lehrstuhl für programmiersysteme
Prof. Dr. B. Steffen

technische universität dortmund

Markus Frohme – Dawid Kopetzki – Oliver Rüthing – Philip Zweihoff

Übungen zur Vorlesung

Mathematik für Informatik 1

Wintersemester 2016/17

Übungsblatt 10

Für die Abgabe der Bearbeitungen stehen den Übungsgruppen Briefkästen im Verbindungsflur Erdgeschoss OH 14 - OH 12 zu zur Verfügung.
Die den einzelnen Übungsgruppen zugeteilten Briefkästen sind durch die Gruppennummer gekennzeichnet. Sie sind ferner mit dem Namen der Veranstaltung sowie Zeit und Ort der Übung kenntlich gemacht.

Bitte werfen Sie Ihre Bearbeitungen in den Ihrer Übungsgruppe zugeteilten Briefkasten bis zur unten aufgeführten Abgabefrist ein!

Schreiben Sie unbedingt immer Ihren vollständigen Namen, Ihre Matrikelnummer und Ihre Gruppennummer auf Ihre Abgaben!

Abgabefrist: 20.01.2017, 14:00 Uhr

Aufgabe 10.1 *Untervektorraum, lineare Unabhängigkeit und Basis* (2+2+1 Punkte)

1. Sei $U =_{df} \{(x_1, x_2, x_3)^t \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 = x_2\}$. Zeigen Sie, dass U ein Untervektorraum des $\mathbb{R}^3$ ist.
2. Geben Sie für den Untervektorraum U aus Teil 1) eine Basis an und beweisen Sie die Basiseigenschaft.
3. Sei $U =_{df} \{(x, y)^t \in \mathbb{R}^2 \mid |x| = |y|\}$. Handelt es sich bei U um einen Untervektorraum von $\mathbb{R}^2$. Beweisen oder widerlegen Sie!

Aufgabe 10.2 *Ring der Matrizen* (2+1 Punkt(e))

Satz 9.1.4 der Vorlesung besagt, dass die quadratischen $n \times n$-Matrizen ($n \geq 1$) über einem Körper K einen Ring bilden. In der Vorlesung wurde dann gezeigt, dass bezüglich der Matrixaddition eine kommutative Gruppe und bezüglich der Matrixmultiplikation ein Monoid vorliegt. Auf den Nachweis der Distributivitätseigenschaften wurde aber verzichtet. Dieses soll hier nachgeholt werden. Zeigen Sie also:

$$A \cdot (B + C) = (A \cdot B) + (A \cdot C)$$
$$(B + C) \cdot A = (B \cdot A) + (C \cdot A)$$

für beliebige Matrizen $A, B, C \in K^{n \times n}$.

Aufgabe 10.3 *Eigenschaften des Erzeugnisses* (2+2 Punkte)

Sei V ein K-Vektorraum und seien $M, N \subseteq V$. Beweisen Sie folgende Eigenschaften des Erzeugnisses:

1. $\langle M \rangle + \langle N \rangle = \langle M \cup N \rangle$
2. $\langle \langle M \rangle \rangle = \langle M \rangle$

Aufgabe 10.4 *Vektorraum* $\mathbb{R}^3$ (Bonusaufgabe: 3+1 Punkte)

1. Seien $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3} \in \mathbb{R}^3$ paarweise verschiedene Ortsvektoren[1]. Zeigen Sie, dass die Fläche des Dreiecks, das durch die Endpunkte der Ortsvektoren aufgespannt wird, allgemein gegeben ist durch

$$A = \frac{1}{2}\sqrt{(|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|)^2 - (\vec{a} \bullet \vec{b})^2}$$

   wobei $\vec{a} =_{df} \vec{v_2} - \vec{v_1}$ und $\vec{b} =_{df} \vec{v_3} - \vec{v_1}$.

   Hinweis: Stellen Sie zunächst A^2 geeignet dar. Dann hilft Ihnen die Formel $sin(\alpha)^2 + cos(\alpha)^2 = 1$ weiter, die unmittelbar aus dem Satz von Pythagoras folgt. Auch das Lemma 9.1.7 ist bei der weiteren Herleitung nützlich.

2. Bestimmen Sie mit der Formel aus Teil 1 die Fläche des Dreiecks, das durch die Endpunkte der folgenden Ortsvektoren aufgespannt wird:

$$\vec{v_1} = (4, 1, 2)^t, \quad \vec{v_2} = (7, 5, 2)^t, \quad \vec{v_3} = (6, 2, 0)^t$$

[1] Ortsvektoren sind Vektoren, deren Ausgangspunkt im Ursprung des Koordinatensystems liegt.