Алгоритмы и структуры данных.
Упражняемся в математическом ожидании.

1 Теоретический материал

Обратите внимание, что большинство приведённых ниже опредлений справделивы **только** для случая конечного множества элементарных исходов, хотя и сохраняют свой смысл при обобщении. Особенно будьте осторожны с определениями касающимися **случайных величин**.

1. Случайная величина ξ есть вещественнозначная функция элементарного исхода, то есть $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$.

2. Две случайные величины ξ и ψ независимы, если для любых $c, d \in \mathbb{R}$ верно, что события $A = \{\omega : \xi(\omega) = c\}$ и $B = \{\omega : \psi(\omega) = d\}$ независимы.

3. Математическим ожиданием случайной величины называется её средневзвешенное значение $E\xi = \sum_{w \in \Omega} \xi(w) \cdot P(w)$.

4. Линейность математического ожидания. Математической ожидание линейной комбинации случайных величин равно соответствующей линейной комбинации их матожиданий, при этом неважно, выполненяется ли условие независимости. $E(\alpha\xi + \beta\psi) = \alpha E\xi + \beta E\psi$.

5. Математическое ожидание произвдения **независимых** случайных величин равно произведению математический ожиданий, то есть $E(\xi \cdot \psi) = E\xi \cdot E\psi$.

6. Дисперсией случайной величины называется среднеквадратичное её отклонение от математического ожидания, или $D\xi = E(\xi - E\xi)^2$.

7. Для оценки вероятности отклонения неотрицательной случайной величины от математического ожидания используют неравенство Маркова:

$$P(\xi \geq a) \leq \frac{E\xi}{a}$$

8. И Чебышёва (требование неотрицательности не накладывается):

$$P(|\xi - E\xi| \geq a) \leq \frac{D\xi}{a^2}$$

2 Задания

1. В магазине имеется 10 автомобилей. Из них 5 черных, 3 красных и 2 синих. Некоторый покупатель случайным равновероятным образом выбрал 3 автомобиля. Найдите распределение (в данном случае подразумевается вероятность принять каждое конкретное значение) случайной величины «количество чёрных автомобилей среди выбранных». Найдите математическое ожидание этой случайной величины.

2. Найти математическое ожидание модуля разности двух независимых равномерно распределённых целых чисел от 1 до n. Укажите асимптотическую формулу и коэффициент при старшей степени.

3. Рассмотрим следующую игру: вы можете бросить обычный шестигранный кубик, после чего решаете оставить выпавшее на нём число, или отказаться от него и бросить заново, при этом отказаться можно не более чем два раза. Предложите стратегию игры, при которой максимизируется математическое ожидание числа, выпавшего на последнем кубике.

4. У Аркадия есть n карточек с числами, на каждой карточке написано некоторое целое число a_i(числа могут быть как положительными, так и отрицательными). Аркадий каждый вечер поступает следующим образом: он раскладывает карточки числами вниз в случайном порядке слева направо(каждая перестановка карточек реализуется с равной вероятностью) и начинает их по очереди открывать также слева направо. Во время этого процесса он складывает в уме все числа, встреченные на открытых карточках, но как только встречает карточку с отрицательным числом, он прибавляет его к ответу, заканчивает процесс игры и произносит вслух текущую сумму.

   Аркадий занимается этим уже несколько десятилетий и теперь ему стало интересно мат. ожидание числа, которое он произнесет. Придумайте алгоритм, который за время $O(n)$ определит это мат. ожидание.

5. n участников играют в игру, состоящую из n раундов. Каждому участнику i сопоставлено некоторое положительное число a_i. Каждый раунд проходит следующим образом. Из оставшегося в игре множества $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ участников выбирается случайный: участник с номером v_j выбирается с вероятностью $a_{v_j}/(a_{v_1} + a_{v_2} + \ldots + a_{v_k})$. После выбора нового участника, он считается победителем этого раунда и выходит из игры. Опишите алгоритм, который для каждого участника определяет мат. ожидание номера раунда, в котором он победит. Алгоритм должен работать за время $O(n^2)$.

6. Покажите, что умножение случайной величины на константу c умножает её математическое ожидание на c, а её дисперсию на c^2.

7. Как вы помните, математическое ожидание обладает свойством линейности, то есть математическое ожидание суммы равняется сумме математических ожиданий. Удивительно, но этим же свойством обладает и дисперсия, если конечно величины независимы. Докажем же это!

8. Скомбинируем теперь результаты предыдущих двух пунктов. Пусть у вас есть некоторый n-гранный кубик, на гранях которого написаны неизвестные вам числа a_i. Вы бросаете кубик и наблюдаете итоговое значение. Вы хотели бы оценить ожидаемое значение, которое выпадает на кубике. Для этого вы делаете m независимых бросков и берёте среднее арифметическое. Разумеется, это значение можно также трактовать как случайную величину, являющуюся средним m независимых одинаково распределённых случайных величин. Что вы можете сказать про её математическое ожидание и дисперсию?

9. Докажите неравенства Маркова и Чебышёва.