Задачи на отрезке. Введем какую-то произвольную операцию $\oplus$, и будем отвечать на запросы $get(l, r)$ на массиве a, ответом на которые будет $a_l \oplus a_{l+1} \oplus \dots \oplus a_r$. Также введем операцию изменения на отрезке $a_i := change(a_i, x)$.

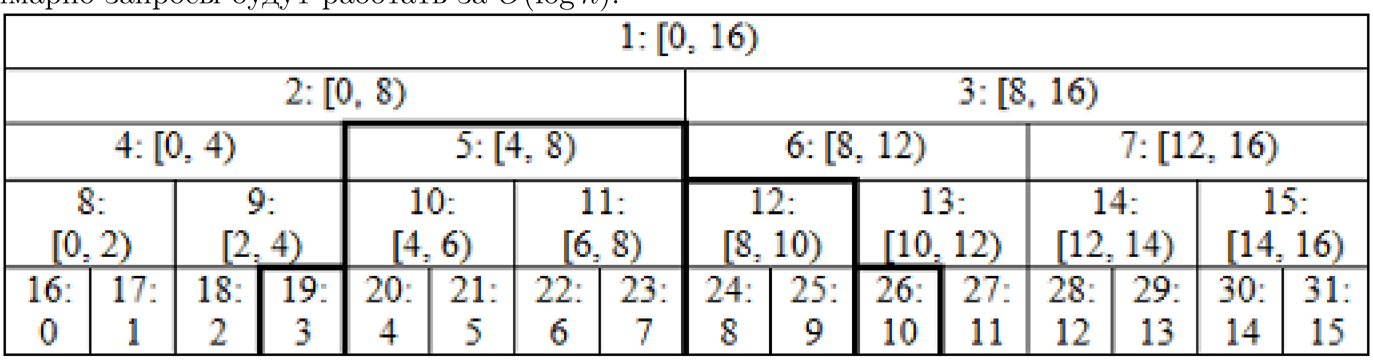
Потребуем от $\oplus$ ассоциативность — $a \oplus (b \oplus c) = (a \oplus b) \oplus c$.

Префиксные суммы. Если в задаче нет запросов изменения (и элементы образуют группу, то есть есть обратный элемент), то посчитаем $p_i = p_{i-1} \oplus a_i$. Тогда ответ на запрос — это $p_r \oplus p_{l-1}^{-1}$. Если операция некоммутативна, то нужно будет пострадать, но вроде бы можно просто сделать $p_{l-1}^{-1} \oplus p_r$. Построение за $O(n)$, запрос за $O(1)$.

Sparse table. Если элементы не образуют группу, но задача все еще статическая, то можно сохранить значения, соответствующие $\oplus$ по всем отрезкам длины 2^k. Тогда, когда нужно ответить на запрос $get(l, r)$, можно взять перекрывающиеся отрезки $[l, l+2^i)$ и $(r-2^i, r]$. От операции требуется $a \oplus b = b \oplus a$ и $a \oplus a = a$. *Есть модификация, позволяющая обойтись без второго свойства.* Построение за $O(n \log n)$, запрос за $O(1)$.

Segment tree. Хотим к предыдущей задаче добавить обновление в точке. Хотим сохранить какое-то множество отрезков S, чтобы потом по нему восстанавливать ответ на произвольном отрезке $[l, r]$, склеивая не более чем $O(\log n)$ отрезков. Также должно быть не более $O(\log n)$ отрезков, содержащих какой-либо элемент.

Построим двоичное дерево над массивом, где вершина на глубине i будет отвечать за отрезок длины 2^{k-i}, где $n = 2^k$. Разбивать запросы на отрезки будем таким образом: рассмотрим все отрезки внутри запроса, и выкинем вложенные. На каждой глубине мы возьмем не более двух отрезков, поэтому суммарно запросы будут работать за $O(\log n)$.



Реализация будет такой — сделаем рекурсивную функцию get, которая хочет обойти дерево, зайти во все «ключевые» отрезки запроса, и посчитать итоговый ответ. Для $get(v, l, r)$ бывает три случая:

- v не отвечает ни за что из отрезка $[l, r]$, поэтому не делаем ничего и прекращаем работу.
- $[l, r]$ содержит отрезок вершины v, и тогда можно обработать этот отрезок и прекратить работу.
- Иначе надо спуститься в детей, и повторить процесс

Lazy propagation. Пусть у нас появился запрос *change*, модифицирующий отрезок. Будем хранить в вершине пометки вида «мы хотели сделать со всеми детьми такую-то операцию изменения», которые мы изначально будем проставлять с запросом изменения на все «ключевые отрезки». При этом во время запроса изменения мы по сути не сделаем изменений, только проставим пометки. Но теперь мы при каждом обращении к вершине проталкиваем модификатор (если есть) вниз, и меняем текущее значение $value$. Таким образом, после проталкивания все величины остаются валидными (кроме тех, которые находятся где-то глубоко в дереве, но к которым мы не спустились).

Иначе говоря, мы считаем, что перед тем, как обратиться к какой-то вершине, мы обязаны обратиться ко всем вершинам-предкам, и тогда можем гарантировать, что в ней будут храниться актуальные значения параметров.

Требования к lazy propagation — дистрибутивность операции $change$ относительно $\oplus$, а также модификаторы также должны являться полугруппой.