Centralna Komisja Egzaminacyjna

# EGZAMIN MATURALNY 2012

# MATEMATYKA

## POZIOM ROZSZERZONY

# Kryteria oceniania odpowiedzi

**MAJ 2012**

**Zadanie 1. (0–4)**

| Obszar standardów | Opis wymagań |
|---|---|
| Modelowanie matematyczne | Rozwiązanie zadania, prowadzącego do równania kwadratowego (III.3.b) |

**Rozwiązanie**

Niech $a$ oznacza najmniejszą z czterech szukanych liczb całkowitych. Wtedy kolejne liczby to: $a+1$, $a+2$, $a+3$.

Zapisujemy zatem równanie kwadratowe $a+3=a^2+(a+1)^2+(a+2)^2$

które po przekształceniu przyjmuje postać $3a^2+5a+2=0$.

Równanie to ma dwa rozwiązania: $a_1=-1$, $a_2=-\frac{2}{3}$. Rozwiązanie $-\frac{2}{3}$ odrzucamy jako sprzeczne z treścią zadania (nie jest to liczba całkowita).

Zatem szukane liczby to: $-1$, $0$, $1$, $2$.

**Schemat oceniania rozwiązania**

**Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania ........................................................................ 1 pkt**

Zapisanie, że szukane liczby to: $a$, $a+1$, $a+2$, $a+3$, gdzie $a$ jest liczbą całkowitą.

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania ................................................................ 2 pkt**

Zapisanie równania z jedną niewiadomą:

$$a+3=a^2+(a+1)^2+(a+2)^2 \quad \text{lub} \quad 3a^2+5a+2=0$$

**Rozwiązanie zadania do końca lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe) ..................................... 3 pkt**

- Przekształcenie równania $a+3=a^2+(a+1)^2+(a+2)^2$ do postaci równania kwadratowego z błędem rachunkowym (na przykład błąd w redukcji wyrazów podobnych lub w przepisywaniu) i konsekwentne doprowadzenie rozwiązania do końca (o ile otrzymane równanie kwadratowe ma dwa pierwiastki rzeczywiste),

albo

- poprawne rozwiązanie równania kwadratowego $3a^2+5a+2=0$, nieodrzucenie rozwiązania $-\frac{2}{3}$ i podanie w odpowiedzi dwóch czwórek liczb.

**Rozwiązanie pełne ..................................................................................................... 4 pkt**

Zapisanie czwórki liczb całkowitych spełniających warunki zadania: $-1$, $0$, $1$, $2$.

**Uwagi**

1. Jeżeli zdający źle zinterpretuje treść zadania, to za całe rozwiązanie otrzymuje **0 punktów**.
2. Jeśli zdający bez wykonywania rachunków poda odpowiedź i nie uzasadni, że jest to jedyne rozwiązanie zadania, to otrzymuje **1 punkt**.

**Zadanie 2. (0–4)**

| | |
|---|---|
| Użycie i tworzenie strategii | Rozwiązanie nierówności wielomianowej (IV.3.c.R) |

<u>**I sposób rozwiązania**</u>

Rozwiązanie nierówności wielomianowej składa się z dwóch etapów.
Pierwszy etap to zastosowanie jednej z kilku metod, które pozwalają zapisać wielomian w postaci iloczynowej, drugi etap to rozwiązanie nierówności.

**Pierwszy etap:** zapisanie wielomianu w postaci iloczynowej.

<u>I wariant</u> (grupowanie wyrazów)

Zapisujemy nierówność w postaci $x^4+x^2-2x\ge 0$, a następnie przedstawiamy lewą stronę nierówności w postaci iloczynowej:

$$x^4+x^2-2x=x\left(x^3+x-2\right)=x\left(x\left(x^2-1\right)+2\left(x-1\right)\right)=$$
$$=x\left(x\left(x-1\right)\left(x+1\right)+2\left(x-1\right)\right)=x\left(x-1\right)\left(x\left(x+1\right)+2\right)=x\left(x-1\right)\left(x^2+x+2\right)$$

<u>II wariant</u> (odgadnięcie pierwiastka i dzielenie metodą pisemną)

Zapisujemy nierówność w postaci $x^4+x^2-2x\ge 0$, a następnie przedstawiamy lewą stronę nierówności w postaci iloczynowej: $x^4+x^2-2x=x\left(x^3+x-2\right)$. Zauważamy, że $x=1$ jest pierwiastkiem wielomianu $x^3+x-2$ i dzielimy wielomian $x^3+x-2$ przez dwumian $x-1$ sposobem pisemnym lub za pomocą algorytmu Hornera, otrzymując $x^2+x+2$. Następnie zapisujemy nierówność w postaci iloczynowej $x\left(x-1\right)\left(x^2+x+2\right)\ge 0$.

**Drugi etap:** rozwiązanie nierówności.

Zauważamy, że trójmian $x^2+x+2$ przyjmuje wartości dodatnie dla każdej liczby rzeczywistej *x*, zatem rozwiązanie nierówności $x\left(x-1\right)\left(x^2+x+2\right)\ge 0$ jest jednocześnie rozwiązaniem nierówności kwadratowej $x\left(x-1\right)\ge 0$, czyli sumą przedziałów $\left(-\infty,0\right\rangle\cup\left\langle 1,+\infty\right)$.

<u>**Schemat oceniania I sposobu rozwiązania**</u>

**Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania ..................................................................................................................1 pkt**

Zapisanie wielomianu $x^4+x^2-2x$ w postaci iloczynu, w którym jednym z czynników jest $x$ lub $x-1$.

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ..................................................................2 pkt**

Zapisanie nierówności w postaci iloczynu czynników stopnia co najwyżej drugiego , np. $x\left(x-1\right)\left(x^2+x+2\right)\ge 0$.

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania ..................................................................3 pkt**

- Zauważenie, że rozwiązanie nierówności $x^4+x^2-2x\ge 0$ jest jednocześnie rozwiązaniem nierówności kwadratowej $x\left(x-1\right)\ge 0$

albo

- narysowanie i uzupełnienie tabeli znaków lub sporządzenie szkicu wykresu wielomianu z uwzględnieniem jego miejsc zerowych.

**Rozwiązanie pełne ...........................................................................................................4 pkt**

Zapisanie zbioru rozwiązań nierówności $x^4+x^2\ge 2x$: $x\in\left(-\infty,0\right\rangle\cup\left\langle 1,+\infty\right)$.

**Uwaga**
Jeśli zdający podzieli nierówność przez $x$ lub $x-1$, bez rozpatrzenia odpowiednich przypadków to za całe rozwiązanie otrzymuje **0 punktów**.

**II sposób rozwiązania**
Rozwiązujemy nierówność w trzech przedziałach:

I. $x \in \left(-\infty, 0\right\rangle$, II. $x \in \left(0,1\right)$, III. $x \in \left\langle 1, +\infty\right)$

I. $x \in \left(-\infty, 0\right\rangle$

Wtedy $x^4 \geq 0$ i $x^2 \geq 0$, a $2x \leq 0$.
Stąd $x^4 + x^2 \geq 2x$ dla każdego $x \in \left(-\infty, 0\right\rangle$.

II. $x \in \left(0,1\right)$

Wtedy $x^4 < x$ i $x^2 < x$.
Stąd $x^4 + x^2 < 2x$ dla każdego $x \in \left(0,1\right)$.
Zatem dana nierówność nie ma rozwiązań w tym przedziale.

III. $x \in \left\langle 1, +\infty\right)$

Wtedy $x^4 \geq x$ i $x^2 \geq x$.
Stąd $x^4 + x^2 \geq 2x$ dla każdego $x \in \left\langle 1, +\infty\right)$.

Odp. Rozwiązaniem nierówności $x^4 + x^2 \geq 2x$ jest zbiór $x \in \left(-\infty, 0\right\rangle \cup \left\langle 1, +\infty\right)$.

**Schemat oceniania II sposobu rozwiązania**
Zdający otrzymuje **po 1 punkcie** za rozwiązanie nierówności w każdym z trzech przedziałów.
**Czwarty punkt** zdający otrzymuje za podanie odpowiedzi końcowej.

**Zadanie 3. (0–4)**

| | |
|---|---|
| Użycie i tworzenie strategii | Rozwiązanie równania trygonometrycznego (IV.6.e.R) |

**Rozwiązanie**
Wykorzystując wzór na cosinus podwojonego kąta: $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$, przekształcamy równanie do postaci, w której występuje tylko jedna funkcja trygonometryczna argumentu $x$:
$\left(2\cos^2 x - 1\right) - 3\cos x + 2 = 0$.

Porządkujemy i otrzymujemy równanie: $2\cos^2 x - 3\cos x + 1 = 0$.
Wprowadzamy pomocniczą niewiadomą, np. $t = \cos x$, gdzie $t \in \left\langle -1, 1\right\rangle$.

Otrzymujemy równanie kwadratowe $2t^2 - 3t + 1 = 0$.

Rozwiązujemy równanie kwadratowe, otrzymując: $t_1 = 1$, $t_2 = \frac{1}{2}$.

Rozwiązujemy równania $\cos x = 1$ i $\cos x = \frac{1}{2}$.

Zapisujemy rozwiązania równań:
$x = 2k\pi$ , gdzie $k$ jest liczbą całkowitą
lub
$x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ , gdzie $k$ jest liczbą całkowitą
lub
$x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$ , gdzie $k$ jest liczbą całkowitą.

**Schemat oceniania rozwiązania**

**Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania ........................................................................................................... 1 pkt**
Zapisanie równania w zależności od jednej funkcji trygonometrycznej argumentu $x$, np.:
$\left(2\cos^2 x - 1\right) - 3\cos x + 2 = 0$ lub $2\cos^2 x - 3\cos x + 1 = 0$ .

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ........................................................ 2 pkt**
Rozwiązanie równania $2\cos^2 x - 3\cos x + 1 = 0$ z niewiadomą $\cos x$ : $\cos x = 1$ lub $\cos x = \frac{1}{2}$ .

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania ........................................................ 3 pkt**
Rozwiązanie jednego z równań $\cos x = 1$ lub $\cos x = \frac{1}{2}$ .

**Rozwiązanie pełne ........................................................................................ 4 pkt**

- Rozwiązanie równania: $x = 2k\pi$ , gdzie $k$ jest liczbą całkowitą lub $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ , gdzie $k$ jest liczbą całkowitą lub $x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$ , gdzie $k$ jest liczbą całkowitą

albo

- $x = n \cdot 360°$ , gdzie $n$ jest liczbą całkowitą lub $x = 60° + n \cdot 360°$ , gdzie $n$ jest liczbą całkowitą lub $x = -60° + n \cdot 360°$ , gdzie $n$ jest liczbą całkowitą.

**Uwaga**
Jeżeli zdający popełni błąd rachunkowy w rozwiązaniu równania kwadratowego i otrzyma dwa rozwiązania, z których co najmniej jedno należy do przedziału $\langle -1,1 \rangle$ i konsekwentnie doprowadzi rozwiązanie do końca, to otrzymuje **3 punkty**.

**Zadanie 4. (0–6)**

| | |
|---|---|
| Użycie i tworzenie strategii | Rozwiązanie równania kwadratowego z parametrem, przeprowadzenie dyskusji i wyciągnięcie wniosków (IV.3.b.R) |

**I sposób rozwiązania**

Obliczamy $\Delta = m^2 - 12$ i następnie $x_1 = \dfrac{m+2-\sqrt{m^2-12}}{2}$, $x_2 = \dfrac{m+2+\sqrt{m^2-12}}{2}$.

Wówczas

$$x_1^2 = \frac{(m+2)^2 - 2(m+2)\sqrt{m^2-12} + m^2 - 12}{4} = \frac{2m^2+4m-8-2(m+2)\sqrt{m^2-12}}{4} =$$

$$= \frac{m^2+2m-4-(m+2)\sqrt{m^2-12}}{2}$$

i podobnie

$$x_2^2 = \frac{m^2+2m-4+(m+2)\sqrt{m^2-12}}{2}.$$

Następnie

$$x_1^4 = \frac{\left(m^2+2m-4\right)^2 - 2\left(m^2+2m-4\right)\cdot(m+2)\sqrt{m^2-12} + (m+2)^2\left(m^2-12\right)}{4} =$$

$$= \frac{m^4+4m^3-4m^2-16m+16+m^4+4m^3-8m^2-48m-48-2\left(m^2+2m-4\right)\cdot(m+2)\sqrt{m^2-12}}{4} =$$

$$= \frac{2m^4+8m^3-12m^2-64m-32-2\left(m^2+2m-4\right)\cdot(m+2)\sqrt{m^2-12}}{4}$$

i podobnie

$$x_2^4 = \frac{2m^4+8m^3-12m^2-64m-32+2\left(m^2+2m-4\right)\cdot(m+2)\sqrt{m^2-12}}{4}.$$

Teraz

$x_1^4 + x_2^4 = m^4 + 4m^3 - 6m^2 - 32m - 16$, czyli mamy równanie

$m^4 + 4m^3 - 6m^2 - 32m - 16 = 4m^3 + 6m^2 - 32m + 12$, czyli $m^4 - 12m^2 + 36 = 64$.

Zatem $\left(m^2-6\right)^2 = 64$, stąd : $m^2 - 6 = -8$ lub $m^2 - 6 = 8$,

czyli $m^2 = -2$ lub $m^2 = 14$.

Przypadek $m^2 = -2$ jest niemożliwy; zatem $m^2 = 14$, czyli $m = \sqrt{14}$ lub $m = -\sqrt{14}$.

Należy na zakończenie zauważyć, że jeśli $m^2 = 14$, to $\Delta = m^2 - 12 = 14 - 12 = 2 > 0$, a więc oba pierwiastki $x_1$ i $x_2$ są rzeczywiste.

**Uwaga**

Zdający może rozpocząć od rozważenia nierówności $\Delta > 0$, czyli $m^2 - 12 > 0$. Otrzymuje $m < -2\sqrt{3}$ lub $m > 2\sqrt{3}$. Potem może sprawdzać, czy otrzymane rozwiązania są zgodne z tymi nierównościami.

**Schemat oceniania I sposobu rozwiązania.**
Rozwiązanie zadania składa się z dwóch części:
**a) Pierwsza część** polega na rozwiązaniu nierówności $\Delta > 0$, gdzie $\Delta = m^2 - 12$.
Zatem $\Delta > 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $m^2 - 12 > 0$, czyli dla $m \in \left(-\infty,\ -2\sqrt{3}\right) \cup \left(2\sqrt{3}, \infty\right)$

Za poprawne rozwiązanie tej części zdający otrzymuje **1 punkt**.

**Uwaga**
Jeżeli zdający rozwiązuje nierówność $\Delta \geq 0$, to **nie otrzymuje punktu za tę część**.

**b) Druga część** polega na doprowadzeniu równania $x_1^4 + x_2^4 = 4m^3 + 6m^2 - 32m + 12$ do postaci równania ze zmienną $m$ i rozwiązanie tego równania. Za tę część rozwiązania zdający otrzymuje **4 punkty**.

W ramach tej części rozwiązania wyróżniamy następujące fazy:
**Rozwiązanie części b), w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania ..........1 pkt**
Wyznaczenie $x_1$ i $x_2$.
**Rozwiązanie części b), w którym jest istotny postęp ..........2 pkt**
Wyznaczenie $x_1^2$ i $x_2^2$.
**Pokonanie zasadniczych trudności części b) zadania ..........3 pkt**
Wyznaczenie $x_1^4$ i $x_2^4$ i zapisanie równości $x_1^4 + x_2^4 = m^4 + 4m^3 - 6m^2 - 32m - 16$.
**Rozwiązanie bezbłędne części b) ..........4 pkt**
Rozwiązanie równania $m^4 - 12m^2 - 28 = 0$: $m = \sqrt{14}$ lub $m = -\sqrt{14}$.
**Rozwiązanie pełne ..........6 pkt**
Poprawne rozwiązanie równania z uwzględnieniem warunku $\Delta > 0$.

**Uwagi**
1. Przyznajemy **1 punkt** za wyznaczenie części wspólnej zbiorów rozwiązań nierówności $\Delta > 0$ z etapu a) i równania $m^4 - 12m^2 + 36 = 64$ z etapu b), gdy co najmniej jeden etap jest rozwiązany poprawnie.
2. Jeżeli zdający popełni błąd rachunkowy i konsekwentnie do tego błędu poda rozwiązanie, to za całe rozwiązanie otrzymuje **5 punktów**.

**II sposób rozwiązania:**
Tak jak w sposobie I obliczamy $x_1 = \dfrac{m + 2 - \sqrt{m^2 - 12}}{2}$, $x_2 = \dfrac{m + 2 + \sqrt{m^2 - 12}}{2}$.
Następnie przyjmujemy oznaczenie $t = \sqrt{m^2 - 12}$.
Wówczas
$$x_1^4 + x_2^4 = \frac{(m+2-t)^4}{2^4} + \frac{(m+2+t)^4}{2^4} = \frac{(m+2-t)^4 + (m+2+t)^4}{16}.$$
Korzystamy ze wzorów:
$$(a-b)^4 = a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4$$
$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4.$$
Stąd $(a-b)^4 + (a+b)^4 = 2a^4 + 12a^2b^2 + 2b^4$.

Zatem

$$x_1^4+x_2^4=\frac{2(m+2)^4+12(m+2)^2t^2+2t^4}{16}=\frac{(m+2)^4+6(m+2)^2t^2+t^4}{8}.$$

Ponieważ $t=\sqrt{m^2-12}$, więc $t^2=m^2-12$ i $t^4=m^4-24m^2+144$.
Mamy zatem

$$x_1^4+x_2^4=\frac{m^4+8m^3+24m^2+32m+16+\left(6m^2+24m+24\right)\left(m^2-12\right)+m^4-24m^2+144}{8}=$$

$$=\frac{8m^4+32m^3-48m^2-256m-128}{8}=m^4+4m^3-6m^2-32m-16$$

Dalej postępujemy tak, jak w I sposobie rozwiązania.

**Schemat oceniania II sposobu rozwiązania.**
Rozwiązanie zadania składa się z dwóch części:
**a) Pierwsza część** polega na rozwiązaniu nierówności $\Delta>0$, gdzie $\Delta=m^2-12$.

Zatem $\Delta>0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $m^2-12>0$, czyli dla $m\in\left(-\infty,-2\sqrt{3}\right)\cup\left(2\sqrt{3},\infty\right)$.

Za poprawne rozwiązanie tej części zdający otrzymuje **1 punkt**.

**Uwaga**
Jeżeli zdający rozwiązuje nierówność $\Delta\geq 0$, to **nie otrzymuje punktu za tę część**.

**b) Druga część** polega na doprowadzeniu równania $x_1^4+x_2^4=4m^3+6m^2-32m+12$ do postaci równania z niewiadomą $m$ i rozwiązanie tego równania. Za tę część rozwiązania zdający otrzymuje **4 punkty**.

W ramach tej części rozwiązania wyróżniamy następujące fazy:

**Rozwiązanie części b), w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania ..........1 pkt**
Wyznaczenie $x_1$ i $x_2$.

**Rozwiązanie części b), w którym jest istotny postęp ..........2 pkt**
Przyjęcie oznaczenia, np. $t=\sqrt{m^2-12}$.

**Pokonanie zasadniczych trudności części b) zadania ..........3 pkt**
Wyznaczenie $x_1^4$ oraz $x_2^4$ i zapisanie równości

$$x_1^4+x_2^4=\frac{(m+2-t)^4}{2^4}+\frac{(m+2+t)^4}{2^4}=\frac{(m+2-t)^4+(m+2+t)^4}{16}=m^4+4m^3-16m^2-32m-16$$

**Rozwiązanie bezbłędne części b) ..........4 pkt**
Rozwiązanie równania $m^4-12m^2-28=0$: $m=\sqrt{14}$ lub $m=-\sqrt{14}$.

**Rozwiązanie pełne ..........6 pkt**
Poprawne rozwiązanie równania z uwzględnieniem warunku $\Delta>0$.

**Uwagi**
1. Przyznajemy **1 punkt** za wyznaczenie części wspólnej zbiorów rozwiązań nierówności $\Delta>0$ z etapu a) i równania $m^4-12m^2+36=64$ z etapu b), gdy co najmniej jeden etap jest rozwiązany poprawnie.
2. Jeżeli zdający popełni błąd rachunkowy i konsekwentnie do tego błędu poda rozwiązanie, to za całe rozwiązanie otrzymuje **5 punktów**.

**III sposób rozwiązania:**

Korzystamy ze wzorów Viète'a: $x_1 + x_2 = m + 2$, $x_1 \cdot x_2 = m + 4$.

Mamy teraz:

$$x_1^4 + x_2^4 = \left(x_1^2 + x_2^2\right)^2 - 2x_1^2x_2^2 = \left(\left(x_1 + x_2\right)^2 - 2x_1x_2\right)^2 - 2\left(x_1x_2\right)^2 =$$

$$= \left(\left(m+2\right)^2 - 2\left(m+4\right)\right)^2 - 2\left(m+4\right)^2 = m^4 + 4m^3 - 6m^2 - 32m - 16$$

Dalej postępujemy tak, jak w I sposobie rozwiązania.

**Schemat oceniania III sposobu rozwiązania.**

Rozwiązanie zadania składa się z dwóch części:

**a) Pierwsza część** polega na rozwiązaniu nierówności $\Delta > 0$, gdzie $\Delta = m^2 - 12$.

Zatem $\Delta > 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $m^2 - 12 > 0$, czyli dla $m \in \left(-\infty, -2\sqrt{3}\right) \cup \left(2\sqrt{3}, \infty\right)$.

Za poprawne rozwiązanie tej części zdający otrzymuje **1 punkt**.

**Uwaga**

Jeżeli zdający rozwiązuje nierówność $\Delta \geq 0$, to **nie otrzymuje punktu za tę część**.

**b) Druga część** polega na doprowadzeniu równania $x_1^4 + x_2^4 = 4m^3 + 6m^2 - 32m + 12$ do postaci równania z niewiadomą *m* i rozwiązanie tego równania. Za tę część rozwiązania zdający otrzymuje **4 punkty**.

W ramach tej części rozwiązania wyróżniamy następujące fazy:

**Rozwiązanie części b), w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania ........................................................................................ 1 pkt**

Zapisanie równości: $x_1^4 + x_2^4 = \left(x_1^2 + x_2^2\right)^2 - 2x_1^2x_2^2$.

**Rozwiązanie części b), w którym jest istotny postęp ............................................ 2 pkt**

Zapisanie równości: $x_1^4 + x_2^4 = \left(x_1^2 + x_2^2\right)^2 - 2x_1^2x_2^2 = \left(\left(x_1 + x_2\right)^2 - 2x_1x_2\right)^2 - 2\left(x_1x_2\right)^2$.

**Pokonanie zasadniczych trudności części b) zadania ............................................ 3 pkt**

Zapisanie wyrażenia $x_1^4 + x_2^4$ w postaci sumy jednomianów zmiennej *m*, np.

$$x_1^4 + x_2^4 = \left(x_1^2 + x_2^2\right)^2 - 2x_1^2x_2^2 = \left(\left(x_1 + x_2\right)^2 - 2x_1x_2\right)^2 - 2\left(x_1x_2\right)^2 = m^4 + 4m^3 - 6m^2 - 32m - 16.$$

**Rozwiązanie bezbłędne części b) ...................................................................... 4 pkt**

Rozwiązanie równania $m^4 - 12m^2 - 28 = 0$: $m = \sqrt{14}$ lub $m = -\sqrt{14}$.

**Rozwiązanie pełne .......................................................................................... 6 pkt**

Poprawne rozwiązanie równania z uwzględnieniem warunku $\Delta > 0$.

**Uwagi**

1. Przyznajemy **1 punkt** za wyznaczenie części wspólnej zbiorów rozwiązań nierówności $\Delta > 0$ z etapu a) i równania $m^4 - 12m^2 + 36 = 64$ z etapu b), gdy co najmniej jeden etap jest rozwiązany poprawnie.
2. Jeżeli zdający popełni błąd rachunkowy i konsekwentnie do tego błędu poda rozwiązanie, to za całe rozwiązanie otrzymuje **5 punktów**.

**IV sposób rozwiązania:**

Korzystamy ze wzorów Viète'a oraz ze wzoru na $(a+b)^4$.

$$(x_1+x_2)^4 = x_1^4+4x_1^3x_2+6x_1^2x_2^2+4x_1x_2^3+x_2^4 = x_1^4+x_2^4+4x_1x_2\left(x_1^2+x_2^2\right)+6\left(x_1x_2\right)^2 =$$

$$= x_1^4+x_2^4+4x_1x_2\left(\left(x_1+x_2\right)^2-2x_1x_2\right)+6\left(x_1x_2\right)^2$$

czyli

$$x_1^4+x_2^4 = \left(x_1+x_2\right)^4-4x_1x_2\left(\left(x_1+x_2\right)^2-2x_1x_2\right)-6\left(x_1x_2\right)^2 =$$

$$= (m+2)^4-4\cdot(m+4)\left((m+2)^2-2\cdot(m+4)\right)-6\cdot(m+4)^2 = m^4+4m^3-6m^2-32m-16$$

Dalej postępujemy tak, jak w I sposobie rozwiązania.

**Schemat oceniania IV sposobu rozwiązania.**

Rozwiązanie zadania składa się z dwóch części:

**a) Pierwsza część** polega na rozwiązaniu nierówności $\Delta > 0$, gdzie $\Delta = m^2-12$.

Zatem $\Delta > 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $m^2-12>0$, czyli dla $m \in \left(-\infty, -2\sqrt{3}\right) \cup \left(2\sqrt{3}, \infty\right)$

Za poprawne rozwiązanie tej części zdający otrzymuje **1 punkt.**

**Uwaga**

Jeżeli zdający rozwiązuje nierówność $\Delta \geq 0$, to **nie otrzymuje punktu za tę część**.

**b) Druga część** polega na doprowadzeniu równania $x_1^4+x_2^4 = 4m^3+6m^2-32m+12$ np. do postaci $m^4-12m^2+36=64$ i rozwiązaniu tego równania. Za tę część rozwiązania zdający otrzymuje **4 punkty**.

W ramach tej części rozwiązania wyróżniamy następujące fazy:

**Rozwiązanie części b), w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania ........................................................................................... 1 pkt**

Skorzystanie z wzoru $(a+b)^4 = a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$.

**Rozwiązanie części b), w którym jest istotny postęp ............................................. 2 pkt**

Zapisanie równości: $x_1^4+x_2^4 = \left(x_1+x_2\right)^4-4x_1x_2\left(\left(x_1+x_2\right)^2-2x_1x_2\right)-6\left(x_1x_2\right)^2$.

**Pokonanie zasadniczych trudności części b) zadania ............................................ 3 pkt**

Zapisanie wyrażenia $x_1^4+x_2^4$ w postaci sumy jednomianów zmiennej *m***,** np.

$$x_1^4+x_2^4 = \left(x_1+x_2\right)^4-4x_1x_2\left(\left(x_1+x_2\right)^2-2x_1x_2\right)-6\left(x_1x_2\right)^2 = m^4+4m^3-6m^2-32m-16.$$

**Rozwiązanie pełne części b) ......................................................................................... 4 pkt**

Rozwiązanie równania $m^4-12m^2-28=0$: $m=\sqrt{14}$ lub $m=-\sqrt{14}$.

**Rozwiązanie pełne ..................................................................................................... 6 pkt**

Poprawne rozwiązanie równania z uwzględnieniem warunku $\Delta > 0$.

**Uwagi**

1. Przyznajemy **1 punkt** za wyznaczenie części wspólnej zbiorów rozwiązań nierówności $\Delta > 0$ z etapu a) i równania $m^4-12m^2+36=64$ z etapu b), gdy co najmniej jeden etap jest rozwiązany poprawnie.
2. Jeżeli zdający popełni błąd rachunkowy i konsekwentnie do tego błędu poda rozwiązanie, to za całe rozwiązanie otrzymuje **5 punktów**.

## Zadanie 5. (0–6)

| | |
|---|---|
| Użycie i tworzenie strategii | Zastosowanie własności ciągu geometrycznego oraz własności ciągu arytmetycznego (IV.5.c) |

**I sposób rozwiązania**

Oznaczmy przez $a$, $b$, $c$ kolejne liczby tworzące, w podanej kolejności, ciąg geometryczny. Przez $a$ oraz $q$ oznaczamy odpowiednio pierwszy wyraz i iloraz tego ciągu geometrycznego. Wówczas $b = aq$ oraz $c = aq^2$. Z treści zadania wiemy, że ciąg o wyrazach $a,\ b+8,\ c$ jest arytmetyczny, co oznacza, że jest spełniona równość $2(b+8) = a+c$, czyli $2(aq+8) = a + aq^2$. Ponadto, ciąg o wyrazach $a,\ b+8,\ c+64$ jest geometryczny, więc $(b+8)^2 = a\cdot(c+64)$, a stąd $(aq+8)^2 = a\cdot(aq^2+64)$.

Zapisujemy układ równań:

$$\begin{cases} 2(aq+8) = a + aq^2 \\ (aq+8)^2 = a\cdot(aq^2+64) \end{cases}$$

Z pierwszego równania wyznaczamy $a = \dfrac{16}{1-2q+q^2}$ (przy założeniu, że $q \neq 1$)

i podstawiamy do drugiego równania. Otrzymujemy równanie:

$$\frac{16}{1-2q+q^2}\cdot q - 4\cdot\frac{16}{1-2q+q^2} + 4 = 0$$

Przekształcamy to równanie do równania kwadratowego:

$$16q + 4(1-2q+q^2) - 64 = 0,$$

$$4q + 1 - 2q + q^2 - 16 = 0,$$

$$q^2 + 2q - 15 = 0.$$

Rozwiązaniami tego równania są liczby: $q_1 = -5,\ q_2 = 3$.

Jeżeli $q = -5$, to $a = \frac{4}{9}$, $b = -\frac{20}{9}$ oraz $c = -\frac{20}{9}\cdot(-5) = \frac{100}{9}$.

Jeżeli zaś $q = 3$, to $a = 4$, $b = 12$ oraz $c = 12\cdot 3 = 36$.

Zauważmy na zakończenie, że założenie $q \neq 1$ nie zmniejsza ogólności rozważań, bo gdyby $q = 1$, to otrzymalibyśmy (początkowy) ciąg geometryczny stały, zaś ciąg $(a,\ a+8,\ a)$ nie byłby arytmetyczny dla żadnej wartości $a$, wbrew treści zadania.

Odpowiedź: Istnieją dwa ciągi geometryczne spełniające warunki zadania: $(4,\ 12,\ 36)$ oraz $\left(\frac{4}{9}, -\frac{20}{9}, \frac{100}{9}\right)$.

**Schemat oceniania I sposobu rozwiązania**

**Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania ............................................................................................... 1 pkt**

Zapisanie, że:

liczby $a,\ aq,\ aq^2$ są kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego oraz liczby $a,\ aq+8,\ aq^2$, w podanej kolejności, tworzą ciąg arytmetyczny, natomiast liczby $a,\ aq+8,\ aq^2+64$, w podanej kolejności, tworzą ciąg geometryczny.

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ........................................................... 2 pkt**
Wykorzystanie własności ciągu arytmetycznego i geometrycznego do zapisania układu równań, np.

$$\begin{cases} a+aq^2=2(aq+8) \\ (aq+8)^2=a(aq^2+64) \end{cases}$$

**Uwaga**
Jeżeli zdający pomyli własności któregokolwiek ciągu, to za całe rozwiązanie otrzymuje **0 punktów**.

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania ........................................................... 4 pkt**
Zapisanie równania z jedną niewiadomą np.: $q^2+2q-15=0$ lub $9a^2-40a+16=0$.

**Uwaga**
Jeżeli zdający w trakcie przekształcania układu równań popełni błąd, w wyniku którego otrzyma równanie mające mniej niż dwa rozwiązania, to otrzymuje **2 punkty** za całe rozwiązanie.

**Rozwiązanie zadania do końca lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe)........................................................ 5 pkt**

- Zdający popełni błędy rachunkowe w rozwiązywaniu równania kwadratowego, np. $q^2+2q-15=0$ i konsekwentne do tych błędów poda w odpowiedzi dwa ciągi geometryczne

lub

- przekształci układ równań z błędem (np. błąd w redukcji wyrazów podobnych lub w przepisywaniu) i konsekwentnie doprowadzi rozwiązanie do końca (o ile otrzymane równanie kwadratowe ma dwa pierwiastki rzeczywiste).

**Rozwiązanie pełne ................................................................................................. 6 pkt**
Zapisanie dwóch trójek liczb, z których każda tworzy ciąg geometryczny opisany w treści zadania: $(4,\ 12,\ 36)$ oraz $\left(\frac{4}{9},\ -\frac{20}{9},\ \frac{100}{9}\right)$.

**<u>II sposób rozwiązania</u>**
Oznaczmy przez $a$, $b$, $c$ trzy kolejne wyrazy ciągu geometrycznego. Wówczas $b^2=a\cdot c$. Ponieważ ciąg $(a,\ b+8,\ c)$ jest arytmetyczny, więc $2(b+8)=a+c$. Ponadto, ciąg $(a,\ b+8,\ c+64)$ jest geometryczny, zatem $(b+8)^2=a\cdot(c+64)$.
Zapisujemy zatem układ równań:

$$\begin{cases} b^2=a\cdot c \\ 2(b+8)=a+c \\ (b+8)^2=a\cdot(c+64) \end{cases}$$

a następnie przekształcamy go w sposób równoważny:

$$\begin{cases} c=2b-a+16 \\ b^2=2ab+16a-a^2 \\ (b+8)^2=2ab+16a-a^2+64a \end{cases}$$

Odejmujemy stronami drugie i trzecie równanie i otrzymujemy $(b+8)^2 - b^2 = 64a$.
Stąd $a = \frac{b+4}{4}$. Podstawiamy $a = \frac{b+4}{4}$ do drugiego równania i otrzymujemy

$$b^2 = \frac{b+4}{4} \cdot \left(2b + 16 - \frac{b+4}{4}\right)$$

Przekształcamy to równanie do równania kwadratowego
$16b^2 = 7b^2 + 88b + 240$, czyli $9b^2 - 88b - 240 = 0$.
Rozwiązaniami tego równania są liczby: $b_1 = -\frac{20}{9}$, $b_2 = 12$.

Jeżeli $b = -\frac{20}{9}$, to $a = \frac{4}{9}$ oraz $c = \frac{100}{9}$.
Jeżeli zaś $b = 12$, to $a = 4$ oraz $c = 36$.
Odpowiedź: Istnieją dwa ciągi geometryczne spełniające warunki zadania: $(4, 12, 36)$ oraz $\left(\frac{4}{9}, -\frac{20}{9}, \frac{100}{9}\right)$.

**<u>Schemat oceniania II sposobu rozwiązania zadania</u>**

**Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania ........................................................................................... 1 pkt**
Zapisanie, że liczby $a, b, c$ są kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego oraz, że liczby $a, b+8, c$, w podanej kolejności, tworzą ciąg arytmetyczny, zaś liczby $a, b+8, c+64$, w podanej kolejności, tworzą ciąg geometryczny.

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp . ................................................................ 2 pkt**
Wykorzystanie własności ciągu arytmetycznego i geometrycznego do zapisania układu równań umożliwiającego obliczenie liczb $a$, $b$, $c$, np.

$$\begin{cases} b^2 = a \cdot c \\ 2(b+8) = a + c \\ (b+8)^2 = a \cdot (c+64) \end{cases}$$

**<u>Uwaga</u>**
Jeżeli zdający pomyli własności któregokolwiek ciągu, to za całe rozwiązanie otrzymuje **0 punktów**.

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania . ................................................................ 4 pkt**
Zapisanie równania z jedną niewiadomą, np.: $9a^2 - 40a + 16 = 0$ lub $9b^2 - 88b - 240 = 0$ lub $9c^2 - 424c + 3600 = 0$.

**<u>Uwaga</u>**
Jeżeli w trakcie przekształcania układu równań zdający popełni błąd, w wyniku którego otrzyma równanie mające mniej niż dwa rozwiązania, to otrzymuje **2 punkty** za całe rozwiązanie.

**Rozwiązanie zadania do końca lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe). ...................................................... 5 pkt**

- Zdający popełni błędy rachunkowe w rozwiązywaniu równania kwadratowego, np. $9b^2 - 88b - 240 = 0$ i konsekwentne do tych błędów poda w odpowiedzi dwa ciągi geometryczne lub

- przekształci układ równań z błędem (np. błąd w redukcji wyrazów podobnych lub w przepisywaniu) i konsekwentnie doprowadzi rozwiązanie do końca (o ile otrzymane równanie kwadratowe ma dwa pierwiastki rzeczywiste).

**Rozwiązanie pełne ........................................................................................................6 pkt**

Zapisanie dwóch trójek liczb, z których każda tworzy ciąg geometryczny opisany w treści zadania: $(4, 12, 36)$ oraz $\left(\frac{4}{9}, -\frac{20}{9}, \frac{100}{9}\right)$.

**Zadanie 6. (0–6)**

| | |
|---|---|
| Modelowanie matematyczne | Znalezienie związków miarowych na płaszczyźnie, wyznaczenie największej i najmniejszej wartości funkcji (III.8.e; 4.k) |

**Rozwiązanie**

Wyznaczamy odległość punktów $P$ i $Q$: $|PQ| = \sqrt{\left(\frac{55}{2} - \frac{1}{2}m - \frac{5}{2}\right)^2 + m^2} = \sqrt{\left(\frac{50}{2} - \frac{1}{2}m\right)^2 + m^2}$ .

Wyznaczamy wzór funkcji $f$ opisującej wartość $|PQ|^2$:

$f(m) = \left(\frac{50}{2} - \frac{1}{2}m\right)^2 + m^2 = \frac{5}{4}\left(m^2 - 20m + 500\right)$ dla $m \in \langle -1, 7\rangle$ .

Obliczamy pierwszą współrzędną wierzchołka paraboli, która jest wykresem funkcji $f$:

$m_w = \left(\frac{5}{4} \cdot 20\right) : \left(2 \cdot \frac{5}{4}\right) = 25 : \frac{5}{2} = 25 \cdot \frac{2}{5} = 10$ .

Ponieważ $10 \notin \langle -1, 7\rangle$ , więc w tym przedziale funkcja $f$ jest monotoniczna. Zatem największa i najmniejsza wartość funkcji $f$ dla $m \in \langle -1, 7\rangle$ są przyjmowane dla argumentów, będących końcami tego przedziału.

$f(-1) = \frac{5}{4}(1 + 20 + 500) = 651,25$ oraz $f(7) = \frac{5}{4}(49 - 140 + 500) = 511,25$ .

Zatem najmniejsza i największa wartość $|PQ|^2$ to odpowiednio 511,25 oraz 651,25.

**Schemat oceniania rozwiązania**

**Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania ........................................................................................... 1 pkt**

Wyznaczenie odległości między punktami $P$ i $Q$: $|PQ| = \sqrt{\left(\frac{50}{2} - \frac{1}{2}m\right)^2 + m^2}$ lub

$|PQ|^2 = \left(\frac{50}{2} - \frac{1}{2}m\right)^2 + m^2$ .

**Uwaga**

Jeżeli zdający zapisze, np. $|PQ|=\sqrt{\left(\frac{50}{2}-\frac{1}{2}m\right)^2-m^2}$ , to otrzymuje za całe zadanie **0 punktów**.

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .. ............................................................... 2 pkt**

Zapisanie wzoru funkcji $f$ w postaci, np.: $f(m)=\frac{5}{4}m^2-25m+625$ lub $f(m)=\frac{5}{4}\left(m^2-20m+500\right)$.

**Uwaga**

Dalszej ocenie podlega badanie tylko takich funkcji kwadratowych, które przyjmują wartości nieujemne w całym zbiorze liczb rzeczywistych.

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania . ............................................................... 4 pkt**

- Obliczenie pierwszej współrzędnej wierzchołka paraboli, będącej wykresem funkcji $f$ i stwierdzenie, że współrzędna ta nie należy do przedziału $\langle -1,7\rangle$: $m_w=10$ i $10\notin\langle -1,7\rangle$ i z rozwiązania wynika, że $f(10)$ nie jest żadną z poszukiwanych wartości

albo

- obliczenie $f(-1)$ i $f(7)$, zapisanie bez uzasadnienia, że $f(-1)$ jest wartością największą, $f(7)$ jest wartością najmniejszą.

**Rozwiązanie zadania do końca lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe) ..................................................... 5 pkt**
**Rozwiązanie pełne ............................................................................................................ 6 pkt**

Podanie najmniejszej i największej wartość $|PQ|^2$ odpowiednio 511,25 oraz 651,25 z uzasadnieniem, np. powołanie się na monotoniczność lub stwierdzenie, że pierwsza współrzędna wierzchołka nie należy do podanego przedziału.

**Uwaga**

Jeśli zdający obliczy $f(10)=500$, $f(-1)=651{,}25$ i $f(7)=511{,}25$ i stąd wywnioskuje, że najmniejszą wartością funkcji $f$ jest 500, a największą 651,25, to za całe rozwiązanie otrzymuje **4 punkty**.

**Zadanie 7. (0–3)**

| | |
|---|---|
| Rozumowanie i argumentacja | Przeprowadzenie dowodu algebraicznego (V.2.b) |

**Rozwiązanie**

Przekształcamy nierówność w sposób równoważny

$$a^3+b^3-a^2b-ab^2\geq 0,$$
$$\left(a^3-a^2b\right)+\left(b^3-ab^2\right)\geq 0,$$
$$a^2(a-b)+b^2(b-a)\geq 0,$$

$$(a-b)\left(a^2-b^2\right)\geq 0,$$
$$(a-b)^2(a+b)\geq 0.$$

Ostatnia nierówność jest prawdziwa, gdyż z założenia $a+b\geq 0$ oraz $(a-b)^2\geq 0$ dla wszystkich liczb rzeczywistych *a* i *b*, co kończy dowód.

**Schemat oceniania rozwiązania**

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania .................................................................2 pkt**
Zapisanie nierówności w postaci iloczynowej $(a-b)\left(a^2-b^2\right)\geq 0$ lub $(a-b)^2(a+b)\geq 0$, lub $(a-b)(a-b)(a+b)\geq 0$.

**Rozwiązanie pełne ..............................................................................................3 pkt**
Przeprowadzenie pełnego dowodu.

**Uwaga**
1. Jeżeli zdający podzieli obie strony nierówności przez $a+b$, nie zakładając, że $a+b\neq 0$, to otrzymuje **0 punktów.**
2. W przypadku gdy zdający podzieli nierówność przez $a+b>0$ i nie rozpatrzy przypadku $a+b=0$, to przyznajemy **2 punkty**.

**Zadanie 8. (0–4)**

| | |
|---|---|
| Użycie i tworzenie strategii | Wykorzystanie wzorów na liczbę permutacji, kombinacji i wariacji do zliczania obiektów w sytuacjach kombinatorycznych (IV.10.R) |

**Rozwiązanie**
Rozkładamy liczbę 12 na czynniki pierwsze $12=3\cdot 2\cdot 2$.
Mamy więc trzy, parami wykluczające się możliwości, w których iloczyn cyfr liczby ośmiocyfrowej jest równy 12:
1. Wśród cyfr tej liczby są „3”, „4” i sześć „1” ($12=3\cdot 4\cdot 1\cdot 1\cdot 1\cdot 1\cdot 1\cdot 1$). Takich liczb jest: $8\cdot 7=56$ – wybieramy miejsce dla „3” na 8 sposobów i z pozostałych dla „4” na 7 sposobów.
2. Wśród cyfr tej liczby są „2”, „6” i sześć „1” ($12=2\cdot 6\cdot 1\cdot 1\cdot 1\cdot 1\cdot 1\cdot 1$). Takich liczb jest: $8\cdot 7=56$ – wybieramy miejsce dla „2” na 8 sposobów i z pozostałych dla „6” na 7 sposobów.
3. Wśród cyfr tej liczby są dwie „2”, jedna „3” i pięć „1” ($12=3\cdot 2\cdot 2\cdot 1\cdot 1\cdot 1\cdot 1\cdot 1$). Takich liczb jest: $8\cdot\binom{7}{2}=168$ – wybieramy jedno miejsce z ośmiu dla „3” a następnie dwa miejsca z pozostałych siedmiu dla „2”.

Zatem liczb ośmiocyfrowych, których iloczyn cyfr jest równy 12 jest $56+56+168=280$.

**Schemat oceniania rozwiązania**

**Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania ..............................................................................................1 pkt**
Zapisanie, co najmniej dwóch z trzech parami wykluczających się możliwości, w których iloczyn cyfr liczby ośmiocyfrowej jest równy 12 (bez obliczania liczby tych możliwości):

$$12=3\cdot 4\cdot 1\cdot 1\cdot 1\cdot 1\cdot 1\cdot 1$$
$$12=2\cdot 6\cdot 1\cdot 1\cdot 1\cdot 1\cdot 1\cdot 1$$
$$12=3\cdot 2\cdot 2\cdot 1\cdot 1\cdot 1\cdot 1\cdot 1$$

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ................................................................ 2 pkt**
Zapisanie wszystkich trzech, parami wykluczających się możliwości, w których iloczyn cyfr liczby ośmiocyfrowej jest równy 12 (bez obliczania liczby tych możliwości):

$12 = 3 \cdot 4 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1$

$12 = 2 \cdot 6 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1$

$12 = 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1$

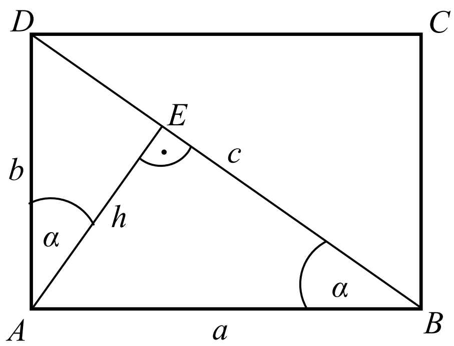
**Pokonanie zasadniczych trudności zadania ................................................................ 3 pkt**
Obliczenie liczby liczb ośmiocyfrowych, których iloczyn cyfr jest równy 12, w co najmniej dwóch z trzech możliwości.

**Rozwiązanie pełne ................................................................................................ 4 pkt**
Obliczenie liczby liczb ośmiocyfrowych, których iloczyn cyfr jest równy 12:
$56 + 56 + 168 = 280$.

**Zadanie 9. (0–5)**

| | |
|---|---|
| Użycie i tworzenie strategii | Znalezienie związków miarowych w figurach płaskich z zastosowaniem własności figur podobnych (IV.7.c.R) |

**<u>I sposób rozwiązania</u>**




Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta *DAB* otrzymujemy $c = \sqrt{a^2 + b^2}$. Trójkąt ten jest podobny do trójkąta *DEA* (oba są prostokątne i mają wspólny kąt ostry przy wierzchołku *D*), więc $\frac{|AE|}{|AD|} = \frac{|BA|}{|BD|}$ oraz $\frac{|DE|}{|DA|} = \frac{|DA|}{|DB|}$, czyli $\frac{h}{b} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ oraz $\frac{|DE|}{b} = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$. Stąd

$h = \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ oraz $|DE| = \frac{b^2}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

Pole trójkąta *AED* jest równe $P_{ADE} = \frac{1}{2} h \cdot |DE| = \frac{1}{2} \cdot \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cdot \frac{b^2}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{ab^3}{2\left(a^2 + b^2\right)}$.

**<u>II sposób rozwiązania</u>**

Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta *DAB* otrzymujemy $c = \sqrt{a^2 + b^2}$. Trójkąt ten jest podobny do trójkąta *DEA* (oba są prostokątne i mają wspólny kąt ostry przy wierzchołku *D*), więc $\frac{|AE|}{|AD|} = \frac{|BA|}{|BD|}$ oraz $\frac{|DE|}{|DA|} = \frac{|DA|}{|DB|}$, czyli $\frac{h}{b} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ oraz $\frac{|DE|}{b} = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$. Stąd

$h = \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ oraz $|DE| = \frac{b^2}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

Wyznaczamy sinus kąta $EAD$ w trójkącie $AED$: $\sin|\sphericalangle EAD| = \frac{|DE|}{b} = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

Pole trójkąta $AED$ jest równe:

$$P_{AED} = \frac{1}{2} b \cdot h \cdot \sin|\sphericalangle EAD| = \frac{1}{2} \cdot b \cdot \frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}} \cdot \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{ab^3}{2\left(a^2+b^2\right)}.$$

**<u>Schemat oceniania I i II sposobu rozwiązania</u>**

**Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania ........................................................................................................ 1 pkt**

- Zauważenie, że trójkąty $AED$ (lub $AEB$) i $BAD$ są podobne i zapisanie odpowiedniej proporcji np.: $\frac{|AE|}{|AD|} = \frac{|AB|}{|BD|}$ lub $\frac{|DE|}{|AD|} = \frac{|AD|}{|BD|}$

albo

- zapisanie pola trójkąta $AED$: $P = \frac{|AE| \cdot |DE|}{2}$ lub $P = \frac{|AE| \cdot |AD| \cdot \sin|\sphericalangle EAD|}{2}$.

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ........................................................................ 2 pkt**

Obliczenie długości odcinka $DE$: $|DE| = \frac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$ lub $AE$: $|AE| = \frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$ lub $\sin|EAD| = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania ........................................................................ 3 pkt**

- Obliczenie długości obu odcinków $DE$: $|DE| = \frac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$ i $AE$: $|AE| = \frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$

lub

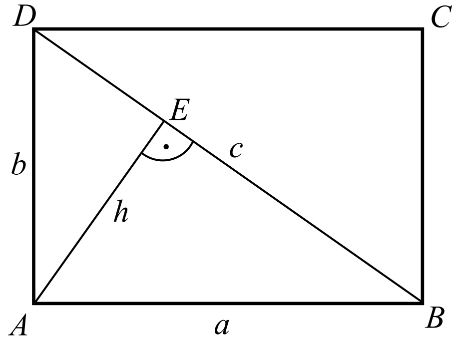
- obliczenie długości odcinka $AE$: $|AE| = \frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$ i $\sin|\sphericalangle EAD| = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

**Rozwiązanie zadania do końca lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe) ................................................................ 4 pkt**

**Rozwiązanie pełne ........................................................................................................ 5 pkt**

Obliczenie pola trójkąta $AED$: $P_{AED} = \frac{ab^3}{2\left(a^2+b^2\right)}$.

**<u>III sposób rozwiązania</u>**



Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta *DAB* otrzymujemy $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ . Trójkąt *AED* jest podobny do trójkąta *BAD*, a ten jest podobny do trójkąta *BEA*, więc trójkąt *BEA* jest podobny do trójkąta *AED*. Skala tego podobieństwa jest równa $\frac{a}{b}$ . Stosunek pól tych trójkątów jest równy $\frac{P_{BEA}}{P_{AED}} = \left(\frac{a}{b}\right)^2$ . Stąd $P_{BEA} = \left(\frac{a}{b}\right)^2 \cdot P_{AED}$ .

Ponieważ $P_{ABD} = \frac{1}{2}ab = P_{BEA} + P_{AED}$ , więc $\frac{1}{2}ab = \left(\frac{a}{b}\right)^2 \cdot P_{AED} + P_{AED}$ .

Stąd $P_{AED} = \dfrac{\frac{1}{2}ab}{\left(\frac{a}{b}\right)^2 + 1} = \dfrac{ab^3}{2\left(a^2 + b^2\right)}$ .

<u>**Schemat oceniania III sposobu rozwiązania**</u>

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ........................................................................ 2 pkt**

Zauważenie, że trójkąty *AED* i *BEA* są podobne i zapisanie stosunku ich pól w zależności od skali ich podobieństwa: $\frac{P_{BEA}}{P_{AED}} = \left(\frac{a}{b}\right)^2$ .

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania ......................................................................... 3 pkt**

Wyznaczenie pola trójkąta *ABD* i zapisanie go jako sumy pól trójkątów *BEA* i *AED*.

<u>**Uwaga**</u>

Rozwiązanie możemy zakwalifikować do tej kategorii tylko pod warunkiem, że skala podobieństwa trójkątów *BEA* i *AED* została zapisana w zależności od *a* i *b*.

**Rozwiązanie zadania prawie do końca ................................................................................. 4 pkt**

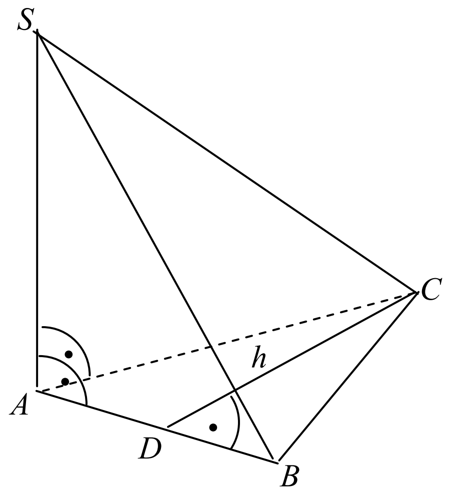
Zapisanie równania z niewiadomą $P_{AED}$: $\frac{1}{2}ab = \left(\frac{a}{b}\right)^2 \cdot P_{AED} + P_{AED}$ .

**Rozwiązanie pełne ............................................................................................................... 5 pkt**

Obliczenie pola trójkąta *AED*: $P_{AED} = \dfrac{ab^3}{2\left(a^2 + b^2\right)}$ .

**Zadanie 10. (0–5)**

| | |
|---|---|
| Użycie i tworzenie strategii | Znalezienie związków miarowych w ostrosłupie (IV.9.b) |




**Rozwiązanie**
Korzystając z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta *BAS*, obliczamy długość boku *AB*:
$|AB| = \sqrt{118^2 - \left(8\sqrt{210}\right)^2} = 22$.
Korzystając z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta *CAS*, obliczamy długość boku *AC*:
$|AC| = \sqrt{131^2 - \left(8\sqrt{210}\right)^2} = 61$.
Stąd wynika, że $|BC| = 61$, ponieważ nie istnieje trójkąt o długościach boków 22, 22, 61 (nierówność trójkąta).

Trójkąt *ABC* jest równoramienny, wówczas wysokość *h* opuszczona na bok *AB* jest równa:
$h = \sqrt{61^2 - 11^2} = 60$.
Obliczamy pole *P* trójkąta *AB*C: $P = \frac{1}{2} \cdot 22 \cdot 60 = 660$.
Obliczamy objętość *V* ostrosłupa *ABCS*: $V = \frac{1}{3} \cdot P \cdot |AS| = \frac{1}{3} \cdot 660 \cdot 8\sqrt{210} = 1760\sqrt{210}$.

**Schemat oceniania**
**Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania ............ 1 pkt**
Obliczenie długości boku *AB*: $|AB| = 22$ albo obliczenie długości boku *AC*: $|AC| = 61$.
**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ............ 3 pkt**
Obliczenie długości boku *AB*: $|AB| = 22$ i długości boku *AC*: $|AC| = 61$ oraz zauważenie, że długość boku *BC* jest równa 61.

**Uwaga**
Jeśli zdający obliczy $|AB|$ oraz $|AC|$ i nie zapisze (zauważy), że $|BC| = 61$, to przyznajemy **2 punkty**.

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania ........................................................................ 4 pkt**
Obliczenie pola podstawy ostrosłupa: $P = 660$.
**Rozwiązanie zadania do końca lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe) ............................................ 4 pkt**
**Rozwiązanie pełne ............................................................................................ 5 pkt**
Obliczenie objętości ostrosłupa: $V = 1760\sqrt{210}$.

**Uwaga**
Jeśli zdający nie zauważy, że trójkąt o bokach 22, 22, 61 nie istnieje i obliczy dwie „możliwe” objętości ostrosłupów, to otrzymuje **4 punkty**.

## Zadanie 11. (0–3)

| | |
|---|---|
| Rozumowanie i argumentacja | Wykorzystanie własności prawdopodobieństwa do obliczania prawdopodobieństw zdarzeń (V.10.c.d) |

**I sposób rozwiązania.**
Zdarzenia $A \cap B'$ oraz $A' \cap B$ są rozłączne.
Stąd i z faktu, że $P\left(\left(A \cap B'\right) \cup \left(A' \cap B\right)\right) \le 1$ wynika, że
$1 \ge P\left(\left(A \cap B'\right) \cup \left(A' \cap B\right)\right) = P\left(A \cap B'\right) + P\left(A' \cap B\right)$, czyli $P\left(A' \cap B\right) \le 0,3$.

**Uwaga**
Zdający może rozwiązać zadanie za pomocą diagramu Venna.

**Schemat oceniania I sposobu rozwiązania**
**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ........................................................ 1 pkt**
Zdający zauważy, że zdarzenia $A \cap B'$ oraz $A' \cap B$ są rozłączne.
**Pokonanie zasadniczych trudności zadania ........................................................ 2 pkt**
Zdający zapisze, że $1 \ge P\left(\left(A \cap B'\right) \cup \left(A' \cap B\right)\right) = P\left(A \cap B'\right) + P\left(A' \cap B\right)$.
**Rozwiązanie pełne ............................................................................................ 3 pkt**
Zdający przeprowadzi pełny dowód.

**Uwaga**
Jeżeli zdający przeprowadzi pełny dowód, ale nie zapisze, że podane zdarzenia są rozłączne, to otrzymuje **2 punkty**.

**II sposób rozwiązania.**
Wiemy, że $\left(A \cap B'\right) \subset B'$, stąd $P\left(A \cap B'\right) \le P\left(B'\right)$, czyli $P\left(A \cap B'\right) \le 1 - P\left(B\right)$.

Zatem $P\left(B\right) \le 0,3$.

Wiemy, że $\left(A' \cap B\right) \subset B$, stąd mamy $P\left(A' \cap B\right) \le P\left(B\right)$, czyli $P\left(A' \cap B\right) \le 0,3$, co kończy dowód.

**Schemat oceniania II sposobu rozwiązania**

**Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania ............................................................................................................1 pkt**

Zapisanie, że $\left(A \cap B'\right) \subset B'$. Zdający nie musi tego wyraźnie napisać, o ile wynika to z dalszych rozważań.

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania.....................................................................2 pkt**

Zapisanie, że $\left(A' \cap B\right) \subset B$ oraz, że $P\left(B\right) \leq 0,3$. Zdający nie musi tego wyraźnie napisać, o ile wynika to z pozostałych zapisów.

**Rozwiązanie pełne ............................................................................................................3 pkt**

Zapisanie wniosku: $P\left(A' \cap B\right) \leq 0,3$.