

*Какое-то сегодняшнее дополнение про бинарную кучу есть в прошлом конспекте*

**К-чная куча** Куча на полном К-чном дереве. Эту кучу можно так же хранить в массиве, с 0-индексацией.

- *sift\_up* такой же,  $O(\log_k n)$
- *sift\_down* ищет минимум среди  $k$  элементов на каждом шаге, поэтому работает за  $O(k \cdot \log_k n)$ .

	$2 - heap$	$k - heap$
<i>insert</i>	$O(\log n)$	$O(\log_k n)$
<i>extract_min</i>	$O(\log n)$	$O(k \log_k n)$
<i>decreasekey</i>	$O(\log n)$	$O(\log_k n)$
<i>increasekey</i>	$O(\log n)$	$O(k \log_k n)$

**Дейкстра на К-ной куче** Алгоритм Дейкстры достает минимум  $n$  раз, и улучшает ключ  $m$  раз

$$a \cdot \log_k n = b \cdot k \cdot \log_k n, a = m, b = n$$

Отсюда  $k = \frac{a}{b} = \frac{m}{n}$  в случае Дейкстры. Еще отметим, что  $k \geq 2$ .

В случае когда  $a = b^q$ ,  $q > 1$ , то  $k$ -куча структура работает за  $O(1)$  (вроде бы этот факт мы докажем в домашке), причем с хорошей константой, поэтому применимо на практике (привет, фибоначчиева куча!).

**Амортизационный анализ** Идея в том, что мы хотим оценить суммарное число операций, а не на каждом шаге работы. То есть вполне может быть итерация алгоритма за  $O(n)$ , но нам важно, что суммарное число  $O(n \log n)$

Так что есть  $t_{real} = t$ ,  $t_{amortized} = \tilde{t}$ .

**Метод кредитов** Элементам структуры сопоставляем сколько-то монет. Этими монетами элемент «расплачивается» за операции. Также мы накидываем сколько-то монет на операцию. Запрещаем отрицательное число монет. Начинаем с нулем везде.

Обозначим состояния структуры за  $S_0, S_1, \dots, S_n$ . Каждый переход стоил  $t_i$ ,  $t_i \geq |operations|$ , где  $t_i$  — это сколько мы потратили. Также на  $i$ -м шаге мы вбрасываем в систему  $\tilde{t}_i$  монет. Тогда

$$\sum t_i \leq \sum \tilde{t}_i \leq A \rightarrow O(A)$$

**Стек с минимумом**

- *min\_stack*
- push
- pop
- *get\_min*

$m_i = \min(m_{i-1}, a_i)$  — поддерживаем минимумы. Операции тривиальны

**Очередь с минимумом на двух стеках** Храним два стека с минимумом, один из которых мысленно наращиваем в одну сторону, а другой в другую, при этом очередь выглядит как бы как склеенные стеки. То есть мы добавляем элемент в первый стек, а извлекать хотим из второго.

$$X \rightarrow a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, \mid, b_1, b_2, \dots, b_n \rightarrow Y$$

Тогда единственная сложная операция — если мы хотим извлечь минимум, а второй стек пустой. Тогда мы все элементы из первого перекинем во второй по очереди с помощью «извлеки-добавь»

Почему это работает за  $O(1)$  на операцию амортизированно? Представим каждому элементу при рождении 2 монеты, одну из которых мы потратим на добавление в первый стек, а вторую на удаление через второй.

**set для бедных** Хотим не делать *erase*, только *insert*, *find*, *get\_min*. Храним  $\log n$  массивов,  $|a_i| = 2^i$ , каждый из которых по инварианту будет отсортирован. Тогда *get\_min* работает за  $O(\log n)$  — просто берем минимум по всем массивам. Аналогично *find* делается бинарными поисками за  $O(\log^2 n)$

А как добавлять за  $\tilde{O}(\log n)$ ? Каждый элемент при добавлении в структуру получает  $\log n$  монет. Когда мы добавляем элемент, мы создаем новый массив ранга 0. Если было два массива ранга 0, сольем их в новый массив ранга 1 за суммарный размер (и заберем монетку у всех элементов во время слияния), и так далее, пока не создадим уникальный массив для текущего ранга.

**Метод потенциалов**  $\Phi(S_i)$  — потенциал, который зависит только от состояния структуры (**не от** последовательности действий, которая к такому состоянию привела).

Опять вводим  $t_i$ ,  $\sum t_i = O(f(n))$ . Определим амортизированное время работы:

$$\tilde{t}_i = t_i + (\Phi(S_{i+1}) - \Phi(S_i))$$

$$t_i = \tilde{t}_i + \Phi(S_i) - \Phi(S_{i+1})$$

Пусть мы показали  $\tilde{t}_i \leq f(n)$ . Тогда

$$\sum t_i \leq n \cdot f(n) + \Phi(0) - \Phi(n)$$

Нормальный потенциал — такой, что из неравенства выше все еще можно показать O-оценку на  $\sum t_i = O(n \cdot f(n))$ .

**deque для богатых** Хотим deque с поддержкой минимума.

Храним два стека как для обычной очереди. Все операции хорошо работают как на очереди, кроме перестройки структуры. В случае с очередью надо было переливать стеки только в одну сторону, а теперь иногда нужно туда-сюда.

Теперь мы будем перекидывать только половину элементов. Тогда нам понадобится 3 стека, один из которых будет вспомогательным для перестройки (там иначе стеки развернуты).

$$\Phi(S_i) = |Size_1 - Size_2|$$