MafI 1 UB07

March 7, 2017

12.1 Invertieren von matrizen

12.1.1

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & | & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 4 & | & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 9 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 10 & | & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 5 & | & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 10 & | & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & | & -5 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & | & -7 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -5 & | & -5 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 7 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 & \frac{1}{5} & \frac{-1}{5} \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 6 & \frac{3}{5} & -\frac{12}{5} \\ 0 & 1 & 0 & | & 7 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 & \frac{1}{5} & \frac{-1}{5} \end{pmatrix}$$
damit ist $A^{-1} = \begin{pmatrix} 6 & \frac{3}{5} & -\frac{12}{5} \\ 7 & 1 & -2 \\ 1 & \frac{1}{5} & \frac{-1}{5} \end{pmatrix}$

12.1.2

$A' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -3 & 2 & 4 \\ 2 & -3 & 4 \end{pmatrix}$

$det(A') = (1 * 2 * 4) + (-1 * 4 * 2) + (2 * 3^2) - (2^3) - (-3 * 4 * 1) - (4 * -3 * -1)$
$= 8 - 8 + 18 - 8 + 12 - 12$
$= 10 \neq 0$

damit ist A' invertierbar

z.z.: A' auch ueber $\mathbb{Z}_5$ invertierbar

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & | & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 4 & | & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 4 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 10 & | & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & | & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & | & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 10 & | & 5 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & | & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & | & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & | & \frac{1}{2} & \frac{1}{10} & \frac{-1}{10} \\ 0 & 1 & 0 & | & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$\{\frac{1}{2}, \frac{1}{10}, \frac{-1}{10}\} \notin \mathbb{Z}_5$

damit existiert keine Inverse zu A' ueber $\mathbb{Z}_5$

12.2 Lineare Abbildungen

12.2.1

a)
Gegenbeispiel:
$v = (1,1,1)^t, \quad w = (0,0,1)^t$
$f(v+w) = f(1,1,2)^t$
$= (3,3,2)^t \neq (3,3,1)^t$
$= (3,3,1)^t + (0,0,0)^t$
$= f(v) + f(w)$

b)
$f(v+w) = (-l(v+w), (l(v+w) + l(2*(v+w))))$
$= ((-l(v) + -l(w)), (l(2v) + l(2w)))$
$= (-l(v), l(2v)) + (-l(w), l(2w))$
$= f(v) + f(w)$

$f(s*v) = (-l(s*v), (l(s*v) + l(s*2*v)))$
$= (s* -l(s*v), (s*l(v) + s*l(2*v)))$
$= s*f(v)$

12.2.2

12.3 Basistransformation

12.3.1

$[\varphi]_{E_3} = \{(1,2)^t, (2,3)^t, (3,4)^t\}$
${}_{E_2}[\varphi]_{E_3} = \{(1,2)^t, (2,3)^t, (3,4)^t\}$

12.3.2

$B_3 = \{(1,2,-1)^t, (2,-1,2)^t, (3,1,-1)^t\},\; B_2 = \{(1,2)^t, (2,3)^t\}$
$[\varphi]_{B_3} = \{(2,4)^t, (6,9)^t, (2,5)^t\}$
${}_{B_2}[\varphi]_{B_3} = \{(2,0)^t, (0,3)^t, (4,-1)^t\}$

12.4 Inversen von Matrizen

12.4.1

$A, B \in K^n$

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & ... & a_{1n} \\ ... & ... & ... \\ a_{m1} & ... & a_{mn} \end{pmatrix}$

$B = \begin{pmatrix} b_{11} & ... & b_{1n} \\ ... & ... & ... \\ b_{m1} & ... & b_{mn} \end{pmatrix}$

$A * B = \begin{pmatrix} a_{11} * b_{11} & ... & a_{1n} * b_{m1} \\ ... & ... & ... \\ a_{m1} * b_{1n} & ... & a_{mn} * b_{mn} \end{pmatrix}$

$B * A = \begin{pmatrix} b_{11} * a_{11} & ... & b_{1n} * a_{m1} \\ ... & ... & ... \\ b_{m1} * a_{1n} & ... & b_{mn} * a_{mn} \end{pmatrix}$

Folglich gilt wenn:

$\begin{pmatrix} a_{11} * b_{11} & ... & a_{1n} * b_{m1} \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 1 & ... & 0 \end{pmatrix}$

dann auch:

$\begin{pmatrix} b_{11} * a_{11} ... \\ b_{m1} * a_{1n} \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 1 & ... & 0 \end{pmatrix}^t$

etc. ...

Es findet lediglich eine Spiegelung an der Diagonalen statt.

Da diese in $E^{n \times n}$ als einzige mit Werten initialisiert ist, gilt allgemeingueltig $A^n * B^n = B^n * A^n$, wenn $A^n * B^n = E^{n \times n}$

12.4.2

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ a & b \end{pmatrix}$

$a, b \in K$

$A \in K^{2 \times 3}, B \in K^{3 \times 2}$

$A * B = E_2$

$$B * A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ a & b & 0 \end{pmatrix} \neq E_3$$