

MafI 1 UB05

March 19, 2017

5.1 induktives Definieren, strukturelle Induktion

5.1.1

$$\begin{aligned}tm(\top) &= \{\top\} \\tm(\perp) &= \{\perp\} \\tm(V) &= \{V\} \\tm(\neg t_1) &= \{\neg t_1\} \cup tm(t_1) \\tm(t_1 \wedge t_2) &= \{t_1 \wedge t_2\} \cup tm(t_1) \cup tm(t_2) \\tm(t_1 \vee t_2) &= \{t_1 \vee t_2\} \cup tm(t_1) \cup tm(t_2)\end{aligned}$$

5.1.2

I.A.:

$$\begin{aligned}t &\in \{\top, \perp\} \cup V \subseteq BT \\|tm(t)| &= |\{t\}| = 1 \leq 1 = l(t)\end{aligned}$$

I.V.:

Die Aussage gelte fuer bel., aber feste $t_1, t_2 \in BT$.

I.S.:

(i)

$$|tm(\neg t_1)| = |\{\neg t_1\} \cup tm(t_1)| = |\{\neg t_1, t_1\}| = 2 \leq 2 = 1 + 1 = 1 + l(t_1) = l(\neg t_1)$$

(ii)

$$\begin{aligned}|tm(t_1 \vee t_2)| &= |\{t_1 \vee t_2\} \cup tm(t_1) \cup tm(t_2)| = |\{t_1 \vee t_2, t_1, t_2\}| = 3 \leq 3 = 1 + 1 + 1 = \\&1 + l(t_1) + l(t_2) = l(t_1 \vee t_2)\end{aligned}$$

(iii)

$$\begin{aligned}|tm(t_1 \wedge t_2)| &= |\{t_1 \wedge t_2\} \cup tm(t_1) \cup tm(t_2)| = |\{t_1 \wedge t_2, t_1, t_2\}| = 3 \leq 3 = 1 + 1 + 1 = \\&1 + l(t_1) + l(t_2) = l(t_1 \wedge t_2)\end{aligned}$$

5.2 vollstaendige Induktion

5.2.1

I.A.:

$$n = 0$$

$$\sum_{k=1}^0 \frac{1}{k*(k+1)} = 0 = 1 - 1 = 1 - \frac{1}{0+1}$$

I.V.:

Die Aussage gelte fuer bel., aber feste $n \in \mathbb{N}$

I.S.:

$$\text{z.Z.:} \quad \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k*(k+1)} = 1 - \frac{1}{n+2}$$

$$\begin{aligned} n &\rightarrow n+1 \\ \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k*(k+1)} &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k*(k+1)} + \frac{1}{(n+1)*(n+2)} \\ &\stackrel{I.V.}{=} 1 - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)*(n+2)} \\ &= 1 - \frac{1}{(n+1)*(n+2)}(n+2 - (1)) \\ &= 1 - \frac{n+1}{(n+1)*(n+2)} \\ &= 1 - \frac{1}{n+2} \end{aligned}$$

5.2.2

I.A.:

$$n = 0$$

$$\sum_{k=0}^0 k^3 = 0 = 0 * (0+1)^2 = \frac{1}{4} * 0^2 * (0+1)^2$$

I.V.:

Die Aussage gelte fuer bel., aber feste $n \in \mathbb{N}$

I.S.:

$$\text{z.Z.:} \quad \sum_{k=0}^{n+1} k^3 = \frac{1}{4} * (n+1)^2 * (n+2)^2$$

$$\begin{aligned} n &\rightarrow n+1 \\ \sum_{k=0}^{n+1} k^3 &= \sum_{k=0}^n k^3 + (n+1)^3 \\ &\stackrel{I.V.}{=} \frac{1}{4} * n^2 * (n+1)^2 + (n+1)^3 \\ &= \frac{1}{4} * (n+1)^2 * (n^2 + 4 * (n+1)) \\ &= \frac{1}{4} * (n+1)^2 * (n^2 + 4n + 4) \\ &= \frac{1}{4} * (n+1)^2 * (n+2)^2 \end{aligned}$$

5.3 verallgemeinerte Induktion, vollstaendige Induktion

5.3.1

I.A.:

fuer $a_i, i \in 0, 1, 2$

$$a_0 = 0 = fib(0)$$

$$a_1 = 1 = fib(1)$$

$$a_2 = 1 = fib(0) + fib(1) = fib(2)$$

I.V.:

Die Aussage gelte fuer alle Vorgaenge von $n \leq 3, n \in \mathbb{N}$

I.S.:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{2} * a_{n-3} + \frac{1}{2} * 3 * a_{n-2} + \frac{1}{2} * a_{n-1} = \frac{1}{2} * (a_{n-3} + 3 * a_{n-2} + a_{n-1}) \\ &= \frac{1}{2} * (a_{n-3} + 2 * a_{n-2} + fib(n-2) + fib(n-1)) \\ &= \frac{1}{2} * (a_{n-3} + a_{n-2} + a_{n-2} + fib(n)) \\ &= \frac{1}{2} * (fib(n-3) + fib(n-2) + fib(n-2) + fib(n)) \\ &= \frac{1}{2} * (fib(n-1) + fib(n-2) + fib(n)) \\ &= \frac{1}{2} * (2 * fib(n)) \\ &= fib(n) \end{aligned}$$

5.3.2

I.A.:

$$n = 0$$

$$0^2 + 0 + 2 = 2 \leftarrow \text{gerade}$$

I.V.:

Die Aussage gelte fuer bel., aber feste $n \in \mathbb{N}$

I.S.:

z.z. :

$$(n+1)^2 + n + 3 \leftarrow \text{gerade}$$

$$n \rightarrow n+1$$

$$(n+1)^2 + n + 3 = (n+1) * ((n+1) + 1) + 2$$

$$= (n+1) * (n+2) + 2$$

$$= (n^2 + 3n + 2) + 2$$

$$= (n^2 + n + 2) + 2n + 2$$

Nach I.V. ist $(n^2 + n + 2)$ gerade. Eine moegliche Def. fuer gerade zahlen waere

$$G = \{2 * n | n \in \mathbb{N}\}$$

Offensichtlich gilt $2n, 2 \in G$ und dass die Addition von nur geraden Zahlen eine gerade Zahl ergibt.

Damit gilt $\forall n \in \mathbb{N}. n^2 + n + 2 \text{ ist gerade}$

5.4 Teilbarkeitsrelation

5.4.1

- reflexiv, da $\forall x \in \mathbb{N}. x|x$ ($k = 0$)

- transitiv, da $\forall x, y, z \in \mathbb{N}. x|y \wedge y|z \Rightarrow x|z$ ($x * k = z$)

noch zu zeigen:

Teilbarkeitsrelation ist noethersch(!)

bzw. jede nichtleere Teilmenge bzgl. "I" ein minimales Element besitzt.

Sei $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{N}$

Ein minimales Element A ist ein Element, das keine Teiler hat.

0 wird von jeder Zahl $n \in \mathbb{N}$ geteilt.

daher kann 0 nur ein min. Element sein, wenn $A = \{0\}$

hat A mehr Elemente, so ist das naechst kleinste Element das minimale Element.

Beweis durch Widerspruch:

$A = \{0, n, ..\}$

Annahme n sei Teiler:

$\exists m \in A. m|n$

(i) $m = 0$

$0|n$, bzw. $\frac{n}{0} \nexists$

(ii) $m = n$

$n|n$, bzw. $\frac{n}{n} \checkmark$

(iii) $m > n$

\nexists , da $m \not\leq n$

Somit auch noethersch Ordnung

5.4.2