Потоки. Пусть нам дан некий ориентированный граф. У каждого ребра есть некоторая пропускная способность $c_{v,u}$ (можем полагать, что если ребра нет, то она равна нулю). Две вершины s, t обозначены как сток и исток.

Далее мы выделяем какое-то множество путей $P = \{p_1(s,t), p_2(s,t), \ldots\}$. Каждому пути сопоставляем число $f_i \geq 0$. Требуется, чтобы для каждого ребра e сумма f_i по всем вхождениям ребра в пути не превосходила c_e. При таких условиях мы максимизируем $\sum f_i$.

Классический вид задачи. Обозначим потоком функцию от пары вершин $f : V \times V \to \mathbb{R}$, на которую накладываются следующие требования:

1. $f(v,u) \leq c(v,u)$
2. $f(v,u) = -f(u,v)$
3. $\forall v \in V \setminus \{s,t\} : \sum\limits_u f(v,u) = 0$

Мы хотим максимизировать $|f| = \sum_u f(s,u) = \sum_u f(u,t)$.

Можно заметить, что можно определить сумму потоков $f_1 + f_2$, если выполняется пункт 1. Остальные свойства сохранятся.

Перевод из первой постановки задачи во вторую делается просто: вдоль каждого пути по прямым ребрам добавляем $+f_p$, а вдоль обратных ребер прибавляем $-f_p$. Тогда все три свойства выполнятся, и все хорошо.

Определим $e_v = \sum\limits_u f(v,u)$. Если мы выделим какое-то множество вершин, то поток, проходящий через множество равен сумме e_v. Можно заметить, что такое число это что-то из $\{0, |f|, -|f|\}$.

Ребро называется насыщенным если $f(v,u) = c(v,u)$. Остаточной пропускной способностью ребра $c*(v,u)$ назовем $(c-f)(v,u)$. Остаточной сетью назовем граф на множестве ребер, для которых $c*(v,u) \neq 0$.

Разрез. Это такое разбиение вершин на множества A и $\overline{A}$. Разрезы бывают ориентированные и неориентированные. В потоках мы почти всегда говорим про s/t-разрез — $s \in A$, $t \notin A$, стоимость разреза определяем как $\sum\limits_{v \in A} \sum\limits_{u \notin A} c(v,u)$.

Разрез называется насыщенным, если все его ребра насыщенные.

Декомпозиция потока. Поток можно представить в виде суммы $l \leq m$ элементарных потоков (то есть путей и циклов). Доказательство конструктивное: пока общий поток ненулевой, из s есть ребро, где $f > 0$. Проходя по нему, дальше тоже будет ребро с положительным потоком, итд. Получим путь $s \to t$, где можно уменьшить все f на минимальное из потоков по ребрам. Если встретили цикл, то уменьшаем цикл, и продолжаем. Поскольку каждый раз добавлялось одно ребро с $f = 0$, то всего мы выделим не более m элементарных потоков. В какой-то момент путей $s \to t$ не останется. Тогда в сети остались только циклы. Их можно выделить как элементарные потоки. Если нас интересует сведение второй постановки задачи к первой, то на циклы можно просто забить.

Размер декомпозиции можно оценить как $O(nm)$ — $O(m)$ итераций, и $O(n)$ вершин в элементарном потоке. Найти за это время декомпозицию тоже можно. Для этого надо хранить указатель на текущее интересное исходящее ребро для каждой вершины. Тогда наш указатель либо двигается вправо (суммарно $O(m)$), либо мы находим какой-то новый элементарный поток. То есть, каждый шаг декомпозиции работает за $O(n)$ переходов по ребру, и все сдвиги указателя суммарно работают за $O(m)$ по всем шагам декомпозиции, получаем сложность $O(nm)$.