

Алгоритмы и структуры данных.

Кучи разной сложности и подготовка к контрольной.

1 Мини-тест

Цель данного теста — оценить свои знания перед контрольной, оценка за тест **не ставится**. На все вопросы ниже нужно дать только ответ, решение не требуется. Ответ признаётся либо верным, либо нет, промежуточные баллы не ставятся. Ответ необходимо дать в максимально упрощённом виде (без фанатизма), в частности нельзя предъявить в качестве ответа ряд (и сказать, что ответ — его сумма).

1. Укажите все варианты правильно описывающие время работы алгоритма сортировки слиянием
 - (a) $O(n)$
 - (b) $o(n \log n)$
 - (c) $\Omega(n)$
 - (d) $\omega(n)$
 - (e) $\Theta(n \log n)$
2. Задача поиска порядковой статистики в отсортированном массиве:
 - (a) Решается за $O(1)$
 - (b) Не решается в общем случае быстрее, чем за $O(\log n)$
 - (c) Не решается в общем случае быстрее, чем за $O(n)$
3. В массиве, проиндексированном числами от 1 до n , записана троичная куча. Элемент с каким номером будет являться предком элемента находящегося на позиции 8?
 - (a) 2
 - (b) 3
 - (c) 4
4. Чему равен максимальный размер корневого списка в фибоначчиевой пирамиде размера n ?
 - (a) 2
 - (b) $2 \cdot \log n + 1$
 - (c) $\frac{n}{2} + 1$
 - (d) n
5. Получите Θ -оценку для алгоритма время работы которого описывается следующей рекуррентной: $f(n) = 3n \log n + 2f(n/2)$.

6. К очереди с минимумом, реализованной через два стека, применяют следующую последовательность операций:

```
push(5);
push(4);
push(6);
push(5)
pop()
pop()
pop()
push(2)
push(8)
push(7)
pop()
push(1)
```

Выпишите содержимое стеков с минимумом после выполнения всей последовательности.

7. Алгоритм задаётся кодом следующей функции:

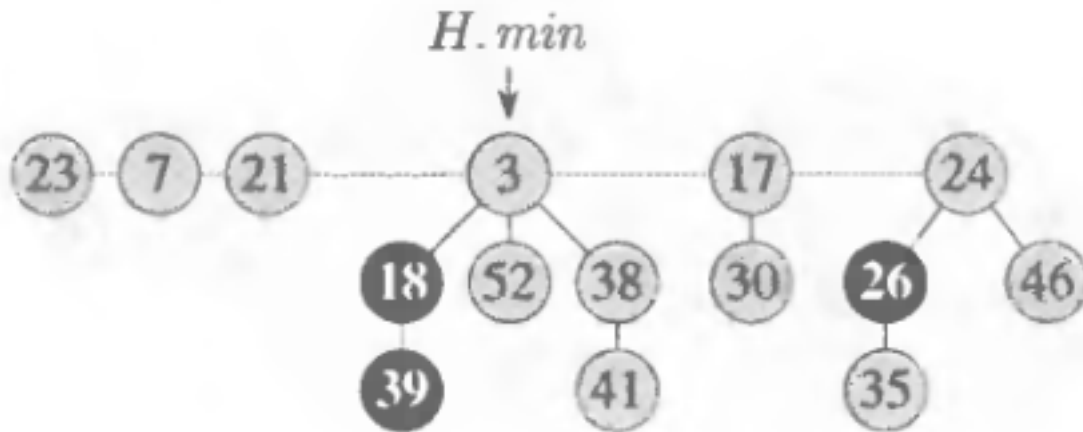
```
Integer calc_smth(const vector<Integer>& a) {
    Integer result = 0;
    Integer mx_value = *max_element(a.begin(), a.end());
    while (mx_value != 0) {
        result = result + mx_value % 16;
        mx_value = mx_value / 16;
    }
    return result;
}
```

Считается, что арифметические операции с классом *Integer* производятся за константное время. К какому классу сложности принадлежит этот алгоритм (сильнополиномиальный, слабополиномиальный, псевдополиномиальный)?

8. Предположим, что у нас есть 3 независимо подбрасываемых стандартных шестигранных кубика. Найдите вероятности наступления следующих двух событий: хотя бы на одном из кубиков выпало число не меньшее 5; хотя бы на двух кубиках из трёх выпало число не меньшее 4?

2 Теоретические задачи

1. В массиве p , индексируемом с 1, записана перестановка. Для построения двоичной кучи выполняется проход с конца (от элемента n к элементу 1) и от каждого элемента вызывается операция $siftUp(i)$. Верно ли, что в итоге для любой перестановки p будет построена корректная двоичная куча?
2. Докажите, что биномиальное дерево B_k имеет ровно C_k^i узлов на глубине i .
3. Как поменяется Фибоначчиева куча приведенная на картинке после удаления минимального элемента (нарисуйте, покажите все шаги)?



4. Пусть в массиве, индексируемом с единицы, хранится двоичная куча размера n . Поступает запрос поиска k -й порядковой статистики ($1 \leq k \leq n$), требуется ответить на него за время:
 - (a) $O(2^k \cdot k)$;
 - (b) $O(2^k)$;
 - (c) $O(k \log n)$;
 - (d) $O(k^2)$;
 - (e) $O(k \log k)$.
5. Имеется изначально пустая Фибоначчиева куча. Покажите, как применив к ней n операций получить кучу, такую что глубина самого глубокого дерева имеет порядок $O(n)$.
6. Пусть имеется набор из n биномиальных пирамид размера s_1, s_2, \dots, s_n , $\sum_{i=1}^n s_i = m$. В каждой пирамиде составляющие её биномиальные деревья хранятся упорядоченными по рангам в двусвязном списке. Все эти пирамиды объединяются в одну в каком-то порядке. Покажите, что время работы удовлетворяет $O(n \log \frac{m}{n})$ **вне зависимости** от порядка выполнения слияний. Дополнительно покажите, что эта оценка является неупрощаемой.