

**Miejsce
na naklejkę**

MMA-R1_1P-082

**EGZAMIN MATURALNY
Z MATEMATYKI
POZIOM ROZSZERZONY**

**MAJ
ROK 2008**

Czas pracy 180 minut

Instrukcja dla zdającego

1. Sprawdź, czy arkusz egzaminacyjny zawiera 18 stron (zadania 1 – 12). Ewentualny brak zgłoś przewodniczącemu zespołu nadzorującego egzamin.
2. Rozwiązania zadań i odpowiedzi zamieść w miejscu na to przeznaczonym.
3. W rozwiązaniach zadań przedstawiaj rozumowanie prowadzący do ostatecznego wyniku.
4. Pisz czytelnie. Używaj długopisu tylko z czarnym tuszem/atramentem.
5. Nie używaj korektora, a błędne zapisy przekreśl.
6. Pamiętaj, że zapisy w marginesie nie podlegają ocenie.
7. Obok każdego zadania podana jest maksymalna liczba punktów, którą można uzyskać za jego poprawne rozwiązanie.
8. Możesz korzystać z zestawu wzorów matematycznych, cyrkla i linijki oraz kalkulatora.
9. Na karcie odpowiedzi wpisz swoją datę urodzenia i PESEL. Nie wpisuj żadnych znaków w części przeznaczonej dla egzaminatora.



Za rozwiązanie
wszystkich zadań
można otrzymać
łącznie
50 punktów

Życzymy powodzenia!

**Wypełnia zdający
przed rozpoczęciem pracy**

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

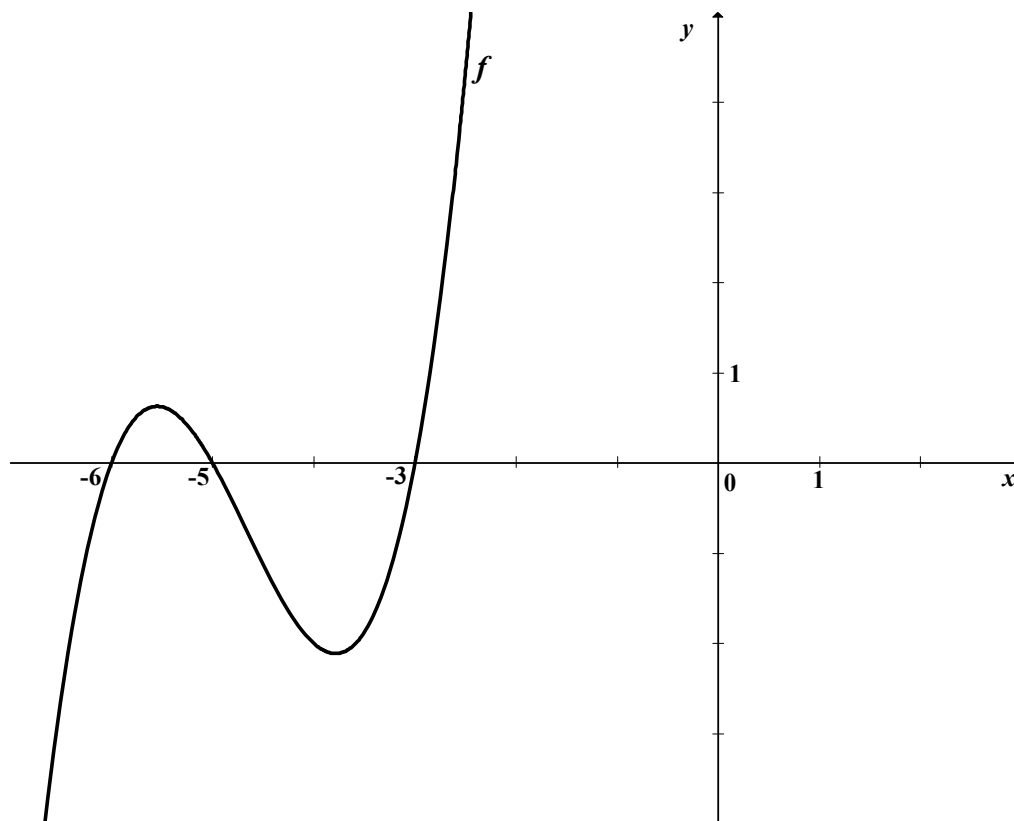
PESEL ZDAJĄCEGO

--	--	--

**KOD
ZDAJĄCEGO**

Zadanie 1. (4 pkt)

Wielomian f , którego fragment wykresu przedstawiono na poniższym rysunku spełnia warunek $f(0) = 90$. Wielomian g dany jest wzorem $g(x) = x^3 - 14x^2 + 63x - 90$. Wykaż, że $g(x) = -f(-x)$ dla $x \in \mathbb{R}$.



Z rysunku odczytuję miejsca zerowe funkcji f i zapisuję jej wzór w postaci iloczynowej $f(x) = a(x + 6)(x + 5)(x + 3)$.

Funkcja spełnia warunek $f(0) = 90$, czyli $a(0 + 6)(0 + 5)(0 + 3) = 90$.

Obliczam współczynnik a : $a = 1$ i zapisuję wzór funkcji f :

$$f(x) = (x + 6)(x + 5)(x + 3).$$

Wzór funkcji f zapisuję w postaci: $f(x) = x^3 + 14x^2 + 63x + 90$.

$$\begin{aligned} -f(-x) &= -\left[(-x)^3 + 14(-x)^2 + 63(-x) + 90\right] = \\ &= -\left[-x^3 + 14x^2 - 63x + 90\right] = \\ &= x^3 - 14x^2 + 63x - 90 = g(x) \end{aligned}$$

Zatem $-f(-x) = g(x)$ dla $x \in \mathbb{R}$.

Zadanie 2. (4 pkt)

Rozwiąż nierówność $|x-2|+|3x-6|<|x|$.

$|3x-6|=3\cdot|x-2|$, więc nierówność przyjmuje postać: $4|x-2|<|x|$.

Rozwiązanie nierówności:

$$\begin{cases} -4(x-2)<-x & \text{gdy } x\in(-\infty,0) \\ -4(x-2)<x & \text{gdy } x\in\langle 0,2 \rangle \\ 4(x-2)<x & \text{gdy } x\in\langle 2,\infty \rangle \end{cases}$$

$$\begin{cases} x>\frac{8}{3} & \text{gdy } x\in(-\infty,0) \\ x>\frac{8}{5} & \text{gdy } x\in\langle 0,2 \rangle \\ x<\frac{8}{3} & \text{gdy } x\in\langle 2,\infty \rangle \end{cases}$$

W przedziale $(-\infty,0)$ nierówność nie ma rozwiązania.

Rozwiązaniem nierówności w przedziale $\langle 0,2 \rangle$ są liczby rzeczywiste należące do przedziału $\left(\frac{8}{5}, 2\right)$, natomiast rozwiązaniem nierówności w przedziale $\langle 2,\infty \rangle$ są

liczby rzeczywiste należące do przedziału $\left\langle 2, \frac{8}{3} \right\rangle$.

Rozwiązaniem nierówności $|x-2|+|3x-6|<|x|$, jest więc przedział $\left(\frac{8}{5}, \frac{8}{3}\right)$.

Zadanie 3. (5 pkt)

Liczby $x_1 = 5 + \sqrt{23}$ i $x_2 = 5 - \sqrt{23}$ są rozwiązaniami równania $x^2 - (p^2 + q^2)x + (p + q) = 0$ z niewiadomą x . Oblicz wartości p i q .

Zapisuję równanie kwadratowe w postaci iloczynowej:

$$(x - 5 - \sqrt{23}) \cdot (x - 5 + \sqrt{23}) = 0$$

przekształcam je do postaci ogólnej

$$(x - 5)^2 - 23 = 0$$

$$x^2 - 10x + 2 = 0$$

Porównuję odpowiednie współczynniki obu postaci równania i stwierdzam, że muszą być spełnione równocześnie dwa warunki: $p^2 + q^2 = 10$ i $p + q = 2$.

$$\text{Rozwiązuję układ równań } \begin{cases} p^2 + q^2 = 10 \\ p + q = 2 \end{cases}$$

Dokonuję podstawienia: $q = 2 - p$ i otrzymuję równanie kwadratowe z jedną niewiadomą:

$$p^2 - 2p - 3 = 0.$$

Rozwiązaniem tego równania kwadratowego są liczby: $p_1 = 3$ lub $p_2 = -1$.

Obliczam wartości q w zależności od p :

Dla $p_1 = 3$, $q_1 = -1$, natomiast dla $p_2 = -1$, $q_2 = 3$.

Zadanie 4. (4 pkt)

Rozwiąż równanie $4 \cos^2 x = 4 \sin x + 1$ w przedziale $\langle 0, 2\pi \rangle$.

Przekształcam równanie: $4(1 - \sin^2 x) = 4 \sin x + 1$

$$4 \sin^2 x + 4 \sin x - 3 = 0$$

Wprowadzam pomocniczą niewiadomą $\sin x = t$ i $t \in \langle -1, 1 \rangle$, i zapisuję równanie

$$4t^2 + 4t - 3 = 0.$$

Rozwiązaniem tego równania są liczby: $t_1 = \frac{1}{2}$ *lub* $t_2 = -\frac{3}{2}$, $t_2 \notin \langle -1, 1 \rangle$.

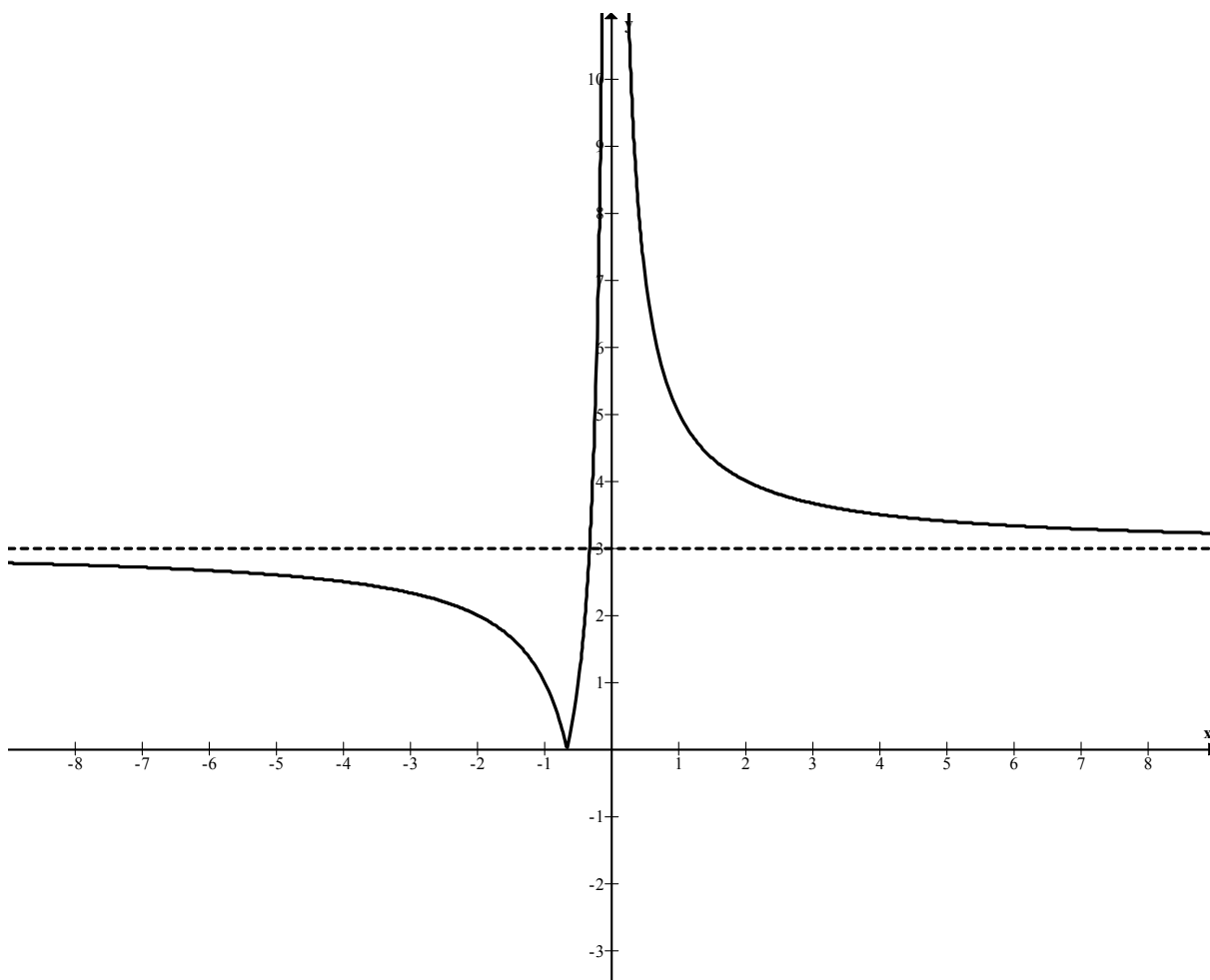
Powracam do podstawienia i otrzymuję: $\sin x = \frac{1}{2}$.

Rozwiązuję równanie $\sin x = \frac{1}{2}$ w przedziale $\langle 0, 2\pi \rangle$: $x = \frac{\pi}{6}$ *lub* $x = \frac{5\pi}{6}$.

Zadanie 5. (5 pkt)

Dane jest równanie $\left| \frac{2}{x} + 3 \right| = p$ z niewiadomą x . Wyznacz liczbę rozwiązań tego równania w zależności od parametru p .

Szkicuję wykres funkcji $f(x) = \left| \frac{2}{x} + 3 \right|$ dla $x \neq 0$.



Z wykresu odczytuję liczbę rozwiązań równania $\left| \frac{2}{x} + 3 \right| = p$ w zależności od parametru p :

- dla $p < 0$ równanie nie ma rozwiązania,
- dla $p = 0$ lub $p = 3$ równanie ma jedno rozwiązanie,
- dla $0 < p < 3$ lub $p > 3$ równanie ma dwa rozwiązania.

Zadanie 6. (3 pkt)

Udowodnij, że jeżeli ciąg (a, b, c) jest jednocześnie arytmetyczny i geometryczny, to $a = b = c$.

Stosuję związki między sąsiednimi wyrazami ciągów arytmetycznego i geometrycznego do zbudowania układu równań:

$$\begin{cases} \frac{a+c}{2} = b \\ a \cdot c = b^2 \end{cases}$$

Podstawiam do drugiego równania w miejsce b wyrażenie $\frac{a+c}{2}$ i otrzymuję

równanie:
$$ac = \left(\frac{a+c}{2} \right)^2$$

Wykonuję równoważne przekształcenia:

$$4ac = a^2 + 2ac + c^2$$

$$a^2 - 2ac + c^2 = 0$$

$$(a-c)^2 = 0, \text{ a stąd otrzymuję równość } a = c.$$

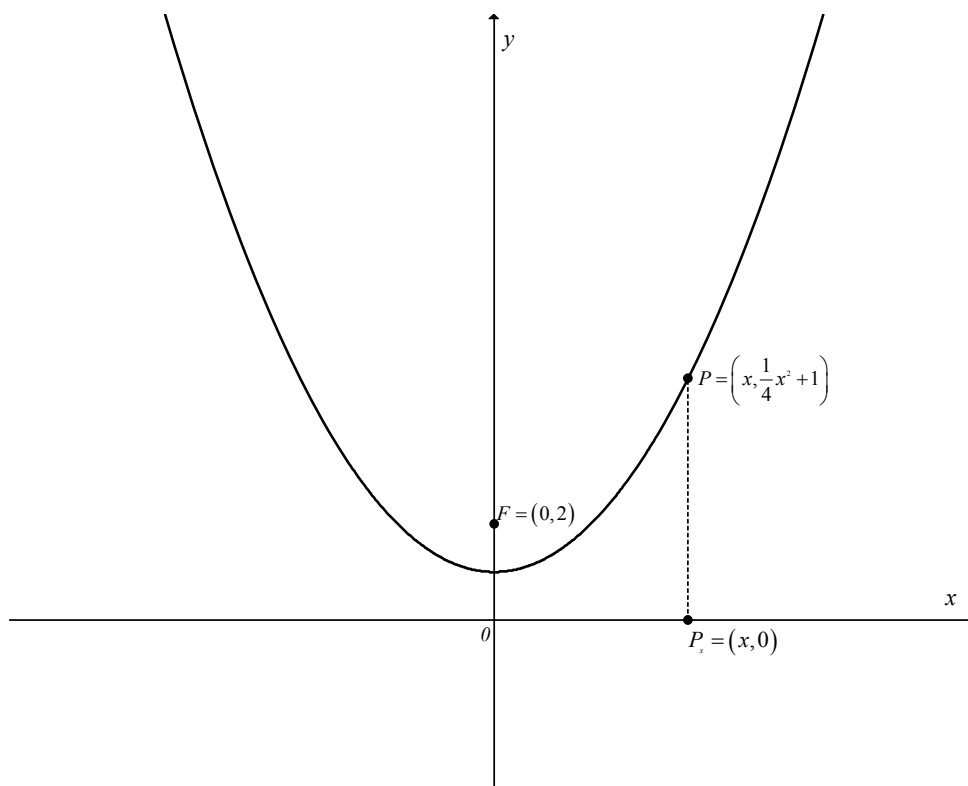
Korzystając z równości $a = c$ i z pierwszego równania układu otrzymuję:

$$\frac{2 \cdot c}{2} = b, \text{ stąd otrzymuję równość } c = b.$$

Ponieważ zachodzi $a = c$ i $b = c$, więc $a = b = c$, co należało udowodnić.

Zadanie 7. (4 pkt)

Uzasadnij, że każdy punkt paraboli o równaniu $y = \frac{1}{4}x^2 + 1$ jest równoodległy od osi Ox i od punktu $F = (0, 2)$.



Wybieram dowolny punkt P leżący na paraboli i oznaczam jego współrzędne w zależności od jednej zmiennej $P = \left(x, \frac{1}{4}x^2 + 1\right)$.

Punkt $P_x = (x, 0)$ jest rzutem punktu P na oś Ox . Odległość punktu P od osi Ox jest równa $|PP_x| = \left|\frac{1}{4}x^2 + 1\right|$.

$\frac{1}{4}x^2 + 1 > 0$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$, więc $|PP_x| = \left|\frac{1}{4}x^2 + 1\right| = \frac{1}{4}x^2 + 1$.

Wyznaczam odległość punktu P od punktu F :

$$|PF| = \sqrt{x^2 + \left(\frac{1}{4}x^2 + 1 - 2\right)^2}$$

$$|PF| = \sqrt{\frac{1}{16}x^4 + \frac{1}{2}x^2 + 1}$$

$$|PF| = \sqrt{\left(\frac{1}{4}x^2 + 1\right)^2} = \left|\frac{1}{4}x^2 + 1\right| = \frac{1}{4}x^2 + 1$$

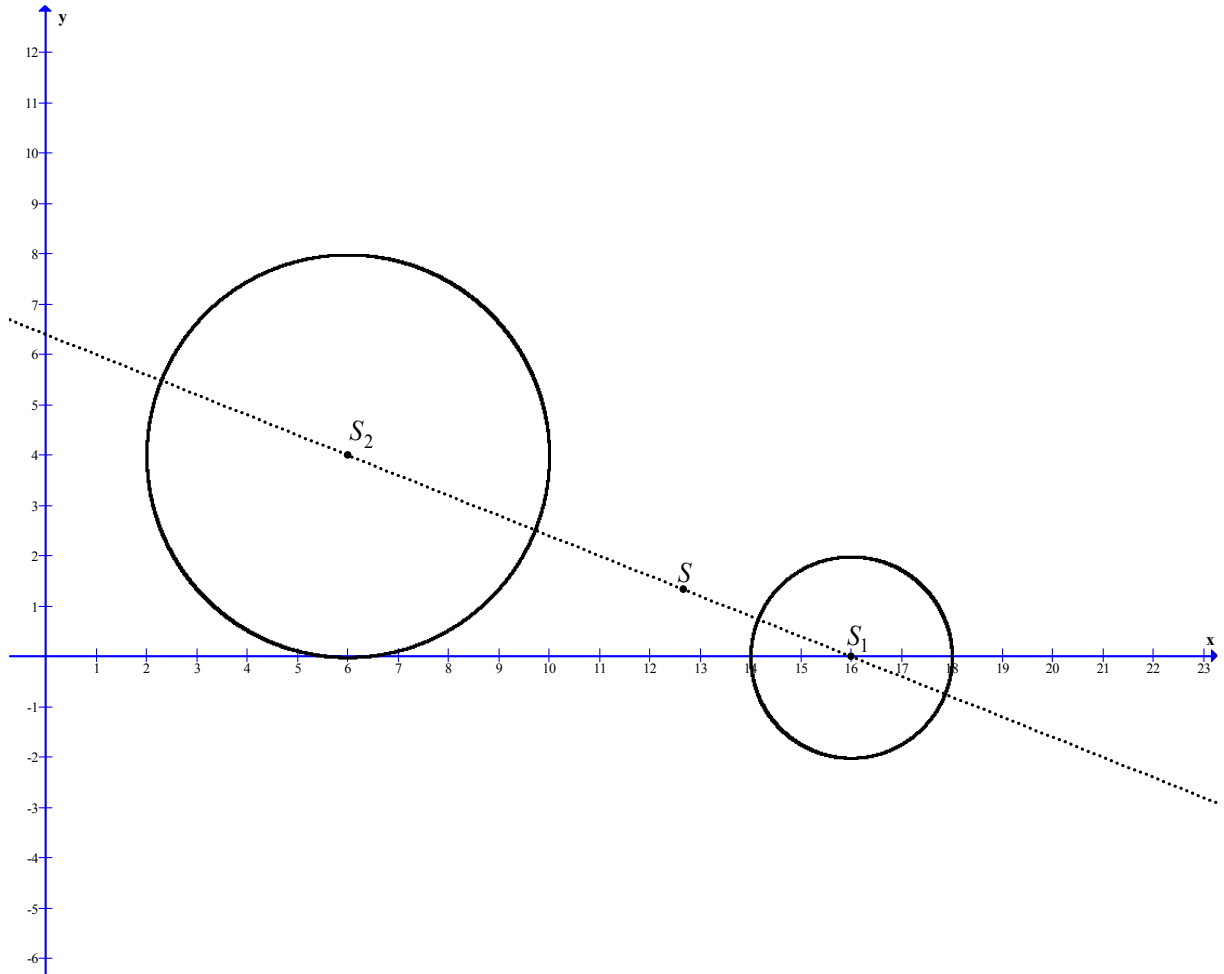
Zatem $|PP_x| = |PF|$.

Zadanie 8. (4 pkt)

Wyznacz współrzędne środka jednokładności, w której obrazem okręgu o równaniu $(x-16)^2 + y^2 = 4$ jest okrąg o równaniu $(x-6)^2 + (y-4)^2 = 16$, a skala tej jednokładności jest liczbą ujemną.

Środkiem okręgu $(x-16)^2 + y^2 = 4$ jest punkt $S_1 = (16, 0)$, a promień $r_1 = 2$.

Środkiem okręgu $(x-6)^2 + (y-4)^2 = 16$ jest punkt $S_2 = (6, 4)$, a promień $r_2 = 4$.



Na płaszczyźnie każde dwa okręgi są jednokładne. W tym przypadku stosunek długości promieni danych okręgów jest równy 2, więc szukam punktu $S = (x, y)$, który jest środkiem jednokładności o skali (-2) .

Z własności jednokładności wynika równanie: $\overrightarrow{SS_2} = -2 \cdot \overrightarrow{SS_1}$,

$$\overrightarrow{SS_2} = [6-x, 4-y], \quad \overrightarrow{SS_1} = [16-x, -y]$$

$$[6-x, 4-y] = -2 \cdot [16-x, -y]$$

$$[6-x, 4-y] = [-32+2x, 2y]$$

Obliczam odcięta punktu S : $6 - x = -32 + 2x$, stąd $x = \frac{38}{3}$.

Obliczam rzędną punktu S : $4 - y = 2y$, stąd $y = \frac{4}{3}$.

Odp. Środkiem jednokładności jest punkt $S = \left(\frac{38}{3}, \frac{4}{3}\right)$.

Zadanie 9. (4 pkt)

Wyznacz dziedzinę i najmniejszą wartość funkcji $f(x) = \log_{\frac{\sqrt{2}}{2}}(8x - x^2)$.

Korzystam z faktu, że funkcja logarytmiczna dla podstawy równej $\frac{\sqrt{2}}{2}$ jest malejąca. Oznacza to, że funkcja f przyjmuje najmniejszą wartość dla największego argumentu.

Wyznaczam dziedzinę funkcji f :

$$8x - x^2 > 0$$

$$x \cdot (8 - x) > 0$$

$$x \in (0, 8)$$

Wyrażenie $8x - x^2$ osiąga największą wartość dla $x = 4$ i jest ona równa 16.

Najmniejszą wartością funkcji $f(x) = \log_{\frac{\sqrt{2}}{2}}(8x - x^2)$ jest liczba $\log_{\frac{\sqrt{2}}{2}}(16)$.

Obliczam wartość funkcji f dla argumentu 16, korzystając z definicji logarytmu:

$$\log_{\frac{\sqrt{2}}{2}}(16) = y$$

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^y = 16$$

$$\left(2^{\frac{1}{2}}\right)^y = 2^4$$

$$\frac{-y}{2} = 4, \text{ więc } y = -8$$

Odpowiedź: Liczba (-8) jest najmniejszą wartością funkcji f .

Zadanie 10. (4 pkt)

Z pewnej grupy osób, w której jest dwa razy więcej mężczyzn niż kobiet, wybrano losowo dwuosobową delegację. Prawdopodobieństwo tego, że w delegacji znajdują się tylko kobiety jest równe 0,1. Oblicz, ile kobiet i ilu mężczyzn jest w tej grupie.

Oznaczam: n – liczba kobiet, $2n$ – liczba mężczyzn i $n \geq 2$.

Zdarzeniem elementarnym jest każdy dwuelementowy podzbiór zbioru $3n$ - elementowego.

Wyznaczam moc zbioru wszystkich zdarzeń elementarnych Ω :

$$|\Omega| = \binom{3n}{2} = \frac{3n(3n-1)}{2}.$$

A – zdarzenie polegające na tym, że w delegacji znajdują się tylko kobiety.

Wyznaczam liczbę zdarzeń elementarnych sprzyjających zajściu zdarzenia A :

$$|A| = \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Obliczam prawdopodobieństwo zdarzenia A :

$$P(A) = \frac{\frac{n(n-1)}{2}}{\frac{3n(3n-1)}{2}} = \frac{n-1}{3(3n-1)}.$$

Zapisuję równanie wynikające z warunków zadania :

$$\frac{n-1}{3(3n-1)} = \frac{1}{10}$$

$$10n - 10 = 9n - 3$$

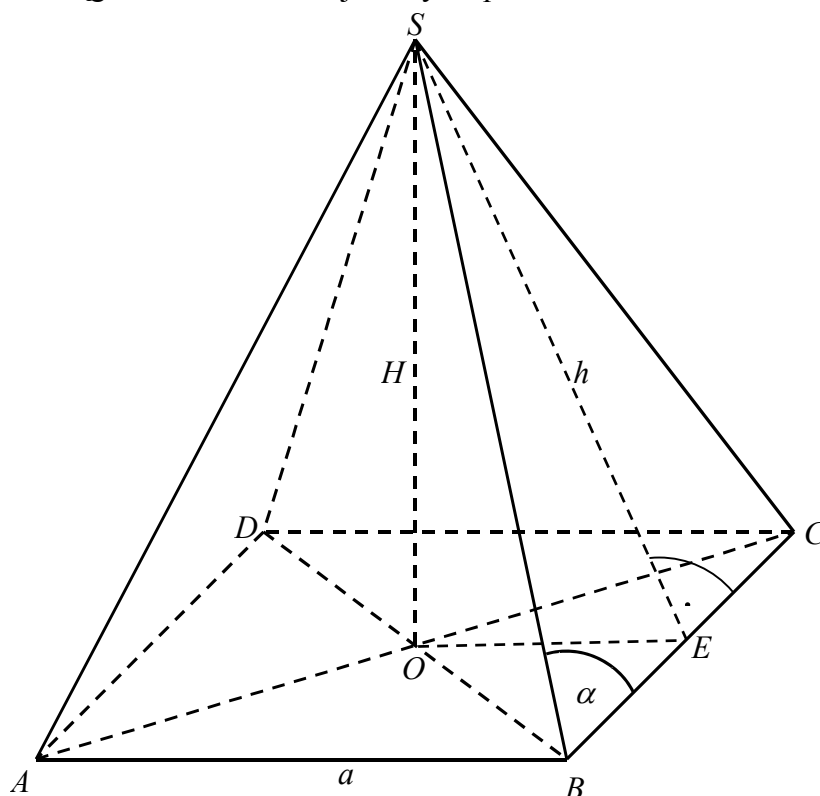
$$n = 7$$

Odpowiedź: W grupie jest 7 kobiet i 14 mężczyzn.

Zadanie 11. (5 pkt)

W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym dane są: H – wysokość ostrosłupa oraz α – miara kąta utworzonego przez krawędź boczną i krawędź podstawy ($45^\circ < \alpha < 90^\circ$).

- a) Wykaż, że objętość V tego ostrosłupa jest równa $\frac{4}{3} \cdot \frac{H^3}{\operatorname{tg}^2 \alpha - 1}$.
- b) Oblicz miarę kąta α , dla której objętość V danego ostrosłupa jest równa $\frac{2}{9} H^3$. Wynik podaj w zaokrągleniu do całkowitej liczby stopni.



Wprowadzam oznaczenia:

a – długość krawędzi podstawy ostrosłupa,

h – wysokość ściany bocznej ostrosłupa.

- a) Z trójkąta prostokątnego BES wyznaczam h : $\frac{h}{\frac{a}{2}} = \operatorname{tg} \alpha$, stąd $h = \frac{a}{2} \cdot \operatorname{tg} \alpha$.

Stosuję twierdzenie Pitagorasa w trójkącie prostokątnym SOE i otrzymuję:

$$H^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = h^2.$$

Podstawiam wyrażenie $\frac{a}{2} \cdot \operatorname{tg} \alpha$ w miejsce h , otrzymuję $H^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \left(\frac{a}{2} \operatorname{tg} \alpha\right)^2$.

Wyznaczam a^2 :

$$H^2 + \frac{a^2}{4} = \frac{a^2}{4} \cdot \operatorname{tg}^2 \alpha, \quad H^2 = \frac{a^2}{4} \cdot (\operatorname{tg}^2 \alpha - 1), \quad a^2 = \frac{4H^2}{\operatorname{tg}^2 \alpha - 1}.$$

Obliczam objętość ostrosłupa:

podstawiam do wzoru $V = \frac{1}{3}a^2H$ wyznaczoną wartość $a^2 = \frac{4H^2}{\operatorname{tg}^2 \alpha - 1}$;

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{4H^2}{\operatorname{tg}^2 \alpha - 1} \cdot H = \frac{4}{3} \cdot \frac{H^3}{\operatorname{tg}^2 \alpha - 1} - \text{co należało wykazać.}$$

b) Zapisuję równanie: $\frac{2}{9} \cdot H^3 = \frac{4}{3} \cdot \frac{H^3}{\operatorname{tg}^2 \alpha - 1}.$

Mnożę obie jego strony przez $\frac{9}{2 \cdot H^3}$ i otrzymuję równanie: $1 = \frac{6}{\operatorname{tg}^2 \alpha - 1}.$

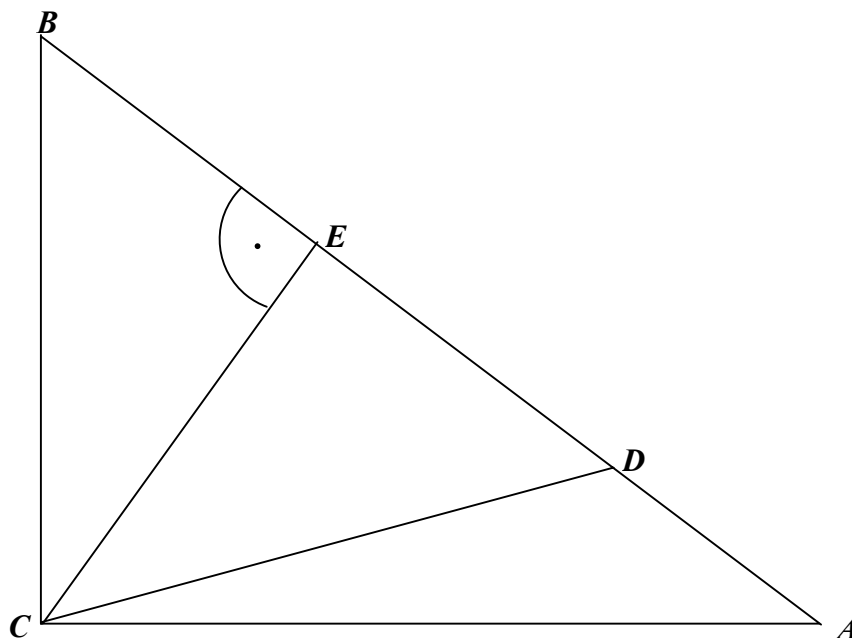
Stąd $\operatorname{tg}^2 \alpha = 7$ czyli $\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{7}$ (odrzucaam równość $\operatorname{tg} \alpha = -\sqrt{7}$, bo α jest kątem ostrym).

$$\sqrt{7} \approx 2,6458$$

Z tablic funkcji trygonometrycznych odczytuję szukaną miarę kąta α : $\alpha = 69^\circ$.

Zadanie 12. (4 pkt)

W trójkącie prostokątnym ABC przyprostokątne mają długości: $|BC| = 9$, $|CA| = 12$. Na boku AB wybrano punkt D tak, że odcinki BC i CD mają równe długości. Oblicz długość odcinka AD .



Rysuję wysokość CE poprowadzoną z wierzchołka C trójkąta ABC . Jest ona jednocześnie wysokością trójkąta równoramiennego BCD , co oznacza, że $|BE| = |DE|$.

Trójkąt BEC jest podobny do trójkąta ABC (oba trójkąty są prostokątne, kąt EBC jest ich kątem wspólnym).

Z podobieństwa trójkątów wynika proporcja $\frac{|BE|}{|BC|} = \frac{|BC|}{|AB|}$.

Obliczam długość odcinka AB : $|AB| = \sqrt{9^2 + 12^2} = 15$ i korzystając z wyznaczonej

proporcji obliczam długość odcinka BE : $|BE| = \frac{|BC|^2}{|AB|} = \frac{27}{5}$.

Wyznaczam długość odcinka AD : $|AD| = 15 - 2 \cdot \frac{27}{5} = \frac{21}{5} = 4\frac{1}{5}$.

Odpowiedź: Odcinek AD ma długość równą $4\frac{1}{5}$.

BRUDNOPIS