МИНОБРНАУКИ РОССИИ
ФГБОУ ВО «СГУ ИМЕНИ Н. Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

ОТНОШЕНИЕ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ И ОТНОШЕНИЕ ПОРЯДКА

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА

студента 3 курса 331 группы
специальности 100501 — Компьютерная безопасность
факультета КНиИТ
Окунькова Сергея Викторовича

Проверил
аспирант ______________ В. Н. Кутин

Саратов 2022

СОДЕРЖАНИЕ

1 Постановка задачи

Цель работы:

Изучение основных понятий универсальной алгебры и операций над бинарными отношениями.

Порядок выполнения работы:

1. Рассмотреть понятие алгебраической операции и классификацию свойств операций. Разработать алгоритмы проверки свойств операций: ассоциативность, коммутативность, идемпотентность, обратимость, дистрибутивность.
2. Рассмотреть основные операции над бинарными отношениями. Разработать алгоритмы выполнения операции над бинарными отношениями.
3. Рассмотреть основные операции над матрицами. Разработать алгоритмы выполнения операций над матрицами.

2 Теоретические сведения по рассмотренным темам с их обоснованием

2.1 Алгебраические операции

Опр. Отображение $f : A^n \to A$ называется алгебраической n-арной операцией или просто алгебраической операцией на множестве A. При этом n называется порядком или арностью алгебраической операции f.

Далее для бинарной операции f по возможности будем использовать мультипликативную запись с помощью символа $\cdot$, т.е.вместо f(x,y) писать $x \cdot y$.

Опр. Бинарная операция $\cdot$ на множестве A называется:

1. ассоциативной, если для любых $x, y, z \in A$ выполняется равенство
$$x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z;$$
2. коммутативной, если для любых $x, y \in A$ выполняется равенство
$$x \cdot y = y \cdot x;$$
3. идемпотентной, если для любого $x \in A$ выполняется равенство
$$x \cdot x = x;$$
4. обратимой, если для любых $x, y \in A$, если уравнения $x \cdot a = y$ и $b \cdot x = y$ имеют решение, причем единственное;
5. дистрибутивной относительно операции +, если для любых $x, y, z \in A$ выполняются равенства
$$x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z),$$
$$(y + z) \cdot x = (y \cdot x) + (z \cdot x);$$

2.2 Основные операции над бинарными отношениями

1. Теоретико-множественные операции $(\cup, \cap, \neg)$
2. Обращение бинарных отношений: обратным для бинарного отношения $\rho \subset A \times B$ называется бинарное отношение $\rho^{-1} \subset B \times A$, определяющееся по формуле:
$$\rho^{-1} = (b, a) : (a, b) \in \rho.$$
3. Композиция бинарных отношений: композицией бинарных отношений $\rho \subset A \times B$ и $\sigma \subset B \times C$ называется бинарное отношение $\rho\sigma \subset A \times C$, определяющееся по формуле:
$$\rho\sigma = (a, c) : (a, b) \in \rho \text{ и } (b, c) \in \sigma \text{ для некоторого } b \in B.$$

2.3 Основные операции над матрицами

1. Сложение и вычитание матриц.

   Суммой $A + B$ матриц $A_{m\times n} = (a_{ij})$ и $B_{m\times n} = (b_{ij})$ называется матрица $C_{m\times n} = (c_{ij})$, где $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ для всех $i = \overline{1, m}$ и $j = \overline{1, n}$.

   Разностью $A - B$ матриц $A_{m\times n} = (a_{ij})$ и $B_{m\times n} = (b_{ij})$ называется матрица $C_{m\times n} = (c_{ij})$, где $c_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$ для всех $i = \overline{1, m}$ и $j = \overline{1, n}$.

2. Умножение матрицы на число.

   Произведением матрицы $A_{m\times n} = (a_{ij})$ на число α называется матрица $C_{m\times n} = (c_{ij})$, где $c_{ij} = \alpha a_{ij}$ для всех $i = \overline{1, m}$ и $j = \overline{1, n}$.

3. Произведение двух матриц.

   Произведением матриц $A_{m\times n} = (a_{ij})$ на матрицу $B_{m\times n} = (b_{ij})$ называется матрица $C_{m\times n} = (c_{ij})$, где $c_{ij} = \sum\limits_{p=1}^{n} a_{ip} b_{pj}$ для всех $i = \overline{1, m}$ и $j = \overline{1, n}$.

4. Транспонирование матрицы.

   Транспонированной по отношению к матрице $A_{m\times n} = (a_{ij})$ называется матрица $A^T_{n\times m} = (a^T_{ij})$ для элементов которой $a^T_{ij} = a_{ji}$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В рамках данной лабораторной работы были рассмотренны теоритические основы отношений эквивалентности, построение их фактор множеств, построение диаграмм Хассе и решетки концептов. На основе этой теоретической части была смоделирована программа на языке Python с использованием средств библиотеки Numpy, которая способна пострить замыкание эквивалентности, фактор множество, систему представителей этого множества, построить диаграмму Хассе на отношение делимости и построить решетку концептов для заданного множества, а так же была оценена асимптотика каждого реализованного алгоритма.