Алгоритмы и структуры данных. Вероятности и математическое ожидание, домашнее задание.

Артюхин С., Евстропов Г., Резников Г., Сендерович Н., Смирнов И., Фельдшеров С.
hse.algo@gmail.com

1. Петя и Вася играют в известную игру «Камень-ножницы-бумага». Игровой процесс состоит в одновременном выбрасывании одного из из трёх жестов и повторяется пока игроки не выбросят разные жесты. После этого в паре камень-ножницы выигрывает камень, в паре ножницы-бумага выигрывают ножницы, а в паре бумага-камень выигрывает бумага. Известно, что Петя выбрасывает Камень с вероятностью 0.1, ножницы с вероятностью 0.3 и бумагу с вероятностью 0.6. Для Васи аналогичные значения равны 0.5, 0.2 и 0.3 соответственно. Найдите вероятность победы каждого из игроков.

2. **Напишите псевдокод** процедуры *genRandomTriple(n, a, b, c)*, которая записывает в переменные a, b и c целые числа от 1 до n, так что $a < b < c$ и появление любой тройки равновероятно. Разрешается использовать функцию *genRandomInteger(l, r)*, которая возвращается случайное целое число от l до r включительно. Время работы вашего алгоритма должно быть гарантированным $O(1)$ (не матожидание).

3. Рассмотрим следующий алгоритм генерации случайной перестановки: начать с тождественной перестановки, зафиксировать число $iters$. Далее ровно $iters$ раз повторить следующее: выбрать случайную пару различных элементов и поменять их местами. Верно ли, что при стремлении параметра $iters$ к бесконечности, вероятность быть результатом работы алгоритма стремится к $\frac{1}{n!}$ для любой перестановки и любого значения iters (то есть выбрав достаточно большое значение iters можно быть уверенным в «почти равновероятности» всех перестановок)?

4. Придумайте (и докажите корректность) способ генерировать случайную точку на поверхности единичной трехмерной сферы с равномерным распределением. Считайте, что у вас есть способ генерировать равновероятно случайную точку на отрезке. Алгоритм должен иметь ожидаемое время работы $O(1)$.

5. Покажите, что математическое ожидание длины наибольшей возрастающей подпоследовательности случайной перестановки есть $\Omega(n^{0.5})$.

6. Имеется последовательность из n простых чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Числа **могут совпадать**. Помимо этого каждому числу сопоставлена вероятность быть выбранным $p_1, p_2, \ldots, p_n$. После того как для каждого числа определяется, возьмём мы его или нет, берётся произведение всех выбранных чисел (равно 1, если не выбрано ни одно число). Найдите математическое ожидание количества делителей получившегося числа. Время работы вашего алгоритма должно составлять $O(n \log n)$.

7. Пусть в некотором графе, состоящем из $n = |V|$ вершин, имеется k треугольников (циклов длины 3). Равновероятно выбирается некоторое $A \subset V$, найдите математическое ожидание количества треугольников, которые полностью лежат по одну сторону разреза, то есть либо целиков в A, либо целиком в $V - A$.

8. Дан следующий фрагмент кода:

```
void boo(int n) {
    if (n == 0)
        return;
    foo(rand(0, n - 1));
}

void foo(int n) {
    if (n == 0)
        return;
    for (int i = 0; i < n; i++)
        magic();
    int a = rand(0, n), b = rand(0, n);
    boo(n - min(a, b)), boo(max(a, b));
}
```

   (a) Докажите по индукции $O(n)$ оценку ожидаемого количества вызовов процедуры *magic()* при вызове *foo(n)*.

   (b) Покажите, что также справедлива и $\Omega(n)$ оценка на это количество вызовов.

9. Имеется двусторонняя честная (орёл и решка равновероятны) монета. Других источников случайности в задаче нет. Требуется описать как может быть устроена функция (не требуется писать псевдокод), которая для любого числа p возвращает 1 с вероятностью p и 0 с вероятностью $1 - p$. Считайте, что алгоритм может использовать с числом p арифметические и другие операции, но не должен обращаться к его внутреннему представлению.

   (a) С матожиданием числа подбрасываний монеты $O(1)$ (вне зависимости от p).

   (b) Показать, что не существует схемы с гарантированным числом подбрасываний монеты $O(1)$ для произвольного p.