, wenn der mittlere Schalter oben steht und der linke nicht. Genau dann, wenn nicht alle drei Schalter oben stehen, leuchtet mindestens eines der beiden Lichter. **(3 Punkte)**

Hinweis: Beispielsweise kann die Situation „Wenn der Kaffee heiß ist, kann er nicht getrunken werden.“ durch die aussagenlogischen Variablen

- H: der Kaffee ist heiß
- T: der Kaffee kann getrunken werden

und die aussagenlogische Formel $H \rightarrow \neg T$ modelliert werden.

Lösungsvorschlag:

a) Wir verwenden die aussagenlogischen Variablen K, B und S mit folgender intendierter Bedeutung:

- K: Die Kaffeemaschine gibt Kaffee aus.
- B: Bohnen sind eingefüllt.
- S: Der Satzbehälter ist voll.

Die Situation besagt: Wenn die Kaffeemaschine Kaffee ausgibt, dann sind Bohnen eingefüllt und der Satzbehälter ist nicht voll. Dies kann durch die aussagenlogische Formel $K \rightarrow (B \wedge \neg S)$ modelliert werden.

b) Verwendete aussagenlogische Variablen:

- R: Der rechte Schalter steht oben.
- M: Der mittlere Schalter steht oben.
- L: Der linke Schalter steht oben.

- B: Das blaue Licht leuchtet.
- G: Das grüne Licht leuchtet.

Die Situation besteht aus verschiedenen Teilaussagen, die folgendermaßen als aussagenlogische Formeln modelliert werden können:

- „Wenn entweder der rechte oder der mittlere Schalter oben steht, dann leuchtet das grüne Licht.“:
  $(R \leftrightarrow \neg M) \rightarrow G$
- „Das blaue Licht leuchtet nicht, wenn der mittlere Schalter oben steht und der linke nicht.“:
  $(M \wedge \neg L) \rightarrow \neg B$
- „Genau dann, wenn nicht alle drei Schalter oben stehen, leuchtet mindestens eines der beiden Lichter.“:
  $(\neg(R \wedge M \wedge L)) \leftrightarrow (B \vee G)$

Die gesamte Situation kann durch Konjunktion dieser Teilformeln als aussagenlogische Formel modelliert werden:
$\big((R \leftrightarrow \neg M) \rightarrow G\big) \wedge \big((M \wedge \neg L) \rightarrow \neg B\big) \wedge \big((\neg(R \wedge M \wedge L)) \leftrightarrow (B \vee G)\big)$

Aufgabe 1.2 [Syntax, Semantik und Normalformen] **7 Punkte**

Wir betrachten die aussagenlogische Formel

$$\varphi = \neg((A \wedge \neg B) \vee ((C \rightarrow \neg B) \wedge \neg C))$$

a) Sei die Belegung α durch $\alpha(A) = 1$, $\alpha(B) = 0$ und $\alpha(C) = 0$ gegeben. Bestimmen Sie den Wahrheitswert $[\![\varphi]\!]_\alpha$. Formen Sie φ dafür **nicht** um. **(1 Punkt)**

b) Stellen Sie die Wahrheitstabelle für die Formel φ auf. Geben Sie in der Tabelle die Wahrheitswerte aller Teilformeln von φ an. Formen Sie φ dafür **nicht** um. **(2 Punkte)**

c) Konstruieren Sie mit den Verfahren der Vorlesung **(4 Punkte)**

(i) eine zu φ äquivalente Formel in Negationsnormalform. **[2 Punkte]**

(ii) eine zu φ äquivalente Formel in disjunktiver Normalform. **[2 Punkte]**

Geben Sie die einzelnen Schritte an!

Lösungsvorschlag:

a) Wir wollen den Wahrheitswert von

$$\varphi = \neg(\overbrace{(A \wedge \neg B)}^{\psi_1} \vee \overbrace{(\underbrace{(C \rightarrow \neg B)}_{\psi_2} \wedge \neg C)}^{\psi_3})$$

unter der Belegung α bestimmen:

$\alpha(A)$	$\alpha(B)$	$\alpha(C)$	$[\![\neg B]\!]_\alpha$	$[\![\psi_1]\!]_\alpha$	$[\![\psi_2]\!]_\alpha$	$[\![\neg C]\!]_\alpha$	$[\![\psi_3]\!]_\alpha$	$[\![\psi_1 \vee \psi_3]\!]_\alpha$	$[\![\varphi]\!]_\alpha$
1	0	0	1	1	1	1	1	1	0

Die Formel φ wird unter α zu 0 ausgewertet und ist somit unter α falsch.

b) Mit der Benennung der Teilformeln ψ_1, ψ_2, ψ_3 aus Teil (a) ergibt sich folgende Wahrheitstabelle:

$\alpha(A)$	$\alpha(B)$	$\alpha(C)$	$[\![\neg B]\!]_\alpha$	$[\![\psi_1]\!]_\alpha$	$[\![\psi_2]\!]_\alpha$	$[\![\neg C]\!]_\alpha$	$[\![\psi_3]\!]_\alpha$	$[\![\psi_1 \vee \psi_3]\!]_\alpha$	$[\![\varphi]\!]_\alpha$
0	0	0	1	0	1	1	1	1	0
0	0	1	1	0	1	0	0	0	1
0	1	0	0	0	1	1	1	1	0
0	1	1	0	0	0	0	0	0	1
1	0	0	1	1	1	1	1	1	0
1	0	1	1	1	1	0	0	1	0
1	1	0	0	0	1	1	1	1	0
1	1	1	0	0	0	0	0	0	1

c) **(i)** Bevor φ in NNF gebracht werden kann, ersetzen wir die Abkürzung in φ:

$$\varphi = \neg((A \wedge \neg B) \vee ((C \to \neg B) \wedge \neg C)) \equiv \neg((A \wedge \neg B) \vee ((\neg C \vee \neg B) \wedge \neg C)) =: \varphi'$$

Mit dem Verfahren aus dem Beweis von Satz 2.4 ergibt sich

$$\begin{aligned}
\mathrm{NNF}\,(\varphi') &= \mathrm{NNF}\,(\neg(A \wedge \neg B)) \wedge \mathrm{NNF}\,(\neg((\neg C \vee \neg B) \wedge \neg C)) && (6)\\
&= (\mathrm{NNF}\,(\neg A) \vee \mathrm{NNF}\,(\neg\neg B)) \wedge (\mathrm{NNF}\,(\neg(\neg C \vee \neg B)) \vee \mathrm{NNF}\,(\neg\neg C)) && (7)\\
&= (\neg A \vee B) \wedge ((\mathrm{NNF}\,(\neg\neg C) \wedge \mathrm{NNF}\,(\neg\neg B)) \vee C) && (1),(5),(6)\\
&= (\neg A \vee B) \wedge ((C \wedge B) \vee C) && (5)
\end{aligned}$$

Die Nummern in den Klammern entsprechen jeweils der Nummer der angewendeten Regel.

Alternativ zu dem obigen Verfahren erhält man die NNF von φ auch durch Umformen mit den De Morganschen Regeln:

$$\begin{aligned}
\varphi' &= \neg((A \wedge \neg B) \vee ((\neg C \vee \neg B) \wedge \neg C))\\
&\equiv \neg(A \wedge \neg B) \wedge \neg((\neg C \vee \neg B) \wedge \neg C)\\
&\equiv (\neg A \vee B) \wedge (\neg(\neg C \vee \neg B) \vee C)\\
&\equiv (\neg A \vee B) \wedge ((C \wedge B) \vee C)
\end{aligned}$$

(ii) Um φ in DNF zu bringen, müssen zuerst wieder die Abkürzung in φ ersetzt und φ in NNF gebracht werden:

$$\varphi \equiv (\neg A \vee B) \wedge ((C \wedge B) \vee C)$$

Nun gehen wir analog zu dem Algorithmus aus dem Beweis von Satz 2.5 vor. Mit $\varphi_1 = ((C \wedge B) \vee C)$ gilt $\varphi \equiv (\neg A \vee B) \wedge \varphi_1$; entsprechend Schritt (4) des Algorithmus ersetzen wir dies durch $(\neg A \wedge \varphi_1) \vee (B \wedge \varphi_1)$.

Setzen wir in der Formel $\neg A \wedge \varphi_1 = (\neg A \wedge ((C \wedge B) \vee C))$ die Abkürzung $\varphi_2 = (C \wedge B)$, so erhalten wir entsprechend (3), dass $(\neg A \wedge \varphi_1) \equiv (\neg A \wedge \varphi_2) \vee (\neg A \wedge C)$, also $(\neg A \wedge \varphi_1) \equiv (\neg A \wedge (C \wedge B)) \vee (\neg A \wedge C)$ gilt. Nach Entfernen überflüssiger Klammern ergibt sich daraus die Formel $(\neg A \wedge C \wedge B) \vee (\neg A \wedge C)$, welche in DNF ist

Analog erhalten wir $B \wedge \varphi_1 \equiv (B \wedge C \wedge B) \vee (B \wedge C) \equiv (B \wedge C)$; daraus ergibt sich die DNF von φ zu

$$\varphi \equiv (\neg A \wedge C \wedge B) \vee (\neg A \wedge C) \vee (B \wedge C).$$

Aufgabe 1.3 [Formelentwurf] **2 Punkte**

Konstruieren Sie eine Formel ψ, in der nur die drei Variablen A_1, A_2 und A_3 vorkommen, und die die folgende Eigenschaft hat. Die Formel ψ ist nicht wahr für Belegungen α, für die es $1 \leq i < j \leq 3$ gibt mit $\alpha(A_i) = 1$ und $\alpha(A_j) = 0$. Für alle anderen zu ψ passenden Belegungen ist ψ wahr. Beweisen Sie die Korrektheit Ihrer Konstruktion.

Lösungsvorschlag:

Wir behaupten, dass die Formel $\psi = (A_1 \rightarrow A_2) \wedge (A_2 \rightarrow A_3)$ die gefragte Eigenschaft hat. Betrachten wir die entsprechende Wahrheitstafel:

A_1	A_2	A_3	ψ
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

Aus der Tabelle lässt sich ablesen, dass ψ genau für die Belegungen α falsch ist, für die es ein $1 \leq i < 3$ gibt, so dass $[\![A_i]\!]_\alpha = 1$ und $[\![A_{i+1}]\!]_\alpha = 0$.