EGZAMIN MATURALNY OD ROKU SZKOLNEGO 2014/2015

MATEMATYKA POZIOM ROZSZERZONY

PRZYKŁADOWY ZESTAW ZADAŃ (A1)

W czasie trwania egzaminu zdający może korzystać z zestawu wzorów matematycznych, linijki i cyrkla oraz kalkulatora.

Czas pracy: 180 minut

ZADANIA ZAMKNIĘTE

W zadaniach 1-5 wybierz i zaznacz poprawną odpowiedź

Zadanie 1. (0–1)

Dane są dwie urny z kulami, w każdej jest 5 kul. W pierwszej urnie jest jedna kula biała i 4 kule czarne. W drugiej urnie są 3 kule białe i 2 kule czarne. Rzucamy jeden raz symetryczną sześcienną kostką do gry. Jeśli wypadnie jedno lub dwa oczka, to losujemy jedną kulę z pierwszej urny, natomiast jeśli wypadną co najmniej trzy oczka, to losujemy jedną kulę z drugiej urny. Prawdopodobieństwo wylosowania kuli białej jest równe

A.
$$\frac{1}{15}$$

B.
$$\frac{2}{5}$$

C.
$$\frac{7}{15}$$

D.
$$\frac{3}{5}$$

Zadanie 2. (0–1)

Dany jest nieskończony ciąg geometryczny (a_n) określony wzorem

$$a_n = \frac{3}{\left(\sqrt{2}\right)^n}$$
 dla $n = 1, 2, 3, ...$

Suma wszystkich wyrazów tego ciągu jest równa

A.
$$\frac{1}{\sqrt{2}-1}$$

B.
$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}$$

B.
$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}$$
 C. $\frac{2}{\sqrt{2}-1}$ **D.** $\frac{3}{\sqrt{2}-1}$

D.
$$\frac{3}{\sqrt{2}-1}$$

Zadanie 3. (0–1)

Liczba $\frac{27^{665} \cdot \sqrt[3]{3^{-92}}}{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{152}{3}}}$ jest równa

B.
$$3^{1995}$$
 C. 3^{2015} **D.** 3^{2045}

C.
$$3^{2015}$$

Zadanie 4. (0–1)

Okrąg o_1 ma równanie $x^2 + (y-1)^2 = 25$, a okrąg o_2 ma równanie $(x-1)^2 + y^2 = 9$. Określ wzajemne położenie tych okregów.

A. Te okręgi przecinają się w dwóch punktach.

B. Te okregi sa styczne.

C. Te okręgi nie mają punktów wspólnych oraz okrąg o_1 leży w całości wewnątrz okręgu o_2 .

D. Te okręgi nie mają punktów wspólnych oraz okrąg $o_{\scriptscriptstyle 2}$ leży w całości wewnątrz okręgu $o_{\scriptscriptstyle 1}$.

Zadanie 5. (0–1)

Dla każdego α suma $\sin \alpha + \sin 3\alpha$ jest równa

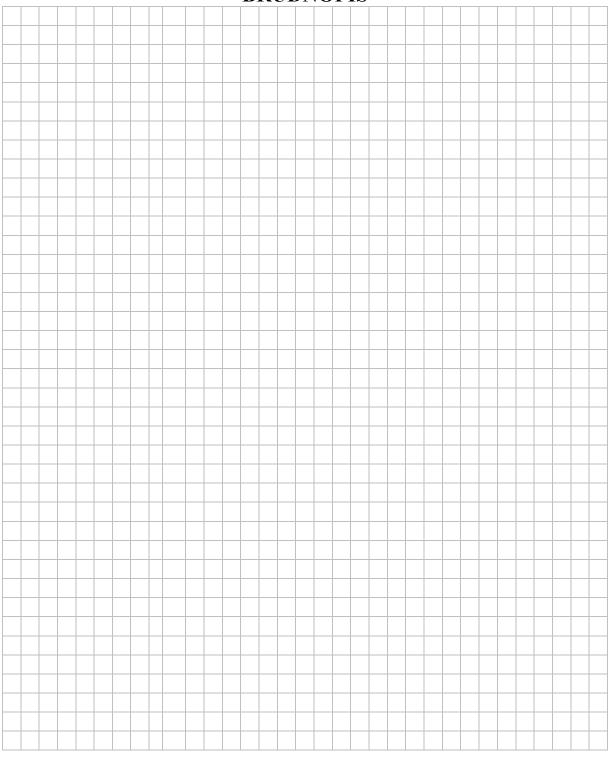
A. $\sin 4\alpha$.

 $2\sin 4\alpha$

C. $2\sin 2\alpha \cos \alpha$.

D. $2\sin\alpha\cos2\alpha$.

BRUDNOPIS



ZADANIA OTWARTE

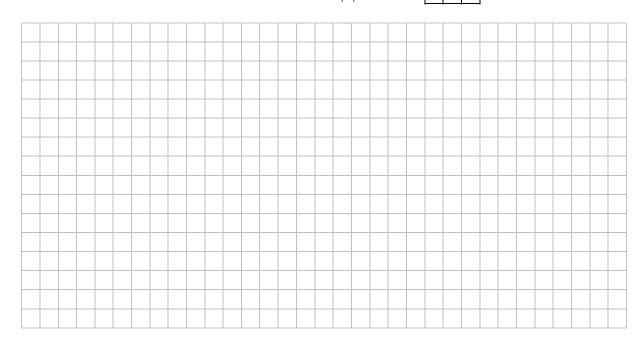
W zadaniach 6–9 zakoduj wynik w kratkach zamieszczonych obok polecenia. W zadaniach 10–18 rozwiązania należy zapisać w wyznaczonych miejscach pod treścią zadania.

Zadanie 6. (0-2)

Liczba n jest najmniejszą liczbą całkowitą spełniającą równanie

$$2 \cdot |x + 57| = |x - 39|$$
.

Zakoduj cyfry: setek, dziesiątek i jedności liczby |n|.



Zadanie 7. (0-2)

Oblicz granicę ciągu $\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2 - 5n + 2}{(8n+7)(n+4)}$.

Zakoduj trzy pierwsze cyfry po przecinku rozwinięcia dziesiętnego obliczonej granicy.

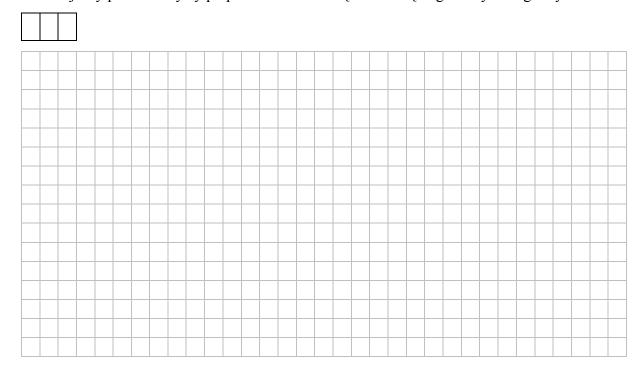


7 - 1 : -	O	/Λ	2)
Zadanie	ð.	(V-	-2)

Dana jest funkcja f określona wzorem

$$f(x) = \frac{x-8}{x^2+6}$$

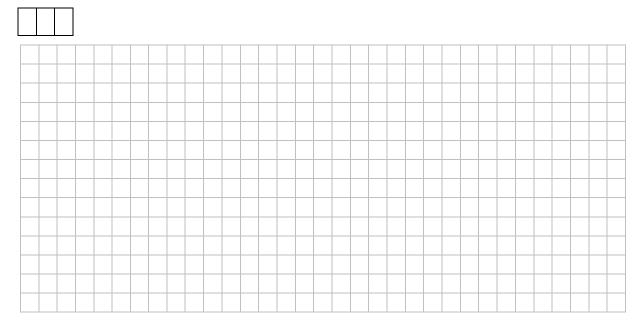
dla każdej liczby rzeczywistej x. Oblicz wartość pochodnej tej funkcji w punkcie $x=\frac{1}{2}$. Zakoduj trzy pierwsze cyfry po przecinku rozwinięcia dziesiętnego otrzymanego wyniku.



Zadanie 9. (0-2)

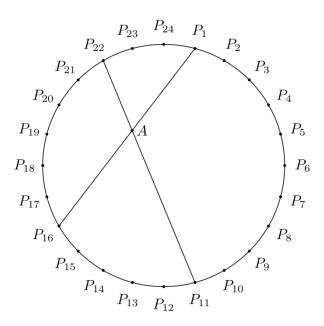
Oblicz
$$\log_3 \sqrt[4]{27} - \log_3 \left(\log_3 \sqrt[3]{\sqrt[3]{3}}\right)$$
.

Zakoduj cyfrę jedności i dwie pierwsze cyfry po przecinku rozwinięcia dziesiętnego otrzymanego wyniku.



Zadanie 10. (0-3)

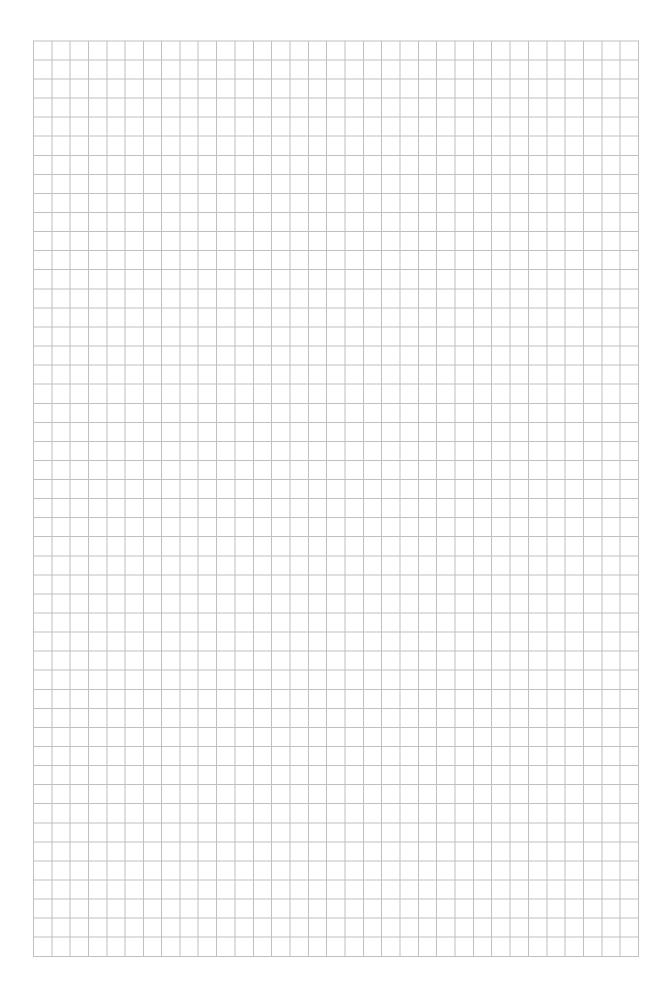
Punkty $P_1,P_2,P_3,\ldots,P_{23},P_{24}$ dzielą okrąg na 24 równe łuki (zobacz rysunek). Punkt A jest punktem przecięcia cięciw $P_{11}P_{22}$ i P_1P_{16} .



Udowodnij, że $| \langle P_{16} A P_{11} | = 60^{\circ}$.



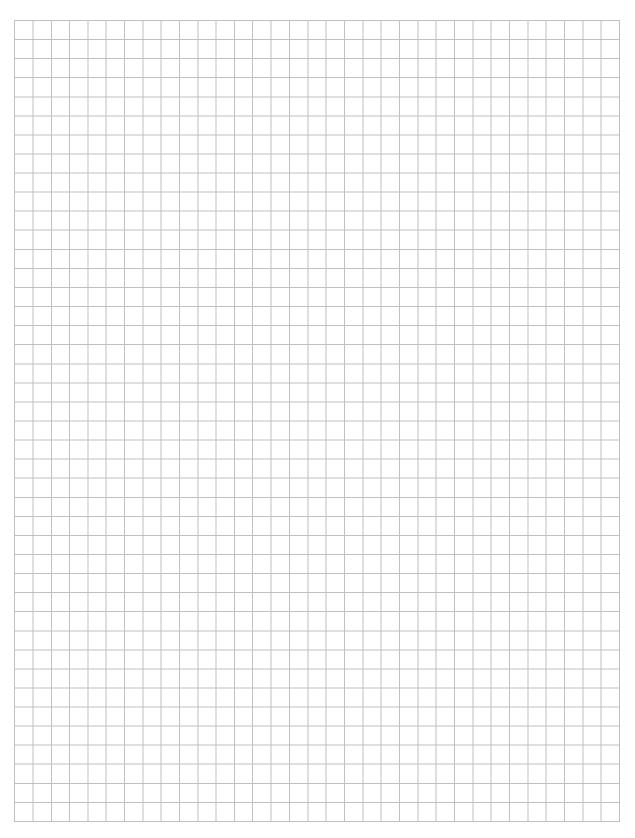
Strona 6 z 19



Zadanie 11. (0-3)

Udowodnij, że dla każdej liczby rzeczywistej x i każdej liczby rzeczywistej m prawdziwa jest nierówność

$$20x^2 - 24mx + 18m^2 \ge 4x + 12m - 5.$$



Zadanie 12. (0-3)

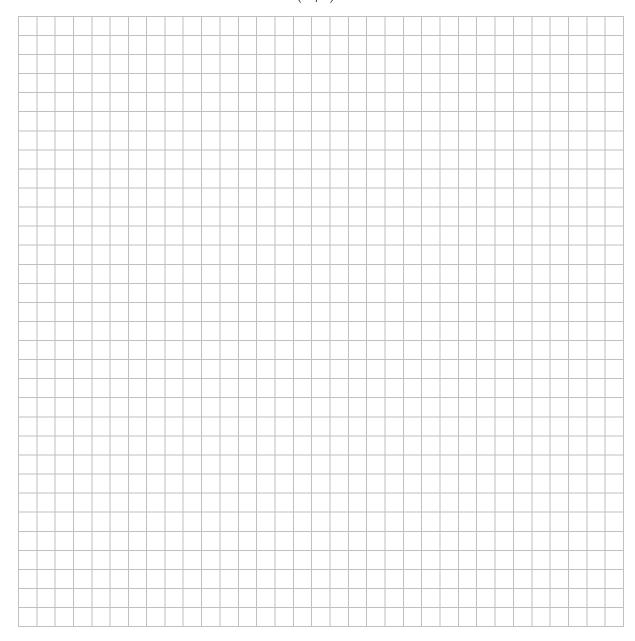
Janek przeprowadza doświadczenie losowe, w którym jako wynik może otrzymać jedną z liczb: 0,1,2,3,4,5,6. Prawdopodobieństwo p_k otrzymania liczby k jest dane wzorem:

$$p_k = \frac{1}{64} \cdot \binom{6}{k}.$$

Rozważamy dwa zdarzenia:

- zdarzenie A polegające na otrzymaniu liczby ze zbioru $\{1, 3, 5\}$,
- zdarzenie B polegające na otrzymaniu liczby ze zbioru $\{2, 3, 4, 5, 6\}$.

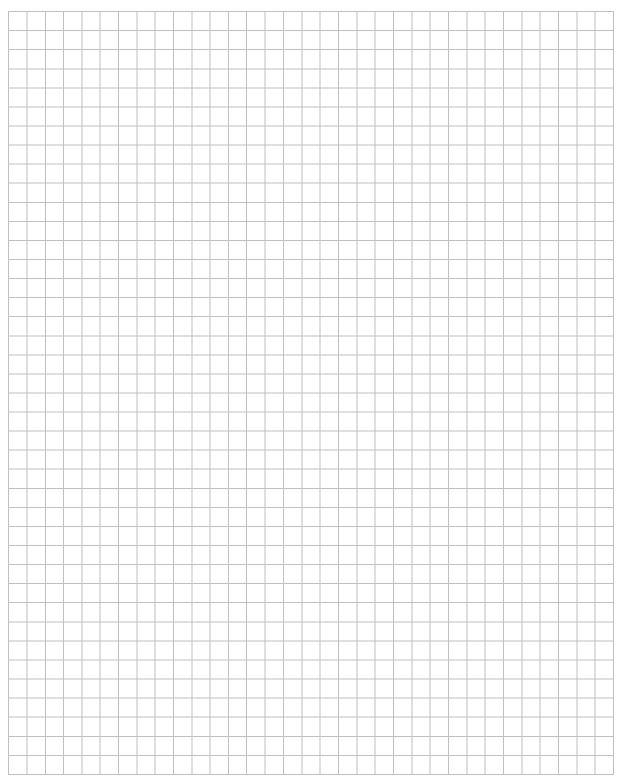
Oblicz prawdopodobieństwo warunkowe P(A|B).



Odpowiedź:

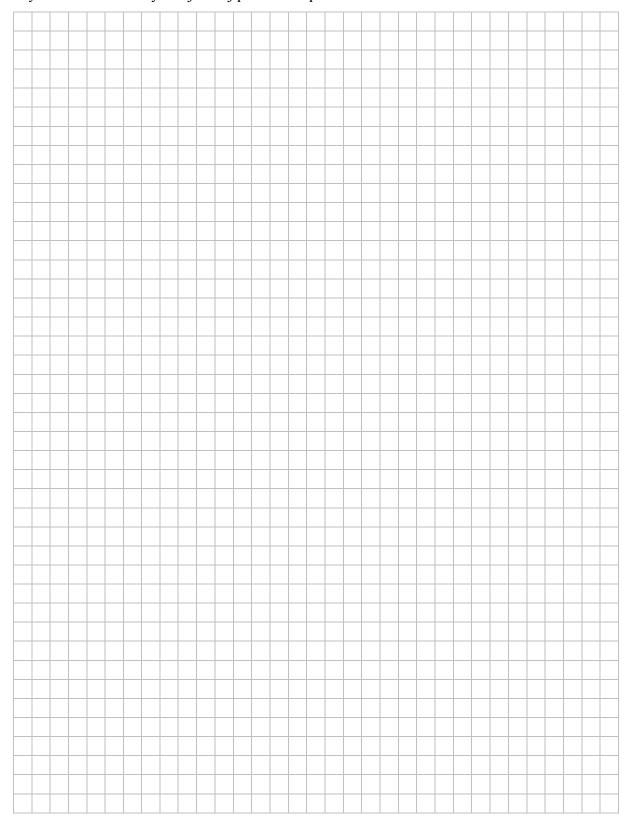
Zadanie 13. (0-3)

Wyznacz wszystkie wartości parametru m, dla których prosta o równaniu y = mx + (2m+3) ma dokładnie dwa punkty wspólne z okręgiem o środku w punkcie S = (0,0) i promieniu r = 3.



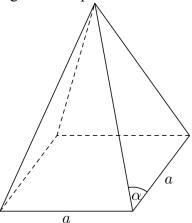
Zadanie 14. (0-3)

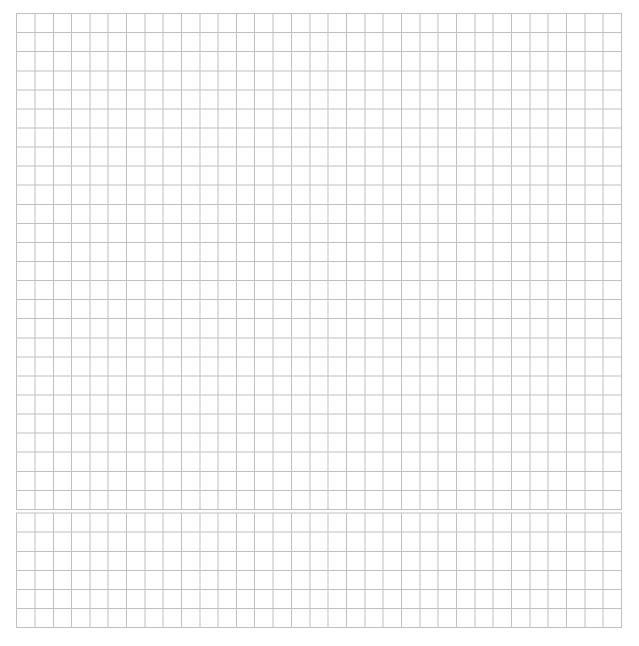
Dana jest parabola o równaniu $y = x^2 + 1$ i leżący na niej punkt A o współrzędnej x równej 3. Wyznacz równanie stycznej do tej paraboli w punkcie A.

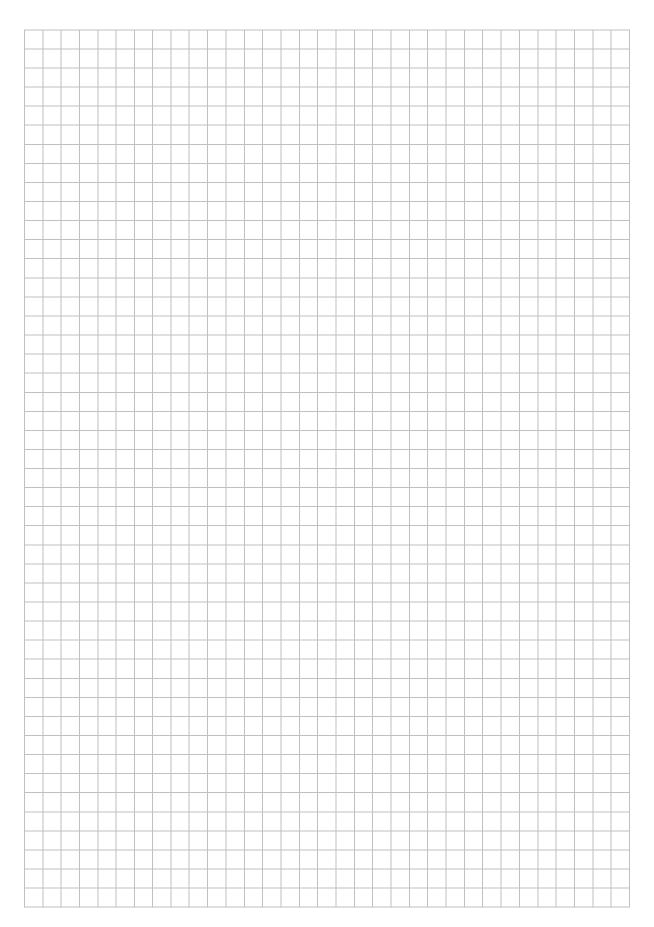


Zadanie 15. (0-3)

W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym krawędź podstawy ma długość a. Kąt między krawędzią boczną, a krawędzią podstawy ma miarę $\alpha > 45^{\circ}$ (zobacz rysunek). Oblicz objętość tego ostrosłupa.

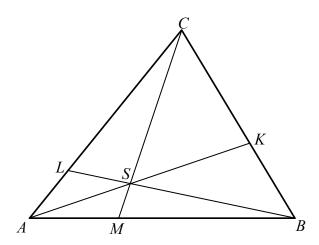






Zadanie 16. (0-6)

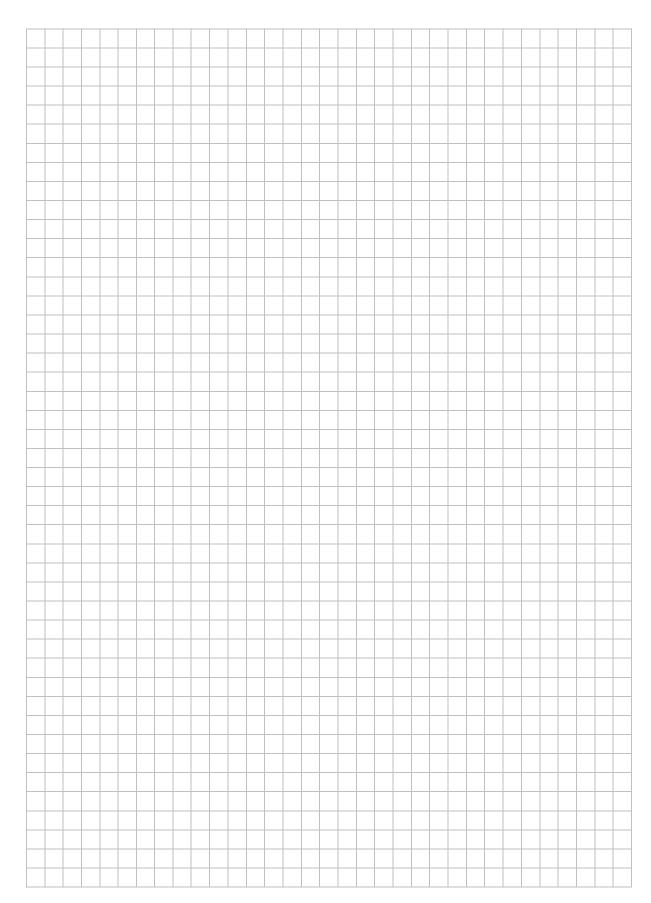
Punkty M i L leżą odpowiednio na bokach AB i AC trójkąta ABC, przy czym zachodzą równości $|MB| = 2 \cdot |AM|$ oraz $|LC| = 3 \cdot |AL|$. Punkt S jest punktem przecięcia odcinków BL i CM. Punkt K jest punktem przecięcia półprostej AS z odcinkiem BC (zobacz rysunek).



Pole trójkąta ABC jest równe 660. Oblicz pola trójkątów: AMS, ALS, BMS i CLS.



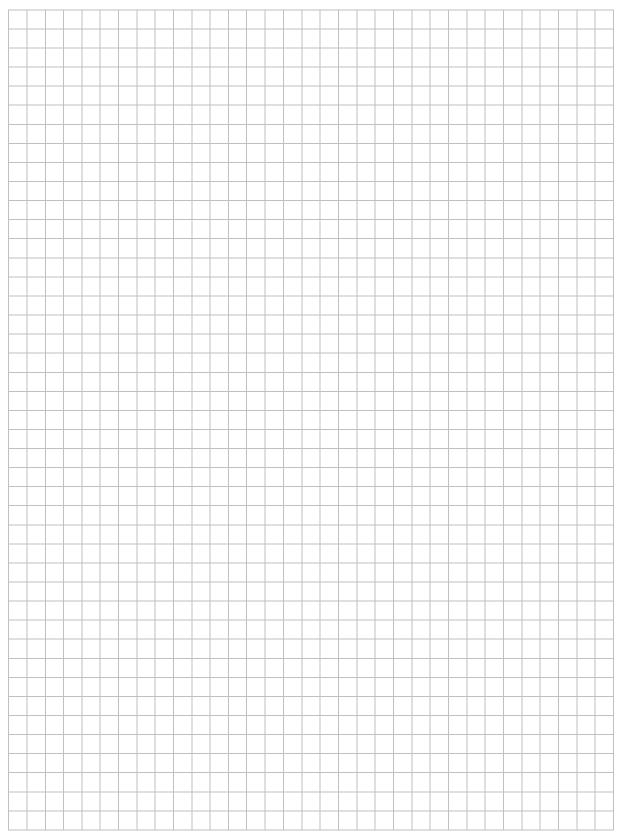
Strona 14 z 19



Odpowiedź:

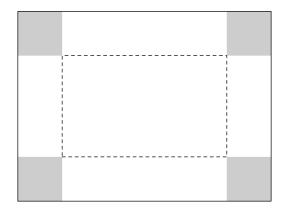
Zadanie 17. (0–6)

Oblicz, ile jest stucyfrowych liczb naturalnych o sumie cyfr równej 4.

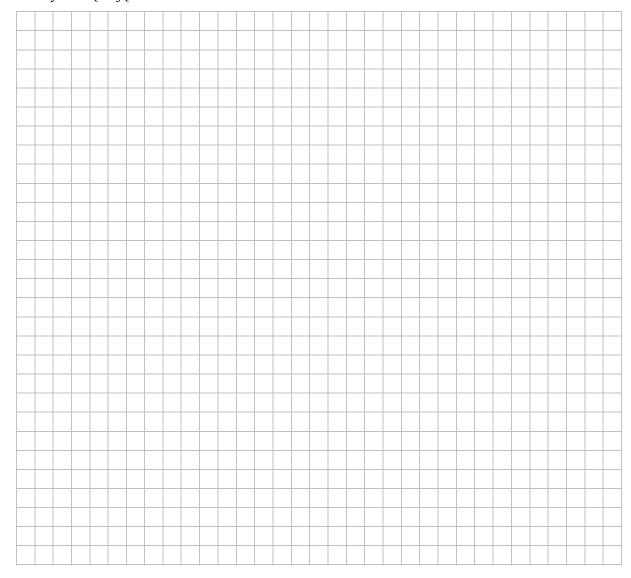


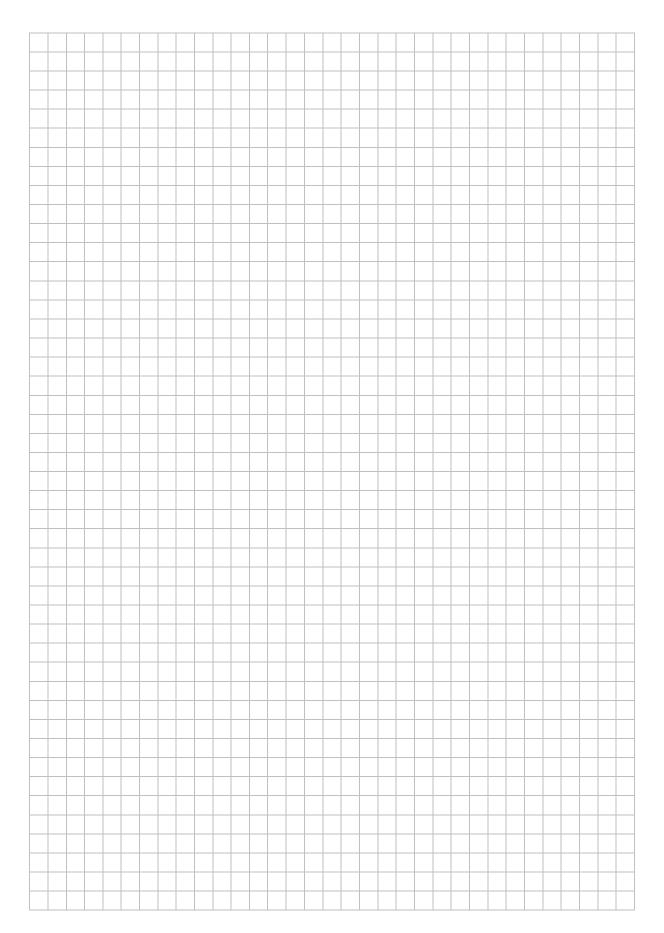
Zadanie 18. (0-7)

Dany jest prostokątny arkusz kartonu o długości 80 cm i szerokości 50 cm. W czterech rogach tego arkusza wycięto kwadratowe naroża (zobacz rysunek).



Następnie zagięto karton wzdłuż linii przerywanych, tworząc w ten sposób prostopadłościenne pudełko (bez przykrywki). Oblicz długość boku każdego z wyciętych kwadratowych naroży, dla której objętość otrzymanego pudełka jest największa. Oblicz tę maksymalną objętość.





BRUDNOPIS

