KOMPENDIUM WIEDZY

I. LICZBY I ICH ZBIORY

1. **Zdania logiczne.**

   a) **Zdaniem** w sensie logicznym nazywamy wyrażenie oznajmujące, któremu można przypisać jedną z dwóch wartości logicznych: prawdę (wartość logiczna 1) lub fałsz (wartość logiczna 0).

   b) **Spójniki logiczne; zdania złożone**:

Spójnik	Symbol logiczny	Nazwa zdania złożonego
i	$\wedge$	$p \wedge q$ – koniunkcja zdań
lub	$\vee$	$p \vee q$ – alternatywa zdań
nieprawda, że	$\neg$	$\neg p$ – negacja zdania
jeśli ....., to	$\Rightarrow$	$p \Rightarrow q$ – implikacja zdań
wtedy i tylko wtedy, gdy	$\Leftrightarrow$	$p \Leftrightarrow q$ – równoważność zdań

   c) **Tabele wartości logicznych zdań.**

p	$\neg p$
1	0
0	1

p	q	$p \wedge q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

p	q	$p \vee q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

p	q	$p \Rightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

p	q	$p \Leftrightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

2. **Prawa logiczne.**

   a) Prawem logicznym (prawem rachunku zdań) nazywamy zdanie złożone, które jest zawsze prawdziwe, niezależnie od wartości logicznych zdań je tworzących.

   b) **Niektóre prawa logiczne**:

•	prawo podwójnego przeczenia		$\neg(\neg p) \Leftrightarrow p$
•	prawa de Morgana	prawo zaprzeczenia koniunkcji	$\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow (\neg p) \vee (\neg q)$
•		prawo zaprzeczenia alternatywy	$\neg(p \vee q) \Leftrightarrow (\neg p) \wedge (\neg q)$
•	prawo zaprzeczenia implikacji		$\neg(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow p \wedge (\neg q)$

3. **Formą zdaniową** zmiennej x, określoną w dziedzinie D, nazywamy wyrażenie zawierające zmienną x, które staje się zdaniem logicznym, gdy w miejsce zmiennej x podstawimy dowolny element zbioru D.
   Powiemy, że element dziedziny spełnia formę zdaniową, jeżeli po podstawieniu go do tej formy w miejsce zmiennej otrzymamy zdanie prawdziwe.

4. **Kwantyfikatory.**

   a) Wyrażenie „dla każdego x .....” nazywamy **kwantyfikatorem dużym** lub ogólnym i zapisujemy: $\bigwedge_{x}$

b) Zwrot „istnieje takie x, że .....” nazywamy **kwantyfikatorem małym** lub szczegółowym i zapisujemy: $\bigvee\limits_x$

c) **Prawa de Morgana dla kwantyfikatorów**:
- $(\neg \bigwedge\limits_x p(x)) \Leftrightarrow \bigvee\limits_x (\neg p(x))$
- $(\neg \bigvee\limits_x p(x)) \Leftrightarrow \bigwedge\limits_x (\neg p(x))$

5. **Działania na zbiorach.**

a) **Sumą** zbiorów A i B nazywamy zbiór tych elementów, które należą do zbioru A lub należą do zbioru B. Sumę tę oznaczamy $A \cup B$.
$(x \in A \cup B) \Leftrightarrow (x \in A \vee x \in B)$.

b) **Różnicą** zbiorów A oraz B nazywamy zbiór tych elementów, które należą do zbioru A i nie należą do zbioru B. Różnicę tę oznaczamy $A - B$.
$(x \in A - B) \Leftrightarrow (x \in A \wedge x \notin B)$.

c) **Iloczynem** (częścią wspólną) zbiorów A oraz B nazywamy zbiór tych elementów, które należą jednocześnie do zbioru A i do zbioru B. Iloczyn ten oznaczamy $A \cap B$.
$(x \in A \cap B) \Leftrightarrow (x \in A \wedge x \in B)$.

d) Niech A będzie dowolnym zbiorem w przestrzeni U. **Dopełnieniem zbioru A** do przestrzeni U nazywamy zbiór $A' = U - A$.
$(x \in A') \Leftrightarrow (x \in U \wedge x \notin A)$.

6. **Relacje między zbiorami.**

a) Zbiory A i B nazywamy **równymi** i oznaczamy $A = B$ wtedy i tylko wtedy, gdy każdy element zbioru A jest elementem zbioru B i każdy element zbioru B jest elementem zbioru A.
$A = B \Leftrightarrow \bigwedge\limits_x (x \in A \Leftrightarrow x \in B)$.

b) Zbiór **A zawiera się w zbiorze B** (A jest podzbiorem zbioru B), jeżeli każdy element zbioru A jest elementem zbioru B.
Fakt, że A jest podzbiorem zbioru B oznaczamy $A \subset B$.
$A \subset B \Leftrightarrow \bigwedge\limits_x (x \in A \Rightarrow x \in B)$.

c) Zbiory A i B nazywamy **rozłącznymi** wtedy i tylko wtedy, gdy $A \cap B = \varnothing$

7. **Zbiór liczb naturalnych N.**
$N = \{0, 1, 2, 3, 4, ...\}$
$N_+ = \{1, 2, 3, 4, ...\}$ – zbiór liczb naturalnych dodatnich.

a) **Liczbą pierwszą** nazywamy każdą liczbę naturalną n większą od 1, której jedynymi dzielnikami są 1 oraz n.

b) **Liczbą złożoną** nazywamy każdą liczbę naturalną n większą od 1, która nie jest liczbą pierwszą.

0, 1, **2**, **3**, 4, **5**, 6, **7**, 8, 9, 10, **11**, ...

liczby pierwsze　　　liczby złożone

Niech dane będą dwie dowolne liczby a, $b \in N$, z których co najmniej jedna jest różna od zera. Wówczas:

c) **Największym wspólnym dzielnikiem liczba a, b** – w skrócie NWD(a, b) – nazywamy największą z liczb naturalnych, przez którą dzieli się bez reszty każda z liczb a i b.

d) **Najmniejszą wspólną wielokrotnością liczb *a* i *b*** (przy czym $a \neq 0$ i $b \neq 0$) nazywamy **najmniejszą** liczbę naturalną różną od 0, która dzieli się bez reszty przez a i przez b; oznaczamy ją $NWW(a, b)$.

e) Liczby naturalne ***a*, *b* nazywamy względnie pierwszymi** wtedy i tylko wtedy, gdy $NWD(a, b) = 1$.

8. **Zbiór liczb całkowitych *C*.**

$C = \{......, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, ...\}$

$C_+ = \{1, 2, 3, 4, ...\}$

$C_- = \{......, -4, -3, -2, -1\}$

$C = C_- \cup \{0\} \cup C_+$

a) Liczba całkowita a jest **podzielna** przez liczbę całkowitą $b \neq 0$ (b jest dzielnikiem liczby a) **wtedy i tylko wtedy**, gdy istnieje taka liczba $k \in C$, że $a = k \cdot b$.

$b \mid a \Leftrightarrow \bigvee_{k \in C} a = k \cdot b.$

b) **Cechy podzielności liczb całkowitych**:

Dowolna liczba całkowita jest :

podzielna przez 2 $\Leftrightarrow$ cyfrą jedności jest 0, 2, 4, 6 lub 8;

podzielna przez 3 $\Leftrightarrow$ suma jej cyfr jest podzielna przez 3;

podzielna przez 4 $\Leftrightarrow$ liczba utworzona z ostatnich dwóch cyfr danej liczby (w kolejności takiej jak w danej liczbie) jest podzielna przez 4;

podzielna przez 5 $\Leftrightarrow$ cyfrą jej jedności jest 0 lub 5;

podzielna przez 6 $\Leftrightarrow$ jest podzielna przez 2 i przez 3;

podzielna przez 8 $\Leftrightarrow$ liczba utworzona z trzech ostatnich cyfr danej liczby (w kolejności takiej jak w danej liczbie) jest podzielna przez 8;

podzielna przez 9 $\Leftrightarrow$ suma jej cyfr jest podzielna przez 9.

c) Liczbę całkowitą a nazywamy **parzystą** wtedy i tylko wtedy, gdy jest podzielna przez 2; w przeciwnym przypadku mówimy, że a jest liczbą **nieparzystą**.

d) Liczba całkowita a przy dzieleniu przez liczbę całkowitą $b \neq 0$ daje resztę r ($r \in N$) wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje taka liczba $k \in C$, że $a = k \cdot b + r$, gdzie $0 \leq r < |b|$.

9. **Zbiór liczb wymiernych *W*.**

Liczbę w nazywamy **wymierną**, jeśli można ją przedstawić w postaci ułamka $\frac{p}{q}$, gdzie $p \in C, q \in C$ i $q \neq 0$.

$$W = \left\{x\colon x = \frac{p}{q} \wedge p \in C \wedge q \in C - \{0\}\right\}$$

Każdą liczbę wymierną można przedstawić w postaci ułamka dziesiętnego skończonego lub rozwinięcia dziesiętnego nieskończonego okresowego.

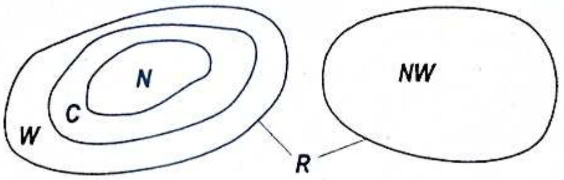
10. **Zbiór liczb niewymiernych *NW*.**

Liczbę nazywamy **niewymierną**, jeśli nie jest wymierna.

Rozwinięcie dziesiętne liczby niewymiernej jest nieskończone i nieokresowe.

11. **Zbiór liczb rzeczywistych *R*.**

Liczbą rzeczywistą jest każda liczba wymierna lub niewymierna.



$W \cup NW = R$

$W \cap NW = \varnothing$

$N \subset C \subset W$

$W \subset R, NW \subset R.$

12. **Własności dodawania i mnożenia w zbiorze liczb rzeczywistych.**

a) Liczba 0 to element neutralny dodawania

$\bigwedge_{a\in R} a+0=a.$

b) $\bigwedge_{a,b\in R} a+b=b+a$ – prawo przemienności dodawania.

c) $\bigwedge_{a,b,c\in R} (a+b)+c=a+(b+c)$ – prawo łączności dodawania.

d) Liczba 1 to element neutralny mnożenia

$\bigwedge_{a\in R} a\cdot 1=a.$

e) $\bigwedge_{a,b\in R} a\cdot b=b\cdot a$ – prawo przemienności mnożenia.

f) $\bigwedge_{a,b,c\in R} (a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)$ – prawo łączności mnożenia.

g) Iloczyn liczb a oraz b ma następujące własności:

$a\cdot b=0 \Leftrightarrow a=0 \vee b=0$

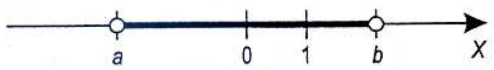
$a\cdot b<0 \Leftrightarrow (a<0 \wedge b>0) \vee (a>0 \wedge b<0)$

$a\cdot b>0 \Leftrightarrow (a<0 \wedge b<0) \vee (a>0 \wedge b>0)$

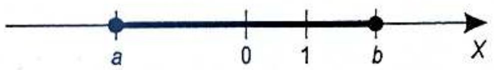
h) $\bigwedge_{a,b,c\in R} (a+b)\cdot c=ac+bc$ – prawo rozdzielności mnożenia względem dodawania.

13. **Przedziały liczbowe ($a, b \in R$ i $a<b$).**

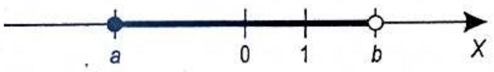
a) $(a, b)=\{x\colon x\in R \wedge a<x<b\}$



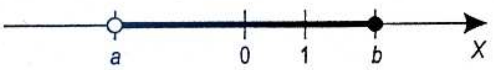
b) $\langle a, b\rangle=\{x\colon x\in R \wedge a\le x\le b\}$



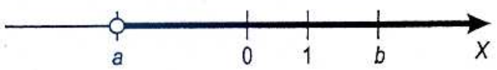
c) $\langle a, b)=\{x\colon x\in R \wedge a\le x<b\}$



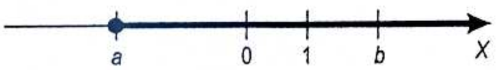
d) $(a, b\rangle=\{x\colon x\in R \wedge a<x\le b\}$



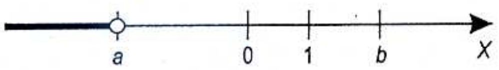
e) $(a, +\infty)=\{x\colon x\in R \wedge x>a\}$



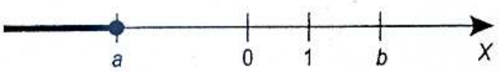
f) $\langle a, +\infty)=\{x\colon x\in R \wedge x\ge a\}$



g) $(-\infty, a)=\{x\colon x\in R \wedge x<a\}$



h) $(-\infty, a\rangle=\{x\colon x\in R \wedge x\le a\}$



14. **Wartość bezwzględna liczby rzeczywistej.**

a) **Wartością bezwzględną liczby rzeczywistej** a nazywamy liczbę a, jeśli a jest liczbą nieujemną lub liczbę $-a$ (przeciwną do a), jeśli a jest liczbą ujemną.

$$|a| = \begin{cases} a, \text{ gdy } a \geq 0 \\ -a, \text{ gdy } a < 0 \end{cases}$$

b) **Własności wartości bezwzględnej.**

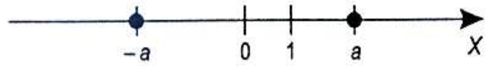
Dla dowolnych x, y∈R:

- $|x| \geq 0$
- $|x| = |-x|$
- $-|x| \leq x \leq |x|$
- $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$
- $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$, o ile $y \neq 0$
- $|x + y| \leq |x| + |y|$
- $\big||x| - |y|\big| \leq |x + y|$
- $\sqrt{x^2} = |x|$

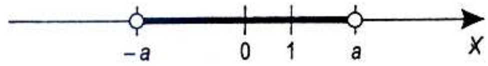
c) **Interpretacja geometryczna wartości bezwzględnej.**

Jeśli $a > 0$ i $p \in \boldsymbol{R} - \{0\}$ to:

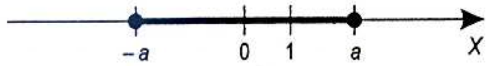
- $|x| = a \Leftrightarrow x = a \vee x = -a$



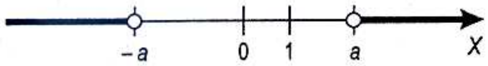
- $|x| < a \Leftrightarrow -a < x < a$



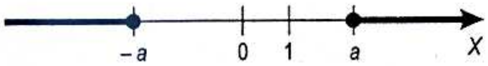
- $|x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$



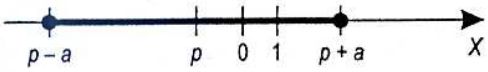
- $|x| > a \Leftrightarrow x < -a \vee x > a$



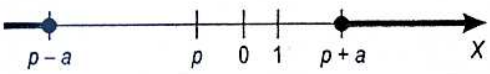
- $|x| \geq a \Leftrightarrow x \leq -a \vee x \geq a$



- $|x - p| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x - p \leq a \Leftrightarrow p - a \leq x \leq p + a$



- $|x - p| \geq a \Leftrightarrow x - p \leq -a \vee x - p \geq a \Leftrightarrow x \leq p - a \vee x \geq p + a$



15. **Potęga o wykładniku wymiernym.**

a) **Potęgą o** podstawie a, gdzie a jest dowolną liczbą rzeczywistą i **wykładniku naturalnym** $n \in N_+$, nazywamy liczbę:

$$\begin{cases} a^1 = a \\ a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots\ldots \cdot a}_{n-\text{czynników}}, \text{ dla } n > 1 \end{cases}$$

Ponadto, $a^0=1$, o ile $a \neq 0$.
Symbol 0^0 nie ma sensu liczbowego.

b) **Potęgą o** podstawie a różnej od zera ($a \in R - \{0\}$) i **wykładniku całkowitym ujemnym** ($-n$) ($n \in N_+$) nazywamy odwrotność potęgi a^n, czyli liczbę $\frac{1}{a^n}$.

$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$, gdzie $a \in R - \{0\}$, $n \in N_+$

c) **Potęgę o** nieujemnej podstawie a ($a \geq 0$) i **wykładniku** $\frac{1}{n}$, gdzie $n \in N - \{0, 1\}$, określamy następująco:

$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$

d) **Potęgę o wykładniku wymiernym** określamy następująco:

- $a^{\frac{m}{n}} = (\sqrt[n]{a})^m$, jeśli $a \geq 0$, $n \in N - \{0, 1\}$, $m \in N_+$
- $a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}}$, jeśli $a > 0$, $n \in N - \{0, 1\}$, $m \in N_+$

e) **Prawa działań na potęgach.**
Dla dowolnych liczb wymiernych x, y oraz dla dowolnych liczb rzeczywistych dodatnich a i b zachodzą równości:

- $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$
- $a^x : a^y = a^{x-y}$
- $(a^x)^y = a^{xy}$
- $(a \cdot b)^x = a^x \cdot b^x$
- $\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$

16. **Pierwiastkowanie i działania na pierwiastkach.**

a) **Pierwiastkiem arytmetycznym** n**-tego stopnia**, $n \in N - \{0, 1\}$, z nieujemnej liczby a nazywamy taką nieujemną liczbę b, że $b^n = a$.
Jeśli $a \geq 0$, to $\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow (b^n = a \wedge b \geq 0)$.

b) **Prawa działań na pierwiastkach.**
Jeśli $n, m \in N - \{0, 1\}$, $p \in N_+$ i $a, b \in R_+ \cup \{0\}$, to:

- $\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$
- $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$, $b > 0$
- $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$
- $(\sqrt[n]{a})^p = \sqrt[n]{a^p}$; w szczególności $(\sqrt[n]{a})^n = a$

17. **Wzory skróconego mnożenia.**

a)	kwadrat sumy	$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
b)	kwadrat różnicy	$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
c)	różnica kwadratów	$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$
d)	sześcian sumy	$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
e)	sześcian różnicy	$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$
f)	suma sześcianów	$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$
g)	różnica sześcianów	$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$

18. **Pojęcie procentu.**

1 procent (1%) danej wielkości, to setna część tej wielkości, czyli:

1% liczby a to $\frac{1}{100} \cdot a$

p% liczby a to $\frac{p}{100} \cdot a$.

19. **Średnie.**

a) Liczbę $S_a = \frac{a_1 + a_2 + \ldots\ldots + a_n}{n}$ nazywamy **średnią arytmetyczną** dowolnych liczb rzeczywistych $a_1, a_2, \ldots\ldots, a_n$.

W szczególności:

dla dwóch liczb a, b	dla trzech liczb a, b, c
$S_a = \frac{a+b}{2}$	$S_a = \frac{a+b+c}{3}$

b) Liczbę $S_g = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots\ldots \cdot a_n}$ nazywamy **średnią geometryczną** liczb rzeczywistych nieujemnych $a_1, a_2, \ldots\ldots, a_n$.

W szczególności:

dla dwóch liczb a, b ($a \geq 0, b \geq 0$)	dla trzech liczb a, b, c ($a \geq 0, b \geq 0, c \geq 0$)
$S_g = \sqrt{ab}$	$S_g = \sqrt[3]{a \cdot b \cdot c}$

c) Liczbę S_h taką, że $\frac{n}{S_h} = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots\ldots + \frac{1}{a_n}$ nazywamy **średnią harmoniczną** liczb rzeczywistych dodatnich $a_1, a_2, \ldots\ldots, a_n$.

W szczególności:

dla dwóch liczb a, b ($a > 0, b > 0$)	dla trzech liczb a, b, c ($a > 0, b > 0, c > 0$)
$\frac{2}{S_h} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$	$\frac{3}{S_h} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$

20. **Dowodzenie twierdzeń.**

a) **Dowód wprost** polega na tym, że przyjmujemy za prawdziwe wszystkie założenia (podane w poprzedniku implikacji) i – wykorzystując wcześniej udowodnione twierdzenia – prowadzimy wnioskowanie (zgodnie z prawami logicznymi) tak długo, aż stwierdzimy, że teza twierdzenia (następnik implikacji) jest prawdziwa.

b) **Dowód nie wprost** polega na tym, że przyjmuje się przypuszczenie o fałszywości tezy dowodzonego twierdzenia i pokazuje się, że to przypuszczenie prowadzi do sprzeczności (z założeniami twierdzenia lub wcześniej udowodnionymi twierdzeniami). Uzyskana sprzeczność oznacza, że twierdzenie przez nas dowodzone jest prawdziwe.

c) **Zasada indukcji matematycznej.**

Niech $T(n)$ oznacza twierdzenie dotyczące liczb naturalnych, natomiast n_0 – będzie pewną liczbą naturalną.

Jeżeli:

1) $T(n_0)$ jest prawdziwe

2) $\bigwedge_{\substack{k \in N \\ k \geq n_0}} \left(T(k) \underbrace{\text{ jest prawdziwe}}_{\text{założenie indukcyjne}} \Rightarrow T(k+1) \underbrace{\text{ jest prawdziwe}}_{\text{teza indukcyjna}} \right)$

to $\bigwedge_{\substack{n \in N \\ n \geq n_0}} T(n)$ jest prawdziwe.

II. FUNKCJE I ICH WŁASNOŚCI

1. **Funkcją f ze zbioru X w zbiór Y** (zbiory X i Y są niepuste) nazywamy takie odwzorowanie, **w którym** każdemu elementowi ze zbioru X został przyporządkowany tylko jeden element ze **zbioru** Y.
Funkcję tę oznaczamy $f: X \to Y$.
Zbiór X nazywamy **dziedziną funkcji**. Dziedzinę funkcji f oznaczamy też D_f. Elementy **zbioru** X nazywamy argumentami funkcji. Zbiór Y nazywamy **przeciwdziedziną funkcji**. Przeciwdziedzinę oznaczamy też D_f^{-1}. Zbiór tych elementów ze zbioru Y, które zostały przypisane elementom **ze zbioru** X, nazywamy **zbiorem wartości funkcji**. Zbiór wartości funkcji oznaczamy symbolem ZW_f.

2. Jeśli zbiory X i Y są niepustymi podzbiorami zbioru liczb rzeczywistych ($X \subset R$, $Y \subset R$), to funkcję $f: X \to Y$ nazywamy **funkcją liczbową** zmiennej rzeczywistej.

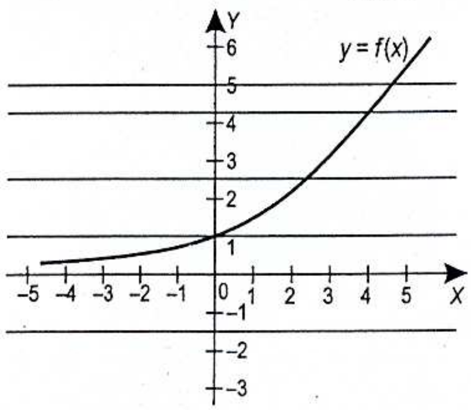
3. **Wykresem funkcji** liczbowej $f: X \to Y$ nazywamy zbiór tych wszystkich punktów płaszczyzny o współrzędnych (x, y), w prostokątnym układzie współrzędnych, gdzie x jest argumentem funkcji, y zaś wartością funkcji dla argumentu x.

4. **Sposoby opisywania funkcji:**
   a) przepis słowny
   b) tabelka
   c) graf
   d) zbiór par uporządkowanych, gdzie poprzednik oznacza argument funkcji, a następnik wartość funkcji dla tego argumentu
   e) wzór
   f) wykres.

5. **Miejscem zerowym** funkcji nazywamy taki argument, dla którego wartość funkcji wynosi 0.

6. Funkcja **f jest równa funkcji g** $\Leftrightarrow D_f = Dg = D \wedge \bigwedge_{x \in D} f(x) = g(x)$.

7. Funkcja liczbowa $f: X \to Y$ jest **różnowartościowa** $\Leftrightarrow \bigwedge_{x_1, x_2 \in X} [x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)]$
lub inaczej
Funkcja liczbowa $f: X \to Y$ jest **różnowartościowa** $\Leftrightarrow \bigwedge_{x_1, x_2 \in X} [f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2]$.



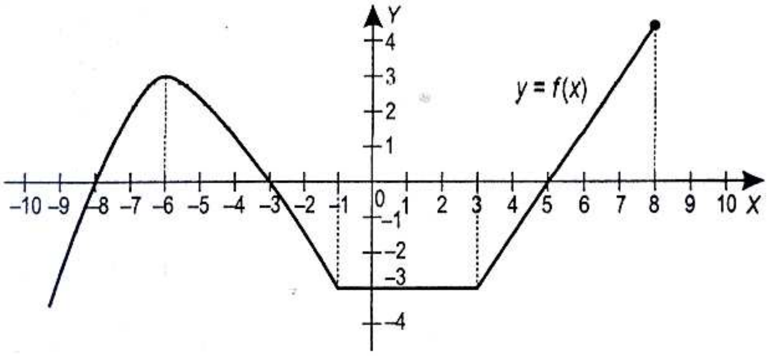
Nie istnieje prosta równoległa do osi OX, która przecięłaby wykres funkcji f więcej niż w jednym punkcie. Każda prosta ma z wykresem funkcji co najwyżej jeden punkt wspólny. Funkcja f jest różnowartościowa.

8. **Funkcje rosnące, malejące, stałe.**

a) Funkcję liczbową $f: X \to Y$ nazywamy **rosnącą** w zbiorze $A \subset X \Leftrightarrow$
$\bigwedge_{x_1, x_2 \in A} [x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)]$.

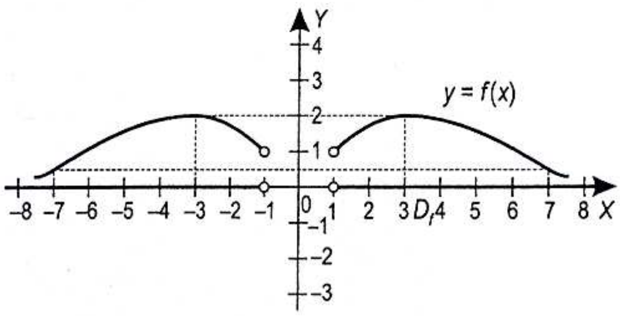
b) Funkcję liczbową $f: X \to Y$ nazywamy **malejącą** w zbiorze $A \subset X \Leftrightarrow$
$\bigwedge_{x_1, x_2 \in A} [x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)]$.

c) Funkcję liczbową $f: X \to Y$ nazywamy **stałą** w zbiorze $A \subset X \Leftrightarrow \bigwedge_{x_1, x_2 \in A} f(x_1) = f(x_2)$.

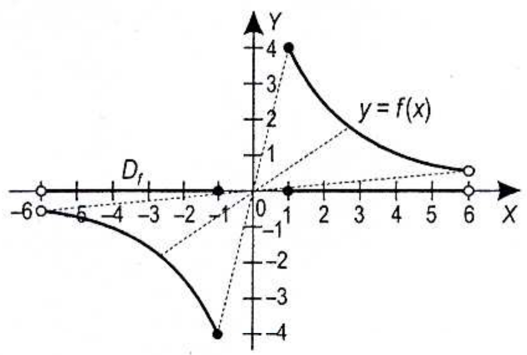


- funkcja $y = f(x)$ jest rosnąca w każdym z przedziałów: $(-\infty, -6\rangle$, $\langle 3, 8\rangle$
- funkcja $y = f(x)$ jest stała w przedziale $\langle -1, 3\rangle$
- funkcja $y = f(x)$ jest malejąca w przedziale $\langle -6, -1\rangle$

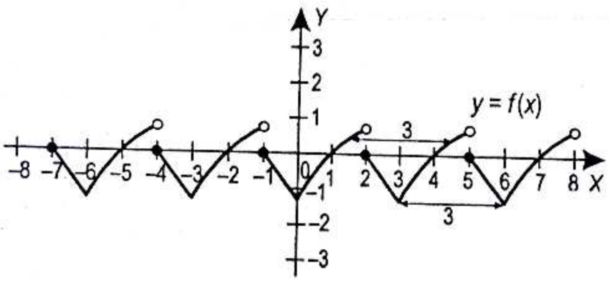
9. Funkcję liczbową $f: X \to Y$ nazywamy **parzystą** $\Leftrightarrow \bigwedge_{x \in D_f} [-x \in D_f \wedge f(x) = f(-x)]$.
Wykres funkcji parzystej jest symetryczny względem osi OY.



10. Funkcję liczbową $f: X \to Y$ nazywamy **nieparzystą** $\Leftrightarrow \bigwedge_{x \in D_f} [-x \in D_f \wedge f(x) = -f(-x)]$.
Wykres funkcji nieparzystej jest symetryczny względem punktu (0, 0).



11. Funkcję liczbową $f: X \to Y$ nazywamy **okresową** $\Leftrightarrow \bigvee_{T \neq 0} \bigwedge_{x \in D_f} [(x + T) \in D_f \wedge f(x + T) = f(x)]$.
Najmniejszy okres dodatni T_0 funkcji (o ile istnieje) nazywamy okresem podstawowym.



12. Funkcję liczbową f nazywamy **ograniczoną z dołu** wtedy i tylko wtedy, gdy jej zbiór wartości jest ograniczony z dołu, czyli istnieje taka liczba m, że dla każdego $x \in D_f$ jest spełniony warunek: $f(x) \geq m$.

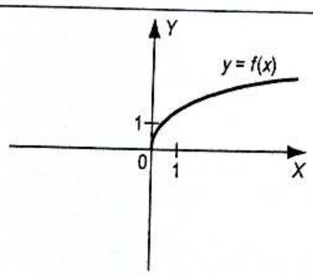
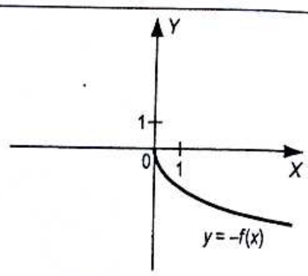
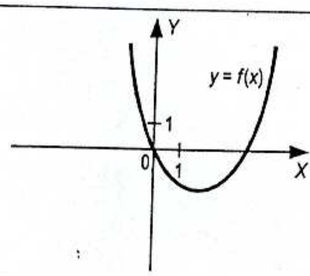
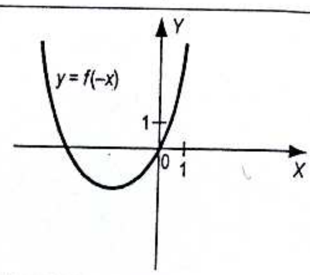
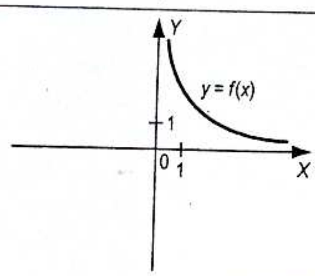
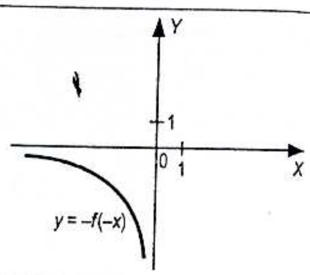
13. Funkcję liczbową f nazywamy **ograniczoną z góry** wtedy i tylko wtedy, gdy jej zbiór wartości jest ograniczony z góry, czyli istnieje taka liczba M, że dla każdego $x \in D_f$ jest spełniony warunek: $f(x) \leq M$.

14. Funkcję liczbową f nazywamy **ograniczoną** wtedy i tylko wtedy, gdy jej zbiór wartości jest ograniczony z góry i z dołu, czyli istnieją takie liczby m i M, że dla każdego $x \in D_f$ jest spełniony warunek: $m \leq f(x) \leq M$.

15. Funkcja liczbowa $f: X \to Y$ przyjmuje **największą** wartość $y_0 \in Y$ dla $x_0 \in X$ wtedy i tylko wtedy, gdy $f(x_0) = y_0$ oraz dla każdego $x \in X$ zachodzi nierówność $f(x) \leq f(x_0)$.

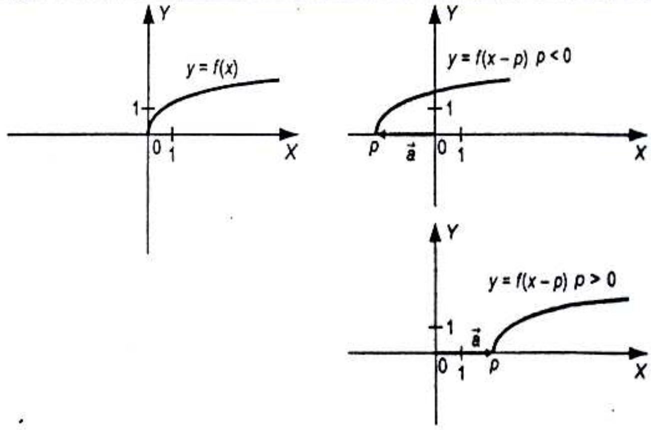
16. Funkcja liczbowa $f: X \to Y$ przyjmuje **najmniejszą** wartość $y_0 \in Y$ dla $x_0 \in X$ wtedy i tylko wtedy, gdy $f(x_0) = y_0$ oraz dla każdego $x \in X$ zachodzi nierówność $f(x) \geq f(x_0)$.

17. Przekształcenia wykresu funkcji.

a)	**Symetria względem osi OX.** Wykres funkcji $y = -f(x)$ powstaje w wyniku przekształcenia wykresu funkcji $y = f(x)$ przez symetrię względem osi OX.	 
b)	**Symetria względem osi OY.** Wykres funkcji $y = f(-x)$ powstaje w wyniku przekształcenia wykresu funkcji $y = f(x)$ przez symetrię względem osi OY.	 
c)	**Symetria względem punktu (0, 0).** Wykres funkcji $y = -f(-x)$ powstaje w wyniku przekształcenia wykresu funkcji $y = f(x)$ przez symetrię środkową względem początku układu współrzędnych.	 

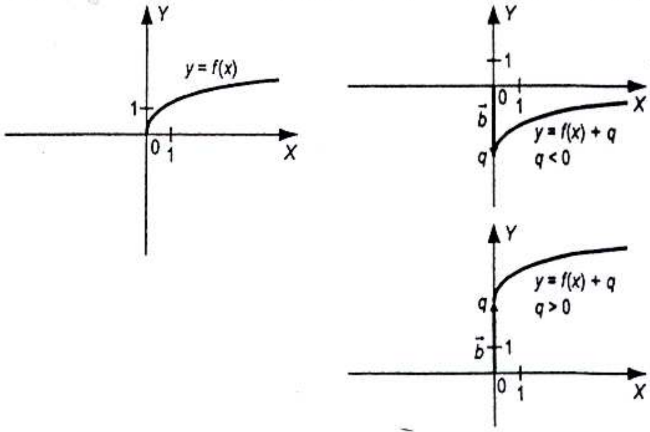
d) **Przesunięcie równoległe wzdłuż osi *OX*.**

Wykres funkcji $y = f(x - p)$ powstaje w wyniku przesunięcia równoległego wykresu funkcji $y = f(x)$ o wektor $\vec{a} = [p, 0]$.



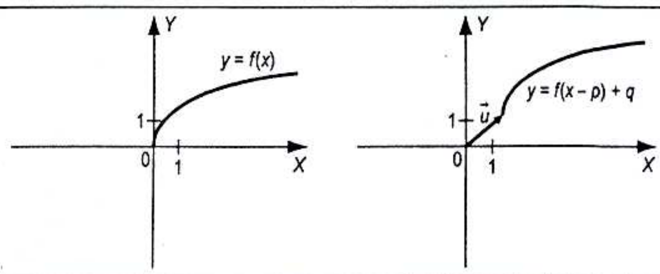
e) **Przesunięcie równoległe wzdłuż osi *OY*.**

Wykres funkcji $y = f(x) + q$ powstaje w wyniku przesunięcia równoległego wykresu funkcji $y = f(x)$ o wektor $\vec{b} = [0, q]$.



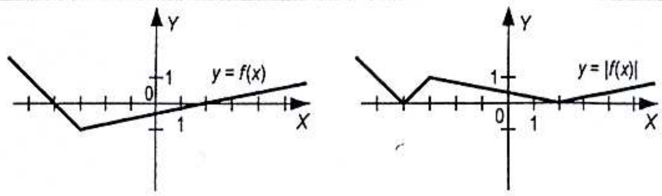
f) **Przesunięcie równoległe o wektor $\vec{u} = [p, q]$.**

Wykres funkcji $y = f(x - p) + q$ powstaje w wyniku przesunięcia równoległego wykresu funkcji $y = f(x)$ o wektor $\vec{u} = [p, q]$.



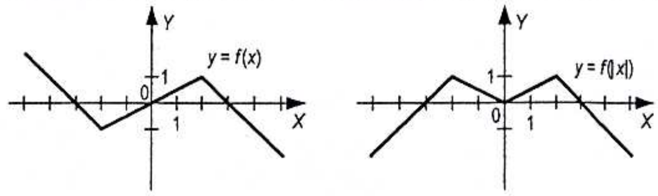
g) **Wykres funkcji $y = |f(x)|$.**

$$|f(x)| = \begin{cases} f(x) \text{ dla } f(x) \geq 0 \\ -f(x) \text{ dla } f(x) < 0 \end{cases}$$

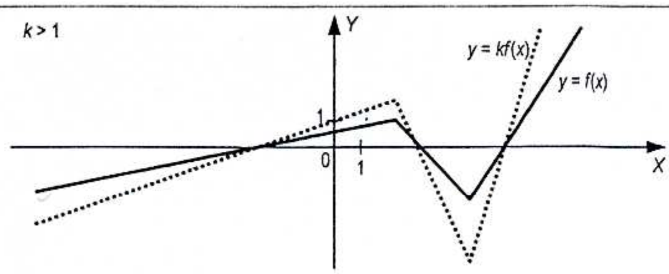


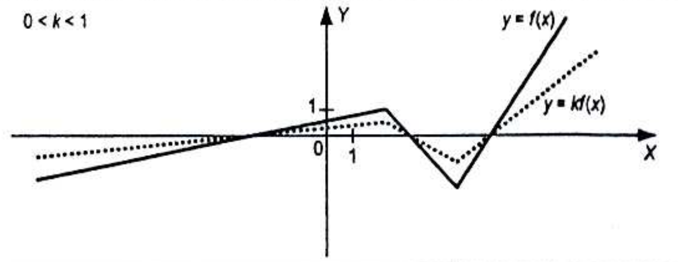
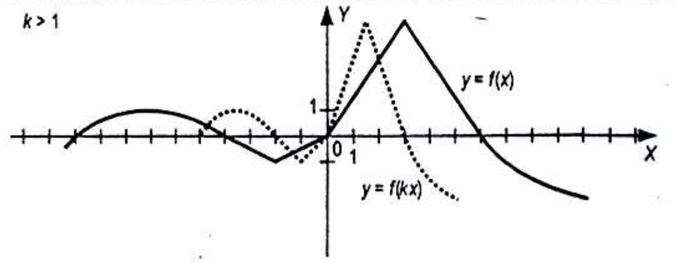
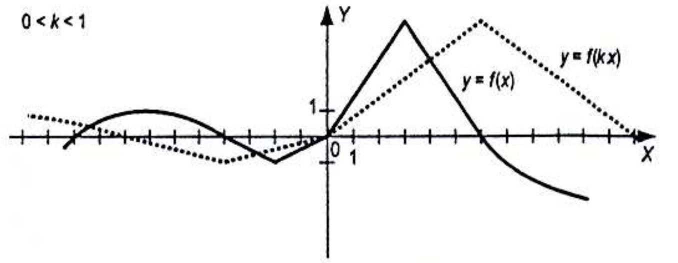
h) **Wykres funkcji $y = f(|x|)$.**

$$f(|x|) = \begin{cases} f(x) \text{ dla } x \geq 0 \\ f(-x) \text{ dla } x < 0 \end{cases}$$



i) **Wykres funkcji $y = k \cdot f(x)$, $k \neq 0$.**



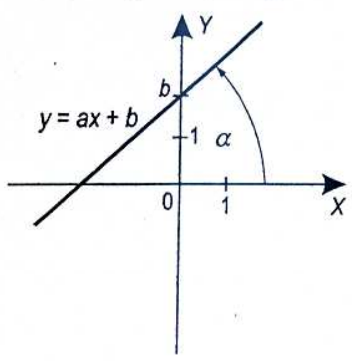
		
j)	**Wykres funkcji $y = f(kx)$, $k \neq 0$.**	 

III. WIELOMIANY I FUNKCJE WYMIERNE

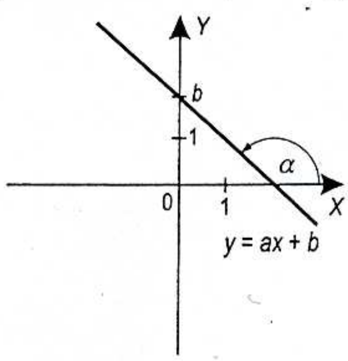
1. **Funkcja liniowa.**

   a) **Funkcją liniową** nazywamy funkcję $y = ax + b$, $x \in \boldsymbol{R}$; a i b są ustalonymi liczbami rzeczywistymi: a nazywamy współczynnikiem kierunkowym (kątowym), b – wyrazem wolnym.

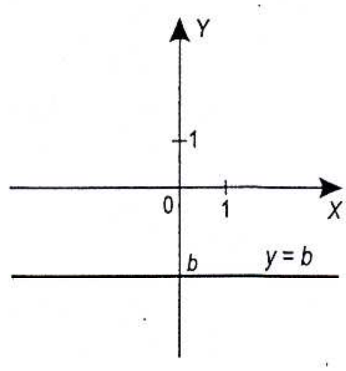
   b) **Wykresem funkcji $y = ax + b$**, gdzie $x \in \boldsymbol{R}$, jest linia prosta nachylona do osi OX pod takim kątem α, że tg $\alpha = a$. Prosta przecina oś OY w punkcie $(0, b)$.



$a > 0$ (funkcja rosnąca)

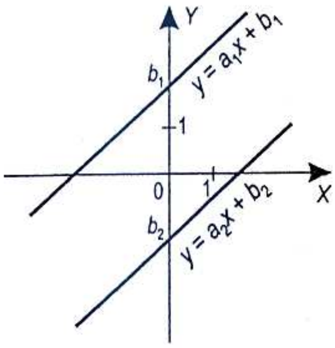


$a < 0$ (funkcja malejąca)



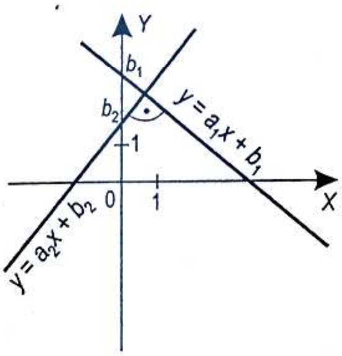
$a = 0$ (funkcja stała)

c)



Wykresy funkcji liniowych $y = a_1x + b_1$ oraz $y = a_2x + b_2$ są równoległe wtedy i tylko wtedy, gdy współczynniki kierunkowe tych funkcji są równe czyli $a_1 = a_2$.

d)



Wykresy funkcji liniowych $y = a_1x + b_1$ oraz $y = a_2x + b_2$, $a_1 \neq 0$, $a_2 \neq 0$ są prostopadłe wtedy i tylko wtedy, gdy współczynniki kierunkowe spełniają warunek $a_1 \cdot a_2 = -1$.

2. **Metoda wyznacznikowa rozwiązywania układów równań pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi.**

Układ równań pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \text{ gdzie } a_1^2 + b_1^2 > 0 \\ a_2x + b_2y = c_2, \text{ gdzie } a_2^2 + b_2^2 > 0 \end{cases}$$

– ma tylko jedno rozwiązanie (układ oznaczony) $\begin{cases} x = \dfrac{W_x}{W} \\ y = \dfrac{W_y}{W} \end{cases}$, jeśli $W \neq 0$

– ma nieskończenie wiele rozwiązań (układ nieoznaczony), jeśli $W = W_x = W_y = 0$

– nie ma rozwiązań (układ sprzeczny), jeśli $W = 0$ i przynajmniej jeden z wyznaczników W_x, W_y, jest różny od zera

gdzie:

$$W = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1$$

$$W_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} = c_1b_2 - c_2b_1$$

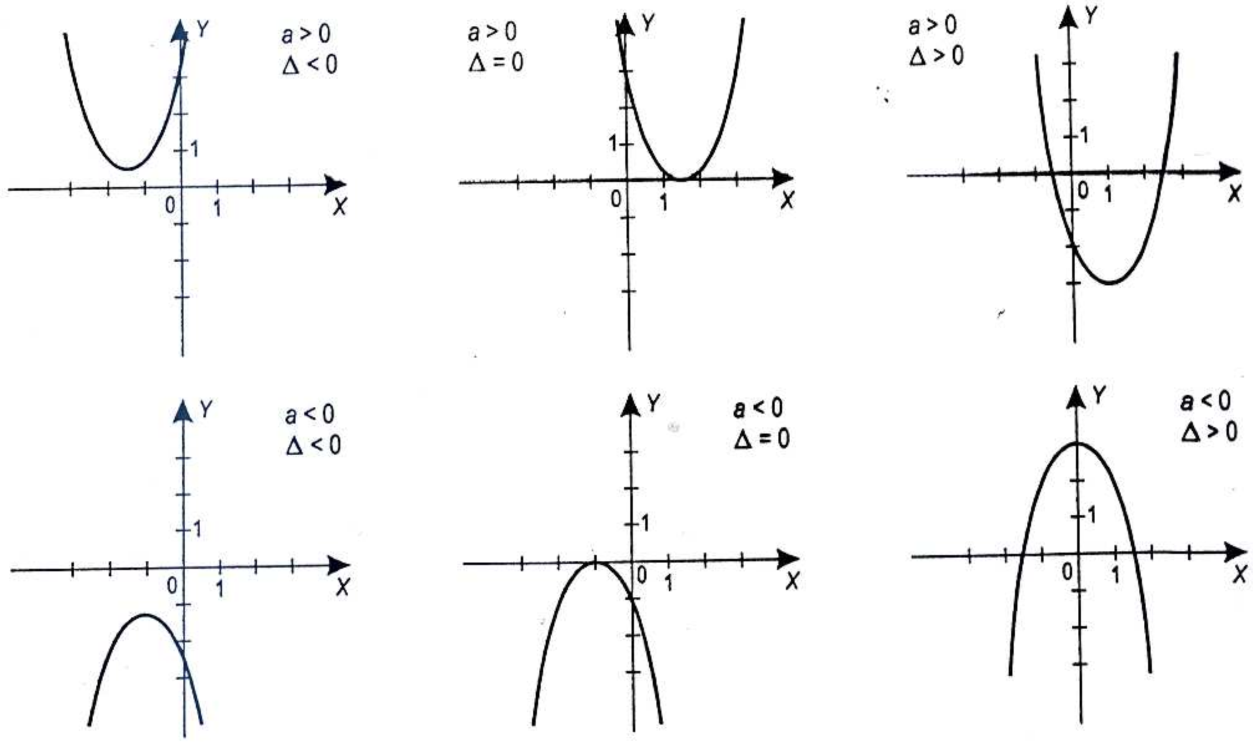
$$W_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = a_1c_2 - a_2c_1$$

3. **Funkcja kwadratowa.**

a) **Funkcją kwadratową** (trójmianem kwadratowym) w postaci ogólnej nazywamy funkcję o wzorze $\boldsymbol{y = ax^2 + bx + c}$, gdzie $a \neq 0$, $a, b, c \in \boldsymbol{R}$, $x \in \boldsymbol{R}$.

$\Delta = b^2 - 4ac$ – wyróżnik funkcji kwadratowej

b) **Wykresem funkcji kwadratowej** $y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, $a, b, c \in \boldsymbol{R}$, $x \in \boldsymbol{R}$ jest parabola o wierzchołku w punkcie $W = \left(-\dfrac{b}{2a}, -\dfrac{\Delta}{4a}\right)$.



c) Funkcję kwadratową w postaci ogólnej $y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, $x \in \boldsymbol{R}$ można przedstawić w **postaci kanonicznej $y = a(x-p)^2 + q$**, gdzie $p = -\frac{b}{2a}$, $q = -\frac{\Delta}{4a}$.

- Wykres funkcji $y = a(x-p)^2 + q$, $a \neq 0$, $x \in \boldsymbol{R}$ powstaje w wyniku przesunięcia równoległego wykresu jednomianu kwadratowego $y = ax^2$, $a \neq 0$, $x \in \boldsymbol{R}$ o wektor $\vec{u} = [p, q]$.

d) **Miejsca zerowe funkcji kwadratowej**.
Funkcja kwadratowa $y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, $x \in \boldsymbol{R}$:
- ma dwa różne miejsca zerowe $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ oraz $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$, gdy $\Delta > 0$
- ma jedno miejsce zerowe $x_0 = -\frac{b}{2a}$, gdy $\Delta = 0$
- nie ma miejsc zerowych, gdy $\Delta < 0$.

e) **Postać iloczynowa funkcji kwadratowej** $y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, $x \in \boldsymbol{R}$ istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy $\Delta \geq 0$

$y = a(x-x_0)^2$, gdzie $x_0 = -\frac{b}{2a}$ (w przypadku $\Delta = 0$)

$y = a(x-x_1)(x-x_2)$, gdzie $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$, $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ (w przypadku $\Delta > 0$).

f) **Wzory Viete'a**.
Jeśli x_1, x_2 są różnymi miejscami zerowymi funkcji kwadratowej $y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, to zachodzą związki:

$$\boldsymbol{x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}}, \quad \boldsymbol{x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}} \quad (\Delta > 0).$$

Jeśli x_0 jest jedynym miejscem zerowym trójmianu kwadratowego $y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, to:

$$\boldsymbol{2x_0 = -\frac{b}{a}}, \quad \boldsymbol{x_0^2 = \frac{c}{a}} \quad (\Delta = 0).$$

4. **Wielomiany**.

a) **Wielomianem** jednej zmiennej rzeczywistej x nazywamy funkcję

$W(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots\ldots + a_1x + a_0$, gdzie $a_0, a_1, \ldots\ldots, a_n \in \mathbf{R}, x \in \mathbf{R}$.
Liczby $a_0, a_1, \ldots\ldots, a_n$ nazywamy **współczynnikami wielomianu**.
Jeśli $a_n \neq 0$, to liczbę naturalną n nazywamy **stopniem wielomianu**.
Np.:
$W(x) \equiv 0$ – wielomian, który nie ma określonego stopnia (wielomian zerowy)
$W(x) = a_0, a_0 \neq 0$ – wielomian stopnia zero
$W(x) = a_1x + a_0, a_1 \neq 0$ – wielomian stopnia pierwszego
$W(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0, a_2 \neq 0$ – wielomian stopnia drugiego itd.

b) Wielomian $W(x)$ nazywamy **podzielnym** przez wielomian $P(x)$, różny od wielomianu zerowego, wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje taki wielomian $Q(x)$, że $W(x) = Q(x) \cdot P(x)$. Wielomian $Q(x)$ nazywamy ilorazem wielomianu $W(x)$ przez $P(x)$. Mówimy, że wielomian $P(x)$ jest dzielnikiem wielomianu $W(x)$.

c) **Pierwiastkiem** wielomianu $W(x)$ nazywamy jego miejsce zerowe. Liczba a jest miejscem zerowym wielomianu $W(x)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $W(a) = 0$.

d) Liczbę a nazywamy ***k*-krotnym pierwiastkiem** wielomianu $W(x)$, $k \in N_+$ wtedy i tylko wtedy, gdy wielomian $W(x)$ jest podzielny przez $(x-a)^k$, ale nie jest podzielny przez $(x-a)^{k+1}$. Liczbę k nazywamy krotnością pierwiastka.

5. **Twierdzenia o wielomianach.**

a) Twierdzenie **o równości wielomianów**
Dwa wielomiany zmiennej x są równe wtedy i tylko wtedy, gdy są tego samego stopnia i mają równe współczynniki przy odpowiednich potęgach zmiennej x.

b) Twierdzenie **o dzieleniu wielomianów**
Jeśli $W(x)$ oraz $P(x)$ są wielomianami i $P(x)$ nie jest wielomianem zerowym, to istnieją takie dwa wielomiany $Q(x)$ oraz $R(x)$, że $W(x) = P(x) \cdot Q(x) + R(x)$, gdzie $R(x) \equiv 0$ lub $\text{st.}R(x) < \text{st.}P(x)$.

c) Twierdzenie **o reszcie**
Reszta z dzielenia wielomianu $W(x)$ przez dwumian $x - a$ jest równa $W(a)$.

d) Twierdzenia **Bézouta**
Liczba a jest pierwiastkiem wielomianu $W(x)$ wtedy i tylko wtedy, gdy wielomian $W(x)$ jest podzielny przez dwumian $x - a$.

e) Twierdzenie **o wymiernych pierwiastkach wielomianu o współczynnikach całkowitych**
Jeżeli wielomian $W(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots\ldots + a_1x + a_0$, $a_n \neq 0$, $a_0 \neq 0$, o współczynnikach całkowitych, ma pierwiastek wymierny, który można zapisać w postaci ułamka nieskracalnego $\frac{p}{q}$, $p \in \mathbf{C}, q \in \mathbf{C} - \{0\}$, to p jest dzielnikiem wyrazu wolnego a_0, zaś q jest dzielnikiem współczynnika a_n przy najwyższej potędze zmiennej.

f) Twierdzenie **o rozkładzie wielomianu na czynniki**
Każdy wielomian o współczynnikach rzeczywistych można rozłożyć na czynniki co najwyżej stopnia drugiego o współczynnikach rzeczywistych.

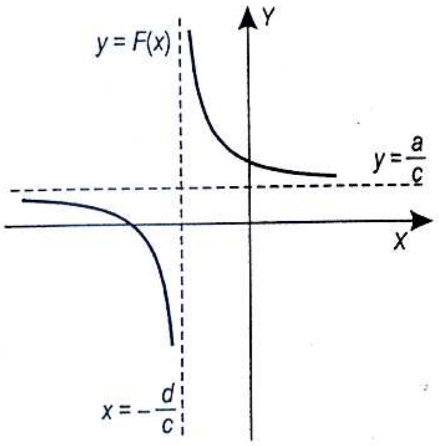
g) Twierdzenie **o liczbie pierwiastków wielomianu**.
Każdy wielomian stopnia n ma co najwyżej n pierwiastków.

6. **Funkcje wymierne.**

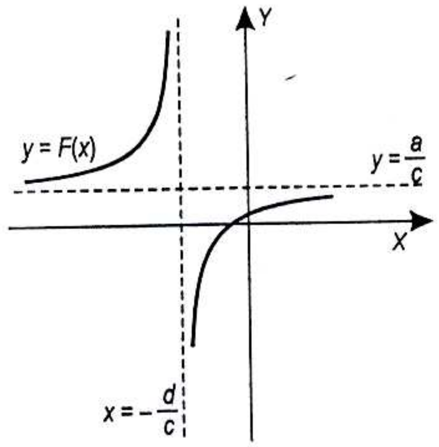
a) Funkcję $F(x) = \dfrac{W_1(x)}{W_2(x)}$, gdzie $W_1(x)$, $W_2(x)$ są wielomianami i $W_2(x) \not\equiv 0$ nazywamy **funkcją wymierną**. Dziedziną funkcji wymiernej jest zbiór $D_f = \mathbf{R} - \{x\colon W_2(x) = 0\}$.

b) Funkcję $F(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$, gdzie $c \neq 0$ i $a \cdot d - c \cdot b \neq 0$ nazywamy **funkcją homograficzną**. Dziedziną funkcji homograficznej jest zbiór $\boldsymbol{R}-\left\{-\dfrac{d}{c}\right\}$. Wykresem funkcji homograficznej **jest** hiperbola

jeśli $ad-cb<0$

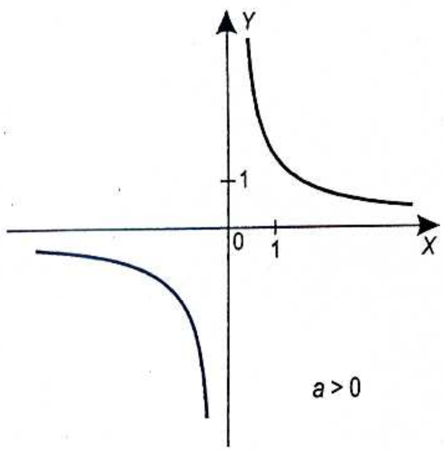


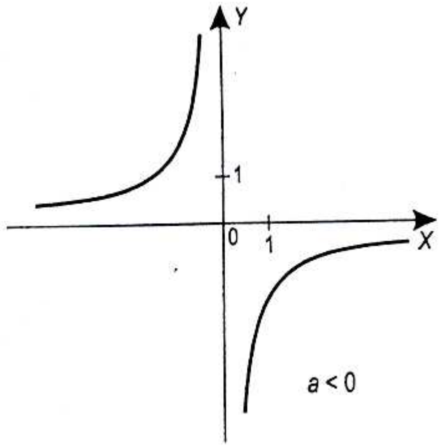
jeśli $ad-cb>0$



w szczególności:

- $y=\dfrac{a}{x}, x \neq 0$ – proporcjonalność odwrotna





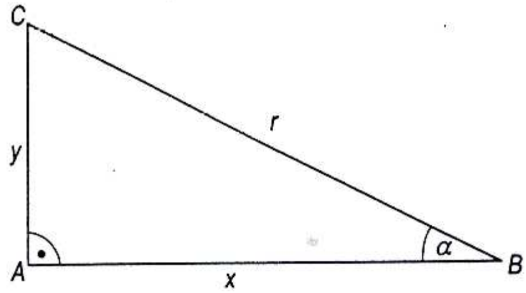
7. Dwumian Newtona.

Dla dowolnej liczby naturalnej $n \geq 1$ zachodzi równość:

$$(a+b)^n=\binom{n}{0}a^n+\binom{n}{1}a^{n-1}b^1+\binom{n}{2}a^{n-2}b^2+\ldots\ldots+\binom{n}{n-1}ab^{n-1}+\binom{n}{n}b^n$$

IV. FUNKCJE TRYGONOMETRYCZNE

1. **Funkcje trygonometryczne kąta ostrego** w trójkącie prostokątnym.
Niech w trójkącie prostokątnym dany będzie kąt ostry α.



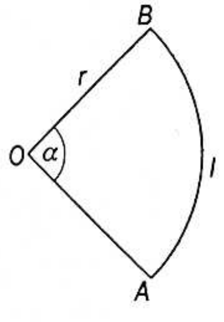
a) **Sinusem kąta ostrego** α nazywamy stosunek długości przyprostokątnej przeciwległej do **kąta** α do długości przeciwprostokątnej:
$$\sin\alpha = \frac{y}{r}$$

b) **Cosinusem kąta ostrego** α nazywamy stosunek długości przyprostokątnej przyległej do **kąta** α do długości przeciwprostokątnej:
$$\cos\alpha = \frac{x}{r}$$

c) **Tangensem kąta ostrego** α nazywamy stosunek długości przyprostokątnej przeciwległej do kąta α do długości przyprostokątnej przyległej do kąta α:
$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{y}{x}$$

d) **Cotangensem kąta ostrego** α nazywamy stosunek długości przyprostokątnej przyległej do kąta α do długości przyprostokątnej przeciwległej do kąta α:
$$\mathrm{ctg}\alpha = \frac{x}{y}$$

2. **Pojęcie miary łukowej kąta**.



a) Niech będzie dany kąt AOB. Kreślimy okrąg o środku w punkcie O (w wierzchołku kąta) i dowolnym promieniu. Stosunek długości łuku (l), będącego częścią wspólną okręgu i kąta, do długości promienia (r) nazywamy **miarą łukową kąta**.
$$\text{miara łukowa kąta} = \frac{l}{r}$$

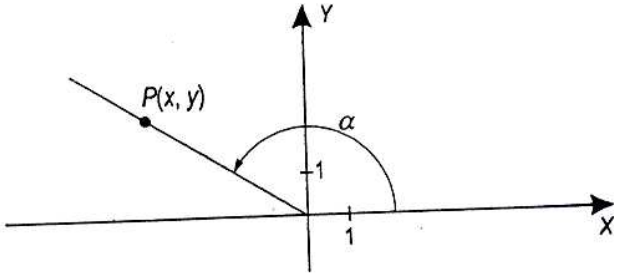
b) Kąt, którego miara łukowa jest równa 1 (kąt jednostkowy) nazywamy **radianem** (rad).

c) Zamiana miary stopniowej na łukową i odwrotnie:

- Zamiana miary stopniowej na łukową $t^\circ = \frac{\pi \cdot t}{180}$ rad
- Zamiana miary łukowej na stopniową: $t \text{ rad} = \left(\frac{180 \cdot t}{\pi}\right)^\circ$

3. **Funkcje trygonometryczne dowolnego kąta**.

Niech α będzie dowolną liczbą rzeczywistą, której przyporządkowujemy kąt **skierowany** $\sphericalangle\alpha$. Umieszczamy kąt $\sphericalangle\alpha$ w układzie współrzędnych w ten sposób, że początkowe **ramię pokrywa się** z dodatnią półosią OX. Na końcowym ramieniu kąta wybieramy dowolny punkt $P(x, y)$, **różny od** punktu $O(0, 0)$.



a) **Sinusem** α nazywamy liczbę, będącą ilorazem rzędnej punktu P przez jego odległość od początku układu współrzędnych:

$$\sin\alpha = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Sinus jest określony dla dowolnego kąta α.

b) **Cosinusem** α nazywamy liczbę, będącą ilorazem odciętej punktu P przez jego odległość od początku układu współrzędnych:

$$\cos\alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Cosinus jest określony dla dowolnego kąta α.

c) **Tangensem** α nazywamy liczbę, będącą ilorazem rzędnej punktu P przez jego odciętą:

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{y}{x}, \quad x \neq 0.$$

Tangens jest określony, gdy $x \neq 0$ tzn. dla $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \boldsymbol{C}$.

d) **Cotangensem** α nazywamy liczbę, będącą ilorazem odciętej punktu P przez jego rzędną:

$$\mathrm{ctg}\alpha = \frac{x}{y}, \quad y \neq 0.$$

Cotangens jest określony, gdy $y \neq 0$ tzn. dla $\alpha \neq k\pi,\ k \in \boldsymbol{C}$.

e) **Funkcjami trygonometrycznymi** nazywamy następujące funkcje:

sinus: $\alpha \to \sin\alpha,\ \alpha \in \boldsymbol{R}$

cosinus: $\alpha \to \cos\alpha,\ \alpha \in \boldsymbol{R}$

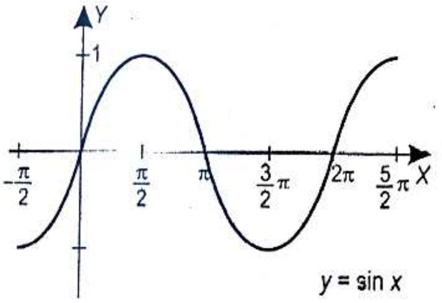
tangens: $\alpha \to \mathrm{tg}\,\alpha,\ \alpha \in \boldsymbol{R} - \left\{x\colon x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \boldsymbol{C}\right\}$

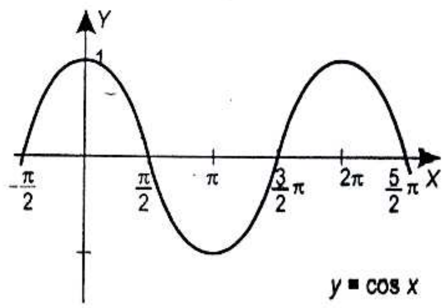
cotangens: $\alpha \to \mathrm{ctg}\,\alpha,\ \alpha \in \boldsymbol{R} - \{x\colon x = k\pi,\ k \in \boldsymbol{C}\}$.

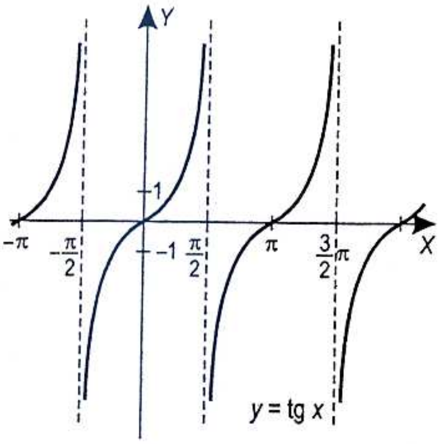
f) **Znaki funkcji trygonometrycznych w poszczególnych ćwiartkach układu współrzędnych.**

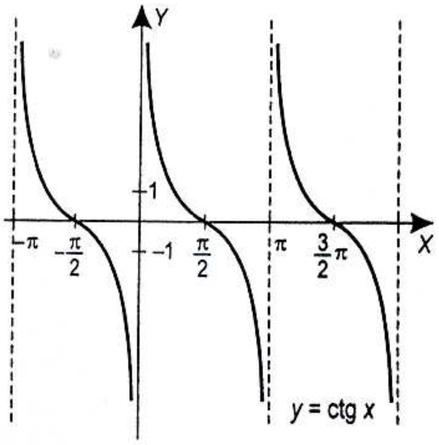
	I	II	III	IV
$\sin\alpha$	+	+	–	–
$\cos\alpha$	+	–	–	+
$\mathrm{tg}\,\alpha$	+	–	+	–
$\mathrm{ctg}\,\alpha$	+	–	+	–

4. **Wykresy funkcji trygonometrycznych.**









5. **Parzystość i nieparzystość funkcji trygonometrycznych.**

Funkcja $f(x) = \cos x$ jest parzysta: $\cos(-x) = \cos x$, dla każdego $x \in D_f$.
Funkcja $f(x) = \sin x$ jest nieparzysta: $\sin(-x) = -\sin x$, dla każdego $x \in D_f$.
Funkcja $f(x) = \mathrm{tg}\, x$ jest nieparzysta: $\mathrm{tg}(-x) = -\mathrm{tg}\, x$, dla każdego $x \in D_f$.
Funkcja $f(x) = \mathrm{ctg}\, x$ jest nieparzysta: $\mathrm{ctg}(-x) = -\mathrm{ctg}\, x$, dla każdego $x \in D_f$.

6. **Okresowość funkcji trygonometrycznych.**

Okresem podstawowym funkcji $f(x) = \sin x$ jest 2π: $\sin(x + 2k\pi) = \sin x$ dla $k \in \boldsymbol{C}$ i dla każdego $x \in D_f$.
Okresem podstawowym funkcji $f(x) = \cos x$ jest 2π: $\cos(x + 2k\pi) = \cos x$ dla $k \in \boldsymbol{C}$ i dla każdego $x \in D_f$.
Okresem podstawowym funkcji $f(x) = \mathrm{tg}\, x$ jest π: $\mathrm{tg}(x + k\pi) = \mathrm{tg}\, x$ dla $k \in \boldsymbol{C}$ i dla każdego $x \in D_f$.
Okresem podstawowym funkcji $f(x) = \mathrm{ctg}\, x$ jest π: $\mathrm{ctg}(x + k\pi) = \mathrm{ctg}\, x$ dla $k \in \boldsymbol{C}$ i dla każdego $x \in D_f$.

7. **Podstawowe tożsamości trygonometryczne.**

a) **Tożsamością trygonometryczną** jest równość, w której zmienne występują wyłącznie w argumentach funkcji trygonometrycznych i która jest prawdziwa dla wszystkich wartości tych zmiennych (dla których obie strony równości są określone).

b) Podstawowe tożsamości:

- $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1,\ \alpha \in \boldsymbol{R}$ (tzw. „jedynka trygonometryczna")
- $\mathrm{tg}\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha},\ \alpha \in \boldsymbol{R} - \left\{x\colon x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \boldsymbol{C}\right\}$
- $\mathrm{ctg}\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha},\ \alpha \in \boldsymbol{R} - \{x\colon x = k\pi,\ k \in \boldsymbol{C}\}$
- $\mathrm{tg}\,\alpha \cdot \mathrm{ctg}\,\alpha = 1,\ \alpha \in \boldsymbol{R} - \left\{x\colon x = \dfrac{k\pi}{2},\ k \in \boldsymbol{C}\right\}$

8. **Funkcje trygonometryczne sumy i różnicy kątów.**
Jeśli $\alpha, \beta \in \boldsymbol{R}$, to
a) $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta$
b) $\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta - \cos\alpha \cdot \sin\beta$
c) $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta$
d) $\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta + \sin\alpha \cdot \sin\beta$
e) $\mathrm{tg}(\alpha+\beta) = \dfrac{\mathrm{tg}\alpha + \mathrm{tg}\beta}{1 - \mathrm{tg}\alpha \cdot \mathrm{tg}\beta}$, gdy $\cos\alpha \cdot \cos\beta \neq 0$ i $\cos(\alpha+\beta) \neq 0$
f) $\mathrm{tg}(\alpha-\beta) = \dfrac{\mathrm{tg}\alpha - \mathrm{tg}\beta}{1 + \mathrm{tg}\alpha \cdot \mathrm{tg}\beta}$, gdy $\cos\alpha \cdot \cos\beta \neq 0$ i $\cos(\alpha-\beta) \neq 0$
g) $\mathrm{ctg}(\alpha+\beta) = \dfrac{\mathrm{ctg}\alpha \cdot \mathrm{ctg}\beta - 1}{\mathrm{ctg}\alpha + \mathrm{ctg}\beta}$, gdy $\sin\alpha \cdot \sin\beta \neq 0$ i $\sin(\alpha+\beta) \neq 0$
h) $\mathrm{ctg}(\alpha-\beta) = \dfrac{\mathrm{ctg}\alpha \cdot \mathrm{ctg}\beta + 1}{\mathrm{ctg}\beta - \mathrm{ctg}\alpha}$, gdy $\sin\alpha \cdot \sin\beta \neq 0$ i $\sin(\alpha-\beta) \neq 0$.

9. **Sumy i różnice funkcji trygonometrycznych.**
Jeśli $\alpha, \beta \in \boldsymbol{R}$, to
a) $\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$
b) $\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}$
c) $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$
d) $\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}$
e) $\mathrm{tg}\alpha + \mathrm{tg}\beta = \dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$, gdy $\cos\alpha \cdot \cos\beta \neq 0$
f) $\mathrm{tg}\alpha - \mathrm{tg}\beta = \dfrac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$, gdy $\cos\alpha \cdot \cos\beta \neq 0$
g) $\mathrm{ctg}\alpha + \mathrm{ctg}\beta = \dfrac{\sin(\beta+\alpha)}{\sin\alpha\sin\beta}$, gdy $\sin\alpha \cdot \sin\beta \neq 0$
h) $\mathrm{ctg}\alpha - \mathrm{ctg}\beta = \dfrac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin\alpha\sin\beta}$, gdy $\sin\alpha \cdot \sin\beta \neq 0$.

10. **Funkcje trygonometryczne wielokrotności kąta.**
Jeśli $\alpha \in \boldsymbol{R}$, to
a) $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$
b) $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha$
c) $\mathrm{tg}2\alpha = \dfrac{2\mathrm{tg}\alpha}{1 - tg^2\alpha}$, gdy $\cos\alpha \neq 0$ i $\cos 2\alpha \neq 0$
d) $\mathrm{ctg}2\alpha = \dfrac{\mathrm{ctg}^2\alpha - 1}{2\mathrm{ctg}\alpha}$, gdy $\sin\alpha \neq 0$ i $\sin 2\alpha \neq 0$.

11. **Wartości funkcji trygonometrycznych niektórych kątów.**

α	$0\ (0°)$	$\frac{\pi}{6}\ (30°)$	$\frac{\pi}{4}\ (45°)$	$\frac{\pi}{3}\ (60°)$	$\frac{\pi}{2}\ (90°)$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\mathrm{tg}\,\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	–
$\mathrm{ctg}\,\alpha$	–	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

12. **Wzory redukcyjne.**

α	$90°-\alpha$	$90°+\alpha$	$180°-\alpha$	$180°+\alpha$	$270°-\alpha$	$270°+\alpha$	$360°-\alpha$
$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$
$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$
$\mathrm{tg}\,\alpha$	$\mathrm{ctg}\,\alpha$	$-\mathrm{ctg}\,\alpha$	$-\mathrm{tg}\,\alpha$	$\mathrm{tg}\,\alpha$	$\mathrm{ctg}\,\alpha$	$-\mathrm{ctg}\,\alpha$	$-\mathrm{tg}\,\alpha$
$\mathrm{ctg}\,\alpha$	$\mathrm{tg}\,\alpha$	$-\mathrm{tg}\,\alpha$	$-\mathrm{ctg}\,\alpha$	$\mathrm{ctg}\,\alpha$	$\mathrm{tg}\,\alpha$	$-\mathrm{tg}\,\alpha$	$-\mathrm{ctg}\,\alpha$

V. CIĄGI LICZBOWE

1. **Ciągiem nieskończonym** nazywamy funkcję określoną na zbiorze liczb naturalnych dodatnich, a wyrazami ciągu – wartości tej funkcji.

2. **Ciągi monotoniczne.**
   a) Ciąg (a_n) jest **rosnący** $\Leftrightarrow \bigwedge_{n\in N_+} a_{n+1}-a_n>0$.

   b) Ciąg (a_n) jest **malejący** $\Leftrightarrow \bigwedge_{n\in N_+} a_{n+1}-a_n<0$.

   c) Ciąg (a_n) jest **stały** $\Leftrightarrow \bigwedge_{n\in N_+} a_{n+1}-a_n=0$.

3. **Ciągi ograniczone.**
   a) Ciąg (a_n) nazywamy **ograniczonym z dołu** wtedy i tylko wtedy, gdy jego zbiór wartości jest ograniczony z dołu tzn.

   $\bigvee_{m\in R}\bigwedge_{n\in N_+} a_n \geq m$.

b) Ciąg (a_n) nazywamy **ograniczonym z góry** wtedy i tylko wtedy, gdy jego zbiór wartości jest ograniczony z góry, tzn.

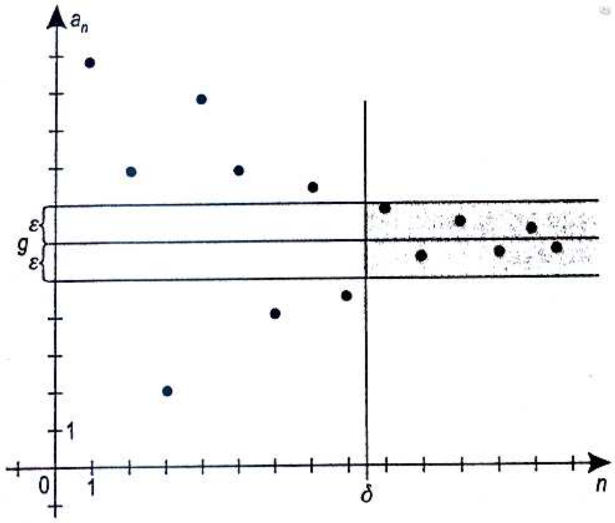
$$\bigvee_{M\in R}\bigwedge_{n\in N_+} a_n \le M.$$

c) Ciąg (a_n) nazywamy **ograniczonym** wtedy i tylko wtedy, gdy jest ograniczony **z góry i z dołu**, tzn.

$$\bigvee_{m,M\in R}\bigwedge_{n\in N_+} m \le a_n \le M.$$

4. **Granica ciągu liczbowego.**

$$\lim_{n\to\infty} a_n = g \Leftrightarrow \bigwedge_{\varepsilon>0}\bigvee_{\delta}\bigwedge_{n>\delta}|a_n - g| < \varepsilon.$$



5. **Własności ciągów zbieżnych.**

a) Ciąg zbieżny ma tylko jedną granicę.

b) Ciąg zbieżny jest ciągiem ograniczonym.

c) Jeśli ciąg jest monotoniczny i ograniczony, to jest zbieżny.

d) Ciąg stały o wyrazie ogólnym $a_n = a$, jest zbieżny do granicy a tzn. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

e) Jeśli $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ i $a_n \ge 0$ dla każdej liczby $n \in N_+$, to $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{a_n} = \sqrt{a}$.

f) Jeśli $|q| < 1$, to ciąg o wyrazie ogólnym $a_n = |q|^n$, jest zbieżny i $\lim\limits_{n\to\infty}|q|^n = 0$.

g) Jeśli $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ i $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, to istnieją następujące granice:

- $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = a + b$
- $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n - b_n) = a - b$
- $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = a \cdot b$
- $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{a_n}{b_n}\right) = \dfrac{a}{b}$, o ile $b \ne 0$ i $b_n \ne 0$ dla każdego $n \in N_+$.

h) Jeśli $a > 0$, to ciąg o wyrazie ogólnym $a_n = \sqrt[n]{a}$ jest zbieżny i $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a} = 1$.

i) Twierdzenie o trzech ciągach.
Jeśli dane są trzy ciągi (a_n), (b_n), (c_n) i $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = k$ oraz istnieje taka liczba δ_0, że dla każdej liczby $n > \delta_0$ prawdziwa jest nierówność $a_n \le b_n \le c_n$, to $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = k$.

6. **Ciągi rozbieżne do nieskończoności.**

   a) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty \Leftrightarrow \bigwedge\limits_{M} \bigvee\limits_{\delta} \bigwedge\limits_{n>\delta} a_n > M.$

   b) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty \Leftrightarrow \bigwedge\limits_{M} \bigvee\limits_{\delta} \bigwedge\limits_{n>\delta} a_n < M.$

7. Ciąg (a_n) nazywamy **ciągiem arytmetycznym** wtedy i tylko wtedy, gdy każdy wyraz oprócz pierwszego powstaje przez dodanie do wyrazu poprzedniego stałej liczby r.
   Liczbę r nazywamy różnicą ciągu arytmetycznego.

   a) $\bigwedge\limits_{n\in N_+} a_n = a_1 + (n-1)\cdot r$ – wzór na n-ty wyraz ciągu arytmetycznego.

   b) $\bigwedge\limits_{n\in N_+} S_n = \frac{a_1 + a_n}{2}\cdot n$ – wzór na sumę n-początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego.

   c) $\bigwedge\limits_{n\in N_+ - \{1\}} a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$; w szczególności: jeśli (a, b, c) – ciąg arytmetyczny to $b = \frac{a+c}{2}$.

8. Ciąg (a_n) jest **ciągiem geometrycznym** wtedy i tylko wtedy, gdy każdy wyraz oprócz pierwszego powstaje przez pomnożenie wyrazu poprzedniego przez stałą liczbę q.
   Liczbę tę nazywamy ilorazem ciągu geometrycznego.

   a) $\bigwedge\limits_{n\in N_+ - \{1\}} a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$ – wzór na n-ty wyraz ciągu geometrycznego

   b)
   - $\bigwedge\limits_{n\in N_+} S_n = a_1 \frac{1-q^n}{1-q}$ – wzór na sumę n-początkowych wyrazów ciągu geometrycznego w przypadku, gdy $q \neq 1$
   - $\bigwedge\limits_{n\in N_+} S_n = n \cdot a_1$ –wzór na sumę n-początkowych wyrazów ciągu geometrycznego w przypadku, gdy $q = 1$

   c) $\bigwedge\limits_{n\in N_+ - \{1\}} a_n^2 = a_{n-1}\cdot a_{n+1}$; w szczególności, jeśli (a, b, c) – ciąg geometryczny to $b^2 = a\cdot c$.

9. **Oprocentowanie lokat i kredytów.**

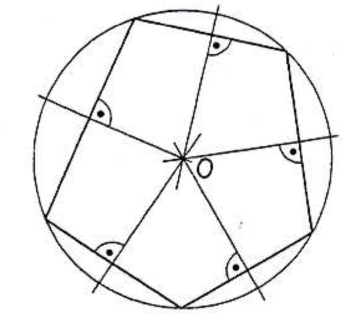
   a) **Procent prosty** to sposób oprocentowania wkładu pieniężnego, polegający na tym, że odsetki od wkładu po okresie oszczędzania np. jednego roku, nie są doliczane na następny rok, czyli nie podlegają oprocentowaniu w następnym roku.
   Jeśli $p\%$ – roczna stopa procentowa, K_o – wkład pieniężny to odsetki po:
   - roku oszczędzania wynoszą $\frac{p}{100}\cdot K_o$
   - k miesiącach oszczędzania wynoszą $\frac{p}{100}\cdot\frac{k}{12}\cdot K_o$

   b) **Procent składany** to oprocentowanie lokat pieniężnych polegające na tym, że odsetki od wkładu dolicza się do lokaty i oprocentowuje w następnym okresie. Okres, po którym dolicza się odsetki od lokaty nazywa się okresem kapitalizacji.
   - $K_o\cdot\left(1+\frac{p}{100}\right)^n$ – wielkość wkładu po n latach, p – roczna stopa procentowa, K_o – początkowy wkład pieniężny
   - $\dfrac{K\cdot p\cdot\left(1+\frac{p}{m}\right)^{n\cdot m}}{m\cdot\left[\left(1+\frac{p}{m}\right)^{n\cdot m}-1\right]}$ – wielkość raty kredytu K, gdzie p – oprocentowanie kredytu w skali roku, m – liczba rat w ciągu roku, n – liczba lat spłaty kredytu, $n\cdot m$ – liczba równych rat.

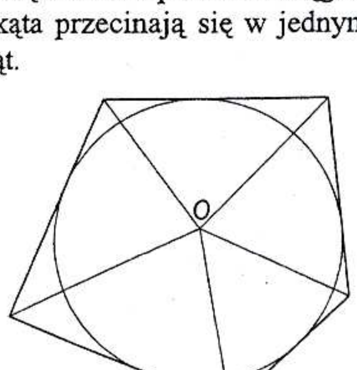
10. **Szereg geometryczny.**
Jeśli (a_n) jest nieskończonym ciągiem geometrycznym o ilorazie q spełniającym warunek $|q| < 1$, to szereg geometryczny $a_1 + a_1q + a_1q^2 + ...$ jest zbieżny i jego suma wynosi $S = \frac{a_1}{1-q}$.

VI. PLANIMETRIA

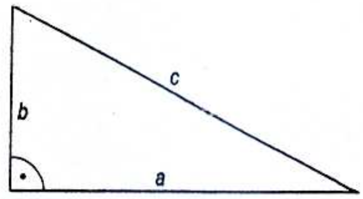
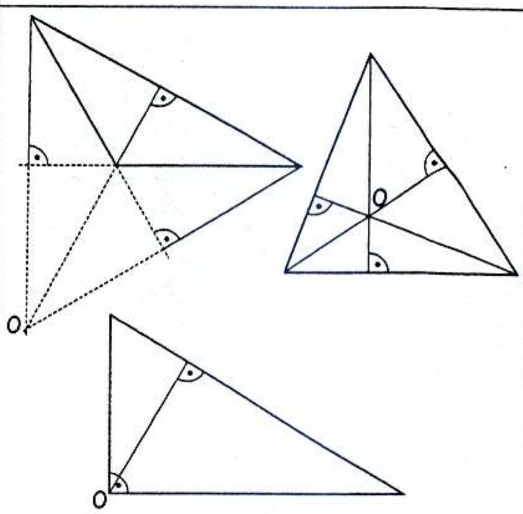
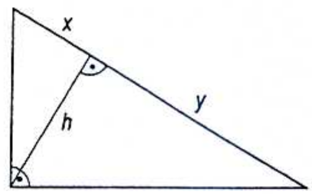
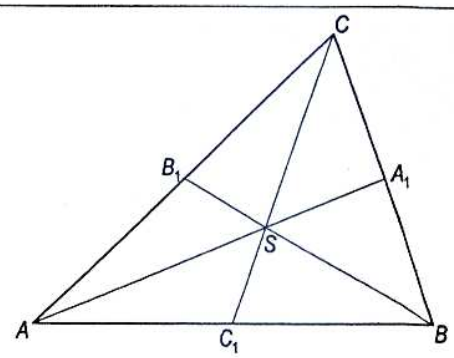
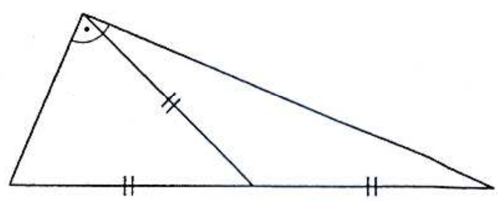
1. **Wielokąty.**
   a) **Wielokątem** nazywamy figurę ograniczoną wyciętą z płaszczyzny przez łamaną zwyczajną zamkniętą wraz z tą łamaną.
   b) Liczba przekątnych w n-kącie ($n \geq 3$, $n \in N_+$) wyraża się wzorem $\frac{n \cdot (n-3)}{2}$.
   c) **Wielokątem foremnym** nazywamy taki wielokąt, który ma wszystkie boki równej długości i wszystkie kąty równe.
   d) Suma miar kątów wewnętrznych n-kąta wypukłego ($n \geq 3$, $n \in N_+$) wynosi $(n-2) \cdot 180°$, a suma miar jego kątów zewnętrznych 720°.
   e) **Wielokąt jest wpisany w okrąg** (okrąg jest opisany na wielokącie), jeżeli każdy wierzchołek wielokąta leży na okręgu. Wielokąt można wpisać w okrąg wtedy i tylko wtedy, gdy symetralne boków wielokąta przecinają się w jednym punkcie. Ten punkt jest środkiem okręgu opisanego na wielokącie.



   f) **Wielokąt jest opisany na okręgu** (okrąg jest wpisany w wielokąt), jeżeli każdy bok wielokąta jest styczny do okręgu. Wielokąt można opisać na okręgu wtedy i tylko wtedy, gdy dwusieczne kątów wewnętrznych wielokąta przecinają się w jednym punkcie. Ten punkt jest środkiem okręgu wpisanego w wielokąt.

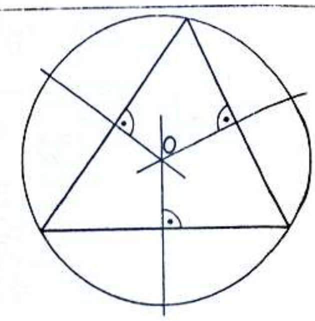


2. **Własności trójkątów**.

a)	**Twierdzenie Pitagorasa** Jeżeli trójkąt jest prostokątny, to kwadrat długości przeciwprostokątnej jest równy sumie kwadratów długości przyprostokątnych.	 $a^2+b^2=c^2$
b)	**Twierdzenie odwrotne do twierdzenia Pitagorasa** Jeżeli suma kwadratów długości dwóch boków trójkąta jest równa kwadratowi długości trzeciego boku, to ten trójkąt jest prostokątny.	
c)	**Wysokości w trójkącie.** • Wysokością trójkąta nazywamy odcinek poprowadzony prostopadle z wierzchołka do przeciwległego boku lub jego przedłużenia. • W dowolnym trójkącie wysokości (lub ich przedłużenia) przecinają się w jednym punkcie (ortocentrum trójkąta).	
	• Długość **wysokości poprowadzonej z wierzchołka kąta prostego** trójkąta jest średnią geometryczną długości odcinków, na jakie ta wysokość dzieli przeciwprostokątną.	 $h=\sqrt{xy}$
d)	**Środkowe w trójkącie.** • **Środkową** trójkąta nazywamy odcinek łączący wierzchołek trójkąta ze środkiem przeciwległego boku. • W dowolnym trójkącie trzy środkowe przecinają się w jednym punkcie (zwanym **środkiem ciężkości** trójkąta), który dzieli każdą z nich w stosunku 2 : 1, licząc od wierzchołka.	 $\frac{\lvert AS\rvert}{\lvert SA_1\rvert}=\frac{\lvert BS\rvert}{\lvert SB_1\rvert}=\frac{\lvert CS\rvert}{\lvert SC_1\rvert}=\frac{2}{1}$
	• W trójkącie prostokątnym środkowa poprowadzona z wierzchołka kąta prostego ma długość równą połowie długości przeciwprostokątnej.	

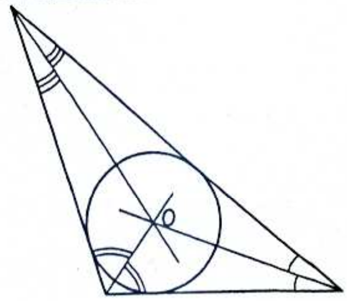
e) **Symetralne.**

- **Symetralną odcinka** nazywamy prostą prostopadłą do odcinka i przechodzącą przez jego środek. Symetralna odcinka jest zbiorem punktów płaszczyzny równoodległych od końców odcinka.
- Symetralne trzech boków trójkąta przecinają się w jednym punkcie, który jest **środkiem okręgu opisanego** na tym trójkącie.



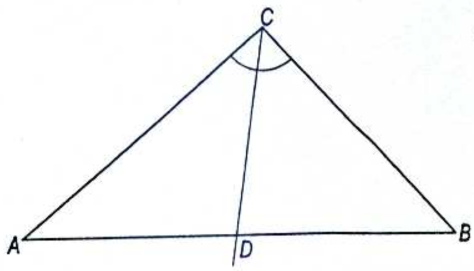
f) **Dwusieczne kątów.**

- **Dwusieczną kąta** nazywamy półprostą dzielącą kąt na dwa kąty przystające. Dwusieczna kąta wypukłego jest zbiorem punktów tego kąta równoodległych od jego ramion.
- Dwusieczne kątów wewnętrznych trójkąta przecinają się w jednym punkcie, który jest **środkiem okręgu wpisanego** w ten trójkąt.



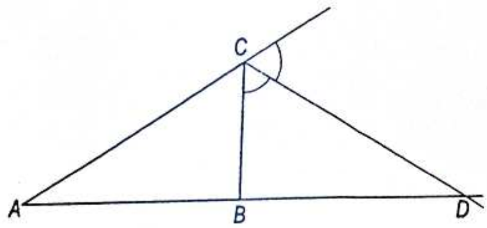
- **Twierdzenie o podziale boku przez dwusieczną kąta wewnętrznego.**
  Jeżeli ABC jest dowolnym trójkątem, CD dwusieczną kąta wewnętrznego tego trójkąta, to

$$\frac{|AD|}{|DB|} = \frac{|AC|}{|CB|}$$



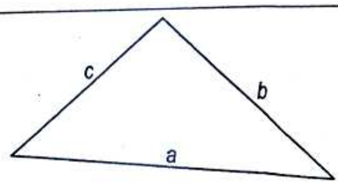
- **Twierdzenie o podziale boku przez dwusieczną kąta zewnętrznego.**
  Jeżeli w trójkącie ABC dwusieczna kąta zewnętrznego ACB przecina przedłużenie boku AB w punkcie D, to

$$\frac{|AD|}{|DB|} = \frac{|AC|}{|CB|}$$



g) **Nierówność trójkąta.**

W dowolnym trójkącie długość każdego boku jest mniejsza od sumy długości pozostałych dwóch boków i większa od wartości bezwzględnej różnicy długości tych boków.



$|b-c| < a < b+c$

$|a-c| < b < a+c$

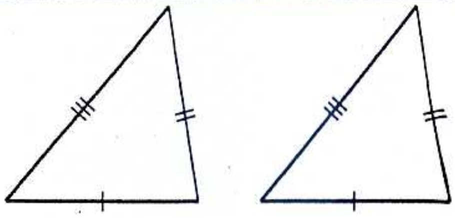
$|a-b| < c < a+b$

h) **Przystawanie trójkątów.**

- Dwa trójkąty są **przystające**, jeżeli boki i kąty jednego z nich są równe odpowiednim bokom i kątom drugiego.

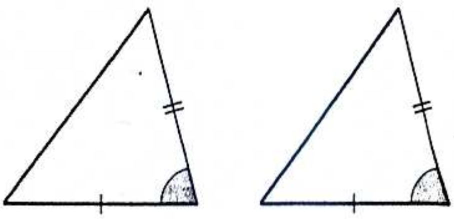
- **Cechy przystawania trójkątów.**

I cecha przystawania trójkątów, ***bbb***.
Jeżeli długości trzech boków w jednym trójkącie są odpowiednio równe długościom trzech boków w drugim trójkącie, to trójkąty te są przystające.



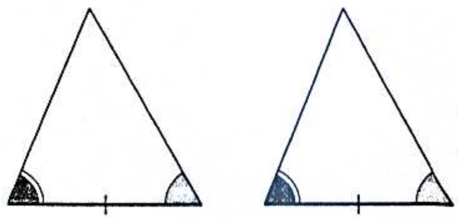
bbb

II cecha przystawania trójkątów, ***bkb***.
Jeżeli dwa boki i kąt między tymi bokami w jednym trójkącie są odpowiednio równe dwóm bokom i kątowi między tymi bokami w drugim trójkącie, to trójkąty te są przystające.



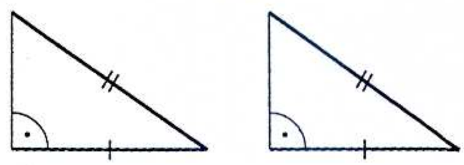
bkb

III cecha przystawania trójkątów, ***kbk***.
Jeżeli bok i dwa przyległe do niego kąty w jednym trójkącie są odpowiednio równe bokowi i dwóm przyległym do niego kątom w drugim trójkącie, to trójkąty te są przystające.



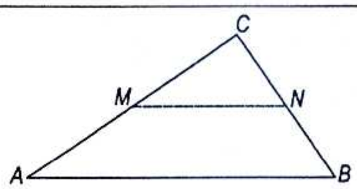
kbk

- **Cecha przystawania trójkątów prostokątnych.**
Jeżeli przeciwprostokątna i przyprostokątna jednego trójkąta równają się odpowiednio przeciwprostokątnej i przyprostokątnej drugiego trójkąta, to trójkąty te są przystające.



i) **Twierdzenie o odcinku łączącym środki boków trójkąta.**

Jeżeli w dowolnym trójkącie połączymy środki dowolnych dwóch boków, to powstały odcinek jest równoległy do trzeciego boku i jego długość jest równa połowie długości trzeciego boku.



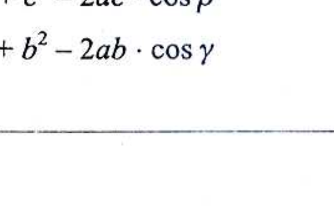
$$|MN| = \frac{1}{2}|AB| \wedge MN \parallel AB$$

j) **Twierdzenie sinusów i twierdzenie cosinusów.**

- **Twierdzenie sinusów.**
W dowolnym trójkącie stosunek długości boku do sinusa kąta leżącego naprzeciwko tego boku jest stały i równy średnicy okręgu opisanego na tym trójkącie.

R – oznacza promień okręgu opisanego na trójkącie.

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R$$



- **Twierdzenie cosinusów.**
W dowolnym trójkącie kwadrat długości jednego boku jest równy sumie kwadratów długości dwóch pozostałych boków, zmniejszonej o podwojony iloczyn długości tych boków i cosinusa kąta zawartego między tymi bokami.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos\beta$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\gamma$$

k) **Pole trójkąta**

$$P=\frac{1}{2}ah_a=\frac{1}{2}bh_b=\frac{1}{2}ch_c$$

$$P=\frac{1}{2}ab\sin\gamma=\frac{1}{2}bc\sin\alpha=\frac{1}{2}ac\sin\beta$$

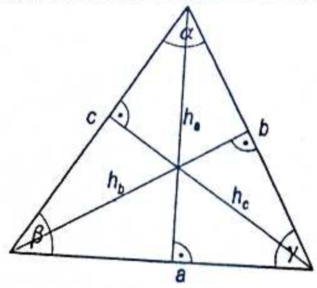
$$P=\frac{abc}{4R}$$

$$P=p\cdot r$$

$$P=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}\ \text{(wzór Herona)}$$

Oznaczenia: R – długość promienia okręgu opisanego na trójkącie, r – długość promienia okręgu wpisanego w trójkąt, h_a, h_b, h_c – długości wysokości opuszczonych odpowiednio na boki a, b, c (lub ich przedłużenia),

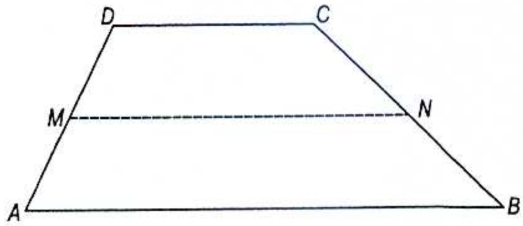
$p=\dfrac{a+b+c}{2}$ – połowa obwodu trójkąta.



3. **Czworokąty**.

a) **Trapez**.

- **Trapezy** to czworokąty mające co najmniej jedną parę boków równoległych.
- **Twierdzenie o linii środkowej trapezu**. W dowolnym trapezie odcinek łączący środki ramion jest równoległy do podstaw trapezu i jego długość jest średnią arytmetyczną długości podstaw.

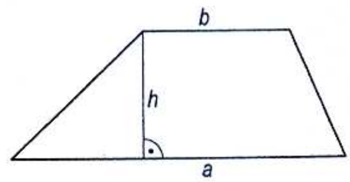


$$|MN|=\frac{|AB|+|CD|}{2}\wedge MN\parallel AB\wedge MN\parallel CD$$

- **Pole trapezu.**

  $P=\dfrac{a+b}{2}\cdot h$,

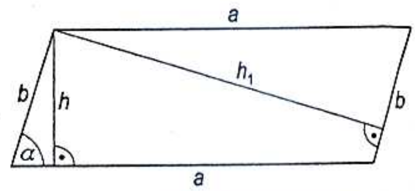
  gdzie a, b – długości podstaw trapezu, h – długość wysokości.



- **Pole równoległoboku.**

  $P=a\cdot h=b\cdot h_1$

  $P=ab\sin\alpha$

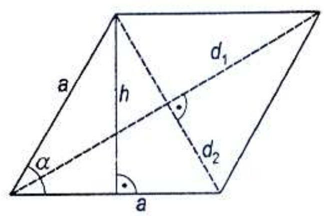


- **Pole rombu.**

  $P=a\cdot h$

  $P=a^2\sin\alpha$

  $P=\dfrac{1}{2}d_1\cdot d_2$



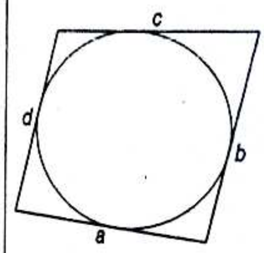
<table>
<tr>
<td>b)</td>
<td>

Okrąg wpisany w czworokąt i okrąg opisany na czworokącie.

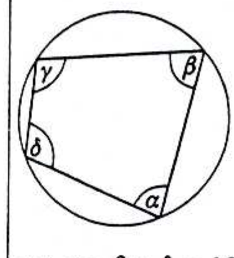
- **Okrąg można wpisać w czworokąt** wtedy i tylko wtedy, gdy sumy długości przeciwległych boków czworokąta są równe.

- **Okrąg można opisać na czworokącie** wtedy i tylko wtedy, gdy sumy miar przeciwległych kątów czworokąta są równe i wynoszą 180°.

</td>
<td>



$a + c = b + d$



$\alpha + \gamma = \beta + \delta = 180°$

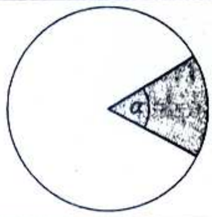
</td>
</tr>
</table>

4. **Kąty środkowe i wpisane. Pole koła, pole wycinka koła, długość łuku okręgu.**

<table>
<tr>
<td>a)</td>
<td>

Kątem środkowym koła nazywamy kąt, którego wierzchołek znajduje się w środku koła.

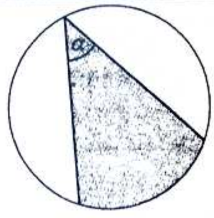
</td>
<td>



</td>
</tr>
<tr>
<td>b)</td>
<td>

Kątem wpisanym w koło nazywamy kąt wypukły, wyznaczony przez dwie półproste zawierające cięciwy o wspólnym końcu będącym wierzchołkiem kąta.

</td>
<td>



</td>
</tr>
<tr>
<td>c)</td>
<td>

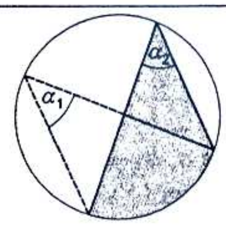
Twierdzenia o kącie środkowym i wpisanym.

- Kąty wpisane oparte na tym samym łuku mają równe miary.

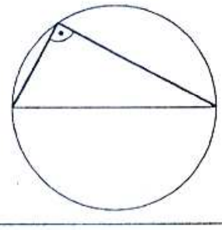
- Jeśli kąt wpisany i kąt środkowy są oparte na tym samym łuku, to miara kąta środkowego jest dwa razy większa od miary kąta wpisanego.

- Kąt wpisany oparty na półokręgu jest kątem prostym.

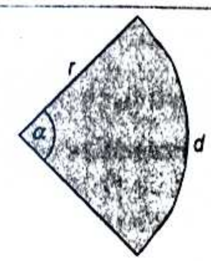
</td>
<td>



$\alpha_1 = \alpha_2$



</td>
</tr>
</table>

d)	Jeśli r oznacza długość promienia koła, to **pole koła** $P = \pi r^2$, **obwód koła** $L = 2\pi r$. **Pole wycinka koła**, odpowiadającego kątowi środkowemu α: $P_W = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot \pi r^2$ (miara α wyrażona w stopniach) $P_W = \frac{\alpha r^2}{2}$, (miara α wyrażona w radianach). **Długość d łuku okręgu**, odpowiadającego kątowi środkowemu α: $d = \frac{\alpha}{180^\circ} \cdot \pi r$, (miara α wyrażona w stopniach) $d = \alpha r$, (miara α wyrażona w radianach).	

5. **Wektory**.

a) **Wektorem** $\overrightarrow{AB}$ o początku $A(x_A, y_A)$ i końcu $B(x_B, y_B)$ nazywamy uporządkowaną parę punktów na płaszczyźnie.

- **Współrzędne wektora**: $\overrightarrow{AB} = [x_B - x_A, y_B - y_A]$.
- **Długość wektora**: $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$.

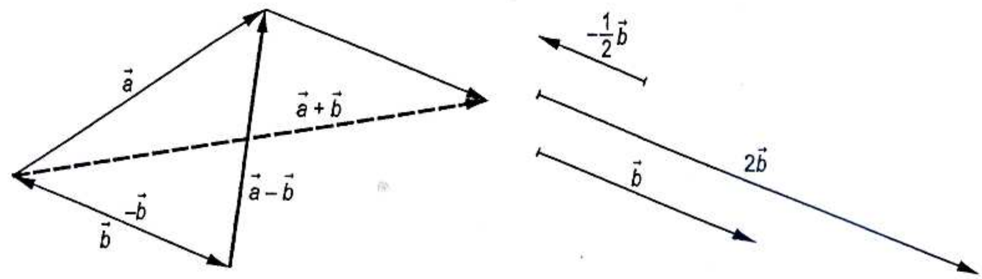
b) Dwa wektory są **równe**, jeśli mają te same współrzędne. Geometrycznie równość wektorów oznacza, że mają one ten sam kierunek, zwrot i długość.

c) Wektor $\overrightarrow{BA}$ nazywamy **przeciwnym** do wektora $\overrightarrow{AB}$. Oba wektory mają ten sam kierunek i długość, lecz przeciwne zwroty. Odpowiednie współrzędne tych wektorów są liczbami przeciwnymi.

d) Wektory niezerowe $\vec{a} = [a_1, a_2]$ i $\vec{b} = [b_1, b_2]$ są **równoległe** $\Leftrightarrow a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1 = 0$.

e) Jeżeli $\vec{a} = [a_1, a_2]$ i $\vec{b} = [b_1, b_2]$, to

- **sumą** wektorów $\vec{a}$ i $\vec{b}$ jest wektor o współrzędnych $\vec{a} + \vec{b} = [a_1 + b_1, a_2 + b_2]$
- **różnicą** wektorów $\vec{a}$ i $\vec{b}$ jest wektor o współrzędnych $\vec{a} - \vec{b} = [a_1 - b_1, a_2 - b_2]$
- **iloczynem** wektora $\vec{a} = [a_1, a_2]$ przez liczbę rzeczywistą k jest wektor o współrzędnych $k \cdot \vec{a} = [ka_1, ka_2]$



6. **Przekształcenia geometryczne izometryczne.**

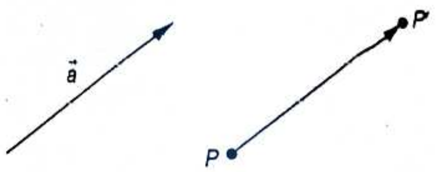
Przekształceniem izometrycznym l płaszczyzny π nazywamy przekształcenie, które nie zmienia odległości między punktami płaszczyzny:

$$\bigwedge_{X,Y \in \pi} |XY| = |X'Y'|, \quad \text{gdzie } X' = l(X) \text{ i } Y' = l(Y).$$

7. **Przykłady izometrii.**

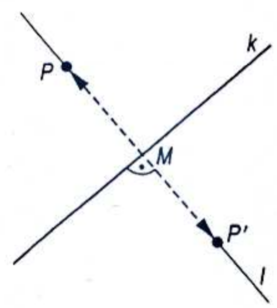
a) **Przesunięcie równoległe.**

- **Przesunięciem równoległym** (translacją) o dany wektor nazywamy takie przekształcenie płaszczyzny, w którym każdemu punktowi P tej płaszczyzny jest przyporządkowany taki punkt P', że $\overrightarrow{PP'} = \vec{a}$.
- Obrazem punktu $P(x, y)$ w przesunięciu równoległym o wektor $\vec{a} = [a_1, a_2]$ jest punkt $P'(x + a_1, y + a_2)$.



b) **Symetria osiowa.**

- **Symetrią osiową** względem prostej k nazywamy takie przekształcenie geometryczne, w którym każdemu punktowi P tej płaszczyzny jest przyporządkowany taki punkt P', że
  - punkty P i P' leżą na prostej l prostopadłej do prostej k,
  - wektory $\overrightarrow{MP}$ i $\overrightarrow{MP'}$ są przeciwne (M jest punktem wspólnym prostej PP' i prostej k).
- W symetrii osiowej względem osi OX obrazem punktu $P(x, y)$ jest punkt $P'(x, -y)$, zaś w symetrii osiowej względem osi OY obrazem punktu $P(x, y)$ jest punkt $P'(-x, y)$.
- Jeżeli F jest dowolną figurą na płaszczyźnie, to prostą a nazywamy **osią symetrii** figury F, jeśli obrazem figury F w symetrii względem prostej a jest ta sama figura F. O figurze F mówimy wówczas, że jest figurą osiowosymetryczną.

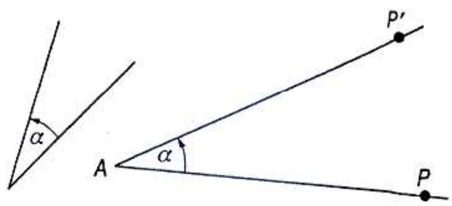


c) **Symetria środkowa.**

- **Symetrią środkową** względem punktu O nazywamy takie przekształcenie geometryczne, w którym każdemu punktowi P tej płaszczyzny jest przyporządkowany taki punkt P', że wektory $\overrightarrow{OP}$ i $\overrightarrow{OP'}$ są przeciwne. Punkt O nazywamy środkiem symetrii.
- W symetrii środkowej względem punktu (0,0) obrazem punktu $P(x, y)$ jest punkt $P'(-x, -y)$.
- Punkt O nazywamy **środkiem symetrii** figury F, jeśli obrazem figury F w symetrii środkowej względem punktu O jest ta sama figura F. O figurze F mówimy wówczas, że jest figurą środkowosymetryczną.

d) **Obrót.**

Obrotem dookoła punktu A o kąt skierowany α nazywamy takie przekształcenie geometryczne, w którym
- punktowi A przyporządkowany jest punkt A,
- każdemu punktowi $P \neq A$ przyporządkowany jest punkt P', że $\sphericalangle PAP' = \sphericalangle\alpha$ i $|AP| = |AP'|$.

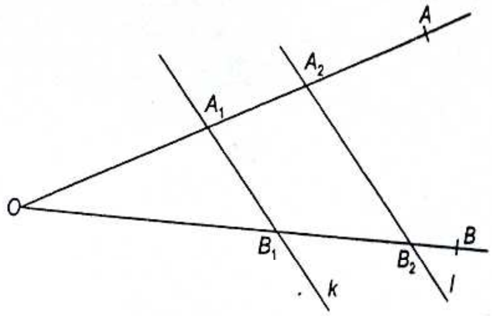


8. **Twierdzenie Talesa i twierdzenie odwrotne do twierdzenia Talesa.**

a) **Twierdzenie Talesa.**

Jeżeli ramiona kąta przetniemy dwiema prostymi równoległymi A_1B_1 oraz A_2B_2, to stosunek długości odcinków wyznaczonych przez te proste na ramieniu OA jest równy stosunkowi długości odpowiednich odcinków wyznaczonych przez te proste na ramieniu OB:

$$\frac{|OA_1|}{|A_1A_2|}=\frac{|OB|}{|B_1B_2|}$$



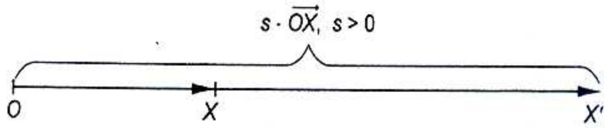
b) **Twierdzenie odwrotne do twierdzenia Talesa.**

Jeżeli długości odcinków wyznaczonych przez dwie proste na jednym ramieniu kąta są proporcjonalne do długości odpowiednich odcinków wyznaczonych na drugim ramieniu kąta, to te proste są równoległe.

9. **Jednokładność i podobieństwo** (przekształcenia nieizometryczne).

a) **Jednokładnością** o środku O i skali $s \neq 0$ nazywamy takie przekształcenie płaszczyzny, w którym każdemu punktowi X tej płaszczyzny jest przyporządkowany taki punkt X', że

$$\overrightarrow{OX'}=s\cdot\overrightarrow{OX}$$



b) **Podobieństwem** P o skali $s>0$ nazywamy takie przekształcenie płaszczyzny, które dowolnym punktom A i B płaszczyzny przyporządkowuje takie punkty A' i B', że

$$|A'B'|=s\cdot|AB|.$$

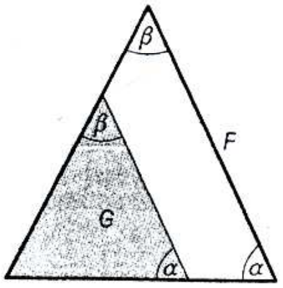
Mówimy, że figury F i G są podobne ($F\sim G$), jeżeli istnieje podobieństwo P, przekształcające F na G.

c) **Cechy podobieństwa trójkątów.**

- cecha ***bbb***.
  Jeżeli boki jednego trójkąta są proporcjonalne do odpowiednich boków drugiego trójkąta, to trójkąty te są podobne.
- cecha ***bkb***.
  Jeżeli dwa boki jednego trójkąta są proporcjonalne do odpowiednich dwóch boków drugiego trójkąta oraz kąty między tymi bokami są równe, to trójkąty te są podobne.
- cecha ***kkk***.
  Jeżeli dwa kąty jednego trójkąta są równe odpowiednim dwóm kątom drugiego trójkąta, to trójkąty te są podobne.

d) **Związek między polami figur podobnych.**

Jeżeli figura F jest obrazem figury G w podobieństwie o skali $s>0$, to pole figury F jest iloczynem kwadratu skali podobieństwa i pola figury G.



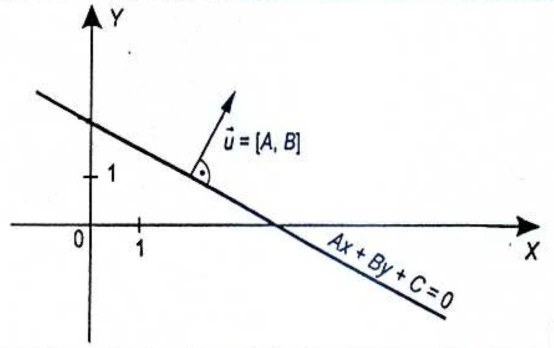
$$P_F=s^2\cdot P_G$$

VII. GEOMETRIA ANALITYCZNA

1. **Równanie prostej na płaszczyźnie.**

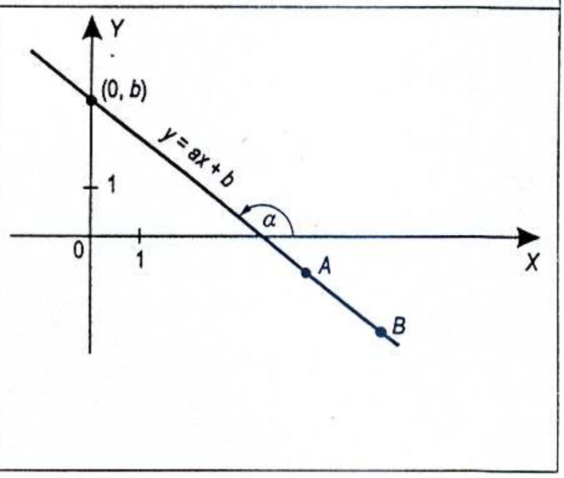
a) **Równanie ogólne** prostej
$l: Ax + By + C = 0$
gdzie $A, B, C \in \boldsymbol{R}, A^2 + B^2 > 0$;
wektor $\vec{u} = [A, B]$ jest prostopadły do prostej l

Za pomocą równania ogólnego można przedstawić każdą prostą na płaszczyźnie.



b) **Równanie kierunkowe** prostej
$l: y = ax + b$
gdzie $a, b \in \boldsymbol{R}$;
$a = \text{tg}\,\alpha$ (tangens kąta nachylenia prostej l do osi OX)

Równaniem kierunkowym można opisać każdą prostą na płaszczyźnie, z wyjątkiem prostych równoległych do osi OY.



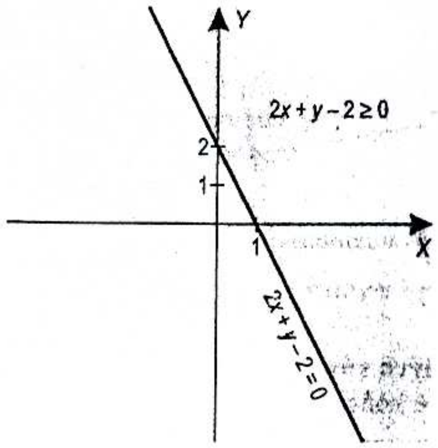
c) **Równanie prostej przechodzącej przez dwa dane punkty** $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$
$(y - y_A)(x_B - x_A) = (y_B - y_A)(x - x_A)$

2. **Równoległość i prostopadłość prostych.**

Równania prostych	Warunek równoległości	Warunek prostopadłości
W postaci ogólnej $k: A_1x + B_1y + C_1 = 0$ $l: A_2x + B_2y + C_2 = 0$ gdy $A_1^2 + B_1^2 > 0$ i $A_2^2 + B_2^2 > 0$	$l \parallel k \Leftrightarrow A_1B_2 - A_2B_1 = 0$	$l \perp k \Leftrightarrow A_1A_2 + B_1B_2 = 0$
W postaci kierunkowej $k: y = a_1x + b_1$ $l: y = a_2x + b_2$	$l \parallel k \Leftrightarrow a_1 = a_2$	$l \perp k \Leftrightarrow a_1a_2 = -1$, gdzie $a_1 \neq 0$ i $a_2 \neq 0$

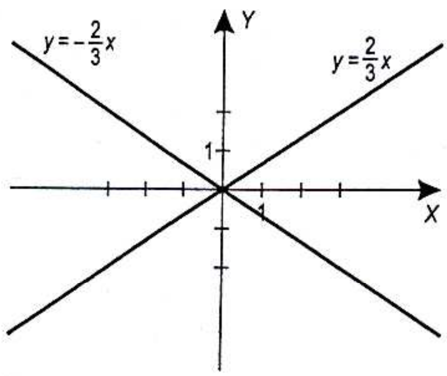
3. **Opis półpłaszczyzny za pomocą nierówności.**
Wykresem nierówności pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi ($Ax + By + C < 0$, $Ax + By + C > 0$, $Ax + By + C \leq 0$, $Ax + By + C \geq 0$, gdzie $A^2 + B^2 > 0$) jest jedna z półpłaszczyzn (z krawędzią, jeśli nierówność jest nieostra, lub bez krawędzi, jeśli nierówność jest ostra), ograniczona prostą o równaniu $Ax + By + C = 0$.

Przykład.
Zbiór punktów, których współrzędne (x, y) spełniają nierówność $2x + y - 2 \geq 0$ przedstawiony jest na rysunku:

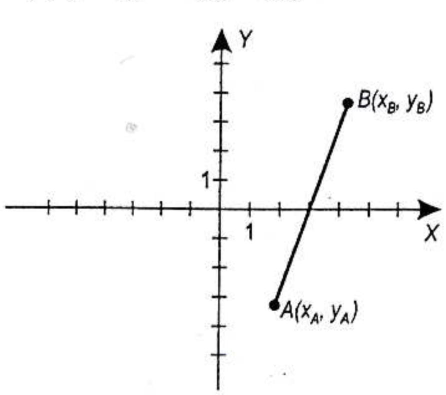


4. **Równanie sumy prostych na płaszczyźnie.**
$(A_1x + B_1y + C_1)(A_2x + B_2y + C_2) = 0$, gdzie $A_1^2 + B_1^2 > 0$ i $A_2^2 + B_2^2 > 0$.

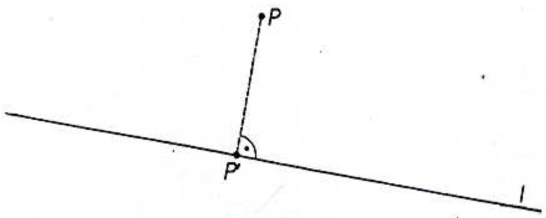
Przykład.
Aby zilustrować na płaszczyźnie zbiór punktów spełniających równanie
$$4x^2 - 9y^2 = 0$$
przekształcamy je do postaci
$$(2x - 3y)(2x + 3y) = 0 \Leftrightarrow 2x - 3y = 0 \vee 2x + 3y = 0 \Leftrightarrow y = \frac{2}{3}x \vee y = -\frac{2}{3}x.$$



5. **Pojęcie odległości na płaszczyźnie kartezjańskiej.**
   a) Jeśli na płaszczyźnie dane są punkty $A(x_A, y_A)$ i $B(x_B, y_B)$, to **odległością euklidesową** tych punktów jest liczba $|AB| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$.

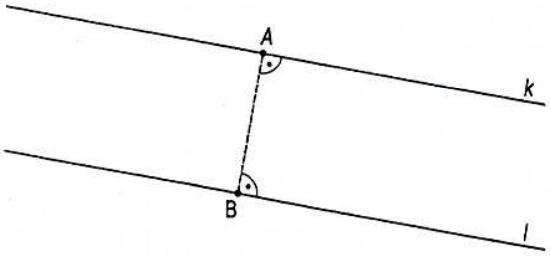


   b) **Odległością punktu *P* od prostej *l*** nazywamy długość odcinka prostopadłego do prostej *l*, którego jednym końcem jest punkt *P*, a drugim punkt *P'* należący do prostej *l*.



Jeżeli prosta l opisana jest równaniem ogólnym l: $Ax + By + C = 0$, gdzie $A^2 + B^2 > 0$, to odległość punktu $P(x_P, y_P)$ od prostej l wynosi $d(P, l) = \dfrac{|Ax_P + By_P + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$.

c) **Odległością dwóch prostych równoległych** k i l jest długość dowolnego odcinka AB prostopadłego do obu prostych, o końcach należących do tych prostych.



Jeżeli dane są dwie proste równoległe o równaniach:
k: $Ax + By + C_1 = 0$ i l: $Ax + By + C_2 = 0$, gdzie $A^2 + B^2 > 0$, to ich odległość wynosi
$d = \dfrac{|C_1 - C_2|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$.

6. **Okrąg i koło w układzie współrzędnych.**

a) **Okręgiem** o środku O i promieniu r ($r > 0$) nazywamy zbiór punktów płaszczyzny, których odległość od punktu O jest równa r.

$o(O, r) = \{X: |OX| = r\}$.

Równanie okręgu o środku $O(a, b)$ i promieniu $r > 0$ ma postać

$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$

lub

$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$, gdzie $c = a^2 + b^2 - r^2 > 0$.

b) **Kołem** o środku O i promieniu r ($r > 0$) nazywamy zbiór punktów płaszczyzny, których odległość od punktu O jest mniejsza lub równa r.

$o(O, r) = \{X: |OX| \leq r\}$.

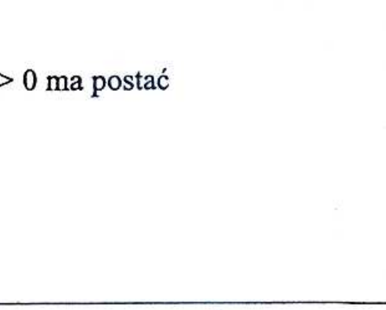
Nierówność opisująca koło o środku $O(a, b)$ i promieniu $r > 0$ ma postać

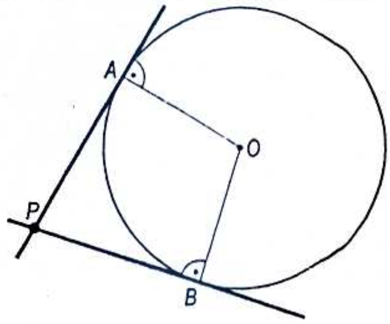
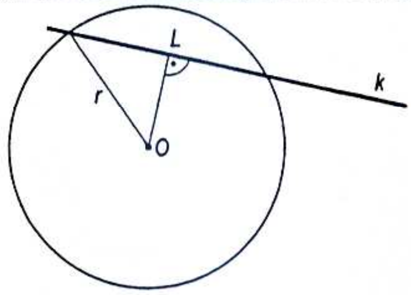
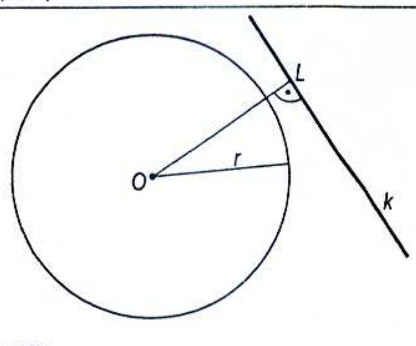
$(x - a)^2 + (y - b)^2 \leq r^2$

lub

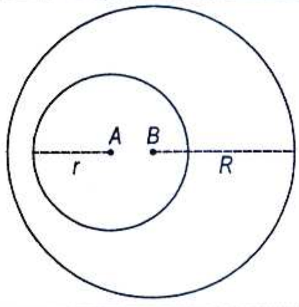
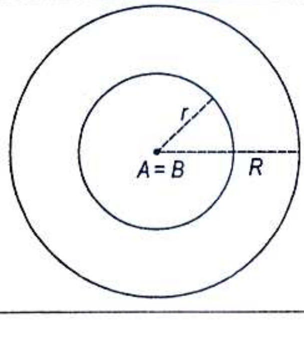
$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c \leq 0$, gdzie $c = a^2 + b^2 - r^2 > 0$.

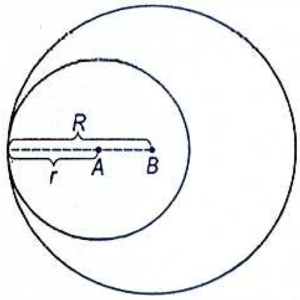
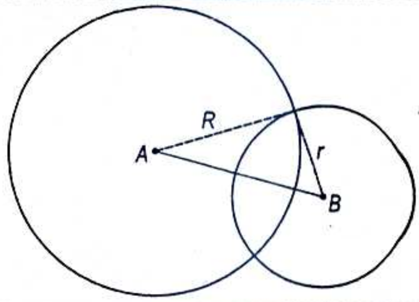
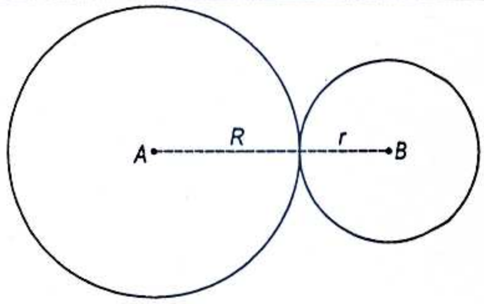
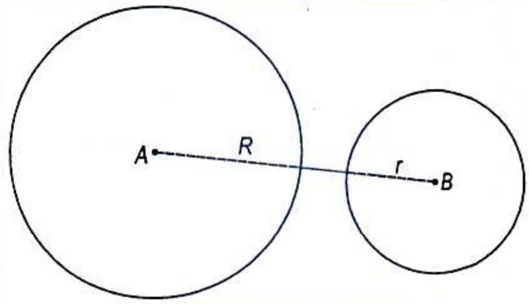
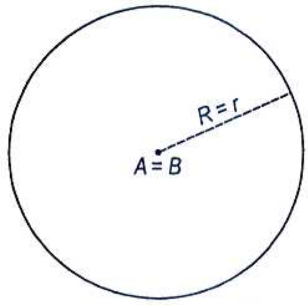
7. **Wzajemne położenie prostej i okręgu.**

a)	**Styczna do okręgu.** • Prostą, która ma tylko jeden punkt wspólny z okręgiem, nazywamy **styczną do okręgu**. • Prosta jest **styczną do okręgu** wtedy i tylko wtedy, gdy promień poprowadzony do punktu styczności jest prostopadły do tej prostej. • Prosta jest **styczną do okręgu** wtedy i tylko wtedy, gdy odległość środka okręgu od tej prostej jest równa długości promienia.	 $r = d(O, k)$ $r = \lvert OA \rvert$

	• **Twierdzenie o odcinkach stycznych.** Odcinki dwóch stycznych poprowadzonych do okręgu z punktu zewnętrznego, wyznaczone przez ten punkt i odpowiednie punkty styczności, są równej długości.	 $\lvert PA\rvert = \lvert PB\rvert$
b)	**Sieczna okręgu.** Prosta jest **sieczną okręgu** wtedy i tylko wtedy, gdy odległość środka okręgu od tej prostej jest mniejsza od długości promienia okręgu	 $\lvert OL\rvert < r$
c)	**Prosta jest rozłączna z okręgiem.** Prosta jest **rozłączna z okręgiem** wtedy i tylko wtedy, gdy odległość środka okręgu od tej prostej jest większa od długości promienia okręgu.	 $\lvert OL\rvert > r$

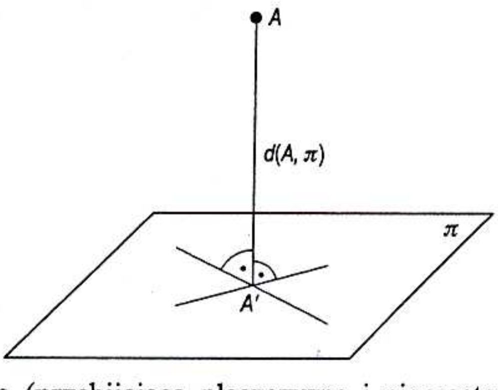
8. **Wzajemne położenie dwóch okręgów.**

a)	**Okręgi rozłączne wewnętrznie.** $\lvert AB\rvert < \lvert R - r\rvert \neq 0$	
b)	**Okręgi współśrodkowe.** $\lvert AB\rvert = 0,\ r \neq R$	

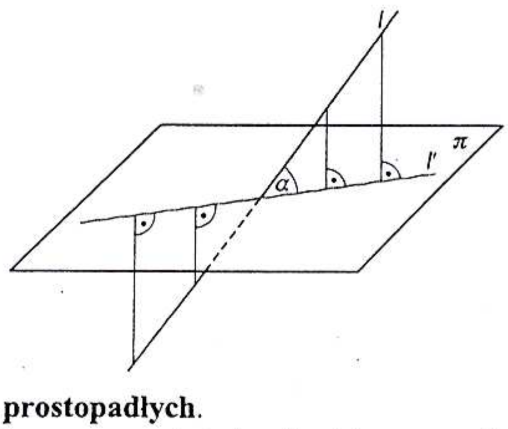
c)	**Okręgi styczne wewnętrznie.** $\|AB\| = \|R - r\| \neq 0$	
d)	**Okręgi przecinające się.** $\|R - r\| < \|AB\| < R + r$	
e)	**Okręgi styczne zewnętrznie.** $\|AB\| = R + r$	
f)	**Okręgi rozłączne zewnętrznie.** $\|AB\| > R + r$	
g)	**Okręgi pokrywające się.** $\|AB\| = 0, R = r$	

VIII. STEREOMETRIA

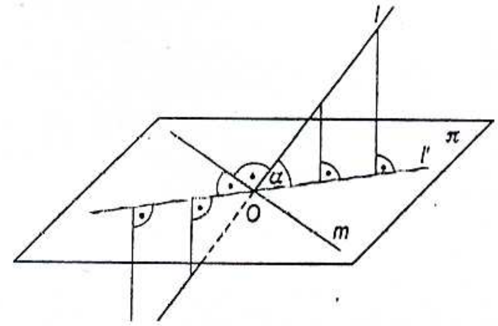
1. **Płaszczyzny i proste w przestrzeni.**
   a) **Dwie różne płaszczyzny** w przestrzeni
      – nie mają punktów wspólnych
      lub
      – ich częścią wspólną jest prosta.
   b) Wzajemne **położenie prostej i płaszczyzny** w przestrzeni
      – prosta nie ma punktów wspólnych z płaszczyzną
      lub
      – prosta ma tylko jeden punkt wspólny z płaszczyzną (przebija płaszczyznę)
      lub
      – prosta leży na płaszczyźnie.
   c) Wzajemne **położenie prostych** w przestrzeni
      – proste nie leżą w jednej płaszczyźnie (**proste skośne**)
      lub
      – leżą w jednej płaszczyźnie (proste przecinają się lub pokrywają się lub nie mają punktów wspólnych).
   d) Prosta i płaszczyzna są do siebie **prostopadłe,** jeśli prosta jest prostopadła do każdej prostej leżącej na płaszczyźnie i przecinającej daną prostą.
   e) **Odległością punktu A od płaszczyzny** nazywamy długość odcinka AA', gdzie A' jest rzutem prostokątnym punktu A na tę płaszczyznę.



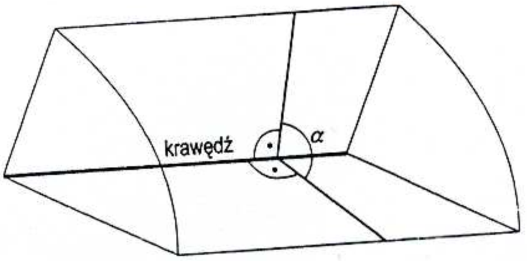
   f) **Kątem między prostą** (przebijającą płaszczyznę i nieprostopadłą do niej) **a płaszczyzną** nazywamy kąt między tą prostą a jej rzutem prostokątnym na tę płaszczyznę.



   g) **Twierdzenie o trzech prostopadłych.**
   Jeśli prosta l przebija płaszczyznę π i nie jest do niej prostopadła oraz prosta m, leżąca w płaszczyźnie π, jest prostopadła do rzutu prostokątnego l' prostej l na płaszczyznę π i przechodzi przez punkt przebicia prostej l z płaszczyzną π, to prosta m jest prostopadła do prostej l.

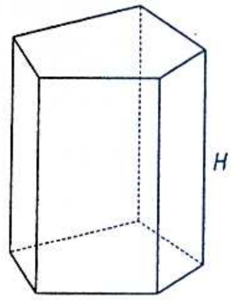


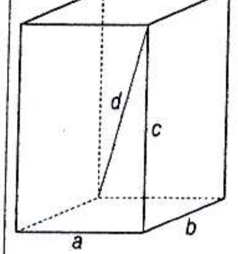
h) **Kątem dwuściennym** nazywamy sumę dwóch półpłaszczyzn o wspólnej krawędzi i jednego z dwóch obszarów, które te płaszczyzny wycinają w przestrzeni.
Kątem liniowym kąta dwuściennego nazywamy część wspólną kąta dwuściennego i płaszczyzny prostopadłej do jego krawędzi.

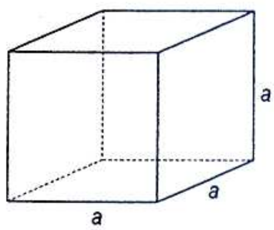


α – kąt liniowy

2. **Graniastosłupy.**

<table>
<tr><td>a)</td><td>Graniastosłupem nazywamy wielościan, którego dwie ściany, zwane podstawami, są przystającymi wielokątami leżącymi w płaszczyznach równoległych, a pozostałe ściany, zwane ścianami bocznymi, są równoległobokami, których wszystkie wierzchołki są jednocześnie wierzchołkami podstaw.</td><td rowspan="3">

P_p – pole podstawy
P_b – pole powierzchni bocznej
P_c – pole powierzchni całkowitej
V – objętość bryły
H – długość wysokości bryły
$V = P_p \cdot H,\ P_c = 2P_p + Pb$</td></tr>
<tr><td>b)</td><td>Graniastosłup prosty to graniastosłup, w którym wszystkie krawędzie boczne są prostopadłe do podstaw.</td></tr>
<tr><td>c)</td><td>Graniastosłup prawidłowy to graniastosłup prosty, którego podstawy są wielokątami foremnymi.</td></tr>
<tr><td>d)</td><td>Prostopadłościan to graniastosłup, którego wszystkie ściany są prostokątami.


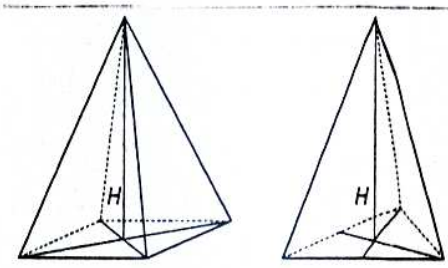
$P_c = 2(ab + ac + bc)$
$V = abc$
$d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$</td><td>Sześcian to prostopadłościan, którego ściany są kwadratami.


$P_c = 6a^2$
$V = a^3$</td></tr>
</table>

3. Ostrosłupy.

a) **Ostrosłupem** nazywamy wielościan, którego jedna ściana, zwana podstawą, jest dowolnym wielokątem, a pozostałe ściany, zwane ścianami bocznymi, są trójkątami o wspólnym wierzchołku S, który nazywamy wierzchołkiem ostrosłupa.

b) **Wysokością ostrosłupa** nazywamy odcinek łączący wierzchołek ostrosłupa z jego rzutem prostokątnym na płaszczyznę podstawy.



P_p – pole podstawy

P_b – pole powierzchni bocznej

P_c – pole powierzchni całkowitej

V – objętość bryły

H – długość wysokości bryły

$V = \frac{1}{3} P_p \cdot H, \; P_c = P_p + P_b$

c) **Kąty w ostrosłupie**

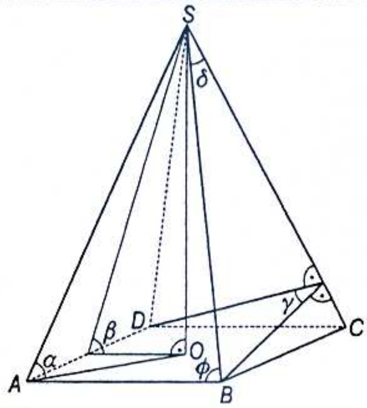
α – kąt nachylenia krawędzi bocznej AS do płaszczyzny podstawy

β – kąt nachylenia ściany bocznej ADS do płaszczyzny podstawy

γ – kąt między ścianami bocznymi BCS i CDS

δ – kąt płaski ściany bocznej BCS przy wierzchołku

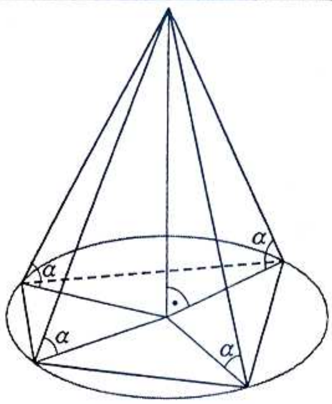
ϕ – kąt między krawędzią boczną BS a krawędzią podstawy AB



d) **Ostrosłup prosty** to ostrosłup, spełniający warunki:

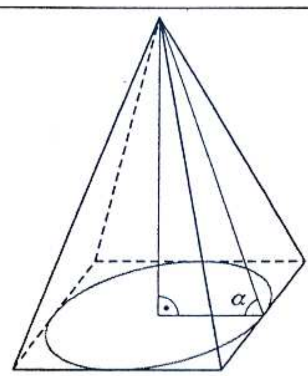
- na podstawie ostrosłupa można opisać okrąg
- spodek wysokości ostrosłupa znajduje się w środku okręgu opisanego na podstawie.

Ostrosłup jest **prosty** wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie jego krawędzie boczne mają jednakową długość i są nachylone do płaszczyzny podstawy pod tym samym kątem.



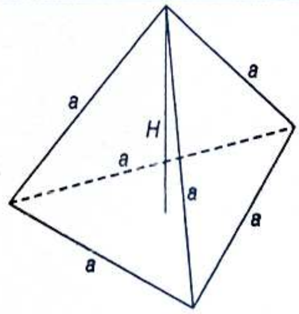
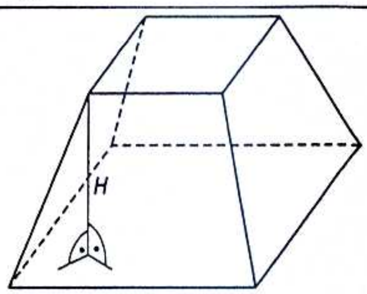
e) Jeśli wszystkie **ściany boczne ostrosłupa są nachylone do płaszczyzny podstawy pod tym samym kątem**, to

- w podstawę ostrosłupa można wpisać okrąg
- spodkiem wysokości ostrosłupa jest środek okręgu wpisanego w podstawę.

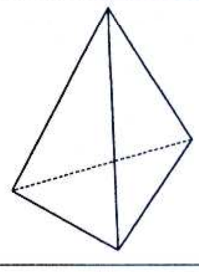
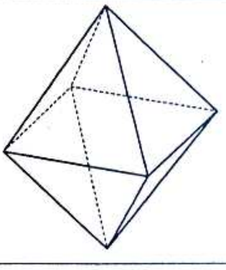
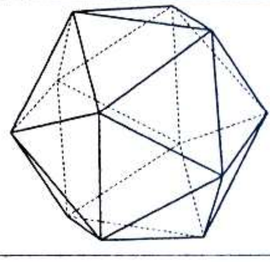


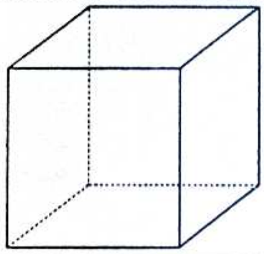
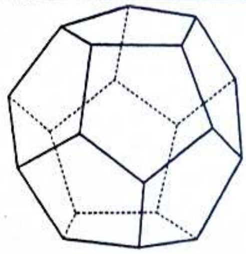
f) **Ostrosłup prawidłowy** to ostrosłup prosty, którego podstawą jest wielokąt foremny.

Ściany boczne ostrosłupa prawidłowego są przystającymi trójkątami równoramiennymi.

g)	**Czworościan** to ostrosłup, którego podstawą jest trójkąt. Odcinki łączące wierzchołki czworościanu ze środkami ciężkości przeciwległych ścian przecinają się w jednym punkcie (tzw. środek ciężkości czworościanu), który dzieli każdy z tych odcinków w stosunku 3 : 1, licząc od wierzchołka.	
	Czworościan, którego wszystkie ściany są trójkątami równobocznymi nazywa się **czworościanem foremnym**.	czworościan foremny $P_c = a^2\sqrt{3}$ $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$
h)	**Ostrosłup ścięty** jest to część ostrosłupa zawarta między jego podstawą i przekrojem płaszczyzną równoległą do podstawy. Ściany boczne ostrosłupa ściętego są trapezami, a podstawy wielokątami podobnymi.	 $V = \frac{1}{3}\cdot H(P_1 + P_2 + \sqrt{P_1 \cdot P_2})$ gdzie P_1, P_2 – pola podstaw ostrosłupa ściętego

4. **Wielościany foremne.**
   a) **Wielościanem foremnym** nazywamy wielościan wypukły, którego wszystkie ściany są przystającymi wielokątami foremnymi i każdy wierzchołek należy do takiej samej liczby ścian.
   b) Istnieje pięć rodzajów wielościanów foremnych:

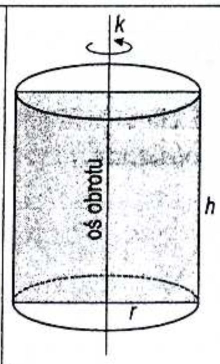
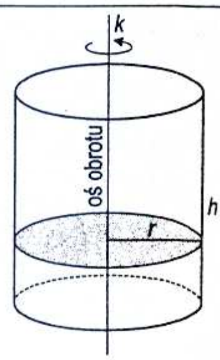
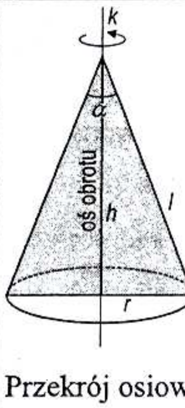
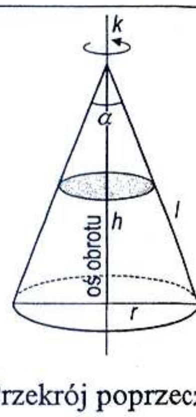
czworościan foremny **4 wierzchołki** 4 ściany 6 krawędzi	
ośmiościan foremny 6 wierzchołków 8 ścian 12 krawędzi	
dwudziestościan foremny 12 wierzchołków 20 ścian 30 krawędzi	

sześcian 8 wierzchołków 6 ścian 12 krawędzi	
dwunastościan foremny 20 wierzchołków 12 ścian 30 krawędzi	

c) Łącząc środki ścian ośmiościanu foremnego otrzymujemy sześcian i łącząc środki ścian sześcianu otrzymujemy ośmiościan foremny (sześcian i ośmiościan foremny są **wielościanami dualnymi**). Podobną własność mają dwunastościan foremny i dwudziestościan foremny. Czworościan foremny jest dualny ze sobą.

5. **Twierdzenie Eulera.**
Jeśli wielościan wypukły ma W – wierzchołków, $\acute{S}$ – ścian i K – krawędzi,
to $W + \acute{S} - K = 2$.

6. **Bryły obrotowe.**

a)	**Walcem** nazywamy bryłę obrotową otrzymaną w wyniku obrotu prostokąta dookoła prostej zawierającej jeden z boków prostokąta. r – długość promienia podstawy walca h – długość wysokości walca $V = \pi r^2 h$ $P_c = 2\pi rh + 2\pi r^2$	 Przekrój osiowy walca  Przekrój poprzeczny walca
b)	**Stożkiem** nazywamy bryłę obrotową otrzymaną w wyniku obrotu trójkąta prostokątnego dookoła prostej zawierającej przyprostokątną. r – długość promienia podstawy stożka h – długość wysokości stożka l – długość tworzącej stożka α – kąt rozwarcia stożka $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ $P_c = \pi rl + \pi r^2$	 Przekrój osiowy stożka  Przekrój poprzeczny stożka

c) **Stożek ścięty** jest to część stożka zawarta między jego podstawą i przekrojem poprzecznym płaszczyzną równoległą do podstawy wraz z tą podstawą i tym przekrojem.

R, r – promienie podstaw stożka ściętego

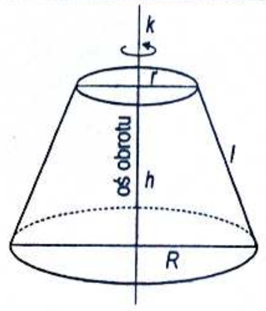
h – długość wysokości stożka ściętego

l – długość tworzącej stożka ściętego

$l = \sqrt{(R-r)^2 + h^2}$

$V = \frac{1}{3}\pi h(R^2 + rR + r^2)$

$P_b = \pi rl + \pi Rl$



d) **Kulą** o środku O i promieniu R nazywamy zbiór wszystkich punktów przestrzeni, których odległość od punktu O jest nie większa od R.

Kula jest bryłą obrotową powstałą przez obrót półkola dookoła prostej zawierającej średnicę półkola.

Sferą o środku O i promieniu R nazywamy zbiór wszystkich punktów przestrzeni, których odległość od punktu O jest równa R.

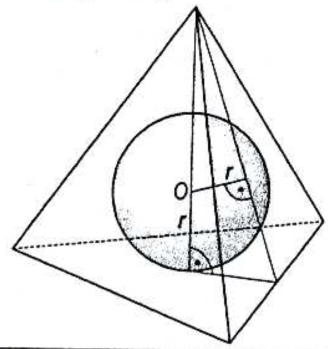
Sfera jest bryłą obrotową powstałą przez obrót półokręgu dookoła prostej zawierającej średnicę półokręgu.

$P = 4\pi R^2$

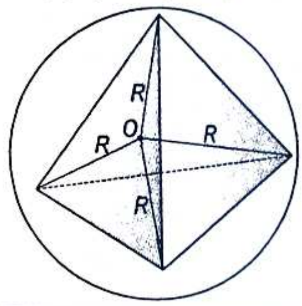
$V = \frac{4}{3}\pi R^3$

7. Bryła wpisana w bryłę.

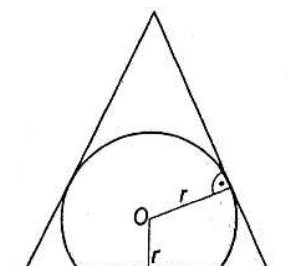
a) **Kula jest wpisana w wielościan,** jeśli jest styczna do każdej ściany wielościanu.



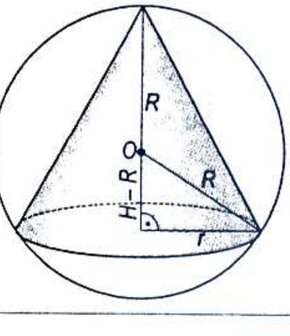
b) **Kula jest opisana na wielościanie,** jeśli wszystkie wierzchołki wielościanu należą do sfery wyznaczającej daną kulę.



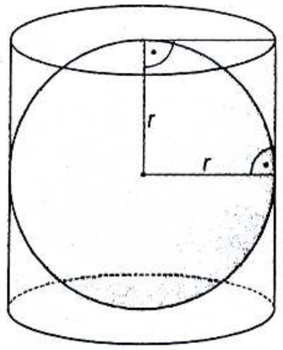
c) **Kula jest wpisana w stożek,** jeśli jest styczna do podstawy stożka i każdej jego tworzącej.



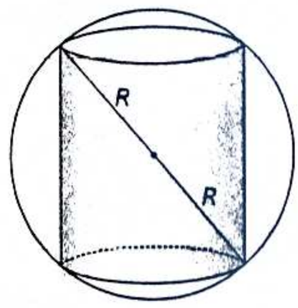
d) **Kula jest opisana na stożku,** jeśli okrąg podstawy stożka zawiera się w brzegu kuli (czyli w sferze wyznaczającej tę kulę) i wierzchołek stożka należy do brzegu tej kuli.



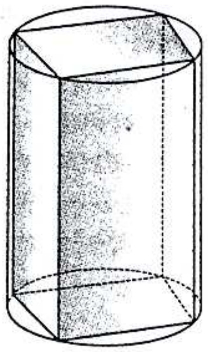
e) **Kula jest wpisana w walec**, jeśli jest styczna do podstaw walca i do każdej jego tworzącej.



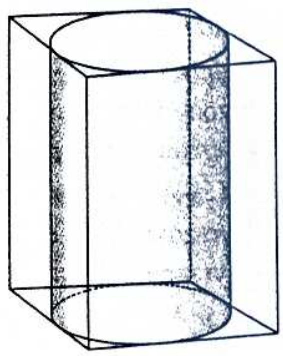
f) **Kula jest opisana na walcu**, jeśli okręgi podstaw stożka zawierają się w sferze wyznaczającej daną kulę.



g) **Graniastosłup jest wpisany w walec**, jeśli jego podstawy są wielokątami wpisanymi w podstawy walca.



h) **Graniastosłup jest opisany na walcu,** jeśli jego podstawy są opisane na podstawach walca.

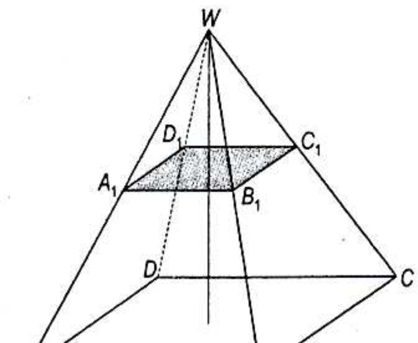


8. **Jednokładność i podobieństwo w przestrzeni.**

a) **Jednokładnością** o środku O i skali $s \neq 0$ nazywamy takie przekształcenie przestrzeni, w którym każdemu punktowi X przestrzeni jest przyporządkowany taki punkt X', że

$$\overrightarrow{OX'} = s \cdot \overrightarrow{OX}$$

Przykład.
Jeśli w ostrosłupie $ABCDW$ poprowadzimy przekrój $A_1B_1C_1D_1$ gdzie punkty A_1, B_1, C_1, D_1 są środkami krawędzi bocznych (jak na rysunku), to ostrosłup $ABCDW$ jest obrazem ostrosłupa $A_1B_1C_1D_1$W w jednokładności względem punktu W i skali $k = 2$.



b) **Podobieństwem** P o skali $s > 0$ nazywamy takie przekształcenie przestrzeni, które dowolnym punktom A i B przestrzeni przyporządkowuje takie punkty A' i B', że
$|A'B'| = s \cdot |AB|$.
Mówimy, że figury F i G są podobne ($F \sim G$), jeżeli istnieje podobieństwo P, przekształcające F na G.

c) **Zależność między objętościami brył podobnych.**
Jeżeli figura F jest obrazem figury G w podobieństwie o skali $s > 0$ to
$V_F = s^3 \cdot V_G$
gdzie V_F – objętość figury F, V_G – objętość figury G.

IX. RACHUNEK PRAWDOPODOBIEŃSTWA

1. **Pojęcia kombinatoryczne.**
   a) **Permutacją bez powtórzeń zbioru *n*-elementowego,** $n \in N_+$, nazywamy każdy n-wyrazowy ciąg utworzony ze wszystkich elementów danego zbioru n-elementowego.
   Liczba P_n permutacji bez powtórzeń zbioru n-elementowego ($n \in N_+$) wyraża się wzorem $\boldsymbol{P_n = n!}$
   b) **Wariacją *k*-wyrazową bez powtórzeń zbioru *n*-elementowego** ($k, n \in N_+$ i $k \le n$) nazywamy każdy k-wyrazowy ciąg, utworzony z k różnych elementów zbioru n-elementowego.
   Liczba k-wyrazowych wariacji bez powtórzeń zbioru n-elementowego ($k, n \in N_+$ i $k \le n$) wyraża się wzorem $V_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!}$.
   c) **Wariacją *k*-wyrazową z powtórzeniami zbioru *n*-elementowego,** $k, n \in N_+$ nazywamy każdy k-wyrazowy ciąg (mogących się powtarzać) elementów zbioru n-elementowego.
   Liczba k-wyrazowych wariacji z powtórzeniami zbioru n-elementowego (k, $n \in N_+$) wynosi $W_n^k = n^k$.
   d) **Kombinacją *k*-elementową bez powtórzeń zbioru *n*-elementowego,** $k, n \in N$ i $k \le n$, nazywamy każdy k-elementowy podzbiór tego zbioru, przy czym elementy tego podzbioru nie mogą się powtarzać.
   Liczba k-elementowych kombinacji bez powtórzeń zbioru n-elementowego ($k, n \in N$ i $k \le n$) jest równa $C_n^k = \binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$.

2. **Aksjomatyczna definicja prawdopodobieństwa.**
   Prawdopodobieństwem określonym na przestrzeni zdarzeń elementarnych Ω nazywamy taką funkcję P, która każdemu zdarzeniu $A \subset \Omega$ przyporządkowuje liczbę rzeczywistą $P(A)$ w taki sposób, że:
   ($A1$) $P(A) \ge 0$
   ($A2$) $P(\Omega) = 1$
   ($A3$) jeżeli $A \cap B = \varnothing$, to $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

3. **Własności prawdopodobieństwa.**
   Jeżeli P jest prawdopodobieństwem określonym na pewnej przestrzeni zdarzeń elementarnych Ω, to:
   a) $P(\varnothing) = 0$
   b) jeżeli $A \subset B$, to $P(A) \le P(B)$
   c) dla dowolnego zdarzenia $A \subset \Omega$ zachodzi nierówność $P(A) \le 1$
   d) $P(A') = 1 - P(A)$

e) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

f) jeżeli zdarzenia $A_1, A_2, \ldots\ldots, A_n$ wykluczają się parami, to
$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots\ldots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots\ldots + P(A_n)$.

4. **Klasyczna definicja prawdopodobieństwa.**
Jeżeli przestrzeń Ω jest skończona i wszystkie zdarzenia elementarne są jednakowo prawdopodobne, natomiast A jest dowolnym zdarzeniem tej przestrzeni, to $\boldsymbol{P(A) = \frac{\overline{\overline{A}}}{\overline{\overline{\Omega}}}}$.

5. **Prawdopodobieństwo warunkowe.**
Prawdopodobieństwem warunkowym zajścia zdarzenia A, pod warunkiem, że zajdzie zdarzenie B nazywamy liczbę $P(A \mid B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$, gdzie $A, B \subset \Omega$ i $P(B) > 0$.

6. Twierdzenie **o prawdopodobieństwie całkowitym.**
Jeżeli $A \subset \Omega$ jest dowolnym zdarzeniem, natomiast $B_1, B_2, B_3, \ldots\ldots, B_n \subset \Omega$ spełniają warunki:
– wykluczają się parami
– mają dodatnie prawdopodobieństwa
– $B_1 \cup B_2 \cup B_3 \cup \ldots\ldots \cup B_n = \Omega$
to $\boldsymbol{P(A) = P(A|B_1) \cdot P(B_1) + P(A|B_2) \cdot P(B_2) + \ldots\ldots + P(A|B_n) \cdot P(B_n)}$

7. **Niezależność zdarzeń.**

a) Dwa zdarzenia $A, B \subset \Omega$ nazywamy **niezależnymi** wtedy i tylko wtedy, gdy
$\boldsymbol{P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)}$.

b) Trzy zdarzenia $A, B, C \subset \Omega$ nazywamy **niezależnymi** jeśli spełnione są jednocześnie następujące warunki:
$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$
$P(A \cap C) = P(A) \cdot P(C)$
$P(B \cap C) = P(B) \cdot P(C)$
$P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$

8. **Schemat Bernoulliego.**

a) **Schematem Bernoulliego** nazywamy ciąg n doświadczeń losowych, spełniających następujące warunki:
– doświadczenia są niezależne
– każde z tych doświadczeń może zakończyć się na dwa sposoby: „sukcesem" lub „porażką"
– prawdopodobieństwo „sukcesu" jest w każdym z tych doświadczeń takie samo.

b) W ciągu n doświadczeń losowych, tworzących schemat Bernoulliego, prawdopodobieństwo zdarzenia A – **w n doświadczeniach otrzymamy k sukcesów**, jest równe:
$\boldsymbol{P(A) = P(S_n = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{n-k}}$, gdzie:
p – prawdopodobieństwo „sukcesu" w jednym doświadczeniu
q – prawdopodobieństwo „porażki" w jednym doświadczeniu
$p > 0, q > 0, p + q = 1, k, n \in N, 0 \le k \le n$.

Elementy statystyki opisowej

1. **Klasyfikacja danych statystycznych:**

   a) dane zawierają tylko wartości badanej cechy, np.

Średnie miesięczne wydatki w miesiącach I – VI (w złotych)	82	90	116	123	97	89

   b) dane zawierają wartości badanej cechy wraz z liczebnościami (dane tworzą szereg rozdzielczy z klasami jednowartościowymi), np.

Rodzaj oceny	**Liczba ocen danego rodzaju**
6	3
5	1
4	4
3	2
2	1

   c) dane tworzą szereg rozdzielczy z klasami będącymi przedziałami, np.

Wzrost (w cm)	**Liczba osób**
$\langle 150, 160)$	2
$\langle 160, 170)$	15
$\langle 170, 180)$	12
$\langle 180, 190)$	6

   Przy tworzeniu szeregu rozdzielczego korzystamy najczęściej ze wzorów:
   liczba klas w szeregu: $K \approx 1 + 3{,}3 \cdot \log n$,
   długość klasy: $L = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{K}$, gdzie $x_{\min}$ oraz $x_{\max}$ oznaczają odpowiednio najmniejszą i największą wśród danych.

2. **Obliczanie średniej z próby** (oznaczenie $\bar{x}$) i **średniego odchylenia standardowego z próby** (oznaczenie s).

Dane zawierają wartości badanej cechy	$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$	$s = \sqrt{\frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \ldots + (x_n - \bar{x})}{n}}$
Dane tworzą szereg rozdzielczy z klasami jednowartościowymi	$\bar{x} = \frac{x_1 n_1 + x_2 n_2 + \ldots + x_k n_k}{n_1 + n_2 + \ldots + n_k}$	$s = \sqrt{\frac{(x_1 - \bar{x})^2 \cdot n_1 + (x_2 - \bar{x})^2 \cdot n_2 + \ldots + (x_n - \bar{x})^2 \cdot n_k}{n_1 + n_2 + \ldots + n_k}}$
Dane tworzą szereg rozdzielczy z klasami będącymi przedziałami	$\bar{x} = \frac{\mathring{x}_1 n_1 + \mathring{x}_2 n_2 + \ldots + \mathring{x}_k n_k}{n_1 + n_2 + \ldots + n_k}$	$s = \sqrt{\frac{\left(\mathring{x}_1 - \bar{x}\right)^2 \cdot n_1 + \left(\mathring{x}_2 - \bar{x}\right)^2 \cdot n_2 + \ldots + \left(\mathring{x}_n - \bar{x}\right)^2 \cdot n_k}{n_1 + n_2 + \ldots + n_k}}$

gdzie:
n – liczebność próby
k – liczba klas
$x_1, x_2, \ldots, x_k$ – wartości badanej cechy
$n_1, n_2, \ldots, n_k$ – liczebności klas
$\mathring{x}_1, \mathring{x}_2, \ldots, \mathring{x}_k$ – środki przedziałów (klas)

3. **Obliczanie wariancji z próby** (oznaczenie s^2).
Wariancja z próby jest kwadratem średniego odchylenia standardowego z próby.

4. **Średnia arytmetyczna ważona.**
Średnią ważoną liczb rzeczywistych $x_1, x_2, \dots, x_n$ z wagami odpowiednio $w_1, w_2, \dots, w_n$ (przy założeniu, że $w_1, w_2, \dots, w_n > 0$) nazywamy liczbę

$$S_w = \frac{x_1 \cdot w_1 + x_2 \cdot w_2 + \dots + x_n \cdot w_n}{w_1 + w_2 + \dots + w_n}.$$

5. **Mediana z próby.**
Mediana z próby jest wartością cechy, którą ma środkowy element w uporządkowanym niemalejąco ciągu elementów badanej próby, jeśli liczba tych elementów jest nieparzysta, bądź średnia arytmetyczna dwóch środkowych wartości w tym ciągu, jeśli liczba elementów jest parzysta:

$$Me = \begin{cases} x_{\frac{n+1}{2}} & \text{gdy } n \text{ jest liczbą nieparzystą} \\ \dfrac{x_{\frac{n}{2}} + x_{\frac{n}{2}+1}}{2} & \text{gdy } n \text{ jest liczbą parzystą.} \end{cases}$$

6. **Obliczanie mediany z próby**·
   a) jeśli dane zawierają tylko wartości badanej cechy lub tworzą szereg rozdzielczy z klasami jednowartościowymi, to wystarczy uporządkować wartości w sposób niemalejący (uwzględniając ewentualne powtórzenia) i skorzystać z powyższego wzoru;
   b) jeśli dane tworzą szereg rozdzielczy z klasami będącymi przedziałami, to należy:
   – Utworzyć pomocniczy szereg rozdzielczy, który zamiast liczebności n_i będzie zawierał liczebności skumulowane f_i (f_i, to suma liczebności klas od pierwszej do i-tej (włącznie)), $i = 1, 2, \dots, k$, przy czym szereg porządkujemy niemalejąco ze względu na przedziały, wyznaczające klasy.
   – Określić pozycję mediany (P_{Me}):
   $$P_{Me} = \frac{n+1}{2},$$
   gdzie n jest łączną liczbą danych.
   – Określić klasę, w której znajduje się mediana. Jest to pierwsza z klas, których liczebność jest nie mniejsza od pozycji mediany.
   – Obliczyć medianę ze wzoru:
   $$Me \approx x_{Me} + \frac{\frac{n}{2} - f_{Me-1}}{f_{Me}} \cdot L,$$
   gdzie x_{Me} jest lewym krańcem klasy, do której należy mediana,
   f_{Me-1} – liczebnością skumulowaną klasy poprzedzającej klasę, do której należy mediana,
   f_{Me} – liczebnością skumulowaną klasy, do której należy mediana,
   L – długością klasy, do której należy mediana,
   np. dla danych tworzących szereg rozdzielczy

Wzrost (w cm)	**Liczba osób**
⟨150, 160)	2
⟨160, 170)	15
⟨170, 180)	12
⟨180, 190)	6

mamy:

Wzrost (w cm)	f_i
⟨150, 160)	2
⟨160, 170)	17
⟨170, 180)	29
⟨180, 190)	35

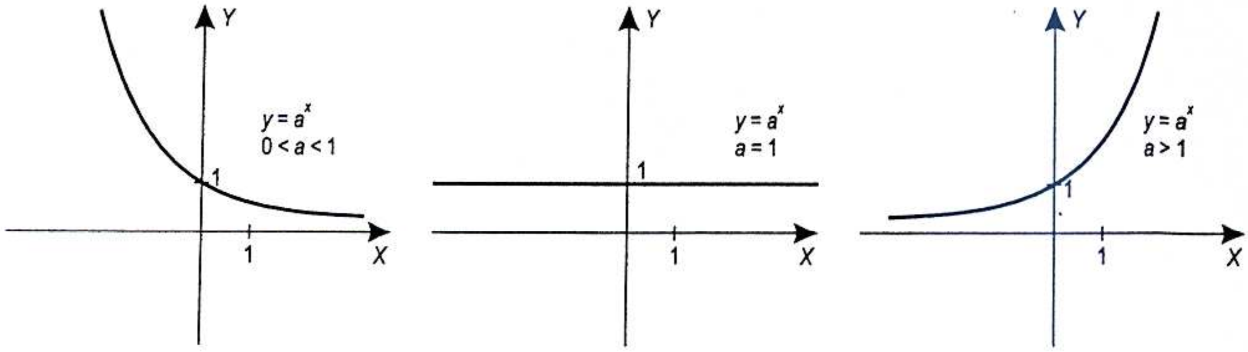
$P_{Me} = 18$, klasą do której należy mediana z próby jest <170, 180), zaś

$$Me \approx 170 + \frac{18-17}{29} \cdot 10 \approx 170{,}3.$$

X. FUNKCJE WYKŁADNICZE I LOGARYTMICZNE

1. **Funkcja wykładnicza.**

a) **Funkcją wykładniczą** nazywamy funkcję $y = a^x$, gdzie $a > 0$ i $x \in \boldsymbol{R}$.
Wykres funkcji wykładniczej:



b) Z własności funkcji wykładniczej dla $a \in \boldsymbol{R} - \{1\}$ wynika, że:

- Jeśli $a \in \boldsymbol{R} - \{1\}$ i $x_1, x_2 \in \boldsymbol{R}$, to $a^{x_1} = a^{x_2} \Leftrightarrow x_1 = x_2$
- Jeśli $a \in (0, 1)$ i $x_1, x_2 \in \boldsymbol{R}$, to $a^{x_1} < a^{x_2} \Leftrightarrow x_1 > x_2$
- Jeśli $a \in (1, +\infty)$ i $x_1, x_2 \in \boldsymbol{R}$, to $a^{x_1} < a^{x_2} \Leftrightarrow x_1 < x_2$

2. **Logarytmy.**

a) **Logarytmem** liczby dodatniej b przy podstawie a – dodatniej i różnej od jedności, nazywamy taką liczbę rzeczywistą c, że $a^c = b$.

$\log_a b = c \Leftrightarrow a^c = b$ i $a > 0$ i $a \neq 1$ i $b > 0$

Logarytm przy podstawie 10 to logarytm dziesiętny.

$\log_{10} b$ – zapisujemy $\log b$ lub $\lg b$.

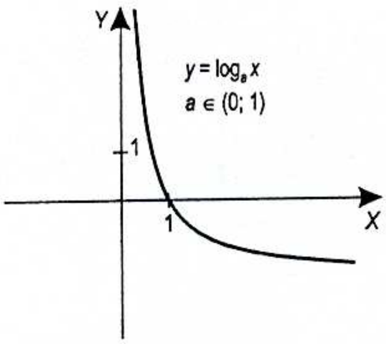
b) **Własności logarytmów**:

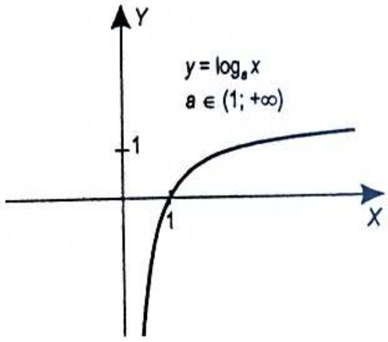
- $\log_a a = 1$, $a > 0$ i $a \neq 1$
- $\log_a 1 = 0$, $a > 0$ i $a \neq 1$

- $\log_a a^r = r$, $a > 0$ i $a \neq 1$ i $r \in \boldsymbol{R}$
- $a^{\log_a b} = b$, $a > 0$ i $a \neq 1$ i $b > 0$
- $\log_a x + \log_a y = \log_a(x \cdot y)$, $a > 0$ i $a \neq 1$ i $x > 0$ i $y > 0$
- $\log_a x - \log_a y = \log_a \frac{x}{y}$, $a > 0$ i $a \neq 1$ i $x > 0$ i $y > 0$
- $\log_a x^r = r \cdot \log_a x$, $a > 0$ i $a \neq 1$ i $x > 0$ i $r \in \boldsymbol{R}$
- $\log_a b \cdot \log_b c = \log_a c$, $a > 0$ i $a \neq 1$ i $b > 0$ i $b \neq 1$ i $c > 0$

3. **Funkcja logarytmiczna.**

a) Funkcją logarytmiczną nazywamy funkcję $y = \log_a x$, gdzie $x \in \boldsymbol{R}_+$, $a > 0$ i $a \neq 1$.
Wykres funkcji logarytmicznej:





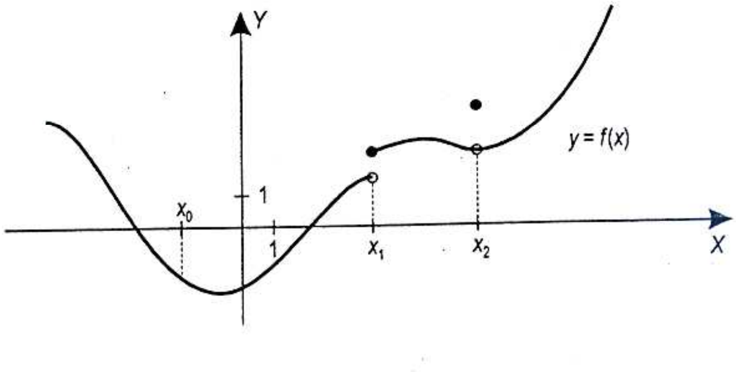
b) z własności funkcji logarytmicznej wynika, że:
- Jeśli $a \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$ i $x_1, x_2 \in \boldsymbol{R}_+$, to $\log_a x_1 = \log_a x_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2$
- Jeśli $a \in (0, 1)$ i $x_1, x_2 \in \boldsymbol{R}_+$, to $\log_a x_1 < \log_a x_2 \Leftrightarrow x_1 > x_2$
- Jeśli $a \in (1, +\infty)$ i $x_1, x_2 \in \boldsymbol{R}_+$, to $\log_a x_1 < \log_a x_2 \Leftrightarrow x_1 < x_2$

XI. CIĄGŁOŚĆ I POCHODNA FUNKCJI

1. **Ciągłość funkcji.**

a) Niech funkcja f będzie określona w pewnym otoczeniu $U(x_0)$ punktu x_0.
Funkcja f jest ciągła w punkcie x_0 wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje skończona granica $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = g$ i zachodzi równość $g = f(x_0)$ (to znaczy: istnieją skończone granice $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$, $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$ i zachodzą równości $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = g$ i $g = f(x_0)$)

Przykład.



Funkcja f

- jest ciągła w punkcie x_0,
- nie jest ciągła w punkcie x_1(nie istnieje w tym punkcie granica funkcji)
- nie jest ciągła w punkcie x_2 (granica funkcji w punkcie x_2 istnieje, lecz nie jest równa wartości $f(x_2)$).

b) **Funkcję f nazywamy ciągłą w przedziale (a, b),** jeżeli jest ciągła w każdym punkcie tego przedziału.

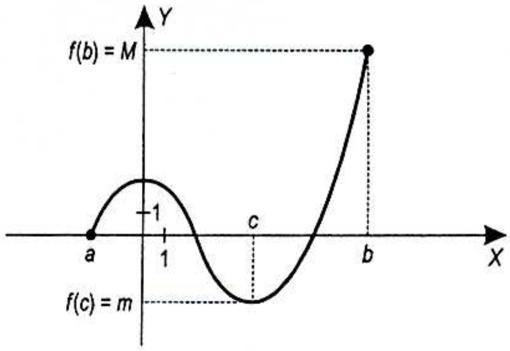
c) **Funkcję f nazywamy ciągłą w przedziale $\langle a, b\rangle$,** jeżeli jest ciągła w przedziale (a, b) oraz $f(a) = \lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ i $f(b) = \lim\limits_{x\to b^-} f(x)$.

d) Jeżeli funkcje f i g określone w przedziale $X \subset R$ są ciągłe w punkcie $x_0 \in X$, to funkcje: $f + g$, $f - g, f \cdot g, \dfrac{f}{g}$ (gdy $g(x_0) \neq 0$) są ciągłe w punkcie x_0.

e) Wszystkie funkcje elementarne (wymierne, wykładnicze, logarytmiczne, trygonometryczne) są ciągłe w swoich dziedzinach.

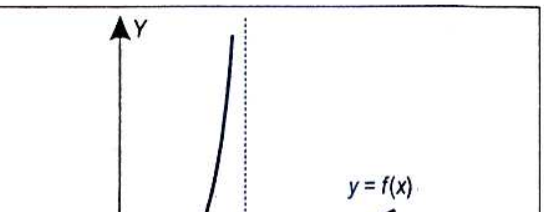
f) **Własności funkcji ciągłych.**

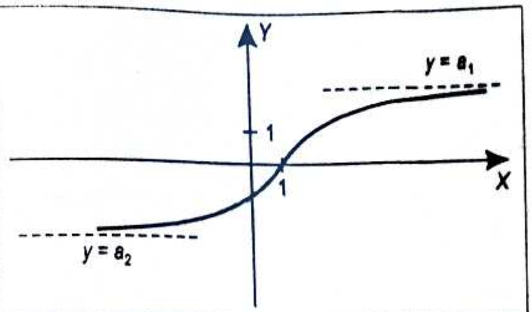
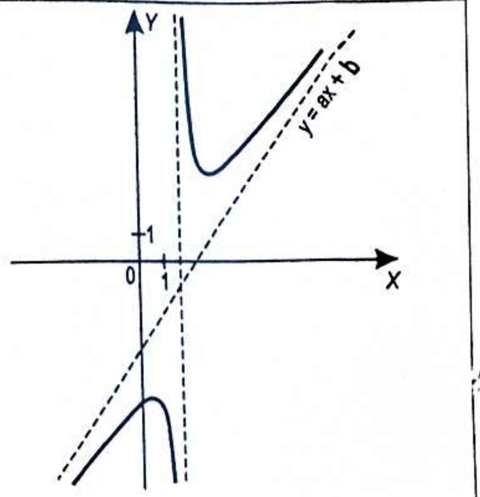
- **Twierdzenie Weierstrassa.**
  Jeżeli funkcja f jest ciągła w przedziale $\langle a, b\rangle$, to jest w nim ograniczona i w pewnym punkcie tego przedziału przyjmuje wartość największą (M) i w pewnym punkcie tego przedziału przyjmuje wartość najmniejszą (m).



- **Twierdzenie Darboux.**
  Funkcja f ciągła w przedziale $\langle a, b\rangle$ przyjmuje wszystkie wartości pośrednie między wartością najmniejszą i największą tej funkcji w przedziale $\langle a, b\rangle$.

2. **Asymptoty wykresu funkcji.**

a)	Niech funkcja f będzie określona w prawostronnym (lewostronnym) sąsiedztwie punktu x_0. Prosta o równaniu $x = x_0$ jest **prawostronną (lewostronną) asymptotą pionową** wykresu tej funkcji wtedy i tylko wtedy, gdy $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = -\infty$ lub $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = +\infty$ $\left(\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = -\infty \text{ lub } \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = +\infty\right)$	

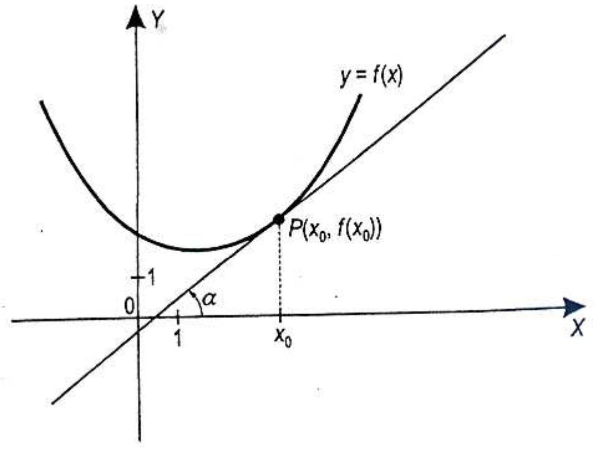
b)	Prosta o równaniu $y = a$ jest **prawostronną (lewostronną) asymptotą poziomą** wykresu tej funkcji wtedy i tylko wtedy, gdy $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = a$ $(\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = a)$.	
c)	Niech funkcja f będzie określona w przedziale $(-\infty, k)$ (odpowiednio $(k, +\infty)$), $k \in \boldsymbol{R}$. Prosta $y = ax + b$ jest **asymptotą ukośną lewostronną** (odpowiednio **asymptotą ukośną prawostronną**) wykresu funkcji f wtedy i tylko wtedy, gdy $\lim\limits_{x \to -\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$ (odpowiednio $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$). Prosta $y = ax + b$ jest asymptotą ukośną lewostronną (odpowiednio asymptotą ukośną prawostronną) wykresu funkcji f wtedy i tylko wtedy, gdy $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = a$ (odpowiednio $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = a$) oraz $\lim\limits_{x \to -\infty} [f(x) - ax] = b$ (odpowiednio $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - ax] = b$).	

3. **Pochodna funkcji w punkcie.**

   a) Niech funkcja f będzie określona w pewnym otoczeniu $U(x_0)$ punktu x_0, natomiast $h \neq 0$ będzie liczbą, dla której $x_0 + h \in U(x_0)$. Jeżeli istnieje (skończona) granica
   $$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h},$$
   to granicę tę nazywamy **pochodną funkcji w punkcie x_0** i oznaczamy $f'(x_0)$ (to znaczy: istnieją pochodne jednostronne $f'_+(x_0)$ i $f'_-(x_0)$ oraz zachodzi równość $f'_+(x_0) = f'_-(x_0) = f'(x_0)$).
   O funkcji f mówimy, że jest różniczkowalna w punkcie x_0

   b) **Interpretacja geometryczna pochodnej funkcji w punkcie.**
   Pochodna $f'(x_0)$ jest równa tangensowi kąta α, jaki tworzy z osią OX styczna do wykresu funkcji f w punkcie x_0.

   $$f'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha$$



c) **Styczna do wykresu funkcji.**
Funkcja f jest określona w pewnym otoczeniu $U(x_0)$ punktu x_0 i różniczkowalna w tym punkcie. Styczną do wykresu funkcji f w punkcie $(x_0, f(x_0))$ nazywamy prostą opisaną równaniem

$$y - f(x_0) = f'(x_0)\,(x - x_0)$$

d) **Ciągłość a różniczkowalność funkcji.**
Jeżeli funkcja f jest **różniczkowalna** w punkcie x_0, to jest w tym punkcie **ciągła**. (Twierdzenie odwrotne nie jest prawdziwe)

4. **Pochodna jako funkcja.**

a) Funkcję, która każdej liczbie $x_0 \in D_f$ przyporządkowuje liczbę $f'(x_0)$ (o ile istnieje $f'(x_0)$) nazywamy **funkcją pochodną** funkcji f i oznaczamy f'.

b) **Własności pochodnej funkcji.**
Załóżmy, że funkcje f i g są różniczkowalne w zbiorze A. Wówczas funkcje $c \cdot f$, $f + g$, $f - g$, $f \cdot g$, $\frac{f}{g}$ są różniczkowalne w zbiorze A (ta ostatnia w zbiorze $\{x\colon x \in A \wedge g(x) \neq 0\}$) i

- $(c \cdot f)'(x) = c \cdot f'(x)$
- $(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$
- $(f - g)'(x) = f'(x) - g'(x)$
- $(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + g'(x) \cdot f(x)$
- $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{[g(x)]^2}$

c) **Pochodne niektórych funkcji elementarnych.**

- $(c)' = 0$, c – stała
- $(ax + b)' = a$
- $(ax^2 + bx + c)' = 2ax + b$
- $(x^{\alpha})' = \alpha \cdot x^{\alpha - 1}$, gdzie $\alpha \in \boldsymbol{R} - \{0, 1\}$
- $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$, gdzie $x \neq 0$
- $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, $x > 0$
- $(\sin x)' = \cos x$
- $(\cos x)' = -\sin x$

5. **Związek pochodnej z monotonicznością funkcji.**

a) Jeżeli funkcja f jest różniczkowalna w przedziale otwartym (a, b) i **rosnąca** w tym przedziale, to dla każdego $x \in (a, b)$ prawdziwa jest nierówność $\boldsymbol{f'(x) \geq 0}$.

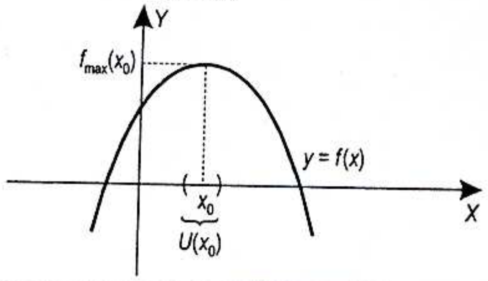
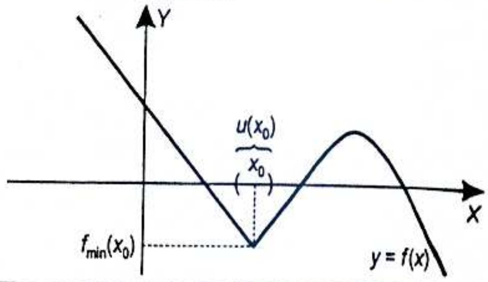
b) Jeżeli funkcja f jest różniczkowalna w przedziale otwartym (a, b) i **malejąca** w tym przedziale, to dla każdego $x \in (a, b)$ prawdziwa jest nierówność $\boldsymbol{f'(x) \leq 0}$.

c) Jeżeli funkcja f jest różniczkowalna w przedziale otwartym (a, b) i dla każdego $x \in (a, b)$ prawdziwa jest nierówność $\boldsymbol{f'(x) > 0}$, to funkcja f jest **rosnąca** w tym przedziale.

d) Jeżeli funkcja f jest różniczkowalna w przedziale otwartym (a, b) i dla każdego $x \in (a, b)$ prawdziwa jest nierówność $\boldsymbol{f'(x) < 0}$, to funkcja f jest **malejąca** w tym przedziale.

e) Jeżeli funkcja f jest różniczkowalna w przedziale otwartym (a, b) i dla każdego $x \in (a, b)$ prawdziwa jest równość $\boldsymbol{f'(x) = 0}$, to funkcja f jest **stała** w tym przedziale.

6. **Ekstremum funkcji.**
Niech funkcja f będzie określona w przedziale otwartym (a, b).

a) Funkcja f ma w punkcie $x_0 \in (a, b)$ **maksimum lokalne** wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje takie otoczenie $U(x_0) \subset (a, b)$ tego punktu, że $\bigwedge_{x \in U(x_0)} f(x) \le f(x_0)$. 	b) Funkcja f ma w punkcie $x_0 \in (a, b)$ **minimum lokalne** wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje takie otoczenie $U(x_0) \subset (a, b)$ tego punktu, że $\bigwedge_{x \in U(x_0)} f(x) \ge f(x_0)$. 

c) **Warunek konieczny istnienia ekstremum funkcji różniczkowalnej.**
Jeżeli funkcja f, określona w pewnym otoczeniu punktu x_0, jest różniczkowalna w tym punkcie i ma w nim ekstremum, to $f'(x_0) = 0$.

d) Punkt $x_0 \in (a, b)$ nazywamy **punktem krytycznym** funkcji f określonej na przedziale (a, b) wtedy i tylko wtedy, gdy $f'(x_0) = 0$ lub $f'(x_0)$ nie istnieje.

e) **Warunek wystarczający istnienia ekstremum funkcji różniczkowalnej.**
Niech funkcja f będzie określona w pewnym otoczeniu punktu x_0, ciągła w punkcie x_0 oraz różniczkowalna w zbiorze $S_-(x_0) \cup S_+(x_0)$. Niech x_0 będzie punktem krytycznym tej funkcji.
- Jeżeli $f'(x) > 0$ dla $x \in S_-(x_0)$ oraz $f'(x) < 0$ dla $x \in S_+(x_0)$, to funkcja ma w punkcie x_0 maksimum lokalne właściwe (mówimy, że pochodna zmienia „w punkcie x_0" znak z dodatniego na ujemny).
- Jeżeli $f'(x) < 0$ dla $x \in S_-(x_0)$ oraz $f'(x) > 0$ dla $x \in S_+(x_0)$, to funkcja ma w punkcie x_0 minimum lokalne właściwe (mówimy, że pochodna zmienia „w punkcie x_0" znak z ujemnego na dodatni).
- Jeżeli $f'(x) < 0$ dla $x \in S_-(x_0) \cup S_+(x_0)$ lub $f'(x) > 0$ dla $x \in S_-(x_0) \cup S_+(x_0)$, to funkcja nie ma ekstremum lokalnego w punkcie x_0 (mówimy, że pochodna nie zmienia znaku „w punkcie x_0").

f) **Aby wyznaczyć ekstrema lokalne funkcji f,** należy
- wyznaczyć dziedzinę funkcji, obliczyć pochodną funkcji i wyznaczyć dziedzinę pochodnej
- znaleźć punkty krytyczne funkcji f
- zbadać, w jakim zbiorze pochodna jest dodatnia, a w jakim ujemna
- w punktach krytycznych, w których pochodna istnieje, zbadać, czy pochodna zmienia znak; jeśli tak, określić rodzaj ekstremum (minimum, maksimum)
- w punktach krytycznych, w których pochodna nie istnieje, zbadać, czy funkcja jest ciągła i czy pochodna zmienia znak; jeśli tak, określić rodzaj ekstremum.

g) **Najmniejsza i największa wartość funkcji ciągłej w przedziale domkniętym i w przedziale otwartym.**
Aby wyznaczyć **najmniejszą i największą wartość funkcji ciągłej w przedziale domkniętym $\langle a, b \rangle$**, należy:
- wyznaczyć punkty krytyczne funkcji w przedziale otwartym (a, b)
- obliczyć wartości funkcji w punktach krytycznych i na końcach przedziału $\langle a, b \rangle$
- wybrać największą i najmniejszą wartość spośród wartości obliczonych w poprzednim punkcie.

Aby określić czy istnieją **najmniejsza i największa wartość funkcji ciągłej w przedziale otwartym (a, b)**, należy:
- wyznaczyć punkty krytyczne funkcji w przedziale otwartym (a, b)

- obliczyć wartości funkcji w punktach krytycznych i granice funkcji na końcach przedziału $\lim_{x \to a^+} f(x)$ i $\lim_{x \to b^-} f(x)$
- określić, czy istnieją: najmniejsza i największa wartość funkcji w tym przedziale i ewentualnie je obliczyć.