Теория и применение цифровой обработки сигналов

Дискретные сигналы

к.т.н., доцент Вашкевич Максим Иосифович

БГУИР

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники

Кафедра электронных вычислительных средств

Структура системы на основе ЦОС

Чаще всего цифровые системы обрабатывают сигналы, поступающие из реального мира.

$$x(n) = x(t)|_{t=nT}.$$

АЦП – аналого-цифровой преобразователь;

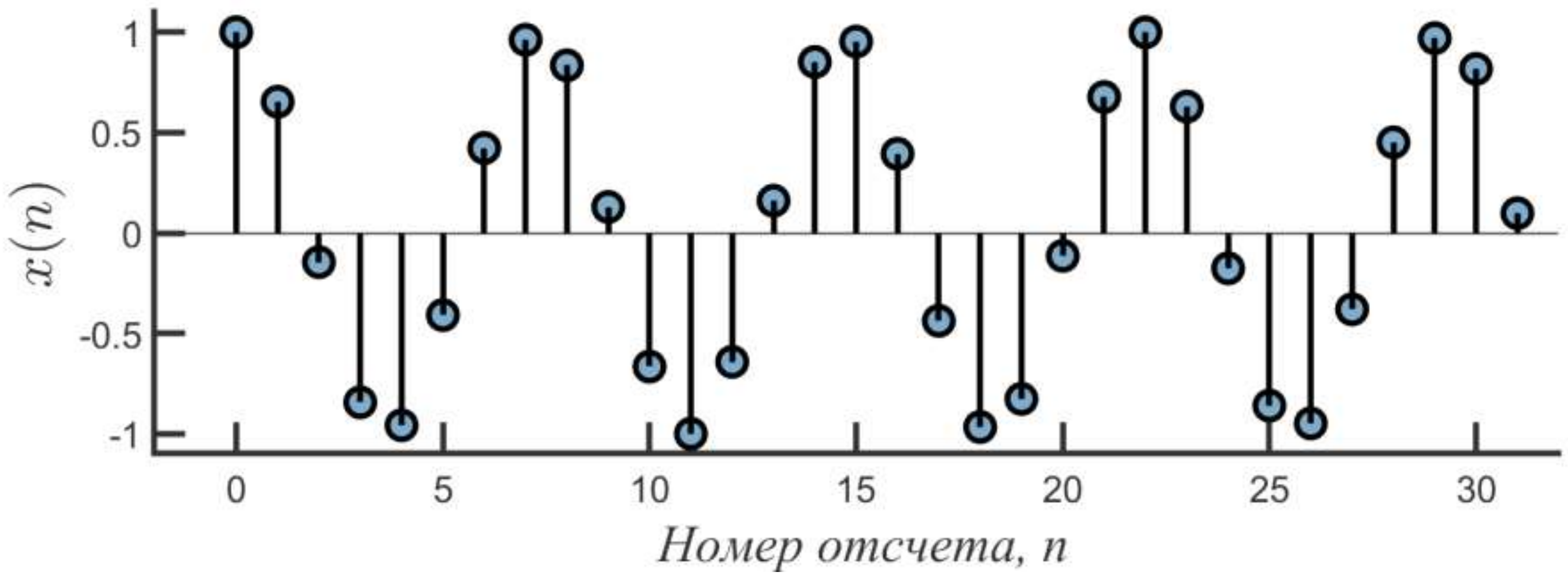
ЦАП – цифро-аналоговый преобразователь.

Предмет дисциплины ЦОС

1) Дискретные сигналы;
2) Дискретные системы.

Определение дискретного сигнала

Дискретный сигнал – это функция целочисленного аргумента $n \in \mathbb{Z}$.
Сигнал *<u>не определен</u>* в нецелые моменты времени n.



Пример дискретного сигнала

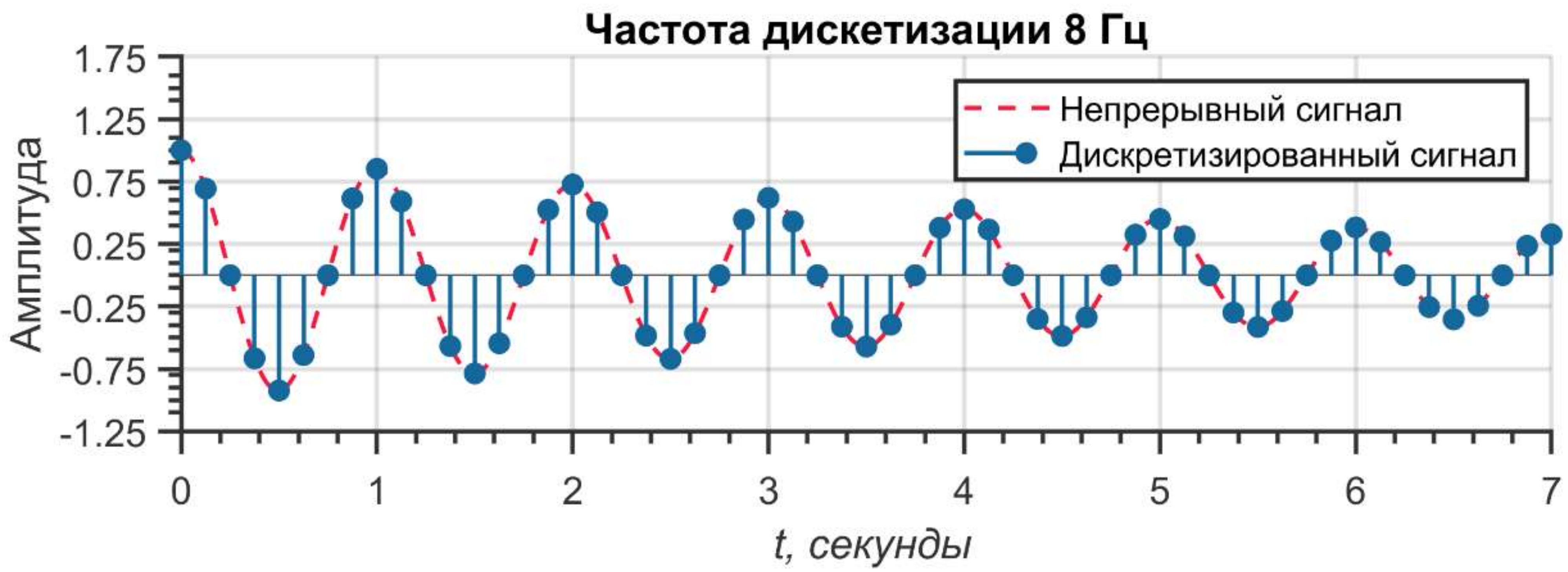
Иногда $x(n)$ записывают в виде вектора: $\mathbf{x} = [x(0)\ x(1) \ldots x(N-1)]$.

Дискретизация сигнала

Дискретные сигналы часто возникают при дискретизации аналоговых сигналов.
Сигнал $x_a(t)$, который дискредитируется с частотой $f_s = 1/T$ (шаг дискретизации T) отсчетов в секунду производит сигнал $x(n)$:

$$x(n) = x_a(nT)$$

nT – ***дискретное время***, а n – ***дискретное нормированное время***.



Классификация сигналов

1) **Аналоговый сигнал** (непрерывная амплитуда и время)

$x_a(t) \in \mathbb{R}$, $t \in \mathbb{R}$.

2) **Квантованный сигнал** (дискретная амплитуда, непрерывное время)

$x_{\text{к}}(t) \in \mathbb{Z}$, $t \in \mathbb{R}$.

3) **Дискретный сигнал** (непрерывная амплитуда, дискретное время)

$x_{\text{д}}(n) \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{Z}$.

4) **Цифровой сигнал** (дискретная амплитуда, дискретное время)

$x_{\text{ц}}(n) \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{Z}$.

Периодические и апериодические сигналы

Дискретные сигналы делят на

- ✓ периодические;
- ✓ апериодические.

Сигнал $x(n)$ является периодическим если

$$x(n) = x(n+N), \qquad \forall n, \quad N \in \mathbb{N}. \tag{1}$$

Основной период и основная частота

Основной период (*fundamental period*) – наименьшее значение N_0 удовлетворяющее условию (1).

Основная частота (*fundamental frequency*) периодического сигнала

$$f_0 = \frac{1}{N_0} \text{ или } \omega_0 = \frac{2\pi}{N_0}. \tag{2}$$

f_0 – измеряется в единицах *период/отсчет*, а ω_0 – *радиан/отсчет*.

Определение периода сигнала

Пусть $x_1(n)$ – N_1-периодический сигнал,
$x_2(n)$ – N_2-периодический сигнал.
Их сумма

$$x(n) = x_1(n) + x_2(n) \tag{1}$$

будет также периодической последовательностью с периодом:

$$N = \frac{N_1 N_2}{\text{НОД}(N_1, N_2)}, \tag{2}$$

$\text{НОД}(N_1, N_2)$ – наибольший общий делитель N_1 и N_2.
Выражение (2) справедливо для произведения двух последовательностей:

$$x(n) = x_1(n) x_2(n). \tag{3}$$

Однако, *основной период* $x(n)$ может быть меньше N.

Единичный скачок

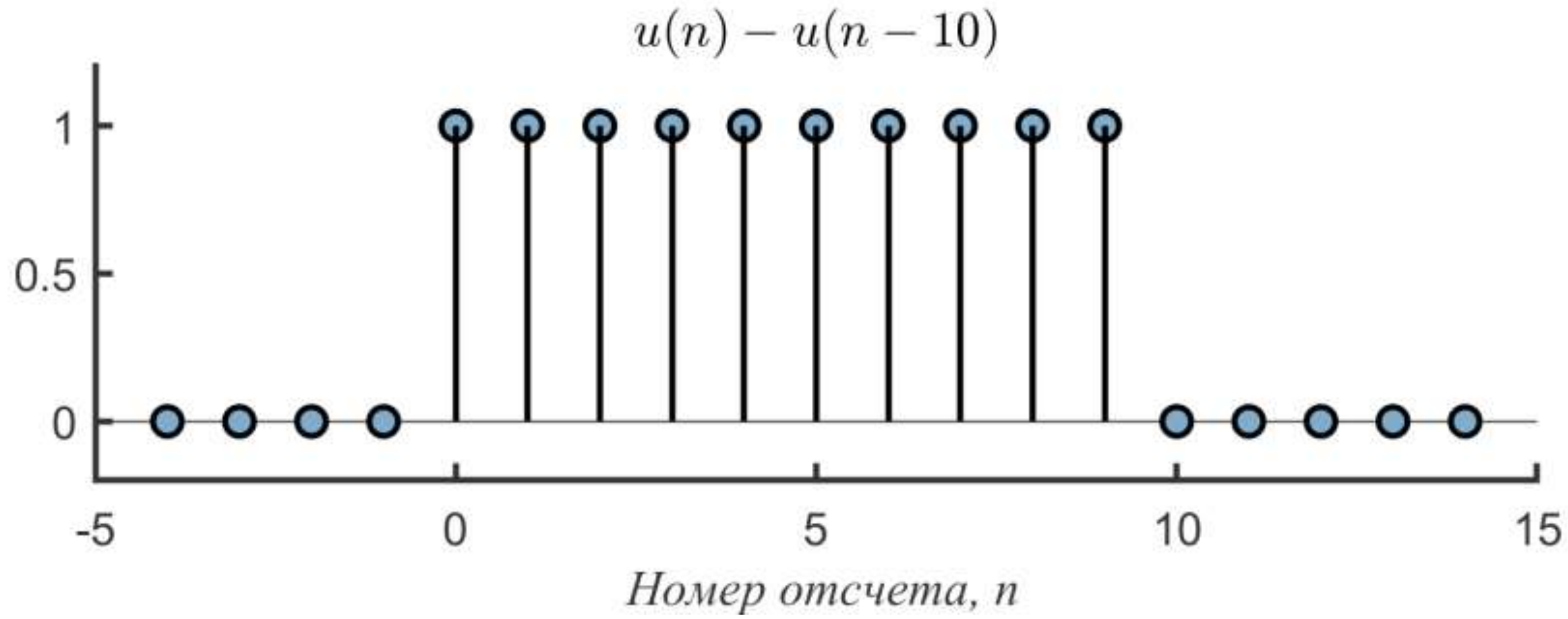
$$u(n) = \begin{cases} 1, & n \geq 0, \\ 0 & \text{иначе}; \end{cases}$$

Комбинация единичного скачка и его сдвинутой версии позволяют выделить определенный временной интервал.

Например

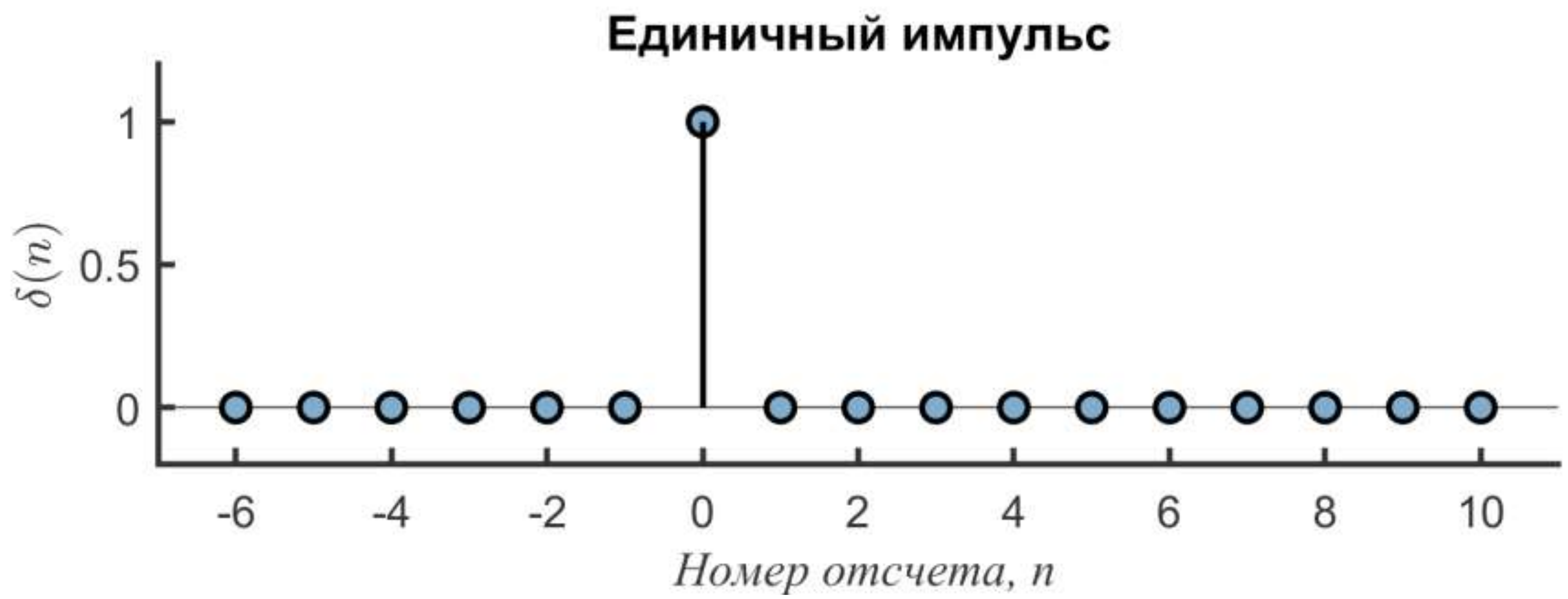
$$u(n) - u(n-10)$$

равняется 1 в интервале $0 \leq n \leq 9$ и 0 во всех остальных случаях.



Единичный импульс

$$\delta(n) = \begin{cases} 1, & n = 0, \\ 0, & n \neq 0; \end{cases}$$



Свойства единичного импульса

1: ***Умножение на единичный импульс***

$$x(n)\delta(n-m) = x(m)\delta(n-m)$$

2: ***Просеивание***

$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\delta(n-k),$$

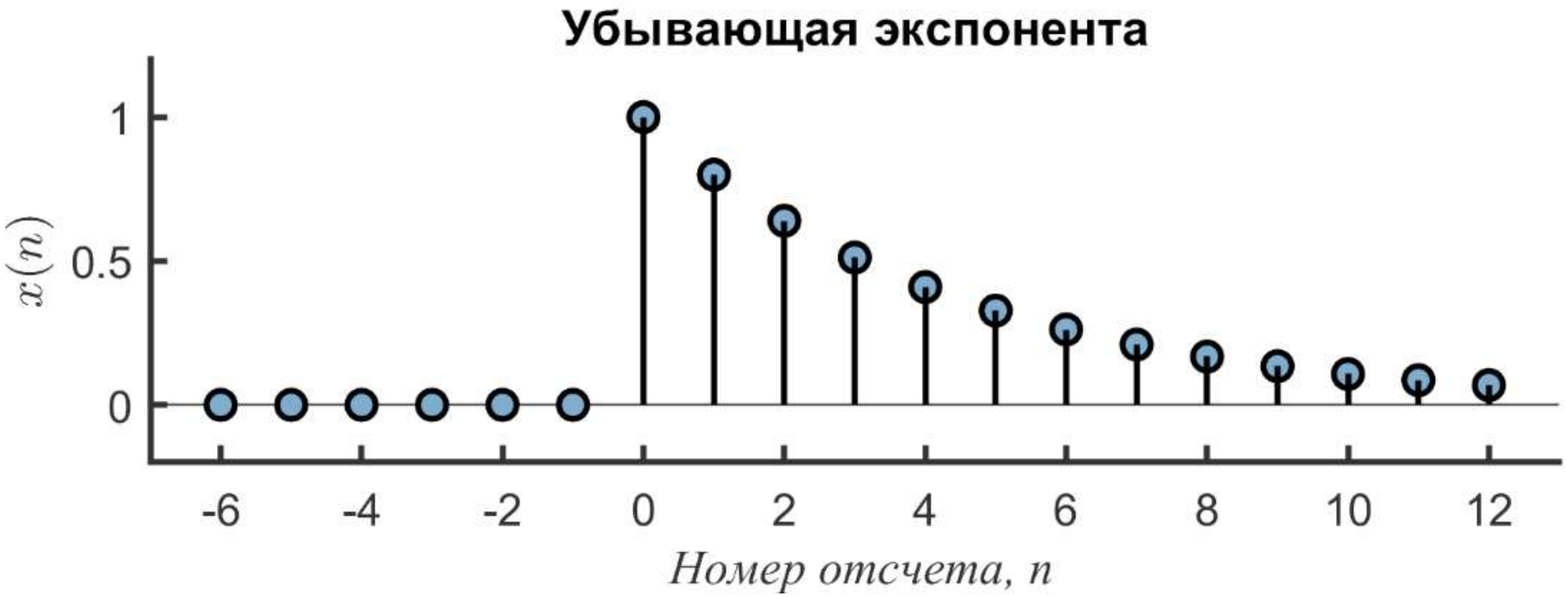
3: ***Взаимосвязь между*** $\delta(n)$ ***и*** $u(n)$

$$u(n) = \sum_{k=-\infty}^{n} \delta(k),$$

Убывающая экспонента

$$x(n) = a^n u(n), \quad |a| < 1 \tag{4}$$

Экспоненциальные последовательности «хорошо» себя ведут для значений параметр a, которые по модулю меньше 1. В противном случае ($|a| > 1$) они имеют нестабильное поведение (их энергия и мощность бесконечно растут).



Убывающая экспонента (a = 0,8)

Синусоидальная последовательность

$$x(n) = A\cos(2\pi f n + \varphi) = A\cos(\omega n + \varphi), \qquad (5)$$

где A – амплитуда, f – частота, ω – круговая частота, φ – начальная фаза.

Дискретная синусоида всегда является периодическим сигналом?

Применим условие периодичности $x(n) = x(n + N_0)$ к (5):

$$\cos(2\pi f n) = \cos\big(2\pi f (n + N_0)\big) = \cos(2\pi f + 2\pi f N_0). \qquad (6)$$

Равенство (6) возможно только если $f N_0 = m \in \mathbb{Z}$.

Т.е. ***дискретная синусоида является периодической, если***

$$f = \frac{m}{N_0} \quad \text{или} \quad \omega = 2\pi \frac{m}{N_0}, \qquad m, N_0 \in \mathbb{Z} \qquad (7)$$

Из (7) следует, что за исключением случая, когда $m = 1$, частота дискретной синусоиды $f = m/N_0$ не равна частоте соответствующей непрерывной синусоиды $F = 1/N_0$.

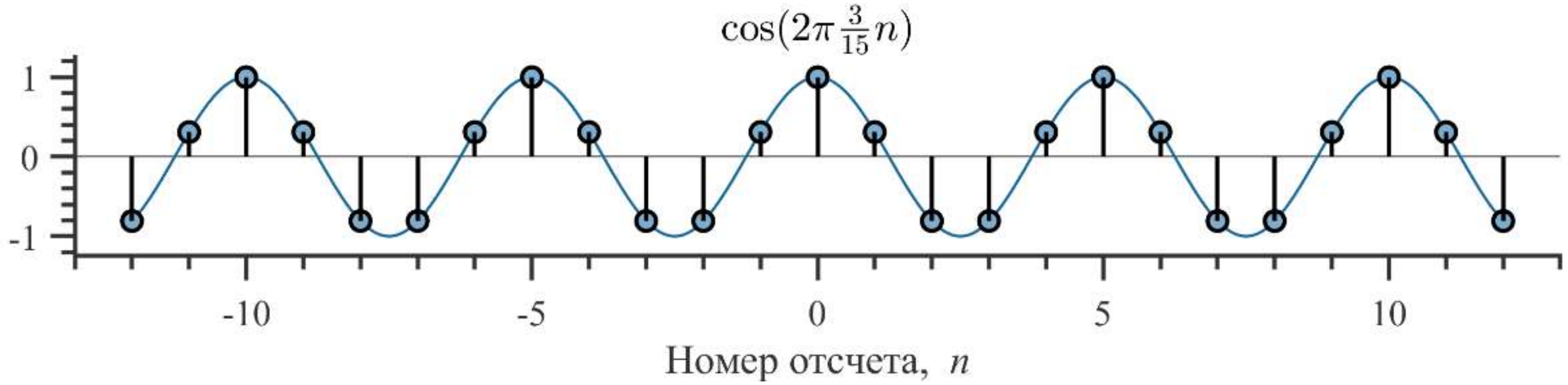
Примеры дискретных синусоид (1)

Пример 1. Постройте графики дискретной синусоиды $\cos(2\pi f n)$ для: а) $f = 3/15$, б) $f = \frac{1}{1{,}7\pi}$, в) $f = \frac{1}{5{,}5}$.

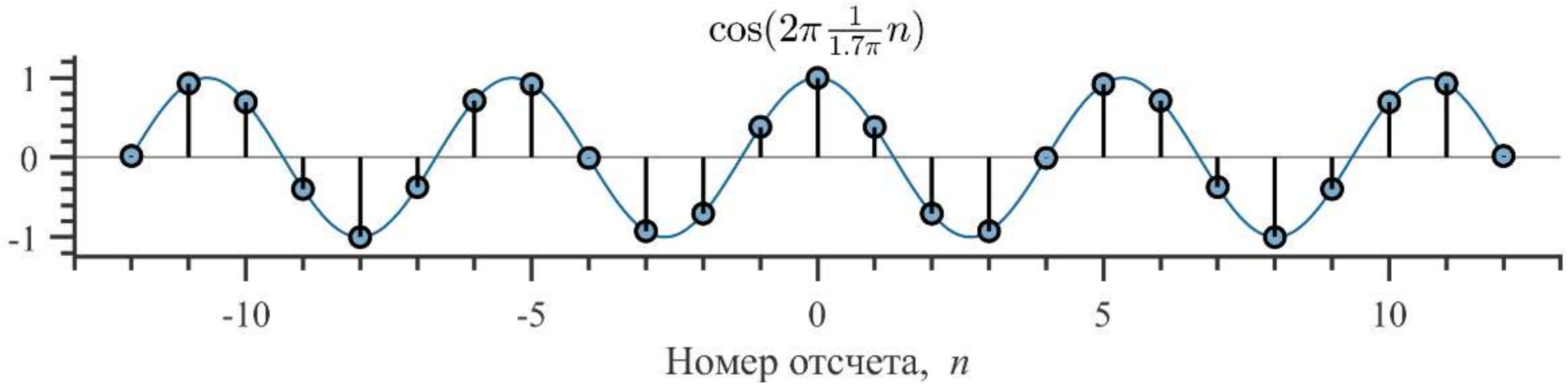
В каждом случае определите является ли сигнал периодическим. В случае, если это верно, определите основной период N_0 и определите является ли *основная частота* сигнала равной частоте синусоиды f.

Примеры дискретных синусоид (2)

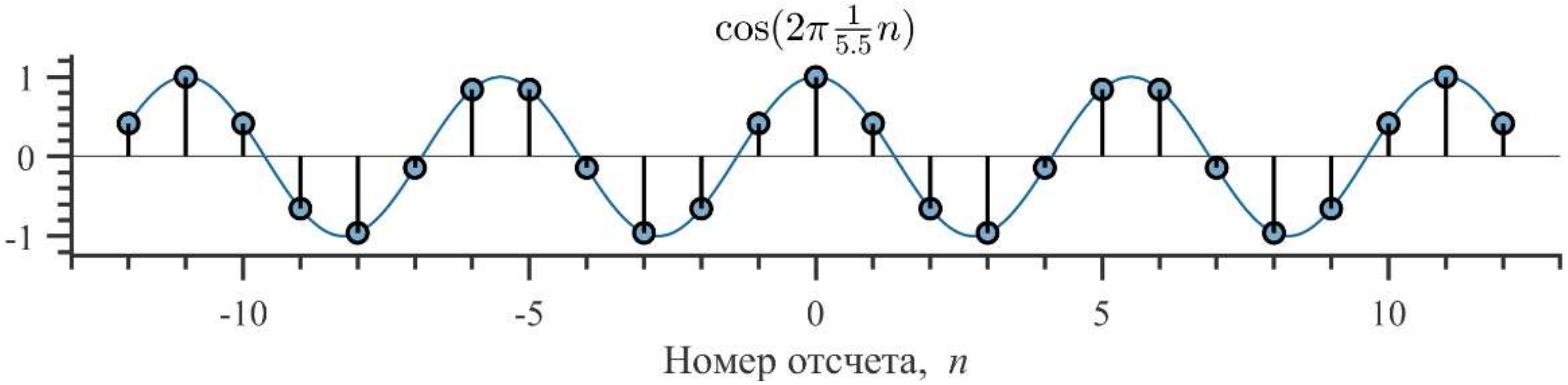
а)



б)



в)



Дискретные синусоиды из примера

Отличие аналоговой и дискретной синусоиды

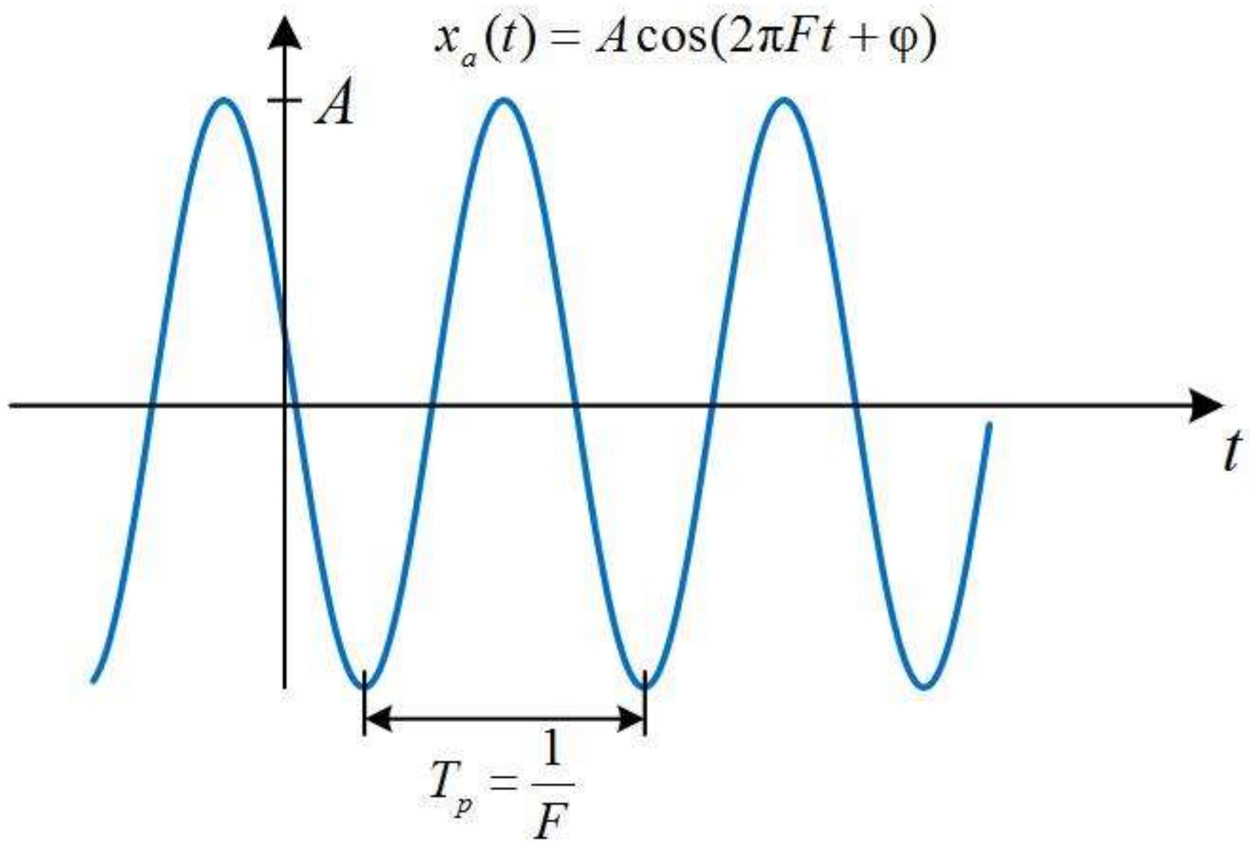
Непрерывный синусоидальный сигнал

$$x_a(t) = A\cos(\Omega t + \varphi), \qquad -\infty < t < \infty, \tag{8}$$

где A – амплитуда, Ω – круговая частота синусоиды (рад/с), φ – начальная фаза (в радианах).

Используя $\Omega = 2\pi F$, можно переписать (4)

$$x_a(t) = A\cos(2\pi F t + \varphi), \qquad -\infty < t < \infty, \tag{9}$$



Свойство периодичности

Любой периодический сигнал удовлетворяет свойству

$$x_a(t) = x_a(t + T_0). \tag{10}$$

Понятие частоты для дискретных сигналов (1)

Выполним дискретизацию непрерывной синусоиды (4):

$$x(n) = x_a(nT) = A\cos(2\pi FnT + \varphi) = A\cos\left(2\pi\frac{F}{f_s}n + \varphi\right). \qquad (11)$$

Получившаяся синусоида имеет вид:

$$x(n) = A\cos(\omega n + \varphi), \qquad \omega = 2\pi\frac{F}{f_s}. \qquad (12)$$

- ✓ Между Ω из (8) и ω из (12) есть разница: частота Ω измеряется в ***рад/сек***, а ω в ***рад/отсчет***.

- ✓ величина n в отличие от времени t являются безразмерной и принимает только целые значения.

Понятие частоты для дискретных сигналов (2)

Тот факт, что переменная n принимает только целые значения, подводит к важным отличиям в свойствах непрерывных и дискретных синусоид. Эта разница особенно заметна при частоте $(\omega + 2\pi)$:

$$x(n) = \cos((\omega + 2\pi)n) = \cos(\omega n + 2\pi n) = \cos(\omega n). \quad (13)$$

!!! *для дискретной синусоиды частоты* ω *и* $\omega + 2\pi$ *неразличимы*.

Цифровая частота

При рассмотрении дискретных синусоид необходимо ограничится интервалом частот величиной 2π. Обычно берут либо положительные частоты в интервале $\omega \in [0,\ 2\pi]$, либо – симметричный интервал $\omega \in [-\pi,\ \pi]$.

Комплексная экспонента

$$x(n) = z^n, \qquad z = re^{j\omega}. \tag{14}$$

Используя формулу Эйлера можно расписать выражение (14):

$$x(n) = z^n = \left(re^{j\omega}\right)^n = r^n e^{j\omega n} = r^n(\cos\omega n + j\sin\omega n). \tag{15}$$

Понятие комплексной экспоненты обобщает следующие 4-е типа функций:

1) Константная функция

$$k = k1^n \quad (\text{при } z = 1e^{j0})$$

2) Вещественная экспонента

$$r^n \quad (\text{при } z = re^{j0})$$

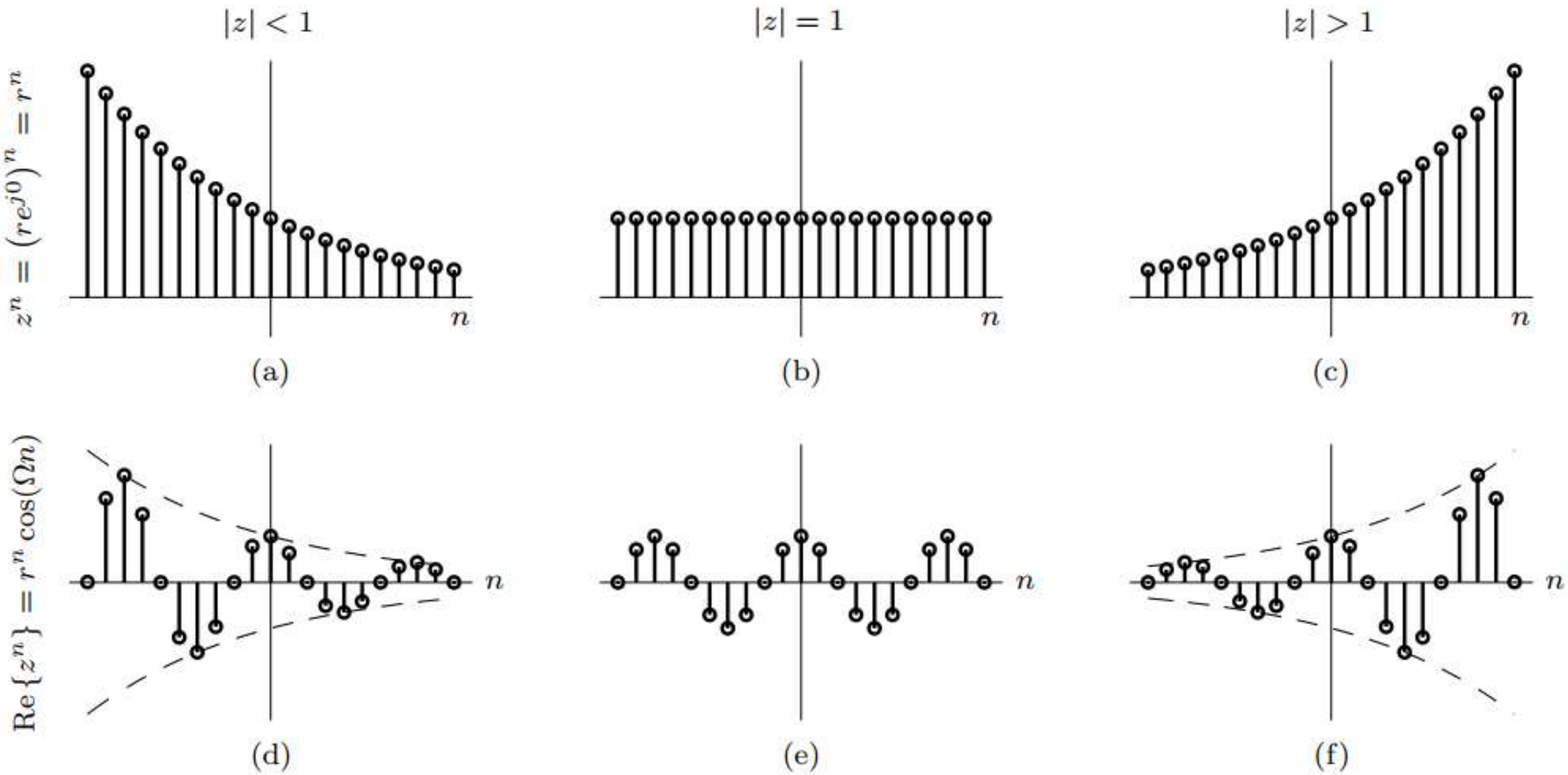
3) Синусоида

$$\cos\omega n = \mathrm{Re}\{e^{j\omega n}\} \quad (\text{при } z = 1e^{j\omega})$$

4) Затухающая/возрастающая синусоида

$$r^n\cos\omega n = Re\{re^{j\omega n}\} \quad (\text{при } z = re^{j\omega})$$

Комплексная экспонента (примеры)



Различные проявления комплексных экспонент z^n и $\mathrm{Re}\{z^n\}$

Sinc-функция

При изучении теории сигналов часто используется функция вида:

$$x(t) = \frac{\sin \pi t}{\pi t} = \mathrm{sinc}(\mathrm{t}).$$

В ЦОС чаще всего пользуются следующей формой sinc-функции:

$$x(n) = \frac{\sin \omega_0 n}{\omega_0 n} = \mathrm{sinc}(\omega_0 n).$$