lehrstuhl für programmiersysteme
Prof. Dr. B. Steffen

technische universität dortmund

Markus Frohme – Dawid Kopetzki – Oliver Rüthing – Philip Zweihoff

Übungen zur Vorlesung

Mathematik für Informatik 1

Wintersemester 2016/17

Übungsblatt 5

Für die Abgabe der Bearbeitungen stehen den Übungsgruppen Briefkästen im Verbindungsflur Erdgeschoss OH 14 - OH 12 zu zur Verfügung.
Die den einzelnen Übungsgruppen zugeteilten Briefkästen sind durch die Gruppennummer gekennzeichnet. Sie sind ferner mit dem Namen der Veranstaltung sowie Zeit und Ort der Übung kenntlich gemacht.

Bitte werfen Sie Ihre Bearbeitungen in den Ihrer Übungsgruppe zugeteilten Briefkasten bis zur unten aufgeführten Abgabefrist ein!

Schreiben Sie unbedingt immer Ihren vollständigen Namen, Ihre Matrikelnummer und Ihre Gruppennummer auf Ihre Abgaben!

Abgabefrist: 25.11.2016, 14:00 Uhr

Aufgabe 5.1 *Induktives Definieren, Strukturelle Induktion* (2+2 Punkte)
In Beispiel 4.10 (S. 103f) finden Sie eine BNF für Boolesche Terme $\mathcal{BT}$ über einer Variablenmenge $\mathcal{V}$. Seien t, t_1, t_2 boolesche Terme. Die Funktion $l : \mathcal{BT} \to \mathbb{N}$ berechnet induktiv die Länge eines booleschen Terms t. Sie ist definiert durch:

$$l(t) = \begin{cases} 1 & \textit{falls } t \in \{\mathsf{T}, \mathsf{F}\} \cup \mathcal{V} \\ 1 + l(t_1) + l(t_2) & \textit{falls } t = (t_1 \vee t_2) \textit{ oder } t = (t_1 \wedge t_2) \\ 1 + l(t_1) & \textit{falls } t = \neg t_1, \end{cases}$$

1. Definieren Sie eine **induktive** Funktion $tm : \mathcal{BT} \to \mathcal{P}(\mathcal{BT})$ die eine Formel $t \in \mathcal{BT}$ auf die Menge ihrer Teilformeln abbildet.

   Beispiel:
   $$tm(((X \wedge Y) \vee \neg \mathsf{T})) = \{((X \wedge Y) \vee \neg \mathsf{T}), \neg \mathsf{T}, \mathsf{T}, (X \wedge Y), X, Y\}$$

2. Beweisen Sie, dass für alle $t \in \mathcal{BT}$
   $$|tm(t)| \leq l(t)$$
   gilt.

Aufgabe 5.2 *Vollständige Induktion* (2+2 Punkte)

Zeigen Sie mithilfe der vollständiger Induktion, dass die folgenden Gleichungen für alle $n \in \mathbb{N}$ gelten.

1. $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}$
2. $\sum\limits_{k=0}^{n} k^3 = \frac{1}{4} n^2(n+1)^2$

Aufgabe 5.3 *Verallgemeinerte Induktion, vollständige Induktion* (2+2 Punkte)

1. Eine Folge $a_0, a_1, \ldots$ von natürlichen Zahlen sei wie folgt definiert:

$$\begin{aligned} a_0 &= 0 \\ a_1 &= 1 \\ a_2 &= 1 \\ a_n &= \frac{1}{2}a_{n-3} + \frac{3}{2}a_{n-2} + \frac{1}{2}a_{n-1} \text{ für } n \geq 3. \end{aligned}$$

   Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $a_n = fib\,(n)$.
   (fib bezeichnet hierbei die Fibonacci-Funktion.)

2. Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$n^2 + n + 2 \text{ ist gerade.}$$

Aufgabe 5.4 (Bonusaufgabe: 2+2 Punkte)

Die Teilbarkeitsrelation $| \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ist definiert durch $a \mid b \Leftrightarrow_{df} (\exists k \in \mathbb{N}.\ b = a \cdot k)$.

1. Zeigen Sie, dass die Teilbarkeitsrelation eine Noethersche Ordnung ist.
2. Benutzen Sie die Tatsache, dass die Teilbarkeitsrelation eine Noethersche Ordnung ist, um die folgende Aussage zu beweisen: Für alle natürlichen Zahlen $n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$ gilt, dass n entweder eine Primzahl ist oder sich als Produkt von Primzahlen schreiben lässt, d.h.

$$\forall n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}.\ (n \in \mathit{Prim}) \vee \left(\exists k \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}.\ \exists p_1, \ldots, p_k \in \mathit{Prim}.\ n = \prod_{i=1}^{k} p_i\right).$$

   Erinnerung: Die Menge der Primzahlen ist definiert durch

$$\mathit{Prim} =_{df} \{p \in \mathbb{N} \mid p \neq 1 \wedge \{t \mid t \in \mathbb{N} \wedge t \mid p\} = \{1, p\}\},$$

   d.h. eine Zahl $n \geq 2$ ist prim, wenn sie nur von 1 und sich selbst geteilt wird.