

### 5.3.5 Свертка

Свертка – это операция, которая производится измерительными приборами и в результате которой получается размытое (неясное) изображение изучаемого объекта.

Рассмотрим линейную систему, показанную на рисунке 5.18.

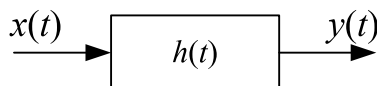


Рисунок 5.18 – Линейная система

Если на вход системы подать дельта-функцию  $x(t) = \delta(t)$ , то на выходе системы сформируется реакция, называемая **импульсной характеристикой системы**  $h(t)$ . В том случае, когда система является линейной и стационарной (т.е. её параметры не зависят от времени), то отклик системы на произвольный входной сигнал можно найти при помощи **уравнения свертки**<sup>23</sup>:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t - \tau)d\tau = h(t) * x(t). \quad (5.16)$$

Как алгебраическая операция свертка имеет следующие свойства:

1. **Дистрибутивность**:

$$a(t) * (b(t) + c(t)) = a(t) * b(t) + a(t) * c(t).$$

2. **Коммутативность**:

$$a(t) * b(t) = b(t) * a(t).$$

3. **Ассоциативность**:

$$a(t) * (b(t) * c(t)) = (a(t) * b(t)) * c(t).$$

#### Замечание относительно свёртки

Глядя на рисунок 5.18 может сложиться неверное представление об операции свертки, т.к. значение выходного сигнала в момент времени  $t$  зависит не только от значений  $h(t)$  и  $x(t)$  в момент времени  $t$ , но и от значений этих функций для всех предыдущих моментов времени. Более корректное представление операции свертки дано на рисунке 5.19.

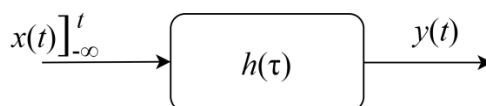


Рисунок 5.19 – Операция свертки

<sup>23</sup> Пример вывода формулы свертки можно найти в книге Макс Ж. и др. Методы и техника обработки сигналов при физических измерениях: В 2-х т.: Пер. с фр. – Мир, 1983. – Т. 1. – С. 53-55. – 312 с.

В действительности чаще всего импульсная характеристика  $h(\tau)$  отлична от нуля только на ограниченном промежутке  $[\tau_1, \tau_2]$ . Поэтому уравнение свертки можно записать в виде

$$y(t) = \int_{t-\tau_1}^{t+\tau_2} x(\tau)h(t-\tau)d\tau = h(t) * x(t). \quad (5.17)$$

#### Физически реализуемые линейны стационарные системы

Поскольку причина всегда предшествует следствию, невозможно создать линейную стационарную систему (или фильтр), импульсный отклик которого был бы отличен от нуля для  $t < 0$ . Следовательно любая физическая система имеет импульсный отклик  $h(t)$ , удовлетворяющий равенству

$$h(t) = 0, \quad t < 0.$$

Т.е. это условие эквивалентно тому, что выход системы не может появиться прежде, чем поступит входное воздействие.

#### Вычисление свертки

Поясим на примере, что происходит при операции свертки. Допустим, что требуется вычислить  $y(t)$  при  $t = t_0$ , т.е.

$$y(t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t_0 - \tau)d\tau. \quad (5.18)$$

Кроме того, предположим, что в качестве функций  $h(t)$  и  $x(t)$  выбраны следующие:

$$y(t) = \begin{cases} t & \text{при } t \geq 0, \\ 0 & \text{при } t < 0, \end{cases} \quad h(t) = \begin{cases} 2 & \text{при } t \geq 0, \\ 0 & \text{при } t < 0. \end{cases}$$

Графики этих функций изображены на рис. 5.20. На рис. 5.21 те же функции изображены в области переменной  $\tau$ . Как и следовало ожидать,  $h(\tau)$  и  $h(t)$  совпадают. Для нахождения функции  $x(t_0 - \tau)$ , стоящей под интегралом выражения (5.18) необходимо зеркально отобразить график функции  $x(\tau)$  относительно оси ординат и перенести его параллельно оси абсцисс на величину  $t_0$ . Отдельное значение  $y(t_0)$  получается перемножением двух получившихся функций и последующим интегрированием этого произведения.

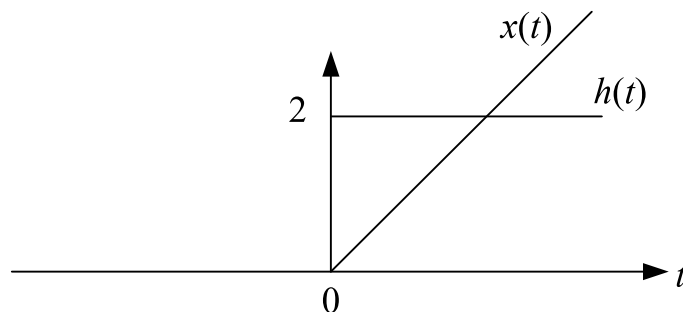


Рисунок 5.20 – Исходные функции для выполнения свертки

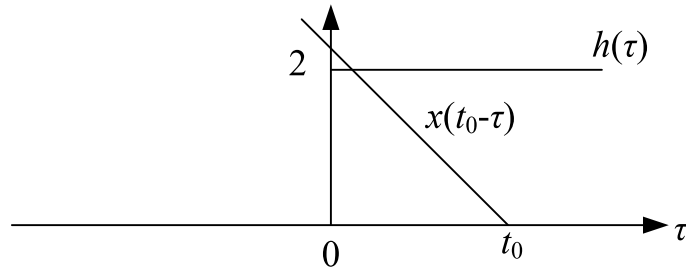


Рисунок 5.21 – Функции, участвующие в вычислении свертки в области переменной  $\tau$

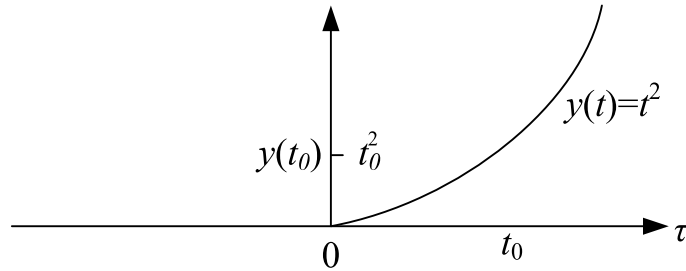


Рисунок 5.22 – Окончательный результат с свертки функций  $h(t)$  и  $x(t)$

Интегрирование проводится следующим образом:

$$y(t_0) = \int_0^{t_0} 2(t_0 - \tau) d\tau = 2t_0\tau - \tau^2 \Big|_0^{t_0} = 2t_0^2 - t_0^2 = t_0^2.$$

Следовательно  $y(t) = t^2$  для каждого  $t$ .

#### Прямая и обратная задача, связанные с операцией свертки

Прямая задача сводится к следующему: зная импульсную характеристику  $h(t)$  линейной системы и входной сигнал  $x(t)$  найти выходной сигнал  $y(t)$ . Очевидно, что решение этой задачи дается уравнением свертки (5.17). Но часто приходится решать и два других типа задач.

1. Зная входной и выходной сигналы, найти импульсный отклик линейной системы. Эта задача известна под названием проблемы идентификации системы.

2. Зная выходной сигнал и импульсный отклик линейной системы, найти входной сигнал. Эту задачу называют обратной (по отношению к прямой задаче нахождения выходного сигнала).

#### Свертка и преобразование Фурье

Есть важная теорема, которая утверждает, что преобразование Фурье свертки двух функций равно произведению Фурье-образов функций, составляющих свертку. Математически это записывается как

$$\mathcal{F}\{x(t) * h(t)\} = X(f)H(f). \quad (5.19)$$

Для произведения функций во временной области справедливо двойственное правило, заключающееся в том, что произведение  $y(t)$  двух функ-

ций  $h(t)$  и  $x(t)$  при преобразовании Фурье переходит в свертку  $H(f)$  и  $X(f)$  в частотной области, т.е. если  $y(t) = h(t)x(t)$ , то

$$Y(f) = \int_{-\infty}^{\infty} H(\nu)X(f - \nu)d\nu = \int_{-\infty}^{\infty} H(f - \nu)X(\nu)d\nu. \quad (5.20)$$

Последнее соотношение имеет важное значение особенно в контексте задачи идентификации линейной системы, т.е. когда мы имеем возможность подавать на вход воздействия и записывать выходные сигналы, а нашей задачей является нахождение импульсной характеристики линейной системы или её Фурье-образа  $H(f)$ .

### 5.3.6 Эффекты конечной длины выборки

Большинство рассмотренных до сих пор функций определялось на бесконечном временном интервале. Этим функциям соответствовали бы эксперименты бесконечной продолжительности, что невозможно. Отсюда возникает вопрос об эффектах, обусловленных конечной длиной записи (или по-другому выборки).

Конечная длина записи будет моделироваться нами при помощи прямоугольного импульса  $\text{rect}(t)$ . Предположим, что функция  $x(t)$  определена на интервале  $-\infty < t < \infty$  и имеет преобразование Фурье  $X(f)$ . Если время наблюдения ограничено промежутком  $-P/2 \leq t \leq P/2$ , то сужение функции на этот интервал, обозначаемое  $x_P(t)$ , можно записать в виде:

$$x_P(t) = x(t) \times \text{rect}(t/P).$$

Таким образом, после умножения  $x(t)$  на прямоугольный импульс получилась функция  $x_P(t)$ , которая равна 0 вне интервала  $-P/2 \leq t \leq P/2$ . Это значит, что функция  $x_P$  отвечает выборке длины  $P$ .

Преобразование Фурье  $\text{rect}(t/P)$  известно, а для функции  $x(t)$  оно задано по предположению. Поэтому можно определить функциональный вид  $x_P(t)$ . Поскольку функция  $x_P(t)$  – произведение двух функций во временной области, её преобразование Фурье согласно (5.19) должно выражаться сверткой  $X(f)$  и  $\mathcal{F}\{\text{rect}(t/P)\} = P\text{sinc}(Pf) = U(f)$  в области частот. Обозначив символом  $X_P(f)$  преобразование Фурье функции  $x_P(t)$ , получим

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{x_P(t)\} = X_P(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} X(\nu)U(f - \nu)d\nu = P \int_{-\infty}^{\infty} X(\nu)\text{sinc}(P(f - \nu))d\nu \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} X(\nu) \frac{\sin(\pi(f - \nu)P)}{\pi(f - \nu)} d\nu. \end{aligned}$$

Поэтому эффект перехода к конечной длине выборки сигнала сводится, вообще говоря, к свертке преобразования исходной функции с бесконечной

длиной и функции  $(\sin x)/x$ . Это приводит к так называемому «размыванию» спектра сигнала.

Рассмотрим важный пример функции косинус с единичной амплитудой и частотой  $f_0$ , т.е.  $x(t) = \cos 2\pi f_0 t$ . Как известно его преобразование Фурье (на бесконечном интервале) имеет вид

$$X(f) = \frac{1}{2}(\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)).$$

Значит, при ограничении косинуса на конечный интервал получим

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2}(\delta(v - f_0) + \delta(v + f_0)) \frac{\sin(\pi(f - v)P)}{\pi(f - v)} dv \\ = \frac{\sin(\pi(f - f_0)P)}{2\pi(f - f_0)} + \frac{\sin(\pi(f + f_0)P)}{2\pi(f + f_0)}. \end{aligned}$$

Эта функция изображена на следующем рисунке.

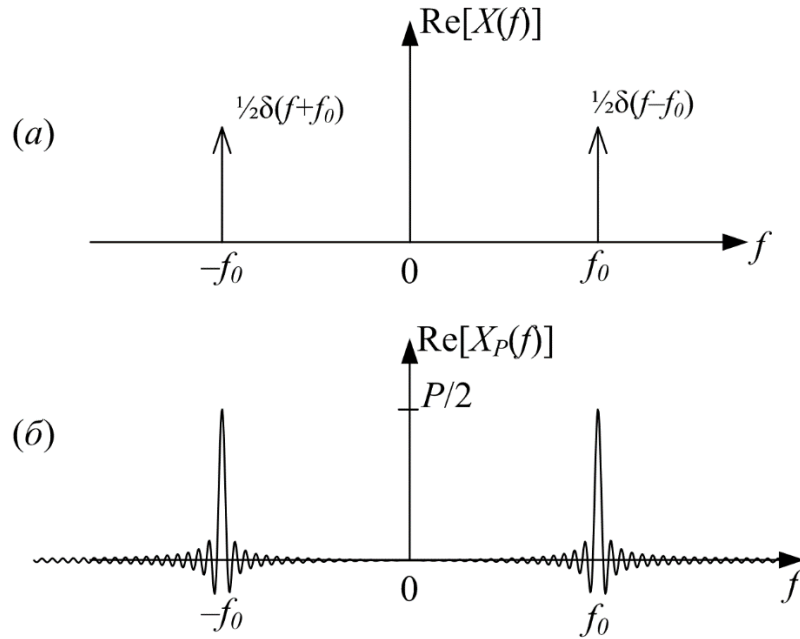


Рисунок 5.23 – Преобразование Фурье функции  $\cos 2\pi f_0 t$ :  $a$  – без размывания,  $-\infty < t < \infty$ ;  $b$  – с размыванием  $-P/2 \leq t \leq P/2$ .

На части  $a$  этого рисунка показаны исходные дельта-функции, а на части  $b$  – те же дельта-функции, но уже свернутые с  $\text{sinc}$ -функцией, появление которой обусловлено переходом к конечному интервалу наблюдения. Следует обратить внимание на следующие моменты:

1. Центры  $\text{sinc}$ -функций располагаются в частотах  $\pm f_0$ , поэтому в этих точках располагаются максимумы. Следовательно, большая часть информации концентрируется вблизи частот  $\pm f_0$  Гц.
2. С другой стороны, функция  $X_P(f)$  нигде не обращается в нуль, за исключением самых крайних точек. Это и приводит к эффекту,

называемому размытием. Информация размывается по всей области частот, а не концентрируется точно в частотах  $\pm f_0$  Гц.

3. Высота центрального выступа  $\text{sinc}$ -функций равна  $P/2$ , а ширина  $2/P$ . Значит, если сделать выборку длиннее, т.е. увеличить  $P$ , то высота главных выступов увеличится, а ширина – уменьшится. Если  $P$  устремить в бесконечность, то функции  $\text{sinc}$ -функции перейдут в дельта-функции.

---

В качестве примера изобразите как будет выглядеть спектральной представление функции синус на ограниченном временном интервале  $-P/2 \leq t \leq P/2$ .

---

С конечной длиной выборки связан и другой эффект. Он заключается в невозможности точного измерения частоты. Поскольку информация размыта, точно определить максимум главного всплеска практически невозможно и, значит, точно оценить частоту по конечной выборке синусоиды нельзя. Эта неопределенность связана не только с длиной выборки, но и с частотой синусоиды. Более высокие частоты определять легче, так как взаимное влияние двух  $\text{sinc}$ -функций при их отдалении уменьшается.

#### 5.3.7 Важность фазовой информации

Во многих случаях мы изображаем только амплитудный спектр сигнала  $|X(f)|$  и не показываем фазовый спектр  $\arg X(f) = \phi(f)$ . Однако, для восстановления исходного сигнала  $x(t)$  необходим как амплитудный, так и фазовый спектр. Бесконечное число сигналов, имеющих разную временную форму могут иметь один и тот же амплитудный спектр, но различный фазовый спектр. Сделаем несколько важных замечаний:

1. Симметрический сигнал имеет вещественнозначный Фурье-образ.
2. *Задержка* сигнала во временной области приводит к появлению *линейного фазового сдвига* в частотной области. На рисунке 5.24 приведен пример иллюстрирующий данное свойство. Таким образом, *наклон графика фазы* определяет *задержку*, т.е.

$$\frac{d\phi}{df} = -2\pi t_0.$$

Более точно, величина

$$-\frac{d\phi}{d\omega} = t_0$$

Известна как *групповая задержка* сигнала. В примере на рисунке 5.24, для всех частот задержка одна и та же для всех частот. Т.о. линейный относительно частоты сдвиг фаз не вызывает деформацию сигнала, поскольку в этом случае для каждой частотной компоненты сигнала производится сдвиг фазы на угол, пропорциональный частоте. Поэтому все частотные компоненты подвергаются постоянному запаздыванию, не зависящему от частоты. Итак, линей-

ному сдвигу фаз при частотном представлении сигнала соответствует запаздывание при временном представлении сигнала.

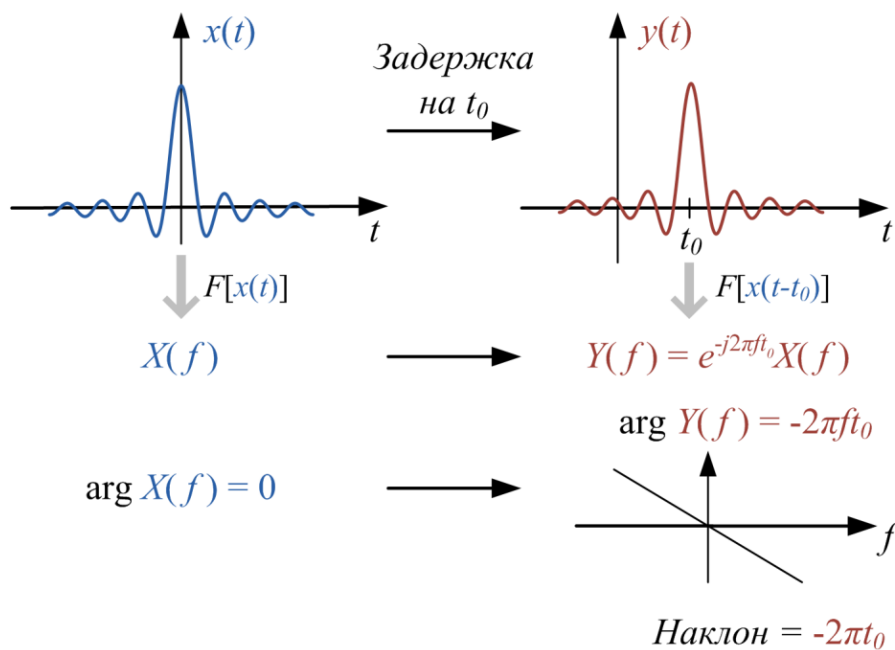


Рисунок 5.24 – Эффект применения временной задержки к сигналу с «нулевой» фазой

3. Если график фазы отличен от линейного, то при этом  $-d\phi/d\omega$  становится нелинейной функцией от  $\omega$ , в этом случае внешний вид сигнала изменится.