lehrstuhl für programmiersysteme
Prof. Dr. B. Steffen

technische universität dortmund

Markus Frohme – Dawid Kopetzki – Oliver Rüthing – Philip Zweihoff

Übungen zur Vorlesung

Mathematik für Informatik 1

Wintersemester 2016/17

Übungsblatt 2

Für die Abgabe der Bearbeitungen stehen den Übungsgruppen Briefkästen im Verbindungsflur Erdgeschoss OH 14 - OH 12 zu zur Verfügung.
Die den einzelnen Übungsgruppen zugeteilten Briefkästen sind durch die Gruppennummer gekennzeichnet. Sie sind ferner mit dem Namen der Veranstaltung sowie Zeit und Ort der Übung kenntlich gemacht.

Bitte werfen Sie Ihre Bearbeitungen in den Ihrer Übungsgruppe zugeteilten Briefkasten bis zur unten aufgeführten Abgabefrist ein!

Schreiben Sie unbedingt immer Ihren vollständigen Namen, Ihre Matrikelnummer und Ihre Gruppennummer auf Ihre Abgaben!

Abgabefrist: 4.11.2016, 14:00 Uhr

Aufgabe 2.1 *Prädikatenlogik* (1+1+2 Punkte)

1. Definieren Sie ein Prädikat $kgV(n, m, x)$ auf natürlichen Zahlen, welches genau dann erfüllt ist, wenn x das kleinste gemeinsame Vielfache der Zahlen n und m ist.

2. Wie in der Vorlesung vorgestellt, besagt die *Goldbachsche Vermutung*, dass jede gerade natürliche Zahl, die größer als 2 ist, sich als Summe zweier Primzahlen schreiben lässt. Drücken Sie die Goldbachsche Vermutung als Formel der Prädikatenlogik aus.

3. Negieren Sie folgende prädikatenlogische Formel so, dass das Resultat kein Negationssymbol mehr enthält.
$$\exists \epsilon \in \mathbb{R}.\ \epsilon > 0 \ \wedge\ \forall n_0 \in \mathbb{N}.\ \exists\, n \in \mathbb{N}.\ n \geq n_0 \wedge \frac{1}{n} \geq \epsilon$$

Aufgabe 2.2 *Relation* (1+1+2 Punkte)

1. Sei $M =_{df} \{1,2,3,4,5,6\}$. Auf $M \times M$ seien folgende Relationen definiert:
   - $R = \{(2,4),(2,6),(3,6)\}$
   - $S = \{(1,4),(1,5),(1,6),(2,5),(2,6),(3,6)\}$
   - $T = \{(1,1),(1,2),(1,4),(1,6),(2,1),(2,3),(2,5),(3,2),(3,4),$ $(4,1),(4,3),(5,2),(5,6),(6,1),(6,5)\}$

   Bestimmen Sie $(R^{-1} \odot S) \odot T$.

2. Untersuchen Sie die bekannte Teilbarkeitsrelation auf natürlichen Zahlen $| \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ auf die Eigenschaften Rechtseindeutigkeit, Linkseindeutigkeit, Rechtstotalität und Linkstotalität.[1]

3. Beweisen oder widerlegen Sie:

   Für eine beliebige binäre Relation $R \subseteq A \times B$ gilt $R \odot R^{-1} = I_A$.

Aufgabe 2.3 *Injektivität/Surjektivität* (1+1+1+1 Punkte)
Sind folgende Funktionen injektiv und/oder surjektiv, bijektiv? Begründen Sie ihre Antwort.

1. $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ mit $f(x) = (-1)^x \cdot x$
2. $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ mit $g(x) = |x|$
3. $g \circ f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit f, g wie definiert in Teil 1) und 2).
4. $f \circ g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ mit f, g wie definiert in Teil 1) und 2).

Aufgabe 2.4 *Schubfachprinzip* (Bonusaufgabe: 4 Punkte)
Sei X eine beliebige 10-elementige Teilmenge der Zahlen $\{1, 2 \ldots, 100\}$. Zeigen Sie, dass dann immer zwei nichtleere, disjunkte Mengen $Y, Y' \subseteq X$ exisitieren, so dass die Summe aller Zahlen aus Y mit der Summe aller Zahlen aus Y' übereinstimmt.

Hinweis: Es ist bekannt, dass eine n-elementige Menge genau 2^n Teilmengen besitzt.

[1] Die Teilbarkeit ist definiert durch $n|m \;\Leftrightarrow_{df}\; \exists k \in \mathbb{N}.\; n \cdot k = m$.