technische universität dortmund

Thomas Schwentick
Gaetano Geck Martin Schuster

Lehrstuhl 1
Logik in der Informatik

WS 2016/17 **Übungsblatt 5** 19.12.2016

Aufgabe 5.1 [Musikdatenbank] **8 Punkte**

In dieser Aufgabe wollen wir eine einfache Musikdatenbank durch prädikatenlogische Strukturen modellieren. Diese Datenbank soll Informationen über Alben, Bands und Künstler speichern, wobei eine Band generell aus mehreren Künstlern besteht und ein Album entweder von einer Band oder (als Soloalbum) von einem einzelnen Künstler aufgenommen wurde.

Die Modellierung einer solchen Datenbank als Struktur $\mathcal{A}$ über der Signatur $\{L, B, K, M, f\}$ sieht folgendermaßen aus:

- Die Grundmenge A enthält die Alben, die Bands und die Künstler.
- Es gibt die unären Relationen $L^{\mathcal{A}}$, $B^{\mathcal{A}}$ und $K^{\mathcal{A}}$, wobei
  - $L^{\mathcal{A}}$ die Alben,
  - $B^{\mathcal{A}}$ die Bands, und
  - $K^{\mathcal{A}}$ die Künstler

  enthält.
- Die binäre Relation $M^{\mathcal{A}}$ beschreibt die Mitglieder von Bands, d.h. sie enthält für jeden Künstler k der Mitglied der Band b ist, ein Paar (k, b).
- Die unäre Funktion $f^{\mathcal{A}}$ ordnet jedem Album die Band oder den Künstler zu, die oder der das Album aufgenommen hat. Für alle anderen Elemente a der Grundmenge ist $f^{\mathcal{A}}$ die Identität, d.h. $f^{\mathcal{A}}(a) = a$.

a) Wir betrachten die folgenden Informationen für eine Musikdatenbank:

- Die Alben *Revolver* und *Abbey Road* wurden von der Band *The Beatles* aufgenommen, welche aus den Künstlern John Lennon, Paul McCartney, George Harrison und Ringo Starr besteht.
- Das Album *The Times They Are a-Changin'* wurde von dem Künstler Bob Dylan aufgenommen.
- Das Album *Traveling Wilburys Vol. 1* wurde von der Band *Traveling Wilburys* aufgenommen, welche aus den Künstlern Bob Dylan, George Harrison, Jeff Lynne, Roy Orbison und Tom Petty besteht.

Geben Sie eine Struktur $\mathcal{A} = (A, L^{\mathcal{A}}, B^{\mathcal{A}}, K^{\mathcal{A}}, M^{\mathcal{A}}, f^{\mathcal{A}})$ an, die diese Daten beschreibt. **(1 Punkt)**

b) Geben Sie prädikatenlogische Formeln mit Gleichheit über der Signatur $\{L, B, K, M, f\}$ für die folgenden Bedingungen an. Verwenden Sie dabei die Methode aus der Vorlesung. Das heißt, formulieren Sie eine Aussage zuerst als eine 'formelähnliche' natürlichsprachliche Aussage und erst danach als Formel.

(i) Jede Band hat mindestens ein Mitglied, das auch selbst ein Album aufgenommen hat. **[2 Punkte]**

(ii) Jeder Künstler hat ein Album aufgenommen oder gehört einer Band an, die ein Album aufgenommen hat. **[2 Punkte]**

Hinweis: In prädikatenlogischen Formeln mit Gleichheit kann neben den Relationssymbolen aus der Signatur zusätzlich das 2-stellige Relationssymbol „=" verwendet werden. Für = erlauben wir immer nur die Interpretation $\{(a, a) \mid a \in A\}$, wobei A die Grundmenge ist. Wir schreiben „$t_1 = t_2$" statt „$=(t_1, t_2)$".

c) Geben Sie zu den folgenden Formeln jeweils eine prägnante natürlichsprachliche Formulierung an. Begründen Sie Ihre Antworten durch Angabe einer 'formelähnlichen' Aussage als Zwischenschritt.

(i) $\varphi_{\text{i}} = \exists x\Big(B(x) \land \forall y\big(M(y, x) \to \exists z(L(z) \land f(z) = y)\big)\Big)$ **[1 Punkt]**

(ii) $\varphi_{\text{ii}} = \forall x \forall y\Big(\big(B(x) \land B(y) \land \neg(x = y)\big) \to \exists z\big(K(z) \land \neg(M(z, x) \leftrightarrow M(z, y))\big)\Big)$ **[1 Punkt]**

d) Die Musikdatenbank soll so erweitert werden, dass sie auch Informationen über einzelne Songs enthält. Dabei hat jeder Song einen (eindeutigen) Autor und kann auf mehreren Alben enthalten sein.

Wie kann die Signatur $\{L, B, K, M, f\}$ verändert werden, damit diese Aspekte modelliert werden können? **(1 Punkt)**

Lösungsvorschlag:

a) Die Daten können durch die Struktur $\mathcal{A} = (A, L^{\mathcal{A}}, B^{\mathcal{A}}, K^{\mathcal{A}}, M^{\mathcal{A}}, f^{\mathcal{A}})$ mit

- $A = \{\text{john}, \text{paul}, \text{george}, \text{ringo}, \text{bob}, \text{jeff}, \text{roy}, \text{tom}, \text{beatles}, \text{wilburys}, \text{revolver}, \text{abbey-road}, \text{the-times}, \text{wilburys-vol-1}\}$,
- $L^{\mathcal{A}} = \{\text{revolver}, \text{abbey-road}, \text{the-times}, \text{wilburys-vol-1}\}$,
- $B^{\mathcal{A}} = \{\text{beatles}, \text{wilburys}\}$,
- $K^{\mathcal{A}} = \{\text{john}, \text{paul}, \text{george}, \text{ringo}, \text{bob}, \text{jeff}, \text{roy}, \text{tom}\}$,
- $M^{\mathcal{A}} = \{(\text{john}, \text{beatles}), (\text{paul}, \text{beatles}), (\text{george}, \text{beatles}), (\text{ringo}, \text{beatles}), (\text{bob}, \text{wilburys}), (\text{george}, \text{wilburys}), (\text{jeff}, \text{wilburys}), (\text{roy}, \text{wilburys}), (\text{tom}, \text{wilburys})\}$ und
- $f^{\mathcal{A}}(\text{revolver}) = \text{beatles}$, $f^{\mathcal{A}}(\text{abbey-road}) = \text{beatles}$, $f^{\mathcal{A}}(\text{the-times}) = \text{bob}$, $f^{\mathcal{A}}(\text{wilburys-vol-1}) = \text{wilburys}$, $f^{\mathcal{A}}(i) = i$ für alle anderen $i \in A$.

b) **(i)** Die Bedingung kann umgeformt werden zu: „Für jede Band x gibt es einen Künstler y, der ein Mitglied von x ist und für den ein Album z existiert, das von y aufgenommen wurde.“

Das kann durch die folgende Formel modelliert werden:

$$\forall x\Big(B(x) \to \exists y\big(K(y) \wedge M(y,x) \wedge \exists z\big(L(z) \wedge f(z) = y\big)\big)\Big)$$

(ii) Die Bedingung kann umgeformt werden zu: „Für jeden Künstler x gilt, dass es ein Album y gibt, das von x aufgenommen wurde oder das von einer Band aufgenommen wurde, deren Mitglied x ist. “

Das kann durch die folgende Formel modelliert werden:

$$\forall x\Big(K(x) \to \exists y\big(L(y) \wedge \big(f(y) = x \vee (B(f(y)) \wedge M(x, f(y)))\big)\big)\Big)$$

c) **(i)** Die Formel φ_{i} entspricht der Bedingung

„Es existiert eine Band x, so dass für alle Mitglieder y von x gilt, dass ein Album z existiert, das von y aufgenommen wurde.“

Anders ausgedrückt:
„Es gibt eine Band, deren Mitglieder alle ein Soloalbum aufgenommen haben.“

(ii) Die Formel φ_{ii} entspricht der Bedingung

„Für je zwei Bands x und y, die voneinander verschieden sind, existiert ein Künstler z, der entweder Mitglied von x oder von y ist.“

Anders ausgedrückt:
„Je zwei verschiedene Bands unterscheiden sich in mindestens einem Mitglied.“

d) Die Grundmenge wird um die Menge aller Songs erweitert, zusätzlich wird eine unäre Relation S in die Signatur aufgenommen, die alle Songs enthält. Eine unäre Funktion g ordnet jedem Song s seinen Autor $g(s)$ zu, und eine binäre Relation E enthält alle Paare (s, a) für die der Song s auf dem Album a enthalten ist.

Aufgabe 5.2 [Normalformen] **4 Punkte**

Wandeln Sie die Formel

$$\varphi = \forall x_1 \forall x_2\Big(\forall x_3 P(f(x_1, g(x_3))) \to \big(Q(g(a), f(x_1, x_2)) \wedge \neg\exists x_4 Q(g(x_3), x_4)\big)\Big)$$

zunächst in eine äquivalente Formel in Pränexform um. Wandeln Sie dann die resultierende Formel in eine erfüllbarkeitsäquivalente Formel in Skolemform um.
Sie müssen bei der Umwandlung in Pränexform nicht notwendigerweise den in der Vorlesung vorgestellten Algorithmus verwenden. Begründen Sie aber bei jedem Umwandlungsschritt, warum die betroffenen Formeln äquivalent bzw. erfüllbarkeitsäquivalent sind.

Lösungsvorschlag:

Bei der Konstruktion der Pränexform für φ orientieren wir uns an dem Algorithmus aus dem Beweis von Lemma 9.4.(c). Dabei fassen wir einige Schritte zusammen.
Zunächst ersetzen wir die Implikation und erhalten:

$$\varphi \equiv \forall x_1 \forall x_2 \Big(\neg \forall x_3 P(f(x_1, g(x_3))) \vee \Big(Q(g(a), f(x_1, x_2)) \wedge \neg \exists x_4 Q(g(x_3), x_4) \Big) \Big)$$

Die Variable x_3 kommt in der ersten Teilformel gebunden und in der zweiten Teilformel frei vor. Daher ersetzen wir das gebundene Vorkommen von x_3 durch die frische Variable x_3' und erhalten:

$$\varphi \equiv \forall x_1 \forall x_2 \Big(\neg \forall x_3' P(f(x_1, g(x_3'))) \vee \Big(Q(g(a), f(x_1, x_2)) \wedge \neg \exists x_4 Q(g(x_3), x_4) \Big) \Big)$$

Die Pränexform für

$$\neg \forall x_3' P(f(x_1, g(x_3')))$$

ist

$$\exists x_3' \neg P(f(x_1, g(x_3'))).$$

Die Pränexform für

$$\neg \exists x_4 Q(g(x_3), x_4)$$

ist

$$\forall x_4 \neg Q(g(x_3), x_4).$$

Die Pränexform für

$$\Big(Q(g(a), f(x_1, x_2)) \wedge \neg \exists x_4 Q(g(x_3), x_4) \Big)$$

ist somit

$$\forall x_4 \Big(Q(g(a), f(x_1, x_2)) \wedge \neg Q(g(x_3), x_4) \Big).$$

Die Pränexform für

$$\Big(\neg \forall x_3 P(f(x_1, g(x_3))) \vee \Big(Q(g(a), f(x_1, x_2)) \wedge \neg \exists x_4 Q(g(x_3), x_4) \Big) \Big)$$

ergibt sich damit zu

$$\exists x_3' \forall x_4 \Big(\neg P(f(x_1, g(x_3'))) \vee \Big(Q(g(a), f(x_1, x_2)) \wedge \neg Q(g(x_3), x_4) \Big) \Big).$$

Insgesamt erhalten wir die Pränexform

$$\varphi' = \forall x_1 \forall x_2 \exists x_3' \forall x_4 \Big(\neg P(f(x_1, g(x_3'))) \vee \Big(Q(g(a), f(x_1, x_2)) \wedge \neg Q(g(x_3), x_4) \Big) \Big).$$

Die resultierende Formel φ' bringen wir nun in eine erfüllbarkeitsäquivalente Formel in Skolemform. Da x_3 in φ' frei vorkommt, quantifizieren wir zunächst x_3 existentiell:

$$\exists x_3 \forall x_1 \forall x_2 \exists x_3' \forall x_4 \Big(\neg P(f(x_1, g(x_3'))) \vee \Big(Q(g(a), f(x_1, x_2)) \wedge \neg Q(g(x_3), x_4) \Big) \Big)$$

Nun wenden wir die Skolem-Regeln an. Wir eliminieren den ersten Existenzquantor und ersetzen x_3 durch eine neue Konstante c:

$$\forall x_1 \forall x_2 \exists x_3' \forall x_4 \Big(\neg P(f(x_1, g(x_3'))) \vee \big(Q(g(a), f(x_1, x_2)) \wedge \neg Q(g(c), x_4) \big) \Big)$$

Schließlich eliminieren wir auch den zweiten Existenzquantor. Dabei führen wir ein neues Funktionssymbol h ein und ersetzen jedes Vorkommen von x_3' durch $h(x_1, x_2)$:

$$\forall x_1 \forall x_2 \forall x_4 \Big(\neg P(f(x_1, g(h(x_1, x_2)))) \vee \big(Q(g(a), f(x_1, x_2)) \wedge \neg Q(g(c), x_4) \big) \Big)$$

Die letzte Formel ist in Skolemform.

Aufgabe 5.3 [Herbrand-Strukturen] **3 Punkte**

Sei die Formel

$$\varphi = \forall x \forall y \Big(\big(P(x) \vee P\big(f(g(b, y))\big) \big) \wedge \big(\neg Q(f(y), x) \vee P(a) \big) \Big)$$

gegeben.

a) Geben Sie alle Elemente des Herbranduniversums $H(\varphi')$ an, in denen maximal ein Funktionssymbol vorkommt. Geben Sie außerdem noch drei Elemente von $H(\varphi')$ an, in denen zwei Funktionssymbole vorkommen. **(1,5 Punkte)**

b) Geben Sie drei Elemente der Herbrandexpansion $E(\varphi')$ an. **(1,5 Punkte)**

Lösungsvorschlag:

a) Die Formel φ enthält die Konstanten a und b, die unäre Funktion f und die binäre Funktion g. Die Elemente des Herbranduniversums $H(\varphi)$, in denen maximal ein Funktionssymbol vorkommt, sind damit:

$$a, b, f(a), f(b), g(a, a), g(a, b), g(b, a), g(b, b)$$

Einige Elemente, in denen zwei Funktionssymbole vorkommen, sind:

$$f(f(a)), f(g(a, b)), g(f(a), b), g(b, f(a)), g(g(a, b), a), g(a, g(b, b))$$

b) Um im Folgenden Elemente der Herbrandexpansion $E(\varphi)$ anzugeben, setzen wir in die Matrix der Formel φ für die Variablen Terme aus dem Herbranduniversum $H(\varphi)$ ein.

Hier sind drei Beispiele:

- $x \mapsto a, y \mapsto a$
  $\Big(P(a) \vee P\big(f(g(b, a))\big) \Big) \wedge \big(\neg Q(f(a), a) \vee P(a) \big)$
- $x \mapsto g(a, a), y \mapsto f(b)$
  $\Big(P(g(a, a)) \vee P\big(f(g(b, f(b)))\big) \Big) \wedge \big(\neg Q(f(f(b)), g(a, a)) \vee P(a) \big)$
- $x \mapsto b, y \mapsto g(f(a), f(b))$
  $\Big(P(b) \vee P\big(f(g(b, g(f(a) f(b))))\big) \Big) \wedge \big(\neg Q(f(g(f(a), f(b))), b) \vee P(a) \big)$

Aufgabe 5.4 [Grundresolution] **5 Punkte**

Zeigen Sie mit Hilfe der Grundresolution, dass die Formel

$$\varphi = \forall x \forall y \Big(Q(a, f(g(x))) \land \big(\neg Q(y, x) \lor R(g(y), x) \lor \neg S(g(y))\big) \land$$

$$\big(\neg Q(y, g(x)) \lor S(g(a))\big) \land Q(f(a), g(b)) \land \big(\neg R(y, f(y)) \lor \neg S(y)\big) \Big)$$

unerfüllbar ist.

Lösungsvorschlag:

Die Formel

$$\varphi = \forall x \forall y \Big(Q(a, f(g(x))) \land \big(\neg Q(y, x) \lor R(g(y), x) \lor \neg S(g(y))\big) \land$$

$$\big(\neg Q(y, g(x)) \lor S(g(a))\big) \land Q(f(a), g(b)) \land \big(\neg R(y, f(y)) \lor \neg S(y)\big) \Big)$$

ist bereits in geschlossener Skolem-Form und der quantorenfreie Teil ist in KNF. Die Formel muss also nicht weiter umgeformt werden.
Das Herbrand-Universum von φ ist $H(\varphi) = \{a, b, f(a), f(b), g(a), g(b), g(f(a)), \ldots\}$.
Die Herbrand-Expansion enthält somit unter anderem:

- $$\overbrace{Q(a, f(g(a)))}^{1} \land \big(\neg Q(g(a), a) \lor R(g(g(a)), a) \lor \neg S(g(g(a)))\big) \land$$
  $$\big(\neg Q(g(a), g(a)) \lor S(g(a))\big) \land \underbrace{Q(f(a), g(b))}_{2} \land \underbrace{\big(\neg R(g(a), f(g(a))) \lor \neg S(g(a))\big)}_{3}$$

  wegen $(x \mapsto a, y \mapsto g(a))$

- $$Q(a, f(g(b))) \land \big(\neg Q(f(a), b) \lor R(g(f(a)), b) \lor \neg S(g(f(a)))\big) \land$$
  $$\underbrace{\big(\neg Q(f(a), g(b)) \lor S(g(a))\big)}_{4} \land Q(f(a), g(b)) \land \big(\neg R(f(a), f(f(a))) \lor \neg S(f(a))\big)$$

  wegen $(x \mapsto b, y \mapsto f(a))$

- $$Q(a, f(g(f(g(a))))) \land \overbrace{\big(\neg Q(a, f(g(a))) \lor R(g(a), f(g(a))) \lor \neg S(g(a))\big)}^{5} \land$$
  $$\big(\neg Q(a, g(f(g(a)))) \lor S(g(a))\big) \land Q(f(a), g(b)) \land \big(\neg R(a, f(a)) \lor \neg S(a)\big)$$

  wegen $(x \mapsto f(g(a)), y \mapsto a)$

Aus diesen Formeln erhalten wir die Klauseln für den folgenden Resolutionsbeweis. Wir verwenden die mit den Zahlen 1 – 5 markierten Klauseln.

$$\overbrace{\{Q(a, f(g(a)))\}}^{1} \qquad \overbrace{\{\neg Q(a, f(g(a))), R(g(a), f(g(a))), \neg S(g(a))\}}^{5}$$

$$\overbrace{\{\neg R(g(a), f(g(a))), \neg S(g(a))\}}^{3} \qquad \{R(g(a), f(g(a))), \neg S(g(a))\}$$

$$\{\neg S(g(a))\} \qquad \overbrace{\{\neg Q(f(a), g(b)), S(g(a))\}}^{4}$$

$$\{\neg Q(f(a), g(b))\} \qquad \overbrace{\{Q(f(a), g(b))\}}^{2}$$

$$\square$$

Da die leere Klausel resolviert werden kann, ist φ nach dem Grundresolutionsalgorithmus unerfüllbar.