Centralna
Komisja
Egzaminacyjna

Materiał współfinansowany ze środków Unii Europejskiej
w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Próbny egzamin maturalny z matematyki
listopad 2009

Klucz odpowiedzi do zadań zamkniętych
i przykładowe rozwiązania zadań otwartych

Klucz odpowiedzi do zadań zamkniętych

Nr zadania	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
Odpowiedź	A	C	B	B	C	A	B	A	D	A	C	B	B	C	C	D	A	D	C	D	A	A	D	D	A

Przykładowe rozwiązania zadań otwartych

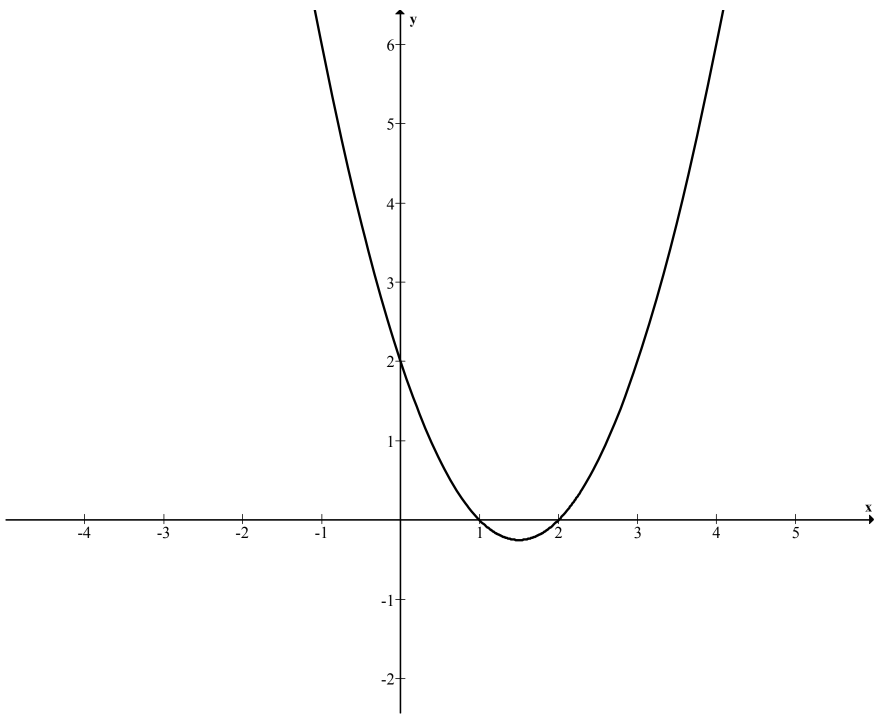
Zadanie 26. (2 punkty)
Rozwiąż nierówność $x^2 - 3x + 2 \le 0$.

Rozwiązanie:
Obliczam miejsca zerowe funkcji kwadratowej $f(x) = x^2 - 3x + 2$:

$$\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 9 - 8 = 1 \qquad \sqrt{\Delta} = 1$$

$$x_1 = \frac{3-1}{2} = 1 \quad x_2 = \frac{3+1}{2} = 2$$

Rysuję fragment wykresu funkcji kwadratowej f i na jego podstawie odczytuję rozwiązanie nierówności:



Odpowiedź: $x \in \langle 1, 2 \rangle$.

Uwaga: Można przedstawić funkcję f w postaci $f(x) = (x-1)(x-2)$ i odczytać rozwiązanie nierówności.

Zadanie 27. (2 punkty)
Rozwiąż równanie $x^3-7x^2+2x-14=0$.

Rozwiązanie:
Stosuję metodę grupowania, by przedstawić lewą stronę równania w postaci iloczynowej:

$$x^3-7x^2+2x-14=x^2(x-7)+2(x-7)=(x^2+2)(x-7).$$

Z równania $(x^2+2)(x-7)=0$ otrzymujemy, że

$$x^2+2=0 \text{ lub } x-7=0.$$

Równanie $x^2+2=0$ nie ma rozwiązań. Rozwiązaniem równania $x-7=0$ jest liczba 7.

Odpowiedź: Jedynym rozwiązaniem jest $x=7$.

Zadanie 28. (2 punkty)
W układzie współrzędnych na płaszczyźnie punkty $A=(2,5)$ i $C=(6,7)$ są przeciwległymi wierzchołkami kwadratu *ABCD*. Wyznacz równanie prostej *BD*.

Rozwiązanie:
Obliczam współczynnik kierunkowy prostej *AC*: $a_{AC}=\frac{7-5}{6-2}=\frac{1}{2}$, a następnie wyznaczam współczynnik kierunkowy prostej *BD* prostopadłej do *AC*: $a_{BD}=-2$.
Wyznaczam współrzędne środka *S* odcinka *AC*: $S=\left(\frac{2+6}{2},\frac{5+7}{2}\right)=(4,6)$ i wyznaczam równanie prostej o współczynniku kierunkowym -2, przechodzącej przez punkt *S*.

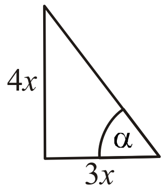
Odpowiedź: $y=-2x+14$.

Zadanie 29. (2 punkty)
Kąt α jest ostry i $\operatorname{tg}\alpha=\frac{4}{3}$. Oblicz $\sin\alpha+\cos\alpha$.

Rozwiązanie:
<u>I sposób rozwiązania:</u>
Z definicji funkcji tangens mamy $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{4}{3}$, zatem $\sin\alpha=\frac{4}{3}\cos\alpha$. Podstawiam tę równość do tożsamości $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ i otrzymuję $\left(\frac{4}{3}\cos\alpha\right)^2+\cos^2\alpha=1$, a stąd $\cos^2\alpha=\frac{9}{25}$.
Zatem $\cos\alpha=\frac{3}{5}$ lub $\cos\alpha=-\frac{3}{5}$. Ujemny wynik odrzucam, ponieważ zgodnie z warunkami zadania kąt α jest kątem ostrym. Obliczam wartości funkcji $\sin\alpha=\frac{4}{5}$, a następnie wartość wyrażenia $\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{4}{5}+\frac{3}{5}=\frac{7}{5}$.

Odpowiedź: $\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{7}{5}$.

II sposób rozwiązania:
Rysuję trójkąt prostokątny, w którym oznaczam przyprostokątne $3x$ i $4x$ oraz zaznaczam kąt ostry α tak, aby $\mathrm{tg}\alpha = \frac{4}{3}$.



Z twierdzenia Pitagorasa obliczam długość przeciwprostokątnej: $(4x)^2 + (3x)^2 = 25x^2$.

Zatem przeciwprostokątna ma długość $5x$. Obliczam wartości funkcji $\sin\alpha = \frac{4}{5}$ i $\cos\alpha = \frac{3}{5}$. Stąd $\sin\alpha + \cos\alpha = \frac{4}{5} + \frac{3}{5} = \frac{7}{5}$.

Odpowiedź: $\sin\alpha + \cos\alpha = \frac{7}{5}$.

Zadanie 30. (2 punkty)
Wykaż, że dla każdego m ciąg $\left(\frac{m+1}{4}, \frac{m+3}{6}, \frac{m+9}{12}\right)$ jest arytmetyczny.

Rozwiązanie:
I sposób rozwiązania:
Wystarczy sprawdzić, że zachodzi następujący związek między sąsiednimi wyrazami ciągu: $a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$.

Mamy $a_1 = \frac{m+1}{4}$, $a_2 = \frac{m+3}{6}$, $a_3 = \frac{m+9}{12}$.

Zatem $\frac{a_1 + a_3}{2} = \frac{\frac{m+1}{4} + \frac{m+9}{12}}{2} = \frac{3m+3+m+9}{24} = \frac{4m+12}{24} = \frac{m+3}{6} = a_2$.

Stąd wynika, że ciąg $\left(\frac{m+1}{4}, \frac{m+3}{6}, \frac{m+9}{12}\right)$ jest arytmetyczny dla każdego m.

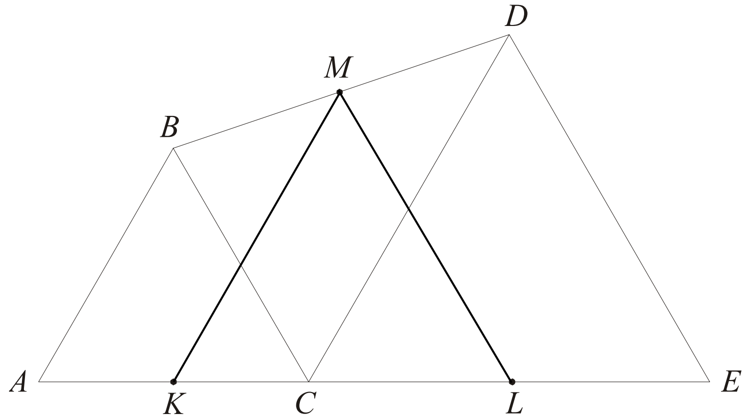
II sposób rozwiązania:
Mamy $a_1 = \frac{m+1}{4}$, $a_2 = \frac{m+3}{6}$, $a_3 = \frac{m+9}{12}$.
Wystarczy sprawdzić, że $a_2 - a_1 = a_3 - a_2$.
Obliczamy:

$$\frac{m+3}{6} - \frac{m+1}{4} = \frac{m+9}{12} - \frac{m+3}{6}$$

$$\frac{2m+6-3m-3}{12} = \frac{m+9-2m-6}{12}$$

$$\frac{-m+3}{12} = \frac{-m+3}{12}$$

Zadanie 31. (2 punkty)
Trójkąty ABC i CDE są równoboczne. Punkty A, C i E leżą na jednej prostej. Punkty K, L i M są środkami odcinków AC, CE i BD (zobacz rysunek). Wykaż, że punkty K, L i M są wierzchołkami trójkąta równobocznego.



Rozwiązanie:
Z warunków zadania wynika, że $|\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle DCE| = 60^\circ$, więc odcinki AB i CD są równoległe. Czworokąt $ACDB$ jest trapezem. Odcinek KM łączy środki boków nierównoległych w tym trapezie, więc jest równoległy do jego podstaw. Wobec tego $|\sphericalangle MKL| = 60^\circ$.

Podobnie $|\sphericalangle ACB| = |\sphericalangle CED| = 60^\circ$, więc odcinki BC i DE są równoległe. Czworokąt $BCED$ jest trapezem. Odcinek ML łączy środki boków nierównoległych w tym trapezie, więc jest równoległy do jego podstaw. Wobec tego $|\sphericalangle KLM| = 60^\circ$.

Odpowiedź: Dwa kąty trójkąta KLM mają miarę 60°, zatem jest to trójkąt równoboczny.

Zadanie 32. (5 punktów)
Uczeń przeczytał książkę liczącą 480 stron, przy czym każdego dnia czytał jednakową liczbę stron. Gdyby czytał każdego dnia o 8 stron więcej, to przeczytałby tę książkę o 3 dni wcześniej. Oblicz, ile dni uczeń czytał tę książkę.

Rozwiązanie:
Oznaczam: x – liczba stron przeczytanych każdego dnia, y – liczba dni.
Zapisuję i rozwiązuję układ równań:

$$\begin{cases} x \cdot y = 480 \\ (x+8)\cdot(y-3) = 480 \end{cases}$$

Z pierwszego równania mamy $x = \frac{480}{y}$, zatem

$$\left(\frac{480}{y} + 8\right)\cdot(y-3) = 480 \,\Big|\cdot y$$

$$(480 + 8y)(y-3) = 480y$$

Po uproszczeniu otrzymuję równanie $y^2 - 3y - 180 = 0$.
Rozwiązaniem równania są liczby: –12 oraz 15. Odrzucam ujemną liczbę dni.

Odpowiedź: Uczeń przeczytał książkę w ciągu 15 dni.

Zadanie 33. (4 punkty)
Punkty $A=(2,0)$ i $B=(12,0)$ są wierzchołkami trójkąta prostokątnego ABC o przeciwprostokątnej AB. Wierzchołek C leży na prostej o równaniu $y=x$. Oblicz współrzędne punktu C.

Rozwiązanie:
I sposób rozwiązania:
Punkt C leży na prostej o równaniu $y=x$ i na okręgu, którego środkiem jest środek przeciwprostokątnej, a promień jest równy połowie długości tej przeciwprostokątnej.
Obliczam długość przeciwprostokątnej AB: $|AB|=\sqrt{(12-2)^2+(0-0)^2}=10$.
Wyznaczam współrzędne środka przeciwprostokątnej: $S=(7,0)$.
Zapisuję równanie okręgu: $(x-7)^2+y^2=25$
Rozwiązuję układ równań $\begin{cases} y=x \\ (x-7)^2+y^2=25 \end{cases}$
Otrzymuję równanie z jedną niewiadomą:
$$x^2-7x+12=0$$
Rozwiązaniem tego równania są liczby: $x_1=4$, $x_2=3$.

Odpowiedź: Warunki zadania spełniają dwa punkty: $C=(4,4)$ oraz $C=(3,3)$.

II sposób rozwiązania:
Oznaczmy współrzędne punktu C przez (x,y). Wtedy $|AB|=\sqrt{(12-2)^2+(0-0)^2}=10$,
$|AC|=\sqrt{(x-2)^2+(y-0)^2}$, $|BC|=\sqrt{(x-12)^2+(y-0)^2}$.
Trójkąt ABC jest prostokątny, więc spełniona jest równość $|AC|^2+|BC|^2=|AB|^2$, czyli $(x-2)^2+y^2+(x-12)^2+y^2=10^2$.
Punkt C leży też na prostej o równaniu $y=x$, zatem aby obliczyć jego współrzędne, należy rozwiązać układ równań:
$$\begin{cases} (x-2)^2+y^2+(x-12)^2+y^2=10^2 \\ y=x \end{cases}$$
$$x^2-4x+4+x^2+x^2-24x+144+x^2=100$$
$$4x^2-28x+48=0$$
$$x^2-7x+12=0$$
$$x_1=4,\quad x_2=3$$

Odpowiedź: Warunki zadania spełniają dwa punkty: $C=(4,4)$ oraz $C=(3,3)$.

Zadanie 34. (4 punkty)
Pole trójkąta prostokątnego jest równe $60\,\mathrm{cm}^2$. Jedna przyprostokątna jest o 7 cm dłuższa od drugiej. Oblicz długość przeciwprostokątnej tego trójkąta.

Oznaczam: *a, b* – długości przyprostokątnych danego trójkąta.
Zapisuję układ równań

$$\begin{cases} a = b + 7 \\ \frac{1}{2} a \cdot b = 60 \end{cases}$$

Otrzymuję równanie z jedną niewiadomą $\frac{1}{2}(b+7)b = 60$, którego pierwiastkami są liczby $b = 8$ oraz $b = -15$.
Odrzucam ujemny pierwiastek, gdyż *b* jest długością odcinka. Zatem $b = 8$, $a = 8 + 7 = 15$.
Teraz obliczam długość przeciwprostokątnej $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{8^2 + 15^2} = \sqrt{289} = 17$.

Odpowiedź: Przeciwprostokątna ma długość 17 cm.