UB 08

Max Springenberg

15. März 2017

8.1

8.1.1

Gruppe: Monoid = inverses Element
Monoid: neutrales Element, Halbgruppe
Halbgruppe: Assoziativität
endliche Gruppe: endliche Anzahl der Elemente, neutrales Element, inversees Element, Assoziativität

$h :< G, \oplus > \times < G, \oplus > \rightarrow < G, \oplus >' x$
$\forall a, b, c \in G.h(a) = a \oplus x = h(b) = b \oplus x$
$\Leftrightarrow h(a) = h(b)$
$\Leftrightarrow a \oplus x = b \oplus x \Leftrightarrow a = b$

8.1.2

$\oplus$	a	b	c	d	e	f
a	f	d	e	b	c	a
b	e	f	d	c	a	b
c	d	e	f	a	b	c
d	c	a	b	e	f	d
e	b	c	a	f	d	e
f	a	b	c	d	e	f

8.2

8.2.1

$T = \{\lambda_a | a \in G\}$
$\lambda_a(x) = a \oplus x$
$< T, \circ >$
$\forall a, b, c \in T$

$Assoziativität:$
$\lambda_a \circ (\lambda_a \circ \lambda_c(x))$
$= \lambda_a \circ (\lambda_b \circ (\lambda_c(x)))$
$= \lambda_a(\lambda_b(\lambda_c(x)))$
$= \lambda_a(\lambda_b(c \oplus x))$
$= \lambda_a(b \oplus c \oplus)$
$= (a \oplus b \oplus c \oplus x)$
$= (a \oplus b) \circ \lambda_c(x)$
$= (\lambda_a(b \oplus e)) \circ \lambda_c(x)$
$= (\lambda_a \circ \lambda_b) \circ \lambda_c(x)$

neutrales Element:
$\lambda_a \circ \lambda_e(x)$
$= a \oplus e \oplus x$
$= a \oplus x$
$= e \oplus a \oplus x$
$\lambda_e \circ \lambda_a(x)$

inverses Element:
$\lambda_a \circ \lambda_{a^{-1}}(x) = \lambda_e(x)$
$a \oplus a^{-1} \oplus x = e \oplus x$

8.2.2

$h :< G, \oplus > \rightarrow < T, \circ >$
$h(a) = \lambda_a$
$h(a \oplus b) =^! h(a) \circ h(b)$
$h(a \oplus b) = \lambda_{a \oplus b}(x)$
$= a \oplus b \oplus x$
$= \lambda_a(b \oplus x)$
$= \lambda_a(\lambda_b(x))$
$= \lambda_a \circ \lambda_b(x)$
$= h(a) \circ h(b)$

8.3

8.3.1

$< A, \oplus, \odot > B \subseteq A$
$< \{a \in A | b \odot a = a \odot b, \forall b \in B\}, \oplus, \odot >$ ist Unterring von $< A, \oplus, \odot >$

Tipp:
$(\forall a, b \in A : a \odot (-b) = (-a) \odot b = -(a \odot b) \wedge (-a) \odot (-b) = a \odot b)$

Kriterien Bezüglich des Plusoperanden:
Assoziativität:
Aus $A' \subseteq A$ folgt, dass $\forall a, c, d \in A'.a \oplus (c \oplus d) = (a \oplus c) \oplus d$ gilt.

neutrales Element:
$b \odot 0 = 0 \odot b \Rightarrow 0 in jedem A'$ (Folie 272)

inverses Element:
$b \odot (-a) = -(b \odot a) = -(a \odot b) = (-a) \odot b$

Kommutativität:
$\forall a, c \in A'.a \oplus c = c \oplus a$, da $A' \subseteq A$

Kriterien Bezüglich des Maloperanden:
Assoziativität:
$\forall a, c, d \in A.a \odot (c \odot d) = (a \odot c) \odot d$, da $A' \subseteq A$

8.3.2

Ring mit $0 = 1$ sei ein Nullring!
Annahme $a \in R \wedge a \neq 0$
$a \odot 1 = a$ ↯
$0 = 1$ *müsste* $a \odot 1 = 0$