CENTRALNA KOMISJA EGZAMINACYJNA

Arkusz zawiera informacje prawnie chronione do momentu rozpoczęcia egzaminu.

MMA 2016

UZUPEŁNIA ZDAJĄCY

KOD

PESEL

miejsce na naklejkę

☐ dyskalkulia ☐ dysleksja

EGZAMIN MATURALNY Z MATEMATYKI

POZIOM PODSTAWOWY

DATA: **3 czerwca 2016 r.**

GODZINA ROZPOCZĘCIA: **9:00**

CZAS PRACY: **170 minut**

LICZBA PUNKTÓW DO UZYSKANIA: **50**

Instrukcja dla zdającego

1. Sprawdź, czy arkusz egzaminacyjny zawiera 21 stron (zadania 1–33). Ewentualny brak zgłoś przewodniczącemu zespołu nadzorującego egzamin.
2. Rozwiązania zadań i odpowiedzi wpisuj w miejscu na to przeznaczonym.
3. Odpowiedzi do zadań zamkniętych (1–25) zaznacz na karcie odpowiedzi, w części karty przeznaczonej dla zdającego. Zamaluj ■ pola do tego przeznaczone. Błędne zaznaczenie otocz kółkiem ■ i zaznacz właściwe.
4. Pamiętaj, że pominięcie argumentacji lub istotnych obliczeń w rozwiązaniu zadania otwartego (26–33) może spowodować, że za to rozwiązanie nie otrzymasz pełnej liczby punktów.
5. Pisz czytelnie i używaj tylko długopisu lub pióra z czarnym tuszem lub atramentem.
6. Nie używaj korektora, a błędne zapisy wyraźnie przekreśl.
7. Pamiętaj, że zapisy w brudnopisie nie będą oceniane.
8. Możesz korzystać z zestawu wzorów matematycznych, cyrkla i linijki, a także z kalkulatora prostego.
9. Na tej stronie oraz na karcie odpowiedzi wpisz swój numer PESEL i przyklej naklejkę z kodem.
10. Nie wpisuj żadnych znaków w części przeznaczonej dla egzaminatora.

MMA-P1_1P-163

MMA 2016

W zadaniach od 1. do 25. wybierz i zaznacz na karcie odpowiedzi poprawną odpowiedź.

Zadanie 1. (0–1)

Liczba $\frac{7^6 \cdot 6^7}{42^6}$ jest równa

A. 42^{36} **B.** 42^7 **C.** 6 **D.** 1

Zadanie 2. (0–1)

Cenę pewnego towaru podwyższono o 20%, a następnie nową cenę tego towaru podwyższono o 30%. Takie dwie podwyżki ceny tego towaru można zastąpić równoważną im jedną podwyżką

A. o 50% **B.** o 56% **C.** o 60% **D.** o 66%

Zadanie 3. (0–1)

Liczba $\sqrt[3]{3\sqrt{3}}$ jest równa

A. $\sqrt[6]{3}$ **B.** $\sqrt[4]{3}$ **C.** $\sqrt[3]{3}$ **D.** $\sqrt{3}$

Zadanie 4. (0–1)

Różnica $50001^2 - 49999^2$ jest równa

A. 2 000 000 **B.** 200 000 **C.** 20 000 **D.** 4

Zadanie 5. (0–1)

Najmniejsza wartość wyrażenia $(x-y)(x+y)$ dla $x, y \in \{2,3,4\}$ jest równa

A. 2 **B.** -24 **C.** 0 **D.** -12

Zadanie 6. (0–1)

Wartość wyrażenia $\log_3 \frac{3}{2} + \log_3 \frac{2}{9}$ jest równa

A. -1 **B.** -2 **C.** $\log_3 \frac{5}{11}$ **D.** $\log_3 \frac{31}{18}$

Zadanie 7. (0–1)

Spośród liczb, które są rozwiązaniami równania $(x-8)(x^2-4)(x^2+16)=0$, wybrano największą i najmniejszą. Suma tych dwóch liczb jest równa

A. 12 **B.** 10 **C.** 6 **D.** 4

BRUDNOPIS *(nie podlega ocenie)*

Zad. 1. $\frac{7^6\cdot 6^7}{42^6} = \frac{7^6\cdot 6^6\cdot 6^1}{42^6} = \frac{(7\cdot 6)^6\cdot 6^1}{42^6} = \frac{\cancel{42^6}\cdot 6^1}{\cancel{42^6}} = 6$ odp. C

Zad. 2. $x\cdot(100\% + 20\%)\cdot(100\% + 30\%) = x\cdot 120\%\cdot 130\% =$
$= x\cdot 1{,}2\cdot 1{,}3 = 1{,}56x = 156\%\,x$ Odp: B.

Zad. 3. $\sqrt[3]{3\sqrt{3}} = \left(3^1\cdot 3^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}} = \left(3^{1\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}} = \left(3^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{1}{3}} =$
$= 3^{\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{3}} = 3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$ Odp: D

Zad. 4. $50001^2 - 49999^2 = (50001-49999)(50001+49999) =$
$= 2\cdot 100000 = 200000.$ Wzór skróconego mnożenia $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$
Odp: B

Zad. 5.
$(2-4)(2+4) = -2\cdot 6 = -12$ ← najmniejsza
$x<y$ $(2-3)(2+3) = -1\cdot 5 = -5$
$(3-4)(3+4) = -1\cdot 7 = -7.$ Odp: D.

Zad. 6. $\log_3\frac{3}{2} + \log_3\frac{2}{9} = \log_3\left(\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{9}\right) = \log_3\frac{1}{3} = \log_3 3^{-1} = -1$
Odp: A

Zad. 7 $(x-8)(x^2-4)(x^2+16)=0.$
$x-8=0$ ∨ $x^2-4=0$ ∨ $x^2+16=0.$
$x=8$ $x^2=4\ |\sqrt{\ }$ $x^2=-16$
największa $x=2$ ∨ $x=-2$ sprzeczne
najmniejsza

$-2+8=6$ Odp: C.

Zadanie 8. (0–1)

Rozwiązaniem równania $\frac{x-7}{x}=5$, gdzie $x \neq 0$, jest liczba należąca do przedziału

A. $(-\infty,-2)$
B. $\langle -2,-1)$
C. $\langle -1, 0)$
D. $(0,+\infty)$

Zadanie 9. (0–1)

Funkcja f określona jest wzorem $f(x)=\frac{2x^3}{x^4+1}$ dla każdej liczby rzeczywistej x. Wtedy liczba $f(-\sqrt{2})$ jest równa

A. $-\frac{8}{5}$
B. $-\frac{4\sqrt{2}}{3}$
C. $-\frac{4\sqrt{2}}{5}$
D. $-\frac{4}{3}$

Zadanie 10. (0–1)

Dana jest funkcja kwadratowa $f(x)=-2(x+5)(x-11)$. Wskaż maksymalny przedział, w którym funkcja f jest rosnąca.

A. $(-\infty,3\rangle$
B. $(-\infty,5\rangle$
C. $(-\infty,11\rangle$
D. $\langle 6,+\infty)$

Zadanie 11. (0–1)

Ciąg (a_n) jest określony wzorem $a_n=6(n-16)$ dla $n \geq 1$. Suma dziesięciu początkowych wyrazów tego ciągu jest równa

A. -54
B. -126
C. -630
D. -270

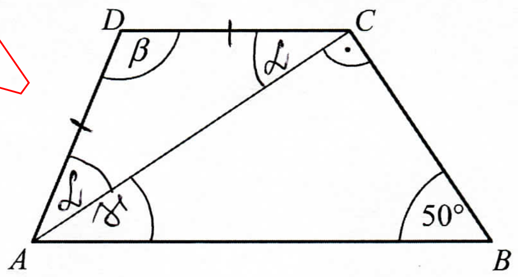
Zadanie 12. (0–1)

Dany jest ciąg geometryczny (a_n), w którym $a_1=72$ i $a_4=9$. Iloraz q tego ciągu jest równy

A. $q=\frac{1}{2}$
B. $q=\frac{1}{6}$
C. $q=\frac{1}{4}$
D. $q=\frac{1}{8}$

Zadanie 13. (0–1)

Dany jest trapez $ABCD$, w którym przekątna AC jest prostopadła do ramienia BC, $|AD|=|DC|$ oraz $|\sphericalangle ABC|=50°$ (zobacz rysunek).



Stąd wynika, że

A. $\beta=100°$
B. $\beta=120°$
C. $\beta=110°$
D. $\beta=130°$

BRUDNOPIS *(nie podlega ocenie)*

Zad. 8.

$$\frac{x-7}{x} = 5 \quad / \cdot x$$

$x - 7 = 5x$

$x - 5x = 7$

$-4x = 7 \quad / : (-4)$

$x = -\frac{7}{4} = -1{,}75$

$x \in \langle -2; -1)$ Odp: B.

Zad. 9.

$$f(-\sqrt{2}) = \frac{2(-\sqrt{2})^3}{(-\sqrt{2})^4 + 1} = \frac{2 \cdot (-2\sqrt{2})}{2 \cdot 2 + 1} = \frac{-4\sqrt{2}}{5}$$

Odp: C

Zad. 10. Funkcja ta ma ramiona skierowane do dołu, gdyż $a = -2 < 0$. Zatem maksymalny przedział, w którym ta funkcja jest rosnąca to $x \in (-\infty; p\rangle$

$p = \frac{x_1 + x_2}{2}$

Odczytując ze wzoru w postaci iloczynowej, zauważam, że

$x_1 = -5$ oraz $x_2 = 11$

$p = \frac{-5+11}{2} = \frac{6}{2} = 3$, zatem $x \in (-\infty; 3\rangle$ Odp: A

Zad. 11. $a_1 = 6(1-16) = 6(-15) = -90$.

$a_{10} = 6(10-16) = 6 \cdot (-6) = -36$.

Odp: C

$$S_{10} = \frac{a_1 + a_{10}}{2} \cdot 10 = \frac{-90 + (-36)}{\cancel{2}_1} \cdot \cancel{10}^5 = -126 \cdot 5 = -630$$

Zad. 12. $a_1 = 72$; $a_4 = 9$

$a_4 = a_1 \cdot q^3$

$9 = 72q^3$

$72q^3 = 9 \quad / : 72$

$q^3 = \frac{9}{72}$

$q^3 = \frac{1}{8} \quad / \sqrt[3]{\ }$

$q = \frac{1}{2}$ Odp: A.

Zad. 13. $\gamma = 180° - 50° - 90° = 40°$

$\alpha = \gamma$, gdyż są to kąty naprzeciwległe, $\alpha = 40°$.

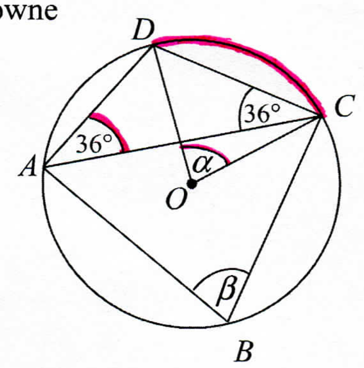
$2\alpha + \beta = 180°$

$2 \cdot 40° + \beta = 180°$

$\beta = 180° - 80° = 100°$ Odp: A.

Zadanie 14. (0–1)

Punkty A, B, C i D leżą na okręgu o środku O (zobacz rysunek). Miary zaznaczonych kątów α i β są odpowiednio równe



A. $\alpha = 36°, \beta = 72°$

B. $\alpha = 54°, \beta = 72°$

C. $\alpha = 36°, \beta = 108°$

D. $\alpha = 72°, \beta = 72°$

Zadanie 15. (0–1)

Słoń waży 5 ton, a waga mrówki jest równa 0,5 grama. Ile razy słoń jest cięższy od mrówki?

A. 10^6 **B.** 10^7 **C.** 10 **D.** 10^8

Zadanie 16. (0–1)

Każde z ramion trójkąta równoramiennego ma długość 20. Kąt zawarty między ramionami tego trójkąta ma miarę $150°$. Pole tego trójkąta jest równe

A. 100 **B.** 200 **C.** $100\sqrt{3}$ **D.** $100\sqrt{2}$

Zadanie 17. (0–1)

Prosta określona wzorem $y = ax + 1$ jest symetralną odcinka AB, gdzie $A = (-3, 2)$ i $B = (1, 4)$. Wynika stąd, że

A. $a = -\frac{1}{2}$ **B.** $a = \frac{1}{2}$ **C.** $a = -2$ **D.** $a = 2$

BRUDNOPIS *(nie podlega ocenie)*

Zad. 14 $\angle = 36^\circ \cdot 2 = 72^\circ$ Odp: D.

Zad. 15. $\frac{5\ ton}{0{,}5g} = \frac{5000kg}{0{,}5g} = \frac{5000000\ g}{0{,}5g} = 10000000 = 10^7$

Odp: B.

Zad. 16.

$P = \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 20 \sin 150^\circ$

$P = \frac{1}{\cancel{2}_1} \cdot \cancel{20}^{10} \cdot \cancel{20}^{10} \cdot \frac{1}{\cancel{2}_1} = 10 \cdot 10 = 100$

$\sin 150^\circ = \sin(180^\circ - 30^\circ) = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$ Odp: A

Zad. 17. Obliczam równanie prostej AB.

$A = (\overset{x}{-3}; \overset{y}{2})$ $B = (\overset{x}{1}; \overset{y}{4})$

$y = ax + b$

$\begin{cases} 2 = -3a + b \quad / \cdot (-1) \\ 4 = 1a + b \end{cases}$

$(+) \begin{cases} -2 = 3a - \cancel{b} \\ 4 = a + \cancel{b} \end{cases}$

$2 = 4a$

$4a = 2 \quad / : 4$

$a = \frac{1}{2}$

AB: $y = \frac{1}{2}x + b$, ponieważ symetralna jest prostopadła do AB, to

$y = \frac{1}{2}x + b \perp y = -2x + b$

$\downarrow$

$a = -2$ Odp: C.

Zadanie 18. (0–1)

Układ równań $\begin{cases} y = \overset{a_1}{-a}x + \overset{b_1}{2a} \\ y = \overset{a_2}{\frac{b}{3}}x \overset{b_2}{-2} \end{cases}$ nie ma rozwiązań dla

A. $a=-1$ i $b=-3$

B. $a=1$ i $b=3$

C. $a=1$ i $b=-3$

D. $a=-1$ i $b=3$

Zadanie 19. (0–1)

Do pewnej liczby a dodano 54. Otrzymaną sumę podzielono przez 2. W wyniku tego działania otrzymano liczbę dwa razy większą od liczby a. Zatem

A. $a=27$ **B.** $a=18$ **C.** $a=24$ **D.** $a=36$

Zadanie 20. (0–1)

Podstawą ostrosłupa prawidłowego czworokątnego $ABCDS$ jest kwadrat $ABCD$. Wszystkie ściany boczne tego ostrosłupa są trójkątami równobocznymi. Miara kąta ASC jest równa

A. $45°$ **B.** $30°$ **C.** $75°$ **D.** $90°$

Zadanie 21. (0–1)

Rzucamy trzy razy symetryczną monetą. Niech p oznacza prawdopodobieństwo otrzymania dokładnie jednego orła w tych trzech rzutach. Wtedy

A. $0 \le p < 0,25$ **B.** $0,25 \le p \le 0,4$ **C.** $0,4 < p \le 0,5$ **D.** $p > 0,5$

Zadanie 22. (0–1)

Średnia arytmetyczna czterech liczb: $x-1$, $3x$, $5x+1$ i $7x$ jest równa 72. Wynika stąd, że

A. $x=9$ **B.** $x=10$ **C.** $x=17$ **D.** $x=18$

BRUDNOPIS *(nie podlega ocenie)*

Zad. 18. By układ przedstawiony w zadaniu nie miał rozwiązań musi opisywać dwie proste równoległe niepokrywające się. Zatem

$a_1 = a_2$ oraz $b_1 \neq b_2$. Sprawdzę odpowiedzi:

A. $a_1 = 1$; $a_2 = \frac{-3}{3} = -1$ sprzeczne, bo $a_1 \neq a_2$.

B. $a_1 = -1$; $a_2 = \frac{3}{3} = 1$ sprzeczne, bo $a_1 \neq a_2$

C. $a_1 = -1$; $a_2 = -\frac{3}{3} = -1$ ok, bo $a_1 = a_2$ Odp: C.
$b_1 = 2 \cdot 1 = 2$; $b_2 = -2$ ok, bo $b_1 \neq b_2$

Zad. 19. $\frac{(a+54)}{2} = 2a \,/\cdot 2$

$a + 54 = 4a$

$a - 4a = -54$

$-3a = -54 \,/:(-3)$

$a = 18$

Odp: B.

Zad. 21. $\overline{\overline{\Omega}} = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$

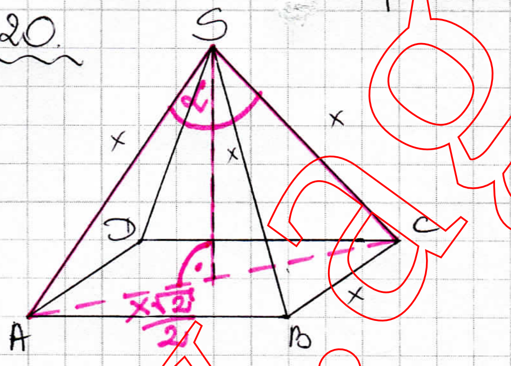
$A = \{(O,R,R), (R,O,R), (R,R,O)\}$

$\overline{\overline{A}} = 3$

$P(A) = \frac{3}{8} = 0{,}375$

Odp: B.

Zad. 20.



$\sin\alpha = \frac{x\sqrt{2}}{2} : x = \frac{\cancel{x}\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{\cancel{x}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\alpha = 45°$

$2\alpha = 45° \cdot 2 = 90°$

Odp: D.

Zad. 22. $x-1, 3x, 5x+1, 7x$

$\frac{x - 1 + 3x + 5x + 1 + 7x}{4} = 72 \,/\cdot 4$

$x - \cancel{1} + 3x + 5x + \cancel{1} + 7x = 288$

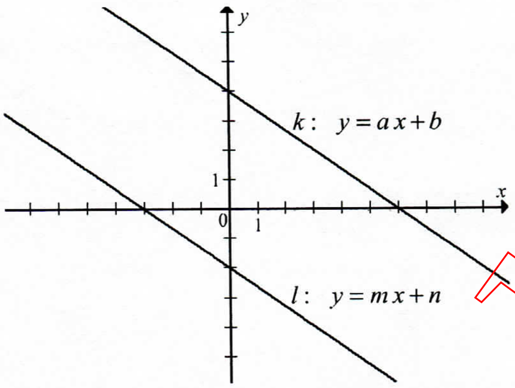
$16x = 288 \,/:16$

$x = 18$.

Odp: D.

Zadanie 23. (0–1)

Na rysunku przedstawione są dwie proste równoległe k i l o równaniach $y = ax + b$ oraz $y = mx + n$. Początek układu współrzędnych leży między tymi prostymi.



Zatem

A. $a \cdot m > 0$ i $b \cdot n > 0$

B. $a \cdot m > 0$ i $b \cdot n < 0$

C. $a \cdot m < 0$ i $b \cdot n > 0$

D. $a \cdot m < 0$ i $b \cdot n < 0$

Zadanie 24. (0–1)

Dane są dwie sumy algebraiczne $3x^3 - 2x$ oraz $-3x^2 - 2$. Iloczyn tych sum jest równy

A. $-9x^5 + 4x$

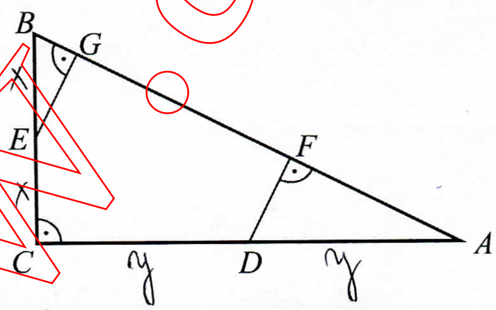
B. $-9x^6 + 6x^3 - 6x^2 + 4x$

C. $-9x^5 + 6x^3 - 6x^2 + 4x$

D. $-9x^6 + 4x$

Zadanie 25. (0–1)

Punkty D i E są środkami przyprostokątnych AC i BC trójkąta prostokątnego ABC. Punkty F i G leżą na przeciwprostokątnej AB tak, że odcinki DF i EG są do niej prostopadłe (zobacz rysunek). Pole trójkąta BGE jest równe 1, a pole trójkąta AFD jest równe 4.



Zatem pole trójkąta ABC jest równe

A. 12

B. 16

C. 18

D. 20

BRUDNOPIS *(nie podlega ocenie)*

Zad.23 Na podstawie wykresu zauważam, że

$\underbrace{a<0,\ m<0}_{a\cdot m>0}$; $\underbrace{b=4,\ n=-2}_{b\cdot n=4\cdot(-2)=-8<0}$.

Odp: B

Zad.24. $(3x^3-2x)(-3x^2-2)=-9x^5-\cancel{6x^3}+\cancel{6x^3}+4x=$

$=-9x^5+4x$

Odp: A.

Zad.25. $\Delta BGE \sim \Delta DFA$ na mocy cechy kąt-kąt-kąt.

$k_1^2=\frac{P_{AFD}}{P_{BGE}}=\frac{4}{1}=4 \Rightarrow k_1=2. \Rightarrow \frac{y}{x}=2 \,/\cdot x$

$y=2x$

$|BC|=2x$

$|CA|=2y=2\cdot 2x=4x$

z tw. Pitagorasa

$|BC|^2+|AC|^2=|AB|^2$

$(2x)^2+(4x)^2=|AB|^2$

$4x^2+16x^2=|AB|^2$

$20x^2=|AB|^2$

$|AB|^2=20x^2 \,/\sqrt{\ }$

$|AB|=x\sqrt{20}=2\sqrt{5}x$

$k_2=\frac{|AB|}{|BE|}=\frac{2\sqrt{5}\cancel{x}}{\cancel{x}}=2\sqrt{5}$

$k_2^2=(2\sqrt{5})^2=4\cdot 5=20.$

$k_2^2=\frac{P_{\Delta ABC}}{P_{\Delta BGE}}=20.$

$\frac{P_{\Delta ABC}}{1}=20 \,/\cdot 1$

$P_{\Delta ABC}=20.$

Odp: D.

Zadanie 26. (0–2)

Rozwiąż równanie $\frac{2x+1}{2x}=\frac{2x+1}{x+1}$, gdzie $x \neq -1$ i $x \neq 0$.

$$\frac{2x+1}{2x} = \frac{2x+1}{x+1}$$

$$(2x+1)(x+1) = (2x+1)\cdot 2x$$

$$2x^2+2x+x+1 = 4x^2+2x$$

$$2x^2+3x+1-4x^2-2x=0$$

$$-2x^2+x+1=0$$

$a=-2$; $b=1$; $c=1$

$\Delta = b^2-4ac$

$\Delta = 1^2-4\cdot(-2)\cdot 1 = 1+8=9$

$\sqrt{\Delta}=3$

$x_1 = \frac{-1-3}{2\cdot(-2)} = \frac{-4}{-4} = 1 \in D$

$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$

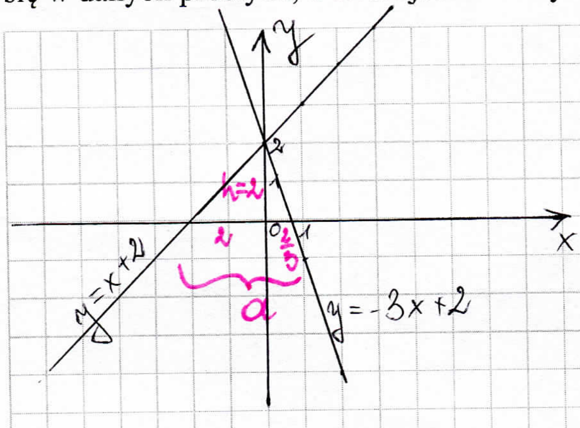
$x_2 = \frac{-1+3}{2(-2)} = \frac{2}{-4} = -\frac{1}{2} \in D$

$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

Odpowiedź: $x=-\frac{1}{2}$ lub $x=1$

Zadanie 27. (0–2)

Dane są proste o równaniach $y = x + 2$ oraz $y = -3x + b$, które przecinają się w punkcie leżącym na osi Oy układu współrzędnych. Oblicz pole trójkąta, którego dwa boki zawierają się w danych prostych, a trzeci jest zawarty w osi Ox.



① Wyznaczę pkt przecięcia prostej $y = x+2$ z osią OY.

$x=0$

$y=0+2$

$y=2$

$P=(0;2)$

② Wyznaczę prostą $y=-3x+b$ przechodzącą przez pkt $P=(\underset{x}{0};\underset{y}{2})$.

$2=-3\cdot 0+b$

$2=b$

$y=-3x+2$

③ Obliczam współrzędne punktu przecięcia prostej $y=-3x+2$ z osią OX.

$y=0$

$0=-3x+2$

$3x=2 \mid :3$

$x=\frac{2}{3}$

④ Obliczam pole trójkąta

$a=2+\frac{2}{3}=2\frac{2}{3}$

$h=2$

$P=\frac{1}{2}ah$

$P=\frac{1}{2_1}\cdot 2\frac{2}{3}\cdot 2^1$

$P=2\frac{2}{3}j^2$

Odpowiedź: $P=2\frac{2}{3}j^2$

Zadanie 28. (0–2)

Wykaż, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y prawdziwa jest nierówność

$$x^4 + y^4 + x^2 + y^2 \geq 2(x^3 + y^3).$$

$$x^4 + y^4 + x^2 + y^2 \geqslant 2x^3 + 2y^3$$

$$x^4 + y^4 + x^2 + y^2 - 2x^3 - 2y^3 \geqslant 0$$

$$\underbrace{x^4 - 2x^3 + x^2}_{} + \underbrace{y^4 - 2y^3 + y^2}_{} \geqslant 0.$$

$$^{(*)}(x^2 - x)^2 + (y^2 - y)^2 \geqslant 0$$

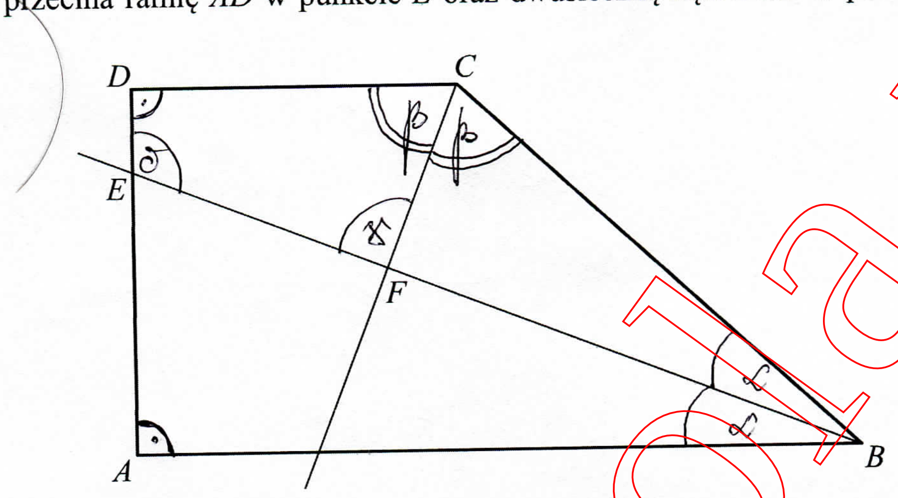
Zarówno $(x^2-x)^2$ jak i $(y^2-y)^2$ dla dowolnych liczb rzeczywistych są nieujemne. Suma dwóch liczb nieujemnych, również jest liczbą nieujemną. ■

(*) Wykorzystano wzór skróconego mnożenia

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Zadanie 29. (0–2)

Dany jest trapez prostokątny $ABCD$ o podstawach AB i CD oraz wysokości AD. Dwusieczna kąta ABC przecina ramię AD w punkcie E oraz dwusieczną kąta BCD w punkcie F (zobacz rysunek).



Wykaż, że w czworokącie $CDEF$ sumy miar przeciwległych kątów są sobie równe.

Wprowadzam oznaczenia jak na rysunku.

Z własności trapezu suma kątów wewnętrznych przy jednym ramieniu jest równa 180°. Zatem

$$2\alpha + 2\beta = 180^\circ \quad /:2$$
$$\alpha + \beta = 90^\circ,$$ stąd

$|\sphericalangle CFB| = 180^\circ - (\alpha + \beta) = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$, zatem

$\gamma = 180^\circ - |\sphericalangle CFB| = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$.

Suma przeciwległych kątów δ i β jest równa

$$\delta + \beta = \underbrace{360^\circ}_{\text{suma kątów wewnętrznych czworokąta}} - \gamma - 90^\circ = 360^\circ - 90^\circ - 90^\circ = 180^\circ$$

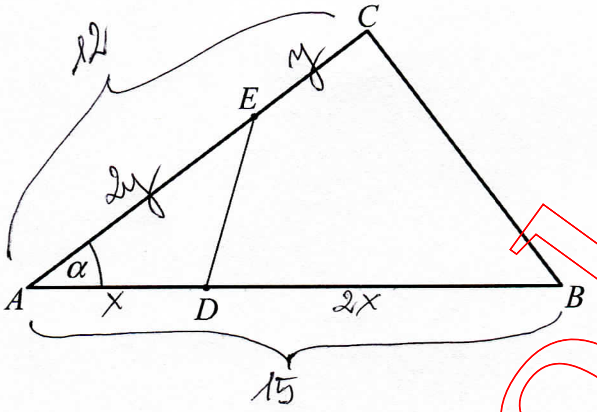
Zatem

$|\sphericalangle DEF| + |\sphericalangle FCD| = |\sphericalangle CDE| + |\sphericalangle CFE| = 180^\circ$, co kończy dowód ■

MMA_1P

Zadanie 30. (0–4)

W trójkącie ABC dane są długości boków $|AB| = 15$ i $|AC| = 12$ oraz $\cos\alpha = \frac{4}{5}$, gdzie $\alpha = \sphericalangle BAC$. Na bokach AB i AC tego trójkąta obrano punkty odpowiednio D i E takie, że $|BD| = 2|AD|$ i $|AE| = 2|CE|$ (zobacz rysunek).



Oblicz pole

a) trójkąta ADE.

b) czworokąta $BCED$.

$2y + y = 12$

$3y = 12 \quad | :3$

$y = 4 \Rightarrow 2y = 8$

$|AE| = 8$

$|EC| = 4$

$x + 2x = 15$

$3x = 15 \quad | :3$

$x = 5 \Rightarrow 2x = 10$

$|AD| = 5$

$|DB| = 10$

$\cos\alpha = \frac{4}{5}$

$\sin\alpha = ?$

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

$\sin^2\alpha + \left(\frac{4}{5}\right)^2 = 1$

$\sin^2\alpha + \frac{16}{25} = 1$

$\sin^2\alpha = 1 - \frac{16}{25}$

$\sin^2\alpha = \frac{25}{25} - \frac{16}{25}$

$\sin^2\alpha = \frac{9}{25} \quad | \sqrt{}$

$\sin\alpha = \frac{3}{5} \quad \vee \quad \sin\alpha = -\frac{3}{5}$

sprzeczne

$P_{ADE} = \frac{1}{2} \cdot |AD| \cdot |AE| \cdot \sin\alpha$

$P_{ADE} = \frac{1}{\cancel{2}_1} \cdot \cancel{5}^1 \cdot \cancel{8}^4 \cdot \frac{3}{\cancel{5}_1} = 12$

a) $P_{ADE} = 12 j^2$

$P_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot |AC| \cdot \sin\alpha$

$P_{ABC} = \frac{1}{\cancel{2}_1} \cdot \cancel{15}^3 \cdot \cancel{12}^6 \cdot \frac{3}{\cancel{5}_1} = 54$

$P_{BCED} = P_{ABC} - P_{ADE}$

$P_{BCED} = 54 - 12 = 42$

b) $P_{BCED} = 42 j^2$

Odpowiedź: $P_{ADE} = 12 j^2$; $P_{BCED} = 42 j^2$

Zadanie 31. (0–5)

Dany jest ciąg arytmetyczny (a_n) określony dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$, w którym $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 2016$ oraz $a_5 + a_6 + a_7 + \ldots + a_{12} = 2016$. Oblicz pierwszy wyraz, różnicę oraz najmniejszy dodatni wyraz ciągu (a_n).

$$\underbrace{a_1+a_2+a_3+a_4}_{2016}+\underbrace{a_5+a_6+a_7+a_8+a_9+a_{10}+a_{11}+a_{12}}_{2016}=4032$$

$$\begin{cases} S_4 = 2016 \\ S_{12} = 4032 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{a_1+a_4}{2}\cdot 4 = 2016 \\ \frac{a_1+a_{12}}{2}\cdot 12 = 4032 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{a_1+a_1+3r}{\cancel{2}_1}\cdot \cancel{4}^2 = 2016 \\ \frac{a_1+a_1+11r}{\cancel{2}_1}\cdot \cancel{12}^6 = 4032 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (2a_1+3r)2 = 2016 \,/ :2 \\ (2a_1+11r)\cdot 6 = 4032 \,/ :6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2a_1+3r = 1008 \,/\cdot(-1) \\ 2a_1+11r = 672 \end{cases}$$

$$+\begin{cases} \cancel{-2a_1} - 3r = -1008 \\ \cancel{2a_1} + 11r = 672 \end{cases}$$

$$-3r+11r = -1008+672$$

$$8r = -336 \,/ :8$$

$$r = -42$$

$$2a_1 + 3r = 1008$$

$$2a_1 + 3\cdot(-42) = 1008$$

$$2a_1 - 126 = 1008$$

$$2a_1 = 1008 + 126$$

$$2a_1 = 1134 \,/ :2$$

$$a_1 = 567$$

$$a_n = a_1 + (n-1)r$$

$$a_n = 567 + (n-1)\cdot(-42)$$

$$a_n > 0$$

$$567 + (n-1)\cdot(-42) > 0$$

$$567 - 42n + 42 > 0$$

$$-42n > -42 - 567$$

$$-42n > -609 \,/ :(-42)$$

$$n < 14{,}5$$

$n < 14{,}5$ oraz $n \in \mathbb{N}$, stąd $n = 14$

$$a_{14} = 567 + (14-1)\cdot(-42)$$

$$a_{14} = 567 + 13\cdot(-42)$$

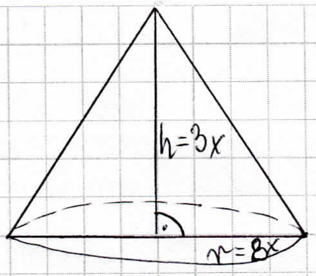
$$a_{14} = 567 - 546$$

$$a_{14} = 21$$

Odpowiedź: $r = -42$; $a_1 = 567$; $a_{14} = 21$

Zadanie 32. (0–4)

Dany jest stożek o objętości 8π, w którym stosunek wysokości do promienia podstawy jest równy $3:8$. Oblicz pole powierzchni bocznej tego stożka.



$V = 8\pi$

$\frac{1}{3}\pi r^2 \cdot h = 8\pi$

$V = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot h$

$r = 8x$
$h = 3x$

$\frac{1}{3}\pi r^2 \cdot h = 8\pi \quad / : \pi$

$\frac{1}{3} r^2 \cdot h = 8 \quad / \cdot 3$

$r^2 \cdot h = 24$

$(8x)^2 \cdot 3x = 24$

$64x^2 \cdot 3x = 24$

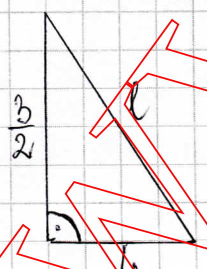
$192x^3 = 24 \quad / : 192$

$x^3 = \frac{1}{8} \quad / \sqrt[3]{\ }$

$x = \frac{1}{2}$

$r = 8 \cdot \frac{1}{2} = 4$

$h = 3 \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$



$4^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 = l^2$

$16 + \frac{9}{4} = l^2$

$\frac{64}{4} + \frac{9}{4} = l^2$

$l^2 = \frac{73}{4} \quad / \sqrt{\ }$

$l = \frac{\sqrt{73}}{2}$

$P_b = \pi r l$

$P_b = \pi \cdot \cancel{4}^{2} \cdot \frac{\sqrt{73}}{\cancel{2}_1}$

$P_b = 2\sqrt{73}\pi \; j^2$

Odpowiedź: $P_b = 2\sqrt{73}\pi \; j^2$

Zadanie 33. (0–4)

Rejsowy samolot z Warszawy do Rzymu przelatuje nad Austrią każdorazowo tą samą trasą z taką samą zakładaną prędkością przelotową. We wtorek jego średnia prędkość była o 10% większa niż prędkość przelotowa, a w czwartek średnia prędkość była o 10% mniejsza od zakładanej prędkości przelotowej. Czas przelotu nad Austrią w czwartek różnił się od wtorkowego o 12 minut. Jak długo trwał przelot tego samolotu nad Austrią we wtorek?

$v \rightarrow$ prędkość przelotowa

$110\% v = 1{,}1v \rightarrow$ prędkość we wtorek

$90\% v = 0{,}9v \rightarrow$ prędkość w czwartek

$s \rightarrow$ długość trasy

$t \rightarrow$ czas przelotu we wtorek

$t+12 \rightarrow$ czas przelotu w czwartek

WTOREK CZWARTEK

$1{,}1v \cdot t = s$ oraz $0{,}9v(t+12) = s$

$$1{,}1\cancel{v} \cdot t = 0{,}9\cancel{v}(t+12)$$

$$1{,}1t = 0{,}9(t+12) \quad /\cdot 10$$

$$11t = 9(t+12)$$

$$11t = 9t + 108$$

$$11t - 9t = 108$$

$$2t = 108 \quad /:2$$

$$t = 54 \text{ min}$$

Odpowiedź: 54 minuty

BRUDNOPIS *(nie podlega ocenie)*