Практическое занятие 3:
“Дискретное преобразование Фурье (ДПФ)” (4 часа)

Определение ДПФ. Свойства ДПФ. Анализ сигнала при помощи ДПФ.

Теоретические сведения

Прямое дискретное преобразование Фурье (ДПФ) имеет следующий вид:

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}, \quad k = 0,1,\dots,N-1. \tag{1}$$

Обратное ДПФ записывается как

$$x(n) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{j\frac{2\pi}{N}nk}, \quad n = 0,1,\dots,N-1. \tag{2}$$

Что делает ДПФ?

В формулах (1)–(2) предполагается, что n – это временной индекс сигнала[1], а k – частотный индекс. Поэтому говорят, что ДПФ переводит сигнал из ***временной области*** в ***частотную***.

Как показано на рис.1, ДПФ переводит N точек входного сигнала в два выходных сигнала из $N/2+1$ точек, которые содержат *амплитуды* синусов и косинусов[2]. Термин ***частотная область*** используется для описания амплитуд синусов и косинусов (упорядоченных по возрастанию их частоты).

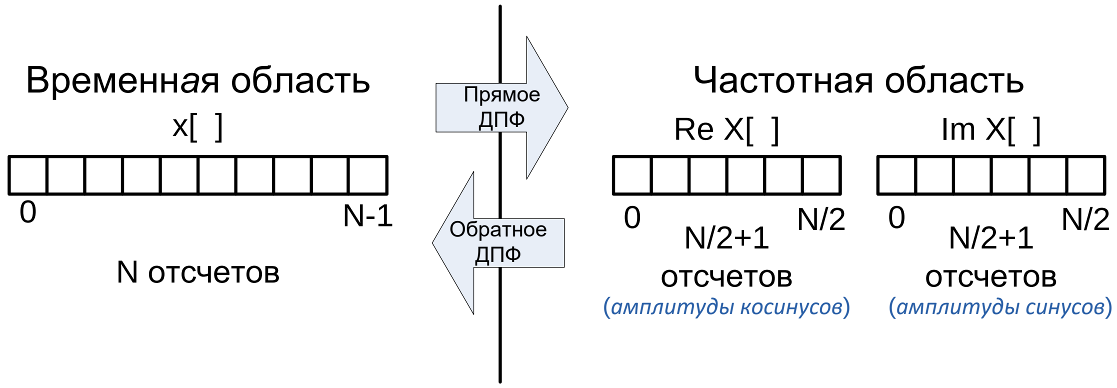

Рисунок 1 – ДПФ: представление сигнала во временной и частотной областях

Частотная область содержит точно такую же информацию, как и временная, но в другой форме. Если известно представление сигнала в одной из областей, всегда можно его представить в другой. Если известен сигнал во временной области, то процесс вычисления сигнала в частотной области называется *разложением*, *анализом*, *прямым ДПФ* или просто ДПФ. Если известен сигнал в частотной области, то вычисление сигнала во временной области называется *синтезом*, или *обратным ДПФ*.

---

[1] Это вызвано тем, что большинство сигналов, встречающихся в ЦОС, состоят из отсчетов, полученных через равные интервалы *времени*.

[2] Вспомним, что комплексные экспоненты, являющиеся базисными функциями ДПФ, раскладываются в сумму синуса и косинуса: $e^{j\omega} = \cos\omega + j\sin\omega$.

Симметрия ДПФ

Если последовательность $x(n)$ принимает вещественные значения, то ее ДПФ $X(k)$ удовлетворяет следующим условиям симметрии:

$$\mathrm{Re}[X(k)] = \mathrm{Re}[X(N-k)],$$

$$\mathrm{Im}[X(k)] = -\mathrm{Im}[X(N-k)],$$

$$|X(k)| = |X(N-k)|,$$

$$\arg X(k) = -\arg X(N-k).$$

Если ввести дополнительное условие симметрии последовательности $x(n)$, т.е. считать, что

$$x(n) = x(N-n),$$

то окажется, что $X(k)$ может быть только действительной.

Пример ДПФ-анализа

На рис. 2 показан пример ДПФ для $N = 32$. Сигнал во временной области представляется в виде массива $x[0], \ldots x[31]$, сигнал в частотной области – в виде двух массивов $\mathrm{Re}[X(0)] \ldots \mathrm{Re}[X(16)]$ и $\mathrm{Im}[X(0)] \ldots \mathrm{Im}\,X[(16)]$. Заметим, что 32 точки временной области соответствуют 17 точкам в каждом массиве частотной области с номерами частот от 0 до 16, т. е. N точек временной области соответствуют $N/2+1$ точек частотной области (не $N/2$ точек[3]).

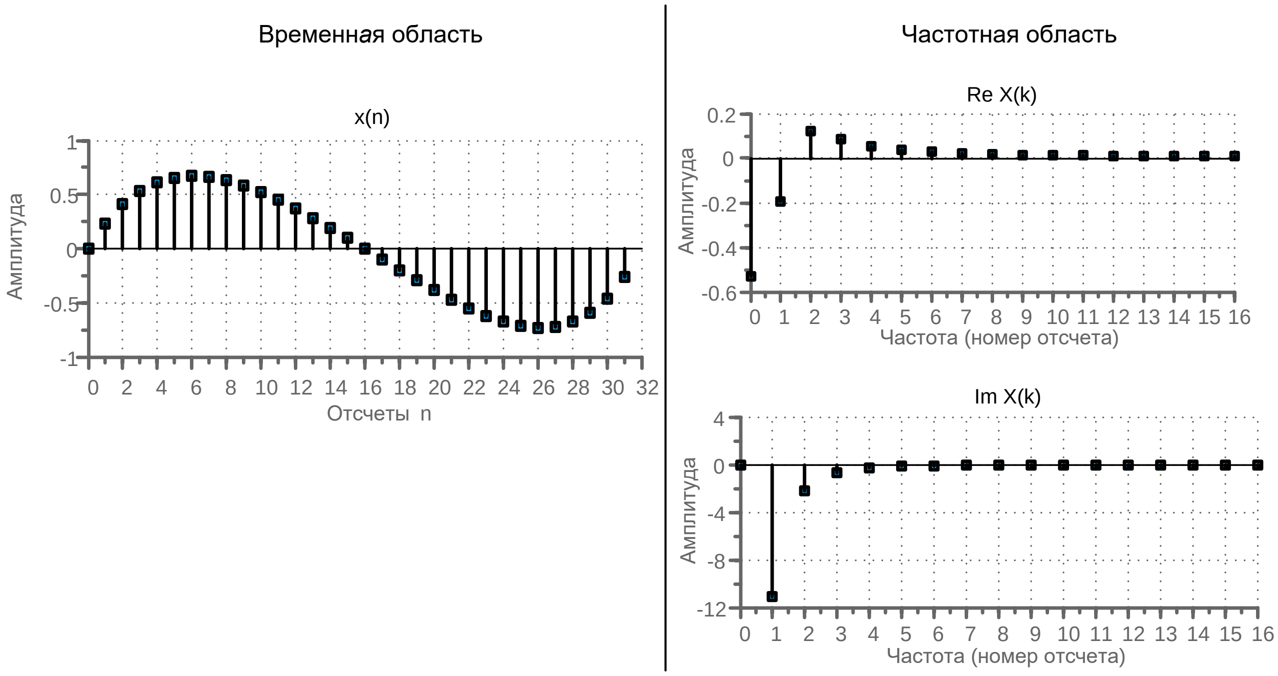

Рисунок 2 – Пример ДПФ для 32 отсчетов: представление сигнала во временной и частотной областях

Вычисление ДПФ

Можно записать следующие выражения для вычисления прямого ДПФ:

[3] Опускание этой дополнительной точки является типичной ошибкой при программировании ДПФ.

$$\mathrm{Re}[X(k)] = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)\cos\left(\frac{2\pi kn}{N}\right), \quad \mathrm{Im}[X(k)] = -\sum_{n=0}^{N-1} x(n)\sin\left(\frac{2\pi kn}{N}\right),$$

где $x[n]$ – входной сигнал во временной области; $\mathrm{Re}[X(k)]$ и $\mathrm{Im}[X(k)]$ –сигналы в частотной области; индекс k изменяется от 0 до $N/2$.

Уравнение синтеза или обратного ДПФ можно записать как

$$x[n] = \sum_{k=0}^{N/2} \mathrm{Re}[\hat{X}(k)]\cos\left(\frac{2\pi nk}{N}\right) + \sum_{k=0}^{N/2} \mathrm{Im}[\hat{X}(k)]\sin\left(\frac{2\pi nk}{N}\right). \tag{3}$$

Иными словами, любой сигнал из N точек $x[n]$ может быть создан суммированием $N/2+1$ косинусных волн и $N/2+1$ синусных волн. Амплитуды косинусных и синусных волн содержатся в массивах $\mathrm{Re}[\hat{X}(k)]$ и $\mathrm{Im}[\hat{X}(k)]$ соответственно. Такое обозначение массивов (вместо $\mathrm{Re}[X(k)]$ и $\mathrm{Im}[X(k)]$) вызвано тем, что амплитуды, необходимые для синтеза, отличаются от значений сигнала в частотной области. Это влияние коэффициента масштабирования. Для получения правильного результата требуется нормализация:

$$\mathrm{Re}[\hat{X}(k)] = \frac{\mathrm{Re}[X(k)]}{\frac{N}{2}}, \quad \mathrm{Im}[\hat{X}(k)] = -\frac{\mathrm{Im}[X(k)]}{N/2},$$

за исключением двух специальных случаев:

$$\mathrm{Re}[\hat{X}(0)] = \frac{\mathrm{Re}[X(0)]}{N}, \quad \mathrm{Re}[\hat{X}(N/2)] = \frac{\mathrm{Re}[X(N/2)]}{N}.$$

Формулу для обратного преобразования Фурье можно записать в следующем виде:

$$x[n] = \sum_{k=0}^{N/2} M_k \cos\left(\frac{2\pi nk}{N} + \varphi_k\right), \tag{4}$$

где

$$M_k = \sqrt{\left(\mathrm{Re}[\hat{X}(k)]\right)^2 + \left(\mathrm{Im}[\hat{X}(k)]\right)^2}, \quad \varphi_k = \mathrm{arctg}\frac{-\mathrm{Im}[\hat{X}(k)]}{Re\,[\hat{X}(k)]}.$$

Выражение (4) показывает, что с помощью ДПФ можно представить сигнал в виде суммы гармонических колебаний. При этом каждая гармоника имеет свою амплитуду M_k и фазу φ_k. Для правильного вычисления фазы в среде Matlab предусмотрена функция atan2(imX, reX), которая возвращает значение угла в диапазоне $[-\pi, \pi]$.

Эффективная реализация ДПФ

Поскольку чаще всего приходится иметь дело с действительными последовательностями, то, вычислив одно ДПФ, можно получить ДПФ двух последовательностей, используя свойства симметрии. Рассмотрим две действительные последовательности $x(n)$ и $y\,(n)$ длиной N отсчетов и их ДПФ $X(k)$ и $Y(k)$, соответственно. Введем комплексную последовательность $z(n)$ вида

$$z(n) = x(n) + jy(n).$$

Ее ДПФ равно

$$Z(k) = \sum_{n=0}^{N-1} \left[x(n) + jy(n)\right] e^{-j(2\pi/N)nk},$$

$$Z(k) = X(k) + jY(k).$$

Выделяя действительную и мнимую части последнего равенства, получим

$$\mathrm{Re}[Z(k)] = \mathrm{Re}[X(k)] - \mathrm{Im}[Y(k)],$$

$$\mathrm{Im}[Z(k)] = \mathrm{Im}[X(k)] + \mathrm{Re}[Y(k)].$$

Действительные части $X(k)$ и $Y(k)$ симметричны, а мнимые антисимметричны, поэтому их легко разделить, используя операции сложения и вычитания:

$$\mathrm{Re}\left[X(k)\right] = \frac{\mathrm{Re}\left[Z(k)\right] + \mathrm{Re}\left[Z(N-k)\right]}{2},$$

$$\mathrm{Im}\left[Y(k)\right] = \frac{\mathrm{Re}\left[Z(N-k)\right] - \mathrm{Re}\left[Z(k)\right]}{2},$$

$$\mathrm{Re}\left[Y(k)\right] = \frac{\mathrm{Im}\left[Z(k)\right] + \mathrm{Im}\left[Z(N-k)\right]}{2},$$

$$\mathrm{Im}\left[X(k)\right] = \frac{\mathrm{Im}\left[Z(k)\right] - \mathrm{Im}\left[Z(N-k)\right]}{2}.$$

Итак, вычисляя одно N-точечное ДПФ, удается преобразовать сразу две действительные последовательности длиной по N отсчетов.

Вычисление ДПФ в пакете Matlab

В пакете Matlab для вычисления дискретного преобразования Фурье используется функция FFT(x). В случае матричного аргумента ДПФ рассчитывается для каждого столбца матрицы. Может оказаться полезным явное указание размера преобразования: FFT(x,N). Если реальная длина вектора x меньше заданной размерности N, он дополняется нулями. При этом можно получить больше частотных отчетов и, следовательно, улучшить условия различения синусоидальных компонент сигнала. Если длина входного вектора больше N, лишние отсчеты отсекаются.

Обратное дискретное преобразование Фурье вычисляется с помощью функции IFFT(x), которая используется аналогично предыдущей.

Практические задания

Задание 1. Разработайте функцию DFT, вычисляющую ДПФ от входного вектора, не используя функцию Matlab FFT, и рисующую графики действительной и мнимой частей результата преобразования. Сравните результаты работы своей функции с функцией Matlab FFT.

Задание 2. Предположим, что задан входной сигнал $x[n]$ и его ДПФ $X(k)$. Разработайте в среде Matlab функцию [cA, sA]=SinCosAmps(X), которая из комплексных значений $X(k)$ вычисляет амплитуды косинусов и синусов, на которые раскладывается сигнал $x[n]$. Если входной сигнал имеет размерность N, то выходные массивы cA и sA должны иметь размерность $N/2+1$. Продемонстрируйте работу функции.

Задание 3. Разработайте Matlab-функцию [x]=HarmSynthesis(cA, sA), которая выполняет синтез сигнала $x[n]$ из амплитуд косинусов и синусов, полученных функцией SinCosAmps. Проверьте работу функции.

Задание 4. Напишите Matlab-функцию которая входной сигнал $x(n)$ преобразует в гармонические параметры M_k и φ_k. Если $x(n)$ имеет длину N, то размерность массивов M_k и φ_k должна быть $N/2+1$.

Используя разработанную функцию проанализируйте первые N отсчетов голосового сигнал из файла voice.wav[4], постройте амплитудный и фазовый спектры сигнала.

Таблица 1 – Параметры N и K для заданий 4 и 5

Номер варианта	1	2	3	4	5	6	7	8
Длина сигнала N	900	1000	1080	1270	1200	1450	1600	1870
Число гармоник для синтеза K	9	10	20	12	6	14	8	11

Задание 5. Напишите Matlab-функцию которая выполняет синтез сигнала из гармонических параметров M_k и φ_k (см. формулу (4)). Проверьте работу функции, используя сигнал из задания 4. Также выполните отбор K гармоник, обладающих наибольшей амплитудой и реконструируйте по ним исходный сигнал $x(n)$.

Задание 6. Исследуйте свойства симметрии ДПФ при следующих входных сигналах: действительном; мнимом; действительном четном; мнимом четном; действительном нечетном. Длину входного вектора выберите в соответствии с вариантом:

[4] номер варианта (N), определяется как $N = (n_0 \bmod 8\ ) + 1\ )$, где n_0 – номер студента в списке группы.

Номер варианта	1	2	3	4	5	6	7	8
Длина сигнала N	32	35	40	37	48	33	43	51

Останется ли симметрия для комплексного входного сигнала? Каким должен быть входной сигнал, чтобы его ДПФ было действительным? Продемонстрируйте это.

Задание 7. Разработайте функцию, позволяющую с помощью ОДПФ формировать вектор, содержащий целое число периодов заданной функции. Длину выходного вектора, число периодов и функцию выберите в соответствии с вариантом:

Номер варианта	1	2	3	4	5	6	7	8
Вид функции	$-\sin x$	$-\cos x$	sin(x)	$\cos(x)$	$\sin x - \cos x$	$\sin x + \cos x$	$\cos x - \sin x$	$\sin x - 2\cos x$
Длина сигнала	85	90	101	98	120	115	98	76
Число периодов	3	4	6	5	8	7	6	2

Задание 8 Разработайте функцию, вычисляющую ДПФ для двух действитель-ных векторов одной длины с помощью однократного вызова функции Matlab FFT. Продемонстрируйте ее работу.

Задание 9[5] Используя функцию из задания 4 выполните Фурье-анализ ЭКГ сигнала[**]. Постройте график сигнала во временной и частотной областях. По оси абсцисс в частотной области отложите аналоговые частоты.

---

[5] Выполнение данного задания не является обязательным.

[**] Файл ecg_data хранится в репозитории. Для загрузки необходимо скопировать файл в текущий каталог Matlab и выполнить команду load('ecg_data'); частота дискретизации сигнала равна 360 Гц.