МИНОБРНАУКИ РОССИИ
ФГБОУ ВО «СГУ ИМЕНИ Н. Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

КЛАССИФИКАЦИЯ БИНАРНЫХ ОТНОШЕНИЙ И СИСТЕМЫ ЗАМЫКАНИЙ

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА

студента 3 курса 331 группы
специальности 100501 — Компьютерная безопасность
факультета КНиИТ
Окунькова Сергея Викторовича

Проверил
аспирант ______________ В. Н. Кутин

Саратов 2022

СОДЕРЖАНИЕ

1 Постановка задачи

Цель работы:

Изучение основных свойств бинарных отношений и операций замыкания бинарных отношений.

Порядок выполнения работы:

1. Разобрать основные определения видов бинарных отношений и разработать алгоритмы классификации бинарных отношений.
2. Изучить свойства бинарных отношений и рассмотреть основные системы замыкания на множестве бинарных отношений.
3. Разработать алгоритмы построения основных замыканий бинарных отношений.

2 Теоретические сведения по рассмотренным темам с их обоснованием

2.1 Определение бинарного отношения:

Подмножества декартова произведения $A \cdot B$ множеств A и B называются **бинарными отношениями** между элементами множеств A, B и обозначаются строчными греческими буквами: $\rho, \sigma, \rho_1, \rho_2, \ldots$.

Для бинарного отношения $\rho \subset A \cdot B$ область определения D_ρ и множество значений E_ρ определяется как подмножества соответствующих множеств A и B по следующим формулам:

$$D_\rho = \{a : (a, b) \in \rho \text{ для некоторого } b \in B\}$$

$$E_\rho = \{b : (a, b) \in \rho \text{ для некоторого } a \in A\}$$

2.2 Свойства бинарных отношений:

Бинарное отношени является:

1. *рефлексивным*, если $(a, a) \in \rho$ для любого $a \in A$;
2. *антирефлексивным*, если $(a, a) \notin \rho$ для любого $a \in A$;
3. *симметричным*, если $(a, b) \in \rho \Rightarrow (b, a) \in \rho$;
4. *антисимметричным*, если $(a, b) \in \rho$ и $(b, a) \in \rho \Rightarrow a = b$;
5. *транзитивным*, если $(a, b) \in \rho$ и $(b, c) \in \rho \Rightarrow (a, c) \in \rho$
6. *антитранзитивным*, если $(a, b) \in \rho$ и $(b, c) \in \rho \Rightarrow (a, c) \notin \rho$

2.3 Классификация бинарных отношений:

Классификация бинарных отношений напрямую определяются их свойствами.

1. Рефлексивное транзитивное отношение называется отношением квазипорядка.
2. Рефлексивное симметричное транзитивное отношение называется отношением эквивалентности.
3. Рефлексивное антисимметричное транзитивное отношение называется отношением (частичного) порядка.
4. Антирефлексивное, антисимметричное и транзитивное отношение называется отношением строгого порядка.

2.4 Замыкание отношения:

Замыканием отношения R относительно свойства P называется такое множество R^*, что:

1. $R \subset R^*$.
2. R^* обладает свойством P.
3. R^* является подмножеством любого другого отношения, содержащего R и обладающего свойством P.

3 Результаты работы

3.1 Описание алгоритма классификации бинарных отношений

1. Проверка на бинарного отношения на рефлексивность:

   Вход: матрица бинарного отношения

   Выход: "Множество рефлексивно"или "Множество антирфелексивно"или "Множество не рефлексивно"

   На вход подается матрица бинарного отоношения А.

   Шаг1. Суммирование элементов на главной диагонали ($sum = \sum_{i=1}^{n} a[i][i]$) с помощью цикла.

   Шаг2. Если $sum = n$, то отношение является рефлексивным, иначе, если $sum = 0$, то отношение является антирефлексивным, иначе отношение является не рефлексивным.

2. Проверка на бинарного отношения на симетричность:

   Вход: матрица бинарного отношения

   Выход: "Множество симетрично"или "Множество антисиметрично"или "Множество не симетрично"

   На вход подается матрица бинарного отоношения А.

   Шаг1. Транспонируем А, чтобы получить A^T.

   Шаг2. Если $A = A^T$, то бинарное отношение будет является симетричным, иначе нужно проверить матрицу на антисимитричность.

   Шаг3. Получим матрицу $B = A * A^T$.

   Шаг4. Проходимся дву вложенными циклами по матрице В. Если для любого $i \neq j b[i][j] = 0$, где $b[i][j]$ элемент матрицы В, то отношение является антисиметричным, иначе отношение не симетрично.

3. Проверка бинарного отношения на транзитивность:

   Вход: матрица бинарного отношения

   Выход: "Множество транзитивно"или "Множество антитранзитивно"или "Множество не транзитивно"

   На вход подается матрица бинарного отношения А.

   Шаг1. Возвести А в квадрат.

   Шаг2. Сравнить полученную и исходную матрицу.

   Шаг3. Если $A^2 \leq A$, то бинарное отношение транзитивно, иначе запускается проверка на антитранзитивность

   Шаг4. Запускается три вложенных цикла по элементам матрицы А, если на каком-то шаге $a[i][k] = 1$ и $a[k][j] = 1$ и $a[i][j] = 1$, то отношение не будет являтся транзитивным, иначе отношение будет являтся антитранзитивным.

3.2 Описание алгоритмов построения основных замыканий бинарных отношений

1. Замыкание бинарного отношения относительно рефлексивности:
   Вход: матрица бинарного отношения
   Выход: исходная матрица бинарного отношения, замкнутая относительно рефлексивности
   На вход подается матрица бинарного отношения A.
   Шаг1. Запуск цикла по i от 1 до n, в котором каждому элементу $a[i][i]$ присвоить еденицу.
2. Замыкание бинарного отношения относительно симетричности:
   Вход: матрица бинарного отношения
   Выход: исходная матрица бинарного отношения, замкнутая относительно симитричности
   На вход подается матрица бинарного отношения A.
   Шаг1. Запуск двух вложенных циклов по всем элементам матрицы A, в которых каждому $a[i][j]$ присваивается значение элемент $a[j][i]$.
3. Замыкание бинарного отношения относительно транзитивности:
   Вход: матрица бинарного отношения
   Выход: исходная матрица бинарного отношения, замкнутая относительно транзитивности
   На вход подается матрица бинарного отношения A.
   Шаг1. Запуск трех вложенных цикла по всем элементам матрицы A, в которых установки значения $a[i][j] = 1$, если $a[i][k] = 1$ и $a[k][j] = 1$.

3.3 Коды программ, реализующей рассмотренные алгоритмы

```
import numpy as np
import json


def isTran(a):
    n = len(a)
    b = np.matmul(a, a)
```

```
    for i in range(n):
        for j in range(n):
            if b[i][j]:
                b[i][j] = b[i][j] / b[i][j]
    f = (a >= b).all()
    if f:
        print("Set is transitive")
        return 't'
    else:
        f1 = True
        for i in range(n):
            for j in range(n):
                for k in range(n):
                    if a[i][k] and a[k][j] and a[i][j]:
                        f1 = False
        if f1:
            print("Set is anti-transitive")
            return 'at'
        else:
            print("Set is not transitive")
            return 'nt'


def isSymm(a):
    b = a.transpose()
    if np.array_equal(a, b):
        print("Set is symmetry")
        return 's'
    else:
        f = True
        b = np.matmul(a, b)
        for i in range(len(b)):
            for j in range(len(b[i])):
                if b[i][j] != 0 and i != j:
                    f = False
                    break
        if f:
            print("Set is anti-symmetry")
            return 'as'
        else:
            print("Set is not symmetry")
```

```
            return 'ns'


def isRefl(a):
    n = len(a)
    sum = 0
    for i in range(n):
        sum += a[i][i]
    if sum == n:
        print("Set is reflexive")
        return 'r'
    elif sum == 0:
        print("Set is anti-reflexive")
        return 'ar'
    else:
        print("Set is not reflexive")
        return 'nr'


def makeRefl(a):
    n = len(a)
    for i in range(n):
        a[i][i] = 1


def makeSymm(a):
    n = len(a)
    for i in range(n):
        for j in range(n):
            if a[i][j]:
                a[j][i] = 1


def makeTran(a):
    n = len(a)
    for k in range(n):
        for i in range(n):
            for j in range(n):
                if a[i][k] and a[k][j]:
                    a[i][j] = 1
```

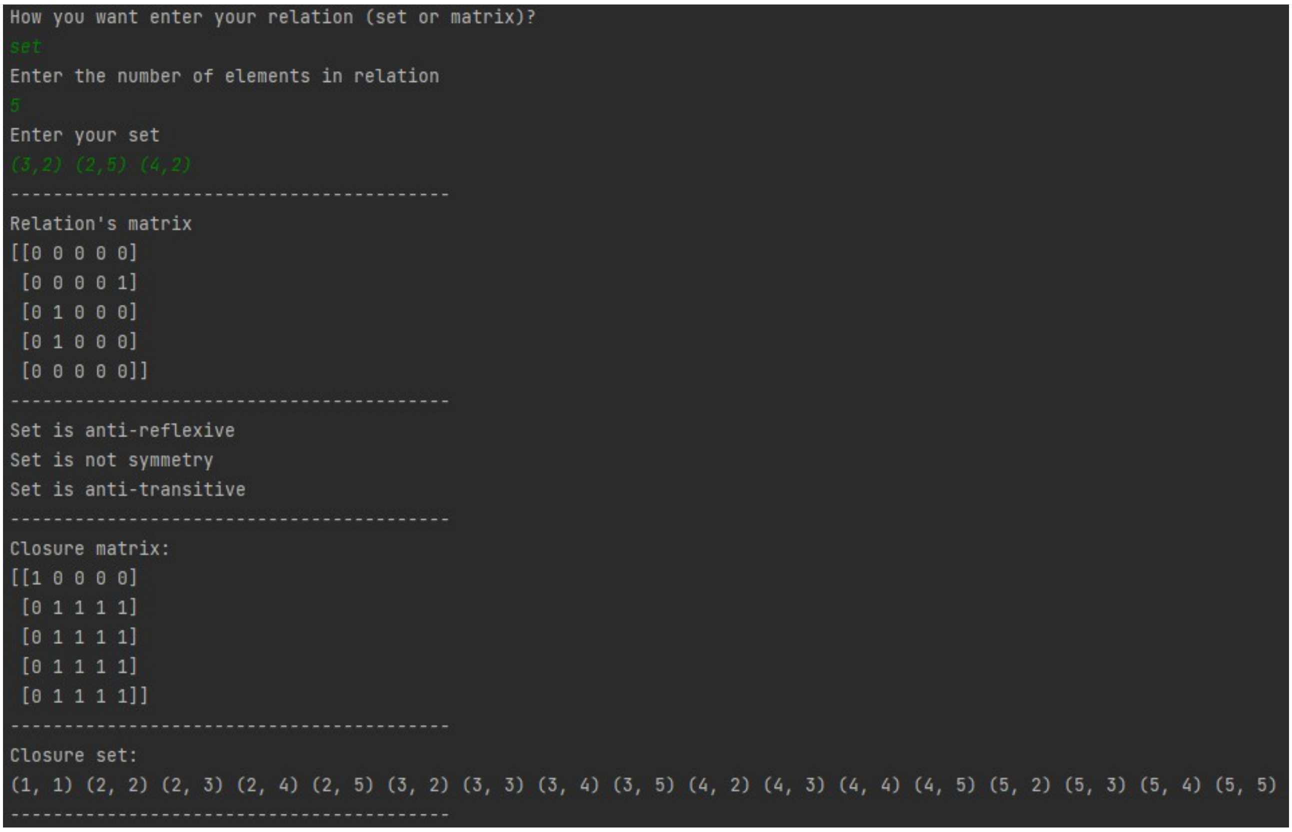
```
def get_set(a):
    s = []
    for i in range(len(a)):
        for j in range(len(a[i])):
            if a[i][j] == 1:
                s.append((i + 1, j + 1))
    return s


if __name__ == "__main__":
    print("How you want enter your relation (set or matrix)?")
    enter = input()
    if enter == 'set':
        print('Enter the number of elements in relation')
        n = int(input())
        print("Enter your set")
        # st = [(1, 3), (3, 4), (1, 4), (2, 5), (5, 3)]
        s = list(map(str, input().split(' ')))
        st = []
        for c in s:
            a = ''
            i = 1
            while c[i] != ',':
                a += c[i]
                i += 1
            i += 1
            b = ''
            while c[i] != ')':
                b += c[i]
                i += 1
            st.append((int(a), int(b)))
        a = np.zeros((n, n), int)
        for s in st:
            a[s[0] - 1][s[1] - 1] = 1
        print('-----------------------------------------')
        print("Relation's matrix")
        print(a)
    else:
        print('Enter the number of elements in relation')
        n = int(input())
        print("Enter your matrix")
```

```
    a = [list(map(int, input().split())) for i in range(n)]
    a = np.array(a).reshape(n, n)
    print('-----------------------------------------')
    print("Relation's set")
    print(*get_set(a))
print('-----------------------------------------')
properties = {"reflexive": isRefl(a), "symmetry": isSymm(a), "transitive": isTran
print('-----------------------------------------')
if properties['reflexive'] == 'r' and properties['symmetry'] == 's' and propertie
    print('Relation is equivalent')
    print('-----------------------------------------')
if properties['reflexive'] == 'r' and properties['transitive'] == 't':
    print('Relation is the relation of the quasi-order')
    print('-----------------------------------------')
if properties['reflexive'] == 'r' and properties['symmetry'] == 'as' and properti
    print('Relation is the relation of the partial order')
    print('-----------------------------------------')
if properties['reflexive'] == 'ar' and properties['symmetry'] == 'as' and properti
    print('Relation is the relation of the strict order')
    print('-----------------------------------------')
if properties['reflexive'] != 'r':
    makeRefl(a)
if properties['symmetry'] != 's':
    makeSymm(a)
if properties['transitive'] != 't':
    makeTran(a)
print('Closure matrix: ')
print(a)
print('-----------------------------------------')
print('Closure set: ')
print(*get_set(a))
print('-----------------------------------------')
```

3.4 Результаты тестирования программ

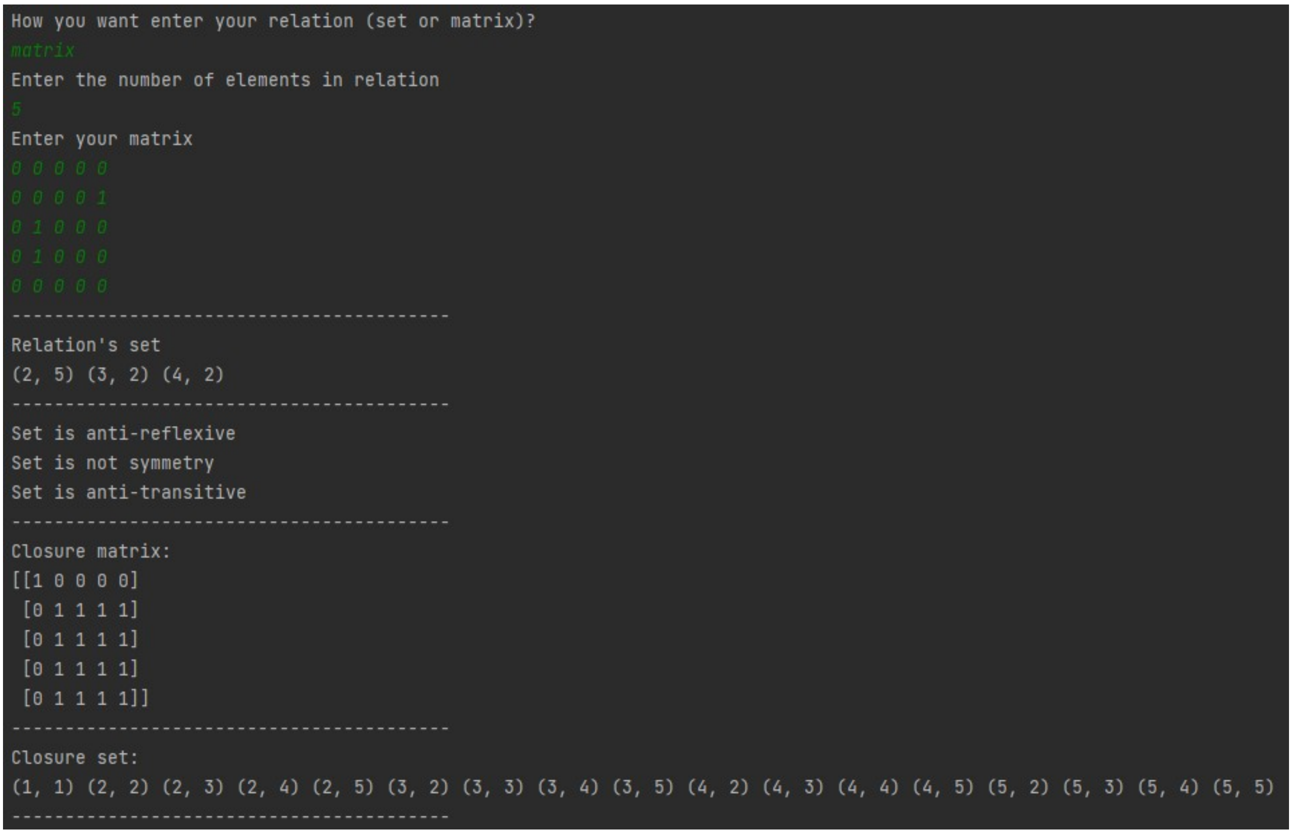
```
How you want enter your relation (set or matrix)?
set
Enter the number of elements in relation
3
Enter your set
(1,2) (1,3)
-----------------------------------------
Relation's matrix
[[0 1 1]
 [0 0 0]
 [0 0 0]]
-----------------------------------------
Set is anti-reflexive
Set is anti-symmetry
Set is transitive
-----------------------------------------
Relation is the relation of the strict order
-----------------------------------------
Closure matrix:
[[1 1 1]
 [1 1 0]
 [1 0 1]]
-----------------------------------------
Closure set:
(1, 1) (1, 2) (1, 3) (2, 1) (2, 2) (3, 1) (3, 3)
-----------------------------------------
```

Рисунок 1 – Тест 1



```
How you want enter your relation (set or matrix)?
set
Enter the number of elements in relation
5
Enter your set
(3,2) (2,5) (4,2)
----------------------------------------
Relation's matrix
[[0 0 0 0 0]
 [0 0 0 0 1]
 [0 1 0 0 0]
 [0 1 0 0 0]
 [0 0 0 0 0]]
----------------------------------------
Set is anti-reflexive
Set is not symmetry
Set is anti-transitive
----------------------------------------
Closure matrix:
[[1 0 0 0 0]
 [0 1 1 1 1]
 [0 1 1 1 1]
 [0 1 1 1 1]
 [0 1 1 1 1]]
----------------------------------------
Closure set:
(1, 1) (2, 2) (2, 3) (2, 4) (2, 5) (3, 2) (3, 3) (3, 4) (3, 5) (4, 2) (4, 3) (4, 4) (4, 5) (5, 2) (5, 3) (5, 4) (5, 5)
----------------------------------------
```

Рисунок 2 – Тест 2



```
How you want enter your relation (set or matrix)?
matrix
Enter the number of elements in relation
5
Enter your matrix
0 0 0 0 0
0 0 0 0 1
0 1 0 0 0
0 1 0 0 0
0 0 0 0 0
----------------------------------------
Relation's set
(2, 5) (3, 2) (4, 2)
----------------------------------------
Set is anti-reflexive
Set is not symmetry
Set is anti-transitive
----------------------------------------
Closure matrix:
[[1 0 0 0 0]
 [0 1 1 1 1]
 [0 1 1 1 1]
 [0 1 1 1 1]
 [0 1 1 1 1]]
----------------------------------------
Closure set:
(1, 1) (2, 2) (2, 3) (2, 4) (2, 5) (3, 2) (3, 3) (3, 4) (3, 5) (4, 2) (4, 3) (4, 4) (4, 5) (5, 2) (5, 3) (5, 4) (5, 5)
----------------------------------------
```

Рисунок 3 – Тест 3

```
How you want enter your relation (set or matrix)?
matrix
Enter the number of elements in relation
5
Enter your matrix
0 1 0 0 0
0 0 1 0 0
0 0 0 0 0
0 0 1 0 0
0 0 0 0 0
----------------------------------------
Relation's set
(1, 2) (2, 3) (4, 3)
----------------------------------------
Set is anti-reflexive
Set is not symmetry
Set is anti-transitive
----------------------------------------
Closure matrix:
[[1 1 1 1 0]
 [1 1 1 1 0]
 [1 1 1 1 0]
 [1 1 1 1 0]
 [0 0 0 0 1]]
----------------------------------------
Closure set:
(1, 1) (1, 2) (1, 3) (1, 4) (2, 1) (2, 2) (2, 3) (2, 4) (3, 1) (3, 2) (3, 3) (3, 4) (4, 1) (4, 2) (4, 3) (4, 4) (5, 5)
----------------------------------------
```

Рисунок 4 – Тест 4

3.5 Оценки сложности рассмотренных алгоритмов

3.5.1 Алгоритм определения рефлексивности

Сложность выполнения проверки на рефлексивность или антирефлексивность определяется как $O(n)$.

3.5.2 Алгоритм определения симметричности

Сложность транспонирования в numpy определяется как $O(n^{3/2} log\, n)$, сложность умножения матриц определяется как $O(n^3)$, сложность сравнение двух матриц поэлементно определяется как $O(n^2)$. Отсюда можно сделать вывод, что в случае, если наше отношение будет симметричным, что будет являтся лучшим случаем раоты алгоритма,то общая сложность алгоритма будет определятся как $O(n^{3/2} log\, n + n^2) = O(n^{3/2} log\, n)$, иначе, в худшем случае, сложность будет определятся как $O(n^{3/2} log\, n + n^2 + n^2 + n^3) = O(n^3)$

3.5.3 Алгоритм определения транзитивности

Из всего выше сказанного очевидно, что сложность проверки на транзитивность или антитранзитивность составляет $O(n^3)$, так как в нем используется умножение, сравнение матриц и тройной цикл для проверки рефлексивности в худшем случае матриц.

3.5.4 Алгоритм классификации

Сложность выполнения самого алгоритма классификации бинарных отношений реализованно через питоновский словарь и оператор if, поэтому является константной ($O(1)$), если не учитывать сложность выполнения проверки свойств отношения.

3.5.5 Построение замыкания рефлексивности

Так как весь алгоритм строится на заполнении главной диагонали матрицы 1, то его сложность состовляет $O(n)$.

3.5.6 Построение замыкания симметричности

Для посторения замыкания симметричности используются вложенный цикла, поэтому сложность алгоритма определяется как $O(n^2)$.

3.5.7 Построение замыкания транзитивности

Для посторения замыкания транзитивности используются два вложенный цикла, поэтому сложность алгоритма определяется как $O(n^3)$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В рамках данной лабораторной работы были рассмотренны теоритические основы свойств бинарных отношений, их видов и методов их замыкания по каждому из свойств. На основе этой теоретической части была смоделирована программа, которая способна определить свойства заданного множества, его вид и построить систему замыкания по каждому из основных свойств бинарного отношения.