Logik TUT 9

Max Springenberg

February 8, 2017

9.1 Interpretation

Grundmenge: $\mathbb{N}$
$P^A = \{(a,b)|a \text{ `}mod\text{` } b == 0\}$
$f^A = 2 * a, \forall a \in \mathbb{N}$
$\beta(x) = 2$

$\varphi = \forall z(P(x,z) \to \exists y(f(y) = z))$
$\equiv \forall z(\neg P(x,z) \vee \exists y(f(y) = z)$
$\equiv \neg\exists z(P(x,z)) \vee \forall z\exists y(f(y) = z) = \varphi'$

mit $\varphi' = \varphi'_1 \vee \varphi'_2$

$[\![P(x,z)]\!]_{I[z/n]} = \top, \forall n \in \mathbb{N}$
damit also $[\![\varphi'_1]\!]_I = [\![\neg\exists z(P(x,z))]\!]_I = \bot$

$[\![\exists f(y) = z]\!]_{I[z/m]} = \bot, \forall m \in \{2n-1|n \in \mathbb{N}\}$
damit also $[\![\varphi'_2]\!]_I = [\![\forall z\exists y(f(y) = z)]\!]_I = \bot$

damit $\bot = \varphi' \equiv \varphi$
und damit auch $\varphi = \bot$

9.2 Normalformen

Praenexformen:
$\varphi = R(x) \vee \forall x(\neg\exists x R(g(x) \wedge \exists y S(x,y)))$
$\equiv R(x) \vee \forall x(\forall x \neg R(g(x) \wedge \exists y S(x,y))) = \varphi'$

$\psi = \forall x(\exists y(P(x,g(y))) \vee \exists y P(z,y)) \wedge \neg\exists z \neg P(x,z)$
$\equiv \forall x(\exists y(P(x,g(y))) \vee \exists y P(z,y)) \wedge \forall z(P(x,z)) = \psi'$

Skolemformen:
$\varphi' = R(x) \vee \forall x(\forall x \neg R(g(x) \wedge \exists y S(x,y)))$
$\equiv R(x) \vee \forall x(\forall x \neg R(g(x) \wedge S(x,h(x)))) = \varphi'', h(x) = y$

$\psi' = \forall x(\exists y(P(x,g(y))) \vee \exists y P(z,y)) \wedge \forall z(P(x,z))$
$\equiv \forall x(P(x,g(h(x))) \vee P(z,h(x))) \wedge \forall z(P(x,z)) = \psi'', h(x) = y$

9.3 Genetik

9.3.1

Struktur A
(i)
Grundmenge ist die Gesamte Affenbevoelkerung seit eintreten der Krankheit.
K^A unaer und enthaelt alle kranken Tiere
W^A unaer und enthaelt alle weiblichen Tiere
J^A zweistellig und enthaelt Tupel mit jedem Tier und jeweils einem Seiner Nachkommen
Tier t mit Nachkommen $j_1, ..., j_n$ hat die Tupel $(t, j_1), ..., (t, j_n)$
E^A zweistellig und enthaelt Tupel mit jedem Tier und jeweils einem seiner direkten Kinder
Tier t mit kindern $k_1, ..., k_n$ hat die Tupel $(t, k_1), ..., (t, k_n)$

(ii)
m(t) ordnet jedem Tier t seine Mutter zu

(iii)
o ist der erste kranke Affe

9.3.2

$\varphi_1 = \forall t(K(t) \to \exists w((m(m(w)) = m(m(m(t))) \vee m(w) = m(m(m(t)))) \wedge W(w) \wedge K(w)))$
$\varphi_2 = \forall m, v, k(E(m, k) \wedge (K(m) \to \exists g((g = k) \vee E(m, g) \wedge K(g))) \vee (E(v, k) \wedge (K(v) \to \exists g(((g = k) \vee E(v, g)) \wedge K(g))))$
$\varphi_3 = \forall m, v, t((\neg J(o, m) \wedge \neg J(o, v)) \to \neg K(t))$

9.3.3

$\varphi_1 = \forall t(K(t) \to \exists w((m(m(w)) = m(m(m(t))) \vee m(w) = m(m(m(t)))) \wedge W(w) \wedge K(w)))$
$\equiv \forall t(\neg K(t) \vee \exists w((m(m(w)) = m(m(m(t))) \vee m(w) = m(m(m(t)))) \wedge W(w) \wedge K(w))) = \varphi_1'$

$\varphi_2 = \forall m, v, k(E(m, k) \wedge (K(m) \to \exists g((g = k) \vee E(m, g) \wedge K(g))) \vee (E(v, k) \wedge (K(v) \to \exists g(((g = k) \vee E(v, g)) \wedge K(g))))$
$\equiv \forall m, v, k(E(m, k) \wedge (\neg K(m) \vee \exists g((g = k) \vee E(m, g) \wedge K(g))) \vee (E(v, k) \wedge (\neg K(v) \vee \exists g(((g = k) \vee E(v, g)) \wedge K(g)))) = \varphi_2'$

$\varphi_3 = \forall m, v, t((\neg J(o, m) \wedge \neg J(o, v)) \to \neg K(t))$
$\equiv \forall m, v, t(\neg(\neg J(o, m) \wedge \neg J(o, v)) \vee \neg K(t))$

$$\equiv \forall m, v, t(J(o,m) \vee J(o,v) \vee \neg K(t)) = \varphi_3'$$