

Aufgabe 9.1 [Interpretation]

Es sei die folgende Formel φ über der Signatur $\{P, f\}$ gegeben:

$$\varphi(x) = \forall z(P(x, z) \rightarrow \exists y(f(y) = z))$$

Werten Sie φ unter der folgenden Interpretation $I = (\mathcal{A}, \beta)$ aus:

- Grundmenge sind die natürlichen Zahlen \mathbb{N} .
- $P^{\mathcal{A}} = \{(a, b) \mid a \text{ teilt } b\}$
- $f^{\mathcal{A}}(a) = 2a$ für alle $a \in \mathbb{N}$
- $\beta(x) = 2$

Gehen Sie dabei so vor wie in der Vorlesung beschrieben.

Aufgabe 9.2 [Normalformen]

Wandeln Sie die Formeln

$$\varphi = R(x) \vee \forall x(\neg \exists x R(g(x)) \wedge \exists y S(x, y))$$

$$\psi = \forall x(\exists y(P(x, g(y)) \vee \exists y P(z, y)) \wedge \neg \exists z \neg P(x, z))$$

zunächst jeweils in eine äquivalente Formel in Pränexform und dann in eine erfüllbarkeitsäquivalente Formel in Skolemform um. Sie müssen dazu nicht notwendigerweise den in der Vorlesung vorgestellten Algorithmus verwenden. Begründen Sie aber bei jedem Umwandlungsschritt, warum die betroffenen Formeln äquivalent sind.

Aufgabe 9.3 [Genetik]

Eine wissenschaftliche Studie über die Genetik von Affen ergab neue Erkenntnisse bzgl. des Auftretens eines bestimmten genetischen Defekts bei Schimpansen. Danach lassen sich folgende Schlussfolgerungen über die Vererbung dieses Defekts ziehen:

1. Der Defekt tritt bei einem Schimpansen nur dann auf, wenn er in einer der beiden letzten Generationen bei einem weiblichen Vorfahren aufgetreten ist.
2. Hat das Mutter- oder das Vätertier eines Schimpansen den Defekt, so auch er selbst oder eines seiner Geschwistertiere (Schimpansen mit den gleichen Elterntieren).
3. Der Defekt tritt bei einem Schimpansen nicht auf, falls alle Vorfahren väterlicherseits oder alle mütterlicherseits diesen nicht besitzen.

Wir wollen diese Situation mit Hilfe der Prädikatenlogik modellieren.

- a) Beschreiben Sie zunächst wie sich diese Situation durch eine Struktur modellieren lässt. Beantworten Sie also insbesondere folgende Fragen:
 - Was ist die Grundmenge?
 - Welche Relationen und Funktionen werden benötigt? Welche Stelligkeit haben sie? Welche Bedeutung haben sie?
 - Werden auch Konstanten benötigt? Falls ja, geben Sie ihre Bedeutung an.
- b) Formalisieren Sie die Aussagen (1)-(3) in der Prädikatenlogik mit Gleichheit. Verwenden Sie dabei die Methode aus der Vorlesung. Das heißt, formulieren Sie die Aussage zuerst als eine ‘formelähnliche’ umgangssprachliche Aussage, und erst danach als Formel.
- c) Geben Sie für Ihre Formeln aus b) jeweils eine äquivalente Formel in Pränexform an.