

Splay tree. Уже пройденные способы балансировки для BST , которые у нас были, это способы из ДД (четкая структура и ожидаемая глубина) и 2-3 дерева (гарантированная одинаковая глубина для всех вершин).

Новый способ балансировки — не напрягаться с балансированием лишней раз, и работать за амортизированное время.

Основной нашей операцией будет $expose(v)$, которая будет превращать вершину v в корень дерева. Условие BST на дереве сохраняется. Эта операция будет поддерживать два типа поворотов: левый и правый. Поворот вершины v возьмет ребро от v к предку u , и его «повернет» — если v было левым сыном u , то u станет правым сыном v . При этом правый сын v станет левым сыном u . Другой поворот делается симметрично. Вершина v станет ближе к корню дерева. Если применять повороты к v , пока можно, то в итоге v станет корнем.

$expose$ будет выполняться после каждой операции, и работать за высоту дерева. Более того, поскольку все остальное тоже работает за высоту дерева, то мы будем оценивать только $expose$.

Каждый раз делать повороты нельзя, потому что будет работать за долго. У нас будет три операции, которые будут поднимать нашу вершину:

- zig
- zig-zig
- zig-zag

zig. Самая тупая операция — если мы сын предка, то делаем поворот. Оставшиеся операции будут поднимать нас сразу на 2.

zig-zig. Если наш дедушка от нас находится справа-справа или слева-слева, то выполним сначала поворот предка, а потом себя.

zig-zag. Иначе мы сначала сделаем поворот себя, а потом поворот предка.

Лучше порисовать картинки или погуглить визуализацию, потому что иначе будет очень непонятно, что сейчас произошло.

Также можно выразить $split$ и $merge$ через предыдущие операции.

Потенциал. Введем $\Phi(t) = \sum_{v \in t} rank(v) = \sum_{v \in t} \log_2 size(v)$. Тогда стоимость $expose$ это

$$\tilde{t}_e = t_e + \Phi(t') - \Phi(t) \leq 3(rank(root) - rank(v)) + 1$$

Воспользуемся $rank(root) - rank(v) = (rank(root) - rank(u_1)) + (rank(u_1) - rank(u_2)) + \dots + (rank(u_n) - rank(v))$ и разложим $expose$ на три операции, и покажем, что они тоже оплачиваются потенциалом.