Лабораторная работа 1
“Свойства ДПФ”

Изучение свойств дискретного преобразования Фурье (ДПФ).

Теоретические сведения

Прямое дискретное преобразование Фурье (ДПФ):

$$X(k)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}nk},\quad k=0,1,\dots,N-1. \tag{1}$$

Обратное ДПФ:

$$x(n)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X(k)e^{j\frac{2\pi}{N}nk},\quad n=0,1,\dots,N-1. \tag{2}$$

Симметрия ДПФ

Если последовательность $x(n)$ принимает вещественные значения, то ее ДПФ $X(k)$ удовлетворяет следующим условиям симметрии:

$$\mathrm{Re}[X(k)]\ =\ \mathrm{Re}[X(N-k)], \tag{3}$$

$$\mathrm{Im}[X(k)]=-\ \mathrm{Im}[X(N-k)], \tag{4}$$

$$|X(k)|=|X(N-k)|, \tag{5}$$

$$\arg X(k)=-\arg X(N-k). \tag{6}$$

Сдвиг во временной области

Справедливо следующее соотношение:

$$\mathrm{DFT}[x(n-m)]=X(k)e^{-j\frac{2\pi mk}{N}}. \tag{7}$$

Круговая (периодическая) свертка

ДПФ можно использовать для вычисления круговой свертки:

$$\mathrm{DFT}[x_1(n)\circledast x_2(n)]=X_1(k)X_2(k), \tag{8}$$

где $x_1(n), x_2(n)$ – конечные периодические последовательности одинаковой длины. Это же выражение можно записать как:

$$x_3(n)=x_1(n)\circledast x_2(n)=\sum_{m=0}^{N-1}x_1(m)x_2(n-m)=\mathrm{DFT}^{-1}[X_1(k)X_2(k)].$$

Если исходные последовательности дополнить нулями, то с помощью ДПФ можно вычислить линейную свертку.

Интерполяция сигнала во временной области с использованием ДПФ

Путь есть рассчитанное ДПФ от N-точечной последовательности $x(n)$:

$$\mathrm{DFT}[x(n)] = X(k).$$

Если мы хотим получить в M раз больше отсчетов во временной области, то мы должны добавить $(N-1)M$ нулей в середину массива $X(k)$ и таким образом получить последовательность $X_{int}(k)$ длиной NM. Далее необходимо к $X_{int}(k)$ обратное ДПФ, чтобы получить интерполированную версию сигнала во временной области:

$$x_{int}(n) = \mathrm{DFT}^{-1}[X_{int}(k)].$$

Детали реализации

Чтобы быть уверенными, что интерполированная последовательность будет иметь только вещественные значения нужно обеспечить симметричную комплексную-сопряженность коэффициентов $X_{int}(k)$. Если последовательность $X(k)$ содержит ненулевой отсчет $X(N/2)$, т.е. компоненту соответствующую $f_s/2$, то необходимо выполнить следующие шаги, чтобы гарантировать сохранность комплексно-сопряженной симметрии:

- вычисляя N-точечное ДПФ последовательности $x(n)$, получите N частотных отсчетов $X(k)$;
- создайте массив $X_{int}(k)$ длиной NM, заполненный нулями;
- присвойте $X_{int}(k) = X(k)$ для $0 \le k \le \frac{N}{2} - 1$;
- присвойте $X_{int}\left(\frac{N}{2}\right)$ и $X_{int}\left(MN - \frac{N}{2}\right)$ значения равные $X\left(\frac{N}{2}\right)/2$;
- присвойте $X_{int}(MN - N + k) = X(k)$ для $\frac{N}{2} + 1 \le k \le N - 1$;
- вычисляя MN-точечное обратное ДПФ получите интерполированную версию последовательности $x_{int}(n)$.
- в результате описанной процедуры интерполяции происходит ослабление амплитуды на коэффициент $1/M$; для восстановления исходной амплитуды последовательность необходимо умножить на M.

Ниже приведен пример того, как должно происходить формирования спектра сигнала для выполнения интерполяции в случае, когда $N = 8$, а $M = 2$.

Таблица – Модификация спектра сигнала, выполняемая для интерполяции

k	$X_{int}(k)$	k	$X_{int}(k)$
0	$X(0)$	8	0
1	$X(1)$	9	0
2	$X(2)$	10	0
3	$X(3)$	11	0
4	$X(4)/2$	12	$X(4)/2$
5	0	13	$X(5)$
6	0	14	$X(6)$
7	0	15	$X(7)$

Практические задания

Задание 1. Сгенерируйте дискретный сигнал согласно вашему варианту[1] из таблицы 1. Постройте его график, подпишите оси.

Таблица 1 – Варианты сигналов

Номер варианта (V)	Вид сигнала
1	$x(t) = \sin^4(2\pi 10t)$, $t \in [0,\ 1]$ с, $f_s = 100$ Гц.
2	Пилообразный сигнал[2] с частотой 8 Гц, в интервале $t \in [0,\ 1.5]$ c, $f_s = 96$ Гц.
3	Треугольный сигнал[3] с частотой 15 Гц, в интервале $t \in [0,\ 0.6]$ c, $f_s = 81$ Гц.
4	$x(t) = \sin 2\pi f_c t \times \sin 2\pi f_m t$, где $f_c = 0.5$ Гц, $f_m = 20$ Гц. Временной интервал $t \in [0,\ 2]$ c, $f_s = 250$ Гц.

Задание 2. Используя функцию Matlab `fft` найдите ДПФ сигнала $x(n)$ из задания 1. Постройте графики подтверждающие наличие в $X(k)$ симметрий (3)–(6). При построении графиков для отображения действительной части используйте синий цвет, для отображения мнимой – красный.

Воспользуйтесь функцией `Y = fftshift(X)` для того, чтобы переместить компоненту, отвечающую за нулевую частоту в центр. Постройте получившийся график амплитудного спектра $|X(k)|$ и фазового спектра $\arg X(k)$.[4]

Сформируйте последовательность $y(n) = x(-n)$, считая, что $x(n)$ N-периодическая последовательность (N – число отсчетов, получившихся в результате дискретизации). Постройте графики амплитудного $|Y(k)|$ и фазового спектра $\arg Y(k)$. Сравните их с $|X(k)|$ и $\arg X(k)$, какие выводы вы можете сделать?

Задание 3. Используя ДПФ выполните интерполяцию сигнала из задания 1 на величину $M = 2V$, где V – номер варианта.

Задание 4. Выполните сдвиг последовательности из задания 1 на число отсчетов, равное номеру вашего варианта. Для этого воспользуйтесь свойством

[1] Номер варианта (V), определяется как $V = (n_0 \bmod 4) + 1$, где n_0 – номер студента в списке группы.

[2] Воспользуйтесь Matlab -функцией `x = sawtooth(t)`, которая генерирует пилообразный сигнал с периодом 2π, элементами массива `t` являются временные метки.

[3] Воспользуйтесь функцией Matlab -функция `x = sawtooth(t,xmax)`, которая генерирует модифицированное треугольное колебание с периодом 2π, элементами массива `t` являются временные метки. Положение максимума контролируется параметром `xmax`. Параметр `xmax` задается, как скалярная величина между 0 и 1. `xmax` определяет точку между 0 и 2π в которой колебание достигает максимума.

[4] Для правильного вычисления фазы в среде Matlab предусмотрена функция `atan2(imX, reX)`, которая возвращает значение угла в диапазоне $[-\pi,\ \pi]$.

сдвига во временной области (7). Т.е. необходимо умножить ДПФ-образ сигнала $X(k)$ на соответствующий множитель, а затем применить обратное ДПФ (Matlab-функция `ifft`). Постройте график исходной и сдвинутой последовательности. Можно ли применяя этот способ сдвинуть последовательность на нецелое число отсчетов, например $m = 1.5$?

Задание 5. Используя теорему о свертке, найдите круговую свертку последовательностей $x_1(n)$ и $x_2(n)$. Исходные последовательности возьмите из таблицы 2 согласно варианту. Постройте результат круговой свертки. Покажите, как нужно дополнить исходные последовательности нулями, чтобы результатом вычисления стала линейная свертка.

Таблица 2 – Исходные последовательности

Номер варианта	Вид сигнала
1	`x1 = [-1 -1 1 1 -1 -1 0 0];` `x2 = [0 0.2 0.8 1 0.8 0.2 0 0];`
2	`x1 = [0 -1 1 -1 1 -1 0 0 0];` `x2 = [0 0.2 0.5 -1 0.5 0.2 0 0 0];`
3	`x1 = [0 0 0 1 1 1 0 0 0];` `x2 = [0 0.3 0.7 0.7 0.3 0.2 0.1 0 0];`
4	`x1 = [0 1 0 -1 -1 -1 0 1 0];` `x2 = [0.2 -0.3 0.7 0.7 -0.3 0.2 0 0 0];`

Задание 6. При помощи смартфона выполните запись собственного голоса (протяжного произнесения звука /a/, не менее 2 секунд). Сохраните файл в формате wav с частотой дискретизации не ниже f_s =16 кГц. Гласный звук представляет из себя почти периодическое колебание, состоящее из основного тона и его гармоник. Для определения частоты основного тона воспользуйтесь ДПФ. Для этого прочитайте записанный вами файл, выберите из него сегмент $x(n)$, длительностью t_a =25 мс (для частоты дискретизации 16 кГц это будет $f_s \times t_a = 16000 \times 0.025 = 400$ отсчетов). Найдите ДПФ выделенного сегмента сигнала. Постройте его амплитудный спектр $X(k)$, отмасштабируйте частотную ось так, чтобы на ней отображались аналоговые частоты. Первый пик в спектре будет соответствовать частоте основного тона, который отвечает за восприятие высоты голоса. Как правило, частота основного тона лежит в диапазоне от 50 до 450 Гц.