МИНОБРНАУКИ РОССИИ
ФГБОУ ВО «СГУ ИМЕНИ Н. Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

ЗАДАЧА О САМОМ ДЛИННОМ ПРОСТОМ ЦИКЛЕ

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА

студента 3 курса 331 группы
специальности 100501 — Компьютерная безопасность
факультета КНиИТ
Окунькова Сергея Викторовича

Проверил
доцент ________________ А. Н. Гамова

Саратов 2022

СОДЕРЖАНИЕ

1 Описание задачи . . . 3
2 Доказательство NP полноты . . . 4
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ . . . 6

1 Описание задачи

На вход подается граф. Необходимо найти в заданном графе просто цикл максимальной длины.

2 Доказательство NP полноты

NP-полная задача — в теории алгоритмов задача с ответом «да» или «нет» из класса NP, к которой можно свести любую другую задачу из этого класса за полиномиальное время (то есть при помощи операций, число которых не превышает некоторого полинома в зависимости от размера исходных данных). Таким образом, NP-полные задачи образуют в некотором смысле подмножество «типовых» задач в классе NP: если для какой-то из них найден «полиномиально быстрый» алгоритм решения, то и любая другая задача из класса NP может быть решена так же «быстро».

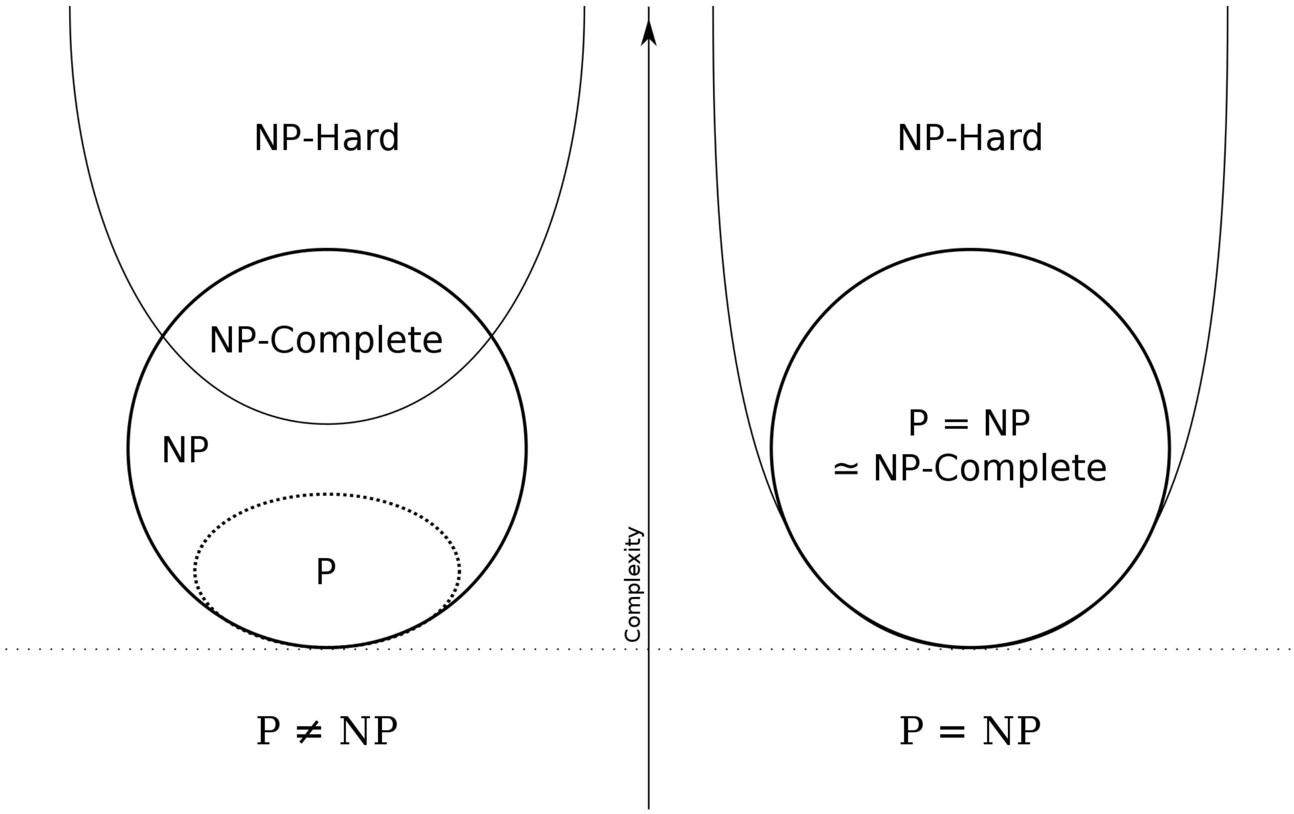

Рисунок 1 – Взаимоотношение между классами P, NP, NP-complete (NP-полными задачами), NP-hard (NP-трудными задачами)

Очевидно, что для доказательства NP полноты задачи необходимо доказать, что задача принадлежит классу NP и NP-hard.

Сначала нам нужно показать, что САМЫЙ ДЛИННЫЙ ПРОСТОЙ ЦИКЛ находится в NP. Экземпляр x представляет собой неориентированный граф и целое число k. Пусть сертификат y представляет собой последовательность не менее k вершин графа. Верификатор аналогичен верификатору для коммивояжера: он проходит по вершинам в сертификате одну за другой, помечая каждую из них на предмет отсутствия повторов и проверяя наличие ребра из каждой вершины в сертификате в вершину. следующий указанный в сертификате. Наконец, верификатор проверяет, что цикл завершается ребром из последней вершины в сертификате обратно в первую вершину. Если эти проверки удовлетворены, верификатор выводит 1. Если какие-либо из них не пройдены, верификатор выводит 0.

Этот верификатор занимает линейное время по количеству вершин. Если существует простой цикл, по крайней мере, с k вершинами, то передача этого цикла в качестве сертификата приводит к тому, что верификатор выводит 1. В противном случае ни один сертификат не содержит допустимого цикла, по крайней мере, с k вершинами, поэтому верификатор всегда выводит 0 для этого экземпляра. Поскольку верификатор корректен и требует полиномиального времени, проблема в NP.

Чтобы показать, что задача является NP-трудной, мы сводим к ней HAM-CYCLE. Дан граф G, являющийся экземпляром HAM-ЦИКЛ, определите экземпляр <G,k> САМОГО ДЛИННОГО ПРОСТОГО ЦИКЛА, содержащий тот же граф, и k=|V|, количество вершин в G.

Это сокращение включает в себя только простое копирование и подсчет, поэтому оно занимает полиномиальное время.

Теперь, если граф G содержит гамильтонов цикл, то этот цикл является простым циклом с |V| вершин, поэтому правильное решение для экземпляра САМЫЙ ДЛИННЫЙ ПРОСТОЙ ЦИКЛ равно 1. Если нет гамильтонова цикла, то нет простого цикла с |V| или более вершин (просто по определению гамильтонова цикла), поэтому правильное решение для экземпляра САМЫЙ ДЛИННЫЙ ПРОСТОЙ ЦИКЛ равно 0.

Итак, редукция верна и занимает полиномиальное время, показывая, что САМЫЙ ДЛИННЫЙ ПРОСТОЙ ЦИКЛ является NP-трудным. Поскольку он также находится в NP, он является NP-полным.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1 Томас Кормен "Алгоритмы. Построение и анализ 2005 год. Яз. рус.