

# Алгоритмы и структуры данных. Семинар 15.

## Запросы на отрезках, решаем задачи вместе.

1. Используя дерево отрезков, реализуйте структуру множество для небольшого диапазона возможных значений  $U$ . За время  $O(\log U)$  необходимо поддерживать стандартные операции insert, erase и lower\_bound.
2. Пусть дана последовательность  $a_1, a_2, \dots, a_n$ . Используя дерево отрезков, научитесь за время  $O(\log n)$  отвечать на следующие запросы:
  - Изменить значение  $i$ -го элемента на  $x$ .
  - По заданным числам  $p$  и  $x$ , найти минимальное  $i \geq p$ , такое что  $a_i \geq x$ .
3. Пусть дана последовательность  $a_1, a_2, \dots, a_n$ , все  $a_i \in \{0, 1\}$ . Предложите структуру данных за время  $O(\log n)$  выполняющую следующие две операции:
  - Присвоить  $a_i = x$  для данных  $i$  и  $x$ .
  - Найти отрезок максимальной длины, состоящий только из 1.
4. Дана табличка  $n \times n$ . Требуется придумать структуру со временем построения  $O(n^2 \log^2 n)$  и ответом на запрос минимума в прямоугольнике за  $O(1)$ .
5. Реализуйте структуру данных, поддерживающую за время  $O(\log n)$  выполнение следующих операций: запрос суммы на отрезке, прибавление линейной функции  $(a \cdot i + b)$  на отрезке.
6. Предложите, как с помощью структуры дерева отрезков выполнять следующие операции с последовательностью  $a_1, a_2, \dots, a_n$ :
  - Изменить значение  $i$ -го элемента на  $x$  за  $O(\log n)$ .
  - Узнать сумму всех чисел на отрезке с  $l$  по  $r$  за время  $O(\log(r - l + 1))$ .
7. Дана последовательность  $a_1, a_2, \dots, a_n$  и  $q$  двумерных запросов «сколько чисел в интервале от  $x$  до  $y$  находятся на отрезке с  $l$  по  $r$ ?». Считая, что все запросы даны заранее, найдите на них ответы за время  $O((n + q) \log n)$ , используя  $O(n + q)$  дополнительной памяти.
8. Дано  $n$  прямоугольников со сторонами, параллельными осям координат. Прямоугольники заданы целочисленными координатами своих углов. За время  $O(n \log n)$  найдите площадь их объединения.
9. Пусть вы решаете динамическую задачу о сумме на отрезке с запросами изменения в точке для очень большого массива, который хранится во внешней памяти. Предложите решение за время:
  - (a)  $O(\frac{n}{B})$  на построение и  $O(\frac{\log \frac{n}{M}}{\log B})$  на запрос;
  - (b)  $O(\frac{n}{B})$  на построение и  $O(\frac{n}{BM} + 1)$  на запрос амортизированно.