$\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ - случайная величина. $\xi(w)$ - значение, $w \in \Omega$.
Пример: Есть 5 марок автомобиля, их стоимости и их количества. A - 1000 - 100; B - 2000 - 5; C - 3000 - 5; D - 2000 - 20; E - 1500 - 30; Тогда нас интересуют $P(\xi = 1000) = \dfrac{100}{160}, P(\xi = 1500) = \dfrac{30}{160}, P(\xi = 2000) = \dfrac{25}{160}, P(\xi = 3000) = \dfrac{5}{160}$.

Матожидание $E(\xi) = \sum_{w \in \Omega} \xi(w) \cdot P(w) = \sum_x x \cdot P(\xi = x)$.

Индикаторная случайная величина: $I_A = \begin{cases} 1, w \in A \\ 0, w \notin A \end{cases}$ Тогда $E(I_A) = P(A)$.

Пусть есть 2 случайной величины ξ_1 и ξ_2. Тогда $E(\alpha\xi_1 + \beta\xi_2) = \alpha E(\xi_1) + \beta E(\xi_2)$.
$E(\alpha\xi_1 + \beta\xi_2) = \sum_{w \in \Omega} (\alpha\xi_1(w) \cdot P(w) + \beta\xi_2(w) \cdot P(w)) = \alpha \sum_{w \in \Omega} \xi_1(w) \cdot P(w) + \beta \sum_{w \in \Omega} \xi_2(w) \cdot P(w) = \alpha E(\xi_1) + \beta E(\xi_2)$

Две случайные величины называются независимые, если $\forall x, y : P(\xi_1 = x$ и $\xi_2 = y) = P(\xi_1 = x) \cdot P(\xi_2 = y)$.
n случайных величин называются попарно независимыми, если любые 2 величины независимы.
независимы в совокупности - см семинар

ξ_1 и ξ_2 - случайные независимые величины. Тогда $E(\xi_1\xi_2) = E(\xi_1)E(\xi_2)$.
$E(\xi_1\xi_2) = \sum_{w \in \Omega} \xi_1(w)\xi_2(w)P(w) = \sum_x x \cdot P(\xi_1\xi_2 = x) = \sum_{(u,v)} uv \cdot P(\xi_1 = u$ и $\xi_2 = v) = [\xi_1$ и ξ_2 независимы$] = \sum_{(u,v)} uv \cdot P(\xi_1 = u) \cdot P(\xi_2 = v) = (\sum_u u \cdot P(\xi_1 = u)) \cdot (\sum_v v \cdot P(\xi_2 = v)) = E(\xi_1)E(\xi_2)$.

Задача о назначениях. Есть n работников и n работ. Есть таблица, где a_{ij} - сколько i-ый работник берет за j-ую работу. Нужно распределить работников по работам так, чтобы суммарная плата за все работы была миниальна. Оценим матожидание затрат при случайном решении. A_{ij} - событие, когда i-ый работник делает j-ую работу. $\xi = \sum_{(i,j)} I_{A_{ij}} \cdot a_{ij}$. Тогда $E(\xi) = \sum_{(i,j)} E(I_{A_{ij}} = \sum_{(i,j)} a_{ij} P(Aij) = \sum_{(i,j)} a_{ij} \cdot \frac{1}{n}$.

Найти максимальный разрез в неориентированном невзвешанном графе.

Будем строить случайный разрез(каждую вершину либо в A, либо в $\overline{A}$). Тогда ξ - величина нашего разреза. $\xi = \sum_{e \in E(G)} I_{B_e}$, где B_e - событие, когда e лежит в разрезе. $P(e \in$разрез$) = \frac{1}{2}$. Тогда $E(\xi) = E(\sum_{e \in E(G)} I_{B_E}) = \sum E(I) = \dfrac{1}{2} |E(G)|$.

Есть перестановка $p_1 \dots p_n$. Алгоритм жадно набирает возрастающую подпоследовательность. Какое матожидание длины этой подпоследовательности?
Событие A_i - алгоритм возьмет p_i. $E(\xi) = E(\sum I_{A_i}) = \sum P(A_i)$. $P(A_i) = P(\forall j < i : p_j < p_i) = \frac{1}{i}$. Тогда $E(\xi) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} = \Theta(logn)$.

Дисперсия $D(\xi) = \sum_{w \in \Omega} P(w)(\xi(w) - E(\xi))^2$.
Свойства:

- $D(\xi_1 + \xi_2) = D(\xi_1) + D(\xi_2)$, ξ_1 и ξ_2 независимы
- $D(\lambda\xi_1) = \lambda^2 D(\xi_1)$

Неравенство Маркова. $\xi : \Omega \to \mathbb{R}_+$. $P(\xi(w) \geq E(\xi) \cdot k) \leq \dfrac{1}{k}$.

Неравенство Чебышева. $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$. $P(|\xi - E(\xi)| \leq \alpha) \leq \dfrac{D(\xi)}{\alpha^2}$.