Centralna Komisja Egzaminacyjna

EGZAMIN MATURALNY 2012

MATEMATYKA

POZIOM PODSTAWOWY

Kryteria oceniania odpowiedzi

MAJ 2012

Zadanie 1. (0–1)

Obszar standardów	Opis wymagań	Poprawna odpowiedź (1 p.) Wersja arkusza A	Poprawna odpowiedź (1 p.) Wersja arkusza B
Modelowanie matematyczne	Wykonanie obliczeń procentowych (III.1.d)	**A**	**D**

Zadanie 2. (0–1)

Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	Zastosowanie praw działań na potęgach o wykładnikach wymiernych, obliczenie potęgi o wykładniku wymiernym (II.1.g)	**B**	**C**

Zadanie 3. (0–1)

Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	Wykonanie obliczeń na liczbach rzeczywistych z wykorzystaniem wzorów skróconego mnożenia (II.1.a; 1.g; 2.a)	**A**	**A**

Zadanie 4. (0–1)

Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	Obliczenie wartości logarytmu (II.1.h)	**B**	**C**

Zadanie 5. (0–1)

Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	Wykorzystanie pojęcia wartości bezwzględnej do rozwiązania równania typu $\|x-a\|=b$ (II.1.f)	**B**	**A**

Zadanie 6. (0–1)

Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	Obliczenie sumy rozwiązań równania kwadratowego (II.3.a)	**C**	**B**

Zadanie 7. (0–1)

Wykorzystanie i interpretowanie informacji	Odczytanie z postaci iloczynowej funkcji kwadratowej jej miejsc zerowych (I.4.j)	**A**	**B**

Zadanie 8. (0–1)

Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	Wykorzystanie interpretacji współczynników we wzorze funkcji liniowej (I.4.g)	**A**	**D**

Zadanie 9. (0–1)

Wykorzystanie i interpretowanie informacji	Odczytanie z wykresu funkcji jej miejsc zerowych (I.4.b)	**C**	**D**

Zadanie 10. (0–1)

Wykorzystanie i interpretowanie informacji	Planowanie i wykonanie obliczeń na liczbach rzeczywistych (I.1.a; 6.a)	**D**	**B**

Zadanie 11. (0–1)

Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	Wykorzystanie definicji do wyznaczenia wartości funkcji trygonometrycznych danego kąta ostrego (II.6.a)	**B**	**A**

Zadanie 12. (0–1)

Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	Znalezienie związków miarowych w figurach płaskich. Zastosowanie twierdzenia Pitagorasa (II.7.c)	**B**	**C**

Zadanie 13. (0–1)

Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	Znalezienie związków miarowych w figurach płaskich. Zastosowanie twierdzenia Pitagorasa (II.7.c)	**D**	**A**

Zadanie 14. (0–1)

Wykorzystanie i interpretowanie informacji	Posłużenie się własnościami figur podobnych do obliczania długości odcinków (I.7.b)	**D**	**C**

Zadanie 15. (0–1)

Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	Wykorzystanie związku między promieniem koła opisanego na kwadracie i długością jego boku (II.7.c)	**B**	**C**

Zadanie 16. (0–1)

Wykorzystanie i interpretowanie informacji	Wykorzystanie związków między kątem wpisanym i środkowym do obliczenia miary kąta (I.7.a)	**C**	**B**

Zadanie 17. (0–1)

Modelowanie matematyczne	Obliczenie wyrazów ciągu arytmetycznego (III.5.a)	**C**	**B**

Zadanie 18. (0–1)

Wykorzystanie i interpretowanie informacji	Obliczenie wyrazu ciągu określonego wzorem ogólnym (I.5.a)	**B**	**D**

Zadanie 19. (0–1)

Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	Obliczenie objętości sześcianu z wykorzystaniem związków miarowych w sześcianie (II.9.b)	**B**	**C**

Zadanie 20. (0–1)

Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	Wyznaczenie wysokości stożka z wykorzystaniem funkcji trygonometrycznych lub własności kwadratu (II.9.b)	**A**	**C**

Zadanie 21. (0–1)

Wykorzystanie i interpretowanie informacji	Wskazanie równania prostej równoległej do danej (I.8.c)	**A**	**B**

Zadanie 22. (0–1)

Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	Wykorzystanie pojęcia układu współrzędnych na płaszczyźnie (II.8.a)	**A**	**D**

Zadanie 23. (0–1)

Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	Zbadanie czy dany punkt spełnia równanie okręgu (II.8.g)	**B**	**D**

Zadanie 24. (0–1)

Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	Zliczenie obiektów w prostych sytuacjach kombinatorycznych, stosowanie zasady mnożenia (II.10.b)	**C**	**B**

Zadanie 25. (0–1)

Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	Obliczenie średniej arytmetycznej i interpretowanie tego parametru w kontekście praktycznym (II.10.a)	**D**	**A**

Zadanie 26. (0–2)

Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	Rozwiązanie nierówności kwadratowej (II.3.a)

Zdający otrzymuje ....1 pkt
gdy:

- prawidłowo obliczy pierwiastki trójmianu kwadratowego $x_1 = -5, x_2 = -3$ i na tym poprzestanie lub dalej popełni błędy

albo

- rozłoży trójmian kwadratowy $x^2 + 8x + 15$ na czynniki liniowe i zapisze nierówność $(x+3)(x+5) > 0$ i na tym poprzestanie lub dalej popełni błędy

albo

- popełni błąd rachunkowy przy obliczaniu pierwiastków trójmianu kwadratowego i konsekwentnie do popełnionego błędu rozwiąże nierówność, np. $x_1 = 3, x_2 = 5, x \in (-\infty, 3) \cup (5, \infty)$

albo

- doprowadzi nierówność do postaci $|x+4| > 1$ (na przykład z postaci $(x+4)^2 - 1 > 0$ otrzymuje $(x+4)^2 > 1$, a następnie $|x+4| > 1$) i na tym poprzestanie lub dalej popełni błędy.

Zdający otrzymuje ....2 pkt
gdy poda zbiór rozwiązań nierówności w postaci:

- $(-\infty, -5) \cup (-3, \infty)$

albo

- $x < -5$ lub $x > -3$

albo

- $x < -5, x > -3$

albo

- w postaci graficznej z poprawnie zaznaczonymi końcami przedziałów.

Kryteria oceniania uwzględniające specyficzne trudności w uczeniu się matematyki

1. Jeśli zdający poprawnie obliczy pierwiastki trójmianu $x_1 = -5, x_2 = -3$ i zapisze, np. $x \in (-\infty, -5) \cup (3, \infty)$ popełniając tym samym błąd przy przepisywaniu jednego z pierwiastków, to otrzymuje **2 punkty**.
2. Jeśli zdający pomyli porządek liczb na osi liczbowej, np. zapisze zbiór rozwiązań nierówności w postaci $(-\infty, -3) \cup (-5, \infty)$, to przyznajemy **2 punkty**.

Zadania 27. (0–2)

Rozumowanie i argumentacja	Uzasadnienie prawdziwości nierówności algebraicznej (V.2.b)

<u>I sposób rozwiązania</u>

Aby wykazać prawdziwość podanej nierówności, przekształcimy ją najpierw do prostszej postaci równoważnej. Rozpoczynamy od podanej nierówności:

$$\frac{a+b+c}{3} > \frac{a+b}{2}$$

Mnożymy obie strony tej nierówności przez 6:

$$2(a+b+c) > 3(a+b)$$

Redukujemy wyrazy podobne:

$$2c > a+b$$

Uzyskana nierówność jest równoważna nierówności wyjściowej, zatem wystarczy wykazać jej prawdziwość. Z założenia wiemy, że $c > a$ oraz $c > b \cdot$ Wobec tego

$$2c = c+c > a+b$$

Co należało wykazać.

<u>Schemat oceniania I sposobu rozwiązania</u>

Zdający otrzymuje ....1 pkt

jeśli przekształci podaną nierówność do postaci $2c > a+b$ lub $(c-a)+(c-b) > 0$, lub $\frac{-a-b+2c}{6} > 0$ i na tym poprzestanie lub dalej popełni błędy.

Zdający otrzymuje ....2 pkt

jeśli przedstawi kompletny dowód podanej nierówności.

<u>II sposób rozwiązania</u>

Zdający prowadzi ciąg nierówności, wychodząc od jednej ze stron podanej nierówności i na końcu dochodząc do drugiej.

Założenie: $0 < a < b < c$

$$\frac{a+b+c}{3} = \frac{1}{3}a+\frac{1}{3}b+\frac{1}{3}c > \frac{1}{3}a+\frac{1}{3}b+\frac{1}{3}b = \frac{1}{3}a+\frac{2}{3}b = \frac{1}{3}a+\frac{1}{6}b+\frac{1}{2}b > \frac{1}{3}a+\frac{1}{6}a+\frac{1}{2}b = \frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b = \frac{a+b}{2}$$

<u>Schemat oceniania II sposobu rozwiązania</u>

Zdający otrzymuje ....1 pkt

jeśli co najmniej jedna z nierówności występująca w zapisanym ciągu nierówności wynika w sposób poprawny z podanych założeń, ale zdający nie podaje kompletnego dowodu wyjściowej nierówności.

Zdający otrzymuje ....2 pkt

jeśli poda kompletny dowód podanej nierówności.

Zadanie 28. (0–2)

Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	Rozwiązanie równania wielomianowego metodą rozkładu na czynniki (II.3.d)

Uwaga
Gdy zdający poda poprawną odpowiedź (trzeci pierwiastek wielomianu: $x=-3$) nie wykonując żadnych obliczeń, to otrzymuje **1 punkt**.

I sposób rozwiązania
Przedstawiamy wielomian $W(x)$ w postaci $W(x)=(x+4)(x-3)(x-a)$, gdzie a oznacza trzeci pierwiastek wielomianu.
Stąd $W(x)=x^3+x^2-ax^2-12x-ax+12a = x^3+(1-a)x^2+(-12-a)x+12a$,
Porównując współczynniki wielomianu $W(x)$ otrzymujemy

$$\begin{cases} 1-a=4 \\ -12-a=-9 \\ 12a=-36 \end{cases}$$

Stąd $a=-3$.
Trzecim pierwiastkiem wielomianu $W(x)$ jest liczba $x=-3$.

Schemat oceniania I sposobu rozwiązania
Zdający otrzymuje .... 1 pkt
gdy przedstawi wielomian $W(x)$ w postaci $W(x)=(x+4)(x-3)(x-a)$ i na tym poprzestanie lub dalej popełni błędy.
Zdający otrzymuje .... 2 pkt
gdy bezbłędnie obliczy trzeci pierwiastek wielomianu: $x=-3$.

II sposób rozwiązania
Przedstawiamy wielomian $W(x)$ w postaci iloczynu:

$$W(x)=x^3+4x^2-9x-36=x^2(x+4)-9(x+4)=(x+4)(x-3)(x+3).$$

Pierwiastkami wielomianu $W(x)$ są zatem

$$x_1=-4,\ x_2=3 \text{ oraz } x_3=-3.$$

Odpowiedź: Trzecim pierwiastkiem wielomianu jest liczba $x=-3$.

Schemat oceniania II sposobu rozwiązania
Zdający otrzymuje .... 1 pkt
gdy przedstawi wielomian w postaci iloczynu, np.:
$W(x)=(x^2-9)(x+4)$ lub $W(x)=(x+4)(x-3)(x+3)$ lub $W(x)=(x^2+x-12)(x+3)$ lub $W(x)=(x^2+7x+12)(x-3)$ i na tym poprzestanie lub dalej popełni błędy.
Zdający otrzymuje .... 2 pkt
gdy bezbłędnie obliczy trzeci pierwiastek wielomianu: $x=-3$.

III sposób rozwiązania

<table>
<tr>
<td>
Liczba -4 jest pierwiastkiem wielomianu $W(x)$, więc wielomian $W(x)$ jest podzielny przez dwumian $(x+4)$.
Dzielimy wielomian $W(x)$ przez dwumian $(x+4)$
$$\begin{array}{l} \quad x^2 \qquad -9 \\ \hline (x^3+4x^2-9x-36):(x+4) \\ -x^3-4x^2 \\ \hline \qquad\qquad -9x-36 \\ \qquad\qquad\ \ 9x+36 \\ \hline \qquad\qquad\ \ = \quad = \end{array}$$
Wielomian $W(x)$ zapisujemy w postaci $W(x)=(x+4)(x^2-9)$,
stąd $W(x)=(x+4)(x-3)(x+3)$.
</td>
<td>
Liczba 3 jest pierwiastkiem wielomianu $W(x)$, więc wielomian $W(x)$ jest podzielny przez dwumian $(x-3)$.
Dzielimy wielomian $W(x)$ przez dwumian $(x-3)$
$$\begin{array}{l} \quad x^2+7x\ +12 \\ \hline (x^3+4x^2-9x-36):(x-3) \\ -x^3+3x^2 \\ \hline \qquad 7x^2-9x \\ \quad -7x^2+21x \\ \hline \qquad\qquad 12x-36 \\ \qquad\quad -12x+36 \\ \hline \qquad\qquad\ = \quad = \end{array}$$
Wielomian $W(x)$ zapisujemy w postaci $W(x)=(x^2+7x+12)(x-3)$.
Wyznaczamy pierwiastki trójmianu $x^2+7x+12$: $x=-4$ i $x=-3$.
</td>
</tr>
<tr>
<td>
Liczby 3 i -4 są pierwiastkami wielomianu $W(x)$, więc wielomian $W(x)$ jest podzielny przez $(x-3)(x+4)=(x^2+x-12)$.
Dzielimy wielomian $W(x)$ przez (x^2+x-12)
$$\begin{array}{l} \quad x\ +3 \\ \hline (x^3+4x^2-9x-36):(x^2+x-12) \\ \ \ x^3-x^2+12x \\ \hline \qquad 3x^2+3x-36 \\ \quad -3x^2-3x+36 \\ \hline \qquad\ = \quad = \quad = \end{array}$$
Zatem
$W(x)=(x^2+x-12)(x+3)=(x-3)(x+4)(x+3)$.
</td>
<td></td>
</tr>
</table>

Zatem pierwiastkami wielomianu są: $x_1=-4$, $x_2=3$ oraz $x_3=-3$.

Odpowiedź: Trzecim pierwiastkiem wielomianu jest liczba $x=-3$.

<u>Schemat oceniania III sposobu rozwiązania</u>

Zdający otrzymuje .... 1 pkt

gdy:

- wykona dzielenie wielomianu przez dwumian $(x+4)$, otrzyma iloraz (x^2-9) i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy

albo

- wykona dzielenie wielomianu przez dwumian $(x-3)$, otrzyma iloraz $(x^2+7x+12)$ i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy

albo

- wykona dzielenie wielomianu przez (x^2+x-12), otrzyma iloraz $(x+3)$ i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy

albo

- wykona dzielenie wielomianu przez $(x+4)$ lub $(x-3)$, lub przez (x^2+x-12) popełniając błąd rachunkowy i konsekwentnie do popełnionego błędu wyznacza pierwiastki otrzymanego ilorazu.

Zdający otrzymuje .... 2 pkt

gdy bezbłędnie obliczy trzeci pierwiastek wielomianu: $x=-3$.

<u>Uwaga</u>

Dzieląc wielomian $W(x)$ przez dwumian $(x-p)$ zdający może posłużyć się schematem Hornera, np. przy dzieleniu przez $(x+4)$ otrzymuje

	1	4	-9	-36
-4	1	0	-9	0

<u>IV sposób rozwiązania</u>

Korzystamy z jednego ze wzorów Viète'a dla wielomianu stopnia trzeciego i otrzymujemy

$$(-4)\cdot 3\cdot x_3=-\frac{-36}{1},\ \text{stąd}\ x_3=-3$$

lub

$$(-4)+3+x_3=-\frac{4}{1},\ \text{stąd}\ x_3=-3,$$

lub

$$(-4)\cdot 3+(-4)\cdot x_3+3\cdot x_3=\frac{-9}{1}.$$

Proste sprawdzenie pokazuje, że rzeczywiście $W(-3)=0$

<u>Schemat oceniania IV sposobu rozwiązania</u>

Zdający otrzymuje .... 1 pkt

gdy poprawnie zastosuje jeden ze wzorów Viète'a dla wielomianu stopnia trzeciego i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy.

Zdający otrzymuje .... 2 pkt

gdy poprawnie obliczy trzeci pierwiastek: $x=-3$.

Zadania 29. (0–2)

Użycie i tworzenie strategii	Wykorzystanie własności symetralnej odcinka do wyznaczenia jej równania (IV.8.b, 8.c, 8.e)

I sposób rozwiązania

Obliczamy współczynnik kierunkowy prostej *AB*: $\frac{10-2}{2-(-2)}=2$. Zatem współczynnik kierunkowy prostej prostopadłej do prostej *AB* jest równy $\left(-\frac{1}{2}\right)$. Symetralna odcinka *AB* ma równanie $y=-\frac{1}{2}x+b$. Punkt $S=\left(\frac{-2+2}{2},\frac{2+10}{2}\right)=(0,6)$ jest środkiem odcinka AB.

Symetralna tego odcinka przechodzi przez punkt *S*, więc $6=-\frac{1}{2}\cdot 0+b$. Stąd $b=6$, a więc symetralna odcinka *AB* ma równanie $y=-\frac{1}{2}x+6$.

Schemat oceniania I sposobu rozwiązania

Zdający otrzymuje ....1 pkt

- gdy poprawnie wyznaczy lub poda współrzędne środka odcinka *AB*: $S=(0,6)$ oraz współczynnik kierunkowy prostej *AB*: $a=2$ i na tym poprzestanie lub dalej popełni błędy

albo

- gdy popełni błędy rachunkowe przy wyznaczaniu współrzędnych środka odcinka albo współczynnika kierunkowego prostej *AB* i konsekwentnie wyznaczy równanie symetralnej

albo

- gdy obliczy współczynnik kierunkowy prostej *AB*: $a=2$ oraz współczynnik kierunkowy prostej do niej prostopadłej $a_1=-\frac{1}{2}$ i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

Zdający otrzymuje ....2 pkt

gdy wyznaczy równanie symetralnej odcinka *AB*: $y=-\frac{1}{2}x+6$ lub $x+2y-12=0$.

II sposób rozwiązania

Obliczamy współrzędne środka odcinka *AB*: $S=(0,6)$. Obliczamy współrzędne wektora $\overrightarrow{AB}=[4,8]$. Ponieważ symetralna odcinka *AB* jest prostopadła do wektora $\overrightarrow{AB}$ i przechodzi przez punkt *S*, więc jej równanie ma postać $4(x-0)+8(y-6)=0$, czyli $x+2y-12=0$.

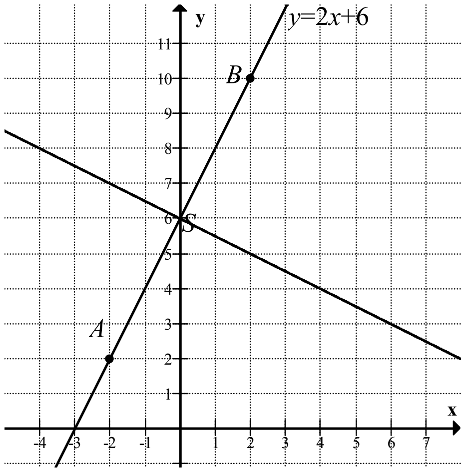
Schemat oceniania II sposobu rozwiązania

Zdający otrzymuje ....1 pkt

gdy wyznaczy współrzędne wektora $\overrightarrow{AB}$: $\overrightarrow{AB}=[4,8]$ oraz środek odcinka *AB*: $S=(0,6)$ i na tym poprzestanie lub dalej popełni błędy.

Zdający otrzymuje .... 2 pkt
gdy poprawnie wyznaczy równanie symetralnej odcinka AB: $x+2y-12=0$ lub $y=-\frac{1}{2}x+6$.

<u>**III sposób rozwiązania**</u>
Z rysunku w układzie współrzędnych



odczytujemy współrzędne punktu $S=(0,6)$, współczynnik kierunkowy symetralnej odcinka AB: $a=-\frac{1}{2}$ i zapisujemy równanie symetralnej odcinka AB : $y=-\frac{1}{2}x+6$.

<u>**Schemat oceniania III sposobu rozwiązania**</u>
Zdający otrzymuje .... 1 pkt
gdy odczyta, z dokładnie sporządzonego rysunku w układzie współrzędnych, współrzędne środka odcinka AB i współczynnik kierunkowy symetralnej prostej AB i na tym poprzestanie lub dalej popełni błędy.
Zdający otrzymuje .... 2 pkt
gdy zapisze równanie symetralnej odcinka AB: $x+2y-12=0$ lub $y=-\frac{1}{2}x+6$.

<u>**IV sposób rozwiązania**</u>
Korzystamy z tego, że symetralna odcinka jest zbiorem wszystkich punktów równo oddalonych od jego końców. Jeśli punkt $P=(x,y)$ leży na symetralnej, to $|AP|=|BP|$.

Zatem $\sqrt{(x+2)^2+(y-2)^2}=\sqrt{(x-2)^2+(y-10)^2}$, czyli $(x+2)^2+(y-2)^2=(x-2)^2+(y-10)^2$.
Po uporządkowaniu równania i redukcji wyrazów podobnych otrzymujemy $x+2y-12=0$.

<u>**Schemat oceniania IV sposobu rozwiązania**</u>
Zdający otrzymuje .... 1 pkt
gdy zapisze równanie $\sqrt{(x+2)^2+(y-2)^2}=\sqrt{(x-2)^2+(y-10)^2}$ i na tym poprzestanie lub dalej popełni błędy.
Zdający otrzymuje .... 2 pkt
gdy wyznaczy równanie symetralnej odcinka AB: $x+2y-12=0$ lub $y=-\frac{1}{2}x+6$.

Kryteria oceniania uwzględniające specyficzne trudności w uczeniu się matematyki

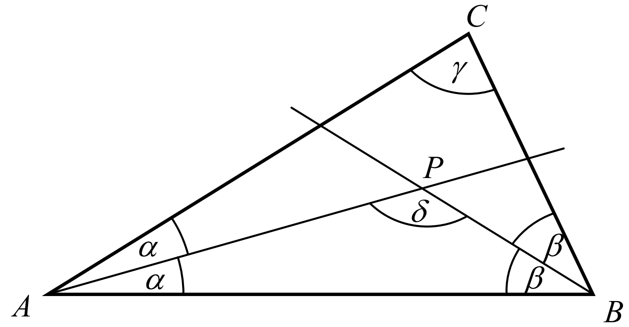
Jeśli zdający przepisze z błędem współrzędne punktów i wyznaczy konsekwentnie równanie symetralnej odcinka *AB,* to za takie rozwiązanie przyznajemy **2 punkty**.

Zadanie 30. (0–2)

Rozumowanie i argumentacja	Przeprowadzenie dowodu geometrycznego (V.7.c)

I sposób rozwiązania

Niech $|\sphericalangle BAC| = 2\alpha$, $|\sphericalangle ABC| = 2\beta$, $|\sphericalangle ACB| = \gamma$, $|\sphericalangle APB| = \delta$.



Suma miar kątów wewnętrznych w trójkącie równa jest 180°, więc w trójkącie *ABC* mamy $2\alpha + 2\beta + \gamma = 180^\circ$.

Ponieważ $\gamma > 0^\circ$, więc $2\alpha + 2\beta < 180^\circ$, stąd $\alpha + \beta < 90^\circ$.

W trójkącie *ABP* mamy $\alpha + \beta + \delta = 180^\circ$.

Stąd i z otrzymanej nierówności $\alpha + \beta < 90^\circ$ wynika, że $\delta > 90^\circ$.

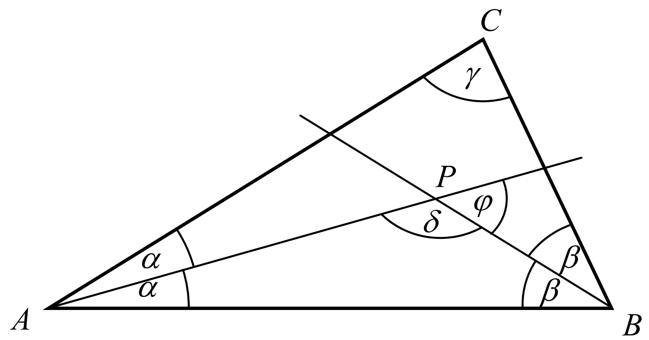
Oznacza to, że kąt *APB* jest kątem rozwartym.
Co należało uzasadnić.

Schemat oceniania I sposobu rozwiązania

Zdający otrzymuje ....2 pkt
gdy przeprowadzi pełne rozumowanie i uzasadni, że kąt *APB* jest kątem rozwartym.

II sposób rozwiązania

Niech $|\sphericalangle BAC| = 2\alpha$, $|\sphericalangle ABC| = 2\beta$, $|\sphericalangle ACB| = \gamma$, $|\sphericalangle APB| = \delta$.



Ponieważ $\delta + \varphi = 180^\circ$ oraz suma miar kątów wewnętrznych w trójkącie ABP jest równa 180°, więc otrzymujemy

$$\varphi = 180^\circ - \delta = \alpha + \beta = \frac{1}{2}(2\alpha + 2\beta) < \frac{1}{2}(2\alpha + 2\beta + \gamma) = \frac{1}{2} \cdot 180^\circ = 90^\circ .$$

Ponieważ $\varphi < 90^\circ$, więc φ jest kątem ostrym, zatem δ jest kątem rozwartym.
Oznacza to, że kąt APB jest kątem rozwartym. Co należało uzasadnić.

<u>Schemat oceniania II sposobu rozwiązania</u>
Zdający otrzymuje .... 2 pkt
gdy przeprowadzi pełne rozumowanie i uzasadni, że kąt APB jest rozwarty.

Zadanie 31. (0–2)

Modelowanie matematyczne	Obliczenie prawdopodobieństwa zdarzenia z zastosowaniem klasycznej definicji prawdopodobieństwa (III.10.b;10.d)

<u>I sposób rozwiązania</u> (*klasyczna definicja prawdopodobieństwa*)
Zdarzeniami elementarnymi są wszystkie pary uporządkowane (x, y) dwóch liczb ze zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.

Liczba wszystkich zdarzeń elementarnych jest równa $|\Omega| = 7 \cdot 7 = 49$.

Iloczyn wylosowanych liczb jest podzielny przez 6, gdy:

- jedna z tych liczb jest równa 6 (wówczas druga jest dowolna)

albo

- jedną z liczb jest 3, a drugą jest 2 lub 4.

Liczba zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu A jest więc równa
$|A| = (2 \cdot 7 - 1) + 2 \cdot 2 = 17$.

Prawdopodobieństwo zdarzenia A jest równe: $P(A) = \frac{17}{49}$.

<u>II sposób rozwiązania</u> (metoda tabeli)

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
1						☺	
2			☺			☺	
3		☺		☺		☺	
4			☺			☺	
5						☺	
6	☺	☺	☺	☺	☺	☺	☺
7						☺	

Symbole w tabeli oznaczają odpowiednio:
☺ - zdarzenie elementarne sprzyjające zdarzeniu A
$|\Omega| = 7 \cdot 7 = 49$ i $|A| = 17$, zatem $P(A) = \frac{17}{49}$.

Schemat oceniania I i II sposobu rozwiązania

Zdający otrzymuje ....1 pkt

gdy

- obliczy liczbę wszystkich możliwych zdarzeń elementarnych: $|\Omega| = 7^2 = 49$

albo

- obliczy (zaznaczy poprawnie w tabeli) liczbę zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu A: $|A| = 17$.

Zdający otrzymuje ....2 pkt

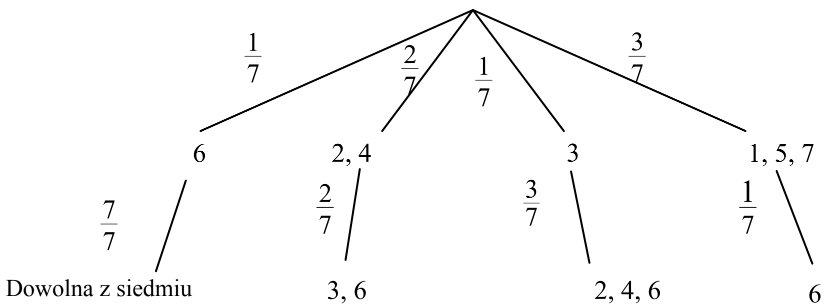
gdy obliczy prawdopodobieństwo zdarzenia A: $P(A) = \frac{17}{49}$.

Uwaga

Jeśli zdający rozwiąże zadanie do końca i otrzyma $P(A) > 1$, to otrzymuje za całe rozwiązanie **0 punktów.**

III sposób rozwiązania (*metoda drzewa*)

Drzewo z istotnymi gałęziami:



Prawdopodobieństwo zdarzenia A (iloczyn wylosowanych liczb jest podzielny przez 6) jest więc równe: $P(A) = \frac{1}{7}\cdot\frac{7}{7} + \frac{2}{7}\cdot\frac{2}{7} + \frac{1}{7}\cdot\frac{3}{7} + \frac{3}{7}\cdot\frac{1}{7} = \frac{17}{49}$.

Schemat oceniania III sposobu rozwiązania

Zdający otrzymuje ....1 pkt

gdy:

- narysuje pełne drzewo i przynajmniej na jednej gałęzi opisze prawdopodobieństwo

albo

- narysuje drzewo tylko z istotnymi gałęziami.

Zdający otrzymuje ....2 pkt

gdy obliczy prawdopodobieństwo zdarzenia A: $P(A) = \frac{17}{49}$.

Uwaga

Jeśli zdający rozwiąże zadanie do końca i otrzyma $P(A) > 1$, to otrzymuje za całe rozwiązanie **0 punktów**.

Kryteria oceniania uwzględniające specyficzne trudności w uczeniu się matematyki

Jeżeli zdający poprawnie obliczy prawdopodobieństwo i błędnie skróci ułamek, np. $P(A) = \frac{17}{49} = \frac{1}{3}$, to otrzymuje **2 punkty**.

Zadanie 32. (0–4)

Modelowanie matematyczne	Zastosowanie własności ciągu arytmetycznego i geometrycznego (III.5.c)

<u>I sposób rozwiązania</u>

Ciąg $(9,x,19)$ jest arytmetyczny, więc wyraz środkowy jest średnią arytmetyczną wyrazów sąsiednich: $x=\frac{9+19}{2}=14$.

Wiemy, że ciąg $(14,42,y,z)$ jest geometryczny, zatem jego iloraz jest równy $q=\frac{42}{14}=3$.

Wobec tego $y=3\cdot 42=126$ i $z=126\cdot 3=378$.

<u>Schemat oceniania I sposobu rozwiązania</u>

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania .... 1 pkt

- wykorzystanie własności ciągu arytmetycznego i zapisanie, np. $x=\frac{9+19}{2}$ lub $2x=9+19$ lub $x=14$

albo

- wykorzystanie własności ciągu geometrycznego i zapisanie, np. $42^2=xy$ lub $y^2=42z$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 3 pkt

Obliczenie ilorazu ciągu geometrycznego $q=3$.

Rozwiązanie pełne .... 4 pkt

Obliczenie $x=14$, $y=126$, $z=378$.

<u>II sposób rozwiązania</u>

Ciąg $(9,x,19)$ jest arytmetyczny, zatem $2x=9+19$, $x=14$.

Ciąg $(14,42,y,z)$ jest geometryczny, zatem $42^2=14\cdot y$ i $y^2=42\cdot z$,

$y=\frac{1764}{14}=126$ i $126^2=42\cdot z$, stąd $z=378$.

<u>Schemat oceniania II sposobu rozwiązania</u>

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania .... 1 pkt

- wykorzystanie własności ciągu arytmetycznego i zapisanie, np. $x=\frac{9+19}{2}$ lub $2x=9+19$, lub $x=14$

albo

- wykorzystanie własności ciągu geometrycznego i zapisanie, np. $42^2=xy$ lub $y^2=42z$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 2 pkt

Obliczenie $x=14$ i zapisanie równania $42^2=14y$ lub $1764=14y$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 3 pkt

Obliczenie $y=126$ i zapisanie równania $y^2=42z$ lub $126^2=42z$.

Rozwiązanie pełne .... 4 pkt
Obliczenie $x = 14$, $y = 126$, $z = 378$.

Uwaga
Jeśli zdający pomyli własności ciągów, to za całe zadanie otrzymuje **0 punktów**.

Zadanie 33. (0–4)

Użycie i tworzenie strategii	Obliczenie objętości wielościanu (IV.9.b)

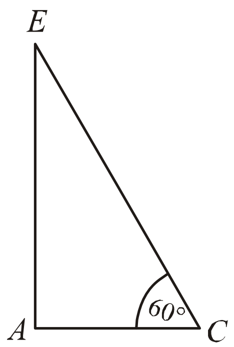
Strategia rozwiązania tego zadania sprowadza się do realizacji następujących etapów:
a) obliczenie wysokości AE ostrosłupa,
b) obliczenie pola podstawy tego ostrosłupa,
c) obliczenie objętości ostrosłupa.

Rozwiązanie

a) Obliczenie pola podstawy ostrosłupa
Podstawa $ABCD$ ostrosłupa jest kwadratem o boku AB. Stosując wzór na przekątną kwadratu, mamy: $4 = |AB|\sqrt{2}$, stąd $|AB| = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$.

Obliczamy pole P podstawy ostrosłupa: $P = \left(2\sqrt{2}\right)^2 = 8$.

b) Obliczenie wysokości AE ostrosłupa
Rysujemy trójkąt EAC.



$|AE| = \frac{8\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}$.

c) Obliczenie objętości ostrosłupa
Objętość ostrosłupa jest równa $V = \frac{1}{3} \cdot 8 \cdot 4\sqrt{3} = \frac{32}{3}\sqrt{3}$.

Schemat oceniania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania .... 1 pkt
Obliczenie wysokości AE ostrosłupa: $|AE| = 4\sqrt{3}$ albo obliczenie pola P podstawy ostrosłupa: $P = \left(2\sqrt{2}\right)^2 = 8$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 3 pkt
Obliczenie pola podstawy i wysokości ostrosłupa.

__Uwaga__
Jeśli zdający obliczy jedną z tych wielkości z błędem rachunkowym, to otrzymuje **2 punkty**.
Rozwiązanie pełne .... 4 pkt
Obliczenie objętości ostrosłupa: $V = \frac{32}{3}\sqrt{3}$.

__Uwaga__
Jeśli zdający pominie współczynnik $\frac{1}{3}$ we wzorze na objętość ostrosłupa, ale rozwiązanie doprowadzi konsekwentnie do końca z tym jednym błędem, to za takie rozwiązanie otrzymuje **3 punkty**.

__Kryteria oceniania uwzględniające specyficzne trudności w uczeniu się matematyki__

Nie obniżamy punktacji zadania za błędy nieuwagi, np. gdy zdający poprawnie obliczył wysokość ostrosłupa, ale przy obliczaniu objętości ostrosłupa podstawił błędna wartość.

Zadanie 34. (0–5)

Modelowanie matematyczne	Rozwiązanie zadania, umieszczonego w kontekście praktycznym, prowadzącego do równania kwadratowego (III.3.b)

__I sposób rozwiązania__
Przyjmujemy oznaczenia np.: t – czas pokonania całej trasy w godzinach przez pociąg osobowy, v – średnia prędkość pociągu osobowego w kilometrach na godzinę.
Zapisujemy zależność między czasem a prędkością w sytuacji opisanej w zadaniu dla pociągu pospiesznego: $(t-1)\cdot(v+24)=210$

Następnie zapisujemy układ równań $\begin{cases} t\cdot v = 210 \\ (t-1)\cdot(v+24)=210 \end{cases}$

Rozwiązując układ równań doprowadzamy do równania z jedną niewiadomą, np.:

$$(t-1)\cdot\left(\frac{210}{t}+24\right)=210$$

$$210+24t-\frac{210}{t}-24=210$$

$$24t^2-24t-210=0$$

$$4t^2-4t-35=0$$

$$\Delta = 16+560=24^2$$

$$t_1=\frac{4-24}{8}=-\frac{5}{2}\ , \qquad t_2=\frac{4+24}{8}=\frac{7}{2}=3{,}5$$

t_1 jest sprzeczne z warunkami zadania.

Obliczamy czas przejazdu tej drogi przez pociąg pospieszny: $3{,}5-1=2{,}5$.

Odp. Czas pokonania tej drogi przez pociąg pospieszny jest równy 2,5 godziny.

II sposób rozwiązania

Zapisujemy zależność między czasem a prędkością w sytuacji opisanej w zadaniu dla pociągu pospiesznego: $(t-1)\cdot(v+24)=210$

Następnie zapisujemy układ równań $\begin{cases} t\cdot v=210 \\ (t-1)\cdot(v+24)=210 \end{cases}$

Rozwiązując układ równań doprowadzamy do równania z jedną niewiadomą, np.:

$\left(\frac{210}{v}-1\right)\cdot(v+24)=210$

$210+\frac{5040}{v}-v-24=210$

$\frac{5040}{v}-v-24=0$

$-v^2-24v+5040=0$

$\Delta=576+20160=144^2$

$v_1=\frac{24-144}{-2}=60$, $\quad v_2=\frac{24+144}{-2}=-84$,

v_2 jest sprzeczne z warunkami zadania.

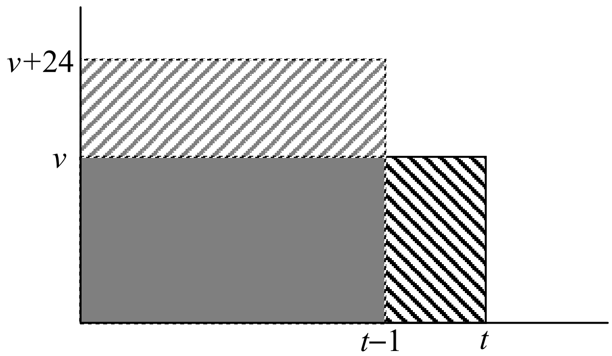
Obliczamy czas przejazdu tej drogi przez pociąg osobowy: $t=\frac{210}{v}=\frac{210}{60}=\frac{7}{2}=3{,}5$.

Obliczamy czas przejazdu tej drogi przez pociąg pospieszny: 3,5 – 1 = 2,5.

Odp. Czas pokonania tej drogi przez pociąg pospieszny jest równy 2,5 godziny.

III sposób rozwiązania

Przyjmujemy oznaczenia np.: *t* – czas pokonania całej trasy w godzinach przez pociąg osobowy, *v* – średnia prędkość pociągu osobowego w kilometrach na godzinę.



Narysowane duże prostokąty reprezentują odległości przebyte przez obydwa pociągi, mają zatem równe pola. Wobec tego pola zakreskowanych prostokątów są równe. Stąd równość $24(t-1)=1\cdot v$. Droga przebyta przez pociąg osobowy wyraża się wzorem $v\cdot t=24(t-1)\cdot t$.

Ponieważ trasa pociągu ma długość 210 km, otrzymujemy równanie $24(t-1)\cdot t=210$.

Stąd $24t^2-24t-210=0$

$4t^2-4t-35=0$

$\Delta=16+560=24^2$

$t_1=\frac{4-24}{8}=-\frac{5}{2}$, $\qquad t_2=\frac{4+24}{8}=\frac{7}{2}=3{,}5$

t_1 jest sprzeczne z warunkami zadania. Zatem pociąg osobowy jechał przez 3,5 godziny,

a pociąg pospieszny: $3,5-1=2,5$ godziny.

Odp. Czas pokonania tej drogi przez pociąg pospieszny jest równy 2,5 godziny.

Schemat oceniania I, II i III sposobu rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania .... 1 pkt

Zapisanie równania z dwiema niewiadomymi

$\left(t-1\right)\left(v+24\right)=210$

gdy t oznacza czas pokonania całej trasy w godzinach przez pociąg osobowy, a v średnią prędkość pociągu osobowego w kilometrach na godzinę,

lub

$\left(t+1\right)\left(v-24\right)=210$

gdy t oznacza czas pokonania całej trasy w godzinach przez pociąg pospieszny, a v średnią prędkość pociągu pospiesznego w kilometrach na godzinę.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 2 pkt

Zapisanie układu równań z niewiadomymi v i t, np.:

$$\begin{cases} t\cdot v=210 \\ \left(t-1\right)\cdot\left(v+24\right)=210 \end{cases} \quad \text{lub} \quad \begin{cases} t\cdot v=210 \\ \left(t+1\right)\cdot\left(v-24\right)=210 \end{cases}$$

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 3 pkt

Zapisanie równania z jedną niewiadomą v lub t, np.:

$$\left(t-1\right)\cdot\left(\frac{210}{t}+24\right)=210 \quad \text{lub} \quad \left(\frac{210}{v}-1\right)\cdot\left(v+24\right)=210 \quad \text{lub} \quad 24\left(t-1\right)\cdot t=210$$

Uwaga

Zdający nie musi zapisywać układu równań, może bezpośrednio zapisać równanie z jedną niewiadomą.

Zostały pokonane zasadnicze trudności zadania, ale w trakcie ich pokonywania zostały popełnione błędy rachunkowe lub usterki .... 2 pkt

Rozwiązanie zadania do końca lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe) .... 4 pkt

- rozwiązanie równania z niewiadomą v lub t z błędem rachunkowym i konsekwentne obliczenie czasu pokonania drogi przez pociąg pospieszny

albo

- obliczenie czasu jazdy pociągu osobowego: $t=3,5$ i nie obliczenie czasu pokonania tej drogi przez pociąg pospieszny.

Rozwiązanie pełne .... 5 pkt

Obliczenie czasu pokonania tej drogi przez pociąg pospieszny: 2,5 godziny.

Uwagi

1. Jeżeli zdający porównuje wielkości różnych typów, to otrzymuje **0 punktów**.
2. Jeżeli zdający odgadnie czas jazdy pociągu pospiesznego i nie uzasadni, że jest to jedyne rozwiązanie, to otrzymuje **1 punkt**.

Kryteria oceniania uwzględniające specyficzne trudności w uczeniu się matematyki

Przykład 1.
Jeśli zdający przedstawi następujące rozwiązanie:
v - prędkość pociągu osobowego, t - czas pokonania całej trasy w godzinach przez pociąg osobowy

$$v+24=\frac{210}{t-1}$$

$$\begin{cases} 210 = v\cdot t \\ 210=\left(v+24\right)t-1 \end{cases}$$

i na tym zakończy, to takie rozwiązanie kwalifikujemy do kategorii **Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp** i przyznajemy **2 punkty**, mimo że w drugim równaniu układu zdający nie ujął wyrażenia $t-1$ w nawias. Zapis równania $v+24=\frac{210}{t-1}$ wskazuje na poprawną interpretację zależności między wielkościami.

Przykład 2.
Jeśli zdający przedstawi następujące rozwiązanie:
v - prędkość pociągu osobowego, t - czas pokonania całej trasy w godzinach przez pociąg osobowy

$$v+24=\frac{210}{t-1} \qquad \begin{cases} v=\frac{210}{t} \\ v+24=\frac{210}{t-1} \end{cases} \qquad \frac{120}{t}+24=\frac{210}{t-}$$

i na tym zakończy, to takie rozwiązanie kwalifikujemy do kategorii **Pokonanie zasadniczych trudności zadania** i przyznajemy **3 punkty,** mimo że w równaniu $\frac{120}{t}+24=\frac{210}{t-}$ zdający przestawił cyfry w zapisie liczby 210 i pominął liczbę 1 w mianowniku ułamka.

Przykład 3.
Jeśli zdający otrzyma inne równanie kwadratowe, np. $4t^2+4t-35=0$ zamiast równania $4t^2-4t-35=0$ (np. w wyniku złego przepisania znaku lub liczby), konsekwentnie jednak rozwiąże otrzymane równanie kwadratowe, odrzuci ujemne rozwiązanie i pozostawi wynik, który może być realnym czasem jazdy pociągu pospiesznego, to takie rozwiązanie kwalifikujemy do kategorii **Rozwiązanie pełne** i przyznajemy **5 punktów**.