

Больше куч!

	<i>binaryheap</i>	<i>binomialheap</i>	<i>fibonacciheap</i>
<i>insert</i>	$O(\log n)$	$O(\log n)$	$O(1)$
<i>extract_min</i>	$O(\log n)$	$O(\log n)$	$\tilde{O}(\log n)$
<i>decrease_key</i>	$O(\log n)$	$O(\log n)$	$\tilde{O}(1)$
<i>increase_key</i>	$O(\log n)$	$O(\log n)$	$\tilde{O}(\log n)$
<i>merge</i>	$\tilde{O}(\log^2 n)$	$O(\log n)$	$O(1)$
<i>get_min</i>	$O(\log n)$ or $O(1)$	$O(1)$	

Биномиальная куча

Храним биномиальные деревья. Каждому дереву сопоставим ранг. Ранг дерева полностью определяет его структуру. Дерево ранга 0 — одна вершина. Дерево ранга 1 — одно ребро. В общем случае, дерево ранга n содержит корень и полное двоичное дерево размера 2^{n-1} . Дерево ранга $n+1$ — это два слитых вместе дерева ранга n — корень второго указывает на корень первого, а корень первого теперь будет указывать на оба бинарных дерева.

Биномиальная куча — это набор из логарифма биномиальных куч.

Слияние двух деревьев мы научились делать за $O(1)$ — меньшая вершина по ключу становится новым корнем, а дальше перекидываем указатели.

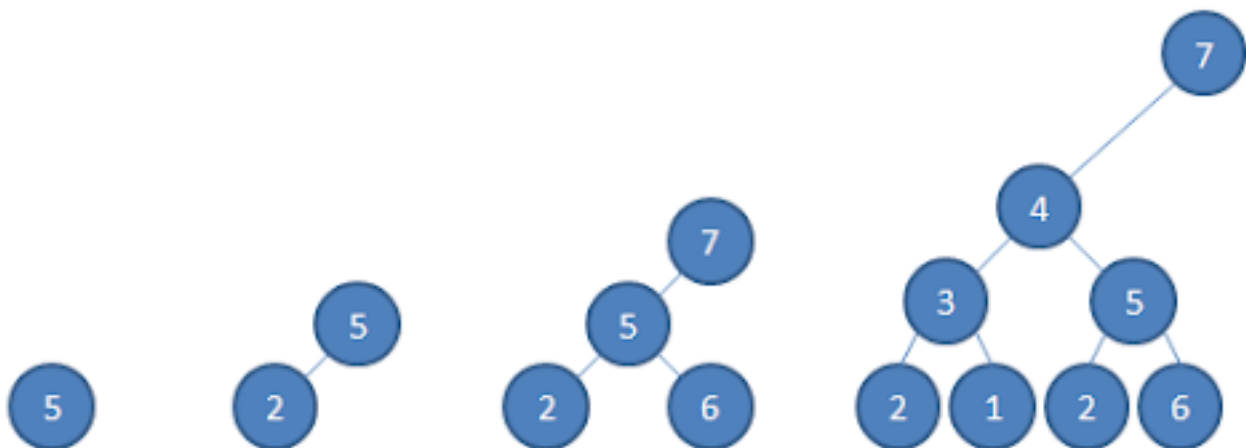
Слияние двух куч — это алгоритм сложения двоичных чисел — при сливании двух деревьев ранга n мы «переносим» прибавление кучи ранга $n+1$

Как добавлять элемент? Создать кучу на 0 элементов и слить их вместе.

Уменьшение ключа — напомним *sift_up* на нашей новой куче

Удаление минимума — Заметим, что если в правом дереве пройти по правым детям и обозначим их за корни, а их левых детей за полные бинарные деревья, то мы получим набор деревьев рангов $0, 1, \dots, n-1$. Обозначим их за новую кучу, и сольем все вместе.

Увеличение ключа — удалим соответствующий элемент и добавим другой.



Фибоначчиева куча

Хотим сделать биномиальную кучу с послаблениями — делать операции в самый последний момент, менее четкую структуру, etc

Есть деревья, их корни храним в двусвязном закольцованном списке.

Всех детей для всех вершин храним в двусвязном закольцованном списке.

Новый ранг — это количество вершин в списке детей.

На каждом дереве выполнена куча, а также поддерживаем глобальный минимум.

Улучшение ключа делается так — удаляем вершину из своего списка, вместе с поддеревом. Добавляем в корневой список. Если мы удалили уже вторую вершину в поддереве родителя, то делаем каскадное вырезание — прыгаем по предкам с $mark = 1$, и вырезаем их в корневой список, причем все вырезания делаются по очереди.

Удаление делается так — мы приписываем всех детей к корневому списку, а потом вызываем *compact*, которая должна спасти наше дерево и навести порядок.

Псевдокод тупых операций:

```
struct Node{
    Node *child;
    Node *left;
    Node *right;
    Node *parent;
    int rank;
    bool mark;
    int value;
}

list<Node *> roots;

void insert(int x) {
    Node *node = new Node(x);
    roots.insert(node);
}

void merge(list<Node *> a, list<Node *> b) {
    merge(a, b); // O(1) haha super easy
}

int getmin() {
    return argmin->value;
}
```

compact

- Сбрасываем пометки корневого списка в 0
- Переводим дерево в состояние, где все ранги различны
- Храним ранги, мерджим одинаковые
- Как мерджим? Берем меньший корень, и записываем в его детей второй корень

Обозначим $R = \max rank$, $t(H) = \text{root list size}$, $m(H) = \sum_v mark(v)$
 $compact$ работает за $O(R + t(H))$.

Анализ времени работы $extract_min \& increase_key - \tilde{O}(R)$.

$$\Phi(H) = t(H) + 2m(H) < 3n$$

Пусть каскадное вырезание сделало t_i действий. $m : 1 \rightarrow 0$, $t : +1$. Тогда $\Phi'(H) = \Phi(H) - 1$ за каждое вырезание. Тогда амортизированно вырезание работает за $O(1)$.

Compact:

$$t(H) \leq R, t'(H) = t(H) - R$$

Амортизированно работает за $2R + 1$

Хотим показать $R = O(\log n)$.

$$\forall v \in H \ sz(v) \geq A^{rank(v)}, A > 1$$

Тогда

$$r(v) \leq \log_A s(v) \leq c \log n$$

Возьмем

$$s(v) \geq \phi^{rank(v)-2}$$

<Оффтоп про числа Фибоначчи>

$$1. F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, F_0 = F_1 = 1$$

$$2. F_n \geq \phi^{n-2}$$

$$3. \forall i \geq 2: F_i = \sum_{j=0}^{i-2} F_j + 1$$

</Оффтоп про числа Фибоначчи>

Почему инвариант на размеры сохраняется? Возьмем вершину v с k детьми. Рассмотрим детей в том порядке, в котором их склеивал компакт. Тогда на момент добавления i -й вершины в структуру, ее ранг совпадал с рангом v . Тогда из условия на удаление не более чем одного сына ($mark$) следует, что $rank(i) \geq i - 1$. Тогда мы доказываем по индукции, что у нас все размеры — хотя бы числа фибоначчи,

соответствующие рангу. Тогда $s(v) = \sum_{u \in g(v)} s(u) + 1 \geq \sum_{u \in g(v)} F_{rank(u)} + 1 \geq \sum_{i=0}^{rank(v)-2} F_i + 1 \geq F_{rank(v)-2}$