Centralna Komisja Egzaminacyjna w Warszawie

EGZAMIN MATURALNY 2011

MATEMATYKA

POZIOM PODSTAWOWY

Kryteria oceniania odpowiedzi

MAJ 2011

Zadanie 1. (0–1)

Obszar standardów	Opis wymagań	Poprawna odpowiedź (1 p.)
Wykorzystanie i tworzenie informacji	Wykorzystanie pojęcia wartości bezwzględnej	**C**

Zadanie 2. (0–1)

Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	Wykonanie obliczeń procentowych	**B**

Zadanie 3. (0–1)

Wykorzystanie i tworzenie informacji	Rozłożenie wielomianu na czynniki z zastosowaniem wyłączenia wspólnego czynnika poza nawias	**B**

Zadanie 4. (0–1)

Modelowanie matematyczne	Rozwiązanie układu równań	**D**

Zadanie 5. (0–1)

Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	Rozwiązanie równania liniowego i sprawdzenie czy rozwiązanie należy do danego przedziału	**D**

Zadanie 6. (0–1)

Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	Sprawdzenie, które z podanych liczb spełniają nierówność i wybranie z nich najmniejszej	**B**

Zadanie 7. (0–1)

Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	Zinterpretowanie rozwiązania nierówności kwadratowej i liniowej na osi liczbowej	**C**

Zadanie 8. (0–1)

Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	Wykorzystanie definicji logarytmu	**B**

Zadanie 9. (0–1)

Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	Określenie funkcji za pomocą wzoru i interpretowanie wykresów funkcji kwadratowych	**A**

Zadanie 10. (0–1)

Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	Obliczenie miejsca zerowego funkcji liniowej	**D**

Zadanie 11. (0–1)

Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	Zastosowanie wzory na *n*-ty wyraz ciągu geometrycznego	**D**

Zadanie 12. (0–1)

Użycie i tworzenie strategii	Zastosowanie wzoru na *n*-ty wyraz ciągu arytmetycznego	**C**

Zadanie 13. (0–1)

Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	Wyznaczenie wartości pozostałych funkcji tego samego kąta ostrego, gdy dana jest wartość jednej z nich	**A**

Zadanie 14. (0–1)

Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	Zastosowanie prostych związków między funkcjami trygonometrycznymi kąta ostrego	**B**

Zadanie 15. (0–1)

Użycie i tworzenie strategii	Znalezienie związków miarowych w przestrzeni	**C**

Zadanie 16. (0–1)

Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	Skorzystanie ze związków między kątem środkowym i kątem wpisanym	**B**

Zadanie 17. (0–1)

Użycie i tworzenie strategii	Znalezienie związków miarowych w figurach płaskich	**A**

Zadanie 18. (0–1)

Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	Zbadanie równoległości i prostopadłości prostych na podstawie ich równań kierunkowych	**C**

Zadanie 19. (0–1)

Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	Posłużenie się równaniem okręgu $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ i sprawdzanie czy dana prosta jest styczną	**B**

Zadanie 20. (0–1)

Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	Wyznaczenie związków miarowych w sześcianie	**D**

Zadanie 21. (0–1)

Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	Wyznaczenie związków miarowych w bryłach obrotowych	**B**

Zadanie 22. (0–1)

Modelowanie matematyczne	Zastosowanie twierdzenia znanego jako klasyczna definicja prawdopodobieństwa do obliczenia prawdopodobieństwa zdarzenia	**D**

Zadanie 23. (0–1)

Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	Obliczenie średniej arytmetycznej	**D**

Zadanie 24. (0–2)

Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	Rozwiązanie nierówności kwadratowej

Rozwiązanie

Rozwiązanie nierówności kwadratowej składa się z dwóch etapów.
Pierwszy etap może być realizowany na 2 sposoby:
I sposób rozwiązania (realizacja pierwszego etapu)
Znajdujemy pierwiastki trójmianu kwadratowego $3x^2-10x+3$

- obliczamy wyróżnik tego trójmianu:

$$\Delta=100-4\cdot 3\cdot 3=64 \text{ i stąd } x_1=\frac{10-8}{6}=\frac{1}{3} \text{ oraz } x_2=\frac{10+8}{6}=3$$

albo

- stosujemy wzory Viète'a:

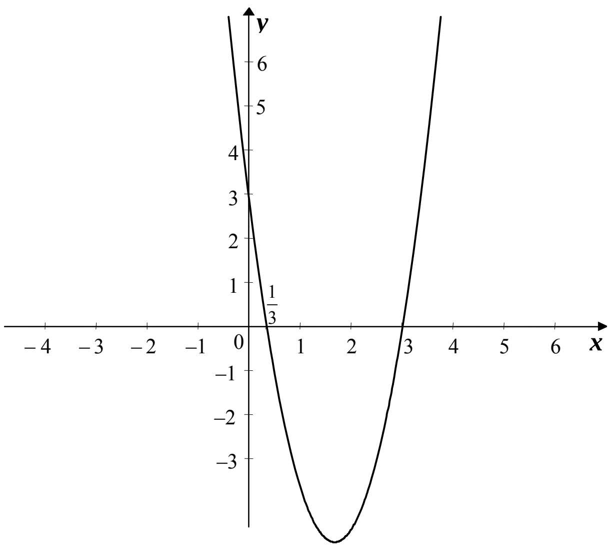
$$x_1+x_2=\frac{10}{3} \text{ oraz } x_1\cdot x_2=1 \text{ i stąd } x_1=\frac{1}{3} \text{ oraz } x_2=3$$

albo

- podajemy je bezpośrednio, np. zapisując pierwiastki trójmianu lub postać iloczynową trójmianu, lub zaznaczając na wykresie

$$x_1=\frac{1}{3},\ x_2=3 \text{ lub } 3\left(x-\frac{1}{3}\right)(x-3)$$

lub



II sposób rozwiązania (realizacja pierwszego etapu)
Wyznaczamy postać kanoniczną trójmianu kwadratowego $3x^2-10x+3$ i zapisujemy nierówność w postaci, np.

$$3\left(x-\frac{10}{6}\right)^2-\frac{64}{12}\le 0, \quad \text{stąd } 3\left[\left(x-\frac{10}{6}\right)^2-\frac{64}{36}\right]\le 0$$

a następnie

- przekształcamy nierówność, tak by jej lewa strona była zapisana w postaci iloczynowej
  $$3\left(x-\frac{10}{6}-\frac{8}{6}\right)\cdot\left(x-\frac{10}{6}+\frac{8}{6}\right)\le 0$$
  $$3(x-3)\cdot\left(x-\frac{1}{3}\right)\le 0$$

albo

- przekształcamy nierówność do postaci równoważnej, korzystając z własności wartości bezwzględnej
  $$\left(x-\frac{10}{6}\right)^2\le\frac{64}{36} \qquad \left|x-\frac{10}{6}\right|\le\frac{8}{6}$$

Drugi etap rozwiązania:

Podajemy zbiór rozwiązań nierówności: $\frac{1}{3}\le x\le 3$ lub $\left\langle\frac{1}{3},\, 3\right\rangle$ lub $x\in\left\langle\frac{1}{3},\, 3\right\rangle$.

<u>Schemat oceniania</u>

Zdający otrzymuje ....1 pkt

gdy:

- zrealizuje pierwszy etap rozwiązania i na tym poprzestanie lub błędnie zapisze zbiór rozwiązań nierówności, np.
  - obliczy lub poda pierwiastki trójmianu kwadratowego $x=\frac{1}{3}$, $x=3$ i na tym poprzestanie lub błędnie zapisze zbiór rozwiązań nierówności
  - zaznaczy na wykresie miejsca zerowe funkcji $f(x)=3x^2-10x+3$ i na tym poprzestanie lub błędnie zapisze zbiór rozwiązań nierówności
  - rozłoży trójmian kwadratowy na czynniki liniowe, np. $3\left(x-\frac{1}{3}\right)\cdot(x-3)$ i na tym poprzestanie lub błędnie rozwiąże nierówność
  - zapisze nierówność $\left|x-\frac{10}{6}\right|\le\frac{8}{6}$ i na tym poprzestanie lub błędnie zapisze zbiór rozwiązań nierówności

albo

- realizując pierwszy etap, popełni błąd (ale otrzyma dwa różne pierwiastki) i konsekwentnie do tego rozwiąże nierówność, np.
  - popełni błąd rachunkowy przy obliczaniu wyróżnika lub pierwiastków trójmianu kwadratowego i konsekwentnie do popełnionego błędu rozwiąże nierówność
  - błędnie zapisze równania wynikające ze wzorów Viète'a, np.: $x_1+x_2=-\frac{10}{3}$ i $x_1\cdot x_2=1$ lub $x_1+x_2=\frac{10}{3}$ i $x_1\cdot x_2=-1$ i konsekwentnie do popełnionego błędu rozwiąże nierówność

- o błędnie zapisze nierówność, np. $\left|x+\frac{10}{6}\right| \le \frac{8}{6}$ i konsekwentnie do popełnionego błędu rozwiąże nierówność.

Zdający otrzymuje .... 2 pkt

gdy:

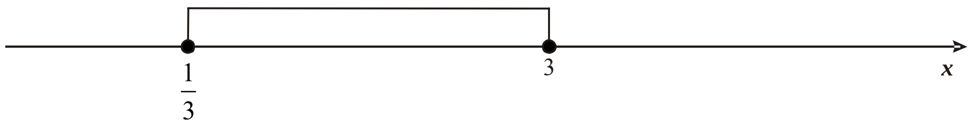
- poda zbiór rozwiązań nierówności: $\left\langle \frac{1}{3}, 3\right\rangle$ lub $x \in \left\langle \frac{1}{3}, 3\right\rangle$ lub $\frac{1}{3} \le x \le 3$,

albo

- sporządzi ilustrację geometryczną (oś liczbowa, wykres) i zapisze zbiór rozwiązań nierówności w postaci: $x \ge \frac{1}{3}$, $x \le 3$

albo

- poda zbiór rozwiązań nierówności w postaci graficznej z poprawnie zaznaczonymi końcami przedziałów



<u>**Uwaga**</u>

Jeżeli zdający poprawnie obliczy pierwiastki trójmianu $x_1 = \frac{1}{3}$ i $x_2 = 3$ i zapisze np. $x \in \left\langle -\frac{1}{3}, 3\right\rangle$, popełniając tym samym błąd przy przepisywaniu jednego z pierwiastków, to za takie rozwiązanie otrzymuje **2 punkty**.

Zadania 25. (0–2)

Rozumowanie i argumentacja	Uzasadnienie zależności arytmetycznej z zastosowaniem wzorów skróconego mnożenia

<u>**I sposób rozwiązania**</u>

Ponieważ $a+b=1$, więc $(a+b)^2=1$, czyli

$a^2+2ab+b^2=1$.

Ponieważ $a^2+b^2=7$, więc $2ab+7=1$. Stąd mamy, że $ab=-3$ i $a^2b^2=(ab)^2=9$.

Stosując wzory skróconego mnożenia, zapisujemy wyrażenie $a^4+b^4=31$ w postaci: $\left(a^2+b^2\right)^2-2a^2b^2=31$ czyli $7^2-2\cdot 9=31$ co należało uzasadnić.

<u>**II sposób rozwiązania**</u>

Przekształcamy tezę w sposób równoważny:

$a^4+b^4=31$

$\left(a^2+b^2\right)^2-2a^2b^2=31$

$49-2a^2b^2=31$

$a^2b^2=9$.

Korzystając z założeń $a^2+b^2=7$ i $a+b=1$, otrzymujemy $2ab+7=1$.
Stąd $ab=-3$. Zatem $a^2b^2=9$, co kończy dowód.

Schemat oceniania I i II sposobu rozwiązania

Zdający otrzymuje .... 1 pkt

gdy:
- korzystając z założeń obliczy, że $ab=-3$ i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy

albo
- przekształci tezę w sposób równoważny do postaci $a^2b^2=9$ i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy

Zdający otrzymuje .... 2 pkt

gdy przeprowadzi pełne rozumowanie.

III sposób rozwiązania

Tak jak w sposobie I obliczamy, że $ab=-3$.
Korzystamy ze wzoru dwumianowego Newtona:
$$(a+b)^4=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4=a^4+4ab\left(a^2+b^2\right)+6(ab)^2+b^4=$$
$$=a^4+b^4+4(-3)\cdot 7+6\cdot(-3)^2=a^4+b^4-84+54=a^4+b^4-30$$
Stąd $a^4+b^4=31$.

Schemat oceniania III sposobu rozwiązania

Zdający otrzymuje .... 1 pkt

gdy
- poda lub obliczy wartość wyrażenia $ab=-3$ i na tym poprzestanie lub dalej popełni błędy

albo
- wykorzysta wzór dwumianowy Newtona i zapisze np. $(a+b)^4=a^4+4ab\left(a^2+b^2\right)+6(ab)^2+b^4$.

Zdający otrzymuje .... 2 pkt

gdy przeprowadzi pełne rozumowanie.

IV sposób rozwiązania

Rozwiązujemy układ równań, wyznaczając a i b:
$$\begin{cases} a^2+b^2=7 \\ a+b=1 \end{cases}$$ stąd:

$$\begin{cases} a = \frac{1-\sqrt{13}}{2} \\ b = \frac{1+\sqrt{13}}{2} \end{cases} \quad \text{lub} \quad \begin{cases} a = \frac{1+\sqrt{13}}{2} \\ b = \frac{1-\sqrt{13}}{2} \end{cases}$$

Układ równań $\begin{cases} a^2 + b^2 = 7 \\ a + b = 1 \end{cases}$

możemy rozwiązać jednym z podanych sposobów.

I sposób

Podstawiamy $b = 1 - a$ do równania $a^2 + b^2 = 7$, stąd otrzymujemy równanie $a^2 + (1-a)^2 = 7$, które jest równoważne równaniu $2a^2 - 2a - 6 = 0$, czyli $a^2 - a - 3 = 0$.

Obliczamy $\Delta = 13$ oraz

$$\begin{cases} a = \frac{1-\sqrt{13}}{2} \\ b = \frac{1+\sqrt{13}}{2} \end{cases} \quad \text{lub} \quad \begin{cases} a = \frac{1+\sqrt{13}}{2} \\ b = \frac{1-\sqrt{13}}{2} \end{cases}$$

II sposób

Oznaczamy: $a = \frac{1}{2} + x$, $b = \frac{1}{2} - x$.

Wtedy $a^2 + b^2 = \frac{1}{2} + 2x^2 = 7$, stąd $2x^2 = \frac{13}{2}$, czyli $x^2 = \frac{13}{4}$, więc $x = \frac{\sqrt{13}}{2}$, $x = -\frac{\sqrt{13}}{2}$.

Stąd otrzymujemy:

$$\begin{cases} a = \frac{1-\sqrt{13}}{2} \\ b = \frac{1+\sqrt{13}}{2} \end{cases} \quad \text{lub} \quad \begin{cases} a = \frac{1+\sqrt{13}}{2} \\ b = \frac{1-\sqrt{13}}{2} \end{cases}$$

III sposób

Obliczamy $ab = -3$ tak jak w I sposobie rozwiązania. Mamy zatem układ równań:

$$\begin{cases} a + b = 1 \\ ab = -3 \end{cases}$$

Stąd otrzymujemy:

$$\begin{cases} a = \frac{1-\sqrt{13}}{2} \\ b = \frac{1+\sqrt{13}}{2} \end{cases} \quad \text{lub} \quad \begin{cases} a = \frac{1+\sqrt{13}}{2} \\ b = \frac{1-\sqrt{13}}{2} \end{cases}$$

Obliczamy a^4+b^4, korzystając ze wzoru $(c+d)^4+(c-d)^4=2c^4+12c^2d^2+2d^4$:

$$a^4+b^4=\left(\frac{1+\sqrt{13}}{2}\right)^4+\left(\frac{1-\sqrt{13}}{2}\right)^4=$$

$$=\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{13}}{2}\right)^4+\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{13}}{2}\right)^4=$$

$$=2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^4+12\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\left(\frac{\sqrt{13}}{2}\right)^2+2\cdot\left(\frac{\sqrt{13}}{2}\right)^4=$$

$$=\frac{1}{8}+3\cdot\frac{13}{4}+\frac{169}{8}=\frac{248}{8}=31$$

Uwaga

Zdający może także obliczyć:

$$a^4=\left(\frac{1+\sqrt{13}}{2}\right)^4=\left(\left(\frac{1+\sqrt{13}}{2}\right)^2\right)^2=\left(\frac{1+2\sqrt{13}+13}{4}\right)^2=\left(\frac{14+2\sqrt{13}}{4}\right)^2=\left(\frac{7+\sqrt{13}}{2}\right)^2=$$

$$=\frac{49+14\sqrt{13}+13}{4}=\frac{62+14\sqrt{13}}{4}=\frac{31+7\sqrt{13}}{2}\quad\text{albo}\quad a^4=\left(\frac{1-\sqrt{13}}{2}\right)^4=\frac{31-7\sqrt{13}}{2}$$

oraz

$$b^4=\left(\frac{1-\sqrt{13}}{2}\right)^4=\left(\left(\frac{1-\sqrt{13}}{2}\right)^2\right)^2=\left(\frac{1-2\sqrt{13}+13}{4}\right)^2=\left(\frac{14-2\sqrt{13}}{4}\right)^2=\left(\frac{7-\sqrt{13}}{2}\right)^2=$$

$$=\frac{49-14\sqrt{13}+13}{4}=\frac{62-14\sqrt{13}}{4}=\frac{31-7\sqrt{13}}{2}\quad\text{albo}\quad b^4=\left(\frac{1+\sqrt{13}}{2}\right)^4=\frac{31+7\sqrt{13}}{2}$$

Zatem $a^4+b^4=\dfrac{31+7\sqrt{13}}{2}+\dfrac{31-7\sqrt{13}}{2}=31$.

Schemat oceniania IV sposobu rozwiązania

Zdający otrzymuje .... 1 pkt

gdy obliczy jedną z wartości $a_1=\dfrac{1-\sqrt{13}}{2}$ lub $a_2=\dfrac{1+\sqrt{13}}{2}$ lub $b_1=\dfrac{1+\sqrt{13}}{2}$ lub $b_2=\dfrac{1-\sqrt{13}}{2}$

i na tym poprzestanie lub dalej popełni błędy

Zdający otrzymuje .... 2 pkt

gdy przeprowadzi pełne rozumowanie.

Uwaga

Jeżeli zdający obliczy jedną z wartości $a_1=\dfrac{1-\sqrt{13}}{2}$ lub $a_2=\dfrac{1+\sqrt{13}}{2}$, lub $b_1=\dfrac{1+\sqrt{13}}{2}$, lub $b_2=\dfrac{1-\sqrt{13}}{2}$ i uzasadni tezę tylko dla tej jednej wartości, to otrzymuje **2 punkty**.

Zadanie 26. (0–2)

Wykorzystanie i tworzenie informacji	Odczytanie z wykresu funkcji: zbioru wartości oraz maksymalnego przedziału, w którym funkcja maleje

<u>Rozwiązanie</u>

Odczytujemy z wykresu zbiór wartości funkcji: $\langle -2, 3\rangle$.

Zapisujemy przedział maksymalnej długości, w którym funkcja jest malejąca: $\langle -2, 2\rangle$.

<u>Schemat oceniania</u>

Zdający otrzymuje .... 1 pkt

gdy:
- zapisze zbiór wartości funkcji f : $\langle -2, 3\rangle$ i na tym poprzestanie

albo
- zapisze zbiór wartości funkcji f : $\langle -2, 3\rangle$ i błędnie zapisze przedział maksymalnej długości, w którym ta funkcja jest malejąca

albo
- zapisze przedział maksymalnej długości, w którym funkcja f jest malejąca: $\langle -2, 2\rangle$ i na tym poprzestanie

albo
- zapisze przedział maksymalnej długości, w którym funkcja f jest malejąca, np.: $\langle -2, 2\rangle$ i błędnie zapisze zbiór wartości funkcji f.

Zdający otrzymuje .... 2 pkt

gdy zapisze zbiór wartości funkcji f : $\langle -2, 3\rangle$ oraz przedział maksymalnej długości, w którym funkcja f jest malejąca: $\langle -2, 2\rangle$.

<u>Uwagi</u>
1. Zdający może zapisać przedział maksymalnej długości, w którym funkcja *f* jest malejąca, w postaci $-2 \le x \le 2$ lub $x \in \langle -2, 2\rangle$, lub $x \in \langle -2, 2)$, lub $x \in (-2, 2\rangle$, lub $x \in (-2, 2)$.
2. Zdający może zapisać zbiór wartości funkcji *f*, w postaci $-2 \le y \le 3$ lub $x \in \langle -2, 3\rangle$.
3. Zdający może zapisać przedział maksymalnej długości, w którym funkcja *f* jest malejąca, w postaci $\langle -2, 0\rangle \cup \langle 0, 2\rangle$.
4. Nie akceptujemy, jeżeli zdający zapisze przedział maksymalnej długości, w którym funkcja *f* jest malejąca, w postaci $\{-2, 2\}$.

Zadania 27. (0–2)

Modelowanie matematyczne	Zastosowanie wzorów na *n*-ty wyraz ciągu arytmetycznego lub wykorzystanie własności trzech kolejnych wyrazów tego ciągu

<u>I sposób rozwiązania</u>

Liczby $x,\ y,\ 19$ w podanej kolejności tworzą ciąg arytmetyczny, stąd $2y = x + 19$.
Zapisujemy więc układ równań

$$\begin{cases} 2y = x + 19 \\ x + y = 8 \end{cases}$$

którego rozwiązaniem jest $x = -1$ i $y = 9$.

<u>Schemat oceniania I sposobu rozwiązania</u>

Zdający otrzymuje .... 1 pkt

gdy wykorzysta własności ciągu arytmetycznego i zapisze równanie np. $2y = x + 19$ i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy.

Zdający otrzymuje .... 2 pkt

gdy obliczy: $x = -1$ i $y = 9$.

<u>Uwaga</u>
Zdający może jako rozwiązanie podać ciąg $(-1,\ 9,\ 19)$ i wtedy również otrzymuje **2 punkty**.

<u>II sposób rozwiązania</u>
Liczby $x,\ y,\ 19$ w podanej kolejności tworzą ciąg arytmetyczny. Niech r będzie różnicą tego ciągu i $x = a_1$, $y = a_2 = a_1 + r$, $19 = a_3 = a_1 + 2r$.
Otrzymujemy układ równań

$$\begin{cases} a_1 + a_1 + r = 8 \\ a_1 + 2r = 19 \end{cases}$$

Rozwiązaniem tego układu jest $a_1 = -1$, $r = 10$. Stąd: $x = a_1 = -1$, $y = a_2 = 9$.

<u>Uwaga</u>
Możemy również otrzymać następujące układy równań:

$$\begin{cases} 2a_1 + r = 8 \\ \dfrac{a_1 + 19}{2} = a_1 + r \end{cases} \quad \text{lub} \quad \begin{cases} y = x + r \\ 19 = x + 2r \\ x + y = 8 \end{cases}$$

<u>Schemat oceniania II sposobu rozwiązania</u>

Zdający otrzymuje .... 1 pkt

gdy wprowadzi oznaczenia $x = a_1$, $y = a_2 = a_1 + r$ i zapisze równanie $a_1 + 2r = 19$ i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy.

Zdający otrzymuje .... 2 pkt

gdy obliczy: $x = -1$ i $y = 9$.

III sposób rozwiązania

Wprowadzamy oznaczenia $x = a_1$, $y = a_2$, $19 = a_3$.
Obliczamy:
$S_3 = x + y + 19 = 8 + 19 = 27$.
Korzystając ze wzoru na sumę trzech początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego, otrzymujemy $\frac{a_1 + 19}{2} \cdot 3 = 27$.
Stąd $a_1 = -1$, zatem $x = -1$, $y = 9$.

Schemat oceniania III sposobu rozwiązania

Zdający otrzymuje.. 1 pkt
gdy wprowadzi oznaczenia $x = a_1$, $y = a_2$, $19 = a_3$ i zapisze równanie $\frac{a_1 + a_3}{2} \cdot 3 = 27$ i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy.
Zdający otrzymuje.. 2 pkt
gdy obliczy: $x = -1$ i $y = 9$.

Uwaga
Jeżeli zdający zapisze $x = -1$ i $y = 9$ bez obliczeń i nie uzasadni, że jest to jedyne rozwiązanie, to otrzymuje **1 punkt**.

Zadanie 28. (0–2)

Użycie i tworzenie strategii	Zastosowanie prostych związków między funkcjami trygonometrycznymi kąta ostrego

I sposób rozwiązania

Sprowadzamy wyrażenie $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = 2$ do wspólnego mianownika i otrzymujemy $\frac{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha} = 2$. Korzystając z tożsamości $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, otrzymujemy $\frac{1}{\sin\alpha\cos\alpha} = 2$, a stąd $\sin\alpha\cos\alpha = \frac{1}{2}$.

Schemat oceniania I sposobu rozwiązania

Zdający otrzymuje .... 1 pkt
gdy:

- sprowadzi wyrażenie $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = 2$ do wspólnego mianownika i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy.

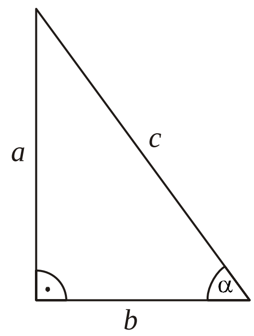
albo

- doprowadzi wyrażenie $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = 2$ do postaci $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$ i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy.

Zdający otrzymuje .... 2 pkt
gdy obliczy, że $\sin\alpha\cos\alpha = \frac{1}{2}$.

II sposób rozwiązania

Rysujemy trójkąt prostokątny, w którym oznaczamy długości przyprostokątnych a i b oraz zaznaczamy kąt ostry α taki, że $\sin\alpha = \frac{a}{c}$ lub $\cos\alpha = \frac{b}{c}$.



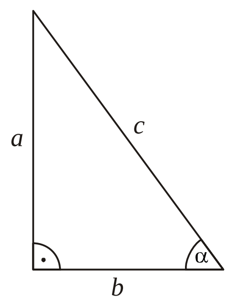
Korzystając z twierdzenia Pitagorasa, wyznaczamy długość przeciwprostokątnej: $c^2 = a^2 + b^2$.

Ponieważ $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = 2$, więc $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} = 2$, czyli $\frac{a^2+b^2}{a\cdot b} = 2$. Stąd $\frac{c^2}{a\cdot b} = 2$.

Ponieważ $\sin\alpha\cos\alpha = \frac{a\cdot b}{c^2}$, to $\sin\alpha\cos\alpha = \frac{1}{2}$.

III sposób rozwiązania

Rysujemy trójkąt prostokątny, w którym oznaczamy długości przyprostokątnych a i b oraz zaznaczamy kąt ostry α taki, że $\sin\alpha = \frac{a}{c}$ lub $\cos\alpha = \frac{b}{c}$.



Ponieważ $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = 2$, więc otrzymujemy kolejno:

$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} = 2$, $\frac{a^2+b^2}{ab} = 2$, $a^2 + b^2 = 2ab$,

stąd $(a-b)^2 = 0$, więc $a = b$. Zatem $\alpha = 45^\circ = \frac{\pi}{4}$.

Wtedy $\sin\alpha = \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$ i $\cos\alpha = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Obliczamy $\sin\alpha\cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2}$.

Schemat oceniania II i III sposobu rozwiązania

Zdający otrzymuje .... 1 pkt

gdy narysuje trójkąt prostokątny o przyprostokątnych długości a i b, zaznaczy w tym trójkącie kąt α i zapisze:

- $\sin\alpha = \frac{a}{c}$, $\cos\alpha = \frac{b}{c}$ i $\frac{a^2+b^2}{a\cdot b} = 2$ i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy

albo

- $\sin\alpha = \frac{a}{c}$, $\cos\alpha = \frac{b}{c}$ i $a^2+b^2 = 2a\cdot b$ i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Zdający otrzymuje .... 2 pkt

gdy obliczy, że $\sin\alpha\cos\alpha = \frac{1}{2}$.

Uwaga

Zdający może także odczytać z tablic przybliżone wartości funkcji trygonometrycznych i obliczyć: $\sin 45°\cdot\cos 45° \approx 0,7071\cdot 0,7071 \approx 0,4999 \approx 0,5$.

Nie akceptujemy innych przybliżeń.

IV sposób rozwiązania

Wyrażenie $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = 2$ zapisujemy w postaci $\mathrm{tg}\alpha + \frac{1}{\mathrm{tg}\alpha} = 2$.

Stąd $\mathrm{tg}^2\alpha - 2\mathrm{tg}\alpha + 1 = 0$.

Zatem $\mathrm{tg}\alpha = 1$ i stąd $\alpha = 45°$. Obliczamy wartość wyrażenia, $\sin 45°\cdot\cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2}$.

Schemat oceniania IV sposobu rozwiązania

Zdający otrzymuje .... 1 pkt

gdy zapisze równanie $\mathrm{tg}\alpha + \frac{1}{\mathrm{tg}\alpha} = 2$ i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Zdający otrzymuje .... 2 pkt

gdy obliczy $\sin\alpha\cos\alpha = \frac{1}{2}$.

V sposób rozwiązania

Zauważamy, że suma liczby i jej odwrotności jest równa 2 wtedy i tylko wtedy, gdy ta liczba jest równa 1. Zatem $\mathrm{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = 1$ i stąd $\alpha = 45°$, a więc $\sin 45°\cdot\cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2}$.

Schemat oceniania V sposobu rozwiązania

Zdający otrzymuje ....1 pkt

gdy zapisze, że suma liczby i jej odwrotności jest równa 2 wtedy i tylko wtedy, gdy ta liczba jest równa 1, zapisze $\mathrm{tg}\alpha = 1$ lub $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = 1$ i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Zdający otrzymuje ....2 pkt

gdy obliczy $\sin\alpha\cos\alpha = \frac{1}{2}$.

Uwaga

Jeżeli zdający w V sposobie rozwiązania zapisze bez uzasadnienia:

- $\mathrm{tg}\alpha = 1$ lub $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = 1$ lub $\alpha = 45°$ i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy, to otrzymuje **0 punktów**.
- $\mathrm{tg}\alpha = 1$ lub $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = 1$ lub $\alpha = 45°$ i poprawnie obliczy $\sin\alpha\cos\alpha = \frac{1}{2}$, to otrzymuje **1 punkt**.

Zadania 29. (0–2)

Rozumowanie i argumentacja	Uzasadnienie, że wskazany kąt jest prosty

I sposób rozwiązania

Niech $|\sphericalangle CED| = \alpha$. Ponieważ trójkąt *DCE* jest równoramienny i $|EC| = |CD|$, to $|\sphericalangle EDC| = |\sphericalangle CED| = \alpha$. Zatem $|\sphericalangle DCE| = 180° - 2\alpha$.

Podobnie, ponieważ trójkąt *ABE* jest równoramienny i $|\sphericalangle AEB| = |\sphericalangle EAB| = \beta$, to $|\sphericalangle ABE| = 180° - 2\beta$.

Kąty *ABE* i *DCE* są kątami wewnętrznymi trapezu *ABCD* i $|\sphericalangle DCE| + |\sphericalangle ABE| = 180°$.

Stąd $180° - 2\alpha + 180° - 2\beta = 180°$, czyli

$2\alpha + 2\beta = 180°$

$\alpha + \beta = 90°$.

Zatem $|\sphericalangle AED| = 180° - |\sphericalangle CED| - |\sphericalangle AEB| = 180° - \alpha - \beta = 180° - (\alpha + \beta) = 90°$.

Schemat oceniania I sposobu rozwiązania

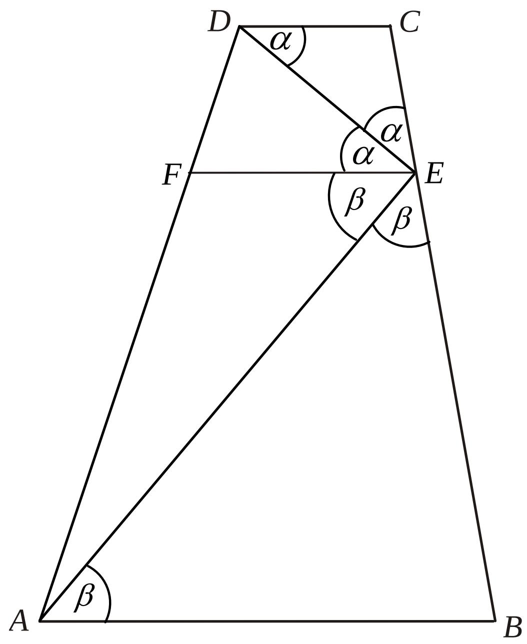
Zdający otrzymuje ....1 pkt

gdy napisze zależności między miarami kątów w trójkątach równoramiennych *ABE* i *DCE*, np. $|\sphericalangle DCE| = 180° - 2\alpha$ i $|\sphericalangle ABE| = 180° - 2\beta$ i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Zdający otrzymuje ....2 pkt

gdy poprawnie uzasadni, że $|\sphericalangle AED| = 90°$.

II sposób rozwiązania



Niech $|\sphericalangle CED| = \alpha$ i $|\sphericalangle AEB| = \beta$

Trójkąty *DCE* i *ABE* są równoramienne. Zatem $|\sphericalangle EDC| = |\sphericalangle CED| = \alpha$ oraz $|\sphericalangle AEB| = |\sphericalangle EAB| = \beta$.

Dorysowujemy w danym trapezie odcinek *EF* równoległy do podstaw trapezu *ABCD*.
Kąty naprzemianległe *CDE* i *DEF* mają równe miary, zatem $|\sphericalangle EDC| = |\sphericalangle DEF| = \alpha$.
Analogicznie $|\sphericalangle EAB| = |\sphericalangle AEF| = \beta$.

Zatem $|\sphericalangle BEC| = 180° = 2\alpha + 2\beta$, więc $\alpha + \beta = 90°$.

Stąd $|\sphericalangle AED| = 90°$, co kończy dowód.

Schemat oceniania II sposobu rozwiązania

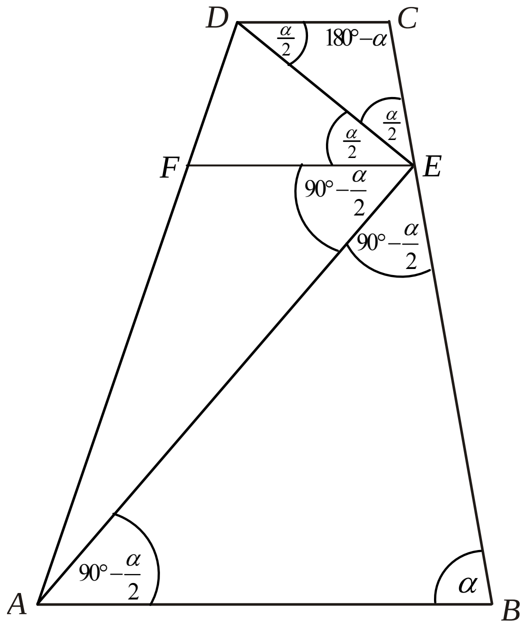
Zdający otrzymuje .... 1 pkt

gdy napisze, że trójkąty *DCE* i *ABE* są równoramienne, dorysuje odcinek *EF* równoległy do podstaw trapezu *ABCD* i zapisze, że $|\sphericalangle EDC| = |\sphericalangle DEF| = \alpha$ i $|\sphericalangle EAB| = |\sphericalangle AEF| = \beta$.

Zdający otrzymuje .... 2 pkt

gdy poprawnie uzasadni, że $|\sphericalangle AED| = 90°$ (uzasadnienie równości kątów może być przedstawione na rysunku).

III sposób rozwiązania



Niech $|\sphericalangle ABC| = \alpha$, stąd $|\sphericalangle BCD| = 180° - \alpha$.

Ponieważ $|CE| = |CD|$ i $|EB| = |BA|$, więc trójkąty *DCE* i *ABE* są równoramienne.

Zatem $|\sphericalangle AEB| = |\sphericalangle EAB| = \frac{180° - \alpha}{2} = 90° - \frac{\alpha}{2}$ oraz $|\sphericalangle EDC| = |\sphericalangle CED| = \frac{\alpha}{2}$.

Dorysowujemy w danym trapezie odcinek *EF* równoległy do podstaw trapezu *ABCD*, więc zachodzi równość: $|\sphericalangle EDC| = |\sphericalangle CED| = |\sphericalangle DEF| = \frac{\alpha}{2}$ i $|\sphericalangle AEB| = |\sphericalangle EAB| = |\sphericalangle AEF| = 90° - \frac{\alpha}{2}$

Stąd otrzymujemy $|\sphericalangle AED| = |\sphericalangle AEF| + |\sphericalangle DEF| = 90° - \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2} = 90°$.

Schemat oceniania III sposobu rozwiązania

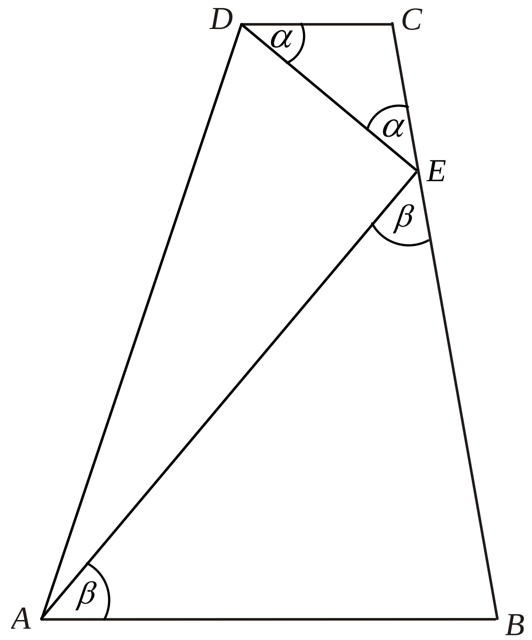
Zdający otrzymuje ....1 pkt

gdy napisze, że trójkąty *DCE* i *ABE* są równoramienne i przyjmie, że $|\sphericalangle ABC| = \alpha$, dorysuje odcinek *EF* równoległy do podstaw trapezu *ABCD* i zapisze, że $|\sphericalangle AEB| = |\sphericalangle EAB| = |\sphericalangle AEF| = \frac{180° - \alpha}{2}$ i $|\sphericalangle EDC| = |\sphericalangle CED| = |\sphericalangle DEF| = \frac{\alpha}{2}$.

Zdający otrzymuje ....2 pkt

gdy poprawnie uzasadni, że $|\sphericalangle AED| = 90°$ (uzasadnienie równości kątów może być przedstawione na rysunku).

IV sposób rozwiązania



Niech $|\sphericalangle CED| = \alpha$. Ponieważ trójkąt *DCE* jest równoramienny i $|EC| = |CD|$, to $|\sphericalangle EDC| = |\sphericalangle CED| = \alpha$. Podobnie, ponieważ trójkąt *ABE* jest równoramienny, to $|\sphericalangle AEB| = |\sphericalangle EAB| = \beta$

Kąty *ADC* i *BAD* są kątami wewnętrznymi trapezu *ABCD* i $|\sphericalangle ADC| + |\sphericalangle BAD| = 180^\circ$.

Stąd $|\sphericalangle ADE| + |\sphericalangle EAD| = 180^\circ - (\alpha + \beta)$.

Zatem w trójkącie *DAE* mamy: $|\sphericalangle AED| = 180^\circ - [180^\circ - (\alpha + \beta)] = \alpha + \beta$.

Stąd $|\sphericalangle BEC| = 180^\circ = |\sphericalangle DEC| + |\sphericalangle AED| + |\sphericalangle AEB| = 2\alpha + 2\beta$, czyli $\alpha + \beta = 90^\circ$.

Zatem $|\sphericalangle AED| = 90^\circ$.

Schemat oceniania IV sposobu rozwiązania

Zdający otrzymuje .... 1 pkt

gdy zapisze zależności między miarami kątów w trójkątach równoramiennych *ABE* i *DCE*, np. $|\sphericalangle EDC| = |\sphericalangle CED| = \alpha$ oraz $|\sphericalangle AEB| = |\sphericalangle EAB| = \beta$ i zapisze, że $|\sphericalangle ADC| + |\sphericalangle BAD| = 180^\circ$.

Zdający otrzymuje .... 2 pkt

gdy poprawnie uzasadni, że $|\sphericalangle AED| = 90^\circ$.

Uwaga

Jeżeli zdający przyjmie dodatkowe założenia o trapezie *ABCD*, przez co rozważa tylko szczególny przypadek, np. $|\sphericalangle ABC| = 90^\circ$ lub $|\sphericalangle DEC| = 45^\circ$, to za całe rozwiązanie otrzymuje **0 punktów**.

Zadanie 30. (0–2)

Użycie i tworzenie strategii	Obliczenie prawdopodobieństwa zdarzenia

__I sposób rozwiązania__ (metoda klasyczna)

Zdarzeniami elementarnymi są wszystkie pary (a,b) liczb z podanego zbioru. Jest to model klasyczny. Obliczamy liczbę wszystkich zdarzeń elementarnych: $|\Omega| = 7^2$.

Obliczamy liczbę zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu A polegającym na otrzymaniu liczb, których suma jest podzielna przez 3, np. wypisując je i zliczając: $A=\{(1,2),(1,5),(2,1),(2,4),(2,7),(3,3),(3,6),(4,2),(4,5)(5,1),(5,4),(5,7),(6,3),(6,6),(7,2),(7,5)\}$,

czyli $|A|=16$

Obliczamy prawdopodobieństwo zdarzenia A: $P(A)=\frac{16}{49}$.

__II sposób rozwiązania__ (metoda tabeli)

Zdarzeniami elementarnymi są wszystkie pary (a,b) liczb z podanego zbioru. Jest to model klasyczny. Tworzymy tabelę ilustrującą sytuację opisaną w zadaniu

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
1		X			X		
2	X			X			X
3			X			X	
4		X			X		
5	X			X			X
6			X			X	
7		X			X		

Obliczamy liczbę wszystkich zdarzeń elementarnych: $|\Omega| = 7^2$.

Zliczamy oznaczone krzyżykami zdarzenia elementarne sprzyjające zdarzeniu A: $|A|=16$.

Obliczamy prawdopodobieństwo zdarzenia A: $P(A)=\frac{16}{49}$.

__Schemat oceniania I i II sposobu rozwiązania__

Zdający otrzymuje ....1 pkt

gdy

- obliczy liczbę wszystkich możliwych zdarzeń elementarnych: $|\Omega| = 7^2 = 49$

albo

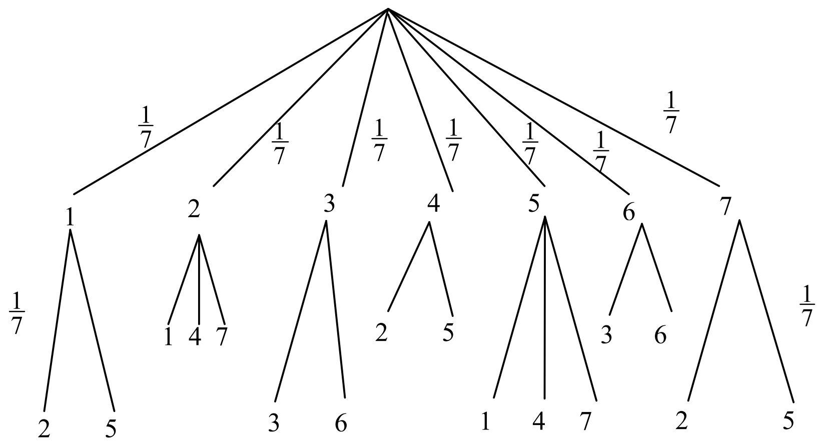
- obliczy liczbę zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu A: $|A|=16$

Zdający otrzymuje ....2 pkt

gdy obliczy prawdopodobieństwo zdarzenia A: $P(A)=\frac{16}{49}$.

<u>III sposób rozwiązania</u> (metoda drzewa)

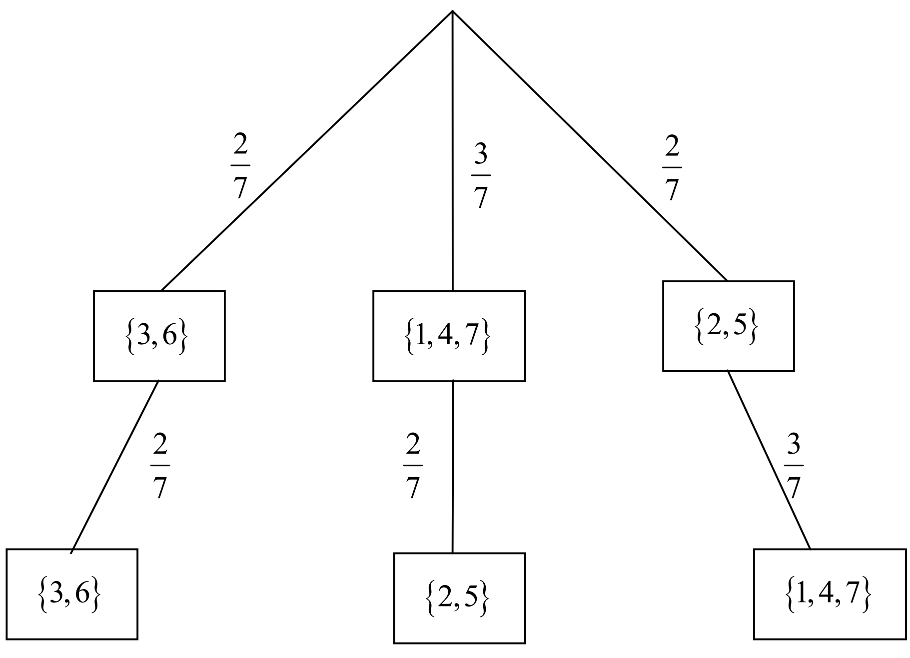
Rysujemy drzewo, uwzględniając tylko istotne gałęzie. Prawdopodobieństwo na każdym odcinku tego drzewa jest równe $\frac{1}{7}$.



Obliczamy prawdopodobieństwo zdarzenia *A*: $P(A) = 16 \cdot \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{7} = \frac{16}{49}$.

<u>IV sposób rozwiązania</u> (metoda drzewa)

Rysujemy drzewo, uwzględniając tylko istotne gałęzie i zapisujemy na nich prawdopodobieństwo.



Obliczamy prawdopodobieństwo zdarzenia *A*: $P(A) = \frac{2}{7} \cdot \frac{2}{7} + \frac{3}{7} \cdot \frac{2}{7} + \frac{2}{7} \cdot \frac{3}{7} = \frac{16}{47}$

Schemat oceniania III i IV sposobu rozwiązania

Zdający otrzymuje .... 1 pkt

gdy:

- narysuje pełne drzewo i przynajmniej na jednej gałęzi opisze prawdopodobieństwo

albo

- narysuje drzewo tylko z istotnymi gałęziami.

Zdający otrzymuje .... 2 pkt

gdy obliczy prawdopodobieństwo zdarzenia A: $P(A)=\frac{16}{49}$.

Uwagi

1. Jeśli zdający rozwiąże zadanie do końca i otrzyma $P(A)>1$, to otrzymuje za całe rozwiązanie **0 punktów**.
2. Jeżeli zdający opuści przez nieuwagę w rozwiązaniu niektóre gałęzie i konsekwentnie obliczy prawdopodobieństwo, to za całe rozwiązanie otrzymuje **1 punkt**.
3. Jeżeli zdający poprawnie obliczy prawdopodobieństwo i błędnie skróci ułamek, np. $P(A)=\frac{16}{49}=\frac{4}{7}$, to otrzymuje **2 punkty**.

Zadanie 31. (0–4)

Użycie i tworzenie strategii	Wyznaczenie współrzędnych punktu styczności prostej z okręgiem

I sposób rozwiązania

Wyznaczamy współczynnik kierunkowy m prostej prostopadłej do prostej o równaniu $y=2x-3$: $m=-\frac{1}{2}$.

Zapisujemy równanie prostej prostopadłej do stycznej i przechodzącej przez punkt $S=(3,7)$:

$$y=-\frac{1}{2}x+\frac{17}{2}.$$

Zapisujemy i rozwiązujemy układ równań:

$$\begin{cases} y=2x-3 \\ y=-\frac{1}{2}x+\frac{17}{2} \end{cases}$$

$$-\frac{1}{2}x+\frac{17}{2}=2x-3$$

$$x=\frac{23}{5}$$

Stąd $y=\frac{31}{5}$.

Zatem punkt styczności ma współrzędne: $\left(\frac{23}{5},\frac{31}{5}\right)$.

Schemat oceniania I sposobu rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania .... 1 pkt

Zapisanie współczynnika kierunkowego prostej prostopadłej do prostej o równaniu $y = 2x - 3$, np. $m = -\frac{1}{2}$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 2 pkt

Zapisanie układ równań $\begin{cases} y = 2x - 3 \\ y = -\frac{1}{2}x + \frac{17}{2} \end{cases}$

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 3 pkt

Przekształcenie układu równań do równania z jedną niewiadomą, np.

$-\frac{1}{2}x + \frac{17}{2} = 2x - 3$ lub $y = -\frac{1}{4}y - \frac{3}{4} + \frac{17}{2}$.

Rozwiązanie pełne .... 4 pkt

Obliczenie współrzędnych punktu styczności: $\left(\frac{23}{5}, \frac{31}{5}\right)$.

Uwaga

Jeśli zdający zapisał układ równań liniowych i odgadł jego rozwiązanie, to otrzymuje **4 punkty**

II sposób rozwiązania

Obliczamy odległość d środka okręgu $S = (3,7)$ od prostej $y = 2x - 3$:

$d = \frac{|6-7-3|}{\sqrt{4+1}} = \frac{4}{\sqrt{5}}$.

Punkt $P = (x, 2x-3)$ jest punktem styczności okręgu o środku w punkcie $S = (3,7)$ i prostej $y = 2x - 3$. Zatem $|PS| = d$ oraz $|PS| = \sqrt{(x-3)^2 + (2x-10)^2}$.

Przekształcamy równanie $\sqrt{(x-3)^2 + (2x-10)^2} = \frac{4}{\sqrt{5}}$ do postaci $5x^2 - 46x + 109 - \frac{16}{5} = 0$

Rozwiązujemy równanie $5x^2 - 46x + 105\frac{4}{5} = 0$, stąd $x = \frac{23}{5}$.

Zatem punkt styczności ma współrzędne: $P = \left(\frac{23}{5}, \frac{31}{5}\right)$.

Schemat oceniania II sposobu rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania .... 1 pkt

- obliczenie odległości punktu S od danej prostej $d = \frac{|6-7-3|}{\sqrt{4+1}} = \frac{4}{\sqrt{5}}$

albo

- zapisanie długości odcinka PS : $|PS| = \sqrt{(x-3)^2 + (2x-10)^2}$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 2 pkt

Zapisanie układ równań, np. $\begin{cases} y = 2x - 3 \\ \sqrt{(x-3)^2 + (y-7)^2} = \frac{4}{\sqrt{5}} \end{cases}$

Pokonanie zasadniczych trudności zadania...3 pkt

Zapisanie równania z jedną niewiadomą, np. $5x^2 - 46x + 105\frac{4}{5} = 0$ albo $\sqrt{(x-3)^2 + (2x-10)^2} = \frac{4}{\sqrt{5}}$.

Rozwiązanie pełne..4 pkt

Obliczenie współrzędnych punktu P styczności: $\left(\frac{23}{5}, \frac{31}{5}\right)$.

<u>III sposób rozwiązania</u>

Punkt $P = (x, y)$ jest punktem styczności okręgu o środku $S = (3,7)$ i prostej $y = 2x - 3$.

Zapisujemy układ równań: $\begin{cases} (x-3)^2 + (y-7)^2 = r^2 \\ y = 2x - 3 \end{cases}$

Przekształcamy układ równań do równania kwadratowego z niewiadomą x:

$(x-3)^2 + (2x-10)^2 = r^2$

$5x^2 - 46x + 109 - r^2 = 0$.

Zapisujemy warunek $\Delta = 0$, dla którego okrąg ma jeden punkt wspólny z prostą $y = 2x - 3$ i obliczamy r^2:

$\Delta = -64 + 20r^2$, $20r^2 - 64 = 0$, $20r^2 = 64$, $r^2 = \frac{64}{20} = \frac{16}{5}$.

Rozwiązujemy równanie:

$5x^2 - 46x + 109 - \frac{16}{5} = 0$

$5x^2 - 46x + 105\frac{4}{5} = 0$

$x = \frac{23}{5}$.

Zatem punkt styczności ma współrzędne: $P = \left(\frac{23}{5}, \frac{31}{5}\right)$.

<u>Schemat oceniania III sposobu rozwiązania</u>

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania...1 pkt

Zapisanie układu równań i warunku pozwalającego wyznaczyć promień okręgu:
$\begin{cases} (x-3)^2 + (y-7)^2 = r^2 \\ y = 2x - 3 \end{cases}$

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp...2 pkt

Przekształcenie układu do równania z jedną niewiadomą $5x^2 - 46x + 109 - r^2 = 0$, zapisanie warunku $\Delta = 0$ i obliczenie r^2: $r^2 = \frac{16}{5}$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania...3 pkt

Zapisanie równania kwadratowego, np. $5x^2 - 46x + 105\frac{4}{5} = 0$.

Rozwiązanie pełne..4 pkt

Obliczenie współrzędnych punktu styczności: $P = \left(\frac{23}{5}, \frac{31}{5}\right)$.

Uwaga
Jeśli zdający popełnił błąd rachunkowy, przekształcając układ równań do równania kwadratowego, rozwiązał to równanie i otrzymał dwa punkty styczności, to za całe rozwiązanie otrzymuje **2 punkty**.

Zadanie 32. (0–5)

Modelowanie matematyczne	Rozwiązanie zadania umieszczonego w kontekście praktycznym, prowadzącego do równania kwadratowego z jedną niewiadomą

I sposób rozwiązania
Niech x oznacza liczbę dni wędrówki, y – liczbę kilometrów przebytych każdego dnia przez turystę. Drogę przebytą przez turystę opisujemy równaniem $x \cdot y = 112$.
Turysta może przeznaczyć na wędrówkę o 3 dni więcej, idąc każdego dnia o 12 km mniej, wówczas zapisujemy równanie: $(x+3)\cdot(y-12)=112$.

Zapisujemy układ równań, np. $\begin{cases} x\cdot y=112 \\ (x+3)\cdot(y-12)=112 \end{cases}$

Z pierwszego równania wyznaczamy

$y=\frac{112}{x}$	$x=\frac{112}{y}$
podstawiamy do drugiego równania i rozwiązujemy	
$(x+3)\left(\frac{112}{x}-12\right)=112$ Przekształcamy to równanie do równania kwadratowego, np. $x^2+3x-28=0$. $\Delta=9+112=121=11^2$ $x_1=\frac{-3-11}{2}=-7$ sprzeczne z zał. $x>0$ $x_2=\frac{-3+11}{2}=4$ Obliczamy y: $y=\frac{112}{4}=28$ Odp.: Turysta przechodził dziennie 28 km.	$\left(\frac{112}{y}+3\right)(y-12)=112$ Przekształcamy to równanie do równania kwadratowego, np. $y^2-12y-448=0$ $\Delta=144+1792=1936=44^2$ $y_1=\frac{12-44}{2}=-16$ sprzeczne z zał. $y>0$ $y_2=\frac{12+44}{2}=28$ Odp.: Turysta przechodził dziennie 28 km.

II sposób rozwiązania
Niech x oznacza liczbę dni wędrówki, y – liczbę kilometrów przebytych każdego dnia przez turystę. Drogę przebytą przez turystę opisujemy równaniem $x \cdot y = 112$.
Turysta może przeznaczyć na wędrówkę o 3 dni więcej, idąc każdego dnia o 12 km mniej, wówczas zapisujemy równanie: $(x+3)\cdot(y-12)=112$.

Zapisujemy układ równań, np. $\begin{cases} x\cdot y=112 \\ (x+3)\cdot(y-12)=112 \end{cases}$

Stąd otrzymujemy kolejno $\begin{cases} x\cdot y=112 \\ x\cdot y-12x+3y-36=112 \end{cases}$

$$\begin{cases} x \cdot y = 112 \\ 112 - 12x + 3y - 36 = 112 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \cdot y = 112 \\ -12x + 3y - 36 = 0 \end{cases}$$

W równaniu $-12x + 3y - 36 = 0$ obie strony dzielimy przez (-3).

Otrzymujemy $4x - y + 12 = 0$, stąd wyznaczamy

$y = 4x + 12$	$x = \frac{1}{4}y - 3$
podstawiamy do równania pierwszego i rozwiązujemy	
$x \cdot (4x + 12) = 112$ $4x^2 + 12x - 112 = 0$ $x^2 + 3x - 28 = 0$ $\Delta = 9 + 112 = 121 = 11^2$ $x_1 = \frac{-3-11}{2} = -7$ sprzeczne z zał. $x > 0$ $x_2 = \frac{-3+11}{2} = 4$ Obliczamy y: $y = 4 \cdot 4 + 12 = 28$ Odp.: Turysta przechodził dziennie 28 km.	$\left(\frac{1}{4}y - 3\right) \cdot y = 112$ $\frac{1}{4}y^2 - 3y - 112 = 0$ $y^2 - 12y - 448 = 0$ $\Delta = 144 + 1792 = 1936 = 44^2$ $y_1 = \frac{12-44}{2} = -16$ sprzeczne z zał. $y > 0$ $y_2 = \frac{12+44}{2} = 28$ Odp.: Turysta przechodził dziennie 28 km.

Schemat oceniania I i II sposobu rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania .... **1 pkt**

Zapisanie zależności między przebytą drogą, liczbą dni wędrówki oraz liczbą kilometrów przebytych każdego dnia przez turystę, np.:

- $(x+3) \cdot (y-12) = 112$

albo

- $x \cdot y = 112$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... **2 pkt**

Zapisanie układu równań z niewiadomymi x i y – odpowiednio: liczbą dni wędrówki i liczbą kilometrów przebytych każdego dnia przez turystę, np. $\begin{cases} x \cdot y = 112 \\ (x+3) \cdot (y-12) = 112 \end{cases}$

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... **3 pkt**

Zapisanie równania z jedną niewiadomą x lub y, np:

$(x+3)\left(\frac{112}{x} - 12\right) = 112$ lub $\left(\frac{112}{y} + 3\right)(y-12) = 112$, lub $x \cdot (4x + 12) = 112$,

lub $\left(\frac{1}{4}y - 3\right) \cdot y = 112$

Uwaga

Zdający nie musi zapisywać układu równań, może bezpośrednio zapisać równanie z jedną niewiadomą.

Rozwiązanie zadania do końca lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe) .... **4 pkt**

- rozwiązanie równania z niewiadomą x bezbłędnie i nie obliczenie liczby kilometrów przebytych każdego dnia przez turystę

albo

- rozwiązanie równania z niewiadomą x lub y z błędem rachunkowym i konsekwentne obliczenie liczby kilometrów przebytych każdego dnia przez turystę.

Rozwiązanie pełne .... **5 pkt**
Obliczenie liczby kilometrów przebytych każdego dnia przez turystę: 28 km.

<u>III sposób rozwiązania</u>
Niech x oznacza liczbę dni wędrówki, y – liczbę kilometrów przebytych każdego dnia przez turystę. Liczbę kilometrów przebytych każdego dnia przez turystę opisujemy równaniem $y = \frac{112}{x}$.
Turysta może przeznaczyć na wędrówkę o 3 dni więcej, idąc każdego dnia o 12 km mniej, wówczas zapisujemy równanie: $\frac{112}{x} = \frac{112}{x+3} + 12$.
Przekształcamy to równanie do postaci $x^2 + 3x - 28 = 0$.
Rozwiązaniem równania są: $x_1 = \frac{-3-11}{2} = -7$ sprzeczne z założeniem $x > 0$ i $x_2 = \frac{-3+11}{2} = 4$
Obliczamy y: $y = \frac{112}{4} = 28$

<u>Schemat oceniania III sposobu rozwiązania</u>
Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania .... **1 pkt**
Przyjęcie oznaczeń: x - liczba dni wędrówki, y – liczba kilometrów przebytych każdego dnia przez turystę i zapisanie zależności, np.

- $y = \frac{112}{x}$

albo

- $y = \frac{112}{x+3} + 12$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... **3 pkt**
Zapisanie równania z jedną niewiadomą: $\frac{112}{x} = \frac{112}{x+3} + 12$.

Rozwiązanie zadania do końca lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe) .... **4 pkt**

- rozwiązanie równania z niewiadomą x bezbłędnie i nie obliczenie liczby kilometrów przebytych każdego dnia przez turystę

albo

- rozwiązanie równania z niewiadomą x błędem rachunkowym i konsekwentne obliczenie liczby kilometrów przebytych każdego dnia przez turystę, przy czym obliczona liczba kilometrów musi być większa od 12.

Rozwiązanie pełne .... **5 pkt**
Obliczenie liczby kilometrów przebytych każdego dnia przez turystę: 28 km.

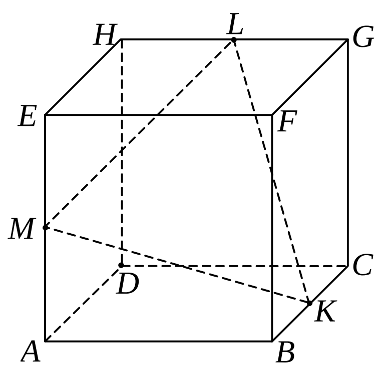
Uwagi

1. Jeżeli zdający porównuje wielkości różnych typów, to otrzymuje **0 punktów**.
2. Jeżeli zdający odgadnie liczbę kilometrów przebytych każdego dnia przez turystę i nie uzasadni, że jest to jedyne rozwiązanie, to otrzymuje **1 punkt**.

Zadanie 33. (0–4)

Użycie i tworzenie strategii	Wyznaczenie związków miarowych w sześcianie

Rozwiązanie



Trójkąt ABK jest trójkątem prostokątnym, zatem $|AK|^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1$. Stąd $|AK|^2 = \frac{5}{4}$.

Trójkąt MAK jest trójkątem prostokątnym, zatem $|MK|^2 = |MA|^2 + |AK|^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{5}{4} = \frac{3}{2}$.

Analogicznie dla trójkątów MEL i LGK obliczamy kwadraty długości boków ML i KL: $|ML|^2 = |KL|^2 = \frac{3}{2}$.

Ponieważ $|ML|^2 = |KL|^2 = |MK|^2$, więc trójkąt KLM jest równoboczny.

Zatem jego pole wyraża się wzorem $P = \frac{|MK|^2\sqrt{3}}{4}$, stąd $P = \frac{\frac{3}{2}\cdot\sqrt{3}}{4} = \frac{3}{8}\sqrt{3}$.

Uwaga

Zdający nie musi obliczać kwadratów długości boków ML i KL. Wystarczy, że korzystając z przystawania trójkątów MAK, MEL, LGK uzasadni równość boków: $|ML| = |KL| = |MK|$.

Schemat oceniania

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 2 pkt

Obliczenie kwadratu długości odcinka AK : $|AK|^2 = \frac{5}{4}$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 3 pkt

- obliczenie kwadratów długości lub długości boków trójkąta KLM: $|ML|^2 = |KL|^2 = |MK|^2 = \frac{3}{2}$ lub $|ML| = |KL| = |MK| = \frac{\sqrt{6}}{2}$ i na tym poprzestanie lub dalej popełni błędy

albo

- zauważenie, że trójkąt *KLM* jest równoboczny i obliczenie kwadratu długości jednego z boków tego trójkąta, np. $|MK|^2 = \frac{3}{2}$.

Rozwiązanie pełne .... 4 pkt

Obliczenie pola trójkąta KLM : $P = \frac{3}{8}\sqrt{3}$.

Uwaga

Akceptujemy rozwiązanie, w którym zdający przyjmuje, że długość krawędzi sześcianu jest oznaczona literą *l*.