1 Тема 4. Преобразование Фурье

1.1 Интегральное преобразование Фурье

// продолжение предыдущей лекции //

1.1.1 Преобразование Фурье дельта-функции

Рассмотрим $x(t) = \delta(t)$. Формально преобразование Фурье этой функции не представляет трудностей:

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-2\pi j f t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-2\pi j f t} dt = 1.$$

Однако обратной преобразование приводит к несобственному интегралу:

$$\int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{-2\pi j f t} df = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi j f t} df.$$

Тем не менее можно строго формально доказать, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi j f t} df = \delta(t). \qquad (1.1)$$

Проиллюстрируем смысл этого формального выражения. Воспользовавшись формулой Эйлера

$$e^{j2\pi f t} = \cos 2\pi f t + j \sin 2\pi f t,$$

мы можем представить себе приведенный выше интеграл в виде суммы большого числа синусоид и косинусоид различных частот. Как легко заметить, обратившись к рисунку 1.1.

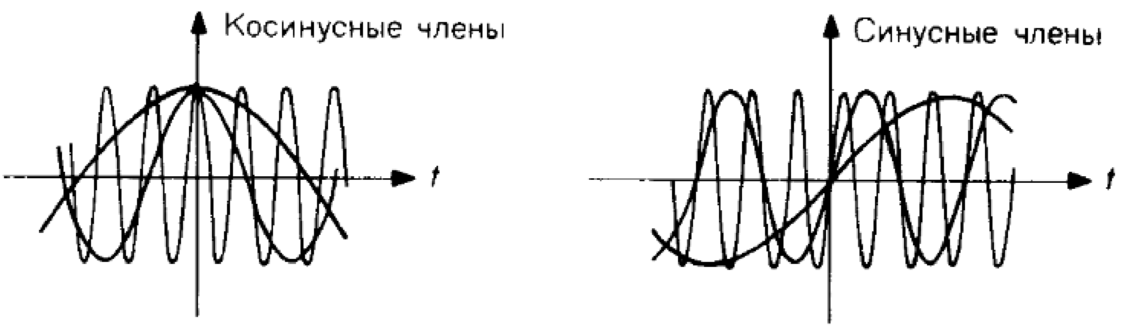

Рисунок 1.1 – Интерпретация интеграла $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi j f t} df$

Нельзя считать неразумным положения согласно которому в любой момент времени t, отличный от $t = 0$ число положительных составляющих будет равно числу отрицательных и, следовательно, их вклады могут привести к полной взаимной компенсации. При $t = 0$, однако, все косинусоидальные составляющие равны $+1$; их вклады суммируются, создавая в начале координат бесконечно большой пик.

1.1.2 Прямоугольный импульс и его преобразование Фурье

Прямоугольный импульс задается следующей функцией

$$\mathrm{rect}(t) = \begin{cases} 1, \text{если } |t| < \frac{1}{2} \\ 1/2, \ \text{ если } t = \frac{1}{2} \\ 0, \qquad \text{ иначе.} \end{cases}$$

График данной функции имеет вид симметричного относительно вертикальной оси прямоугольника (рис. 1.2).

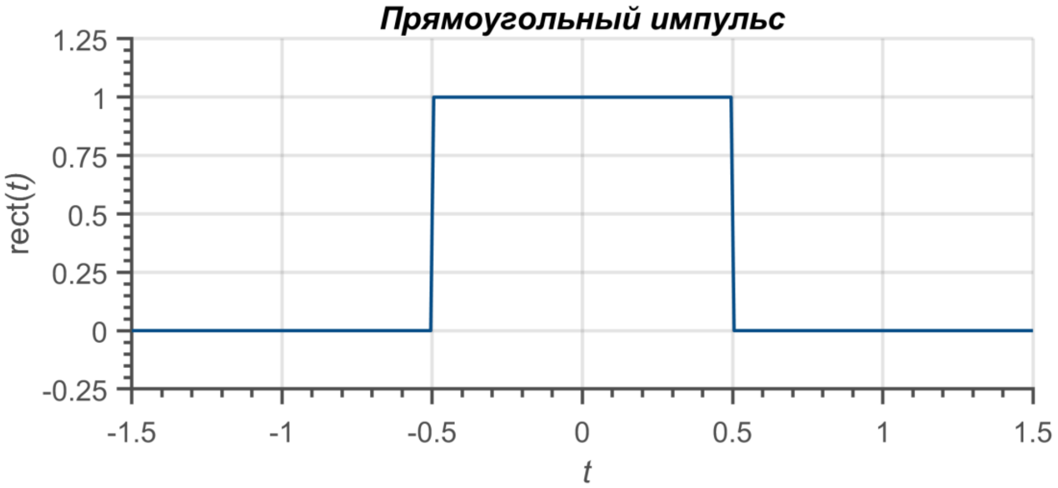

Рисунок 1.2 – Прямоугольный импульс во временной области

Получить преобразование Фурье этой функции несложно

$$R(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{rect}(t) e^{-2\pi jft} dt = \int_{-1/2}^{1/2} e^{-2\pi jft} dt = -\frac{1}{2\pi j} e^{-2\pi jft}\Big|_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} = \frac{\sin \pi f}{\pi f}$$

Это выражение можно записать в сжатой форме:

$$\mathcal{F}[\mathrm{rect}(t)] = \frac{\sin \pi f}{\pi f} = \mathrm{sinc}(f). \tag{1.2}$$

График функции $\mathrm{sinc}(f)$ показан на рисунке 1.3.

Рисунок 1.3 – Преобразование Фурье прямоугольного импульса

Справедливо также и следующее соотношение:

$$\mathcal{F}[\mathrm{sinc}(t)] = \mathrm{rect}(f). \tag{1.3}$$

Ниже приведены некоторые важные свойства рассмотренных функций:

1) $\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{sinc}(t)dt = 1 = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{rect}(t)dt$

2) $\mathrm{sinc}(0) = 1 = \mathrm{rect}(0)$.

3) $\forall n \in \mathbb{Z}/\{0\}\ \mathrm{sinc}(n) = 0$.

1.1.3 Свойства преобразования Фурье

Для начала рассмотрим следующий пример преобразование Фурье от экспоненциальной функции.

Пример 1.1 – Пусть $x(t) = e^{-\alpha t}u(t), \alpha > 0$, (как показано на рисунке 1.4) Преобразование Фурье $x(t)$ имеет следующий вид

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha t} e^{-j2\pi f t} dt = \frac{1}{-(\alpha + j2\pi f)} e^{-j2\pi f t}\Big|_0^{\infty} = \frac{1}{\alpha + j2\pi f}$$

Используя формулу обратного преобразования Фурье нашу исходную функцию $x(t)$ можно представить в следующем виде

$$x(t) = e^{-\alpha t}u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\alpha + j2\pi f} e^{j2\pi f t} df,$$

Которую можно рассматривать в качестве представления $x(t)$ в виде «взвешенной» суммы комплексных экспонент.

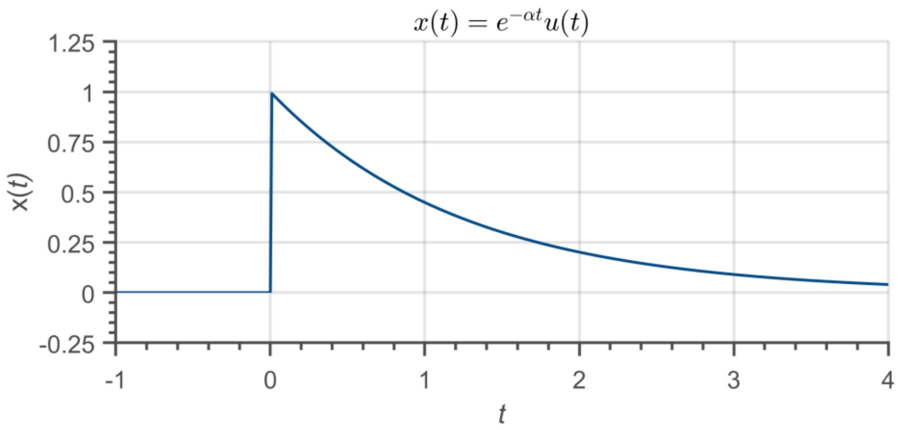

Рисунок 1.4 – Убывающая экспонента

Поскольку полученная функция $X(f)$ является комплексной, для её графического описания необходимо строить два графика – отдельно для действительной и отдельно для мнимой части или отдельно для действительной и отдельно для мнимой составляющих или отдельно для амплитуды и отдельно для фазы, как показано на рисунке 1.5.

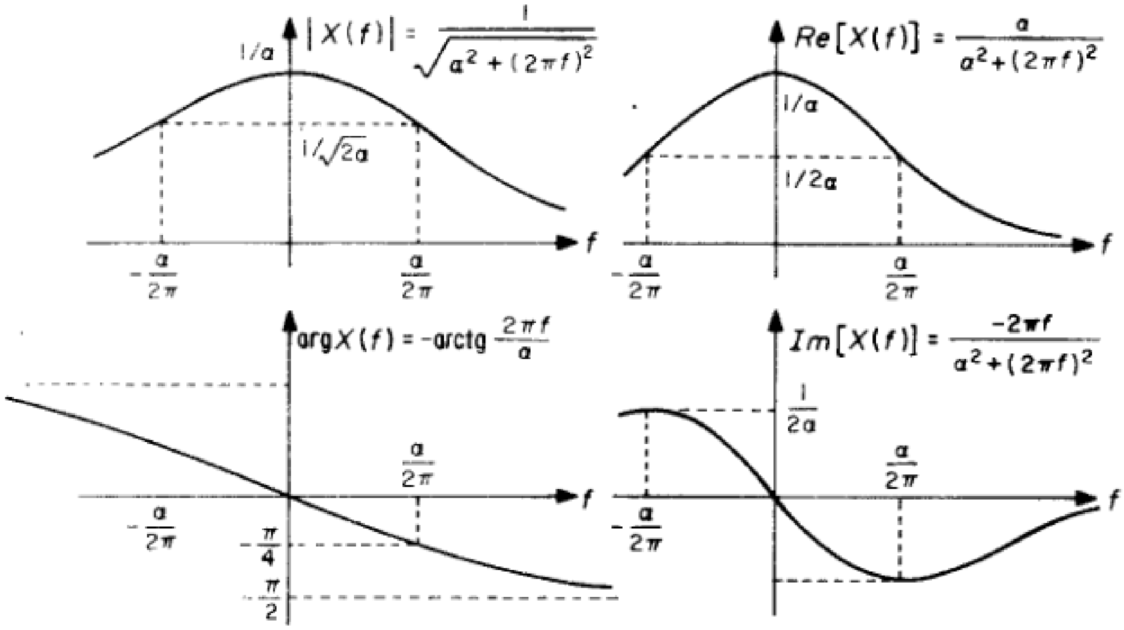

Рисунок 1.5 – Действительная и мнимая части, амплитуда и фаза для преобразования Фурье $X(f)$ из примера 1.1

Свойство сопряженной симметрии: Если $\mathrm{Im}[x(t)] = 0$, т.е. если $x(t)$ – действительная функция, то тогда

$$X(f) = X^*(-f). \quad (1.4)$$

Сказанное означает, что $\mathrm{Re}[X(f)]$ и $|X(f)|$ являются четными функциями, тогда как $\mathrm{Im}|X(f)|$ и $\arg X(f)$ – нечетными.

Свойство дуальности времени и частоты: Если $X(f) = \mathcal{F}\{x(t)\}$, то $X(t) = \mathcal{F}\{x(-f)\}$. Иллюстрацией этого свойства служат выражения (1.2) и (1.3).

Свойство четной и нечетной симметрии:

а) Если $x(t) = x(-t)$, т.е. если $x(t)$ – четная функция, то

$$X(f) = X(-f).$$

Если $x(t)$ является одновременно и четной, и действительной функцией, то $X(f)$ также будет одновременно четной и действительной.

б) Если $x(t) = -x(-t)$, т.е. если $x(t)$ – нечетная функция, то

$$X(f) = -X(-f).$$

Если $x(t)$ является одновременно и нечетной, и действительной функцией, то $X(f)$ будет одновременно нечетной и мнимой.