

$\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  - случайная величина.  $\xi(w)$  - значение,  $w \in \Omega$ .

Пример: Есть 5 марок автомобиля, их стоимости и их количества. А - 1000 - 100; В - 2000 - 5; С - 3000 - 5; D - 2000 - 20; Е - 1500 - 30; Тогда нас интересуют  $P(\xi = 1000) = \frac{100}{160}$ ,  $P(\xi = 1500) = \frac{30}{160}$ ,  $P(\xi = 2000) = \frac{25}{160}$ ,  $P(\xi = 3000) = \frac{5}{160}$ .

Матожидание  $E(\xi) = \sum_{w \in \Omega} \xi(w) \cdot P(w) = \sum_x x \cdot P(\xi = x)$ .

Индикаторная случайная величина:  $I_A = \begin{cases} 1, w \in A \\ 0, w \notin A \end{cases}$  Тогда  $E(I_A) = P(A)$ .

Пусть есть 2 случайной величины  $\xi_1$  и  $\xi_2$ . Тогда  $E(\alpha\xi_1 + \beta\xi_2) = \alpha E(\xi_1) + \beta E(\xi_2)$ .  
 $E(\alpha\xi_1 + \beta\xi_2) = \sum_{w \in \Omega} (\alpha\xi_1(w) \cdot P(w) + \beta\xi_2(w) \cdot P(w)) = \alpha \sum_{w \in \Omega} \xi_1(w) \cdot P(w) + \beta \sum_{w \in \Omega} \xi_2(w) \cdot P(w) = \alpha E(\xi_1) + \beta E(\xi_2)$

Две случайные величины называются независимые, если  $\forall x, y : P(\xi_1 = x \text{ и } \xi_2 = y) = P(\xi_1 = x) \cdot P(\xi_2 = y)$ .  
 $n$  случайных величин называются попарно независимыми, если любые 2 величины независимы.  
*независимы в совокупности - см семинар*

$\xi_1$  и  $\xi_2$  - случайные независимые величины. Тогда  $E(\xi_1\xi_2) = E(\xi_1)E(\xi_2)$ .  
 $E(\xi_1\xi_2) = \sum_{w \in \Omega} \xi_1(w)\xi_2(w)P(w) = \sum_x x \cdot P(\xi_1\xi_2 = x) = \sum_{(u,v)} uv \cdot P(\xi_1 = u \text{ и } \xi_2 = v) = [\xi_1 \text{ и } \xi_2 \text{ независимы}] = \sum_{(u,v)} uv \cdot P(\xi_1 = u) \cdot P(\xi_2 = v) = (\sum_u u \cdot P(\xi_1 = u)) \cdot (\sum_v v \cdot P(\xi_2 = v)) = E(\xi_1)E(\xi_2)$ .

Задача о назначениях. Есть  $n$  работников и  $n$  работ. Есть таблица, где  $a_{ij}$  - сколько  $i$ -ый работник берет за  $j$ -ую работу. Нужно распределить работников по работам так, чтобы суммарная плата за все работы была минимальна. Оценим матожидание затрат при случайном решении.  $A_{ij}$  - событие, когда  $i$ -ый работник делает  $j$ -ую работу.  $\xi = \sum_{(i,j)} I_{A_{ij}} \cdot a_{ij}$ . Тогда  $E(\xi) = \sum_{(i,j)} E(I_{A_{ij}}) = \sum_{(i,j)} a_{ij} P(A_{ij}) = \sum_{(i,j)} a_{ij} \cdot \frac{1}{n}$ .

Найти максимальный разрез в неориентированном невзвешанном графе.

Будем строить случайный разрез (каждую вершину либо в  $A$ , либо в  $\bar{A}$ ). Тогда  $\xi$  - величина нашего разреза.  $\xi = \sum_{e \in E(G)} I_{B_e}$ , где  $B_e$  - событие, когда  $e$  лежит в разрезе.  $P(e \in \text{разрез}) = \frac{1}{2}$ . Тогда  $E(\xi) = E(\sum_{e \in E(G)} I_{B_e}) = \sum E(I) = \frac{1}{2} |E(G)|$ .

Есть перестановка  $p_1 \dots p_n$ . Алгоритм жадно набирает возрастающую подпоследовательность. Какое матожидание длины этой подпоследовательности?  
Событие  $A_i$  - алгоритм возьмет  $p_i$ .  $E(\xi) = E(\sum I_{A_i}) = \sum P(A_i)$ .  $P(A_i) = P(\forall j < i : p_j < p_i) = \frac{1}{i}$ . Тогда  $E(\xi) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} = \Theta(\log n)$ .

Дисперсия  $D(\xi) = \sum_{w \in \Omega} P(w)(\xi(w) - E(\xi))^2$ .

Свойства:

- $D(\xi_1 + \xi_2) = D(\xi_1) + D(\xi_2)$ ,  $\xi_1$  и  $\xi_2$  независимы
- $D(\lambda\xi_1) = \lambda^2 D(\xi_1)$

Неравенство Маркова.  $\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_+$ .  $P(\xi(w) \geq E(\xi) \cdot k) \leq \frac{1}{k}$ .

Неравенство Чебышева.  $\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ .  $P(|\xi - E(\xi)| \leq \alpha) \leq \frac{D(\xi)}{\alpha^2}$ .