1. LOGIKA, ZBIORY, DZIAŁANIE W ZBIORZE LICZB RZECZYWISTYCH

Poziom podstawowy

1.p.1 Styczeń 2003

Zadanie 3. ***(3 pkt)***

Upraszczając pierwiastek kwadratowy z liczby $27+10\sqrt{2}$, zapiszemy ją w postaci kwadratu sumy dwóch liczb. Postępujemy następująco:

$$\sqrt{27+10\sqrt{2}} = \sqrt{25+10\sqrt{2}+2} = \sqrt{(5)^2+2\cdot5\cdot\sqrt{2}+\left(\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{\left(5+\sqrt{2}\right)^2} = 5+\sqrt{2}$$

Przeanalizuj ten przykład, a następnie, stosując analogiczne postępowanie, uprość $\sqrt{11+6\sqrt{2}}$.

2.p.1 Styczeń 2003

Zadanie 4. ***(4 pkt)***

Równanie postaci $C=\frac{5}{9}\cdot F-\frac{160}{9}$, ustala zależność między temperaturą, wyrażoną w stopniach Celsjusza (C) oraz Fahrenheita (F).

a) Oblicz, ile stopni w skali Fahrenheita, ma wrząca w temperaturze $100^\circ C$ woda.
b) Wyznacz taką temperaturę, przy której liczba stopni w skali Celsjusza jest równa liczbie stopni w skali Fahrenheita.

3.p.1 Czerwiec 2004

Zadanie 10. (6 pkt)

Dane są liczby $a=\frac{\sqrt{3}-2}{5}$ i $b=\frac{\sqrt{3}+2}{5}$.

a. Sprawdź, czy $\frac{a-b}{a\cdot b}=20$
b. Oblicz $\left|\frac{a}{b}\right|$

4.p.1 Styczeń 2005

Zadanie 1. (5 pkt.)

Wykonaj odpowiednie obliczenia i oceń, które z podanych zdań jest prawdziwe, a które fałszywe:

$$p:\quad -3^2=9,\qquad q:\quad \sqrt{81+64}=17\quad \text{oraz}\quad r:\quad \sqrt[3]{27^4}=\left(\frac{1}{9}\right)^{-2}.$$

Oceń wartość logiczną zdania: $(p\wedge q)\Rightarrow r$. Odpowiedź uzasadnij.

5.p.1 Styczeń 2005

Zadanie 2. (5 pkt.)

Zbiór A jest zbiorem rozwiązań nierówności: $-x^2+2x+3\geq0$, zbiór B jest dziedziną funkcji wymiernej $W(x)=\frac{x^2-9}{4x-x^2}$. Wyznacz różnicę zbiorów $A\setminus B$.

6.p.1 Maj 2005

Zadanie 6. ***(6 pkt)***

Dane są zbiory liczb rzeczywistych:

$A = \{x: |x+2| \langle 3\}$

$B = \{x: (2x-1)^3 \le 8x^3 - 13x^2 + 6x + 3\}$

Zapisz w postaci przedziałów liczbowych zbiory $A, B, A \cap B$ oraz $B - A$.

7.p.1 Maj 2005

Zadanie 17. (*7 pkt*)

Wykaż, bez użycia kalkulatora i tablic, że $\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7} - \sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}$ jest liczbą całkowitą.

8.p.1 Grudzień 2005

Zadanie 7. ***(3 pkt)***

Aby wyznaczyć wszystkie liczby całkowite c, dla których liczba postaci $\frac{c-3}{c-5}$ jest także liczbą całkowitą można postąpić w następujący sposób:

a) Wyrażenie w liczniku ułamka zapisujemy w postaci sumy, której jednym ze składników jest wyrażenie z mianownika:

$$\frac{c-3}{c-5} = \frac{(c-5)+2}{c-5}$$

b) Zapisujemy powyższy ułamek w postaci sumy liczby 1 oraz pewnego ułamka:

$$\frac{c-5+2}{c-5} = \frac{c-5}{c-5} + \frac{2}{c-5} = 1 + \frac{2}{c-5}$$

c) Zauważamy, że ułamek $\frac{2}{c-5}$ jest liczbą całkowitą wtedy i tylko wtedy, gdy liczba $(c-5)$ jest całkowitym dzielnikiem liczby 2, czyli że $(c-5) \in \{-1, 1, -2, 2\}$.

d) Rozwiązujemy kolejno równania $c-5=-1$, $c-5=1$, $c-5=-2$, $c-5=2$, i otrzymujemy odpowiedź: liczba postaci $\frac{c-3}{c-5}$ jest całkowita dla: $c=4$, $c=6$, $c=3$, $c=7$.

Rozumując analogicznie, wyznacz wszystkie liczby całkowite x, dla których liczba postaci $\frac{x}{x-3}$ jest liczbą całkowitą.

9.p.1 Styczeń 2006

Zadanie 9. (*8 pkt*)

Dane są zbiory liczb rzeczywistych: $A = \left\{x: \frac{3}{x} \le 1\right\}$ i $B = \{x: |x+1| < 3\}$.

a) Zaznacz te zbiory na osi liczbowej.

b) Przedstaw zbiory $A \cup B$ i $A \setminus B$ w postaci sumy przedziałów liczbowych.

10.p.1 Styczeń 2006

Zadanie 1. *(3 pkt)*

Dane są liczby: $a = \frac{3\sqrt{3}-4}{1+2\sqrt{3}}$ i $b = \sqrt{27} \cdot \frac{\left(\frac{1}{9}\right)^3}{3^{-5}}$.

a) Przedstaw liczbę a w postaci $x + y\sqrt{3}$, gdzie x i y są liczbami wymiernymi.
b) Zapisz liczbę b w postaci potęgi liczby 3 o wykładniku ułamkowym.
c) Suma liczb a i b stanowi 80% pewnej liczby c. Wyznacz liczbę c.

11.p.1 Maj 2006

Zadanie 1. *(3 pkt)*

Dane są zbiory: $A = \{x \in R: |x-4| \geq 7\}$, $B = \{x \in R: x^2 > 0\}$. Zaznacz na osi liczbowej:

a) zbiór A,
b) zbiór B,
c) zbiór $C = B \setminus A$.

12.p.1 Listopad 2006

Zadanie 10. *(6 pkt)*

Dane są zbiory:

$A = \{x \in R: |5-x| \geq 3\}$, $B = \{x \in R: x^2 - 9 \geq 0\}$ i $C = \left\{x \in R: \frac{x+1}{x-1} \leq 1\right\}$.

a) Zaznacz na osi liczbowej zbiory A, B i C.
b) Wyznacz i zapisz za pomocą przedziału liczbowego zbiór $C \setminus (A \cap B)$.

13.p.1 Marzec 2008 (zestaw 1)

Zadanie 4. *(3 pkt)*

Dla dowolnych liczb rzeczywistych a i b określamy liczby $a \circ b$ i $a * b$ w następujący sposób:

$a \circ b$ = liczba nie mniejsza spośród liczb a i b,
$a * b$ = liczba nie większa spośród liczb a i b.

Na przykład: $7 \circ 3 = 7$, $15 \circ 15 = 15$, $7 * 3 = 3$, $(-6) * 4 = -6$, $(-3) * (-3) = -3$.

Oblicz:

a) $(-5) \circ 4 =$
b) $(2005 * 2007) \circ (-2006) =$
c) $(5 \circ 6) * (2 \circ 7) =$

14.p.1 Maj 2010

Zadanie 30. *(2 pkt)*

Wykaż, że jeśli $a > 0$, to $\frac{a^2+1}{a+1} \geq \frac{a+1}{2}$.

15.p.1 Listopad 2010

Zadanie 30. *(2 pkt)*

Uzasadnij, że jeśli $(a^2+b^2)(c^2+d^2) = (ac+bd)^2$, to $ad = bc$.

16.p.1 Maj 2011

Zadanie 25. *(2 pkt)*

Uzasadnij, że jeżeli $a+b=1$ i $a^2+b^2=7$, to $a^4+b^4=31$.

17.p.1 Maj 2012

Zadanie 27. *(2 pkt)*

Uzasadnij, że jeśli liczby rzeczywiste a, b, c spełniają nierówności $0<a<b<c$, to $\frac{a+b+c}{3}>\frac{a+b}{2}$.

18.p.1 Czerwiec 2012 (termin dodatkowy)

Zadanie 26. *(2 pkt)*

Średnia wieku w pewnej grupie studentów jest równa 23 lata. Średnia wieku tych studentów i ich opiekuna jest równa 24 lata. Opiekun ma 39 lat. Oblicz, ilu studentów jest w tej grupie.

19.p.1 Czerwiec 2012 (termin dodatkowy)

Zadanie 29. *(2 pkt)*

Uzasadnij, że suma kwadratów trzech kolejnych liczb całkowitych przy dzieleniu przez 3 daje resztę 2.

20.p.1 Maj 2013

Zadanie 28. *(2 pkt)*

Udowodnij, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y, z takich, że $x+y+z=0$, prawdziwa jest nierówność $xy+yz+zx\le 0$.

Możesz skorzystać z tożsamości $(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2+2xy+2xz+2yz$.

21.p.1 Maj 2013

Zadanie 31. *(2 pkt)*

Wykaż, że liczba $6^{100}-2\cdot 6^{99}+10\cdot 6^{98}$ jest podzielna przez 17.

22.p.1 Grudzień 2013

Zadanie 28. (0–2)

Uzasadnij, że liczba $4^{12}+4^{13}+4^{14}$ jest podzielna przez 42.

23.p.1 1.p.24 Maj 2014

Zadanie 28. *(2 pkt)*

Udowodnij, że każda liczba całkowita k, która przy dzieleniu przez 7 daje resztę 2, ma tę własność, że reszta z dzielenia liczby $3k^2$ przez 7 jest równa 5.

24.p.1 1.p.25 Sierpień 2014

Zadanie 28. *(2 pkt)*

Wykaż, że suma sześcianów trzech kolejnych liczb naturalnych parzystych jest podzielna przez 24.

25.p.1 Grudzień 2014

Zadanie 28. (0–2)

Uzasadnij, że jeżeli liczba całkowita nie dzieli się przez 3, to jej kwadrat przy dzieleniu przez 3 daje resztę 1.

26.p.1 Maj 2015-nowa (zadanie 26 – stara)

Zadanie 27. (0–2)

Wykaż, że dla każdej liczby rzeczywistej x i dla każdej liczby rzeczywistej y prawdziwa jest nierówność $4x^2 - 8xy + 5y^2 \geq 0$.

27.p.1 Maj 2015-nowa

Zadanie 31. (0–2)

Jeżeli do licznika i do mianownika nieskracalnego dodatniego ułamka dodamy połowę jego licznika, to otrzymamy $\frac{4}{7}$, a jeżeli do licznika i do mianownika dodamy 1, to otrzymamy $\frac{1}{2}$. Wyznacz ten ułamek.

28.p.1 Czerwiec 2015

Zadanie 29. (0–2)

Udowodnij, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y prawdziwa jest nierówność $3x^2 + 5y^2 - 4xy \geq 0$.

29.p.1 Sierpień 2015 (na nowej i starej maturze)

Zadanie 30. (0–2)

Wykaż, że dla wszystkich nieujemnych liczb rzeczywistych x, y prawdziwa jest nierówność $x^3 + y^3 \geq x^2 y + xy^2$.

30.p.1 Maj 2016

Zadanie 26. (0–2)

W tabeli przedstawiono roczne przyrosty wysokości pewnej sosny w ciągu sześciu kolejnych lat.

kolejne lata	1	2	3	4	5	6
przyrost (w cm)	10	10	7	8	8	7

Oblicz średni roczny przyrost wysokości tej sosny w badanym okresie sześciu lat. Otrzymany wynik zaokrąglij do 1 cm. Oblicz błąd względny otrzymanego przybliżenia. Podaj ten błąd w procentach.

31.p.1 Czerwiec 2016

Zadanie 28. (0–2)

Wykaż, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y prawdziwa jest nierówność

$$x^4 + y^4 + x^2 + y^2 \geq 2\left(x^3 + y^3\right).$$

32.p.1 Maj 2017

Zadanie 27. (0–2)

Wykaż, że liczba $4^{2017}+4^{2018}+4^{2019}+4^{2020}$ jest podzielna przez 17.

33.p.1 Czerwiec 2017

Zadanie 29. (0–2)

Wykaż, że prawdziwa jest nierówność

$$(1,5)^{100} < 6^{25} .$$

34.p.1 Maj 2018

Zadanie 28. (0–2)

Udowodnij, że dla dowolnych liczb dodatnich a, b prawdziwa jest nierówność

$$\frac{1}{2a}+\frac{1}{2b}\geq\frac{2}{a+b} .$$

35.p.1 Czerwiec 2018

Zadanie 28. (0–2)

Wykaż, że reszta z dzielenia sumy kwadratów czterech kolejnych liczb naturalnych przez 8 jest równa 6.

36.p.1 Sierpień 2018

Zadanie 29. (0–2)

Wykaż, że jeżeli a i b są liczbami rzeczywistymi dodatnimi, to $(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\geq 4$.

37.p.1 Maj 2019

Zadanie 28. (0–2)

Wykaż, że dla dowolnych liczb rzeczywistych a i b prawdziwa jest nierówność

$$3a^2-2ab+3b^2\geq 0 .$$

38.p.1 Czerwiec 2019

Zadanie 29. (0–2)

Wykaż, że dla każdej liczby $a>0$ i dla każdej liczby $b>0$ prawdziwa jest nierówność

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\geq\frac{4}{a+b} .$$

39.p.1 Czerwiec 2019

Zadanie 33. (0–4)

Liczby rzeczywiste x i z spełniają warunek $2x+z=1$. Wyznacz takie wartości x i z, dla których wyrażenie x^2+z^2+7xz przyjmuje największą wartość. Podaj tę największą wartość.

40.p.1 Maj 2020

Zadanie 28. (0–2)

Wykaż, że dla każdych dwóch różnych liczb rzeczywistych a i b prawdziwa jest nierówność

$$a(a-2b)+2b^2>0.$$

41.p.1 Lipiec 2020

Zadanie 27. (0–2)

Dane są liczby $a=3\log_2 12-\log_2 27$ i $b=\left(\sqrt{6}-\sqrt{7}\right)\left(3\sqrt{6}+3\sqrt{7}\right)$. Wartością $a-b$ jest liczba całkowita. Oblicz tę liczbę.

42.p.1 Lipiec 2020

Zadanie 28. (0–2)

Wykaż, że jeśli liczby rzeczywiste a i b spełniają warunek $a<4$ i $b<4$, to $ab+16>4a+4b$.

43.p.1 Wrzesień 2020

Zadanie 28. (0–2)

Wykaż, że dla dowolnych różnych liczb rzeczywistych a i b prawdziwa jest nierówność

$$a(a+b)+b^2>3ab.$$

44.p.1 Maj 2021

Zadanie 30. (0–2)

Wykaż, że dla każdych trzech dodatnich liczb a, b i c takich, że $a<b$, spełniona jest nierówność

$$\frac{a}{b}<\frac{a+c}{b+c}$$

45.p.1 Czerwiec 2021

Zadanie 30. (0–2)

Wykaż, że dla wszystkich liczb rzeczywistych a, b i c takich, że $\frac{a+b}{2}>c$ i $\frac{b+c}{2}>a$, prawdziwa jest nierówność

$$\frac{a+c}{2}<b$$

46.p.1 Sierpień 2021

Zadanie 31. (0–2)

Wykaż, że dla każdej liczby rzeczywistej a i każdej liczby rzeczywistej b spełniona jest nierówność

$$b(5b-4a)+a^2\geq 0$$

47.p.1 Maj 2022

Zadanie 31. (0–2)

Wykaż, że dla każdej liczby rzeczywistej a i każdej liczby rzeczywistej b takich, że $b \neq a$, spełniona jest nierówność

$$\frac{a^2+b^2}{2} > \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$$

48.p.1 M

49.p.1 Koniec

Poziom rozszerzony

1.r.1 Styczeń 2009

Zadanie 6. (*4 pkt*)

Porównaj liczby a^b oraz b^a, gdzie $a = \left[\left(2-\sqrt{3}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(2+\sqrt{3}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^2$, $b = \frac{81^{-1}\cdot\sqrt{3}}{27^{-2}\cdot\sqrt[4]{9}}$.

2.r.1 Maj 2009

Zadanie 5. ***(3 pkt)***

Wykaż, że jeżeli $A = 3^{4\sqrt{2}+2}$ i $B = 3^{2\sqrt{2}+3}$, to $B = 9\sqrt{A}$.

3.r.1 Maj 2012

Zadanie 7. ***(3 pkt)***

Udowodnij, że jeżeli $a+b \geq 0$, to prawdziwa jest nierówność $a^3+b^3 \geq a^2b+ab^2$.

4.r.1 Czerwiec 2012

Zadanie 6. ***(3 pkt)***

Udowodnij, że dla dowolnych liczb dodatnich a, b, c i d prawdziwa jest nierówność $ac+bd \leq \sqrt{a^2+b^2}\cdot\sqrt{c^2+d^2}$.

5.r.1 Grudzień 2013

Zadanie 6. (0–2)

Liczba n jest najmniejszą liczbą całkowitą spełniającą równanie

$$2\cdot|x+57| = |x-39|.$$

Zakoduj cyfry: setek, dziesiątek i jedności liczby $|n|$.

6.r.1 Maj 2014

Zadanie 4. ***(3 pkt)***

Udowodnij, że dla każdych dwóch liczb rzeczywistych dodatnich x, y prawdziwa jest nierówność $(x+1)\frac{x}{y}+(y+1)\frac{y}{x}>2$.

7.r.1 Grudzień 2014

Zadanie 6. (0–2)

Dane są liczby a, b takie, że $a-b=4$ i $ab=7$. Oblicz a^3b+ab^3. Zakoduj w kratkach poniżej kolejno, od lewej do prawej, cyfry setek, dziesiątek i jedności otrzymanego wyniku.

Cyfra	setek	dziesiątek	jedności

8.r.1 Grudzień 2014

Zadanie 13. (0–3)

Wykaż, że jeżeli $a>b\geq 1$, to $\frac{a}{2+a^3}<\frac{b}{2+b^3}$.

9.r.1 Maj 2016

Zadanie 8. (0–3)

Wykaż, że dla dowolnych dodatnich liczb rzeczywistych x i y takich, że $x^2+y^2=2$, prawdziwa jest nierówność $x+y\leq 2$.

10.r.1 Maj 2017

Zadanie 7. (0–3)

Udowodnij, że dla dowolnych różnych liczb rzeczywistych x, y prawdziwa jest nierówność

$$x^2y^2+2x^2+2y^2-8xy+4>0.$$

11.r.1 Maj 2018

Zadanie 8. (0–3)

Udowodnij, że dla każdej liczby całkowitej k i dla każdej liczby całkowitej m liczba k^3m-km^3 jest podzielna przez 6.

12.r.1 Maj 2019

Zadanie 8. (0–3)

Udowodnij, że dla dowolnych dodatnich liczb rzeczywistych x i y, takich że $x<y$, i dowolnej dodatniej liczby rzeczywistej a, prawdziwa jest nierówność $\frac{x+a}{y+a}+\frac{y}{x}>2$.

13.r.1 Maj 2020

Zadanie 8. (0–3)

Liczby dodatnie a i b spełniają równość $a^2 + 2a = 4b^2 + 4b$. Wykaż, że $a = 2b$.

14.r.1 Marzec 2021

Zadanie 6. (0–3)

Wykaż, że dla każdej liczby rzeczywistej x większej od 2 i dla każdej liczby rzeczywistej y prawdziwa jest nierówność $5x^2 - 6xy + 3y^2 - 2x - 4 > 0$.

15.r.1 Maj 2022

Zadanie 6. (0–3)

Wykaż, że dla każdej liczby rzeczywistej x i dla każdej liczby rzeczywistej y takich, że $2x > y$, spełniona jest nierówność

$$7x^3 + 4x^2y \geq y^3 + 2xy^2 - x^3$$

16.r.1 M

17.r.1 Koniec

2. OBLICZENIA PROCENTOWE, STATYSTYKA
Poziom podstawowy

1.p.2 Maj 2002

Zadanie 4. ***(5 pkt)***

W pewnej szkole średniej po pierwszym półroczu przeprowadzono test z matematyki. Tabelka przedstawia zestawienie wyników testu:

Ocena	1	2	3	4	5	6
Liczba uczniów	10	30	80	30	25	5

a) Sporządź diagram słupkowy przedstawiający zestawienie wyników testu.
b) Oblicz średnią arytmetyczną uzyskanych ocen.
c) Oblicz, ilu uczniów uzyskało ocenę wyższą od średniej arytmetycznej ocen.

2.p.2 Maj 2002

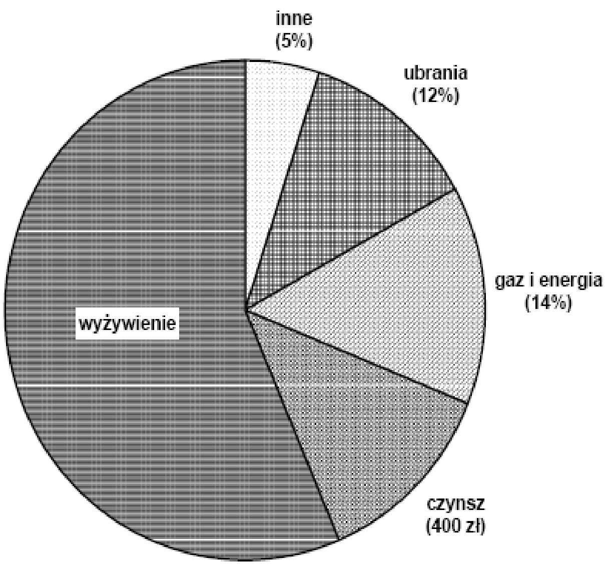
Zadanie 7. ***(4 pkt)***

Planując czterotygodniowe wakacje, rodzina Kowalskich przeznaczyła pewną kwotę na wyżywienie. W pierwszym tygodniu wydano 30% zaplanowanej kwoty, w drugim tygodniu o 60 złotych mniej niż w pierwszym, w trzecim połowę reszty pieniędzy. Na czwarty tydzień zostało 270 złotych. Oblicz kwotę, którą rodzina Kowalskich przeznaczyła na wyżywienie.

3.p.2 Styczeń 2003

Zadanie 2. ***(4 pkt)***

Na wspólne konto państwa Kowalskich wpływają pieniądze z ich dwóch pensji miesięcznych, razem jest to kwota 3200 złotych. Na początku każdego miesiąca małżonkowie dzielą całość tej kwoty. Na diagramie kołowym przedstawiono strukturę planowanych, przez państwa Kowalskich, miesięcznych wydatków.



Korzystając z tych danych:

a) Oblicz, ile procent danej kwoty stanowią miesięczne wydatki państwa Kowalskich na wyżywienie.

b) Oblicz, ile pieniędzy wydają państwo Kowalscy w ciągu miesiąca łącznie, na gaz i energię oraz czynsz.

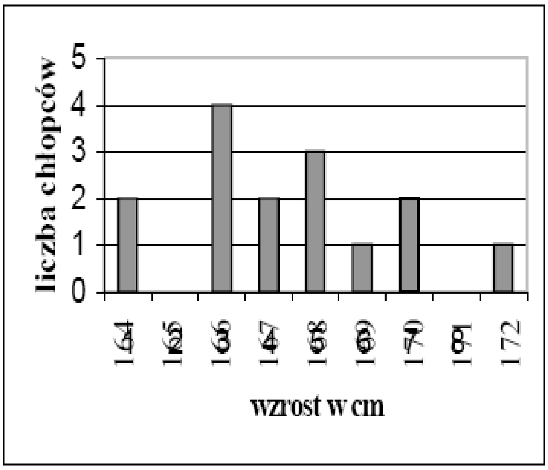
4.p.2 Maj 2003

Zadanie 3. *(4 pkt)*

Dane dotyczące wzrostu chłopców z klasy II B przedstawione są na diagramie.

a) Oblicz średni wzrost chłopców z klasy II B (podaj wynik dokładny).

b) Ilu chłopców z klasy II B ma wzrost wyższy od średniego?



5.p.2 Maj 2003

Zadanie 8. *(3 pkt)*

Składka na ubezpieczenie zdrowotne jest równa 7,5% podstawy wymiaru składek na ubezpieczenie społeczne. Podstawa wymiaru składek na ubezpieczenie społeczne jest równa 60% przeciętnego wynagrodzenia. Oblicz wysokość składki na ubezpieczenie zdrowotne przyjmując, że przeciętne wynagrodzenie jest równe 1869,76 zł. Wynik podaj w zaokrągleniu do 1 grosza.

6.p.2 Grudzień 2004

Zadanie 1. (*4 pkt*)

Janek ma w tym semestrze następujące oceny z języka polskiego: 5, 5, 3, 4, 3, 3, 4.

a) Oblicz średnią ocen Janka z języka polskiego. Wynik podaj z dokładnością do 0,01.

b) Oblicz wariancję i odchylenie standardowe. Wyniki podaj z dokładnością do 0,01.

7.p.2 Styczeń 2005

Zadanie 5. (4 pkt.)

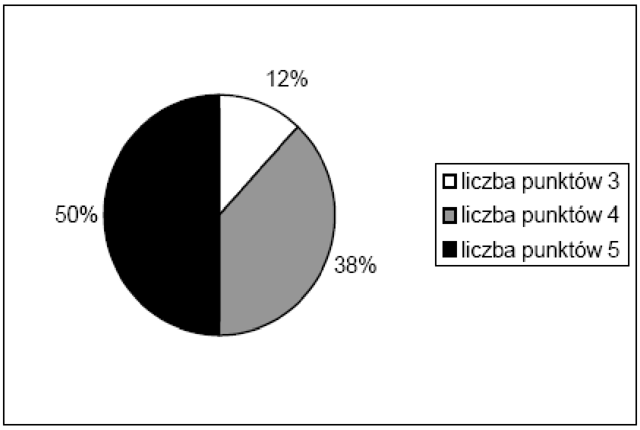
Inwestor planuje uzyskać w banku kredyt, który zamierza spłacić po czterech latach. Taki kredyt w banku A jest oprocentowany 12% w skali roku, a odsetki są dopisywane do długu co pół roku. Bank B oferuje oprocentowanie roczne 11% z roczną kapitalizacją odsetek, a przy zwrocie kredytu pobiera prowizję w wysokości 4% kwoty udzielonego kredytu. Oceń, która oferta jest korzystniejsza dla kredytobiorcy.

8.p.2 Styczeń 2005

Zadanie 10. (4 pkt.)

Właściciel sklepu spożywczego w przypadku każdego nowego produktu przeprowadza test polegający na tym, że 50 losowo wybranych osób ocenia ten produkt w skali od 0 do 5 punktów, w trzech kategoriach: **C** – ceny, **S** – smaku, i **W** – wyglądu opakowania. Następnie właściciel oblicza średnią ważoną z następujących liczb: s_1 średniej liczby punktów w kategorii **C** (z wagą 5), s_2 średniej liczby punktów w kategorii **S** (z wagą 3) i s_3 średniej liczby punktów w kategorii **W** (z wagą 2). W przypadku gdy tak obliczona średnia jest większa od 3 właściciel decyduje, że towar będzie sprzedawany w jego sklepie. Badania dotyczące nowego rodzaju kawy dały następujące rezultaty:

w kategorii **W** :



W kategorii **C** obliczona średnia była równa $s_1 = 2{,}42$, a w kategorii **S** $s_2 = 4{,}32$.

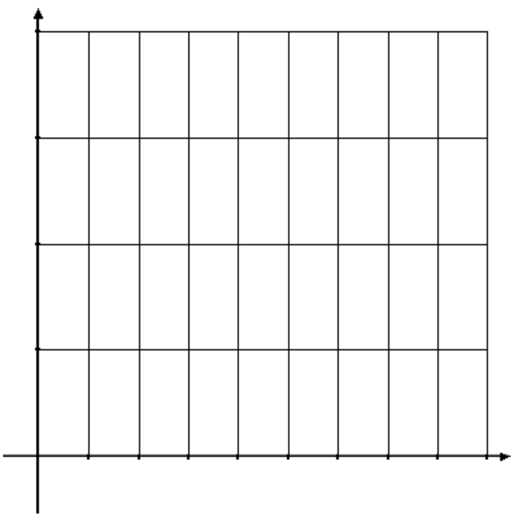
Oblicz s_3, oraz oceń czy w rezultacie przeprowadzonego testu właściciel sklepu zdecyduje się na sprzedaż nowego gatunku kawy.

9.p.2 Maj 2005

Zadanie 7. ***(5 pkt)***

W poniższej tabeli przedstawiono wyniki sondażu przeprowadzonego w grupie uczniów, dotyczącego czasu przeznaczanego dziennie na przygotowanie zadań domowych.

Czas (w godzinach)	1	2	3	4
Liczba uczniów	5	10	15	10



a) Naszkicuj diagram słupkowy ilustrujący wyniki tego sondażu.

b) Oblicz średnią liczbę godzin, jaką uczniowie przeznaczają dziennie na przygotowanie zadań domowych.

c) Oblicz wariancję i odchylenie standardowe czasu przeznaczonego dziennie na przygotowanie zadań domowych. Wynik podaj z dokładnością do 0,01.

10.p.2 Maj 2005

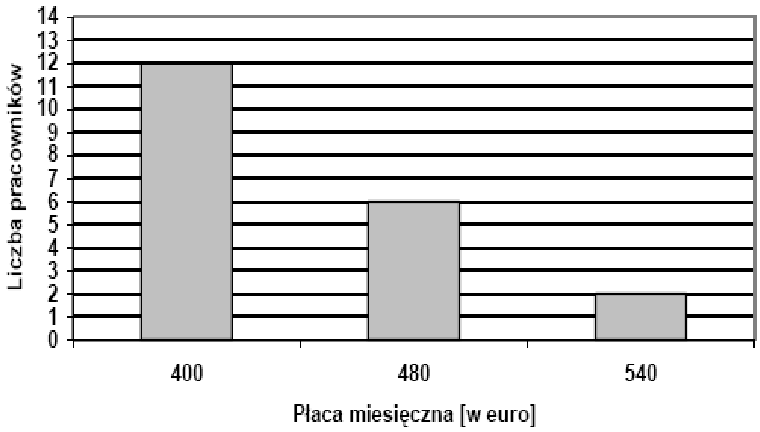
Zadanie 9. ***(6 pkt)***

Rodzeństwo w wieku 8 i 10 lat otrzymało razem w spadku 84100 zł. Kwotę tę złożono w banku, który stosuje kapitalizację roczną przy rocznej stopie procentowej 5%. Każde z dzieci otrzyma swoją część spadku z chwilą osiągnięcia wieku 21 lat. Życzeniem spadkodawcy było takie podzielenie kwoty spadku, aby w przyszłości obie wypłacone części spadku zaokrąglone do 1 zł były równe. Jak należy podzielić kwotę 84100 zł między rodzeństwo? Zapisz wszystkie wykonywane obliczenia.

11.p.2 Styczeń 2006

Zadanie 4. (***4 pkt***)

W pewnej firmie pracownicy zostali zaszeregowani do trzech grup uposażeń. Liczbę pracowników i płace (w euro) w poszczególnych grupach przedstawia diagram słupkowy:



a) Wyznacz średnią płacę miesięczną w tej firmie.
b) Oblicz wariancję i odchylenie standardowe miesięcznej płacy w tej firmie. Odchylenie standardowe podaj z dokładnością do 0,1.

12.p.2 Maj 2006

Zadanie 3. (***5 pkt***)

Kostka masła produkowanego przez pewien zakład mleczarski ma nominalną masę 20 dag. W czasie kontroli zakładu zważono 150 losowo wybranych kostek masła. Wyniki badań przedstawiono w tabeli.

Masa kostki masła (w dag)	16	18	19	20	21	22
Liczba kostek masła	1	15	24	68	26	16

a) Na podstawie danych przedstawionych w tabeli oblicz średnią arytmetyczną oraz odchylenie standardowe masy kostki masła.
b) Kontrola wypada pozytywnie, jeśli średnia masa kostki masła jest równa masie nominalnej i odchylenie standardowe nie przekracza 1 dag. Czy kontrola zakładu wypadła pozytywnie? Odpowiedź uzasadnij.

13.p.2 Listopad 2006

Zadanie 1. *(3 pkt)*

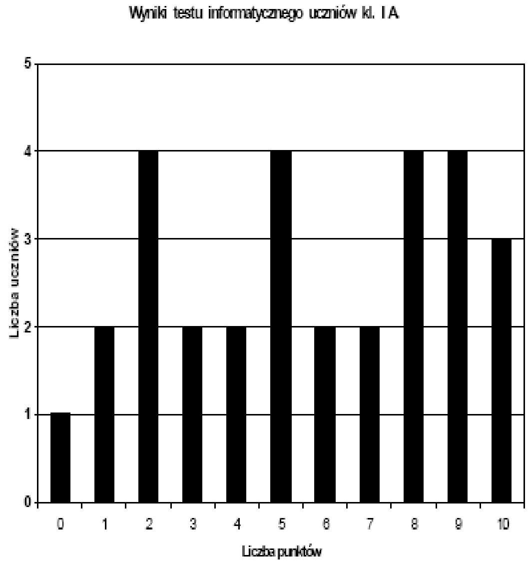
Wzrost kursu euro w stosunku do złotego spowodował podwyżkę ceny wycieczki zagranicznej o 5%. Ponieważ nowa cena nie była zachęcająca, postanowiono obniżyć ją o 8%, ustalając cenę promocyjną równą 1449 zł. Oblicz pierwotną cenę wycieczki dla jednego uczestnika.

14.p.2 Listopad 2006 (próbna do maja 2007)

Zadanie 9. *(4 pkt)*

Nauczyciele informatyki, chcąc wyłonić reprezentację szkoły na wojewódzki konkurs informatyczny, przeprowadzili w klasach I A i I B test z zakresu poznanych wiadomości. Każdy z nich przygotował zestawienie wyników swoich uczniów w innej formie. Na podstawie analizy przedstawionych poniżej wyników obu klas:

a) oblicz średni wynik z testu każdej klasy,
b) oblicz, ile procent uczniów klasy I B uzyskało wynik wyższy niż średni w swojej klasie,
c) podaj medianę wyników uzyskanych w klasie I A.



Wyniki testu informatycznego uczniów kl. I B.

Liczba punktów	Liczba uczniów
0	1
1	2
2	1
3	2
4	1
5	2
6	4
7	4
8	1
9	2
10	5

15.p.2 Maj 2007

Zadanie 2. *(3 pkt)*

Wysokość prowizji, którą klient płaci w pewnym biurze maklerskim przy każdej zawieranej transakcji kupna lub sprzedaży akcji jest uzależniona od wartości transakcji. Zależność ta została przedstawiona w tabeli:

Wartość transakcji	Wysokość prowizji
do 500 zł	15 zł
od 500,01 zł do 3000 zł	2% wartości transakcji + 5 zł
od 3000,01 zł do 8000 zł	1,5% wartości transakcji + 20 zł
od 8000,01 zł do 15000 zł	1% wartości transakcji + 60 zł
powyżej 15000 zł	0,7% wartości transakcji + 105 zł

Klient zakupił za pośrednictwem tego biura maklerskiego 530 akcji w cenie 25 zł za jedną akcję. Po roku sprzedał wszystkie kupione akcje po 45 zł za jedną sztukę. Oblicz, ile zarobił na tych transakcjach po uwzględnieniu prowizji, które zapłacił.

16.p.2 Marzec 2008 (zestaw 1)

Zadanie 13. *(4 pkt)*

Właściciel kiosku notował liczbę biletów komunikacji miejskiej sprzedanych w kolejnych godzinach. Wyniki obserwacji zapisał w tabeli.

Czas obserwacji	Liczba biletów
5:00 – 6:00	2
6:00 – 7:00	3
7:00 – 8:00	9
8:00 – 9:00	8
9:00 – 10:00	6
10:00 – 11:00	4
11:00 – 12:00	3
12:00 – 13:00	3
13:00 – 14:00	3
14:00 – 15:00	5
15:00 – 16:00	8
16:00 – 17:00	6

a) Oblicz średnią liczbę biletów sprzedawanych w ciągu 1 godziny.

b) Wynikiem „typowym” nazywamy wynik, który różni się od średniej o mniej niż jedno odchylenie standardowe. Podaj wszystkie godziny, w których liczba sprzedanych biletów **nie była** „typowa”.

17.p.2 Maj 2008

Zadanie 4. *(3 pkt)*

Koncern paliwowy podnosił dwukrotnie w jednym tygodniu cenę benzyny, pierwszy raz o 10%, a drugi raz o 5%. Po obu tych podwyżkach jeden litr benzyny, wyprodukowanej przez ten koncern, kosztuje 4,62 zł. Oblicz cenę jednego litra benzyny przed omawianymi podwyżkami.

18.p.2 Styczeń 2009

Zadanie 8. (*3 pkt*)

Dziadek założył w banku trzyletnią lokatę pieniężną o stałej rocznej stopie procentowej równej 5% (już po uwzględnieniu podatków i prowizji). Odsetki są kapitalizowane po każdym roku trwania lokaty. Całość środków, otrzymanych z banku po zlikwidowaniu lokaty, dziadek podzielił równo pomiędzy dziewięcioro wnucząt tak, że każde z dzieci otrzymało 1029 zł. Oblicz początkową kwotę lokaty.

19.p.2 Styczeń 2009

Zadanie 12. *(4 pkt)*

W pewnej klasie liczba dziewcząt stanowi 60% liczby osób w tej klasie. Gdy 6 dziewcząt wyjechało na mecz siatkówki, w klasie pozostało tyle samo chłopców, ile dziewcząt. Oblicz, ile osób liczy ta klasa oraz ilu jest w niej chłopców.

20.p.2 Maj 2009

Zadanie 10. *(5 pkt)*
Tabela przedstawia wyniki części teoretycznej egzaminu na prawo jazdy. Zdający uzyskał wynik pozytywny, jeżeli popełnił co najwyżej dwa błędy.

liczba błędów	0	1	2	3	4	5	6	7	8
liczba zdających	8	5	8	5	2	1	0	0	1

a) Oblicz średnią arytmetyczną liczby błędów popełnionych przez zdających ten egzamin. Wynik podaj w zaokrągleniu do całości.
b) Oblicz prawdopodobieństwo, że wśród dwóch losowo wybranych zdających tylko jeden uzyskał wynik pozytywny. Wynik zapisz w postaci ułamka zwykłego nieskracalnego.

21.p.2 M

22.p.2 Koniec

3. FUNKCJA I JEJ WŁASNOŚCI
Poziom podstawowy

1.p.3 Grudzień 2004

Zadanie 7. (*3 pkt*)

Dana jest funkcja określona za pomocą zbioru par uporządkowanych:

$$\left\{\left(x, x^2+1\right):\ x \in N_+ \ i \ x \le 7\right\}$$

a) Sporządź wykres tej funkcji i określ jej zbiór wartości.
b) Wyznacz wszystkie argumenty dla których funkcja przyjmuje wartość 37.

2.p.3 Grudzień 2005

Zadanie 3. (*5 pkt*)

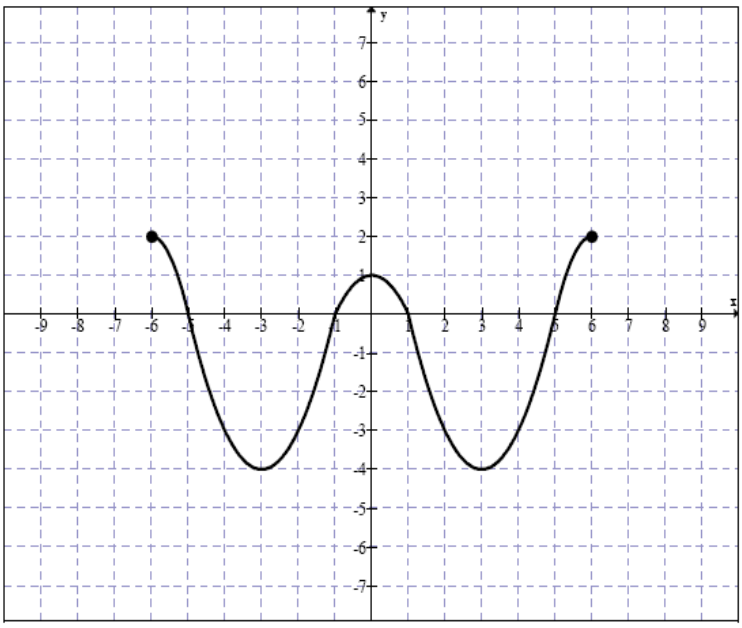
Funkcja $f(x)$ jest określona wzorem: $f(x)=\begin{cases} x+2 & \text{dla } x \in \langle -1;\, 1) \\ -(x-1)^2 & \text{dla } x \in \langle 1;\, 3\rangle \end{cases}$

a) Sprawdź, czy liczba $a=(0{,}25)^{-0{,}5}$ należy do dziedziny funkcji $f(x)$.
b) Oblicz $f(2)$ oraz $f(3)$.
c) Sporządź wykres funkcji $f(x)$.
d) Podaj rozwiązanie równania $f(x)=0$.
e) Zapisz zbiór wartości funkcji $f(x)$.

3.p.3 Listopad 2006

Zadanie 8. *(5 pkt)*

Dany jest wykres funkcji $y=f(x)$ określonej dla $x \in \langle -6, 6\rangle$.

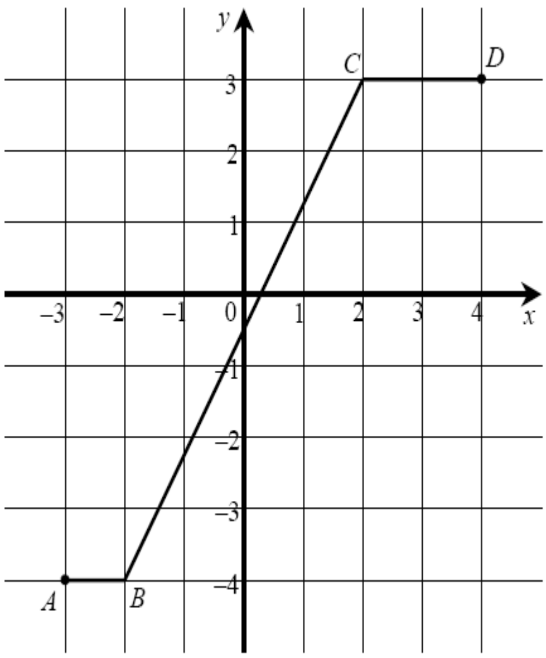


Korzystając z wykresu funkcji zapisz:
a) maksymalne przedziały, w których funkcja jest rosnąca,
b) zbiór argumentów, dla których funkcja przyjmuje wartości dodatnie,
c) największą wartość funkcji f w przedziale $\langle -5, 5\rangle$,
d) miejsca zerowe funkcji $g(x)=f(x-1)$,
e) najmniejszą wartość funkcji $h(x)=f(x)+2$.

4.p.3 Maj 2008

Zadanie 1. ***(4 pkt)***

Na poniższym rysunku przedstawiono łamaną *ABCD*, która jest wykresem funkcji $y = f(x)$.



Korzystając z tego wykresu:

a) zapisz w postaci przedziału zbiór wartości funkcji f,

b) podaj wartość funkcji f dla argumentu $x = 1 - \sqrt{10}$,

c) wyznacz równanie prostej BC,

d) oblicz długość odcinka BC.

5.p.3 Styczeń 2009

Zadanie 1. (*4 pkt*)

Funkcja *f* jest określona wzorem $f(x) = \begin{cases} -x-4 & \text{dla} \quad -7 \le x < -3 \\ -1 & \text{dla} \quad -3 \le x < 0 \\ 4x-1 & \text{dla} \quad 0 \le x \le 2 \end{cases}$

a) Podaj dziedzinę funkcji *f*.

b) Podaj jej miejsca zerowe.

c) Naszkicuj wykres tej funkcji.

d) Podaj zbiór wartości funkcji *f*.

6.p.3 Maj 2009

Zadanie 1. ***(5 pkt)***

Funkcja f określona jest wzorem $f(x) = \begin{cases} 2x-3 & \text{dla } x < 2 \\ 1 & \text{dla } 2 \le x \le 4 \end{cases}$

a) Uzupełnij tabelę:

x	-3	3	
$f(x)$			0

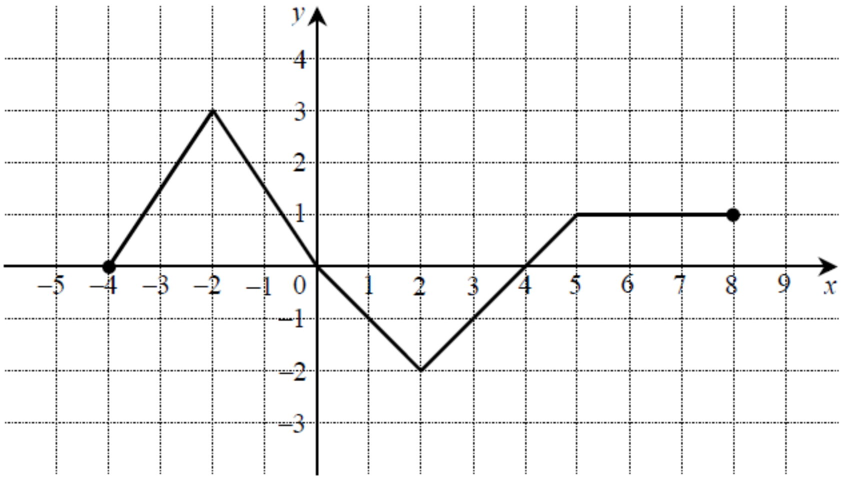
b) Narysuj wykres funkcji f.

c) Podaj wszystkie liczby całkowite x, spełniające nierówność $f(x) \ge -6$.

7.p.3 **Maj 2011**

Zadanie 26. ***(2 pkt)***

Na rysunku przedstawiono wykres funkcji *f*.



Odczytaj z wykresu i zapisz:

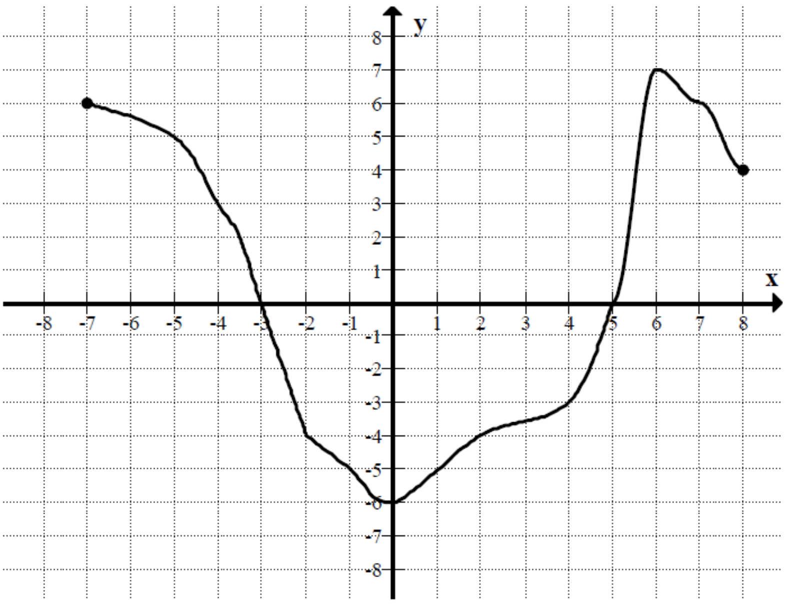
a) zbiór wartości funkcji *f*,

b) przedział maksymalnej długości, w którym funkcja f jest malejąca.

8.p.3 **Maj 2013**

Zadanie 29. ***(2 pkt)***

Na rysunku przedstawiony jest wykres funkcji $f(x)$ określonej dla $x \in \langle -7,8 \rangle$.



Odczytaj z wykresu i zapisz:

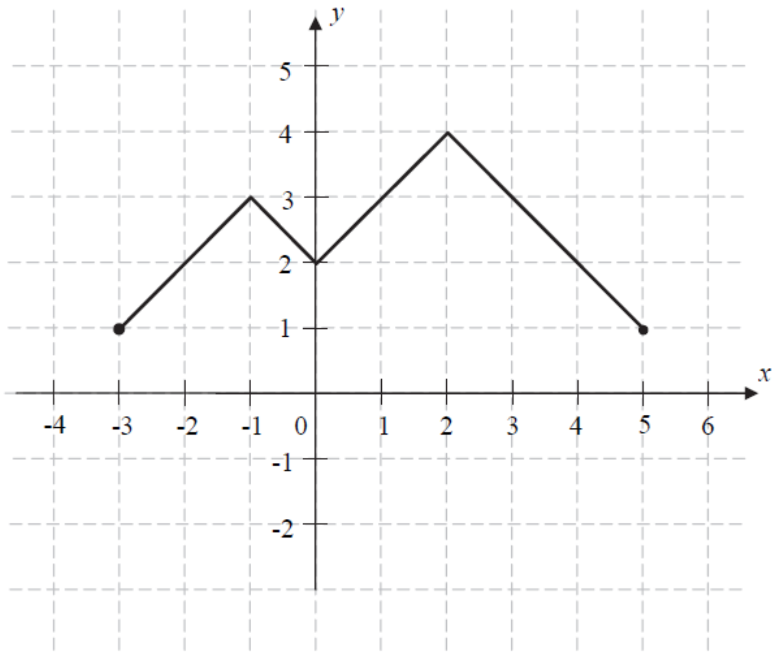
a) największą wartość funkcji f ,

b) zbiór rozwiązań nierówności $f(x) < 0$.

9.p.3 Maj 2015-stara

Zadanie 29. ***(2 pkt)***

Na rysunku przedstawiono wykres funkcji *f*.



Funkcja h określona jest dla $x \in \langle -3, 5 \rangle$ wzorem $h(x) = f(x) + q$, gdzie q jest pewną liczbą rzeczywistą. Wiemy, że jednym z miejsc zerowych funkcji h jest liczba $x_0 = -1$.

a) Wyznacz q.

b) Podaj wszystkie pozostałe miejsca zerowe funkcji h.

10.p.3 M

11.p.3 Koniec

Poziom rozszerzony

1.r.3 Maj 2003 (składanie funkcji)

Zadanie 15. ***(5 pkt)***

Dane są funkcje *f*, *g* i *h* określone wzorami : $f(x) = 2^x$, $g(x) = -x$, $h(x) = x - 2$, $x \in R$.

a) Naszkicuj wykres funkcji *f*.

b) Wyznacz wzór i naszkicuj wykres funkcji $f \circ g$.

c) Wyznacz wzór i naszkicuj wykres funkcji $h \circ f \circ g$.

2.r.3 M

3.r.3 Koniec

4. FUNKCJA LINIOWA
Poziom podstawowy

1.p.4 Maj 2002

Zadanie 1. *(3 pkt)*

Dana jest prosta l o równaniu $y = \frac{3}{2}x - \sqrt{2}$ oraz punkt $A = (-3, -2)$. Wykres funkcji liniowej f jest prostopadły do prostej l, punkt A należy do wykresu funkcji f.

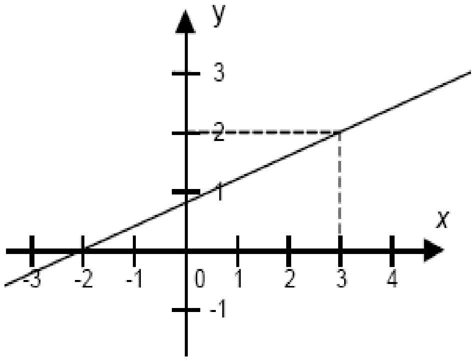
Wyznacz:

a) wzór funkcji f,
b) miejsce zerowe funkcji f.

2.p.4 Maj 2003

Zadanie 7. *(5 pkt)*

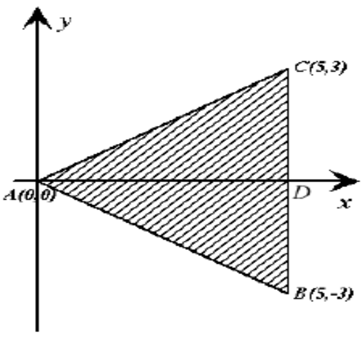
Rysunek przedstawia fragment wykresu funkcji liniowej f. Wykres funkcji g jest obrazem wykresu funkcji f otrzymanym za pomocą przesunięcia o wektor $\vec{u} = [2,1]$. Wyznacz miejsce zerowe funkcji g.



3.p.4 Grudzień 2004

Zadanie 9. (*5 pkt*)

Opisz za pomocą układu nierówności zbiór wszystkich punktów należących do trójkąta ABC przedstawionego na rysunku. Oblicz pole tego trójkąta.



4.p.4 Czerwiec 2004

Zadanie 1. (2 pkt)

Miejscem zerowym funkcji $f(x) = -3x + b$ jest $\sqrt{2}$. Oblicz b.

5.p.4 Czerwiec 2004

Zadanie 9. (7 pkt)
Punkty $A=(-1,-2)$, $B=(2,-1)$, $C=(1,2)$ są wierzchołkami trójkąta ABC.

a. Oblicz długość odcinka $\overline{AB}$.
b. Napisz równanie prostej m, do której należą punkty B i C.
c. Napisz równanie prostej k prostopadłej do prostej m takiej, że $A \in k$.
d. Uzasadnij, że środek okręgu opisanego na trójkącie ABC nie należy do prostej k.

6.p.4 Styczeń 2005

Zadanie 3. (5 pkt.)
Dwie konkurencyjne firmy „Alfa" i „Beta" chcą podjąć się organizacji wycieczki. Opłata za wycieczkę w przypadku każdej z ofert składa się z części stałej, niezależnej od liczebności grupy oraz stawki za każdego uczestnika. Opłata stała i stawka wynoszą odpowiednio 3000 zł i 245 zł w firmie „Alfa" oraz 4400 zł i 206 zł w firmie „Beta". Oblicz:

a) przy jakiej liczbie uczestników wycieczki korzystniejsza jest oferta firmy „Alfa",
b) jakie koszty przypadną na każdego z 38 uczestników wycieczki zorganizowanej przez firmę „Beta" (koszty podaj z dokładnością do 1 zł).

7.p.4 Styczeń 2005

Zadanie 6. (6 pkt.)
Prosta l tworzy z osią x kąt o mierze 45° i przechodzi przez punkt $M=(-2,2)$. Prosta k, prostopadła do prostej l, przecina oś x w punkcie o odciętej $x_o = -3$.

a) Wyznacz równania prostych l i k.
b) Oblicz długość najdłuższego boku trójkąta, którego boki zawierają się w prostych l i k oraz w osi y.

8.p.4 Grudzień 2005

Zadanie 4. (*6 pkt*)
W układzie współrzędnych są dane dwa punkty: $A=(-2,2)$ i $B=(4,4)$.

a) Wyznacz równanie prostej AB.
b) Prosta AB oraz prosta o równaniu $9x-6y-26=0$ przecinają się w punkcie C. Oblicz współrzędne punktu C.
c) Wyznacz równanie symetralnej odcinka AB.

9.p.4 Styczeń 2006

Zadanie 3. (*3 pkt*)
Dana jest funkcja $f: R \to R$ określona wzorem $f(x)=ax+4$.

a) Wyznacz wartość a, dla której miejscem zerowym funkcji f jest liczba -1.
b) Wyznacz wartość a, dla której prosta będąca wykresem funkcji f jest nachylona do osi OX pod kątem 60°.
c) Wyznacz wartość a, dla której równanie $ax+4=2a+4$ ma nieskończenie wiele rozwiązań.

10.p.4 Listopad 2006 (próbna do maja 2007)

Zadanie 5. *(5 pkt)*

Dane są proste o równaniach $2x-y-3=0$ i $2x-3y-7=0$.

a) Zaznacz w prostokątnym układzie współrzędnych na płaszczyźnie kąt opisany układem nierówności $\begin{cases} 2x-y-3\le 0 \\ 2x-3y-7\le 0 \end{cases}$.

b) Oblicz odległość punktu przecięcia się tych prostych od punktu $S=(3,-8)$.

11.p.4 Maj 2007

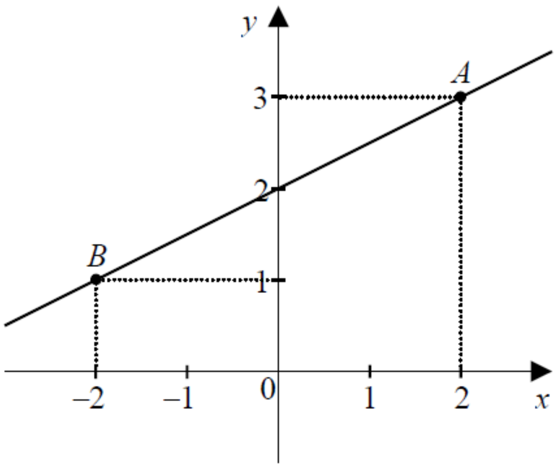
Zadanie 7. *(5 pkt)*

Dany jest punkt $C=(2,3)$ i prosta o równaniu $y=2x-8$ będąca symetralną odcinka BC. Wyznacz współrzędne punktu B. Wykonaj obliczenia uzasadniające odpowiedź.

12.p.4 Marzec 2008 (zestaw 1)

Zadanie 10. *(4 pkt)*

Na płaszczyźnie dane są punkty $A=(2,3)$ i $B=(-2,1)$ (patrz rysunek). Zbadaj, czy punkty $K=(36,21)$ i $L=(-37,-15)$ leżą po tej samej stronie prostej AB. Podaj odpowiedź i jej uzasadnienie.



13.p.4 Maj 2008

Zadanie 3. *(4 pkt)*

Rozwiąż równanie $4^{23}x-32^{9}x=16^{4}\cdot\left(4^{4}\right)^{4}$.

Zapisz rozwiązanie tego równania w postaci 2^{k}, gdzie k jest liczbą całkowitą.

14.p.4 Maj 2008

Zadanie 6. *(5 pkt)*

Prosta o równaniu $5x+4y-10=0$ przecina oś Ox układu współrzędnych w punkcie A oraz oś Oy w punkcie B. Oblicz współrzędne wszystkich punktów C leżących na osi Ox i takich, że trójkąt ABC ma pole równe 35.

15.p.4 Maj 2009

Zadanie 2. *(3 pkt)*

Dwaj rzemieślnicy przyjęli zlecenie wykonania wspólnie 980 detali. Zaplanowali, że każdego dnia pierwszy z nich wykona m, a drugi n detali. Obliczyli, że razem wykonają zlecenie w ciągu 7 dni. Po pierwszym dniu pracy pierwszy z rzemieślników rozchorował się i wtedy drugi, aby wykonać całe zlecenie, musiał pracować o 8 dni dłużej niż planował, (nie zmieniając liczby wykonywanych codziennie detali). Oblicz m i n.

16.p.4 Maj 2009

Zadanie 4. *(3 pkt)*

Wykaż, że liczba 3^{54} jest rozwiązaniem równania $243^{11} - 81^{14} + 7x = 9^{27}$.

17.p.4 Listopad 2009

Zadanie 32. (*5 pkt*)

Uczeń przeczytał książkę liczącą 480 stron, przy czym każdego dnia czytał jednakową liczbę stron. Gdyby czytał każdego dnia o 8 stron więcej, to przeczytałby tę książkę o 3 dni wcześniej. Oblicz, ile dni uczeń czytał tę książkę.

18.p.4 Grudzień 2013

Zadanie 24. (0–2)

Zbiorem rozwiązań nierówności $ax + 4 \geq 0$ z niewiadomą x jest przedział $(-\infty, 2\rangle$. Wyznacz a.

19.p.4 Maj 2015-nowa

Zadanie 30. (0–2)

W układzie współrzędnych są dane punkty $A = (-43, -12)$, $B = (50, 19)$. Prosta AB przecina oś Ox w punkcie P. Oblicz pierwszą współrzędną punktu P.

20.p.4 Czerwiec 2016

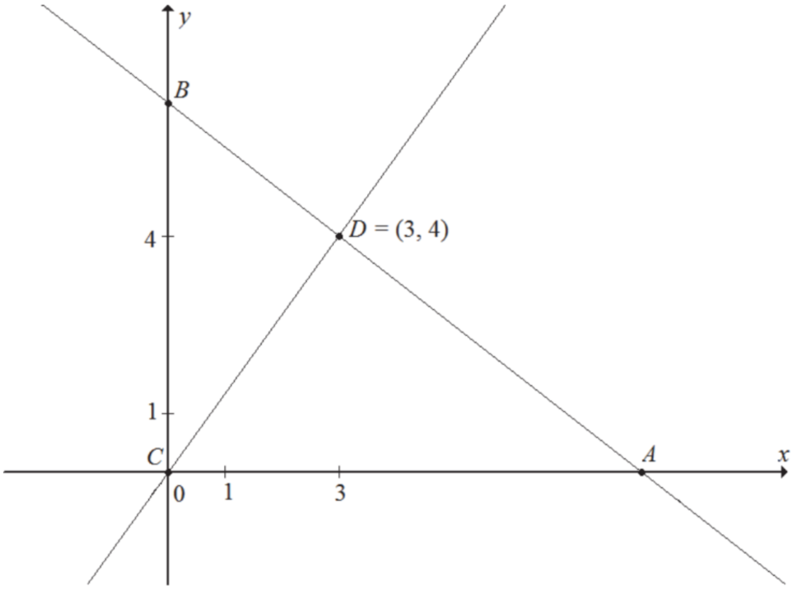
Zadanie 27. (0–2)

Dane są proste o równaniach $y = x + 2$ oraz $y = -3x + b$, które przecinają się w punkcie leżącym na osi Oy układu współrzędnych. Oblicz pole trójkąta, którego dwa boki zawierają się w danych prostych, a trzeci jest zawarty w osi Ox.

21.p.4 Sierpień 2017 (geometria analityczna)

Zadanie 33. (0–4)

Punkt $C = (0,0)$ jest wierzchołkiem trójkąta prostokątnego ABC, którego wierzchołek A leży na osi Ox, a wierzchołek B na osi Oy układu współrzędnych. Prosta zawierająca wysokość tego trójkąta opuszczoną z wierzchołka C przecina przeciwprostokątną AB w punkcie $D = (3,4)$.



Oblicz współrzędne wierzchołków A i B tego trójkąta oraz długość przeciwprostokątnej AB.

22.p.4 Lipiec 2020

Zadanie 31. (0–2)

Prosta k jest nachylona do osi Ox pod kątem ostrym α, takim, że $\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$. Wyznacz współczynnik kierunkowy prostej k.

23.p.4 Wrzesień 2020

Zadanie 34. (0–5)

Prosta o równaniu $y = -2x + 7$ jest symetralną odcinka PQ, gdzie $P = (4,5)$. Oblicz współrzędne punktu Q.

24.p.4 Maj 2021

Zadanie 31. (0–2)

Funkcja liniowa f przyjmuje wartość 2 dla argumentu 0, a ponadto $f(4) - f(2) = 6$. Wyznacz wzór funkcji f.

25.p.4 M

26.p.4 Koniec

Poziom rozszerzony

1.r.4 Styczeń 2003

Zadanie 12. *(4 pkt)*

Dane jest równanie postaci $a^2 \cdot x - 1 = x + a$, w którym niewiadomą jest x.

Zbadaj liczbę rozwiązań tego równania, w zależności od parametru a.

2.r.4 Maj 2007

Zadanie 1. *(5 pkt)*

Dana jest funkcja $f(x) = |x-1| - |x+2|$ dla $x \in R$.

a) Wyznacz zbiór wartości funkcji f dla $x \in (-\infty, -2)$.

b) Naszkicuj wykres tej funkcji.

c) Podaj jej miejsca zerowe.

d) Wyznacz wszystkie wartości parametru m, dla których równanie $f(x) = m$ nie ma rozwiązania.

3.r.4 Maj 2007

Zadanie 7. (*7 pkt*)

Dany jest układ równań: $\begin{cases} mx - y = 2 \\ x + my = m \end{cases}$.

Dla każdej wartości parametru m wyznacz parę liczb (x, y), która jest rozwiązaniem tego układu równań. Wyznacz najmniejszą wartość sumy $x + y$ dla $m \in \langle 2, 4 \rangle$.

4.r.4 Marzec 2008

Zadanie 1. *(5 pkt)*

Punkty $A = (-2, 12)$ i $B = (6, -2)$ są wierzchołkami trójkąta prostokątnego ABC o kącie prostym przy wierzchołku C. Oblicz współrzędne wierzchołka C tego trójkąta, wiedząc, że leży on na prostej o równaniu $x + 3y = 22$. Sporządź rysunek w prostokątnym układzie współrzędnych. Rozważ wszystkie przypadki.

5.r.4 Maj 2008

Zadanie 2. *(4 pkt)*

Rozwiąż nierówność $|x-2| + |3x-6| < |x|$.

6.r.4 Styczeń 2009

Zadanie 2. (*4 pkt*)

Rozwiąż nierówność $|x+3| + |3x+9| < |x+5|$.

7.r.4 Maj 2009

Zadanie 1. *(4 pkt)*

Funkcja liniowa *f* określona jest wzorem $f(x)=ax+b$ dla $x\in R$.

a) Dla $a=2008$ i $b=2009$ zbadaj, czy do wykresu tej funkcji należy punkt $P=\left(2009, 2009^2\right)$.

b) Narysuj w układzie współrzędnych zbiór

$$A=\left\{(x,y): x\in\langle -1,3\rangle \text{ i } y=-\frac{1}{2}x+b \text{ i } b\in\langle -2,1\rangle\right\}.$$

8.r.4 Maj 2010

Zadanie 1. *(4 pkt)*

Rozwiąż nierówność $|2x+4|+|x-1|\le 6$.

9.r.4 Czerwiec 2012

Zadanie 1. *(4 pkt)*

Rozwiąż nierówność $|x-2|+|x+1|\ge 3x-3$.

10.r.4 Czerwiec 2012

Zadanie 10. *(4 pkt)*

Na płaszczyźnie dane są punkty $A=(3,-2)$ i $B=(11,4)$. Na prostej o równaniu $y=8x+10$ znajdź punkt *P*, dla którego suma $|AP|^2+|BP|^2$ jest najmniejsza.

11.r.4 Maj 2013

Zadanie 1. *(4 pkt)*

Rozwiąż nierówność $|2x-5|-|x+4|\le 2-2x$.

12.r.4 Maj 2015-stara

Zadanie 6. *(4 pkt)*

Rozwiąż nierówność $|2x-6|+|x+7|\ge 17$.

13.r.4 Czerwiec 2015

Zadanie 6. (0−2)

Wyznacz największą liczbę całkowitą spełniającą nierówność $|x|<|x-1025|$. W poniższe kratki wpisz – kolejno – cyfrę setek, cyfrę dziesiątek i cyfrę jedności otrzymanego wyniku.

14.r.4 Maj 2016

Zadanie 10. (0–4)

Wyznacz wszystkie wartości parametru a, dla których wykresy funkcji *f* i *g*, określonych wzorami $f(x)=x-2$ oraz $g(x)=5-ax$, przecinają się w punkcie o obu współrzędnych dodatnich.

15.r.4 Maj 2018 – stara

Zadanie 1. *(4 pkt)*

Rozwiąż równanie $3|x+2| = |x-3| + 11$.

16.r.4 Maj 2019 – stara

Zadanie 1. *(5 pkt)*

Funkcja f jest określona wzorem $f(x) = \frac{|x+2|}{x+2} - x + 3|x-1|$, dla każdej liczby rzeczywistej $x \neq -2$. Wyznacz zbiór wartości tej funkcji.

17.r.4 Maj 2020

Zadanie 6. (0–3)

Wyznacz wszystkie wartości parametru a, dla których równanie $|x-5| = (a-1)^2 - 4$ ma dwa różne rozwiązania dodatnie.

18.r.4 Maj 2022

Zadanie 7. (0–3)

Rozwiąż równanie:

$$|x-3| = 2x + 11$$

19.r.4 M
20.r.4 M
21.r.4 M

22.r.4 Koniec

5. FUNKCJA KWADRATOWA

Poziom podstawowy

1.p.5 Maj 2002

Zadanie 8. ***(5 pkt)***

Funkcja kwadratowa $f(x) = ax^2 + bx - 3$, gdzie $b > 0$ posiada dwa różne miejsca zerowe, których iloczyn jest równy (-3). Wiedząc, że funkcja ta przyjmuje najmniejszą wartość równą (-4), wyznacz:

a) współczynniki a i b,

b) miejsca zerowe funkcji f.

2.p.5 Styczeń 2003

Zadanie 7. ***(6 pkt)***

Funkcja $f: R \to R$ jest określona wzorem: $f(x) = x^2 - 6x + 12$.

a) Rozwiąż nierówność $f(x) - 19 > 0$.

b) Uzasadnij, że obrazem wykresu funkcji f, w symetrii względem prostej o równaniu $x = 6$, nie jest parabola, określona równaniem $y = (x-9)^2 + 6$.

3.p.5 Maj 2003

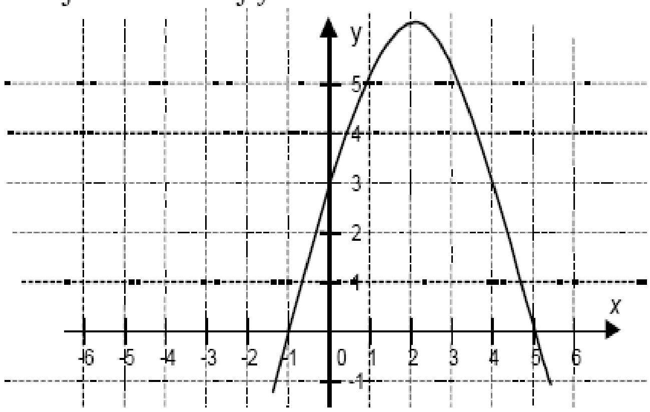
Zadanie 2. ***(4 pkt)***

Rysunek przedstawia fragment wykresu funkcji kwadratowej f.

a) Podaj miejsca zerowe funkcji f.

b) Podaj rozwiązania nierówności $f(x) \le 0$.

c) Podaj rozwiązania równania $f(x) = 3$.



4.p.5 Grudzień 2004

Zadanie 3. (***5 pkt***)

Funkcja f jest określona wzorem: $f(x) = ax^2 + bx + 1$ dla $x \in R$.

a) Wyznacz wzór tej funkcji tak, aby $f(1) = 2$ i $f(2) = -1$.

b) Dla wyznaczonych wartości współczynników a i b rozwiąż nierówność: $f(x) \rangle 1$.

5.p.5 Czerwiec 2004

Zadanie 2. (3 pkt)

Dana jest funkcja f określona wzorem $f(x) = (1-x)(x+1) + 2x$. Wyznacz zbiór wartości funkcji f.

6.p.5 Czerwiec 2004

Zadanie 6. (3 pkt)

Funkcja f przyporządkowuje każdej liczbie rzeczywistej iloczyn tej liczby przez liczbę o 3 od niej mniejszą.

a. Podaj wzór funkcji f

b. Zbadaj, ile rozwiązań ma równanie $f(x)+3=0$.

7.p.5 Maj 2005

Zadanie 5. *(4 pkt)*

Sklep sprowadza z hurtowni kurtki płacąc po 100 zł za sztukę i sprzedaje średnio 40 sztuk miesięcznie po 160 zł. Zaobserwowano, że każda kolejna obniżka ceny sprzedaży kurtki o 1 zł zwiększa sprzedaż miesięczną o 1 sztukę. Jaką cenę kurtki powinien ustalić sprzedawca, aby jego miesięczny zysk był największy?

8.p.5 Grudzień 2005

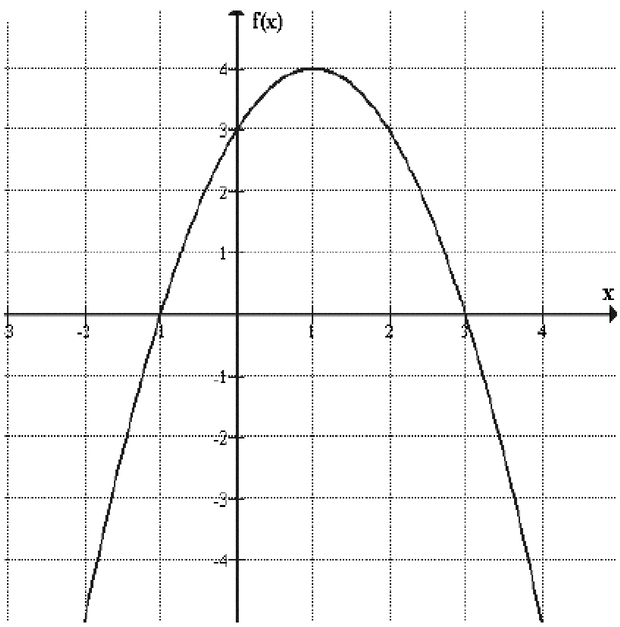
Zadanie 2. (*4 pkt*)

W roku 2005 na uroczystości urodzin zapytano jubilata, ile ma lat. Jubilat odpowiedział: „Jeśli swój wiek sprzed 10 lat pomnożę przez swój wiek za 11 lat, to otrzymam rok mojego urodzenia". Ułóż odpowiednie równanie, rozwiąż je i zapisz, w którym roku urodził się ten jubilat.

9.p.5 Styczeń 2006

Zadanie 6. (*6 pkt*)

Na rysunku przedstawiony jest wykres funkcji kwadratowej f. Na podstawie tego wykresu



a) zapisz w postaci sumy przedziałów liczbowych zbiór rozwiązań nierówności $f(x)\leq 3$,

b) określ i zapisz największą i najmniejszą wartość funkcji f w przedziale $\langle 0, 3\rangle$,

c) zapisz wzór funkcji f w postaci iloczynowej.

10.p.5 Maj 2006

Zadanie 8. (*5 pkt*)

Dana jest funkcja $f(x) = -x^2 + 6x - 5$.

a) Naszkicuj wykres funkcji f i podaj jej zbiór wartości.

b) Podaj rozwiązanie nierówności $f(x) \geq 0$.

11.p.5 Listopad 2006 (próbna do maja 2007)

Zadanie 11. *(4 pkt)*

Funkcja f przyporządkowuje każdej liczbie rzeczywistej x z przedziału $\langle -4, -2 \rangle$ połowę kwadratu tej liczby pomniejszoną o 8.

a) Podaj wzór tej funkcji.

b) Wyznacz najmniejszą wartość funkcji f w podanym przedziale.

12.p.5 Maj 2007

Zadanie 1. (*5 pkt*)

Znajdź wzór funkcji kwadratowej $y = f(x)$, której wykresem jest parabola o wierzchołku (1,–9) przechodząca przez punkt o współrzędnych (2,–8). Otrzymaną funkcję przedstaw w postaci kanonicznej. Oblicz jej miejsca zerowe i naszkicuj wykres.

13.p.5 Marzec 2008 (zestaw 1)

Zadanie 1. *(3 pkt)*

Rozwiąż nierówność $2x^2 < -260 + 53x$. Podaj wszystkie liczby całkowite, które spełniają tę nierówność.

14.p.5 Marzec 2008 (zestaw 1)

Zadanie 7. *(3 pkt)*

Z krawędzi dachu podrzucono kamień, który po 2 sekundach spadł na ziemię. Wysokość (wyrażoną w metrach), na jakiej znajdował się kamień nad ziemią po upływie t sekund od chwili jego podrzucenia, opisuje funkcja $h(t) = -5t^2 + 5t + 10$, gdzie $t \in \langle 0, 2 \rangle$.

a) Podaj, z jakiej wysokości (od ziemi) kamień został podrzucony.

b) Oblicz, po jakim czasie od momentu podrzucenia kamień osiągnął największą wysokość.

c) Oblicz największą wysokość (od ziemi), na jaką wzniósł się ten kamień.

15.p.5 Maj 2008

Zadanie 9. *(5 pkt)*

Oblicz najmniejszą i największą wartość funkcji kwadratowej $f(x) = (2x+1)(x-2)$ w przedziale $\langle -2, 2 \rangle$.

16.p.5 Styczeń 2009

Zadanie 10. (*5 pkt*)

Doświadczalnie ustalono, że czas $T(n)$, liczony w sekundach, potrzebny na alfabetyczne ułożenie n kartek z nazwiskami wyraża się, z dobrym przybliżeniem, wzorem $T(n) = a \cdot n^2 + b \cdot n$. Ułożenie 10 kartek trwa średnio 20 sekund, a 30 kartek średnio 90 sekund. Wyznacz wzór funkcji $T(n)$ i oblicz, ile kartek można ułożyć średnio w ciągu 50 sekund.

17.p.5 Maj 2009

Zadanie 3. *(5 pkt)*

Wykres funkcji f danej wzorem $f(x) = -2x^2$ przesunięto wzdłuż osi Ox o 3 jednostki w prawo oraz wzdłuż osi Oy o 8 jednostek w górę, otrzymując wykres funkcji g.

a) Rozwiąż nierówność $f(x) + 5 < 3x$.

b) Podaj zbiór wartości funkcji g.

c) Funkcja g określona jest wzorem $g(x) = -2x^2 + bx + c$. Oblicz b i c.

18.p.5 Listopad 2009

Zadanie 26. (*2 pkt*)

Rozwiąż nierówność $x^2 - 3x + 2 \le 0$.

19.p.5 Maj 2010

Zadanie 26. *(2 pkt)*

Rozwiąż nierówność $x^2 - x - 2 \le 0$.

20.p.5 Listopad 2010

Zadanie 26. *(2 pkt)*

Rozwiąż nierówność $x^2 + 11x + 30 \le 0$.

21.p.5 Maj 2011

Zadanie 24. *(2 pkt)*

Rozwiąż nierówność $3x^2 - 10x + 3 \le 0$.

22.p.5 Maj 2012

Zadanie 26. *(2 pkt)*

Rozwiąż nierówność $x^2 + 8x + 15 > 0$.

23.p.5 Czerwiec 2012 (termin dodatkowy)

Zadanie 25. *(2 pkt)*

Rozwiąż nierówność $x^2 - 3x - 10 < 0$.

24.p.5 Sierpień 2012

Zadanie 26. ***(2 pkt)***

Rozwiąż nierówność $x^2 - 8x + 7 \geq 0$.

25.p.5 Sierpień 2012

Zadanie 31. ***(2 pkt)***

Wykaż, że jeżeli $c < 0$, to trójmian kwadratowy $y = x^2 + bx + c$ ma dwa różne miejsca zerowe.

26.p.5 Maj 2013

Zadanie 30. ***(2 pkt)***

Rozwiąż nierówność $2x^2 - 7x + 5 \geq 0$.

27.p.5 Maj 2014

Zadanie 26. ***(2 pkt)***

Wykresem funkcji kwadratowej $f(x) = 2x^2 + bx + c$ jest parabola, której wierzchołkiem jest punkt $W = (4, 0)$. Oblicz wartości współczynników b i c.

28.p.5 Grudzień 2014

Zadanie 25. (0–2)

Rozwiąż nierówność: $-x^2 - 4x + 21 < 0$.

29.p.5 Maj 2015-nowa

Zadanie 26. (0–2)

Rozwiąż nierówność $2x^2 - 4x > (x+3)(x-2)$.

30.p.5 Maj 2015-nowa

Zadanie 29. (0–2)

Oblicz najmniejszą i największą wartość funkcji kwadratowej $f(x) = x^2 - 6x + 3$ w przedziale $\langle 0, 4 \rangle$.

31.p.5 Maj 2015-stara

Zadanie 27. ***(2 pkt)***

Rozwiąż nierówność $2x^2 - 4x \geq x - 2$.

32.p.5 Czerwiec 2015

Zadanie 26. (0–2)

Rozwiąż nierówność $3x^2 - 9x \leq x - 3$.

33.p.5 Czerwiec 2015

Zadanie 30. (0–2)

Funkcja kwadratowa, f dla $x=-3$ przyjmuje wartość największą równą 4. Do wykresu funkcji f należy punkt $A=(-1,3)$. Zapisz wzór funkcji kwadratowej f.

34.p.5 Czerwiec 2015 - stara

Zadanie 26. ***(2 pkt)***

Rozwiąż nierówność $7x^2-28\leq 0$.

35.p.5 Czerwiec 2015 -stara

Zadanie 28. ***(2 pkt)***

Funkcja kwadratowa, f dla $x=-3$ przyjmuje wartość największą równą 4. Do wykresu funkcji f należy punkt $A=(-1,3)$. Zapisz wzór funkcji kwadratowej f.

36.p.5 Sierpień 2015

Zadanie 28. (0–2)

Rozwiąż nierówność $20x\geq 4x^2+24$.

37.p.5 Sierpień 2015

Zadanie 34. (0–5)

Funkcja kwadratowa f określona jest wzorem $f(x)=ax^2+bx+c$. Zbiorem rozwiązań nierówności $f(x)>0$ jest przedział $(0,12)$. Największa wartość funkcji f jest równa 9. Oblicz współczynniki a, b i c funkcji f.

38.p.5 Sierpień 2015 – stara

Zadanie 27. ***(2 pkt)***

Rozwiąż nierówność $5x^2-45\leq 0$.

39.p.5 Maj 2016

Zadanie 27. (0–2)

Rozwiąż nierówność $2x^2-4x>3x^2-6x$.

40.p.5 Maj 2016 – stara

Zadanie 26. ***(2 pkt)***

Rozwiąż nierówność $2x^2+5x-3>0$.

41.p.5 Sierpień 2016

Zadanie 26. (0–2)

Rozwiąż nierówność $3x^2 - 6x \geq (x-2)(x-8)$.

42.p.5 Sierpień 2016

Zadanie 29. (0–2)

Funkcja kwadratowa jest określona wzorem $f(x) = x^2 - 11x$. Oblicz najmniejszą wartość funkcji f w przedziale $\langle -6, 6 \rangle$.

43.p.5 Maj 2017 (nowa i stara)

Zadanie 26. (0–2)

Rozwiąż nierówność $8x^2 - 72x \leq 0$.

44.p.5 Maj 2017

Zadanie 29. (0–4)

Funkcja kwadratowa f jest określona dla wszystkich liczb rzeczywistych x wzorem $f(x) = ax^2 + bx + c$. Największa wartość funkcji f jest równa 6 oraz $f(-6) = f(0) = \frac{3}{2}$. Oblicz wartość współczynnika a.

45.p.5 Maj 2017 stara

Zadanie 1. ***(4 pkt)***

Rozwiąż nierówność $|x-1| + |x-5| \leq 10 - 2x$.

46.p.5 Czerwiec 2017

Zadanie 26. (0–2)

Rozwiąż nierówność $\left(x - \frac{1}{2}\right)x > 3\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{1}{3}\right)$.

47.p.5 Sierpień 2017

Zadanie 26. (0–2)

Rozwiąż nierówność $2x^2 + x - 6 \leq 0$.

48.p.5 Sierpień 2017

Zadanie 32. (0–4)

Funkcja kwadratowa $f(x) = ax^2 + bx + c$ ma dwa miejsca zerowe $x_1 = -2$ i $x_2 = 6$. Wykres funkcji *f* przechodzi przez punkt $A = (1, -5)$. Oblicz najmniejszą wartość funkcji *f*.

49.p.5 Maj 2018

Zadanie 26. (0–2)

Rozwiąż nierówność $2x^2 - 3x > 5$.

50.p.5 Czerwiec 2018

Zadanie 26. (0–2)

Rozwiąż nierówność $2x(1-x)+1-x<0$.

51.p.5 Czerwiec 2018

Zadanie 27. (0–2)

Wykresem funkcji kwadratowej f określonej wzorem $f(x)=x^2+bx+c$ jest parabola, na której leży punkt $A=(0,-5)$. Osią symetrii tej paraboli jest prosta o równaniu $x=7$. Oblicz wartości współczynników b i c.

52.p.5 Sierpień 2018

Zadanie 26. (0–2)

Rozwiąż nierówność $x^2+6x-16<0$.

53.p.5 Maj 2019

Zadanie 27. (0–2)

Rozwiąż nierówność $3x^2-16x+16>0$.

54.p.5 Maj 2019

Zadanie 27. ***(2 pkt)***

Rozwiąż nierówność $3x^2-16x+16>0$.

55.p.5 Czerwiec 2019

Zadanie 26. (0–2)

Rozwiąż nierówność $x(7x+2)>7x+2$.

56.p.5 Sierpień 2019

Zadanie 27. (0–2)

Rozwiąż nierówność $2x^2-5x+3\le 0$.

57.p.5 Kwiecień 2020 (próbna)

Zadanie 26. (0–2)

Rozwiąż nierówność $2x^2+x-6\le 0$.

58.p.5 Kwiecień 2020 (próbna)

Zadanie 32. (0–4)

Funkcja kwadratowa f określona wzorem $f(x)=ax^2+bx+c$ ma dwa miejsca zerowe: $x_1=-2$ i $x_2=6$. Wykres funkcji f przechodzi przez punkt $A=(1,-5)$. Oblicz najmniejszą wartość funkcji f.

59.p.5 Maj 2020

Zadanie 26. (0–2)

Rozwiąż nierówność $2(x-1)(x+3)>x-1$.

60.p.5 Lipiec 2020

Zadanie 26. (0–2)

Rozwiąż nierówność $(2x+5)(3x-1)\geq 0$.

61.p.5 Wrzesień 2020

Zadanie 26. (0–2)

Rozwiąż nierówność:

$$-2x^2+5x+3\leq 0.$$

62.p.5 Marzec 2021

Zadanie 29. (0–2)

Rozwiąż nierówność:

$$3x(x+1)>x^2+x+24$$

63.p.5 Marzec 2021

Zadanie 34. (0–2)

Funkcja kwadratowa $f(x)=x^2+bx+c$ nie ma miejsc zerowych. Wykaż, że $1+c>b$.

64.p.5 Maj 2021

Zadanie 29. (0–2)

Rozwiąż nierówność:

$$x^2-5x\leq 14$$

65.p.5 Czerwiec 2021

Zadanie 29. (0–2)

Rozwiąż nierówność:

$$2(x+1)(x-3)<x^2-9$$

66.p.5 Sierpień 2021

Zadanie 29. (0–2)

Rozwiąż nierówność:

$$x^2 - 5 \geq 4x$$

67.p.5 Maj 2022

Zadanie 29. (0–2)

Rozwiąż nierówność:

$$3x^2 - 2x - 9 \geq 7$$

68.p.5 Maj 2022

Zadanie 35. (0–5)

Wykres funkcji kwadratowej f określonej wzorem $f(x) = ax^2 + bx + c$ ma z prostą o równaniu $y = 6$ dokładnie jeden punkt wspólny. Punkty $A = (-5, 0)$ i $B = (3, 0)$ należą do wykresu funkcji f. Oblicz wartości współczynników a, b oraz c.

69.p.5 M

70.p.5 Koniec

Poziom rozszerzony

1.r.5 Maj 2002

Zadanie 11. ***(4 pkt)***

Wyznacz wszystkie wartości parametru m, dla których równanie

$$mx^2 - 3(m+1)x + m = 0$$

nie ma rozwiązania w zbiorze liczb rzeczywistych.

2.r.5 Styczeń 2003

Zadanie 11. ***(4 pkt)***

Wyznacz najmniejszą i największą wartość funkcji $f: R \to R$, określonej wzorem:

$f(x) = (x-1)\cdot(5-x)$, w przedziale $\langle 0; 7 \rangle$.

3.r.5 Grudzień 2004

Zadanie 12. (4 ***pkt*****)**

Wykaż, że dla dowolnych liczb rzeczywistych a, b, c funkcja:

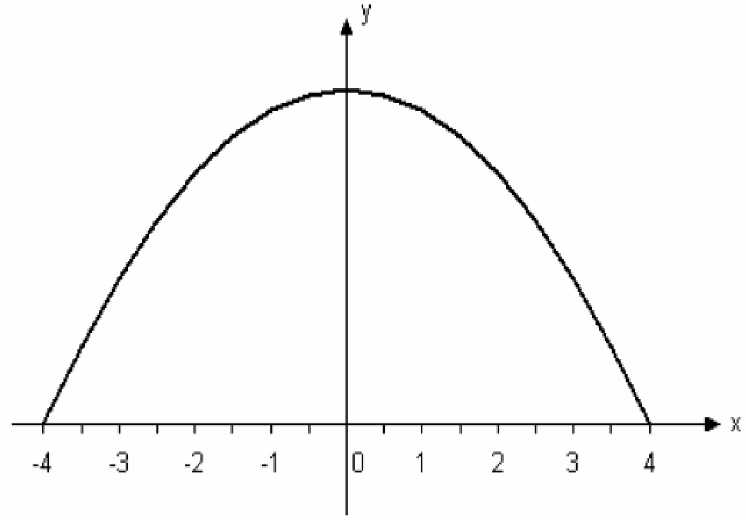
$$f(x) = (x-a)(x-b) + (x-b)(x-c) + (x-c)(x-a)$$

ma co najmniej jedno miejsce zerowe.

4.r.5 Styczeń 2005

Zadanie 16. (3 pkt.)

Jednokierunkowa droga o szerokości 8m prowadzi przez tunel. Przekrój poprzeczny tunelu, przedstawiony na poniższym rysunku, ma kształt zbliżony do łuku paraboli o równaniu: $y = -\frac{3}{8}x^2 + 6$. Sprawdź, wykonując odpowiednie obliczenia, czy ciężarówka wiozącа prostopadłościenny kontener o szerokości 4,8 metra może przejechać tym tunelem, jeżeli najwyższy punkt kontenera znajduje się 4 metry nad drogą.



5.r.5 Styczeń 2006

Zadanie 11. (*6 pkt*)

Wyznacz dziedzinę i naszkicuj wykres funkcji f danej wzorem $f(m) = x_1 \cdot x_2$, gdzie x_1, x_2 są różnymi pierwiastkami równania $(m+2)x^2 - (m+2)^2 x + 3m + 2 = 0$, w którym $m \in R \setminus \{-2\}$.

6.r.5 Listopad 2006

Zadanie 5. (*3 pkt*)

Sporządź wykres funkcji f danej wzorem $f(x) = 2|x| - x^2$, a następnie, korzystając z niego, podaj wszystkie wartości x, dla których funkcja f przyjmuje maksima lokalne i wszystkie wartości x, dla których przyjmuje minima lokalne.

7.r.5 Listopad 2006

Zadanie 11. *(3 pkt)*

Funkcja f przyporządkowuje każdej liczbie naturalnej $n > 1$ największą liczbę całkowitą spełniającą nierówność $x^2 - 3nx + 2n^2 < 0$ o niewiadomej x. Wyznacz wzór funkcji f.

8.r.5 Maj 2008

Zadanie 3. *(5 pkt)*

Liczby $x_1 = 5 + \sqrt{23}$ i $x_2 = 5 - \sqrt{23}$ są rozwiązaniami równania $x^2 - \left(p^2 + q^2\right)x + \left(p + q\right) = 0$ z niewiadomą x. Oblicz wartości p i q.

9.r.5 Maj 2008

Zadanie 7. ***(4 pkt)***

Uzasadnij, że każdy punkt paraboli o równaniu $y=\frac{1}{4}x^2+1$ jest równoodległy od osi Ox i od punktu $F=(0,2)$.

10.r.5 Maj 2010

Zadanie 6. ***(5 pkt)***

Wyznacz wszystkie wartości parametru m, dla których równanie $x^2+mx+2=0$ ma dwa różne pierwiastki rzeczywiste takie, że suma ich kwadratów jest większa od $2m^2-13$.

11.r.5 Maj 2012

Zadanie 1. ***(4 pkt)***

Wyznacz cztery kolejne liczby całkowite takie, że największa z nich jest równa sumie kwadratów trzech pozostałych liczb.

12.r.5 Maj 2012

Zadanie 4. ***(6 pkt)***

Oblicz wszystkie wartości parametru m, dla których równanie $x^2-(m+2)x+m+4=0$ ma dwa różne pierwiastki rzeczywiste x_1, x_2 takie, że $x_1^4+x_2^4=4m^3+6m^2-32m+12$.

13.r.5 Maj 2012

Zadanie 6. ***(6 pkt)***

W układzie współrzędnych rozważmy wszystkie punkty P postaci: $P=\left(\frac{1}{2}m+\frac{5}{2}, m\right)$, gdzie $m\in\langle -1,7\rangle$. Oblicz najmniejszą i największą wartość $|PQ|^2$, gdzie $Q=\left(\frac{55}{2},0\right)$.

14.r.5 Czerwiec 2012

Zadanie 4. ***(5 pkt)***

Wyznacz wszystkie wartości parametru m, dla których równanie $2x^2+(3-2m)x-m+1=0$ ma dwa różne pierwiastki x_1, x_2 takie, że $|x_1-x_2|=3$.

15.r.5 Maj 2013

Zadanie 6. ***(6 pkt)***

Wyznacz wszystkie wartości parametru m, dla których równanie $x^2+2(1-m)x+m^2-m=0$ ma dwa różne rozwiązania rzeczywiste x_1, x_2 spełniające warunek $x_1\cdot x_2\le 6m\le x_1^2+x_2^2$.

16.r.5 Grudzień 2013

Zadanie 11. (0–3)

Udowodnij, że dla każdej liczby rzeczywistej x i każdej liczby rzeczywistej m prawdziwa jest nierówność

$$20x^2-24mx+18m^2\ge 4x+12m-5.$$

17.r.5 **Maj 2014**

Zadanie 2. ***(6 pkt)***

Wyznacz wszystkie wartości parametru m, dla których funkcja kwadratowa $f(x)=x^2-(2m+2)x+2m+5$ ma dwa różne pierwiastki x_1, x_2 takie, że suma kwadratów odległości punktów $A=(x_1,0)$ i $B=(x_2,0)$ od prostej o równaniu $x+y+1=0$ jest równa 6.

18.r.5 **Maj 2015-nowa**

Zadanie 7. (0–2)

Liczby (-1) i 3 są miejscami zerowymi funkcji kwadratowej f. Oblicz $\frac{f(6)}{f(12)}$.

19.r.5 **Maj 2015-nowa**

Zadanie 13. (0–5)

Dany jest trójmian kwadratowy $f(x)=(m+1)x^2+2(m-2)x-m+4$. Wyznacz wszystkie wartości parametru m, dla których trójmian f ma dwa różne pierwiastki rzeczywiste x_1, x_2, spełniające warunek $x_1^{\,2}-x_2^{\,2}=x_1^{\,4}-x_2^{\,4}$.

20.r.5 **Maj 2015-stara**

Zadanie 3. ***(6 pkt)***

Wyznacz wszystkie wartości parametru m, dla których równanie $\left(m^2-m\right)x^2-x+1=0$ ma dwa różne rozwiązania rzeczywiste x_1, x_2 takie, że $\frac{1}{x_1+x_2}\le\frac{m}{3}\le\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}$.

21.r.5 **Czerwiec 2015**

Zadanie 15. (0−6)

Funkcja f jest określona wzorem $f(x)=\frac{m^2+m-6}{m-5}x^2-(m-2)x+m-5$ dla każdej liczby rzeczywistej x. Wyznacz całkowite wartości parametru m, dla których funkcja f przyjmuje wartość największą i ma dwa różne miejsca zerowe o jednakowych znakach.

22.r.5 **Maj 2016**

Zadanie 12. (0–6)

Dany jest trójmian kwadratowy $f(x)=x^2+2(m+1)x+6m+1$. Wyznacz wszystkie rzeczywiste wartości parametru m, dla których ten trójmian ma dwa różne pierwiastki x_1, x_2 tego samego znaku, spełniające warunek $|x_1-x_2|<3$.

23.r.5 **Maj 2017 (nowa i stara)**

Zadanie 12. (0–5)

Wyznacz wszystkie wartości parametru m, dla których równanie

$$4x^2-6mx+(2m+3)(m-3)=0$$

ma dwa różne rozwiązania rzeczywiste x_1 i x_2, przy czym $x_1<x_2$, spełniające warunek

$$(4x_1-4x_2-1)(4x_1-4x_2+1)<0.$$

24.r.5 Maj 2018

Zadanie 12. (0–6)

Wyznacz wszystkie wartości parametru *m*, dla których równanie $x^2+(m+1)x-m^2+1=0$ ma dwa rozwiązania rzeczywiste x_1 i x_2 ($x_1 \neq x_2$), spełniające warunek $x_1^3+x_2^3>-7x_1x_2$.

25.r.5 Maj 2019 – stara

Zadanie 9. *(6 pkt)*

Wyznacz wszystkie wartości parametru *m*, dla których funkcja kwadratowa f określona wzorem

$$f(x)=(2m+1)x^2+(m+2)x+m-3$$

ma dwa różne pierwiastki rzeczywiste x_1, x_2 spełniające warunek $(x_1-x_2)^2+5x_1x_2 \geq 1$.

26.r.5 Kwiecień 2020 (próbna)

Zadanie 14. (0–6)

Wyznacz wszystkie wartości parametru *m*, dla których równanie

$$x^2-3mx+(m+1)(2m-1)=0$$

ma dwa różne rozwiązania x_1, x_2 spełniające warunki: $x_1 \cdot x_2 \neq 0$ oraz $0<\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2} \leq \frac{2}{3}$.

27.r.5 Maj 2020 - stara

Zadanie 11. (0–4)

Dane jest równanie kwadratowe $x^2-(3m+2)x+2m^2+7m-15=0$ z niewiadomą x. Wyznacz wszystkie wartości parametru *m*, dla których różne rozwiązania x_1 i x_2 tego równania istnieją i spełniają warunek

$$2x_1^2+5x_1x_2+2x_2^2=2.$$

28.r.5 Marzec 2021

Zadanie 14. (0–5)

Wyznacz wszystkie wartości parametru a, dla których równanie $x^2-2ax+a^3-2a=0$ ma dwa różne rozwiązania dodatnie.

29.r.5 Maj 2021

Zadanie 11. (0–5)

Wyznacz wszystkie wartości parametru m, dla których trójmian kwadratowy

$$4x^2-2(m+1)x+m$$

ma dwa różne pierwiastki rzeczywiste x_1 oraz x_2, spełniające warunki:

$$x_1 \neq 0, \qquad x_2 \neq 0 \quad \text{oraz} \quad x_1+x_2 \leq \frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}$$

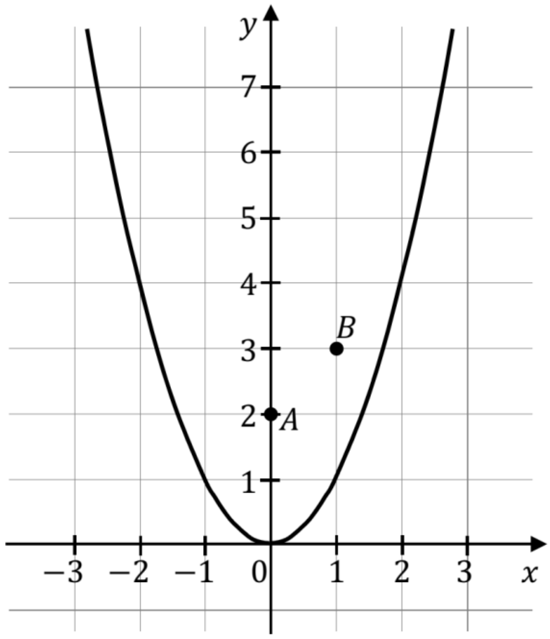
30.r.5 Maj 2021

Zadanie 14. (0–6)

Dane są parabola o równaniu $y = x^2$ oraz punkty $A = (0,2)$ i $B = (1,3)$ (zobacz rysunek). Rozpatrujemy wszystkie trójkąty ABC, których wierzchołek C leży na tej paraboli. Niech m oznacza pierwszą współrzędną punktu C.

a) Wyznacz pole P trójkąta ABC jako funkcję zmiennej m.

b) Wyznacz wszystkie wartości m, dla których trójkąt ABC jest ostrokątny.



31.r.5 Maj 2022

Zadanie 12. (0–5)

Wyznacz wszystkie wartości parametru m, dla których równanie

$$x^2 - (m+1)x + m = 0$$

ma dwa różne rozwiązania rzeczywiste x_1 oraz x_2, spełniające warunki:

$$x_1 \neq 0, \quad x_2 \neq 0 \quad \text{oraz} \quad \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + 2 = \frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2}$$

32.r.5 M

33.r.5 Koniec

6. WIELOMIANY
Poziom podstawowy

1.p.6 6.p.1 Maj 2002

Zadanie 6. ***(3 pkt)***

Jeżeli $x_1 = 2$, $x_2 = 3$ i $x_3 = -1$ są miejscami zerowymi wielomianu $W(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, gdzie $a \neq 0$ oraz $W(4) = 2$, to współczynnik a można wyznaczyć postępując w następujący sposób:
Wielomian W zapisujemy w postaci iloczynowej: $W(x) = a(x-2)(x-3)(x+1)$
i wykorzystując warunek $W(4) = 2$ otrzymujemy równanie: $2 = a(4-2)(4-3)(4+1)$,
stąd $a = \frac{1}{5}$.

Postępując analogicznie, wyznacz współczynnik a wielomianu $W(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, wiedząc, że jego miejsca zerowe to $x_1 = -2$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$ oraz $W(-1) = 3$.

2.p.6 Czerwiec 2004

Zadanie 11. (5 pkt)

Dane są wielomiany $Q(x) = x^3 - x^2 + 2$ i $S(x) = -2x^2 - 2x + 4$.

a. Sprawdź, czy liczba 2 jest pierwiastkiem wielomianu $Q(x)$.
b. Wielomian $P(x)$ jest sumą wielomianów $Q(x)$ i $S(x)$. Rozłóż wielomian $P(x)$ na czynniki liniowe.

3.p.6 Styczeń 2005

Zadanie 8. (4 pkt.)

Dane są wielomiany: $Q(x) = x^4 - 8x^3 + 22x^2 - 24x + 9$, $P(x) = 2x^3 - 9x^2 + 7x + 6$. Oblicz wartości m i n, dla których wielomian $W(x) = x^4 + (m-4)x^3 - (2n+6)x^2 - 38x - 3$ równy jest wielomianowi $Q(x) - 2P(x)$.

4.p.6 Maj 2005

Zadanie 3. ***(4 pkt)***

Dany jest wielomian $W(x) = x^3 + kx^2 - 4$.

a) Wyznacz współczynnik k tego wielomianu wiedząc, że wielomian ten jest podzielny przez dwumian $x + 2$.
b) Dla wyznaczonej wartości k rozłóż wielomian na czynniki i podaj wszystkie jego pierwiastki.

5.p.6 Grudzień 2005

Zadanie 1. (*4 pkt*)

Wielomian $P(x)=x^3-21x+20$ rozłóż na czynniki liniowe, to znaczy zapisz go w postaci iloczynu trzech wielomianów stopnia pierwszego.

6.p.6 Maj 2006

Zadanie 10. (*6 pkt*)

Liczby 3 i -1 są pierwiastkami wielomianu $W(x)=2x^3+ax^2+bx+30$.

a) Wyznacz wartości współczynników a i b.

b) Oblicz trzeci pierwiastek tego wielomianu.

7.p.6 Listopad 2006 (próbna do maja 2007)

Zadanie 4. *(3 pkt)*

Wielomian $W(x)=-2x^4+5x^3+9x^2-15x-9$ jest podzielny przez dwumian $(2x+1)$. Wyznacz pierwiastki tego wielomianu.

8.p.6 Maj 2007

Zadanie 6. *(4 pkt)*

Dany jest wielomian $W(x)=2x^3+ax^2-14x+b$.

a) Dla $a=0$ i $b=0$ otrzymamy wielomian $W(x)=2x^3-14x$. Rozwiąż równanie $2x^3-14x=0$.

b) Dobierz wartości a i b tak, aby wielomian *W(x)* był podzielny jednocześnie przez $x-2$ oraz przez $x+3$.

9.p.6 Marzec 2008 (zestaw 1)

Zadanie 2. *(6 pkt)*

Dany jest wielomian $W(x)=x^3+2x^2-9x-18$.

a) Wyznacz pierwiastki tego wielomianu.

b) Sprawdź, czy wielomiany $W(x)$ i $P(x)=(x+2)(x^2-2x+4)+(x+2)(2x-13)$ są równe.

c) Uzasadnij, że jeśli $x>\sqrt{10}$, to $x^3+2x^2-9x-18>0$.

10.p.6 Maj 2008

Zadanie 8. *(4 pkt)*

Dany jest wielomian $W(x)=x^3-5x^2-9x+45$.

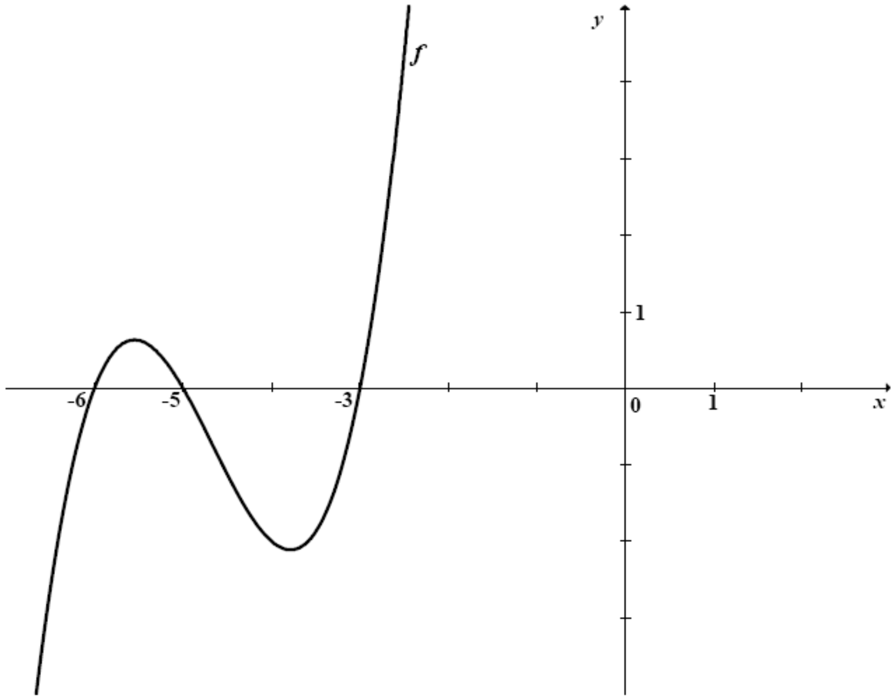
a) Sprawdź, czy punkt $A=(1,30)$ należy do wykresu tego wielomianu.

b) Zapisz wielomian W w postaci iloczynu trzech wielomianów stopnia pierwszego.

11.p.6 Maj 2008

Zadanie 1. (*4 pkt*)

Wielomian f, którego fragment wykresu przedstawiono na poniższym rysunku spełnia warunek $f(0)=90$. Wielomian g dany jest wzorem $g(x)=x^3-14x^2+63x-90$. Wykaż, że $g(x)=-f(-x)$ dla $x\in R$.



12.p.6 Styczeń 2009

Zadanie 5. (*6 pkt*)

Rozwiąż nierówność $(x-2)^2-4<0$. Podaj wszystkie rozwiązania równania $x^3+6x^2-4x-24=0$, które należą do zbioru rozwiązań tej nierówności.

13.p.6 Listopad 2009

Zadanie 27. (*2 pkt*)

Rozwiąż równanie $x^3-7x^2+2x-14=0$.

14.p.6 Maj 2010

Zadanie 27. ***(2 pkt)***

Rozwiąż równanie $x^3-7x^2-4x+28=0$.

15.p.6 Listopad 2010

Zadanie 27. ***(2 pkt)***

Rozwiąż równanie $x^3+2x^2-5x-10=0$.

16.p.6 Maj 2012

Zadanie 28. ***(2 pkt)***

Liczby $x_1=-4$ i $x_2=3$ są pierwiastkami wielomianu $W(x)=x^3+4x^2-9x-36$. Oblicz trzeci pierwiastek tego wielomianu.

17.p.6 Sierpień 2012

Zadanie 27. ***(2 pkt)***

Rozwiąż równanie $x^3 - 6x^2 - 9x + 54 = 0$.

18.p.6 Maj 2013

Zadanie 26. ***(2 pkt)***

Rozwiąż równanie $x^3 + 2x^2 - 8x - 16 = 0$.

19.p.6 Maj 2014

Zadanie 27. ***(2 pkt)***

Rozwiąż równanie $9x^3 + 18x^2 - 4x - 8 = 0$.

20.p.6 Sierpień 2014

Zadanie 27. ***(2 pkt)***

Rozwiąż równanie $x^3 - 6x^2 - 11x + 66 = 0$.

21.p.6 Maj 2015 – stara

Zadanie 28. ***(2 pkt)***

Rozwiąż równanie $4x^3 + 4x^2 - x - 1 = 0$.

22.p.6 Czerwiec 2015

Zadanie 27. (0–2)

Rozwiąż równanie $x\left(x^2 - 2x + 3\right) = 0$.

23.p.6 Czerwiec 2015 - stara

Zadanie 27. ***(2 pkt)***

Rozwiąż równanie $x^4 - 2x^3 + 27x - 54 = 0$.

24.p.6 Sierpień 2015 – stara

Zadanie 26. ***(2 pkt)***

Rozwiąż równanie $8x^3 + 8x^2 - 3x - 3 = 0$.

25.p.6 Maj 2016

Zadanie 28. (0–2)

Rozwiąż równanie $(4 - x)\left(x^2 + 2x - 15\right) = 0$.

26.p.6 Maj 2016 -stara

Zadanie 27. ***(2 pkt)***

Rozwiąż równanie $x^3 + 3x^2 + 2x + 6 = 0$.

27.p.6 **Sierpień 2017**

Zadanie 27. (0–2)

Rozwiąż równanie $(x^2-6)(3x+2)=0$.

28.p.6 **Maj 2018**

Zadanie 27. (0–2)

Rozwiąż równanie $(x^3+125)(x^2-64)=0$.

29.p.6 **Maj 2018 – stara**

Zadanie 27. ***(2 pkt)***

Rozwiąż równanie $x^3-7x^2-4x+28=0$.

30.p.6 **Sierpień 2018**

Zadanie 27. (0–2)

Rozwiąż równanie $(x^3+27)(x^2-16)=0$.

31.p.6 **Maj 2019**

Zadanie 26. (0–2)

Rozwiąż równanie $(x^3-8)(x^2-4x-5)=0$.

32.p.6 **Maj 2019 – stara**

Zadanie 26. ***(2 pkt)***

Rozwiąż równanie $x^3-5x^2-9x+45=0$.

33.p.6 **Sierpień 2019**

Zadanie 26. (0–2)

Rozwiąż równanie $(x^2-16)(x^3-1)=0$.

34.p.6 **Kwiecień 2020 (próbna)**

Zadanie 27. (0–2)

Rozwiąż równanie $(x^2-6)(3x+2)=0$.

35.p.6 **Maj 2020**

Zadanie 27. (0–2)

Rozwiąż równanie $(x^2-1)(x^2-2x)=0$.

36.p.6 Maj 2020 – stara

Zadanie 27. ***(2 pkt)***

Rozwiąż równanie $x^3 - 9x^2 - 4x + 36 = 0$.

37.p.6 Wrzesień 2020

Zadanie 30. (0–2)

Rozwiąż równanie $(x^3 + 8)(x^2 - 9) = 0$.

38.p.6 Maj 2022

39.p.6 M
40.p.6 Koniec

Poziom rozszerzony

1.r.6 Styczeń 2005

Zadanie 11. (5 pkt.)

Pierwiastkiem równania $2x^3 - (3m-1)x^2 + 7x - m = 0$ jest liczba -1. Wyznacz wartość parametru m oraz pozostałe pierwiastki tego równania.

2.r.6 Listopad 2006 (próbna do maja 2007)

Zadanie 2. (***5 pkt***)

Wyznacz wszystkie wartości $k \in R$, dla których pierwiastki wielomianu $W(x) = (x^2 - 8x + 12) \cdot (x - k)$ są trzema kolejnymi wyrazami rosnącego ciągu geometrycznego.

3.r.6 Maj 2007

Zadanie 9. (***3 pkt***)

Przedstaw wielomian $W(x) = x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 4x - 1$ w postaci iloczynu dwóch wielomianów stopnia drugiego o współczynnikach całkowitych i takich, że współczynniki przy drugich potęgach są równe jeden.

4.r.6 Marzec 2008

Zadanie 6. ***(3 pkt)***

Wykaż, że wielomian $W(x) = x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 6x + 9$ nie ma pierwiastków rzeczywistych.

5.r.6 Styczeń 2009

Zadanie 7. (*6 pkt*)

Dane jest równanie $(x+3)\cdot\left[x^2+(p+4)x+(p+1)^2\right]=0$ z niewiadomą x.

a) Rozwiąż to równanie dla $p=1$.

b) Wyznacz wszystkie wartości parametru p, dla których równanie to ma tylko jedno rozwiązanie.

6.r.6 Maj 2009

Zadanie 2. ***(4 pkt)***

Przy dzieleniu wielomianu $W(x)$ przez dwumian $(x-1)$ otrzymujemy iloraz $Q(x)=8x^2+4x-14$ oraz resztę $R(x)=-5$. Oblicz pierwiastki wielomianu $W(x)$.

7.r.6 Maj 2010

Zadanie 4. ***(4 pkt)***

Wyznacz wartości a i b współczynników wielomianu $W(x)=x^3+ax^2+bx+1$ wiedząc, że $W(2)=7$ oraz, że reszta z dzielenia $W(x)$ przez $(x-3)$ jest równa 10.

8.r.6 Maj 2012

Zadanie 2. ***(4 pkt)***

Rozwiąż nierówność $x^4+x^2\geq 2x$.

9.r.6 Czerwiec 2012

Zadanie 2. ***(4 pkt)***

Wielomian $W(x)=x^4+ax^3+bx^2-24x+9$ jest kwadratem wielomianu $P(x)=x^2+cx+d$. Oblicz a oraz b.

10.r.6 Maj 2013

Zadanie 8. ***(4 pkt)***

Reszta z dzielenia wielomianu $W(x)=4x^3-5x^2-23x+m$ przez dwumian $x+1$ jest równa 20. Oblicz wartość współczynnika m oraz pierwiastki tego wielomianu.

11.r.6 Maj 2014

Zadanie 10. ***(5 pkt)***

Wyznacz wszystkie całkowite wartości parametru m, dla których równanie $\left(x^3+2x^2+2x+1\right)\left[x^2-(2m+1)x+m^2+m\right]=0$ ma trzy, parami różne, pierwiastki rzeczywiste, takie że jeden z nich jest średnią arytmetyczną dwóch pozostałych.

12.r.6 Maj 2015-nowa

Zadanie 8. (0–3)

Udowodnij, że dla każdej liczby rzeczywistej x prawdziwa jest nierówność

$$x^4-x^2-2x+3>0.$$

13.r.6 Maj 2015-nowa

Zadanie 15. (0–6)

Suma wszystkich czterech współczynników wielomianu $W(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ jest równa 0. Trzy pierwiastki tego wielomianu tworzą ciąg arytmetyczny o różnicy równej 3. Oblicz współczynniki a, b i c. Rozważ wszystkie możliwe przypadki.

14.r.6 Maj 2015-stara

Zadanie 2. ***(5 pkt)***

Dany jest wielomian $W(x) = x^3 - 3mx^2 + (3m^2 - 1)x - 9m^2 + 20m + 4$. Wykres tego wielomianu, po przesunięciu o wektor $\vec{u} = [-3, 0]$, przechodzi przez początek układu współrzędnych. Wyznacz wszystkie pierwiastki wielomianu W.

15.r.6 Maj 2016

Zadanie 2. ***(5 pkt)***

Wielomian $W(x) = 2x^3 + mx^2 - 22x + n$ jest podzielny przez każdy z dwumianów $x+3$ i $x-4$. Oblicz wartości współczynników n i m oraz rozwiąż nierówność $W(x) \geq 0$.

16.r.6 Maj 2016 – stara

Zadanie 7. ***(3 pkt)***

Reszta z dzielenia liczby naturalnej a przez 6 jest równa 1. Reszta z dzielenia liczby naturalnej b przez 6 jest równa 5. Uzasadnij, że liczba $a^2 - b^2$ jest podzielna przez 24.

17.r.6 Maj 2017

Zadanie 5. (0–2)

Reszta z dzielenia wielomianu $W(x) = x^3 - 2x^2 + ax + \frac{3}{4}$ przez dwumian $x-2$ jest równa 1. Oblicz wartość współczynnika a.

W poniższe kratki wpisz kolejno trzy pierwsze cyfry po przecinku rozwinięcia dziesiętnego otrzymanego wyniku.

18.r.6 Maj 2017 stara

Zadanie 2. ***(5 pkt)***

Dany jest wielomian $W(x) = 2x^3 + ax^2 - 13x + b$. Liczba 3 jest jednym z pierwiastków tego wielomianu. Reszta z dzielenia wielomianu $W(x)$ przez $(x+2)$ jest równa 20. Oblicz współczynniki a i b oraz pozostałe pierwiastki wielomianu $W(x)$.

19.r.6 Maj 2018 – stara

Zadanie 8. ***(5 pkt)***

Liczba $\frac{2}{5}$ jest pierwiastkiem wielomianu $W(x) = 5x^3 - 7x^2 - 3x + p$. Wyznacz pozostałe pierwiastki tego wielomianu i rozwiąż nierówność $W(x) > 0$.

20.r.6 Maj 2019

Zadanie 13. (0–6)

Wielomian określony wzorem $W(x)=2x^3+\left(m^3+2\right)x^2-11x-2(2m+1)$ jest podzielny przez dwumian $(x-2)$ oraz przy dzieleniu przez dwumian $(x+1)$ daje resztę 6. Oblicz m i dla wyznaczonej wartości m rozwiąż nierówność $W(x)\le 0$.

21.r.6 Maj 2019 – stara

Zadanie 6. ***(5 pkt)***

Wielomian określony wzorem $W(x)=2x^3+\left(m^3+2\right)x^2-11x-2(2m+1)$ jest podzielny przez dwumian $(x-2)$ oraz przy dzieleniu przez dwumian $(x+1)$ daje resztę 6. Oblicz m oraz pierwiastki wielomianu W dla wyznaczonej wartości m.

22.r.6 Kwiecień 2020 (próbna)

Zadanie 8. (0–3)

Wykaż, że równanie $x^8+x^2=2\left(x^4+x-1\right)$ ma tylko jedno rozwiązanie rzeczywiste $x=1$.

23.r.6 Marzec 2021

Zadanie 10. (0–4)

Reszty z dzielenia wielomianu $W(x)=x^4+bx^3+cx^2$ przez dwumiany $(x-2)$ i $(x-3)$ są odpowiednio równe (-8) oraz (-18). Oblicz resztę z dzielenia wielomianu W przez dwumian $(x-4)$.

24.r.6 Maj 2022

Zadanie 9. (0–4)

Reszta z dzielenia wielomianu $W(x)=4x^3-6x^2-(5m+1)x-2m$ przez dwumian $x+2$ jest równa (-30).

Oblicz m i dla wyznaczonej wartości m rozwiąż nierówność $W(x)\ge 0$.

25.r.6

26.r.6 M

27.r.6 Koniec

7. FUNKCJA WYMIERNA
Poziom podstawowy

1.p.7 Maj 2007

Zadanie 4. *(5 pkt)*

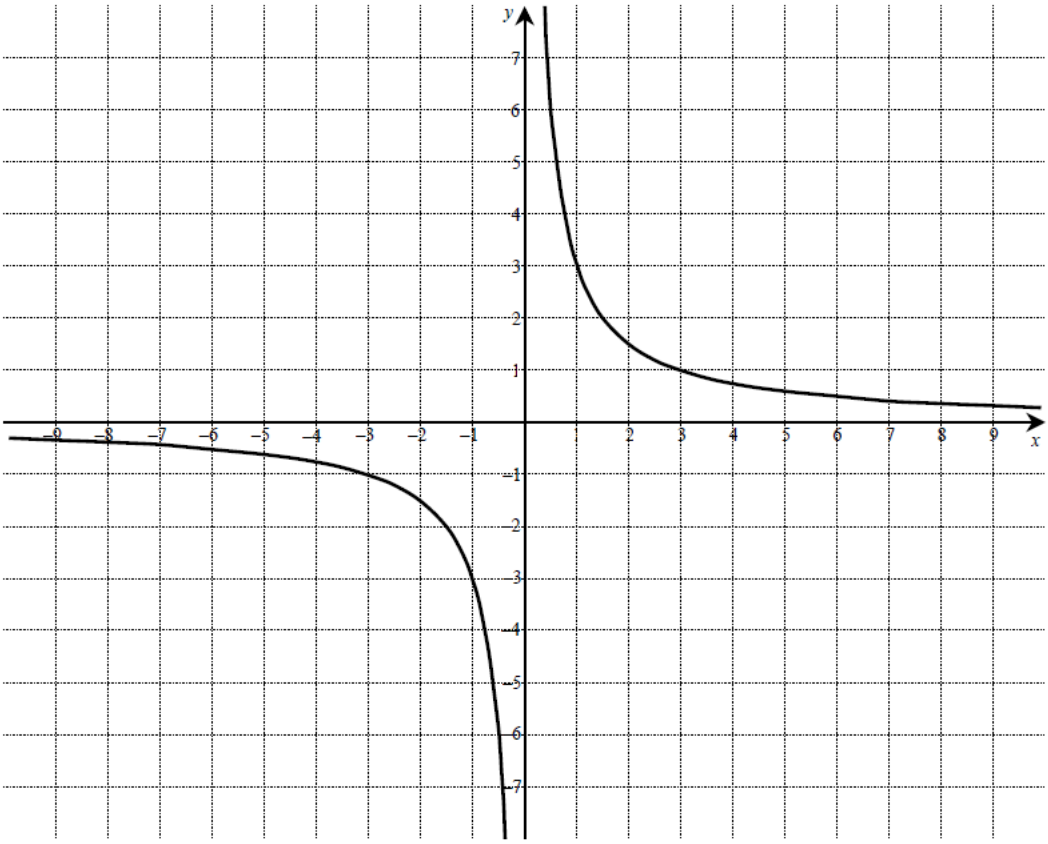
Samochód przebył w pewnym czasie 210 km. Gdyby jechał ze średnią prędkością o 10 km/h większą, to czas przejazdu skróciłby się o pół godziny. Oblicz, z jaką średnią prędkością jechał ten samochód.

2.p.7 Marzec 2008 (zestaw 1)

Zadanie 8. *(4 pkt)*

Na rysunku przedstawiony jest wykres funkcji f określonej wzorem $f(x)=\frac{3}{x}$ dla $x\neq 0$. Wykres ten przesunięto o 2 jednostki w górę wzdłuż osi Oy. Otrzymano w ten sposób wykres funkcji g o wzorze $g(x)=\frac{3}{x}+2$ dla $x\neq 0$.

a) Narysuj wykres funkcji g.
b) Oblicz największą wartość funkcji g w przedziale $\langle 21,31\rangle$.
c) Podaj, o ile jednostek wzdłuż osi Ox należy przesunąć wykres funkcji g, aby otrzymać wykres funkcji przechodzący przez początek układu współrzędnych.



3.p.7 Maj 2008

Zadanie 10. ***(3 pkt)***

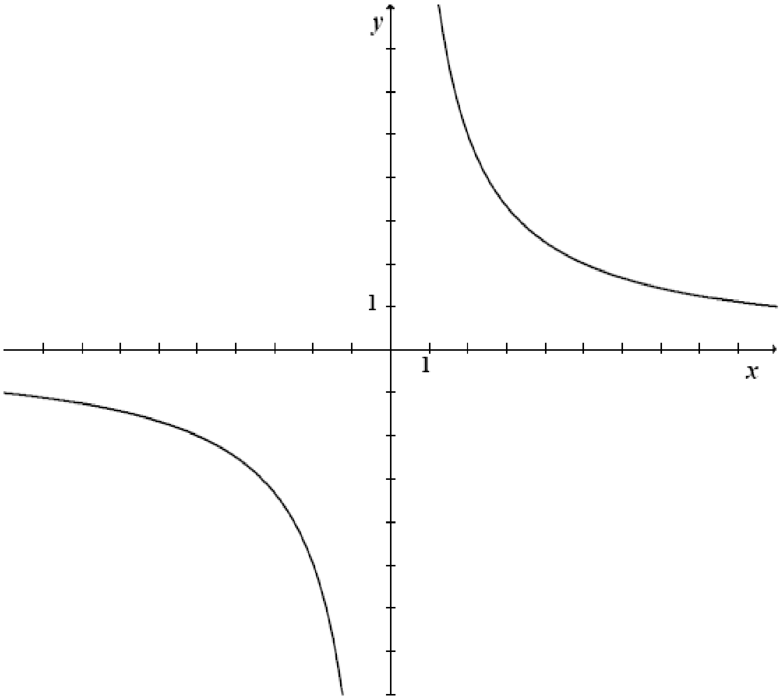
Rysunek przedstawia fragment wykresu funkcji h, określonej wzorem $h(x) = \frac{a}{x}$ dla $x \neq 0$.

Wiadomo, że do wykresu funkcji h należy punkt $P = (2,5)$.

a) Oblicz wartość współczynnika a.

b) Ustal, czy liczba $h(\pi) - h(-\pi)$ jest dodatnia czy ujemna.

c) Rozwiąż nierówność $h(x) > 5$.



4.p.7 Listopad 2010

Zadanie 34. ***(5 pkt)***

Droga z miasta A do miasta B ma długość 474 km. Samochód jadący z miasta A do miasta B wyrusza godzinę później niż samochód z miasta B do miasta A. Samochody te spotykają się w odległości 300 km od miasta B. Średnia prędkość samochodu, który wyjechał z miasta A, liczona od chwili wyjazdu z A do momentu spotkania, była o 17 km/h mniejsza od średniej prędkości drugiego samochodu liczonej od chwili wyjazdu z B do chwili spotkania. Oblicz średnią prędkość każdego samochodu do chwili spotkania.

5.p.7 Maj 2011

Zadanie 32. ***(5 pkt)***

Pewien turysta pokonał trasę 112 km, przechodząc każdego dnia tę samą liczbę kilometrów. Gdyby mógł przeznaczyć na tę wędrówkę o 3 dni więcej, to w ciągu każdego dnia mógłby przechodzić o 12 km mniej. Oblicz, ile kilometrów dziennie przechodził ten turysta.

6.p.7 Maj 2012

Zadanie 34. ***(5 pkt)***

Miasto A i miasto B łączy linia kolejowa długości 210 km. Średnia prędkość pociągu pospiesznego na tej trasie jest o 24 km/h większa od średniej prędkości pociągu osobowego. Pociąg pospieszny pokonuje tę trasę o 1 godzinę krócej niż pociąg osobowy. Oblicz czas pokonania tej drogi przez pociąg pospieszny.

7.p.7 Sierpień 2012

Zadanie 34. ***(5 pkt)***

Kolarz pokonał trasę 114 km. Gdyby jechał ze średnią prędkością mniejszą o 9,5 km/h, to pokonałby tę trasę w czasie o 2 godziny dłuższym. Oblicz, z jaką średnią prędkością jechał ten kolarz.

8.p.7 Maj 2013

Zadanie 34. ***(5 pkt)***

Dwa miasta łączy linia kolejowa o długości 336 kilometrów. Pierwszy pociąg przebył tę trasę w czasie o 40 minut krótszym niż drugi pociąg. Średnia prędkość pierwszego pociągu na tej trasie była o 9 km/h większa od średniej prędkości drugiego pociągu. Oblicz średnią prędkość każdego z tych pociągów na tej trasie.

9.p.7 Grudzień 2013

Zadanie 25. (0–2)

Rozwiąż równanie $\frac{x(x+1)}{x-1} = 5x - 4$, dla $x \neq 1$.

10.p.7 Grudzień 2013

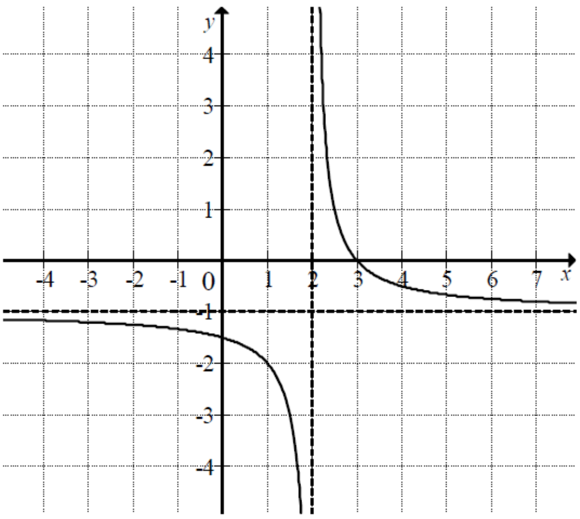
Zadanie 31. (0–4)

Ala jeździ do szkoły rowerem, a Ola skuterem. Obie pokonują tę samą drogę. Ala wyjechała do szkoły o godzinie 7:00 i pokonała całą drogę w ciągu 40 minut. Ola wyjechała 10 minut później niż Ala, a pokonanie całej drogi zajęło jej tylko 20 minut. Oblicz, o której godzinie Ola wyprzedziła Alę.

11.p.7 Maj 2014

Zadanie 29. ***(2 pkt)***

Na rysunku przedstawiono fragment wykresu funkcji *f*, który powstał w wyniku przesunięcia wykresu funkcji określonej wzorem $y = \frac{1}{x}$ dla każdej liczby rzeczywistej $x \neq 0$.



a) Odczytaj z wykresu i zapisz zbiór tych wszystkich argumentów, dla których wartości funkcji *f* są większe od 0.

b) Podaj miejsce zerowe funkcji *g* określonej wzorem $g(x) = f(x-3)$.

12.p.7 Maj 2014

Zadanie 33. ***(5 pkt)***

Turysta zwiedzał zamek stojący na wzgórzu. Droga łącząca parking z zamkiem ma długość 2,1 km. Łączny czas wędrówki turysty z parkingu do zamku i z powrotem, nie licząc czasu poświęconego na zwiedzanie, był równy 1 godzinę i 4 minuty. Oblicz, z jaką średnią prędkością turysta wchodził na wzgórze, jeżeli prędkość ta była o 1 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ mniejsza od średniej prędkości, z jaką schodził ze wzgórza.

13.p.7 Sierpień 2014

Zadanie 32. ***(5 pkt)***

Miasta A i B są odległe o 450 km. Pani Danuta pokonała tę trasę swym samochodem w czasie o 75 minut dłuższym niż pani Lidia. Wartość średniej prędkości, z jaką jechała pani Danuta na całej trasie, była o 18 km/h mniejsza od wartości średniej prędkości, z jaką jechała pani Lidia. Oblicz średnie wartości:

- prędkości, z jaką pani Danuta jechała z A do B.
- prędkości, z jaką pani Lidia jechała z A do B.

14.p.7 Grudzień 2014

Zadanie 26. (0–2)

Uzasadnij, że żadna liczba całkowita nie jest rozwiązaniem równania $\frac{2x+4}{x-2} = 2x+1$.

15.p.7 Grudzień 2014

Zadanie 29. (0–2)

Wartość prędkości średniej obliczamy jako iloraz drogi i czasu, w którym ta droga została przebyta. Samochód przejechał z miejscowości A do miejscowości C przez miejscowość B, która znajduje się w połowie drogi z A do C. Wartość prędkości średniej samochodu na trasie z A do B była równa 40 km/h, a na trasie z B do C – 60 km/h. Oblicz wartość prędkości średniej samochodu na całej trasie z A do C.

16.p.7 Maj 2015-stara

Zadanie 34. ***(5 pkt)***

Biegacz narciarski Borys wyruszył na trasę biegu o 10 minut później niż inny zawodnik, Adam. Metę zawodów, po przebyciu 15-kilometrowej trasy biegu, obaj zawodnicy pokonali równocześnie. Okazało się, że wartość średniej prędkości na całej trasie w przypadku Borysa była o 4,5 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ większa niż w przypadku Adama. Oblicz, w jakim czasie Adam pokonał całą trasę biegu.

17.p.7 Sierpień 2015

Zadanie 26. (0–2)

Rozwiąż równanie $\frac{2x-4}{x} = \frac{x}{2x-4}$, gdzie $x \neq 0$ i $x \neq 2$.

18.p.7 Maj 2016 – stara

Zadanie 33. *(5 pkt)*

Grupa znajomych wyjeżdżających na biwak wynajęła bus. Koszt wynajęcia busa jest równy 960 złotych i tę kwotę rozłożono po równo pomiędzy uczestników wyjazdu. Do grupy wyjeżdżających dołączyło w ostatniej chwili dwóch znajomych. Wtedy koszt wyjazdu przypadający na jednego uczestnika zmniejszył się o 16 złotych. Oblicz, ile osób wyjechało na biwak.

19.p.7 Czerwiec 2016

Zadanie 26. (0–2)

Rozwiąż równanie $\frac{2x+1}{2x}=\frac{2x+1}{x+1}$, gdzie $x\neq -1$ i $x\neq 0$.

20.p.7 Czerwiec 2016

Zadanie 33. (0–4)

Rejsowy samolot z Warszawy do Rzymu przelatuje nad Austrią każdorazowo tą samą trasą z taką samą zakładaną prędkością przelotową. We wtorek jego średnia prędkość była o 10% większa niż prędkość przelotowa, a w czwartek średnia prędkość była o 10% mniejsza od zakładanej prędkości przelotowej. Czas przelotu nad Austrią w czwartek różnił się od wtorkowego o 12 minut. Jak długo trwał przelot tego samolotu nad Austrią we wtorek?

21.p.7 Sierpień 2016

Zadanie 27. (0–2)

Jeżeli do licznika pewnego nieskracalnego ułamka dodamy 32, a mianownik pozostawimy niezmieniony, to otrzymamy liczbę 2. Jeżeli natomiast od licznika i od mianownika tego ułamka odejmiemy 6, to otrzymamy liczbę $\frac{8}{17}$. Wyznacz ten ułamek.

22.p.7 Sierpień 2016

Zadanie 28. (0–2)

Wykaż, że jeżeli liczby rzeczywiste a, b, c spełniają warunek $abc=1$, to

$$a^{-1}+b^{-1}+c^{-1}=ab+ac+bc\,.$$

23.p.7 Sierpień 2017

Zadanie 28. (0–2)

Udowodnij, że dla dowolnej dodatniej liczby rzeczywistej x prawdziwa jest nierówność

$$4x+\frac{1}{x}\geq 4\,.$$

24.p.7 Czerwiec 2019

Zadanie 27. (0–2)

Wyznacz wszystkie liczby rzeczywiste x, które spełniają warunek: $\frac{3x^2-8x-3}{x-3}=x-3$.

25.p.7 Sierpień 2019

Zadanie 28. (0–2)

Wykaż, że dla każdej liczby dodatniej x prawdziwa jest nierówność $x+\frac{1-x}{x}\geq 1$.

26.p.7 Kwiecień 2020 (próbna)

Zadanie 28. (0–2)

Wykaż, że dla dowolnej dodatniej liczby rzeczywistej x prawdziwa jest nierówność

$$4x + \frac{1}{x} \geq 4 .$$

27.p.7 Marzec 2021

Zadanie 30. (0–2)

Rozwiąż równanie:

$$\frac{6x-1}{3x-2} = 3x + 2$$

28.p.7 Maj 2021

Zadanie 32. (0–2)

Rozwiąż równanie:

$$\frac{3x+2}{3x-2} = 4 - x$$

29.p.7 Sierpień 2021

Zadanie 30. (0–2)

Rozwiąż równanie:

$$\frac{x+8}{x-7} = 2x$$

30.p.7 M
31.p.7 M

32.p.7 Koniec

Poziom rozszerzony

1.r.7 Grudzień 2005

Zadanie 13. (*5 pkt*)

Sporządź wykres funkcji $f(x) = \left|\frac{x-4}{x-2}\right|$, a następnie korzystając z tego wykresu, wyznacz wszystkie wartości parametru k, dla których równanie $\left|\frac{x-4}{x-2}\right| = k$, ma dwa rozwiązania, których iloczyn jest liczbą ujemną.

2.r.7 Listopad 2006

Zadanie 1. (*5 pkt*)

Funkcja homograficzna f jest określona wzorem $f(x)=\frac{px-3}{x-p}$, gdzie $p\in R$ jest parametrem i $|p|\neq\sqrt{3}$.

a) Dla $p=1$ zapisz wzór funkcji w postaci $f(x)=k+\frac{m}{x-1}$, gdzie k oraz m są liczbami rzeczywistymi.

b) Wyznacz wszystkie wartości parametru p, dla których w przedziale $(p,+\infty)$ funkcja f jest malejąca.

3.r.7 Marzec 2008

Zadanie 2. *(4 pkt)*

Wykres funkcji $f(x)=\frac{a}{x}$ dla $x\in R\setminus\{0\}$, gdzie $a\neq 0$, przesunięto o wektor $\vec{u}=[-3,2]$ i otrzymano wykres funkcji g. Do wykresu funkcji g należy punkt $A=(-4,6)$. Oblicz a, następnie rozwiąż nierówność $g(x)<4$.

4.r.7 Maj 2008

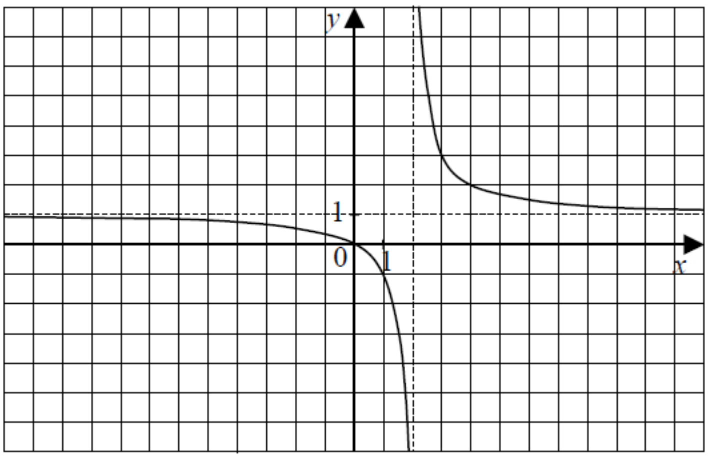
Zadanie 5. *(5 pkt)*

Dane jest równanie $\left|\frac{2}{x}+3\right|=p$ z niewiadomą x. Wyznacz liczbę rozwiązań tego równania w zależności od parametru p.

5.r.7 Styczeń 2009

Zadanie 5. (*3 pkt*)

Na rysunku przedstawiono fragment wykresu funkcji h otrzymanego przez przesunięcie o wektor $[2,1]$ wykresu funkcji f określonej wzorem $f(x)=\frac{a}{x}$ dla $x\in R$ i $x\neq 0$.

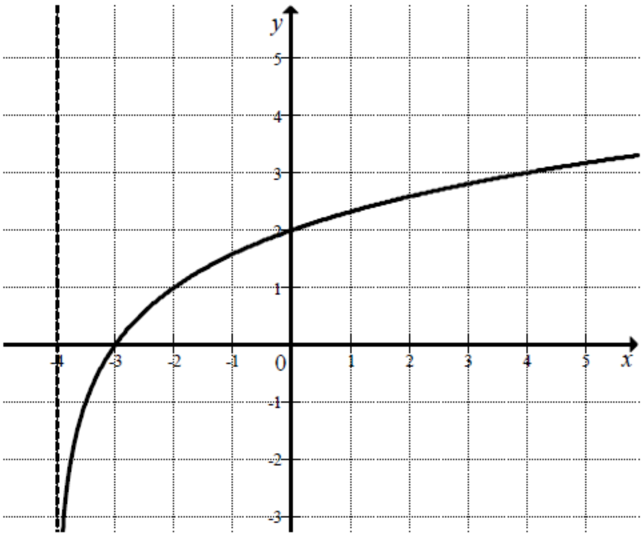


Wyznacz wzór funkcji h, a następnie sprawdź, czy punkt $M=\left(\sqrt{3},-2\sqrt{3}-3\right)$ należy do jej wykresu.

6.r.7 Maj 2013

Zadanie 12. ***(3 pkt)***

Na rysunku przedstawiony jest fragment wykresu funkcji logarytmicznej f określonej wzorem $f(x) = \log_2(x - p)$.



a) Podaj wartość p.

b) Narysuj wykres funkcji określonej wzorem $y = |f(x)|$.

c) Podaj wszystkie wartości parametru m, dla których równanie $|f(x)| = m$ ma dwa rozwiązania o przeciwnych znakach.

7.r.7 Maj 2014

Zadanie 1. ***(4 pkt)***

Dana jest funkcja f określona wzorem $f(x) = \dfrac{|x+3|+|x-3|}{x}$ dla każdej liczby rzeczywistej $x \neq 0$. Wyznacz zbiór wartości tej funkcji.

8.r.7 Maj 2018

Zadanie 5. (0–2)

Punkt $A = (-5, 3)$ jest środkiem symetrii wykresu funkcji homograficznej określonej wzorem $f(x) = \dfrac{ax+7}{x+d}$, gdy $x \neq -d$. Oblicz iloraz $\dfrac{d}{a}$.

W poniższe kratki wpisz kolejno cyfrę jedności i pierwsze dwie cyfry po przecinku nieskończonego rozwinięcia dziesiętnego otrzymanego wyniku.

9.r.7 Maj 2020 – stara

Zadanie 1. ***(4 pkt)***

Rozwiąż nierówność $\left(\dfrac{1}{x} - 1\right)^{-1} \leq 1$.

10.r.7 Maj 2021

Zadanie 7. (0–3)

Rozwiąż nierówność:

$$\frac{2x-1}{1-x} \leq \frac{2+2x}{5x}$$

11.r.7 M

12.r.7

13.r.7 Koniec

8. CIĄG
Poziom podstawowy

1.p.8 Maj 2002

Zadanie 5. *(4 pkt)*

Ania przeczytała książkę science-fiction w ciągu 13 dni, przy czym każdego dnia czytała o taką samą liczbę stron więcej, niż w dniu poprzednim. Ile stron miała ta książka, jeżeli wiadomo, że w trzecim dniu Ania przeczytała 28 stron a w ostatnim 68?

2.p.8 Styczeń 2003

Zadanie 10. *(5 pkt)*

Wszystkie liczby naturalne dwucyfrowe, podzielne przez 6 są kolejnymi wyrazami pewnego ciągu rosnącego.

a) Zapisz wzór ogólny na n-ty wyraz tego ciągu arytmetycznego.
b) Oblicz, ile wyrazów ma ten ciąg.
c) Oblicz sumę piętnastu początkowych kolejnych wyrazów tego ciągu.

3.p.8 Maj 2003

Zadanie 1. *(4 pkt)*

Lewa strona równania $1+x^2+x^4+x^6+...+x^{2n}+...=3$ jest sumą nieskończonego ciągu geometrycznego o ilorazie x^2. Z warunku zbieżności mamy $x^2 < 1$. Zatem dziedziną równania jest przedział $(-1,1)$.

Równanie można zapisać w postaci $1+x^2(1+x^2+x^4+...)=3$. Stąd $1+3x^2=3$.

Pierwiastkami ostatniego równania są liczby: $x_1=-\frac{\sqrt{6}}{3}$, $x_2=\frac{\sqrt{6}}{3}$ należące do dziedziny.

Odpowiedź: Rozwiązaniami równania są liczby $x_1=-\frac{\sqrt{6}}{3}$, $x_2=\frac{\sqrt{6}}{3}$.

Postępując w analogiczny sposób rozwiąż równanie : $1+x+x^2+x^3+...+x^n+...=2$.

4.p.8 Maj 2003

Zadanie 4. *(3 pkt)*

Liczby 102, 105, 108, 111,... są kolejnymi, początkowymi wyrazami pewnego ciągu arytmetycznego (a_n). Zapisz wzór ogólny na n-ty wyraz tego ciągu. Oblicz wyraz a_{81}.

5.p.8 Maj 2003

Zadanie 6. *(3 pkt)*

Ciąg (a_n) określony jest wzorem

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_2 = 2 \\ a_{n+2} = 2^{n-1} + a_n + a_{n+1} \quad dla \quad n \in N \setminus \{0\} \end{cases}$$

Wyznacz czwarty wyraz tego ciągu.

6.p.8 Grudzień 2004

Zadanie 2. (*4 pkt*)

Pożyczkę w wysokości 8700 zł zaciągniętą w banku należy spłacić w 12 ratach, z których każda następna jest mniejsza od poprzedniej o 50 zł. Oblicz wysokość pierwszej i ostatniej raty.

7.p.8 Grudzień 2004

Zadanie 6. (*4 pkt*)

Ciąg (a_n) określony jest wzorem: $a_n = n^3 - 10n^2 + 31n - 30$. Wiedząc, że $a_2 = 0$ wyznacz wszystkie pozostałe wyrazy tego ciągu równe zero.

8.p.8 Czerwiec 2004

Zadanie 3. (4 pkt)

Widownia wokół boiska do koszykówki podzielona jest na cztery sektory. W pierwszym rzędzie każdego sektora jest 8 miejsc, a w każdym następnym rzędzie o 2 miejsca więcej niż w rzędzie poprzednim. W każdym sektorze są 22 rzędy. Oblicz liczbę wszystkich miejsc na widowni.

9.p.8 Czerwiec 2004

Zadanie 8. (6 pkt)

Ciąg (a_n) określony jest wzorem $a_n = n^2 - 5$.

a. Wyznacz liczbę ujemnych wyrazów tego ciągu.
b. Sprawdź, na podstawie definicji, czy ciąg (a_n) jest ciągiem geometrycznym.

10.p.8 Maj 2005

Zadanie 2. *(4 pkt)*

Dany jest ciąg (a_n), gdzie $a_n = \dfrac{n+2}{3n+1}$ dla $n = 1, 2, 3...$ Wyznacz wszystkie wyrazy tego ciągu większe od $\dfrac{1}{2}$.

11.p.8 Maj 2005

Zadanie 4. *(5 pkt)*

Na trzech półkach ustawiono 76 płyt kompaktowych. Okazało się, że liczby płyt na półkach górnej, środkowej i dolnej tworzą rosnący ciąg geometryczny. Na środkowej półce stoją 24 płyty. Oblicz, ile płyt stoi na półce górnej, a ile płyt stoi na półce dolnej.

12.p.8 Grudzień 2005

Zadanie 5. (*5 pkt*)

Nieskończony ciąg liczbowy (a_n) jest określony wzorem $a_n = 4n - 31$, $n = 1, 2, 3, \ldots$.

Wyrazy a_k, a_{k+1}, a_{k+2} danego ciągu (a_n), wzięte w takim porządku, powiększono: wyraz a_k o 1, wyraz a_{k+1} o 3 oraz wyraz a_{k+2} o 23. W ten sposób otrzymano trzy pierwsze wyrazy pewnego ciągu geometrycznego. Wyznacz k oraz czwarty wyraz tego ciągu geometrycznego.

13.p.8 Maj 2005

Zadanie 9. *(7 pkt)*

Liczbę naturalną t_n nazywamy n-tą liczbą trójkątną, jeżeli jest ona sumą n kolejnych, początkowych liczb naturalnych. Liczbami trójkątnymi są zatem: $t_1 = 1$, $t_2 = 1 + 2 = 3$, $t_3 = 1 + 2 + 3 = 6$, $t_4 = 1 + 2 + 3 + 4 = 10$, $t_5 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$. Stosując tę definicję:

a) wyznacz liczbę t_{17}.

b) ułóż odpowiednie równanie i zbadaj, czy liczba 7626 jest liczbą trójkątną.

c) wyznacz największą czterocyfrową liczbę trójkątną.

14.p.8 Styczeń 2006

Zadanie 5. (*3 pkt*)

Zauważ, że:

$1^2 = 1$

$2^2 = 1 + 2 + 1$

$3^2 = 1 + 2 + 3 + 2 + 1$

$4^2 = 1 + 2 + 3 + 4 + 3 + 2 + 1$

Stosując wzór na sumę kolejnych wyrazów ciągu arytmetycznego uzasadnij, że $n^2 = 1 + 2 + 3 + \ldots + (n-1) + n + (n-1) + \ldots + 3 + 2 + 1$.

15.p.8 Styczeń 2006

Zadanie 7. (*6 pkt*)

Dany jest ciąg (a_n) o wyrazie ogólnym $a_n = \dfrac{5 - 3n}{7}$ $n = 1, 2, 3, \ldots$.

a) Sprawdź na podstawie definicji, czy ciąg (a_n) jest ciągiem arytmetycznym.

b) Oblicz, dla jakiej wartości x liczby a_4, $x^2 + 2$, a_{11} są kolejnymi wyrazami tego samego ciągu geometrycznego.

16.p.8 Maj 2006

Zadanie 4. (*4 pkt*)

Dany jest rosnący ciąg geometryczny, w którym $a_1 = 12$, $a_3 = 27$.

a) Wyznacz iloraz tego ciągu.

b) Zapisz wzór, na podstawie którego można obliczyć wyraz a_n, dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$.

c) Oblicz wyraz a_6.

17.p.8 Maj 2006

Zadanie 11. *(3 pkt)*

Sumę $S = \frac{3}{1\cdot 4} + \frac{3}{4\cdot 7} + \frac{3}{7\cdot 10} + \ldots + \frac{3}{301\cdot 304} + \frac{3}{304\cdot 307}$ można obliczyć w następujący sposób:

a) sumę S zapisujemy w postaci

$$S = \frac{4-1}{4\cdot 1} + \frac{7-4}{7\cdot 4} + \frac{10-7}{10\cdot 7} + \ldots + \frac{304-301}{304\cdot 301} + \frac{307-304}{307\cdot 304}$$

b) każdy składnik tej sumy przedstawiamy jako różnicę ułamków

$$S = \left(\frac{4}{4\cdot 1} - \frac{1}{4\cdot 1}\right) + \left(\frac{7}{7\cdot 4} - \frac{4}{7\cdot 4}\right) + \left(\frac{10}{10\cdot 7} - \frac{7}{10\cdot 7}\right) + \ldots + \left(\frac{304}{304\cdot 301} - \frac{301}{304\cdot 301}\right) + \left(\frac{307}{307\cdot 304} - \frac{304}{307\cdot 304}\right)$$

stąd $S = \left(1 - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{7}\right) + \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{10}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{301} - \frac{1}{304}\right) + \left(\frac{1}{304} - \frac{1}{307}\right)$

więc $S = 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{7} + \frac{1}{7} - \frac{1}{10} + \ldots + \frac{1}{301} - \frac{1}{304} + \frac{1}{304} - \frac{1}{307}$

c) obliczamy sumę, redukując parami wyrazy sąsiednie, poza pierwszym i ostatnim

$S = 1 - \frac{1}{307} = \frac{306}{307}$.

Postępując w analogiczny sposób, oblicz sumę $S_1 = \frac{4}{1\cdot 5} + \frac{4}{5\cdot 9} + \frac{4}{9\cdot 13} + \ldots + \frac{4}{281\cdot 285}$.

18.p.8 Maj 2007

Zadanie 5. *(5 pkt)*

Dany jest ciąg arytmetyczny (a_n), gdzie $n \geq 1$. Wiadomo, że dla każdego $n \geq 1$ suma n początkowych wyrazów $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ wyraża się wzorem: $S_n = -n^2 + 13n$.

a) Wyznacz wzór na n–ty wyraz ciągu (a_n).

b) Oblicz a_{2007}.

c) Wyznacz liczbę n, dla której $a_n = 0$.

19.p.8 Maj 2007

Zadanie 11. (*4 pkt*)

Dany jest rosnący ciąg geometryczny (a_n) dla $n \geq 1$, w którym $a_1 = x$, $a_2 = 14$, $a_3 = y$.
Oblicz x oraz y, jeżeli wiadomo, że $x + y = 35$.

20.p.8 Marzec 2008 (zestaw 1)

Zadanie 6. ***(5 pkt)***

Nieskończony ciąg liczbowy (a_n) dla $n \geq 1$ jest określony wzorem

$$a_n = \begin{cases} \frac{n+1}{2} & \text{gdy } n \text{ jest nieparzyste,} \\ 0 & \text{gdy } n \text{ jest parzyste.} \end{cases}$$

a) Uzupełnij tabelkę:

n	1	2	3	4	5	…	2005	2006	2007	2008
a_n	1	0				…				

b) Oblicz $\left(a_{2005}\right)^{a_{2006}} \cdot \left(a_{2006}\right)^{a_{2007}} \cdot \left(a_{2007}\right)^{a_{2008}}$

c) Oblicz sumę 2008 początkowych wyrazów ciągu (a_n).

21.p.8 Maj 2008

Zadanie 5. ***(5 pkt)***

Nieskończony ciąg liczbowy (a_n) jest określony wzorem $a_n = 2 - \frac{1}{n}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$.

a) Oblicz, ile wyrazów ciągu (a_n) jest mniejszych od 1,975.

b) Dla pewnej liczby x trzywyrazowy ciąg (a_2, a_7, x) jest arytmetyczny. Oblicz x.

22.p.8 Styczeń 2009

Zadanie 4. (*4 pkt*)

Liczba $\frac{3}{4}$ jest pierwszym wyrazem ciągu geometrycznego (b_n), którego iloraz jest równy (-2). Pierwszy wyraz ciągu arytmetycznego (a_n) jest taki sam jak pierwszy wyraz ciągu (b_n). Suma siedmiu początkowych wyrazów ciągu (a_n) jest równa sumie siedmiu początkowych wyrazów ciągu (b_n). Oblicz różnicę ciągu arytmetycznego (a_n).

23.p.8 Maj 2009

Zadanie 7. ***(6 pkt)***

Dany jest ciąg arytmetyczny (a_n) dla $n \geq 1$, w którym $a_7 = 1$, $a_{11} = 9$.

a) Oblicz pierwszy wyraz a_1 i różnicę r ciągu (a_n).

b) Sprawdź, czy ciąg (a_7, a_8, a_{11}) jest geometryczny.

c) Wyznacz takie n, aby suma n początkowych wyrazów ciągu (a_n) miała wartość najmniejszą.

24.p.8 Listopad 2009

Zadanie 30. (*2 pkt*)

Wykaż, że dla każdego m ciąg $\left(\frac{m+1}{4}, \frac{m+3}{6}, \frac{m+9}{12}\right)$ jest arytmetyczny.

25.p.8 Listopad 2010

Zadanie 32. ***(4 pkt)***

Ciąg $(1,\ x,\ y-1)$ jest arytmetyczny, natomiast ciąg $(x,\ y,\ 12)$ jest geometryczny. Oblicz x oraz y i podaj ten ciąg geometryczny.

26.p.8 Maj 2011

Zadanie 27. ***(2 pkt)***

Liczby $x,\ y,\ 19$ w podanej kolejności tworzą ciąg arytmetyczny, przy czym $x+y=8$. Oblicz x i y.

27.p.8 Maj 2012

Zadanie 32. ***(4 pkt)***

Ciąg $(9,x,19)$ jest arytmetyczny, a ciąg $(x,42,y,z)$ jest geometryczny. Oblicz x, y oraz z.

28.p.8 Czerwiec 2012 (termin dodatkowy)

Zadanie 30. ***(2 pkt)***

Suma $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ początkowych n wyrazów pewnego ciągu arytmetycznego (a_n) jest określona wzorem $S_n = n^2 - 2n$ dla $n \geq 1$. Wyznacz wzór na n-ty wyraz tego ciągu.

29.p.8 Sierpień 2012

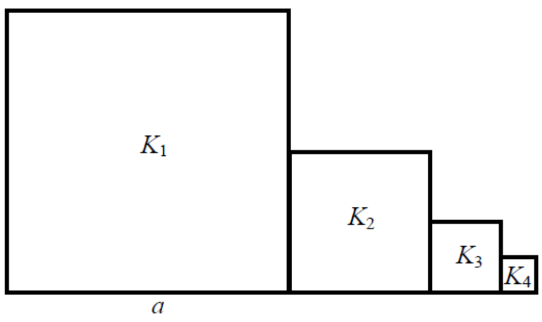
Zadanie 28. ***(2 pkt)***

Pierwszy wyraz ciągu arytmetycznego jest równy 3, czwarty wyraz tego ciągu jest równy 15. Oblicz sumę sześciu początkowych wyrazów tego ciągu.

30.p.8 Grudzień 2013

Zadanie 26. (0–2)

Kwadrat K_1 ma bok długości a. Obok niego rysujemy kolejno kwadraty K_2, K_3, K_4, … takie, że kolejny kwadrat ma bok o połowę mniejszy od boku poprzedniego kwadratu (zobacz rysunek).



Wyznacz pole kwadratu K_{12}.

31.p.8 Sierpień 2014

Zadanie 31. ***(2 pkt)***

Dany jest ciąg arytmetyczny (a_n) określony dla $n \geq 1$, w którym $a_5 = 22$ oraz $a_{10} = 47$. Oblicz pierwszy wyraz a_1 i różnicę r tego ciągu.

32.p.8 Maj 2015-nowa

Zadanie 34. (0–5)

W nieskończonym ciągu arytmetycznym (a_n), określonym dla $n \geq 1$, suma jedenastu początkowych wyrazów tego ciągu jest równa 187. Średnia arytmetyczna pierwszego, trzeciego i dziewiątego wyrazu tego ciągu, jest równa 12. Wyrazy a_1, a_3, a_k ciągu (a_n), w podanej kolejności, tworzą nowy ciąg – trzywyrazowy ciąg geometryczny (b_n). Oblicz k.

33.p.8 Maj 2015-stara

Zadanie 30. ***(2 pkt)***

Dany jest skończony ciąg, w którym pierwszy wyraz jest równy 444, a ostatni jest równy 653. Każdy wyraz tego ciągu, począwszy od drugiego, jest o 11 większy od wyrazu bezpośrednio go poprzedzającego. Oblicz sumę wszystkich wyrazów tego ciągu.

34.p.8 Czerwiec 2015

Zadanie 32. (0–4)

Dany jest nieskończony rosnący ciąg arytmetyczny (a_n), dla $n \geq 1$ taki, że $a_5 = 18$. Wyrazy a_1, a_3 oraz a_{13} tego ciągu są odpowiednio pierwszym, drugim i trzecim wyrazem pewnego ciągu geometrycznego. Wyznacz wzór na n-ty wyraz ciągu (a_n).

35.p.8 Czerwiec 2015 - stara

Zadanie 30. ***(2 pkt)***

W siedmiowyrazowym ciągu arytmetycznym środkowy wyraz jest równy 0. Udowodnij, że suma wyrazów tego ciągu jest równa 0.

36.p.8 Czerwiec 2015 - stara

Zadanie 34. ***(5 pkt)***

Deweloper oferuje możliwość kompletnego wyposażenia kuchni i salonu w ofercie „Malejące raty”. Wysokość pierwszej raty ustalono na 775 zł. Każda następna rata jest o 10 zł mniejsza od poprzedniej. Całkowity koszt wyposażenia kuchni i salonu ustalono na 30 240 zł. Oblicz wysokość ostatniej raty i liczbę wszystkich rat.

37.p.8 Sierpień 2015 – stara

Zadanie 32. ***(4 pkt)***

Dany jest ciąg arytmetyczny (a_n) o różnicy $r \neq 0$ i pierwszym wyrazie $a_1 = 2$. Pierwszy, drugi i czwarty wyraz tego ciągu są odpowiednio pierwszym, drugim i trzecim wyrazem ciągu geometrycznego. Oblicz iloraz tego ciągu geometrycznego.

38.p.8 Maj 2016 (nowa i stara)

Zadanie 30. (0–2)

Ciąg (a_n) jest określony wzorem $a_n = 2n^2 + 2n$ dla $n \geq 1$. Wykaż, że suma każdych dwóch kolejnych wyrazów tego ciągu jest kwadratem liczby naturalnej.

39.p.8 Maj 2016 – stara

Zadanie 31. *(2 pkt)*

W skończonym ciągu arytmetycznym (a_n) pierwszy wyraz a_1 jest równy 7 oraz ostatni wyraz a_n jest równy 89. Suma wszystkich wyrazów tego ciągu jest równa 2016.
Oblicz, ile wyrazów ma ten ciąg.

40.p.8 Czerwiec 2016

Zadanie 31. (0–5)

Dany jest ciąg arytmetyczny (a_n) określony dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$, w którym $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 2016$ oraz $a_5 + a_6 + a_7 + ... + a_{12} = 2016$. Oblicz pierwszy wyraz, różnicę oraz najmniejszy dodatni wyraz ciągu (a_n).

41.p.8 Sierpień 2016

Zadanie 31. (0–4)

Ciąg arytmetyczny (a_n) określony jest wzorem $a_n = 2016 - 3n$, dla $n \geq 1$. Oblicz sumę wszystkich dodatnich wyrazów tego ciągu.

42.p.8 Maj 2017

Zadanie 31. (0–2)

W ciągu arytmetycznym (a_n), określonym dla $n \geq 1$, dane są: wyraz $a_1 = 8$ i suma trzech początkowych wyrazów tego ciągu $S_3 = 33$. Oblicz różnicę $a_{16} - a_{13}$.

43.p.8 Czerwiec 2017

Zadanie 30. (0–2)

Suma trzydziestu początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego (a_n), określonego dla $n \geq 1$, jest równa 30. Ponadto $a_{30} = 30$. Oblicz różnicę tego ciągu.

44.p.8 Sierpień 2017

Zadanie 31. (0–2)

Dany jest ciąg arytmetyczny (a_n), określony dla $n \geq 1$, w którym spełniona jest równość $a_{21} + a_{24} + a_{27} + a_{30} = 100$. Oblicz sumę $a_{25} + a_{26}$.

45.p.8 Maj 2018

Zadanie 31. (0–2)

Dwunasty wyraz ciągu arytmetycznego (a_n), określonego dla $n \geq 1$, jest równy 30, a suma jego dwunastu początkowych wyrazów jest równa 162. Oblicz pierwszy wyraz tego ciągu.

46.p.8 Czerwiec 2018

Zadanie 33. (0–4)

W ciągu arytmetycznym (a_n), określonym dla liczb naturalnych $n \geq 1$, wyraz szósty jest liczbą dwa razy większą od wyrazu piątego, a suma dziesięciu początkowych wyrazów tego ciągu jest równa $S_{10} = \frac{15}{4}$. Oblicz wyraz pierwszy oraz różnicę tego ciągu.

47.p.8 Sierpień 2018

Zadanie 30. (0–2)

Dziewiąty wyraz ciągu arytmetycznego (a_n), określonego dla $n \geq 1$, jest równy 34, a suma jego ośmiu początkowych wyrazów jest równa 110. Oblicz pierwszy wyraz i różnicę tego ciągu.

48.p.8 Maj 2019

Zadanie 32. (0–4)

Ciąg arytmetyczny (a_n) jest określony dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$. Różnicą tego ciągu jest liczba $r = -4$, a średnia arytmetyczna początkowych sześciu wyrazów tego ciągu: a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, jest równa 16.

a) Oblicz pierwszy wyraz tego ciągu.

b) Oblicz liczbę k, dla której $a_k = -78$.

49.p.8 Czerwiec 2019

Zadanie 30. (0–2)

W ciągu geometrycznym przez S_n oznaczamy sumę n początkowych wyrazów tego ciągu, dla liczb naturalnych $n \geq 1$. Wiadomo, że dla pewnego ciągu geometrycznego: $S_1 = 2$ i $S_2 = 12$. Wyznacz iloraz i piąty wyraz tego ciągu.

50.p.8 Sierpień 2019

Zadanie 32. (0–4)

W ciągu arytmetycznym $(a_1, a_2, ..., a_{39}, a_{40})$ suma wyrazów tego ciągu o numerach parzystych jest równa 1340, a suma wyrazów ciągu o numerach nieparzystych jest równa 1400. Wyznacz ostatni wyraz tego ciągu arytmetycznego.

51.p.8 Kwiecień 2020 (próbna)

Zadanie 31. (0–2)

Dany jest ciąg arytmetyczny (a_n), określony dla $n \geq 1$, w którym spełniona jest równość $a_{21} + a_{24} + a_{27} + a_{30} = 100$. Oblicz sumę $a_{25} + a_{26}$.

52.p.8 Maj 2020

Zadanie 33. (0–4)

Wszystkie wyrazy ciągu geometrycznego (a_n), określonego dla $n \geq 1$, są dodatnie. Wyrazy tego ciągu spełniają warunek $6a_1 - 5a_2 + a_3 = 0$. Oblicz iloraz q tego ciągu należący do przedziału $\left\langle 2\sqrt{2}, 3\sqrt{2} \right\rangle$.

53.p.8 Lipiec 2020

Zadanie 30. (0–2)

Dany jest trzywyrazowy ciąg $(x+2, 4x+2, x+11)$. Oblicz te wszystkie wartości x, dla których ten ciąg jest geometryczny.

54.p.8 Wrzesień 2020

Zadanie 27. (0–2)

Dany jest trzywyrazowy ciąg $(x+2,\ \ 4x+2,\ \ x+11)$. Oblicz wszystkie wartości x, dla których ten ciąg jest geometryczny.

55.p.8 Marzec 2021

Zadanie 35. (0–5)

Rosnący ciąg arytmetyczny (a_n) jest określony dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$. Suma pierwszych pięciu wyrazów tego ciągu jest równa 10. Wyrazy a_3, a_5, a_{13} tworzą – w podanej kolejności – ciąg geometryczny. Wyznacz wzór na n-ty wyraz ciągu arytmetycznego (a_n).

56.p.8 Czerwiec 2021

Zadanie 31. (0–2)

Dany jest ciąg arytmetyczny (a_n), określony dla wszystkich liczb naturalnych $n \geq 1$. Suma dwudziestu początkowych wyrazów tego ciągu jest równa $20a_{21} + 62$. Oblicz różnicę ciągu (a_n).

57.p.8 Sierpień 2021

Zadanie 35. (0–5)

Dany jest ciąg (a_n) określony wzorem $a_n = \frac{5-3n}{7}$ dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$. Trójwyrazowy ciąg $(a_4\,, x^2+2, a_{11})$, gdzie x jest liczbą rzeczywistą, jest geometryczny. Oblicz x oraz iloraz tego ciągu geometrycznego.

58.p.8 Maj 2022

Zadanie 30. (0–2)

W ciągu arytmetycznym (a_n), określonym dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$, $a_1 = -1$ i $a_4 = 8$. Oblicz sumę stu początkowych kolejnych wyrazów tego ciągu.

59.p.8 M

60.p.8 Koniec

Poziom rozszerzony

1.r.8 Maj 2002

Zadanie 18. ***(10 pkt)***

Rozwiąż nierówność $\frac{1}{2^x} + \frac{1}{4^x} + \frac{1}{8^x} + \ldots > 2^x - 0,(9)$, gdzie lewa strona tej nierówności jest sumą nieskończonego ciągu geometrycznego.

2.r.8 Styczeń 2003

Zadanie 14. *(5 pkt)*

Suma n początkowych, kolejnych wyrazów ciągu (a_n), jest obliczana według wzoru $S_n = n^2 + 3n$, $(n \in N^+)$. Wyznacz a_n. Wykaż, że ciąg (a_n) jest ciągiem arytmetycznym.

3.r.8 Styczeń 2003

Zadanie 15. *(5 pkt)*

Dziesiąty wyraz pewnego ciągu geometrycznego równa się 10. Oblicz iloczyn dziewiętnastu początkowych, kolejnych wyrazów tego ciągu.

4.r.8 Styczeń 2005

Zadanie 14. (7 pkt.)

Dany jest ciąg liczbowy $a_n = 3n^2 - 3n + 2$ określony dla dowolnej liczby $n \in N_+$.

a) Wykaż, korzystając z definicji monotoniczności ciągu, że ciąg (a_n) jest rosnący.

b) Oblicz granicę $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[3]{8n^6 + n}}{1 - a_n}$.

5.r.8 Maj 2005

Zadanie 14. (*5 pkt*)

Oblicz: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+4+7+\ldots+(3n-2)}{5+7+9+\ldots+(2n+3)}$.

6.r.8 Grudzień 2005

Zadanie 15. (*5 pkt*)

Dany jest nieskończony ciąg geometryczny postaci: $2, \dfrac{2}{p-1}, \dfrac{2}{(p-1)^2}, \dfrac{2}{(p-1)^3}, \ldots$.

Wyznacz wszystkie wartości p, dla których granicą tego ciągu jest liczba:

a) 0.

b) 2.

7.r.8 Styczeń 2006

Zadanie 14. (*4 pkt*)

Dany jest ciąg trójkątów równobocznych takich, że bok następnego trójkąta jest wysokością poprzedniego. Oblicz sumę pól wszystkich tak utworzonych trójkątów, przyjmując, że bok pierwszego trójkąta ma długość a $(a > 0)$.

8.r.8 Styczeń 2006

Zadanie 20. (4 *pkt*)

Ciąg (a_n) określony jest rekurencyjnie w następujący sposób:

$$\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_{n+1} = \dfrac{a_n}{a_n + 1} \quad \text{dla} \quad \text{dowolnego} \quad n \geq 1. \end{cases}$$

Wykaż, korzystając z zasady indukcji matematycznej, że ciąg (a_n) można określić za pomocą wzoru ogólnego $a_n = \dfrac{2}{2n-1}$, gdzie $n \geq 1$.

9.r.8 Maj 2006

Zadanie 13. (5 *pkt*)

Dany jest ciąg (a_n), gdzie $a_n = \dfrac{5n+6}{10(n+1)}$ dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$.

a) Zbadaj monotoniczność ciągu (a_n).

b) Oblicz $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

c) Podaj największą liczbę a i najmniejszą liczbę b takie, że dla każdego n spełniony jest warunek $a \leq a_n \leq b$.

10.r.8 Maj 2006

Zadanie 19. (7 *pkt*)

Nieskończony ciąg geometryczny (a_n) jest zdefiniowany wzorem rekurencyjnym: $a_1 = 2$, $a_{n+1} = a_n \cdot \log_2(k-2)$, dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$. Wszystkie wyrazy tego ciągu są różne od zera. Wyznacz wszystkie wartości parametru k, dla których istnieje suma wszystkich wyrazów nieskończonego ciągu (a_n).

11.r.8 Listopad 2006 (próbna do maja 2007)

Zadanie 10. (5 *pkt*)

Ciąg liczbowy (a_n) jest określony dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$ wzorem

$a_n = (n-3)(2-p^2)$, gdzie $p \in R$.

a) Wykaż, że dla każdej wartości p ciąg (a_n) jest arytmetyczny.

b) Dla $p = 2$ oblicz sumę $a_{20} + a_{21} + a_{22} \ldots + a_{40}$.

c) Wyznacz wszystkie wartości p, dla których ciąg (b_n) określony wzorem $b_n = a_n - pn$ jest stały.

12.r.8 Maj 2007

Zadanie 11. *(4 pkt)*

Suma n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego (a_n) wyraża się wzorem $S_n = 2n^2 + n$ dla $n \geq 1$.

a) Oblicz sumę 50 początkowych wyrazów tego ciągu o numerach parzystych: $a_2 + a_4 + a_6 + ... + a_{100}$.

b) Oblicz $\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{3n^2 - 2}$.

13.r.8 Marzec 2008

Zadanie 10. *(3 pkt)*

Dany jest ciąg $x_n = -1 - n$ dla $n \geq 1$. Ciąg (y_n) ma tę własność, że dla każdego $n \geq 1$ punkty o współrzędnych $(x_n, 0)$, $(-1, 1)$, $(0, y_n)$ leżą na jednej prostej. Wyznacz wzór ogólny ciągu (y_n).

14.r.8 Marzec 2008

Zadanie 11. *(5 pkt)*

Długości boków trójkąta prostokątnego są trzema kolejnymi wyrazami rosnącego ciągu geometrycznego. Oblicz iloraz tego ciągu.

15.r.8 Maj 2008

Zadanie 6. *(3 pkt)*

Udowodnij, że jeżeli ciąg (a, b, c) jest jednocześnie arytmetyczny i geometryczny, to $a = b = c$.

16.r.8 Maj 2009

Zadanie 4. *(5 pkt)*

W skarbcu królewskim było k monet. Pierwszego dnia rano skarbnik dorzucił 25 monet, a każdego następnego ranka dorzucał o 2 monety więcej niż dnia poprzedniego. Jednocześnie ze skarbca król zabierał w południe każdego dnia 50 monet. Oblicz najmniejszą liczbę k, dla której w każdym dniu w skarbcu była co najmniej jedna moneta, a następnie dla tej wartości k oblicz, w którym dniu w skarbcu była najmniejsza liczba monet.

17.r.8 Maj 2009

Zadanie 7. *(6 pkt)*

Ciąg $(x - 3,\ x + 3,\ 6x + 2, ...)$ jest nieskończonym ciągiem geometrycznym o wyrazach dodatnich. Oblicz iloraz tego ciągu i uzasadnij, że $\frac{S_{19}}{S_{20}} < \frac{1}{4}$, gdzie S_n oznacza sumę n początkowych wyrazów tego ciągu.

18.r.8 Maj 2010

Zadanie 5. ***(5 pkt)***

O liczbach a, b, c wiemy, że ciąg (a, b, c) jest arytmetyczny i $a+c=10$, zaś ciąg $(a+1, b+4, c+19)$ jest geometryczny. Wyznacz te liczby.

19.r.8 Maj 2012

Zadanie 5. ***(6 pkt)***

Trzy liczby tworzą ciąg geometryczny. Jeżeli do drugiej liczby dodamy 8, to ciąg ten zmieni się w arytmetyczny. Jeżeli zaś do ostatniej liczby nowego ciągu arytmetycznego dodamy 64, to tak otrzymany ciąg będzie znów geometryczny. Znajdź te liczby. Uwzględnij wszystkie możliwości.

20.r.8 Czerwiec 2012

Zadanie 5. ***(5 pkt)***

W ciągu arytmetycznym (a_n), dla $n \geq 1$, dane są $a_1 = -2$ oraz różnica $r = 3$. Oblicz największe n takie, że $a_1 + a_2 + \ldots + a_n < 2012$.

21.r.8 Czerwiec 2012

Zadanie 9. ***(3 pkt)***

Oblicz, ile jest liczb naturalnych trzycyfrowych podzielnych przez 6 lub podzielnych przez 15.

22.r.8 Maj 2013

Zadanie 5. ***(5 pkt)***

Ciąg liczbowy (a, b, c) jest arytmetyczny i $a+b+c=33$, natomiast ciąg $(a-1, b+5, c+19)$ jest geometryczny. Oblicz a, b, c.

23.r.8 Grudzień 2013

Zadanie 7. (0–2)

Oblicz granicę ciągu $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n^2 - 5n + 2}{(8n+7)(n+4)}$.

Zakoduj trzy pierwsze cyfry po przecinku rozwinięcia dziesiętnego obliczonej granicy.

24.r.8 Maj 2014

Zadanie 7. ***(6 pkt)***

Ciąg geometryczny (a_n) ma 100 wyrazów i są one liczbami dodatnimi. Suma wszystkich wyrazów o numerach nieparzystych jest sto razy większa od sumy wszystkich wyrazów o numerach parzystych oraz $\log a_1 + \log a_2 + \log a_3 + \ldots + \log a_{100} = 100$. Oblicz a_1.

25.r.8 Grudzień 2014

Zadanie 8. (0–2)

Oblicz granicę $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^2}{n+2}-\frac{(n+2)^2}{n+444}\right)$.

26.r.8 Grudzień 2014

Zadanie 12. (0–3)

Niech P_n oznacza pole koła o promieniu $\frac{1}{2^n}$, dla $n \ge 1$. Oblicz sumę wszystkich wyrazów ciągu (P_n).

27.r.8 Maj 2015-nowa

Zadanie 6. (0–2)

Oblicz granicę $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{11n^3+6n+5}{6n^3+1}-\frac{2n^2+2n+1}{5n^2-4}\right)$. W poniższe kratki wpisz kolejno cyfrę jedności i pierwsze dwie cyfry po przecinku rozwinięcia dziesiętnego otrzymanego wyniku.

28.r.8 Maj 2015-stara

Zadanie 4. ***(6 pkt)***

Trzy liczby tworzą ciąg arytmetyczny. Jeśli do pierwszej z nich dodamy 5, do drugiej 3, a do trzeciej 4, to otrzymamy rosnący ciąg geometryczny, w którym trzeci wyraz jest cztery razy większy od pierwszego. Znajdź te liczby.

29.r.8 Maj 2016

Zadanie 7. (0–2)

Dany jest ciąg geometryczny (a_n) określony wzorem $a_n = \left(\frac{1}{2x-371}\right)^n$ dla $n \ge 1$. Wszystkie wyrazy tego ciągu są dodatnie. Wyznacz najmniejszą liczbę całkowitą x, dla której nieskończony szereg $a_1+a_2+a_3+\ldots$ jest zbieżny.

30.r.8 Maj 2016 – stara

Zadanie 4. ***(6 pkt)***

Ciąg $(a, 4, b, c)$ jest arytmetyczny, a ciąg $(a, a+b, 4c)$ jest geometryczny. Oblicz a, b i c.

31.r.8 Maj 2017 (nowa i stara)

Zadanie 14. (0–6)

Liczby a, b, c są – odpowiednio – pierwszym, drugim i trzecim wyrazem ciągu arytmetycznego. Suma tych liczb jest równa 27. Ciąg $(a-2, b, 2c+1)$ jest geometryczny. Wyznacz liczby a, b, c.

32.r.8 Maj 2018

Zadanie 13. (0–4)

Wyrazy ciągu geometrycznego (a_n), określonego dla $n \geq 1$, spełniają układ równań

$$\begin{cases} a_3 + a_6 = -84 \\ a_4 + a_7 = 168 \end{cases}$$

Wyznacz liczbę n początkowych wyrazów tego ciągu, których suma S_n jest równa 32769.

33.r.8 Maj 2018 – stara

Zadanie 2. ***(5 pkt)***

Liczby a, b, c, spełniające warunek $3a+b+3c=77$, są odpowiednio pierwszym, drugim i trzecim wyrazem ciągu arytmetycznego. Ciąg $(a, b+1, 2c)$ jest geometryczny. Wyznacz liczby a, b, c oraz podaj wyrazy ciągu geometrycznego.

34.r.8 Maj 2019

Zadanie 12. (0–6)

Trzywyrazowy ciąg (a, b, c) o wyrazach dodatnich jest arytmetyczny, natomiast ciąg $\left(\frac{1}{a}, \frac{2}{3b}, \frac{1}{2a+2b+c}\right)$ jest geometryczny. Oblicz iloraz ciągu geometrycznego.

35.r.8 Maj 2019 – stara

Zadanie 4. ***(5 pkt)***

Ciąg (a, b, c) jest geometryczny, ciąg $(a+1, b+5, c)$ jest malejącym ciągiem arytmetycznym oraz $a+b+c=39$. Oblicz a, b, c.

36.r.8 Kwiecień 2020 (próbna)

Zadanie 10. (0–4)

Dany jest rosnący ciąg geometryczny (a, aq, aq^2), którego wszystkie wyrazy i iloraz są liczbami całkowitymi nieparzystymi. Jeśli największy wyraz ciągu zmniejszymy o 4, to otrzymamy ciąg arytmetyczny. Oblicz wyraz aq tego ciągu.

37.r.8 Maj 2020

Zadanie 10. (0–5)

W trzywyrazowym ciągu geometrycznym (a_1, a_2, a_3) spełniona jest równość $a_1 + a_2 + a_3 = \frac{21}{4}$.

Wyrazy a_1, a_2, a_3 są – odpowiednio – czwartym, drugim i pierwszym wyrazem rosnącego ciągu arytmetycznego. Oblicz a_1.

38.r.8 Marzec 2021

Zadanie 12. (0–5)

Czterowyrazowy ciąg (a, b, c, d) jest rosnący i arytmetyczny. Kwadrat największego wyrazu tego ciągu jest równy podwojonej sumie kwadratów pozostałych wyrazów tego ciągu. Ponadto ciąg $(a + 100, b, c)$ jest geometryczny. Oblicz wyrazy ciągu (a, b, c, d).

39.r.8 Maj 2022

Zadanie 10. (0–4)

Ciąg (a_n), określony dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$, jest geometryczny i ma wszystkie wyrazy dodatnie. Ponadto $a_1 = 675$ i $a_{22} = \frac{5}{4}a_{23} + \frac{1}{5}a_{21}$.

Ciąg (b_n), określony dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$, jest arytmetyczny.

Suma wszystkich wyrazów ciągu (a_n) jest równa sumie dwudziestu pięciu początkowych kolejnych wyrazów ciągu (b_n). Ponadto $a_3 = b_4$. Oblicz b_1.

40.r.8 M

Koniec

9. TRYGONOMETRIA
Poziom podstawowy

1.p.9 Styczeń 2003

Zadanie 9. ***(3 pkt)***

Wykaż, że w trójkącie prostokątnym suma kwadratów sinusów miar wszystkich jego kątów wewnętrznych równa się 2.

2.p.9 Maj 2003

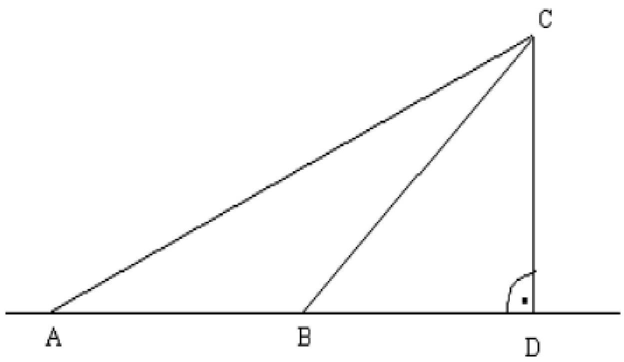
Zadanie 5. ***(5 pkt)***

Przed wejściem do przychodni lekarskiej znajdują się schody mające 8 stopni po 15 *cm* wysokości każdy. Postanowiono zbudować podjazd dla niepełnosprawnych o nachyleniu 7^0. Oblicz długość podjazdu. Wynik podaj w zaokrągleniu do 10 *cm*.

3.p.9 Czerwiec 2004

Zadanie 4. (5 pkt)

Na poniższym rysunku przedstawiono równoramienny trójkąt ABC (o podstawie AC) oraz prostokątny równoramienny trójkąt BDC (o podstawie BC). Uzasadnij, że $\cos(\angle ACD) < \frac{1}{2}$.



4.p.9 Maj 2006

Zadanie 5. (***3 pkt***)

Wiedząc, że $0^\circ \le \alpha \le 360^\circ$, $\sin\alpha < 0$ oraz $4\,\mathrm{tg}\,\alpha = 3\sin^2\alpha + 3\cos^2\alpha$

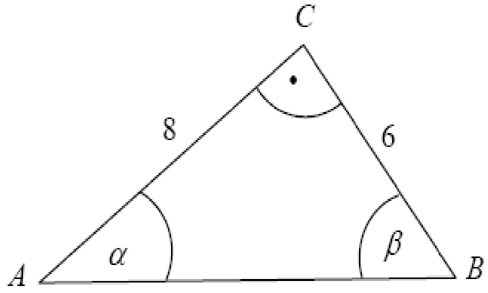
a) oblicz $\mathrm{tg}\,\alpha$,

b) zaznacz w układzie współrzędnych kąt α i podaj współrzędne dowolnego punktu, różnego od początku układu współrzędnych, który leży na końcowym ramieniu tego kąta.

5.p.9 **Maj 2007**

Zadanie 3. *(4 pkt)*

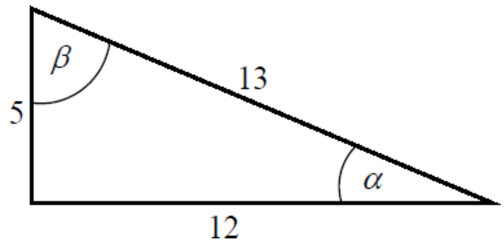
Korzystając z danych przedstawionych na rysunku, oblicz wartość wyrażenia:
$\mathrm{tg}^2\beta - 5\sin\beta\cdot\mathrm{ctg}\alpha + \sqrt{1-\cos^2\alpha}$.



6.p.9 **Marzec 2008 (zestaw 1)**

Zadanie 12. *(4 pkt)*

Na rysunku oznaczono kąty oraz podano długości boków trójkąta prostokątnego. Oblicz, które z wyrażeń ma większą wartość: $\mathrm{tg}\alpha\cdot\sqrt{1-\cos^2\beta}+\sin\alpha$ czy $\mathrm{tg}\beta\cdot\sqrt{1-\cos^2\alpha}+\sin\beta$.



7.p.9 **Styczeń 2009**

Zadanie 3. (*4 pkt*)

Uzasadnij, że dla każdego $\alpha\in(0^\circ,90^\circ)$ prawdą jest, że $(1+\sin\alpha)\cdot\left(\frac{1}{\cos\alpha}-\mathrm{tg}\alpha\right)=\cos\alpha$.

8.p.9 **Maj 2009**

Zadanie 6. *(5 pkt)*

Miara jednego z kątów ostrych w trójkącie prostokątnym jest równa α.

a) Uzasadnij, że spełniona jest nierówność $\sin\alpha-\mathrm{tg}\alpha<0$.

b) Dla $\sin\alpha=\frac{2\sqrt{2}}{3}$ oblicz wartość wyrażenia $\cos^3\alpha+\cos\alpha\cdot\sin^2\alpha$.

9.p.9 **Listopad 2009**

Zadanie 29. (*2 pkt*)

Kąt α jest ostry i $\mathrm{tg}\alpha=\frac{4}{3}$. Oblicz $\sin\alpha+\cos\alpha$.

10.p.9 Maj 2010

Zadanie 29. *(2 pkt)*

Kąt α jest ostry i $\operatorname{tg}\alpha = \frac{5}{12}$. Oblicz $\cos\alpha$.

11.p.9 Maj 2011

Zadanie 28. *(2 pkt)*

Kąt α jest ostry i $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = 2$. Oblicz wartość wyrażenia $\sin\alpha \cdot \cos\alpha$.

12.p.9 Czerwiec 2012 (termin dodatkowy)

Zadanie 28. *(2 pkt)*

Uzasadnij, że jeżeli α jest kątem ostrym, to $\sin^4\alpha + \cos^2\alpha = \sin^2\alpha + \cos^4\alpha$.

13.p.9 Maj 2013

Zadanie 27. *(2 pkt)*

Kąt α jest ostry i $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Oblicz wartość wyrażenia $\sin^2\alpha - 3\cos^2\alpha$.

14.p.9 Sierpień 2014

Zadanie 29. *(2 pkt)*

Kąt α jest ostry oraz $\frac{4}{\sin^2\alpha} + \frac{4}{\cos^2\alpha} = 25$. Oblicz wartość wyrażenia $\sin\alpha \cdot \cos\alpha$.

15.p.9 Sierpień 2015

Zadanie 29. (0–2)

Kąt α jest ostry i spełnia równość $\operatorname{tg}\alpha + \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{7}{2}$. Oblicz wartość wyrażenia $\sin\alpha \cdot \cos\alpha$.

16.p.9 Sierpień 2015 – stara

Zadanie 29. *(2 pkt)*

Kąt α jest ostry i spełnia równość $\operatorname{tg}\alpha + \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{7}{2}$. Oblicz wartość wyrażenia $\sin\alpha \cdot \cos\alpha$.

17.p.9 Maj 2016 – stara

Zadanie 28. *(2 pkt)*

Kąt α jest ostry i $(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 = \frac{3}{2}$. Oblicz wartość wyrażenia $\sin\alpha \cdot \cos\alpha$.

18.p.9 Czerwiec 2017

Zadanie 27. (0–2)

Kąt α jest ostry i spełniona jest równość $\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{\sqrt{7}}{2}$. Oblicz wartość wyrażenia $(\sin\alpha-\cos\alpha)^2$.

19.p.9 Czerwiec 2018

Zadanie 30. (0–2)

Kąt α jest ostry i $\sin\alpha+\cos\alpha=\sqrt{2}$. Oblicz wartość wyrażenia $\operatorname{tg}\alpha+\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$.

20.p.9 Maj 2020

Zadanie 31. (0–2)

Kąt α jest ostry i spełnia warunek $\frac{2\sin\alpha+3\cos\alpha}{\cos\alpha}=4$. Oblicz tangens kąta α.

21.p.9 Marzec 2021

Zadanie 32. (0–2)

Kąt α jest ostry i $\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{7}{5}$. Oblicz wartość wyrażenia $2\sin\alpha\cos\alpha$.

22.p.9 Maj 2022

Zadanie 32. (0–2)

Kąt α jest ostry i $\operatorname{tg}\alpha=2$. Oblicz wartość wyrażenia $\sin^2\alpha$.

23.p.9 M
24.p.9 M
25.p.9 M

26.p.9 Koniec

Poziom rozszerzony

1.r.9 Maj 2002

Zadanie 17. *(8 pkt)*

Rozwiąż równanie: $2\sin 2x+\operatorname{ctg}x=4\cos x$ dla $x\in\langle 0, 2\pi\rangle$. Ze zbioru rozwiązań tego równania losujemy bez zwracania dwie liczby. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia, że co najmniej jedno z wylosowanych rozwiązań jest wielokrotnością liczby $\frac{\pi}{2}$.

2.r.9 Maj 2003

Zadanie 17. *(5 pkt)*

Rozwiąż równanie $2\cos^2 x+5\sin x-4=0$.

3.r.9 Grudzień 2004

Zadanie 15. (*4 pkt*)

Wyznacz najmniejszą i największą wartość funkcji f określonej wzorem:

$$f(x) = \sin 2x + \cos(\frac{\pi}{6} - 2x).$$

Odpowiedź uzasadnij.

4.r.9 Styczeń 2005

Zadanie 13. (6 pkt.)

Oblicz sumę wszystkich pierwiastków równania $\sin 3x = \mathrm{ctg}\frac{25}{2}\pi$, które spełniają nierówność $|x - 5\pi| \le 5\pi$.

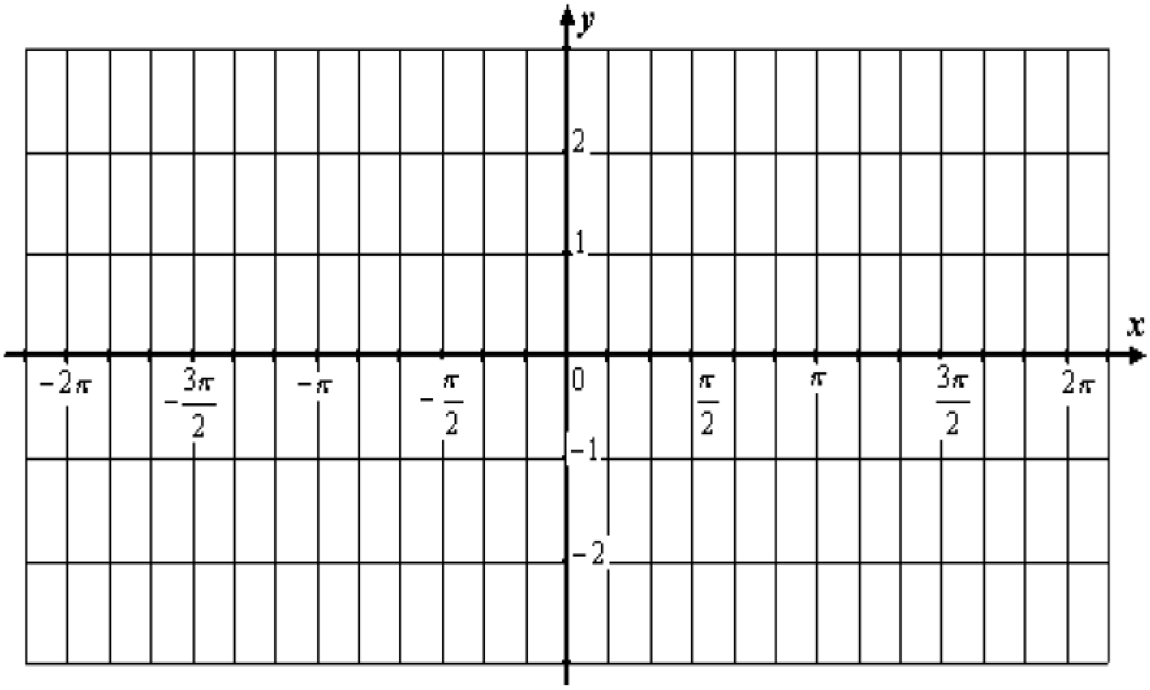
5.r.9 Maj 2005

Zadanie 12. (*4 pkt*)

Dana jest funkcja: $f(x) = \cos x - \sqrt{3}\sin x, \quad x \in R.$

a) Naszkicuj wykres funkcji f.

b) Rozwiąż równanie: $f(x) = 1$.



6.r.9 Grudzień 2005

Zadanie 16. (*7 pkt*)

Dane jest równanie postaci $(\cos x - 1)\cdot(\cos x + p + 1) = 0$, gdzie $p \in R$ jest parametrem.

a) Dla $p = -1$ wypisz wszystkie rozwiązania tego równania należące do przedziału $\langle 0;5 \rangle$.

b) Wyznacz wszystkie wartości parametru p, dla których dane równanie ma w przedziale $\langle -\pi;\pi \rangle$ trzy różne rozwiązania.

7.r.9 Grudzień 2005

Zadanie 18. (*8 pkt*)

Oblicz miary kątów dowolnego czworokąta wpisanego w okrąg o promieniu $R = 5\sqrt{2}$, wiedząc ponadto, że jedna z przekątnych tego czworokąta ma długość 10, zaś iloczyn sinusów wszystkich jego kątów wewnętrznych równa się $\frac{3}{8}$.

8.r.9 Styczeń 2006

Zadanie 15. (*4 pkt*)

Rozwiąż równanie: $\frac{1}{\sin x} + \operatorname{ctg} x + \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = 0.$

9.r.9 Maj 2006

Zadanie 14. (*4 pkt)*

a) Naszkicuj wykres funkcji $y = \sin 2x$ w przedziale $< -2\pi, 2\pi >$.

b) Naszkicuj wykres funkcji $y = \frac{|\sin 2x|}{\sin 2x}$ w przedziale $< -2\pi, 2\pi >$

i zapisz, dla których liczb z tego przedziału spełniona jest nierówność $\frac{|\sin 2x|}{\sin 2x} < 0$.

10.r.9 Listopad 2006 (próbna do maja 2007)

Zadanie 7. (*3 pkt*)

Wyznacz wszystkie rozwiązania równania $2\cos^2 x = \cos x$ należące do przedziału $\langle 0, 2\pi \rangle$.

11.r.9 Maj 2007

Zadanie 4. (*3 pkt*)

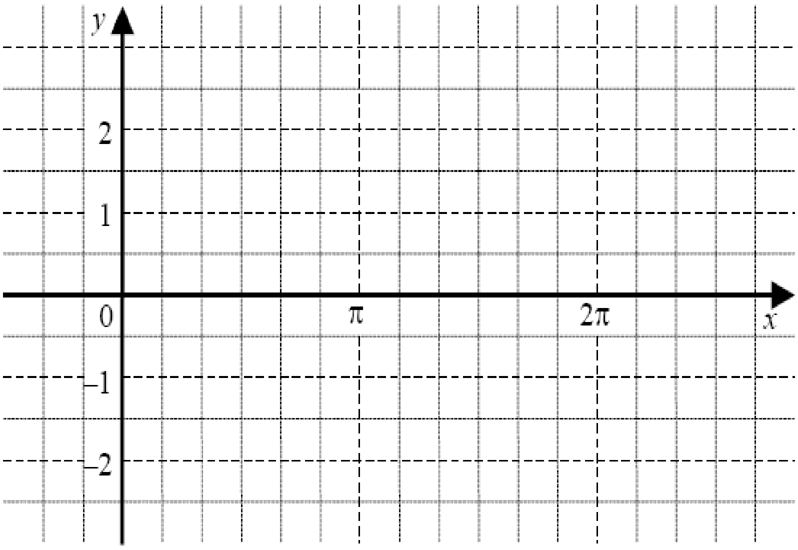
Dany jest trójkąt o bokach długości 1, $\frac{3}{2}$, 2. Oblicz cosinus i sinus kąta leżącego naprzeciw najkrótszego boku tego trójkąta.

12.r.9 Maj 2007

Zadanie 8. *(3 pkt)*

Dana jest funkcja *f* określona wzorem $f(x)=\dfrac{\sin^2 x-|\sin x|}{\sin x}$ dla $x\in(0,\pi)\cup(\pi,2\pi)$.

a) Naszkicuj wykres funkcji *f*.
b) Wyznacz miejsca zerowe funkcji *f*.



13.r.9 Marzec 2008

Zadanie 7. *(6 pkt)*

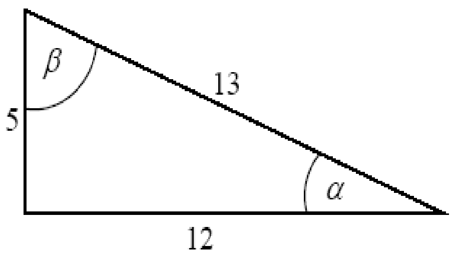
Dana jest funkcja $f(x)=\sin^2 x+\cos x$ dla $x\in R$.

a) Rozwiąż równanie $f(x)=1$ w przedziale $\langle 0,\, 2\pi\rangle$.
b) Wyznacz największą wartość funkcji *f*.

14.r.9 Marzec 2008

Zadanie 12. *(4 pkt)*

Na rysunku oznaczono kąty oraz podano długości boków trójkąta prostokątnego. Oblicz, które z wyrażeń ma większą wartość: $\mathrm{tg}\alpha\cdot\sqrt{1-\cos^2\beta}+\sin\alpha$ czy $\mathrm{tg}\beta\cdot\sqrt{1-\cos^2\alpha}+\sin\beta$.



15.r.9 Maj 2008

Zadanie 4. *(4 pkt)*

Rozwiąż równanie $4\cos^2 x=4\sin x+1$ w przedziale $\langle 0,2\pi\rangle$.

16.r.9 Styczeń 2009

Zadanie 10. ***(4 pkt)***

Sinusy kątów ostrych trójkąta prostokątnego oraz liczba 1 tworzą ciąg geometryczny. Oblicz sinus najmniejszego kąta tego trójkąta.

17.r.9 Maj 2010

Zadanie 2. ***(4 pkt)***

Wyznacz wszystkie rozwiązania równania $2\cos^2 x - 5\sin x - 4 = 0$ należące do przedziału $\langle 0,\ 2\pi \rangle$.

18.r.9 Maj 2012

Zadanie 3. ***(4 pkt)***

Rozwiąż równanie $\cos 2x + 2 = 3\cos x$.

19.r.9 Czerwiec 2012

Zadanie 3. ***(5 pkt)***

Kąt α jest taki, że $\cos\alpha + \sin\alpha = \frac{4}{3}$. Oblicz wartość wyrażenia $|\cos\alpha - \sin\alpha|$.

20.r.9 Maj 2013

Zadanie 4. ***(4 pkt)***

Rozwiąż równanie $\cos 2x + \cos x + 1 = 0$ dla $x \in \langle 0, 2\pi \rangle$.

21.r.9 Maj 2014

Zadanie 3. ***(4 pkt)***

Rozwiąż równanie $\sqrt{3} \cdot \cos x = 1 + \sin x$ w przedziale $\langle 0,\ 2\pi \rangle$.

22.r.9 Grudzień 2014

Zadanie 7. (0–2)

Długości boków prostokąta są równe 3 oraz 5. Oblicz sinus kąta ostrego, który tworzą przekątne tego prostokąta.

23.r.9 Grudzień 2014

Zadanie 11. (0–3)

Wyznacz wszystkie liczby rzeczywiste x, spełniające równanie $\sin 5x - \sin x = 0$.

24.r.9 Grudzień 2014

Zadanie 14. (0–4)

Wykaż, że jeżeli α, β, γ są kątami wewnętrznymi trójkąta i $\sin^2\alpha + \sin^2\beta < \sin^2\gamma$, to $\cos\gamma < 0$.

25.r.9 **Maj 2015-stara**

Zadanie 5. ***(4 pkt)***

Rozwiąż równanie $\sin^2 2x - 4\sin^2 x + 1 = 0$ w przedziale $\langle 0, 2\pi \rangle$.

26.r.9 **Czerwiec 2015**

Zadanie 10. (0−4)

Rozwiąż równanie $(4\sin^2 x - 1)\cdot \sin x = \cos^2 x - 3\sin^2 x$, dla $x \in (-\pi, 0)$.

27.r.9 **Maj 2016**

Zadanie 11. (0–4)

Rozwiąż nierówność $\dfrac{2\cos x - \sqrt{3}}{\cos^2 x} < 0$ w przedziale $\langle 0, 2\pi \rangle$.

28.r.9 **Maj 2016 – stara**

Zadanie 3. ***(4 pkt)***

Rozwiąż równanie $-2\cos^2 x + 3\sin x + 3 = 0$ w przedziale $< 0, 2\pi >$.

29.r.9 **Maj 2017**

Zadanie 10. (0–4)

Rozwiąż równanie $\cos 2x + 3\cos x = -2$ w przedziale $\langle 0, 2\pi \rangle$.

30.r.9 **Maj 2018**

Zadanie 11. (0–4)

Rozwiąż równanie $\sin 6x + \cos 3x = 2\sin 3x + 1$ w przedziale $\langle 0, \pi \rangle$.

31.r.9 **Maj 2018 – stara**

Zadanie 7. ***(4 pkt)***

Rozwiąż równanie $2\cos^2 x + 3\sin x = 0$ w przedziale $\left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right\rangle$.

32.r.9 **Maj 2019**

Zadanie 14. (0–4)

Rozwiąż równanie $(\cos x)\left[\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)\right] = \frac{1}{2}\sin x$.

33.r.9 Maj 2019 – stara

Zadanie 7. ***(4 pkt)***

Rozwiąż równanie $\cos 2x = \sin x + 1$ w przedziale $\langle 0, 2\pi \rangle$.

34.r.9 Kwiecień 2020 (próbna)

Zadanie 7. (0–3)

Udowodnij, że dla dowolnego kąta $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ prawdziwa jest nierówność

$$\sin\left(\frac{\pi}{12} - \alpha\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{12} + \alpha\right) < \frac{1}{4}.$$

35.r.9 Maj 2020 - stara

Zadanie 9. (0–4)

Rozwiąż równanie $3\cos 2x + 10\cos^2 x = 24\sin x - 3$ dla $x \in \langle 0, 2\pi \rangle$.

36.r.9 Marzec 2021

Zadanie 7. (0–4)

Rozwiąż równanie:

$$\sin\left(x + \frac{1}{4}\pi\right) \cdot \cos\left(x + \frac{1}{4}\pi\right) = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

37.r.9 Maj 2021

Zadanie 12. (0–5)

Rozwiąż równanie $\cos 2x = \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos x - \sin x)$ w przedziale $\langle 0, \pi \rangle$.

38.r.9 Maj 2022

Zadanie 11. (0–4)

Rozwiąż równanie $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 0$ w przedziale $\langle 0, \pi \rangle$.

39.r.9 M

40.r.9 M

41.r.9 Koniec

Poziom podstawowy

1.p.10 Maj 2002

Zadanie 2. *(3 pkt)*

Dany jest wektor $\overrightarrow{AB} = [-3,4]$ oraz punkt $A = (1,-2)$.

Oblicz:

a) współrzędne punktu B,

b) współrzędne i długość wektora $\vec{v} = -2 \cdot \overrightarrow{AB}$.

2.p.10 Maj 2002

Zadanie 9. *(5 pkt)*

Zaplanowano zalesić ugór w kształcie trójkąta równoramiennego, którego długość najdłuższego boku, na planie w skali 1:1500, jest równa 12 cm i jeden z kątów ma miarę 120°. W szkółce leśnej zamówiono sadzonki, w ilości pozwalającej obsadzić obszar wielkości 40 arów. Oblicz, czy zamówiona ilość sadzonek jest wystarczająca do zalesienia ugoru.

3.p.10 Styczeń 2003

Zadanie 1. *(3 pkt)*

Powierzchnia prostokątnej działki budowlanej równa się $1540\ \mathrm{m}^2$. Oblicz wymiary tej działki wiedząc, że różnią się one o $9\ \mathrm{m}$.

4.p.10 Styczeń 2003

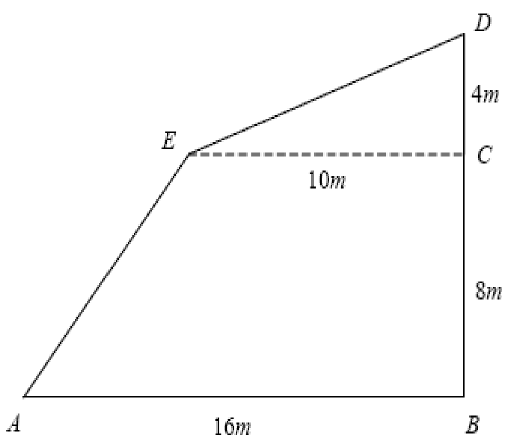
Zadanie 5. *(4 pkt)*

Dany jest trójkąt, którego dwa boki mają długości 8 cm i 12 cm, kąt zawarty między tymi bokami ma miarę 120°. Oblicz długość promienia okręgu opisanego na tym trójkącie.

5.p.10 Maj 2003

Zadanie 9. *(3 pkt)*

Oblicz pole działki rekreacyjnej, której plan przedstawiony jest na rysunku. Zakładamy, że kąty ABC i ECD są kątami prostymi.



6.p.10 Grudzień 2004

Zadanie 4. (*4 pkt*)

Aby wyznaczyć równanie symetralnej odcinka o końcach $A(-1;4)$, $B(3;-2)$ postępujemy w następujący sposób:

- wybieramy dowolny punkt $P(x;\ y)$ należący do symetralnej odcinka AB i korzystamy z własności symetralnej odcinka: $|AP| = |BP| \Leftrightarrow |AP|^2 = |BP|^2$
- ponieważ $|AP|^2 = (x+1)^2 + (y-4)^2$ oraz $|BP|^2 = (x-3)^2 + (y+2)^2$, więc
  $$(x+1)^2 + (y-4)^2 = (x-3)^2 + (y+2)^2$$
- przekształcamy otrzymane równanie do prostszej postaci i otrzymujemy równanie: $2x - 3y + 1 = 0$, które jest równaniem symetralnej odcinka AB.

Postępując w analogiczny sposób, wyznacz równanie symetralnej odcinka o końcach: $C(4;6)$, $D(6;-2)$.

7.p.10 Grudzień 2004

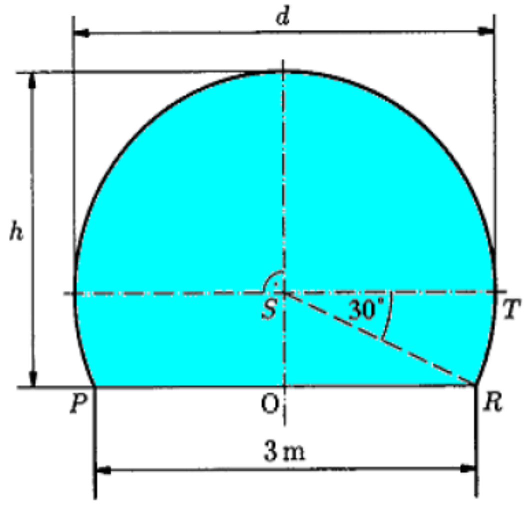
Zadanie 5. (*4 pkt*)

Wielkość prostokątnego ekranu telewizora określa długość jego przekątnej wyrażona w calach. Oblicz, o ile procent zwiększymy powierzchnię ekranu, jeśli długość przekątnej wynoszącą 21 cali powiększymy do 32 cali zachowując stosunek długości boków prostokąta. Wynik podaj z dokładnością do 0,1%.

8.p.10 Czerwiec 2004

Zadanie 5. (4 pkt)

W architekturze islamu często stosowanym elementem był „łuk podkowiasty". Schemat okna w kształcie takiego łuku (łuku okręgu) przedstawiono na rysunku poniżej. Korzystając z danych na rysunku oblicz wysokość okna h i największy prześwit d.

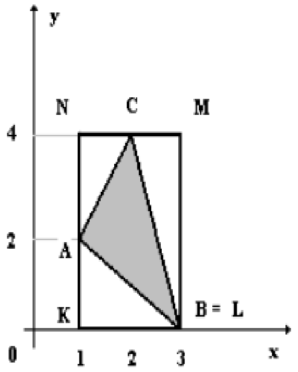


9.p.10 Czerwiec 2004

Zadanie 7. (5 pkt)

Pole trójkąta o wierzchołkach $A=(1,2)$, $B=(3,0)$, $C=(2,4)$ można obliczyć stosując następującą metodę:

- zaznaczamy w układzie współrzędnych punkty ABC;
- rysujemy prostokąt $KLMN$ w sposób przedstawiony na rysunku (odpowiednie boki prostokąta mają być równoległe do osi układu współrzędnych);
- odczytujemy długości odpowiednich odcinków:
  $|KL|=2$, $|LM|=4$, $|AK|=2$, $|MC|=1$, $|CN|=1$ $|NA|=2$;
- obliczamy pole prostokąta: $P_{KLMN}=|KL|\cdot|LM|=2\cdot4=8$;
- obliczamy pola odpowiednich trójkątów prostokątnych:
  $$P_{\Delta AKL}=\frac{1}{2}|AK|\cdot|KL|=\frac{1}{2}\cdot2\cdot2=2$$
  $$P_{\Delta LMC}=\frac{1}{2}\cdot|LM|\cdot|MC|=\frac{1}{2}\cdot4\cdot1=2$$
  $$P_{\Delta CNA}=\frac{1}{2}\cdot|CN|\cdot|NA|=\frac{1}{2}\cdot1\cdot2=1;$$
- od pola prostokąta odejmujemy sumę pól trójkątów: $P_{\Delta ABC}=8-(2+2+1)=3$.



Stosując **opisaną wyżej** metodę, oblicz pole trójkąta o wierzchołkach $A=(1,0)$, $B=(5,1)$, $C=(3,4)$.

10.p.10 Styczeń 2005

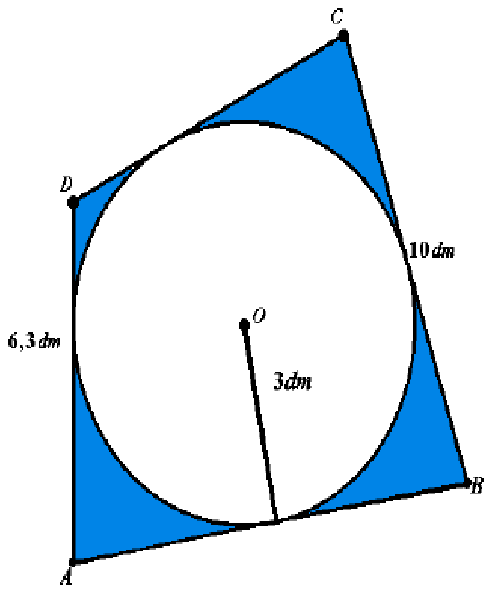
Zadanie 7. (5 pkt.)

W okrąg o środku O i promieniu $R=6$ cm wpisano czworokąt ABCD. Kąty środkowe: $\angle AOB$, $\angle BOC$, $\angle COD$ i $\angle DOA$ mają odpowiednio miary : 45°, 150°, 135° i 30°. Oblicz pole czworokąta ABCD.

11.p.10 Maj 2005

Zadanie 8. *(6 pkt)*

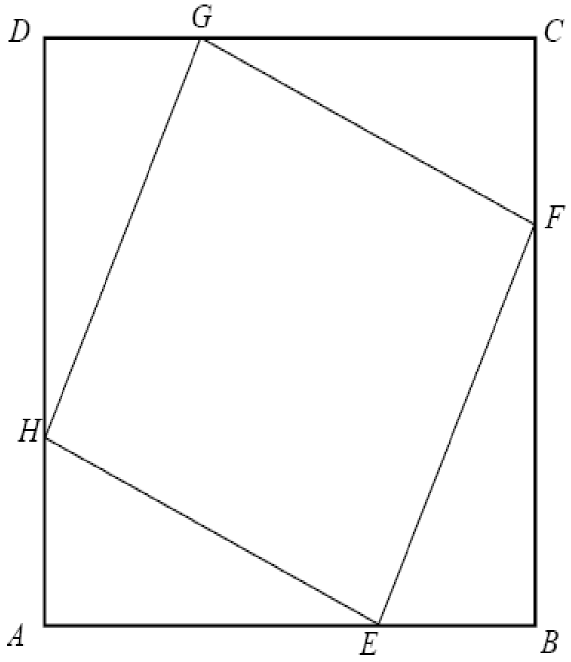
Z kawałka materiału o kształcie i wymiarach czworokąta $ABCD$ (patrz na rysunek obok) wycięto okrągłą serwetkę o promieniu 3 dm. Oblicz, ile procent całego materiału stanowi jego niewykorzystana część. Wynik podaj z dokładnością do 0,01 procenta.



12.p.10 Grudzień 2005

Zadanie 8. (*5 pkt*)

W kwadrat $ABCD$ wpisano kwadrat $EFGH$, jak pokazano na poniższym rysunku. Wiedząc, że $|AB| = 1$ oraz tangens kąta AEH równa się $\frac{2}{5}$, oblicz pole kwadratu $EFGH$.



13.p.10 Styczeń 2006

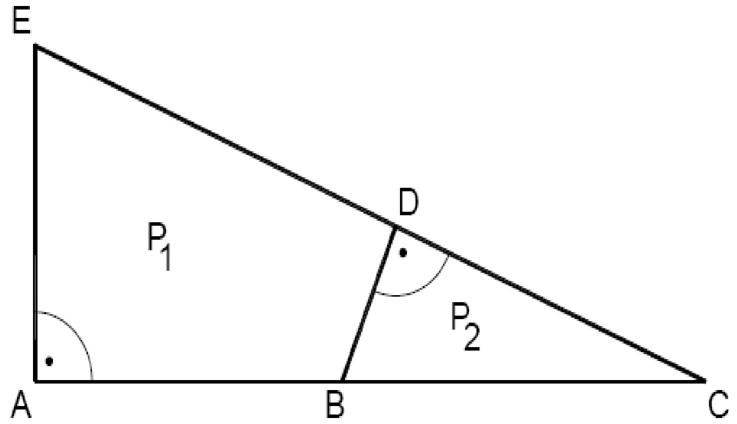
Zadanie 10. (*8 pkt*)

W trapezie opisanym na okręgu kąty przy dłuższej podstawie mają miary 60° i 30°, a długość wysokości tego trapezu jest równa 6. Sporządź odpowiedni rysunek i oznacz jego elementy. Oblicz pole trapezu oraz długości jego podstaw.

14.p.10 Maj 2006

Zadanie 6. (*7 pkt*)

Państwo Nowakowie przeznaczyli 26000 zł na zakup działki. Do jednej z ofert dołączono rysunek dwóch przylegających do siebie działek w skali 1:1000. Jeden metr kwadratowy gruntu w tej ofercie kosztuje 35 zł. Oblicz, czy przeznaczona przez państwa Nowaków kwota wystarczy na zakup działki P_2.



$|AE| = 5$ cm,

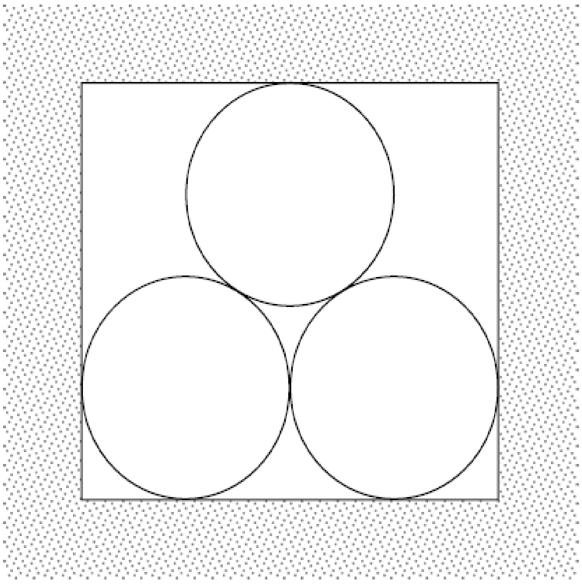
$|EC| = 13$ cm,

$|BC| = 6,5$ cm.

15.p.10 Maj 2006

Zadanie 7. *(5 pkt)*

Szkic przedstawia kanał ciepłowniczy, którego przekrój poprzeczny jest prostokątem. Wewnątrz kanału znajduje się rurociąg składający się z trzech rur, każda o średnicy zewnętrznej 1 m. Oblicz wysokość i szerokość kanału ciepłowniczego. Wysokość zaokrąglij do 0,01 m.



16.p.10 Listopad 2006 (próbna do maja 2007)

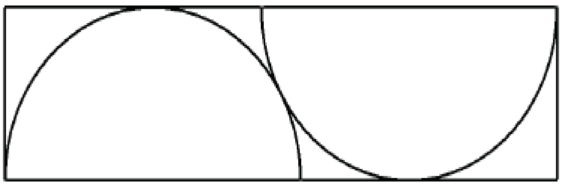
Zadanie 2. *(4 pkt)*

Dany jest kwadrat o boku długości a. W prostokącie $ABCD$ bok AB jest dwa razy dłuższy niż bok kwadratu, a bok AD jest o 2 cm krótszy od boku kwadratu. Pole tego prostokąta jest o 12 cm^2 większe od pola kwadratu. Oblicz długość boku kwadratu.

17.p.10 Listopad 2006 (próbna do maja 2007)

Zadanie 3. *(5 pkt)*

Z prostokąta o szerokości 60 cm wycina się detale w kształcie półkola o promieniu 60 cm. Sposób wycinania detali ilustruje poniższy rysunek.



Oblicz najmniejszą długość prostokąta potrzebnego do wycięcia dwóch takich detali. Wynik zaokrąglij do pełnego centymetra.

18.p.10 Maj 2007

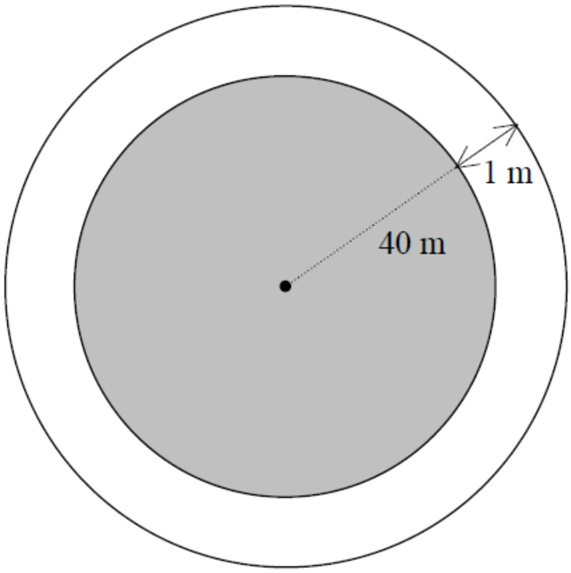
Zadanie 9. *(6 pkt)*

Oblicz pole czworokąta wypukłego $ABCD$, w którym kąty wewnętrzne mają odpowiednio miary: $\sphericalangle A = 90^\circ$, $\sphericalangle B = 75^\circ$, $\sphericalangle C = 60^\circ$, $\sphericalangle D = 135^\circ$, a boki AB i AD mają długość 3 cm. Sporządź rysunek pomocniczy.

19.p.10 Marzec 2008 (zestaw 1)

Zadanie 5. ***(3 pkt)***

Ogrodnik opiekujący się klombem w kształcie koła o promieniu 40 m chce go powiększyć, sadząc wokół niego kwiatki na grządce o szerokości 1 m (patrz rysunek). Oblicz, o ile procent ogrodnik chce powiększyć powierzchnię tego klombu.



20.p.10 Maj 2008

Zadanie 2. ***(4 pkt)***

Liczba przekątnych wielokąta wypukłego, w którym jest n boków i $n \geq 3$ wyraża się wzorem

$$P(n) = \frac{n(n-3)}{2}.$$

Wykorzystując ten wzór:

a) oblicz liczbę przekątnych w dwudziestokącie wypukłym.

b) oblicz, ile boków ma wielokąt wypukły, w którym liczba przekątnych jest pięć razy większa od liczby boków.

c) sprawdź, czy jest prawdziwe następujące stwierdzenie:
Każdy wielokąt wypukły o parzystej liczbie boków ma parzystą liczbę przekątnych.
Odpowiedź uzasadnij.

21.p.10 Maj 2008

Zadanie 7. ***(4 pkt)***

Dany jest trapez, w którym podstawy mają długość 4 cm i 10 cm oraz ramiona tworzą z dłuższą podstawą kąty o miarach 30° i 45°. Oblicz wysokość tego trapezu.

22.p.10 Styczeń 2009

Zadanie 6. (***4 pkt***)

Punkty $A = (-4, -1)$, $B = (0, -5)$, $C = (2, 1)$ są wierzchołkami trójkąta równoramiennego. Wyznacz równanie osi symetrii tego trójkąta.

23.p.10 Styczeń 2009

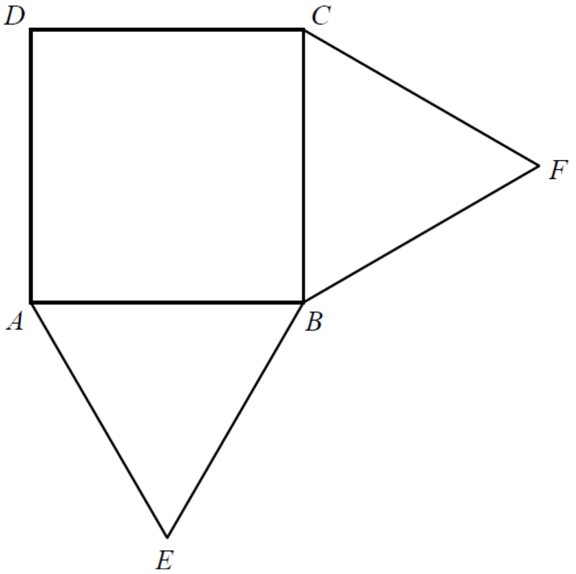
Zadanie 9. (*4 pkt*)

W trójkącie ostrokątnym ABC bok AB ma długość 18 cm, a wysokość CD jest równa 15 cm. Punkt D dzieli bok AB tak, że $|AD|:|DB| = 1:2$. Przez punkt P leżący na odcinku DB poprowadzono prostą równoległą do prostej CD, odcinając od trójkąta ABC trójkąt, którego pole jest cztery razy mniejsze niż pole trójkąta ABC. Oblicz długość odcinka PB.

24.p.10 Styczeń 2009

Zadanie 11. (*4 pkt*)

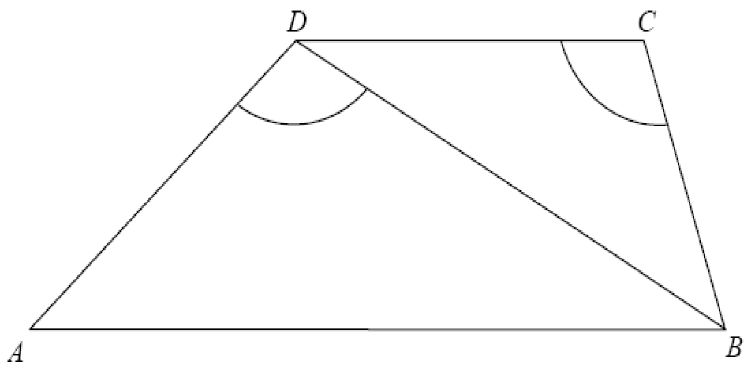
Na zewnątrz kwadratu $ABCD$ na bokach AB i BC zbudowano trójkąty równoboczne AEB i BFC. Uzasadnij, że trójkąt DEF jest równoboczny.



25.p.10 Maj 2009

Zadanie 8. *(4 pkt)*

W trapezie $ABCD$ długość podstawy CD jest równa 18, a długości ramion trapezu AD i BC są odpowiednio równe 25 i 15. Kąty ADB i DCB, zaznaczone na rysunku, mają równe miary. Oblicz obwód tego trapezu.



26.p.10 Maj 2009

Zadanie 9. *(4 pkt)*

Punkty $B = (0,10)$ i $O = (0,0)$ są wierzchołkami trójkąta prostokątnego OAB, w którym $|\sphericalangle OAB| = 90^\circ$. Przyprostokątna OA zawiera się w prostej o równaniu $y = \frac{1}{2}x$. Oblicz współrzędne punktu A i długość przyprostokątnej OA.

27.p.10 Listopad 2009

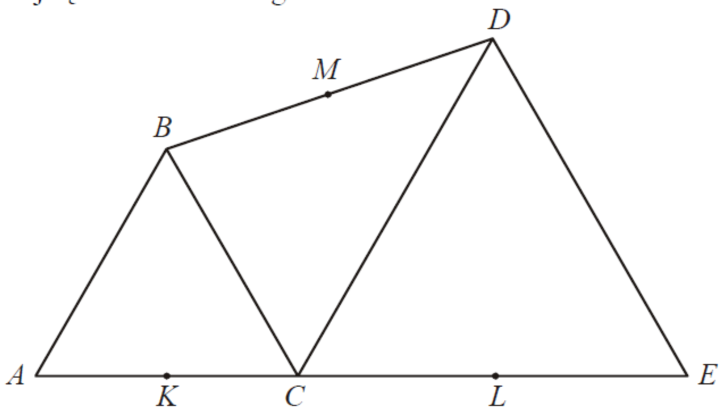
Zadanie 28. *(2 pkt)*

W układzie współrzędnych na płaszczyźnie punkty $A=(2,5)$ i $C=(6,7)$ są przeciwległymi wierzchołkami kwadratu $ABCD$. Wyznacz równanie prostej BD.

28.p.10 Listopad 2009

Zadanie 31. *(2 pkt)*

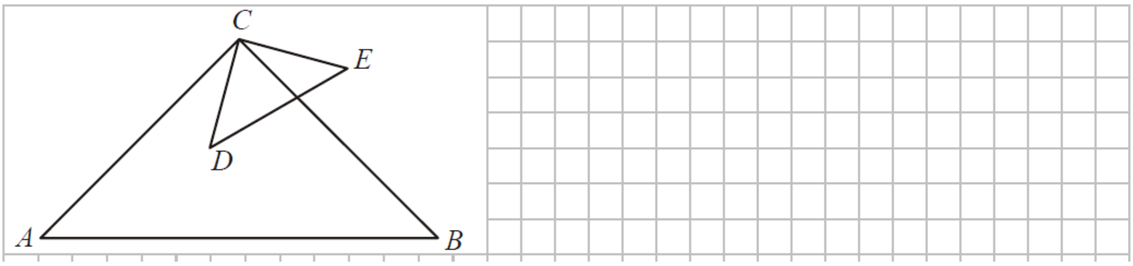
Trójkąty ABC i CDE są równoboczne. Punkty A, C i E leżą na jednej prostej. Punkty K, L i M są środkami odcinków AC, CE i BD (zobacz rysunek). Wykaż, że punkty K, L i M są wierzchołkami trójkąta równobocznego.



29.p.10 Maj 2010

Zadanie 28. *(2 pkt)*

Trójkąty prostokątne równoramienne ABC i CDE są położone tak, jak na poniższym rysunku (w obu trójkątach kąt przy wierzchołku C jest prosty). Wykaż, że $|AD|=|BE|$.



30.p.10 Maj 2010

Zadanie 31. *(2 pkt)*

W trapezie prostokątnym krótsza przekątna dzieli go na trójkąt prostokątny i trójkąt równoboczny. Dłuższa podstawa trapezu jest równa 6. Oblicz obwód tego trapezu.

31.p.10 Listopad 2010

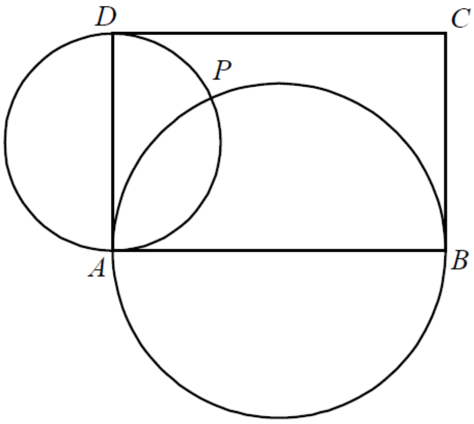
Zadanie 28. *(2 pkt)*

Przeciwprostokątna trójkąta prostokątnego jest dłuższa od jednej przyprostokątnej o 1 cm i od drugiej przyprostokątnej o 32 cm. Oblicz długości boków tego trójkąta.

32.p.10 Listopad 2010

Zadanie 29. ***(2 pkt)***

Dany jest prostokąt $ABCD$. Okręgi o średnicach AB i AD przecinają się w punktach A i P (zobacz rysunek). Wykaż, że punkty B, P i D leżą na jednej prostej.



33.p.10 Listopad 2010

Zadanie 33. ***(4 pkt)***

Punkty $A=(1,5)$, $B=(14,31)$, $C=(4,31)$ są wierzchołkami trójkąta. Prosta zawierająca wysokość tego trójkąta poprowadzona z wierzchołka C przecina prostą AB w punkcie D. Oblicz długość odcinka BD.

34.p.10 Maj 2011

Zadanie 29. ***(2 pkt)***

Dany jest czworokąt $ABCD$, w którym $AB \parallel CD$. Na boku BC wybrano taki punkt E, że $|EC|=|CD|$ i $|EB|=|BA|$. Wykaż, że kąt AED jest prosty.

35.p.10 Maj 2011

Zadanie 31. ***(4 pkt)***

Okrąg o środku w punkcie $S=(3,7)$ jest styczny do prostej o równaniu $y=2x-3$. Oblicz współrzędne punktu styczności.

36.p.10 Maj 2012

Zadanie 29. ***(2 pkt)***

Wyznacz równanie symetralnej odcinka o końcach $A=(-2,2)$ i $B=(2,10)$.

37.p.10 Maj 2012

Zadanie 30. ***(2 pkt)***

W trójkącie ABC poprowadzono dwusieczne kątów A i B. Dwusieczne te przecinają się w punkcie P. Uzasadnij, że kąt APB jest rozwarty.

38.p.10 Czerwiec 2012 (termin dodatkowy)

Zadanie 27. ***(2 pkt)***

Podstawy trapezu prostokątnego mają długości 6 i 10 oraz tangens jego kąta ostrego jest równy 3. Oblicz pole tego trapezu.

39.p.10 Czerwiec 2012 (termin dodatkowy)

Zadanie 31. ***(2 pkt)***

Dany jest romb, którego kąt ostry ma miarę 45°, a jego pole jest równe $50\sqrt{2}$. Oblicz wysokość tego rombu.

40.p.10 Czerwiec 2012 (termin dodatkowy)

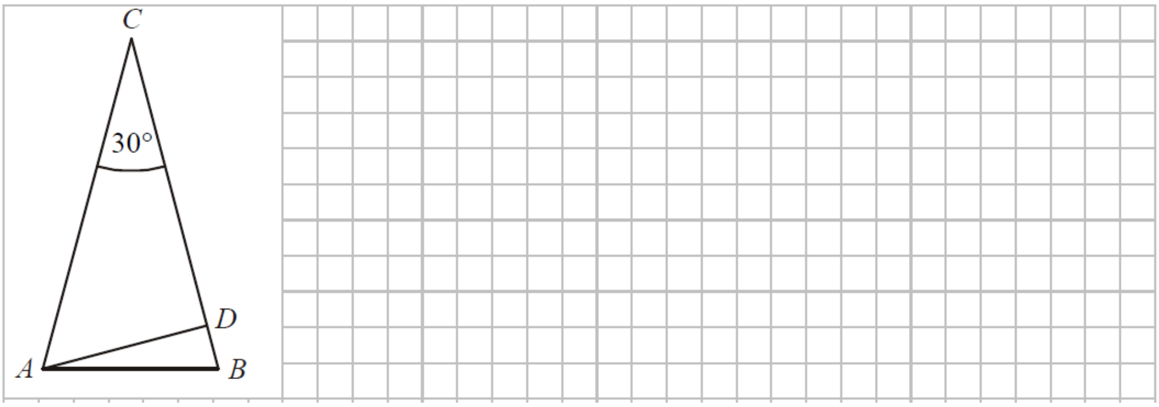
Zadanie 32. ***(4 pkt)***

Punkty $A=(2,11)$, $B=(8,23)$, $C=(6,14)$ są wierzchołkami trójkąta. Wysokość trójkąta poprowadzona z wierzchołka C przecina prostą AB w punkcie D. Oblicz współrzędne punktu D.

41.p.10 Sierpień 2012

Zadanie 29. ***(2 pkt)***

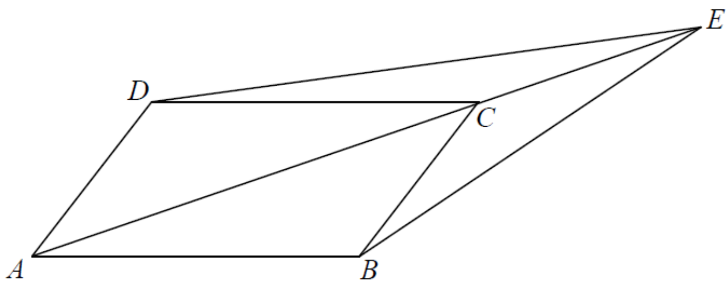
W trójkącie równoramiennym ABC dane są $|AC|=|BC|=6$ i $|\sphericalangle ACB|=30^\circ$ (zobacz rysunek). Oblicz wysokość AD trójkąta opuszczoną z wierzchołka A na bok BC.



42.p.10 Sierpień 2012

Zadanie 30. ***(2 pkt)***

Dany jest równoległobok $ABCD$. Na przedłużeniu przekątnej AC wybrano punkt E tak, że $|CE|=\frac{1}{2}|AC|$ (zobacz rysunek). Uzasadnij, że pole równoległoboku $ABCD$ jest cztery razy większe od pola trójkąta DCE.



43.p.10 Sierpień 2012

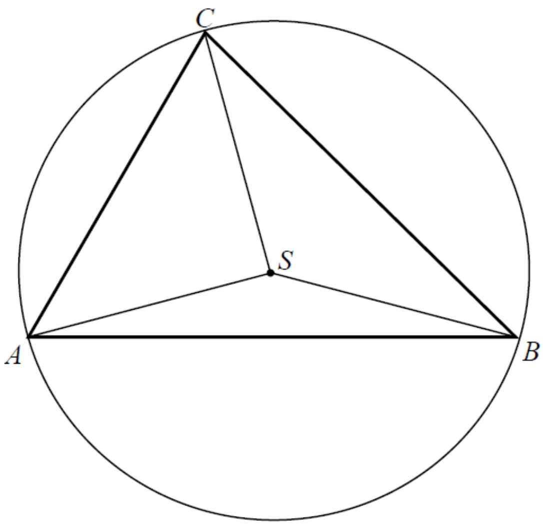
Zadanie 32. ***(4 pkt)***

Dany jest trójkąt równoramienny ABC, w którym $|AC|=|BC|$ oraz $A=(2,1)$ i $C=(1,9)$. Podstawa AB tego trójkąta jest zawarta w prostej $y=\frac{1}{2}x$. Oblicz współrzędne wierzchołka B.

44.p.10 Maj 2013

Zadanie 32. ***(4 pkt)***

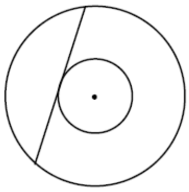
Punkt S jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie ostrokątnym ABC. Kąt ACS jest trzy razy większy od kąta BAS, a kąt CBS jest dwa razy większy od kąta BAS. Oblicz kąty trójkąta ABC.



45.p.10 Grudzień 2013

Zadanie 27. (0–2)

W pierścieniu kołowym cięciwa zewnętrznego okręgu ma długość 10 i jest styczna do wewnętrznego okręgu (zobacz rysunek).



Wykaż, że pole tego pierścienia można wyrazić wzorem, w którym nie występują promienie wyznaczających go okręgów.

46.p.10 Grudzień 2013

Zadanie 29. (0–2)

Na trójkącie o bokach długości $\sqrt{7}, \sqrt{8}, \sqrt{15}$ opisano okrąg. Oblicz promień tego okręgu.

47.p.10 Grudzień 2013

Zadanie 30. (0–2)

Proste l i k przecinają się w punkcie $A=(0,4)$. Prosta l wyznacza wraz z dodatnimi półosiami układu współrzędnych trójkąt o polu 8, zaś prosta k – trójkąt o polu 10. Oblicz pole trójkąta, którego wierzchołkami są: punkt A oraz punkty przecięcia prostych l i k z osią Ox.

48.p.10 Grudzień 2013

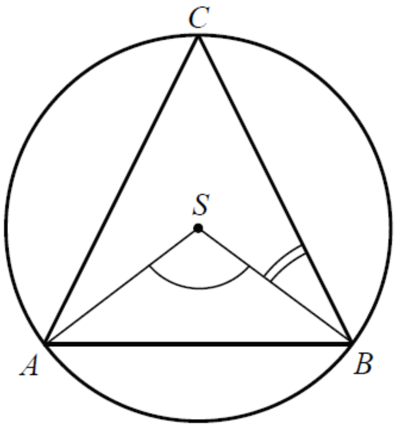
Zadanie 32. (0–5)

Dane są wierzchołki trójkąta ABC: $A=(2,2)$, $B=(9,5)$ i $C=(3,9)$. Z wierzchołka C poprowadzono wysokość tego trójkąta, która przecina bok AB w punkcie D. Wyznacz równanie prostej przechodzącej przez punkt D i równoległej do boku BC.

49.p.10 Maj 2014

Zadanie 31. *(2 pkt)*

Środek S okręgu opisanego na trójkącie równoramiennym ABC, o ramionach AC i BC, leży wewnątrz tego trójkąta (zobacz rysunek).

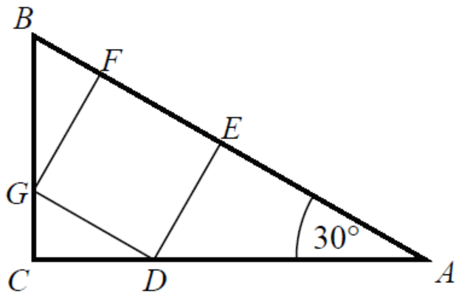


Wykaż, że miara kąta wypukłego ASB jest cztery razy większa od miary kąta wypukłego SBC.

50.p.10 Maj 2014

Zadanie 34. *(4 pkt)*

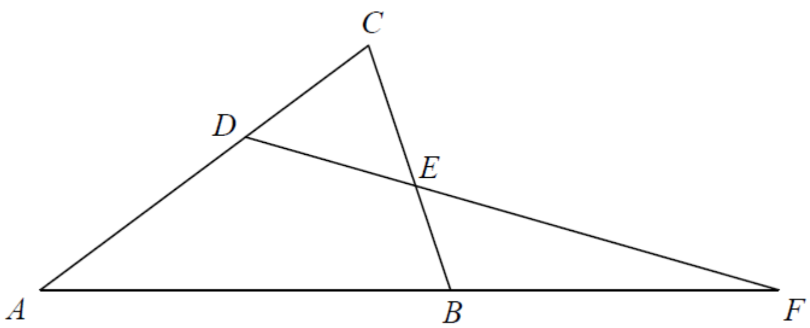
Kąt CAB trójkąta prostokątnego ACB ma miarę $30°$. Pole kwadratu $DEFG$, wpisanego w ten trójkąt (zobacz rysunek), jest równe 4. Oblicz pole trójkąta ACB.



51.p.10 Sierpień 2014

Zadanie 30. *(2 pkt)*

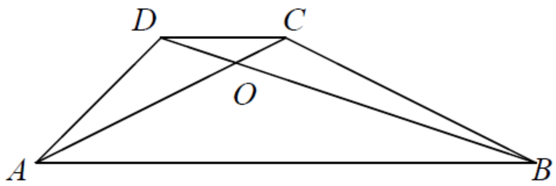
Dany jest trójkąt ABC, w którym $|AC|>|BC|$. Na bokach AC i BC tego trójkąta obrano odpowiednio takie punkty D i E, że zachodzi równość $|CD|=|CE|$. Proste AB i DE przecinają się w punkcie F (zobacz rysunek). Wykaż, że $|\sphericalangle BAC|=|\sphericalangle ABC|-2\cdot|\sphericalangle AFD|$.



52.p.10 Grudzień 2014

Zadanie 31. (0–4)

W trapezie $ABCD$ $(AB \parallel CD)$ przekątne AC i BD przecinają się w punkcie O takim, że $|AO|:|OC| = 5:1$. Pole trójkąta AOD jest równe 10. Uzasadnij, że pole trapezu $ABCD$ jest równe 72.



53.p.10 Grudzień 2014

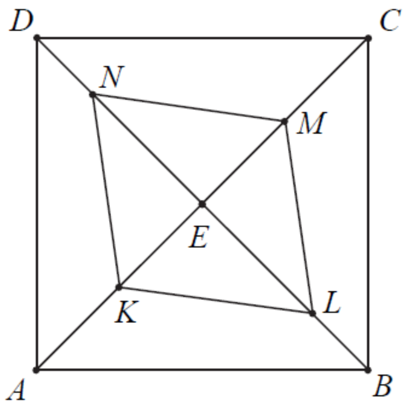
Zadanie 32. (0–4)

Punkty $A=(3,3)$ i $B=(9,1)$ są wierzchołkami trójkąta ABC, a punkt $M=(1,6)$ jest środkiem boku AC. Oblicz współrzędne punktu przecięcia prostej AB z wysokością tego trójkąta, poprowadzoną z wierzchołka C.

54.p.10 Maj 2015-nowa

Zadanie 28. (0–2)

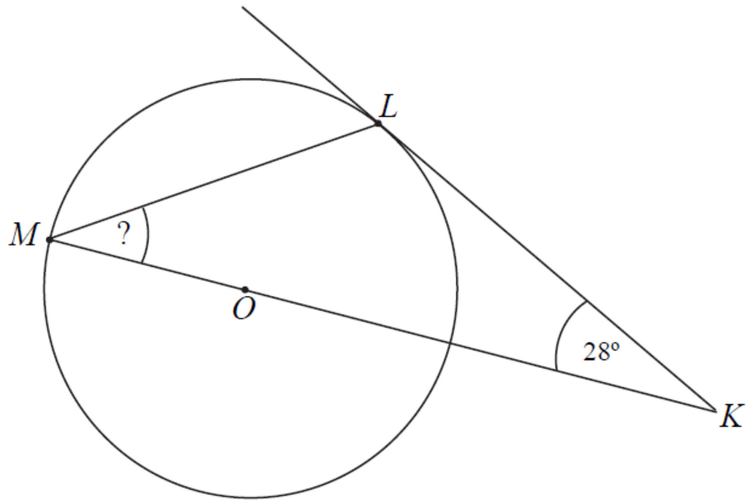
Dany jest kwadrat $ABCD$. Przekątne AC i BD przecinają się w punkcie E. Punkty K i M są środkami odcinków – odpowiednio – AE i EC. Punkty L i N leżą na przekątnej BD tak, że $|BL| = \frac{1}{3}|BE|$ i $|DN| = \frac{1}{3}|DE|$ (zobacz rysunek). Wykaż, że stosunek pola czworokąta $KLMN$ do pola kwadratu $ABCD$ jest równy $1:3$.



55.p.10 Maj 2015-stara

Zadanie 31. ***(2 pkt)***

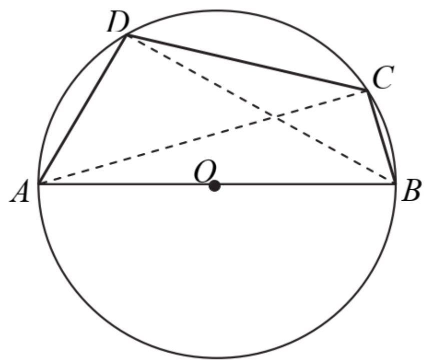
Dany jest okrąg o środku w punkcie O. Prosta KL jest styczna do tego okręgu w punkcie L, a środek O tego okręgu leży na odcinku KM (zob. rysunek). Udowodnij, że kąt KML ma miarę $31°$.



56.p.10 Czerwiec 2015 i Czerwiec 2015 - stara (zadanie 29)

Zadanie 28. (0–2)

Czworokąt $ABCD$ wpisano w okrąg tak, że bok AB jest średnicą tego okręgu (zobacz rysunek). Udowodnij, że $|AD|^2 + |BD|^2 = |BC|^2 + |AC|^2$.



57.p.10 Czerwiec 2015

Zadanie 33. (0–4)

Dany jest trójkąt równoramienny ABC, w którym $|AC| = |BC|$. Ponadto wiadomo, że $A = (-2, 4)$ i $B = (6, -2)$. Wierzchołek C należy do osi Oy. Oblicz współrzędne wierzchołka C.

58.p.10 Czerwiec 2015 - stara

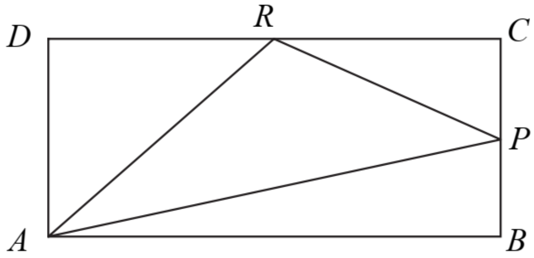
Zadanie 32. ***(4 pkt)***

Dany jest romb o boku długości 35. Długości przekątnych tego rombu różnią się o 14. Oblicz pole tego rombu.

59.p.10 Sierpień 2015 (na nowej i starej maturze)

Zadanie 31. (0–2)

W prostokącie $ABCD$ punkt P jest środkiem boku BC, a punkt R jest środkiem boku CD. Wykaż, że pole trójkąta APR jest równe sumie pól trójkątów ADR oraz PCR.



60.p.10 Sierpień 2015 (nowa i stara matura)

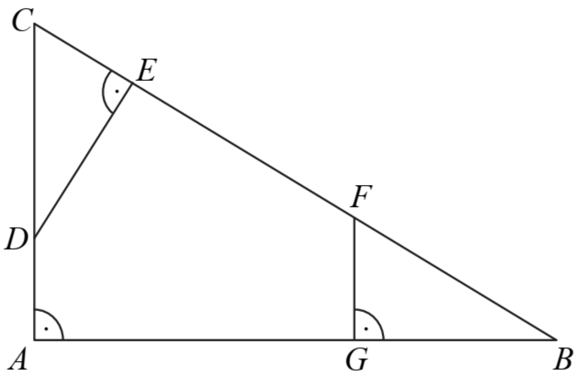
Zadanie 32. (0–4)

Wyznacz równanie osi symetrii trójkąta o wierzchołkach $A=(-2,2)$, $B=(6,-2)$, $C=(10,6)$.

61.p.10 Maj 2016 (nowa i stara matura)

Zadanie 29. (0–2)

Dany jest trójkąt prostokątny ABC. Na przyprostokątnych AC i AB tego trójkąta obrano odpowiednio punkty D i G. Na przeciwprostokątnej BC wyznaczono punkty E i F takie, że $|\sphericalangle DEC|=|\sphericalangle BGF|=90^\circ$ (zobacz rysunek). Wykaż, że trójkąt CDE jest podobny do trójkąta FBG.



62.p.10 Maj 2016

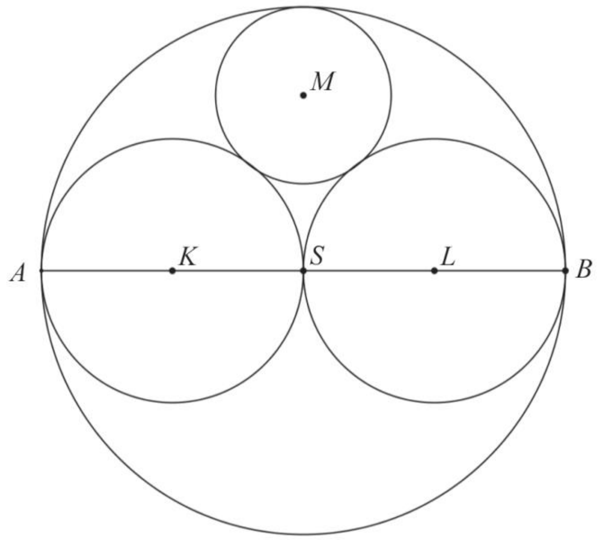
Zadanie 32. (0–4)

Jeden z kątów trójkąta jest trzy razy większy od mniejszego z dwóch pozostałych kątów, które różnią się o 50°. Oblicz kąty tego trójkąta.

63.p.10 Maj 2016 – stara

Zadanie 9. *(3 pkt)*

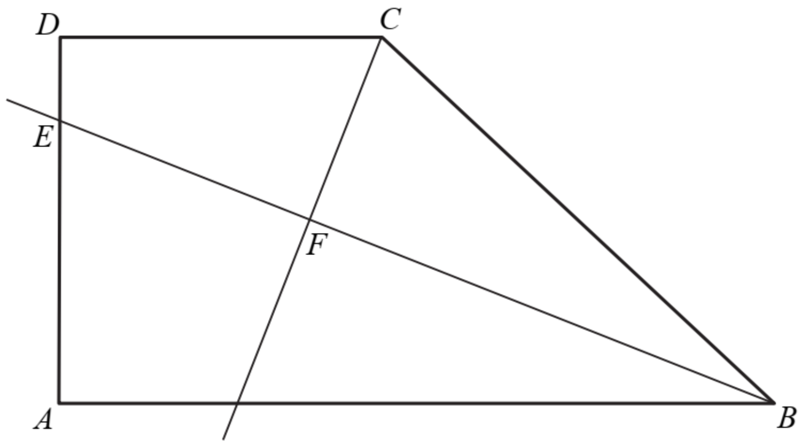
Dany jest okrąg o średnicy AB i środku S oraz dwa okręgi o średnicach AS i BS. Okrąg o środku M i promieniu r ma z każdym z danych okręgów dokładnie jeden punkt wspólny (zobacz rysunek). Wykaż, że $r = \frac{1}{6}|AB|$.



64.p.10 Czerwiec 2016

Zadanie 29. (0–2)

Dany jest trapez prostokątny $ABCD$ o podstawach AB i CD oraz wysokości AD. Dwusieczna kąta ABC przecina ramię AD w punkcie E oraz dwusieczną kąta BCD w punkcie F (zobacz rysunek).

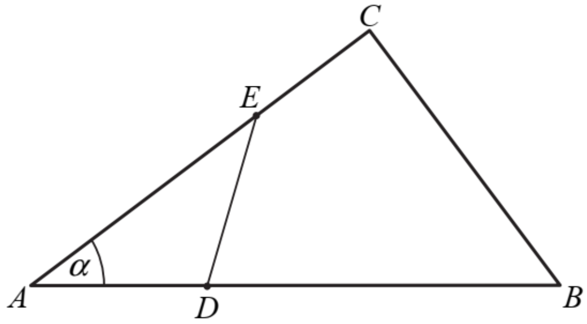


Wykaż, że w czworokącie $CDEF$ sumy miar przeciwległych kątów są sobie równe.

65.p.10 Czerwiec 2016

Zadanie 30. (0–4)

W trójkącie ABC dane są długości boków $|AB| = 15$ i $|AC| = 12$ oraz $\cos\alpha = \frac{4}{5}$, gdzie $\alpha = \sphericalangle BAC$. Na bokach AB i AC tego trójkąta obrano punkty odpowiednio D i E takie, że $|BD| = 2|AD|$ i $|AE| = 2|CE|$ (zobacz rysunek).



Oblicz pole

a) trójkąta ADE.

b) czworokąta $BCED$.

66.p.10 Sierpień 2016

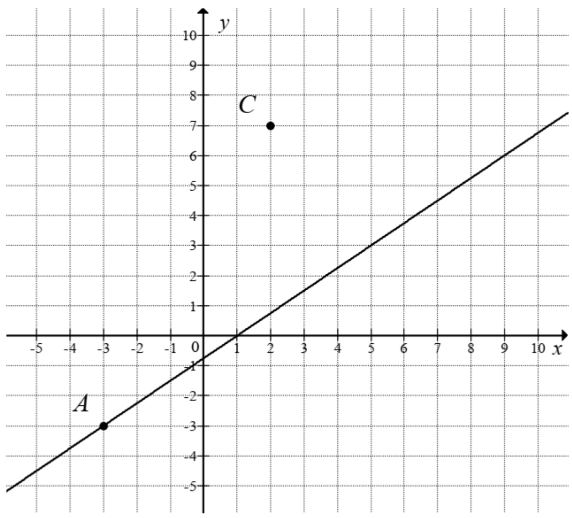
Zadanie 30. (0–2)

W trapezie $ABCD$ o podstawach AB i CD przekątne AC oraz BD przecinają się w punkcie S. Wykaż, że jeżeli $|AS| = \frac{5}{6}|AC|$, to pole trójkąta ABS jest 25 razy większe od pola trójkąta DCS.

67.p.10 Sierpień 2016

Zadanie 32. (0–4)

Na rysunku przedstawione są dwa wierzchołki trójkąta prostokątnego ABC: $A = (-3, -3)$ i $C = (2, 7)$ oraz prosta o równaniu $y = \frac{3}{4}x - \frac{3}{4}$, zawierająca przeciwprostokątną AB tego trójkąta.

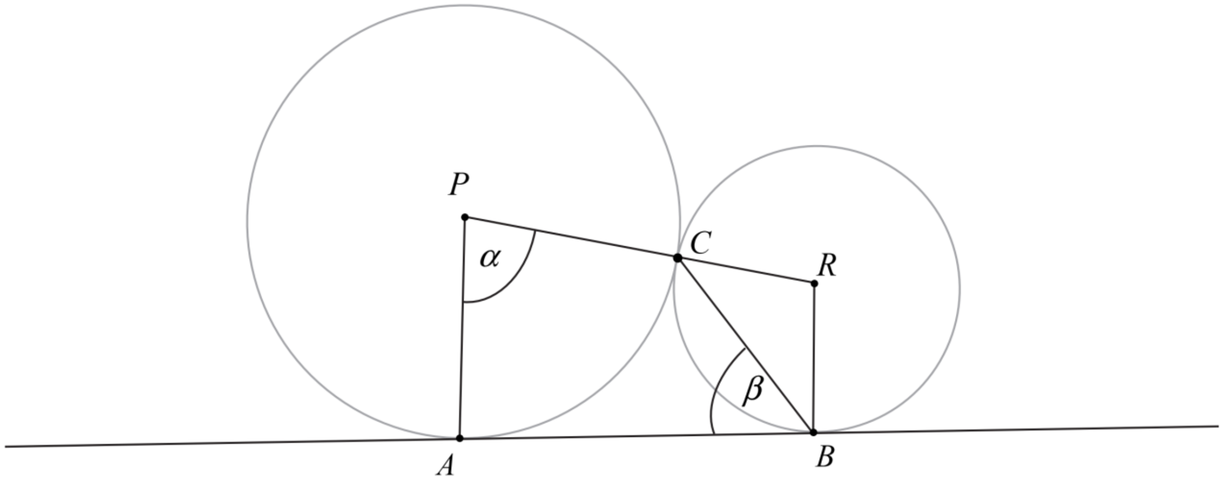


Oblicz współrzędne wierzchołka B tego trójkąta i długość odcinka AB.

68.p.10 Maj 2017

Zadanie 28. (0–2)

Dane są dwa okręgi o środkach w punktach P i R, styczne zewnętrznie w punkcie C. Prosta AB jest styczna do obu okręgów odpowiednio w punktach A i B oraz $|\sphericalangle APC| = \alpha$ i $|\sphericalangle ABC| = \beta$ (zobacz rysunek). Wykaż, że $\alpha = 180° - 2\beta$.



69.p.10 Maj 2017

Zadanie 30. (0–2)

Przeciwprostokątna trójkąta prostokątnego ma długość 26 cm, a jedna z przyprostokątnych jest o 14 cm dłuższa od drugiej. Oblicz obwód tego trójkąta.

70.p.10 Maj 2017 (analityczna)

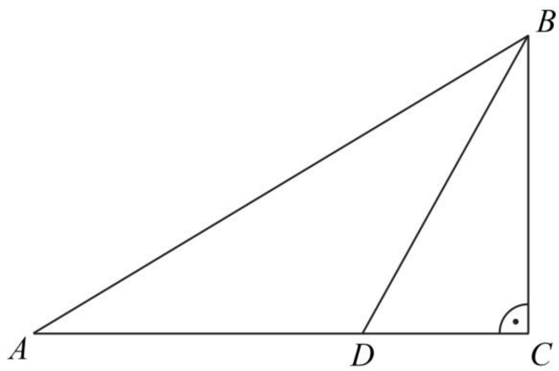
Zadanie 32. (0–5)

Dane są punkty $A = (-4, 0)$ i $M = (2, 9)$ oraz prosta k o równaniu $y = -2x + 10$. Wierzchołek B trójkąta ABC to punkt przecięcia prostej k z osią Ox układu współrzędnych, a wierzchołek C jest punktem przecięcia prostej k z prostą AM. Oblicz pole trójkąta ABC.

71.p.10 Czerwiec 2017

Zadanie 28. (0–2)

Dwusieczna kąta ostrego ABC przecina przyprostokątną AC trójkąta prostokątnego ABC w punkcie D.



Udowodnij, że jeżeli $|AD| = |BD|$, to $|CD| = \frac{1}{2} \cdot |BD|$.

72.p.10 Czerwiec 2017

Zadanie 32. (0–4)

Ramię trapezu równoramiennego $ABCD$ ma długość $\sqrt{26}$. Przekątne w tym trapezie są prostopadłe, a punkt ich przecięcia dzieli je w stosunku $2:3$. Oblicz pole tego trapezu.

73.p.10 Czerwiec 2017

Zadanie 33. (0–4)

Punkty $A=(-2,-8)$ i $B=(14,-8)$ są wierzchołkami trójkąta równoramiennego ABC, w którym $|AB|=|AC|$. Wysokość AD tego trójkąta jest zawarta w prostej o równaniu $y=\frac{1}{2}x-7$. Oblicz współrzędne wierzchołka C tego trójkąta.

74.p.10 Sierpień 2017

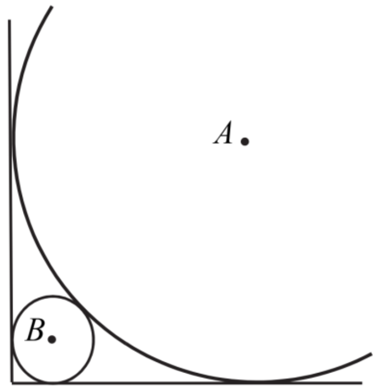
Zadanie 29. (0–2)

Dany jest trójkąt prostokątny ABC, w którym $|\sphericalangle ACB|=90^\circ$ i $|\sphericalangle ABC|=60^\circ$. Niech D oznacza punkt wspólny wysokości poprowadzonej z wierzchołka C kąta prostego i przeciwprostokątnej AB tego trójkąta. Wykaż, że $|AD|:|DB|=3:1$.

75.p.10 Maj 2018

Zadanie 29. (0–2)

Okręgi o środkach odpowiednio A i B są styczne zewnętrznie i każdy z nich jest styczny do obu ramion danego kąta prostego (zobacz rysunek). Promień okręgu o środku A jest równy 2.



Uzasadnij, że promień okręgu o środku B jest mniejszy od $\sqrt{2}-1$.

76.p.10 Maj 2018 (analityczna)

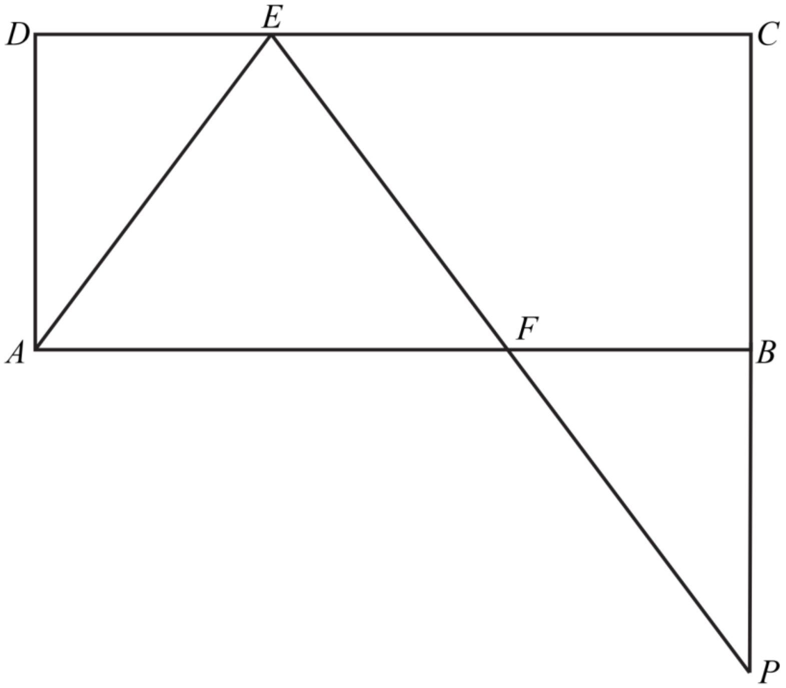
Zadanie 32. (0–5)

W układzie współrzędnych punkty $A=(4,3)$ i $B=(10,5)$ są wierzchołkami trójkąta ABC. Wierzchołek C leży na prostej o równaniu $y=2x+3$. Oblicz współrzędne punktu C, dla którego kąt ABC jest prosty.

77.p.10 Czerwiec 2018

Zadanie 29. (0–2)

Dany jest prostokąt $ABCD$. Na boku CD tego prostokąta wybrano taki punkt E, że $|EC| = 2|DE|$, a na boku AB wybrano taki punkt F, że $|BF| = |DE|$. Niech P oznacza punkt przecięcia prostej EF z prostą BC (zobacz rysunek). Wykaż, że trójkąty AED i FPB są przystające.



78.p.10 Czerwiec 2018

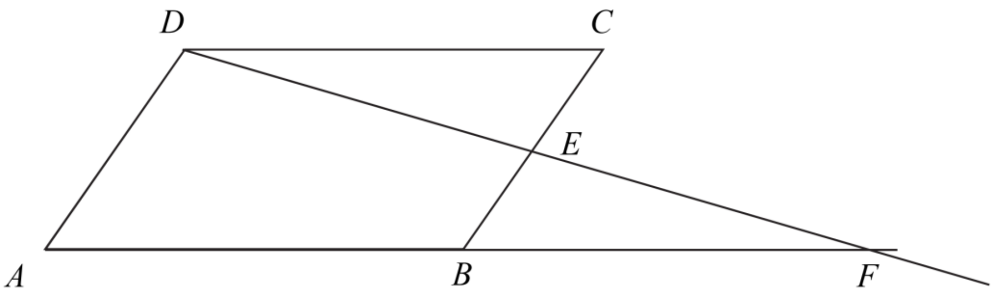
Zadanie 34. (0–4)

Punkty $A = (-1,1)$ i $C = (1,9)$ są wierzchołkami trójkąta równoramiennego ABC, w którym $|AC| = |BC|$. Podstawa AB tego trójkąta zawiera się w prostej o równaniu $y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$. Oblicz współrzędne wierzchołka B tego trójkąta.

79.p.10 Sierpień 2018

Zadanie 28. (0–2)

W równoległoboku $ABCD$ punkt E jest środkiem boku BC. Z wierzchołka D poprowadzono prostą przecinającą bok BC w punkcie E. Proste AB i DE przecinają się w punkcie F (zobacz rysunek). Wykaż, że punkt B jest środkiem odcinka AF.



80.p.10 Sierpień 2018 (analityczna)

Zadanie 31. (0–2)

Punkty $A=(2,4)$, $B=(0,0)$, $C=(4,-2)$ są wierzchołkami trójkąta ABC. Punkt D jest środkiem boku AC tego trójkąta. Wyznacz równanie prostej BD.

81.p.10 Sierpień 2018

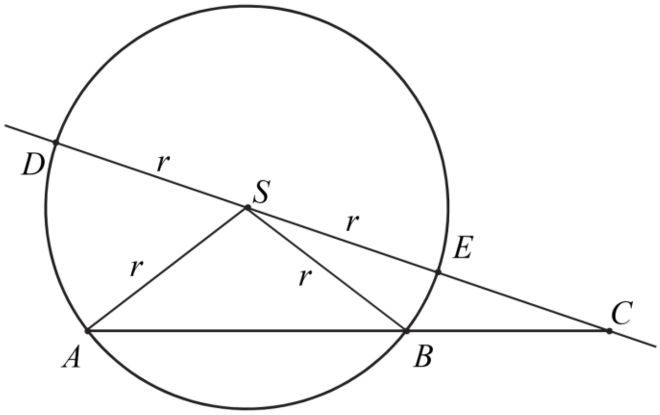
Zadanie 34. (0–4)

W trójkącie prostokątnym ACB przyprostokątna AC ma długość 5, a promień okręgu wpisanego w ten trójkąt jest równy 2. Oblicz pole trójkąta ACB.

82.p.10 Maj 2019

Zadanie 29. (0–2)

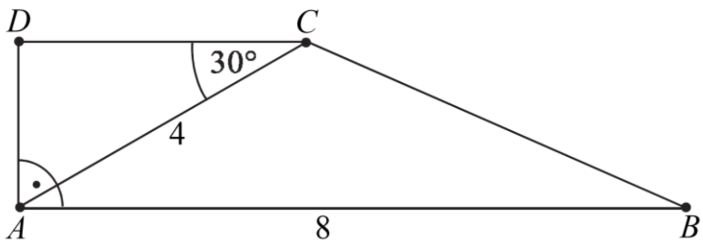
Dany jest okrąg o środku w punkcie S i promieniu r. Na przedłużeniu cięciwy AB poza punkt B odłożono odcinek BC równy promieniowi danego okręgu. Przez punkty C i S poprowadzono prostą. Prosta CS przecina dany okrąg w punktach D i E (zobacz rysunek). Wykaż, że jeżeli miara kąta ACS jest równa α, to miara kąta ASD jest równa 3α.



83.p.10 Maj 2019

Zadanie 31. (0–2)

W trapezie prostokątnym $ABCD$ dłuższa podstawa AB ma długość 8. Przekątna AC tego trapezu ma długość 4 i tworzy z krótszą podstawą trapezu kąt o mierze 30° (zobacz rysunek). Oblicz długość przekątnej BD tego trapezu.



84.p.10 Maj 2019 (analityczna)

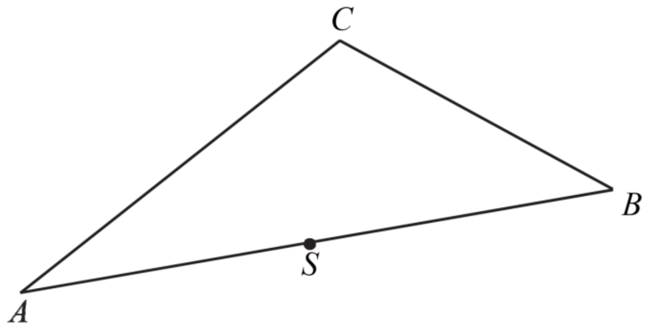
Zadanie 33. (0–4)

Dany jest punkt $A=(-18,10)$. Prosta o równaniu $y=3x$ jest symetralną odcinka AB. Wyznacz współrzędne punktu B.

85.p.10 Czerwiec 2019

Zadanie 28. (0–2)

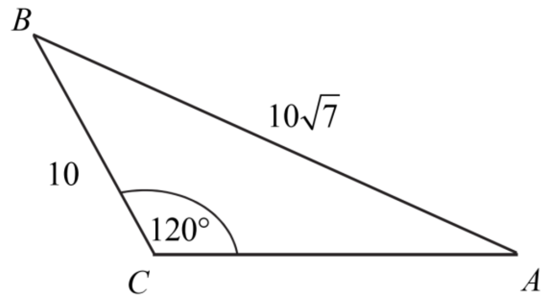
Dany jest trójkąt ABC. Punkt S jest środkiem boku AB tego trójkąta (zobacz rysunek). Wykaż, że odległości punktów A i B od prostej CS są równe.



86.p.10 Czerwiec 2019

Zadanie 34. (0–4)

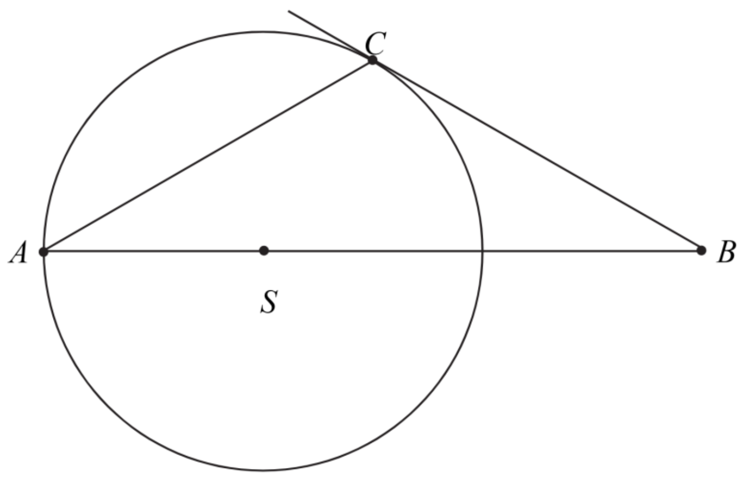
Dany jest trójkąt rozwartokątny ABC, w którym $\sphericalangle ACB$ ma miarę $120°$. Ponadto wiadomo, że $|BC| = 10$ i $|AB| = 10\sqrt{7}$ (zobacz rysunek). Oblicz długość trzeciego boku trójkąta ABC.



87.p.10 Sierpień 2019

Zadanie 29. (0–2)

Wierzchołki A i C trójkąta ABC leżą na okręgu o promieniu r, a środek S tego okręgu leży na boku AB trójkąta (zobacz rysunek). Prosta BC jest styczna do tego okręgu w punkcie C, a ponadto $|AC| = r\sqrt{3}$. Wykaż, że kąt ACB ma miarę $120°$.



88.p.10 Sierpień 2019 (analityczna)

Zadanie 31. (0–2)

Przekątne rombu $ABCD$ przecinają się w punkcie $S=\left(-\frac{21}{2},-1\right)$. Punkty A i C leżą na prostej o równaniu $y=\frac{1}{3}x+\frac{5}{2}$. Wyznacz równanie prostej BD.

89.p.10 Sierpień 2019

Zadanie 33. (0–4)

Środek okręgu leży w odległości 10 cm od cięciwy tego okręgu. Długość tej cięciwy jest o 22 cm większa od promienia tego okręgu. Oblicz promień tego okręgu.

90.p.10 Kwiecień 2020 (próbna)

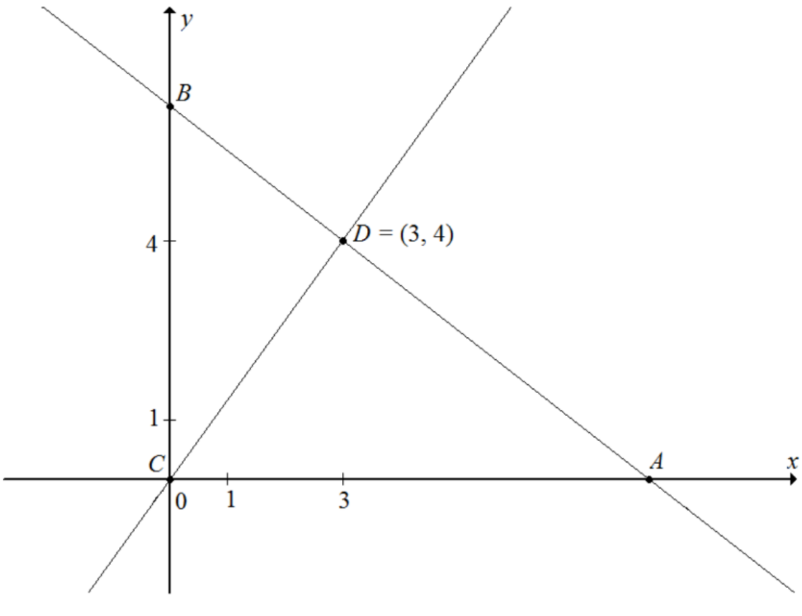
Zadanie 29. (0–2)

Dany jest trójkąt prostokątny ABC, w którym $|\sphericalangle ACB|=90^\circ$ i $|\sphericalangle ABC|=60^\circ$. Niech D oznacza punkt wspólny wysokości poprowadzonej z wierzchołka C kąta prostego i przeciwprostokątnej AB tego trójkąta. Wykaż, że $|AD|:|DB|=3:1$.

91.p.10 Kwiecień 2020 (próbna)

Zadanie 33. (0–4)

Punkt $C=(0,0)$ jest wierzchołkiem trójkąta prostokątnego ABC, którego wierzchołek A leży na osi Ox, a wierzchołek B na osi Oy układu współrzędnych. Prosta zawierająca wysokość tego trójkąta opuszczoną z wierzchołka C przecina przeciwprostokątną AB w punkcie $D=(3,4)$.

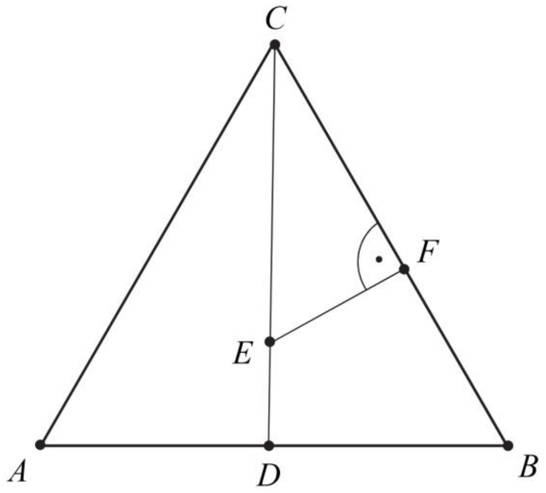


Oblicz współrzędne wierzchołków A i B tego trójkąta oraz długość przeciwprostokątnej AB.

92.p.10 Maj 2020

Zadanie 29. (0–2)

Trójkąt ABC jest równoboczny. Punkt E leży na wysokości CD tego trójkąta oraz $|CE| = \frac{3}{4}|CD|$. Punkt F leży na boku BC i odcinek EF jest prostopadły do BC (zobacz rysunek).



Wykaż, że $|CF| = \frac{9}{16}|CB|$.

93.p.10 Maj 2020

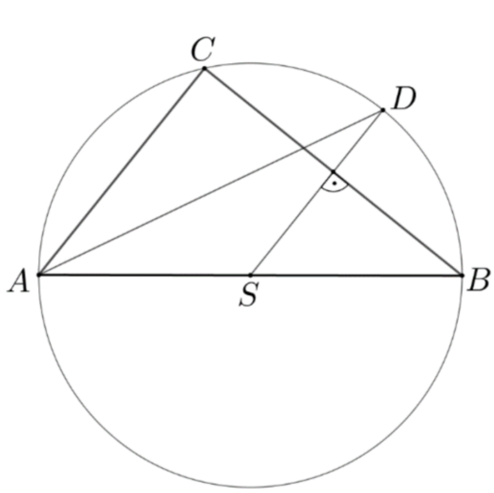
Zadanie 32. (0–4)

Dany jest kwadrat $ABCD$, w którym $A = \left(5, -\frac{5}{3}\right)$. Przekątna BD tego kwadratu jest zawarta w prostej o równaniu $y = \frac{4}{3}x$. Oblicz współrzędne punktu przecięcia przekątnych AC i BD oraz pole kwadratu $ABCD$.

94.p.10 Lipiec 2020

Zadanie 29. (0–2)

Bok AB jest średnicą, a punkt S jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie ABC. Punkt D leży na tym okręgu, a odcinek SD zawarty jest w symetralnej boku BC trójkąta (zobacz rysunek).



Wykaż, że odcinek AD jest zawarty w dwusiecznej kąta CAB.

95.p.10 Lipiec 2020

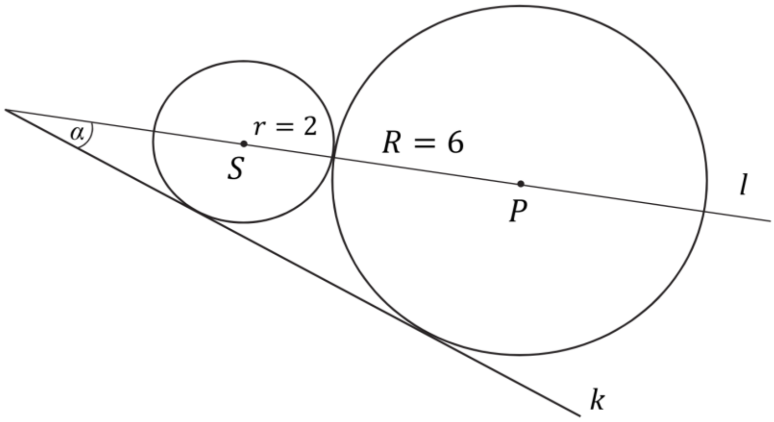
Zadanie 32. (0–4)

Punkty $A=(1,-1)$, $B=(6,1)$, $C=(7,5)$ i $D=(2,4)$ są wierzchołkami czworokąta $ABCD$. Oblicz współrzędne punktu przecięcia przekątnych tego czworokąta.

96.p.10 Wrzesień 2020

Zadanie 29. (0–2)

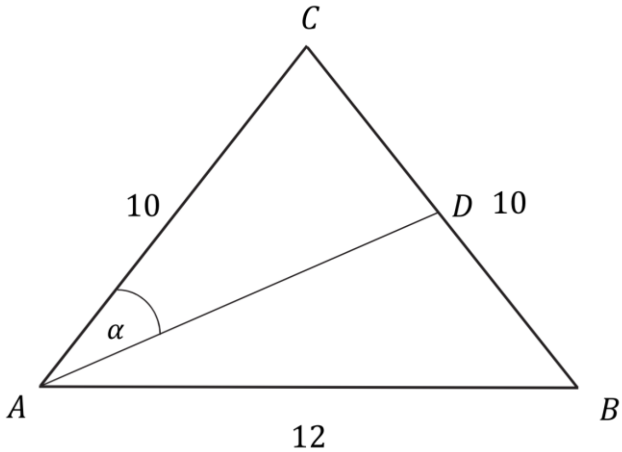
Dwa okręgi o promieniach $r=2$ i $R=6$ są styczne zewnętrznie i są styczne do wspólnej prostej k. Wykaż, że prosta l przechodząca przez środki S i P tych okręgów przecina prostą k pod kątem $\alpha=30°$ (zobacz rysunek).



97.p.10 Wrzesień 2020

Zadanie 32. (0–4)

Dany jest trójkąt równoramienny ABC, w którym podstawa AB ma długość 12, a każde z ramion AC i BC ma długość równą 10. Punkt D jest środkiem ramienia BC (zobacz rysunek).



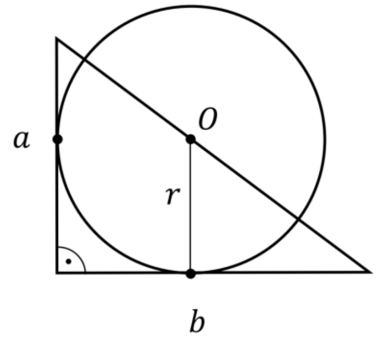
Oblicz sinus kąta α, jaki środkowa AD tworzy z ramieniem AC trójkąta ABC.

98.p.10 Marzec 2021

Zadanie 31. (0–2)

Dany jest trójkąt prostokątny, którego przyprostokątne mają długości a i b. Punkt O leży na przeciwprostokątnej tego trójkąta i jest środkiem okręgu stycznego do przyprostokątnych tego trójkąta (zobacz rysunek).

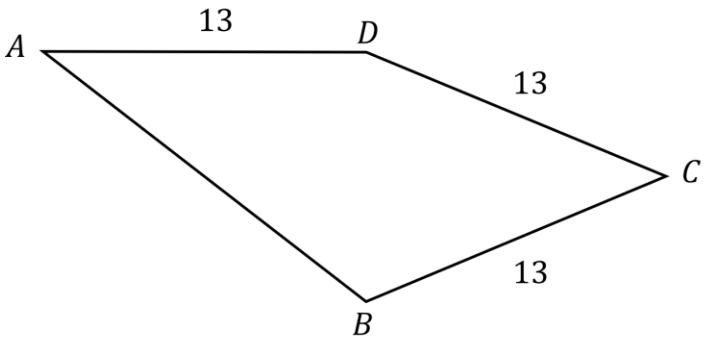
Wykaż, że promień r tego okręgu jest równy $\frac{ab}{a+b}$.



99.p.10 Marzec 2021

Zadanie 33. (0–2)

Dany jest czworokąt $ABCD$, w którym $|BC| = |CD| = |AD| = 13$ (zobacz rysunek). Przekątna BD tego czworokąta ma długość 10 i jest prostopadła do boku AD. Oblicz pole czworokąta $ABCD$.



100.p.10 Maj 2021

Zadanie 33. (0–2)

Trójkąt równoboczny ABC ma pole równe $9\sqrt{3}$. Prosta równoległa do boku BC przecina boki AB i AC – odpowiednio – w punktach K i L. Trójkąty ABC i AKL są podobne, a stosunek długości boków tych trójkątów jest równy $\frac{3}{2}$. Oblicz długość boku trójkąta AKL.

101.p.10 Maj 2021

Zadanie 35. (0–5)

Punkty $A = (-20, 12)$ i $B = (7, 3)$ są wierzchołkami trójkąta równoramiennego ABC, w którym $|AC| = |BC|$. Wierzchołek C leży na osi Oy układu współrzędnych. Oblicz współrzędne wierzchołka C oraz obwód tego trójkąta.

102.p.10 Czerwiec 2021

Zadanie 32. (0–2)

Dany jest trapez o podstawach długości a oraz b i wysokości h. Każdą z podstaw tego trapezu wydłużono o 25%, a wysokość skrócono tak, że powstał nowy trapez o takim samym polu. Oblicz, o ile procent skrócono wysokość h trapezu.

103.p.10 Czerwiec 2021

Zadanie 33. (0–2)

W trójkącie ABC boki BC i AC są równej długości. Prosta k jest prostopadła do podstawy AB tego trójkąta i przecina boki AB oraz BC w punktach – odpowiednio – D i E. Pole czworokąta $ADEC$ jest 17 razy większe od pola trójkąta BED. Oblicz $\frac{|CE|}{|EB|}$.

104.p.10 Czerwiec 2021

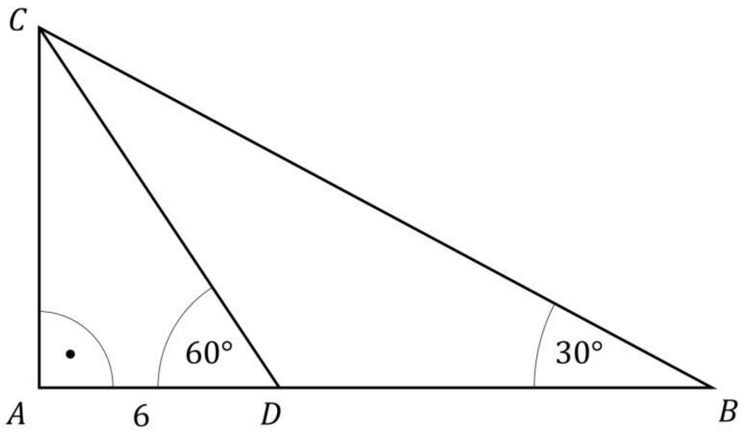
Zadanie 35. (0–5)

Podstawa AB trójkąta równoramiennego ABC jest zawarta w prostej o równaniu $y = -2x + 16$. Wierzchołki B i C mają współrzędne $B = (3, 10)$ i $C = (-2, 3)$. Oblicz współrzędne wierzchołka A i pole trójkąta ABC.

105.p.10 Sierpień 2021

Zadanie 32. (0–2)

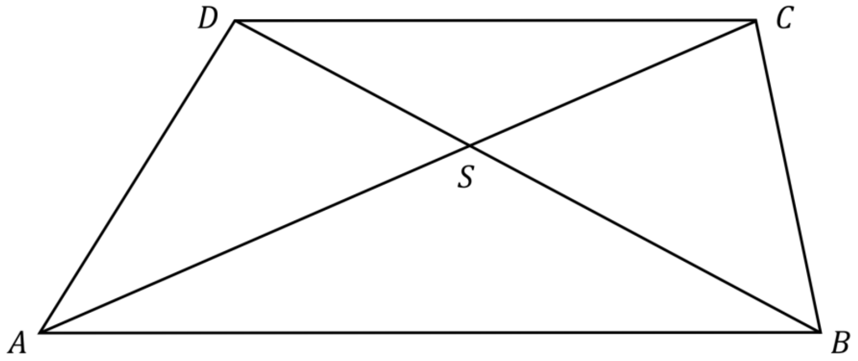
W trójkącie ABC kąt przy wierzchołku A jest prosty, a kąt przy wierzchołku B ma miarę $30°$. Na boku AB tego trójkąta obrano punkt D tak, że miara kąta CDA jest równa $60°$ oraz $|AD| = 6$ (zobacz rysunek). Oblicz $|BD|$.



106.p.10 Sierpień 2021

Zadanie 33. (0–2)

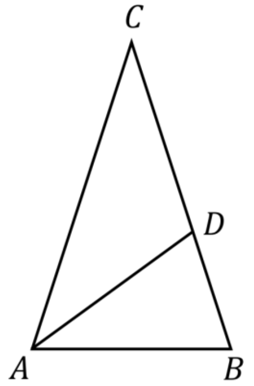
Dany jest trapez $ABCD$ o podstawach AB i CD. Przekątne AC i BD tego trapezu przecinają się w punkcie S (zobacz rysunek) tak, że $\frac{|AS|}{|SC|} = \frac{3}{2}$. Pole trójkąta ABS jest równe 12. Oblicz pole trójkąta CDS.



107.p.10 Maj 2022

Zadanie 33. (0–2)

Dany jest trójkąt równoramienny ABC, w którym $|AC| = |BC|$. Dwusieczna kąta BAC przecina bok BC w takim punkcie D, że trójkąty ABC i BDA są podobne (zobacz rysunek). Oblicz miarę kąta BAC.



108.p.10 M
109.p.10 Koniec

Poziom rozszerzony

1.r.10 Maj 2002

Zadanie 13. ***(5 pkt)***

Sprawdź, że przekształcenie P płaszczyzny dane wzorem $P((x, y)) = (x+1, -y)$ jest izometrią. Wyznacz równanie obrazu okręgu o równaniu $x^2 + y^2 - 2x = 0$ w przekształceniu P.

2.r.10 Maj 2002

Zadanie 19. *(10 pkt)*

W trójkącie jeden z kątów ma miarę $120°$. Długości boków tego trójkąta są kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego, którego suma wynosi 30. Wyznacz stosunek długości promienia okręgu opisanego na tym trójkącie do długości promienia okręgu wpisanego w ten trójkąt.

3.r.10 Styczeń 2003

Zadanie 17. *(5 pkt)*

W układzie współrzędnych są dane punkty: $A(-9,-2)$ oraz $B(4,2)$. Wyznacz współrzędne punktu C, leżącego na osi OY, tak że kąt ACB jest kątem prostym.

4.r.10 Styczeń 2003

Zadanie 19. *(5 pkt)*

Trapez równoramienny, o obwodzie równym 20 cm, jest opisany na okręgu. Wiedząc, że przekątna trapezu ma długość $\sqrt{41}$ cm, oblicz pole tego trapezu.

5.r.10 Maj 2003

Zadanie 14. *(4 pkt)*

Odcinek $\overline{CD}$ jest obrazem odcinka $\overline{AB}$ w jednokładności o skali $k<0$. Wiedząc, że $A(-2,0)$, $B(0,-2)$, $C(3,4)$, $D(7,0)$ wyznacz:

a) równanie prostej przechodzącej przez punkt A i jego obraz w tej jednokładności,
b) równanie prostej przechodzącej przez punkt B i jego obraz w tej jednokładności,
c) współrzędne środka tej jednokładności.

6.r.10 Grudzień 2004

Zadanie 14. (*3 pkt*)

Wykaż, że jeśli $a \neq b$, to równanie: $x^2+y^2+ax+by+\frac{a \cdot b}{2}=0$ jest równaniem okręgu.

Wyznacz współrzędne środka i długość promienia tego okręgu.

7.r.10 Grudzień 2004

Zadanie 16. (*5 pkt*)

W prostokątnym układzie współrzędnych naszkicuj figurę F, gdzie:

$$F=\{(x;y): x \in R \wedge y \in R \wedge 3|x|+|y| \leq 2\}.$$

Oblicz pole figury F.

8.r.10 Grudzień 2004

Zadanie 17. (5 *pkt*)

Odcinki o długościach: $2\sqrt{3}$, $3-\sqrt{3}$, $3\sqrt{2}$ są bokami trójkąta.

a) Wyznacz miarę największego kąta tego trójkąta i oblicz długość wysokości poprowadzonej z wierzchołka tego kąta.
b) Oblicz długość promienia okręgu opisanego na tym trójkącie.

9.r.10 Styczeń 2005

Zadanie 12. (4 pkt.)

W trójkącie *ABC*, o kącie rozwartym przy wierzchołku *C* dane są długości boków $|AC| = 5cm$ i $|BC| = 12cm$. Oblicz długość boku *AB* wiedząc, że pole trójkąta jest równe $24cm^2$.

10.r.10 Styczeń 2005

Zadanie 17. (5 pkt.)

Okrąg o_1 określony jest równaniem: $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 9 = 0$.

a) Napisz równanie okręgu o_2 współśrodkowego z okręgiem o_1, przechodzącego przez punkt A = (6;0).

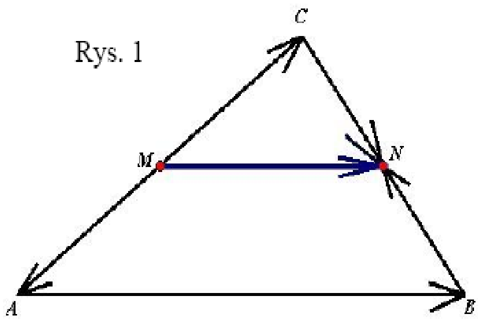
b) Oblicz pole pierścienia kołowego ograniczonego okręgami o_1 *i* o_2.

11.r.10 Maj 2005

Zadanie 15. (*4 pkt*)

W dowolnym trójkącie *ABC* punkty *M* i *N* są odpowiednio środkami boków *AC* i *BC* (Rys. 1).

Rys. 1



Zapoznaj się uważnie z następującym rozumowaniem:

Korzystając z własności wektorów i działań na wektorach, zapisujemy równości:

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN} \qquad (1)$$

oraz

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CN} \qquad (2)$$

Po dodaniu równości (1) i (2) stronami otrzymujemy:

$$2 \cdot \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{CN}$$

Ponieważ $\overrightarrow{MC} = -\overrightarrow{MA}$ oraz $\overrightarrow{CN} = -\overrightarrow{BN}$, więc:

$$2 \cdot \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN} - \overrightarrow{BN}$$

$$2 \cdot \overrightarrow{MN} = \vec{0} + \overrightarrow{AB} + \vec{0}$$

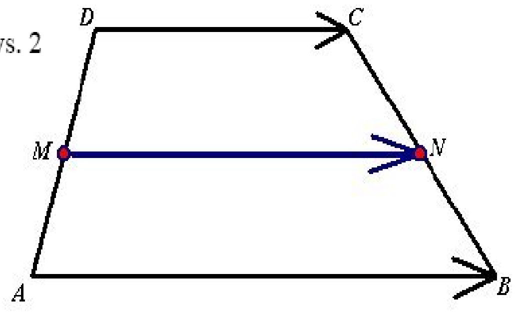
$$\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AB}.$$

Wykorzystując własności iloczynu wektora przez liczbę, ostatnią równość można zinterpretować następująco:

odcinek łączący środki dwóch boków dowolnego trójkąta jest równoległy do trzeciego boku tego trójkąta, zaś jego długość jest równa połowie długości tego boku.

Przeprowadzając analogiczne rozumowanie, ustal związek pomiędzy wektorem $\overrightarrow{MN}$ oraz wektorami $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{DC}$, wiedząc, że czworokąt *ABCD* jest dowolnym trapezem, zaś punkty *M* i *N* są odpowiednio środkami ramion *AD* i *BC* tego trapezu (Rys. 2).

Rys. 2



Podaj interpretację otrzymanego wyniku.

12.r.10 Maj 2005

Zadanie 18. (*8 pkt*)

Pary liczb (x, y) spełniające układ równań:

$$\begin{cases} -4x^2 + y^2 + 2y + 1 = 0 \\ -x^2 + y + 4 = 0 \end{cases}$$

są współrzędnymi wierzchołków czworokąta wypukłego *ABCD*.

a) Wyznacz współrzędne punktów: *A*, *B*, *C*, *D*.
b) Wykaż, że czworokąt *ABCD* jest trapezem równoramiennym.
c) Wyznacz równanie okręgu opisanego na czworokącie *ABCD*.

13.r.10 Grudzień 2005

Zadanie 17. (*4 pkt*)

W trójkącie prostokątnym ABC ($\sphericalangle BCA = 90^\circ$) dane są długości przyprostokątnych: $|BC| = a$ i $|CA| = b$. Dwusieczna kąta prostego tego trójkąta przecina przeciwprostokątną AB w punkcie D. Wykaż, że długość odcinka CD jest równa $\frac{a \cdot b}{a+b} \cdot \sqrt{2}$. Sporządź pomocniczy rysunek uwzględniając podane oznaczenia.

14.r.10 Styczeń 2006

Zadanie 12. (*4 pkt*)

Rozwiąż układ równań

$$\begin{cases} |x| - y = 1 \\ x^2 + (y+1)^2 = 8 \end{cases}$$

15.r.10 Styczeń 2006

Zadanie 18. (*8 pkt*)

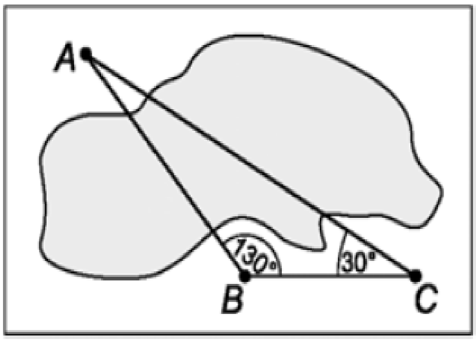
Punkty $A = (7,8)$ i $B = (-1,2)$ są wierzchołkami trójkąta *ABC*, w którym $|\sphericalangle BCA| = 90^0$.

a) Wyznacz współrzędne wierzchołka *C*, wiedząc, że leży on na osi *OX*.
b) Napisz równanie obrazu okręgu opisanego na trójkącie ABC w jednokładności o środku w punkcie $P = (1,0)$ i skali $k = -2$.

16.r.10 Maj 2006

Zadanie 16. (*3 pkt*)

Obiekty A i B leżą po dwóch stronach jeziora. W terenie dokonano pomiarów odpowiednich kątów i ich wyniki przedstawiono na rysunku. Odległość między obiektami B i C jest równa 400 m. Oblicz odległość w linii prostej między obiektami A i B i podaj wynik, zaokrąglając go do jednego metra.



17.r.10 Maj 2006

Zadanie 17. (*6 pkt*)

Na okręgu o promieniu r opisano trapez równoramienny $ABCD$ o dłuższej podstawie AB i krótszej CD. Punkt styczności S dzieli ramię BC tak, że $\frac{|CS|}{|SB|}=\frac{2}{5}$.

a) Wyznacz długość ramienia tego trapezu.

b) Oblicz cosinus $|\sphericalangle CBD|$.

18.r.10 Listopad 2006

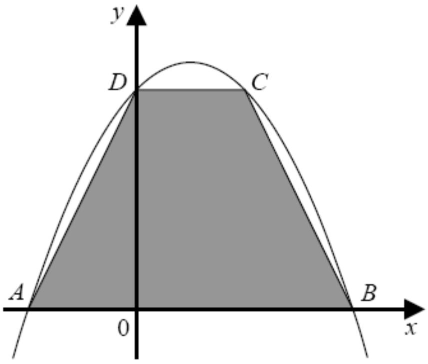
Zadanie 4. (*7 pkt*)

Trójkąt prostokątny ABC, w którym $|\sphericalangle BCA|=90^\circ$ i $|\sphericalangle CAB|=30^\circ$, jest opisany na okręgu o promieniu $\sqrt{3}$. Oblicz odległość wierzchołka C trójkąta od punktu styczności tego okręgu z przeciwprostokątną. Wykonaj odpowiedni rysunek.

19.r.10 Listopad 2006 (próbna do maja 2007)

Zadanie 6. (*4 pkt*)

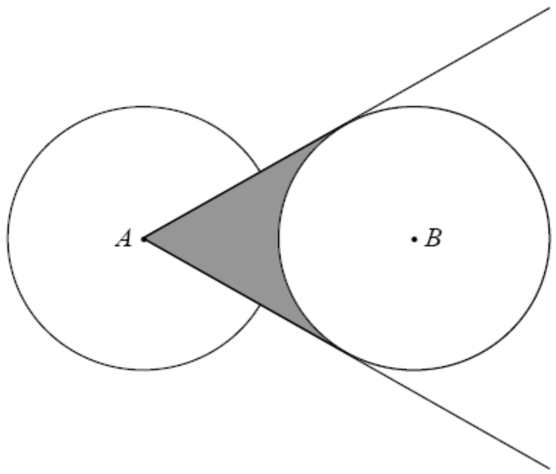
Podstawa AB trapezu $ABCD$ jest zawarta w osi Ox, wierzchołek D jest punktem przecięcia paraboli o równaniu $y=-\frac{1}{3}x^2+x+6$ z osią Oy. Pozostałe wierzchołki trapezu również leżą na tej paraboli (patrz rysunek). Oblicz pole tego trapezu.



20.r.10 Listopad 2006 (próbna do maja 2007)

Zadanie 12. *(4 pkt)*

Dwa okręgi, każdy o promieniu 8, są styczne zewnętrznie. Ze środka jednego z nich poprowadzono styczne do drugiego okręgu. Oblicz pole zacieniowanej figury (patrz rysunek).



21.r.10 Maj 2007

Zadanie 5. (*7 pkt*)

Wierzchołki trójkąta równobocznego ABC są punktami paraboli $y=-x^2+6x$. Punkt C jest jej wierzchołkiem, a bok AB jest równoległy do osi Ox. Sporządź rysunek w układzie współrzędnych i wyznacz współrzędne wierzchołków tego trójkąta.

22.r.10 Maj 2007

Zadanie 10. (*4 pkt*)

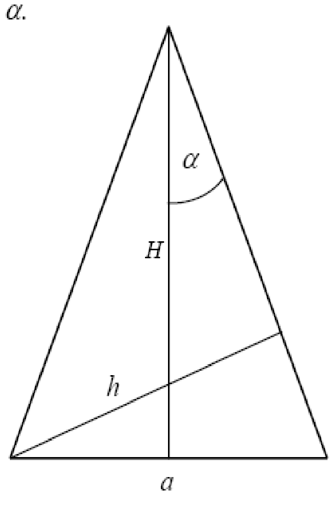
Na kole opisany jest romb. Stosunek pola koła do pola rombu wynosi $\frac{\pi\sqrt{3}}{8}$. Wyznacz miarę kąta ostrego rombu.

23.r.10 Marzec 2008

Zadanie 4. *(6 pkt)*

W trójkącie równoramiennym (patrz rysunek) długość podstawy wynosi a, zaś wysokości opuszczone odpowiednio na podstawę i ramię są równe H i h. Kąt między ramieniem trójkąta i wysokością opuszczoną na podstawę ma miarę α.

a) Wyraź $\operatorname{tg}\alpha$ w zależności od wielkości a i H.
b) Wyraź $\cos\alpha$ w zależności od wielkości a i h.
c) Wykaż, że jeśli $a^2 = H\cdot h$, to $\sin\alpha = \sqrt{2}-1$.



24.r.10 Maj 2008

Zadanie 8. *(4 pkt)*

Wyznacz współrzędne środka jednokładności, w której obrazem okręgu o równaniu $(x-16)^2+y^2=4$ jest okrąg o równaniu $(x-6)^2+(y-4)^2=16$, a skala tej jednokładności jest liczbą ujemną.

25.r.10 Maj 2008

Zadanie 12. *(4 pkt)*

W trójkącie prostokątnym ABC przyprostokątne mają długości: $|BC|=9$, $|CA|=12$. Na boku AB wybrano punkt D tak, że odcinki BC i CD mają równe długości. Oblicz długość odcinka AD.

26.r.10 Styczeń 2009

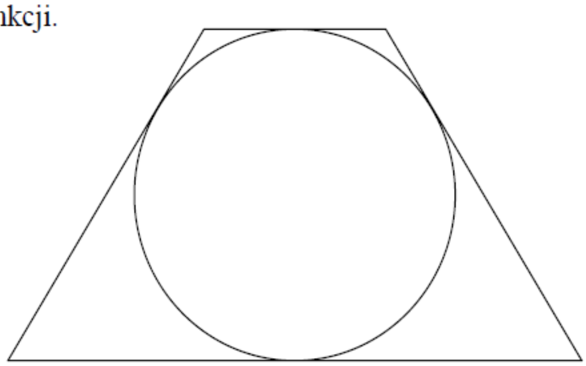
Zadanie 3. (*5 pkt*)

Jeden z końców odcinka leży na paraboli o równaniu $y=x^2$, a drugi na prostej o równaniu $y=2x-6$. Wykaż, że długość tego odcinka jest nie mniejsza od $\sqrt{5}$. Sporządź odpowiedni rysunek.

27.r.10 Styczeń 2009

Zadanie 8. (*6 pkt*)

Trapez równoramienny jest opisany na okręgu. Suma długości krótszej podstawy i ramienia trapezu jest równa 30. Wyraź pole tego trapezu jako funkcję długości jego ramienia. Wyznacz dziedzinę tej funkcji.



28.r.10 Styczeń 2009

Zadanie 9. (*7 pkt*)

Środek okręgu przechodzącego przez punkty $A=(1,\ 4)$ i $B=(-6,\ 3)$ leży na osi Ox.

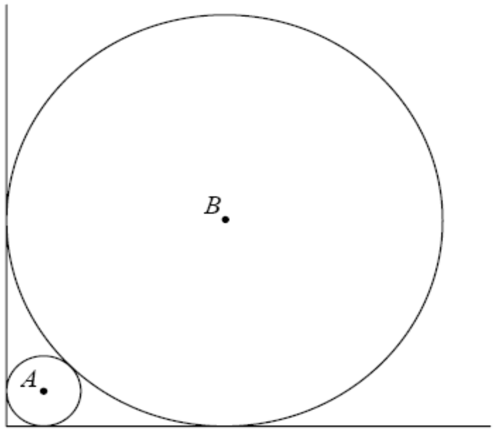
a) Wyznacz równanie tego okręgu.

b) Wyznacz równanie prostej prostopadłej do prostej AB i oddalonej od początku układu współrzędnych o $\sqrt{2}$.

29.r.10 Maj 2009

Zadanie 8. *(4 pkt)*

Dwa okręgi o środkach A i B są styczne zewnętrznie i każdy z nich jest jednocześnie styczny do ramion tego samego kąta prostego (patrz rysunek). Udowodnij, że stosunek promienia większego z tych okręgów do promienia mniejszego jest równy $3+2\sqrt{2}$.



30.r.10 Maj 2009

Zadanie 9. *(5 pkt)*

W układzie współrzędnych narysuj okrąg o równaniu $(x+2)^2+(y-3)^2=4$ oraz zaznacz punkt $A=(0,-1)$. Prosta o równaniu $x=0$ jest jedną ze stycznych do tego okręgu przechodzących przez punkt A. Wyznacz równanie drugiej stycznej do tego okręgu, przechodzącej przez punkt A.

31.r.10 Maj 2010

Zadanie 3. *(4 pkt)*

Bok kwadratu $ABCD$ ma długość 1. Na bokach BC i CD wybrano odpowiednio punkty E i F umieszczone tak, by $|CE|=2|DF|$. Oblicz wartość $x=|DF|$, dla której pole trójkąta AEF jest najmniejsze.

32.r.10 Maj 2010

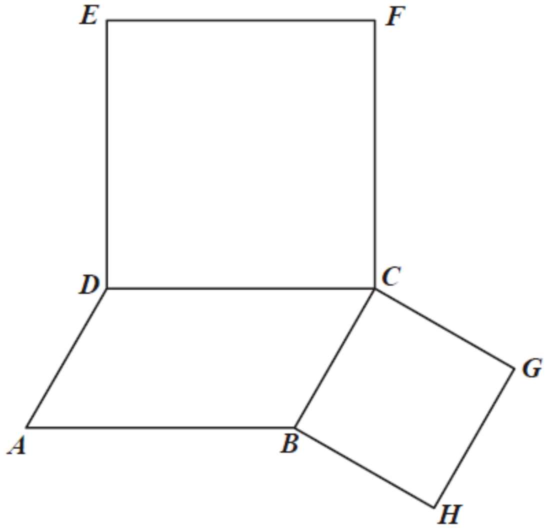
Zadanie 7. *(6 pkt)*

Punkt $A=(-2,5)$ jest jednym z wierzchołków trójkąta równoramiennego ABC, w którym $|AC|=|BC|$. Pole tego trójkąta jest równe 15. Bok BC jest zawarty w prostej o równaniu $y=x+1$. Oblicz współrzędne wierzchołka C.

33.r.10 Maj 2010

Zadanie 9. ***(4 pkt)***

Na bokach BC i CD równoległoboku $ABCD$ zbudowano kwadraty $CDEF$ i $BCGH$ (zobacz rysunek). Udowodnij, że $|AC| = |FG|$.



34.r.10 Maj 2012

Zadanie 9. ***(5 pkt)***

Dany jest prostokąt $ABCD$, w którym $|AB| = a$, $|BC| = b$ i $a > b$. Odcinek AE jest wysokością trójkąta DAB opuszczoną na jego bok BD. Wyraź pole trójkąta AED za pomocą a i b.

35.r.10 Czerwiec 2012

Zadanie 7. ***(4 pkt)***

Okrąg jest styczny do osi układu współrzędnych w punktach $A = (0, 2)$ i $B = (2, 0)$ oraz jest styczny do prostej l w punkcie $C = (1, a)$, gdzie $a > 1$. Wyznacz równanie prostej l.

36.r.10 Czerwiec 2012

Zadanie 8. ***(5 pkt)***

W czworokącie $ABCD$ dane są długości boków: $|AB| = 24$, $|CD| = 15$, $|AD| = 7$. Ponadto kąty DAB oraz BCD są proste. Oblicz pole tego czworokąta oraz długości jego przekątnych.

37.r.10 Maj 2013

Zadanie 2. ***(4 pkt)***

Trapez równoramienny $ABCD$ o podstawach AB i CD jest opisany na okręgu o promieniu r. Wykaż, że $4r^2 = |AB| \cdot |CD|$.

38.r.10 Maj 2013

Zadanie 7. ***(4 pkt)***

Prosta o równaniu $3x - 4y - 36 = 0$ przecina okrąg o środku $S = (3, 12)$ w punktach A i B. Długość odcinka AB jest równa 40. Wyznacz równanie tego okręgu.

39.r.10 Maj 2013

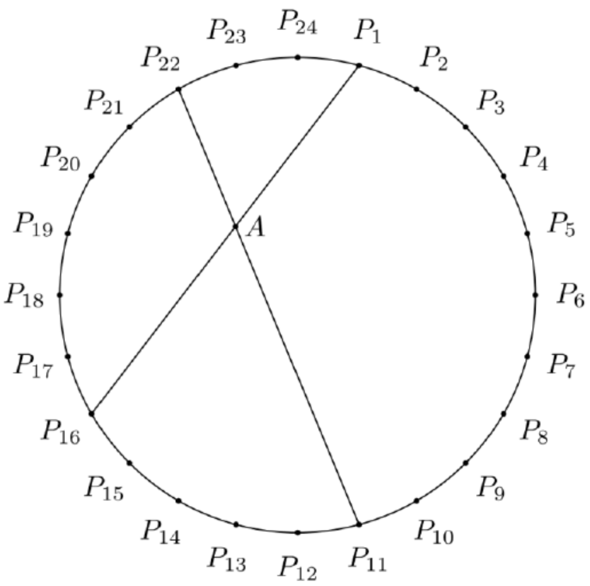
Zadanie 9. ***(5 pkt)***

Dany jest trójkąt ABC, w którym $|AC| = 17$ i $|BC| = 10$. Na boku AB leży punkt D taki, że $|AD| : |DB| = 3 : 4$ oraz $|DC| = 10$. Oblicz pole trójkąta ABC.

40.r.10 Grudzień 2013

Zadanie 10. (0–3)

Punkty $P_1, P_2, P_3, \ldots, P_{23}, P_{24}$ dzielą okrąg na 24 równe łuki (zobacz rysunek). Punkt A jest punktem przecięcia cięciw $P_{11}P_{22}$ i P_1P_{16}.



Udowodnij, że $|\sphericalangle P_{16}AP_{11}| = 60^\circ$.

41.r.10 Grudzień 2013

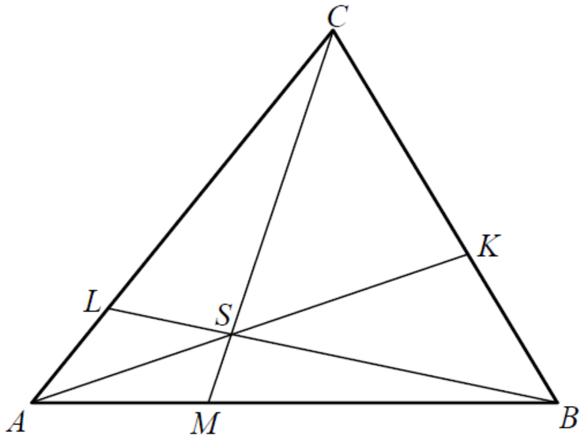
Zadanie 13. (0–3)

Wyznacz wszystkie wartości parametru m, dla których prosta o równaniu $y = mx + (2m + 3)$ ma dokładnie dwa punkty wspólne z okręgiem o środku w punkcie $S = (0,0)$ i promieniu $r = 3$.

42.r.10 Grudzień 2013

Zadanie 16. (0–6)

Punkty M i L leżą odpowiednio na bokach AB i AC trójkąta ABC, przy czym zachodzą równości $|MB| = 2 \cdot |AM|$ oraz $|LC| = 3 \cdot |AL|$. Punkt S jest punktem przecięcia odcinków BL i CM. Punkt K jest punktem przecięcia półprostej AS z odcinkiem BC (zobacz rysunek).



Pole trójkąta ABC jest równe 660. Oblicz pola trójkątów: AMS, ALS, BMS i CLS.

43.r.10 Maj 2014

Zadanie 5. ***(5 pkt)***

Dane są trzy okręgi o środkach A, B, C i promieniach równych odpowiednio r, $2r$, $3r$. Każde dwa z tych okręgów są zewnętrznie styczne: pierwszy z drugim w punkcie K, drugi z trzecim w punkcie L i trzeci z pierwszym w punkcie M. Oblicz stosunek pola trójkąta KLM do pola trójkąta ABC.

44.r.10 Maj 2014

Zadanie 6. ***(3 pkt)***

Trójkąt ABC jest wpisany w okrąg o środku S. Kąty wewnętrzne CAB, ABC i BCA tego trójkąta są równe, odpowiednio, α, 2α i 4α. Wykaż, że trójkąt ABC jest rozwartokątny, i udowodnij, że miary wypukłych kątów środkowych ASB, ASC i BSC tworzą w podanej kolejności ciąg arytmetyczny.

45.r.10 Maj 2014

Zadanie 8. ***(4 pkt)***

Punkty A, B, C, D, E, F są kolejnymi wierzchołkami sześciokąta foremnego, przy czym $A = \left(0, 2\sqrt{3}\right)$, $B = (2, 0)$, a C leży na osi Ox. Wyznacz równanie stycznej do okręgu opisanego na tym sześciokącie przechodzącej przez wierzchołek E.

46.r.10 Grudzień 2014

Zadanie 15. (0–3)

Punkt E jest środkiem boku BC prostokąta $ABCD$, w którym $AB > BC$. Punkt F leży na boku CD tego prostokąta oraz $\sphericalangle AEF = 90^\circ$. Udowodnij, że $\sphericalangle BAE = \sphericalangle EAF$.

47.r.10 Grudzień 2014

Zadanie 17. (0–6)

Dany jest okrąg o_0 o równaniu $(x-3)^2+(y-1)^2=1$. W pierwszej „ćwiartce” układu współrzędnych istnieją dwa okręgi o_1, o_2 styczne zewnętrznie do okręgu o_0 i jednocześnie styczne do obu osi układu współrzędnych. Oblicz odległość środków okręgów o_1 oraz o_2.

48.r.10 Grudzień 2014

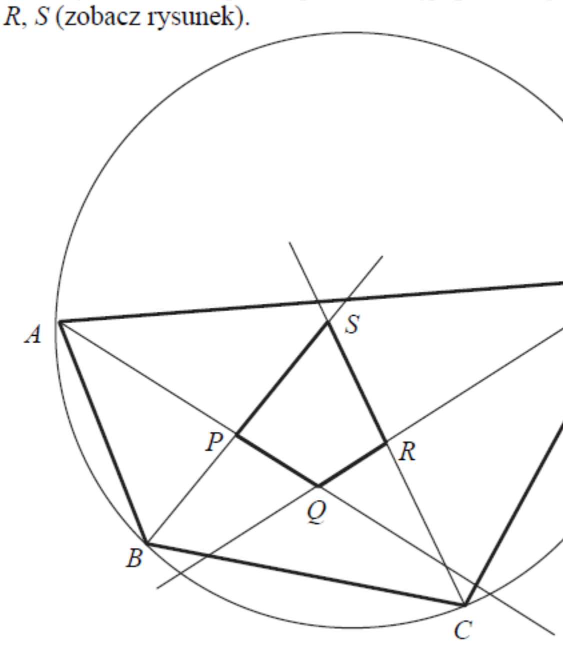
Zadanie 18. (0–7)

Okno na poddaszu ma mieć kształt trapezu równoramiennego, którego krótsza podstawa i ramiona mają długość po 4 dm. Oblicz, jaką długość powinna mieć dłuższa podstawa tego trapezu, aby do pomieszczenia wpadało przez to okno jak najwięcej światła, czyli aby pole powierzchni okna było największe. Oblicz to pole.

49.r.10 Maj 2015-nowa

Zadanie 9. (0–3)

Dwusieczne czworokąta $ABCD$ wpisanego w okrąg przecinają się w czterech różnych punktach: P, Q, R, S (zobacz rysunek).



Wykaż, że na czworokącie $PQRS$ można opisać okrąg.

50.r.10 Maj 2015-nowa

Zadanie 10. (0–4)

Długości boków czworokąta $ABCD$ są równe: $|AB|=2$, $|BC|=3$, $|CD|=4$, $|DA|=5$. Na czworokącie $ABCD$ opisano okrąg. Oblicz długość przekątnej AC tego czworokąta.

51.r.10 Maj 2015-stara

Zadanie 7. ***(4 pkt)***

O trapezie $ABCD$ wiadomo, że można w niego wpisać okrąg, a ponadto długości jego boków AB, BC, CD, AD – w podanej kolejności – tworzą ciąg geometryczny. Uzasadnij, że trapez $ABCD$ jest rombem.

52.r.10 Maj 2015-stara

Zadanie 8. ***(4 pkt)***

Na boku AB trójkąta równobocznego ABC wybrano punkt D taki, że $|AD| : |DB| = 2 : 3$. Oblicz tangens kąta ACD.

53.r.10 Maj 2015-stara

Zadanie 9. ***(5 pkt)***

Wyznacz równania prostych stycznych do okręgu o równaniu $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 3 = 0$ i zarazem prostopadłych do prostej $x + 2y - 6 = 0$.

54.r.10 Czerwiec 2015

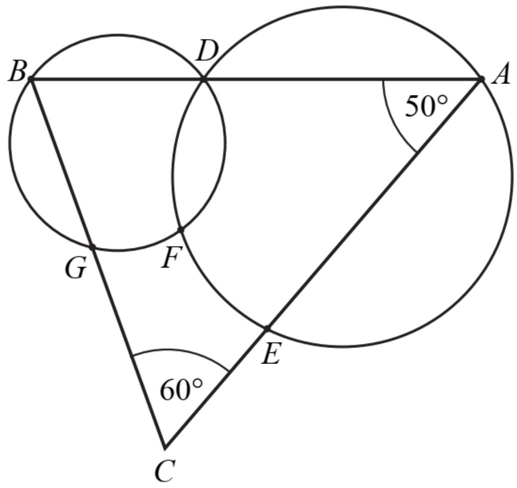
Zadanie 7. (0−2)

Prosta o równaniu $y = \frac{3}{4}x - \frac{61}{14}$ jest styczna od okręgu o środku $S = (1,-4)$. Wyznacz promień tego okręgu.

55.r.10 Czerwiec 2015

Zadanie 9. (0−3)

W trójkącie ABC kąt wewnętrzny przy wierzchołku A ma miarę $50°$, a kąt wewnętrzny przy wierzchołku C ma miarę $60°$. Okrąg o_1 przechodzi przez punkt A i przecina boki AB i AC trójkąta odpowiednio w punktach D i E. Okrąg o_2 przechodzi przez punkt B, przecina okrąg o_1 w punkcie D oraz w punkcie F leżącym wewnątrz trójkąta ABC. Ponadto okrąg o_2 przecina bok BC trójkąta w punkcie G.



Udowodnij, że na czworokącie $CEFG$ można opisać okrąg.

56.r.10 Czerwiec 2015

Zadanie 11. (0−4)

W trójkąt prostokątny o przyprostokątnych długości 15 i 20 wpisano okrąg. Oblicz długość odcinka łączącego wierzchołek kąta prostego tego trójkąta z punktem wspólnym okręgu i przeciwprostokątnej.

57.r.10 Czerwiec 2015

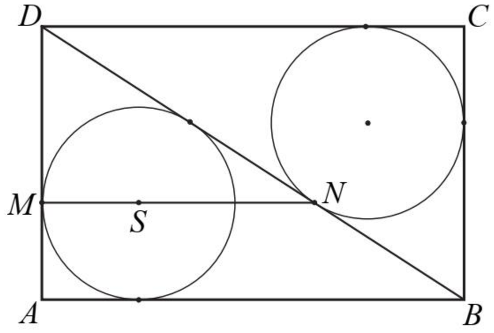
Zadanie 12. (0−4)

Dany jest trójkąt ABC, w którym $|BC| = a$. Z wierzchołka B poprowadzono środkową BD do boku AC. Punkt S jest środkiem odcinka BD. Przez punkty A i S poprowadzono prostą, która przecięła bok BC w punkcie P. Wykaż, że długość odcinka CP jest równa $\frac{2}{3}a$.

58.r.10 Maj 2016

Zadanie 9. (0–3)

Dany jest prostokąt $ABCD$. Okrąg wpisany w trójkąt BCD jest styczny do przekątnej BD w punkcie N. Okrąg wpisany w trójkąt ABD jest styczny do boku AD w punkcie M, a środek S tego okręgu leży na odcinku MN, jak na rysunku.



Wykaż, że $|MN| = |AD|$.

59.r.10 Maj 2016

Zadanie 13. (0–5)

Punkty $A = (30, 32)$ i $B = (0, 8)$ są sąsiednimi wierzchołkami czworokąta $ABCD$ wpisanego w okrąg. Prosta o równaniu $x - y + 2 = 0$ jest jedyną osią symetrii tego czworokąta i zawiera przekątną AC. Oblicz współrzędne wierzchołków C i D tego czworokąta.

60.r.10 Maj 2016 – stara

Zadanie 5. *(6 pkt)*

W trapezie równoramiennym $ABCD$, w którym $AB \parallel CD$, dane są $|AB| = 84$, $|CD| = 36$, $|BC| = |AD| = 40$. Oblicz promień okręgu wpisanego w trójkąt ABP, gdzie P jest punktem przecięcia przekątnych tego trapezu.

61.r.10 Maj 2016

Zadanie 6. *(6 pkt)*

Punkty $A = (1, 1)$ i $B = (6, 2)$ są wierzchołkami trójkąta ABC. Wysokości trójkąta ABC przecinają się w punkcie $M = (3, 3)$. Oblicz pole tego trójkąta.

62.r.10 Maj 2017

Zadanie 8. (0–3)

W trójkącie ostrokątnym ABC bok AB ma długość c, długość boku BC jest równa a oraz $|\sphericalangle ABC| = \beta$. Dwusieczna kąta ABC przecina bok AC trójkąta w punkcie E.

Wykaż, że długość odcinka BE jest równa $\dfrac{2ac \cdot \cos\frac{\beta}{2}}{a+c}$.

63.r.10 Maj 2017 (analityczna)

Zadanie 13. (0–5)

Wyznacz równanie okręgu przechodzącego przez punkty $A=(-5,3)$ i $B=(0,6)$, którego środek leży na prostej o równaniu $x-3y+1=0$.

64.r.10 Maj 2017 stara

Zadanie 9. ***(6 pkt)***

W trójkącie równoramiennym wysokość opuszczona na podstawę jest równa 36, a promień okręgu wpisanego w ten trójkąt jest równy 10. Oblicz długości boków tego trójkąta i promień okręgu opisanego na tym trójkącie.

65.r.10 Maj 2017 stara (analityczna)

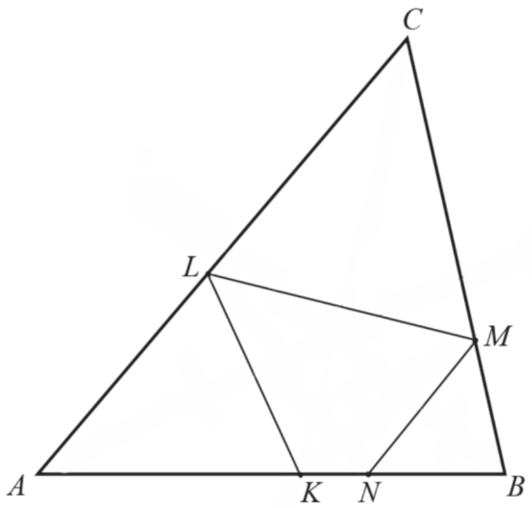
Zadanie 11. ***(5 pkt)***

Wyznacz równanie okręgu przechodzącego przez punkty $A=(-5,3)$ i $B=(0,6)$, którego środek leży na prostej o równaniu $x-3y+1=0$.

66.r.10 Maj 2018

Zadanie 7. (0–3)

Trójkąt ABC jest ostrokątny oraz $|AC|>|BC|$. Dwusieczna d_C kąta ACB przecina bok AB w punkcie K. Punkt L jest obrazem punktu K w symetrii osiowej względem dwusiecznej d_A kąta BAC, punkt M jest obrazem punktu L w symetrii osiowej względem dwusiecznej d_C kąta ACB, a punkt N jest obrazem punktu M w symetrii osiowej względem dwusiecznej d_B kąta ABC (zobacz rysunek).



Udowodnij, że na czworokącie $KNML$ można opisać okrąg.

67.r.10 Maj 2018 – stara

Zadanie 3. ***(5 pkt)***

Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$, w którym $|AD| = |AB| = |BC| = a$, $|\sphericalangle BAD| = 60^\circ$ i $|\sphericalangle ADC| = 135^\circ$. Oblicz pole czworokąta $ABCD$.

68.r.10 Maj 2019

Zadanie 9. (0–3)

Dany jest trójkąt równoramienny ABC, w którym $|AC| = |BC|$. Na ramieniu AC tego trójkąta wybrano punkt M ($M \neq A$ i $M \neq C$), a na ramieniu BC wybrano punkt N, w taki sposób, że $|AM| = |CN|$. Przez punkty M i N poprowadzono proste prostopadłe do podstawy AB tego trójkąta, które wyznaczają na niej punkty S i T. Udowodnij, że $|ST| = \frac{1}{2}|AB|$.

69.r.10 Maj 2019

Zadanie 10. (0–4)

Punkt D leży na boku AB trójkąta ABC oraz $|AC| = 16$, $|AD| = 6$, $|CD| = 14$ i $|BC| = |BD|$. Oblicz obwód trójkąta ABC.

70.r.10 Maj 2019 (analityczna)

Zadanie 11. (0–6)

Dane są okręgi o równaniach $x^2 + y^2 - 12x - 8y + 43 = 0$ i $x^2 + y^2 - 2ax + 4y + a^2 - 77 = 0$. Wyznacz wszystkie wartości parametru a, dla których te okręgi mają dokładnie jeden punkt wspólny. Rozważ wszystkie przypadki.

71.r.10 Kwiecień 2020 (próbna)

Zadanie 6. (0–3)

W trójkącie ABC kąt BAC jest dwa razy większy od kąta ABC. Wykaż, że prawdziwa jest równość $|BC|^2 - |AC|^2 = |AB| \cdot |AC|$.

72.r.10 Kwiecień 2020 (próbna)

Zadanie 12. (0–5)

Trapez prostokątny $ABCD$ o podstawach AB i CD jest opisany na okręgu. Ramię BC ma długość 10, a ramię AD jest wysokością trapezu. Podstawa AB jest 2 razy dłuższa od podstawy CD. Oblicz pole tego trapezu.

73.r.10 Kwiecień 2020 (próbna)

Zadanie 13. (0–5)

Wierzchołki A i B trójkąta prostokątnego ABC leżą na osi Oy układu współrzędnych. Okrąg wpisany w ten trójkąt jest styczny do boków AB, BC i CA w punktach – odpowiednio – $P = (0, 10)$, $Q = (8, 6)$ i $R = (9, 13)$. Oblicz współrzędne wierzchołków A, B i C tego trójkąta.

74.r.10 Maj 2020

Zadanie 5. (0–2)

W trójkącie ABC bok AB jest 3 razy dłuższy od boku AC, a długość boku BC stanowi $\frac{4}{5}$ długości boku AB. Oblicz cosinus najmniejszego kąta trójkąta ABC.

W kratki poniżej wpisz kolejno – od lewej do prawej – pierwszą, drugą oraz trzecią cyfrę po przecinku nieskończonego rozwinięcia dziesiętnego otrzymanego wyniku.

75.r.10 Maj 2020

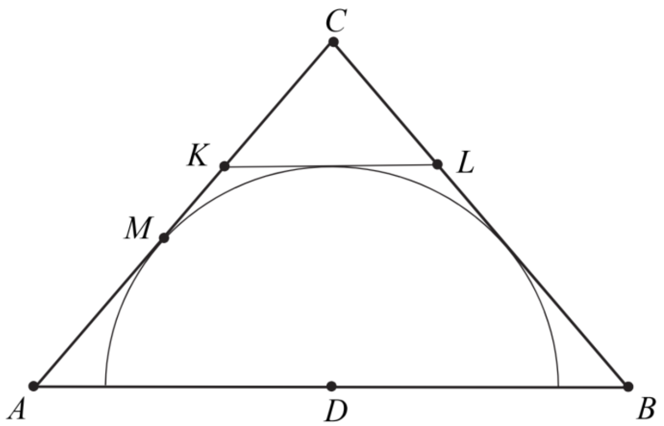
Zadanie 12. (0–5)

Prosta o równaniu $x+y-10=0$ przecina okrąg o równaniu $x^2+y^2-8x-6y+8=0$ w punktach K i L. Punkt S jest środkiem cięciwy KL. Wyznacz równanie obrazu tego okręgu w jednokładności o środku S i skali $k=-3$.

76.r.10 Maj 2020

Zadanie 7. (0–3)

Dany jest trójkąt równoramienny ABC, w którym $|AC|=|BC|=6$, a punkt D jest środkiem podstawy AB. Okrąg o środku D jest styczny do prostej AC w punkcie M. Punkt K leży na boku AC, punkt L leży na boku BC, odcinek KL jest styczny do rozważanego okręgu oraz $|KC|=|LC|=2$ (zobacz rysunek).

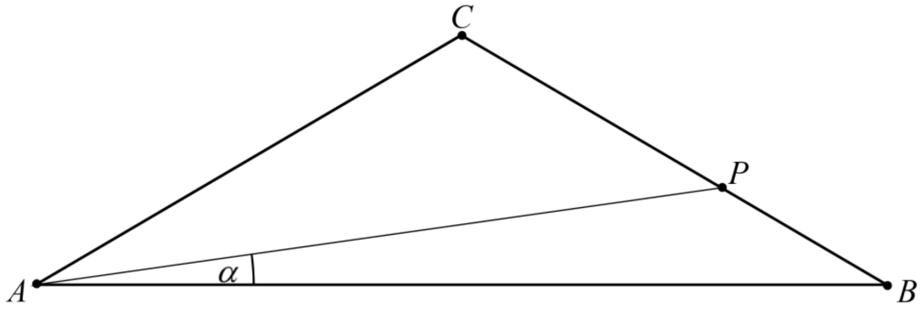


Wykaż, że $\frac{|AM|}{|MC|}=\frac{4}{5}$.

77.r.10 Maj 2020 - stara

Zadanie 8. *(4 pkt)*

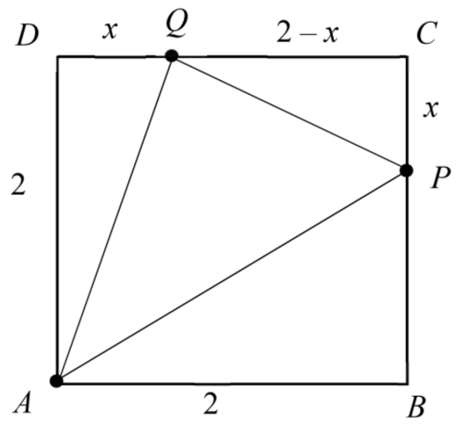
W trójkącie równoramiennym ABC: $|AC| = |BC| = 10$, a miara kąta ABC jest równa $30°$. Na boku BC wybrano punkt P, taki, że $\frac{|BP|}{|PC|} = \frac{2}{3}$. Oblicz sinus kąta α (zobacz rysunek).



78.r.10 Maj 2020 - stara

Zadanie 10. *(5 pkt)*

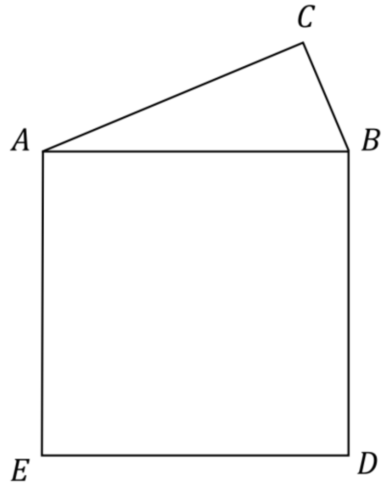
Dany jest kwadrat $ABCD$ o boku długości 2. Na bokach BC i CD tego kwadratu wybrano – odpowiednio – punkty P i Q, takie, że długość odcinka $|PC| = |QD| = x$ (zobacz rysunek). Wyznacz tę wartość x, dla której pole trójkąta APQ osiąga wartość najmniejszą. Oblicz to najmniejsze pole.



79.r.10 Marzec 2021

Zadanie 8. (0–4)

Na przeciwprostokątnej AB trójkąta prostokątnego ABC zbudowano kwadrat $ABDE$ (zobacz rysunek). Stosunek pola trójkąta do pola kwadratu jest równy k.



Wykaż, że suma tangensów kątów ostrych tego trójkąta jest równa $\frac{1}{2k}$.

80.r.10 Marzec 2021

Zadanie 9. (0–4)

Czworokąt $ABCD$ jest wpisany w okrąg o promieniu $R = 5\sqrt{2}$. Przekątna BD tego czworokąta ma długość 10. Kąty wewnętrzne BAD i ADC czworokąta $ABCD$ są ostre, a iloczyn sinusów wszystkich jego kątów wewnętrznych jest równy $\frac{3}{8}$. Oblicz miary kątów wewnętrznych tego czworokąta.

81.r.10 Marzec 2021

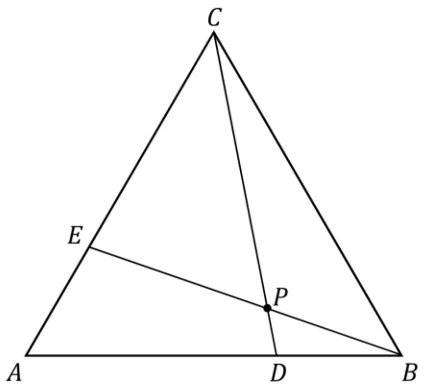
Zadanie 13. (0–5)

Dany jest równoległobok, którego boki zawierają się w prostych o równaniach: $y = x + b$, $y = x + 2b$, $y = b$, $y = 2$, gdzie liczba rzeczywista b spełnia warunki: $b \neq 2$ i $b \neq 0$. Wyznacz wszystkie wartości parametru b, dla których pole tego równoległoboku jest równe 1.

82.r.10 Maj 2021

Zadanie 8. (0–3)

Dany jest trójkąt równoboczny ABC. Na bokach AB i AC wybrano punkty – odpowiednio – D i E takie, że $|BD| = |AE| = \frac{1}{3}|AB|$. Odcinki CD i BE przecinają się w punkcie P (zobacz rysunek).



Wykaż, że pole trójkąta DBP jest 21 razy mniejsze od pola trójkąta ABC.

83.r.10 Maj 2021

Zadanie 10. (0–4)

Prosta przechodząca przez punkty $A = (8, -6)$ i $B = (5, 15)$ jest styczna do okręgu o środku w punkcie $O = (0, 0)$. Oblicz promień tego okręgu i współrzędne punktu styczności tego okręgu z prostą AB.

84.r.10 Maj 2021

Zadanie 13. (0–4)

Dany jest trójkąt prostokątny ABC. Promień okręgu wpisanego w ten trójkąt jest pięć razy krótszy od przeciwprostokątnej tego trójkąta. Oblicz sinus tego z kątów ostrych trójkąta ABC, który ma większą miarę.

85.r.10 Maj 2022

Zadanie 8. (0–3)

Punkt P jest punktem przecięcia przekątnych trapezu $ABCD$. Długość podstawy CD jest o 2 mniejsza od długości podstawy AB. Promień okręgu opisanego na trójkącie ostrokątnym CPD jest o 3 mniejszy od promienia okręgu opisanego na trójkącie APB.

Wykaż, że spełniony jest warunek $|DP|^2 + |CP|^2 - |CD|^2 = \frac{4\sqrt{2}}{3} \cdot |DP| \cdot |CP|$.

86.r.10 Maj 2022 (analityczna)

Zadanie 14. (0–6)

Punkt $A = (-3, 2)$ jest wierzchołkiem trójkąta równoramiennego ABC, w którym $|AC| = |BC|$. Pole tego trójkąta jest równe 15. Bok BC zawarty jest w prostej o równaniu $y = x - 1$. Oblicz współrzędne wierzchołków B i C tego trójkąta.

87.r.10

88.r.10 Koniec

11. STEREOMETRIA
Poziom podstawowy

1.p.11 Maj 2002

Zadanie 10. *(5 pkt)*

Dane są dwie bryły: stożek, w którym długość promienia podstawy jest równa 4 dm i wysokość ma długość $\frac{18}{\pi}\text{dm}$ oraz ostrosłup prawidłowy czworokątny, w którym krawędź podstawy ma długość $4\sqrt{3}$ dm. Wiedząc, że objętości tych brył są równe, wyznacz kąt nachylenia ściany bocznej ostrosłupa do jego podstawy.

2.p.11 Styczeń 2003

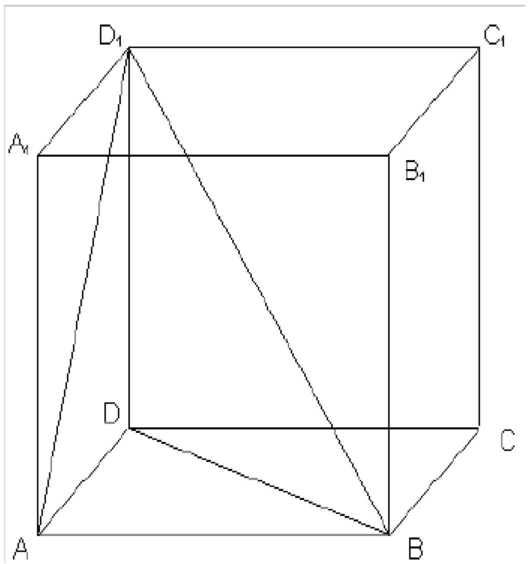
Zadanie 6. *(5 pkt)*

Do pewnego przepisu z książki kucharskiej należy przygotować $0{,}25$ litra płynu. Mamy do wyboru trzy szklanki w kształcie walca, o wewnętrznych wymiarach: pierwsza – o średnicy 6 cm i wysokości 10 cm, druga – o średnicy $5{,}8\text{ cm}$ i wysokości $9{,}5\text{ cm}$ oraz trzecia – o średnicy 6 cm i wysokości 9 cm.
Której szklanki objętość jest najbliższa $0{,}25$ litra? Odpowiedź uzasadnij.

3.p.11 Maj 2003

Zadanie 11. *(4 pkt)*

Podstawą prostopadłościanu $ABCDA_1B_1C_1D_1$ jest prostokąt o bokach długości: $|\overline{AD}| = 3$ i $|\overline{AB}| = 6$. Wysokość prostopadłościanu ma długość równą 6. Uzasadnij, za pomocą rachunków, że trójkąt BAD_1 jest prostokątny.



4.p.11 Grudzień 2004

Zadanie 8. *(4 pkt)*

Metalową kulę o promieniu długości 10 cm oraz stożek, w którym średnica i wysokość mają długości odpowiednio 16 cm i 12 cm, przetopiono. Następnie z otrzymanego metalu wykonano walec o średnicy $\frac{8\sqrt{3}}{3}$ cm. Oblicz wysokość tego walca.

5.p.11 Grudzień 2004

Zadanie 11. (*7 pkt*)

Wyznacz miarę kąta między ścianą boczną i płaszczyzną podstawy ostrosłupa prawidłowego sześciokątnego wiedząc, że pole jego podstawy jest równe $6\sqrt{3}$, a pole powierzchni bocznej ostrosłupa jest równe 12. Sporządź rysunek ostrosłupa i zaznacz na nim szukany kąt.

6.p.11 Styczeń 2005

Zadanie 9. (7 pkt.)

Piętrowy tort przygotowany na bal maturalny składał się z pięciu warstw, z których każda miała kształt walca. Długości promieni walców, wyrażone w cm były kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego o różnicy $a = -5$. Długość promienia podstawy środkowej warstwy tego tortu była równa 20 cm, a jej objętość $3200\pi\ cm^3$. Wszystkie warstwy wykonane były z tego samego rodzaju ciasta i miały jednakową wysokość.

Oblicz, ile mąki należało przygotować do wypieku całego tortu, jeżeli receptura przewiduje wykorzystanie 0,24 kg mąki do wypieku warstwy środkowej.

7.p.11 Maj 2005

Zadanie 10. *(7 pkt)*

W ostrosłupie czworokątnym prawidłowym wysokości przeciwległych ścian bocznych poprowadzone z wierzchołka ostrosłupa mają długości h i tworzą kąt o mierze 2α. Oblicz objętość tego ostrosłupa.

8.p.11 Grudzień 2005

Zadanie 10. (*7 pkt*)

Pole powierzchni całkowitej prawidłowego ostrosłupa trójkątnego równa się $144\sqrt{3}$, a pole jego powierzchni bocznej $96\sqrt{3}$. Oblicz objętość tego ostrosłupa.

9.p.11 Styczeń 2006

Zadanie 8. (*6 pkt*)

Wysokość walca jest o 6 większa od średnicy jego podstawy, a pole jego powierzchni całkowitej jest równe 378π. Oblicz objętość walca.

10.p.11 Maj 2006

Zadanie 9. (*6 pkt*)

Dach wieży ma kształt powierzchni bocznej ostrosłupa prawidłowego czworokątnego, którego krawędź podstawy ma długość 4 m. Ściana boczna tego ostrosłupa jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem $60°$.

a) Sporządź pomocniczy rysunek i zaznacz na nim podane w zadaniu wielkości.
b) Oblicz, ile sztuk dachówek należy kupić, aby pokryć ten dach, wiedząc, że do pokrycia $1\ m^2$ potrzebne są 24 dachówki. Przy zakupie należy doliczyć 8% dachówek na zapas.

11.p.11 Listopad 2006 (próbna do maja 2007)

Zadanie 7. *(6 pkt)*

W graniastosłupie prawidłowym czworokątnym przekątna podstawy ma długość 8 cm i tworzy z przekątną ściany bocznej, z którą ma wspólny wierzchołek kąt, którego cosinus jest równy $\frac{2}{3}$. Oblicz objętość i pole powierzchni całkowitej tego graniastosłupa.

12.p.11 Maj 2007

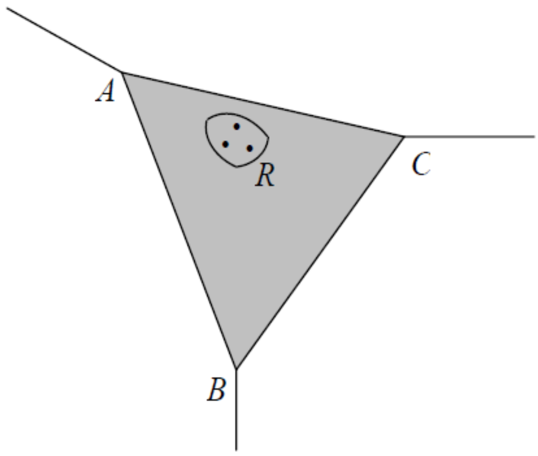
Zadanie 10. *(5 pkt)*

Dany jest graniastosłup czworokątny prosty $ABCDEFGH$ o podstawach $ABCD$ i $EFGH$ oraz krawędziach bocznych AE, BF, CG, DH. Podstawa $ABCD$ graniastosłupa jest rombem o boku długości 8 cm i kątach ostrych A i C o mierze 60°. Przekątna graniastosłupa CE jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem 60°. Sporządź rysunek pomocniczy i zaznacz na nim wymienione w zadaniu kąty. Oblicz objętość tego graniastosłupa.

13.p.11 Marzec 2008 (zestaw 1)

Zadanie 9. *(4 pkt)*

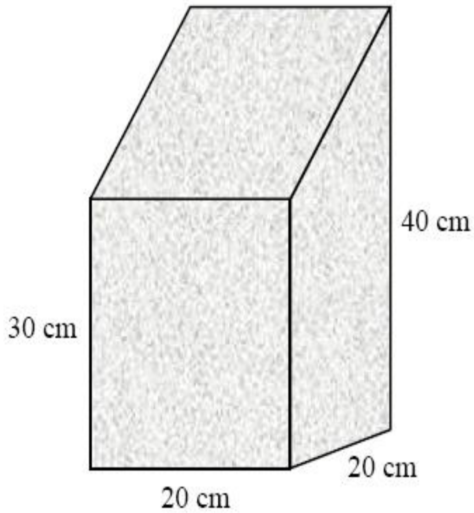
Narożnik między dwiema ścianami i sufitem prostopadłościennego pokoju należy zamaskować trójkątnym fragmentem płyty gipsowo-kartonowej (patrz rysunek). Wiedząc, że $RA = RB = RC = 1\,\mathrm{m}$, oblicz objętość narożnika zamaskowanego tą płytą. Wynik zaokrąglij do 0,01 m^3.



14.p.11 Marzec 2008 (zestaw 1)

Zadanie 11. *(4 pkt)*

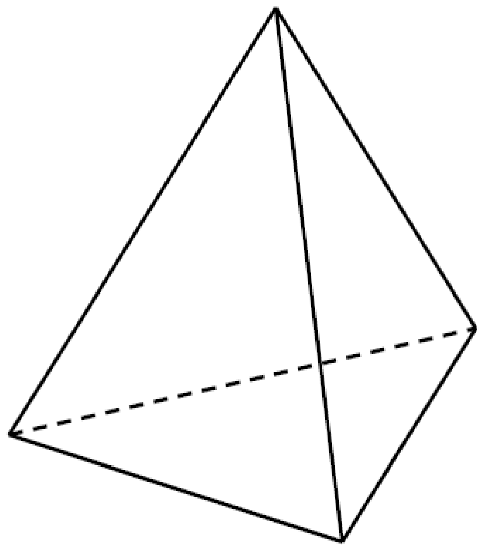
Spawacz ma wykonać z blachy konstrukcję, której podstawą jest kwadrat a ściany boczne są prostopadłe do płaszczyzny podstawy. Wymiary elementów są podane na rysunku. Oblicz pole powierzchni tej konstrukcji (wszystkich sześciu ścian). Wynik podaj z zaokrągleniem do $1\,\mathrm{cm}^2$.



15.p.11 Maj 2008

Zadanie 11. *(5 pkt)*

Pole powierzchni bocznej ostrosłupa prawidłowego trójkątnego równa się $\frac{a^2\sqrt{15}}{4}$, gdzie a oznacza długość krawędzi podstawy tego ostrosłupa. Zaznacz na poniższym rysunku kąt nachylenia ściany bocznej ostrosłupa do płaszczyzny jego podstawy. Miarę tego kąta oznacz symbolem β. Oblicz $\cos\beta$ i korzystając z tablic funkcji trygonometrycznych odczytaj przybliżoną wartość β z dokładnością do 1°.



16.p.11 Styczeń 2009

Zadanie 7. (*5 pkt*)

Krawędź boczna ostrosłupa prawidłowego czworokątnego ma długość 4 cm i jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem 30°. Oblicz długość krawędzi sześcianu, którego objętość jest równa objętości tego ostrosłupa.

17.p.11 Maj 2009

Zadanie 11. *(5 pkt)*

Powierzchnia boczna walca po rozwinięciu na płaszczyznę jest prostokątem. Przekątna tego prostokąta ma długość 12 i tworzy z bokiem, którego długość jest równa wysokości walca, kąt o mierze 30°.

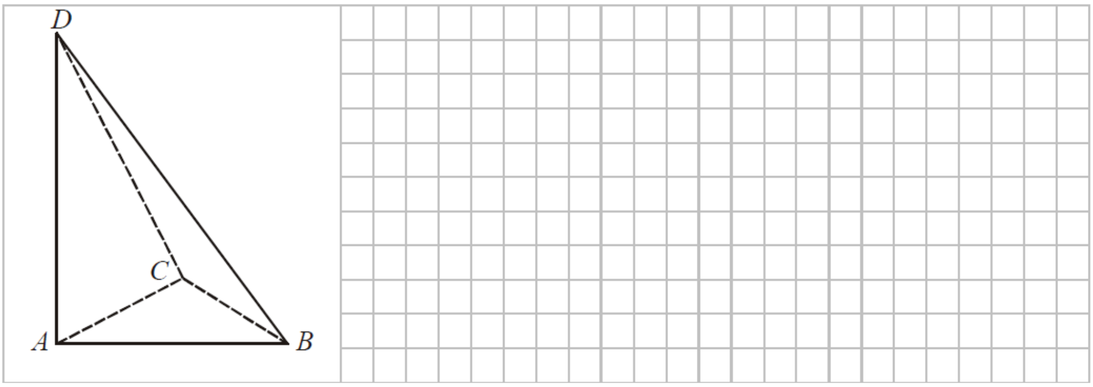
a) Oblicz pole powierzchni bocznej tego walca.

b) Sprawdź, czy objętość tego walca jest większa od $18\sqrt{3}$. Odpowiedź uzasadnij.

18.p.11 Maj 2010

Zadanie 32. *(4 pkt)*

Podstawą ostrosłupa *ABCD* jest trójkąt *ABC*. Krawędź *AD* jest wysokością ostrosłupa (zobacz rysunek). Oblicz objętość ostrosłupa *ABCD*, jeśli wiadomo, że $|AD| = 12$, $|BC| = 6$, $|BD| = |CD| = 13$.



19.p.11 Maj 2010

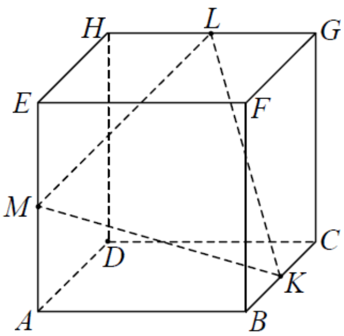
Zadanie 34. *(5 pkt)*

W dwóch hotelach wybudowano prostokątne baseny. Basen w pierwszym hotelu ma powierzchnię $240\ \mathrm{m}^2$. Basen w drugim hotelu ma powierzchnię $350\ \mathrm{m}^2$ oraz jest o 5 m dłuższy i 2 m szerszy niż w pierwszym hotelu. Oblicz, jakie wymiary mogą mieć baseny w obu hotelach. Podaj wszystkie możliwe odpowiedzi.

20.p.11 Maj 2011

Zadanie 33. *(4 pkt)*

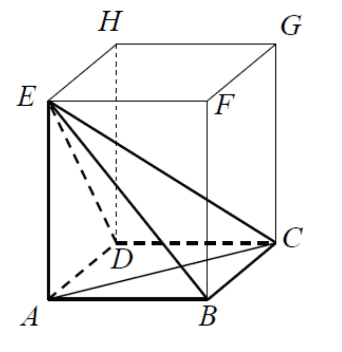
Punkty *K, L* i *M* są środkami krawędzi *BC, GH* i *AE* sześcianu *ABCDEFGH* o krawędzi długości 1 (zobacz rysunek). Oblicz pole trójkąta *KLM*.



21.p.11 Maj 2012

Zadanie 33. ***(4 pkt)***

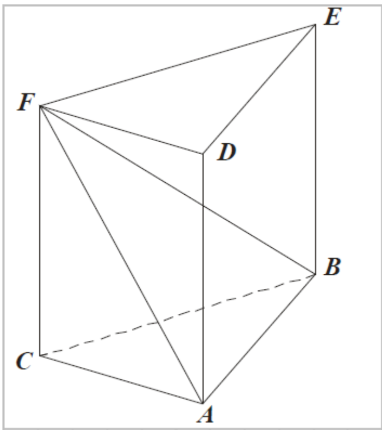
W graniastosłupie prawidłowym czworokątnym $ABCDEFGH$ przekątna AC podstawy ma długość 4. Kąt ACE jest równy $60°$. Oblicz objętość ostrosłupa $ABCDE$ przedstawionego na poniższym rysunku.



22.p.11 Czerwiec 2012

Zadanie 34. ***(4 pkt)***

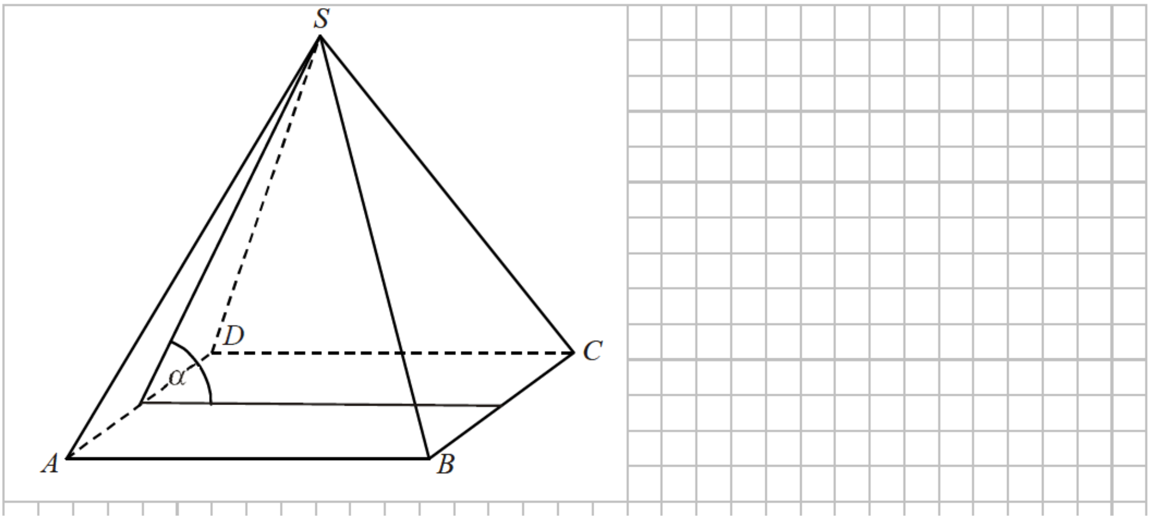
Dany jest graniastosłup prawidłowy trójkątny $ABCDEF$ o podstawach ABC i DEF i krawędziach bocznych AD, BE i CF (zobacz rysunek). Długość krawędzi podstawy AB jest równa 8, a pole trójkąta ABF jest równe 52. Oblicz objętość tego graniastosłupa.



23.p.11 Sierpień 2012

Zadanie 33. ***(4 pkt)***

W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym $ABCDS$ o podstawie $ABCD$ i wierzchołku S trójkąt ACS jest równoboczny i ma bok długości 8. Oblicz sinus kąta nachylenia ściany bocznej do płaszczyzny podstawy tego ostrosłupa (zobacz rysunek).



24.p.11 Maj 2013

Zadanie 33. ***(4 pkt)***

Pole podstawy ostrosłupa prawidłowego czworokątnego jest równe 100 cm^2, a jego pole powierzchni bocznej jest równe 260 cm^2. Oblicz objętość tego ostrosłupa.

25.p.11 Grudzień 2013

Zadanie 33. (0–4)

Jacek bawi się sześciennymi klockami o krawędzi 2 cm. Zbudował z nich jeden duży sześcian o krawędzi 8 cm i wykorzystał do tego wszystkie swoje klocki. Następnie zburzył budowlę i ułożył z tych klocków drugą bryłę – graniastosłup prawidłowy czworokątny. Wtedy okazało się, że został mu dokładnie jeden klocek, którego nie było gdzie dołożyć. Oblicz stosunek pola powierzchni całkowitej pierwszej ułożonej bryły do pola powierzchni całkowitej drugiej bryły i wynik podaj w postaci ułamka nieskracalnego.

26.p.11 Maj 2014

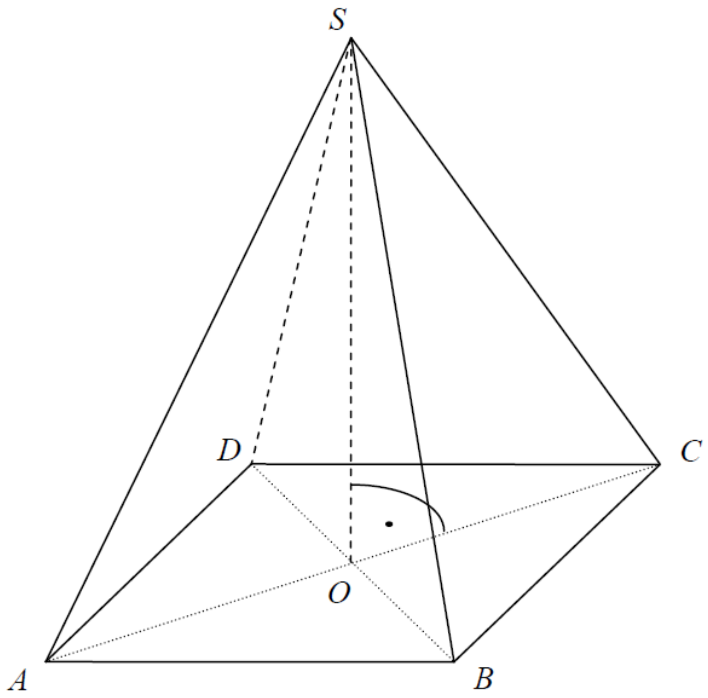
Zadanie 32. ***(4 pkt)***

Pole powierzchni całkowitej prostopadłościanu jest równe 198. Stosunki długości krawędzi prostopadłościanu wychodzących z tego samego wierzchołka prostopadłościanu to $1 : 2 : 3$. Oblicz długość przekątnej tego prostopadłościanu.

27.p.11 Sierpień 2014

Zadanie 33. *(4 pkt)*

Podstawą ostrosłupa prawidłowego jest kwadrat. Wysokość ściany bocznej tego ostrosłupa jest równa 22, a tangens kąta nachylenia ściany bocznej ostrosłupa do płaszczyzny jego podstawy jest równy $\frac{4\sqrt{6}}{5}$. Oblicz objętość tego ostrosłupa.



28.p.11 Grudzień 2014

Zadanie 33. (0–4)

Tworząca stożka ma długość 17, a wysokość stożka jest krótsza od średnicy jego podstawy o 22. Oblicz pole powierzchni całkowitej i objętość tego stożka.

29.p.11 Maj 2015-nowa

Zadanie 32. (0–4)

Wysokość graniastosłupa prawidłowego czworokątnego jest równa 16. Przekątna graniastosłupa jest nachylona do płaszczyzny jego podstawy pod kątem, którego cosinus jest równy $\frac{3}{5}$. Oblicz pole powierzchni całkowitej tego graniastosłupa.

30.p.11 Maj 2015-stara

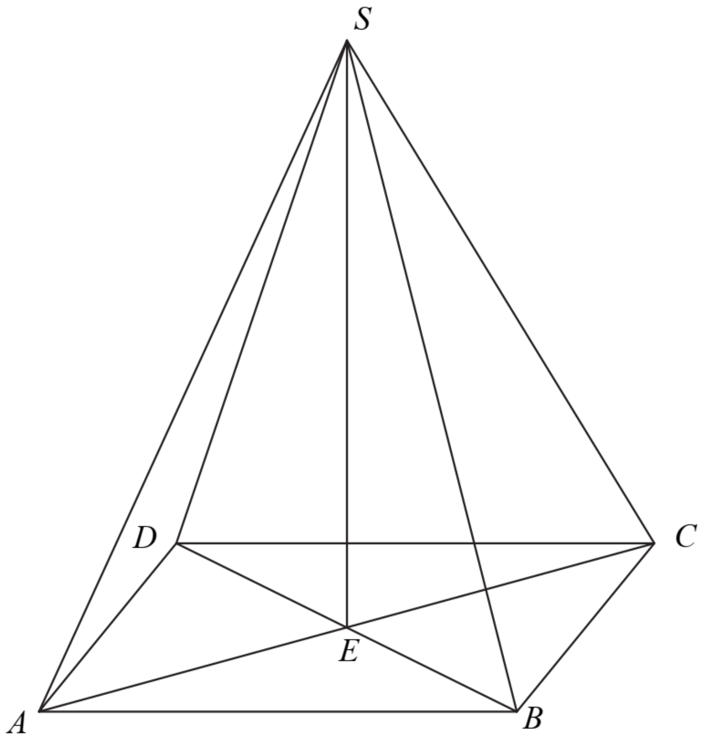
Zadanie 32. *(4 pkt)*

Wysokość graniastosłupa prawidłowego czworokątnego jest równa 16. Przekątna graniastosłupa jest nachylona do płaszczyzny jego podstawy pod kątem, którego cosinus jest równy $\frac{3}{5}$. Oblicz pole powierzchni całkowitej tego graniastosłupa.

31.p.11 Sierpień 2015

Zadanie 33. (0–4)

Podstawą ostrosłupa *ABCDS* jest prostokąt, którego boki pozostają w stosunku 3 : 4, a pole jest równe 192 (zobacz rysunek). Punkt *E* jest wyznaczony przez przecinające się przekątne podstawy, a odcinek *SE* jest wysokością ostrosłupa. Każda krawędź boczna tego ostrosłupa jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem 30°. Oblicz objętość ostrosłupa.



32.p.11 Sierpień 2015 – stara

Zadanie 34. ***(5 pkt)***

W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym ściana boczna o polu równym 10 jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem 60°. Oblicz objętość tego ostrosłupa.

33.p.11 Maj 2016

Zadanie 33. (0–5)

Podstawą ostrosłupa prawidłowego trójkątnego $ABCS$ jest trójkąt równoboczny ABC. Wysokość SO tego ostrosłupa jest równa wysokości jego podstawy. Objętość tego ostrosłupa jest równa 27. Oblicz pole powierzchni bocznej ostrosłupa $ABCS$ oraz cosinus kąta, jaki tworzą wysokość ściany bocznej i płaszczyzna podstawy ostrosłupa.

34.p.11 **Maj 2016 - stara**

Zadanie 8. ***(6 pkt)***

W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym *ABCDS* o podstawie *ABCD* wysokość jest równa 5, a kąt między sąsiednimi ścianami bocznymi ostrosłupa ma miarę 120°. Oblicz objętość tego ostrosłupa.

35.p.11 Czerwiec 2016

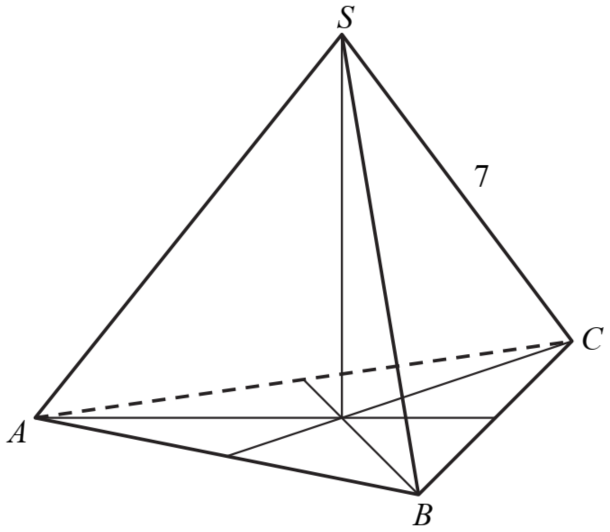
Zadanie 32. (0–4)

Dany jest stożek o objętości 8π, w którym stosunek wysokości do promienia podstawy jest równy $3:8$. Oblicz pole powierzchni bocznej tego stożka.

36.p.11 Sierpień 2016

Zadanie 33. (0–5)

Trójkąt równoboczny ABC jest podstawą ostrosłupa prawidłowego $ABCS$, w którym ściana boczna jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem $60°$, a krawędź boczna ma długość 7 (zobacz rysunek). Oblicz objętość tego ostrosłupa.



37.p.11 Maj 2017

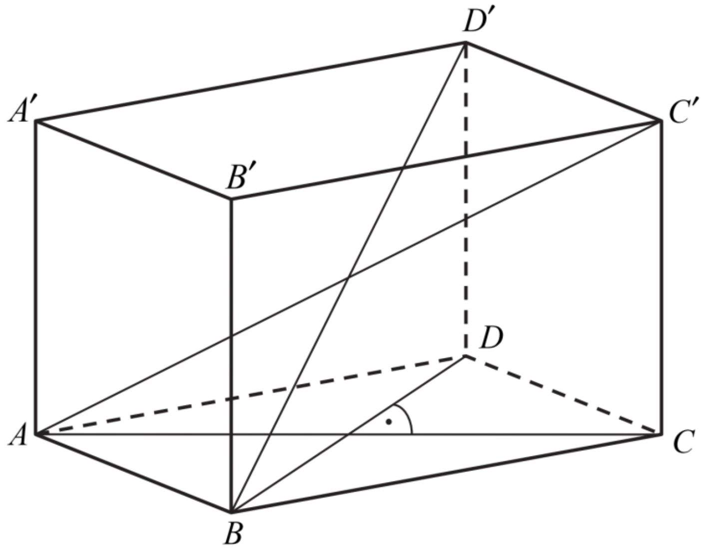
Zadanie 34. (0–4)

W ostrosłupie prawidłowym trójkątnym wysokość ściany bocznej prostopadła do krawędzi podstawy ostrosłupa jest równa $\frac{5\sqrt{3}}{4}$, a pole powierzchni bocznej tego ostrosłupa jest równe $\frac{15\sqrt{3}}{4}$. Oblicz objętość tego ostrosłupa.

38.p.11 Czerwiec 2017

Zadanie 34. (0–5)

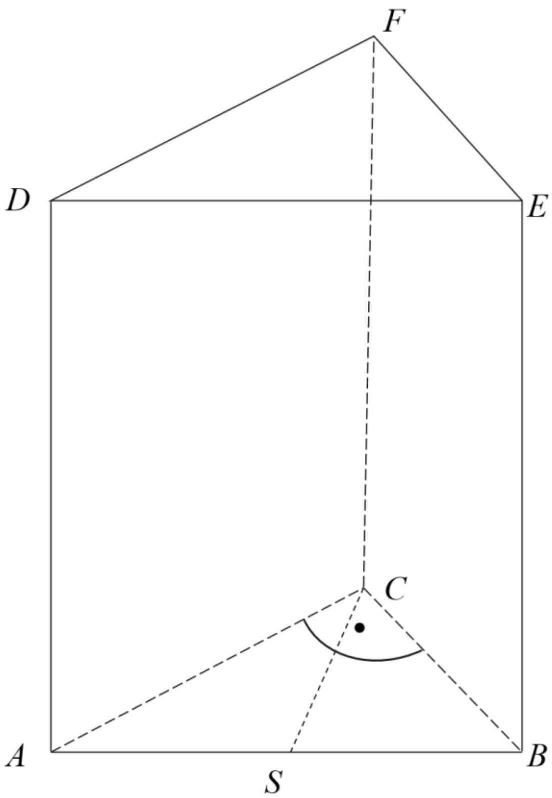
Podstawą graniastosłupa prostego $ABCDA'B'C'D'$ jest romb $ABCD$. Przekątna AC' tego graniastosłupa ma długość 8 i jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem $30°$, a przekątna BD' jest nachylona do tej płaszczyzny pod kątem $45°$. Oblicz pole powierzchni całkowitej tego graniastosłupa.



39.p.11 Sierpień 2017

Zadanie 34. (0–5)

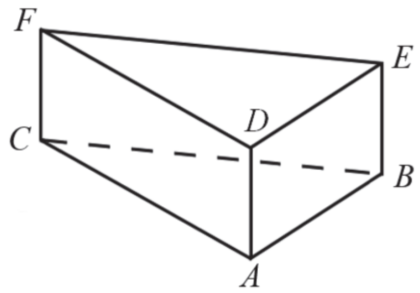
Podstawą graniastosłupa prostego $ABCDEF$ jest trójkąt prostokątny ABC, w którym $|\sphericalangle ACB| = 90°$ (zobacz rysunek). Stosunek długości przyprostokątnej AC tego trójkąta do długości przyprostokątnej BC jest równy 4 : 3. Punkt S jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie ABC, a długość odcinka SC jest równa 5. Pole ściany bocznej $BEFC$ graniastosłupa jest równe 48. Oblicz objętość tego graniastosłupa.



40.p.11 Maj 2018

Zadanie 34. (0–4)

Dany jest graniastosłup prawidłowy trójkątny (zobacz rysunek). Pole powierzchni całkowitej tego graniastosłupa jest równe $45\sqrt{3}$. Pole podstawy graniastosłupa jest równe polu jednej ściany bocznej. Oblicz objętość tego graniastosłupa.



41.p.11 Czerwiec 2018

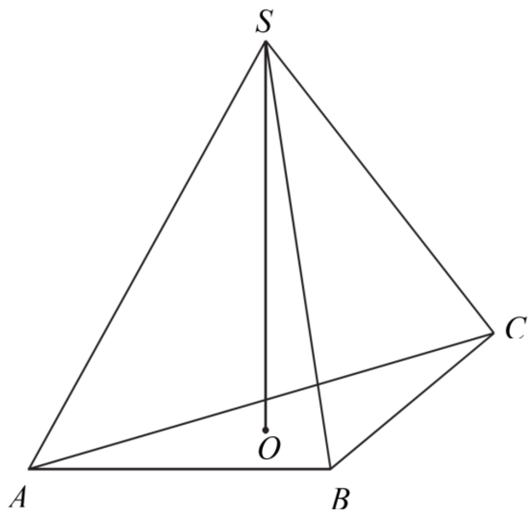
Zadanie 32. (0–5)

Dany jest ostrosłup prawidłowy czworokątny o wysokości $H = 16$. Cosinus kąta nachylenia krawędzi bocznej do płaszczyzny podstawy tego ostrosłupa jest równy $\frac{3}{5}$. Oblicz pole powierzchni bocznej tego ostrosłupa.

42.p.11 Sierpień 2018

Zadanie 32. (0–5)

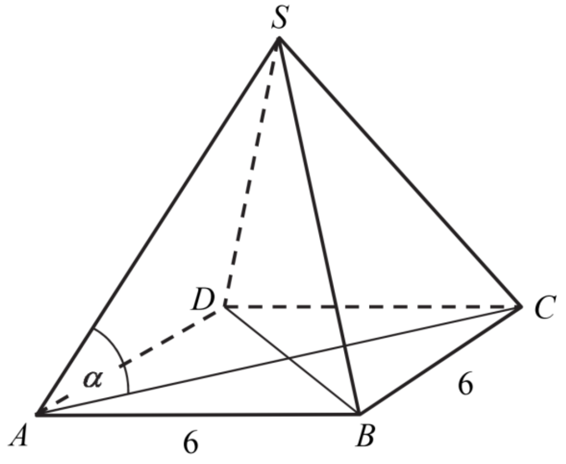
W ostrosłupie prawidłowym trójkątnym *ABCS* krawędź podstawy ma długość *a*. Pole powierzchni bocznej tego ostrosłupa jest dwa razy większe od pola jego podstawy. Oblicz cosinus kąta nachylenia krawędzi bocznej tego ostrosłupa do płaszczyzny jego podstawy.



43.p.11 Maj 2019

Zadanie 34. (0–5)

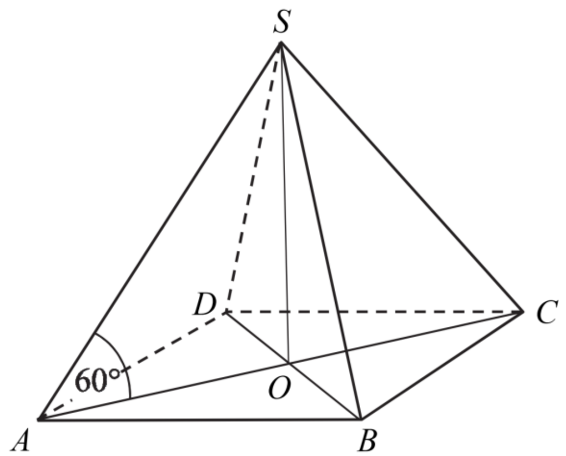
Długość krawędzi podstawy ostrosłupa prawidłowego czworokątnego jest równa 6. Pole powierzchni całkowitej tego ostrosłupa jest cztery razy większe od pola jego podstawy. Kąt α jest kątem nachylenia krawędzi bocznej tego ostrosłupa do płaszczyzny podstawy (zobacz rysunek). Oblicz cosinus kąta α.



44.p.11 Czerwiec 2019

Zadanie 32. (0–5)

Podstawą ostrosłupa *ABCDS* jest prostokąt o polu równym 432, a stosunek długości boków tego prostokąta jest równy $3:4$. Przekątne podstawy *ABCD* przecinają się w punkcie *O*. Odcinek *SO* jest wysokością ostrosłupa (zobacz rysunek). Kąt *SAO* ma miarę 60°. Oblicz objętość tego ostrosłupa.

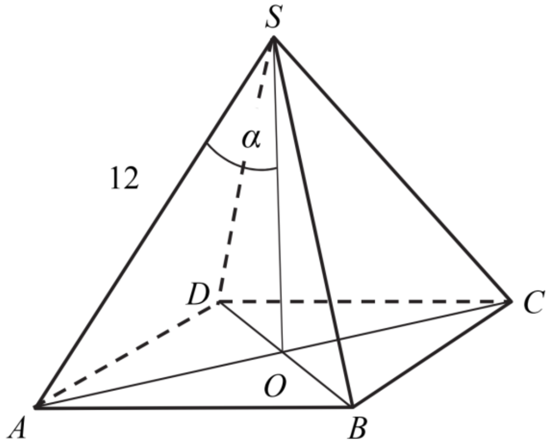


45.p.11 Sierpień 2019

Zadanie 34. (0–5)

Długość krawędzi bocznej ostrosłupa prawidłowego czworokątnego $ABCDS$ jest równa 12. (zobacz rysunek). Krawędź boczna tworzy z wysokością tego ostrosłupa kąt α taki, że $\operatorname{tg}\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$.

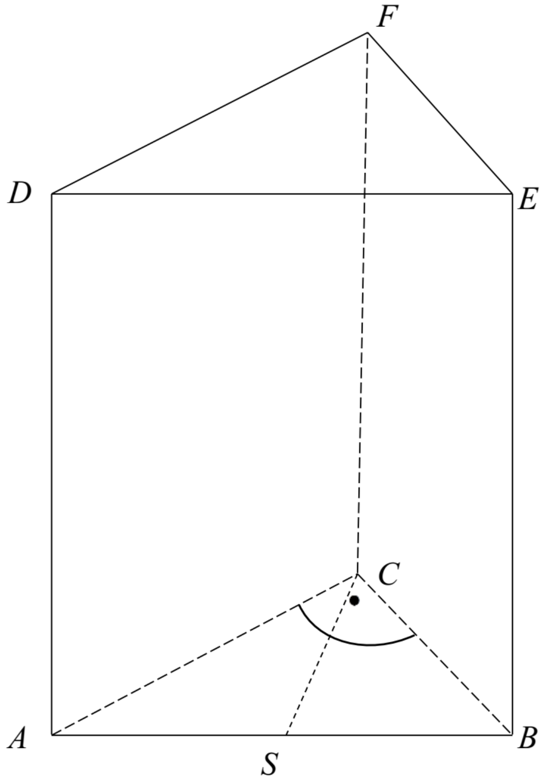
Oblicz objętość tego ostrosłupa.



46.p.11 Kwiecień 2020 (próbna)

Zadanie 34. (0–5)

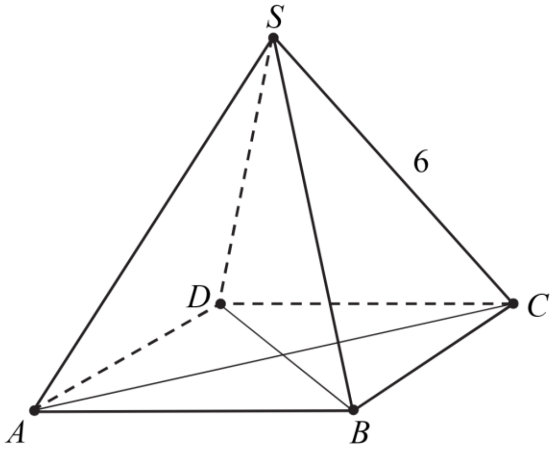
Podstawą graniastosłupa prostego $ABCDEF$ jest trójkąt prostokątny ABC, w którym $|\sphericalangle ACB| = 90°$ (zobacz rysunek). Stosunek długości przyprostokątnej AC tego trójkąta do długości przyprostokątnej BC jest równy 4 : 3. Punkt S jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie ABC, a długość odcinka SC jest równa 5. Pole ściany bocznej $BEFC$ graniastosłupa jest równe 48. Oblicz objętość tego graniastosłupa.



47.p.11 Maj 2020

Zadanie 34. (0–5)

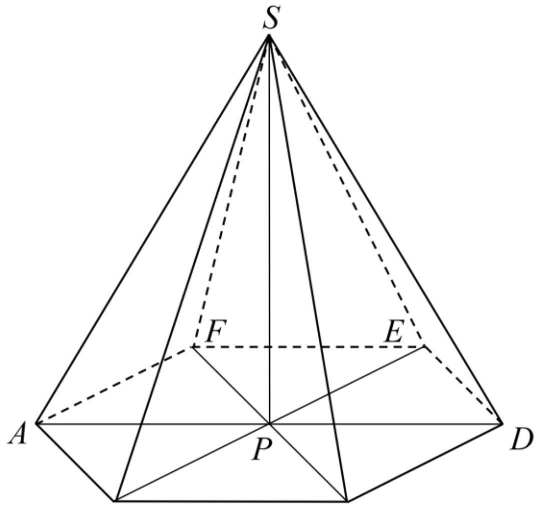
Dany jest ostrosłup prawidłowy czworokątny *ABCDS*, którego krawędź boczna ma długość 6 (zobacz rysunek). Ściana boczna tego ostrosłupa jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem, którego tangens jest równy $\sqrt{7}$. Oblicz objętość tego ostrosłupa.



48.p.11 Lipiec 2020

Zadanie 34. (0–5)

W ostrosłupie prawidłowym sześciokątnym *ABCDEFS*, którego krawędź podstawy *a* ma długość 8 (zobacz rysunek), ściana boczna jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem $\alpha = 60°$. Oblicz cosinus kąta między krawędzią boczną a płaszczyzną podstawy tego ostrosłupa.



49.p.11 Wrzesień 2020

Zadanie 33. (0–4)

Pole powierzchni bocznej stożka jest trzy razy większe od pola jego podstawy. Wysokość tego stożka jest równa 12. Oblicz objętość tego stożka.

50.p.11 M

51.p.11 Koniec

Poziom rozszerzony

1.r.11 Maj 2002

Zadanie 15. *(6 pkt)*

Objętość walca jest równa 250π cm^3. Przedstaw pole powierzchni całkowitej tego walca jako funkcję długości promienia jego podstawy i określ dziedzinę tej funkcji. Wyznacz długość promienia takiego walca, którego pole powierzchni całkowitej jest najmniejsze.

2.r.11 Styczeń 2003

Zadanie 18. *(4 pkt)*

Wybierz dwie dowolne przekątne sześcianu i oblicz cosinus kąta między nimi. Sporządź odpowiedni rysunek i zaznacz na nim kąt, którego cosinus obliczasz.

3.r.11 Maj 2003

Zadanie 21. *(8 pkt)*

W trójkącie ABC dane są : $\left|AC\right| = 8$, $\left|BC\right| = 3$, $\left|\angle ACB\right| = 60^0$. Oblicz objętość i pole powierzchni całkowitej bryły powstałej po obrocie trójkąta ABC dookoła boku $\overline{BC}$.

4.r.11 Grudzień 2004

Zadanie 18. (*6 pkt*)

Podstawą ostrosłupa jest prostokąt o polu 9 dm^2 . Dwie ściany boczne ostrosłupa są prostopadłe do płaszczyzny podstawy, a dwie pozostałe ściany boczne są nachylone do płaszczyzny podstawy pod kątami $\frac{\pi}{3}$ i $\frac{\pi}{6}$.

a) Sporządź rysunek ostrosłupa i zaznacz na nim dane kąty.
b) Oblicz objętość ostrosłupa.

5.r.11 Styczeń 2005

Zadanie 18. (7 pkt.)

Do salaterki wlano rozpuszczoną galaretkę, która po zastygnięciu przybrała kształt stożka ściętego. Przekrój osiowy tej bryły był trapezem równoramiennym o wysokości 6 cm i podstawach długości 14 cm i 26 cm.
Oblicz objętość wlanego płynu. W obliczeniach przyjmij, że $\pi \approx 3{,}14$, a wynik podaj z dokładnością do $1cm^3$.

6.r.11 Maj 2005

Zadanie 16. (*5 pkt*)

Sześcian o krawędzi długości a przecięto płaszczyzną przechodzącą przez przekątną podstawy i nachyloną do płaszczyzny podstawy pod kątem $\frac{\pi}{3}$. Sporządź odpowiedni rysunek.

Oblicz pole otrzymanego przekroju.

7.r.11 Styczeń 2006

Zadanie 19. (*6 pkt*)

Dany jest ostrosłup prawidłowy trójkątny, w którym długość krawędzi podstawy jest równa a. Kąt między krawędzią boczną i krawędzią podstawy ma miarę $45°$. Ostrosłup przecięto płaszczyzną przechodzącą przez krawędź podstawy i środek przeciwległej jej krawędzi bocznej. Sporządź rysunek ostrosłupa i zaznacz otrzymany przekrój. Oblicz pole tego przekroju.

8.r.11 Maj 2006

Zadanie 18. (*7 pkt*)

Wśród wszystkich graniastosłupów prawidłowych trójkątnych o objętości równej $2\ \text{m}^3$ istnieje taki, którego pole powierzchni całkowitej jest najmniejsze. Wyznacz długości krawędzi tego graniastosłupa.

9.r.11 Maj 2007

Zadanie 3. (*5 pkt*)

Kapsuła lądownika ma kształt stożka zakończonego w podstawie półkulą o tym samym promieniu co promień podstawy stożka. Wysokość stożka jest o 1 m większa niż promień półkuli. Objętość stożka stanowi $\frac{2}{3}$ objętości całej kapsuły. Oblicz objętość kapsuły lądownika.

10.r.11 Marzec 2008

Zadanie 8. *(5 pkt)*

Podstawą ostrosłupa $ABCD$ jest trójkąt równoboczny ABC o boku długości $\sqrt{2}$. Wszystkie ściany boczne są równoramiennymi trójkątami prostokątnymi. Punkt P został wybrany wewnątrz ostrosłupa w ten sposób, że wysokości ostrosłupów $ABDP$, $BCDP$, $ACDP$, $ABCP$ opuszczone z wierzchołka P mają tę samą długość H. Sporządź rysunek ostrosłupa i oblicz H.

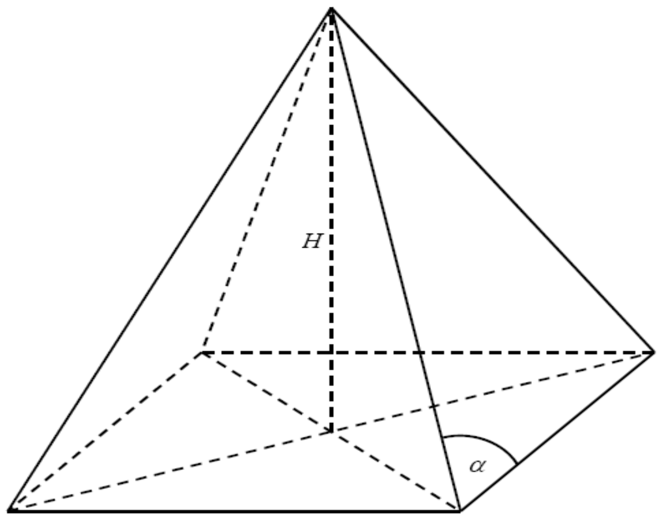
11.r.11 Maj 2008

Zadanie 11. *(5 pkt)*

W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym dane są: H – wysokość ostrosłupa oraz α – miara kąta utworzonego przez krawędź boczną i krawędź podstawy ($45° < \alpha < 90°$).

a) Wykaż, że objętość V tego ostrosłupa jest równa $\frac{4}{3} \cdot \frac{H^3}{\text{tg}^2\alpha - 1}$.

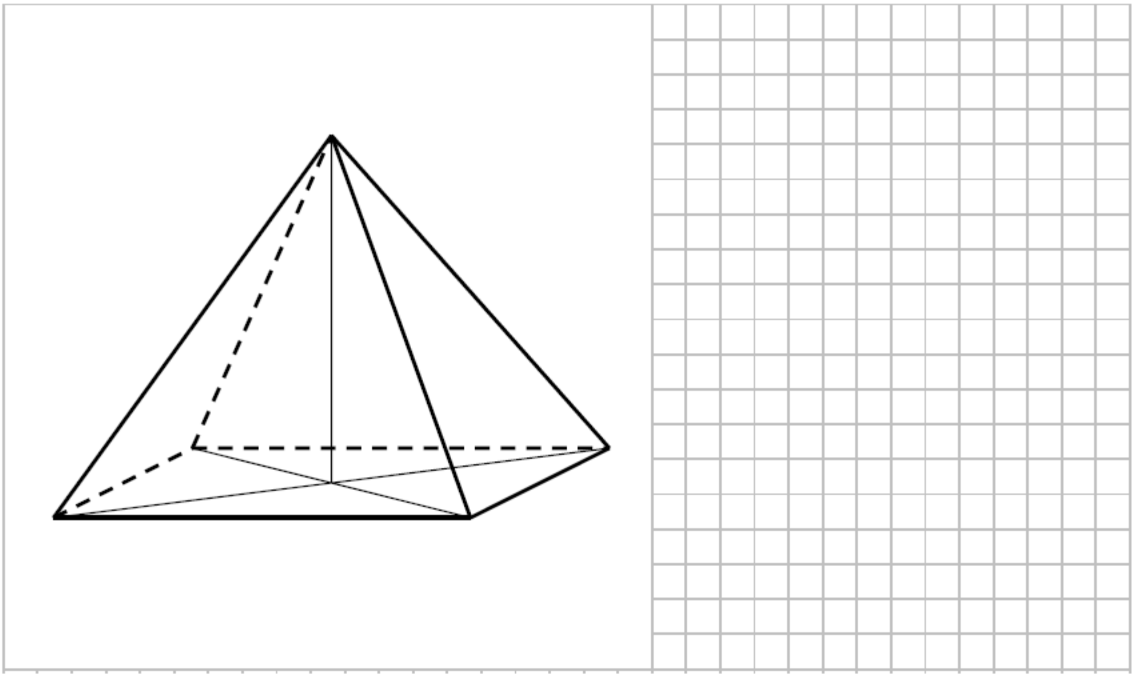
b) Oblicz miarę kąta α, dla której objętość V danego ostrosłupa jest równa $\frac{2}{9}H^3$. Wynik podaj w zaokrągleniu do całkowitej liczby stopni.



12.r.11 Styczeń 2009

Zadanie 11. (*4 pkt*)

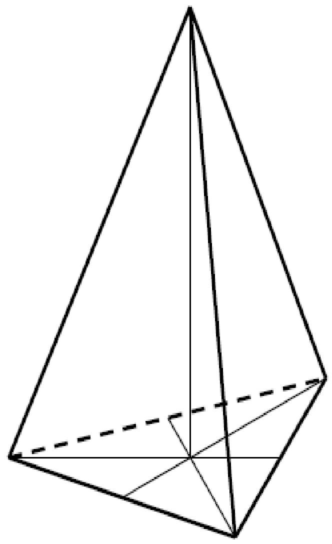
Dany jest ostrosłup prawidłowy czworokątny, w którym wszystkie krawędzie mają równą długość. Zaznacz na rysunku kąt utworzony przez dwie sąsiednie ściany boczne tego ostrosłupa i oblicz kosinus tego kąta.



13.r.11 Maj 2009

Zadanie 11. *(6 pkt)*

Dany jest ostrosłup prawidłowy trójkątny, w którym krawędź podstawy ma długość a i krawędź boczna jest od niej dwa razy dłuższa. Oblicz cosinus kąta między krawędzią boczną i krawędzią podstawy ostrosłupa. Narysuj przekrój ostrosłupa płaszczyzną przechodzącą przez krawędź podstawy i środek przeciwległej krawędzi bocznej i oblicz pole tego przekroju.



14.r.11 Maj 2010

Zadanie 11. *(5 pkt)*

W ostrosłupie prawidłowym trójkątnym krawędź podstawy ma długość a. Ściany boczne są trójkątami ostrokątnymi. Miara kąta między sąsiednimi ścianami bocznymi jest równa 2α. Wyznacz objętość tego ostrosłupa.

15.r.11 Maj 2012

Zadanie 10. *(5 pkt)*

Podstawą ostrosłupa $ABCS$ jest trójkąt równoramienny ABC. Krawędź AS jest wysokością ostrosłupa oraz $|AS| = 8\sqrt{210}$, $|BS| = 118$, $|CS| = 131$. Oblicz objętość tego ostrosłupa.

16.r.11 Czerwiec 2012

Zadanie 11. *(5 pkt)*

Podstawą ostrosłupa $ABCS$ jest trójkąt równoramienny ABC, w którym $|AB| = 30$, $|BC| = |AC| = 39$ i spodek wysokości ostrosłupa należy do jego podstawy. Każda wysokość ściany bocznej poprowadzona z wierzchołka S ma długość 26. Oblicz objętość tego ostrosłupa.

17.r.11 Maj 2013

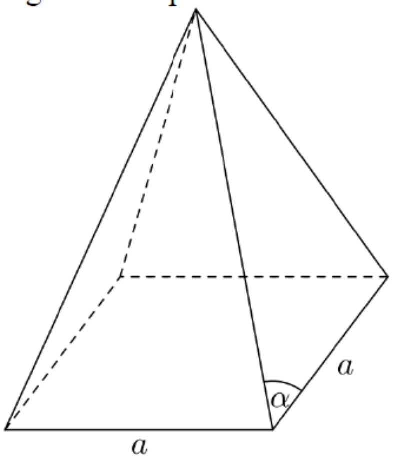
Zadanie 10. *(4 pkt)*

W ostrosłupie $ABCS$ podstawa ABC jest trójkątem równobocznym o boku długości a. Krawędź AS jest prostopadła do płaszczyzny podstawy. Odległość wierzchołka A od ściany BCS jest równa d. Wyznacz objętość tego ostrosłupa.

18.r.11 Grudzień 2013

Zadanie 15. (0–3)

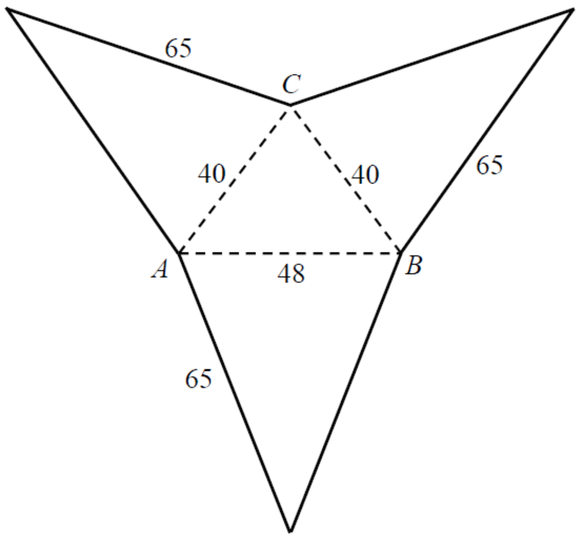
W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym krawędź podstawy ma długość a. Kąt między krawędzią boczną, a krawędzią podstawy ma miarę $\alpha > 45°$ (zobacz rysunek). Oblicz objętość tego ostrosłupa.



19.r.11 Maj 2014

Zadanie 9. ***(6 pkt)***

Oblicz objętość ostrosłupa trójkątnego $ABCS$, którego siatkę przedstawiono na rysunku.



20.r.11 Maj 2015-nowa

Zadanie 14. (0–5)

Podstawą ostrosłupa $ABCDS$ jest kwadrat $ABCD$. Krawędź boczna SD jest wysokością ostrosłupa, a jej długość jest dwa razy większa od długości krawędzi podstawy. Oblicz sinus kąta między ścianami bocznymi ABS i CBS tego ostrosłupa.

21.r.11 Maj 2015-nowa

Zadanie 16. (0–7)

Rozpatrujemy wszystkie stożki, których przekrojem osiowym jest trójkąt o obwodzie 20. Oblicz wysokość i promień podstawy tego stożka, którego objętość jest największa. Oblicz objętość tego stożka.

22.r.11 Maj 2015-stara

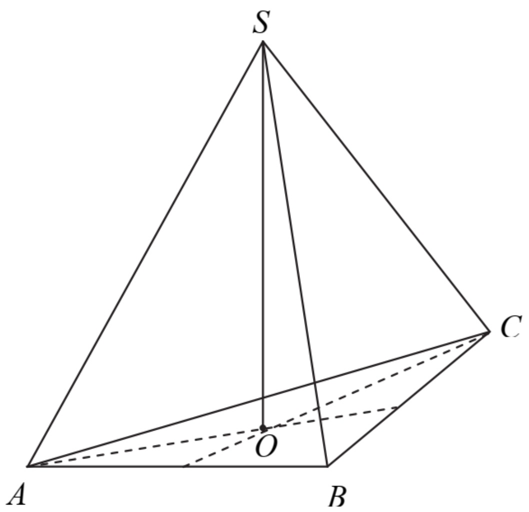
Zadanie 10. *(6 pkt)*

Krawędź podstawy ostrosłupa prawidłowego czworokątnego $ABCDS$ ma długość a. Ściana boczna jest nachylona do płaszczyzny podstawy ostrosłupa pod kątem 2α. Ostrosłup ten przecięto płaszczyzną, która przechodzi przez krawędź podstawy i dzieli na połowy kąt pomiędzy ścianą boczną i podstawą. Oblicz pole powstałego przekroju tego ostrosłupa.

23.r.11 Czerwiec 2015

Zadanie 34. (0–5)

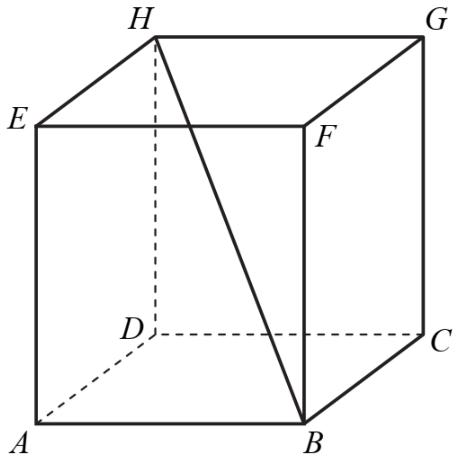
Objętość ostrosłupa prawidłowego trójkątnego $ABCS$ jest równa $27\sqrt{3}$. Długość krawędzi AB podstawy ostrosłupa jest równa 6 (zobacz rysunek). Oblicz pole powierzchni całkowitej tego ostrosłupa.



24.r.11 Czerwiec 2015 - stara

Zadanie 33. *(4 pkt)*

Wysokość prostopadłościanu $ABCDEFGH$ jest równa 1, a długość przekątnej BH jest równa sumie długości krawędzi AB i BC. Oblicz objętość tego prostopadłościanu.



25.r.11 Czerwiec 2015

Zadanie 14. (0−5)

Podstawą ostrosłupa *ABCDS* jest trapez *ABCD*. Przekątna *AC* tego trapezu ma długość $8\sqrt{3}$, jest prostopadła do ramienia *BC* i tworzy z dłuższą podstawą *AB* tego trapezu kąt o mierze $30°$. Każda krawędź boczna tego ostrosłupa ma tę samą długość $4\sqrt{5}$. Oblicz odległość spodka wysokości tego ostrosłupa od jego krawędzi bocznej *SD*.

26.r.11 **C**zerwiec 2015

Zadanie 16. (0−7)

Rozpatrujemy wszystkie stożki, w których suma długości tworzącej i promienia podstawy jest równa 2. Wyznacz wysokość tego spośród rozpatrywanych stożków, którego objętość jest największa. Oblicz tę objętość.

27.r.11 Maj 2016

Zadanie 15. (0–6)

W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym *ABCDS* o podstawie *ABCD* wysokość jest równa 5, a kąt między sąsiednimi ścianami bocznymi ostrosłupa ma miarę $120°$. Oblicz objętość tego ostrosłupa.

28.r.11 Maj 2017

Zadanie 9. (0–4)

W czworościanie, którego wszystkie krawędzie mają taką samą długość 6, umieszczono kulę tak, że ma ona dokładnie jeden punkt wspólny z każdą ścianą czworościanu. Płaszczyzna π, równoległa do podstawy tego czworościanu, dzieli go na dwie bryły: ostrosłup o objętości równej $\frac{8}{27}$ objętości dzielonego czworościanu i ostrosłup ścięty. Oblicz odległość środka *S* kuli od płaszczyzny π, tj. długość najkrótszego spośród odcinków *SP*, gdzie *P* jest punktem płaszczyzny π.

29.r.11 Maj 2017 stara

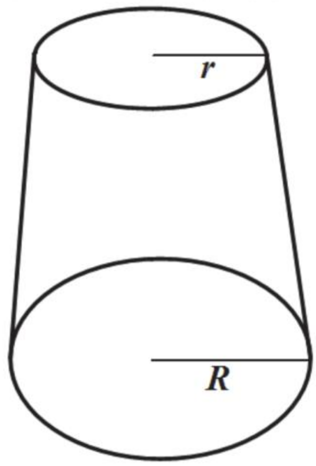
Zadanie 10. ***(6 pkt)***

Przekątne sąsiednich ścian bocznych prostopadłościanu wychodzące z jednego wierzchołka tworzą z jego podstawą kąty o miarach $\frac{\pi}{3}$ i α. Cosinus kąta między tymi przekątnymi jest równy $\frac{\sqrt{6}}{4}$. Wyznacz miarę kąta α.

30.r.11 Maj 2018

Zadanie 10. (0–4)

Objętość stożka ściętego (przedstawionego na rysunku) można obliczyć ze wzoru $V = \frac{1}{3}\pi H\left(r^2 + rR + R^2\right)$, gdzie r i R są promieniami podstaw ($r < R$), a H jest wysokością bryły. Dany jest stożek ścięty, którego wysokość jest równa 10, objętość 840π, a $r = 6$. Oblicz cosinus kąta nachylenia przekątnej przekroju osiowego tej bryły do jednej z jej podstaw.



31.r.11 Maj 2018 – stara

Zadanie 11. ***(5 pkt)***

Przekrój ostrosłupa prawidłowego trójkątnego $ABCS$ płaszczyzną przechodzącą przez wierzchołek S i wysokości dwóch ścian bocznych jest trójkątem równobocznym. Krawędź boczna tego ostrosłupa ma długość $\frac{4\sqrt{3}}{3}$. Oblicz objętość tego ostrosłupa.

32.r.11 Maj 2019

Zadanie 15. (0–7)

Rozważmy wszystkie graniastosłupy prawidłowe trójkątne o objętości $V = 2$. Wyznacz długości krawędzi tego z rozważanych graniastosłupów, którego pole powierzchni całkowitej jest najmniejsze. Oblicz to najmniejsze pole.

33.r.11 Maj 2019 – stara

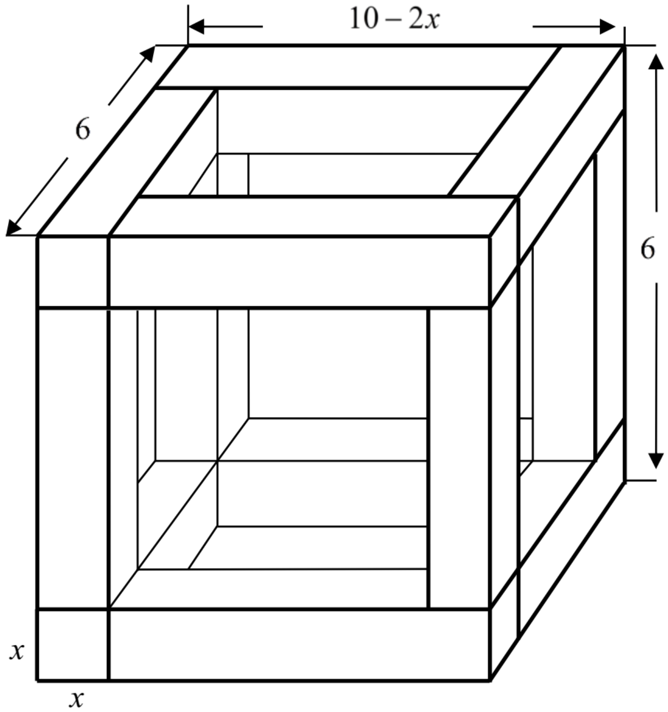
Zadanie 11. ***(6 pkt)***

Podstawą ostrosłupa $ABCDS$ jest prostokąt $ABCD$, którego boki mają długości $|AB| = 32$ i $|BC| = 18$. Ściany boczne ABS i CDS są trójkątami przystającymi i każda z nich jest nachylona do płaszczyzny podstawy ostrosłupa pod kątem α. Ściany boczne BCS i ADS są trójkątami przystającymi i każda z nich jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem β. Miary kątów α i β spełniają warunek: $\alpha + \beta = 90°$. Oblicz pole powierzchni całkowitej tego ostrosłupa.

34.r.11 Kwiecień 2020 (próbna)

Zadanie 15. (0–7)

Rozpatrujemy wszystkie możliwe drewniane szkielety o kształcie przedstawionym na rysunku, wykonane z listewek. Każda z tych listewek ma kształt prostopadłościanu o podstawie kwadratu o boku długości x. Wymiary szkieletu zaznaczono na rysunku.



a) Wyznacz objętość V drewna potrzebnego do budowy szkieletu jako funkcję zmiennej x.

b) Wyznacz dziedzinę funkcji V.

c) Oblicz tę wartość x, dla której zbudowany szkielet jest możliwie najcięższy, czyli kiedy funkcja V osiąga wartość największą. Oblicz tę największą objętość.

35.r.11 Maj 2020

Zadanie 14. (0–6)

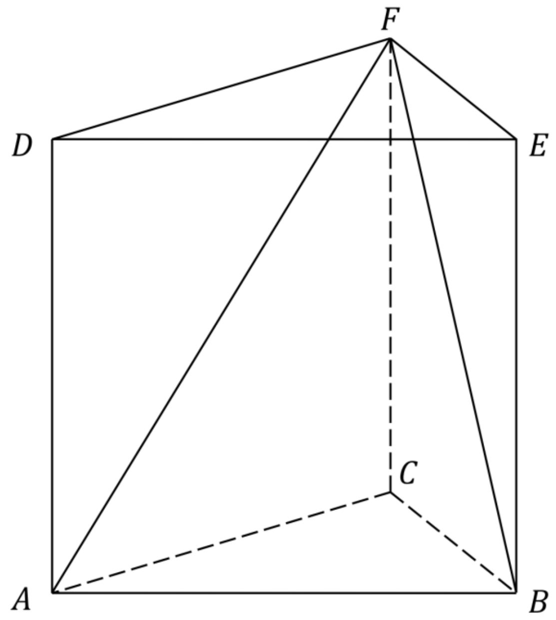
Podstawą ostrosłupa czworokątnego $ABCDS$ jest trapez $ABCD$ $(AB \parallel CD)$. Ramiona tego trapezu mają długości $|AD| = 10$ i $|BC| = 16$, a miara kąta ABC jest równa $30°$. Każda ściana boczna tego ostrosłupa tworzy z płaszczyzną podstawy kąt α, taki, że $\text{tg}\alpha = \frac{9}{2}$. Oblicz objętość tego ostrosłupa.

36.r.11 Marzec 2021

Zadanie 11. (0–4)

Dany jest graniastosłup prawidłowy trójkątny $ABCDEF$. Krawędź podstawy tego graniastosłupa ma długość 4, a wysokość graniastosłupa jest równa 6 (zobacz rysunek).

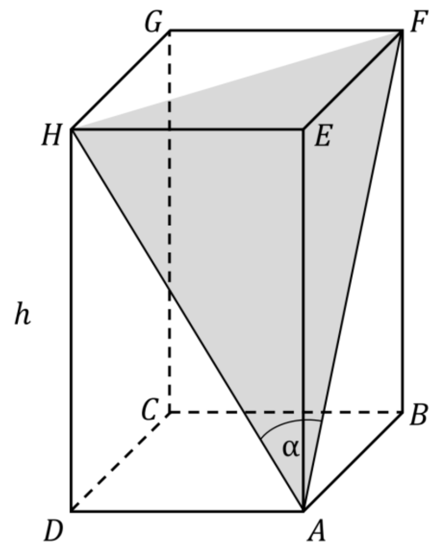
Oblicz sinus kąta AFB.



37.r.11 Maj 2022

Zadanie 13. (0–5)

Dany jest graniastosłup prosty $ABCDEFGH$ o podstawie prostokątnej $ABCD$. Przekątne AH i AF ścian bocznych tworzą kąt ostry o mierze α takiej, że $\sin\alpha = \frac{12}{13}$ (zobacz rysunek). Pole trójkąta AFH jest równe $26{,}4$.
Oblicz wysokość h tego graniastosłupa.



38.r.11 M

39.r.11 Koniec

12. FUNKCJA WYKŁADNICZA I LOGARYTMICZNA

Poziom podstawowy

1.p.12 grudzień 2014

Zadanie 27. (0–2)

Czas połowicznego rozpadu pierwiastka to okres, jaki jest potrzebny, by ze 100% pierwiastka pozostało 50% tego pierwiastka. Oznacza to, że ilość pierwiastka pozostała z każdego grama pierwiastka po x okresach rozpadu połowicznego wyraża się wzorem $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$.

W przypadku izotopu jodu ^{131}I czas połowicznego rozpadu jest równy 8 dni. Wyznacz najmniejszą liczbę dni, po upływie których pozostanie z 1 g ^{131}I nie więcej niż 0,125 g tego pierwiastka.

2.p.12 Maj 2016

Zadanie 31. (0–2)

Skala Richtera służy do określania siły trzęsień ziemi. Siła ta opisana jest wzorem $R=\log\frac{A}{A_0}$, gdzie A oznacza amplitudę trzęsienia wyrażoną w centymetrach, $A_0=10^{-4}$ cm jest stałą, nazywaną amplitudą wzorcową. 5 maja 2014 roku w Tajlandii miało miejsce trzęsienie ziemi o sile 6,2 w skali Richtera. Oblicz amplitudę trzęsienia ziemi w Tajlandii i rozstrzygnij, czy jest ona większa, czy – mniejsza od 100 cm.

3.p.12 Maj 2018

Zadanie 30. (0–2)

Do wykresu funkcji wykładniczej, określonej dla każdej liczby rzeczywistej x wzorem $f(x)=a^x$ (gdzie $a>0$ i $a\neq 1$), należy punkt $P=(2,9)$. Oblicz a i zapisz zbiór wartości funkcji g, określonej wzorem $g(x)=f(x)-2$.

4.p.12 M
5.p.12 M
6.p.12 Koniec

Poziom rozszerzony

1.r.12 Maj 2002

Zadanie 14. ***(6 pkt)***

Zaznacz na płaszczyźnie zbiór $F=\left\{(x,y): x\in R \wedge y\in R \wedge \log_{\frac{1}{2}}(|x|-1)\geq -2 \wedge |y|>0\right\}$.

Napisz równania osi symetrii figury F.

2.r.12 Maj 2002

Zadanie 16. *(7 pkt)*

Naszkicuj w jednym układzie współrzędnych wykresy funkcji $f(x)=2^{x+1}$ oraz $g(x)=\left|\frac{x+1}{x}\right|$.

Na podstawie wykonanego rysunku określ liczbę ujemnych rozwiązań równania $f(x)=g(x)$.

3.r.12 Styczeń 2003

Zadanie 20. *(10 pkt)*

Funkcja h jest określona wzorem $h(x)=\log_2(x^2-4)-\log_2(x-5)$. Wyznacz wszystkie wartości parametru k, dla których równanie $h(x)-\log_2 k=0$ ma dwa różne pierwiastki.

4.r.12 Maj 2003

Zadanie 19. *(4 pkt)*

Funkcja f jest funkcją wykładniczą. Określ liczbę rozwiązań równania $f(x-1)=m$ w zależności od wartości parametru m. Odpowiedź uzasadnij.

5.r.12 Maj 2003

Zadanie 22. (*10 pkt)*

Rozwiąż równanie $\log_3(\log_9 x)=\log_9(\log_3 x)$.

6.r.12 Grudzień 2004

Zadanie 13. (*6 pkt*)

Wyznacz wszystkie wartości parametru m, dla których każda liczba spełniająca równanie:

$$\log_m^2(x-1)+\log_m(x-1)-2=0$$

jest mniejsza od 3.

7.r.12 Grudzień 2004

Zadanie 21. (*5 pkt*)

Wyznacz wszystkie liczby rzeczywiste spełniające równanie: $(5-x)^{x^3-4x^2+x+6}=1$.

8.r.12 Maj 2005

Zadanie 11. *(3 pkt)*

Wyznacz dziedzinę funkcji $f(x)=\log_{x^2-3}\left(x^3+4x^2-x-4\right)$ i zapisz ją w postaci sumy przedziałów liczbowych.

9.r.12 Grudzień 2005

Zadanie 11. (*6 pkt*)

Wyznacz wszystkie liczby całkowite k, dla których funkcja $f(x)=x^2-2^k\cdot x+2^k+\frac{5}{4}$ przyjmuje wartości dodatnie dla każdego $x\in R$.

10.r.12 Styczeń 2006

Zadanie 13. (*5 pkt*)

Wyznacz dziedzinę funkcji $f(x)=\log_x\left(4^x-12\cdot 2^x+32\right)$.

11.r.12 Maj 2006

Zadanie 20. (*4 pkt*)

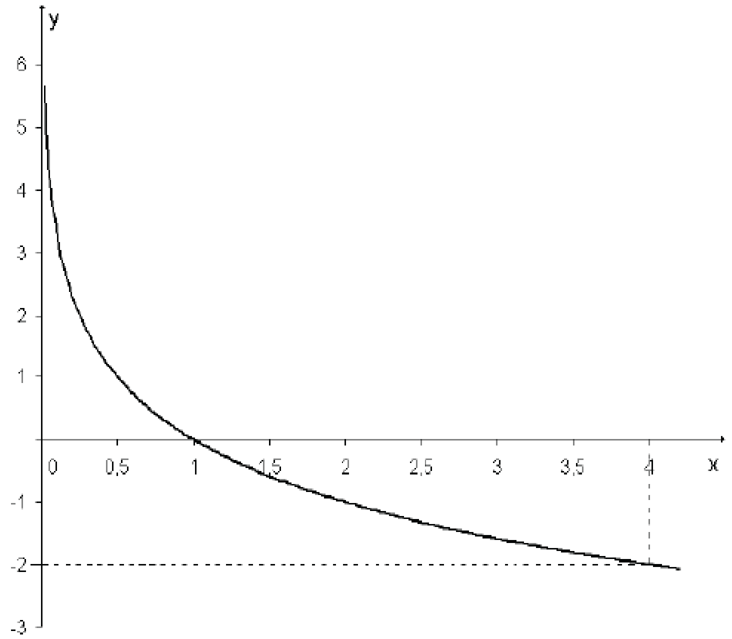
Dane są funkcje $f(x)=3^{x^2-5x}$ i $g(x)=\left(\frac{1}{9}\right)^{-2x^2-3x+2}$.

Oblicz, dla których argumentów x wartości funkcji f są większe od wartości funkcji g.

12.r.12 Listopad 2006

Zadanie 3. (*4 pkt*)

Na rysunku poniżej przedstawiono wykres funkcji logarytmicznej f.



Rozwiąż równanie $(f(x))^2-16=0$.

13.r.12 Maj 2007

Zadanie 2. (*5 pkt*)

Rozwiąż nierówność: $\log_{\frac{1}{3}}\left(x^2-1\right)+\log_{\frac{1}{3}}(5-x)>\log_{\frac{1}{3}}\left(3(x+1)\right)$.

14.r.12 Marzec 2008

Zadanie 3. ***(5 pkt)***

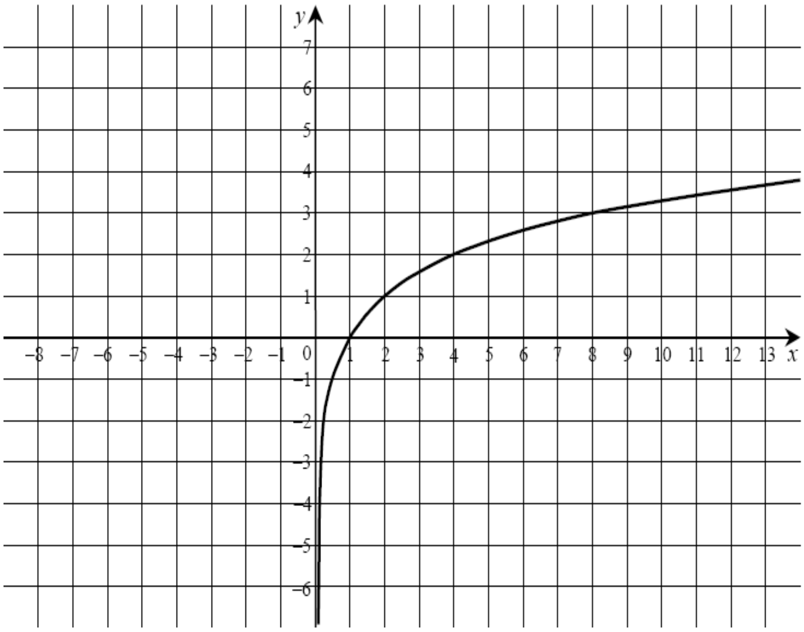
Na rysunku przedstawiony jest wykres funkcji logarytmicznej opisanej wzorem $f(x) = \log_p x$.

a) Na podstawie tego wykresu wyznacz p.

b) Oblicz $f(0{,}125)$.

c) Sporządź wykres funkcji $g(x) = \left|f(x-4)\right|$.

d) Podaj miejsce zerowe funkcji g.



15.r.12 Maj 2008

Zadanie 9. ***(4 pkt)***

Wyznacz dziedzinę i najmniejszą wartość funkcji $f(x) = \log_{\frac{\sqrt{2}}{2}}\left(8x - x^2\right)$.

16.r.12 Styczeń 2009

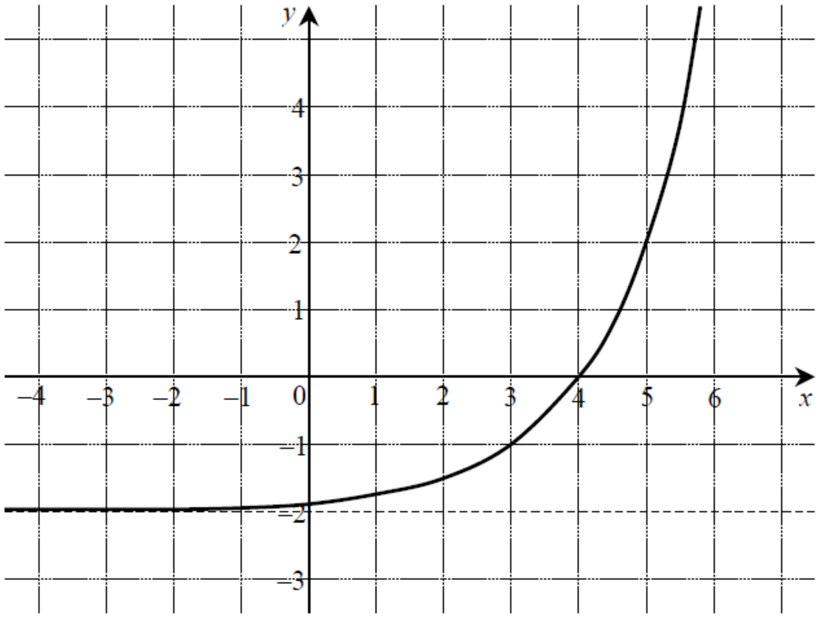
Zadanie 1. (*3 pkt*)

Na rysunku narysowano fragment wykresu funkcji $f(x) = 2^{x-3} - b$ określonej dla $x \in R$.

a) Podaj wartość b.

b) Naszkicuj wykres funkcji $g(x) = |f(x)|$.

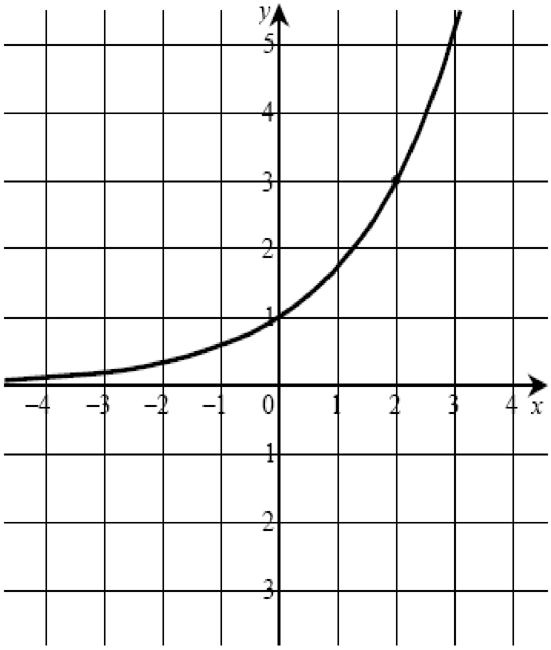
c) Podaj wszystkie wartości parametru p, dla których równanie $g(x) = p$ ma dokładnie jedno rozwiązanie.



17.r.12 Maj 2009

Zadanie 3. *(4 pkt)*

Na rysunku przedstawiony jest wykres funkcji wykładniczej $f(x) = a^x$ dla $x \in R$.



a) Oblicz a.

b) Narysuj wykres funkcji $g(x) = |f(x) - 2|$ i podaj wszystkie wartości parametru $m \in R$, dla których równanie $g(x) = m$ ma dokładnie jedno rozwiązanie.

18.r.12 Maj 2009

Zadanie 6. ***(5 pkt)***

Wyznacz dziedzinę funkcji $f(x)=\log_{2\cos x}\left(9-x^2\right)$ i zapisz ją w postaci sumy przedziałów liczbowych.

19.r.12 Grudzień 2013

Zadanie 9. (0–2)

Oblicz $\log_3\sqrt[4]{27}-\log_3\left(\log_3\sqrt[3]{\sqrt[3]{3}}\right)$.

Zakoduj cyfrę jedności i dwie pierwsze cyfry po przecinku rozwinięcia dziesiętnego otrzymanego wyniku.

20.r.12 Maj 2015-stara

Zadanie 1. ***(3 pkt)***

Wykaż, że dla każdej dodatniej liczby rzeczywistej x różnej od 1 oraz dla każdej dodatniej liczby rzeczywistej y różnej od 1 prawdziwa jest równość

$$\log_x(xy)\cdot\log_y\left(\frac{y}{x}\right)=\log_y(xy)\cdot\log_x\left(\frac{y}{x}\right).$$

21.r.12 Czerwiec 2015

Zadanie 8. (0−3)

Niech $a=\log_{12}2$. Wykaż, że $\log_6 64=\frac{6a}{1-a}$.

22.r.12 Maj 2016 – stara

Zadanie 1. ***(3 pkt)***

Niech $\log_7 4=a$. Wyznacz $\log_{\sqrt{2}}49$ w zależności od a.

23.r.12 Maj 2020

24.r.12 Maj 2021

Zadanie 6. (0–3)

Niech $\log_2 18=c$. Wykaż, że $\log_3 4=\frac{4}{c-1}$.

25.r.12 M

26.r.12 M

27.r.12 Koniec

Poziom podstawowy

1.p.13 Maj 2002

Zadanie 3. *(3 pkt)*

W klasie liczącej 30 uczniów, dziewięciu obejrzało film pt. „Nasz XXI wiek". Wychowawca klasy otrzymał 4 bilety i zamierza wylosować uczniów, których zaprosi na projekcję tego filmu. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia, że wśród czterech wylosowanych z tej klasy uczniów nie ma ucznia, który już ten film oglądał.

2.p.13 Styczeń 2003

Zadanie 8. *(3 pkt)*

Spośród wszystkich wierzchołków sześcianu wybieramy jednocześnie trzy wierzchołki. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że otrzymamy wierzchołki trójkąta równobocznego.

3.p.13 Maj 2003

Zadanie 10. *(2 pkt)*

Kupując los loterii można wygrać nagrodę główną, którą jest zestaw płyt kompaktowych lub jedną z 10 nagród książkowych. Przy zakupie jednego losu prawdopodobieństwo wygrania nagrody książkowej jest równe $\frac{1}{7}$. Oblicz, ile jest losów pustych.

4.p.13 Grudzień 2004

Zadanie 10. (*6 pkt*)

W pudełku znajdują się żetony. Wśród nich jest 6 żetonów o nominale 5 zł oraz n żetonów o nominale 10 zł. Losujemy z pudełka dwa żetony. Prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na wylosowaniu obu żetonów o nominale 10 zł jest równe $\frac{1}{2}$. Oblicz n.

5.p.13 Maj 2005

Zadanie 1. (*3 pkt*)

W pudełku są trzy kule białe i pięć kul czarnych. Do pudełka można albo dołożyć jedną kulę białą albo usunąć z niego jedną kulę czarną, a następnie wylosować z tego pudełka jedną kulę. W którym z tych przypadków wylosowanie kuli białej jest bardziej prawdopodobne? Wykonaj odpowiednie obliczenia.

6.p.13 Grudzień 2005

Zadanie 6. (*4 pkt*)

Do szkolnych zawodów szachowych zgłosiło się 16 uczniów, wśród których było dwóch faworytów. Organizatorzy zawodów zamierzają losowo podzielić szachistów na dwie jednakowo liczne grupy eliminacyjne, Niebieską i Żółtą. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że faworyci tych zawodów nie znajdą się w tej samej grupie eliminacyjnej. Końcowy wynik obliczeń zapisz w postaci ułamka nieskracalnego.

7.p.13 Styczeń 2006

Zadanie 2. (*3 pkt*)

Po *Wiadomościach z kraju i ze świata* telewizja TVG ma nadać pięć reklam: trzy reklamy różnych proszków do prania oraz dwie reklamy różnych past do zębów. Kolejność nadawania reklam jest ustalona losowo. Oblicz prawdopodobieństwo, że dwie reklamy produktów tego samego rodzaju nie będą nadane bezpośrednio jedna po drugiej. Wynik podaj w postaci nieskracalnego ułamka zwykłego.

8.p.13 Maj 2006

Zadanie 2. *(3 pkt)*

W wycieczce szkolnej bierze udział 16 uczniów, wśród których tylko czworo zna okolicę. Wychowawca chce wybrać w sposób losowy 3 osoby, które mają pójść do sklepu. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że wśród wybranych trzech osób będą dokładnie dwie znające okolicę.

9.p.13 Listopad 2006

Zadanie 6. *(5 pkt)*

W urnie znajdują się kule z kolejnymi liczbami 10, 11, 12, 13, ..., 50, przy czym kul z liczbą 10 jest 10, kul z liczbą 11 jest 11 itd., a kul z liczbą 50 jest 50. Z urny tej losujemy jedną kulę. Oblicz prawdopodobieństwo, że wylosujemy kulę z liczbą parzystą.

10.p.13 Maj 2007

Zadanie 8. *(4 pkt)*

Na stole leżało 14 banknotów: 2 banknoty o nominale 100 zł, 2 banknoty o nominale 50 zł i 10 banknotów o nominale 20 zł. Wiatr zdmuchnął na podłogę 5 banknotów. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że na podłodze leży dokładnie 130 zł. Odpowiedź podaj w postaci ułamka nieskracalnego.

11.p.13 Marzec 2008 (zesta1)

Zadanie 3. *(3 pkt)*

Każdej karcie bankomatowej jest przypisany numer identyfikacyjny zwany kodem PIN. Kod ten składa się z czterech cyfr (cyfry mogą się powtarzać, ale kodem PIN nie może być 0000). Oblicz prawdopodobieństwo, że w losowo utworzonym kodzie PIN żadna cyfra się nie powtórzy. Wynik podaj w postaci ułamka nieskracalnego.

12.p.13 Maj 2008

Zadanie 12. *(4 pkt)*

Rzucamy dwa razy symetryczną sześcienną kostką do gry. Oblicz prawdopodobieństwo każdego z następujących zdarzeń:

a) A – w każdym rzucie wypadnie nieparzysta liczba oczek.

b) B – suma oczek otrzymanych w obu rzutach jest liczbą większą od 9.

c) C – suma oczek otrzymanych w obu rzutach jest liczbą nieparzystą i większą od 9.

13.p.13 Styczeń 2009

Zadanie 2. (*3 pkt*)

Spośród cyfr 1, 2, 3, 4, 5, 6 losujemy kolejno dwa razy po jednej cyfrze ze zwracaniem. Tworzymy liczbę dwucyfrową w ten sposób, że pierwsza z wylosowanych cyfr jest cyfrą dziesiątek, a druga cyfrą jedności tej liczby. Oblicz prawdopodobieństwo utworzenia liczby większej od 52.

14.p.13 Maj 2010

Zadanie 33. *(4 pkt)*

Doświadczenie losowe polega na dwukrotnym rzucie symetryczną sześcienną kostką do gry. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia A polegającego na tym, że w pierwszym rzucie otrzymamy parzystą liczbę oczek i iloczyn liczb oczek w obu rzutach będzie podzielny przez 12. Wynik przedstaw w postaci ułamka zwykłego nieskracalnego.

15.p.13 Listopad 2010

Zadanie 31. *(2 pkt)*

Oblicz, ile jest liczb naturalnych czterocyfrowych, w których zapisie pierwsza cyfra jest parzysta, a pozostałe nieparzyste.

16.p.13 Maj 2011

Zadanie 30. *(2 pkt)*

Ze zbioru liczb $\{1, 2, 3, ..., 7\}$ losujemy kolejno dwa razy po jednej liczbie ze zwracaniem. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania liczb, których suma jest podzielna przez 3.

17.p.13 Maj 2012

Zadanie 31. *(2 pkt)*

Ze zbioru liczb $\{1,2,3,4,5,6,7\}$ losujemy dwa razy po jednej liczbie ze zwracaniem. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia A, polegającego na wylosowaniu liczb, których iloczyn jest podzielny przez 6.

18.p.13 Czerwiec 2012 (termin dodatkowy)

Zadanie 33. *(4 pkt)*

Oblicz, ile jest liczb naturalnych pięciocyfrowych, w zapisie których nie występuje zero, jest dokładnie jedna cyfra 7 i dokładnie jedna cyfra parzysta.

19.p.13 Maj 2014

Zadanie 30. *(2 pkt)*

Ze zbioru liczb $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ losujemy dwa razy po jednej liczbie ze zwracaniem. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia A, polegającego na wylosowaniu liczb, z których pierwsza jest większa od drugiej o 4 lub 6.

20.p.13 Sierpień 2014

Zadanie 34. *(4 pkt)*

Zbiór M tworzą wszystkie liczby naturalne dwucyfrowe, w zapisie których występują dwie różne cyfry spośród: 1, 2, 3, 4, 5. Ze zbioru M losujemy jedną liczbę, przy czym każda liczba z tego zbioru może być wylosowana z tym samym prawdopodobieństwem. Oblicz prawdopodobieństwo, że wylosujemy liczbę większą od 20, w której cyfra dziesiątek jest mniejsza od cyfry jedności.

21.p.13 Grudzień 2014

Zadanie 30. (0–4)

Zakupiono 16 biletów do teatru, w tym 10 biletów na miejsca od 1. do 10. w pierwszym rzędzie i 6 biletów na miejsca od 11. do 16. w szesnastym rzędzie. Jakie jest prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że 2 wylosowane bilety, spośród szesnastu, będą biletami na sąsiadujące miejsca?

22.p.13 Maj 2015-nowa (zadanie 33 – stara)

Zadanie 33. (0–4)

Wśród 115 osób przeprowadzono badania ankietowe, związane z zakupami w pewnym kiosku. W poniższej tabeli przedstawiono informacje o tym, ile osób kupiło bilety tramwajowe ulgowe oraz ile osób kupiło bilety tramwajowe normalne.

Rodzaj kupionych biletów	Liczba osób
ulgowe	76
normalne	41

Uwaga! 27 osób spośród ankietowanych kupiło oba rodzaje biletów.

Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że osoba losowo wybrana spośród ankietowanych nie kupiła żadnego biletu. Wynik przedstaw w formie nieskracalnego ułamka.

23.p.13 Czerwiec 2015

Zadanie 31. (0–2)

Ze zbioru liczb naturalnych dwucyfrowych losowo wybieramy jedną liczbę. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia A polegającego na tym, że otrzymamy liczbę podzielną przez 8 lub liczbę podzielną przez 12.

24.p.13 Czerwiec 2015 - stara

Zadanie 31. ***(2 pkt)***

Ze zbioru cyfr $\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ losujemy kolejno dwie cyfry (losowanie bez zwracania) i tworzymy liczby dwucyfrowe tak, że pierwsza wylosowana cyfra jest cyfrą dziesiątek, a druga – cyfrą jedności. Oblicz prawdopodobieństwo utworzenia liczby podzielnej przez 4.

25.p.13 Sierpień 2015

Zadanie 27. (0–2)

Mamy dwa pudełka: w pierwszym znajduje się 6 kul ponumerowanych kolejnymi liczbami od 1 do 6, a w drugim – 8 kul ponumerowanych kolejnymi liczbami od 1 do 8. Losujemy po jednej kuli z każdego pudełka i tworzymy liczbę dwucyfrową w ten sposób, że numer kuli wylosowanej z pierwszego pudełka jest cyfrą dziesiątek, a numer kuli wylosowanej z drugiego – cyfrą jedności tej liczby. Oblicz prawdopodobieństwo, że utworzona liczba jest podzielna przez 11.

26.p.13 Sierpień 2015 – stara

Zadanie 28. ***(2 pkt)***

Ze zbioru liczb naturalnych dwucyfrowych losowo wybieramy jedną liczbę. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia A polegającego na tym, że otrzymamy liczbę podzielną przez 9 lub podzielną przez 12.

27.p.13 Maj 2016

Zadanie 34. (0–4)

Ze zbioru wszystkich liczb naturalnych dwucyfrowych losujemy kolejno dwa razy po jednej liczbie bez zwracania. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że suma wylosowanych liczb będzie równa 30. Wynik zapisz w postaci ułamka zwykłego nieskracalnego.

28.p.13 Sierpień 2016

Zadanie 34. (0–2)

Ze zbioru siedmiu liczb naturalnych $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ losujemy dwie różne liczby. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że większą z wylosowanych liczb będzie liczba 5.

29.p.13 Maj 2017

Zadanie 33. (0–2)

Ze zbioru wszystkich liczb naturalnych dwucyfrowych losujemy jedną liczbę. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia, że wylosujemy liczbę, która jest równocześnie mniejsza od 40 i podzielna przez 3. Wynik zapisz w postaci ułamka zwykłego nieskracalnego.

30.p.13 Czerwiec 2017

Zadanie 31. (0–2)

Ze zbioru liczb $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15\}$ losujemy bez zwracania dwa razy po jednej liczbie. Wylosowane liczby tworzą parę (a, b), gdzie a jest wynikiem pierwszego losowania, b jest wynikiem drugiego losowania. Oblicz, ile jest wszystkich par (a, b) takich, że iloczyn $a \cdot b$ jest liczbą parzystą.

31.p.13 Sierpień 2017

Zadanie 30. (0–2)

Ze zbioru liczb $\{1, 2, 4, 5, 10\}$ losujemy dwa razy po jednej liczbie ze zwracaniem. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia A polegającego na tym, że iloraz pierwszej wylosowanej liczby przez drugą wylosowaną liczbę jest liczbą całkowitą.

32.p.13 Maj 2018

Zadanie 33. (0–4)

Dane są dwa zbiory: $A = \{100, 200, 300, 400, 500, 600, 700\}$ i $B = \{10, 11, 12, 13, 14, 15, 16\}$. Z każdego z nich losujemy jedną liczbę. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że suma wylosowanych liczb będzie podzielna przez 3. Obliczone prawdopodobieństwo zapisz w postaci nieskracalnego ułamka zwykłego.

33.p.13 Czerwiec 2018

Zadanie 31. (0–2)

Rzucamy cztery razy symetryczną monetą. Po przeprowadzonym doświadczeniu zapisujemy liczbę uzyskanych orłów (od 0 do 4) i liczbę uzyskanych reszek (również od 0 do 4). Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że w tych czterech rzutach liczba uzyskanych orłów będzie większa niż liczba uzyskanych reszek.

34.p.13 Sierpień 2018

Zadanie 33. (0–4)

Ze zbioru $A=\{-3,-2,-1,1,2,3\}$ losujemy liczbę a, natomiast ze zbioru $B=\{-1,0,1,2\}$ losujemy liczbę b. Te liczby są – odpowiednio – współczynnikiem kierunkowym i wyrazem wolnym funkcji liniowej $f(x)=ax+b$. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że otrzymana funkcja f jest rosnąca i ma dodatnie miejsce zerowe.

35.p.13 Maj 2019

Zadanie 30. (0–2)

Ze zbioru liczb $\{1,2,3,4,5\}$ losujemy dwa razy po jednej liczbie ze zwracaniem. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia A polegającego na wylosowaniu liczb, których iloczyn jest liczbą nieparzystą.

36.p.13 Czerwiec 2019

Zadanie 31. (0–2)

Doświadczenie losowe polega na trzykrotnym rzucie symetryczną sześcienną kostką do gry. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że otrzymamy sumę oczek równą 16.

37.p.13 Sierpień 2019

Zadanie 30. (0–2)

Ze zbioru wszystkich liczb naturalnych dwucyfrowych losujemy jedną liczbę. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia A polegającego na tym, że wylosowana liczba ma w zapisie dziesiętnym cyfrę dziesiątek, która należy do zbioru $\{1,3,5,7,9\}$, i jednocześnie cyfrę jedności, która należy do zbioru $\{0,2,4,6,8\}$.

38.p.13 Kwiecień 2020 (próbna)

Zadanie 30. (0–2)

Ze zbioru liczb $\{1,2,4,5,10\}$ losujemy dwa razy po jednej liczbie ze zwracaniem. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia A polegającego na tym, że iloraz pierwszej wylosowanej liczby przez drugą wylosowaną liczbę jest liczbą całkowitą.

39.p.13 Maj 2020

Zadanie 30. (0–2)

Rzucamy dwa razy symetryczną sześcienną kostką do gry, która na każdej ściance ma inną liczbę oczek – od jednego oczka do sześciu oczek. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia A polegającego na tym, że co najmniej jeden raz wypadnie ścianka z pięcioma oczkami.

40.p.13 Lipiec 2020

Zadanie 33. (0–4)

Rzucamy cztery razy symetryczną monetą. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia A, polegającego na tym, że liczba otrzymanych orłów będzie różna od liczby otrzymanych reszek.

41.p.13 Wrzesień 2020

Zadanie 31. (0–2)

W pudełku jest 8 kul, z czego 5 białych i 3 czarne. Do tego pudełka dołożono n kul białych. Doświadczenie polega na losowaniu jednej kuli z tego pudełka. Prawdopodobieństwo, że będzie to kula biała, jest równe $\frac{11}{12}$. Oblicz n.

42.p.13 Maj 2021

Zadanie 34. (0–2)

Gracz rzuca dwukrotnie symetryczną sześcienną kostką do gry i oblicza sumę liczb wyrzuconych oczek. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia A polegającego na tym, że suma liczb wyrzuconych oczek jest równa 4 lub 5, lub 6.

43.p.13 Czerwiec 2021

Zadanie 34. (0–2)

Ze zbioru wszystkich liczb naturalnych dwucyfrowych, których cyfra dziesiątek należy do zbioru $\{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, a cyfra jedności należy do zbioru $\{0, 1, 2, 3, 4\}$, losujemy jedną liczbę. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że wylosujemy liczbę dwucyfrową, która jest podzielna przez 4.

44.p.13 Sierpień 2021

Zadanie 34. (0–2)

Doświadczenie losowe polega na dwukrotnym rzucie symetryczną sześcienną kostką do gry, która na każdej ściance ma inną liczbę oczek – od jednego do sześciu oczek. Niech A oznacza zdarzenie polegające na tym, że iloczyn liczb oczek wyrzuconych w dwóch rzutach jest równy 12. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia A.

45.p.13 Maj 2022

Zadanie 34. (0–2)

Ze zbioru dziewięcioelementowego $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ losujemy kolejno ze zwracaniem dwa razy po jednej liczbie. Zdarzenie A polega na wylosowaniu dwóch liczb ze zbioru M, których iloczyn jest równy 24. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia A.

46.p.13 M

47.p.13 Koniec

1.r.13 Maj 2002

Zadanie 12. *(4 pkt)*

A i B są zdarzeniami losowymi i $P(B) > 0$.

Wykaż, że $P(A/B) \leq \dfrac{1-P(A')}{P(B)}$.

2.r.13 Styczeń 2003

Zadanie 13. *(4 pkt)*

Wyznacz te wartości parametrów a oraz b, przy których funkcja $g: R \to R$, określona

wzorem $g(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2+a}{x-2} & dla \quad x \neq 2 \\ b & dla \quad x = 2 \end{cases}$ jest ciągła w punkcie $x = 2$.

3.r.13 Styczeń 2003

Zadanie 16. *(4 pkt)*

Rzucamy pięć razy symetryczną kostką sześcienną. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia, polegającego na tym, że „jedynka" wypadnie co najmniej cztery razy.

4.r.13 Maj 2003

Zadanie 13. *(3 pkt)*

Niech Ω będzie zbiorem wszystkich zdarzeń elementarnych i $A \subset \Omega$, $B \subset \Omega$. Oblicz $P(A \cap B)$ wiedząc, że $P(A \cup B) = \dfrac{5}{8}$, $P(A) = \dfrac{1}{2}$, $P(B') = \dfrac{3}{4}$. Sprawdź, czy zdarzenia A i B są zdarzeniami niezależnymi ?

5.r.13 Maj 2003

Zadanie 16. *(5 pkt)*

Zawierając w kolekturze Toto-Lotka jeden zakład w grze „Expres-Lotek" zakreślamy 5 spośród 42 liczb. Oblicz prawdopodobieństwo trafienia co najmniej 4 spośród 5 wylosowanych liczb. Wynik podaj w zaokrągleniu do 0,00001.

6.r.13 Grudzień 2004

Zadanie 19. (*5 pkt*)

W pierwszej loterii jest n ($n > 2$) losów, w tym jeden los wygrywający. W drugiej loterii $2n$ losów, w tym dwa wygrywające. W której z loterii należy kupić dwa losy, aby mieć większą szansę wygranej ? Odpowiedź uzasadnij.

7.r.13 Styczeń 2005

Zadanie 19. (6 pkt.)

Krótki łańcuch choinkowy składa się z dwudziestu żarówek. Dla każdej z żarówek prawdopodobieństwo, że będzie działać przez co najmniej 300 godzin jest równe 0,9.

a) Oblicz prawdopodobieństwo tego, że w krótkim łańcuchu w ciągu 300 godzin przepali się co najwyżej jedna żarówka. W obliczeniach możesz przyjąć, że $(0,9)^{19} \approx 0,14$.

b) W skrzyni jest 6 łańcuchów krótkich i 4 łańcuchy długie. Do dekoracji choinki użyto cztery losowo wybrane łańcuchy. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że do dekoracji użyto dwóch łańcuchów krótkich i dwóch łańcuchów długich.

8.r.13 Maj 2005

Zadanie 13. (*4 pkt*)

Rzucamy n razy dwiema symetrycznymi sześciennymi kostkami do gry. Oblicz, dla jakich n prawdopodobieństwo otrzymania co najmniej raz tej samej liczby oczek na obu kostkach jest mniejsze od $\frac{671}{1296}$.

9.r.13 Grudzień 2005

Zadanie 14. (*4 pkt*)

Niech $A, B \subset \Omega$ będą zdarzeniami losowymi, takimi że $P(A) = \frac{5}{12}$ oraz $P(B) = \frac{7}{11}$.

Zbadaj, czy zdarzenia A i B są rozłączne.

10.r.13 Styczeń 2006

Zadanie 16. (*4 pkt*)

Para (Ω, P) jest przestrzenią probabilistyczną, a $A \subset \Omega$ i $B \subset \Omega$ są zdarzeniami niezależnymi. Wykaż, że jeżeli $P(A \cup B) = 1$, to jedno z tych zdarzeń jest zdarzeniem pewnym tj. $P(A) = 1$ lub $P(B) = 1$.

11.r.13 Maj 2006

Zadanie 15. (*4 pkt)*

Uczniowie dojeżdżający do szkoły zaobserwowali, że spóźnienie autobusu zależy od tego, który z trzech kierowców prowadzi autobus. Przeprowadzili badania statystyczne i obliczyli, że w przypadku, gdy autobus prowadzi kierowca A, spóźnienie zdarza się w 5% jego kursów, gdy prowadzi kierowca B w 20% jego kursów, a gdy prowadzi kierowca C w 50% jego kursów. W ciągu 5-dniowego tygodnia nauki dwa razy prowadzi autobus kierowca A, dwa razy kierowca B i jeden raz kierowca C. Oblicz prawdopodobieństwo spóźnienia się szkolnego autobusu w losowo wybrany dzień nauki.

12.r.13 Listopad 2006

Zadanie 9. (*3 pkt*)

Niech $A \subset \Omega$ i $B \subset \Omega$ będą zdarzeniami losowymi. Mając dane prawdopodobieństwa zdarzeń: $P(A) = 0,5$, $P(B) = 0,4$ i $P(A \setminus B) = 0,3$, zbadaj, czy A i B są zdarzeniami niezależnymi.

13.r.13 Maj 2007

Zadanie 6. (*4 pkt*)

Niech A, B będą zdarzeniami o prawdopodobieństwach $P(A)$ i $P(B)$. Wykaż, że jeżeli $P(A) = 0,85$ i $P(B) = 0,75$, to prawdopodobieństwo warunkowe spełnia nierówność $P(A|B) \geq 0,8$.

14.r.13 Marzec 2008

Zadanie 9. *(4 pkt)*

Grupa 4 kobiet i 4 mężczyzn, w tym jedno małżeństwo, wybrała się na pieszą wycieczkę. Na wąskiej ścieżce musieli iść gęsiego tzn. jedno za drugim. Zakładamy, że wszystkie możliwe ustawienia tych osób są jednakowo prawdopodobne. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia, że jako pierwsze pójdą kobiety i żona będzie szła bezpośrednio przed mężem. Sprawdź, czy to prawdopodobieństwo jest mniejsze od 0,001.

15.r.13 Maj 2008

Zadanie 10. *(4 pkt)*

Z pewnej grupy osób, w której jest dwa razy więcej mężczyzn niż kobiet, wybrano losowo dwuosobową delegację. Prawdopodobieństwo tego, że w delegacji znajdą się tylko kobiety jest równe 0,1. Oblicz, ile kobiet i ilu mężczyzn jest w tej grupie.

16.r.13 Styczeń 2009

Zadanie 4. (*4 pkt*)

Oblicz prawdopodobieństwo $P(A' \cap B')$, jeśli $P(A') = \frac{1}{3}$, $P(B') = \frac{1}{4}$ i $P(A \cap B) = \frac{1}{2}$.

17.r.13 Maj 2009

Zadanie 10. *(4 pkt)*

W urnie znajdują się jedynie kule białe i czarne. Kul białych jest trzy razy więcej niż czarnych. Oblicz, ile jest kul w urnie, jeśli przy jednoczesnym losowaniu dwóch kul prawdopodobieństwo otrzymania kul o różnych kolorach jest większe od $\frac{9}{22}$.

18.r.13 Maj 2012

Zadanie 8. *(4 pkt)*

Oblicz, ile jest liczb naturalnych ośmiocyfrowych takich, że iloczyn cyfr w ich zapisie dziesiętnym jest równy 12.

19.r.13 Maj 2012

Zadanie 11. ***(3 pkt)***

Zdarzenia losowe *A, B* są zawarte w Ω oraz $P(A \cap B') = 0,7$ (A' oznacza zdarzenie przeciwne do zdarzenia A, B' oznacza zdarzenie przeciwne do zdarzenia *B*).
Wykaż, że $P(A' \cap B) \le 0,3$.

20.r.13 Czerwiec 2012

Zadanie 12. ***(3 pkt)***

Zdarzenia losowe *A, B* są zawarte w Ω oraz $P(A \cap B') = 0,1$ i $P(A' \cap B) = 0,2$. Wykaż, że $P(A \cap B) \le 0,7$ (A' oznacza zdarzenie przeciwne do zdarzenia A, B' oznacza zdarzenie przeciwne do zdarzenia *B*).

21.r.13 Maj 2013

Zadanie 3. ***(3 pkt)***

Oblicz, ile jest liczb naturalnych sześciocyfrowych, w zapisie których występuje dokładnie trzy razy cyfra 0 i dokładnie raz występuje cyfra 5.

22.r.13 Maj 2013

Zadanie 11. ***(4 pkt)***

Rzucamy cztery razy symetryczną sześcienną kostką do gry. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że iloczyn liczb oczek otrzymanych we wszystkich czterech rzutach będzie równy 60.

23.r.13 Grudzień 2013

Zadanie 12. (0–3)

Janek przeprowadza doświadczenie losowe, w którym jako wynik może otrzymać jedną z liczb: $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$. Prawdopodobieństwo p_k otrzymania liczby k jest dane wzorem: $p_k = \frac{1}{64} \cdot \binom{6}{k}$.

Rozważamy dwa zdarzenia:

- zdarzenie A polegające na otrzymaniu liczby ze zbioru $\{1, 3, 5\}$,
- zdarzenie B polegające na otrzymaniu liczby ze zbioru $\{2, 3, 4, 5, 6\}$.

Oblicz prawdopodobieństwo warunkowe $P(A|B)$.

24.r.13 Grudzień 2013

Zadanie 17. (0–6)

Oblicz, ile jest stucyfrowych liczb naturalnych o sumie cyfr równej 4.

25.r.13 Maj 2014

Zadanie 11. ***(4 pkt)***

Z urny zawierającej 10 kul ponumerowanych kolejnymi liczbami od 1 do 10 losujemy jednocześnie trzy kule. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia A polegającego na tym, że numer jednej z wylosowanych kul jest równy sumie numerów dwóch pozostałych kul.

26.r.13 Grudzień 2014

Zadanie 16. (0–5)

Oblicz prawdopodobieństwo warunkowe, że w trzykrotnym rzucie symetryczną sześcienną kostką do gry otrzymamy co najmniej jedną „jedynkę”, pod warunkiem że otrzymamy co najmniej jedną „szóstkę”.

27.r.13 Maj 2015-nowa

Zadanie 11. (0–4)

W pierwszej urnie umieszczono 3 kule białe i 5 kul czarnych, a w drugiej urnie 7 kul białych i 2 kule czarne. Losujemy jedną kulę z pierwszej urny, przekładamy ją do urny drugiej i dodatkowo dokładamy do urny drugiej jeszcze dwie kule tego samego koloru, co wylosowana kula. Następnie losujemy dwie kule z urny drugiej. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że obie kule wylosowane z drugiej urny będą białe.

28.r.13 Maj 2015-stara

Zadanie 11. ***(3 pkt)***

Rozważmy rzut sześcioma kostkami do gry, z których każda ma inny kolor. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że uzyskany wynik rzutu spełnia równocześnie trzy warunki:

- dokładnie na dwóch kostkach otrzymano po jednym oczku;
- dokładnie na trzech kostkach otrzymano po sześć oczek;
- suma wszystkich otrzymanych liczb oczek jest parzysta.

29.r.13 Czerwiec 2015

Zadanie 13. (0−5)

Oblicz, ile jest wszystkich liczb naturalnych pięciocyfrowych parzystych, w których zapisie występują co najwyżej dwie dwójki.

30.r.13 Maj 2016

Zadanie 6. (0–2)

Wśród 10 tysięcy mieszkańców pewnego miasta przeprowadzono sondaż dotyczący budowy przedszkola publicznego. Wyniki sondażu przedstawiono w tabeli.

Badane grupy	Liczba osób popierających budowę przedszkola	Liczba osób niepopierających budowy przedszkola
Kobiety	5140	1860
Mężczyźni	2260	740

Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że losowo wybrana osoba, spośród ankietowanych, popiera budowę przedszkola, jeśli wiadomo, że jest mężczyzną. Zakoduj trzy pierwsze cyfry po przecinku nieskończonego rozwinięcia dziesiętnego otrzymanego wyniku.

31.r.13 Maj 2016 (nowa i stara)

Zadanie 14. (0–3)

Rozpatrujemy wszystkie liczby naturalne dziesięciocyfrowe, w zapisie których mogą występować wyłącznie cyfry 1, 2, 3, przy czym cyfra 1 występuje dokładnie trzy razy. Uzasadnij, że takich liczb jest 15 360.

32.r.13 Maj 2016 – star

Zadanie 10. ***(5 pkt)***

W urnie znajduje się 20 kul: 9 białych, 9 czerwonych i 2 zielone. Z tej urny losujemy bez zwracania 3 kule. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że co najmniej dwie z wylosowanych kul są tego samego koloru.

33.r.13 Maj 2017

Zadanie 11. (0–4)

W pudełku znajduje się 8 piłeczek oznaczonych kolejnymi liczbami naturalnymi od 1 do 8. Losujemy jedną piłeczkę, zapisujemy liczbę na niej występującą, a następnie zwracamy piłeczkę do urny. Tę procedurę wykonujemy jeszcze dwa razy i tym samym otrzymujemy zapisane trzy liczby. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania takich piłeczek, że iloczyn trzech zapisanych liczb jest podzielny przez 4. Wynik podaj w postaci ułamka zwykłego.

34.r.13 Maj 2017 stara

Zadanie 7. ***(4 pkt)***

Oblicz, ile jest liczb sześciocyfrowych, w których zapisie nie występuje zero, natomiast występują dwie dziewiątki, jedna szóstka i suma wszystkich cyfr jest równa 30.

35.r.13 Maj 2017 stara

Zadanie 8. ***(3 pkt)***

W dwóch pudełkach umieszczono po pięć kul, przy czym w pierwszym pudełku: 2 kule białe i 3 kule czerwone, a w drugim pudełku: 1 kulę białą i 4 kule czerwone. Z pierwszego pudełka losujemy jedną kulę i bez oglądania wkładamy ją do drugiego pudełka. Następnie losujemy jedną kulę z drugiego pudełka. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania kuli białej z drugiego pudełka.

36.r.13 Maj 2018

Zadanie 9. (0–4)

Z liczb ośmioelementowego zbioru $Z=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9\}$ tworzymy ośmiowyrazowy ciąg, którego wyrazy się nie powtarzają. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że żadne dwie liczby parzyste nie są sąsiednimi wyrazami utworzonego ciągu. Wynik przedstaw w postaci ułamka zwykłego nieskracalnego.

37.r.13 Maj 2018 – stara

Zadanie 4. ***(4 pkt)***

Z liczb ośmioelementowego zbioru $Z=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9\}$ tworzymy ośmiowyrazowy ciąg, którego wyrazy nie powtarzają się. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że żadne dwie liczby parzyste nie są sąsiednimi wyrazami utworzonego ciągu. Wynik przedstaw w postaci ułamka zwykłego nieskracalnego.

38.r.13 Maj 2019

Zadanie 6. (0–3)

Rozważamy wszystkie liczby naturalne pięciocyfrowe zapisane przy użyciu cyfr 1, 3, 5, 7, 9, bez powtarzania jakiejkolwiek cyfry. Oblicz sumę wszystkich takich liczb.

39.r.13 Maj 2019 – stara

Zadanie 10. ***(3 pkt)***

Ze zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ losujemy kolejno ze zwracaniem trzy liczby. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że dokładnie dwie spośród trzech wylosowanych liczb będą równe. Wynik zapisz w postaci ułamka nieskracalnego.

40.r.13 Kwiecień 2020 (próbna0

Zadanie 9. (0–4)

Ze zbioru wszystkich liczb naturalnych ośmiocyfrowych, w których zapisie dziesiętnym występują tylko cyfry ze zbioru $\{0, 1, 3, 5, 7, 9\}$, losujemy jedną. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że suma cyfr wylosowanej liczby jest równa 3.

41.r.13 Maj 2020

Zadanie 13. (0–4)

Oblicz, ile jest wszystkich siedmiocyfrowych liczb naturalnych, w których zapisie dziesiętnym występują dokładnie trzy cyfry 1 i dokładnie dwie cyfry 2.

42.r.13 Maj 2020

Zadanie 11. ***(4 pkt)***

Oblicz, ile jest wszystkich siedmiocyfrowych liczb naturalnych, w których zapisie dziesiętnym występują dokładnie trzy cyfry 1 i dokładnie dwie cyfry 2.

43.r.13 Marzec 2021

Zadanie 5. (0–2)

Oblicz, ile jest liczb dziesięciocyfrowych takich, że suma cyfr w każdej z tych liczb jest równa 13 i żadna cyfra nie jest zerem.

W poniższe kratki wpisz kolejno – od lewej do prawej – cyfrę setek, dziesiątek i jedności otrzymanego wyniku.

44.r.13 Maj 2021

Zadanie 9. (0–4)

Ze zbioru wszystkich liczb naturalnych czterocyfrowych losujemy jedną liczbę. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że wylosowana liczba jest podzielna przez 15, jeśli wiadomo, że jest ona podzielna przez 18.

45.r.13 M

46.r.13 Koniec

Poziom rozszerzony

1.r.14 Styczeń 2003

Zadanie 21. *(10 pkt)*

Na kuli o promieniu $R = 4$ cm opisujemy stożki o promieniu r i wysokości H. Spośród wszystkich takich stożków wyznacz ten, który ma najmniejszą objętość. Oblicz tę objętość. Oblicz promień i wysokość znalezionego stożka.

2.r.14 Maj 2003

Zadanie 12. *(5 pkt)*

Sprawdź, czy funkcja *f* określona wzorem

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x(x-1)(x-2)}{x^2-3x+2} & dla\ \ x \neq 1\ i\ x \neq 2 \\ 1 & dla\ \ x = 1 \\ 3 & dla\ \ x = 2 \end{cases}$$

jest ciągła w punktach $x = 1$ i $x = 2$. Sformułuj odpowiedź.

3.r.14 Maj 2003

Zadanie 18. *(5 pkt)*

W tabeli podane są wartości funkcji $f : (-3,4) \rightarrow \Re$ dla trzech argumentów.

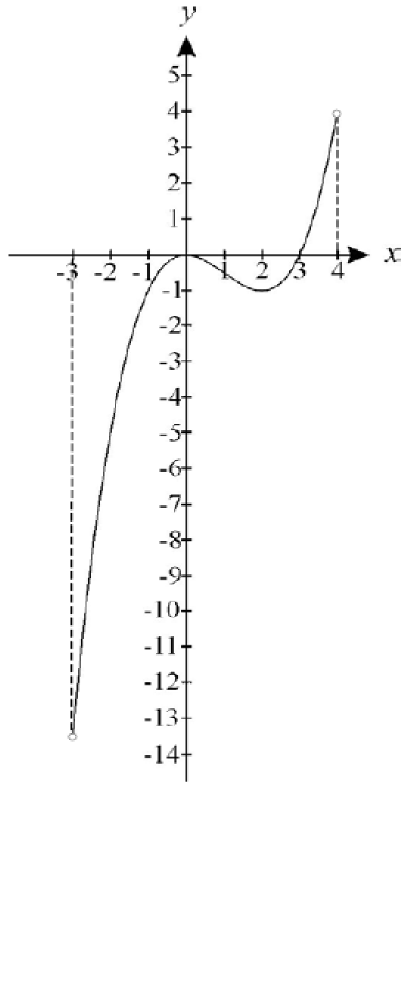
x	-2	0	3
$f(x)$	$3\frac{5}{8}$	$\frac{5}{8}$	-1

Rysunek przedstawia wykres pochodnej funkcji *f*.

a) Wyznacz równanie stycznej do wykresu funkcji f w punkcie o odciętej $x = 0$.

b) Wyznacz ekstremum funkcji *f*. Podaj argument, dla którego funkcja f osiąga ekstremum.

c) Podaj najmniejszą wartość funkcji *f*.



4.r.14 Grudzień 2004

Zadanie 20. (*7 pkt*)

Różnica ciągu arytmetycznego (a_n) jest liczbą mniejszą od 1. Wyznacz najmniejszą wartość wyrażenia $\frac{a_1 \cdot a_{49}}{a_{50}}$ wiedząc, że $a_{51} = 1$.

5.r.14 Maj 2005 (zadanie z pochodną)

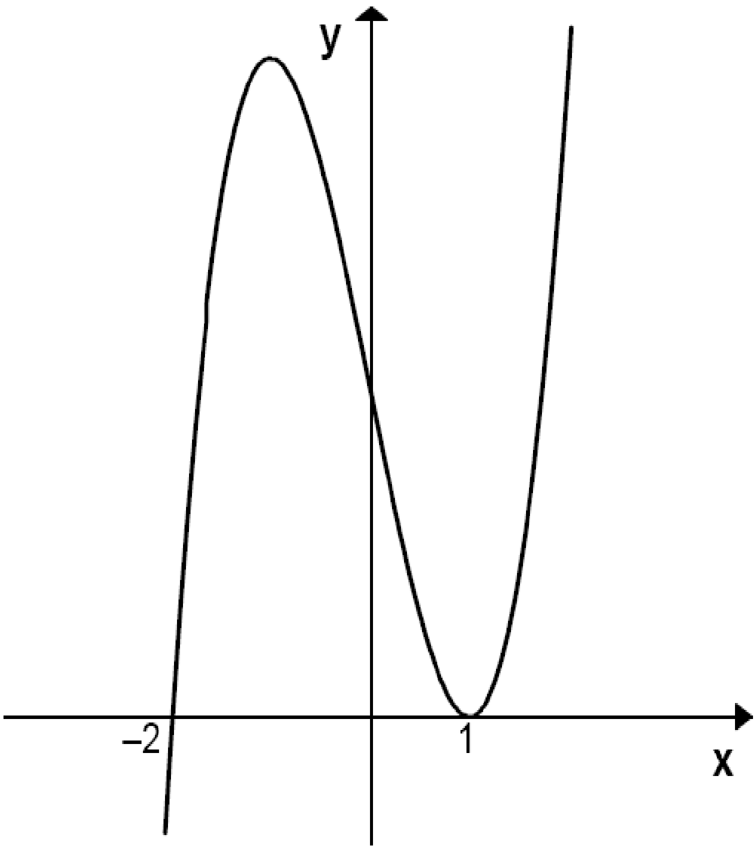
Zadanie 19. (*10 pkt*)

Dane jest równanie: $x^2 + (m-5)x + m^2 + m + \frac{1}{4} = 0$.

Zbadaj, dla jakich wartości parametru m stosunek sumy pierwiastków rzeczywistych równania do ich iloczynu przyjmuje wartość najmniejszą. Wyznacz tę wartość.

6.r.14 Grudzień 2005

Zadanie 12. (*5 pkt*)



Powyższy rysunek przedstawia fragment wykresu pewnej funkcji wielomianowej $W(x)$ stopnia trzeciego. Jedynymi miejscami zerowymi tego wielomianu są liczby (-2) oraz 1, a pochodna $W'(-2) = 18$.

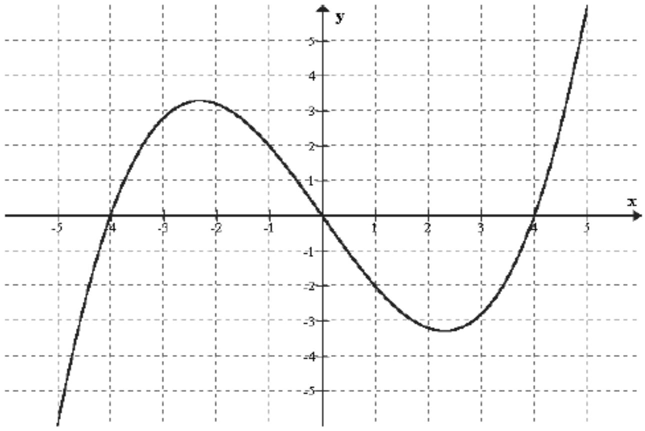
a) Wyznacz wzór wielomianu $W(x)$.

b) Wyznacz równanie prostej stycznej do wykresu tego wielomianu w punkcie o odciętej $x = 3$.

7.r.14 Styczeń 2006

Zadanie 17. (*5 pkt*)

Rysunek przedstawia wykres pochodnej funkcji *f*.



a) Podaj maksymalne przedziały, w których funkcja f jest malejąca.

b) Wyznacz wartość x, dla której funkcja f osiąga maksimum lokalne. Odpowiedź uzasadnij.

c) Wiedząc, że punkt $A=(1,2)$ należy do wykresu funkcji f, napisz równanie stycznej do krzywej f w punkcie A.

8.r.14 Maj 2006

Zadanie 21. (*5 pkt*)

W trakcie badania przebiegu zmienności funkcji ustalono, że funkcja f ma następujące własności:

– jej dziedziną jest zbiór wszystkich liczb rzeczywistych,
– f jest funkcją nieparzystą,
– f jest funkcją ciągłą

oraz:

$f'(x)<0$ dla $x\in(-8,-3)$,

$f'(x)>0$ dla $x\in(-3,-1)$,

$f'(x)<0$ dla $x\in(-1,0)$,

$f'(-3)=f'(-1)=0$,

$f(-8)=0$,

$f(-3)=-2$,

$f(-2)=0$,

$f(-1)=1$.

W prostokątnym układzie współrzędnych na płaszczyźnie naszkicuj wykres funkcji f w przedziale $\langle -8,8\rangle$, wykorzystując podane powyżej informacje o jej własnościach.

9.r.14 Listopad 2006

Zadanie 8. (*4 pkt*)

Uczeń analizował własności funkcji *f*, której dziedziną jest zbiór wszystkich liczb rzeczywistych i która ma pochodną $f'(x)$ dla każdego $x \in R$. Wyniki tej analizy zapisał w tabeli.

x	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 2)$	2	$(2, 3)$	3	$(3, +\infty)$
$f'(x)$	$(+)$	0	$(-)$	0	$(-)$	0	$(-)$
$f(x)$		2		-1		1	

Niestety, wpisując znaki pochodnej, popełnił jeden błąd.

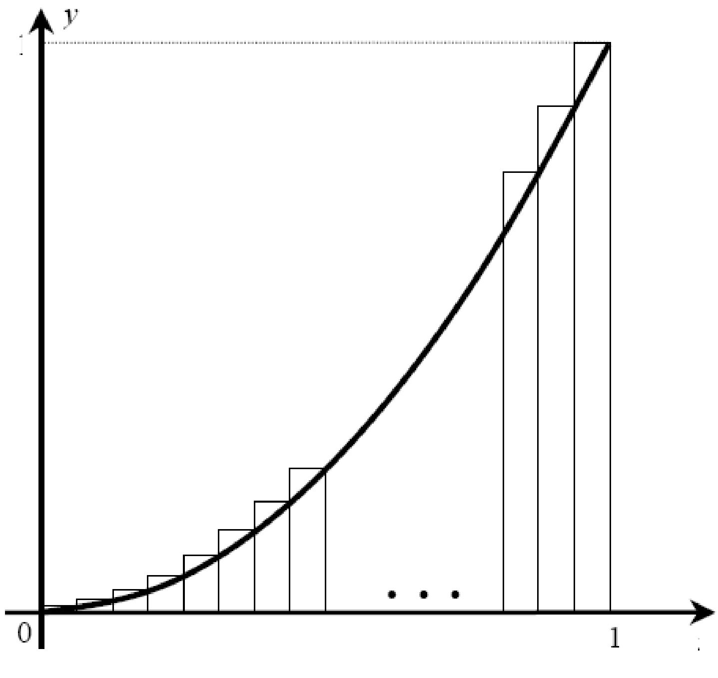
a) Przekreśl błędnie wpisany znak pochodnej i wstaw obok prawidłowy.

b) Napisz, czy po poprawieniu błędu w tabeli, zawarte w niej dane pozwolą określić dokładną liczbę miejsc zerowych funkcji f. Uzasadniając swoją odpowiedź możesz naszkicować przykładowe wykresy funkcji.

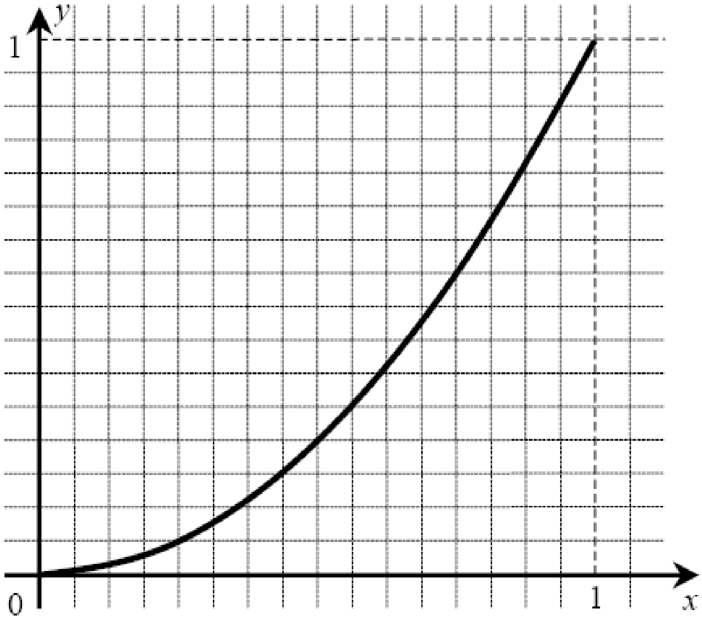
10.r.14 Marzec 2008

Zadanie 5. *(4 pkt)*

Pole obszaru ograniczonego wykresem funkcji $y = x^2$ dla $x \in \langle 0, 1\rangle$ i osią Ox możemy obliczyć z dowolną dokładnością, zwiększając liczbę n prostokątów o szerokości $\frac{1}{n}$ każdy (patrz rysunek) i sumując ich pola.



a) Przedstaw ilustrację graficzną takiej sytuacji dla $n = 4$ i oblicz sumę pól otrzymanych prostokątów.



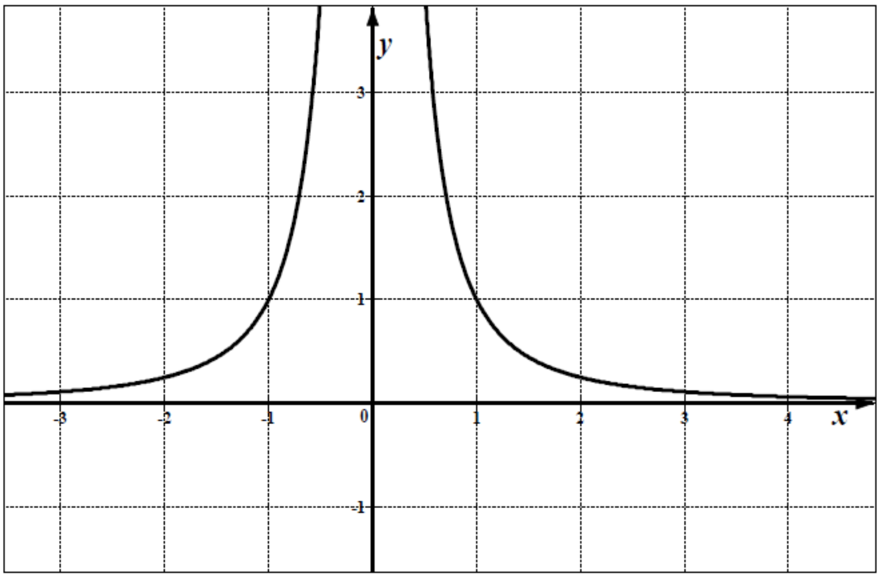
b) Oblicz sumę S_n pól n prostokątów, wykorzystując wzór:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

11.r.14 Maj 2010

Zadanie 8. ***(5 pkt)***

Rysunek przedstawia fragment wykresu funkcji $f(x) = \frac{1}{x^2}$. Przeprowadzono prostą równoległą do osi Ox, która przecięła wykres tej funkcji w punktach A i B. Niech $C = (3, -1)$. Wykaż, że pole trójkąta ABC jest większe lub równe 2.



12.r.14 Grudzień 2013

Zadanie 8. (0–2)
Dana jest funkcja f określona wzorem

$$f(x)=\frac{x-8}{x^2+6}$$

dla każdej liczby rzeczywistej x. Oblicz wartość pochodnej tej funkcji w punkcie $x=\frac{1}{2}$.

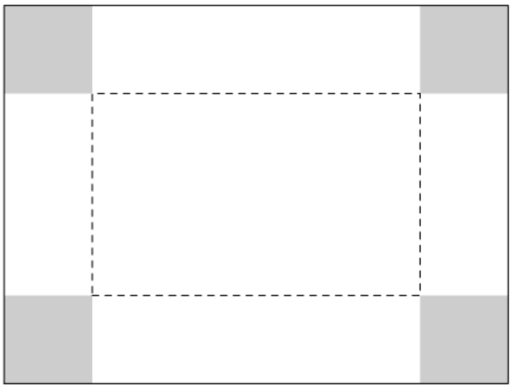
Zakoduj trzy pierwsze cyfry po przecinku rozwinięcia dziesiętnego otrzymanego wyniku.

13.r.14 Grudzień 2013

Zadanie 14. (0–3)
Dana jest parabola o równaniu $y=x^2+1$ i leżący na niej punkt A o współrzędnej x równej 3. Wyznacz równanie stycznej do tej paraboli w punkcie A.

14.r.14 Grudzień 2013

Zadanie 18. (0–7)
Dany jest prostokątny arkusz kartonu o długości 80 cm i szerokości 50 cm. W czterech rogach tego arkusza wycięto kwadratowe naroża (zobacz rysunek).



Następnie zagięto karton wzdłuż linii przerywanych, tworząc w ten sposób prostopadłościenne pudełko (bez przykrywki). Oblicz długość boku każdego z wyciętych kwadratowych naroży, dla której objętość otrzymanego pudełka jest największa. Oblicz tę maksymalną objętość.

15.r.14 Grudzień 2014

Zadanie 9. (0–2)

Funkcja f jest określona wzorem $f(x)=\frac{x^2}{x-4}$ dla każdej liczby rzeczywistej $x\neq 4$. Oblicz pochodną funkcji f w punkcie $x=12$.

16.r.14 Grudzień 2014

Zadanie 10. (0–3)

Funkcja f jest określona wzorem $f(x)=x^4$ dla każdej liczby rzeczywistej x. Wyznacz równanie prostej stycznej do wykresu funkcji f, która jest równoległa do prostej $y=4x+7$.

17.r.14 Maj 2015-nowa

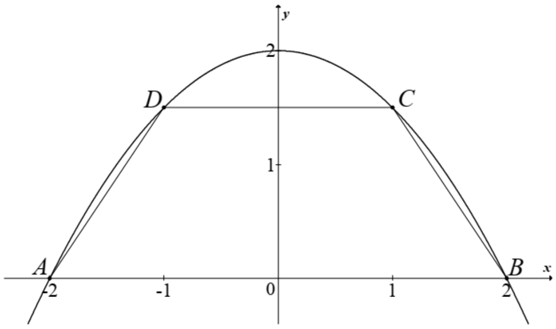
Zadanie 12. (0–4)

Funkcja f określona jest wzorem $f(x)=x^3-2x^2+1$ dla każdej liczby rzeczywistej x. Wyznacz równania tych stycznych do wykresu funkcji f, które są równoległe do prostej o równaniu $y=4x$.

18.r.14 Maj 2016

Zadanie 16. (0–7)

Parabola o równaniu $y=2-\frac{1}{2}x^2$ przecina oś Ox układu współrzędnych w punktach $A=(-2,0)$ i $B=(2,0)$. Rozpatrujemy wszystkie trapezy równoramienne *ABCD*, których dłuższą podstawą jest odcinek *AB*, a końce *C* i *D* krótszej podstawy leżą na paraboli (zobacz rysunek).



Wyznacz pole trapezu *ABCD* w zależności od pierwszej współrzędnej wierzchołka *C*. Oblicz współrzędne wierzchołka *C* tego z rozpatrywanych trapezów, którego pole jest największe.

19.r.14 Maj 2017

Zadanie 6. (0–3)

Funkcja f jest określona wzorem $f(x)=\dfrac{x-1}{x^2+1}$ dla każdej liczby rzeczywistej x. Wyznacz równanie stycznej do wykresu tej funkcji w punkcie $P=(1,0)$.

20.r.14 Maj 2017

Zadanie 15. (0–7)

Rozpatrujemy wszystkie walce o danym polu powierzchni całkowitej *P*. Oblicz wysokość i promień podstawy tego walca, którego objętość jest największa. Oblicz tę największą objętość.

21.r.14 Maj 2018

Zadanie 6. (0–3)

Styczna do paraboli o równaniu $y=\sqrt{3}x^2-1$ w punkcie $P=(x_0,y_0)$ jest nachylona do osi Ox pod kątem $30°$. Oblicz współrzędne punktu *P*.

22.r.14 Maj 2108

Zadanie 15. (0–7)

Rozpatrujemy wszystkie trapezy równoramienne, w które można wpisać okrąg, spełniające warunek: suma długości dłuższej podstawy a i wysokości trapezu jest równa 2.

a) Wyznacz wszystkie wartości a, dla których istnieje trapez o podanych własnościach.

b) Wykaż, że obwód L takiego trapezu, jako funkcja długości a dłuższej podstawy trapezu, wyraża się wzorem $L(a)=\frac{4a^2-8a+8}{a}$.

c) Oblicz tangens kąta ostrego tego spośród rozpatrywanych trapezów, którego obwód jest najmniejszy.

23.r.14 Maj 2019

Zadanie 5. (0–2)

Oblicz granicę

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{9n^3+11n^2}{7n^3+5n^2+3n+1}-\frac{n^2}{3n^2+1}\right)$$

Wpisz w poniższe kratki – od lewej do prawej – trzy kolejne cyfry po przecinku rozwinięcia dziesiętnego otrzymanego wyniku.

24.r.14 Maj 2019

Zadanie 7. (0–2)

Punkt $P=(10,2429)$ leży na paraboli o równaniu $y=2x^2+x+2219$. Prosta o równaniu kierunkowym $y=ax+b$ jest styczna do tej paraboli w punkcie P. Oblicz współczynnik b.

25.r.14 Kwiecień 2020 (próbna)

Zadanie 5. (0–2)

Oblicz współczynnik kierunkowy stycznej do wykresu funkcji $f(x)=\frac{x^2}{x-1}$, określonej dla każdej liczby rzeczywistej $x\neq 1$, poprowadzonej w punkcie $A=\left(6,\frac{36}{5}\right)$ tego wykresu.

W poniższe kratki wpisz kolejno cyfrę jedności, pierwszą i drugą cyfrę po przecinku skończonego rozwinięcia dziesiętnego otrzymanego wyniku.

26.r.14 Kwiecień 2020 (próbna)

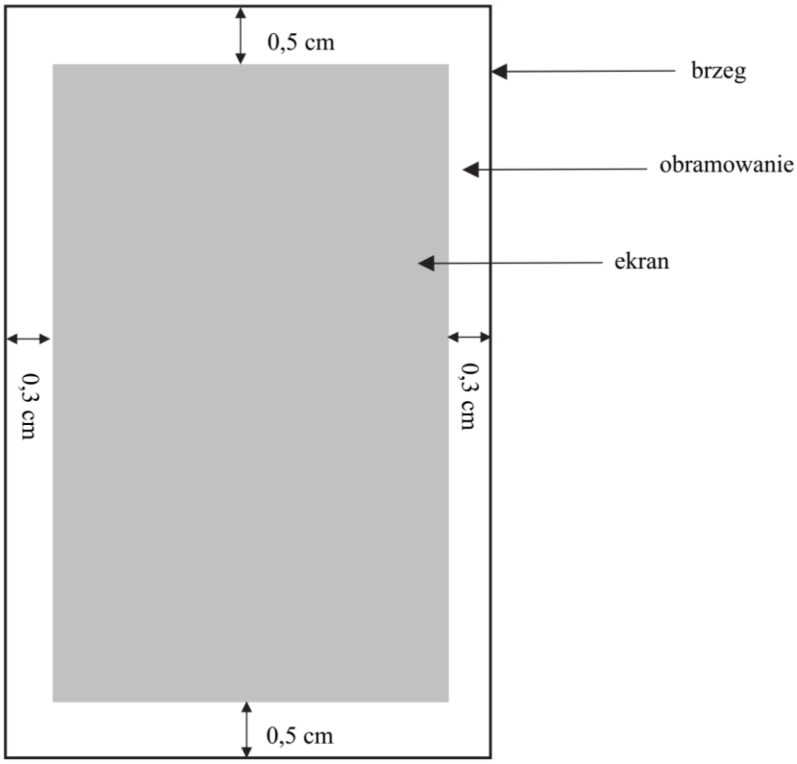
Zadanie 11. (0–4)

Dany jest nieskończony ciąg okręgów (o_n) o równaniach $x^2+y^2=2^{11-n}$, $n\geq 1$. Niech P_k będzie pierścieniem ograniczonym zewnętrznym okręgiem o_{2k-1} i wewnętrznym okręgiem o_{2k}. Oblicz sumę pól wszystkich pierścieni P_k, gdzie $k\geq 1$.

27.r.14 Maj 2020

Zadanie 15. (0–7)

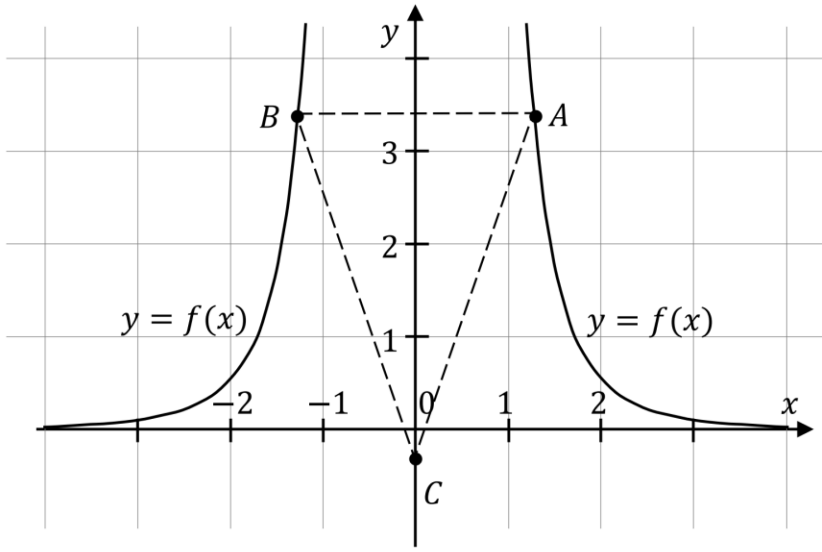
Należy zaprojektować wymiary prostokątnego ekranu smartfona, tak aby odległości tego ekranu od krótszych brzegów smartfona były równe 0,5 cm każda, a odległości tego ekranu od dłuższych brzegów smartfona były równe 0,3 cm każda (zobacz rysunek – ekran zaznaczono kolorem szarym). Sam ekran ma mieć powierzchnię 60 cm^2. Wyznacz takie wymiary ekranu smartfona, przy których powierzchnia ekranu wraz z obramowaniem jest najmniejsza.



28.r.14 Marzec 2021

Zadanie 15. (0–6)

Rozpatrujemy wszystkie trójkąty ABC, których wierzchołki A i B leżą na wykresie funkcji f określonej wzorem $f(x)=\frac{9}{x^4}$ dla $x\neq 0$. Punkt C ma współrzędne $\left(0,-\frac{1}{3}\right)$, a punkty A i B są położone symetrycznie względem osi Oy (zobacz rysunek). Oblicz współrzędne wierzchołków A i B, dla których pole trójkąta ABC jest najmniejsze. Oblicz to najmniejsze pole.



29.r.14 Maj 2021

Zadanie 5. (0–2)

Oblicz granicę $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(3n+2)^2-(1-2n)^2}{(2n-1)^2}$.

W poniższe kratki wpisz kolejno – od lewej do prawej – cyfrę jedności i pierwsze dwie cyfry po przecinku skończonego rozwinięcia dziesiętnego otrzymanego wyniku.

30.r.14 Maj 2021

Zadanie 15. (0–7)

Pewien zakład otrzymał zamówienie na wykonanie prostopadłościennego zbiornika (całkowicie otwartego od góry) o pojemności $144\ \mathrm{m}^3$. Dno zbiornika ma być kwadratem. Żaden z wymiarów zbiornika (krawędzi prostopadłościanu) nie może przekraczać 9 metrów. Całkowity koszt wykonania zbiornika ustalono w następujący sposób:

– 100 zł za $1\ \mathrm{m}^2$ dna

– 75 zł za $1\ \mathrm{m}^2$ ściany bocznej.

Oblicz wymiary zbiornika, dla którego tak ustalony koszt wykonania będzie najmniejszy.

31.r.14 Maj 2022

Zadanie 5. (0–2)

Ciąg (a_n) jest określony dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$ wzorem $a_n = \frac{(7p-1)n^3+5pn-3}{(p+1)n^3+n^2+p}$,

gdzie p jest liczbą rzeczywistą dodatnią.

Oblicz wartość p, dla której granica ciągu (a_n) jest równa $\frac{4}{3}$.

W poniższe kratki wpisz kolejno – od lewej do prawej – pierwszą, drugą oraz trzecią cyfrę po przecinku nieskończonego rozwinięcia dziesiętnego otrzymanego wyniku.

32.r.14 Maj 2022

Zadanie 15. (0–7)

Rozpatrujemy wszystkie trójkąty równoramienne o obwodzie równym 18.

a) Wykaż, że pole P każdego z tych trójkątów, jako funkcja długości b ramienia, wyraża się wzorem $P(b) = \frac{(18-2b) \cdot \sqrt{18b-81}}{2}$.

b) Wyznacz dziedzinę funkcji P.

c) Oblicz długości boków tego z rozpatrywanych trójkątów, który ma największe pole.

33.r.14 M

34.r.14 Koniec

15. INDUKCJA MATEMATYCZNA

Poziom rozszerzony

15.r.1 Maj 2003

Zadanie 20. *(6 pkt)*

Udowodnij stosując zasadę indukcji matematycznej, że dla każdego całkowitego, dodatniego n zachodzi równość: $2+5+8+...+(3n-1)=\frac{3}{2}n^2+\frac{1}{2}n$.

15.r.2 Grudzień 2005

Zadanie 19. (*6 pkt*)

Korzystając z zasady indukcji matematycznej, udowodnij, że każda liczba naturalna $n\geq 5$ spełnia nierówność $2^n>n^2+n-1$.

15.r.3 Maj 2006

Zadanie 12. (*5 pkt*)

Korzystając z zasady indukcji matematycznej wykaż, że dla każdej liczby naturalnej $n\geq 1$ prawdziwy jest wzór: $1\cdot 3\cdot (1!)^2+2\cdot 4\cdot (2!)^2+\dots+n(n+2)(n!)^2=\left[(n+1)!\right]^2-1$.

Zadania maturalne z lat 2020-2022.
Plik stworzony przez Dorotę Skowron
VIII LO Kraków