

MafI 1 UB05

March 19, 2017

## 5.1 induktives Definieren, strukturelle Induktion

### 5.1.1

$$tm(\top) = \{\top\}$$

$$tm(\perp) = \{\perp\}$$

$$tm(V) = \{V\}$$

$$tm(\neg t_1) = \{\neg t_1\} \cup tm(t_1)$$

$$tm(t_1 \wedge t_2) = \{t_1 \wedge t_2\} \cup tm(t_1) \cup tm(t_2)$$

$$tm(t_1 \vee t_2) = \{t_1 \vee t_2\} \cup tm(t_1) \cup tm(t_2)$$

### 5.1.2

I.A.:

$$t \in \{\top, \perp\} \cup V \subseteq BT$$

$$|tm(t)| = |\{t\}| = 1 \leq 1 = l(t)$$

I.V.:

Die Aussage gelte fuer bel., aber feste  $t_1, t_2 \in BT$ .

I.S.:

(i)

$$|tm(\neg t_1)| = |\{\neg t_1\} \cup tm(t_1)| = |\{\neg t_1, t_1\}| = 2 \leq 2 = 1 + 1 = 1 + l(t_1) = l(\neg t_1)$$

(ii)

$$|tm(t_1 \vee t_2)| = |\{t_1 \vee t_2\} \cup tm(t_1) \cup tm(t_2)| = |\{t_1 \vee t_2, t_1, t_2\}| = 3 \leq 3 = 1 + 1 + 1 = 1 + l(t_1) + l(t_2) = l(t_1 \vee t_2)$$

(iii)

$$|tm(t_1 \wedge t_2)| = |\{t_1 \wedge t_2\} \cup tm(t_1) \cup tm(t_2)| = |\{t_1 \wedge t_2, t_1, t_2\}| = 3 \leq 3 = 1 + 1 + 1 = 1 + l(t_1) + l(t_2) = l(t_1 \wedge t_2)$$

## 5.2 vollstaendige Induktion

### 5.2.1

I.A.:

$$n = 0$$

$$\sum_{k=1}^0 \frac{1}{k*(k+1)} = 0 = 1 - 1 = 1 - \frac{1}{0+1}$$

I.V.:

Die Aussage gelte fuer bel., aber feste  $n \in \mathbb{N}$

I.S.:

z.Z. :

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k*(k+1)} = 1 - \frac{1}{n+2}$$

$$n \rightarrow n + 1$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k*(k+1)} &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k*(k+1)} + \frac{1}{(n+1)*(n+2)} \\ &\stackrel{I.V.}{=} 1 - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)*(n+2)} \\ &= 1 - \frac{1}{(n+1)*(n+2)}(n+2 - (1)) \\ &= 1 - \frac{n+1}{(n+1)*(n+2)} \\ &= 1 - \frac{1}{n+2} \end{aligned}$$

### 5.2.2

I.A.:

$$n = 0$$

$$\sum_{k=0}^0 k^3 = 0 = 0 * (0+1)^2 = \frac{1}{4} * 0^2 * (0+1)^2$$

I.V.:

Die Aussage gelte fuer bel., aber feste  $n \in \mathbb{N}$

I.S.:

z.Z. :

$$\sum_{k=0}^{n+1} k^3 = \frac{1}{4} * (n+1)^2 * (n+2)^2$$

$$n \rightarrow n + 1$$

$$\sum_{k=0}^{n+1} k^3$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^n k^3 + (n+1)^3 \\
&\stackrel{I.V.}{=} \frac{1}{4} * n^2 * (n+1)^2 + (n+1)^3 \\
&= \frac{1}{4} * (n+1)^2 * (n^2 + 4 * (n+1)) \\
&= \frac{1}{4} * (n+1)^2 * (n^2 + 4n + 4) \\
&= \frac{1}{4} * (n+1)^2 * (n+2)^2
\end{aligned}$$

## 5.3 verallgemeinerte Induktion, vollstaendige Induktion

### 5.3.1

I.A.:

fuer  $a_i, i \in 0, 1, 2$

$$a_0 = 0 = fib(0)$$

$$a_1 = 1 = fib(1)$$

$$a_2 = 1 = fib(0) + fib(1) = fib(2)$$

I.V.:

Die Aussage gelte fuer alle Vorgaenge von  $n < 3, n \in \mathbb{N}$

I.S.:

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{2} * a_{n-3} + \frac{1}{2} * 3 * a_{n-2} + \frac{1}{2} * a_{n-1} = \frac{1}{2} * (a_{n-3} + 3 * a_{n-2} + a_{n-1}) \\
&= \frac{1}{2} * (a_{n-3} + 2 * a_{n-2} + fib(n-2) + fib(n-1)) \\
&= \frac{1}{2} * (a_{n-3} + a_{n-2} + a_{n-2} + fib(n)) \\
&= \frac{1}{2} * (fib(n-3) + fib(n-2) + fib(n-2) + fib(n)) \\
&= \frac{1}{2} * (fib(n-1) + fib(n-2) + fib(n)) \\
&= \frac{1}{2} * (2 * fib(n)) \\
&= fib(n)
\end{aligned}$$

### 5.3.2

I.A.:

$$n = 0$$

$$0^2 + 0 + 2 = 2 \leftarrow gerade$$

I.V.:

Die Aussage gelte fuer bel., aber festes  $n \in \mathbb{N}$

I.S.:

z.z.:

$$(n+1)^2 + n + 3 \leftarrow \text{gerade}$$

$$n \rightarrow n+1$$

$$(n+1)^2 + n + 3 = (n+1) * ((n+1) + 1) + 2$$

$$= (n+1) * (n+2) + 2$$

$$= (n^2 + 3n + 2) + 2$$

$$= (n^2 + n + 2) + 2n + 2$$

Nach I.V. ist  $(n^2 + n + 2)$  gerade.

Eine moegliche Def. fuer alle geraden zahlen  $G$  waere  $G = \{2 * n | n \in \mathbb{N}\}$

Offensichtlich gilt: (i)  $2n, 2 \in G$

(ii) und dass die Addition von nur geraden Zahlen eine gerade Zahl ergibt.

Damit gilt  $\forall n \in \mathbb{N}. n^2 + n + 2$  ist gerade

## 5.4 Teilbarkeitsrelation

### 5.4.1

- reflexiv, da  $\forall x \in \mathbb{N}. x|x$  ( $k = 1$ )

- transitiv, da  $\forall x, y, z \in \mathbb{N}. x|y \wedge y|z \Rightarrow x|z$  ( $x * k = z$ )

noch zu zeigen:

Teilbarkeitsrelation ist noethersch(!)

bzw. jede nichtleere Teilmenge muss bzgl. "I" ein minimales Element besitzen.

Sei  $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{N}$

Ein minimales Element  $A$  ist ein Element, das keine Teiler hat.

0 wird von jeder Zahl  $n \in \mathbb{N}$  geteilt.

daher kann 0 nur ein min. Element sein, wenn  $A = \{0\}$

hat  $A$  mehr Elemente, so ist das naechst kleinste Element das minimale Element.

Beweis durch Widerspruch:

$A = \{0, n, \dots\}$

Annahme  $n$  sei Teiler:

$\exists m \in A. m|n$

(i)  $m = 0$

$0|n$ , bzw.  $\frac{n}{0} \nexists$

(ii)  $m = n$

$n|n$ , bzw.  $\frac{n}{n} \checkmark$

(iii)  $m > n$

$\nexists$ , da  $m \not\leq n$

Somit auch noethersch Ordnung

### 5.4.2