

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №2

“АЛГОРИТМ БПФ”

Цель работы: Изучение алгоритмов быстрого преобразования Фурье. Программирование БПФ в пакете Matlab.

Теоретические сведения

Основы быстрого преобразования Фурье

Набор алгоритмов, называемых алгоритмами быстрого преобразования Фурье (БПФ), включает разнообразные методы уменьшения времени вычисления ДПФ. Использование быстрых алгоритмов позволяет ускорить расчет в 100 и более раз по сравнению с прямым вычислением ДПФ и поэтому чрезвычайно важно в цифровой обработке сигналов.

Для удобства будем использовать выражение для ДПФ в виде

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W^{nk},$$

где $W = e^{-j(2\pi)/N}$. Периодичность W^{nk} является одним из ключевых моментов БПФ. Обычно ее подчеркивают, записывая W_N вместо W . Из данного соотношения видно, что при прямом вычислении ДПФ от N -точечной комплексной последовательности нужно выполнить $(N-1)^2$ комплексных умножений и $N(N-1)$ комплексных сложений. Для достаточно больших N (порядка 1000) прямой метод расчета требует выполнения чрезмерного количества вычислительных операций.

Основная идея БПФ состоит в том, чтобы разбить исходную N -точечную последовательность на две более короткие последовательности, ДПФ которых могут быть скомбинированы таким образом, чтобы получилось ДПФ исходной последовательности. Так, например, если N четное, а исходная N -точечная последовательность разбита на две $(N/2)$ -точечные последовательности, то для нахождения искомого N -точечного ДПФ потребуется порядка $2(N/2)^2 = N^2/2$ комплексных умножений, т.е. вдвое меньше по сравнению с прямым вычислением. Эту операцию можно повторить, вычисляя вместо $(N/2)$ -точечного ДПФ два $(N/4)$ -точечных ДПФ (предполагая, что $N/2$ четное) и сокращая тем самым объем вычислений еще в два раза. Выигрыш в два раза на каждую ступень является немного завышенным, поскольку не учитываются затраты на формирование искомого N -точечного ДПФ из ДПФ меньшей размерности.

Алгоритм БПФ с прореживанием по времени

В качестве примера описанной методики рассмотрим алгоритм БПФ по основанию 2, который используется, если размер преобразования N является степенью двойки. Введем две $(N/2)$ -точечные последовательности $x_1(n)$ и $x_2(n)$ из четных и нечетных членов соответственно:

$$\begin{aligned} x_1(n) &= x(2n), & n &= 0, 1, \dots, N/2-1, \\ x_2(n) &= x(2n+1), & n &= 0, 1, \dots, N/2-1. \end{aligned}$$

N -точечное ДПФ последовательности $x(n)$ можно записать как

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{nk} + \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{nk} = \sum_{n=0}^{N/2-1} x(2n) W_N^{2nk} + \sum_{n=0}^{N/2-1} x(2n+1) W_N^{(2n+1)k}.$$

n четные n нечетные

С учетом того, что

$$W_N^2 = [e^{j(2\pi/N)}]^2 = e^{j[2\pi/(N/2)]} = W_{N/2},$$

перепишем предыдущее выражение в виде

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N/2-1} x_1(n) W_{N/2}^{nk} + W_N^k \sum_{n=0}^{N/2-1} x_2(n) W_{N/2}^{nk},$$

$$X(k) = X_1(k) + W_N^k X_2(k),$$

где $X_1(k)$ и $X_2(k)$ равны $(N/2)$ -точечным ДПФ последовательностей $x_1(n)$ и $x_2(n)$. Итак, N -точечное ДПФ $X(k)$ может быть разложено на два $(N/2)$ -точечных ДПФ. При вычислении $(N/2)$ -точечных ДПФ прямым способом для нахождения $X(k)$ потребовалось бы $(N^2/2+N)$ комплексных умножений. При больших N (когда $N^2/2 \gg N$) это позволяет сократить время вычислений почти на 50%.

Поскольку $X(k)$ определено при $0 \leq k \leq N-1$, а $X_1(k)$ и $X_2(k)$ определены при $0 \leq k \leq N/2-1$, необходимо доопределить формулу для $k \geq N/2$. Это определение может быть сделано с учетом периодичности ДПФ:

$$X(k) = \begin{cases} X_1(k) + W_N^k X_2(k), & 0 \leq k \leq \frac{N}{2} - 1, \\ X_1\left(k - \frac{N}{2}\right) + W_N^k X_2\left(k - \frac{N}{2}\right), & \frac{N}{2} \leq k \leq N - 1. \end{cases}$$

На рис. **Ошибка! Источник ссылки не найден.** с помощью направленного графа представлена последовательность операций при выполнении восьмиточечного ДПФ с использованием двух четырехточечных преобразований. Незачерненные кружки в правой части рисунка обозначают операцию сложения/вычитания, причем верхний выход соответствует сумме, а нижний – разности (см. рис. 4). Стрелка обозначает умножение на константу, указанную над ней. В общем случае переменные являются комплексными числами. Входная последовательность $x(n)$ сначала разбивается на две последовательности $x_1(n)$ и $x_2(n)$ из четных и нечетных членов, после чего рассчитываются их преобразования $X_1(k)$ и $X_2(k)$. Затем в соответствии с последней формулой получают $X(k)$.

Рассмотренная схема может быть также использована для расчета $N/2$ -точечных ДПФ. Каждая из последовательностей $x_1(n)$ и $x_2(n)$ разбивается на две последовательности, состоящие из четных и нечетных членов. $N/2$ -точечные ДПФ могут быть записаны как комбинация двух $N/4$ -точечных ДПФ:

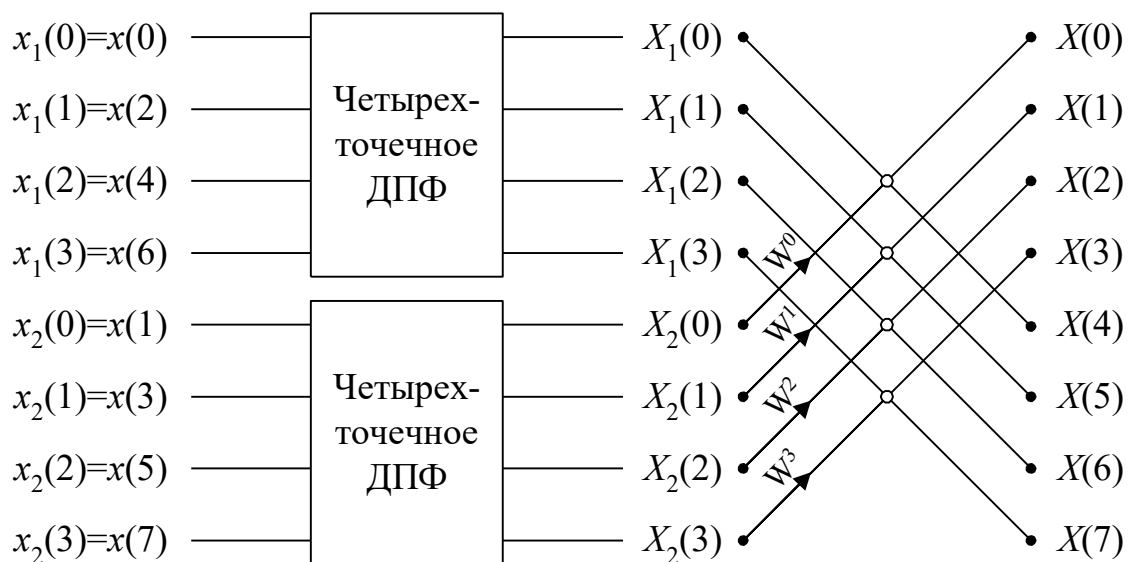


Рисунок 1 – Вычисление 8-точечного ДПФ через два четырехточечных

$$X_1(k) = A(k) + W_{N/2}^k B(k)$$

или

$$X_1(k) = A(k) + W_N^{2k} B(k),$$

где $0 \leq k \leq N/2-1$, $A(k)$ и $B(k)$ – $N/4$ -точечные ДПФ соответственно четных и нечетных членов $x_1(n)$. На рис. 2 показан получившийся направленный граф вычислений.

Процесс уменьшения размера ДПФ от L до $L/2$, где L равно степени 2, может быть продолжен до тех пор, пока не останутся только двухточечные ДПФ. Двухточечное ДПФ $F(k)$, $k = 0, 1$, может быть рассчитано по формулам

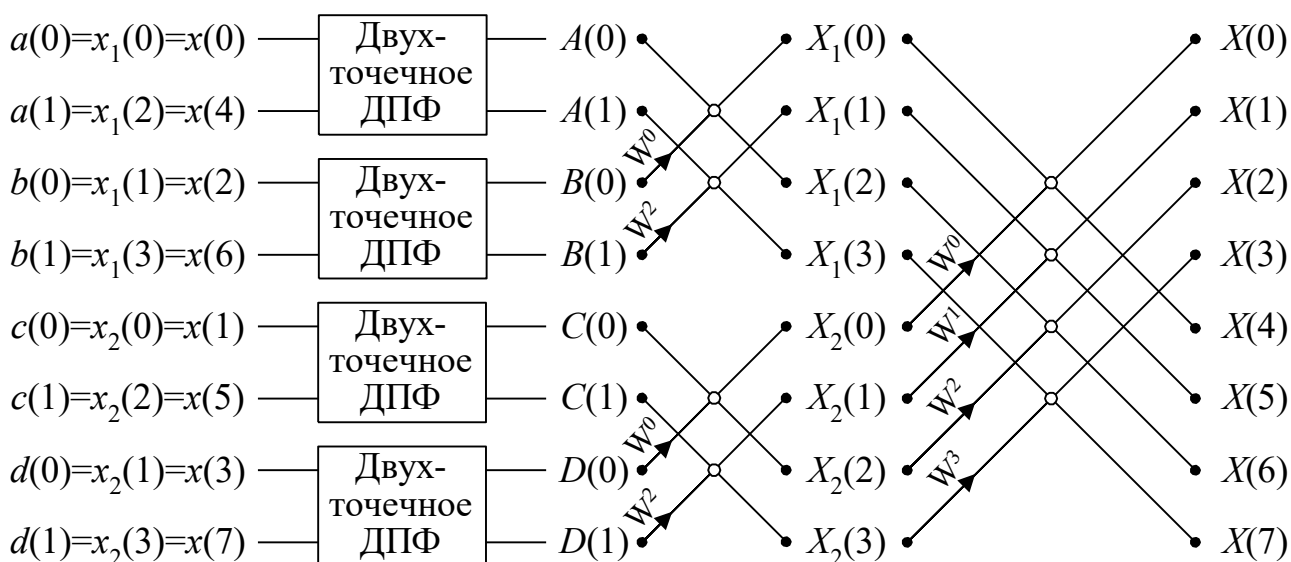


Рисунок 2 – Вычисление 8-точечного ДПФ через два четырехточечных, которые в свою очередь вычисляются через четыре двухточечных ДПФ

$$F(0) = f(0) + W_8^0 f(1),$$

$$F(1) = f(0) + W_8^4 f(1).$$

Здесь $f(n)$, $n = 0, 1, \dots$ – преобразуемая двухточечная последовательность. Поскольку $W_8^0 = 1$ и $W_8^4 = -1$, для вычислений не нужны операции умножения. Таким образом, восьмиточечное ДПФ в итоге сводится к алгоритму, описываемому направленным графом, представленным на рис. 3.

Описанный выше алгоритм БПФ был назван алгоритмом с прореживанием по времени, поскольку на каждом этапе входная (т.е. временная) последовательность разделяется на две обрабатываемые последовательности меньшей длины – прореживается.

Свойства БПФ с основанием 2 и прореживанием по времени

Анализ процедуры последовательного сокращения вдвое размеров преобразований показывает, что на каждом этапе БПФ необходимо выполнить $N/2$ комплексных умножений. Поскольку общее количество этапов равно $\log_2 N$, то число комплексных умножений, необходимое для вычисления N -точечного ДПФ, приблизительно равно $N/2 \log_2 N$. Слово «приблизительно» использовано по той причине, что умножения на W_N^0 , $W_N^{N/2}$, $W_N^{N/4}$ и $W_N^{3N/4}$ в действительности сводятся просто к сложениям и вычитаниям комплексных чисел. Так, например, на рис. **Ошибка! Источник ссылки не найден.** первые два этапа содержат только сложения и вычитания, и вместо ожидаемых 12 ($4 \log_2 8$) достаточно выполнить всего два нетривиальных умножения. Однако при больших N фактическое число нетривиальных умножений хорошо аппроксимируется выражением $N/2 \log_2 N$.

Базовая операция алгоритма БПФ с прореживанием по времени (так называемая «бабочка») состоит в том, что два входных числа A и B объединяются для получения двух выходных чисел X и Y следующим образом:

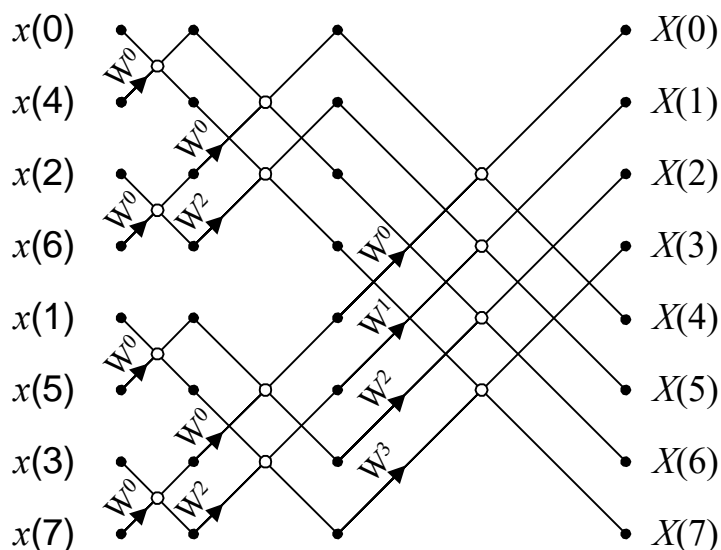


Рисунок 3 – Восьмиточечное ДПФ, полученное последовательным прореживанием в два раза

$$X = A + W_N^k B,$$

$$Y = A - W_N^k B.$$

На рис. 4 изображен граф базовой операции. Множители W_N^k используются во всех алгоритмах БПФ и получили специальное название *поворачивающих*

множителей (т.к. модуль каждого из них равен единице, то умножение приводит к повороту вокруг начала координат на комплексной плоскости).

Из рис. 3 видно, что каждый из этапов содержит $N/2$ базовых операций. Если поворачивающий множитель нетривиальный, для каждой «бабочки» достаточно выполнить только одно умножение, поскольку величину W_N^k можно вычислить и запомнить. Структура базовых операций такова, что для выполнения БПФ N -точечной последовательности, размещенной в памяти, достаточно иметь лишь одну дополнительную ячейку памяти. Результаты всех промежуточных этапов БПФ можно размещать в те же ячейки памяти, где находились исходные данные. Алгоритм, в котором для размещения входной и выходной последовательностей используется один и тот же массив ячеек памяти, называется алгоритмом БПФ с замещением.

Таким образом, в алгоритме БПФ с основанием 2 вычисления сводятся к двухточечным ДПФ, которые не требуют операций умножения. Однако, при объединении двух $N/2$ -точечных ДПФ в одно N -точечное приходится выполнять около $N/2$ умножений. N -точечное БПФ состоит из $\log_2 N$ этапов, причем все операции умножения используются только при объединении результатов ДПФ.

Алгоритм БПФ с прореживанием по частоте

Другая распространенная форма БПФ при N , равном степени двух, – алгоритм с прореживанием по частоте. В этом варианте БПФ входная последовательность $x(n)$ разбивается на две последовательности следующим образом: $x_1(n)$ содержит первые $N/2$ отсчетов $x(n)$, а $x_2(n)$ – остальные $N/2$ отсчетов:

$$\begin{aligned} x_1(n) &= x(n), & n=0, 1, \dots, N/2-1, \\ x_2(n) &= x(n+N/2), & n=0, 1, \dots, N/2-1. \end{aligned}$$

При таком разбиении N -точечное ДПФ последовательности $x(n)$ можно записать в виде

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N/2-1} x(n) W_N^{nk} + \sum_{n=N/2}^{N-1} x(n) W_N^{nk} = \sum_{n=0}^{N/2-1} x_1(n) W_N^{nk} + \sum_{n=0}^{N/2-1} x_2(n) W_N^{(n+N/2)k}.$$

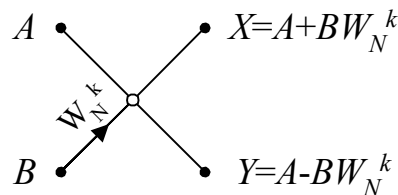


Рисунок 4 – Базовая операция алгоритма БПФ с прореживанием по времени

Учитывая, что $W_N^{Nk/2} = e^{-j\pi k}$, получим

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N/2-1} [x_1(n) + e^{-j\pi k} x_2(n)] W_N^{nk}.$$

Запишем выражения отдельно для четных и нечетных отсчетов ДПФ:

$$X(2k) = \sum_{n=0}^{N/2-1} [x_1(n) + x_2(n)] (W_N^2)^{nk} = \sum_{n=0}^{N/2-1} [x_1(n) + x_2(n)] W_{N/2}^{nk},$$

$$X(2k+1) = \sum_{n=0}^{N/2-1} [x_1(n) - x_2(n)] W_N^{n(2k+1)} = \sum_{n=0}^{N/2-1} \{ [x_1(n) - x_2(n)] W_N^n \} W_{N/2}^{nk}.$$

Видно, что четные и нечетные отсчеты ДПФ можно получить из $N/2$ -точечных ДПФ последовательностей $f(n)$ и $g(n)$, равных

$$\begin{aligned} f(n) &= x_1(n) + x_2(n), & n &= 0, 1, \dots, N/2-1, \\ g(n) &= [x_1(n) - x_2(n)] W_N^n, & n &= 0, 1, \dots, N/2-1. \end{aligned}$$

Вычисление N -точечного ДПФ удалось свести к двум $N/2$ -точечным. На рис. **Ошибка! Источник ссылки не найден.** эта методика иллюстрируется для случая $N=8$.

Данную методику можно применить повторно и представить каждое из $N/2$ -точечных ДПФ как комбинацию двух $N/4$ -точечных. На рис. **Ошибка! Источник ссылки не найден.** и **Ошибка! Источник ссылки не найден.** показан переход к двухточечным ДПФ с последующим их прямым вычислением.

Сравнение алгоритмов с прореживанием по времени и по частоте позволяет выявить два различия между ними. В первом алгоритме (см. рис. 3) требуется перестановка входных данных, а во втором (см. рис. 7) – выходных. Можно, однако, показать, что место перестановки данных не играет роли. Второе отличие заключается в несколько ином выполнении базовой операции. В «бабочке» БПФ с прореживанием по частоте, изображенной на рис. 8, комплексное умножение выполняется после сложения–вычитания.

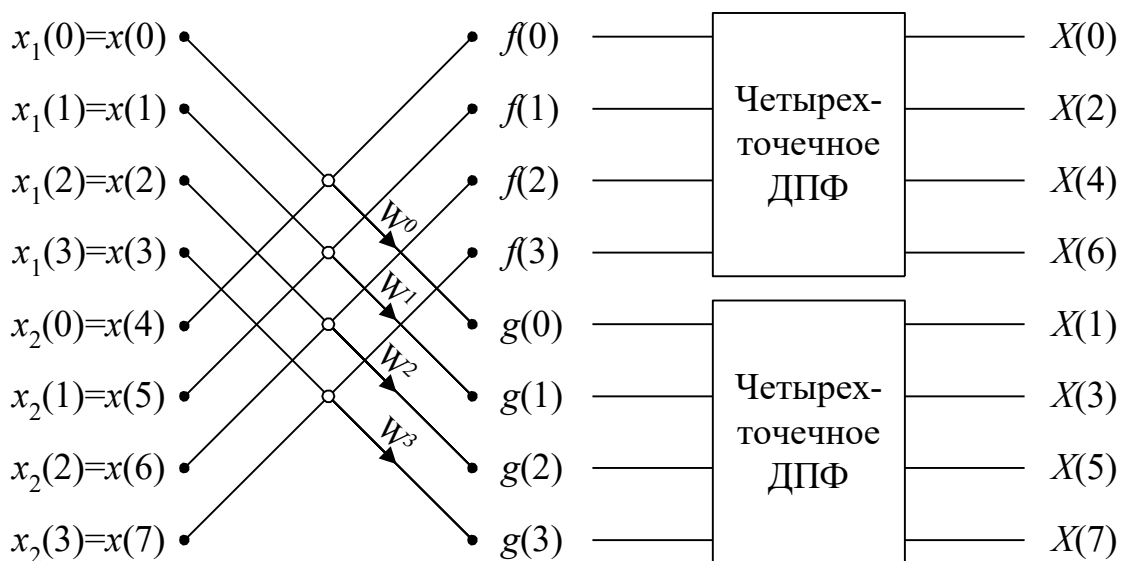


Рисунок 5 – Переход от 8-точечного ДПФ к двум четырехточечным при прореживании по частоте

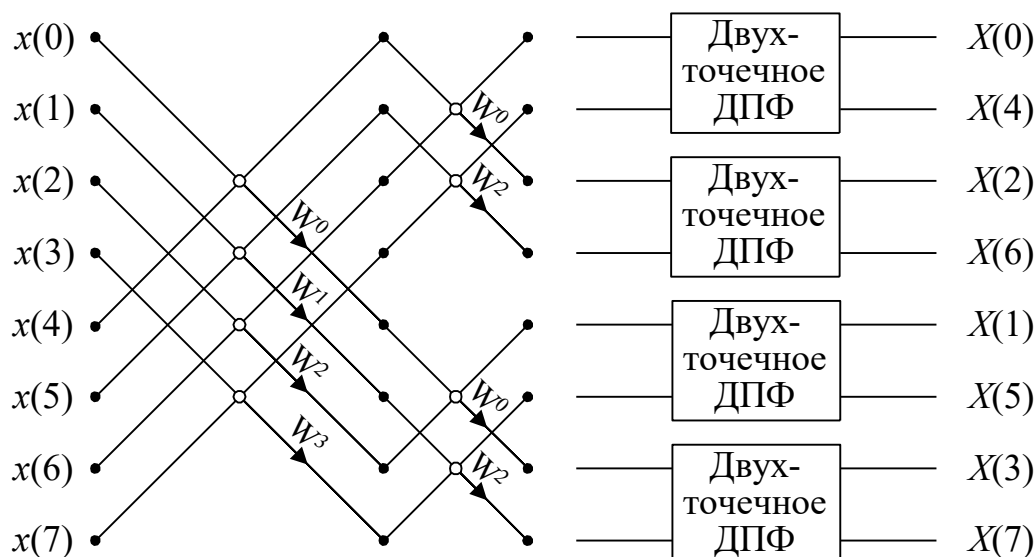


Рисунок 6 – Переход от четырехточечных ДПФ к двухточечным

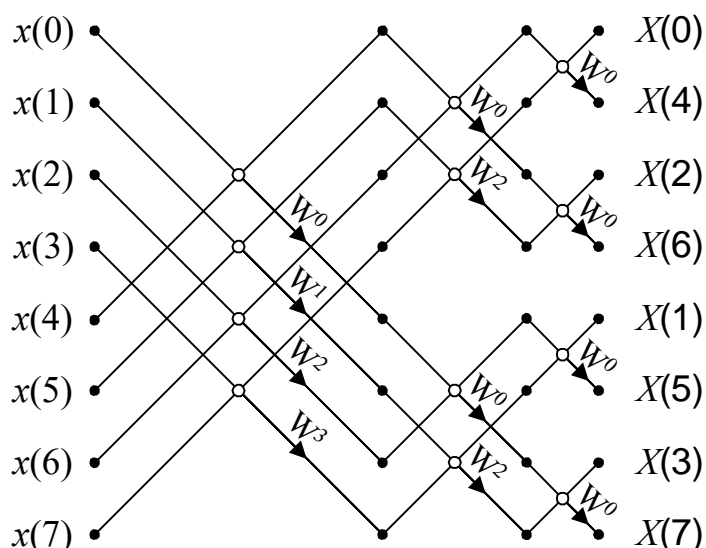


Рисунок 7 – Полный направленный граф восьмиточечного БПФ с прореживанием по частоте

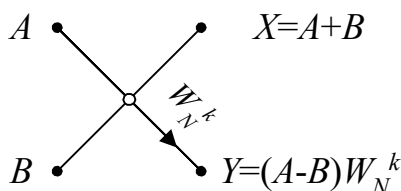


Рисунок 8 – Базовая операция БПФ с прореживанием по частоте

Легко заметить и сходство алгоритмов с прореживанием по времени и по частоте. В обоих случаях требуется порядка $N \log_2 N$ операций, вычисления могут быть проведены с замещением и необходима перестановка данных.

Перестановка данных в алгоритмах БПФ по основанию 2

Общей особенностью большинства алгоритмов БПФ является необходимость такой перестановки входных или выходных данных, чтобы выходная

последовательность имела естественный (прямой) порядок расположения. В примере на рис. 3 для этого требовался следующий порядок входной последовательности: $x(0)$, $x(4)$, $x(2)$, $x(6)$, $x(1)$, $x(5)$, $x(3)$, $x(7)$. Характер перестановки может быть описан сравнительно просто. В случае, когда N является степенью 2, входная последовательность должна быть расположена в памяти в двоично-инверсном порядке для того, чтобы получить прямой порядок выходной последовательности.

Двоично-инверсный порядок определяется следующим образом. Если записать порядковые номера элементов входной последовательности в двоичном коде, используя L двоичных разрядов, причем $N=2^L$, а затем инвертировать порядок следования разрядов, то получаемые при этом числа и будут номерами элементов входной последовательности после их перестановки. Для случая $N=8$ данный механизм иллюстрирует табл. 1. Перестановку можно провести с замещением, меняя в парах местами данные с прямым и двоично-инверсным номерами и используя для этого только одну вспомогательную ячейку памяти.

Таблица 1

Номер	Двоичное представление номера	Инверсия порядка следования разрядов	Двоично-инверсный номер
0	000	000	0
1	001	100	4
2	010	010	2
3	011	110	6
4	100	001	1
5	101	101	5
6	110	011	3
7	111	111	7

Для перестановки данных может быть использован следующий алгоритм:

```

j:=1;
for i:=1 to n-1 do begin
    if (i < j) then begin
        xt := x[j];    x[j] := x[i];    x[i] := xt;
        xt := y[j];    y[j] := y[i];    y[i] := xt;
    end;
    k := n / 2;
    while (k<j) do begin
        j :=j - k;
        k := k/2;
    end;
    j := j + k;
end;

```


В данном алгоритме n – размер преобразования; массивы x и y содержат действительные и мнимые компоненты переставляемой последовательности.

Спектральный анализ сигнала с использованием оконной функции

Модель сигнала для ДПФ предполагает, что вне заданного интервала сигнал имеет периодическое продолжение (рис. 9).

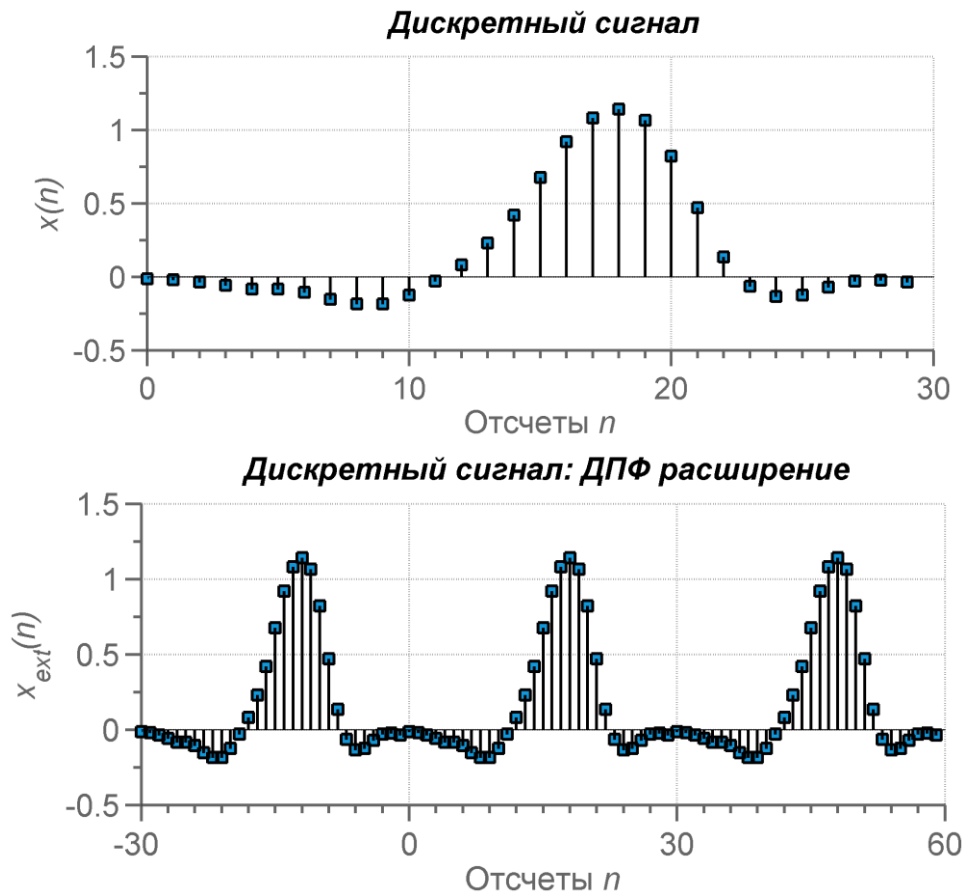


Рисунок 9 – Дискретный сигнал и его ДПФ-расширение

По этой причине «чистый» синус (по логике ДПФ) представляется, как показано на рис. 10 (без последнего нулевого отсчета в конце). Так происходит потому, что именно в этом случае ДПФ-расширение сигнала тоже является синусом (рис. 11).

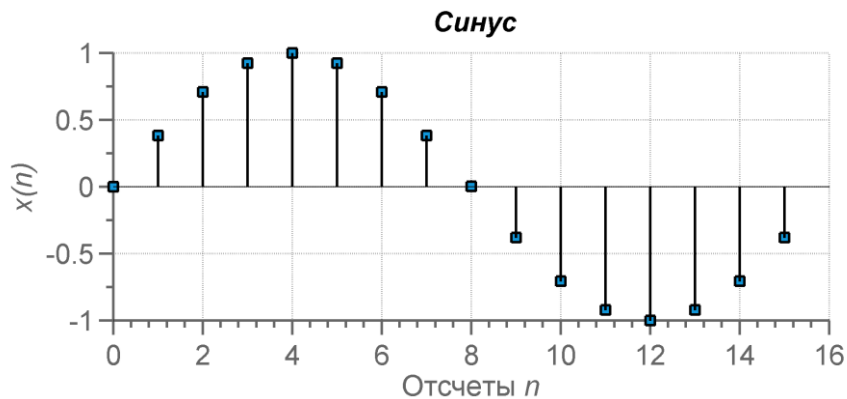


Рисунок 10 – Дискретный синус

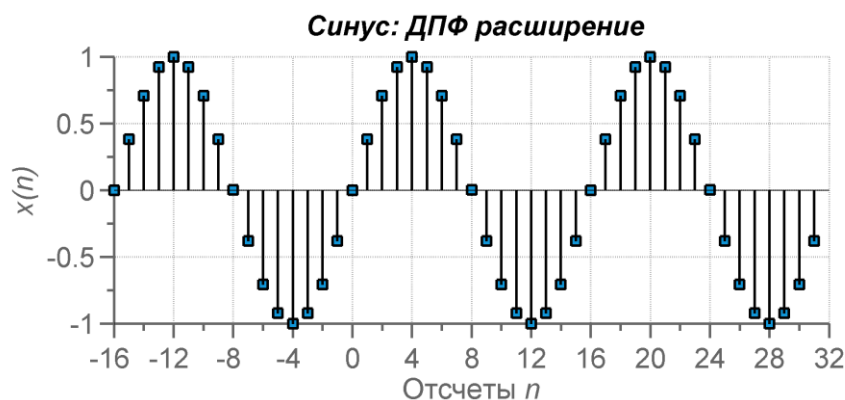


Рисунок 11 – Дискретный синус: ДПФ расширение

Рассмотрим вопрос анализа спектра сигнала при помощи БПФ. Остановимся на двух ситуациях. В первом случае во входном сигнале содержится в точности целое число периодов синусоидального сигнала. Тогда согласно модели сигнала ДПФ имеет место периодическое продолжение исследуемого фрагмента сигнала, формируя таким образом бесконечный непрерывный периодический сигнал, как показано на рис. 12

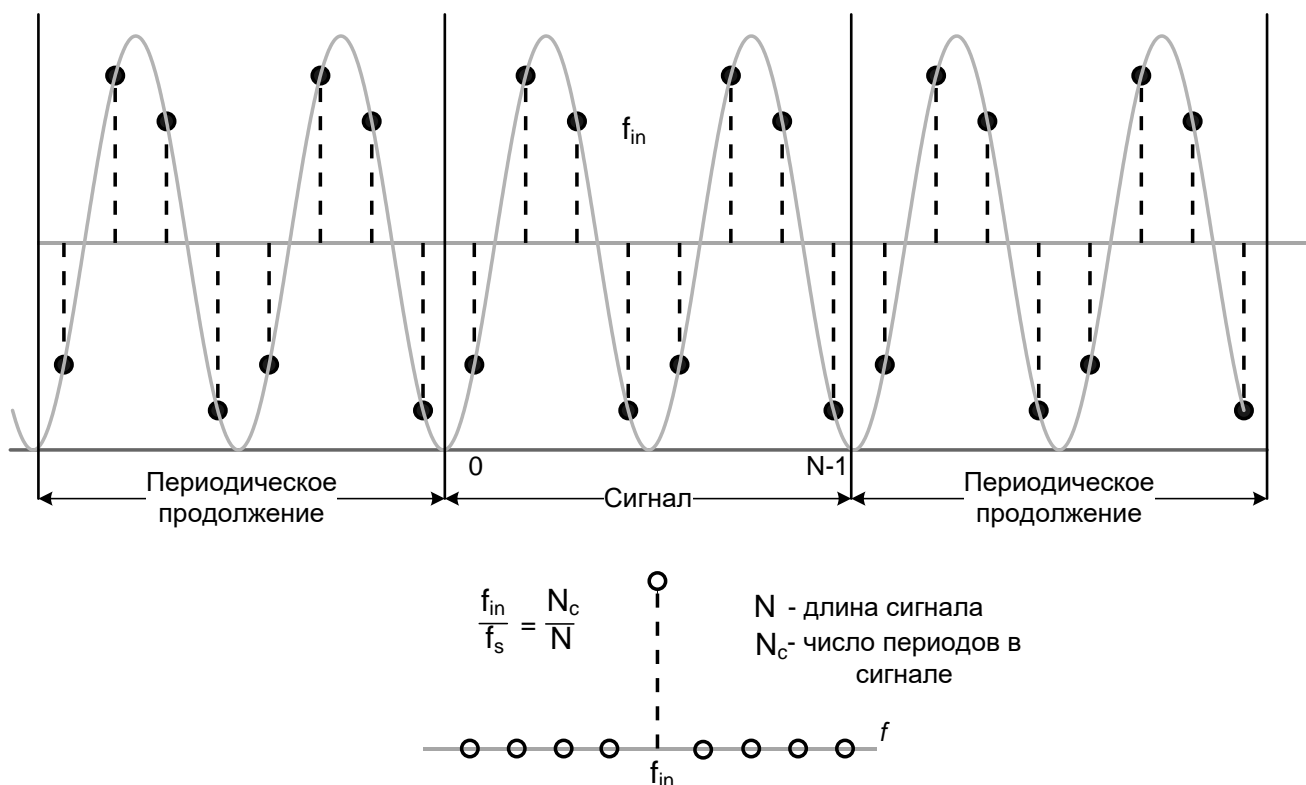


Рисунок 12 – БПФ синусоидального сигнала с целым числом периодов

Рис. 13 отражает ситуацию, когда в сигнале нет целого числа периодов. Разрывы, которые образуются на краях интервала наблюдения приводят к появлению новых компонент в спектре сигнала. Появляются паразитные боковые «лепестки» в спектре сигнала, происходит снижение разрешающей способности по частоте. Обратите внимание, что боковой лепесток на 12 дБ ниже основного лепестка и что боковые лепестки имеют спад только 6 дБ/октаву. Такая ситуация неприемлема для большинства задач анализа спектра.

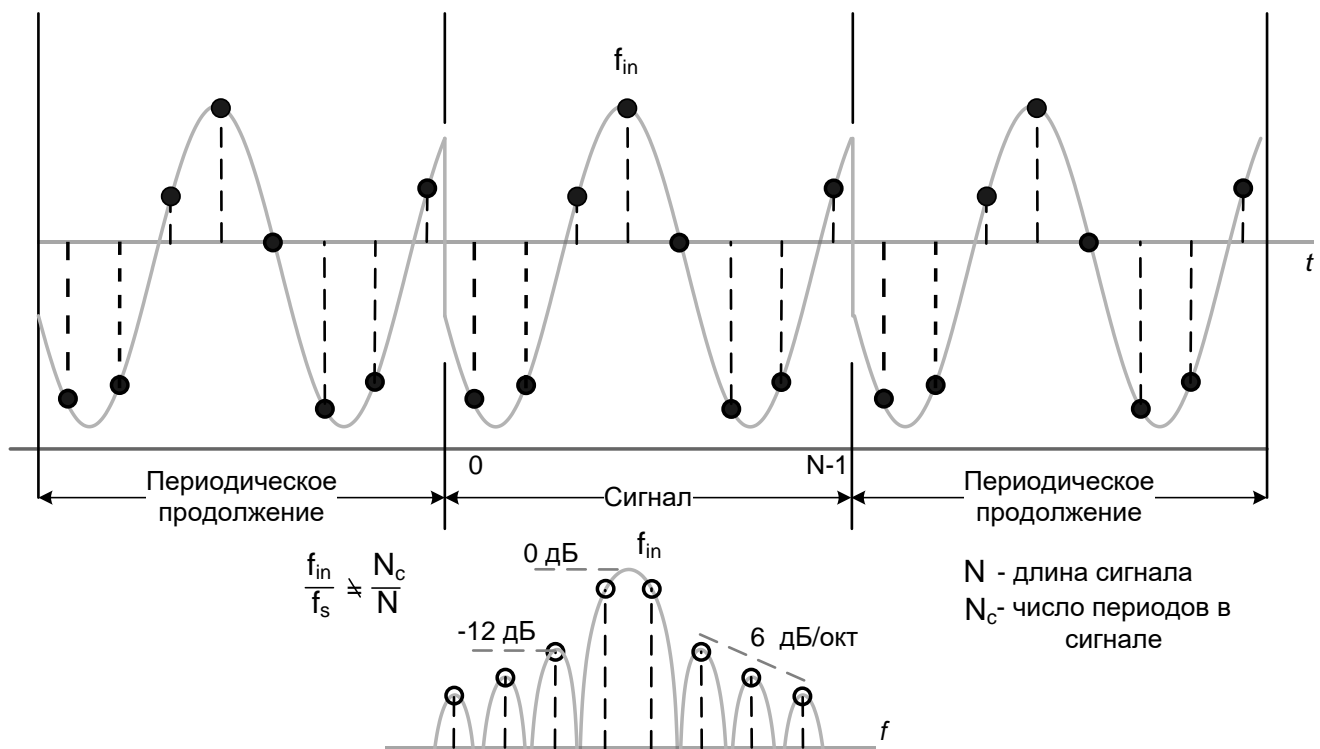


Рисунок 13 – БПФ синусоидального сигнала с нецелым числом периодов

Для устранения эффекта разрыва сигнала на концах интервала наблюдения необходимо входные отсчеты умножить на соответствующую оконную функцию. Применение оконной функции уменьшает амплитуду сигнала в начале и конце интервала наблюдения. Более подробно этот процесс вы рассмотрите, выполняя задание №6.

Практические задания

Задание 1. Разработайте функцию, вычисляющую ДПФ от входного вектора длиной N , вызывая функцию Matlab FFT для векторов длиной $N/2$ с использованием прореживания согласно варианту¹.

Таблица 1 – Варианты прореживания

Номер варианта (V)	Вид прореживания
1,3	По времени
2,4	По частоте

Проверьте правильность работы функции.

Задание 2. Для случая, когда N является степенью 2, модифицируйте функцию из задания 1, заменив вызов FFT рекурсивным вызовом, и предусмотрев останов, когда текущий размер преобразования достигнет 2.

¹ Номер варианта (V), определяется как $V = (n_0 \bmod 4) + 1$, где n_0 – номер студента в списке группы.

Задание 3. Реализуйте функцию двоично-инверсной перестановки данных.

Задание 4. Скомбинируйте функции, реализованные в пп. 2 и 3.

Задание 5. Модифицируйте функцию из задания 4, заменив рекурсивные вызовы циклом. Сгенерируйте произвольный сигнал длины 16384 и вычислите для него ДПФ тремя способами: 1) прямое вычисление; 2) рекурсивное вычисление БПФ; 3) вычисление БПФ с использованием циклов. Используя пару функции `tick/toc` замерьте время выполнения для всех вариантов вычисления ДПФ. Результаты занесите в таблицу и сделайте выводы.

Задание 6. Используя разработанную функцию вычисления БПФ, выполните спектральный анализ сигнала согласно варианту (табл. 2). В одном случае выполните прямой расчет БПФ от входного сигнала, во втором случае предварительно выполните взвешивание на указанную оконную функцию. Полученный амплитудный спектр переведите в децибелы, используя выражение:

$$20 \log_{10} \left| \frac{X(k)}{N/2} \right|.$$

Таблица 2 – Варианты прореживания

Номер варианта (V)	Сигнал	Оконная функция	Параметры сигнала
1	$x(n) = \cos \frac{2\pi n 3}{N} + 0,3 \sin \frac{2\pi n 5,5}{N}$	Окно Хемминга $w(n) = 0,54 - 0,46 \cos \frac{2\pi n}{N}$	$N = 64, f_s = 4000$ Гц
2	$x(n) = \cos \left(\frac{2\pi n 10}{N} + 0,1 \right) + 0,2 \cos \frac{2\pi n 13,4}{N}$	Окно Блэкмана $w(n) = 0,42 - 0,5 \cos \frac{2\pi n}{N} + 0,08 \cos \frac{4\pi n}{N}$	$N = 128, f_s = 6000$ Гц
3	$x(n) = \sin \frac{2\pi n 20}{N} + 0,15 \sin \frac{2\pi n 18.7}{N}$	Окно Ханна $w(n) = 0,5 - 0,5 \cos \frac{2\pi n}{N}$	$N = 256, f_s = 8000$ Гц
4	$x(n) = \cos \frac{2\pi n 50}{N} + 0,1 \sin \frac{2\pi n 48.8}{N}$	Окно Блэкмана-Харриса	$N = 512, f_s = 8000$ Гц

		$w(n) = 0,35875$ $- 0,48829 \cos \frac{2\pi n}{N}$ $+ 0,14128 \cos \frac{4\pi n}{N}$ $- 0,01168 \cos \frac{6\pi n}{N}$	
--	--	--	--

На графиках приведите временной вид входной последовательности (до умножения на оконную функцию и после). При выводе амплитудного спектра по оси частот отложите аналоговые частоты в диапазоне от 0 до $f_s/2$. Сделайте вывод о результатах применения оконной функции для анализа спектра.