Лабораторная работа 3. “Ряды Фурье”

Цель работы: Изучение метода рядов Фурье.

Теоретические сведения

Ряд Фурье: общие сведения

Преобразование Фурье является одним из мощнейших средств для решения многих связанных с обработкой сигналов. *Жан Батист Жозеф Фурье* (1768–1830) предложил концепцию представления заданного сигнала (функции) в виде тригонометрического ряда из косинусов и синусов:

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos \omega_k t + b_k \sin \omega_k t), \quad (1)$$

где $\omega_k = \frac{2\pi k}{T_p}$;$T_p$ – период сигнала.

Особенность разложения (1) в том, что оно применимо только для периодических сигналов (рис. 1).

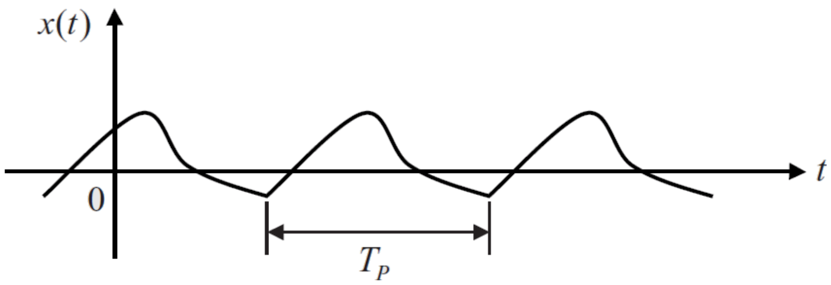


Рис. 1 – Периодический сигнал

Самая низкочастотная составляющая сигнала, которая входит в (1), называется *основной частотой,* или *частотой основного тона,* $f_0 = 1/T_P$, поскольку все остальные частоты кратны ей. Частотные компоненты сигнала называются ***гармониками***. Например, частотная компонента

$$a_2 \cos \omega_2 t + b_2 \sin \omega_2 t$$

является 2-й гармоникой. Коэффициент $a_0/2$ является постоянной составляющей и представляет собой *среднее значение* сигнала за период. Причина, по которой стремятся представить сигнал в форме (1), заключается в том, что часто полезно разложить «сложный» сигнал в сумму «простых» – в данном случае косинусов и синусов. Не следует считать, что периодические сигналы редкость в природе. Например, на рис. 2 показан участок речевого сигнала (звук «И»), форма которого близка к периодической. Такой же периодичностью обладают все гласные звуки.

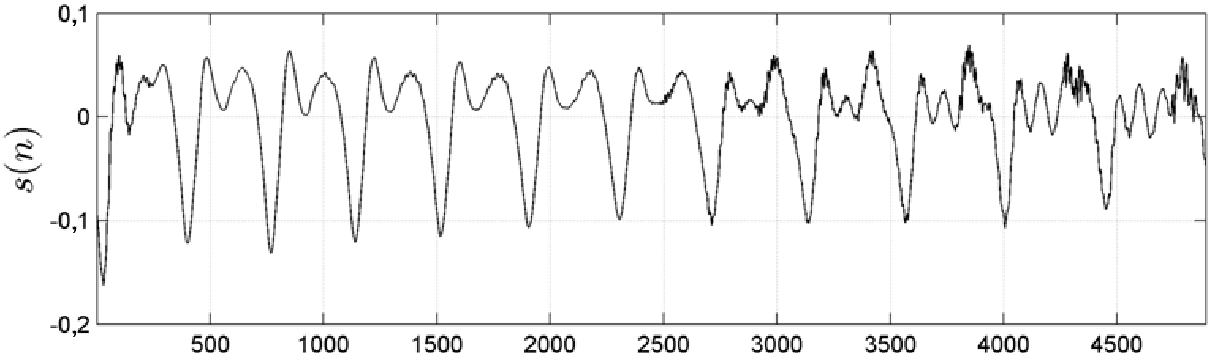


Рис. 2 – Пример речевого сигнала

Ортогональность функций sin и cos

Иногда возникает вопрос, почему для разложения функции в ряд (1) выбраны именно функции sin и cos? Так происходит потому тому, что эти функции обладают особым свойством *ортогональности*, известным из курса геометрии, где оно относилось к векторам. Оказывается, между функциями и векторами существует аналогия: как произвольный вектор можно представить в виде суммы ортогональных векторов (составляющих базис), так и произвольную функцию можно представить в виде суммы ортогональных функций (рис. 3).

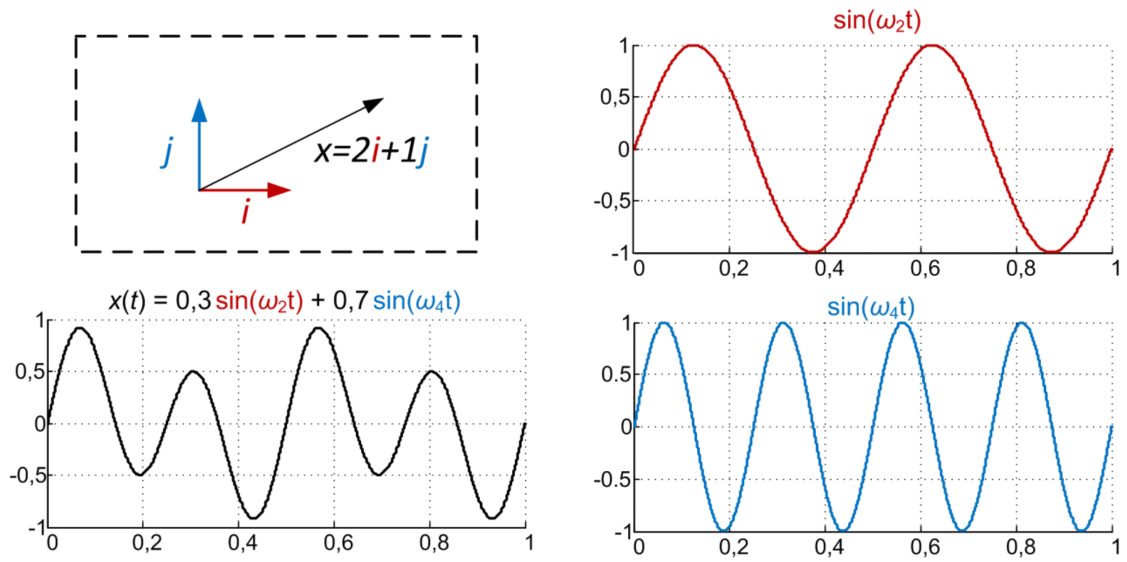


Рис. 3 – Разложение в ортогональный базис вектора и функции

Различие при разложении вектора и функции в том, что количество базисных векторов конечно, а число базисных функций бесконечно[1].

Как определить, является ли одна функция ортогональной по отношению к другой? Известно, что ортогональные векторы имеют нулевую проекцию друг на друга. С понятием проекции связано понятие скалярного произведения векторов

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i,$$

[1] Иногда говорят, что функция – это *бесконечномерный* вектор.

которое равно нулю для ортогональных векторов. Для функций также есть аналог скалярного произведения:

$$\int_a^b f_1(t) \cdot f_2(t) dt.$$

Это выражение равно нулю, если функции $f_1(t)$ и $f_2(t)$ортогональны на интервале $[a, \ b]$, иначе получаемое число показывает *проекцию* одной функции на другую. Исходя из того, что геометрический смысл интеграла – площадь под кривой, на рис. 4 иллюстрируется понятие скалярного произведения функций.

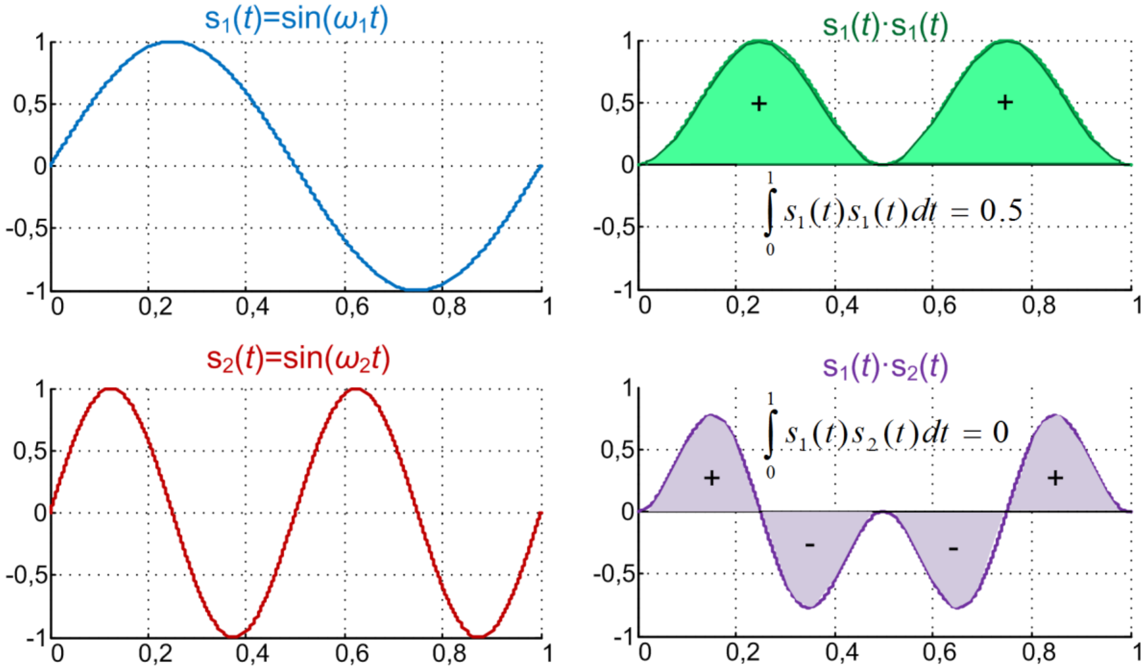


Рис. 4 – Скалярное произведение функций

На верхней панели рис. 4 показана функция $s_1(t)$ состоящая из одного периода синуса. Также показано, что скалярное произведение $s_1(t)$ на саму себя равно 0,5. На нижней панели показана функция $s_2(t)$ состоящая из двух периодов синуса. Показано произведение $s_1(t) \cdot s_2(t)$, которое состоит из двух симметричных участков, суммарная площадь которых с учетом знака равна нулю. Таким образом, можно сделать вывод, что функции $s_1(t)$ и $s_2(t)$ ортогональны друг другу н интервале [0, 1].

Учитывая введенные вначале обозначения, свойство ортогональности функций sin и cos записываются следующим образом:

$$\int_{-T/2}^{T/2} \cos \omega_k t \sin \omega_m t \, dt = 0, \ \ \forall k, m,$$

$$\int_{-T/2}^{T/2} \cos \omega_k t \cos \omega_m t \, dt = \begin{cases} 0, & k \neq m \\ T/2, & k = m, \end{cases} \qquad (2)$$

$$\int_{-T/2}^{T/2} \sin \omega_k t \sin \omega_m t \, dt = \begin{cases} 0, & k \neq m \\ T/2, & k = m. \end{cases}$$

Фурье-анализ

Основная задача Фурье-анализа найти коэффициенты a_k и b_k в выражении (1). Для этого необходимо умножить левую и правую части (1) на $\cos\omega_m t$:

$$x(t)\cos\omega_m t = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos\omega_k t\cos\omega_m t + b_k\sin\omega_k t\cos\omega_m t).$$

Интегрируя обе части по переменной $t\in[-T/2,\ T/2]$, получаем

$$\int_{-T/2}^{T/2} x(t)\cos\omega_m t\,dt = \frac{a_0}{2}\int_{-T/2}^{T/2}\cos\omega_m t\,dt +$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\int_{-T/2}^{T/2}\cos\omega_k t\cos\omega_m t\,dt + b_k\int_{-T/2}^{T/2}\sin\omega_k t\cos\omega_m t\,dt\right).$$

Используя свойство ортогональности (2), легко можно найти выражения для коэффициентов a_k:

$$a_k = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)\cos\omega_k t\,dt.$$

Коэффициенты b_k находятся аналогичным образом, только выражение (1) умножается на $\sin\omega_m t$:

$$b_k = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)\sin\omega_k t\,dt.$$

Часто бывает полезным следующее разложение функции $x(t)$, которое может быть получено из (3.1):

$$x(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k\cos(\omega_k t + \varphi_k), \qquad (3)$$

где $A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}$ – амплитуда компоненты сигнала на частоте ω_k; $\varphi_k = \mathrm{arctg}(-b_k/a_k)$ – фаза компоненты сигнала на частоте ω_k.

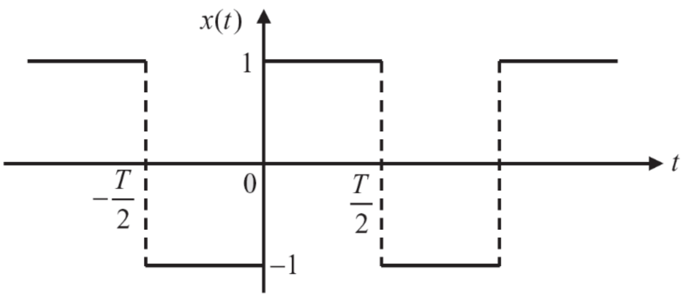


Рис. 5 –Прямоугольный сигнал

Пример 1. Прямоугольный сигнал

В качестве примера рассмотрим ряд Фурье для периодического сигнала $x(t + nT) = x(t)$, *который определен следующим образом (рис. 5):*

$$x(t) = \begin{cases} -1, & -T/2 < t < 0, \\ \ \ 1, & 0 \le t < T/2. \end{cases} \tag{4}$$

Легко заметить, что среднее значение сигнала равно нулю:

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)dt = 0,$$

а коэффициенты a_k*и* b_k *равны*

$$a_k = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)\cos(\omega_\mathrm{k} t)\,dt = \frac{2}{T}\left[\int_{-\frac{T}{2}}^{0} -\cos(\omega_\mathrm{k} t)\,dt + \int_{0}^{\frac{T}{2}} \cos(\omega_\mathrm{k} t)\,dt\right] = 0,$$

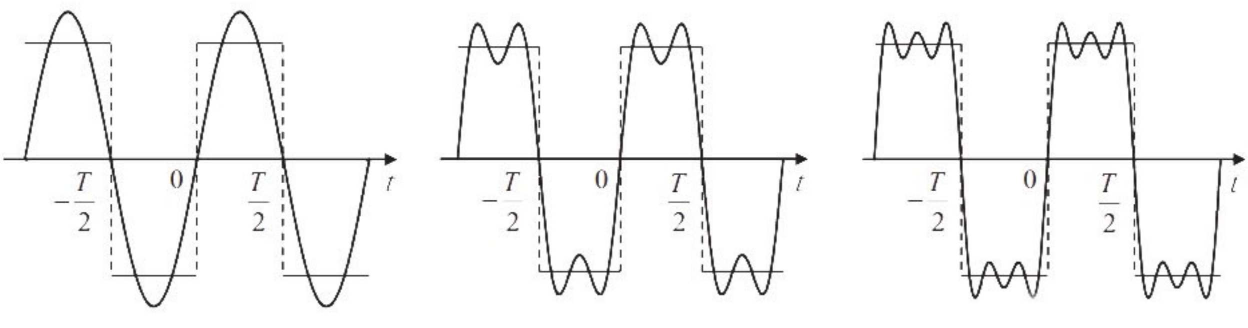
$$b_k = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)\cos(\omega_k t)\,dt = \frac{2}{T}\left[\int_{-\frac{T}{2}}^{0} -\cos(\omega_k t)\,dt + \int_{0}^{\frac{T}{2}} \sin(\omega_k t)\,dt\right] =$$

$$= \frac{2}{k\pi}(1 - \cos k\pi).$$

Подставляя полученные значения в (1), получим выражение для сигнала:

$$x(t) = \frac{4}{\pi}\left[sin(\omega_0 t) + \frac{1}{3}sin(3\omega_0 t) + \frac{1}{5}sin(5\omega_0 t) + \cdots\right]. \tag{5}$$

Необходимо отметить, что в разложении участвуют только функции sin. *Это происходит из-за того, что прямоугольный сигнал является нечетной функция и для его представления не нужны четные функции* cos.



$n = 1$ $\qquad$ $n = 2$ $\qquad$ $n = 3$

$S_1(t) = \frac{4}{\pi}\sin\omega_0 t$ $\qquad$ $S_2(t) = \frac{4}{\pi}\left(\sin\omega_0 t + \frac{1}{3}\sin 3\omega_0 t\right)$ $\qquad$ $S_3(t) = \frac{4}{\pi}(\sin\omega_0 t + \frac{1}{3}\sin 3\omega_0 t + \frac{1}{5}\sin 5\omega_0 t)$

Рис. 6 – Частичные суммы, аппроксимирующие прямоугольный сигнал

Полезно рассмотреть, как частичные суммы (5) аппроксимируют исходный сигнал $x(t)$. *Обозначим через* $S_n(t)$ *сумму первых* n*членов в (5). Графики первых трех частичных сумм приведены на рис. 6.*

Эффект Гиббса

Поведение частичных сумм ряда Фурье в точке разрыва функции называют *эффектом Гиббса*. Создается впечатление, что колебания в точках разрыва исчезнут, если просуммировать больше членов ряда, однако этого не происходит (рис. 7). Заметьте, что от количества слагаемых в ряде Фурье амплитуда выброса не изменяется.

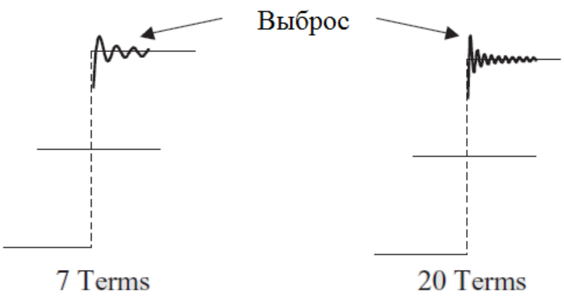


Рис. 7 – Эффект Гиббса

Комплексная запись ряда Фурье

Наиболее часто ряд Фурье записывается в терминах комплексных экспонент $e^{j\omega_k t}$. Переход к комплексной форме записи ряда Фурье можно выполнить, если учесть, что

$$\cos\theta = \frac{1}{2}\left(e^{j\theta} + e^{-j\theta}\right) \quad \text{и} \quad \sin\theta = \frac{1}{2j}\left(e^{j\theta} - e^{-j\theta}\right). \tag{6}$$

Используя эти соотношения, выражение (1) можно преобразовать к виду

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{-j\omega_k t}, \tag{7}$$

$$c_k = \frac{1}{T_P}\int_0^{T_P} x(t)e^{-j\omega_k t}dt,$$

где комплексные коэффициенты c_k связаны с a_k и b_k следующим образом:

$$c_k = (a_k - jb_k)/2.$$

Коэффициент c_k несет в себе информацию об амплитуде синусной и косинусной волны k-й компоненты разложения Фурье (или k-й гармоники). Форма (7) связана сразложением

$$x(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(\omega_k t + \varphi_k) \tag{8}$$

следующим образом[2]:

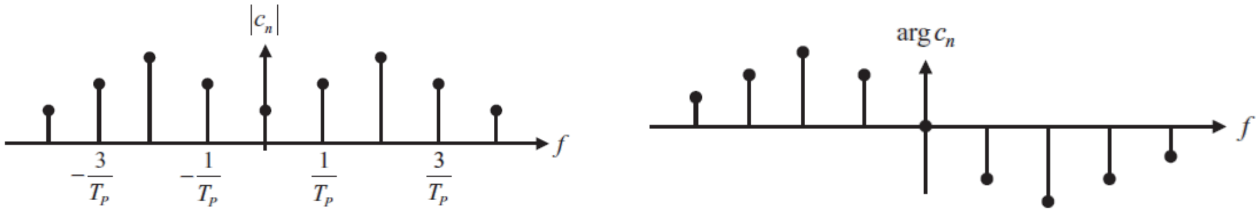
$$|c_k| = \sqrt{a_k^2 + b_k^2} = A_k, \quad \arg(c_k) = \operatorname{arctg}\left(\frac{-b_k}{a_k}\right) = \varphi_k.$$

[2] В Matlab для вычисления модуля комплексного числа используется функция `abs`, а для вычисления аргумента комплексного числа – функция `angle`.

Заметим, что в (7) «кирпичиками», из которых складывается сигнал, являются *комплексные экспоненты*$e^{-j\omega_k t}$. Коэффициенты c_k также имеют комплексные значения и несут в себе информацию не только об амплитуде, но и о фазе k-й гармоники. Кроме того, в (7) возникают компоненты с «отрицательной частотой». Понятие отрицательной частотыимеет чисто математическую природу и берет свои истоки в (6).

Спектр сигнала

Для пояснения понятия спектра сигнала обратимся к комплексной форме ряда Фурье (7). График зависимости $|c_k|$ от частоты ω_k называется *амплитудным спектром* сигнала $x(t)$. График зависимости фаз частотных компонент $\arg c_k$ в от частоты ω_kназывается *фазовым спектром* сигнала $x(t)$. Примеры амплитудного и фазового спектров показаны на рис. 8.



а б

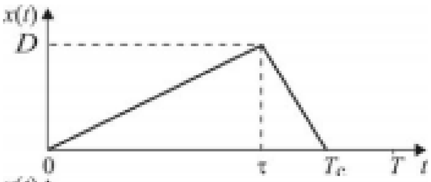
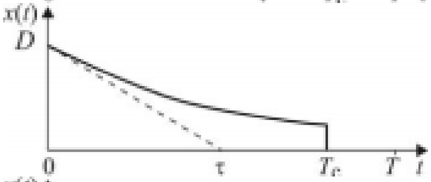
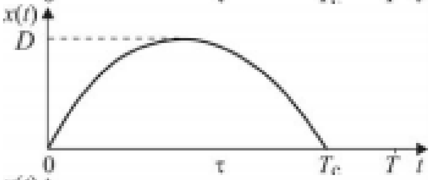
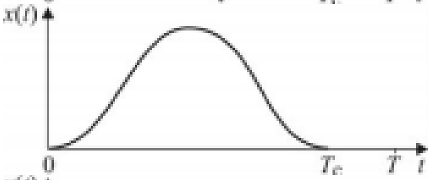
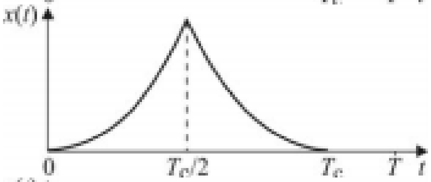
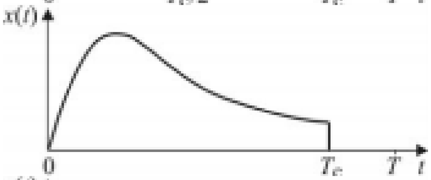
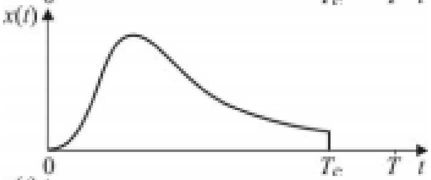
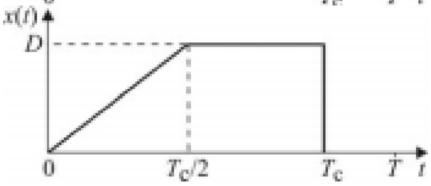
Рис. 8 – Спектры: а) амплитудный; б) фазовый

Альтернативным способом изобразить спектр сигнала является построение графиков для A_kи φ_k из выражения (8).

Ход работы

Задание 1. Получить аналитические выражения для коэффициентов a_k, b_k разложения в ряд Фурье варианту[3] из таблицы 1. Используйте значения констант $D = 2$, $\tau = 0{,}6$, $T_c = 0{,}8$ и $T = 1$.

Таблица 1 – Варианты сигналов

Сигнал		Вариант
	$x(t)=\begin{cases}(D/\tau)\cdot t & \text{при } 0\le t\le \tau,\\ D\cdot(t-T_c)/(\tau-T_c) & \text{при } \tau\le t\le T_c,\\ 0 & \text{при других } t.\end{cases}$	1
	$x(t)=\begin{cases}D\cdot\exp(-t/\tau) & \text{при } 0\le t\le T_c,\\ 0 & \text{при других } t.\end{cases}$	2
	$x(t)=\begin{cases}D\cdot\sin\left(\dfrac{\pi}{T_c}\cdot t\right) & \text{при } 0\le t\le T_c,\\ 0 & \text{при других } t.\end{cases}$	3
	$x(t)=\begin{cases}D\cdot\sin^2\left(\dfrac{\pi}{T_c}\cdot t\right) & \text{при } 0\le t\le T_c,\\ 0 & \text{при других } t.\end{cases}$	4
	$x(t)=\begin{cases}t^2 & \text{при } 0\le t\le T_c/2,\\ (t-T_c)^2 & \text{при } T_c/2\le t\le T_c,\\ 0 & \text{при других } t.\end{cases}$	5
	$x(t)=\begin{cases}t\cdot\exp(-\alpha t) & \text{при } 0\le t\le T_c,\\ 0 & \text{при других } t.\end{cases}$	6
	$x(t)=\begin{cases}t^2\cdot\exp(-\alpha t) & \text{при } 0\le t\le T_c,\\ 0 & \text{при других } t.\end{cases}$	7
	$x(t)=\begin{cases}2(D/T_c)\cdot t & \text{при } 0\le t\le T_c/2,\\ D & \text{при } T_c/2\le t\le T_c,\\ 0 & \text{при других } t.\end{cases}$	8

В варианте 6 и 7 константа $\alpha = 8$.

[3] Номер варианта (V), определяется как $V = ((n_0 - 1) \bmod 8) + 1$, где n_0 – номер студента в списке группы.

Задание 2.

Используя значения констант $D = 2$, $\tau = 0{,}6$, $T_c = 0{,}8$ и $T = 1$ рассчитайте коэффициенты a_k, b_k ($k = 0{,}1, \dots, 20$). Постройте графики для a_k и b_k, подпишите оси.

Задание 3.

Постройте графики частичных сумм

$$S_n(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos \omega_k t + b_k \sin \omega_k t),$$

аппроксимирующих исходный сигнал $x(t)$ на интервале $t = [-T,\ 2T]$ для $n \in \{1, 3, 10\}$. Наблюдается ли в данном случае эффект Гиббса? Если да, то какова причина его появления?

Задание 4.

Постройте графики сигналов ошибки аппроксимации:

$$\epsilon(t) = x(t) - S_n(t)$$

для n из задания 3. Уменьшается ли амплитуда ошибки по мере увеличения n?

Задание 5.

Рассчитайте параметры A_k, φ_k гармонической формы ряда Фурье (3), $k = 0{,}1, \dots, 20$. Постройте графики для A_k и φ_k, подпишите оси.