Потоки. Пусть нам дан некий ориентированный граф. У каждого ребра есть некоторая пропускная способность $c_{v,u}$ (можем полагать, что если ребра нет, то она равна нулю). Две вершины s, t обозначены как сток и исток.

Далее мы выделяем какое-то множество путей $P = \{p_1(s,t), p_2(s,t), \ldots\}$. Каждому пути сопоставляем число $f_i \geq 0$. Требуется, чтобы для каждого ребра e сумма f_i по всем вхождениям ребра в пути не превосходила c_e . При таких условиях мы максимизируем $\sum f_i$.

Классический вид задачи. Обозначим потоком функцию от пары вершин $f:V\times V\to \mathbb{R}$, на которую накладываются следующие требования:

- 1. $f(v, u) \le c(v, u)$
- 2. f(v, u) = -f(u, v)
- 3. $\forall v \in V \setminus \{s, t\} : \sum_{u} f(v, u) = 0$

Мы хотим максимизировать $|f| = \sum_{u} f(s, u) = \sum_{u} f(u, t)$.

Можно заметить, что можно определить сумму потоков f_1+f_2 , если выполняется пункт 1. Остальные свойства сохранятся.

Перевод из первой постановки задачи во вторую делается просто: вдоль каждого пути по прямым ребрам добавляем $+f_p$, а вдоль обратных ребер прибавляем $-f_p$. Тогда все три свойства выполнятся, и все хорошо.

Определим $e_v = \sum_u f(v, u)$. Если мы выделим какое-то множество вершин, то поток, проходящий через множество равен сумме e_v . Можно заметить, что такое число это что-то из $\{0, |f|, -|f|\}$.

Ребро называется насыщенным если f(v,u) = c(v,u). Остаточной пропускной способностью ребра c*(v,u) назовем (c-f)(v,u). Остаточной сетью назовем граф на множестве ребер, для которых $c*(v,u) \neq 0$.

Разрез. Это такое разбиение вершин на множества A и \overline{A} . Разрезы бывают ориентированные и неориентированные. В потоках мы почти всегда говорим про s/t-разрез $-s \in A, t \notin A$, стоимость разреза определяем как $\sum_{v \in A} \sum_{u \notin A} c(v,u)$.

Разрез называется насыщенным, если все его ребра насыщенные.

Декомпозиция потока. Поток можно представить в виде суммы $l \leq m$ элементарных потоков (то есть путей и циклов). Доказательство конструктивное: пока общий поток ненулевой, из s есть ребро, где f>0. Проходя по нему, дальше тоже будет ребро с положительным потоком, итд. Получим путь $s\to t$, где можно уменьшить все f на минимальное из потоков по ребрам. Если встретили цикл, то уменьшаем цикл, и продолжаем. Поскольку каждый раз добавлялось одно ребро с f=0, то всего мы выделим не более m элементарных потоков. В какой-то момент путей $s\to t$ не останется. Тогда в сети остались только циклы. Их можно выделить как элементарные потоки. Если нас интересует сведение второй постановки задачи к первой, то на циклы можно просто забить.

Размер декомпозиции можно оценить как O(nm) - O(m) итераций, и O(n) вершин в элементарном потоке. Найти за это время декомпозицию тоже можно. Для этого надо хранить указатель на текущее интересное исходящее ребро для каждой вершины. Тогда наш указатель либо двигается вправо (суммарно O(m)), либо мы находим какой-то новый элементарный поток. То есть, каждый шаг декомпозиции

работает за O(n) переходов по ребру, и все сдвиги указателя суммарно работают за O(m) по всем шагам декомпозиции, получаем сложность O(nm).