

**Splay tree.** Уже пройденные способы балансировки для  $BST$ , которые у нас были, это способы из ДД (четкая структура и ожидаемая глубина) и 2-3 дерева (гарантированная одинаковая глубина для всех вершин).

Новый способ балансировки — не напрягаться с балансированием лишней раз, и работать за амортизированное время.

Основной нашей операцией будет  $expose(v)$ , которая будет превращать вершину  $v$  в корень дерева. Условие  $BST$  на дереве сохраняется. Эта операция будет поддерживать два типа поворотов: левый и правый. Поворот вершины  $v$  возьмет ребро от  $v$  к предку  $u$ , и его «повернет» — если  $v$  было левым сыном  $u$ , то  $u$  станет правым сыном  $v$ . При этом правый сын  $v$  станет левым сыном  $u$ . Другой поворот делается симметрично. Вершина  $v$  станет ближе к корню дерева. Если применять повороты к  $v$ , пока можно, то в итоге  $v$  станет корнем.

$expose$  будет выполняться после каждой операции, и работать за высоту дерева. Более того, поскольку все остальное тоже работает за высоту дерева, то мы будем оценивать только  $expose$ .

Каждый раз делать повороты нельзя, потому что будет работать за долго. У нас будет три операции, которые будут поднимать нашу вершину:

- zig
- zig-zig
- zig-zag

**zig.** Самая тупая операция — если мы сын предка, то делаем поворот. Оставшиеся операции будут поднимать нас сразу на 2.

**zig-zig.** Если наш дедушка от нас находится справа-справа или слева-слева, то выполним сначала поворот предка, а потом себя.

**zig-zag.** Иначе мы сначала сделаем поворот себя, а потом поворот предка.

*Лучше порисовать картинки или погуглить визуализацию, потому что иначе будет очень непонятно, что сейчас произошло.*

Также можно выразить  $split$  и  $merge$  через предыдущие операции.

**Потенциал.** Введем  $\Phi(t) = \sum_{v \in t} rank(v) = \sum_{v \in t} \log_2 size(v)$ . Тогда стоимость  $expose$  это

$$\tilde{t}_e = t_e + \Phi(t') - \Phi(t) \leq 3(rank(root) - rank(v)) + 1$$

Воспользуемся  $rank(root) - rank(v) = (rank(root) - rank(u_1)) + (rank(u_1) - rank(u_2)) + \dots + (rank(u_n) - rank(v))$  и разложим  $expose$  на три операции, и покажем, что они тоже оплачиваются потенциалом.