

MafI 1 UB06

January 23, 2017

6.1 Distributive Verbaende

6.1.1

$$\begin{aligned}d \wedge (a \vee c) &= d \wedge 1 = d \\(d \wedge a) \vee (d \wedge c) &= a \vee 0 = a \\&\Rightarrow \text{nicht distributiv}\end{aligned}$$

6.1.2

Tupel der komp. Elemente: $\{(1, 0), (a, e), (d, c), (a, c)\}$

$$\begin{aligned}d \wedge e &= b, b \notin S \\&\Rightarrow \text{kein Unterverband}\end{aligned}$$

6.1.3

Menge der Elemente mit komplementaeren Elementen von V : S

z.z. :

$$\forall x, y \in S. (x \wedge y) \in S \wedge (x \vee y) \in S$$

$$x, y, \tilde{x}, \tilde{y} \in S$$

\tilde{x}, \tilde{y} sind disjunkte Komplementaere von x, y

$$\begin{aligned}(x \wedge y) \wedge (\tilde{x} \vee \tilde{y}) &= (x \wedge y \wedge \tilde{x}) \vee (x \wedge y \wedge \tilde{y}) \\&= 0 \vee 0 = 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(x \wedge y) \vee (\tilde{x} \vee \tilde{y}) &= (x \vee y \vee \tilde{x}) \wedge (x \vee y \vee \tilde{y}) \\&= 1 \wedge 1 = 1\end{aligned}$$

Damit hat $x \wedge y$ das komplementaere Element $(\tilde{x} \vee \tilde{y})$, sowie $x \vee y$ $(\tilde{x} \wedge \tilde{y})$.
Damit sind diese Elemente auch in S .

6.2 Boolescher Verband

6.2.1

$$\begin{array}{ccccc}
 & & 30 & & \\
 6 & & 15 & & 10 \\
 & 3 & 2 & 5 & \\
 & & 1 & &
 \end{array}$$

$(3, 2), (2, 5), (3, 5) \rightarrow^\wedge (1)$
 damit dann auch $1_B = 30, 0_B = 1$

6.2.2

z.z.:

A abgeschlossen unter (\wedge, \vee)

(hatte keine Lust $\forall x, y \in A. (x \vee y), \forall x, y \in A. (x \wedge y)$) zu zeigen

Mit einer Art Lambda Ausdruck ueber Tupel fuer (\wedge, \vee) :

$(6, 15), (15, 10), (6, 10) \rightarrow^\vee (30),$

$(3, 2) \rightarrow^\vee (6),$

$(2, 5) \rightarrow^\vee (10),$

$(3, 5) \rightarrow^\vee (15),$

etc ...

Es folgt, dass A bzgl. (\wedge, \vee) abgeschlossen ist.

z.z.:

A ist distributiv

es gilt: $A \subseteq B \wedge A$ abgeschlossen

damit ist A dann auch wie B distributiv

z.z.:

$\exists 0_A, 1_A \in A. \forall x \in A. \exists \bar{x} \in A. x \wedge \bar{x} = 0_A \wedge x \vee \bar{x} = 1_A$

Diese existieren mit $0_A = 3, 1_A = 30$

$\bar{30} \in (B, \wedge, \vee)$

$(30 \wedge \bar{30}) \vee 3 = (1 \vee 30) = 1 \vee 3 = 3$

6.3 Vollstaendiger Verband

6.3.1

(Assoziativitaet, Kommutativitaet, Absorption sind offensichtlich ...)
Vollstaendigkeit:

sei $X \subseteq A \times B$ eine Menge mit:

$$X_A = \{a \in A \mid \exists b \in B. (a, b) \in X\}$$

$$X_B = \{b \in B \mid \exists a \in A. (a, b) \in X\}$$

so gilt fuer $(a, b) \in X$ bel.:

$$(inf(X_A), inf(X_B)) \preceq (a, b), \text{ da}$$

$$inf(X_A, a) = inf(X_A)$$

$$inf(X_B, b) = inf(X_B)$$

analog fuer sup...

6.3.2 Verband der Funktionen

hier gabs keine Mitschriften