

Aufgabe 8.1 [Signaturen, Teilformeln, freie und gebundene Variablen]

a) Betrachten Sie die folgenden Formeln:

$$\varphi = \exists x R(g(a), x) \wedge \forall y (\exists z S(y, y, f(z)) \vee R(x, a))$$

$$\psi = P(x) \vee \exists z (P(z) \wedge Q(g(f(x)), f(y)) \wedge \exists x \forall y (Q(y, g(z)) \vee P(x) \vee P(c))).$$

Bestimmen Sie jeweils die Signatur, alle atomaren Teilformeln und alle vorkommenden Terme. Welche dieser Terme sind Grundterme? Entscheiden Sie außerdem für jedes Vorkommen einer Variablen, ob es frei oder gebunden ist. Welche Variablen sind frei?

b) Sei die Signatur $\sigma = (R, S, f, g, c)$ gegeben, wobei R ein zweistelliges, S ein dreistelliges Relationensymbol ist, f ein einstelliges Funktionensymbol, g ein zweistelliges Funktionensymbol sowie c ein Konstatensymbol. Welche der folgenden Zeichenketten sind syntaktisch korrekte prädikatenlogische Formeln über der Signatur σ ?

1. $\exists x R(c, y)$
2. $\exists x R(x, x, a)$
3. $\exists x R(x, f(g(x, c)))$
4. $\exists x S(R(c, x), c, c)$
5. $\exists x \forall y R(x, y) \wedge \forall y (f(y) = c)$
6. $\exists x \exists y (g(x, y))$

Aufgabe 8.2 [Bundesliga]

Wir wollen typische Stammtischaussagen zur Bundesliga mit Hilfe der Prädikatenlogik modellieren. Eine Bundesligasaison lässt sich dabei wie folgt durch eine Struktur $\mathcal{A} = (A, M^{\mathcal{A}}, S^{\mathcal{A}}, T^{\mathcal{A}}, n^{\mathcal{A}}, e^{\mathcal{A}}, l^{\mathcal{A}}, d^{\mathcal{A}}, s^{\mathcal{A}})$ über der Signatur (M, S, T, n, e, l, d, s) modellieren:

- Die Grundmenge A enthält alle Spieltage sowie alle Mannschaften.
 - Es gibt unäre Relationen $M^{\mathcal{A}}$ und $S^{\mathcal{A}}$, wobei
 - $M^{\mathcal{A}}$ die Mannschaften, und
 - $S^{\mathcal{A}}$ die Spieltage
 enthält.
 - Die ternäre Relation $T^{\mathcal{A}}$ enthält ein Tupel (t, m_1, m_2) , wenn Mannschaft m_1 am Spieltag t in der Tabelle vor Mannschaft m_2 steht.
 - Die unäre Funktion $n^{\mathcal{A}}$ ordnet jedem Spieltag den Folgespieltag zu. Der letzte Spieltag wird von $n^{\mathcal{A}}$ auf sich selbst abgebildet. Alle anderen Elemente werden ebenfalls auf sich selbst abgebildet.
 - Die Konstanten $e^{\mathcal{A}}$ und $l^{\mathcal{A}}$ sind mit dem ersten bzw. letzten Spieltag belegt. Die Konstante $d^{\mathcal{A}}$ entspricht dem BVB, die Konstante $s^{\mathcal{A}}$ entspricht Schalke 04.
- a) Geben Sie die Grundmenge A , die Relation $S^{\mathcal{A}}$, die Funktion $n^{\mathcal{A}}$ sowie die Konstanten $e^{\mathcal{A}}$ und $l^{\mathcal{A}}$ für eine Struktur \mathcal{A} an, die eine typische Bundesliga-Saison modelliert.
- b) Übersetzen Sie die folgenden Aussagen in prädikatenlogische Formeln (mit Gleichheit):
- (i) Mannschaften, die an einem Spieltag in der Tabelle hinter Schalke liegen, liegen an diesem Spieltag auch hinter Dortmund.
 - (ii) Dortmund ist Meister.
 - (iii) Nur wenn Schalke sowohl am ersten Spieltag als auch an einem weiteren Spieltag erster der Tabelle ist, werden sie auch Meister.
- c) Geben Sie zu den folgenden prädikatenlogischen Formeln eine umgangssprachliche Formulierung an:
- (i) $\forall x(M(x) \leftrightarrow \neg S(x)) \wedge M(s) \wedge M(d)$
 - (ii) $(\forall x(S(x) \rightarrow T(x, d, s))) \rightarrow (\forall x((M(x) \wedge \neg(x = s)) \rightarrow T(l, x, s)))$
 - (iii) $\forall x \forall y \forall z((M(x) \wedge M(y) \wedge S(z) \wedge T(z, x, y)) \rightarrow (\exists y T(n(z), x, y)))$