Dokumentace k projektu

Algoritmy

Náhradní projekt - 02.

Hamiltonova cesta a cyklus v grafu

Autoři:

xsvetl07

xskopa17

xmencm00

xhlava60

TODO: popis

Zpracování vstupního grafu a následné nalezení Hamiltonovské cesty a cyklu v grafu.

5.12.2023

Obsah

[1 Úvod 3](#_Toc152707436)

[2 Zadání varianty 4](#_Toc152707437)

[3 Teorie 5](#_Toc152707438)

[3.1 Hamiltonovský graf 5](#_Toc152707439)

[3.2 Podmínky Hamiltonova grafu 5](#_Toc152707440)

[3.2.1 Nutná podmínka 5](#_Toc152707441)

[3.2.2 Postačující podmínky 5](#_Toc152707442)

[3.3 Použitelné algoritmy pro nalezení Hamiltonovy kružnice 6](#_Toc152707443)

[3.3.1 Použitelné algoritmy 6](#_Toc152707444)

[3.3.1.1 Řešení hrubou silou 6](#_Toc152707445)

[3.3.1.2 Heuristické algoritmy 6](#_Toc152707446)

[3.3.2 Námi zvolený algoritmus 6](#_Toc152707447)

[3.3.2.1 Teoretická časová složitost 6](#_Toc152707448)

[4 Implementace 7](#_Toc152707449)

[4.1 Argumenty pro spuštění programu 7](#_Toc152707450)

[4.2 Načítání vstupního grafu 7](#_Toc152707451)

[4.3 Použité struktury 7](#_Toc152707452)

[4.4 Funkce pro nalezení cesty v grafu 7](#_Toc152707453)

[5 Testování 7](#_Toc152707454)

[6 Závěr 7](#_Toc152707455)

[7 Zdroje 8](#_Toc152707456)

# Úvod

# Zadání varianty

Náhradní projekt - 02. Hamiltonova cesta a cyklus v grafu

Cestu v grafu, ve které se vyskytuje každý vrchol právě jednou, nazýváme Hamiltonovou cestou. Má-li tato cesta počátek a konec v jednom jediném vrcholu, pak se jedná o Hamiltonův cyklus v grafu.

Vytvořte program pro hledání Hamiltonovy cesty (pro dva zadané vrcholy) a Hamiltonova cyklu v neorientovaném grafu.

Pokud existuje více řešení, nalezněte všechna. Výsledky prezentujte vhodným způsobem. Součástí projektu bude načítání grafů ze souboru a vhodné testovací grafy. V dokumentaci uveďte teoretickou složitost úlohy a porovnejte ji s experimentálními výsledky.

# Teorie

## Hamiltonovský graf

Pokud v grafu nalezneme takovou cestu, jenž prochází všemi vrcholy grafu právě jednou s výjimkou počátečního uzlu, který je zároveň uzlem cílovým, tak se jedná o Hamiltonovský graf. Jinými slovy, graf je hamiltonovský právě tehdy, když obsahuje hamiltonovu kružnici (hamiltonovský cyklus).

Kde Hamiltonova kružnice je právě nalezená uzavřená cesta. Která začíná v náhodném vrcholu grafu, následně prochází všemi vrcholy právě jednou a končí v počátečním vrcholu. Hamiltonovský graf může obsahovat více kružnic. Podobně je definována i Hamiltonovská cesta, která je otevřená a prochází všemi vrcholy grafu.

## Podmínky Hamiltonova grafu

Pro potvrzení existence Hamiltonovské kružnice v grafu neexistuje žádná jednoduchá nutná a postačující podmínka. Logicky můžeme předpokládat, že hamiltonovskou kružnici snadněji nalezneme v grafech s hustou sítí hran než v grafu s nízkým průměrným stupněm vrcholu. Aby vůbec bylo možné uvažovat nad tím, zda je graf Hamiltonovský, je potřeba splnit nutné podmínky.

### Nutná podmínka

Graf musí být souvislý a každý vrchol musí mít nejméně druhů stupeň (každý vrchol má minimálně dvě hrany).

[Je-li graf G hamiltonovský graf, tak pro každou neprázdnou vlastní podmnožinu S vrcholové množiny V(G) platí 𝜔 (G – S) <|S|, kde 𝜔 je počet komponent.]

Nutná podmínka se používá spíše k vyvrácení toho, zda je graf Hamiltonovský. Stačí vyvrátit pouze některou z nutných podmínek, a tím můžeme uzavřít hledání hamiltonovské kružnice. Existují ale i grafy, které splňují nutné podmínky, ale hamiltonovskými grafy nejsou. Pro potvrzení hamiltonovského grafu se využívají obecně postačující podmínky.

### Postačující podmínky

Oreho věta – každá dvojice uzlů nespojených hranou má součet stupňů alespoň n. [Graf G s n vrcholy, kde n ≥ 3. Jestliže pro každé dva nesousední vrcholy u, v grafu G platí deg(u) + deg(v) ≥ n, tak je graf G hamiltonovský.]

Diarcova věta – každý uzel má stupeň alespoň ½ n. [Graf G s vrcholy, kde n ≥ 3. Je-li 𝛿(𝐺) ≥ 𝑛/2, tak graf G he hamiltonovský, kde 𝛿(𝐺) je minimální stupeň grafu.]

Pósova věta – pro každé přirozené číslo j <½ n je počet uzlů, jejichž stupeň nepřevyšuje k, menší než k. [Graf G s n vrcholy, kde 𝑛 ≥ 3. Jestliže pro každé přirozené číslo 𝑗 <𝑛/2 obsahuje graf G méně než j vrcholů stupně menšího nebo rovného j, tak graf G je hamiltonovský.]

Aby byl graf s n ≥ 3 uzly hamiltonovský, stačí splnit jednu z postačujících podmínek. Tyto postačující podmínky ale nemusí nutně každý hamiltonovský graf splňovat. Příkladem je graf 𝐶𝑛 (kružnice o velikosti n) pro 𝑛 ≥ 5. Ten nesplňuje postačující podmínky, přesto je hamiltonovský graf. Protože sám graf je hamiltonovskou kružnicí.

## Použitelné algoritmy pro nalezení Hamiltonovy kružnice

Problém hledání hamiltonovské kružnice spadá do skupiny tzv. NP-plných problémů. Jedná se tak o matematický problém, který je považován za jeden z nejtěžších z množiny problémů. Lze jej řešit v polynomiálně omezeném čase na nedeterministickém Turingově stoji. Časová složitost je v lepším případě exponenciální, v horším případě faktoriálová. Hamiltonova kružnice a cesta se dá použit k vyřešení problému obchodního cestujícího či jezdcova procházka na šachovnici.

### Použitelné algoritmy

#### Řešení hrubou silou

Systematicky procházíme celý prostor množiny řešení problému. Vyhledávací prostor problému je množina všech možných řešení. Pro problém hamiltonovské kružnice je velikost vyhledávacího prostoru dána faktoriálem počtu vrcholů daného grafem. V průběhu hledání v úplném grafu je vybrán jeden vrchol z n možných, následující vrchol grafu může být vybrán n–1 možnými způsoby, další n-2 atd. Časová složitost v nejhorším případě je faktoriální, takže pro větší počet vrcholů je nepoužitelný. Výhodou je, že nalezne opravdu nejlepší řešení a je jednoduchý na implementaci. Lze jej ale využit jen pro grafy s malým množstvím vrcholů.

#### Heuristické algoritmy

Algoritmy, které dokážou řešit úlohy v polynomiálním (přijatelném) čase. Jsou založené na myšlence, jak by bylo možné danou úlohy vyřešit. Tudíž může být jejich výsledek o něco horší než výsledek přesného algoritmu, ale může najít optimální řešení.

Hladový algoritmus – založen na principu rozhodovacího stromu. Cestu začíná od vrcholu nejvyššího stupně. Následně volí vrcholy podle jejich stupně. Upřednostňuje vrcholy s nižším stupněm, takže se tak často nedostává do slepých uliček.

Rotační algoritmus – postupně přidává vrcholy, aby sestavil hamiltonovskou cestu a tu následně uzavřel v kružnici. Pokud již nemůže přidat další vrchol, pak použije záměnu pořadí vrcholů a pokouší se dále hledat jinou variantu cesty. Do množiny S si přidává zaměněné vrcholy, aby se předešlo hledání stejných variant. Využívá se spíše v grafech s vysokým stupněm.

### Námi zvolený algoritmus

Zpětné vyhledávání (Backtracking) – postupně vytváří kružnici vrchol za vrcholem. Začne ve zvoleném vrcholu a poté se snaží do cesty přidat jeden ze sousedních vrcholů aktuálního vrcholu. Pokud již nelze cestu prodloužit a hamiltonova kružnice není hotova, algoritmus se vrací na předchozí vrchol, tak že odstraní aktuální vrchol z cesty.

#### Teoretická časová složitost

Obecně exponenciální časová složitost -

V horším případě faktoriálová časová složitost -

# Implementace

## Argumenty pro spuštění programu

## Načítání vstupního grafu

## Použité struktury

## Funkce pro nalezení cesty v grafu

Vyhledávací funkce je volána s parametry graph, start, end, path. Graph je prohledávaný graf. Start je prohledávaný uzel. End je konečný uzel cesty. Path je dosavadní prohledaná cesta reprezentovaná strukturou graph\_t, pokud není předána předchozí cesta, nová cesta je inicializována. Prohledávaný vrchol je přidán do cesty, poté jsou vyhodnoceny pro ukončení vyhledávání. Pokud jsou podmínky naplněny cesta je vypsána. Pokud ukončovací podmínky nejsou naplněny poté jsou prohledány všechny sousední vrcholy grafu, které ještě nebyly prohledány, voláním vyhledávací funkce nad danými vrcholy.

# Testování

# Závěr

# Zdroje

*Hamiltonovské grafy*. Online, Dokumentace projektu. Hradec Králové: Fakulta informačních technologií Vysokého učení technického v Brně, 2020. Dostupné z: <https://theses.cz/id/wy704j/STAG92896.pdf>. [cit. 2023-12-05].

*Backtracking*. Online. In: Wikipedia: the free encyclopedia. San Francisco (CA): Wikimedia Foundation, 2023. Dostupné z: <https://cs.wikipedia.org/wiki/Backtracking>. [cit. 2023-12-05].

*Hamitlonovský graf*. Online. In: Wikipedia: the free encyclopedia. San Francisco (CA): Wikimedia Foundation, 2023. Dostupné z: [https://cs.wikipedia.org/wiki/Hamiltonovsk%C3%BD\_graf](https://cs.wikipedia.org/wiki/Hamiltonovský_graf). [cit. 2023-12-05].