

Формула оценки: **0.25 дз + 0.3 контест + 0.15 кр + 0.3 экзамен + Бонус**

Домашние задания: сдавать устно(раз в неделю ассисты устраивают доп пару, запись онлайн) или latex, дедлайн 10-21 день.

Контесты: Длинные(код ревью), короткие(раз в 2 недели), неточные, бонусные(идет к бонусу).
Штрафов нет.

Контрольные работы: раз в модуль, тестовые вопросы.

Бонусы: бонусные контесты, АСМ, работа на семинаре.

Материалы:

- Кормен
- en.wikipedia
- викиконспекты
- e-maxx
- КORTE-Фанен Комбинаторная оптимизация

Теория вероятности. $(\Omega, 2^\Omega, P)$ - вероятностная пространство.

$A \subset \Omega$, $P(A) = \sum_{w \in A} P(w)$.

Def: A, B - события, $P(B) > 0$. $\mathbf{P(A|B)}$ - вероятность события A , если наступило событие B . Тогда

$$P(A|B) = \frac{\sum_{w \in A \cap B} P(w)}{\sum_{w \in B} P(w)} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Def: A и B независимые, если $P(A|B) = P(A)$.

Тогда, если A и B независимые, то $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

$\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ - случайная величина. $\xi(w)$ - значение, $w \in \Omega$.

Пример: Есть 5 марок автомобиля, их стоимости и их количества. А - 1000 - 100; В - 2000 - 5; С - 3000 - 5; D - 2000 - 20; Е - 1500 - 30; Тогда нас интересуют $P(\xi = 1000) = \frac{100}{160}, P(\xi = 1500) = \frac{30}{160}, P(\xi = 2000) = \frac{25}{160}, P(\xi = 3000) = \frac{5}{160}$.

Матожидание $E(\xi) = \sum_{w \in \Omega} \xi(w) \cdot P(w) = \sum_x x \cdot P(\xi = x)$.

Индикаторная случайная величина: $I_A = \begin{cases} 1, w \in A \\ 0, w \notin A \end{cases}$ Тогда $E(I_A) = P(A)$.

Пусть есть 2 случайной величины ξ_1 и ξ_2 . Тогда $E(\alpha\xi_1 + \beta\xi_2) = \alpha E(\xi_1) + \beta E(\xi_2)$.
 $E(\alpha\xi_1 + \beta\xi_2) = \sum_{w \in \Omega} (\alpha\xi_1(w) \cdot P(w) + \beta\xi_2(w) \cdot P(w)) = \alpha \sum_{w \in \Omega} \xi_1(w) \cdot P(w) + \beta \sum_{w \in \Omega} \xi_2(w) \cdot P(w) = \alpha E(\xi_1) + \beta E(\xi_2)$

Две случайные величины называются независимые, если $\forall x, y : P(\xi_1 = x \text{ и } \xi_2 = y) = P(\xi_1 = x) \cdot P(\xi_2 = y)$.
 n случайных величин называются попарно независимыми, если любые 2 величины независимы.
независимы в совокупности - см семинар

ξ_1 и ξ_2 - случайные независимые величины. Тогда $E(\xi_1\xi_2) = E(\xi_1)E(\xi_2)$.
 $E(\xi_1\xi_2) = \sum_{w \in \Omega} \xi_1(w)\xi_2(w)P(w) = \sum_x x \cdot P(\xi_1\xi_2 = x) = \sum_{(u,v)} uv \cdot P(\xi_1 = u \text{ и } \xi_2 = v) = [\xi_1 \text{ и } \xi_2 \text{ независимы}] = \sum_{(u,v)} uv \cdot P(\xi_1 = u) \cdot P(\xi_2 = v) = (\sum_u u \cdot P(\xi_1 = u)) \cdot (\sum_v v \cdot P(\xi_2 = v)) = E(\xi_1)E(\xi_2)$.

Задача о назначениях. Есть n работников и n работ. Есть таблица, где a_{ij} - сколько i -ый работник берет за j -ую работу. Нужно распределить работников по работам так, чтобы суммарная плата за все работы была минимальна. Оценим матожидание затрат при случайном решении. A_{ij} - событие, когда i -ый работник делает j -ую работу. $\xi = \sum_{(i,j)} I_{A_{ij}} \cdot a_{ij}$. Тогда $E(\xi) = \sum_{(i,j)} E(I_{A_{ij}}) = \sum_{(i,j)} a_{ij} P(A_{ij}) = \sum_{(i,j)} a_{ij} \cdot \frac{1}{n}$.

Найти максимальный разрез в неориентированном невзвешанном графе.

Будем строить случайный разрез (каждую вершину либо в A , либо в \bar{A}). Тогда ξ - величина нашего разреза. $\xi = \sum_{e \in E(G)} I_{B_e}$, где B_e - событие, когда e лежит в разрезе. $P(e \in \text{разрез}) = \frac{1}{2}$. Тогда $E(\xi) = E(\sum_{e \in E(G)} I_{B_e}) = \sum E(I) = \frac{1}{2} |E(G)|$.

Есть перестановка $p_1 \dots p_n$. Алгоритм жадно набирает возрастающую подпоследовательность. Какое матожидание длины этой подпоследовательности?
Событие A_i - алгоритм возьмет p_i . $E(\xi) = E(\sum I_{A_i}) = \sum P(A_i)$. $P(A_i) = P(\forall j < i : p_j < p_i) = \frac{1}{i}$. Тогда $E(\xi) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} = \Theta(\log n)$.

Дисперсия $D(\xi) = \sum_{w \in \Omega} P(w)(\xi(w) - E(\xi))^2$.

Свойства:

- $D(\xi_1 + \xi_2) = D(\xi_1) + D(\xi_2)$, ξ_1 и ξ_2 независимы
- $D(\lambda\xi_1) = \lambda^2 D(\xi_1)$

Неравенство Маркова. $\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_+$. $P(\xi(w) \geq E(\xi) \cdot k) \leq \frac{1}{k}$.

Неравенство Чебышева. $\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. $P(|\xi - E(\xi)| \leq \alpha) \leq \frac{D(\xi)}{\alpha^2}$.

Модели

RAM-модель (Random Access Machine) Вопросы, возникающие при создании модели

1. адресация
2. какие инструкции
3. рекурсия
4. где лежат инструкции
5. размер данных
6. кол-во памяти
7. случайность

Адресация Есть ячейки, в которых можно хранить целые числа (ограничения на $MAXC$ разумные, и на них введена неявная адресация

Замечание. Явная адресация — при создании элемента получаем адрес и можем пользоваться только этим адресом. Неявно — можем получать адреса каким-то своим образом, к примеру, $ptr + 20$.

Кол-во памяти Неявное соглашение RAM — время работы не меньше памяти. По дефолту считаем, что мы его инициализируем мусором

Где инструкции Хранить инструкции можно в памяти и где-то снаружи. Мы будем хранить снаружи (внутри — RASP-модель). Иначе говоря, инструкции и данные отделены.

Какие инструкции В нашей модели есть инструкции следующих типов:

- работа с памятью
- ветвление
- передача управления ($=goto$),
- арифметика (at least $a + b, a - b, \frac{a}{b}, \cdot, mod, \lfloor \frac{a}{b} \rfloor$)
- сравнения (at least $a < b, a > b, a \leq b, a \geq b, a = b, a \neq b$)
- логические (at least $\wedge, \vee, \oplus, \neg$)
- битовые операции ($>>, <<, \&, |, \sim, \oplus$)
- математические функции (опять-таки, в рамках разумного)
- rand

Все инструкции работают от конечного разумного числа операндов (не умеем в векторные операции)

Размер данных $\exists C, k : C \cdot A^k \cdot n^k$ — верхнее ограничение на величины промежуточных вычислений.

Рекурсия Рекурсия всегда линейна по памяти относительно глубины.

Случайность Мы считаем, что у нас есть абсолютно случайная функция. Будем полагать, что у нас есть источник энтропии, выдающий случайности в промежутке $[0, 1]$.

Время работы.

- наихудшее — $t = \max_{input, random} t(input, random)$
- наилучшее — $t = \max_{input} \min_{random} t(input, random)$
- ожидаемое — $E t = \max_{input} Average_{random} t(input, random)$
- на случайных данных — $t = Average_{input} Average_{random} t(input, random)$

Алгоритмы

Методы доказательства корректности алгоритма.

1. индукция
2. инвариант
3. от противного

Способы оценки времени работы:

- Прямой учет
- Рекурсивная оценка
- Амортизационный анализ

Прямой учет Время работы строки — произведение верхних оценок по всем строчкам-предкам нашей.

К примеру

```
while (!is_sorted()) { // O(# inversions) = O(n^2)
    for (int i = 0; i + 1 < n; i++) { // O(n) * O(parent) = O(n^3)
        if (a[i] > a[i + 1]) {
            swap(a[i], a[i + 1]); // O(n^3)
        }
    }
}
```

Рекурсивная оценка Пример — сортировка слиянием

Нас интересует две вещи: инвариант и переход. Для оценки времени используем рекурренту вида

$$T(n) = O(f(n)) + \sum_{n' \in \text{calls}} T(n')$$

При этом если мы доказываем время работы, то показываем $T(n) \leq c \cdot f(n)$, зная, что для n' $\exists c : T(n') \leq c \cdot f(n)$

Важно, что c глобальное и не должно увеличиваться в ходе доказательства

stable sort Делает сортировку, не меняя порядок равных элементов относительно исходной последовательности. Merge-sort стабилен.

inplace-algorithm Не требует дополнительной памяти и делает все прямо на данной памяти (у нас есть $\log n$ памяти на рекурсию). Quick-sort inplace.

Время работы qsort

$$T(n) = \max_{\text{input}} \text{average}_{\text{rand}} t(\text{input}, \text{rand}) = \max_{|\text{input}|=n} Et(\text{input})$$

$$\begin{aligned} T(n) &\leq \Theta(n) + \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (T(k+1) + T(n-k)) \leq \Theta(n) + \frac{2}{n} \cdot \sum_{k=1}^n T(k-1) \leq a \cdot n + \frac{2}{n} \sum_{k=1}^n c \cdot (k-1) \cdot \log(k-1) \leq \\ &\leq a \cdot n + \frac{2}{n} \sum_{k=1}^{\frac{n}{2}} c \cdot (k-1) \cdot \log n - \frac{2}{n} \sum_{k=1}^{\frac{n}{2}} c \cdot (k-1) + \frac{2}{n} \sum_{k=\frac{n}{2}+1}^n c \cdot (k-1) \cdot \log n \leq \\ &\leq a \cdot n + \frac{2}{n} \cdot n^2 \cdot \log n - \frac{2c}{n} \cdot \frac{(n-2)^2}{4} \leq a \cdot n + cn \log n - \frac{c(n-2)}{4} \leq cn \log n \end{aligned}$$

$$\frac{c(n-2)}{4} \geq a \cdot n$$

$$c \cdot n - 2c \geq 4 \cdot a \cdot n$$

$$c \geq \frac{4 \cdot a \cdot n}{(n-2)}$$

, что верно для достаточно больших n .

Ограничение на число сравнений в сортировке Бинарные сравнения на меньше.

Рассмотрим дерево переходов. Для перестановки есть хотя бы один лист — листьев хотя бы $n!$

$$L(T) \leq 2^x, d(T) \leq x$$

, если x — ответ

$$L(T) \geq n!$$

$$d(T) \geq \log n! \geq \log \frac{n^{\frac{n}{2}}}{2} = \log 2^{(\log \frac{n}{2}) \cdot \frac{n}{2}} = \frac{n}{2} \cdot \log \frac{n}{2} = \Omega(n \log n)$$

1 Сортировки основанные на внутреннем виде данных

Имеем n чисел $[0, U - 1]$, $U = 2^w$, числа укладываются в RAM-модель

Сортировка подсчетом Заводим массив $cnt[U]$, $cnt[x] = |\{i : a_i = x\}|$. Далее переводим $count \rightarrow pref$, $pref[x] = pref[x - 1] + count[x]$
 $O(n + U)$

Поразрядная сортировка b_{ij} — j -й бит i -го числа. (Сортируем бинарные строки длины w)

Поочередно сортируем строки, разбивая их на классы эквивалентности по 2^{iter} последним символам. После чего мы стабильно сортируем по $(iter + 1)$ -му символу.

$$O(\log_n U n)$$

Bucket sort Разбиваем множество на корзины, каждой корзине соответствует отрезок. В каждой корзине запускаемся рекурсивно.

$$O(n \log U)$$

В продакшне используют первую пару итераций, чтобы сильно снизить размерность на реальных данных.

Пусть мы хотим отсортировать равновероятные числа из $[0, 1]$. В каждом бакете отсортируем за квадрат. Получим $O(n)$.

$$\begin{aligned} t(n) &\leq \sum_{i=1}^n c \cdot (1 + E(cnt_i)^2) \leq c \cdot n + c \cdot \sum_{i=1}^n E(cnt_i^2) = \\ &= c \cdot n + c \cdot \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n EI_{A_{ij}} = c \cdot n + c \cdot n^2 \cdot \frac{1}{n} \leq 2 \cdot c \cdot n \end{aligned}$$

2 Иерархия памяти

Нас интересует задержка (latency), пропускная способность (throughput). Подгрузка x данных занимает $l + \frac{x}{t}$

От долгой к быстрой

1. external machine / internet
2. HDD
3. SSD
4. RAM
5. L3
6. L2
7. L1
8. registers

3 Алгоритмы во внешней памяти

n — размер задачи

M — размер *RAM*

B — блок данных

$B \ll M \ll n$

$\log n \ll B$

$B < \sqrt{M}$ (но это неявно и не факт)

Mergesort во внешней памяти Обычный mergesort, но три типа событий в *merge*:

1. Кончился первый буфер — подгружаем новый
2. Кончился второй — аналогично
3. Кончился буфер для слияния — выписываем обратно в RAM и сбрасываем

$$O\left(\frac{n}{B} \log n\right) \rightarrow O\left(\frac{n}{B} \log \frac{n}{B}\right) \rightarrow O\left(\frac{n}{B} \log_{\frac{M}{B}} \frac{n}{B}\right)$$

+2 идеи:

1. Дошли до размера M — явно посортим в RAM
2. Можем сливать сразу $\frac{M}{B}$ массивов

1 Простые структуры данных

Требования к структуре данных:

- От СД мы хотим обработку каких-то наших запросов.
- online-offline. Бывает, что мы знаем все запросы, бывает, что мы узнаем запрос только тогда, когда отвечаем на предыдущий
- При обсуждении времени работы отделяется время на препроцессинг и на последующие ответы на запросы (query).

1.1 Data structure / interface

Структура данных — это какой-то математический объект, который умеет отвечать на наши запросы конкретным способом. Красно-черное дерево — это структура данных.

Интерфейс — это объект, с которым может взаимодействовать пользователь, который каким-то образом умеет отвечать на наши запросы (пользователю все равно, как, его волнует только то, что интерфейс реализует, и за какое время(память) он это делает). $std :: set$ — это интерфейс.

Итератор — это специальный объект, отвечающий непосредственно за ячейку в структуре данных. Для того, чтобы удалить элемент, мы должны иметь итератор на этот элемент. Т.е. удаление по ключу работает за $O(erase)$, а удаление по значению за $O(find) + O(erase)$

list Списки бывают двусвязными, односвязными, циклическими. У каждого элемента есть ссылка на следующий (и иногда на предыдущий), а также есть отдельный глобальный указатель на начало списка.

stack Стек — структура данных, которая умеет делать добавление в конец, удаление из конца, взятие последнего элемента, за $O(1)$.

queue Очередь — структура данных, которая умеет делать добавление в конец, удаление из начала, взятие первого элемента, за $O(1)$.

deque Двусторонняя очередь — структура данных, которая умеет делать добавление, удаление и взятие элемента с любого конца последовательности, за $O(1)$.

priority_queue Очередь с приоритетами ака куча — структура данных, которая умеет делать добавление, удаление, и быстрые операции с минимумом, представляющая из себя дерево с условием $parent(u) = v \rightarrow value(v) \leq value(u)$.

Все эти структуры реализуются как на массиве (храним последовательную память и указатели на начало/конец), так и на списках (что на самом деле является тем же самым, что и на массиве, просто ссылка вперед эквивалентна $a_i \rightarrow a_{i+1}$ в терминологии массивов, *прим. автора*).

Структура данных на массиве кратно быстрее аналогичной на ссылках, потому что массив проходит по кэшу и не требует дополнительной памяти.

data structure	add	delete	pop	find	top	build	min	get by index
stack	$O(1)$	-	$O(1)$	-	$O(1)$	$O(n)$	$O(n)$	-
dynamic array	$O(1)$	$O(n)$	$O(1)$	$O(n)$	$O(1)$	$O(n)$	$O(n)$	$O(1)$
queue	$O(1)$	-	$O(1)$	-	$O(1)$	$O(n)$	$O(n)$	-
deque	$O(1)$	-	$O(1)$	-	$O(1)$	$O(n)$	$O(n)$	-
linked list	$O(1)$	$O(1)$	$O(1)$	$O(n)$	$O(1)$	$O(n)$	$O(n)$	$O(n)$
sorted array	$O(n)$	$O(n)$	$O(1)$	$O(\log n)$	$O(1)$	$O(n \log n)$	$O(1)$	$O(1)$
priority_queue	$O(\log n)$	$O(\log n)$	$O(\log n)$	$O(1)$	$O(n)$	$O(1)$	-	

1.2 Двоичная куча

Реализация двоичной кучи на массиве — создаем массив размера sz , и создаем ребра $i \rightarrow 2 \cdot i$, $i \rightarrow 2 \cdot i + 1$.

От такой кучи мы хотим:

- `insert(x)`
- `get_min()`
- `extract_min()`
- `erase`
- `change = {decrease_key, increase_key}`

Для такой кучи мы реализуем *sift_up(x)*, *sift_down(x)* — просеивание вниз и вверх. Процедура должна устранить конфликты с элементом x . Остальные операции умеют реализовываться через нее.

$$insert = add_leaf + sift_up$$

$$extract_min = swap(root, last) + last - 1 + sift_down(root)$$

$$erase = decrease_key(-\infty) + extract_min$$

Отдельно отметим построение кучи за $O(n)$ — *sift_down* поочередно для всех элементов $n, n - 1, \dots, 1$.

```
void sift_up(int v) { // v >> 1 <=> v / 2
    if (key[v] < key[v >> 1]) {
        swap(key[v], key[v >> 1]);
        sift_up(v >> 1);
    }
}

void sift_down(int v, int size) { // indexes [1, size]
    if (2 * v > size) {
        return;
    }
    int left = 2 * v;
    int right = 2 * v + 1;
    int argmin = v;
```

```
    if (key[v] > key[left]) {
        argmin = left;
    }
    if (right <= size && key[right] < key[argmin]) {
        argmin = right;
    }
    if (argmin == v) {
        return;
    }
    swap(key[v], key[argmin]);
    sift_down(argmin, size);
}
```

Какое-то сегодняшнее дополнение про бинарную кучу есть в прошлом конспекте

К-чная куча Куча на полном К-чном дереве. Эту кучу можно так же хранить в массиве, с 0-индексацией.

- *sift_up* такой же, $O(\log_k n)$
- *sift_down* ищет минимум среди k элементов на каждом шаге, поэтому работает за $O(k \cdot \log_k n)$.

	$2 - heap$	$k - heap$
<i>insert</i>	$O(\log n)$	$O(k \log_k n)$
<i>extract_min</i>	$O(\log n)$	$O(k \log_k n)$
<i>decreasekey</i>	$O(\log n)$	$O(\log_k n)$
<i>increasekey</i>	$O(\log n)$	$O(k \log_k n)$

Дейкстра на К-ной куче Алгоритм Дейкстры достает минимум n раз, и улучшает ключ m раз

$$a \cdot \log_k n = b \cdot k \cdot \log_k n, a = m, b = n$$

Отсюда $k = \frac{a}{b} = \frac{m}{n}$ в случае Дейкстры. Еще отметим, что $k \geq 2$.

В случае когда $a = b^q$, $q > 1$, то k -куча структура работает за $O(1)$ (вроде бы этот факт мы докажем в домашке), причем с хорошей константой, поэтому применимо на практике (привет, фибоначчиева куча!).

Амортизационный анализ Идея в том, что мы хотим оценить суммарное число операций, а не на каждом шаге работы. То есть вполне может быть итерация алгоритма за $O(n)$, но нам важно, что суммарное число $O(n \log n)$

Так что есть $t_{real} = t$, $t_{amortized} = \tilde{t}$.

Метод кредитов Элементам структуры сопоставляем сколько-то монет. Этими монетами элемент «расплачивается» за операции. Также мы накидываем сколько-то монет на операцию. Запрещаем отрицательное число монет. Начинаем с нулем везде.

Обозначим состояния структуры за S_0, S_1, \dots, S_n . Каждый переход стоил t_i , $t_i \geq |operations|$, где t_i — это сколько мы потратили. Также на i -м шаге мы вбрасываем в систему \tilde{t}_i монет. Тогда

$$\sum t_i \leq \sum \tilde{t}_i \leq A \rightarrow O(A)$$

Стек с минимумом

- *min_stack*
- push
- pop
- *get_min*

$m_i = \min(m_{i-1}, a_i)$ — поддерживаем минимумы. Операции тривиальны

Очередь с минимумом на двух стеках Храним два стека с минимумом, один из которых мысленно наращиваем в одну сторону, а другой в другую, при этом очередь выглядит как бы как склеенные стеки. То есть мы добавляем элемент в первый стек, а извлекать хотим из второго.

$$X \rightarrow a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, \mid, b_1, b_2, \dots, b_n \rightarrow Y$$

Тогда единственная сложная операция — если мы хотим извлечь минимум, а второй стек пустой. Тогда мы все элементы из первого перекинем во второй по очереди с помощью «извлеки-добавь»

Почему это работает за $O(1)$ на операцию амортизированно? Представим каждому элементу при рождении 2 монеты, одну из которых мы потратим на добавление в первый стек, а вторую на удаление через второй.

set для бедных Хотим не делать *erase*, только *insert*, *find*, *get_min*. Храним $\log n$ массивов, $|a_i| = 2^i$, каждый из которых по инварианту будет отсортирован. Тогда *get_min* работает за $O(\log n)$ — просто берем минимум по всем массивам. Аналогично *find* делается бинарными поисками за $O(\log^2 n)$

А как добавлять за $\tilde{O}(\log n)$? Каждый элемент при добавлении в структуру получает $\log n$ монет. Когда мы добавляем элемент, мы создаем новый массив ранга 0. Если было два массива ранга 0, сольем их в новый массив ранга 1 за суммарный размер (и заберем монетку у всех элементов во время слияния), и так далее, пока не создадим уникальный массив для текущего ранга.

Метод потенциалов $\Phi(S_i)$ — потенциал, который зависит только от состояния структуры (**не от** последовательности действий, которая к такому состоянию привела).

Опять вводим t_i , $\sum t_i = O(f(n))$. Определим амортизированное время работы:

$$\tilde{t}_i = t_i + (\Phi(S_{i+1}) - \Phi(S_i))$$

$$t_i = \tilde{t}_i + \Phi(S_i) - \Phi(S_{i+1})$$

Пусть мы показали $\tilde{t}_i \leq f(n)$. Тогда

$$\sum t_i \leq n \cdot f(n) + \Phi(0) - \Phi(n)$$

Нормальный потенциал — такой, что из неравенства выше все еще можно показать O-оценку на $\sum t_i = O(n \cdot f(n))$.

deque для богатых Хотим deque с поддержкой минимума.

Храним два стека как для обычной очереди. Все операции хорошо работают как на очереди, кроме перестройки структуры. В случае с очередью надо было переливать стеки только в одну сторону, а теперь иногда нужно туда-сюда.

Теперь мы будем перекидывать только половину элементов. Тогда нам понадобится 3 стека, один из которых будет вспомогательным для перестройки (там иначе стеки развернуты).

$$\Phi(S_i) = |Size_1 - Size_2|$$