1944531 María José Sáenz Briseño

Estadística Aplicada Gpo 51

1. Para el siguiente proceso

$Y_t = \varepsilon_t$ $\varepsilon \sim iid\, N(0, \sigma_\varepsilon^2)$ por tanto $E(\varepsilon_i \varepsilon_j) = 0$ para $i \neq j$.

a) Encontrar su media.

$E(Y_t) = E(\varepsilon_t)$

$E(Y_t) = 0$

$\therefore \mu = 0$

b) Muestra que $var(Y_t) = \sigma_\varepsilon^2$ y que $\sigma_\varepsilon^2 = E(\varepsilon_t^2)$

$var(Y_t) = E(\varepsilon_t)^2$

$= E(\varepsilon_t^2) = \sigma_\varepsilon^2$

c) Calcula su covarianza

$cov(Y_t, Y_{t+k}) = E[(Y_t - \mu_t)(Y_{t+k} - \mu_{t+k})]$

$= E[(Y_t)(Y_{t+k})]$

$= E(Y_t) E(Y_{t+k})$

$= E(\varepsilon_t) E(\varepsilon_{t+k})$

$= 0 \cdot 0 = 0$

d) Señala si es un proceso estacionario y por qué

si es un proceso estacionario, ya que la media, varianza y covarianza no dependen del tiempo.

2. Para el siguiente proceso $Y_t = \varphi_1 Y_{t-1} + \varphi Y_{t-2} + \varepsilon_t$ donde $\varepsilon \sim iid\, N(0, \sigma_\varepsilon^2)$ por tanto $E(\varepsilon_i \varepsilon_j) = 0$ para $i \neq j$

a) ¿Qué condición garantiza la convergencia de la sumatoria infinita del proceso?

Es un proceso que solo depende de la observación anterior por lo que:

si $t \to \infty$ y $|\varphi| < 1$ converge

$$Y_t = \sum_{i=0}^{\infty} \varphi^i \varepsilon_{t-1}$$

b) Encuentra su media

$$E(Y_t) = E(\varphi_1 Y_{t-1} + \varphi_2 Y_{t-2} + \varepsilon_t)$$
$$= E(\varphi_1 Y_{t-1}) + E(\varphi_2 Y_{t-2}) + E(\varepsilon_t)$$
$$= E(\varphi_1 Y_{t-1}) + E(\varphi_2 Y_{t-2})$$
$$= \varphi_1 E(Y_{t-1}) + \varphi_2 E(Y_{t-2})$$
$$\mu = \varphi_1 \mu + \varphi_2 \mu$$

- Despejando:

$$E(Y_t) = \mu = 0$$

c) Encuentra su varianza

$$var(Y_t) = E((\varphi_1 Y_{t-1} + \varphi_2 Y_{t-2} + \varepsilon_t)^2)$$
$$= E[\varphi_1^2 Y_{t-1}^2 + \varphi_2^2 Y_{t-2}^2 + \varepsilon_t^2 + 2\varphi_1\varphi_2 Y_{t-1} Y_{t-2}$$
$$+ 2\varphi_1 Y_{t-1}\varepsilon_t + 2\varphi_2 Y_{t-2}\varepsilon_t]$$
$$= \varphi_1^2 Y_{t-1}^2 + \varphi_2^2 Y_{t-2}^2 + \sigma_\varepsilon^2 + 2\varphi_1\varphi_2 Y_{t-1} Y_{t-2}$$

- Para facilitar términos $\gamma_0 = var(Y_t)$

$$\gamma_0 = \varphi_1^2\gamma_0 + \varphi_2^2\gamma_0 + \sigma^2 + 2\varphi_1\varphi_2\gamma_1 \quad (1)$$

$$\gamma = E[(Y_t - \mu)(Y_{t-1} - \mu)] = E[Y_t Y_{t-1}]$$
$$= E[(\varphi_1 Y_{t-1} + \varphi_2 Y_{t-2} + \varepsilon_t) Y_{t-1}]$$
$$= E[\varphi_1 Y_{t-1}^2 + \varphi_2 Y_{t-1} Y_{t-2} + \varepsilon_t Y_{t-1}]$$
$$\gamma_1 = \varphi_1\gamma_0 + \varphi_2\gamma_1$$
$$\gamma_1 = \frac{\varphi_1}{1-\varphi_2}\gamma_0 \quad (2)$$

sustituimos (2) en (1)

$$\gamma_0 = \varphi_1^2\gamma_0 + \varphi_2^2\gamma_0 + \sigma_\varepsilon^2 + 2\varphi_1\varphi_2\left(\frac{\varphi_1}{1-\varphi_2}\right)\gamma_0$$

$$var(Y_t) = \gamma_0 = \frac{\varphi_2}{1 - \varphi_1^2 - \varphi_2^2 - 2\varphi_1\varphi_2(\varphi_1/1-\varphi_2)}$$

d) Encontrar la covarianza del primer rezago $cov(Y_t, Y_{t-1})$

$$cov(Y_t, Y_{t-1}) = E[(Y_t - \mu)(Y_{t-1} - \mu)]$$
$$= E[(Y_t)(Y_{t-1})]$$
$$= E(Y_t)\, E(Y_{t-1})$$
$$= 0$$

e) Encuentra la covarianza con el primer valor futuro de la serie $cov(Y_t, Y_{t+1})$

$$cov(Y_t, Y_{t+1}) = E[(Y_t - \mu)(Y_{t+1} - \mu)]$$
$$= E[(Y_t)(Y_{t+1})]$$
$$= E[Y_t]\, E(Y_{t+1})$$
$$= 0$$

F) calcula ρ_1

$$\rho_1 = \frac{\gamma_1}{\gamma_0}$$

· Para γ_1 $\quad \gamma_1 = \dfrac{\varphi_1}{1 - \varphi_2} \gamma_0$

$$\rho_1 = \frac{\frac{\varphi_1}{1 - \varphi_2} \gamma_0}{\gamma_0} = \frac{\varphi_1}{1 - \varphi_2}$$

3. Para el siguiente proceso

$$Y_t = \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \theta_2 \varepsilon_{t-2} + \varepsilon_t$$

donde $\varepsilon \sim iid N(0, \sigma_\varepsilon^2)$ por tanto $E(\varepsilon_i \varepsilon_j) = 0 \quad i \neq j$

a) Encuentra su media

$$E(Y_t) = E[\theta_1 \varepsilon_{t-1} + \theta_2 \varepsilon_{t-2} + \varepsilon_t]$$
$$= \theta_1 E(\varepsilon_{t-1}) + \theta_2 E(\varepsilon_{t-2}) + E(\varepsilon_t)$$
$$= 0$$

b) Encuentra su varianza

$$\gamma_0 = var(Y_t) = E[(Y_t - \mu)^2]$$
$$= E[(\theta_1 \varepsilon_{t-1} + \theta_2 \varepsilon_{t-2} + \varepsilon_t)^2]$$
$$= E(\theta_1^2 \varepsilon_{t-1}^2 + \theta_1 \varepsilon_{t-1} \theta_2 \varepsilon_{t-2} + \theta_1 \varepsilon_{t-1} \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} \theta_2 \varepsilon_{t-2} + \theta_2^2 \varepsilon_{t-2}^2 + \theta_2 \varepsilon_{t-2} \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} \varepsilon_t + \theta_2 \varepsilon_{t-2} \varepsilon_t + \varepsilon_t^2)$$
$$= \sigma_\varepsilon^2 + \theta_1^2 \sigma_\varepsilon^2 + \theta_2^2 \sigma_\varepsilon^2$$
$$= \sigma_\varepsilon^2 (1 + \theta_1^2 + \theta_2^2)$$

c) Encuentra la covarianza con el rezago K

$$cov(Y_t, Y_{t-k}) = E[(Y_t - \mu)(Y_{t-k} - \mu)]$$
$$= E[(Y_t)(Y_{t-k})]$$
$$= E(Y_t) E(Y_{t-k})$$
$$= 0$$

d) Encuentra ρ_k

$$\rho_k = \frac{\gamma_k}{\gamma_0} = \frac{0}{\gamma_0} = 0$$