1 Тема 3. Дискретные системы

1.1 Операции над сигналами

1.1.1 Временной сдвиг

Сдвинутая на целое число отсчетов k последовательность $x(n)$ формируется как

$$y(n) = x(n-k).$$

Если k положительное, то сигнал $y(n)$ сдвигается вправо относительно $x(n)$, т.е. $y(n)$ является *задержанной* версией $x(n)$. Если k отрицательное, то сигнал $y(n)$ сдвигается влево относительно $x(n)$, т.е. $y(n)$ является *опережающей* версией $x(n)$. На рисунке 1.1 приведены примеры временного сдвига дискретного сигнала.

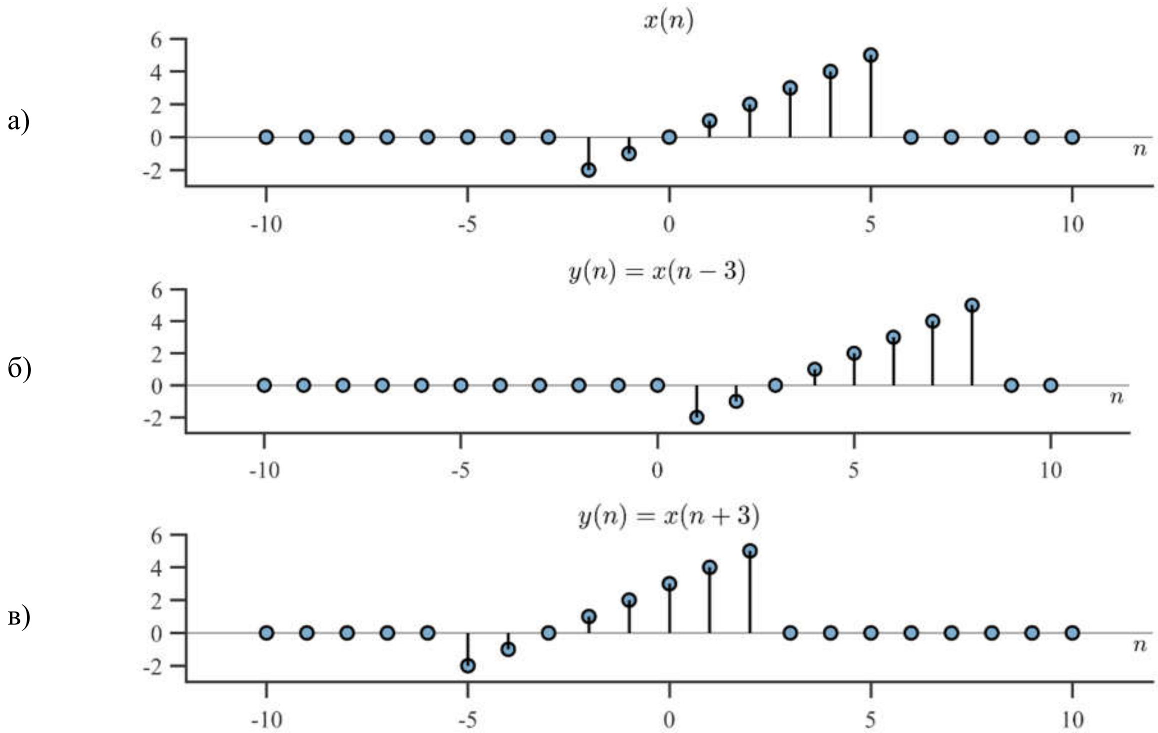


Рисунок 1.1 – Дискретный сигналы $x(n)$: а) исходный вид; б) задержанная версия на 3 отсчета; в) опережающая на 3 отсчета версия

При изучении и описании дискретных систем важным понятием является понятие *единичного оператора задержки* D. Действие данного оператора описывается следующим выражением:

$$D\{x(n)\} = x(n-1).$$

Повторное применение оператора задержки обозначается как $D(D) = D^2$ и приводит к следующему действию:

$$D^2\{x(n)\} = x(n-2).$$

При обозначении операции временного сдвига на блок-схеме дискретной системы используют один из двух способов, показанных на рисунке 1.2.

Рисунок 1.2 – Варианты обозначения операции временного сдвига

1.1.2 Масштабирование

Операция масштабирования заключается в умножении сигнала на константу $\alpha \in \mathbb{C}$:

$$y(n) = \alpha x(n).$$

Если α представляет собой действительное число, то масштабирование является обычным усилением (при $|\alpha| > 1$) или ослаблением (при $|\alpha| < 1$). На рисунке 1.3 приведено условное графическое обозначение операции масштабирования, используемое при описании блок-схем дискретных систем.

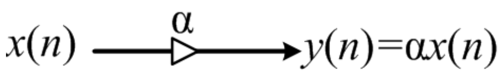


Рисунок 1.3 – Обозначение на блок схеме операции масштабирования

1.1.3 Суммирование и произведение

Сумма двух последовательностей $x(n)$ и $w(n)$ определяется путем поэлементной операции суммирования:

$$y(n) = x(n) + w(n).$$

Аналогично определяется произведение двух последовательностей:

$$y(n) = x(n)w(n).$$

Обозначение операций суммирования и умножения, используемое при описании блок-схем дискретных систем приведено на рисунке 1.4.

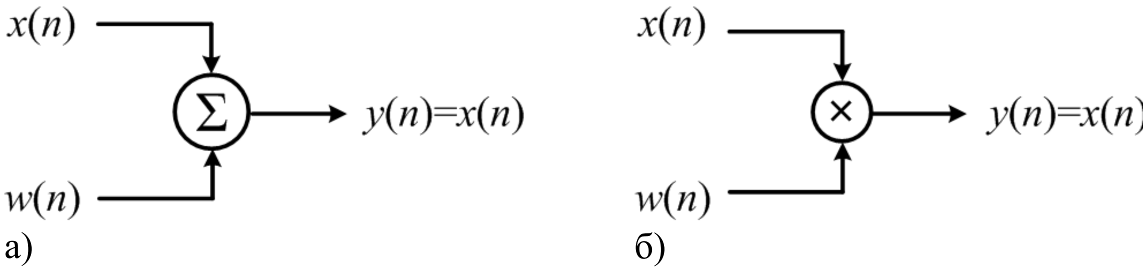


Рисунок 1.4 – Обозначение на блок схеме операций: а) сложения; б) масштабирования

1.2 Общие сведения о дискретных системах

Система обработки сигнала – это устройство, которое обрабатывает входные сигналы и/или формирует выходные сигналы. Когда-то все системы обработки сигнала были полностью аналоговыми (телефоны, радио). В этом разделе мы определим систему с дискретным временем, введем важные классы систем (отличающиеся своими свойствами). Это привет нас к определению фильтра, которое станет центральным в нашем учении.

С точки зрения математики ***система с дискретным временем*** определяется как *преобразование*, или *оператор*, переводящий входную последовательность $x(n)$ в выходную последовательность $y(n)$ отклик (или реакцию) системы, что можно обозначить как

$$y(n) = T\{x(n)\}. \tag{1.1}$$

Соотношение (1.1) – это правило, или формула, по которому вычисляется реакция системы через отсчеты сигнала, поданного на её вход. Необходимо подчеркнуть, что отсчет с индексом n может зависеть от всех отсчетов входного сигнала $x(n)$.[1]

Приведем несколько примеров примитивных систем:

Пример 1.1. Система, имеющая константу на выходе (игнорирование входа):

$$y(n) = C.$$

При помощи такой системы можно моделировать источник питания.

Пример 1.2. Система реализующая «тождество» (identity):

$$y(n) = x(n).$$

Пример 1.3. Система реализующая усилитель:

$$y(n) = Ax(n).$$

Далее приведены примеры более сложных систем.

---

[1] В некоторых случаях система не имеет входного сигнала. Примером служит генератор синусоидального колебания. Тем не менее, для генератора может служить входом: частота, фаза, амплитуда. Такие генераторы являются базовыми элементами для трансмиттеров, радаров и музыкальных синтезаторов.

Иногда система не имеет выходного сигнала. Пример – детектор, его выходом служит логическая переменная: ложь, если не обнаружен сигнал с определенными параметрами.

Пример 1.4. ***Идеальная система задержки*** (ИСЗ) определяется по формуле:

$$y(n) = x(n - n_d), -\infty < n < \infty,$$

где n_d – фиксированное натуральное число, называемое *задержкой* системы. Иными словами, ИСЗ сдвигает входную последовательность вправо на n_d отсчетов.

Пример 1.5. ***Скользящее среднее***

Общая система скользящего среднего имеет вид:

$$y(n) = \frac{1}{M_1 + M_2 + 1} \sum_{k=-M_1}^{M_2} x(n-k)$$
$$= \frac{1}{M_1 + M_2 + 1} \times \left(x(n + M_1) + x(n + M_1 - 1) + \cdots + x(n) + \cdots + x(n - M_2)\right).$$

Она вычисляет n-й отсчет входной последовательности как среднее арифметическое $(M_1 + M_2 + 1)$ отсчетов входной последовательности, расположенных вокруг n-го отсчета.

1.3 Свойства дискретных систем

1.3.1 Системы без памяти (memoryless system)

Для системы без памяти характерно, что её текущий отклик $y(n)$ зависит только от текущего входного значения $x(n)$ для любого n.

Пример 1.6. Система

$$y(n) = x^2(n),$$

является системой без памяти, а система

$$y(n) = x(n) + x(n-1)$$

является системой с памятью.

Характерно, что «zero-state» системы (т.е. системы без памяти) при технической реализации не требуют сохранения контекста своей работы. Выходной результат в них зависит только от текущего входа.

1.3.2 Детерминированность (каузальность)

Систему называют ***детерминированной***, если выходной отсчет системы с номером n_0 зависит только от входных отсчетов с номерами $n \le n_0$.

Пример 1.7[2] Система, описываемая уравнением

$$y(n) = x(n) + x(n-1)$$

является детерминированной, поскольку выход системы для любого момента времени $n = n_0$ зависит от входа $x(n)$ в моменты времени n_0 и $n_0 - 1$.

Система

$$y(n) = x(n) + x(n+1),$$

напротив недетерминированная (некаузальная), поскольку её выход в момент времени $n = n_0$ зависит от входа в момент времени $n_0 + 1$.

Рассмотрим более сложных пример работы системы, выполняющей «уплотнение» сигнала.

Пример 1.8[3] ***Компрессор (уплотнитель)***– это система, определяемая соотношением

$$y(n) = x(Mn), -\infty < n < \infty,$$

где $M \in \mathbb{N}$. Компрессор отбрасывает $M - 1$ из каждых M отсчетов входной последовательности.

Компрессор не является детерминированной системой поскольку $y(1) = x(M)$, т.е. высох в момент времени $n = 1$ зависит от входного отсчета в момент времени $n = M$.

Попробуйте сами ответить на следующие вопросы:

1. Детерминирована ли система скользящего среднего?

2. Детерминирована ли система идеальной задержки?

1.3.3 Устойчивость (stable)

Говорят, что система устойчива, если и только если её реакция на любой ограниченный по амплитуде сигнал ограничена. Последовательность $x(n)$ называется ***ограниченной***, если найдется такое конечное положительное число B_x, что

$$\forall n \quad |x(n)| \le B_x < \infty.$$

Т.о. в устойчивой системе для **каждой** ограниченной входной последовательности найдется такая положительная константа B_y, что

$$\forall n \quad |y(n)| \le B_y < \infty.$$

[2] Оппенгейм, с.40
[3] Оппенгейм, с.40

Важно понять, что устойчивость – свойство именно системы, а не входных последовательностей. Можно и для неустойчивой системы найти входную последовательность, для которой выход будет ограниченным. Для устойчивости важно, что выход ограничен для **любой** ограниченной входной последовательности.

Пример 1.9 Является ли устойчивой система, описываемая уравнением

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{n} x(n).$$

Пример 1.10 Является ли устойчивой система:

$$y(n) = \cos(x(n)).$$

Пример 1.11 Является ли устойчивой система:

$$y(n) = \lg(x(n)).$$

Решение. Нет, поскольку $y(n) = \lg(x(n)) = -\infty$ для $x(n) = 0$.

1.3.4 Обратимость

Обратимость системы – важное свойство в таких приложениях как частотная коррекция канала и обратная фильтрация. Говорят, что система является *обратимой*, если вход системы можно восстановить единственным образом зная выход системы. Для того, чтобы система была обратимой она должна для различных входов производить различные выходы. Другими словами, если есть два входа $x_1(n)$ и $x_2(n)$, причем $x_1(n) \neq x_2(n)$, то должно выполнятся неравенство $y_1(n) \neq y_2(n)$.

Система, определенная как

$$y(n) = x(n)g(n)$$

является обратимой только тогда, когда $g(n) \neq 0\ \forall n$. В частности зная $y(n)$ и $g(n)$, которое не равно нулю для всех n, вход $x(n)$ можно восстановить по $y(n)$ следующим образом:

$$x(n) = \frac{y(n)}{g(n)}.$$

Пример 1.12 Является ли обратимыми следующие системы:

а) $y(n) = 2x(n)$

б) $y(n) = nx(n)$

в) $y(n) = x(n) - x(n-1)$

г) $y(n) = \sum_{k=-\infty}^{n} x(k)$

д) $y(n) = Re\{x(n)\}$

1.3.5 Аддитивность

Под аддитивностью понимается суперпозиция причин и результатов. Так, если причина «x_1» вызывает результат «y_1» и если причина «x_2» вызывает результат «y_2», то суперпозиция причин и результатов означает, что причина «x_1+x_2» вызовет результат «$y_1 + y_2$».

Выражаясь математически система называется ***аддитивной*** если

$$T\{x_1(n) + x_2(n)\} = T\{x_1(n)\} + T\{x_2(n)\}$$

для любых сигналов $x_1(n)$ и $x_2(n)$.

1.3.6 Однородность (гомогенность)

Под однородностью понимается наличие пропорциональности между входным и выходным сигналами. Дадим этому понятию более точное определение.

Система называется ***однородной***, если

$$T\{cx(n)\} = cT\{x(n)\}, \qquad c \in \mathbb{C}.$$

для входной последовательности $x(n)$. Т.е. для любого комплексного числа c реакция системы на входной сигнал $cx(n)$ в c раз больше реакции системы на входной сигнал $x(n)$.

Пример 1.13[4] Система

$$y(n) = \frac{x^2(n)}{x(n-1)}$$

не аддитивна, поскольку

$$T\{x_1(n) + x_2(n)\} = \frac{\big(x_1(n) + x_2(n)\big)^2}{x_1(n-1) + x_2(n-1)}$$

что не тоже самое, что

$$T\{x_1(n)\} + T\{x_2(n)\} = \frac{x_1^2(n)}{x_1(n-1)} + \frac{x_2^2(n)}{x_2(n-1)}$$

А является ли она однородной? Да. Поскольку

$$T\{cx(n)\} = \frac{\big(cx(n)\big)^2}{cx(n-1)} = c\,\frac{x^2(n)}{x(n-1)} = cT\{x(n)\}.$$

[4] Shaum DSP p.8

Другой пример

Пример 1.14[5] Система

$$y(n) = x(n) + x^*(n-1)$$

является аддитивной, но не однородной.

Проверка

$$T[x_1(n) + x_2(n)] = x_1(n) + x_2(n) + x_1^*(n-1) + x_2^*(n-1),$$

$$T\{x_1(n)\} + T\{x_2(n)\} = x_1(n) + x_2(n) + x_1^*(n-1) + x_2^*(n-1)$$

Аддитивность подтверждается.

$$T\{cx(n)\} = cx(n) + \big(cx(n-1)\big)^* = cx(n) + c^*x^*(n-1).$$

Очевидно, что это не равно

$$cT\{x(n)\} = cx(n) + cx^*(n-1).$$

Однородность не подтверждается.

1.3.7 Линейные системы

Класс линейных систем определяется по принципу суперпозиции, т.е. обладает одновременно свойством *аддитивности* и *однородности*:

$$T\{a_1x_1(n) + a_2x_2(n)\} = a_1T\{x_1(n)\} + a_2T\{x_2(n)\}. \tag{1.2}$$

Другими словами, линейность подразумевает, что системный оператор T коммутирует с операциями суммы и масштабирования. Для линейной системы не важно в каком порядке выполнять суммирование и масштабирование до либо после системного оператора.

Отклик линейной системы

Свойство линейности существенно упрощает вычисление отклика системы на заданный вход:

$$y(n) = T\{x(n)\} = T\left\{\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\delta(n-k)\right\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} T\{x(k)\delta(n-k)\}$$

поскольку коэффициенты $x(k)$ константы, то мы можем использовать свойство однородности:

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} T\{x(k)\delta(n-k)\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)T\{\delta(n-k)\} \tag{1.3}$$

Если мы введем $h_k(n)$ как отклик на единичный импульс во время $n = k$

[5] Shaum DSP p.8

$$h_k(n) = T\{\delta(n-k)\}$$

То (1.3) превратиться в

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) h_k(n). \qquad (1.4)$$

1.3.8 Стационарные системы

К ***стационарным*** относят системы, для которых временной сдвиг (или задержка) входной последовательности приводит к появлению такого же сдвига выходной последовательности.

Человек – не стационарная система, если дать человеку работу днем, он быстро её сделает, если разбудить его ночью, то результата работы придется ждать долго.

Более формально, если $y(n) = T\{x(n)\}$, то для стационарной системы справедливо тождество:

$$T\{x(n-n_0)\} = y(n-n_0).$$

Стационарные системы еще называют ***инвариантными относительно сдвига***.

Большинство рассмотренных ранее систем стационарны. Рассмотрим ещё один пример:

Пример 1.15[6] **Компрессор**

Система, определенная соотношением

$$y(n) = x(Mn), -\infty < n < \infty,$$

где $M \in \mathbb{N}$, называется уплотнителем (компрессором). Она отбрасывает $M-1$ из каждых M отсчетов входной последовательности. Показать, что она нестационарна можно следующим образом: рассмотрим реакцию $y_1[n]$ системы на входной сигнал $x_1(n) = x(n-n_0)$. Если бы система была стационарна, то выполнялось бы равенство $y_1(n) = y(n-n_0)$. Однако

$$y_1(n) = x_1(Mn) = x(Mn-n_0) \neq y(n-n_0) = x(M(n-n_0))$$

Для стационарных систем:

$$D^m H\{x(n)\} = H\{D^m x(n)\} = H\{x(n-m)\}.$$

Пример 1.16[7] Для следующей системы определите её свойства (Запоминание? Устойчивость? Детерминированность? Аддитивность? Однородность? Линейность? Стационарность?)

$$y(n) = \mathrm{median}\{x(n-1), x(n), x(n+1)\},$$

[6] Оппенгейм, с.40

[7] Shaum DSP p.49

Ответ:

Медианный фильтр:

1) с запоминанием;

2) устойчивый;

3) недетерминированный;

4) однородный;

5) неаддитивный

6) нелинейный (не хватает аддитивности);

7) стационарный (инвариантный относительно сдвига, инвариантный во времени)

1.4 Линейные стационарные системы

Линейные стационарные системы представляют собой особо распространенный класс систем. Наличие этих свойств позволяет описывать системы в удобном виде. Они также играют ведущую роль в приложениях обработки сигналов.

Хорошо, когда человек красивый, хорошо, когда человек умный, но, когда он одновременно и красивый, и умный – это уже некое новое качество, наступает гармония между формой и содержанием. Так и наличие одновременно двух свойств у дискретной системы – линейности и стационарности – делает её особенно привлекательной.

Если $h(n)$ – реакция системы на дельта-импульс $\delta(n)$, то её отклик на $\delta(n-k)$ будет $h(n-k)$. Поэтому возвращаясь к формуле (1.4) мы получим:

$$h_k(n) = T\{\delta(n-k)\} = h(n-k),$$

следовательно

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h_k(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k). \tag{1.5}$$

Уравнение (1.5) называется ***сверткой*** и обозначается как

$$y(n) = x(n) * h(n), \tag{1.6}$$

где $*$ – обозначает операцию свертки.

Последовательность $h(n)$ – называется импульсной характеристикой системы. Таким образом, ЛС-система полностью определяется своей импульсной характеристикой $h(n)$, в том смысле, что опираясь на (1.5), можно вычислить отклик $y(n)$ на **любой** поданный сигнал $x(n)$.

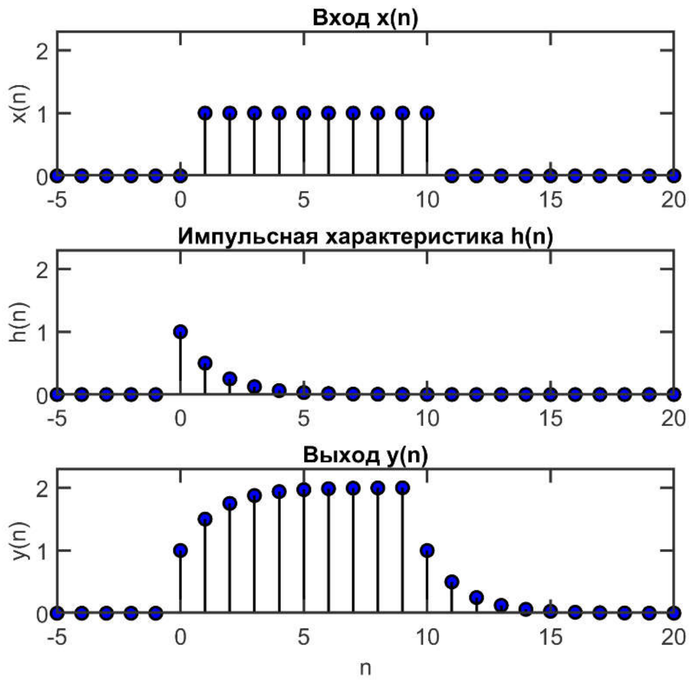
Пример 1.17 Рассмотрим ЛС-систему с импульсной характеристикой $h(n) = 2^{-n}u(n)$. Найти реакцию системы на вход $x(n) = u(n) - u(n-10)$.

Решение. Вход $x(n)$ можно переписать в виде

$$x(n) = \sum_{k=0}^{9} \delta(n-k).$$

Тогда общий отклик равен

$$y(n) = \sum_{k=0}^{9} h(n-k) = \sum_{k=0}^{9} 2^{k-n} u(n-k)$$



Рассмотрим ещё один пример.

Пример 1.18 Рассмотрим ЛС-систему с импульсной характеристикой

$$h(n) = \frac{1}{2}\delta(n) + \frac{1}{2}\delta(n-1) - \frac{1}{2}\delta(n-2) - \frac{1}{2}\delta(n-3),$$

Найти реакцию системы на вход

$$x(n) = \sum_{n=0}^{6} \delta(n).$$

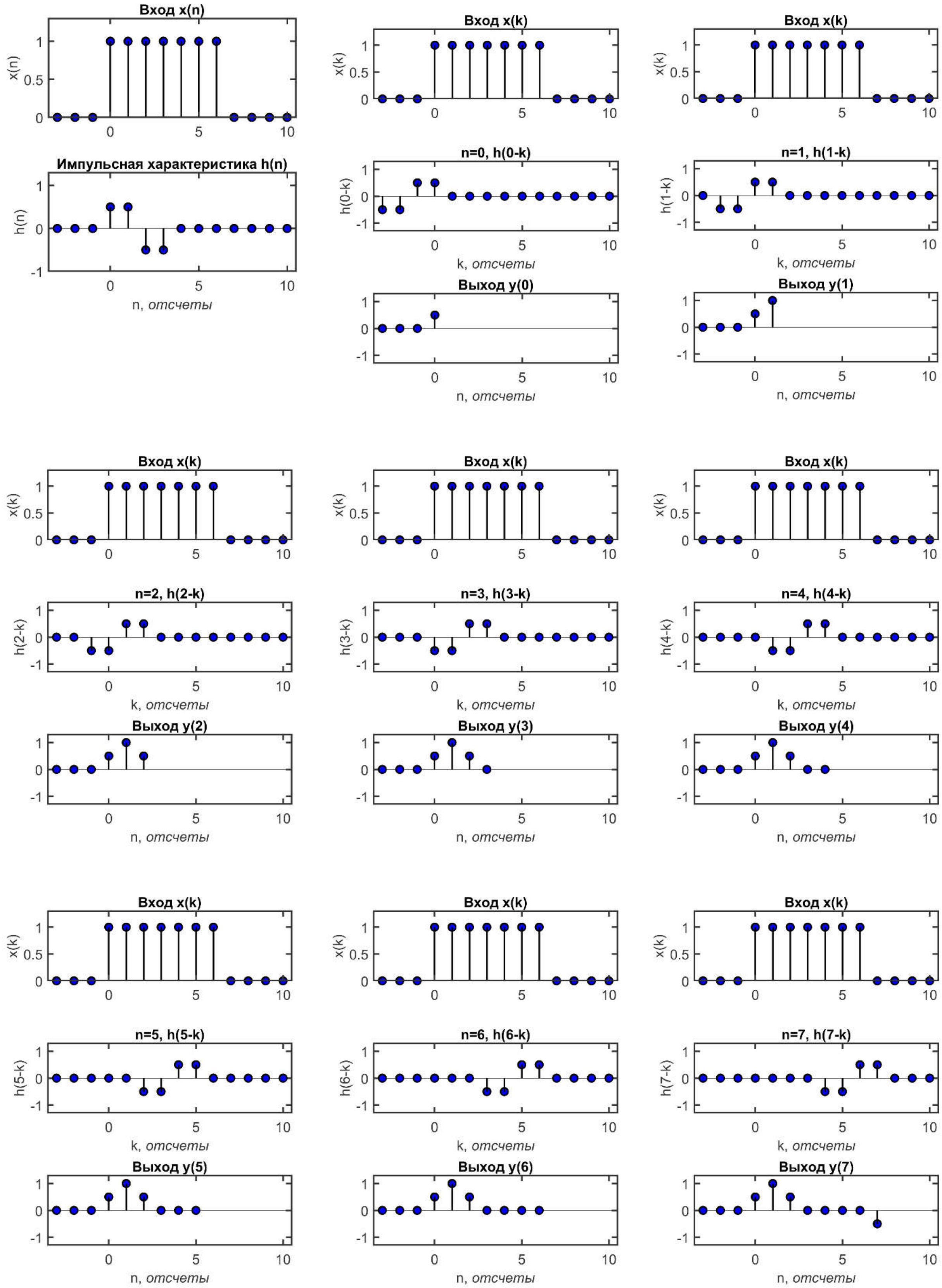
Решение. Общую формулу свертки можно переписать как

$$y(n) = \sum_{k=0}^{6} x(k)h(n-k).$$

Запишем выражение для $y(0)$

$$y(0)=\sum_{k=0}^{6} x(k)h(-k).$$

Графическое вычисление свертки показано на следующих рисунках.



Таким образом можно видеть, что в процессе вычисления свертки одна из последовательностей обращается во времени и сдвигается вправо по мере увеличения n.

Пример 1.19[8] Первый ненулевой элемент последовательности $x(n)$ появляется на индексе $n = -6$ и имеет значение $x(-6) = 3$, последний ненулевой элемент имеет индекс $n = 24$ и значение $x(24) = -4$. Какой индекс будет у первого ненулевого элемента последовательности и какое он будет иметь значение?

$$y(n) = x(n) * x(n)$$

Какой индекс будет у последнего ненулевого элемента? Какое он будет иметь значение.

Решение. Поскольку сворачиваются две последовательности конечной длины, то индекс первого ненулевого значения будет равен сумме индексов первых ненулевых элементов двух сворачиваемых последовательностей.

$$y(n) = \sum_{k=-6}^{24} x(k)x(n-k).$$

Пусть $k = -6$ при каком наименьшем n произведение $x(-6)x(n+6)$ будет ненулевым? Ответ: при $n = -12$. При этом будет получено значение

$$y(-12) = x^2(-6) = 9.$$

Аналогичным образом, индекс и значение последнего ненулевого элемента равны: $n = 48$, а

$$y(48) = x^2(24) = 16.$$

[8] Shaum DSP p.35