

На прошлой лекции мы показали, что паросочетание максимально  $\Leftrightarrow$  для него не существует дополняющей цепи.

### Поиск максимального паросочетания

Ориентируем ребра парсоча справа-налево, а остальные - слева-направо. Тогда каждой удлиняющей цепи соответствует путь из левой свободной вершины в правую свободную. Путь можно искать за линейное время, получаем асимптотику поиска паросочетания за  $O(nm)$  (поиск пути можно делать не больше  $n$  раз, так как в парсоче не больше  $n$  ребер).

### Алгоритм Куна

Пробежимся по вершинам левой доли и попробуем найти удлиняющую цепь из текущей вершины.

*Проблема:* Если из какой-то вершины мы не смогли найти удлиняющую цепь, то потом можем найти.

1. Пусть  $r(A) = \max \text{matching}(A, R)$ , где  $A \subset L$ .  $A_{i+1} = A_i \cup \{v_i\}$ ,  $A_0 = \{v_0\}$ . Докажем, что если  $r(A_{i-1})$  найден алгоритмом Куна корректно, то и  $r(A_i)$  будет найден корректно.

Понятно, что  $r(A_{i-1}) \leq r(A_i) \leq r(A_{i-1}) + 1$ .

(a) Если  $r(A_{i-1}) = r(A_i)$ , то  $r(A_i)$  посчитается правильно

(b) Если  $r(A_{i-1}) + 1 = r(A_i)$ . Пусть  $M_i$  для  $r(A_i)$  и  $M_{i-1}$  - парсоч для  $A_{i-1}$ . Тогда рассмотрим симметрическую разность  $M_i$  и  $M_{i-1}$ . Наш получившийся граф разбился на пути и циклы, так как  $|M_i| > |M_{i-1}|$ , то есть удлиняющая цепь для  $M_{i-1}$ . Если ее конец не в  $v_i$ , то можем увеличить  $M_{i-1}$  - противоречие, значит есть удлиняющая цепь из  $v_i$ , а значит алгоритм Куна найдет ее и получит, что  $r(A_i) = r(A_{i-1}) + 1$ .

2. Если какая-то вершина стала покрыта в течение алгоритма Куна, то она и останется покрытой.

Отсюда получаем, что Кун находит лексикографически минимальный парсоч, то есть слева выбранные вершины будут лексикографически минимальными.

Теперь решим задачу: слева на вершинах есть неотрицательные веса, тогда хотим найти парсоч максимального веса (то есть максимизировать суммарный вес взятых вершин).

Переупорядочим вершины по весу, то есть теперь  $w_1 \geq \dots \geq w_n \geq 0$ . Теперь запустим Куна на левой доли. Тогда получим оптимальный парсоч. Пусть  $p_1 < \dots < p_k$  - индексы 1 в этом числе,  $p'_1 < \dots < p'_k$  - индексы взятых вершин в ответе, посчитанном Куном,  $p'_i$  - индексы взятых вершин в оптимальном ответе. Тогда  $\exists i : p'_i < p_i$ , но тогда  $r(A_i)$  Кун посчитал неправильно.

Теперь добавим вершины и для правой доли.  $a : L \rightarrow \mathbb{R}_+$ ,  $b : R \rightarrow \mathbb{R}_+$ ,  $w(uv) = a(u) + b(v)$ .

Пусть  $M_1$  - парсоч, построенный предыдущим алгоритмом для левой доли,  $M_2$  - для правой доли. Рассмотрим  $M_1 \cup M_2$  (в оригинале симметрическую разность, но в объединении просто будут циклы длины 2). Тогда граф разбился на четные циклы и четные пути (иначе можно было увеличить парсоч). В циклах берем чередующиеся ребра (в том числе и циклах длины 2), в путях мы должны выбрать один из 2 концов, выбираем больший. Несложно понять, что полученный парсоч будем весом  $w(M_1) + w(M_2)$ .

**Теорема Кёнига** Размер максимального паросочетания в двудольном графе равен минимального вершинного покрытия.

*Любое вершинное покрытие всегда не меньше любого паросочетания* - на каждом ребре из парсоча должна быть хотя бы 1 вершина из вершинного покрытия.

Теперь предъявим какой-то парсоч равный какому-то вершинному покрытию. Ориентируем ребра парсоча справа-налево, а остальные - слева-направо. Запустим dfs из левой доли из вершин непокрытых паросочетанием ( $L \setminus L(M)$ , где  $L(M)$  - множество покрытых вершин левой доли.) Тогда  $L^+$  - множество вершин левой доли, до которых мы дошли,  $L^-$  - вершины левой доли, до которых не дошли,  $R^+$  - вершины правой доли, до которых дошли,  $R^-$  - вершины правой доли, до которых не дошли. Тогда между  $L^+$  и  $R^-$  нету ребер, так как там не может быть ребер не из парсоча (иначе можем дойти до  $R^-$  - ребра не из парсоча слева-направо), также не может быть ребер из парсоча, так как тогда конец этого ребра лежит в  $L^+$  и покрыт, а значит мы туда попали, пройдя по этому ребру (так как у нас в каждую вершину левой доли может вести только ребро парсоча). (КЕК, УДАЧИ РЕБЯТА)

Тогда  $L^- \cup R^+$  - вершинное покрытие. Все вершины  $L^-$  покрыты, так как все непокрытые сразу же в  $L^+$ , все вершины  $R^+$  покрыты, так как иначе есть удлиняющая цепь, а парсоч максимальный. Между  $L^-$  и  $R^+$  не может быть ребер парсоча (справа налево), иначе можем дойти до  $L^-$ . Значит ребер парсоча хотя бы столько же, сколько

и вершин в вершинном покрытии, то есть мы нашли парсоч, мощность которого равна мощности вершинного покрытия. Отсюда получаем, что  $L^- \cup R^+$  - мин вершинное покрытие.

Отсюда  $L^+ \cup R^-$  - максимальное независимое множество (как дополнение к мин вершинному покрытию).

**Задача 1** Есть ДАГ (ориентированный ациклический граф). Надо покрыть все его вершины минимальным количеством вершинно-непересекающимися путями.

Рассмотрим выбранные ребра  $M$ , тогда путей будет  $n - |M|$ . Значит нам надо выбрать максимальное количество ребер так, чтобы исходящая степень каждой вершины была не больше 1, и входящая степень была не больше 1. Тогда построим двудольный граф: в левой и правой доли - по  $n$  вершин, тогда если в изначальном графе было ребро из  $i$  в  $j$ , то проведем ребро из  $i$  левой доли в  $j$  правой доли (неориентированное). Тогда парсоч и есть множество ребер  $M$ .

**Задача 2** Теперь пути могут пересекаться. Рассмотрим транзитивное замыкание графа и решим предыдущую задачу. Тогда можно восстановить ответ из полученного (не успею немного дописать - там легко).

**Теорема Дилворта** Размер максимальной антицепи равен количеству цепей в минимальном разбиении на цепи. (Понятно, что граф транзитивно замкнут по определению частично упорядоченного множества)

Мы уже умеем разбивать ЧУМ (частично упорядоченное множество) на минимальное количество цепей (*Задача 1*). Научимся строить отсюда максимальную антицепь. Рассмотрим паросочетание  $M$  из *Задачи 1*. Тогда  $|VC| = |M|$ ,  $|IS| = 2n - d$  в двудольном графе. Возьмем вершины, обе копии которых (из левой и правой доли) попали в  $IS = L^+ \cup R^-$ . Тогда получим антицепь (так как вершины лежат в  $IS$ ). Теперь докажем, что полученная антицепь максимальна. Для этого докажем, что наши выбранные вершины (обе копии которых в  $IS$ ) НЕ лежат в мин  $VC$ . Предположим обратное, тогда пусть обе копии какой-то вершины  $v$  попали в  $\min VC$ . По построению мин  $VC$  обе копии  $v$  покрыты парсочем, а концы соответствующих ребер парсоча ( $a$  и  $b$ ) не лежат в  $\min VC$ . Но тогда  $a \rightarrow v$ ,  $v \rightarrow b$ , но так как граф транзитивно замкнут, то  $a \rightarrow b$ , а значит это ребро не покрыто  $\min VC$ , противоречие.