Miejsce na naklejkę z kodem szkoły

OKE ŁÓDŹ
CKE

MATEMATYKA

MARZEC
ROK 2008

POZIOM ROZSZERZONY

PRZYKŁADOWY ZESTAW ZADAŃ NR 1

Czas pracy 150 minut

Instrukcja dla zdającego

1. Sprawdź, czy arkusz egzaminacyjny zawiera 5 stron (zadania 1 – 11). Ewentualny brak zgłoś przewodniczącemu zespołu nadzorującego egzamin.
2. Rozwiązania zadań i odpowiedzi zamieść w miejscu na to przeznaczonym.
3. W rozwiązaniach zadań przedstaw tok rozumowania prowadzący do ostatecznego wyniku.
4. Pisz czytelnie. Używaj długopisu/pióra tylko z czarnym tuszem/atramentem.
5. Nie używaj korektora, a błędne zapisy przekreśl.
6. Pamiętaj, że zapisy w brudnopisie nie podlegają ocenie.
7. Obok każdego zadania podana jest maksymalna liczba punktów, którą możesz uzyskać za jego poprawne rozwiązanie.
8. Możesz korzystać z zestawu wzorów matematycznych, cyrkla i linijki oraz kalkulatora.

Życzymy powodzenia!

Za rozwiązanie wszystkich zadań można otrzymać łącznie **50 punktów**

Wypełnia zdający przed rozpoczęciem pracy

PESEL ZDAJĄCEGO

KOD ZDAJĄCEGO

Zadanie 1. *(5 pkt)*

Punkty $A=(-2,12)$ i $B=(6,-2)$ są wierzchołkami trójkąta prostokątnego ABC o kącie prostym przy wierzchołku C. Oblicz współrzędne wierzchołka C tego trójkąta, wiedząc, że leży on na prostej o równaniu $x+3y=22$. Sporządź rysunek w prostokątnym układzie współrzędnych. Rozważ wszystkie przypadki.

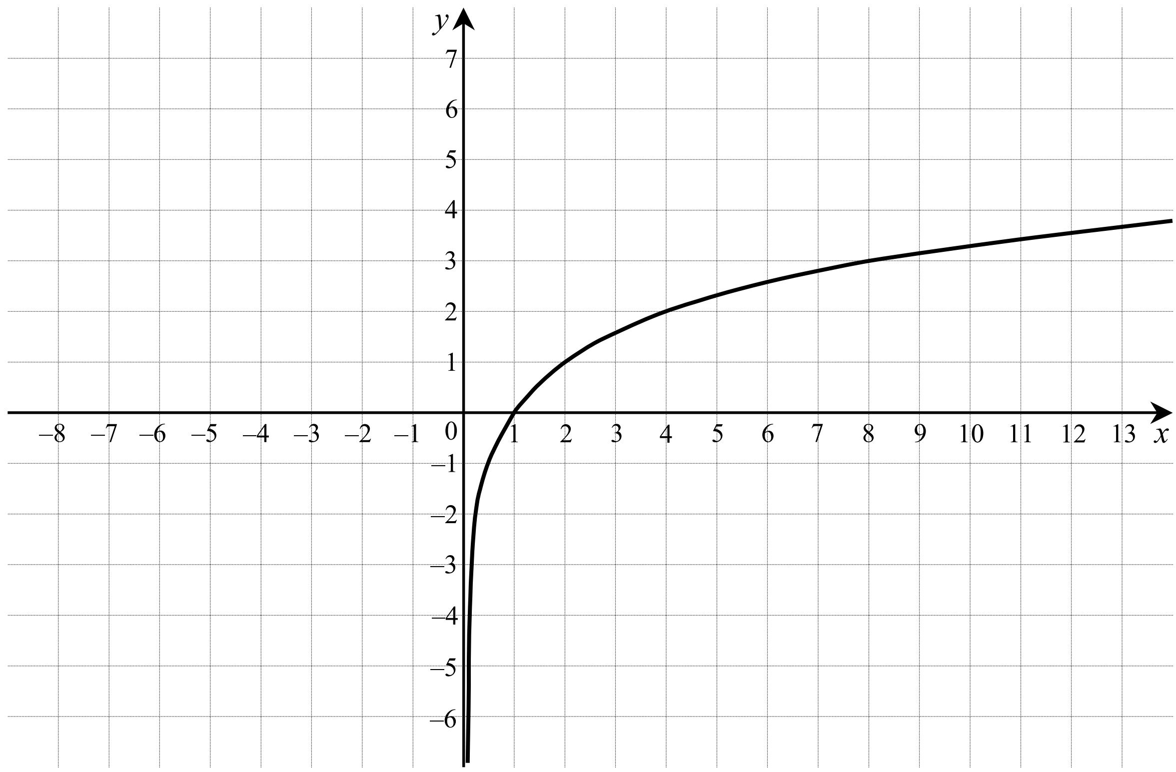
Zadanie 2. *(4 pkt)*

Wykres funkcji $f(x)=\frac{a}{x}$ dla $x\in R\setminus\{0\}$, gdzie $a\neq 0$, przesunięto o wektor $\vec{u}=[-3,2]$ i otrzymano wykres funkcji g. Do wykresu funkcji g należy punkt $A=(-4,6)$. Oblicz a, następnie rozwiąż nierówność $g(x)<4$.

Zadanie 3. *(5 pkt)*

Na rysunku przedstawiony jest wykres funkcji logarytmicznej opisanej wzorem $f(x)=\log_p x$.

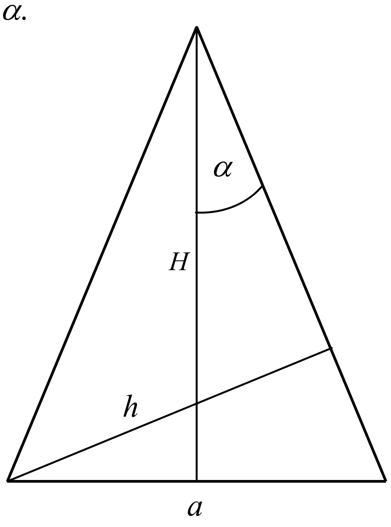
a) Na podstawie tego wykresu wyznacz p.
b) Oblicz $f(0{,}125)$.
c) Sporządź wykres funkcji $g(x)=|f(x-4)|$.
d) Podaj miejsce zerowe funkcji g.



Zadanie 4. *(6 pkt)*

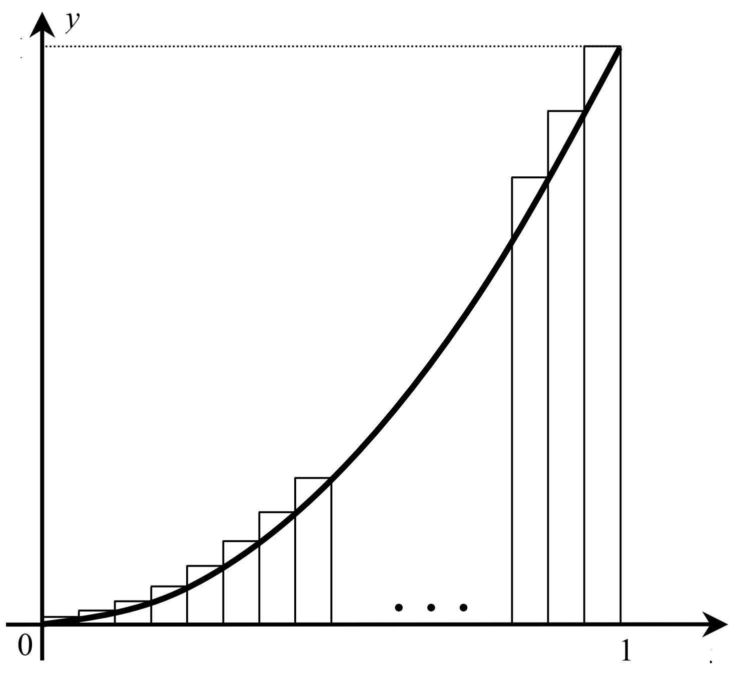
W trójkącie równoramiennym (patrz rysunek) długość podstawy wynosi a, zaś wysokości opuszczone odpowiednio na podstawę i ramię są równe H i h. Kąt między ramieniem trójkąta i wysokością opuszczoną na podstawę ma miarę α.

a) Wyraź $\operatorname{tg}\alpha$ w zależności od wielkości a i H.
b) Wyraź $\cos\alpha$ w zależności od wielkości a i h.
c) Wykaż, że jeśli $a^2 = H \cdot h$, to $\sin\alpha = \sqrt{2} - 1$.

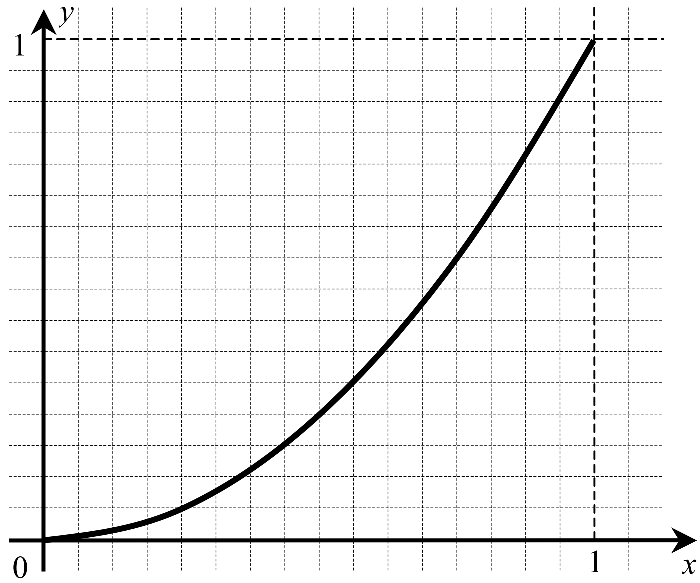


Zadanie 5. *(4 pkt)*

Pole obszaru ograniczonego wykresem funkcji $y = x^2$ dla $x \in \langle 0, 1 \rangle$ i osią Ox możemy obliczyć z dowolną dokładnością, zwiększając liczbę n prostokątów o szerokości $\frac{1}{n}$ każdy (patrz rysunek) i sumując ich pola.



a) Przedstaw ilustrację graficzną takiej sytuacji dla $n = 4$ i oblicz sumę pól otrzymanych prostokątów.



b) Oblicz sumę S_n pól n prostokątów, wykorzystując wzór:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Zadanie 6. *(3 pkt)*

Wykaż, że wielomian $W(x) = x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 6x + 9$ nie ma pierwiastków rzeczywistych.

Zadanie 7. *(6 pkt)*

Dana jest funkcja $f(x) = \sin^2 x + \cos x$ dla $x \in R$.

a) Rozwiąż równanie $f(x) = 1$ w przedziale $\langle 0, 2\pi \rangle$.

b) Wyznacz największą wartość funkcji *f*.

Zadanie 8. *(5 pkt)*

Podstawą ostrosłupa *ABCD* jest trójkąt równoboczny *ABC* o boku długości $\sqrt{2}$. Wszystkie ściany boczne są równoramiennymi trójkątami prostokątnymi. Punkt *P* został wybrany wewnątrz ostrosłupa w ten sposób, że wysokości ostrosłupów *ABDP*, *BCDP*, *ACDP*, *ABCP* opuszczone z wierzchołka *P* mają tę samą długość *H*. Sporządź rysunek ostrosłupa i oblicz *H*.

Zadanie 9. *(4 pkt)*

Grupa 4 kobiet i 4 mężczyzn, w tym jedno małżeństwo, wybrała się na pieszą wycieczkę. Na wąskiej ścieżce musieli iść gęsiego tzn. jedno za drugim. Zakładamy, że wszystkie możliwe ustawienia tych osób są jednakowo prawdopodobne. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia, że jako pierwsze pójdą kobiety i żona będzie szła bezpośrednio przed mężem. Sprawdź, czy to prawdopodobieństwo jest mniejsze od 0,001.

Zadanie 10. *(3 pkt)*

Dany jest ciąg $x_n = -1 - n$ dla $n \geq 1$. Ciąg (y_n) ma tę własność, że dla każdego $n \geq 1$ punkty o współrzędnych $(x_n, 0)$, $(-1, 1)$, $(0, y_n)$ leżą na jednej prostej. Wyznacz wzór ogólny ciągu (y_n).

Zadanie 11. *(5 pkt)*

Długości boków trójkąta prostokątnego są trzema kolejnymi wyrazami rosnącego ciągu geometrycznego. Oblicz iloraz tego ciągu.

BRUDNOPIS