Алгоритмы и структуры данных, семинар 2. Решаем вместе задачи на комбинаторную и геометрическую вероятности.

31 октября 2019

1 Теоретический материал

Обратите внимание, что большинство приведённых ниже определний справедливы **только** для случая конечного множества элементарных исходов, хотя и сохраняют свой смысл при обобщении. Особенно будьте осторожны с определениями касающимися **случайных величин**.

1. Вероятностное пространство для случая **конечного** множества элементарных исходов это тройка $(\Omega, 2^\Omega, \mathbb{P})$, где:
   - Ω — множество элементарных исходов. Элементарные исходы обозначаются как $w \in \Omega$;
   - 2^Ω — множество событий, каждое событие является подмножеством множества элементарных исходов. Например: $A \in 2^\Omega, A \subset \Omega$.
   - $\mathbb{P}$ — вероятности событий. Вероятность является числом от 0 до 1. В рассматриваемом нами случае вероятность события определяется как сумма вероятностей составляющих его элементарных исходов: $P(A) = \sum_{w \in A} P(\{w\})$.
2. Если $P(A) = 0$, то событие A называют невозможным.
3. Если $P(A) = 1$, то событие A называют достоверным.
4. События A и B называют независимыми, если вероятность того, что событие B произойдёт не меняется от того, что произошло событие A. Формальнее, будем называть A и B независимыми $(P(A) > 0, P(B) > 0$, если $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.
5. Если $P(A) > 0$ и $P(B) > 0$, но $P(A \cap B) = 0$, то события A и B называются несовместными.
6. События $A_1, A_2, \ldots, A_n$ называются попарно независимыми, если любые два из них являются независимыми.
7. События $A_1, A_2, \ldots, A_n$ называются независимыми в совокупности, если для любого набора из этих событий $A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots, A_{i_k}$ верно $P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k}) = P(A_{i_1}) \cdot P(A_{i_2}) \cdot \ldots \cdot P(A_{i_k})$.
8. Вероятность наступления A при условии наступления B записывается как $P(A|B)$. Если $P(B) > 0$, то справедливо $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$.
9. События $A_1, A_2, \ldots, A_n$ называются полной группой событий, если любой элементарный исход принадлежит **ровно** одному из них.
10. Пусть события $A_1, A_2, \ldots, A_n$ образуют полную группу, тогда имеет место: $P(B) = \sum_{i=1}^n P(B|A_i) \cdot P(A_i)$.

2 Задания

1. Обсудите понятия попарной независимости событий и независимости в совокупности. Приведите пример трёх событий, которые являются попарно независимыми, но не являются независимыми в совокупности.

2. Обсудите понятие полной группы событий. Решите следующую задачу. Имеется три корзины. Изначально в первой корзине находится два белых шара и один чёрный, во второй три белых и два чёрных, а третья корзина пуста. Из обеих корзин случайно выбирают по два шара и кладут в третью. Затем из третьей корзины равновероятно выбирают один шар, найдите вероятность того, что этот шар будет чёрным.

3. Какова вероятность того, что при 8 бросаниях честной монеты герб выпадет в точности 5 раз?

4. На полке в случайном порядке расставлено 40 книг, среди которых находится трехтомник Пушкина. Найти вероятность того, что эти тома стоят в порядке возрастания номера слева направо, но не обязательно рядом.

5. Двое играют в русскую рулетку с шестизарядным револьвером, в который вставлены два патрона. Первый прокрутил барабан и нажал на курок — пистолет не выстрелил. Пришёл черёд второго, он может выбрать, сразу нажать на курок или сначала прокрутить барабан. Как ему выгоднее поступить, если известно, что он не хотел бы выстрела и

   (a) патроны были вставлены в две соседние ячейки;

   (b) патроны были вставлены в две противоположные ячейки;

   (c) патроны были вставлены в две случайные ячейки.

6. Задача. У Стаса есть 3 красных, 4 синих и 5 зелёных вагончиков, из которых ему хочется собрать паровозик. Сколько есть способов сделать это так, чтобы все вагончики были использованы и никакие два синих вагончика не стояли рядом? Вагончики одного цвета считаются полностью одинаковыми.

7. Обсудите понятие геометрической вероятности. Решите следующую задачу. Расстояние между пунктом А и пунктом Б составляет 100 километров. Изестно, что запорожец и волга выехали в какие-то случайные моменты времени между 12:00 и 14:00, при этом волга выехала после запорожца. Скорость запорожца составляет 50 километров в час, а скорость волги — 100 километров в час. Найдите вероятность того, что волга приедет в пункт Б раньше.

8. Дана следующая реализация функции *random_shuffle*:

   ```
   void random_shuffle(std::vector<int>& array) {
       for (size_t i = 0; i < array.size(); ++i) {
           std::swap(array[i], array[rand(0, i)]);
       }
   }
   ```

   Верно ли, что функция равновероятно получает любую перестановку массива (при условии, что все элементы массива различны)?

9. Студент на экзамене играет с преподавателем в следующую игру. На столе имеется три перевернутых текстом вниз листочка с вопросом(только к одному из листочков студент перед экзаменом подготовился).

   Далее студент показывает пальцем на какой-то листочек, а преподаватель открывает один из двух оставшихся листочков, к которому студент гарантированно не готовился.

   Стоит ли студенту взять тот листочек, на который он показывал пальцем, или стоит взять оставшийся неоткрытый, если студент хочет максимизировать вероятность сдачи экзамена?

10. У вас имеется честная монета.

    (a) Предложите трём игрокам способ равновероятно выбрать победителя.

    (b) Покажите, что не существует способа этого сделать, используя фиксированное количество бросков монеты.

11. У сайта имеется n рекламных баннеров, причём владелец баннера i заплатил c_i рублей. Схема выбора называется честной, если вероятность p_i каждого баннера быть выбранным пропорциональна величине c_i. Считая все числа c_i целыми, а ваш генератор случайных чисел идеальным и способным равновероятно возвращать любое целое число в заданном диапазоне, предложите схему:

    (a) Честного выбора одного баннера из n.

    (b) Честного выбора k различных баннеров из n.