

DFS. Алгоритм обхода графа. Каждой вершине присваивается один из трех цветов — белый, серый или черный. Белые вершины мы еще не рассматривали, серые вершины мы рассматриваем сейчас, черные вершины мы больше не рассматриваем. Алгоритм примерно такой:

1. Покрасить текущую вершину в серый цвет.
2. Рекурсивно запуститься из всех белых вершин, соединенных с нашей.
3. Покрасить текущую вершину в красный цвет.

Что-то из важных утверждений про *dfs*:

- Серые вершины образуют путь.
- Ребро между двумя серыми несоседними вершинами существует тогда и только тогда, когда в графе есть цикл.
- Из черных вершин нет ребер в белые.

Топологическая сортировка. Пусть у нас есть ориентированный ациклический граф. Давайте выпишем такую перестановку вершин — p_v будет номером покраски вершины v в черный цвет. Тогда все наши ребра будут идти только справа налево.

Поиск компонент сильной связности и конденсация. Компонентой сильной связности называем такой класс эквивалентности, где v и u сильно связаны, если есть пути $u \rightarrow v$ и $v \rightarrow u$. Конденсацией мы назовем такой мета-граф, где все компоненты сильной связности «сжаты» в одну вершину, а ребра между новыми компонентами есть, если есть ребра между какой-то парой вершин из этих компонент. Такой граф уже точно будет ациклическим.

Сделаем процедуру, аналогичную топсорт, но теперь у нас ребра уже могут идти слева направо. Про самую последнюю вершину в новом порядке мы знаем, что она точно лежит в компоненте истока. Рассмотрим граф G' , построенный на обратных ребрах. Тогда если у нас есть ребро в G' справа налево $u \leftarrow v$, то это значит, что вершины u и v лежат в одной компоненте сильной связности. Тогда мы можем последовательно выделять КСС с помощью обхода по обратным ребрам.