lehrstuhl für programmiersysteme
Prof. Dr. B. Steffen

technische universität dortmund

Markus Frohme – Dawid Kopetzki – Oliver Rüthing – Philip Zweihoff

Übungen zur Vorlesung

Mathematik für Informatik 1

Wintersemester 2016/17

Übungsblatt 7

Für die Abgabe der Bearbeitungen stehen den Übungsgruppen Briefkästen im Verbindungsflur Erdgeschoss OH 14 - OH 12 zu zur Verfügung.
Die den einzelnen Übungsgruppen zugeteilten Briefkästen sind durch die Gruppennummer gekennzeichnet. Sie sind ferner mit dem Namen der Veranstaltung sowie Zeit und Ort der Übung kenntlich gemacht.

Bitte werfen Sie Ihre Bearbeitungen in den Ihrer Übungsgruppe zugeteilten Briefkasten bis zur unten aufgeführten Abgabefrist ein!

Schreiben Sie unbedingt immer Ihren vollständigen Namen, Ihre Matrikelnummer und Ihre Gruppennummer auf Ihre Abgaben!

Abgabefrist: 9.12.2016, 14:00 Uhr

Aufgabe 7.1 *Strukturtafeln und Gruppen* (1+1+2 Punkte)

1. Im Folgenden sind die Additions- und Multiplikationstafeln für $\mathbb{Z}_6$ nur unvollständig aufgeführt. Vervollständigen Sie diese.

   Additionstafel:

$+_6$	0	1	2	3	4	5
0	0	1	2	3	4	5
1	1					
2	2					
3	3					
4	4					
5	5					

Multiplikationstafel:

$*_6$	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	0	0
1	0					
2	0					
3	0					
4	0					
5	0					

2. Zeigen Sie:
   $(\mathbb{Z}_6, +_6)$ ist eine Gruppe.

Aufgabe 7.2 *Permutationen, Zykelschreibweise* (2+2 Punkte)
Wie bereits in der Vorlesung erwähnt, lassen sich Permutationen auf der Menge $\{1, \dots, n\}$ auch als Komposition von *Zykeln* schreiben (für eine genaue Definition der Semantik von Zykeln siehe Skript).

1. Gegeben seien die folgenden Permutationen $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 \in S_6$ wie folgt:
   $$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & 6 & 4 & 2 & 5 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 6 & 5 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$
   Stellen Sie σ_1, σ_2 und σ_3 in Zykelschreibweise dar.
2. Berechnen Sie $\sigma_1 \circ \sigma_2 \circ \sigma_3$. Stellen Sie das Ergebnis ebenfalls in Zykelschreibweise dar.

Aufgabe 7.3 *Gruppe und Gruppenhomomorphismus* (2+2 Punkte)
$\langle G, \oplus \rangle$ sei eine Gruppe.

1. Zeigen Sie: für alle $a, b \in G$ gilt
   $$(a \oplus b)^{-1} = b^{-1} \oplus a^{-1}$$
2. Sei $\langle G, \oplus \rangle$ eine Gruppe mit neutralem Element e, $\langle G', \oplus' \rangle$ eine Gruppe mit neutralem Element e' und $h : \langle G, \oplus \rangle \to \langle G', \oplus' \rangle$ ein Gruppenhomomorphismus von $\langle G, \oplus \rangle$ nach $\langle G', \oplus' \rangle$, d.h. es gilt für alle $a, b \in G$:
   $$h(a \oplus b) = h(a) \oplus' h(b).$$
   Ferner lässt sich für einen solchen Gruppenhomomorphismus zeigen, dass für alle $a \in G$
   $$h(a^{-1}) = h(a)^{-1}$$
   gilt.
   Als den *Kern* von h bezeichnet man die Menge derjenigen Elemente von G, die unter h auf das neutrale Element e' von G' abgebildet werden, also
   $$\mathit{Kern}(h) =_{\mathit{df}} h^{-1}(e').$$
   Beweisen Sie: h ist *genau dann* injektiv, *wenn* $\mathit{Kern}(h) = \{e\}$ gilt.

Aufgabe 7.4 *Untergruppenverband* (Bonusaufgabe 4 Punkte)
Sei $\langle G, \oplus \rangle$ eine Gruppe.
Zeigen Sie, dass die Menge aller Untergruppen von $\langle G, \oplus \rangle$ mit der „ist Untergruppe von"-Relation $\leq$ einen Verband $\langle \mathcal{V}, \leq \rangle$ bildet.