

**Формальные грамматики и языки.** Обозначим алфавит символов за  $\sigma$ , а множество конечных строк за  $L \subset 2^{\sigma^*}$ , где  $\sigma^*$  — это все последовательности конечной длины.

**Регулярные выражения.** Тривиальные регулярные выражения: (пустое множество)  $\epsilon$  (пустая строка),  $x \in \sigma$ . Остальные регулярные выражения определяются рекурсивно относительно них. А именно, мы также разрешаем  $A+B$  (последовательная запись),  $A|B$  (выбор из двух регулярных),  $A^*$  (повторение строки из языка  $A$  0, 1, 2, ... раз) Звездочка еще называется замыканием *Kleene*.

Например,  $\{0|1|2|3\}^* + \{0|1|2|3\}$  это множество всех непустых строк из символов  $\sigma = \{0, 1, 2, 3\}$ .

**Способы задания языков.** Регулярные выражения, ДКА, НКА,  $\epsilon$ -НКА. Эти способы эквивалентны. Очевидно  $L_{\text{ДКА}} \subset L_{\text{НКА}} \subset L_{\epsilon\text{-НКА}}$  Вложенность  $\epsilon$ -НКА в ДКА можно показать, если рассмотреть алгоритм приведения одного автомата в другой. Например, можно выделить все подмножества вершин НКА как отдельные вершины ДКА (то есть, он будет иметь экспоненциальный размер). Тогда переход по ребру — это то же самое, что взять все вершины подмножества, и объединить переходы по ребрам из них. Еще стоит следить за переходами по пустому символу, потому что вершина сразу задает подмножество вершин, достижимых из нее по  $\epsilon$ -ребрам.

Осталось показать, что регулярные выражения эквивалентны автоматам. По регулярным выражениям можно достаточно легко строить  $\epsilon$ -НКА, если отдельно рассмотреть все возможные способы задания языка, и дальше рекурсивно. То есть,  $A+B$  выражается, если последовательно записать автоматы  $A$  и  $B$ , и перегнать терминалы  $A$  в стартовую вершину для  $B$ . Остальные каким-то похожим образом.

Вот теперь совсем последний шаг — надо показать, что любой ДКА можно задать регулярным выражением. Введем  $L_i(v, u)$  — регулярное выражение, которое задает все строки, по которым можно пройти из  $v$  в  $u$  в ДКА, используя первые  $i$  ребер. Изначально это какие-то пустые регулярки. Потом добавляем ребро  $(x, y, c)$ . Тогда  $L_{i+1}(v, u) = L_i(v, u) \cup \{L_i(v, x) + c + \{L_i(y, x) + c\}^* + L_i(y, u)\}$ .

**Лемма о накачке.** Для любого регулярного языка  $L$  существует такое  $n$ , что для всех строк  $|s| \geq n$  верно,  $s = uvw$ ,  $|uv| \leq n$ ,  $\forall k \geq 0$   $s' = uv^k w \in L$ . Доказательство такое: посмотрим на ДКА и возьмем  $n$ , равное числу вершин. Тогда для длинных строк их путь будет содержать цикл. Этот цикл как раз и соответствует строке  $v$ . Это значит, что любая достаточно длинная строка имеет циклическую структуру внутри.