На прошлой лекции мы показали, что паросочетание максимально $\Leftrightarrow$ для него не существует дополняющей цепи.

`Поиск максимального паросочетания`
Ориентируем ребра парсоча справа-налево, а остальные - слева-направо. Тогда каждой удлиняющей цепи соответствует путь из левой свободной вершины в правую свободную. Путь можно искать за линейное время, получаем ассимптотику поиска паросочетания за $O(nm)$ (поиск пути можно делать не больше n раз, так как в парсоче не больше n ребер).

`Алгоритм Куна`
Пробежимся по вершинам левой доли и попробуем найти удлиняющую цепь из текущей вершины.
Проблема: Если из какой-то вершины мы не смогли найти удлиняющую цепь, то потом можем найти.

1. Пусть $r(A) = \text{ max matching } (A, R), \text{ где } A \subset L$. $A_{i+1} = A_i \cup \{v_i\}, A_0 = \{v_0\}$. Докажем, что если $r(A_{i-1})$ найден алгоритмом Куна корректно, то и $r(A_i)$ будет найден корректно.
   Понятно, что $r(A_{i-1}) \leq r(A_i) \leq r(A_{i-1}) + 1$.
   (a) Если $r(A_{i-1}) = r(A_i)$, то $r(A_i)$ посчитается правильно
   (b) Если $r(A_{i-1}) + 1 = r(A_i)$. Пусть M_i для $r(A_i)$ и M_{i-1} - парсоч для A_{i-1}. Тогда рассмотрим симметрическую разность M_i и M_{i-1}. Наш получившийся граф разбился на пути и циклы, так как $|M_i| > |M_{i-1}|$, то есть удлиняющая цепь для M_{i-1}. Если ее конец не в v_i, то можем увеличить M_{i-1} - противоречие, значит есть удлиняющая цепь из v_i, а значит алгоритм Куна найдет ее и получит, что $r(A_i) = r(A_{i-1}) + 1$.
2. Если какая-то вершина стала покрыта в течение алгоритма куна, то она и останется покрытой.

Отсюда получем, что Кун находит лексикографически минимальный парсоч, то есть слева выбранные вершины будут лексикографически минимальными.

Теперь решим задачу: слева на вершинах есть неотрицательные веса, тогда хотим найти парсоч максимального веса (то есть максимизировать суммарный вес взятых вершин).
Переупорядочим вершины по весу, то есть туперь $w_1 \geq \ldots \geq w_n \geq 0$. Теперь запустим Куна на левой доли. Тогда получим оптимальный парсоч. Пусть $p_1 < \ldots < p_k$ - индексы 1 в этом числе, $p'_1 < \ldots < p'_k$ - индексы взятых вершин в ответе, посчитанном Куном, p'_i - индексы взятых вершин в оптимальном ответе. Тогда $\exists i : p'_i < p_i$, но тогда $r(A_i)$ Кун посчитал неправильно.

Теперь добавим вершины и для правой доли. $a : L \to \mathbb{R}_+, b : R \to \mathbb{R}_+, w(uv) = a(u) + b(v)$.
Пусть M_1 - парсоч, построенный предыдущим алгоритмом для левой доли, M_2 - для правой доли. Рассмотрим $M_1 \cup M_2$ (в оригинале симметрическую разность, но в объединении просто будут циклы длины 2). Тогда граф разбился на четные циклы и четные пути (иначе можно было увеличить парсоч). В циклах берем чередующиеся ребра (в том числе и циклах длины 2), в путях мы должны выбрать один из 2 концов, выбираем больший. Несложно понять, что полученный парсоч будем весом $w(M_1) + w(M_2)$.

`Теорема Кёнига` Размер максимального паросочетания в двудольном графе равен минимального вершинного покрытию.
Любое вершинное покрытие всегда не меньше любого паросочетания - на каждом ребре из парсоча должна быть хотя бы 1 вершина из вершинного покрытия.
Теперь предъявим какой-то парсоч равный какому-то вершинному покрытию. Ориентируем ребра парсоча справа-налево, а остальные - слева-направо. Запустим дфс из левой доли из вершин непокрытых паросочетанием ($L \backslash L(M)$, где $L(M)$ - множество покрытых вершин левой доли.) Тогда L^+ - множество вершин левой доли, до которых мы дошли, L^- - вершины левой доли. до которых не дошли, R^+ - вершины правой доли, до которых дошли, R^- - вершины правой доли, до которых не дошли. Тогда между L^+ и R^- нету ребер, так как там не может быть ребер не из парсоча (иначе можем дойти до R^- - ребра не из парсоча слева-направо), также не может быть ребер из парсоча, так как тогда конец этого ребра лежит в L^+ и покрыт, а значит мы туда попали, пройдя по этому ребру (так как у нас в каждую вершину левой доли может вести только ребро парсоча). (КЕК, УДАЧИ РЕБЯТА)
Тогда $L^- \cup R^+$ - вершинное покрытие. Все вершины L^- покрыты, так как все непокрытые сразу же в L^+, все вершины R^+ покрыты, так как иначе есть удлиняющая цепь, а парсоч макссимальный. Между L^- и R^+ не может быть ребер парсоча (справа налево), иначе можем дойти до L^-. Значит ребер парсоча хотя бы столько же, сколько

и вершин в вершинномм покрытии, то есть мы нашли парсоч, мощность которого равна мощности вершинного покрытия. Отюда получаем, чот $L^- \cup R^+$ - мин вершинное покрытие.
Отсюда $L^+ \cup R^-$ - максимальное независимое множество (как дополнение к мин вершинному покрытию).

`Задача 1` Есть ДАГ (ориентированный ациклический граф). Надо покрыть все его вершины минимальным количеством вершинно-непересекающимися путями.
Рассмотрим выбранные ребра M, тогда путей будет $n - |M|$. Значит нам надо выбрать максимальное количество ребер так, чтобы исходящая степень каждой вершины была не больше 1, и входящая степень была не больше 1. Тогда построим двудольный граф: в левой и правой доли - по n вершин, тогда если в изначальном графе было ребро из i в j, то проведем ребро из i левой доли в j правой доли (неориентированное). Тогда парсоч и есть множество ребер M.

`Задача 2` Теперь пути могут пересекаться. Рассмотрим транзитивное замыкание графа и решим предыдущую задачу. Тогда можно восстановить ответ из полученного (не успею немного дописать - там легко).

`Теорема Дилворта` Размер максимальной антицепи равен количеству цепей в минимальном разбиении на цепи. (Понятно, что граф транзитивно замкнут по определению частично упорядоченного множества)
Мы уже умеем разбивать ЧУМ (частично упорядоченное множество) на минимальное количество цепей (*Задача 1*). Научимся строить отсюда максимальную антицепь. Рассмотрим паросочетание M из *Задачи 1*. Тогда $|VC| = |M|$, $|IS| = 2n - d$ в двудольном графе. Возьмем вершины, обе копии которых (из левой и правой доли) попали в $IS = L^+ \cup R^-$. Тогда получим антицепь (так как вершины лежат в IS). Теперь докажем, что полученная антицепь максимальна. Для этого докажем, что наши выбранные вершины (обе копии которых в IS) НЕ лежат в мин VC. Предположим обратное, тогда пусть обе копии какой-то вершины v попали в $\min VC$. По построению мин VC обе копии v покрыты парсочем, а концы соответствующих ребер парсоча (a и b) не лежат в $minVC$. Но тогда $a \to v$, $v \to b$, но так как граф транзитивно замкнут, то $a \to b$, а значит это ребро не покрыто $minVC$, противоречие.