2.7 Энергия и мощность дискретных сигналов

Важными характеристиками дискретных сигналов являются их энергия E_x и мощность P_x. Энергия дискретного сигнала определяется как

$$E_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2. \tag{2.21}$$

Данное определение справедливо как для действительных так и для комплексных сигналов $x(n)$. Чтобы данное определение имело смысл, энергия сигнала должна иметь конечное значение. Для этого амплитуда сигнала должна стремится к нулю при $|n| \to \infty$ (необходимое условие). В противном случае числовой ряд (2.21) не будет сходится. Сигналы, которые имею конечную энергию называются *энергетическими сигналами*.

В некоторых случаях амплитуда сигнала $x(n)$ не стремится к нулю при $|n| \to \infty$ и энергия сигнала является бесконечной. В таких случаях, более разумным является измерение мощности сигнала P_x, которая определяется как усредненное значение энергии:

$$P_x = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} |x(n)|^2. \tag{2.22}$$

В данном уравнении сумма делится на $2N+1$ поскольку суммируются $2N+1$ отсчетов $x(n)$ попадают в интервал от $-N$ до N. Для N_0-периодических сигналов усреднение выполняется только на одном периоде:

$$P_x = \frac{1}{N_0} \sum_{n=0}^{N_0-1} |x(n)|^2. \tag{2.23}$$

Сигнал для которого P_x имеет конечное ненулевое значение называют *мощностным*.

Пример 2.6 На рисунке 2.11 показан дискретный сигнал $x(n)$, а также два периодических сигнала, полученных из $x(n)$ периодическим расширениям:

$$x_1(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(n+6k) \quad \text{и} \quad x_2(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(n+7k).$$

Определите энергию и мощность каждого из трех сигналов.

Решение. Поскольку $x(n) = n$ при $0 \le 0 \le 5$ и 0 при всех других n, то его энергия может быть найдена используя (2.21)

$$E_x = \textstyle\sum_{n=0}^{5} n^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = 55.$$

Сигнал $x_1(n)$ является периодическим повторением $x(n)$ с периодом 6. Все периодические сигналы имеют бесконечную энергию, т.е. $E_{x_1} = \infty$. Мощность $x_1(n)$ можно найти при помощи выражения (2.23) как

$$P_{x_1} = \frac{1}{6}\sum_{n=0}^{5} n^2 = \frac{1}{6}E_x = \frac{55}{6} \approx 9{,}1667.$$

Сигнал $x_2(n)$ является периодическим повторением $x(n)$, но только с периодом 7. Его энергия также равна бесконечности. Мощность $x_2(n)$ можно вычислить по формуле (2.23) как

$$P_{x_2} = \frac{1}{7}\sum_{n=0}^{5} n^2 = \frac{1}{7}E_x = \frac{55}{7} \approx 7{,}8571.$$

а)

б)

в)

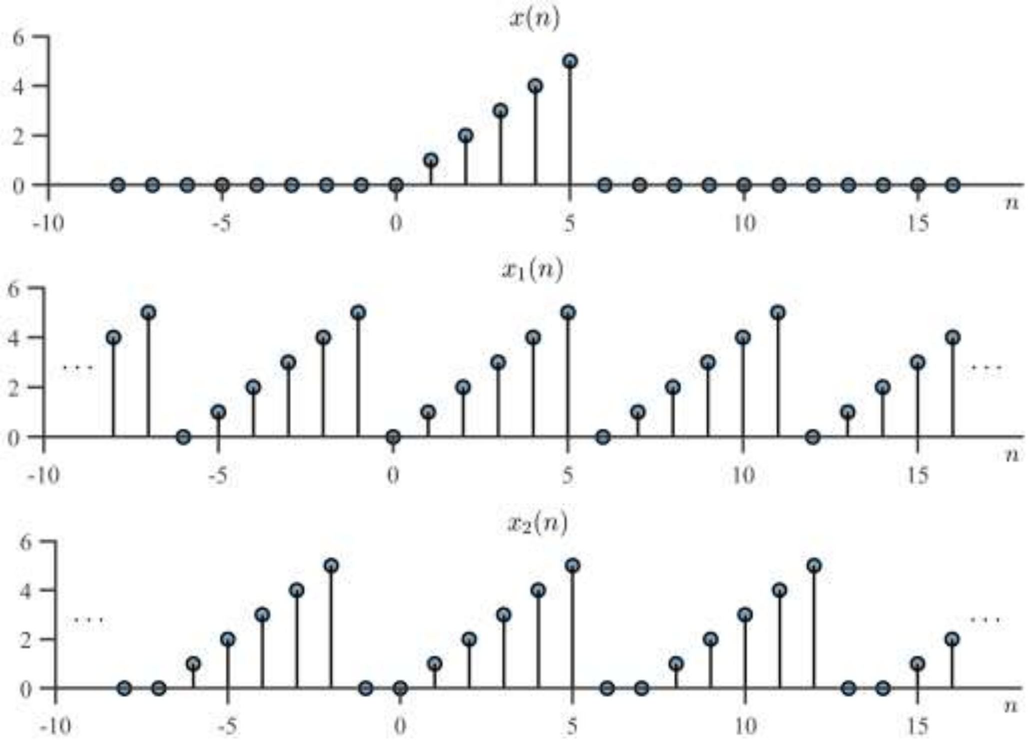

Рисунок 2.11 – Дискретные сигналы из примера 1.5

Два дискретных сигнала *ортогональны*, если их взаимная энергия удовлетворяет условию

$$E_{xy} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)y^*(n) = 0.$$

Энергия и мощность ортогональных сигналов аддитивны, т.е.

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n) + y(n)|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 + \sum_{n=-\infty}^{\infty} |y(n)|^2.$$

Таблица 1 – Основные типы дискретных сигналов

Тип сигнала	**Обозначение**	**Энергия**	**Мощность**
Сигнал конечной длины	$x(n)$, $n = 0,1,\dots,N-1$	$\sum_{n=0}^{N-1} \lvert x(n) \rvert^2$	Не определена
Апериодический сигнал	$x(n), \quad n \in \mathbb{Z}$	Формула (2.21)	Формула (2.22)
Периодический сигнал	$\tilde{x}(n), \quad n \in \mathbb{Z}$ $\tilde{x}(n) = \tilde{x}(n+kN)$	∞	Формула (2.23)
Сигнал с компактным носителем	$\tilde{x}(n), \quad n \in \mathbb{Z}$ $\tilde{x}(n) \neq 0$ для $M \leq n \leq M+N-1$	$\sum_{n=M}^{M+N-1} \lvert x(n) \rvert^2$	0

В таблице 1 суммируются базовые понятия о типах дискретных сигналов.