KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

Centralna
Komisja
Egzaminacyjna

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Próbny egzamin maturalny z matematyki 2010

Klucz punktowania do zadań zamkniętych
oraz
schemat oceniania do zadań otwartych

Klucz punktowania do zadań zamkniętych

Nr zadania	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
Odpowiedź	C	B	D	A	C	A	A	B	B	A	D	A	C	B	D	C	C	A	C	B	C	C	A	B	D

Schemat oceniania do zadań otwartych

Zadanie 26. (*2 pkt*)

Rozwiąż nierówność $x^2+11x+30\le 0$.

I sposób rozwiązania

Obliczamy pierwiastki trójmianu kwadratowego:

- obliczamy wyróżnik trójmianu kwadratowego i pierwiastki tego trójmianu:
  $\Delta=1$, $x_1=\frac{-11-1}{2}=-6$, $x_2=\frac{-11+1}{2}=-5$

albo

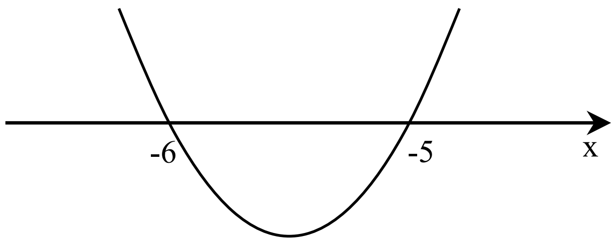
- stosujemy wzory Viète'a:
  $x_1+x_2=-11$ oraz $x_1\cdot x_2=30$
  i stąd $x_1=-6$, $x_2=-5$

albo

- rozkładamy trójmian na czynniki, np.:
  - grupując wyrazy i wyłączając wspólny czynnik,
  - korzystając z postaci kanonicznej
    $\left(x+\frac{11}{2}\right)^2-\frac{1}{4}=\left(x+\frac{11}{2}-\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{11}{2}+\frac{1}{2}\right)=(x+5)(x+6)$,

Podajemy zbiór rozwiązań nierówności:

- rysujemy fragment wykresu funkcji kwadratowej z zaznaczonymi miejscami zerowymi i odczytujemy zbiór rozwiązań



albo

- rozwiązujemy nierówność $(x+5)(x+6)\le 0$ analizując znaki czynników.

Zbiorem rozwiązań nierówności jest przedział $\langle -6,-5\rangle$.

Schemat oceniania I sposobu rozwiązania

Zdający otrzymuje ....1 pkt
gdy poda poprawnie pierwiastki trójmianu kwadratowego lub zapisze trójmian w postaci iloczynowej i na tym poprzestanie lub dalej popełni błędy

Zdający otrzymuje ....2 pkt
gdy:

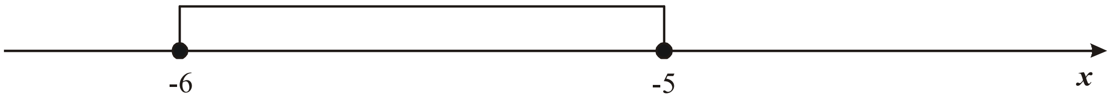
- poda zbiór rozwiązań nierówności: $\langle -6,-5\rangle$ lub $x\in\langle -6,-5\rangle$ lub $(x\ge -6$ i $x\le -5)$

albo

- zapisze zbiór rozwiązań nierówności w postaci $x \geq -6$, $x \leq -5$, o ile towarzyszy temu ilustracja geometryczna (oś liczbowa, wykres)

albo

- poda zbiór rozwiązań nierówności w postaci graficznej z poprawnie zaznaczonymi końcami przedziałów.



<u>II sposób rozwiązania</u>

Zapisujemy nierówność w postaci

$$\left(x+\frac{11}{2}\right)^2-\frac{1}{4}\leq 0,$$

a następnie $\left(x+\frac{11}{2}\right)^2\leq\frac{1}{4}$

$\left|x+\frac{11}{2}\right|\leq\frac{1}{2}$, a stąd

$x+\frac{11}{2}\leq\frac{1}{2}$ i $x+\frac{11}{2}\geq-\frac{1}{2}$.

Zatem $x\leq -5$ i $x\geq -6$.

<u>Schemat oceniania II sposobu rozwiązania</u>

Zdający otrzymuje ....1 pkt

gdy doprowadzi nierówność do postaci $\left(x+\frac{11}{2}\right)^2\leq\frac{1}{4}$ lub $\left|x+\frac{11}{2}\right|\leq\frac{1}{2}$ i na tym poprzestanie lub dalej popełni błędy.

Zdający otrzymuje ....2 pkt

gdy:

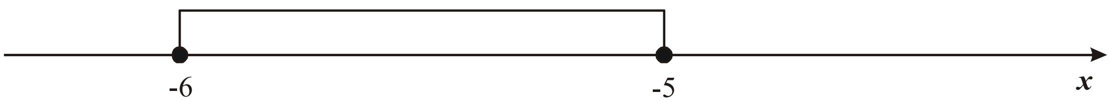
- poda zbiór rozwiązań nierówności: $\langle -6,-5\rangle$ lub $x\in\langle -6,-5\rangle$ lub $(x\geq -6$ i $x\leq -5)$

albo

- zapisze zbiór rozwiązań nierówności w postaci $x \geq -6$, $x \leq -5$, o ile towarzyszy temu ilustracja geometryczna (oś liczbowa, wykres)

albo

- poda zbiór rozwiązań nierówności w postaci graficznej z poprawnie zaznaczonymi końcami przedziałów.



Zadanie 27. (*2 pkt*)

Rozwiąż równanie $x^3+2x^2-5x-10=0$.

I sposób rozwiązania (metoda grupowania)

Przedstawiamy lewą stronę równania w postaci iloczynowej stosując metodę grupowania wyrazów

$(x+2)(x^2-5)=0$

Stąd $x=-2$ lub $x=-\sqrt{5}$ lub $x=\sqrt{5}$.

Schemat oceniania I sposobu rozwiązania

Zdający otrzymuje ....1 pkt

gdy:

- poda poprawną postać iloczynową wielomianu po lewej stronie równania $(x+2)(x^2-5)=0$ lub $(x+2)(x-\sqrt{5})(x+\sqrt{5})=0$ i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy

albo

- zapisze postać iloczynową z błędem (o ile otrzymany wielomian jest stopnia trzeciego i ma trzy różne pierwiastki) i konsekwentnie do popełnionego błędu poda rozwiązania równania.

Zdający otrzymuje ....2 pkt

gdy wyznaczy wszystkie rozwiązania równania: $-\sqrt{5}, -2, \sqrt{5}$.

II sposób rozwiązania (metoda dzielenia)

Stwierdzamy, że liczba -2 jest pierwiastkiem wielomianu. Dzielimy wielomian $x^3+2x^2-5x-10$ przez dwumian $x+2$ i otrzymujemy x^2-5. Zapisujemy równanie w postaci $(x+2)(x^2-5)=0$. Stąd $x=-2$ lub $x=-\sqrt{5}$ lub $x=\sqrt{5}$.

Schemat oceniania II sposobu rozwiązania

Zdający otrzymuje ....1 pkt

gdy

- podzieli wielomian $x^3+2x^2-5x-10$ przez dwumian $x+2$ otrzymując x^2-5 i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy

albo

- podzieli wielomian z błędem (o ile otrzymany iloraz jest stopnia drugiego i ma dwa różne pierwiastki) i konsekwentnie do popełnionego błędu poda rozwiązanie równania.

Zdający otrzymuje ....2 pkt

gdy wyznaczy wszystkie rozwiązania równania: $-\sqrt{5}, -2, \sqrt{5}$.

Uwaga:

1. Jeżeli zdający zapisze $x(x^2-5)\ 2(x^2-5)=0$ (brak znaku przed liczbą 2) lub $x^2(x+2)\ 5(x+2)=0$ (brak znaku przed liczbą 5) i na tym zakończy, to otrzymuje

0 punktów. Jeżeli natomiast kontynuuje rozwiązanie i zapisze $(x+2)(x^2-5)=0$, to oceniamy to rozwiązanie tak, jakby ten błąd nie wystąpił.

2. Jeśli zdający wykonał dzielenie przez dwumian $x-p$ nie zapisując, że p jest jednym z rozwiązań równania $x^3+2x^2-5x-10=0$ i w końcowej odpowiedzi pominie pierwiastek p podając tylko pierwiastki trójmianu kwadratowego, to przyznajemy **2 punkty**.

Zadanie 28. (*2 pkt*)

Przeciwprostokątna trójkąta prostokątnego jest dłuższa od jednej przyprostokątnej o 1 cm i od drugiej przyprostokątnej o 32 cm. Oblicz długości boków tego trójkąta.

Rozwiązanie

Niech x oznacza długość przeciwprostokątnej. Z twierdzenia Pitagorasa otrzymujemy równanie

$$(x-1)^2+(x-32)^2=x^2 \quad \text{i} \quad x>32$$

Po przekształceniach otrzymujemy równanie

$$x^2-66x+1025=0.$$

Wtedy $x_1=25$ (sprzeczne z założeniem) oraz $x_2=41$.

Odpowiedź: Przeciwprostokątna ma długość 41 cm, jedna przyprostokątna ma długość 9 cm a druga ma długość 40 cm.

Uwagi:

1. Jeżeli zdający zapisze równanie $x^2+(x+31)^2=(x+32)^2$, gdzie $x+32$ jest długością przeciwprostokątnej, to po przekształceniach otrzyma równanie $x^2-2x-63=0$. Wtedy $x=9$ lub $x=-7$.

2. Jeżeli zdający zapisze równanie $x^2+(x-31)^2=(x+1)^2$, gdzie $x+1$ jest długością przeciwprostokątnej, to po przekształceniach otrzyma równanie $x^2-64x+960=0$, gdy $x+1$ jest długością przeciwprostokątnej. Wtedy $x=40$ lub $x=24$.

Schemat oceniania

Zdający otrzymuje ....1 pkt
gdy zapisze równanie z jedną niewiadomą.

To równanie w zależności od przyjętych oznaczeń może mieć postać:

$(x-1)^2+(x-32)^2=x^2$, gdy x jest długością przeciwprostokątnej

albo

$x^2+(x+31)^2=(x+32)^2$, gdy $x+32$ jest długością przeciwprostokątnej

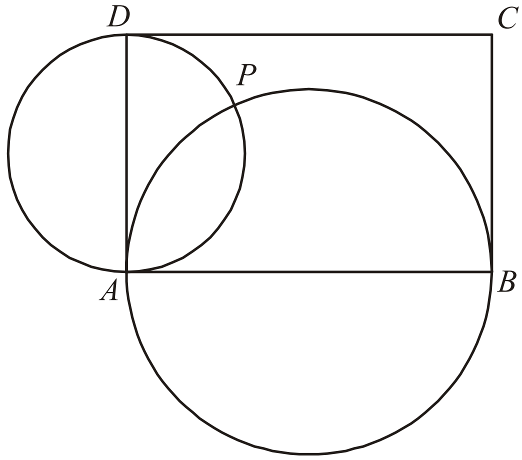
albo

$x^2+(x-31)^2=(x+1)^2$, gdy $x+1$ jest długością przeciwprostokątnej.

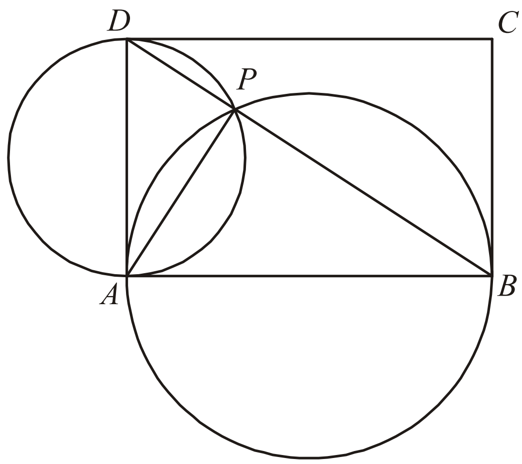
Zdający otrzymuje ....2 pkt
gdy obliczy długości boków tego trójkąta: 9 cm, 40 cm i 41 cm.

Zadanie 29. (*2 pkt*)

Dany jest prostokąt $ABCD$. Okręgi o średnicach AB i AD przecinają się w punktach A i P (zobacz rysunek). Wykaż, że punkty B, P i D leżą na jednej prostej.



<u>I sposób rozwiązania</u>



Łączymy punkt P z punktami A, B i D. Kąt APD jest oparty na półokręgu, więc $|\sphericalangle APD| = 90°$. Podobnie kąt APB jest oparty na półokręgu, więc $|\sphericalangle APB| = 90°$. Zatem

$|\sphericalangle DPB| = |\sphericalangle APD| + |\sphericalangle APB| = 90° + 90° = 180°$,

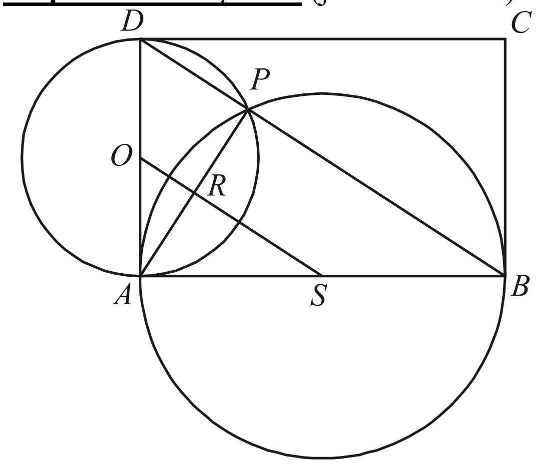
czyli punkty B, P i D są współliniowe.
Uwaga.
Po uzasadnieniu, że trójkąty APD i APB są prostokątne możemy również zastosować twierdzenie Pitagorasa dla tych trójkątów i trójkąta ABD, otrzymując równość $|BD| = |BP| + |PD|$, która oznacza współliniowość punktów B, P i D.

<u>Schemat oceniania I sposobu rozwiązania</u>

Zdający otrzymuje ....1 pkt
gdy zauważy, że $|\sphericalangle APD| = 90°$ oraz $|\sphericalangle APB| = 90°$ i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy lub gdy w jego rozumowaniu występują luki.

Zdający otrzymuje ....2 pkt
gdy uzasadni, że $|\sphericalangle APD| = |\sphericalangle APB| = 90°$ i wywnioskuje, że punkty B, P i D są współliniowe.

II sposób rozwiązania (jednokładność)

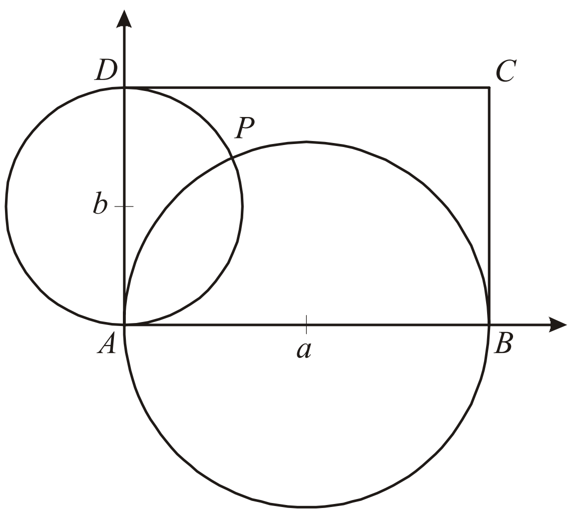


Niech O i S będą środkami obu okręgów i R będzie punktem przecięcia odcinków AP i OS.
Odcinek OS łączący środki okręgów dzieli ich wspólną cięciwę na połowy, więc $|AR| = |RP|$.
Wtedy punkty D, P i B są obrazami punktów współliniowych O, R, S w jednokładności o środku A i skali 2, więc są współliniowe.

Schemat oceniania II sposobu rozwiązania

Zdający otrzymuje ....2 pkt
gdy zauważy i uzasadni, że punkty D, P i B są obrazami punktów współliniowych O, R, S w jednokładności o środku A i skali 2, więc są współliniowe.

III sposób rozwiązania (metoda analityczna)



Umieszczamy okręgi w układzie współrzędnych, tak jak na rysunku.
Zapisujemy układ równań (równania okręgów):

$$\begin{cases} (x-a)^2 + y^2 = a^2 \\ x^2 + (y-b)^2 = b^2 \end{cases}$$

Rozwiązując ten układ równań otrzymujemy współrzędne punktu P:

$$P = \left(\frac{2ab^2}{a^2+b^2}, \frac{2a^2b}{a^2+b^2} \right).$$

Równanie prostej BD ma postać $\frac{x}{2a} + \frac{y}{2b} = 1$.
Ponieważ

$$\frac{1}{2a} \cdot \frac{2ab^2}{a^2+b^2} + \frac{1}{2b} \cdot \frac{2a^2b}{a^2+b^2} = \frac{b^2}{a^2+b^2} + \frac{a^2}{a^2+b^2} = 1,$$

więc punkt P leży na prostej BD.

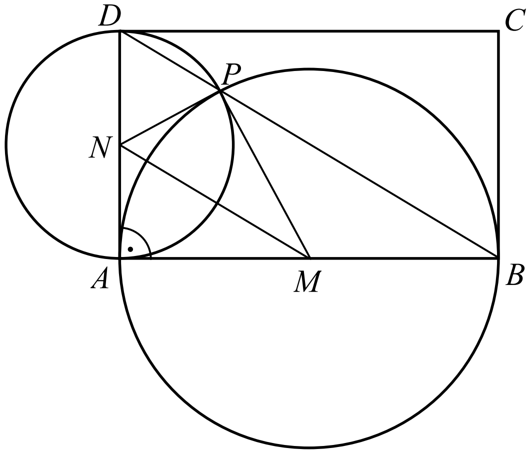
Schemat oceniania III sposobu rozwiązania

Zdający otrzymuje ....1 pkt
gdy zapisze układ równań: $\begin{cases} (x-a)^2 + y^2 = a^2 \\ x^2 + (y-b)^2 = b^2 \end{cases}$ i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy.

Zdający otrzymuje ....2 pkt
gdy wykaże, że punkt P leży na prostej BD.

IV sposób rozwiązania

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.



Odcinki NA i NP są promieniami okręgu o średnicy AD, więc $|AN| = |PN|$. Podobnie odcinki MA i MP są promieniami okręgu o średnicy AB, więc $|AM| = |PM|$. Zatem czworokąt $AMPN$ jest deltoidem. Stąd wynika, że $|\sphericalangle NAM| = |\sphericalangle NPM|$. Ale $|\sphericalangle NAM| = 90°$, więc

(1) $$|\sphericalangle NPM| = 90°$$

Trójkąty NPD i MBP są równoramienne, bo $|PN| = |DN|$ oraz $|PM| = |BM|$. Stąd wynika, że

(2) $$|\sphericalangle NPD| = \frac{180° - |\sphericalangle PND|}{2} \quad \text{oraz} \quad |\sphericalangle MPB| = \frac{180° - |\sphericalangle PMB|}{2}.$$

Z faktu, że $AMPN$ jest deltoidem wynika ponadto, że

(3) $$|\sphericalangle AMN| = |\sphericalangle PMN| \quad \text{oraz} \quad |\sphericalangle ANM| = |\sphericalangle PNM|.$$

Trójkąt AMN jest prostokątny, więc

(4) $$|\sphericalangle ANM| + |\sphericalangle AMN| = 90°.$$

Obliczmy teraz miarę kąta BPD

$$|\sphericalangle BPD| = |\sphericalangle MPB| + |\sphericalangle NPM| + |\sphericalangle NPD| \overset{(1),(2)}{=} \frac{180° - |\sphericalangle PMB|}{2} + 90° + \frac{180° - |\sphericalangle PND|}{2} =$$

$$= 270° - \frac{1}{2}\left(|\sphericalangle PMB| + |\sphericalangle PND|\right) \overset{(3)}{=} 270° - \frac{1}{2}\left(180° - 2 \cdot |\sphericalangle AMN| + 180° - 2 \cdot |\sphericalangle ANM|\right) =$$

$$= 90° + \left(|\sphericalangle AMN| + |\sphericalangle ANM|\right) \overset{(4)}{=} 90° + 90° = 180°.$$

To oznacza, że punkty B, P i D są współliniowe.

Schemat oceniania IV sposobu rozwiązania

Zdający otrzymuje ....1 pkt
gdy zauważy, że czworokąt $AMPN$ jest deltoidem, uzasadni, że kąt MPN jest prosty i zapisze wszystkie równości między miarami kątów w trójkątach: DNP, BMP, AMN, MNP, pozwalające wykazać, że $|\sphericalangle BPD| = |\sphericalangle MPB| + |\sphericalangle NPM| + |\sphericalangle NPD| = 180°$.

Zdający otrzymuje ....2 pkt
gdy wykaże, że $|\sphericalangle BPD| = |\sphericalangle MPB| + |\sphericalangle NPM| + |\sphericalangle NPD| = 180°$.

Zadanie 30. (*2 pkt*)

Uzasadnij, że jeśli $\left(a^2+b^2\right)\left(c^2+d^2\right)=\left(ac+bd\right)^2$, to $ad=bc$.

Rozwiązanie

Przekształcając $\left(a^2+b^2\right)\left(c^2+d^2\right)=\left(ac+bd\right)^2$ otrzymujemy kolejno:

$a^2c^2+a^2d^2+b^2c^2+b^2d^2=a^2c^2+2abcd+b^2d^2$

$a^2d^2-2abcd+b^2c^2=0$

$\left(ad-bc\right)^2=0$

$ad=bc$

Schemat oceniania

Zdający otrzymuje ....2 pkt
gdy przeprowadzi pełny dowód twierdzenia.

Uwagi:

1. Jeżeli zdający przeprowadzi rozumowanie pomijając niektóre przypadki np. rozważy tylko dodatnie wartości iloczynów ad i bc, to przyznajemy **1 punkt**.
2. Jeżeli zdający sprawdzi prawdziwość twierdzenia dla konkretnych wartości *a*, *b*, *c*, *d*, to przyznajemy **0 punktów**.

Zadanie 31. (*2 pkt*)

Ile jest liczb naturalnych czterocyfrowych, w zapisie których pierwsza cyfra jest parzysta a pozostałe nieparzyste?

Rozwiązanie

W zapisie danej liczby na pierwszym miejscu może wystąpić jedna z cyfr: 2, 4, 6, 8, czyli mamy 4 możliwości. Na drugim miejscu może być jedna z cyfr: 1, 3, 5, 7, 9, czyli mamy 5 możliwości. Tak samo na trzecim i czwartym miejscu. Zatem mamy $4\cdot 5^3=500$ takich liczb.

Schemat oceniania

Zdający otrzymuje ....1 pkt
gdy:

- poprawnie obliczy, ile jest możliwości wystąpienia cyfry na pierwszym miejscu i dalej popełnia błąd lub na tym poprzestanie

albo

- poprawnie obliczy, ile jest możliwości wystąpienia cyfry na drugim, trzecim i czwartym miejscu a popełni błąd podając liczbę cyfr na pierwszym miejscu.

Zdający otrzymuje ....2 pkt
gdy poprawnie obliczy, ile jest szukanych liczb: $4\cdot 5^3$, nawet, gdy popełni błąd w obliczeniu tego iloczynu, np. $4\cdot 5^3=600$.

Zadanie 32. (*4 pkt*)

Ciąg $(1, x, y-1)$ jest arytmetyczny, natomiast ciąg $(x, y, 12)$ jest geometryczny. Oblicz x oraz y i podaj ten ciąg geometryczny.

<u>I sposób rozwiązania</u>

Z własności ciągu arytmetycznego otrzymujemy równanie $x = \frac{1+y-1}{2}$, czyli $y = 2x$,

a z własności ciągu geometrycznego wynika równanie $y^2 = x \cdot 12$.

Rozwiązujemy układ równań $\begin{cases} y = 2x \\ y^2 = 12x \end{cases}$.

Otrzymujemy równanie kwadratowe $4x^2 - 12x = 0$, a stąd $x = 3$ lub $x = 0$.

Zatem układ równań ma dwa rozwiązania $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ lub $\begin{cases} x = 3 \\ y = 6 \end{cases}$.

Pierwsze rozwiązanie nie spełnia warunków zadania, gdyż ciąg $(0, 0, 12)$ nie jest geometryczny.

Zatem $x = 3$ i $y = 6$, stąd otrzymujemy ciąg geometryczny $(3, 6, 12)$.

<u>II sposób rozwiązania</u>

Korzystając z definicji ciągów arytmetycznego i geometrycznego otrzymujemy układ równań

$\begin{cases} x = 1 + r \\ y - 1 = x + r \\ y = x \cdot q \\ 12 = y \cdot q \end{cases}$ przy czym $x \neq 0$ i $y \neq 0$, $r \neq -1$ i $q \neq 0$.

Rozwiązujemy ten układ i otrzymujemy

$$\begin{cases} x = 3 \\ y = 6 \\ q = 2 \\ r = 2 \end{cases}$$

Zatem $x = 3$ i $y = 6$. Stąd otrzymujemy ciąg geometryczny $(3, 6, 12)$.

<u>Schemat oceniania I i II sposobu rozwiązania</u>

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania ....1 pkt

Wykorzystanie własności ciągu arytmetycznego albo geometrycznego (definicji lub wzoru na *n*-ty wyraz) i zapisanie równania, np.:

- $x = \frac{1+y-1}{2}$ albo równań, np.: $x = 1 + r$ i $y - 1 = x + r$

albo

- $y^2 = x \cdot 12$ albo równań, np.: $y = x \cdot q$ i $12 = y \cdot q$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 2 pkt
Zapisanie układu równań pozwalającego obliczyć x i y, np.:

$$\begin{cases} y = 2x \\ y^2 = 12x \end{cases} \quad \text{albo} \quad \begin{cases} y = 2x \\ y = x \cdot q \\ 12 = y \cdot q \end{cases} \quad \text{albo} \quad \begin{cases} x = 1 + r \\ y - 1 = x + r \\ y^2 = 12x \end{cases} \quad \text{albo} \quad \begin{cases} x = 1 + r \\ y - 1 = x + r \\ y = x \cdot q \\ 12 = y \cdot q \end{cases}$$

Uwaga
Zdający nie musi zapisywać układu równań, wystarczy, że zapisze wszystkie konieczne zależności.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 3 pkt
Zapisanie i rozwiązanie równania kwadratowego z jedną niewiadomą, np.:

- $4x^2 - 12x = 0$, stąd $x = 3$ lub $x = 0$

albo

- $y^2 - 6y = 0$, stąd $y = 0$ lub $y = 6$.

Rozwiązanie pełne .... 4 pkt
Obliczenie $x = 3$ i $y = 6$ oraz zapisanie ciągu geometrycznego $(3, 6, 12)$.

Uwaga
Przyznajemy **4 punkty**, gdy zdający obliczy $x = 3$ i $y = 6$ i poda ciąg geometryczny w postaci $a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$.

III sposób rozwiązania

Z własności ciągu arytmetycznego otrzymujemy równanie
$x = \frac{1 + y - 1}{2}$, czyli $y = 2x$,
natomiast z własności ciągu geometrycznego równanie
$\frac{12}{y} = \frac{y}{x}$, przy czym $x \neq 0$ oraz $y \neq 0$.

Rozwiązujemy układ równań $\begin{cases} y = 2x \\ \frac{12}{y} = \frac{y}{x} \end{cases}$

Otrzymujemy kolejno $\begin{cases} y = 2x \\ \frac{12}{2x} = \frac{2x}{x} \end{cases}$, $\begin{cases} y = 2x \\ \frac{12}{2x} = 2 \end{cases}$, zatem $x = 3$ i $y = 6$.

Stąd otrzymujemy ciąg geometryczny $(3, 6, 12)$.

Schemat oceniania III sposobu rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania .... 1 pkt
Wykorzystanie własności ciągu arytmetycznego (definicji lub wzoru na n-ty wyraz) albo wykorzystanie własności ciągu geometrycznego (definicji lub wzoru na n-ty wyraz) i zapisanie:

- równania, np.: $x = \frac{1+y-1}{2}$

albo

- równania, np.: $\frac{12}{y} = \frac{y}{x}$

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 2 pkt
Zapisanie układu równań pozwalającego obliczyć x i y, np.:

$$\begin{cases} y = 2x \\ \frac{12}{y} = \frac{y}{x} \end{cases}$$

<u>Uwaga</u>
Zdający nie musi zapisywać układu równań, wystarczy, że zapisze wszystkie konieczne zależności.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 3 pkt
Zapisanie i rozwiązanie równania z niewiadomą x, np.:
$\frac{12}{2x} = \frac{2x}{x}$ i $x = 3$.

Rozwiązanie pełne .... 4 pkt
Obliczenie $x = 3$ i $y = 6$ oraz zapisanie ciągu geometrycznego $(3,6,12)$.

<u>**IV sposób rozwiązania**</u>:

Z własności ciągu arytmetycznego otrzymujemy równanie
$x = \frac{1+y-1}{2}$, czyli $y = 2x$.
Ciąg $(x, y, 12)$ jest geometryczny i $y = 2x$, zatem iloraz q tego ciągu jest równy 2.

Z własności ciągu geometrycznego otrzymujemy $y = \frac{12}{2} = 6$ i $x = \frac{12}{4} = 3$.

Zatem $x = 3$ i $y = 6$, a stąd otrzymujemy ciąg geometryczny $(3,6,12)$.

<u>**Schemat oceniania IV sposobu rozwiązania**</u>

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania .... 1 pkt

Wykorzystanie własności ciągu arytmetycznego i zapisanie równania, np.: $x = \frac{1+y-1}{2}$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 2 pkt

- zapisanie ciągu geometrycznego $(x, 2x, 12)$

albo

- obliczenie ilorazu q tego ciągu: $q = 2$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 3 pkt
Obliczenie $x = 3$ lub $y = 6$.

Rozwiązanie pełne .... 4 pkt
Obliczenie $x = 3$ i $y = 6$ oraz zapisanie ciągu geometrycznego $(3, 6, 12)$.

Zadanie 33. (4 *pkt*)

Punkty $A=(1,5)$, $B=(14,31)$, $C=(4,31)$ są wierzchołkami trójkąta. Prosta zawierająca wysokość tego trójkąta poprowadzona z wierzchołka C przecina prostą AB w punkcie D. Oblicz długość odcinka BD.

I sposób rozwiązania

Wyznaczamy równanie prostej AB: $y=2x+3$.

Wyznaczamy równanie prostej CD, prostopadłej do prostej AB: $y=-\frac{1}{2}x+33$.

Obliczamy współrzędne punktu D: $D=(12,27)$.

Obliczamy długość odcinka BD: $|BD|=2\sqrt{5}$.

Schemat oceniania I sposobu rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania ....1 pkt
Wyznaczenie równania prostej AB (albo współczynnika kierunkowego a prostej AB albo współrzędnych wektora $\overrightarrow{AB}$): $y=2x+3$ ($a=2$, $\overrightarrow{AB}=[13,26]$).

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ....2 pkt
Wyznaczenie równania prostej CD: $y=-\frac{1}{2}x+33$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania ....3 pkt
Obliczenie współrzędnych punktu D: $D=(12,27)$.

Rozwiązanie pełne ....4 pkt
Obliczenie długości odcinka BD: $|BD|=2\sqrt{5}$ lub $|BD|=\frac{10}{\sqrt{5}}$.

II sposób rozwiązania

Wyznaczamy równanie prostej AB: $y=2x+3$.

Wyznaczamy równanie prostej CD, prostopadłej do prostej AB: $y=-\frac{1}{2}x+33$.

Obliczamy odległość punktu $B=(14,31)$ od prostej CD o równaniu $x+2y-66=0$:

$\frac{|14+2\cdot 31-66|}{\sqrt{5}}=2\sqrt{5}$, więc $|BD|=2\sqrt{5}$.

Schemat oceniania II sposobu rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania ....1 pkt
Wyznaczenie równania prostej AB (albo współczynnika kierunkowego a prostej AB albo współrzędnych wektora $\overrightarrow{AB}$): $y=2x+3$ ($a=2$, $\overrightarrow{AB}=[13,26]$).

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ....2 pkt
Wyznaczenie równania prostej CD: $y=-\frac{1}{2}x+33$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 3 pkt

Zastosowanie wzoru na odległość punktu B od prostej CD: $\frac{|14+2\cdot 31-66|}{\sqrt{5}}$.

Rozwiązanie pełne .... 4 pkt

Obliczenie długości odcinka BD: $|BD| = 2\sqrt{5}$ lub $|BD| = \frac{10}{\sqrt{5}}$.

<u>III sposób rozwiązania</u>

Wyznaczamy równanie prostej AB: $y = 2x + 3$.

Obliczamy odległość punktu $C = (4,31)$ od prostej AB o równaniu $2x - y + 3 = 0$:

$$|CD| = \frac{|2\cdot 4-31+3|}{\sqrt{5}} = \frac{20}{\sqrt{5}}.$$

Obliczamy długość odcinka CB: $|CB| = 10$.

Korzystając z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta CDB obliczamy długość odcinka BD:

$\left(\frac{20}{\sqrt{5}}\right)^2 + |BD|^2 = 10^2$, więc $|BD| = 2\sqrt{5}$.

<u>Schemat oceniania III sposobu rozwiązania</u>

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania .... 1 pkt

Wyznaczenie równania prostej AB : $y = 2x + 3$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 2 pkt

Obliczenie odległości punktu $C = (4,31)$ od prostej AB o równaniu $2x - y + 3 = 0$:

$|CD| = \frac{|2\cdot 4-31+3|}{\sqrt{5}}$ lub $|CD| = \frac{20}{\sqrt{5}}$ lub $|CD| = 4\sqrt{5}$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 3 pkt

Zastosowanie twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta CDB: $\left(\frac{20}{\sqrt{5}}\right)^2 + |BD|^2 = 10^2$.

Rozwiązanie pełne .... 4 pkt

Obliczenie długości odcinka BD: $|BD| = 2\sqrt{5}$ lub $|BD| = \frac{10}{\sqrt{5}}$.

<u>IV sposób rozwiązania</u>

Obliczamy długość odcinka CB oraz wysokość trójkąta ABC opuszczoną z wierzchołka A:

$|CB| = 10$, $h_A = 26$.

Obliczamy pole trójkąta ABC: $P_{ABC} = \frac{10\cdot 26}{2} = 130$.

Obliczamy długość odcinka AB: $|AB| = \sqrt{845}$.

Pole trójkąta ABC możemy zapisać: $P_{ABC} = \frac{|AB|\cdot|CD|}{2}$. Zatem $\frac{13\sqrt{5}\cdot|CD|}{2} = 130$.

Stąd $|CD| = 4\sqrt{5}$.

Korzystając z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta *CDB* obliczamy długość odcinka *BD*:

$\left(4\sqrt{5}\right)^2 + |BD|^2 = 10^2$, więc $|BD| = 2\sqrt{5}$.

<u>Schemat oceniania IV sposobu rozwiązania</u>

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania .... 1 pkt

Obliczenie pola trójkąta *AB* : $P_{ABC} = 130$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 2 pkt

Obliczenie długości odcinka *CD*: $|CD| = 4\sqrt{5}$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 3 pkt

Zastosowanie twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta *CDB*: $\left(4\sqrt{5}\right)^2 + |BD|^2 = 10^2$.

Rozwiązanie pełne .... 4 pkt

Obliczenie długości odcinka *BD*: $|BD| = 2\sqrt{5}$ lub $|BD| = \frac{10}{\sqrt{5}}$.

<u>V sposób rozwiązania</u>

Obliczamy długości wszystkich boków trójkąta *ABC*: $|AB| = \sqrt{845}$, $|AC| = \sqrt{685}$, $|CB| = 10$.

Korzystając z twierdzenia Pitagorasa dla trójkątów *CDB* i *ADC* zapisujemy układ równań:

$$\begin{cases} |CB|^2 = |BD|^2 + |CD|^2 \\ |CA|^2 = \left(|AB| - |BD|\right)^2 + |CD|^2 \end{cases}$$

Wyznaczając $|CD|^2$ z pierwszego równania i podstawiając do drugiego równania otrzymujemy:

$\left(\sqrt{685}\right)^2 = \left(\sqrt{845} - |BD|\right)^2 + 10^2 - |BD|^2$.

Stąd $|BD| = 2\sqrt{5}$.

<u>Schemat oceniania V sposobu rozwiązania</u>

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania .... 1 pkt

Obliczenie długości wszystkich boków trójkąta *ABC*: $|AB| = \sqrt{845}$, $|AC| = \sqrt{685}$, $|CB| = 10$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 2 pkt

Zapisanie układu równań:

$$\begin{cases} |CB|^2 = |BD|^2 + |CD|^2 \\ |CA|^2 = \left(|AB| - |BD|\right)^2 + |CD|^2 \end{cases}$$

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 3 pkt

Zapisanie równania z niewiadomą *BD*: $\left(\sqrt{685}\right)^2 = \left(\sqrt{845} - |BD|\right)^2 + 10^2 - |BD|^2$.

Rozwiązanie pełne ....4 pkt

Obliczenie długości odcinka BD: $|BD| = 2\sqrt{5}$ lub $|BD| = \frac{10}{\sqrt{5}}$.

Zadanie 34. (5 *pkt*)

Droga z miasta A do miasta B ma długość 474 km. Samochód jadący z miasta A do miasta B wyrusza godzinę później niż samochód z miasta B do miasta A. Samochody te spotykają się w odległości 300 km od miasta B. Średnia prędkość samochodu, który wyjechał z miasta A, liczona od chwili wyjazdu z A do momentu spotkania, była o 17 km/h mniejsza od średniej prędkości drugiego samochodu liczonej od chwili wyjazdu z B do chwili spotkania. Oblicz średnią prędkość każdego samochodu do chwili spotkania.

<u>I sposób rozwiązania</u>

Niech v oznacza średnią prędkość samochodu, który wyjechał z miasta B i niech t oznacza czas od chwili wyjazdu tego samochodu do chwili spotkania.
Obliczamy, jaką drogę do chwili spotkania pokonał samochód jadący z miasta A: 174 km.
Zapisujemy układ równań

$$\begin{cases} v \cdot t = 300 \\ (v-17)(t-1) = 174 \end{cases}$$

Przekształcając drugie równanie uwzględniając warunek $v \cdot t = 300$ otrzymujemy:
$v = 143 - 17t$.
Otrzymaną wartość v podstawiamy do pierwszego równania i otrzymujemy:
$17t^2 - 143t + 300 = 0$.
Rozwiązaniami tego równania są liczby:
$t_1 = \frac{75}{17} = 4\frac{7}{17}$ i $t_2 = 4$.
Stąd $v_1 = 68$, $v_2 = 75$.

Odpowiedź: pierwsze rozwiązanie: $v_A = 51$ km/h, $v_B = 68$ km/h,
drugie rozwiązanie: $v_A = 58$ km/h, $v_B = 75$ km/h,

gdzie v_A oznacza prędkość samochodu jadącego z miasta A, a v_B oznacza prędkość samochodu jadącego z miasta B.

<u>Uwaga</u>
Możemy otrzymać inne równania kwadratowe z jedną niewiadomą:
$17t_A^2 - 109t_A + 174 = 0$ lub $v_A^2 - 109v_A + 2958 = 0$ lub $v_B^2 - 143v_B + 5100 = 0$.

<u>Schemat oceniania I sposobu rozwiązania</u>
<u>Uwaga</u>
W poniżej zamieszczonym schemacie używamy niewiadomych v_A, t_A oznaczających odpowiednio: prędkość i czas dla samochodu jadącego z miasta A oraz niewiadomych v_B, t_B oznaczających odpowiednio: prędkość i czas dla samochodu jadącego z miasta B. Oczywiście w pracach maturalnych te niewiadome mogą być oznaczane w inny sposób. Nie wymagamy, by te niewiadome były wyraźnie opisane na początku rozwiązania, o ile z postaci równań jasno wynika ich znaczenie.

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania ....1 pkt
Obliczenie, jaką drogę do chwili spotkania pokonał samochód jadący z miasta A: 174 km.
Zapisanie równania:
$\left(v_B-17\right)\left(t_B-1\right)=174$ lub $\left(v_A+17\right)\left(t_A+1\right)=300$.

Uwaga
Przyznajemy **0 pkt,** jeżeli zdający zapisze tylko równanie $v_B\cdot t_B=300$ lub $v_A\cdot t_A=174$ lub odpowiednio zapisze, że $\left(v_B+17\right)\cdot\left(t_B+1\right)=174$ lub $\left(v_A-17\right)\cdot\left(t_A-1\right)=300$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ....2 pkt
Zapisanie układu równań np.

$$\begin{cases}\left(v_B-17\right)\left(t_B-1\right)=174\\ v_B\cdot t_B=300\end{cases} \quad \text{lub} \quad \begin{cases}v_A\cdot t_A=174\\ \left(v_A+17\right)\left(t_A+1\right)=300\end{cases}$$

Pokonanie zasadniczych trudności zadania ....3 pkt
Sprowadzenie do równania z jedną niewiadomą v_A lub t_A lub v_B lub t_B, np.

$$\left(\frac{174}{t_A}+17\right)\left(t_A+1\right)=300 \text{ lub } \left(v_A+17\right)\left(\frac{174}{v_A}+1\right)=300$$

$$\text{lub } \left(\frac{300}{t_B}-17\right)\left(t_B-1\right)=174 \text{ lub } \left(v_B-17\right)\left(\frac{300}{v_B}-1\right)=174.$$

Uwaga
Zdający nie musi zapisywać układu równań, może bezpośrednio zapisać równanie z jedną niewiadomą.

Rozwiązanie zadania do końca, lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe)...4 pkt

- rozwiązanie równania z niewiadomą v_B z błędem rachunkowym i konsekwentnie do popełnionego błędu obliczenie prędkości obu samochodów

albo

- rozwiązanie równania z niewiadomą t_A bezbłędnie: $t_A=3\,h$ lub $t_A=\frac{58}{17}h=3\frac{7}{17}\,h$
  i nieobliczenie prędkości samochodu jadącego z miasta A

albo

- rozwiązanie równania z niewiadomą t_B bezbłędnie: $t_B=4h$ lub $t_B=\frac{75}{17}h=4\frac{7}{17}\,h$
  i nieobliczenie prędkości samochodu jadącego z miasta B

albo

- obliczenie t_A lub t_B z błędem rachunkowym i konsekwentne obliczenie prędkości v_A, v_B

albo

- rozwiązanie równania kwadratowego i przyjęcie tylko jednego rozwiązania lub prędkości tylko jednego samochodu.

Rozwiązanie pełne ....5 pkt

Obliczenie prędkości obu samochodów: $\begin{cases} v_A = 58 \text{ km/h} \\ v_B = 75 \text{ km/h} \end{cases}$ lub $\begin{cases} v_A = 51 \text{ km/h} \\ v_B = 68 \text{ km/h} \end{cases}$

Uwaga

Zdający otrzymuje 5 punktów **tylko w przypadku**, gdy prawidłowo przyporządkuje prędkości.

II sposób rozwiązania

Niech v_A oznacza średnią prędkość samochodu, który wyjechał z miasta A, zaś v_B oznacza średnią prędkość samochodu, który wyjechał z miasta B oraz niech t oznacza czas od chwili wyjazdu samochodu z miasta B do chwili spotkania samochodów.
Obliczamy, jaką drogę do chwili spotkania pokonał samochód jadący z miasta A: 174 km.

Zapisujemy równania: $v_A = \frac{174}{t-1}$, $v_B = \frac{300}{t}$, wówczas otrzymujemy równanie $\frac{174}{t-1} + 17 = \frac{300}{t}$.

Przekształcamy to równanie do równania kwadratowego $17t^2 - 143t + 300 = 0$.

Rozwiązaniami tego równania są liczby: $t_1 = \frac{75}{17} = 4\frac{7}{17}$, $t_2 = 4$.

Dla $t_1 = \frac{75}{17} = 4\frac{7}{17}$ otrzymujemy $v_A = 51,\ v_B = 68$ oraz dla $t_2 = 4$ otrzymujemy $v_A = 58,\ v_B = 75$.

Odpowiedź: Pierwsze rozwiązanie $v_A = 51$ km/h, $v_B = 68$ km/h.
Drugie rozwiązanie $v_A = 58$ km/h, $v_B = 75$ km/h.

Schemat oceniania II sposobu rozwiązania

Uwaga

W poniżej zamieszczonym schemacie używamy niewiadomych v_A, v_B, t oznaczających odpowiednio: prędkość dla samochodu jadącego z miasta A, prędkość dla samochodu jadącego z miasta B oraz czas dla samochodu jadącego z miasta B.
Oczywiście w pracach maturalnych te niewiadome mogą być oznaczane w inny sposób. Nie wymagamy, by te niewiadome były wyraźnie opisane na początku rozwiązania, o ile z postaci równań jasno wynika ich znaczenie.

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania ....1 pkt

Obliczenie, jaką drogę do chwili spotkania pokonał samochód jadący z miasta A: 174 km .
Zapisanie równań na średnie prędkości samochodów wyjeżdżających z miasta A i z miasta B, np.

$v_B = \frac{300}{t}$, $v_A = \frac{174}{t-1}$.

Uwaga

Przyznajemy **0 pkt**, jeżeli zdający zapisze tylko równanie $v_B = \frac{300}{t}$ lub $v_A = \frac{174}{t-1}$ albo odpowiednio zapisze, że $v_A = \frac{174}{t+1}$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania ....3 pkt

Zapisanie równania wymiernego z jedną niewiadomą, np. $\frac{174}{t-1} + 17 = \frac{300}{t}$.

Rozwiązanie zadania do końca, lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe) ....4 pkt

- rozwiązanie równania z błędem rachunkowym i konsekwentnie do popełnionego błędu obliczenie prędkości obu samochodów

albo

- rozwiązanie równania i przyjęcie tylko jednego rozwiązania lub prędkości tylko jednego samochodu.

Rozwiązanie pełne ....5 pkt

Obliczenie prędkości obu samochodów: $\begin{cases} v_A = 58 \text{ km/h} \\ v_B = 75 \text{ km/h} \end{cases}$ lub $\begin{cases} v_A = 51 \text{ km/h} \\ v_B = 68 \text{ km/h} \end{cases}$

Uwaga

Zdający otrzymuje 5 punktów **tylko w przypadku**, gdy prawidłowo przyporządkuje prędkości.