

Задачи на отрезке. Введем какую-то произвольную операцию \oplus , и будем отвечать на запросы $get(l, r)$ на массиве a , ответом на которые будет $a_l \oplus a_{l+1} \oplus \dots \oplus a_r$. Также введем операцию изменения на отрезке $a_i := change(a_i, x)$.

Потребуем от \oplus ассоциативность — $a \oplus (b \oplus c) = (a \oplus b) \oplus c$.

Префиксные суммы. Если в задаче нет запросов изменения (и элементы образуют группу, то есть есть обратный элемент), то посчитаем $p_i = p_{i-1} \oplus a_i$. Тогда ответ на запрос — это $p_r \oplus p_{l-1}^{-1}$. Если операция некоммутативна, то нужно будет пострадать, но вроде бы можно просто сделать $p_{l-1}^{-1} \oplus p_r$. Построение за $O(n)$, запрос за $O(1)$.

Sparse table. Если элементы не образуют группу, но задача все еще статическая, то можно сохранить значения, соответствующие \oplus по всем отрезкам длины 2^k . Тогда, когда нужно ответить на запрос $get(l, r)$, можно взять перекрывающиеся отрезки $[l, l+2^i]$ и $[r-2^i, r]$. От операции требуется $a \oplus b = b \oplus a$ и $a \oplus a = a$. *Есть модификация, позволяющая обойтись без второго свойства.* Построение за $O(n \log n)$, запрос за $O(1)$.

Segment tree. Хотим к предыдущей задаче добавить обновление в точке. Хотим сохранить какое-то множество отрезков S , чтобы потом по нему восстанавливать ответ на произвольном отрезке $[l, r]$, склеивая не более чем $O(\log n)$ отрезков. Также должно быть не более $O(\log n)$ отрезков, содержащих какой-либо элемент.

Построим двоичное дерево над массивом, где вершина на глубине i будет отвечать за отрезок длины 2^{k-i} , где $n = 2^k$. Разбивать запросы на отрезки будем таким образом: рассмотрим все отрезки внутри запроса, и выкинем вложенные. На каждой глубине мы возьмем не более двух отрезков, поэтому суммарно запросы будут работать за $O(\log n)$.

| 1: [0, 16) | | | | | | | | | | | | | | | |
|------------|-----------|------------|-------|------------|-------|-------------|-------|--------------|-------|--------------|--------|--------------|--------|--------|--------|
| 2: [0, 8) | | | | | | | | 3: [8, 16) | | | | | | | |
| 4: [0, 4) | | | | 5: [4, 8) | | | | 6: [8, 12) | | | | 7: [12, 16) | | | |
| 8: [0, 2) | 9: [2, 4) | 10: [4, 6) | | 11: [6, 8) | | 12: [8, 10) | | 13: [10, 12) | | 14: [12, 14) | | 15: [14, 16) | | | |
| 16: 0 | 17: 1 | 18: 2 | 19: 3 | 20: 4 | 21: 5 | 22: 6 | 23: 7 | 24: 8 | 25: 9 | 26: 10 | 27: 11 | 28: 12 | 29: 13 | 30: 14 | 31: 15 |

Реализация будет такой — сделаем рекурсивную функцию get , которая хочет обойти дерево, зайти во все «ключевые» отрезки запроса, и посчитать итоговый ответ. Для $get(v, l, r)$ бывает три случая:

- v не отвечает ни за что из отрезка $[l, r]$, поэтому не делаем ничего и прекращаем работу.
- $[l, r]$ содержит отрезок вершины v , и тогда можно обработать этот отрезок и прекратить работу.
- Иначе надо спуститься в детей, и повторить процесс

Lazy propagation. Пусть у нас появился запрос $change$, модифицирующий отрезок. Будем хранить в вершине пометки вида «мы хотели сделать со всеми детьми такую-то операцию изменения», которые мы изначально будем проставлять с запросом изменения на все «ключевые отрезки». При этом во время запроса изменения мы по сути не сделаем изменений, только проставим пометки. Но теперь мы при каждом обращении к вершине проталкиваем модификатор (если есть) вниз, и меняем текущее

значение *value*. Таким образом, после проталкивания все величины остаются валидными (кроме тех, которые находятся где-то глубоко в дереве, но к которым мы не спустились).

Иначе говоря, мы считаем, что перед тем, как обратиться к какой-то вершине, мы обязаны обратиться ко всем вершинам-предкам, и тогда можем гарантировать, что в ней будут храниться актуальные значения параметров.

Требования к lazy propagation — дистрибутивность операции *change* относительно \oplus , а также модификаторы также должны являться полугруппой.