ТРУДНЫЕ ЗАДАНИЯ ОГЭ

Л. Б. Крайнева

МАТЕМАТИКА

ТРУДНЫЕ ЗАДАНИЯ ОГЭ

ЗАДАНИЯ ПОВЫШЕННОГО И ВЫСОКОГО УРОВНЕЙ СЛОЖНОСТИ

ПРИЁМЫ И СПОСОБЫ РЕШЕНИЙ

Учебное пособие
для общеобразовательных организаций

2-е издание

Москва
«Просвещение»
2020

УДК 373:51+51(075.3)
ББК 22.1я721.6
К77

6+

Серия «Трудные задания ОГЭ» основана в 2019 году

Крайнева Л. Б.

К77 Математика. Трудные задания ОГЭ. Задания повышенного и высокого уровней сложности. Приёмы и способы решений : учеб. пособие для общеобразоват. организаций / Л. Б. Крайнева. — 2-е изд. — М. : Просвещение, 2020. — 96 с. : ил. — (Трудные задания ОГЭ). — ISBN 978-5-09-076507-7.

Пособие предназначено для подготовки учащихся к Основному государственному экзамену по математике за курс основной школы. В книге содержатся образцы оформления решений основных типов заданий второй части экзаменационных работ, предложены задания для самопроверки и 10 вариантов диагностических работ, составленных только из заданий второй части экзаменационных работ.

Сборник также может использоваться учителем для организации внутренней оценки качества образования (для проведения тестирований при подготовке к экзамену и проведения итогового повторения).

УДК 373:51+51(075.3)
ББК 22.1я721.6

Учебное издание

Серия «Трудные задания ОГЭ»

Крайнева Лариса Борисовна

Математика

Трудные задания ОГЭ

Задания повышенного и высокого уровней сложности
Приёмы и способы решений

Учебное пособие для общеобразовательных организаций

Редакция математики и информатики
Заведующий редакцией *Е. В. Эргле*, ответственный за выпуск *И. В. Рекман*,
редактор *И. В. Рекман*, младшие редакторы *Е. А. Андреенкова*, *Е. В. Трошко*,
художественный редактор *Т. В. Глушкова*, дизайн *А. Г. Бушина*,
техническое редактирование и компьютерная вёрстка *Э. В. Алексеева*,
компьютерная графика *И. В. Губиной*, корректор *Н. А. Ерохина*.

Налоговая льгота — Общероссийский классификатор продукции ОК 005-93—953000.
Изд. лиц. Серия ИД №05824 от 12.09.01. Подписано в печать 25.02.20. Формат $84\times108\,^{1}/_{16}$.
Бумага офсетная. Гарнитура SchoolBookCSanPin. Печать цифровая. Уч.-изд. л. 6,52. Тираж 500 экз. Заказ № .

Акционерное общество «Издательство «Просвещение».
Российская Федерация, 127473, г. Москва, ул. Краснопролетарская, д. 16, стр. 3, этаж 4, помещение I.

Предложения по оформлению и содержанию учебников — электронная почта «Горячей линии» — fpu@prosv.ru.

Отпечатано в России.

Отпечатано по заказу АО «ПолиграфТрейд» в филиале «Смоленский полиграфический комбинат»
ОАО «Издательство «Высшая школа». 214020, г. Смоленск, ул. Смольянинова, 1.
Тел.: +7(4812) 31-11-96. Факс: +7(4812) 31-31-70. E-mail: spk@smolpk.ru http://www.smolpk.ru

ISBN 978-5-09-076507-7

ПРЕДИСЛОВИЕ

Экзаменационная работа по математике за курс основной школы состоит из двух частей.

В первой части представлены 20 заданий базового уровня, предполагающие написание краткого ответа в экзаменационном бланке (точнее, задания с выбором ответа, кратким ответом и установлением соответствия).

Вторая часть имеет вид традиционной контрольной работы и состоит из 6 заданий, в которых в соответствии со спецификацией представлены следующие разделы программного материала: выражения и их преобразования, уравнения и системы уравнений, текстовые задачи, неравенства, функции, координаты и графики, последовательности и прогрессии, геометрия. При выполнении второй части работы учащиеся должны продемонстрировать умение математически грамотно записывать решение (оно должно содержать необходимые пояснения и обоснования, из которых должен быть понятен ход рассуждений).

В настоящее время существует достаточно много пособий для подготовки к государственной итоговой аттестации по математике за курс основной школы, которые представляют собой сборники задач (тематические или наборы вариантов), зачастую сопровождаемые только ответами.

Цель данного пособия — показать не только различные способы и приёмы решения задач по алгебре и геометрии повышенного и высокого уровней сложности, но и примеры оформления решений этих заданий.

Пособие состоит из справочных материалов, шести разделов, каждый из которых посвящён одной из шести задач второй части экзаменационной работы (21—26): представлены образцы решений этих задач (иногда несколькими способами), предложены тренировочные задания подобного типа. В конце пособия приведены 10 вариантов диагностических работ, составленных только из заданий 21—26, а также ответы ко всем задачам для самостоятельного решения.

АЛГЕБРА

ТАБЛИЦА КВАДРАТОВ

		Единицы									
		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Десятки	1	100	121	144	169	196	225	256	289	324	361
	2	400	441	484	529	576	625	676	729	784	841
	3	900	961	1024	1089	1156	1225	1296	1369	1444	1521
	4	1600	1681	1764	1849	1936	2025	2116	2209	2304	2401
	5	2500	2601	2704	2809	2916	3025	3136	3249	3364	3481
	6	3600	3721	3844	3969	4096	4225	4356	4489	4624	4761
	7	4900	5041	5184	5329	5476	5625	5776	5929	6084	6241
	8	6400	6561	6724	6889	7056	7225	7396	7569	7744	7921
	9	8100	8281	8464	8649	8836	9025	9216	9409	9604	9801

ТАБЛИЦА СТЕПЕНЕЙ

a^n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024
3	3	9	27	81	243	729	2187	6561	19683	59049
4	4	16	64	256	1024	4096	16384	65536	262144	1048576
5	5	25	125	625	3125	15625	78125	390625	1953125	9765625
6	6	36	216	1296	7776	46656	279936	1679616	10077696	60466176
7	7	49	343	2401	16807	117649	823543	5764801	40353607	282475249
8	8	64	512	4096	32768	262144	2097152	16777216	134217728	1073741824
9	9	81	729	6561	59049	531441	4782969	43046721	387420489	3486784401
10	10	100	1000	10000	100000	1000000	10000000	100000000	1000000000	10000000000

ФОРМУЛЫ СОКРАЩЁННОГО УМНОЖЕНИЯ

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$
$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$
$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$
$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$
$(a-b)^2 = (b-a)^2$

МОДУЛЬ ЧИСЛА

$$|x| = \begin{cases} x, \text{ если } x \geqslant 0, \\ -x, \text{ если } x < 0. \end{cases}$$

СВОЙСТВА МОДУЛЯ

1. $|a-b| = |b-a|$
2. $|a|^2 = a^2$
3. $|x| \leqslant a$ при $a \geqslant 0 \Leftrightarrow -a \leqslant x \leqslant a$ при $a \geqslant 0$
4. $|x| \geqslant a$ при $a \geqslant 0 \Leftrightarrow x \leqslant -a$ или $x \geqslant a$ при $a \geqslant 0$

СТЕПЕНЬ ЧИСЛА И ЕЁ СВОЙСТВА

$a^1 = a$

$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ раз}}, n \in N$

$a^0 = 1$ при $a \neq 0$

$a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$ при $a \neq 0$

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
$a^m : a^n = a^{m-n}$
$(a^m)^n = a^{mn}$
$(ab)^n = a^n b^n$

$\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$ при $b \neq 0$

АРИФМЕТИЧЕСКИЙ КВАДРАТНЫЙ КОРЕНЬ И ЕГО СВОЙСТВА

$\sqrt{a} = b$ при $a \geqslant 0$: 1) $b \geqslant 0$; 2) $b^2 = a$

$\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$ при $a \geqslant 0,\ b \geqslant 0$

$\sqrt{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ при $a \geqslant 0,\ b > 0$

$\sqrt{a^2} = |a|$

$\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$ при $a \geqslant 0$

ФОРМУЛЫ КОРНЕЙ КВАДРАТНОГО УРАВНЕНИЯ

$ax^2 + bx + c = 0$

$x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$, где $D = b^2 - 4ac$

ТЕОРЕМА ВИЕТА ДЛЯ КОРНЕЙ КВАДРАТНОГО УРАВНЕНИЯ

Для уравнения общего вида	Для приведённого уравнения
$ax^2 + bx + c = 0$ x_1 и x_2 — корни уравнения $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$, $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$	$x^2 + bx + c = 0$ x_1 и x_2 — корни уравнения $x_1 + x_2 = -b$ $x_1 \cdot x_2 = c$

Если квадратный трёхчлен $ax^2 + bx + c$ имеет два корня x_1 и x_2, то

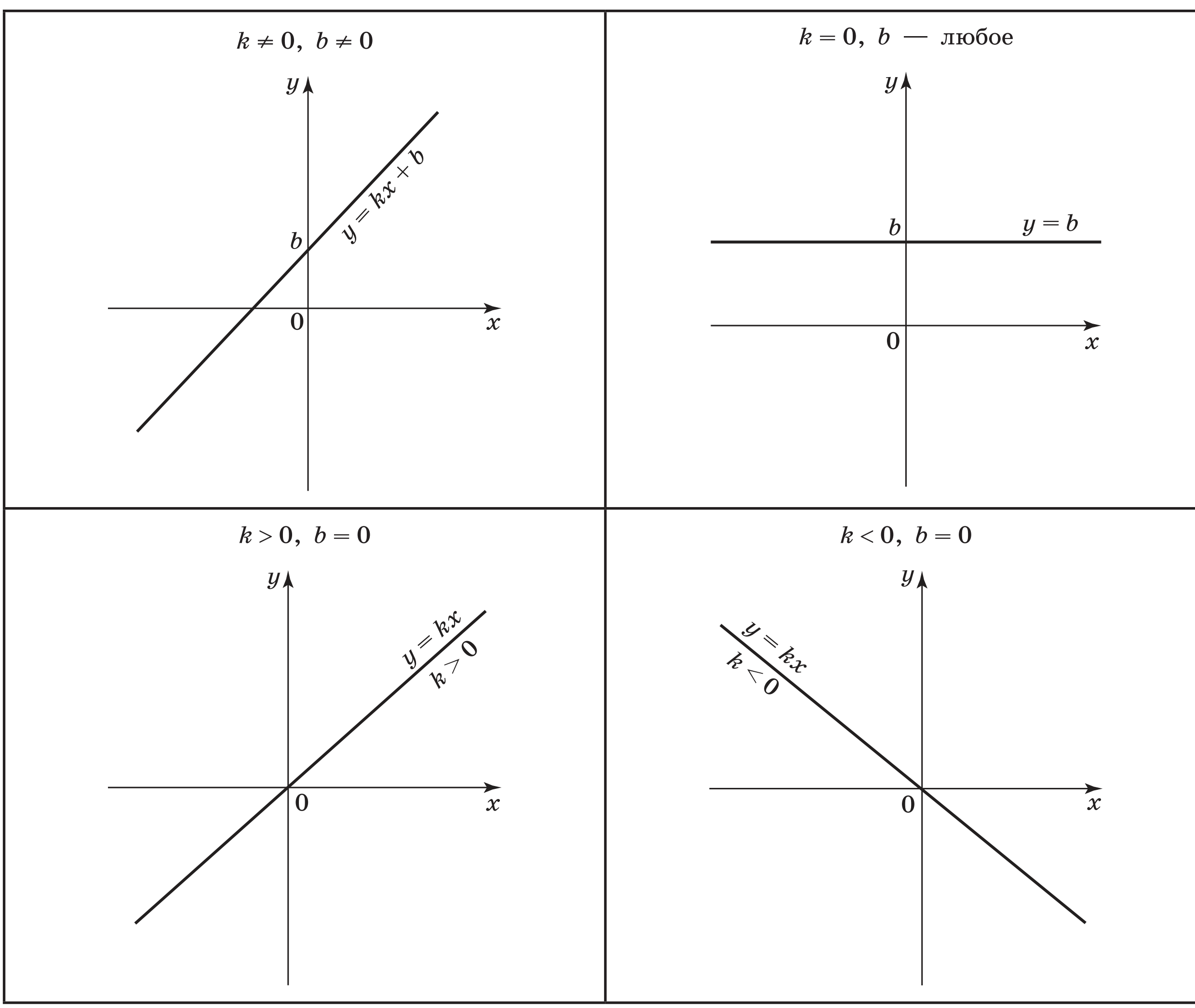
$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2);$$

если квадратный трёхчлен $ax^2 + bx + c$ имеет единственный корень x_0, то

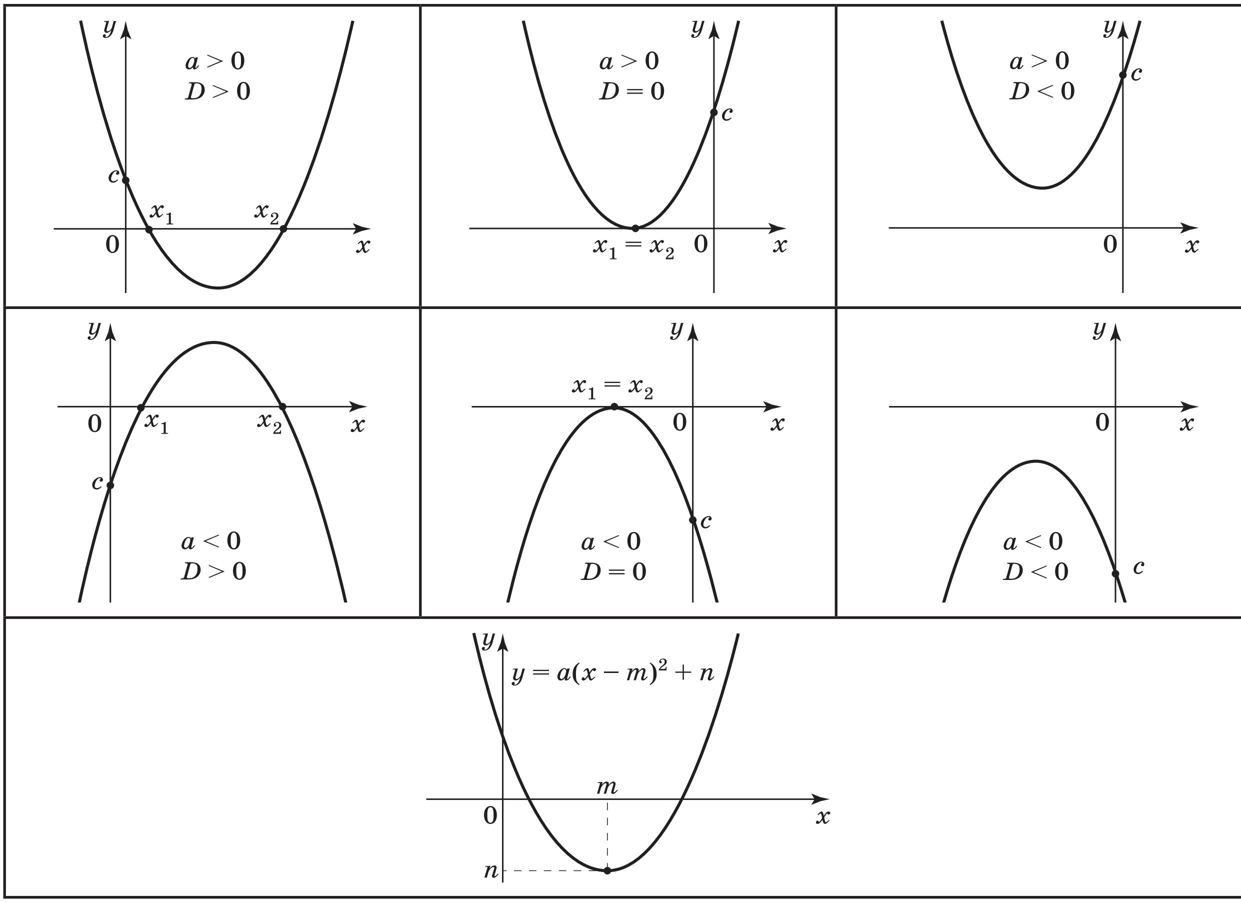
$$ax^2 + bx + c = a(x - x_0)^2.$$

ГРАФИКИ НЕКОТОРЫХ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ФУНКЦИЙ И ИХ СВОЙСТВА

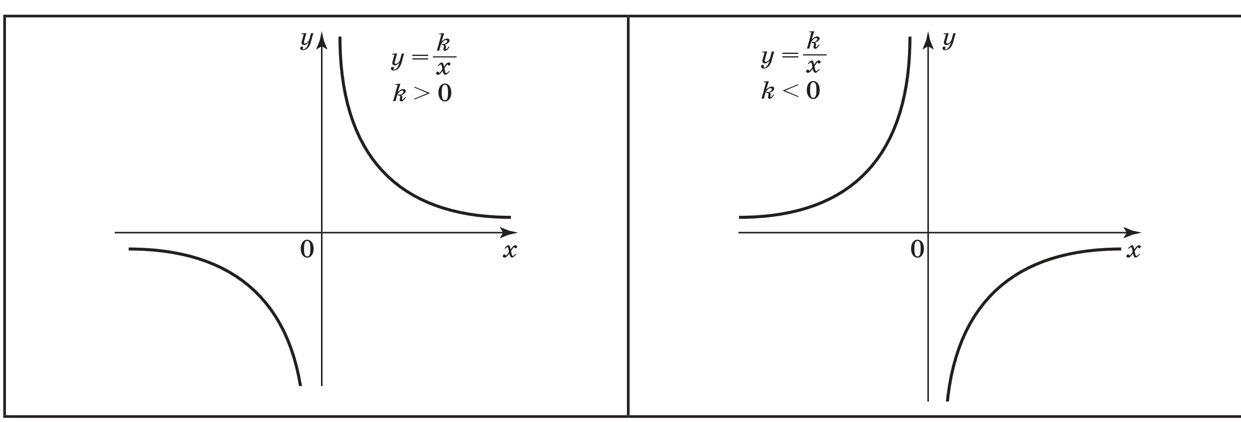
Линейная функция $y = kx + b$



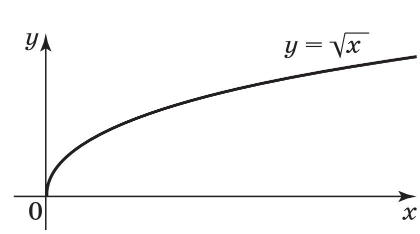
Квадратичная функция $y = ax^2 + bx + c,\ a \neq 0$



Обратная пропорциональность $y = \dfrac{k}{x},\ k \neq 0$



Функция $y = \sqrt{x},\ x \geqslant 0,\ y \geqslant 0$



ПРОГРЕССИИ

Формула n-го члена арифметической прогрессии (a_n), первый член которой равен a_1, а разность равна d:

$$a_n = a_1 + d(n - 1).$$

Формула суммы первых n членов арифметической прогрессии:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}.$$

Формула n-го члена геометрической прогрессии (b_n), первый член которой равен b_1, а знаменатель равен q:

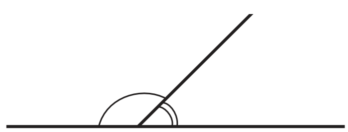
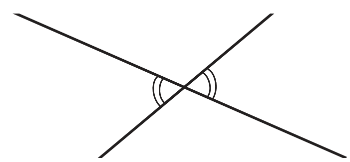
$$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}.$$

Формула суммы первых n членов геометрической прогрессии:

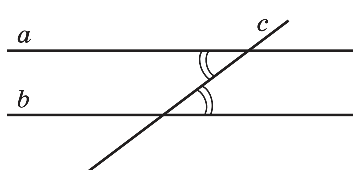
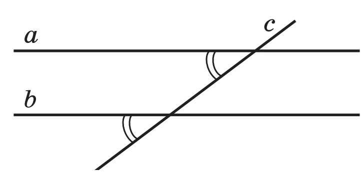
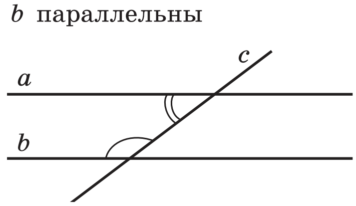
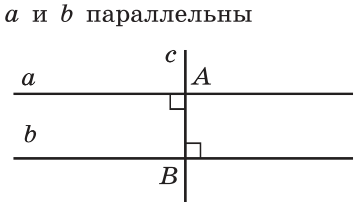
$$S_n = \frac{(q^n - 1) \cdot b_1}{q - 1}, \; q \neq 1.$$

ГЕОМЕТРИЯ

УГЛЫ

Смежные углы в сумме составляют 180° 	Вертикальные углы равны 

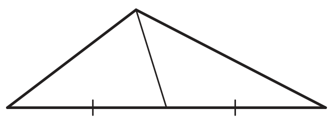
ПРИЗНАКИ ПАРАЛЛЕЛЬНОСТИ ПРЯМЫХ

Если накрест лежащие углы при прямых a и b и секущей c равны, то прямые a и b параллельны 	Если соответственные углы при прямых a и b и секущей c равны, то прямые a и b параллельны 
Если сумма односторонних углов при прямых a и b и секущей c равна 180°, то прямые a и b параллельны 	Если прямая a перпендикулярна прямой c и прямая b перпендикулярна прямой c, то прямые a и b параллельны 

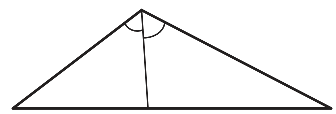
ТРЕУГОЛЬНИК

Сумма углов треугольника равна 180°

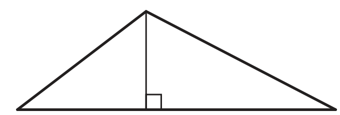
Медиана треугольника — это отрезок, соединяющий вершину треугольника с серединой противоположной стороны



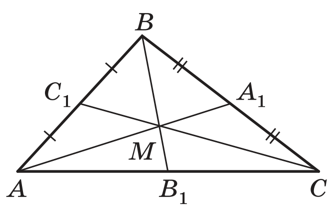
Биссектриса треугольника — это отрезок биссектрисы угла треугольника, соединяющий вершину этого угла с точкой на противоположной стороне



Высота треугольника — это перпендикуляр, проведённый из вершины треугольника к прямой, содержащей противоположную сторону

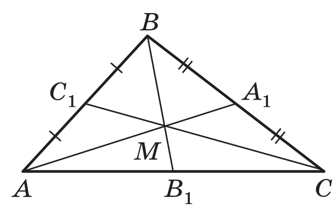


Свойство медианы



Медианы треугольника пересекаются в одной точке и делятся этой точкой в отношении 2 : 1, считая от вершины

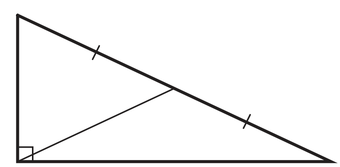
Свойство медианы



M — точка пересечения медиан AA_1, BB_1, CC_1:

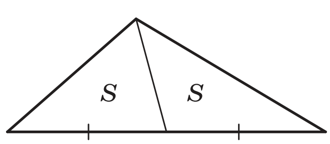
$$\frac{AM}{MA_1} = \frac{BM}{MB_1} = \frac{CM}{MC_1} = \frac{2}{1}$$

Теорема о медиане, проведённой к гипотенузе



Медиана, проведённая к гипотенузе, равна половине гипотенузы

Свойство медианы



Медиана разбивает треугольник на два равновеликих треугольника

Свойство медианы

Медианы AA_1, BB_1, CC_1 (M — точка их пересечения) треугольника ABC делят треугольник на 6 равновеликих треугольников:

$$S_{\triangle AMB_1} = S_{\triangle CMB_1} = S_{\triangle CMA_1} = S_{\triangle BMA_1} = S_{\triangle BMC_1} = S_{\triangle AMC_1}$$

Свойство медианы

Если M — точка пересечения медиан треугольника ABC, то треугольники AMB, BMC и AMC равновелики:

$$S_{\triangle AMB} = S_{\triangle BMC} = S_{\triangle AMC}$$

Длина медианы

Длина медианы m_a, проведённой к стороне длины a (b и c — длины двух других сторон), равна

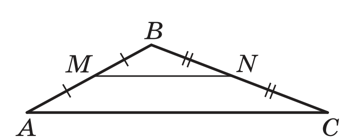
$$m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}$$

Длина биссектрисы

Если две стороны треугольника равны a и b, угол между ними равен γ, то длина биссектрисы, проведённой к третьей стороне, равна

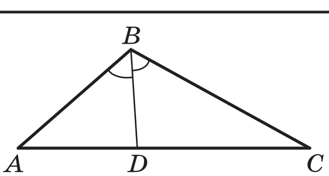
$$l = \frac{2ab\cos\frac{\gamma}{2}}{a+b}$$

Средняя линия треугольника



Средняя линия треугольника — отрезок, соединяющий середины двух его сторон:

1) $MN \parallel AB$; 2) $MN = \frac{1}{2}AB$

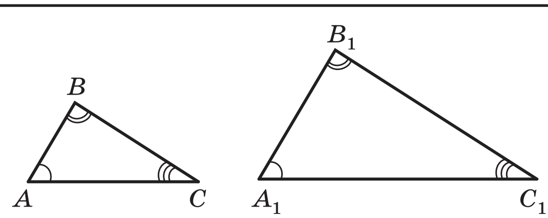
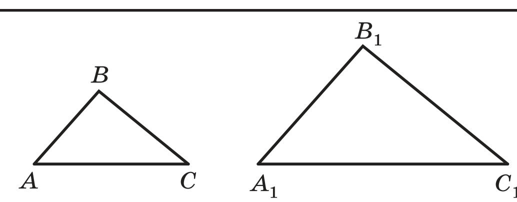


Свойство биссектрисы

Биссектриса треугольника делит противоположную сторону на отрезки, пропорциональные прилежащим сторонам, т. е. если BD — биссектриса треугольника ABC, то $\frac{AD}{DC} = \frac{AB}{BC}$

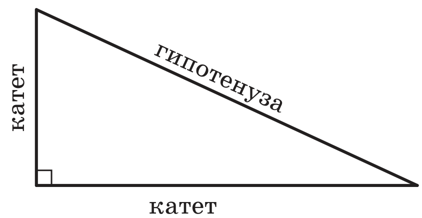
a, b, c — стороны, h_a — высота, опущенная на сторону a, A, B, C — углы, противолежащие сторонам a, b, c соответственно, P — периметр, p — полупериметр, S — площадь, R — радиус описанной окружности, r — радиус вписанной окружности	
Теорема косинусов $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$	**Теорема синусов** $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C} = 2R$
Периметр $P = a + b + c$	**Полупериметр** $p = \dfrac{a + b + c}{2}$
Площадь треугольника $S = \dfrac{1}{2}ah_a$ $S = \dfrac{1}{2}ab\sin C$ $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ (формула Герона) $S = \dfrac{abc}{4R}$ $S = pr$	**Высота** $h_a = b\sin C$ $h_a = \dfrac{2S}{a}$
Радиус описанной окружности $R = \dfrac{abc}{4S}$ $R = \dfrac{a}{2\sin A}$	**Радиус вписанной окружности** $r = \dfrac{2S}{a + b + c}$ $r = \dfrac{S}{p}$
Признаки равенства треугольников 1) По двум сторонам и углу между ними 2) По стороне и двум прилежащим к ней углам 3) По трём сторонам	

ПОДОБИЕ ТРЕУГОЛЬНИКОВ

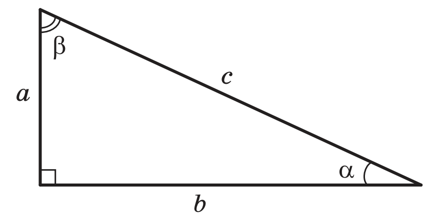
 $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $\angle C = \angle C_1$ $\dfrac{A_1B_1}{AB} = \dfrac{B_1C_1}{BC} = \dfrac{A_1C_1}{AC} = k$	**Признаки подобия треугольников** 1) По двум равным углам 2) По двум пропорциональным сторонам и углу между ними 3) По трём пропорциональным сторонам
Отношения в подобных треугольниках Отношение периметров (биссектрис, медиан, высот, радиусов вписанных и описанных окружностей) равно коэффициенту подобия	 $\dfrac{S_{\triangle A_1B_1C_1}}{S_{\triangle ABC}} = k^2$ Отношение площадей подобных фигур равно квадрату коэффициента подобия

ПРЯМОУГОЛЬНЫЙ ТРЕУГОЛЬНИК

Элементы прямоугольного треугольника



Теорема Пифагора



Квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Синус

$$\sin\alpha = \frac{a}{c}$$

Косинус

$$\cos\alpha = \frac{b}{c}$$

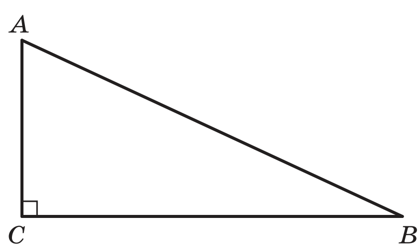
Тангенс

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b} \qquad \operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

Котангенс

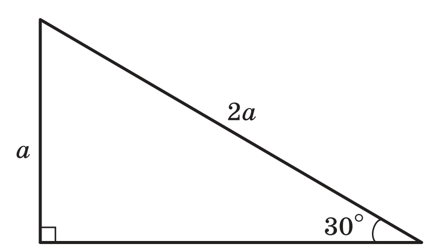
$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{b}{a} \qquad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

Свойство острых углов



$$\angle A + \angle B = 90^\circ$$

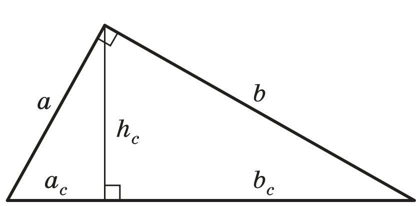
Свойство катета, лежащего против угла 30°



Катет, лежащий против угла 30°, равен половине гипотенузы

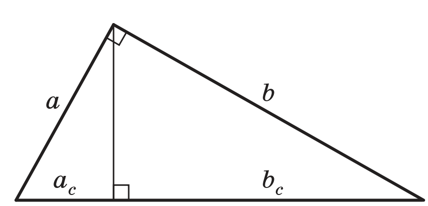
Высота, проведённая к гипотенузе

Высота, проведённая к гипотенузе, есть среднее пропорциональное между проекциями катетов на гипотенузу



$$h_c^2 = a_c \cdot b_c$$

Катет в прямоугольном треугольнике есть среднее пропорциональное между гипотенузой и проекцией этого катета на гипотенузу



$$a^2 = a_c \cdot c \qquad b^2 = b_c \cdot c$$

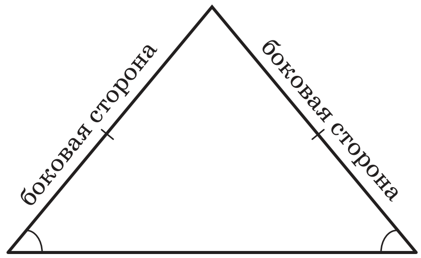
Радиус вписанной окружности

$$r = \frac{a + b - c}{2}$$

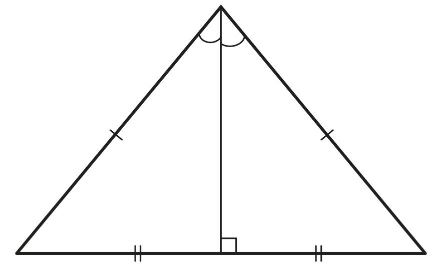
Радиус описанной окружности

$$R = \frac{c}{2}$$

РАВНОБЕДРЕННЫЙ ТРЕУГОЛЬНИК

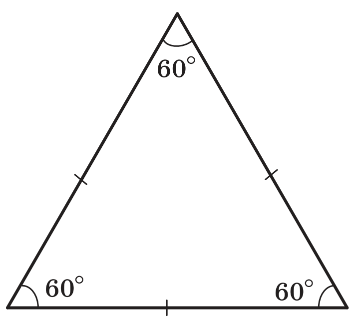


Углы при основании равнобедренного треугольника равны



Медиана, проведённая к основанию равнобедренного треугольника, является также биссектрисой и высотой треугольника

РАВНОСТОРОННИЙ ТРЕУГОЛЬНИК



$$S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

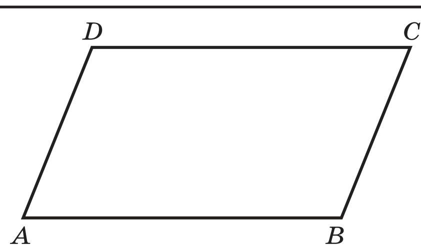
$$R = \frac{a\sqrt{3}}{3} \qquad h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$r = \frac{a\sqrt{3}}{6} \qquad h = 1{,}5R$$

$$h = 3r$$

a — сторона, h — высота,
R — радиус описанной окружности,
r — радиус вписанной окружности

ПАРАЛЛЕЛОГРАММ



Параллелограмм — четырёхугольник, у которого противоположные стороны попарно параллельны

Свойства

1) Диагонали точкой пересечения делятся пополам
2) Противоположные стороны равны
3) Противоположные углы равны
4) Сумма углов, прилежащих к одной стороне, равна 180°

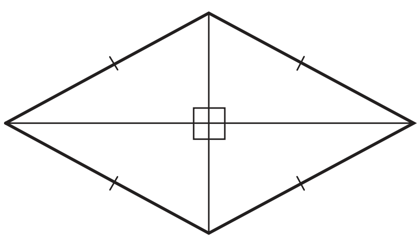
Признаки

Если у четырёхугольника:
1) диагонали пересекаются и точкой пересечения делятся пополам;
2) противоположные стороны попарно равны;
3) две противоположные стороны параллельны и равны,

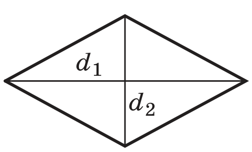
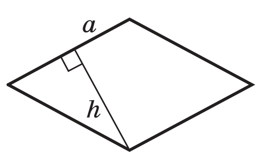
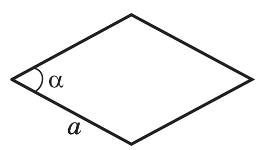
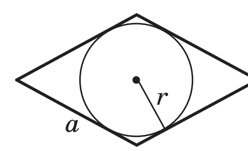
то четырёхугольник — параллелограмм

Площадь параллелограмма	Следствие из теоремы косинусов
$S = ah_a$, где a и b — стороны, h_a — высота, проведённая к стороне a; $S = ab\sin C$, где C — угол между сторонами a и b; $S = \frac{1}{2}d_1 d_2 \sin\alpha$, где d_1 и d_2 — диагонали, α — угол между диагоналями	$AC^2 + BD^2 = 2(AB^2 + AD^2)$ — сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов всех его сторон

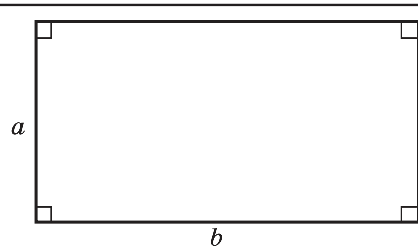
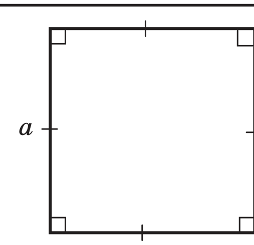
РОМБ

	Свойства
 **Ромб** — это параллелограмм, у которого все стороны равны	1) Диагонали ромба перпендикулярны 2) Диагонали являются биссектрисами углов ромба

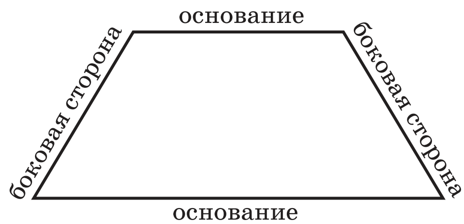
Площадь ромба

			
$S = \frac{1}{2}d_1 d_2$	$S = ah$	$S = a^2\sin\alpha$	$S = 2ar$

ПРЯМОУГОЛЬНИК. КВАДРАТ

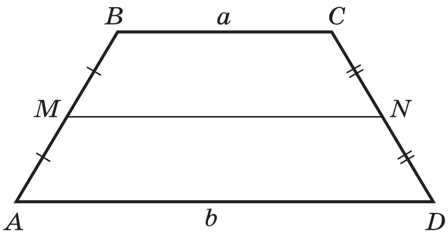
 **Прямоугольник** — это параллелограмм, у которого есть прямой угол **Свойство** Диагонали прямоугольника равны	 **Квадрат** — это прямоугольник, у которого все стороны равны. **Квадрат** — это ромб, у которого есть прямой угол. **Квадрат** — это параллелограмм, у которого все стороны равны и есть прямой угол
Площадь прямоугольника $S = ab$	**Площадь квадрата** $S = a^2$

ТРАПЕЦИЯ



Трапеция — четырёхугольник, у которого две стороны параллельны, а две другие стороны не параллельны.

Равнобедренная (равнобокая) трапеция — это трапеция, боковые стороны которой равны

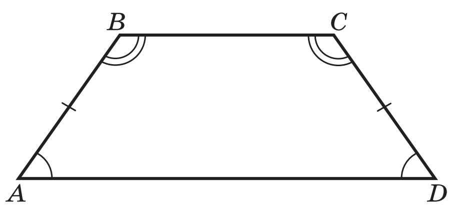


Средняя линия трапеции — это отрезок, соединяющий середины боковых сторон трапеции:

1) $MN \parallel AD \parallel BC$;

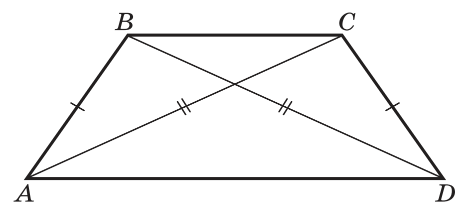
2) $MN = \dfrac{a+b}{2}$

Равнобедренная (равнобокая) трапеция и её свойства



$\angle A = \angle D$
$\angle B = \angle C$

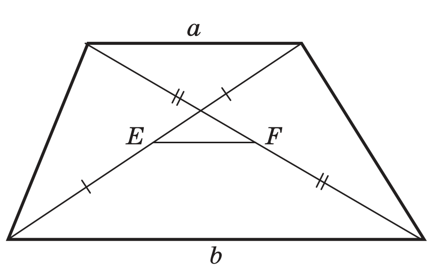
Углы при любом основании равнобедренной трапеции равны



$AC = BD$

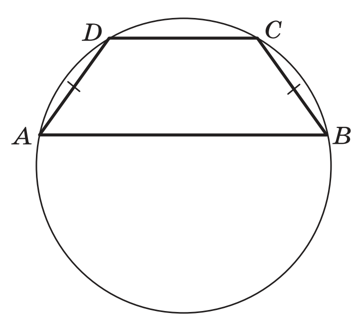
Диагонали равнобедренной трапеции равны

Отрезок, соединяющий середины диагоналей трапеции



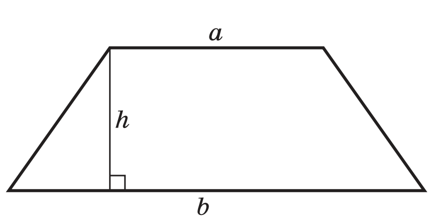
$$EF = \frac{b-a}{2}$$

Теорема об описанной окружности



Если около трапеции можно описать окружность, то эта трапеция **равнобедренная**

Площадь трапеции



$$S = \frac{a+b}{2} \cdot h$$

$$S = MN \cdot h,$$

MN — средняя линия, h — высота;

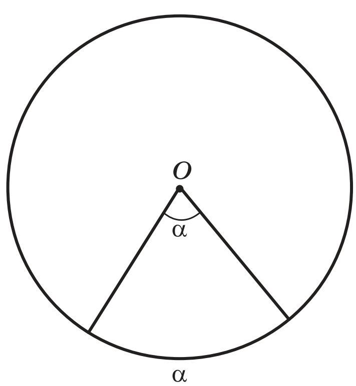
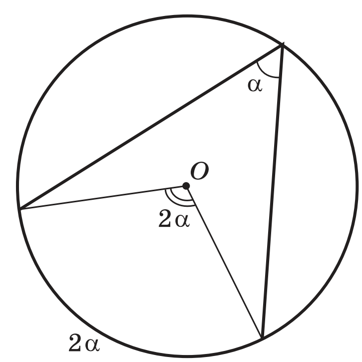
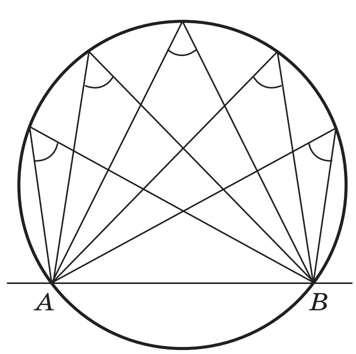
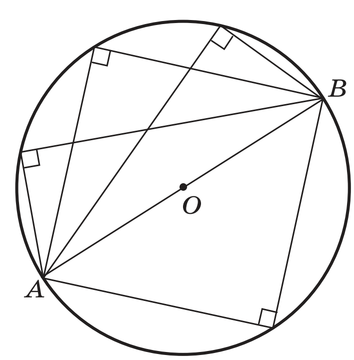
$$S = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin\gamma,$$

d_1, d_2 — диагонали, γ — угол между диагоналями

ОКРУЖНОСТЬ. КРУГ. КРУГОВОЙ СЕКТОР

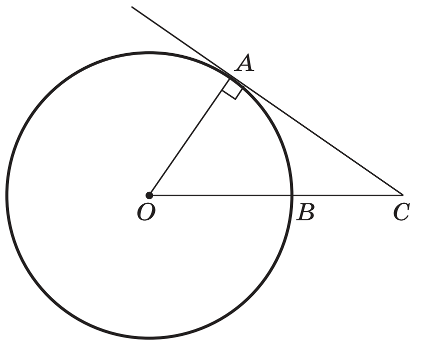
Длина окружности	**Площадь круга**
$C = 2\pi r$ $C = \pi d$	$S = \pi r^2$ $S = \dfrac{\pi d^2}{4}$
Длина дуги $l = \dfrac{\pi r}{180} \cdot \alpha,$ где угол α выражен в градусах	**Площадь кругового сектора** $S = \dfrac{\pi r^2}{360} \cdot \alpha,$ где угол α выражен в градусах

ЦЕНТРАЛЬНЫЙ УГОЛ. ВПИСАННЫЙ УГОЛ

Центральный угол	**Вписанный угол**
 Центральный угол равен градусной мере дуги, на которую он опирается	 Вписанный угол равен половине градусной меры дуги, на которую он опирается (равен половине градусной меры соответствующего центрального угла)
 Вписанные углы, стороны которых проходят через точки A и B окружности, а вершины лежат по одну сторону от прямой AB, равны (вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу AB, равны)	 Вписанные углы, опирающиеся на диаметр, прямые

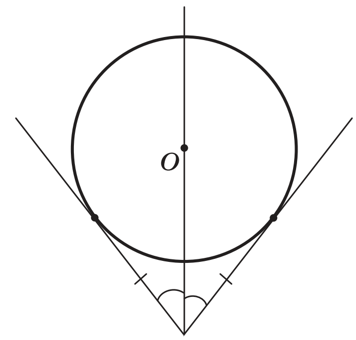
КАСАТЕЛЬНАЯ К ОКРУЖНОСТИ И СЕКУЩИЕ

Теорема о касательной



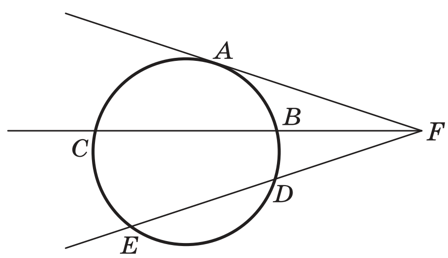
Касательная к окружности перпендикулярна радиусу, проведённому в точку касания

Теорема об отрезках касательных



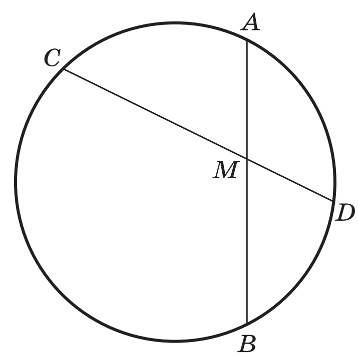
Отрезки касательных к окружности, проведённых из одной точки, равны и составляют равные углы с прямой, проходящей через эту точку и центр окружности

Пропорциональность отрезков касательной и секущих окружности



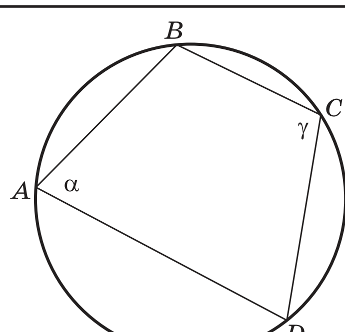
$FA^2 = FB \cdot FC = FD \cdot FE$

Пропорциональные отрезки хорд окружности



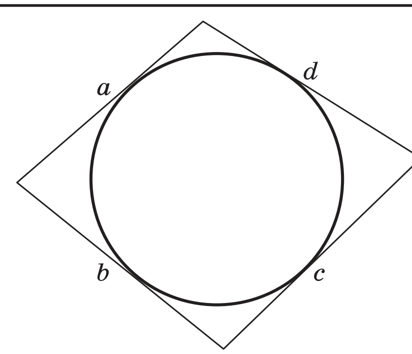
$AM \cdot MB = CM \cdot MD$

ВПИСАННЫЕ И ОПИСАННЫЕ ЧЕТЫРЁХУГОЛЬНИКИ



$\alpha + \gamma = 180°$

В любом вписанном в окружность четырёхугольнике сумма противоположных углов равна 180°



$a + c = b + d$

В любом описанном около окружности четырёхугольнике суммы противоположных сторон равны

ПРАВИЛЬНЫЕ n-УГОЛЬНИКИ

(выпуклый многоугольник, у которого все стороны равны и все углы равны)

n	a (сторона)	P (периметр)	S (площадь)	R (радиус описанной окружности)	r (радиус вписанной окружности)
3	$a = R\sqrt{3}$ $a = 2r\sqrt{3}$	$P = 3a$	$S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$	$R = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ $R = \frac{a}{\sqrt{3}}$	$r = \frac{a\sqrt{3}}{6}$ $r = \frac{a}{2\sqrt{3}}$
4	$a = R\sqrt{2}$ $a = 2r$	$P = 4a$	$S = a^2$	$R = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ $R = \frac{a}{\sqrt{2}}$	$r = \frac{a}{2}$
6	$a = R$ $a = \frac{2r}{\sqrt{3}}$	$P = 6a$	$S = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$	$R = a$	$r = \frac{a\sqrt{3}}{2}$
n	$a = 2R\sin\frac{180^\circ}{n}$ $a = 2r\,\mathrm{tg}\frac{180^\circ}{n}$	$P = na$	$S = \frac{na^2}{4\,\mathrm{tg}\frac{180^\circ}{n}}$	$R = \frac{a}{2\sin\frac{180^\circ}{n}}$	$r = \frac{a}{2\,\mathrm{tg}\frac{180^\circ}{n}}$

ЗАДАЧА 21

ПРИМЕР 1. Решите уравнение $\frac{1}{x^2}-\frac{3}{x}-4=0$.

РЕШЕНИЕ. *Первый способ.* Пусть $t=\frac{1}{x}$, тогда уравнение примет вид $t^2-3t-4=0$, откуда $t_1=-1$ и $t_2=4$.

Уравнение $\frac{1}{x}=-1$ имеет корень $x=-1$.

Уравнение $\frac{1}{x}=4$ имеет корень $x=\frac{1}{4}$.

Второй способ. Приведём к общему знаменателю дроби в левой части уравнения: $\frac{1-3x-4x^2}{x^2}=0$, откуда $\begin{cases}1-3x-4x^2=0,\\ x^2\neq 0.\end{cases}$

Первое уравнение системы $4x^2+3x-1=0$ имеет корни $x_1=-1$ и $x_2=\frac{1}{4}$.

Если $x=-1$, то $x^2\neq 0$,

если $x=\frac{1}{4}$, то $x^2\neq 0$.

ОТВЕТ: -1; $\frac{1}{4}$.

ПРИМЕР 2. Решите уравнение $(x-3)^4-3(x-3)^2-10=0$.

РЕШЕНИЕ. *Первый способ.* Пусть $t=(x-3)^2$, тогда уравнение примет вид $t^2-3t-10=0$, откуда $t_1=-2$ и $t_2=5$.

Уравнение $(x-3)^2=-2$ не имеет корней.

Решим уравнение $(x-3)^2=5$:

$x^2-6x+9-5=0$,

$x^2-6x+4=0$,

$\frac{D}{4}=(-3)^2-4=5$;

$x_{1,\,2}=3\pm\sqrt{5}$.

Второй способ. Пусть $t=(x-3)^2$, $t\geqslant 0$, тогда уравнение примет вид $t^2-3t-10=0$, откуда $t_1=-2$ и $t_2=5$.

$t=-2$ не удовлетворяет условию $t\geqslant 0$.

$t=5$;

$(x-3)^2=5$,

$x-3=\sqrt{5}$ или $x-3=-\sqrt{5}$.

$x=3+\sqrt{5}$; $x=3-\sqrt{5}$.

ОТВЕТ: $3-\sqrt{5}$; $3+\sqrt{5}$.

ПРИМЕР 3. Решите уравнение $x^4=(x-12)^2$.

РЕШЕНИЕ. *Первый способ.*

$x^4-(x-12)^2=0$,

$(x^2)^2-(x-12)^2=0$.

Разложим на множители левую часть уравнения по формуле разности квадратов:

$(x^2-x+12)(x^2+x-12)=0$.

Произведение двух множителей равно нулю в данном случае, если хотя бы один из множителей равен нулю:
$x^2 - x + 12 = 0$ или $x^2 + x - 12 = 0$.
Уравнение $x^2 - x + 12 = 0$ не имеет корней, так как его дискриминант $D = 1 - 4 \cdot 12 = -47 < 0$.
Уравнение $x^2 + x - 12 = 0$ имеет корни $x_1 = -4$ и $x_2 = 3$.

Второй способ.
$(x^2)^2 = (x - 12)^2$.
Известно, что $(A^2 = B^2) \Leftrightarrow (A = -B$ или $A = B)$. Тогда
$x^2 = -(x - 12)$ или $x^2 = x - 12$.
$x^2 + x - 12 = 0$, $x^2 - x + 12 = 0$,
$x_1 = -4$ и $x_2 = 3$; корней нет.

Третий способ. $x^4 = (x - 12)^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 = x - 12, \\ x^2 = -x + 12, \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 - x + 12 = 0, \\ x^2 + x - 12 = 0, \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -4, \\ x = 3. \end{array}\right.$

ОТВЕТ: -4; 3.

ПРИМЕР 4. Решите уравнение $x^6 = (x + 2)^3$.

РЕШЕНИЕ. $(x^2)^3 = (x + 2)^3$.
Известно, что $(A^3 = B^3) \Leftrightarrow (A = B)$. Тогда
$x^2 = x + 2$,
$x^2 - x - 2 = 0$,
$x_1 = -1$ и $x_2 = 2$.

ОТВЕТ: -1; 2.

ПРИМЕР 5. Решите уравнение $\dfrac{2x^2 - 9x + 4}{x^2 - 16} = 1$.

РЕШЕНИЕ. Данное уравнение равносильно системе
$\begin{cases} 2x^2 - 9x + 4 = x^2 - 16, \\ x^2 - 16 \neq 0; \end{cases}$

$\begin{cases} x^2 - 9x + 20 = 0, \\ x^2 \neq \pm 4. \end{cases}$

Уравнение $x^2 - 9x + 20 = 0$ имеет корни $x_1 = 4$ и $x_2 = 5$.
Корень $x = 4$ не удовлетворяет условию $x \neq \pm 4$.
$x = 5$ — корень исходного уравнения.

ОТВЕТ: 5.

ПРИМЕР 6. Решите уравнение $x^3 + 3x^2 = 4x + 12$.

РЕШЕНИЕ. $x^3 + 3x^2 - 4x - 12 = 0$.
Разложим левую часть последнего уравнения на множители способом группировки:
$x^2(x + 3) - 4(x + 3) = 0$,
$(x + 3)(x^2 - 4) = 0$,
$(x + 3)(x + 2)(x - 2) = 0$,
$x + 3 = 0$, или $x + 2 = 0$, или $x - 2 = 0$.
$x = -3$; $x = -2$; $x = 2$.

ОТВЕТ: -3; -2; 2.

ПРИМЕР 7. Решите уравнение $(x-2)(x^2+8x+16)=7(x+4)$.

РЕШЕНИЕ. Заметим, что $x^2+8x+16=(x+4)^2$.
Тогда исходное уравнение примет вид
$(x-2)(x+4)^2-7(x+4)=0$.
Вынесем за скобки общий множитель $(x+4)$:
$(x+4)((x-2)(x+4)-7)=0$,
$(x+4)(x^2+2x-15)=0$,
$x+4=0$ или $x^2+2x-15=0$.
$x=-4$; $x=-5$ или $x=3$.

ОТВЕТ: -5; -4; 3.

ПРИМЕР 8. Решите уравнение $(x-6)^3=36(x-6)$.

РЕШЕНИЕ. $(x-6)^3-36(x-6)=0$.
Вынесем за скобки общий множитель $(x-6)$:
$(x-6)((x-6)^2-36)=0$,
$x-6=0$ или $(x-6)^2-36=0$.
$x=6$; $(x-6)^2=36$,
$|x-6|=6$,
$x-6=-6$ или $x-6=6$.
$x=0$; $x=12$.

ОТВЕТ: 0; 6; 12.

ПРИМЕР 9. Решите уравнение $(3x+10)^2(7x-1)=(3x+10)(1-7x)^2$.

РЕШЕНИЕ. Заметим, что $(1-7x)^2=(7x-1)^2$.
Тогда исходное уравнение равносильно уравнению
$(3x+10)^2(7x-1)-(3x+10)(7x-1)^2=0$.
Вынесем за скобки общий множитель $(3x+10)(7x-1)$:
$(3x+10)(7x-1)(3x+10-7x+1)=0$,
$3x+10=0$, или $7x-1=0$, или $-4x+11=0$.
$x=-3\frac{1}{3}$; $x=\frac{1}{7}$; $x=2\frac{3}{4}$.

ОТВЕТ: $-3\frac{1}{3}$; $\frac{1}{7}$; $2\frac{3}{4}$.

ПРИМЕР 10. Решите уравнение $(x^2-49)^2+(x^2+4x-21)^2=0$.

РЕШЕНИЕ. Так как $(x^2-49)^2 \geqslant 0$ и $(x^2+4x-21)^2 \geqslant 0$, то решениями исходного уравнения являются общие решения уравнений
$x^2-49=0$ и $x^2+4x-21=0$.
Уравнение $x^2-49=0$ имеет корни -7 и 7.
Уравнение $x^2+4x-21=0$ имеет корни -7 и 3.
Значит, решением исходного уравнения является $x=-7$.

ОТВЕТ: -7.

ПРИМЕР 11. Решите уравнение $6x^2-13x+\sqrt{2-x}=\sqrt{2-x}+15$.

РЕШЕНИЕ. Выражения, стоящие в левой и правой частях уравнения, имеют смысл при $2-x \geqslant 0$, т. е. при $x \leqslant 2$.

После преобразований имеем
$6x^2 - 13x - 15 = 0,$
$D = 13^2 - 4 \cdot 6 \cdot (-15) = 169 + 360 = 529 = 23^2;$

$x_{1,2} = \dfrac{13 \pm 23}{12};$

$x_1 = -\dfrac{5}{6},\ x_2 = 3.$

$x = 3$ не удовлетворяет условию $x \leqslant 2$.

$x = -\dfrac{5}{6}$ удовлетворяет условию $x \leqslant 2$, значит, $x = -\dfrac{5}{6}$ — корень исходного уравнения.

ОТВЕТ: $-\dfrac{5}{6}$.

ПРИМЕР 12. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 6x^2 + y = 4, \\ 3x^2 - y = 5. \end{cases}$$

РЕШЕНИЕ. Сложим уравнения исходной системы:
$9x^2 = 9,$
$x^2 = 1,$
$x = \pm 1.$
Выразим y через x из первого уравнения системы:
$y = 4 - 6x^2.$
Если $x = -1$, то $y = -2$;
если $x = 1$, то $y = -2$.
Значит, $(-1; -2)$ и $(1; -2)$ — решения исходной системы уравнений.

ОТВЕТ: $(-1; -2)$; $(1; -2)$.

ПРИМЕР 13. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 3x^2 + 2y^2 = 45, \\ 9x^2 + 6y^2 = 45x. \end{cases}$$

РЕШЕНИЕ.

$$\begin{cases} 3x^2 + 2y^2 = 45, \\ 3(3x^2 + 2y^2) = 45x; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x^2 + 2y^2 = 45, \\ 3 \cdot 45 = 45x; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 3, \\ y^2 = \dfrac{45 - 3x^2}{2}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 3, \\ y^2 = 9; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 3, \\ y = -3 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x = 3, \\ y = 3. \end{cases}$$

ОТВЕТ: $(3; -3)$; $(3; 3)$.

ПРИМЕР 14. Решите систему уравнений

$$\begin{cases}(4x+1)^2 = 5y, & (1)\\ (x+4)^2 = 5y. & (2)\end{cases}$$

РЕШЕНИЕ. *Первый способ.* Вычтем из уравнения (1) уравнение (2):
$(4x+1)^2-(x+4)^2=0.$
Решим это уравнение, разложив левую часть на множители по формуле разности квадратов:
$(4x+1-x-4)(4x+1+x+4)=0,$
$(3x-3)(5x+5)=0,$
$3(x-1)\cdot 5(x+1)=0,$
$x=1$ или $x=-1.$
Из уравнения (2) выразим y через x:
$y=\dfrac{(x+4)^2}{5}.$
Если $x=1$, то $y=5$.
Если $x=-1$, то $y=1{,}8$.
Значит, решениями системы уравнений являются пары чисел (1; 5) и (–1; 1,8).

Второй способ. Правые части уравнений системы равны, значит, равны их левые части:
$(4x+1)^2=(x+4)^2,$
$4x+1=x+4$ или $4x+1=-(x+4).$
$3x=3,$ $5x=-5,$
$x=1;$ $x=-1.$
Из уравнения (2) выразим y через x:
$y=\dfrac{(x+4)^2}{5}.$
Если $x=1$, то $y=5$.
Если $x=-1$, то $y=1{,}8$.
Значит, решениями системы уравнений являются пары чисел (1; 5) и (–1; 1,8).
ОТВЕТ: (1; 5); (–1; 1,8).

ПРИМЕР 15. Решите систему уравнений

$$\begin{cases}x^2+y^2 = 37, & (1)\\ xy = 6. & (2)\end{cases}$$

РЕШЕНИЕ. *Первый способ.* Умножим обе части уравнения (2) на 2 и сложим с уравнением (1):

$$\begin{cases}x^2+2xy+y^2=49,\\ xy=6;\end{cases}$$

$$\begin{cases}(x+y)^2=49,\\ xy=6;\end{cases}$$

$$\begin{cases}x+y=-7,\\ xy=6\end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases}x+y=7,\\ xy=6.\end{cases}$$

$$\begin{cases}x=-6,\\ y=-1\end{cases} \text{или} \begin{cases}x=-1,\\ y=-6;\end{cases} \qquad \begin{cases}x=1,\\ y=6\end{cases} \text{или} \begin{cases}x=6,\\ y=1.\end{cases}$$

Второй способ. Выразим из уравнения (2), например, y через x и подставим в уравнение (1):

$y = \frac{6}{x}$,

$x^2 + \frac{36}{x^2} = 37$,

$\frac{x^4 - 37x^2 + 36}{x^2} = 0$,

$\frac{(x^2 - 1)(x^2 - 36)}{x^2} = 0$,

$\begin{cases} (x^2 - 1)(x^2 - 36) = 0, \\ x^2 \neq 0, \end{cases}$

$x = \pm 1$ или $x = \pm 6$.

Подставим найденные значения в уравнение (2), получим:

$\begin{cases} x = 1, \\ y = 6 \end{cases}$ или $\begin{cases} x = -1, \\ y = -6; \end{cases}$ $\begin{cases} x = 6, \\ y = 1 \end{cases}$ или $\begin{cases} x = -6, \\ y = -1. \end{cases}$

ОТВЕТ: (–6; –1); (–1; –6); (1; 6); (6; 1).

ПРИМЕР 16. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} (x - 6)(y - 5) = 0, \\ \frac{y - 2}{x + y - 8} = 3. \end{cases}$$

РЕШЕНИЕ. Исходная система равносильна совокупности двух систем уравнений:

$\begin{cases} x - 6 = 0, \\ \frac{y - 2}{x + y - 8} = 3 \end{cases}$ или $\begin{cases} y - 5 = 0, \\ \frac{y - 2}{x + y - 8} = 3. \end{cases}$

$\begin{cases} x = 6, \\ \frac{y - 2}{6 + y - 8} = 3; \end{cases}$ $\begin{cases} y = 5, \\ \frac{5 - 2}{x + 5 - 8} = 3; \end{cases}$

$\begin{cases} x = 6, \\ \frac{y - 2}{y - 2} = 3 \end{cases}$ — корней нет; $\begin{cases} y = 5, \\ x - 3 = 1; \end{cases}$

$\begin{cases} x = 4, \\ y = 5. \end{cases}$

ОТВЕТ: (4; 5).

ПРИМЕР 17. Решите неравенство $\frac{-18}{x^2 + 8x + 7} \leqslant 0$.

РЕШЕНИЕ. Исходное неравенство равносильно следующему неравенству: $x^2 + 8x + 7 > 0$.

Первый способ.

$(x + 1)(x + 7) > 0$.

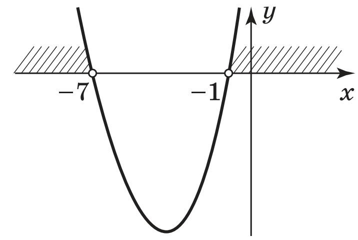
Рассмотрим функцию

$f(x) = (x + 1)(x + 7)$.

Её нули ($f(x) = 0$): $x_1 = -7$, $x_2 = -1$.

Знаки функции $f(x)$: 

Значит, $f(x) > 0$ при $x < -7$ и $x > -1$.



Второй способ. График соответствующей квадратичной функции $y = x^2 + 8x + 7$ — парабола, ветви которой направлены вверх (см. рисунок).
Нули функции: $x_1 = -7$, $x_2 = -1$.
$y > 0$ при $x < -7$ и $x > -1$.

ОТВЕТ: $(-\infty; -7) \cup (-1; +\infty)$.

ПРИМЕР 18. Решите неравенство $\dfrac{-369}{(x-1)^2 - 2} \geqslant 0$.

РЕШЕНИЕ. *Первый способ.* Данное неравенство равносильно следующему неравенству:

$(x-1)^2 - 2 < 0$,

$(x-1)^2 < 2$,

$|x-1| < \sqrt{2}$,

$-\sqrt{2} < x - 1 < \sqrt{2}$,

$1 - \sqrt{2} < x < 1 + \sqrt{2}$.

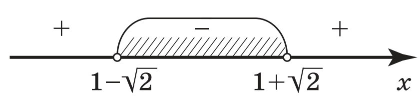
Второй способ. Данное неравенство равносильно следующему неравенству:

$(x-1)^2 - \left(\sqrt{2}\right)^2 < 0$,

$\left(x - 1 - \sqrt{2}\right)\left(x - 1 + \sqrt{2}\right) < 0$,

$\left(x - \left(1 + \sqrt{2}\right)\right)\left(x - \left(1 - \sqrt{2}\right)\right) < 0$,

$1 - \sqrt{2} < x < 1 + \sqrt{2}$.



ОТВЕТ: $\left(1 - \sqrt{2}; 1 + \sqrt{2}\right)$.

ПРИМЕР 19. Решите неравенство $(x-3)^2 < \sqrt{5}(x-3)$.

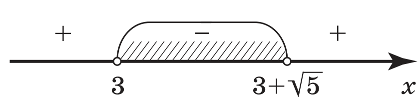
РЕШЕНИЕ. *Первый способ.*

$(x-3)^2 - \sqrt{5}(x-3) < 0$,

$(x-3)\left(x - 3 - \sqrt{5}\right) < 0$,

$(x-3)\left(x - \left(3 + \sqrt{5}\right)\right) < 0$,

$3 < x < 3 + \sqrt{5}$.



Второй способ. Раскроем скобки и перенесём все слагаемые в левую часть неравенства:

$x^2 - 6x + 9 - \sqrt{5}x + 3\sqrt{5} < 0$,

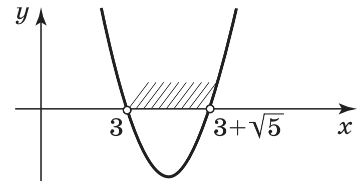
$x^2 - \left(6 + \sqrt{5}\right)x + \left(9 + 3\sqrt{5}\right) < 0$,

$D = \left(6 + \sqrt{5}\right)^2 - 4 \cdot \left(9 + 3\sqrt{5}\right) = 36 + 12\sqrt{5} + 5 - 36 - 12\sqrt{5} = 5 = \left(\sqrt{5}\right)^2$;

$x_{1,2} = \dfrac{6 + \sqrt{5} \pm \sqrt{5}}{2}$;

$x_1 = 3$, $x_2 = 3 + \sqrt{5}$.

График соответствующей квадратичной функции изображён на рисунке, $y < 0$ при $3 < x < 3 + \sqrt{5}$.



ОТВЕТ: $\left(3;\ 3 + \sqrt{5}\right)$.

ПРИМЕР 20. Решите неравенство $(3x - 5)^2 \geqslant (5x - 3)^2$.

РЕШЕНИЕ. *Первый способ.*

$(3x - 5)^2 - (5x - 3)^2 \geqslant 0$,

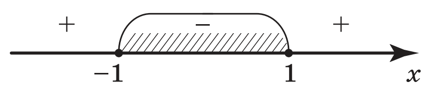
$(3x - 5 - 5x + 3)(3x - 5 + 5x - 3) \geqslant 0$,

$(-2x - 2)(8x - 8) \geqslant 0$,

$-2(x + 1) \cdot 8(x - 1) \geqslant 0$,

$(x + 1)(x - 1) \leqslant 0$,

$-1 \leqslant x \leqslant 1$.



Второй способ. Раскроем скобки в обеих частях неравенства:

$9x^2 - 30x + 25 \geqslant 25x^2 - 30x + 9$,

$-16x^2 + 16 \geqslant 0$,

$x^2 - 1 \leqslant 0$,

$x^2 \leqslant 1$,

$|x| \leqslant 1$,

$-1 \leqslant x \leqslant 1$.

ОТВЕТ: $[-1;\ 1]$.

ПРИМЕР 21. Решите неравенство $x^2(-x^2 - 36) \leqslant 36(-x^2 - 36)$.

РЕШЕНИЕ. Так как $-x^2 - 36 = -(x^2 + 36) < 0$ при любых значениях x, то исходное неравенство равносильно следующему:

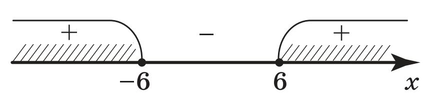
$x^2 \geqslant 36$.

Первый способ.

$x^2 - 36 \geqslant 0$,

$(x - 6)(x + 6) \geqslant 0$,

$x \leqslant -6$ или $x \geqslant 6$.



Второй способ.

$x^2 \geqslant 36$,

$|x| \geqslant 6$,

$$\left[\begin{aligned} &x \leqslant -6, \\ &x \geqslant 6. \end{aligned}\right.$$

ОТВЕТ: $(-\infty;\ -6] \cup [6;\ +\infty)$.

ПРИМЕР 22. Решите систему неравенств

$$\begin{cases} 4x^2 - 11x + 6 < 0, & (1) \\ 4x + 3 > 3x + 4. & (2) \end{cases}$$

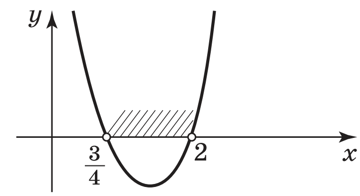
РЕШЕНИЕ. Решим неравенство (1) системы. График соответствующей квадратичной функции $y = 4x^2 - 11x + 6$ — парабола, ветви которой направлены вверх. Нули функции найдём из уравнения:

$4x^2 - 11x + 6 = 0$,

$D = 121 - 4 \cdot 4 \cdot 6 = 121 - 96 = 25 = 5^2$,

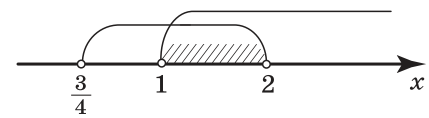
$x_{1,2} = \dfrac{11 \pm 5}{8}$;

$x_1 = \dfrac{3}{4}$, $x_2 = 2$.



Из рисунка видно, что $y < 0$ при $\dfrac{3}{4} < x < 2$.

Решим неравенство (2) системы.
$4x + 3 > 3x + 4$,
$x > 1$.
Общими решениями неравенств (1) и (2) являются все значения x из пересечения промежутков $\left(\dfrac{3}{4}; 2\right)$ и $(1; +\infty)$, т. е. промежуток $(1; 2)$.



ОТВЕТ: $(1; 2)$.

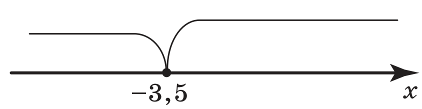
ПРИМЕР 23. Решите систему неравенств

$$\begin{cases} \dfrac{-7 - 2x}{37 + (7 - x)^2} \geqslant 0, \\ -47 + 41x \leqslant 93 + 81x. \end{cases}$$

РЕШЕНИЕ. Заметим, что неравенство $37 + (7 - x)^2 > 0$ выполняется для любого действительного значения x, поэтому исходная система равносильна следующей системе линейных неравенств:

$\begin{cases} -7 - 2x \geqslant 0, \\ -140 \leqslant 40x; \end{cases}$

$\begin{cases} x \leqslant -3{,}5, & (1) \\ x \geqslant -3{,}5. & (2) \end{cases}$



$x = -3{,}5$.

ОТВЕТ: $-3{,}5$.

ПРИМЕР 24. Сократите дробь: а) $\dfrac{75^{n-1}}{3^{n-1} \cdot 5^{2n-3}}$; б) $\dfrac{(3x)^3 \cdot x^{-9}}{x^{-10} \cdot 2x^4}$.

РЕШЕНИЕ.

а) $\dfrac{75^{n-1}}{3^{n-1} \cdot 5^{2n-3}} = \dfrac{(3 \cdot 25)^{n-1}}{3^{n-1} \cdot 5^{2n-3}} = \dfrac{3^{n-1} \cdot \left(5^2\right)^{n-1}}{3^{n-1} \cdot 5^{2n-3}} = \dfrac{5^{2n-2}}{5^{2n-3}} = 5^{2n-2-(2n-3)} = 5^1 = 5$.

ОТВЕТ: 5.

б) $\dfrac{(3x)^3 \cdot x^{-9}}{x^{-10} \cdot 2x^4} = \dfrac{27x^3 \cdot x^{-9}}{2 \cdot x^{-6}} = 13{,}5x^{-6+6} = 13{,}5x^0 = 13{,}5$.

ОТВЕТ: 13,5.

ПРИМЕР 25. Найдите значение выражения $(a^3 - a) \cdot \left(\dfrac{1}{a-1} - \dfrac{1}{a+1}\right)$ при $a = -27$.

РЕШЕНИЕ. *Первый способ.* Упростим выражение, сложив дроби в скобках:

$(a^3 - a) \cdot \left(\dfrac{1}{a-1} - \dfrac{1}{a+1}\right) = a(a^2 - 1) \cdot \dfrac{a + 1 - a + 1}{(a-1)(a+1)} = \dfrac{a(a^2 - 1) \cdot 2}{a^2 - 1} = 2a$.

Если $a = -27$, то $2a = 2 \cdot (-27) = -54$.

Второй способ. Раскроем скобки, умножив выражение $(a^3 - a)$ на каждую дробь:

$$(a^3 - a) \cdot \left(\frac{1}{a-1} - \frac{1}{a+1}\right) = \frac{a^3 - a}{a-1} - \frac{a^3 - a}{a+1} = \frac{a(a^2-1)}{a-1} - \frac{a(a^2-1)}{a+1} = \frac{a(a-1)(a+1)}{(a-1)} - \frac{a(a-1)(a+1)}{(a+1)} =$$

$= a(a+1) - a(a-1) = a(a+1-a+1) = 2a.$

Если $a = -27$, то $2a = 2 \cdot (-27) = -54$.

ОТВЕТ: -54.

ПРИМЕР 26. Найдите значение выражения $\dfrac{25x - 36y}{5\sqrt{x} - 6\sqrt{y}} + \sqrt{y}$, если $\sqrt{x} - \sqrt{y} = 13$.

РЕШЕНИЕ. Упростим исходное выражение, заметив, что $25x - 36y$ можно считать разностью квадратов выражений $5\sqrt{x}$ и $6\sqrt{y}$:

$$\frac{25x - 36y}{5\sqrt{x} + 6\sqrt{y}} + \sqrt{y} = \frac{\left(5\sqrt{x}\right)^2 - \left(6\sqrt{y}\right)^2}{5\sqrt{x} + 6\sqrt{y}} + \sqrt{y} = \frac{\left(5\sqrt{x} - 6\sqrt{y}\right)\left(5\sqrt{x} + 6\sqrt{y}\right)}{5\sqrt{x} + 6\sqrt{y}} + \sqrt{y} = 5\sqrt{x} - 6\sqrt{y} + \sqrt{y} =$$

$= 5\sqrt{x} - 5\sqrt{y} = 5\left(\sqrt{x} - \sqrt{y}\right).$

Если $\sqrt{x} - \sqrt{y} = 13$, то $5\left(\sqrt{x} - \sqrt{y}\right) = 5 \cdot 13 = 65$.

ОТВЕТ: 65.

ПРИМЕР 27. Найдите значение выражения $28a - 7b + 40$, если $\dfrac{2a - 5b + 7}{5a - 2b + 7} = 6$.

РЕШЕНИЕ. Если $\dfrac{2a - 5b + 7}{5a - 2b + 7} = 6$, то $2a - 5b + 7 = 6(5a - 2b + 7)$, $28a - 7b + 35 = 0$.

Тогда $28a - 7b + 40 = 28a - 7b + 35 + 5 = 5$.

ОТВЕТ: 5.

ПРИМЕР 28. Найдите значение выражения $\dfrac{p(a)}{p\left(\frac{1}{a}\right)}$, если $p(b) = \left(b + \dfrac{3}{b}\right)\left(3b + \dfrac{1}{b}\right)$.

РЕШЕНИЕ. $p(a) = \left(a + \dfrac{3}{a}\right)\left(3a + \dfrac{1}{a}\right)$,

$p\left(\dfrac{1}{a}\right) = \left(\dfrac{1}{a} + 3a\right)\left(\dfrac{3}{a} + a\right)$.

Заметим, что $p(a) = p\left(\dfrac{1}{a}\right)$.

Значит, $\dfrac{p(a)}{p\left(\frac{1}{a}\right)} = 1$.

ОТВЕТ: 1.

Задания для самостоятельного решения

1. Решите уравнение $\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x}-3=0.$

2. Решите уравнение $(x+2)^4-4(x+2)^2-5=0.$

3. Решите уравнение $x^4=(x-20)^2.$

4. Решите уравнение $x^6=(x+6)^3.$

5. Решите уравнение $\frac{2x^2+7x+3}{x^2-9}=1.$

6. Решите уравнение $x^3+3x^2-x-3=0.$

7. Решите уравнение $x(x^2+2x+1)=2(x+1).$

8. Решите уравнение $(x+7)^3=49(x+7).$

9. Решите уравнение $(2x-3)^2(x-3)=(2x-3)(x-3)^2.$

10. Решите уравнение $(x^2-25)^2+(x^2+3x-10)^2=0.$

11. Решите уравнение $x^2-6x+\sqrt{6-x}=\sqrt{6-x}+7.$

12. Решите систему уравнений $\begin{cases}3x^2+y=4,\\2x^2-y=1.\end{cases}$

13. Решите систему уравнений $\begin{cases}2x^2+3y^2=11,\\4x^2+6y^2=11x.\end{cases}$

14. Решите систему уравнений $\begin{cases}\left(x+6y\right)^2=7y,\\\left(x+6y\right)^2=7x.\end{cases}$

15. Решите систему уравнений $\begin{cases}x^2=4y+1,\\x^2+3=4y+y^2.\end{cases}$

16. Решите систему уравнений $\begin{cases}(x-6)(y-7)=0,\\\frac{y-4}{x+y-10}=3.\end{cases}$

17. Решите неравенство $\frac{-12}{x^2-7x-8}\leqslant 0.$

18. Решите неравенство $\frac{-12}{(x-1)^2-2}\geqslant 0.$

19. Решите неравенство $(x-4)^2<\sqrt{3}(x-4).$

20. Решите неравенство $(3x-7)^2\geqslant(7x-3)^2.$

21. Решите неравенство $x^2(-x^2-9)\leqslant 9(-x^2-9).$

22. Решите систему неравенств $\begin{cases}7(3x+2)-3(7x+2)>2x,\\(x-4)(x+8)<0.\end{cases}$

23. Решите систему неравенств $\begin{cases} \dfrac{2-x}{2+(3-x)^2} \geqslant 0, \\ 6-9x \leqslant 31-4x. \end{cases}$

24. Сократите дробь $\dfrac{4 \cdot 36^n}{3^{2n-3} \cdot 2^{2n+2}}$.

25. Найдите значение выражения $(a^3-16a)\cdot\left(\dfrac{1}{a+4}-\dfrac{1}{a-4}\right)$ при $a=-45$.

26. Найдите значение выражения $\dfrac{4x-9y}{2\sqrt{x}-3\sqrt{y}}-\sqrt{y}$, если $\sqrt{x}+\sqrt{y}=7$.

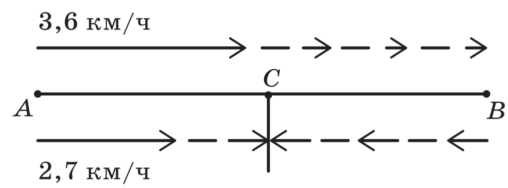
27. Найдите значение выражения $61a-11b+50$, если $\dfrac{2a-7b+5}{7a-2b+5}=9$.

28. Найдите значение выражения $\dfrac{p(a)}{p(6-a)}$, если $p(b)=\dfrac{b(6-b)}{b-3}$.

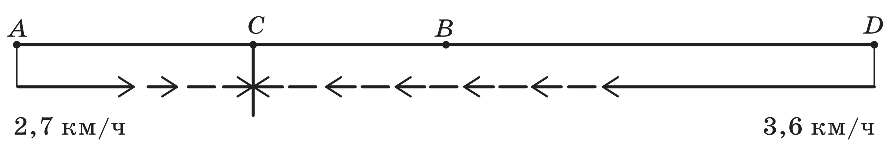
ЗАДАЧА 22

ПРИМЕР 1. Два человека отправляются из одного и того же места на прогулку до опушки леса, находящейся в 3,5 км от места отправления. Один идёт со скоростью 2,7 км/ч, а другой — со скоростью 3,6 км/ч. Дойдя до опушки, второй с той же скоростью возвращается обратно. На каком расстоянии от места отправления произойдёт их встреча?

РЕШЕНИЕ. *Первый способ (арифметический)*. Изобразим отрезком AB путь от места отправления (точка A) до опушки леса (точка B), точка C — место встречи.



$AB = 3{,}5$ км.
По условию задачи второй человек дошёл до опушки и повернул обратно. Если представить, что второй человек всё время шёл навстречу первому, то можно изобразить следующую схему:



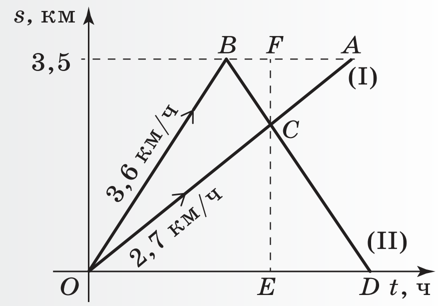
$AB = BD = 3{,}5$ км.
Тогда:
1) $3{,}5 \cdot 2 = 7$ (км) — путь, пройденный двумя путниками;
2) $2{,}7 + 3{,}6 = 6{,}3$ (км/ч) – скорость сближения путников;
3) $7 : 6{,}3 = \frac{70}{63} = \frac{10}{9}$ (ч) — время движения до встречи;
4) $2{,}7 \cdot \frac{10}{9} = 3$ (км) — расстояние AC от точки отправления до места встречи.

Второй способ (алгебраический). Пусть встреча произошла через t ч после начала движения. Тогда первый человек прошёл $2{,}7t$ (км), второй — $3{,}6t$ (км) до встречи, а вместе они прошли $2 \cdot 3{,}5 = 7$ (км).
Значит,
$2{,}7t + 3{,}6t = 7,$
$6{,}3t = 7,$
$t = \frac{7}{6{,}3},$
$t = \frac{10}{9}.$

Тогда искомое расстояние равно $2{,}7t = 2{,}7 \cdot \frac{10}{9} = 3$ (км).

ОТВЕТ: 3 км.

ЗАМЕЧАНИЕ. Для наглядности решения этой задачи первым или вторым способом можно было построить графическую модель предложенной ситуации. Построим графики движений путников в системе координат tOs:
отрезок OA — график движения первого человека, ломаная OBD — график движения второго человека, C — точка пересечения графиков, CE — искомое расстояние.



ПРИМЕР 2. Из пункта A в пункт B одновременно выехали два автомобиля. Первый автомобиль проехал весь путь с постоянной скоростью. Второй автомобиль проехал первую половину пути со скоростью, меньшей скорости первого автомобиля на 11 км/ч, а вторую половину пути — со скоростью 66 км/ч. В результате второй автомобиль прибыл в пункт B одновременно с первым. Найдите скорость первого автомобиля, если известно, что она больше 40 км/ч.

РЕШЕНИЕ. *Первый способ.* Пусть s км — половина пути из пункта A в пункт B. Заполним таблицу по условию задачи:

	Путь (км)	Скорость (км/ч)	Время (ч)
Первый автомобиль	$2s$	x $(x > 40)$	$\frac{2s}{x}$
Второй автомобиль	s	$x - 11$	$\frac{s}{x-11}$
	s	66	$\frac{s}{66}$

По условию задачи автомобили затратили на путь AB одинаковое время.

Поэтому $\frac{2s}{x} = \frac{s}{x-11} + \frac{s}{66} \,\Big|: s \neq 0,$

$\frac{2}{x} = \frac{1}{x-11} + \frac{1}{66} \,\Big|\cdot 66x(x-11) \neq 0,$

$2 \cdot 66(x-11) = 66x + x(x-11),$

$x^2 - 77x + 66 \cdot 22 = 0,$

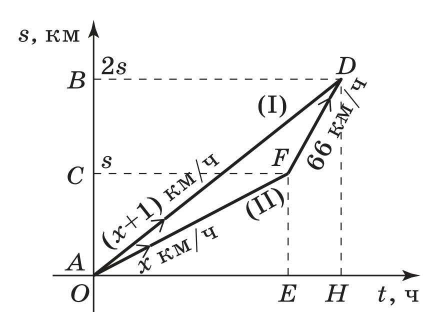
$D = 77^2 - 4 \cdot 66 \cdot 22 = (7 \cdot 11)^2 - 4 \cdot 12 \cdot 11^2 = 11^2(49 - 48) = 11^2,$

$x_{1,2} = \frac{77 \pm 11}{2},$

$x_1 = 33$ — не удовлетворяет условию $x > 40$,

$x_2 = 44$.

Второй способ. Построим графическую модель предложенной ситуации в системе координат tOs.
Отрезок AD — график движения первого автомобиля. Ломаная AFD — график движения второго автомобиля, точка C — середина AB, $AC = CB = s$ км, $AB = 2s$ км.



Пусть x км/ч — скорость второго автомобиля на первой половине пути, тогда $(x+11)$ км/ч — скорость первого автомобиля, $x+11>40$ (по условию задачи). Время движения первого автомобиля $\frac{2s}{x+11}$ ч; время движения второго автомобиля $\left(\frac{s}{x}+\frac{s}{66}\right)$ ч. По условию задачи время движения автомобилей одинаково, поэтому

$$\frac{2s}{x+11}=\frac{s}{x}+\frac{s}{66} \;\Big|\cdot \frac{66x(x+11)}{s}\neq 0,$$

$2\cdot 66x=66(x+11)+x(x+11),$
$x^2-55x+726=0,$
$D=3025-4\cdot 726=121=11^2,$
$x_{1,2}=\frac{55\pm 11}{2},$
$x_1=22,\ x_2=33.$
Если $x=22$, то $x+11=33$ — не удовлетворяет условию $x+11>40$.
Если $x=33$, то $x+11=44$, $44>40$.
Если $x=33$, то $66x(x+11)\neq 0$.
Значит, скорость первого автомобиля 44 км/ч.

ОТВЕТ: 44 км/ч.

ПРИМЕР 3. Два велосипедиста одновременно отправляются в 60-километровый пробег. Первый едет со скоростью, на 10 км/ч большей, чем второй, и прибывает к финишу на 3 ч раньше второго. Найдите скорость велосипедиста, прибывшего к финишу вторым.

РЕШЕНИЕ. Заполним таблицу по условию задачи:

	Путь (км)	Скорость (км/ч)	Время (ч)
Первый велосипедист	60	$x+10$	$\frac{60}{x+10}$
Второй велосипедист	60	x	$\frac{60}{x}$

Так как на весь путь второй велосипедист потратил на 3 ч больше, чем первый, то

$$\frac{60}{x}-\frac{60}{x+10}=3 \;\Big|\cdot x(x+10)\neq 0,$$

$60x+600-60x=3x^2+30x,$
$x^2+10x-200=0,$
$x_1=-50$ — не удовлетворяет условию $x>0$,
$x_2=40.$
Если $x=40$, то $x(x+10)\neq 0$.
Итак, скорость велосипедиста, прибывшего к финишу вторым, 40 км/ч.

ОТВЕТ: 40 км/ч.

ПРИМЕР 4. Теплоход проходит по течению реки до пункта назначения 165 км и после стоянки возвращается в пункт отправления. Найдите скорость теплохода в неподвижной воде, если скорость течения равна 4 км/ч, стоянка длится 5 ч, а в пункт отправления теплоход возвращается через 18 ч после отплытия из него.

РЕШЕНИЕ. Пусть x км/ч — скорость теплохода в неподвижной воде. По данным условия задачи составим таблицу:

	Путь (км)	Скорость (км/ч)	Время (ч)
По течению реки	165	$x+4$	$\frac{165}{x+4}$
Против течения реки	165	$x-4$	$\frac{165}{x-4}$

По условию задачи теплоход двигался $18-5=13$ (ч). Следовательно,

$\frac{165}{x+4}+\frac{165}{x-4}=13 \mid \cdot (x+4)(x-4) \neq 0,$

$13x^2-330x-208=0,$

$\frac{D}{4}=165^2+13\cdot 208=29\ 929=173^2,$

$x_{1,2}=\frac{165\pm 173}{13},$

$x_1=-\frac{8}{13}$ — не удовлетворяет условию $x>0$,

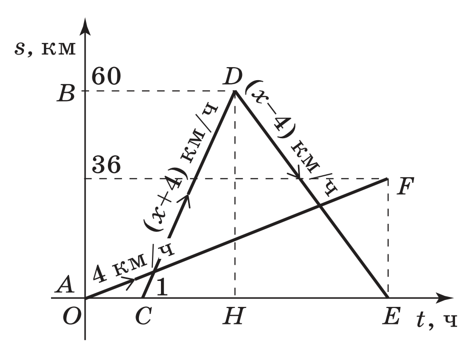
$x_2=26.$

Если $x=26$, то $(x+4)(x-4)\neq 0$.

ОТВЕТ: 26 км/ч.

ПРИМЕР 5. Расстояние между пристанями A и B равно 60 км. От пристани A к пристани B по течению реки отправился плот, а через час вслед за ним отправилась моторная лодка, которая, прибыв к пристани B, тотчас повернула обратно и возвратилась к пристани A. К этому времени плот проплыл 36 км. Найдите скорость лодки в неподвижной воде, если скорость течения реки равна 4 км/ч.

РЕШЕНИЕ. Построим графическую модель по условию задачи в системе координат tOs. Отрезок AF — график движения плота. Ломаная CDE — график движения моторной лодки. Время движения плота $t=\frac{36}{4}=9$ (ч). Значит, время движения моторной лодки $9-1=8$ (ч). С другой стороны, время движения лодки $CH+HE=\frac{60}{x+4}+\frac{60}{x-4}$.



Значит,

$\frac{60}{x+4}+\frac{60}{x-4}=8 \mid \cdot \frac{(x+4)(x-4)}{4} \neq 0,$

$15x-60+15x+60=2(x^2-16),$

$x^2-15x-16=0,$

$x_1=-1$ — не удовлетворяет условию $x>0$,

$x_2=16.$

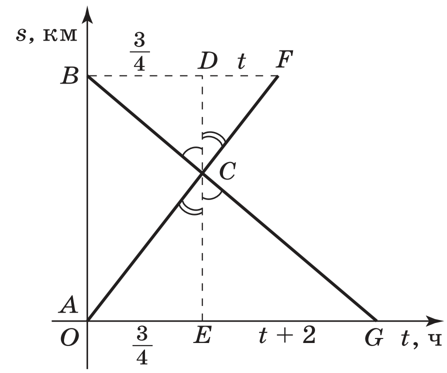
Если $x=16$, то $(x+4)(x-4)\neq 0$.

Значит, скорость лодки в неподвижной воде 16 км/ч.

ОТВЕТ: 16 км/ч.

ПРИМЕР 6. Из городов A и B навстречу друг другу одновременно выехали мотоциклист и велосипедист. Мотоциклист приехал в город B на 2 ч раньше, чем велосипедист приехал в город A, а встретились они через 45 мин после выезда. Сколько часов затратил на путь из города B в город A велосипедист?

РЕШЕНИЕ. Построим графическую модель по условию задачи в системе координат tOs. $45 \text{ мин} = \frac{3}{4}$ ч.



Отрезок AF — график движения мотоциклиста. Отрезок BG — график движения велосипедиста. AF пересекается с BG в точке C. По условию $AE = BD = \frac{3}{4}$ (ч).

Пусть $DF = t$ ч, тогда $EG = (t+2)$ ч. Рассмотрим подобные треугольники:

1) $\triangle BCD \sim \triangle GCE$ (прямоугольные, с равными острыми углами при вершине C), поэтому $\frac{BD}{GE} = \frac{CD}{CE}$;

2) аналогично $\triangle FCD \sim \triangle ACE$, поэтому $\frac{FD}{AE} = \frac{CD}{CE}$.

Значит, $\frac{BD}{GE} = \frac{FD}{AE}$. Откуда $\frac{\frac{3}{4}}{t+2} = \frac{t}{\frac{3}{4}}$,

$t(t+2) = \left(\frac{3}{4}\right)^2$,

$t^2 + 2t - \frac{9}{16} = 0$,

$\frac{D}{4} = 1 + \frac{9}{16} = \frac{25}{16} = \left(\frac{5}{4}\right)^2$,

$t_{1,2} = -1 \pm \frac{5}{4}$,

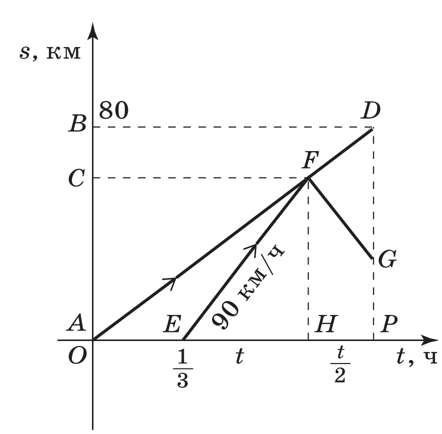
$t_1 = -\frac{9}{4}$ — не удовлетворяет условию $t > 0$,

$t_2 = \frac{1}{4}$.

Время движения велосипедиста $AG = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} + 2 = 3$ (ч).

ОТВЕТ: 3 ч.

ПРИМЕР 7. Расстояние между городами A и B равно 80 км. Из города A в город B выехал автомобилист, а через 20 мин следом за ним со скоростью 90 км/ч выехал мотоциклист. Мотоциклист догнал автомобилиста в городе C и повернул обратно. Когда он проехал половину пути из города C в город A, автомобилист прибыл в город B. Найдите расстояние от города A до города C.



РЕШЕНИЕ. Построим графическую модель по условию задачи в системе координат tOs. $20 \text{ мин} = \frac{1}{3}$ ч.

Отрезок AD — график движения автомобилиста. Ломаная EFG — график движения мотоциклиста.

Пусть $EH = t$ ч — время движения мотоциклиста от города A до города C, тогда $HP = \frac{t}{2}$ (ч).

Рассмотрим подобные треугольники:
$\triangle AFH \sim \triangle ADP$ (прямоугольные треугольники с общим острым углом при вершине A), значит, $\frac{AH}{AP} = \frac{FH}{DP}$. Откуда $\dfrac{t + \frac{1}{3}}{t + \frac{t}{2} + \frac{1}{3}} = \dfrac{90t}{80}$,

$\frac{27}{2}t^2 - 5t - \frac{8}{3} = 0$,

$D = 25 + 4 \cdot \frac{27}{2} \cdot \frac{8}{3} = 169 = 13^2$,

$t_{1,2} = \frac{5 \pm 13}{27}$,

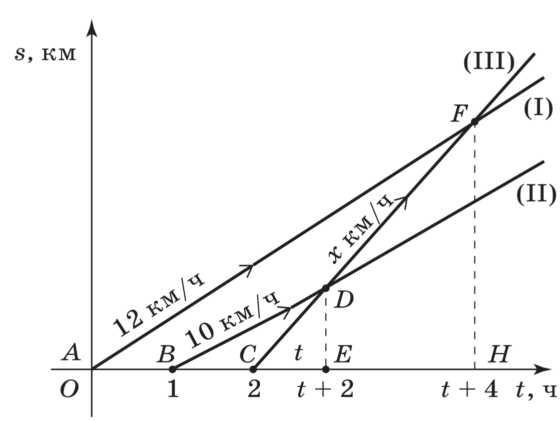
$t_1 = -\frac{8}{27}$ — не удовлетворяет условию $t > 0$,

$t_2 = \frac{2}{3}$.

Значит, мотоциклист проехал расстояние AC за $\frac{2}{3}$ ч, а само расстояние $AC = \frac{2}{3} \cdot 90 = 60$ (км).

ОТВЕТ: 60 км.

ПРИМЕР 8. Первый велосипедист выехал из посёлка по шоссе со скоростью 12 км/ч. Через час после него со скоростью 10 км/ч из того же посёлка в том же направлении выехал второй велосипедист, а ещё через час — третий. Найдите скорость третьего велосипедиста, если сначала он догнал второго, а через 2 ч после этого догнал первого.



РЕШЕНИЕ. Построим графическую модель по условию задачи в системе координат tOs.
Луч AF — график движения первого велосипедиста. Луч BD — график движения второго велосипедиста. Луч CD — график движения третьего велосипедиста.
Пусть x км/ч — скорость третьего велосипедиста, и через t ч после своего выезда третий велосипедист догнал второго. Тогда:
1) расстояние DE третий велосипедист проехал за t ч, а второй — за $(t+1)$ ч, поэтому $xt = 10(t+1)$;
2) расстояние FH третий велосипедист проехал за $(t+2)$ ч, а первый — за $(t+4)$ ч, поэтому $x(t+2) = 12(t+4)$.
Решим систему получившихся уравнений:

$$\begin{cases} xt = 10(t+1), \\ x(t+2) = 12(t+4); \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \dfrac{10(t+1)}{t}, \\ \dfrac{xt}{x(t+2)} = \dfrac{10(t+1)}{12(t+4)}. \end{cases}$$

Решим второе уравнение системы:

$$\frac{t}{t+2} = \frac{5(t+1)}{6(t+4)},$$

$6t(t+4) = 5(t+1)(t+2),$
$t^2 + 9t - 10 = 0,$
$t_1 = -10$ — не удовлетворяет условию $t > 0$,
$t_2 = 1$.

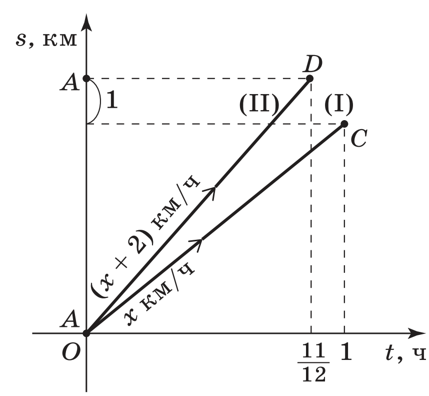
Если $t = 1$, то $x = \frac{10(t+1)}{t} = 20$.

Значит, скорость третьего велосипедиста 20 км/ч.

ОТВЕТ: 20 км/ч.

ПРИМЕР 9. Два бегуна одновременно стартовали в одном направлении из одного и того же места круговой трассы в беге на несколько кругов. Спустя один час, когда первому из них оставалось пробежать 1 км до окончания первого круга, ему сообщили, что второй бегун прошёл первый круг 5 мин назад. Найдите скорость первого бегуна, если известно, что она на 2 км/ч меньше скорости второго бегуна.

РЕШЕНИЕ. Построим графическую модель по условию задачи в системе координат tOs.



5 мин $= \frac{1}{12}$ ч, $1 - \frac{1}{12} = \frac{11}{12}$ (ч).

Отрезок AC — график движения первого бегуна. Отрезок AD — график движения второго бегуна.
Пусть x км/ч — скорость первого бегуна, тогда $(x+2)$ км/ч — скорость второго бегуна.
За 1 ч первый бегун пробежал x км, что на 1 км меньше пути второго бегуна, который за $\frac{11}{12}$ ч пробежал $\frac{11}{12}(x+2)$ км, поэтому

$\frac{11}{12}(x+2) - x = 1 \ \big| \cdot 12,$

$11(x+2) - 12x = 12,$
$x = 10.$
Значит, скорость первого бегуна 10 км/ч.

ОТВЕТ: 10 км/ч.

ПРИМЕР 10. Первую половину трассы автомобиль проехал со скоростью 56 км/ч, а вторую — со скоростью 84 км/ч. Найдите среднюю скорость движения автомобиля на протяжении всего пути.

РЕШЕНИЕ. Пусть половина трассы составляет s км. Тогда время движения автомобиля по первой половине трассы $t_1 = \frac{s}{56}$ (ч), время движения по второй половине трассы $t_2 = \frac{s}{86}$ (ч).

Средняя скорость движения автомобиля

$$v_{\text{ср}} = \frac{2s}{t_1 + t_2} = \frac{2s}{\frac{s}{56} + \frac{s}{84}} = \frac{2s \cdot 28 \cdot 2 \cdot 3}{3s + 2s} = \frac{12 \cdot 28s}{5s} = 67{,}2 \text{ (км/ч).}$$

ОТВЕТ: 67,2 км/ч.

ПРИМЕР 11. По двум параллельным железнодорожным путям в одном направлении следуют пассажирский и товарный поезда, скорости которых равны соответственно 70 км/ч и 30 км/ч. Длина товарного поезда равна 1400 м. Найдите длину пассажирского поезда, если время, за которое он прошёл мимо товарного поезда, равно 3 мин.

РЕШЕНИЕ. Пусть l км — длина пассажирского поезда. Так как поезда движутся в одном направлении, то скорость их сближения равна разности их скоростей: $v = 70 - 30 = 40$ (км/ч). Путь, который прошёл пассажирский поезд, равен сумме длин поездов: $(l + 1{,}4)$ км. По условию время движения пассажирского поезда при этом равно 3 мин $= \frac{3}{60}$ ч $= \frac{1}{20}$ ч.

Тогда $40 \cdot \frac{1}{20} = l + 1{,}4$,

$l + 1{,}4 = 2$,

$l = 0{,}6$.

Значит, длина пассажирского поезда 0,6 км = 600 м.

ОТВЕТ: 600 м.

ПРИМЕР 12. Первая труба пропускает на 10 л воды в минуту меньше, чем вторая труба. Сколько литров воды в минуту пропускает вторая труба, если резервуар объёмом 60 л она заполняет на 3 мин быстрее, чем первая труба?

РЕШЕНИЕ. Заполним таблицу по условию задачи:

	Объём резервуара (л)	Производительность (л/мин)	Время (мин)
Первая труба	60	x	$\frac{60}{x}$
Вторая труба	60	$x + 10$	$\frac{60}{x+10}$

По условию время работы второй трубы на 3 мин меньше, поэтому

$$\frac{60}{x} - \frac{60}{x+10} = 3 \,\Big|\, \cdot \frac{x(x+10)}{3} \neq 0,$$

$20x + 200 - 20x = x^2 + 10x$,

$x^2 + 10x - 200 = 0$,

$x_1 = -50$ — не удовлетворяет условию $x > 0$,

$x_2 = 40$.

Если $x = 40$, то $x(x + 10) \neq 0$.

Если $x = 40$, то $x + 10 = 50$.

Значит, вторая труба пропускает 50 л воды в минуту.

ОТВЕТ: 50 л/мин.

ПРИМЕР 13. Игорь и Паша могут покрасить забор за 3 ч. Паша и Володя могут покрасить этот же забор за 6 ч, а Володя и Игорь — за 4 ч. За какое время мальчики могут покрасить забор, работая втроём?

РЕШЕНИЕ. Заполним таблицу по условию задачи:

	Работа	**Время работы (ч)**	**Производительность (ед./ч)**
Игорь	1	x	$\frac{1}{x}$
Паша	1	y	$\frac{1}{y}$
Володя	1	z	$\frac{1}{z}$

Из условия задачи следует, что за 1 ч Игорь и Паша красят $\frac{1}{3}$ забора, Паша и Володя — $\frac{1}{6}$ забора, Володя и Игорь — $\frac{1}{4}$ забора. Поэтому $\begin{cases} \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{3}, \\ \frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{6}, \\ \frac{1}{x}+\frac{1}{z}=\frac{1}{4}. \end{cases}$

Сложим эти уравнения:

$2\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{4},$

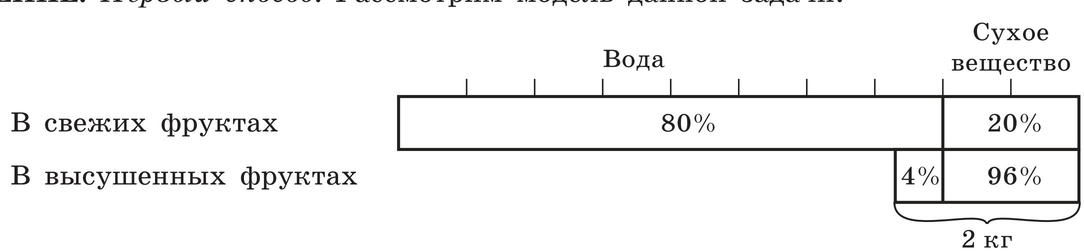
$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{3}{8}.$

Тогда время совместной работы трёх мальчиков $\frac{8}{3}$ ч $=2\frac{2}{3}$ ч $=2$ ч 40 мин.

ОТВЕТ: за 2 ч 40 мин.

ПРИМЕР 14. Свежие фрукты содержат 80% воды, а высушенные — 4%. Сколько требуется свежих фруктов для получения 2 кг высушенных фруктов?

РЕШЕНИЕ. *Первый способ.* Рассмотрим модель данной задачи:



Значит, в высушенных фруктах $2 \cdot 0{,}96=1{,}92$ (кг) сухого вещества. Ровно столько же сухого вещества в свежих фруктах, что составляет 20%, или $\frac{1}{5}$ часть, свежих фруктов.

Значит, всего свежих фруктов понадобится $1{,}92 \cdot 5=9{,}6$ (кг).

Второй способ. Аналогичное решение можно записать без предложенной модели, но с пояснениями:

1) $100-4=96$ (%) — составляет сухое вещество в высушенных фруктах;
2) $2 \cdot 0{,}96=1{,}92$ (кг) — сухого вещества содержится в высушенных фруктах;
3) $100-80=20$ (%), или $\frac{1}{5}$ часть, сухого вещества содержится в свежих фруктах;
4) $1{,}92 \cdot 5=9{,}6$ (кг) — необходимо свежих фруктов для получения 2 кг высушенных.

ОТВЕТ: 9,6 кг.

ПРИМЕР 15. Смешали некоторое количество 11%-ного раствора некоторого вещества с таким же количеством 21%-ного раствора этого же вещества. Сколько процентов составляет концентрация получившегося раствора?

РЕШЕНИЕ. Заполним таблицу по условию задачи:

	Всего раствора (л)	**Концентрация раствора**	**Чистого вещества (л)**
11%-ный раствор	x	0,11	$0{,}11x$
21%-ный раствор	x	0,21	$0{,}21x$
Получившийся раствор	$2x$	$c = ?$	$0{,}32x$

Тогда концентрация получившегося раствора $c = \frac{0{,}32x}{2x} = \mathbf{0{,}16}$. Значит, процентное содержание получившегося раствора 16%.

ОТВЕТ: 16%.

ПРИМЕР 16. Имеются два сосуда, содержащие 20 л и 16 л раствора кислоты различной концентрации. Если их слить вместе, то получим раствор, содержащий 41% кислоты. Если же слить равные объёмы этих растворов, то полученный раствор будет содержать 43% кислоты. Сколько литров кислоты содержится в первом растворе?

РЕШЕНИЕ. Заполним таблицу по условиям задачи:

	1-е условие			**2-е условие**		
	Всего раствора (л)	**Концентрация**	**Чистой кислоты (л)**	**Всего раствора (л)**	**Концентрация**	**Чистой кислоты (л)**
Первый раствор	20	x	$20x$	1	x	x
Второй раствор	16	y	$16y$	1	y	y
Третий раствор	36	0,41	$36 \cdot 0{,}41 = 14{,}76$	2	0,43	$2 \cdot 0{,}43 = 0{,}86$

По этим условиям составим и решим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} 20x + 16y = 14{,}76, \\ x + y = 0{,}86. \end{cases}$$

Умножим обе части второго уравнения на (–16) и сложим с первым уравнением. Получим

$4x = 14{,}76 - 13{,}76,$

$x = 0{,}25.$

Тогда $y = 0{,}86 - x = 0{,}86 - 0{,}25 = 0{,}61$.

Следовательно, концентрация первого раствора равна 0,25, и в первом растворе содержится $20 \cdot 0{,}25 = 5$ (л) кислоты.

ОТВЕТ: 5 л.

Задания для самостоятельного решения

1. Два человека отправляются из одного и того же места на прогулку до опушки леса, находящейся в 6 км от места отправления. Первый идёт со скоростью 4,5 км/ч, а второй — со скоростью 5,5 км/ч. Дойдя до опушки, второй с той же скоростью возвращается обратно. Найдите расстояние от опушки до места их встречи.

2. Дорога между пунктами *A* и *B* состоит из подъёма и спуска, а её общая длина равна 19 км. Турист прошёл путь из пункта *A* в пункт *B* за 5 ч, из которых спуск занял 4 ч. С какой скоростью турист шёл на спуске, если его скорость на подъёме меньше, чем его скорость на спуске, на 1 км/ч?

3. Два автомобиля отправляются в 340-километровый пробег. Первый автомобиль едет со скоростью, на 17 км/ч большей, чем второй, и прибывает к финишу на 1 ч раньше второго. Найдите скорость первого автомобиля.

4. Моторная лодка прошла против течения реки 77 км и вернулась в пункт отправления, затратив на обратный путь на 2 ч меньше, чем на путь против течения. Найдите скорость лодки в неподвижной воде, если скорость течения равна 4 км/ч.

5. От пристани *A* к пристани *B*, расстояние между которыми равно 70 км, отправился с постоянной скоростью первый теплоход, а через 1 ч после этого следом за ним со скоростью, на 8 км/ч большей, отправился второй теплоход. Найдите скорость первого теплохода, если к пристани *B* оба теплохода прибыли одновременно.

6. Турист и велосипедист одновременно отправились навстречу друг другу из пунктов *A* и *B*. Они встретились через 1,5 ч, после чего каждый продолжил движение в своём направлении. Велосипедист прибыл в пункт *A* через 2 ч после выезда из пункта *B*. За какое время прошёл путь от пункта *A* до пункта *B* турист?

7. Из пункта *A* в пункт *B*, расстояние между которыми 20 км, выехал первый велосипедист, а через 15 мин вслед за ним со скоростью 15 км/ч отправился второй велосипедист, который, догнав первого, повернул назад и возвратился в пункт *A* за 45 мин до прибытия первого велосипедиста в пункт *B*. Найдите скорость первого велосипедиста.

8. Из города *A* в город *B* одновременно выехали два автомобиля, скорости которых соответственно 80 км/ч и 60 км/ч. Через полчаса следом за ними выехал третий автомобиль. Найдите скорость третьего автомобиля, если сначала он догнал второй автомобиль, а через 1 ч 15 мин после этого догнал и первый.

9. Два бегуна одновременно стартовали в одном направлении из одного и того же места круговой трассы в беге на несколько кругов. Спустя один час, когда первому из них оставалось пробежать 4 км до окончания первого круга, ему сообщили, что второй бегун прошёл первый круг 18 мин назад. Найдите скорость первого бегуна, если известно, что она на 10 км/ч меньше скорости второго бегуна.

10. Путешественник переплыл море на яхте со средней скоростью 25 км/ч. Обратно он летел на спортивном самолёте со скоростью 475 км/ч. Найдите среднюю скорость путешественника на протяжении всего пути.

11. Поезд, двигаясь равномерно со скоростью 54 км/ч, за 30 с проезжает мимо пешехода, идущего со скоростью 6 км/ч параллельно путям навстречу этому поезду. Найдите длину поезда в метрах.

12. Первый рабочий за час делает на 10 деталей больше, чем второй, и заканчивает работу над заказом из 60 деталей на 3 ч раньше, чем второй рабочий, выполняющий такой же заказ. Сколько деталей в час делает второй рабочий?

13. Маша и Настя могут помыть окно за 12 мин, Настя и Лена могут помыть это же окно за 20 мин, а Маша и Лена — за 15 мин. За сколько минут девочки могут помыть окно, работая втроём?

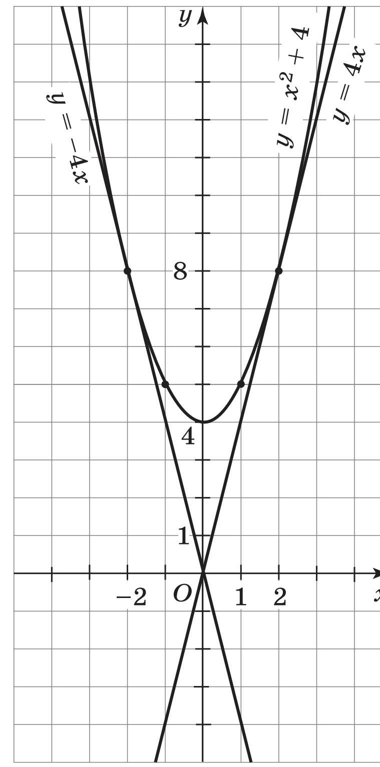
14. Свежие фрукты содержат 72% воды, а высушенные — 20%. Сколько сухих фруктов получится из 100 кг свежих?

15. Смешали 4 л 15%-ного раствора некоторого вещества с 6 л 25%-ного раствора этого же вещества. Сколько процентов составляет концентрация получившегося раствора?

16. Имеются два сосуда, содержащие 30 л и 20 л раствора кислоты различной концентрации. Если их слить вместе, то получим раствор, содержащий 68% кислоты. Если же слить равные объёмы этих растворов, то полученный раствор будет содержать 70% кислоты. Сколько литров кислоты содержится в первом растворе?

ЗАДАЧА 23

ПРИМЕР 1. Найдите все значения k, при каждом из которых прямая $y = kx$ имеет с графиком функции $y = x^2 + 4$ ровно одну общую точку. Постройте этот график и все такие прямые.



РЕШЕНИЕ. Условие задачи означает, что система уравнений $\begin{cases} y = kx, \\ y = x^2 + 4 \end{cases}$ имеет единственное решение. Значит, уравнение $x^2 + 4 = kx$ имеет единственное решение. Найдём все значения k, при которых это выполняется.

$x^2 - kx + 4 = 0,$

$D = k^2 - 16.$

Квадратное уравнение имеет единственное решение, если его дискриминант равен нулю:

$k^2 - 16 = 0,$

$k = \pm 4.$

Следовательно, прямые $y = 4x$ и $y = -4x$ имеют с параболой $y = x^2 + 4$ ровно одну общую точку. Построим графики этих функций. Парабола $y = x^2 + 4$ получается из параболы $y = x^2$ сдвигом вдоль оси Oy на 4 единицы вверх. Прямые $y = 4x$ и $y = -4x$ проходят через начало координат и соответственно точки (1; 4) и (–1; 4). Общие точки этих прямых с параболой (2; 8) и (–2; 8) соответственно (см. рисунок).

ОТВЕТ: –4; 4.

ЗАМЕЧАНИЕ. Построим график функции $y = x^2 + 4$ другим способом.

Графиком функции $y = x^2 + 4$ является парабола, ветви которой направлены вверх ($a = 1$, $a > 0$). Найдём координаты m и n вершины этой параболы:

$m = -\frac{b}{2a} = -\frac{0}{2 \cdot 1} = 0,$

$n = y(0) = 4.$

Значит, вершина параболы — точка (0; 4).

Составим таблицу некоторых значений функции.

x	–3	–2	–1	0	1	2	3
y	13	8	5	4	5	8	13

Построив точки и соединив их плавной линией, получим график функции $y = x^2 + 4$. Прямые $y = 4x$ и $y = -4x$ построим по двум точкам, принадлежащим этим прямым, координаты которых запишем в соответствующих таблицах.

$y = 4x$

x	0	1
y	0	4

$y = -4x$

x	0	1
y	0	–4

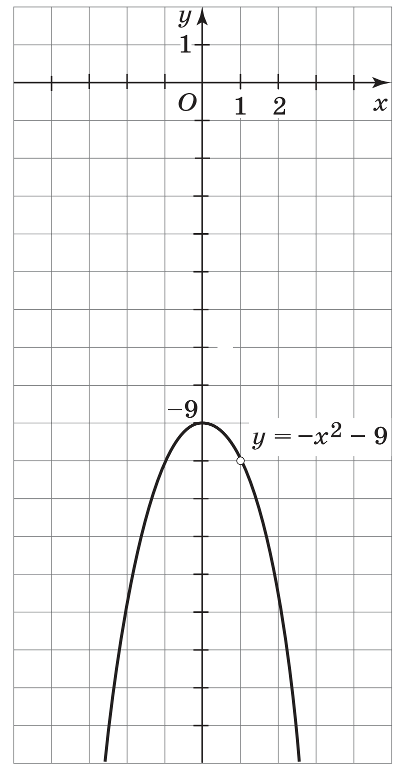
ПРИМЕР 2. Постройте график функции $y = \dfrac{(x^2+9)(x-1)}{1-x}$ и определите, при каких значениях k прямая $y = kx$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

РЕШЕНИЕ. Преобразуем выражение

$\dfrac{(x^2+9)(x-1)}{1-x} = -x^2 - 9$

при условии $x \neq 1$.

Значит, графиком функции $y = \dfrac{(x^2+9)(x-1)}{1-x}$ является парабола с выколотой точкой (1; –10), получаемая из параболы $y = -x^2$ сдвигом вдоль оси Oy на 9 единиц вниз (см. рисунок).



Прямая $y = kx$ имеет с построенным графиком ровно одну общую точку, если уравнение $-x^2 - 9 = kx$ имеет один корень или имеет два корня, один из которых равен 1.

$x^2 + kx + 9 = 0$,

$D = k^2 - 36$.

1) $D = 0$,

$k^2 - 36 = 0$,

$k = \pm 6$.

Прямые $y = -6x$ и $y = 6x$ имеют с построенным графиком одну общую точку.

2) $D > 0$, $|k| > 6$.

Если $x_1 = 1$, то $1 + k + 9 = 0$, откуда $k = -10$, $|-10| > 6$.

Тогда уравнение $x^2 - 10x + 9 = 0$ имеет 2 корня: $x_1 = 1$ и $x_2 = 9$, и прямая $y = -10x$ пересекает график функции в единственной точке (9; –90).

ОТВЕТ: –10; –6; 6.

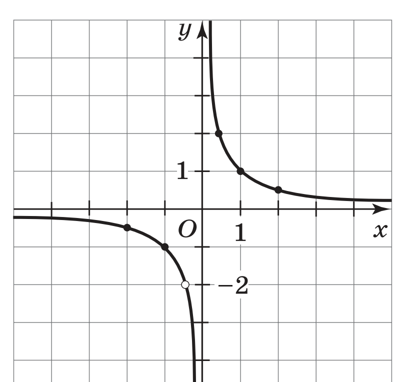
ПРИМЕР 3. Постройте график функции $y = \dfrac{2x+1}{2x^2+x}$ и определите, при каких значениях k прямая $y = kx$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

РЕШЕНИЕ. Преобразуем выражение

$\dfrac{2x+1}{2x^2+x} = \dfrac{2x+1}{x(2x+1)} = \dfrac{1}{x}$

при условии, что $2x + 1 \neq 0$, т. е. $x \neq -\dfrac{1}{2}$.

Значит, графиком данной функции является гипербола $y = \dfrac{1}{x}$ с выколотой точкой $\left(-\dfrac{1}{2}; -2\right)$ (см. рисунок).



Прямая $y = kx$ имеет с построенным графиком ровно одну общую точку, если она проходит через точку $\left(-\dfrac{1}{2}; -2\right)$.

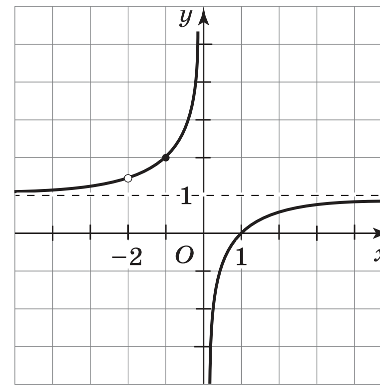
В этом случае $k = \dfrac{y}{x} = 4$.

ОТВЕТ: 4.

ПРИМЕР 4. Постройте график функции

$$y = 1 - \frac{x+2}{x^2+2x}$$

и определите, при каких значениях m прямая $y = m$ не имеет с графиком ни одной общей точки.



РЕШЕНИЕ. Преобразуем выражение

$1 - \frac{x+2}{x^2+2x} = 1 - \frac{x+2}{x(x+2)} = 1 - \frac{1}{x}$ при условии, что $x \neq -2$.

Графиком функции $y = 1 - \frac{x+2}{x^2+2x}$ является гипербола с выколотой точкой ($x \neq -2$), которая получается из гиперболы $y = -\frac{1}{x}$ с помощью сдвига вдоль оси Oy на 1 единицу вверх (см. рисунок). Таблица некоторых значений функции:

x	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	3
y	$1{,}5$	2	3	-1	0	$\frac{1}{2}$
	выколотая точка					

Прямая $y = m$ параллельна оси Ox или совпадает с ней и проходит через точку $(0;\ m)$. Эта прямая не имеет с построенным графиком ни одной общей точки при $m = 1$ и $m = 1{,}5$ (проходит через выколотую точку $(-2;\ 1{,}5)$).

ОТВЕТ: 1; 1,5.

ПРИМЕР 5. Постройте график функции

$$y = \begin{cases} x - 3, \text{ если } x < 3, \\ -1{,}5x + 4{,}5, \text{ если } 3 \leqslant x \leqslant 4, \\ 1{,}5x - 7{,}5, \text{ если } x > 4, \end{cases}$$

и определите, при каких значениях m прямая $y = m$ имеет с графиком ровно две общие точки.

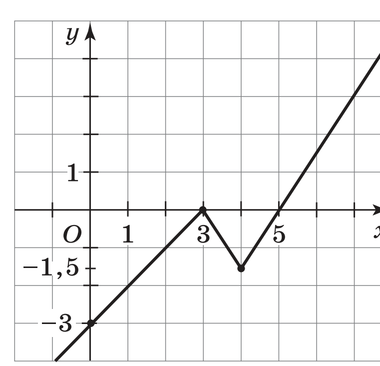
РЕШЕНИЕ. Построим график функции (см. рисунок):

при $x < 3$ $y = x - 3$ — луч с началом в точке $(3;\ 0)$, проходящий через точку $(0;\ -3)$;

при $3 \leqslant x \leqslant 4$ $y = -1{,}5x + 4{,}5$ — отрезок с концами в точках $(3;\ 0)$ и $(4;\ -1{,}5)$;

при $x > 4$ $y = 1{,}5x - 7{,}5$ — луч с началом в точке $(4;\ -1{,}5)$, проходящий через точку $(5;\ 0)$.

Прямая $y = m$ имеет с построенным графиком ровно две общие точки, если она проходит через вершины ломаной $(3;\ 0)$ и $(4;\ -1{,}5)$, т. е. при $m = -1{,}5$ и $m = 0$.



ОТВЕТ: −1,5; 0.

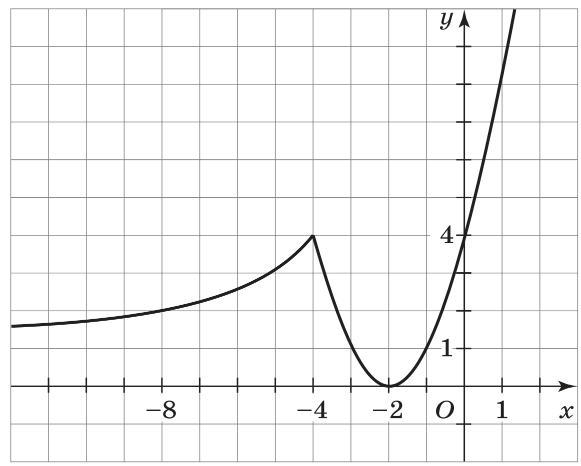
ПРИМЕР 6. Постройте график функции

$$y = \begin{cases} x^2 + 4x + 4, \text{ если } x \geqslant -4, \\ -\dfrac{16}{x}, \text{ если } x < -4, \end{cases}$$

и определите, при каких значениях m прямая $y = m$ имеет с графиком одну или две общие точки.

РЕШЕНИЕ. Построим график этой функции (см. рисунок):
1) так как $x^2 + 4x + 4 = (x + 2)^2$, то при $x \geqslant -4$ $y = x^2 + 4x + 4$ — часть параболы $y = (x + 2)^2$, полученной из параболы $y = x^2$ сдвигом вдоль оси Ox на 2 единицы влево;

2) при $x < -4$ $y = -\dfrac{16}{x}$ — часть гиперболы, расположенная во второй координатной четверти (проходит, например, через точки (–4; 4) и (–8; 2)).



При $x = -4$ граничная точка параболы $y = (x + 2)^2$ имеет координаты (–4; 4), так как $y(-4) = (-4 + 2)^2 = 4$. Граничная точка гиперболы $y = -\dfrac{16}{x}$ также имеет координаты (–4; 4), так как $y(-4) = \dfrac{-16}{-4} = 4$.

Прямая $y = m$ имеет с построенным графиком одну или две общие точки при $m = 0$ или $m \geqslant 4$.

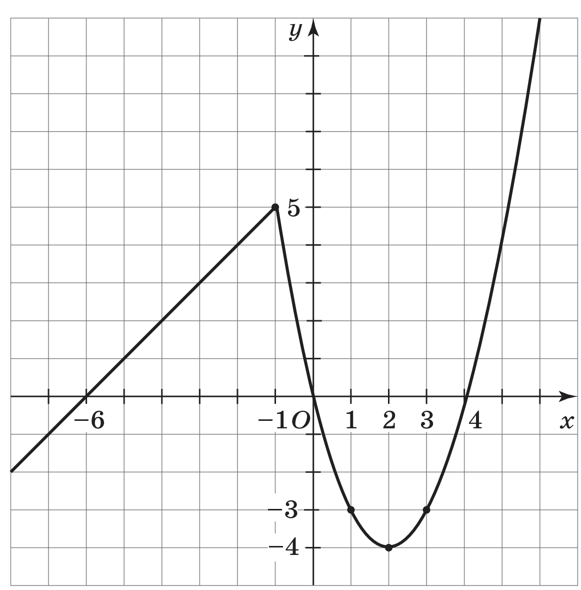
ОТВЕТ: 0; [4; +∞).

ПРИМЕР 7. Постройте график функции

$$y = \begin{cases} x^2 - 4x, \text{ если } x \geqslant -1, \\ x + 6, \text{ если } x < -1, \end{cases}$$

и определите, при каких значениях m прямая $y = m$ имеет с графиком ровно две общие точки.

РЕШЕНИЕ. Построим график этой функции (см. рисунок):
1) так как $x^2 - 4x = (x^2 - 4x + 4) - 4 = (x - 2)^2 - 4$, то при $x \geqslant -1$ $y = x^2 - 4x$ — часть параболы, полученной из параболы $y = x^2$ сдвигом вдоль оси Ox на 2 единицы вправо и вдоль оси Oy на 4 единицы вниз, с вершиной в точке (2; –4) и граничной точкой (–1; 5) (так как $y(-1) = (-1)^2 - 4 \cdot (-1) = 5$);
2) при $x < -1$ $y = x + 6$ — луч с началом в точке (–1; 5), проходящий через точку (–6; 0).



Прямая $y = m$ имеет с построенным графиком ровно две общие точки, если она проходит через вершину параболы (2; –4) или через точку (–1; 5). Следовательно, $m = -4$ или $m = 5$.

ОТВЕТ: –4; 5.

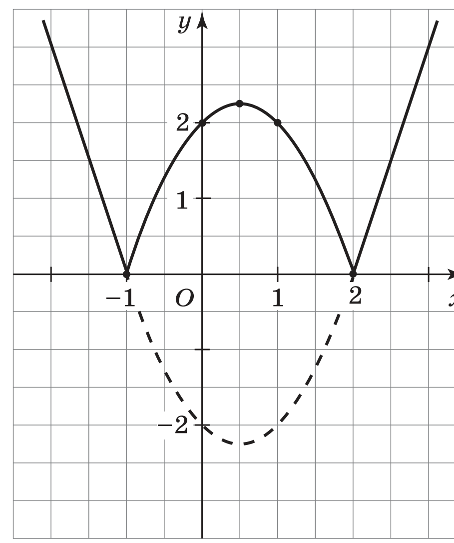
ПРИМЕР 8. Постройте график функции $y = |x^2 - x - 2|$. Какое наибольшее число общих точек график данной функции может иметь с прямой, параллельной оси абсцисс?

РЕШЕНИЕ. Известно, что $|x| = \begin{cases} x, \text{ если } x \geqslant 0, \\ -x, \text{ если } x < 0. \end{cases}$

Поэтому

$$y = \begin{cases} x^2 - x - 2, \text{ если } x^2 - x - 2 \geqslant 0, \\ -x^2 + x + 2, \text{ если } x^2 - x - 2 < 0; \end{cases}$$

$$y = \begin{cases} x^2 - x - 2, \text{ если } x \leqslant -1 \text{ или } x \geqslant 2, \\ -x^2 + x + 2, \text{ если } -1 < x < 2. \end{cases}$$



Построим график этой функции (см. рисунок):
1) при $x \leqslant -1$ и $x \geqslant 2$ — часть параболы $y = x^2 - x - 2$, расположенная в верхней полуплоскости относительно оси Ox;
2) при $-1 < x < 2$ — другая часть этой же параболы, отражённая симметрично относительно Ox в верхнюю полуплоскость системы координатной плоскости.
Парабола $y = x^2 - x - 2$, ветви которой направлены вверх, имеет вершину в точке с координатами

$$x_в = \frac{-b}{2a} = \frac{1}{2},$$

$$y_в = y\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} - 2 = -2\frac{1}{4}.$$

Таблица значений координат некоторых точек параболы:

x	-2	-1	0	$\frac{1}{2}$	1	2	3
y	4	0	-2	$-2\frac{1}{4}$	-2	0	4

Прямая, параллельная оси абсцисс, может иметь с построенным графиком 0, 2, 3 или 4 точки пересечения, из которых 4 — наибольшее.

ОТВЕТ: 4.

ПРИМЕР 9. Постройте график функции $y = x^2 - 4|x| - 2x$ и определите, при каких значениях m прямая $y = m$ имеет с графиком не менее одной, но не более трёх общих точек.

РЕШЕНИЕ. Так как $|x| = \begin{cases} x, \text{ если } x \geqslant 0, \\ -x, \text{ если } x < 0, \end{cases}$

то после преобразований имеем

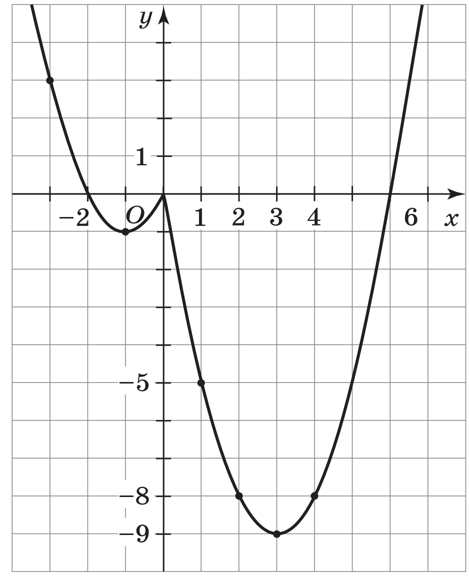
$$y = \begin{cases} x^2 - 6x, \text{ если } x \geqslant 0, \\ x^2 + 2x, \text{ если } x < 0. \end{cases}$$

Построим график этой функции (см. рисунок):

1) так как $x^2 - 6x = (x^2 - 6x + 9) - 9 = (x - 3)^2 - 9$, то при $x \geqslant 0$ — часть параболы $y = x^2 - 6x$, полученной из параболы $y = x^2$ сдвигом вдоль оси Ox на 3 единицы вправо и вдоль оси Oy на 9 единиц вниз, с вершиной в точке (3; –9) и граничной точкой (0; 0) (так как $y(0) = 0^2 - 6 \cdot 0 = 0$);

2) так как $x^2 + 2x = (x^2 + 2x + 1) - 1 = (x + 1)^2 - 1$, то при $x < 0$ — часть параболы $y = x^2 + 2x$, полученной из параболы $y = x^2$ сдвигом вдоль оси Ox на 1 единицу влево и вдоль оси Oy на 1 единицу вниз, с вершиной в точке (–1; –1) и граничной точкой (0; 0) (так как $y(0) = 0^2 - 2 \cdot 0 = 0$).

Прямая $y = m$, параллельная оси Ox, имеет с построенным графиком от одной до трёх общих точек при $-9 \leqslant m \leqslant -1$ и при $m \geqslant 0$.



ОТВЕТ: $[-9; -1] \cup [0; +\infty)$.

ПРМЕР 10. Постройте график функции $y = x^2 - |4x + 5|$ и определите, при каких значениях m прямая $y = m$ имеет с графиком ровно три общие точки.

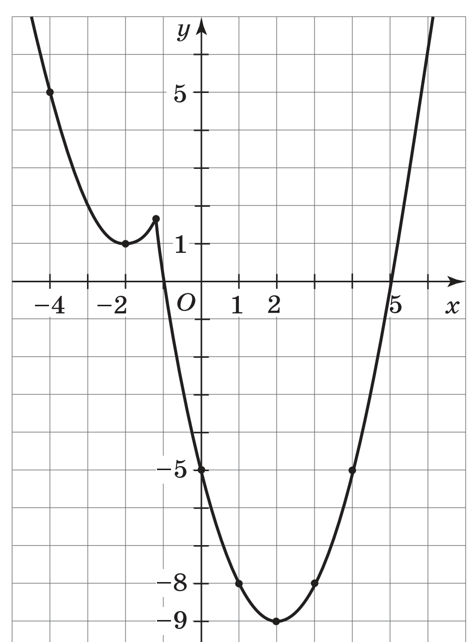
РЕШЕНИЕ. Так как $|4x + 5| = \begin{cases} 4x + 5, \text{ если } x \geqslant -\dfrac{5}{4}, \\ -4x - 5, \text{ если } x < -\dfrac{5}{4}, \end{cases}$ то $y = \begin{cases} x^2 - 4x - 5, \text{ если } x \geqslant -\dfrac{5}{4}, \\ x^2 + 4x + 5, \text{ если } x < -\dfrac{5}{4}. \end{cases}$

Построим график этой функции (см. рисунок):

1) так как $x^2 - 4x - 5 = (x^2 - 4x + 4) - 9 = (x - 2)^2 - 9$, то при $x \geqslant -\dfrac{5}{4}$ $y = x^2 - 4x - 5$ — часть параболы, полученной из параболы $y = x^2$, с вершиной в точке (2; –9) и граничной точкой $\left(-\dfrac{5}{4}; \dfrac{25}{16}\right)$, так как $y\left(-\dfrac{5}{4}\right) = \left(-\dfrac{5}{4}\right)^2 - 4 \cdot \left(-\dfrac{5}{4}\right) - 5 = \dfrac{25}{16}$;

2) так как $x^2 + 4x + 5 = (x^2 + 4x + 4) + 1 = (x + 2)^2 + 1$, то при $x < -\dfrac{5}{4}$ $y = x^2 + 4x + 5$ — часть параболы, полученной из параболы $y = x^2$, с вершиной в точке (–2; 1) и граничной точкой $y\left(-\dfrac{5}{4}\right) = \left(-\dfrac{5}{4}\right)^2 + 4 \cdot \left(-\dfrac{5}{4}\right) + 5 = \dfrac{25}{16}$.

Прямая $y = m$, параллельная оси Ox, имеет с построенным графиком ровно три общие точки, если она проходит через вершину части параболы $y = x^2 + 4x + 5$, точку (–2; 1), или через точку параболы $\left(-\dfrac{5}{4}; \dfrac{25}{16}\right)$. Следовательно, $m = 1$ или $m = \dfrac{25}{16}$.

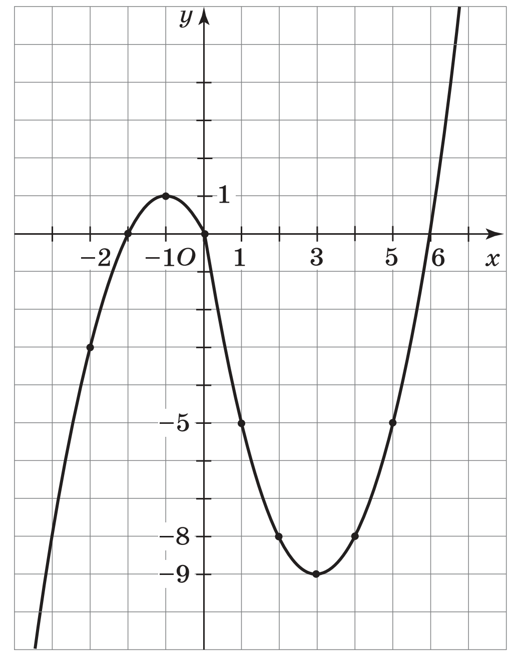


ОТВЕТ: 1; $\dfrac{25}{16}$.

ПРИМЕР 11. Постройте график функции $y = |x|(x-2) - 4x$ и определите, при каких значениях m прямая $y = m$ имеет с графиком ровно две общие точки.

РЕШЕНИЕ. Так как $|x| = \begin{cases} x, \text{ если } x \geqslant 0, \\ -x, \text{ если } x < 0, \end{cases}$ то после

преобразований имеем $y = \begin{cases} x^2 - 6x, \text{ если } x \geqslant 0, \\ -x^2 - 2x, \text{ если } x < 0. \end{cases}$



Построим график этой функции (см. рисунок):

1) так как $x^2 - 6x = (x^2 - 6x + 9) - 9 = (x-3)^2 - 9$, то при $x \geqslant 0$ $y = x^2 - 6x$ — часть параболы, полученной из параболы $y = x^2$, с вершиной в точке $(3; -9)$ и граничной точкой $(0; 0)$ (так как $y(0) = 0^2 - 6 \cdot 0 = 0$);

2) так как $-x^2 - 2x = -(x^2 + 2x) = -(x^2 + 2x + 1 - 1) = -(x+1)^2 + 1$, то при $x < 0$ $y = -x^2 - 2x$ — часть параболы, полученной из параболы $y = -x^2$, с вершиной в точке $(-1; 1)$ и граничной точкой $(0; 0)$ (так как $y(0) = -0^2 - 2 \cdot 0 = 0$).

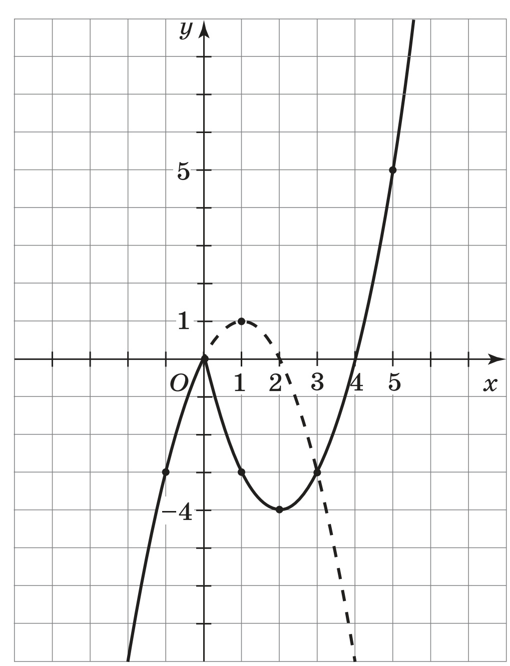
Прямая $y = m$ имеет с построенным графиком ровно две общие точки, если она проходит через вершину одной из парабол. Следовательно, $m = -9$ или $m = 1$.

ОТВЕТ: -9; 1.

ПРИМЕР 12. Постройте график функции $y = x|x| - 3|x| - x$ и определите, при каких значениях m прямая $y = m$ имеет с графиком ровно две общие точки.

РЕШЕНИЕ. Так как $|x| = \begin{cases} x, \text{ если } x \geqslant 0, \\ -x, \text{ если } x < 0, \end{cases}$ то

$y = \begin{cases} x^2 - 4x, \text{ если } x \geqslant 0, \\ -x^2 + 2x, \text{ если } x < 0. \end{cases}$



Построим график этой функции (см. рисунок):

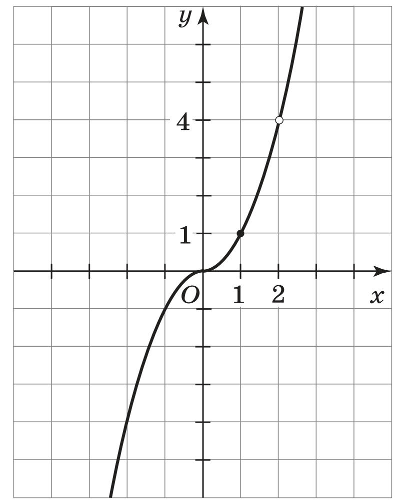
1) так как $x^2 - 4x = (x^2 - 4x + 4) - 4 = (x-2)^2 - 4$, то при $x \geqslant 0$ $y = x^2 - 4x$ — часть параболы, полученной из параболы $y = x^2$, с вершиной в точке $(2; -4)$ и граничной точкой $(0; 0)$ (так как $y(0) = 0^2 - 4 \cdot 0 = 0$);

2) так как $-x^2 + 2x = -(x^2 - 2x + 1 - 1) = -(x-1)^2 + 1$, то при $x < 0$ $y = -x^2 + 2x$ — часть параболы, полученной из параболы $y = -x^2$, с вершиной в точке $(1; 1)$ и граничной точкой $(0; 0)$ (так как $y(0) = 0^2 + 2 \cdot 0 = 0$).

Прямая $y = m$ имеет с построенным графиком ровно две общие точки, если она проходит через вершину параболы $y = x^2 - 4x$, точку $(2; -4)$, или через начало координат. Следовательно, $m = -4$ или $m = 0$.

ОТВЕТ: -4; 0.

ПРИМЕР 13. Постройте график функции $y = \frac{(x^2 - 2x)|x|}{x - 2}$ и определите, при каких значениях m прямая $y = m$ не имеет с графиком ни одной общей точки.



РЕШЕНИЕ. Преобразуем выражение $\frac{(x^2 - 2x)|x|}{x - 2} = x|x|$ при условии, что $x \neq 2$. Получим $y = \begin{cases} x^2, \text{ если } x \geqslant 0,\ x \neq 2, \\ -x^2, \text{ если } x < 0. \end{cases}$

Построим график этой функции (см. рисунок):
1) при $x \geqslant 0$ графиком будет часть параболы $y = x^2$ с выколотой точкой (2; 4);
2) при $x < 0$ графиком будет часть параболы $y = -x^2$.
Граничная точка этих парабол (0; 0) (так как $0^2 = -0^2 = 0$).
Прямая $y = m$ не имеет с построенным графиком ни одной общей точки при $m = 4$ (прямая проходит через точку (2; 4)).
ОТВЕТ: 4.

ПРИМЕР 14. Постройте график функции $y = \left(\left|x - \frac{1}{x}\right| + x + \frac{1}{x}\right)$ и определите, при каких значениях m прямая $y = m$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

РЕШЕНИЕ. Преобразуем выражение $x - \frac{1}{x} = \frac{x^2 - 1}{x} = \frac{(x - 1)(x + 1)}{x}$.

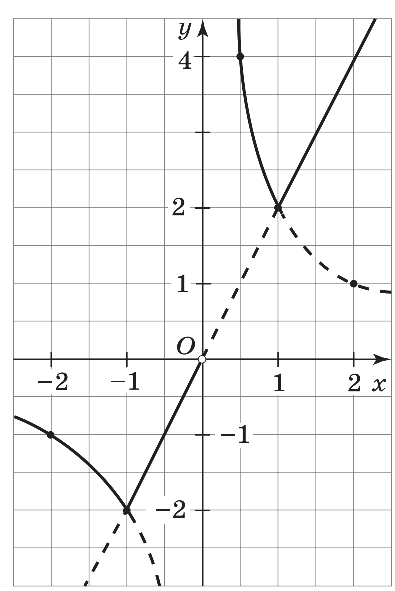
Его знаки: $-$ $\quad -1 \quad$ $+$ $\quad 0 \quad$ $-$ $\quad 1 \quad$ $+$ $\quad x$

Поэтому $\left|x - \frac{1}{x}\right| = \begin{cases} x - \frac{1}{x}, \text{ если } -1 \leqslant x < 0 \text{ или } x \geqslant 1, \\ \frac{1}{x} - x, \text{ если } x > -1 \text{ или } 0 < x < 1. \end{cases}$

Тогда $y = \begin{cases} 2x, \text{ если } -1 \leqslant x < 0 \text{ или } x \geqslant 1, \\ \frac{2}{x}, \text{ если } x < -1 \text{ или } 0 < x < 1. \end{cases}$

Построим график этой функции (см. рисунок):
1) при $-1 \leqslant x < 0$ и $x \geqslant 1$ графиком будет часть прямой $y = 2x$, проходящей через точки (1; 2) и (−1; −2);
2) при $x < -1$ и $0 < x < 1$ графиком будет часть гиперболы $y = \frac{2}{x}$. Таблица некоторых значений функции $y = \frac{2}{x}$:

x	-2	-1	$\frac{1}{2}$	1	2
y	-1	-2	4	2	1



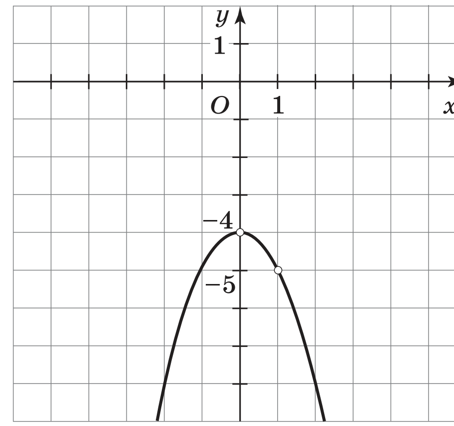
Граничные точки частей прямой и гиперболы (1; 2) и (−1; −2), так как $y(1) = 2 \cdot 1 = \frac{2}{1} = 2$ и $y(-1) = 2 \cdot (-1) = \frac{2}{-1} = -2$.
Прямая $y = m$ имеет с графиком функции ровно одну общую точку при $m = -2$ или $m = 2$.
ОТВЕТ: −2; 2.

ПРИМЕР 15. Постройте график функции $y = -4 - \dfrac{x^4 - x^3}{x^2 - x}$ и определите, при каких значениях m прямая $y = m$ имеет с графиком ровно две общие точки.

РЕШЕНИЕ. Преобразуем выражение

$$-4 - \frac{x^4 - x^3}{x^2 - x} = -4 - \frac{x^3(x-1)}{x(x-1)} = -4 - x^2$$

при условии, что $x \neq 0$, $x \neq 1$.



Графиком этой функции является парабола $y = -4 - x^2$ с двумя выколотыми точками (0; –4) и (1; –5) (см. рисунок).

Парабола $y = -4 - x^2$ получена из параболы $y = -x^2$ сдвигом вдоль оси Oy на 4 единицы вниз.

Прямая $y = m$ имеет с построенным графиком ровно две общие точки при $m < -5$ и $-5 < m < -4$.

ОТВЕТ: $(-\infty; -5) \cup (-5; -4)$.

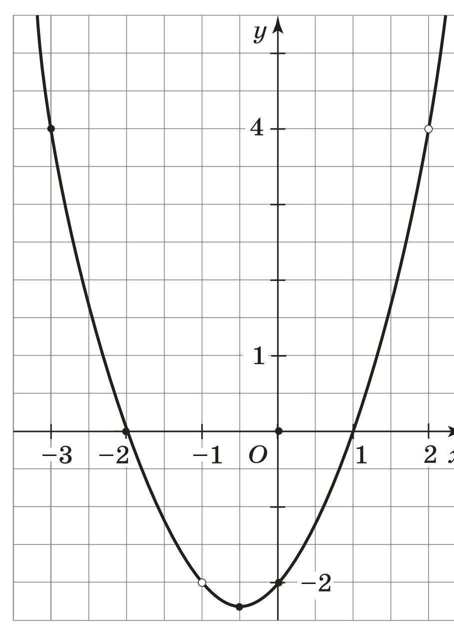
ПРИМЕР 16. Постройте график функции $y = \dfrac{(x^2 - 3x + 2)(x^2 + 3x + 2)}{x^2 - x - 2}$ и определите, при каких значениях m прямая $y = m$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

РЕШЕНИЕ. Преобразуем выражение

$$\frac{(x^2 - 3x + 2)(x^2 + 3x + 2)}{x^2 - x - 2} = \frac{(x-1)(x-2)(x+1)(x+2)}{(x+1)(x-2)} = (x-1)(x+2) = x^2 + x - 2$$

при условии, что $x \neq -1$, $x \neq 2$.

Следовательно, графиком этой функции является парабола $y = x^2 + x - 2$ с двумя выколотыми точками (–1; –2) и (2; 4) (см. рисунок).



Парабола $y = x^2 + x - 2$, ветви которой направлены вверх, имеет вершину в точке с координатами

$$x_в = \frac{-b}{2a} = -\frac{1}{2},$$

$$y_в = y\left(-\frac{1}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} - 2 = -2\frac{1}{4}.$$

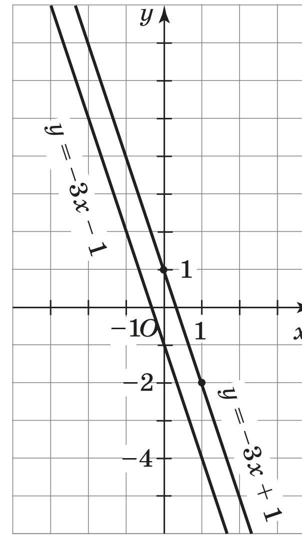
Таблица значений координат некоторых точек параболы:

x	–3	–2	–1	$-\frac{1}{2}$	0	1	2
y	4	0	–2	$-2\frac{1}{4}$	–2	0	4
			выколотая точка				выколотая точка

Прямая $y = m$ имеет с построенным графиком ровно одну общую точку, если она проходит через вершину параболы $\left(-\frac{1}{2}; -2\frac{1}{4}\right)$ или через выколотые точки (–1; –2) и (2; 4). Значит, $m = -2\frac{1}{4}$, $m = -2$, $m = 4$.

ОТВЕТ: $-2\frac{1}{4}$; –2; 4.

ПРИМЕР 17. Изобразите на координатной плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют уравнению $9x^2 + 6xy + y^2 = 1$.



РЕШЕНИЕ. Преобразуем левую часть уравнения:
$(3x + y)^2 = 1$. Тогда
$3x + y = 1$ или $3x + y = -1$.
$y = -3x + 1$; $y = -3x - 1$.
Следовательно, данное множество точек — две прямые $y = -3x + 1$ и $y = -3x - 1$. Построим их (см. рисунок).

$y = -3x + 1$

x	0	1
y	1	–2

$y = -3x - 1$

x	0	1
y	–1	–4

ОТВЕТ: две прямые $y = -3x + 1$ и $y = -3x - 1$.

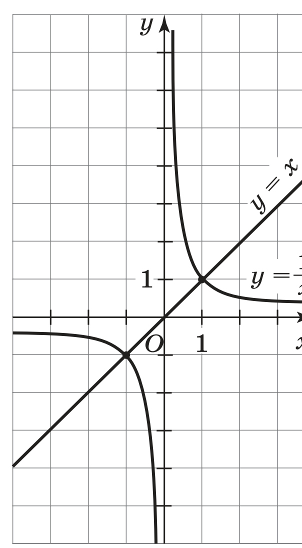
ПРИМЕР 18. Изобразите на координатной плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют уравнению $(y - x)(xy - 1) = 0$.

РЕШЕНИЕ. В данном случае произведение двух множителей равно нулю, если хотя бы один из множителей равен нулю:
$y - x = 0$ или $xy - 1 = 0$.
$y = x$; $y = \frac{1}{x}$.

Следовательно, данное множество точек — прямая $y = x$ и гипербола $y = \frac{1}{x}$.
Построим графики этих функций (см. рисунок).

$y = x$

x	0	1
y	0	1



$y = \frac{1}{x}$

x	±1	±2	±3	$\pm\frac{1}{2}$	$\pm\frac{1}{3}$
y	±1	$\pm\frac{1}{2}$	$\pm\frac{1}{3}$	±2	±3

ОТВЕТ: прямая $y = x$ и гипербола $y = \frac{1}{x}$.

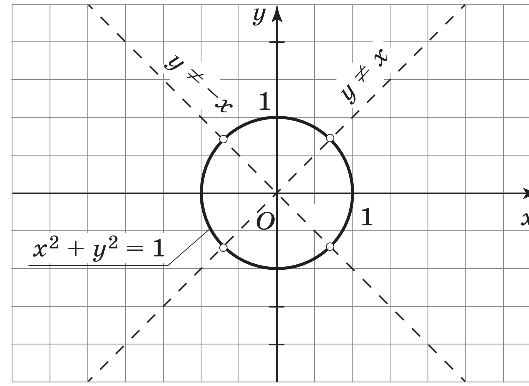
ПРИМЕР 19. Постройте множество точек плоскости, координаты которых удовлетворяют уравнению $\frac{x^2 + y^2 - 1}{x^2 - y^2} = 0$.

РЕШЕНИЕ. Дробь равна нулю тогда и только тогда, когда числитель равен нулю, а знаменатель не равен нулю. Поэтому

$$\begin{cases} x^2+y^2-1=0, \\ x^2-y^2\neq 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2+y^2=1, \\ y^2\neq x^2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2+y^2=1, \\ y\neq \pm x. \end{cases}$$



$x^2+y^2=1$ — уравнение окружности с центром в начале координат (0; 0) и радиусом $R=1$;
$y=x$ и $y=-x$ — прямые (изображены на рисунке штриховыми линиями), пересекающие окружность $x^2+y^2=1$ в четырёх точках.
Следовательно, данное множество точек — окружность с четырьмя выколотыми точками (см. рисунок).

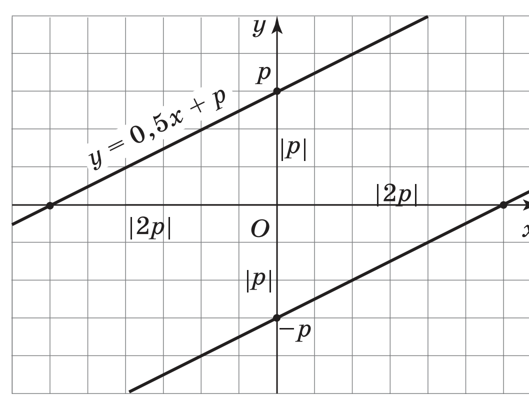
ОТВЕТ: окружность $x^2+y^2=1$ с четырьмя выколотыми точками.

ЗАМЕЧАНИЕ. Можно не указывать координаты выколотых точек, так как задача состоит в построении множества точек плоскости, удовлетворяющих данному уравнению.

ПРИМЕР 20. При каких значениях p прямая $y=0{,}5x+p$ образует с осями координат треугольник, площадь которого равна 81?

РЕШЕНИЕ. Прямая $y=0{,}5x+p$ параллельна прямой $y=0{,}5x$ и пересекает ось Oy в точке (0; p). Заметим, что данная прямая образует с осями координат прямоугольный треугольник с катетами $|p|$ и $|2p|$ (см. рисунок), площадь которого

$S=\frac{1}{2}|p|\cdot|2p|=p^2.$



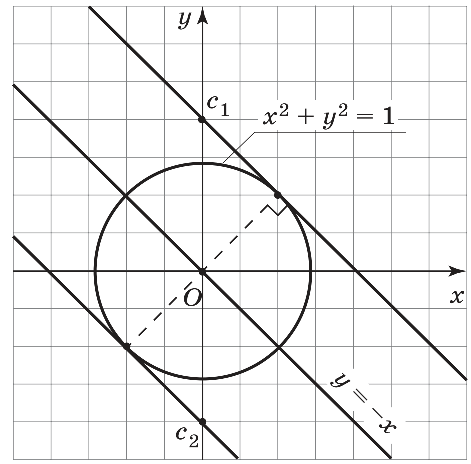
По условию $S=81$,
$p^2=81$,
$p=\pm 9$.
Следовательно, при $p=-9$ или $p=9$ прямая $y=0{,}5x+p$ образует с осями координат треугольник площадью 81.

ОТВЕТ: −9; 9.

ПРИМЕР 21. При каких значениях c окружность $x^2+y^2=8$ и прямая $x+y=c$ пересекаются в двух точках?

РЕШЕНИЕ. $x^2+y^2=8$ — уравнение окружности с центром в начале координат (0; 0) и радиусом $R=2\sqrt{2}$ $\left(\left(2\sqrt{2}\right)^2=8\right)$; $y=-x+c$ — уравнение прямой, параллельной прямой $y=-x$ и проходящей через точку (0; c).

Прямая $y = -x + c$ может:
1) не пересекать окружность $x^2 + y^2 = 8$;
2) пересекать данную окружность в одной точке (касательные $y = -x + c_1$ и $y = -x + c_2$ к окружности изображены на рисунке);
3) пересекать эту окружность в двух точках (все такие прямые находятся между касательными $y = -x + c_1$ и $y = -x + c_2$).
Найдём значения c_1 и c_2, используя свойство касательной к окружности и свойство прямой $y = -x + c$, отсекающей на осях координат равные отрезки: $c_1 = R\sqrt{2} = 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 4 = -c_2$. Следовательно, при $-4 < c < 4$ прямая $x + y = c$ пересекает окружность $x^2 + y^2 = 8$ в двух точках.



ОТВЕТ: (–4; 4).

Задания для самостоятельного решения

1. Найдите все значения k, при каждом из которых прямая $y = kx$ имеет с графиком функции $y = -x^2 - 1$ ровно одну общую точку. Постройте этот график и все такие прямые.

2. Постройте график функции $y = \dfrac{(x^2 + 1)(x + 2)}{-2 - x}$ и определите, при каких значениях k прямая $y = kx$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

3. Постройте график функции $y = \dfrac{6x + 7}{6x^2 + 7x}$ и определите, при каких значениях k прямая $y = kx$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

4. Постройте график функции $y = 1 - \dfrac{x + 5}{x^2 + 5x}$ и определите, при каких значениях m прямая $y = m$ не имеет с графиком ни одной общей точки.

5. Постройте график функции

$$y = \begin{cases} 2{,}5x - 1, \text{ если } x < 1, \\ -2{,}5x + 4, \text{ если } 1 \leqslant x \leqslant 3, \\ 1{,}5x - 8, \text{ если } x > 3, \end{cases}$$

и определите, при каких значениях m прямая $y = m$ имеет с графиком ровно две общие точки.

6. Постройте график функции

$$y = \begin{cases} x^2 - 2x + 1, \text{ если } x \geqslant -1, \\ -\dfrac{4}{x}, \text{ если } x < -1, \end{cases}$$

и определите, при каких значениях m прямая $y = m$ имеет с графиком одну или две общие точки.

7. Постройте график функции

$$y = \begin{cases} x^2 - 10x + 27, \text{ если } x \geqslant 4, \\ x - 1, \text{ если } x < 4, \end{cases}$$

и определите, при каких значениях m прямая $y = m$ имеет с графиком ровно две общие точки.

8. Постройте график функции $y = |x^2 - 6x + 5|$. Какое наибольшее число общих точек график данной функции может иметь с прямой, параллельной оси абсцисс?

9. Постройте график функции $y = x^2 - 3|x| - x$ и определите, при каких значениях m прямая $y = m$ имеет с графиком не менее одной, но не более трёх общих точек.

10. Постройте график функции $y = x^2 - |6x + 5|$ и определите, при каких значениях m прямая $y = m$ имеет с графиком ровно три общие точки.

11. Постройте график функции $y = |x|(x + 2) - 3x$ и определите, при каких значениях m прямая $y = m$ имеет с графиком ровно две общие точки.

12. Постройте график функции $y = x|x| + |x| - 3x$ и определите, при каких значениях m прямая $y = m$ имеет с графиком ровно две общие точки.

13. Постройте график функции $y = \frac{(0{,}5x^2 + 2x)|x|}{x + 4}$ и определите, при каких значениях m прямая $y = m$ не имеет с графиком ни одной общей точки.

14. Постройте график функции $y = \frac{1}{2}\left(\left|\frac{x}{2} - \frac{2}{x}\right| + \frac{x}{2} + \frac{2}{x}\right)$ и определите, при каких значениях m прямая $y = m$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

15. Постройте график функции $y = 5 - \frac{x^4 - 2x^3}{x^2 - 2x}$ и определите, при каких значениях m прямая $y = m$ имеет с графиком ровно две общие точки.

16. Постройте график функции $y = \frac{(x^2 + 7x + 12)(x^2 - x - 2)}{x^2 + 5x + 4}$ и определите, при каких значениях m прямая $y = m$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

17. Изобразите на координатной плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют уравнению $x^2 - 4xy + 4y^2 = 1$.

18. Изобразите на координатной плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют уравнению $(x^2 - 2y)(x^2 - 1) = 0$.

19. Постройте множество точек плоскости, координаты которых удовлетворяют уравнению $\frac{x^2 + y^2 - 9}{x^2 - y^2} = 0$.

20. При каких значениях p прямая $y = px + 2$ образует с осями координат треугольник, площадь которого равна 16?

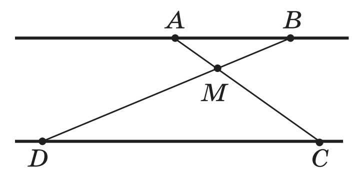
21. При каких значениях c окружность $x^2 + y^2 = 18$ и прямая $x - y = c$ не пересекаются?

ЗАДАЧА 24

ПРИМЕР 1. Отрезки AB и DC лежат на параллельных прямых, а отрезки AC и BD пересекаются в точке M. Найдите длину отрезка MC, если $AB = 14$, $DC = 42$, $AC = 52$.

Дано: отрезки AB и DC лежат на параллельных прямых; $AC \cap BD = M$; $AB = 14$, $DC = 42$, $AC = 52$.

Найти: длину MC.



РЕШЕНИЕ.

1) $\angle DCM = \angle BAM$ — накрест лежащие углы при параллельных прямых AB и DC и секущей AC; $\angle DMC = \angle BMA$ — вертикальные. Поэтому $\triangle DMC \sim \triangle BMA$ по двум углам.

2) Значит, $\frac{AM}{MC} = \frac{AB}{CD} = \frac{14}{42} = \frac{1}{3}$.

3) Следовательно, $AC = AM + MC = \frac{1}{3}MC + MC = \frac{4}{3}MC$.

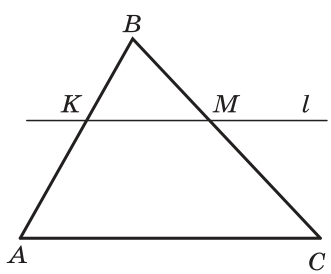
Откуда $MC = \frac{3}{4}AC = \frac{3 \cdot 52}{4} = 39$.

ОТВЕТ: 39.

ПРИМЕР 2. Прямая, параллельная стороне AC треугольника ABC, пересекает стороны AB и BC в точках K и M соответственно. Найдите длину стороны AC, если $BK : KA = 3 : 4$, $KM = 18$.

Дано: $\triangle ABC$; $l \parallel AC$, $l \cap AB = K$, $l \cap BC = M$; $BK : KA = 3 : 4$; $KM = 18$.

Найти: длину AC.



РЕШЕНИЕ. Так как $KM \parallel AC$, то $\angle BKM = \angle BAC$ — соответственные углы при параллельных прямых KM и AC и секущей AB. Значит, $\triangle BKM \sim \triangle BAC$ по двум углам ($\angle B$ — общий).

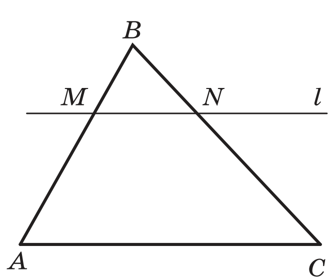
Следовательно, $\frac{BK}{BA} = \frac{KM}{AC} = \frac{3}{7}$. Откуда $AC = \frac{7KM}{3} = \frac{7 \cdot 18}{3} = 42$.

ОТВЕТ: 42.

ПРИМЕР 3. Прямая, параллельная стороне AC треугольника ABC, пересекает стороны AB и BC в точках M и N соответственно. Найдите длину отрезка BN, если $MN = 17$, $AC = 51$, $NC = 32$.

Дано: $\triangle ABC$; $l \parallel AC$, $l \cap AB = M$, $l \cap BC = N$; $MN = 17$, $AC = 51$, $NC = 32$.

Найти: длину BN.



РЕШЕНИЕ. $\angle BMN = \angle BAC$ — соответственные углы при параллельных прямых AC и MN и секущей AB. Значит, $\triangle BMN \sim \triangle BAC$ по двум углам ($\angle B$ — общий).

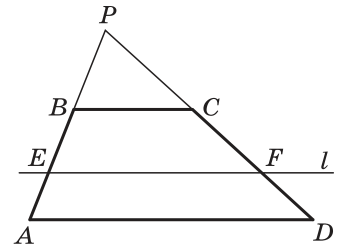
Следовательно, $\frac{BM}{BA} = \frac{BN}{BC} = \frac{MN}{AC} = \frac{17}{51} = \frac{1}{3}$. Откуда $BC = 3BN$.

С другой стороны, $BC = BN + NC$, или $3BN = BN + 32$, $2BN = 32$, $BN = 16$.

ОТВЕТ: 16.

ПРИМЕР 4. Прямая, параллельная основаниям трапеции $ABCD$, пересекает её боковые стороны AB и CD в точках E и F соответственно. Найдите длину отрезка EF, если $AD = 42$, $BC = 14$, $CF : DF = 4 : 3$.

Дано: $ABCD$ — трапеция, $AD \parallel BC$; $l \parallel AD$, $l \cap AB = E$, $l \cap CD = F$; $AD = 42$, $BC = 14$; $CF : DF = 4 : 3$.



Найти: длину EF.

РЕШЕНИЕ. Пусть $AB \cap CD = P$. Так как прямые AD, BC и EF параллельны, то треугольники APD, EPF и BPC подобны (по двум углам: $\angle P$ — общий, $\angle PAD = \angle PEF = \angle PBC$ — соответственные углы при параллельных прямых AD, EF и BC и секущей AP).

Следовательно, $\frac{PD}{PC} = \frac{AD}{BC} = \frac{42}{14} = \frac{3}{1}$.

Откуда $CD = PD - PC = 2PC$, $CF = \frac{4}{7}CD = \frac{8}{7}PC$.

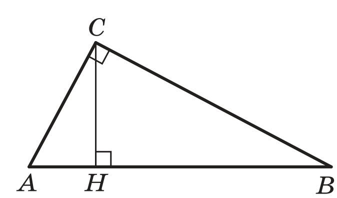
Значит, $PF = PC + CF = PC + \frac{8}{7}PC = \frac{15}{7}PC$.

Тогда $\frac{EF}{BC} = \frac{PF}{PC} = \frac{15}{7}$. Откуда $EF = \frac{15}{7} \cdot 14 = 30$.

ОТВЕТ: 30.

ПРИМЕР 5. Катеты прямоугольного треугольника равны 18 и 24. Найдите длину высоты, проведённой к гипотенузе.

Дано: $\triangle ABC$; $\angle C = 90°$, $AC = 18$, $BC = 24$; CH — высота.



Найти: длину CH.

РЕШЕНИЕ. По теореме Пифагора гипотенуза $AB = \sqrt{18^2 + 24^2} =$ $= 30$.

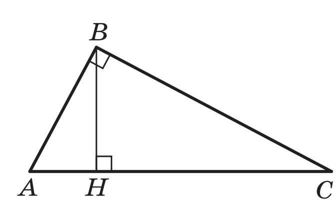
$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}AC \cdot BC = \frac{1}{2}AB \cdot CH$.

Откуда $CH = \frac{AC \cdot BC}{AB} = \frac{18 \cdot 24}{30} = 14{,}4$.

ОТВЕТ: 14,4.

ПРИМЕР 6. Точка H является основанием высоты, проведённой из вершины прямого угла B треугольника ABC к гипотенузе AC. Найдите длину катета AB, если $AH = 6$, $AC = 24$.

Дано: $\triangle ABC$; $\angle B = 90°$, BH — высота; $AH = 6$, $AC = 24$.



Найти: длину AB.

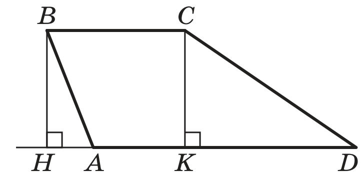
РЕШЕНИЕ. Прямоугольные треугольники ABC и AHB подобны по острому углу ($\angle A$ — общий).

Следовательно, $\frac{AB}{AC} = \frac{AH}{AB}$, откуда $AB^2 = AC \cdot AH$,

$AB = \sqrt{24 \cdot 6} = 12$.

ОТВЕТ: 12.

ПРИМЕР 7. Найдите длину боковой стороны AB трапеции $ABCD$, если углы ABC и BCD равны соответственно $60°$ и $135°$, а $CD = 36$.



Дано: $ABCD$ — трапеция, $AD \parallel BC$; $CD = 36$, $\angle ABC = 60°$, $\angle BCD = 135°$.

Найти: длину AB.

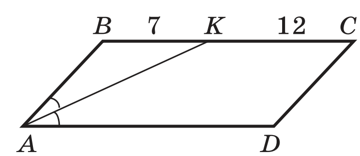
РЕШЕНИЕ. Проведём высоты BH и CK трапеции $ABCD$. В прямоугольном треугольнике CKD $\angle DCK = 45°$, следовательно, $CK = CD \cdot \cos\ 45° = 36 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 18\sqrt{2}$.

В прямоугольном треугольнике ABH катет $BH = CK = 18\sqrt{2}$, $\angle ABH = 90° - 60° = 30°$.

Значит, $AB = \frac{BH}{\cos 30°} = \frac{18\sqrt{2} \cdot 2}{\sqrt{3}} = 12\sqrt{6}$.

ОТВЕТ: $12\sqrt{6}$.

ПРИМЕР 8. Биссектриса угла A параллелограмма $ABCD$ пересекает сторону BC в точке K. Найдите периметр параллелограмма, если $BK = 7$, $CK = 12$.



Дано: $ABCD$ — параллелограмм, AK — биссектриса $\angle A$, $K \in BC$; $BK = 7$, $CK = 12$.

Найти: P_{ABCD}.

РЕШЕНИЕ. Так как AK — биссектриса $\angle BAD$, то $\angle BAK = \angle DAK$.

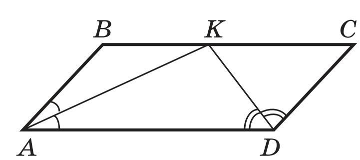
Так как $ABCD$ — параллелограмм, то $\angle BKA = \angle DAK$ — накрест лежащие углы при параллельных прямых AD и BC и секущей AK.

Поэтому $\angle BAK = \angle DAK = \angle BKA$. Значит, $\triangle BKA$ — равнобедренный и $AB = BK = 7$.

Периметр параллелограмма $P_{ABCD} = 2(AB + BC) = 2(7 + 19) = 52$.

ОТВЕТ: 52.

ПРИМЕР 9. Биссектрисы углов A и D параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке, лежащей на стороне BC. Найдите длину стороны AB, если $BC = 44$.



Дано: $ABCD$ — параллелограмм, AK — биссектриса $\angle A$, DK — биссектриса $\angle D$, $K \in BC$; $BC = 44$.

Найти: длину AB.

РЕШЕНИЕ.

1) $\angle DAK = \angle BKA$ — накрест лежащие углы при параллельных прямых AD и BC и секущей AK; $\angle BAK = \angle DAK$ (AK — биссектриса $\angle A$), поэтому $\angle BKA = \angle BAK$, значит, $\triangle BAK$ — равнобедренный и $BA = BK$.

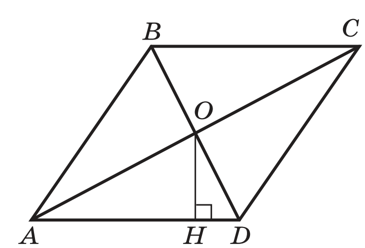
2) Аналогично можно доказать, что $\triangle CKD$ — равнобедренный и $CK = CD$.

3) По свойству параллелограмма $AB = CD$, значит, $BC = BK + KC = AB + CD = 2AB$.

Откуда $AB = \frac{1}{2}BC = 22$.

ОТВЕТ: 22.

ПРИМЕР 10. Расстояние от точки пересечения диагоналей ромба до одной из его сторон равно 15, а одна из диагоналей ромба равна 60. Найдите углы ромба.



Дано: $ABCD$ — ромб, $AC \cap BD = O$, $AC = 60$; $OH \perp AD$, $H \in AD$, $OH = 15$.

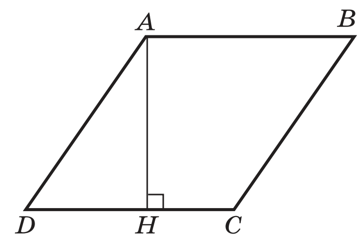
Найти: углы ромба.

РЕШЕНИЕ. В прямоугольном треугольнике AOH катет OH равен половине гипотенузы AO ($AO = \frac{1}{2}AC = 30$; $OH = \frac{1}{2}AO$), значит, $\angle OAH = 30°$.

Диагонали ромба являются биссектрисами его углов, значит, $\angle BAD = 2\angle OAH = 60° = \angle BCD$;
$\angle ABC = \angle ADC = 180° - \angle BAD = 120°$ (по свойству углов параллелограмма, прилежащих к одной стороне).

ОТВЕТ: 60°; 120°.

ПРИМЕР 11. Высота AH ромба $ABCD$ делит сторону CD на отрезки $DH = 8$ и $CH = 2$. Найдите длину высоты ромба.



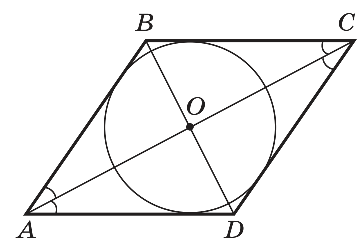
Дано: $ABCD$ — ромб, AH — высота, $DH = 8$, $CH = 2$.

Найти: длину AH.

РЕШЕНИЕ. Все стороны ромба равны, поэтому $AD = DC = DH + CH = 10$. В прямоугольном треугольнике ADH ($\angle H = 90°$) по теореме Пифагора
$AH = \sqrt{AD^2 - DH^2} = \sqrt{10^2 - 8^2} = 6$.

ОТВЕТ: 6.

ПРИМЕР 12. В параллелограмм вписана окружность. Найдите периметр параллелограмма, если одна из его сторон равна 5.



Дано: $ABCD$ — параллелограмм, окружность (O; r) вписана в параллелограмм, $AB = 5$.

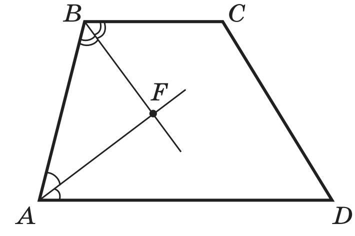
Найти: P_{ABCD}.

РЕШЕНИЕ. Известно, что центр вписанной в четырёхугольник окружности есть точка пересечения биссектрис его углов. Значит, AO — биссектриса $\angle A$, CO — биссектриса $\angle C$ параллелограмма $ABCD$. Но по свойству противолежащих углов параллелограмма $\angle A = \angle C$, а значит, равны их половины. Следовательно, прямая AC содержит биссектрисы углов A и C, поэтому треугольник ABC — равнобедренный: $AB = BC$.
Получается, что параллелограмм $ABCD$ является ромбом и его периметр $P = 4 \cdot 5 = 20$.

ОТВЕТ: 20.

ЗАМЕЧАНИЕ. Для доказательства того, что параллелограмм является ромбом, можно было воспользоваться свойством отрезков касательных, проведённых к окружности из одной точки.

ПРИМЕР 13. Биссектрисы углов A и B при боковой стороне AB трапеции $ABCD$ пересекаются в точке F. Найдите длину стороны AB, если $AF = 24$, $BF = 10$.



Дано: $ABCD$ — трапеция, $AD \parallel BC$; AF — биссектриса $\angle A$, BF — биссектриса $\angle B$; $AF = 24$, $BF = 10$.

Найти: длину AB.

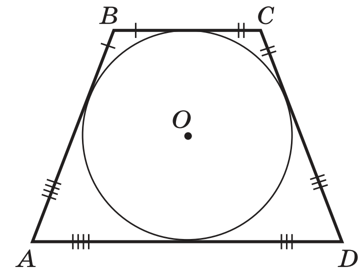
РЕШЕНИЕ. Так как сумма углов, прилежащих к боковой стороне трапеции, равна 180°, то

$\angle BAF + \angle ABF = \frac{1}{2}\angle BAD + \frac{1}{2}\angle ABC = \frac{1}{2}(\angle BAD + \angle ABC) = 90°$.

Значит, треугольник ABF прямоугольный ($\angle F = 90°$). По теореме Пифагора $AB = \sqrt{AF^2 + BF^2} = \sqrt{24^2 + 10^2} = 26$.

ОТВЕТ: 26.

ПРИМЕР 14. В трапецию, сумма длин боковых сторон которой равна 16, вписана окружность. Найдите длину средней линии трапеции.



Дано: $ABCD$ — трапеция, $AD \parallel BC$, $AB + CD = 16$; окружность (O; r) вписана в трапецию; MN — средняя линия $ABCD$.

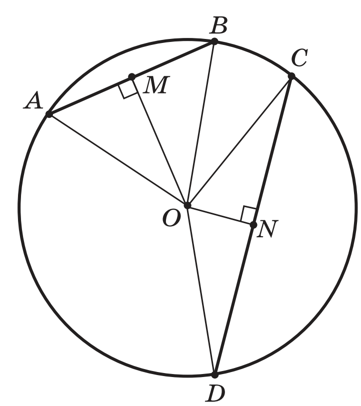
Найти: длину MN.

РЕШЕНИЕ. По свойству противолежащих сторон четырёхугольника, описанного около окружности:
$AD + BC = AB + CD = 16$.

Значит, длина средней линии трапеции $MN = \frac{AD + BC}{2} = \frac{16}{2} = 8$.

ОТВЕТ: 8.

ПРИМЕР 15. Отрезки AB и CD являются хордами окружности. Найдите длину хорды CD, если $AB = 10$, а расстояния от центра окружности до хорд AB и CD равны соответственно 12 и 5.



Дано: окружность (O; r), AB и CD — хорды, $AB = 10$; расстояние от O до AB равно 12, расстояние от O до CD равно 5.

Найти: длину CD.

РЕШЕНИЕ. Пусть OM и ON — перпендикуляры к хордам AB и AC соответственно. Так как $OA = OB = OC = OD$, то треугольники AOB и COD — равнобедренные. Значит, их высоты OM и ON являются их медианами: $AM = MB$, $CN = ND$.

Тогда в прямоугольном треугольнике AOM

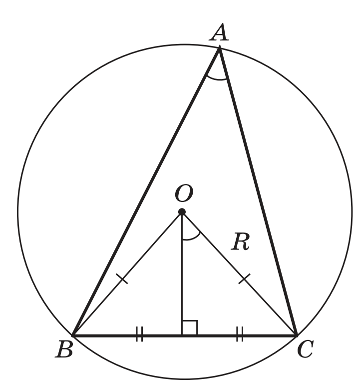
$$OA = \sqrt{OM^2 + \left(\frac{AB}{2}\right)^2} = \sqrt{12^2 + 5^2} = 13.$$

В прямоугольном треугольнике CON гипотенуза $OC = OA = 13$.

Значит, $CN = \sqrt{OC^2 - ON^2} = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$, откуда $CD = 2CN = 24$.

ОТВЕТ: 24.

ПРИМЕР 16. Углы B и C треугольника ABC равны соответственно 71° и 79°. Найдите длину стороны BC, если радиус окружности, описанной около треугольника ABC, равен 8.



Дано: $\triangle ABC$, $\angle B = 71°$, $\angle C = 79°$; окружность (O; R) описана около $\triangle ABC$, $R = 8$.

Найти: длину BC.

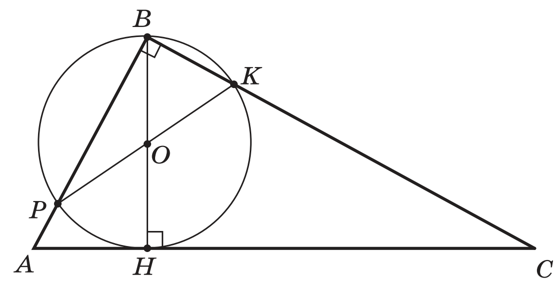
РЕШЕНИЕ. *Первый способ.* Известно, что радиус описанной около треугольника ABC окружности $R = \frac{BC}{2\sin A}$.

Откуда $BC = 2R\sin A = 2 \cdot 8 \cdot \sin(180° - (71° + 79°)) = 16 \cdot \sin 30° = 8$.

Второй способ. 1) $\angle BAC = 180° - (\angle B + \angle C) = 180° - (71° + 79°) = 30°$.

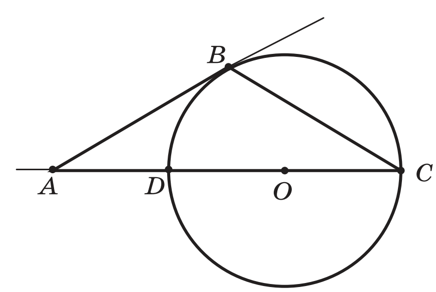
2) Угол BAC вписан в окружность $(O;\ R)$, поэтому $\angle BAC = \frac{1}{2}\angle BOC$, где $\angle BOC$ — центральный угол, опирающийся на ту же дугу BC, что и угол BAC.
Значит, $\angle BOC = 2\angle BAC = 60°$.
3) $\triangle BOC$ — равнобедренный, так как $OB = OC = R$ и $\angle BOC = 60°$. Следовательно, $\triangle BOC$ — равносторонний ($\angle OBC = \angle OCB = 60°$), а значит, $BC = OB = OC = 8$.
ОТВЕТ: 8.

ПРИМЕР 17. Точка H является основанием высоты BH, проведённой из вершины прямого угла B прямоугольного треугольника ABC. Окружность с диаметром BH пересекает стороны AB и CB в точках P и K соответственно. Найдите длину отрезка PK, если $BH = 14$.



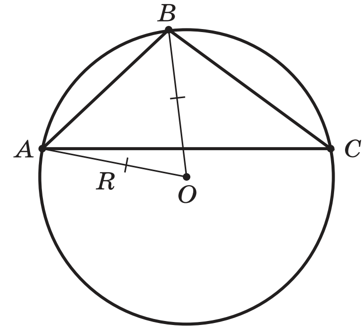
Дано: $\triangle ABC$, $\angle B = 90°$; BH — высота; $BH = 14$; окружность $(O;\ r)$ с диаметром BH пересекает AB в точке P, BC — в точке K.
Найти: длину PK.
РЕШЕНИЕ. Угол PBK опирается на дугу PK и равен $90°$ по условию, значит, PK — диаметр окружности, откуда $PK = BH = 14$.
ОТВЕТ: 14.

ПРИМЕР 18. Окружность с центром на стороне AC треугольника ABC проходит через вершину C и касается прямой AB в точке B. Найдите диаметр окружности, если $AB = 9$, $AC = 12$.
Дано: $\triangle ABC$, $AB = 9$, $AC = 12$, окружность $(O;\ r)$ проходит через вершину C и касается прямой AB в точке B, $O \in AC$.
Найти: диаметр окружности.



РЕШЕНИЕ. Пусть D — точка пересечения окружности со стороной AC, $CD = x$ — диаметр окружности. По свойству касательной и секущей, проведённых из одной точки к окружности:
$AB^2 = AC \cdot AD$; $AD = AC - x$.
$9^2 = 12 \cdot (12 - x)$,
$12x = 63$,
$x = 5{,}25$.
ОТВЕТ: 5,25.

ПРИМЕР 19. Вершины треугольника делят описанную около него окружность на три дуги, длины которых относятся как 6 : 7 : 23. Найдите радиус окружности, если меньшая из сторон треугольника равна 12.

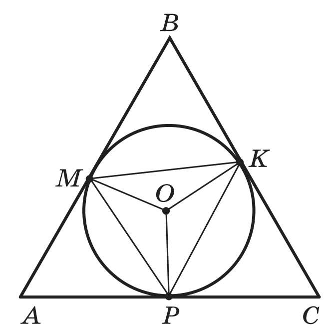


Дано: $\triangle ABC$, окружность $(O;\ R)$ описана около $\triangle ABC$; дуги $AB : BC : AC = 6 : 7 : 23$.
Найти: R.
РЕШЕНИЕ. Так как длины дуг AB, BC и AC относятся как 6 : 7 : 23, меньшей является сторона $AB = 12$, а меньшим углом является $\angle C$,

лежащий против стороны AB. Известно, что градусные меры углов соотносятся так же, как длины дуг, на которые они опираются, т. е. $\angle C : \angle A : \angle B = 6 : 7 : 23$.
Пусть k — коэффициент пропорциональности углов. Тогда углы треугольника равны $6k$, $7k$ и $23k$, их сумма равна $180°$, откуда $6k + 7k + 23k = 180$,
$36k = 180$,
$k = 5$.
Значит, меньший угол — $\angle C = 6k = 30°$.
Известно, что $R = \frac{AB}{2\sin C} = \frac{12}{2 \cdot \sin 30°} = 12$.

ОТВЕТ: 12.

ПРИМЕР 20. Окружность, вписанная в треугольник ABC, касается его сторон в точках M, K и P. Найдите углы треугольника ABC, если углы треугольника MKP равны $56°$, $57°$ и $67°$.



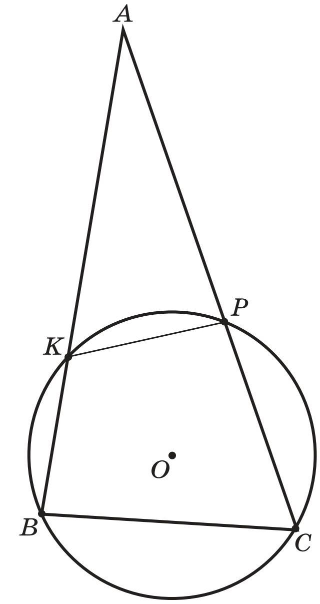
Дано: $\triangle ABC$, окружность $(O;\ r)$ вписана в $\triangle ABC$, касается сторон: AB — в точке M, BC — в точке K, AC — в точке P; в $\triangle MKP$ углы: $\angle M = 56°$, $\angle K = 57°$, $\angle P = 67°$.

Найти: углы $\triangle ABC$.

РЕШЕНИЕ. Углы M, K и P являются вписанными в данную окружность и равны половине соответствующих центральных углов, опирающихся на те же дуги, откуда
$\angle MOK = 2\angle P = 134°$,
$\angle KOP = 2\angle M = 112°$,
$\angle MOP = 2\angle K = 114°$.
Радиусы OM, OK и OP перпендикулярны соответствующим сторонам треугольника ABC, поэтому в четырёхугольниках $AMOP$, $BMOK$ и $CKOP$ два угла по $90°$ и ещё по одному углу, найденному выше, а четвёртыми углами являются углы треугольника ABC. Следовательно,
$\angle A = 180° - \angle MOP = 66°$,
$\angle B = 180° - \angle MOK = 46°$,
$\angle C = 180° - \angle KOP = 68°$.

ОТВЕТ: $66°$, $46°$, $68°$.

ПРИМЕР 21. Окружность пересекает стороны AB и AC треугольника ABC в точках K и P соответственно и проходит через вершины B и C. Найдите длину отрезка KP, если $AK = 6$, а сторона AC в 1,5 раза больше стороны BC.



Дано: $\triangle ABC$, окружность $(O;\ r)$ проходит через вершины B и C и пересекает AB — в точке K, AC — в точке P; $AK = 6$, $AC = 1{,}5BC$.

Найти: длину KP.

РЕШЕНИЕ. Четырёхугольник $BKPC$ вписан в окружность, поэтому $\angle KBC + \angle KPC = 180°$. Углы APK и CPK — смежные, поэтому $\angle APK + \angle CPK = 180°$. Получаем, что $\angle KBC = \angle APK$. В треугольниках ABC и APK $\angle A$ — общий, $\angle KBC = \angle APK$, следовательно, эти треугольники подобны.
Значит, $\frac{AK}{PK} = \frac{AC}{BC} = 1{,}5$, откуда $KP = \frac{AK}{1{,}5} = \frac{6}{1{,}5} = 4$.

ОТВЕТ: 4.

Задания для самостоятельного решения

1. Отрезки AB и DC лежат на параллельных прямых, а отрезки AC и BD пересекаются в точке M. Найдите длину отрезка MC, если $AB = 18$, $DC = 54$, $AC = 48$.

2. Прямая, параллельная стороне AC треугольника ABC, пересекает стороны AB и BC в точках K и M соответственно. Найдите длину стороны AC, если $BK : KA = 3 : 7$, $KM = 12$.

3. Прямая, параллельная стороне AC треугольника ABC, пересекает стороны AB и BC в точках M и N соответственно. Найдите длину отрезка BN, если $MN = 16$, $AC = 20$, $NC = 15$.

4. Прямая, параллельная основаниям трапеции $ABCD$, пересекает её боковые стороны AB и CD в точках E и F соответственно. Найдите длину отрезка EF, если $AD = 50$, $BC = 30$, $CF : DF = 7 : 3$.

5. Катеты прямоугольного треугольника равны 15 и 20. Найдите длину высоты, проведённой к гипотенузе.

6. Точка H является основанием высоты, проведённой из вершины прямого угла B треугольника ABC к гипотенузе AC. Найдите длину катета AB, если $AH = 5$, $AC = 20$.

7. Найдите длину боковой стороны AB трапеции $ABCD$, если углы ABC и BCD равны соответственно $45°$ и $150°$, а $CD = 26$.

8. Биссектриса угла A параллелограмма $ABCD$ пересекает сторону BC в точке K. Найдите периметр параллелограмма, если $BK = 5$, $CK = 8$.

9. Биссектрисы углов A и D параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке, лежащей на стороне BC. Найдите длину стороны AB, если $BC = 36$.

10. Расстояние от точки пересечения диагоналей ромба до одной из его сторон равно 12, а одна из диагоналей ромба равна 48. Найдите углы ромба.

11. Высота AH ромба $ABCD$ делит сторону CD на отрезки $DH = 15$ и $CH = 2$. Найдите длину высоты ромба.

12. В параллелограмм вписана окружность. Найдите периметр параллелограмма, если одна из его сторон равна 8.

13. Биссектрисы углов C и D при боковой стороне CD трапеции $ABCD$ пересекаются в точке K. Найдите длину стороны CD, если $CK = 5$, $DK = 12$.

14. В трапецию, сумма длин боковых сторон которой равна 22, вписана окружность. Найдите длину средней линии трапеции.

15. Отрезки AB и CD являются хордами окружности. Найдите расстояние от центра окружности до хорды CD, если $AB = 18$, $CD = 24$, а расстояние от центра окружности до хорды AB равно 12.

16. Углы B и C треугольника ABC равны соответственно $64°$ и $86°$. Найдите длину стороны BC, если радиус окружности, описанной около треугольника ABC, равен 13.

17. Точка H является основанием высоты BH, проведённой из вершины прямого угла B прямоугольного треугольника ABC. Окружность с диаметром BH пересекает стороны AB и CB в точках P и K соответственно. Найдите длину отрезка PK, если $BH = 11$.

18. Окружность с центром на стороне AC треугольника ABC проходит через вершину C и касается прямой AB в точке B. Найдите диаметр окружности, если $AB = 6$, $AC = 10$.

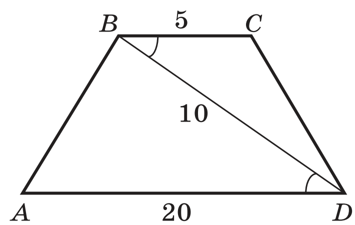
19. Вершины треугольника делят описанную около него окружность на три дуги, длины которых относятся как $2 : 3 : 7$. Найдите радиус окружности, если меньшая из сторон треугольника равна 16.

20. Окружность, вписанная в треугольник ABC, касается его сторон в точках M, K и P. Найдите углы треугольника ABC, если углы треугольника MKP равны $52°$, $56°$ и $72°$.

21. Окружность пересекает стороны AB и AC треугольника ABC в точках K и P соответственно и проходит через вершины B и C. Найдите длину отрезка KP, если $AK = 18$, а сторона AC в $1{,}2$ раза больше стороны BC.

ЗАДАЧА 25

ПРИМЕР 1. Основания BC и AD трапеции $ABCD$ равны соответственно 5 и 20. Диагональ BD равна 10. Докажите, что треугольники CBD и BDA подобны.

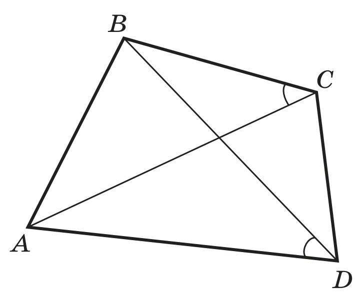


Дано: $ABCD$ — трапеция, $AD \parallel BC$, $AD = 20$, $BC = 5$, $BD = 10$.

Доказать: $\triangle CBD \sim \triangle BDA$.

Доказательство. В треугольниках CBD и BDA: $\frac{BC}{BD} = \frac{BD}{DA} = \frac{1}{2}$, $\angle CBD = \angle BDA$ (накрест лежащие углы при параллельных прямых AD и BC и секущей BD). Следовательно, треугольники CBD и BDA подобны по двум пропорциональным сторонам и углу между ними.
Что и требовалось доказать.

ПРИМЕР 2. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ углы BCA и BDA равны. Докажите, что углы ABD и ACD также равны.

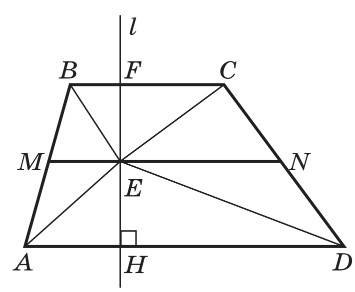


Дано: $ABCD$ — выпуклый четырёхугольник, $\angle BCA = \angle BDA$.

Доказать: $\angle ABD = \angle ACD$.

Доказательство. Известно, что геометрическое место вершин углов с заданной градусной мерой, стороны которых проходят через две данные точки, а вершины лежат по одну сторону от прямой, соединяющей эти точки, есть дуга окружности с концами в этих точках. По условию $\angle BCA = \angle BDA$, значит, точки A, B, C и D лежат на одной окружности. Тогда углы ABD и ACD вписаны в эту окружность и опираются на одну дугу AD, а их вершины B и C лежат по одну сторону от прямой AD. По свойству вписанных углов $\angle ABD = \angle ACD$.
Что и требовалось доказать.

ПРИМЕР 3. На средней линии трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC выбрали произвольную точку E. Докажите, что сумма площадей треугольников BEC и AED равна половине площади трапеции.



Дано: $ABCD$ — трапеция, $AD \parallel BC$; MN — средняя линия $ABCD$, $E \in MN$ (E — произвольная точка отрезка MN).

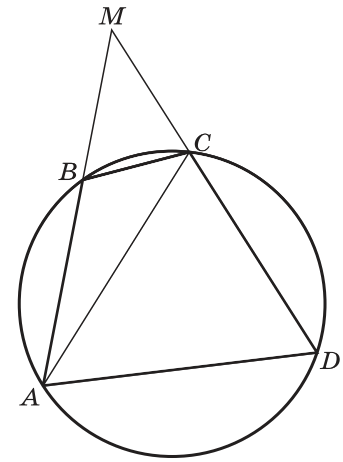
Доказать: $S_{\triangle AED} + S_{\triangle BEC} = \frac{1}{2} S_{ABCD}$.

Доказательство. Проведём через точку E прямую l, перпендикулярную основанию AD: $l \cap AD = H$, $l \cap BC = F$.
Тогда $l \perp BC$, а отрезки EH и EF — высоты треугольников AED и BEC соответственно, FH — высота трапеции, причём $EH = EF = \frac{1}{2} FH$.

$$S_{\triangle BEC} + S_{\triangle AED} = \frac{1}{2} BC \cdot EF + \frac{1}{2} AD \cdot EH = \frac{AD + BC}{2} \cdot EF = \frac{AD + BC}{2} \cdot \frac{1}{2} FH = \frac{1}{2} S_{ABCD}.$$

Что и требовалось доказать.

ПРИМЕР 4. Известно, что около четырёхугольника $ABCD$ можно описать окружность, а продолжения сторон AB и CD четырёхугольника пересекаются в точке M. Докажите, что треугольники MBC и MDA подобны.



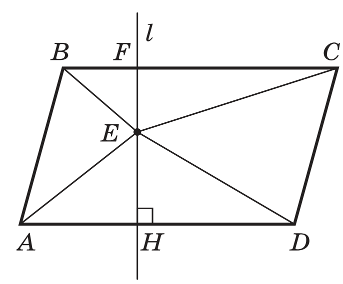
Дано: $ABCD$ — четырёхугольник, окружность $(O;\ r)$ описана около $ABCD$; $AB \cap CD = M$.

Доказать: $\triangle MBC \sim \triangle MDA$.

Доказательство. Так как около четырёхугольника $ABCD$ можно описать окружность, то углы ABC и ADC вписаны в эту окружность, их стороны проходят через точки A и C, а вершины B и D лежат по разные стороны относительно прямой AC. По свойству таких углов $\angle ADC = 180° - \angle ABC$. Углы ABC и MBC смежные, поэтому $\angle MBC = 180° - \angle ABC$. Следовательно, $\angle ADM = \angle MBC$. Тогда в треугольниках MBC и MDA угол M — общий, а углы MBC и ADM равны (по доказанному), а значит, эти треугольники подобны по двум углам.

Что и требовалось доказать.

ПРИМЕР 5. Внутри параллелограмма $ABCD$ выбрали произвольную точку E. Докажите, что сумма площадей треугольников BEC и AED равна половине площади параллелограмма.



Дано: $ABCD$ — параллелограмм, E — произвольная точка, лежащая внутри $ABCD$.

Доказать: $S_{\triangle BEC} + S_{\triangle AED} = \frac{1}{2}S_{ABCD}$.

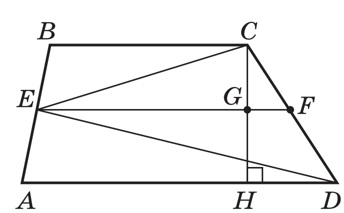
Доказательство. Проведём через точку E прямую l, перпендикулярную стороне AD параллелограмма $ABCD$. Прямая l перпендикулярна также BC. Пусть прямая l пересекает прямые AD и BC в точках H и F соответственно. Тогда EH и EF — высоты треугольников AED и BEC соответственно, а $FH = EH + EF$ — высота параллелограмма $ABCD$. Так как $ABCD$ — параллелограмм, то $AD = BC$.

Следовательно,

$$S_{\triangle AED} + S_{\triangle BEC} = \frac{1}{2}AD \cdot EH + \frac{1}{2}BC \cdot EF = \frac{1}{2}AD(EH + EF) = \frac{1}{2}AD \cdot FH = \frac{1}{2}S_{ABCD}.$$

Что и требовалось доказать.

ПРИМЕР 6. Точка E — середина боковой стороны AB трапеции $ABCD$. Докажите, что площадь треугольника ECD равна половине площади трапеции.



Дано: $ABCD$ — трапеция, $AD \parallel BC$; E — середина AB.

Доказать: $S_{\triangle ECD} = \frac{1}{2}S_{ABCD}$.

Доказательство. Проведём среднюю линию EF и высоту CH трапеции $ABCD$, EF и CH пересекаются в точке G. По свойству средней линии трапеции $EF \parallel AD$ и $EF = \frac{AD + BC}{2}$.

Тогда

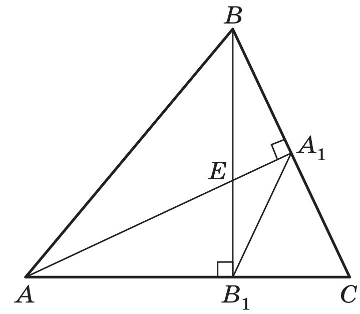
$$S_{\triangle ECD} = S_{\triangle ECF} + S_{\triangle EDF} = \frac{1}{2}EF \cdot CG + \frac{1}{2}EF \cdot GH = \frac{1}{2}EF(CG + GH) = \frac{1}{2} \cdot \frac{AD + BC}{2} \cdot CH = \frac{1}{2}S_{ABCD}.$$

Что и требовалось доказать.

ПРИМЕР 7. Высоты AA_1 и BB_1 остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке E. Докажите, что углы AA_1B_1 и ABB_1 равны.

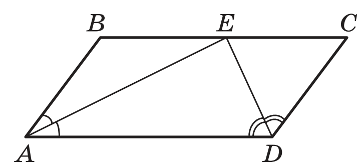
Дано: $\triangle ABC$ — остроугольный, AA_1 и BB_1 — высоты, $AA_1 \cap BB_1 = E$.

Доказать: $\angle AA_1B_1 = \angle ABB_1$.



Доказательство. Так как AA_1 и BB_1 — высоты остроугольного треугольника, то их точка пересечения E находится внутри треугольника ABC и $\angle AB_1B = \angle AA_1B = 90°$. Значит, эти углы являются вписанными в окружность с диаметром AB. Тогда углы AA_1B_1 и ABB_1 вписаны в эту окружность и опираются на одну дугу AB_1.
По свойству вписанных углов $\angle AA_1B_1 = \angle ABB_1$.
Что и требовалось доказать.

ПРИМЕР 8. Биссектрисы углов A и D параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке E стороны BC. Докажите, что E — середина BC.

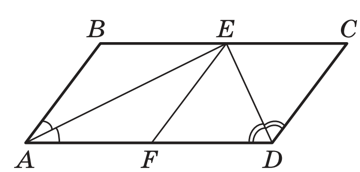


Дано: $ABCD$ — параллелограмм, AE — биссектриса $\angle A$, DE — биссектриса $\angle D$, $E \in BC$.

Доказать: E — середина BC.

Доказательство. *Первый способ.* По условию AE — биссектриса $\angle A$ параллелограмма $ABCD$. Тогда $\angle BAE = \angle DAE$.
$\angle BEA = \angle DAE$ — накрест лежащие углы при параллельных прямых AD и BC и секущей AE. Значит, $\angle BAE = \angle BEA$ и $\triangle ABE$ — равнобедренный: $AB = BE$.
Аналогично можно доказать, что $\triangle CDE$ — равнобедренный: $CD = CE$.
Но $AB = CD$ — противолежащие стороны параллелограмма, значит, $BE = CE$, т. е. E — середина BC.
Что и требовалось доказать.

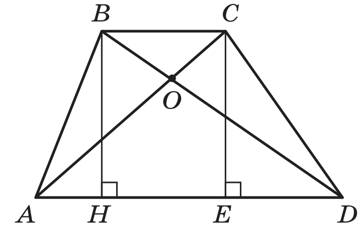
Второй способ. Проведём отрезок EF, параллельный стороне AB, $F \in AD$.
1) Так как $EF \parallel AB \parallel CD$, $BC \parallel AD$, то $ABEF$ и $CDFE$ — параллелограммы.
2) Отрезок AE — биссектриса угла A (по условию) и является диагональю параллелограмма $ABEF$. Значит, $ABEF$ — ромб (по признаку). Поэтому $AB = BE$.
3) Аналогично можно доказать, что $CDFE$ — ромб и $CD = CE$.
4) Так как $AB = CD$, то $BE = CE$, т. е. точка E — середина стороны BC.
Что и требовалось доказать.



ПРИМЕР 9. В трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC диагонали пересекаются в точке O. Докажите, что площади треугольников AOB и COD равны.

Дано: $ABCD$ — трапеция, $AD \parallel BC$; $AC \cap BD = O$.

Доказать: $S_{\triangle AOB} = S_{\triangle COD}$.



Доказательство. Пусть BH — высота трапеции $ABCD$, BH является также высотой треугольника ABD и равна высоте CE треугольника ACD.

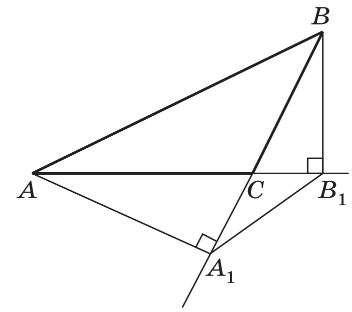
Тогда $S_{\triangle ABD} = \frac{1}{2} \cdot AD \cdot BH = \frac{1}{2} \cdot AD \cdot CE = S_{\triangle ACD}$.

Но $S_{\triangle AOB} = S_{\triangle ABD} - S_{\triangle AOD}$, $S_{\triangle COD} = S_{\triangle ACD} - S_{\triangle AOD}$, откуда следует, что $S_{\triangle AOB} = S_{\triangle COD}$.
Что и требовалось доказать.

ПРИМЕР 10. В треугольнике ABC с тупым углом ACB проведены высоты AA_1 и BB_1. Докажите, что треугольники A_1CB_1 и ACB подобны.

Дано: $\triangle ABC$, $\angle ACB$ — тупой; AA_1 и BB_1 — высоты.

Доказать: $\triangle A_1CB_1 \backsim \triangle ACB$.

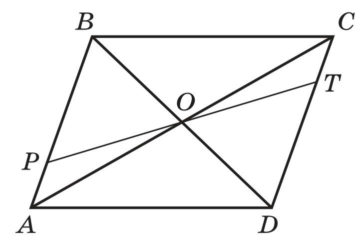


Доказательство. Так как AA_1 и BB_1 — высоты треугольника ABC, то $\angle AA_1B = \angle AB_1B = 90°$. Поэтому эти углы являются вписанными в окружность с диаметром AB. Значит, углы ABA_1 и AB_1A_1 вписаны в эту окружность, опираются на дугу AA_1. Следовательно, эти углы равны: $\angle ABA_1 = \angle AB_1A_1$.
$\angle ACB = \angle B_1CA_1$ — вертикальные.
Следовательно, треугольники A_1CB_1 и ACB подобны по двум углам.
Что и требовалось доказать.

ПРИМЕР 11. Через точку O пересечения диагоналей параллелограмма $ABCD$ проведена прямая, пересекающая стороны AB и CD в точках P и T соответственно. Докажите, что $BP = DT$.

Дано: $ABCD$ — параллелограмм, $AC \cap BD = O$; $O \in l$, $l \cap AB = P$, $l \cap CD = T$.

Доказать: $BP = DT$.

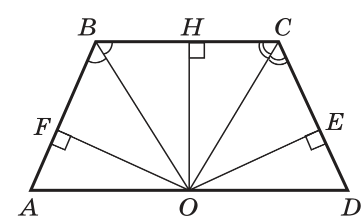


Доказательство. Треугольники BOP и DOT равны по стороне и двум прилежащим к ней углам:
1) $BO = DO$ — по свойству диагоналей параллелограмма;
2) $\angle BOP = \angle DOT$ — вертикальные углы;
3) $\angle PBO = \angle TDO$ — накрест лежащие углы при параллельных прямых AB и CD и секущей BD.
Значит, соответствующие стороны этих треугольников равны: $BP = DT$.
Что и требовалось доказать.

ПРИМЕР 12. Биссектрисы углов B и C трапеции $ABCD$ пересекаются в точке O, лежащей на основании AD. Докажите, что точка O равноудалена от прямых AB, BC и CD.

Дано: $ABCD$ — трапеция, $AD \parallel BC$; BO — биссектриса $\angle B$, CO — биссектриса $\angle C$, $O \in AD$.

Доказать: точка O равноудалена от прямых AB, BC и CD.

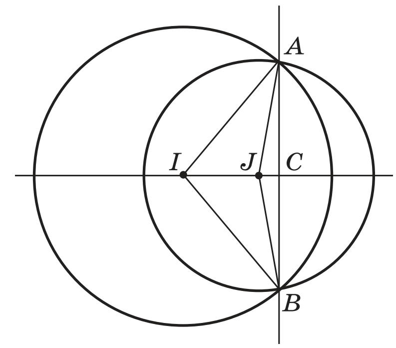


Доказательство. Опустим перпендикуляры из точки O на стороны AB, BC и CD трапеции $ABCD$:
$OF \perp AB$, $OH \perp BC$, $OE \perp CD$.
Прямоугольные треугольники BFO и BHO равны по гипотенузе и острому углу: BO — общая, $\angle FBO = \angle HBO$ (так как BO — биссектриса $\angle B$). Поэтому их катеты OF и OH равны.
Прямоугольные треугольники COH и COE равны по гипотенузе и острому углу: CO — общая, $\angle HCO = \angle ECO$ (так как CO — биссектриса $\angle C$). Поэтому их катеты OH и OE равны.
Значит, $OF = OH = OE$, т. е. точка O равноудалена от прямых AB, BC и CD.
Что и требовалось доказать.

ПРИМЕР 13. Окружности с центрами в точках I и J пересекаются в точках A и B, причём точки I и J лежат по одну сторону от прямой AB. Докажите, что $AB \perp IJ$.

Дано: окружности (I; R) и (J; r) пересекаются в точках A и B; I и J лежат по одну сторону от прямой AB.

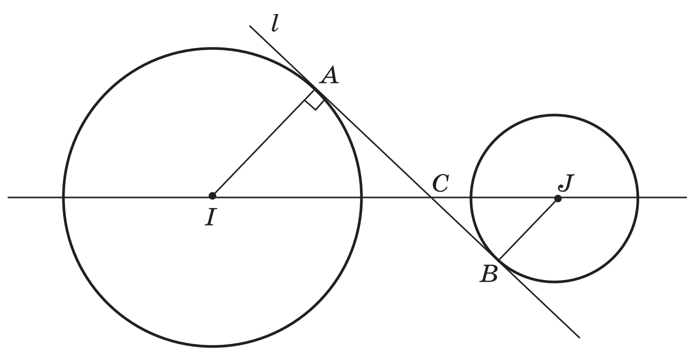
Доказать: $AB \perp IJ$.



Доказательство. Пусть C — середина отрезка AB. Треугольник AIB — равнобедренный ($AI = BI$ — радиусы первой окружности). Тогда медиана IC является высотой $\triangle AIB$. Аналогично в равнобедренном треугольнике AJB ($AJ = BJ$ — радиусы второй окружности) медиана JC является его высотой. Но через точку C, лежащую на прямой AB, проходит единственная прямая, перпендикулярная AB. Поэтому прямые IC и JC совпадают и $IJ \perp AB$. Что и требовалось доказать.

ПРИМЕР 14. Окружности с центрами в точках I и J не имеют общих точек и не лежат одна внутри другой. Внутренняя общая касательная к этим окружностям делит отрезок, соединяющий их центры, в отношении $m : n$. Докажите, что диаметры этих окружностей относятся как $m : n$.

Дано: окружности (I; R) и (J; r) не имеют общих точек и не лежат одна внутри другой; l — внутренняя общая касательная к этим окружностям; $l \cap IJ = C$; $IC : JC = m : n$.



Доказать: диаметры окружностей относятся как $m : n$.

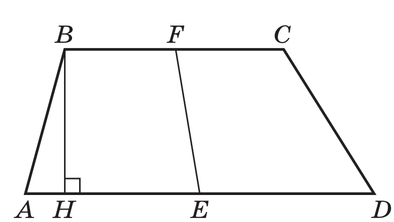
Доказательство. По условию $IC : JC = m : n$. Прямоугольные треугольники AIC и BJC подобны по острому углу при вершине C ($\angle ACI = \angle BCJ$ — вертикальные). Следовательно, $\frac{IA}{JB} = \frac{IC}{JC} = \frac{m}{n}$, т. е. радиусы данных окружностей относятся как $m : n$.

Следовательно, диаметры этих окружностей относятся как $m : n$.
Что и требовалось доказать.

ПРИМЕР 15. Докажите, что отрезок, соединяющий середины оснований трапеции, делит её на две равные по площади части.

Дано: $ABCD$ — трапеция, $AD \parallel BC$; F — середина BC, E — середина AD.

Доказать: $S_{ABFE} = S_{DCFE}$.



Доказательство. Пусть BH — высота трапеции $ABCD$ (является высотой трапеций $ABFE$ и $DCFE$).

Тогда $S_{ABFE} = \frac{BF + AE}{2} \cdot BH$, $S_{DCFE} = \frac{FC + DE}{2} \cdot BH$.

По условию $BF = FC$, $AE = DE$, поэтому $S_{ABFE} = S_{DCFE}$.
Что и требовалось доказать.

Задания для самостоятельного решения

1. Основания BC и AD трапеции $ABCD$ равны соответственно $4{,}5$ и 18. Диагональ BD равна 9. Докажите, что треугольники CBD и BDA подобны.

2. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ углы ABD и ACD равны. Докажите, что углы DAC и DBC также равны.

3. На средней линии трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC выбрали произвольную точку K. Докажите, что сумма площадей треугольников BKC и AKD равна половине площади трапеции.

4. Известно, что около четырёхугольника $ABCD$ можно описать окружность, а продолжения сторон AD и BC четырёхугольника пересекаются в точке K. Докажите, что треугольники KAB и KCD подобны.

5. Внутри параллелограмма $ABCD$ выбрали произвольную точку M. Докажите, что сумма площадей треугольников BMC и AMD равна половине площади параллелограмма.

6. Точка K — середина боковой стороны CD трапеции $ABCD$. Докажите, что площадь треугольника KAB равна половине площади трапеции.

7. Высоты AA_1 и BB_1 остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке E. Докажите, что углы BB_1A_1 и BAA_1 равны.

8. Сторона BC параллелограмма $ABCD$ вдвое больше стороны AB. Точка E — середина стороны BC. Докажите, что AE — биссектриса угла BAD.

9. В трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC диагонали пересекаются в точке P. Докажите, что площади треугольников APB и CPD равны.

10. В треугольнике ABC с тупым углом ABC проведены высоты AA_1 и CC_1. Докажите, что треугольники A_1BC_1 и ABC подобны.

11. Через точку O пересечения диагоналей параллелограмма $ABCD$ проведена прямая, пересекающая стороны BC и AD в точках K и M соответственно. Докажите, что $BK = DM$.

12. Биссектрисы углов C и D трапеции $ABCD$ пересекаются в точке P, лежащей на стороне AB. Докажите, что точка P равноудалена от прямых BC, CD и AD.

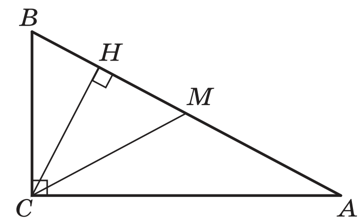
13. Окружности с центрами в точках E и F пересекаются в точках C и D, причём точки E и F лежат по одну сторону от прямой CD. Докажите, что $CD \perp EF$.

14. Окружности с центрами в точках E и F не имеют общих точек и не лежат одна внутри другой. Внутренняя общая касательная к этим окружностям делит отрезок, соединяющий их центры, в отношении $a : b$. Докажите, что диаметры этих окружностей относятся как $a : b$.

15. Докажите, что медиана треугольника делит его на два треугольника, площади которых равны между собой.

ЗАДАЧА 26

ПРИМЕР 1. Найдите острые углы прямоугольного треугольника, если его гипотенуза равна 28, а площадь равна 98.



Дано: $\triangle ABC$, $\angle C = 90°$, $AB = 28$, $S_{\triangle ABC} = 98$.

Найти: $\angle A$; $\angle B$.

РЕШЕНИЕ. Пусть в треугольнике ABC CH — высота, CM — медиана, проведённая к гипотенузе AB. По свойству медианы прямоугольного треугольника $CM = \frac{AB}{2} = 14$.

Так как $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}AB \cdot CH$, то $CH = \frac{2S_{\triangle ABC}}{AB} = \frac{2 \cdot 98}{28} = 7$.

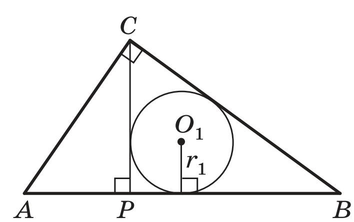
В прямоугольном треугольнике CHM ($\angle H = 90°$) катет CH равен половине гипотенузы CM, поэтому $\angle CMH = 30°$.
Пусть точка H лежит на отрезке BM. Тогда $\angle CMH$ — внешний угол равнобедренного треугольника AMC.

Значит, $\angle MAC = \frac{1}{2}\angle CMH = \frac{1}{2} \cdot 30° = 15° = \angle BAC$;

$\angle ABC = 90° - \angle BAC = 90° - 15° = 75°$.

ОТВЕТ: 15°; 75°.

ПРИМЕР 2. Из вершины прямого угла C треугольника ABC проведена высота CP. Радиус окружности, вписанной в треугольник BCP, равен 60, тангенс угла BAC равен $\frac{4}{3}$. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник ABC.



Дано: $\triangle ABC$, $\angle C = 90°$, CP — высота, $\operatorname{tg}\angle BAC = \frac{4}{3}$; окружность $(O_1;\ r_1)$ вписана в $\triangle BCP$, $r_1 = 60$.

Найти: радиус окружности, вписанной в $\triangle ABC$.

РЕШЕНИЕ. Пусть r — радиус окружности, вписанной в $\triangle ABC$.

По условию $\operatorname{tg}\angle BAC = \frac{4}{3}$, следовательно, $\frac{BC}{AC} = \frac{4}{3}$, а значит, существует коэффициент пропорциональности k катетов треугольника ABC, при этом $BC = 4k$, $AC = 3k$. Тогда гипотенуза $AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = 5k$.
Треугольники ABC и CBP подобны по двум углам ($\angle C = \angle P = 90°$, $\angle B$ — общий), поэтому их соответственные линейные элементы пропорциональны: $\frac{r}{r_1} = \frac{AB}{CB} = \frac{5k}{4k} = \frac{5}{4}$.

Значит, $r = \frac{5}{4}r_1 = \frac{5}{4} \cdot 60 = 75$.

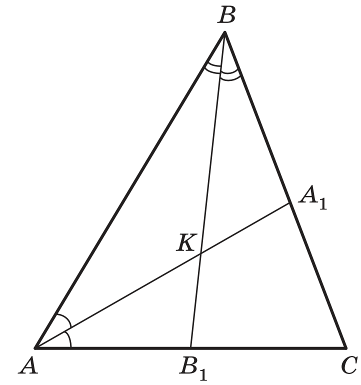
ОТВЕТ: 75.

ПРИМЕР 3. Одна из биссектрис треугольника делится точкой пересечения биссектрис в отношении $8:5$, считая от вершины. Найдите периметр треугольника, если длина стороны треугольника, к которой эта биссектриса проведена, равна 20.

Дано: $\triangle ABC$, AA_1 и BB_1 — биссектрисы, $AA_1 \cap BB_1 = K$, $AK : KA_1 = 8 : 5$, $BC = 20$.

Найти: $P_{\triangle ABC}$.

РЕШЕНИЕ. *Первый способ.* По свойству биссектрисы в $\triangle ABA_1$ $\dfrac{AB}{BA_1} = \dfrac{AK}{KA_1} = \dfrac{8}{5}$, поэтому существует коэффициент пропорциональности k отрезков AB и BA_1, такой, что $AB = 8k$, $BA_1 = 5k$.



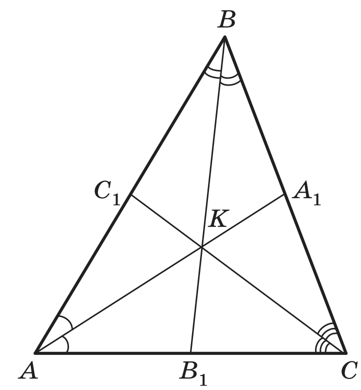
Тогда $A_1C = BC - BA_1 = 20 - 5k$.

AA_1 — биссектриса $\triangle ABC$, поэтому $\dfrac{AC}{AB} = \dfrac{A_1C}{A_1B} = \dfrac{20-5k}{5k} = \dfrac{4-k}{k}$.

Значит, $AC = 8k \cdot \dfrac{4-k}{k} = 32 - 8k$.

Тогда периметр треугольника ABC
$P_{\triangle ABC} = AB + AC + BC = 8k + 32 - 8k + 20 = 52$.

Второй способ. Пусть CC_1 — третья биссектриса $\triangle ABC$, $K \in CC_1$. Тогда CC_1 является биссектрисой $\triangle AA_1C$. По свойству биссектрисы треугольника AA_1C $\dfrac{AC}{CA_1} = \dfrac{AK}{KA_1} = \dfrac{8}{5}$. Следовательно, $AC = \dfrac{8}{5}CA_1$. Аналогично $AB = \dfrac{8}{5}BA_1$. Тогда



$AC + AB + BC = \dfrac{8}{5}CA_1 + \dfrac{8}{5}BA_1 + BC = \dfrac{8}{5}(CA_1 + BA_1) + BC =$

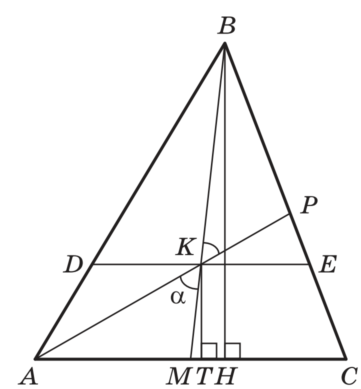
$= \dfrac{8}{5}BC + BC = \dfrac{13}{5}BC$, $P_{\triangle ABC} = \dfrac{13}{5}BC = \dfrac{13 \cdot 20}{5} = 52$.

ОТВЕТ: 52.

ПРИМЕР 4. В треугольнике ABC на его медиане BM отмечена точка K так, что $BK : KM = 4 : 1$. Прямая AK пересекает сторону BC в точке P. Найдите отношение площади треугольника BKP к площади треугольника ABC.

Дано: $\triangle ABC$, BM — медиана, $K \in BM$, $BK : KM = 4 : 1$; $AK \cap BC = P$.

Найти: $S_{\triangle BKP} : S_{\triangle ABC}$.



РЕШЕНИЕ. По условию $BK : KM = 4 : 1$, поэтому существует коэффициент пропорциональности k отрезков BK и KM, такой, что $BK = 4k$, $KM = k$. Тогда $BM = BK + KM = 5k$.
Проведём через точку K прямую DE, параллельную стороне AC ($D \in AB$, $E \in BC$). Треугольники BKE и BMC подобны по двум углам, следовательно, $\dfrac{BK}{BM} = \dfrac{KE}{MC} = \dfrac{4}{5}$.

Пусть $KE = 4l$, $MC = 5l$. BM — медиана $\triangle ABC$, поэтому $AM = MC$. Тогда $AC = 2MC = 10l$. Треугольники PKE и PAC подобны по двум углам, следовательно, $\dfrac{PK}{PA} = \dfrac{KE}{AC} = \dfrac{4}{10} = \dfrac{2}{5}$.

Пусть $\angle AKM = \angle BKP = \alpha$, BH — высота $\triangle ABC$, KT — высота $\triangle AKM$, $KT = \dfrac{1}{5}BH$.

$S_{\triangle AKM} = \dfrac{1}{2}AM \cdot KT = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{2}AC \cdot \dfrac{1}{5}BH = \dfrac{1}{10}S_{\triangle ABC}$.

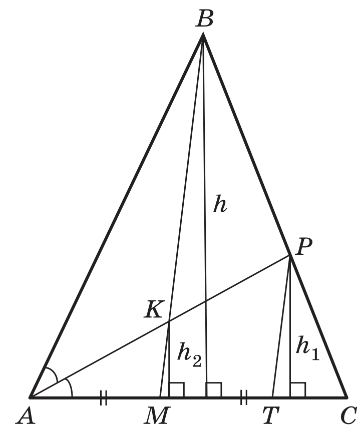
$$\frac{S_{\triangle BKP}}{S_{\triangle AKM}} = \frac{\frac{1}{2}BK \cdot KP \cdot \sin\alpha}{\frac{1}{2}AK \cdot KM \cdot \sin\alpha} = \frac{4k \cdot 2m}{k \cdot 3m} = \frac{8}{3}.$$

Тогда $S_{\triangle BKP} = \frac{8}{3} S_{\triangle AKM} = \frac{8}{3} \cdot \frac{1}{10} S_{\triangle ABC} = \frac{4}{15} S_{\triangle ABC}$.

Значит, $S_{\triangle BKP} : S_{\triangle ABC} = 4 : 15$.

ОТВЕТ: 4 : 15.

ПРИМЕР 5. Медиана BM и биссектриса AP треугольника ABC пересекаются в точке K, длина стороны AC относится к длине стороны AB как 2 : 7. Найдите отношение площади треугольника AKM к площади треугольника ABC.



Дано: $\triangle ABC$, $AC : AB = 2 : 7$; BM — медиана, AP — биссектриса, $BM \cap AP = K$.

Найти: $S_{\triangle AKM} : S_{\triangle ABC}$.

РЕШЕНИЕ. По свойству биссектрисы треугольника $\frac{CP}{BP} = \frac{AC}{AB} = \frac{2}{7}$. Пусть k — коэффициент пропорциональности отрезков CP и BP, тогда $CP = 2k$, $BP = 7k$, $BC = CP + BP = 9k$. Проведём прямую PT, параллельную медиане BM ($T \in AC$). Треугольники PCT и BCM подобны по двум углам, поэтому $\frac{CT}{CM} = \frac{CP}{CB} = \frac{2}{9} = \frac{h_1}{h}$, где h_1 — высота $\triangle APC$, h — высота $\triangle ABC$.

Пусть m — коэффициент пропорциональности отрезков CT и CM, тогда $CT = 2m$, $CM = 9m$, $MT = CM - CT = 7m$.

Так как BM — медиана $\triangle ABC$, то $AM = CM = 9m$, $AT = AM + MT = 16m$.

Треугольники AKM и APT подобны по двум углам, поэтому $\frac{AM}{AT} = \frac{h_2}{h_1} = \frac{9}{16}$, где h_2 — высота $\triangle AKM$.

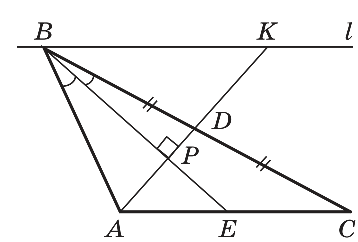
Тогда $h_2 = \frac{9}{16} h_1 = \frac{9}{16} \cdot \frac{2}{9} h = \frac{1}{8} h$.

Получим $S_{\triangle AKM} = \frac{1}{2} AM \cdot h_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} AC \cdot \frac{1}{8} h = \frac{1}{16} \cdot \frac{1}{2} AC \cdot h = \frac{1}{16} S_{\triangle ABC}$.

Значит, $S_{\triangle AKM} : S_{\triangle ABC} = 1 : 16$.

ОТВЕТ: 1 : 16.

ПРИМЕР 6. В треугольнике ABC биссектриса BE и медиана AD перпендикулярны и имеют одинаковую длину, равную 8. Найдите стороны треугольника ABC.



Дано: $\triangle ABC$, BE — биссектриса, AD — медиана, $BE \perp AD$, $BE = AD = 8$.

Найти: длины AB, BC, AC.

РЕШЕНИЕ. Пусть биссектриса BE и медиана AD пересекаются в точке P. По условию $BE \perp AD$. Тогда в треугольнике ABD биссектриса BP является также его высотой. Значит, треугольник ABD является равнобедренным: $AB = BD$, $BC = 2BD = 2AB$. По свойству биссектрисы равнобедренного треугольника BP является также медианой треугольника ABD: $AP = PD = \frac{AD}{2} = 4$.

По свойству биссектрисы треугольника ABC $\frac{CE}{AE} = \frac{BC}{AB} = 2$, откуда $AC = 3AE$. Через вершину B проведём прямую l, параллельную AC.

Пусть K — точка пересечения прямой l с продолжением медианы AD. Тогда $BK = AC = 3AE$. Треугольники APE и KPB подобны по двум углам ($\angle APE = \angle KPB$ — вертикальные, $\angle PAE = \angle PKB$ — накрест лежащие углы при параллельных прямых AC и BK и секущей AK), поэтому $\frac{PE}{BP} = \frac{AE}{BK} = \frac{1}{3}$, откуда $PE = 2$, $BP = 6$.

Из $\triangle ABP$: $\angle P = 90°$, $AB = \sqrt{AP^2 + BP^2} = \sqrt{4^2 + 6^2} = 2\sqrt{13}$.

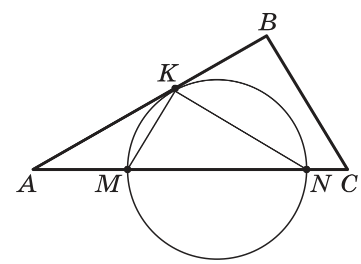
$BC = 2AB = 4\sqrt{13}$.

Из $\triangle APE$: $\angle P = 90°$, $AE = \sqrt{AP^2 + PE^2} = \sqrt{4^2 + 2^2} = 2\sqrt{5}$.

$AC = 3AE = 6\sqrt{5}$.

ОТВЕТ: $2\sqrt{13}$; $4\sqrt{13}$; $6\sqrt{5}$.

ПРИМЕР 7. Точки M и N лежат на стороне AC треугольника ABC на расстояниях соответственно 9 и 11 от вершины A. Найдите радиус окружности, проходящей через точки M и N и касающейся луча AB, если $\cos\angle BAC = \frac{\sqrt{11}}{6}$.



Дано: $\triangle ABC$, $\cos\angle BAC = \frac{\sqrt{11}}{6}$, $M \in AC$, $N \in AC$; $AM = 9$, $AN = 11$; окружность (O; R) проходит через точки M и N и касается луча AB.

Найти: R.

РЕШЕНИЕ. Пусть K — точка касания луча AB и окружности. По теореме о касательной и секущей
$AK^2 = AM \cdot AN = 9 \cdot 11 = 99$.
По теореме косинусов в $\triangle AKM$

$KM^2 = AM^2 + AK^2 - 2AM \cdot AK\ \cos\angle BAC = 81 + 99 - 2 \cdot 9 \cdot \sqrt{99} \cdot \frac{\sqrt{11}}{6} = 180 - 99 = 81$.

Значит, $KM = 9$ и треугольник AKM — равнобедренный ($AM = KM$), поэтому $\angle AKM = \angle KAM = \angle BAC$.
По теореме об угле между касательной и хордой $\angle KNM = \angle AKM - \angle BAC$.
Пусть R — радиус окружности, проходящей через точки M, N и K.

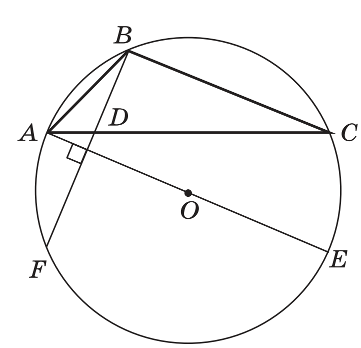
По теореме синусов $R = \frac{KM}{2\sin\angle KNM} = \frac{9}{2\sqrt{1 - \frac{11}{36}}} = \frac{9 \cdot 6}{2 \cdot 5} = 5{,}4$.

ОТВЕТ: 5,4.

ПРИМЕР 8. В треугольнике ABC известны длины сторон $AB = 8$, $AC = 64$. Точка O — центр окружности, описанной около треугольника ABC. Прямая BD, перпендикулярная прямой AO, пересекает сторону AC в точке D. Найдите длину отрезка CD.

Дано: $\triangle ABC$, $AB = 8$, $AC = 64$; окружность (O; R) описана около $\triangle ABC$; $BD \perp AO$, $BD \cap AC = D$.

Найти: длину CD.

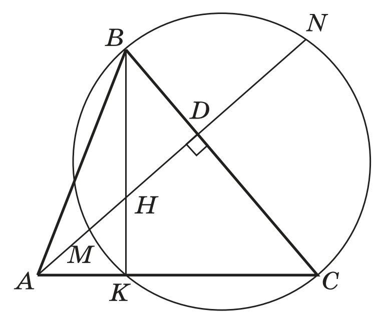


РЕШЕНИЕ. Пусть прямая BD пересекает описанную около треугольника ABC окружность в точке F. Тогда хорда BF перпендикулярна диаметру AE этой окружности. Значит, A — середина дуги BF, не содержащей точку C.
Следовательно, $\angle ABD = \angle ABF = \angle ACB$ (как вписанные углы, опирающиеся на равные дуги). Поэтому треугольники ABD и ACB подобны по двум углам ($\angle A$ — общий угол

этих треугольников). Следовательно, $\frac{AD}{AB} = \frac{AB}{AC}$, откуда $AD = \frac{AB^2}{AC} = 1$ и $CD = AC - AD = 64 - 1 = 63$.

ОТВЕТ: 63.

ПРИМЕР 9. На стороне BC остроугольного треугольника ABC ($AB \neq AC$) как на диаметре построена полуокружность, пересекающая высоту AD в точке M, $AD = 85$, $MD = 68$, H — точка пересечения высот треугольника ABC. Найдите длину отрезка AH.



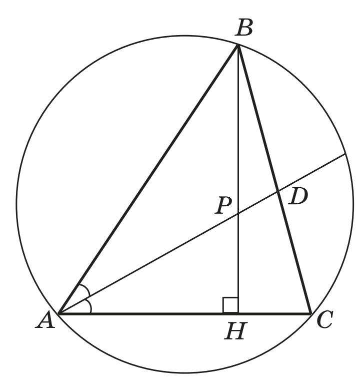
Дано: $\triangle ABC$ — остроугольный ($AB \neq AC$); BC — диаметр полуокружности, пересекающей высоту AD в точке M; $AD = 85$, $MD = 68$; H — точка пересечения высот $\triangle ABC$.

Найти: длину AH.

РЕШЕНИЕ. Пусть окружность с диаметром BC пересекает сторону AC в точке K. Тогда $\angle BKC = 90°$, а значит, BK — высота $\triangle ABC$. $BK \cap AD = H$.
Продолжим высоту AD за точку D до пересечения с окружностью в точке N. Тогда $ND = MD = 68$. По следствию из теоремы о касательной и секущей $AK \cdot AC = AM \cdot AN = (85 - 68) \cdot (85 + 68) = 2601$.
Из подобия прямоугольных треугольников AKH и ADC следует, что $\frac{AK}{AH} = \frac{AD}{AC}$, откуда $AK \cdot AC = AD \cdot AH = 85AH$.
Значит, $85AH = 2601$.
Следовательно, $AH = 30{,}6$.

ОТВЕТ: 30,6.

ПРИМЕР 10. В треугольнике ABC биссектриса угла A делит высоту, проведённую из вершины B, в отношении $5 : 4$, считая от точки B. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ABC, если $BC = 6$.



Дано: $\triangle ABC$, $BC = 6$; AD — биссектриса, BH — высота, $AD \cap BH = P$, $BP : PH = 5 : 4$, окружность $(O;\ R)$ описана около $\triangle ABC$.

Найти: R.

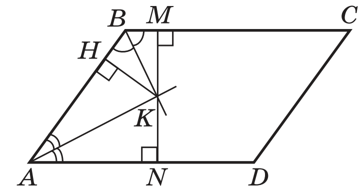
РЕШЕНИЕ. В прямоугольном треугольнике ABH биссектриса AP угла A делит сторону BH на отрезки BP и PH, такие, что $\frac{BP}{PH} = \frac{AB}{AH} = \frac{5}{4}$ (по свойству биссектрисы треугольника).
Тогда $\cos\angle A = \frac{AH}{AB} = \frac{4}{5}$, $\sin\angle A = \sqrt{1 - \cos^2\angle A} = \sqrt{1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2} = \frac{3}{5}$.

По следствию из теоремы синусов радиус описанной около треугольника ABC окружности $R = \frac{BC}{2\sin\angle A} = \frac{6 \cdot 5}{2 \cdot 3} = 5$.

ОТВЕТ: 5.

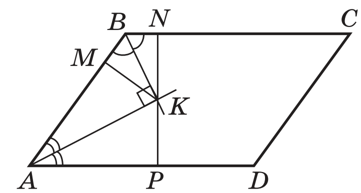
ПРИМЕР 11. Биссектрисы углов A и B параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке K. Найдите площадь параллелограмма, если $BC = 2$, а расстояние от точки K до стороны AB равно 1.

Дано: $ABCD$ — параллелограмм, $BC = 2$; AK и BK — биссектрисы углов A и B, $AK \cap BK = K$; расстояние от точки K до стороны AB равно 1.



Найти: S_{ABCD}.

РЕШЕНИЕ. *Первый способ.* Пусть KH, KM и KN — перпендикуляры, опущенные из точки K на стороны AB, BC и AD соответственно. По свойству биссектрис $KM = KH = KN = 1$. Кроме того, $K \in MN$ и $MN = MK + KN = 2$ — высота параллелограмма $ABCD$.
Тогда $S_{ABCD} = BC \cdot MN = 2 \cdot 2 = 4$.



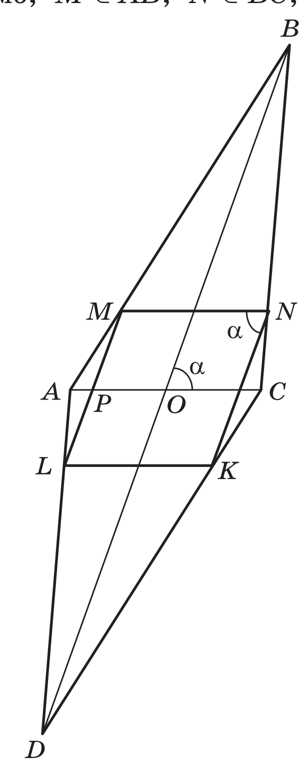
Второй способ. Прямые AD и BC параллельны. Значит, $\angle ABC + \angle BAD = 180°$. Поскольку AK и BK — биссектрисы углов BAD и ABC соответственно, получаем $\angle ABK + \angle BAK = 90°$. Значит, треугольник AKB прямоугольный, а KM — его высота, опущенная на гипотенузу.
Проведём через точку K высоту параллелограмма NP. Тогда KN и KP — перпендикуляры к сторонам BC и AD. Прямоугольные треугольники BMK и BNK равны по гипотенузе и острому углу, следовательно, $NK = 1$.
Прямоугольные треугольники AMK и APK равны по гипотенузе и острому углу, следовательно, $PK = 1$.
Получили, что высота параллелограмма $NP = 2$.
$S_{ABCD} = BC \cdot NP$. Значит, $S_{ABCD} = 4$.

ОТВЕТ: 4.

ПРИМЕР 12. Вершины ромба расположены на сторонах параллелограмма, а стороны ромба параллельны диагоналям параллелограмма. Найдите отношение площадей ромба и параллелограмма, если отношение диагоналей параллелограмма равно 33.

Дано: $ABCD$ — параллелограмм, $AC : BD = 1 : 33$; $MNKL$ — ромб, $M \in AB$, $N \in BC$, $K \in CD$, $L \in AD$, $MN \parallel AC$, $NK \parallel BD$.

Найти: $S_{MNKL} : S_{ABCD}$.



РЕШЕНИЕ. *Первый способ.* Пусть AC пересекается с BD в точке O, ML пересекается с AC в точке P (см. рисунок).
Обозначим $AC = 2k$, тогда $BD = 66k$, $BO = 33k$.
Пусть $MN = 2x$.
Треугольники AOB и APM подобны по двум углам, поэтому $\frac{BO}{MP} = \frac{AO}{AP}$. Тогда $\frac{33k}{x} = \frac{k}{k-x}$,

$33k(k - x) = kx$,

$34kx = 33k^2$,

$x = \frac{33k}{34}$.

Следовательно, $MN = \frac{33k}{17}$.

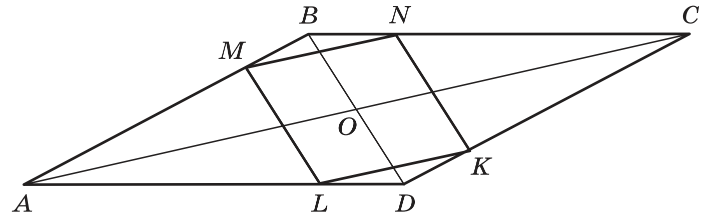
Пусть $\angle BOC = \alpha$. Тогда $\angle MNK = \alpha$.

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}AC \cdot BD\sin\alpha = \frac{1}{2} \cdot 2k \cdot 66k \cdot \sin\alpha = 66k^2 \sin\ \alpha.$$

$$S_{MNKL} = MN \cdot NK\sin\alpha = \left(\frac{33k}{17}\right)^2 \sin\alpha = \frac{33^2 k^2}{289}\sin\alpha.$$

$$\frac{S_{MNKL}}{S_{ABCD}} = \frac{33^2 k^2 \sin\alpha}{289 \cdot 66k^2 \sin\alpha} = \frac{33}{2 \cdot 289} = \frac{33}{578}.$$

Второй способ. Треугольник BMN подобен треугольнику BAC по двум углам, поэтому $\frac{BM}{BA} = \frac{MN}{AC}$, откуда $BA \cdot MN = BM \cdot AC$.



Треугольник AML подобен треугольнику ABD по двум углам, поэтому $\frac{AM}{AB} = \frac{ML}{BD}$, откуда $AB \cdot ML = AM \cdot BD$.

Четырёхугольник $MNKL$ — ромб, поэтому из $BA \cdot MN = BM \cdot AC$ и $AB \cdot ML = AM \cdot BD$ получаем $AM \cdot BD = BM \cdot AC$, откуда $\frac{AM}{BM} = \frac{AC}{BD} = 33$.

Из подобия треугольников BMN и BAC получаем $MN = \frac{1}{34}AC$, а из подобия треугольников AML и ABD получаем $ML = \frac{33}{34}BD$.

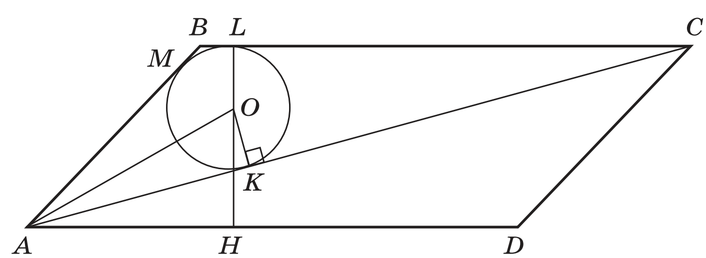
Из параллельности прямых MN и AC и прямых ML и BD следует, что четырёхугольник, образованный точками пересечения, является параллелограммом, откуда следует равенство углов LMN и AOB.

Получаем $\frac{S_{MNKL}}{S_{ABCD}} = \frac{MN \cdot ML \cdot \sin\angle LMN}{\frac{1}{2}AC \cdot BD \cdot \sin\angle AOB} = \frac{\frac{1}{34}AC \cdot \frac{33}{34}BD}{\frac{1}{2}AC \cdot BD} = \frac{2 \cdot 33}{34 \cdot 34} = \frac{33}{578}$.

ОТВЕТ: 33 : 578.

ПРИМЕР 13. В параллелограмме $ABCD$ проведена диагональ AC. Точка O является центром окружности, вписанной в треугольник ABC. Расстояния от точки O до точки A и прямых AD и AC равны соответственно 25, 8 и 7. Найдите площадь параллелограмма $ABCD$.

Дано: $ABCD$ — параллелограмм, AC — диагональ, окружность $(O;\ r)$ вписана в $\triangle ABC$; $OA = 25$, расстояния от точки O: до прямой AD равно 8, до прямой AC равно 7.



Найти: S_{ABCD}.

РЕШЕНИЕ. Пусть окружность, вписанная в треугольник ABC, касается сторон AB, BC и AC в точках M, L и K соответственно, H — проекция точки O на прямую AD. Тогда $OL = OK = 7$, точки O, L и H лежат на одной прямой, LH — высота параллелограмма $ABCD$, $LH = OL + OH = 7 + 8 = 15$.

В $\triangle AOK$: $\angle K = 90^\circ$, $AK = \sqrt{OA^2 - OK^2} = \sqrt{25^2 - 7^2} = 24$.

Пусть p — полупериметр, а S — площадь $\triangle ABC$, $r = 7$ — радиус окружности, вписанной в $\triangle ABC$. Обозначим $BC = x$.

Тогда $p = AK + CL + BM = AK + CL + BL = AK + BC = 24 + x$.

$S = \frac{1}{2}BC \cdot LH = \frac{1}{2}x \cdot 15 = 7{,}5x$.

С другой стороны, $S = pr = 7(24 + x)$.

Из уравнения $7{,}5x = 7(24 + x)$ находим $x = 336$.

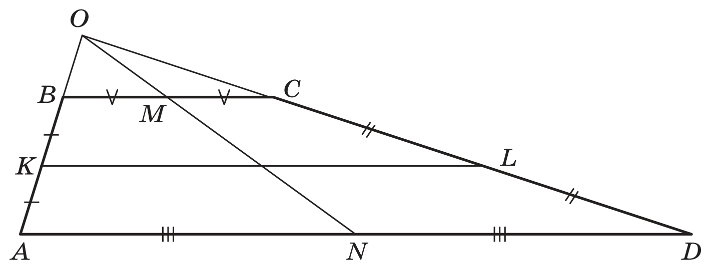
Следовательно, $S_{ABCD} = 2S = 2 \cdot 7 \cdot (24 + 336) = 14 \cdot 360 = 5040$.

ОТВЕТ: 5040.

ПРИМЕР 14. Углы при одном из оснований трапеции равны 86° и 4°, а отрезки, соединяющие середины противоположных сторон трапеции, равны 4 и 1. Найдите основания трапеции.

Дано: $ABCD$ — трапеция, $AD \parallel BC$, $\angle A = 86°$, $\angle D = 4°$; K — середина AB, L — середина CD, M — середина BC, N — середина AD; $MN = 1$, $KL = 4$.

Найти: AD, BC.



РЕШЕНИЕ. По условию сумма углов при основании AD трапеции равна $86° + 4° = 90°$. Продлим боковые стороны трапеции до пересечения в точке O. Тогда в треугольнике AOD $\angle AOD = 180° - (\angle A + \angle D) = 90°$.

Если N — середина AD, тогда $ON = \frac{AD}{2}$ — медиана треугольника AOD, которая делит пополам любой отрезок с концами на сторонах AO и DO и параллельный стороне AD, т. е. ON пересекает основание BC в середине — точке M, при этом $OM = \frac{BC}{2}$.

Тогда $MN = \frac{AD - BC}{2}$, $KL = \frac{AD + BC}{2}$ (KL — средняя линия трапеции).

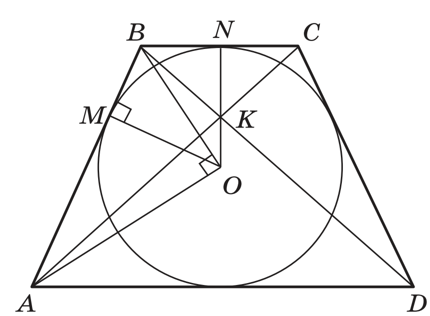
По условию $\begin{cases} \frac{AD - BC}{2} = 1, \\ \frac{AD + BC}{2} = 4; \end{cases}$ $\begin{cases} AD - BC = 2, \\ AD + BC = 8; \end{cases}$ $\begin{cases} 2AD = 10, \\ BC = 8 - AD; \end{cases}$ $\begin{cases} AD = 5, \\ BC = 3. \end{cases}$

ОТВЕТ: 5; 3.

ПРИМЕР 15. В равнобедренную трапецию, периметр которой равен 40, а площадь равна 80, можно вписать окружность. Найдите расстояние от точки пересечения диагоналей трапеции до её меньшего основания.

Дано: $ABCD$ — трапеция, $AD \parallel BC$ ($BC < AD$); $AB = CD$; $AC \cap BD = K$, $P_{ABCD} = 40$, $S_{ABCD} = 80$; окружность $(O;\ r)$ вписана в трапецию.

Найти: расстояние от точки K до BC.



РЕШЕНИЕ. *Первый способ.* Пусть M — точка касания окружности с AB, N — точка касания окружности с BC: $OM = ON = r$.

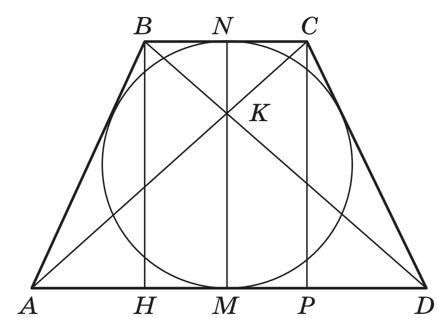
Так как трапеция описана около окружности, то сумма её боковых сторон равна сумме оснований, т. е. 20, а каждая боковая сторона равна 10, и $S_{ABCD} = 2r \cdot \frac{AD + BC}{2} = 20 \cdot r = 80$. Откуда $r = 4$.

Так как $AD \parallel BC$, то $\angle ABC + \angle BAD = 180°$ (односторонние углы при параллельных прямых AD и BC и секущей AB), поэтому $\angle ABO + \angle BAO = 90°$ (AO и BO — биссектрисы углов A и B трапеции $ABCD$).

Значит, в треугольнике AOB $\angle O = 90^\circ$, OM — высота, опущенная на гипотенузу, поэтому $AM \cdot BM = OM^2 = r^2$;
$AM(AB - AM) = r^2$;
$AM(10 - AM) = 16$;
$AM^2 - 10AM + 16 = 0$.
Учитывая, что $AM > BM$, получаем $AM = 8$. Тогда $AD = 2AM = 16$, $BC = 4$. Треугольники AKD и CKB подобны (по двум углам) с коэффициентом 4, значит, высота треугольника CKB составляет $\frac{1}{5}$ высоты трапеции, т. е. диаметра окружности.

Следовательно, $KN = \frac{1}{5} \cdot 8 = 1{,}6$.

Второй способ. Пусть M — точка касания окружности с бо́льшим основанием AD, N — с меньшим основанием BC трапеции, K — точка пересечения диагоналей, BH и CP — высоты трапеции $ABCD$.



Трапеция описана около окружности, следовательно, сумма её боковых сторон равна сумме оснований, т. е. 20, поэтому боковые стороны трапеции равны 10.
Трапеция описана около окружности, следовательно, $S_{ABCD} = r \cdot p$, где r — радиус вписанной окружности, а p — полупериметр трапеции. Значит, $r = 4$, а высота трапеции равна 8. Из прямоугольного треугольника ABH, в котором $AB = 10$, $BH = 8$, получаем $AH = 6$.
В равнобедренной трапеции $ABCD$ длины отрезков AH и DP равны 6, а $HP = BC$ и $AD + BC = 20$, получаем, что основания $BC = 4$ и $AD = 16$.
Треугольник AKD подобен треугольнику CKB с коэффициентом 4, значит, высота KN треугольника BKC составляет $\frac{1}{5}$ высоты трапеции MN. Следовательно, $KN = \frac{1}{5} \cdot 8 = 1{,}6$.

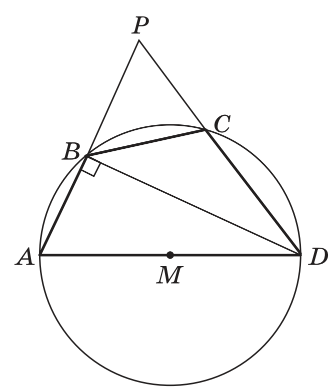
ОТВЕТ: 1,6.

ПРИМЕР 16. Середина M стороны AD выпуклого четырёхугольника $ABCD$ равноудалена от всех его вершин. Найдите длину стороны AD, если $BC = 6$, а углы B и C четырёхугольника равны соответственно 107° и 133°.

Дано: $ABCD$ — выпуклый четырёхугольник, M — середина AD, $MA = MB = MC = MD$; $BC = 6$, $\angle B = 107^\circ$, $\angle C = 133^\circ$.

Найти: длину AD.

РЕШЕНИЕ. По условию задачи $MA = MB = MC = MD$, значит, четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность с центром M, AD — её диаметр.

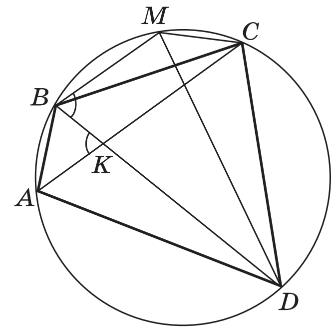


Так как сумма противоположных углов вписанного четырёхугольника равна 180°, то
$\angle DAB = 180^\circ - \angle DCB = 180^\circ - 133^\circ = 47^\circ$,
$\angle ADC = 180^\circ - \angle ABC = 180^\circ - 107^\circ = 73^\circ$.
Угол ABD прямой, так как опирается на диаметр, поэтому $\angle ADB = 90^\circ - 47^\circ = 43^\circ$, а, следовательно, $\angle CDB = \angle ADC - \angle ADB = 73^\circ - 43^\circ = 30^\circ$.
По следствию из теоремы синусов в треугольнике CDB получаем
$AD = \frac{BC}{\sin 30^\circ} = 12$.

ОТВЕТ: 12.

ПРИМЕР 17. Четырёхугольник $ABCD$ со сторонами $AB = 11$ и $CD = 41$ вписан в окружность. Диагонали AC и BD пересекаются в точке K, причём $\angle AKB = 60°$. Найдите радиус окружности, описанной около этого четырёхугольника.

Дано: $ABCD$ — четырёхугольник, вписан в окружность $(O;\ R)$; $AB = 11$, $CD = 41$; $AC \cap BD = K$, $\angle AKB = 60°$.



Найти: R.

РЕШЕНИЕ. Через точку B проведём хорду BM, параллельную диагонали AC. Тогда $CM = AB = 11$, $\angle DBM = \angle AKB = 60°$ (накрест лежащие углы при параллельных прямых AC и BM и секущей BD).

Так как четырёхугольник $BMCD$ вписан в данную окружность, то

$\angle DCM = 180° - \angle DBM = 180° - 60° = 120°$.

По теореме косинусов (для $\triangle CMD$)

$$DM = \sqrt{CM^2 + CD^2 - 2CM \cdot CD\cos\angle DCM} = \sqrt{11^2 + 41^2 - 2 \cdot 11 \cdot 41 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)} = \sqrt{2253}.$$

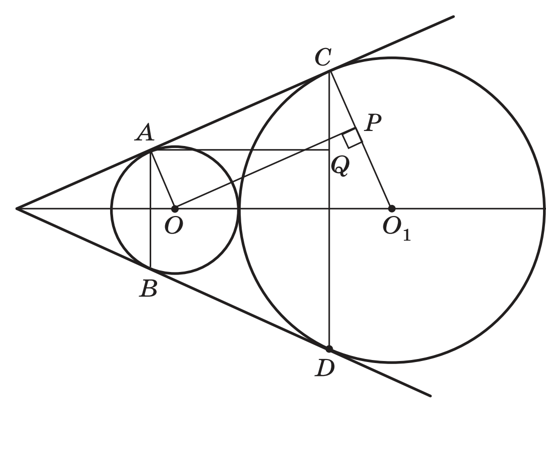
По теореме синусов (для $\triangle DBM$)

$$R = \frac{DM}{2\sin\angle DBM} = \frac{\sqrt{2253}}{2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} = \sqrt{751}.$$

ОТВЕТ: $\sqrt{751}$.

ПРИМЕР 18. Окружности радиусов 27 и 54 касаются внешним образом. Точки A и B лежат на первой окружности, точки C и D — на второй. При этом AC и BD — общие касательные окружностей. Найдите расстояние между прямыми AB и CD.

Дано: окружности $(O;\ r)$ и $(O_1;\ R)$ касаются внешним образом; $r = 27$, $R = 54$; точки A и B лежат на $(O;\ r)$, точки C и D лежат на $(O_1;\ R)$; AC и BD — общие касательные окружностей.



Найти: расстояние между прямыми AB и CD.

РЕШЕНИЕ. *Первый способ.* Так как O и O_1 — центры данных окружностей, а $r = 27$, $R = 54$ — их радиусы, то $OO_1 = r + R = 27 + 54 = 81$.

Опустим перпендикуляр OP из центра O первой окружности на радиус O_1C второй окружности. Тогда $O_1P = O_1C - PC = O_1C - OA = 54 - 27 = 27$.

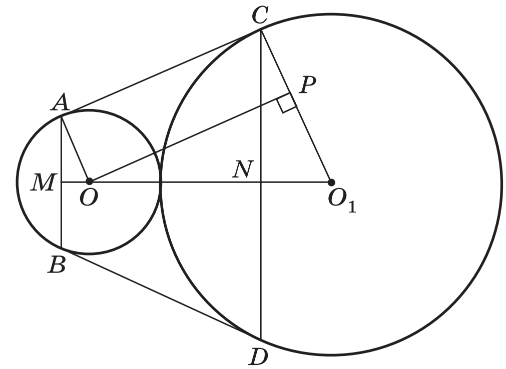
Из $\triangle OPO_1$ $\angle P = 90°$, $OP^2 = OO_1^2 - O_1P^2 = 81^2 - 27^2 = 27^2(9 - 1) = 27^2 \cdot 8$.

Так как $AOPC$ — прямоугольник, то $AC = OP$.

Опустим перпендикуляр AQ из точки A на прямую CD. Прямоугольные треугольники AQC и OPO_1 подобны по двум углам, поэтому $\frac{AQ}{AC} = \frac{OP}{OO_1}$.

Следовательно, $AQ = \frac{OP \cdot AC}{OO_1} = \frac{OP^2}{OO_1} = \frac{27^2 \cdot 8}{81} = \frac{9^2 \cdot 3^2 \cdot 8}{9^2} = 72.$

Второй способ. Прямая OO_1, проходящая через центры касающихся окружностей, является осью симметрии геометрической конфигурации, поэтому прямые AB и CD перпендикулярны прямой OO_1, следовательно, прямые AB и CD параллельны.



Прямая OO_1, проходящая через центры касающихся окружностей, проходит через точку касания этих окружностей, поэтому расстояние между центрами окружностей равно сумме их радиусов, т. е. 81.

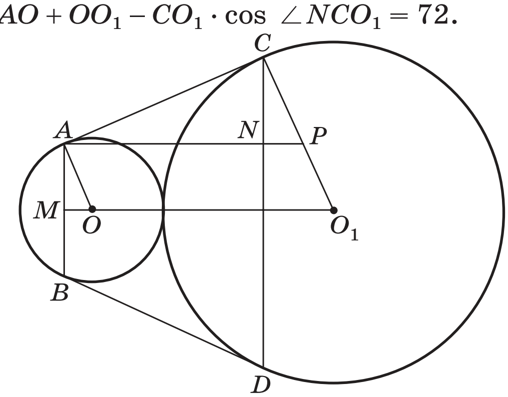
Опустим перпендикуляр OP из центра первой окружности на радиус O_1C второй окружности. Четырёхугольник $AOPC$ — прямоугольник.

Тогда $O_1P = O_1C - PC = O_1P - OA = 54 - 27 = 27$.

Из прямоугольного треугольника OPO_1 находим, что $\cos\angle PO_1O = \frac{1}{3}$.

В прямоугольных треугольниках AMO и CNO_1 углы MOA и NO_1C равны углу PO_1O. Следовательно, $MN = MO + OO_1 - NO_1 = AO \cdot \cos\angle MAO + OO_1 - CO_1 \cdot \cos\ \angle NCO_1 = 72$.

Третий способ. Прямая OO_1, проходящая через центры касающихся открудностей, является осью симметрии геометрической конфигурации, поэтому прямые AB и CD перпендикулярны прямой OO_1, следовательно, прямые AB и CD параллельны.



Прямая OO_1, проходящая через центры касающихся окружностей, проходит через точку касания этих окружностей, поэтому расстояние между центрами окружностей равно сумме их радиусов, т. е. 81.

Поведём AP параллельно OO_1. Треугольник ACP прямоугольный, четырёхугольник AOO_1P — параллелограмм.

Прямоугольный треугольник ACP подобен прямоугольному треугольнику ANC по двум углам, поэтому $\frac{AN}{AC} = \frac{AC}{AP}$. Следовательно,

$$AN = \frac{AC^2}{AP} = \frac{(CO_1 + AO)^2 - (CO_1 - AO)^2}{CO_1 + AO} = \frac{4CO_1 \cdot AO}{CO_1 + AO}.$$

Следовательно, $AN = \frac{4 \cdot 54 \cdot 27}{81} = 72$.

ОТВЕТ: 72.

Задания для самостоятельного решения

1. Найдите острые углы прямоугольного треугольника, если его гипотенуза равна 12, а площадь равна 18.

2. Из вершины прямого угла C треугольника ABC проведена высота CP. Радиус окружности, вписанной в треугольник BCP, равен 39, тангенс угла BAC равен $\frac{3}{4}$. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник ABC.

3. Одна из биссектрис треугольника делится точкой пересечения биссектрис в отношении $17:10$, считая от вершины. Найдите периметр треугольника, если длина стороны треугольника, к которой эта биссектриса проведена, равна 30.

4. В треугольнике ABC на его медиане BM отмечена точка K так, что $BK:KM=7:3$. Прямая AK пересекает сторону BC в точке P. Найдите отношение площади треугольника ABK к площади треугольника ABC.

5. Медиана BM и биссектриса AP треугольника ABC пересекаются в точке K, длина стороны AC относится к длине стороны AB как $9:4$. Найдите отношение площади треугольника AKM к площади четырёхугольника $KPCM$.

6. В треугольнике ABC биссектриса BE и медиана AD перпендикулярны и имеют одинаковую длину, равную 28. Найдите стороны треугольника ABC.

7. Точки M и N лежат на стороне AC треугольника ABC на расстояниях соответственно 9 и 32 от вершины A. Найдите радиус окружности, проходящей через точки M и N и касающейся луча AB, если $\cos\angle BAC=\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

8. В треугольнике ABC известны длины сторон $AB=15$, $AC=25$, точка O — центр окружности, описанной около треугольника ABC. Прямая BD, перпендикулярная прямой AO, пересекает сторону AC в точке D. Найдите длину отрезка CD.

9. На стороне BC остроугольного треугольника ABC $(AB\neq AC)$ как на диаметре построена полуокружность, пересекающая высоту AD в точке M, $AD=72$, $MD=18$, H — точка пересечения высот треугольника ABC. Найдите длину отрезка AH.

10. В треугольнике ABC биссектриса угла A делит высоту, проведённую из вершины B, в отношении $13:12$, считая от точки B. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ABC, если $BC=20$.

11. Биссектрисы углов A и B параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке K. Найдите площадь параллелограмма, если $BC=7$, а расстояние от точки K до стороны AB равно 4.

12. Вершины ромба расположены на сторонах параллелограмма, а стороны ромба параллельны диагоналям параллелограмма. Найдите отношение площадей ромба и параллелограмма, если отношение диагоналей параллелограмма равно 13.

13. В параллелограмме $ABCD$ проведена диагональ AC. Точка O является центром окружности, вписанной в треугольник ABC. Расстояния от точки O до точки A и прямых AD и AC равны соответственно 25, 15 и 7. Найдите площадь параллелограмма $ABCD$.

14. Углы при одном из оснований трапеции равны 80° и 10°, а отрезки, соединяющие середины противоположных сторон трапеции, равны 20 и 17. Найдите основания трапеции.

15. В равнобедренную трапецию, периметр которой равен 100, а площадь равна 500, можно вписать окружность. Найдите расстояние от точки пересечения диагоналей трапеции до её меньшего основания.

16. Середина M стороны AD выпуклого четырёхугольника $ABCD$ равноудалена от всех его вершин. Найдите длину стороны AD, если $BC = 6$, а углы B и C четырёхугольника равны соответственно 124° и 116°.

17. Четырёхугольник $ABCD$ со сторонами $AB = 44$ и $CD = 8$ вписан в окружность. Диагонали AC и BD пересекаются в точке K, причём $\angle AKB = 60^\circ$. Найдите радиус окружности, описанной около этого четырёхугольника.

18. Окружности радиусов 12 и 20 касаются внешним образом. Точки A и B лежат на первой окружности, точки C и D — на второй. При этом AC и BD — общие касательные окружностей. Найдите расстояние между прямыми AB и CD.

ВАРИАНТ 1

ЧАСТЬ 2

Модуль «Алгебра»

21. Решите неравенство $(x-7)^2 < \sqrt{11}(x-7)$.

22. Смешали некоторое количество 17%-ного раствора некоторого вещества с таким же количеством 81%-ного раствора этого же вещества. Сколько процентов составляет концентрация получившегося раствора?

23. Постройте график функции $y = -5 - \dfrac{x-2}{x^2-2x}$ и определите, при каких значениях m прямая $y = m$ не имеет с графиком общих точек.

Модуль «Геометрия»

24. Отрезки AB и DC лежат на параллельных прямых, а отрезки AC и BD пересекаются в точке M. Найдите длину отрезка MC, если $AB = 11$, $DC = 22$, $AC = 27$.

25. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ углы DAC и DBC равны. Докажите, что углы CDB и CAB также равны.

26. Две окружности, касающиеся внешним образом в точке K, с радиусами 22 и 33 касаются сторон угла с вершиной A. Общая касательная к этим окружностям, проходящая через точку K, пересекает стороны угла в точках B и C. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ABC.

ВАРИАНТ 2

ЧАСТЬ 2

Модуль «Алгебра»

21. Решите систему уравнений $\begin{cases}(3x+7y)^2=10y,\\(3x+7y)^2=10x.\end{cases}$

22. Поезд, двигаясь равномерно со скоростью 148 км/ч, проезжает мимо пешехода, идущего в том же направлении параллельно путям со скоростью 4 км/ч, за 10 секунд. Найдите длину поезда в метрах.

23. Постройте график функции $y=|x^2+4x-5|$. Какое наибольшее число общих точек график данной функции может иметь с прямой, параллельной оси абсцисс?

Модуль «Геометрия»

24. Прямая, параллельная стороне AC треугольника ABC, пересекает стороны AB и BC в точках M и N соответственно. Найдите длину отрезка BN, если $MN=14$, $AC=21$, $NC=10$.

25. Биссектрисы углов A и B параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке F, лежащей на стороне CD. Докажите, что F — середина стороны CD.

26. Найдите площадь трапеции, диагонали которой равны 16 и 12, а средняя линия равна 10.

ВАРИАНТ 3

ЧАСТЬ 2

Модуль «Алгебра»

21. Решите уравнение $x(x^2 + 4x + 4) = 3(x + 2)$.

22. Первая труба пропускает на 5 л воды в минуту меньше, чем вторая труба. Сколько литров воды в минуту пропускает первая труба, если резервуар объёмом 200 л она заполняет на 2 мин дольше, чем вторая труба?

23. Постройте график функции $y = \dfrac{(x^2 - x)|x|}{x - 1}$ и определите, при каких значениях m прямая $y = m$ не имеет с графиком ни одной общей точки.

Модуль «Геометрия»

24. Катеты прямоугольного треугольника равны 10 и 24. Найдите длину высоты, проведённой к гипотенузе.

25. На средней линии трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC выбрали произвольную точку K. Докажите, что сумма площадей треугольников BKC и AKD равна половине площади трапеции.

26. Биссектрисы углов A и B параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке K. Найдите площадь параллелограмма, если $BC = 7$, а расстояние от точки K до стороны AB равно 4.

ВАРИАНТ 4

ЧАСТЬ 2

Модуль «Алгебра»

21. Решите неравенство $x^2(-x^2-81) \leqslant 81(-x^2-81)$.

22. Первые 4 ч автомобиль ехал со скоростью 50 км/ч, следующие 4 ч — со скоростью 80 км/ч, а последние 4 ч — со скоростью 35 км/ч. Найдите среднюю скорость автомобиля на протяжении всего пути.

23. Постройте график функции

$$y=\begin{cases} x^2-4x+5, \text{ если } x \geqslant 1, \\ x+1, \text{ если } x<1, \end{cases}$$

и определите, при каких значениях m прямая $y=m$ имеет с графиком ровно две общие точки.

Модуль «Геометрия»

24. Найдите боковую сторону AB трапеции $ABCD$, если углы ABC и BCD равны соответственно $60°$ и $150°$, а $CD=33$.

25. Высоты AA_1 и CC_1 остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке E. Докажите, что углы AA_1C_1 и ACC_1 равны.

26. На стороне BC остроугольного треугольника ABC ($AB \neq AC$) как на диаметре построена полуокружность, пересекающая высоту AD в точке M, $AD=40$, $MD=16$, H — точка пересечения высот треугольника ABC. Найдите длину отрезка AH.

ВАРИАНТ 5

ЧАСТЬ 2

Модуль «Алгебра»

21. Решите уравнение $\dfrac{2x^2 + 7x - 4}{x^2 - 16} = 1.$

22. Игорь и Паша могут покрасить забор за 10 ч, Паша и Володя могут покрасить этот же забор за 15 ч, а Володя и Игорь — за 24 ч. За сколько минут мальчики могут покрасить забор, работая втроём?

23. Постройте график функции

$$y = \begin{cases} 4x - 1{,}5, \text{ если } x < 1, \\ -2{,}5x + 5, \text{ если } 1 \leqslant x \leqslant 4, \\ x - 9, \text{ если } x > 4, \end{cases}$$

и определите, при каких значениях m прямая $y = m$ имеет с графиком ровно две общие точки.

Модуль «Геометрия»

24. Биссектриса угла A параллелограмма $ABCD$ пересекает сторону BC в точке F. Найдите периметр параллелограмма, если $BF = 3$, $CF = 19$.

25. В треугольнике ABC с тупым углом BAC проведены высоты BB_1 и CC_1. Докажите, что треугольники B_1AC_1 и ABC подобны.

26. Углы при одном из оснований трапеции равны 27° и 63°, а отрезки, соединяющие середины противоположных сторон трапеции, равны 13 и 10. Найдите основания трапеции.

ВАРИАНТ 6

ЧАСТЬ 2

Модуль «Алгебра»

21. Сократите дробь $\frac{(9x)^2 \cdot x^{-8}}{x^{-15} \cdot 5x^9}$.

22. Расстояние между пристанями A и B равно 48 км. От пристани A к пристани B по течению реки отправился плот, а через час вслед за ним отправилась моторная лодка, которая, прибыв к пристани B, тотчас повернула обратно и возвратилась к пристани A. К этому времени плот прошёл 25 км. Найдите скорость лодки в неподвижной воде, если скорость течения реки равна 5 км/ч.

23. Постройте график функции $y = \frac{1}{2}\left(\left|\frac{x}{4{,}5} - \frac{4{,}5}{x}\right| + \frac{x}{4{,}5} + \frac{4{,}5}{x}\right)$ и определите, при каких значениях m прямая $y = m$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

Модуль «Геометрия»

24. Высота AH ромба $ABCD$ делит сторону CD на отрезки $DH = 16$ и $CH = 4$. Найдите высоту ромба.

25. Высоты AA_1 и CC_1 остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке E. Докажите, что углы CC_1A_1 и CAA_1 равны.

26. Медиана BM и биссектриса AP треугольника ABC пересекаются в точке K. Длина стороны AC относится к длине стороны AB как $6 : 7$. Найдите отношение площади треугольника BKP к площади четырёхугольника $KPCM$.

ВАРИАНТ 7

ЧАСТЬ 2

Модуль «Алгебра»

21. Решите уравнение $x^2 - 2x + \sqrt{3-x} = \sqrt{3-x} + 8$.

22. Свежие фрукты содержат 86% воды, а высушенные — 23%. Сколько требуется свежих фруктов для приготовления 72 кг высушенных фруктов?

23. Постройте график функции $y = |x|x - |x| - 6x$ и определите, при каких значениях m прямая $y = m$ имеет с графиком ровно две общие точки.

Модуль «Геометрия»

24. Биссектрисы углов A и B при боковой стороне AB трапеции $ABCD$ пересекаются в точке M. Найдите длину стороны AB, если $AM = 16$, $BM = 12$.

25. Окружности с центрами в точках P и Q не имеют общих точек и не лежат одна внутри другой. Внутренняя общая касательная к этим окружностям делит отрезок, соединяющий их центры, в отношении $a : b$. Докажите, что диаметры этих окружностей относятся как $a : b$.

26. В треугольнике ABC известны длины сторон $AB = 28$, $AC = 56$, точка O — центр окружности, описанной около треугольника ABC. Прямая BD, перпендикулярная прямой AO, пересекает сторону AC в точке D. Найдите длину отрезка CD.

ВАРИАНТ 8

ЧАСТЬ 2

Модуль «Алгебра»

21. Решите неравенство $\frac{-19}{x^2+x-12} \leqslant 0$.

22. Два автомобиля одновременно отправляются в 810-километровый пробег. Первый едет со скоростью, на 36 км/ч большей, чем второй, и прибывает к финишу на 6 ч раньше второго. Найдите скорость первого автомобиля.

23. Постройте график функции $y = 3|x+7| - x^2 - 13x - 42$ и определите, при каких значениях m прямая $y = m$ имеет с графиком ровно три общие точки.

Модуль «Геометрия»

24. Отрезки AB и CD являются хордами окружности. Найдите длину хорды CD, если $AB = 24$, а расстояния от центра окружности до хорд AB и CD равны соответственно 16 и 12.

25. Основания BC и AD трапеции $ABCD$ равны соответственно 4 и 64. Диагональ BD равна 16. Докажите, что треугольники CBD и ADB подобны.

26. Одна из биссектрис треугольника делится точкой пересечения биссектрис в отношении 18 : 1, считая от вершины. Найдите периметр треугольника, если длина стороны треугольника, к которой эта биссектриса проведена, равна 31.

ВАРИАНТ 9

ЧАСТЬ 2

Модуль «Алгебра»

21. Решите систему неравенств $\begin{cases} 6(5x+1)-5(6x+1)>x, \\ (x-3)(x+5)<0. \end{cases}$

22. Расстояние между городами A и B равно 100 км. Из города A в город B выехал автомобилист, а через 60 мин следом за ним со скоростью 80 км/ч выехал мотоциклист. Мотоциклист догнал автомобилиста в городе C и повернул обратно. Когда он проехал половину пути из города C в город A, автомобилист прибыл в город B. Найдите расстояние между городами A и C.

23. Постройте график функции $y=\dfrac{2x+5}{2x^2+5x}$ и определите, при каких значениях k прямая $y=kx$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

Модуль «Геометрия»

24. Углы B и C треугольника ABC равны соответственно 62° и 88°. Найдите длину стороны BC, если радиус окружности, описанной около треугольника ABC, равен 12.

25. Сторона CD параллелограмма $ABCD$ вдвое больше стороны BC. Точка F — середина стороны CD. Докажите, что BF — биссектриса угла ABC.

26. В равнобедренную трапецию, периметр которой равен 200, а площадь равна 2000, можно вписать окружность. Найдите расстояние от точки пересечения диагоналей трапеции до её меньшего основания.

ВАРИАНТ 10

ЧАСТЬ 2

Модуль «Алгебра»

21. Решите уравнение $(x+5)^3 = 25(x+5)$.

22. Дорога между пунктами A и B состоит из подъёма и спуска, а её длина равна 22 км. Турист прошёл путь из пункта A в пункт B за 4 ч, из которых спуск занял 3 ч. С какой скоростью турист шёл на спуске, если его скорость на подъёме меньше его скорости на спуске на 2 км/ч?

23. Найдите значение p и постройте график функции $y = x^2 + p$, если известно, что прямая $y = -x$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

Модуль «Геометрия»

24. Точка H является основанием высоты, проведённой из вершины прямого угла B треугольника ABC к гипотенузе AC. Найдите длину катета AB, если $AH = 10$, $AC = 40$.

25. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ углы DAC и DBC равны. Докажите, что углы CDB и CAB также равны.

26. В параллелограмме $ABCD$ проведена диагональ AC. Точка O является центром окружности, вписанной в треугольник ABC. Расстояния от точки O до точки A и прямых AD и AC равны соответственно 25, 14 и 7. Найдите площадь параллелограмма $ABCD$.

ОТВЕТЫ

21.1. $-\frac{1}{3}$; 1. **21.2.** $-1-\sqrt{5}$; $-1+\sqrt{5}$. **21.3.** −5; 4. **21.4.** −2; 3. **21.5.** −4. **21.6.** −3; −1; 1. **21.7.** −2; −1; 1. **21.8.** −14; −7; 0. **21.9.** 0; 1,5; 3. **21.10.** −5. **21.11.** −1. **21.12.** (−1; 1); (1; 1). **21.13.** (2; −1); (2; 1). **21.14.** (0; 0); $\left(\frac{1}{7}; \frac{1}{7}\right)$. **21.15.** (−3; −2); (−3; 2); (3; −2); (3; 2). **21.16.** (4; 7). **21.17.** $(-\infty; -1) \cup (8; +\infty)$. **21.18.** $\left(1-\sqrt{2}; 1+\sqrt{2}\right)$. **21.19.** $\left(4; 4+\sqrt{3}\right)$. **21.20.** [−1; 1]. **21.21.** $(-\infty; -3] \cup [3; +\infty)$. **21.22.** (−8; 4). **21.23.** [−5; 2]. **21.24.** 27. **21.25.** 360. **21.26.** 14. **21.27.** 10. **21.28.** −1.

22.1. 0,6 км. **22.2.** 4 км/ч. **22.3.** 85 км/ч. **22.4.** 18 км/ч. **22.5.** 20 км/ч. **22.6.** 6 ч. **22.7.** 10 км/ч. **22.8.** 100 км/ч. **22.9.** 10 км/ч. **22.10.** 47,5 км/ч. **22.11.** 500 м. **22.12.** 10 деталей. **22.13.** 10 мин. **22.14.** 35 кг. **22.15.** 21%. **22.16.** 18 л.

23.1. −2; 2. **23.2.** 2,5; −2; 2. **23.3.** $\frac{36}{49}$. **23.4.** 1; $\frac{6}{5}$. **23.5.** −3,5; 1,5. **23.6.** 0; $[4; +\infty)$. **23.7.** 2; 3. **23.8.** 4. **23.9.** $[-4; -1] \cup [0; +\infty)$. **23.10.** −4; $\frac{25}{36}$. **23.11.** −0,25; 6,25. **23.12.** −1; 4. **23.13.** −8. **23.14.** −1; 1. **23.15.** $(-\infty; 1) \cup (1; 5)$. **23.16.** −6,25; −6; 6. **23.17.** Две прямые $y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$ и $y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$ (рис. 1). **23.18.** Парабола $y=\frac{1}{2}x^2$ и две прямые $x=1$ и $x=-1$ (рис. 2). **23.19.** Окружность $x^2+y^2=9$ с четырьмя выколотыми точками $(y \neq \pm x)$ (рис. 3). **23.20.** $-\frac{1}{8}$; $\frac{1}{8}$. **23.21.** $(-\infty; -6) \cup (6; +\infty)$.

24.1. 36. **24.2.** 40. **24.3.** 60. **24.4.** 44. **24.5.** 12. **24.6.** 10. **24.7.** $13\sqrt{2}$. **24.8.** 36. **24.9.** 72. **24.10.** 60°; 120°. **24.11.** 8. **24.12.** 32. **24.13.** 13. **24.14.** 11. **24.15.** 9. **24.16.** 13. **24.17.** 11. **24.18.** 6,4. **24.19.** 16. **24.20.** 36°; 76°; 68°. **24.21.** 15.

26.1. 15°; 75°. **26.2.** 65. **26.3.** 81. **26.4.** 7 : 20. **26.5.** 13 : 21. **26.6.** $7\sqrt{13}$; $14\sqrt{13}$; $21\sqrt{5}$. **26.7.** 13,5. **26.8.** 16. **26.9.** 67,5. **26.10.** 26. **26.11.** 56. **26.12.** 13 : 98. **26.13.** 924. **26.14.** 37; 3. **26.15.** 4. **26.16.** 12. **26.17.** 28. **26.18.** 30.

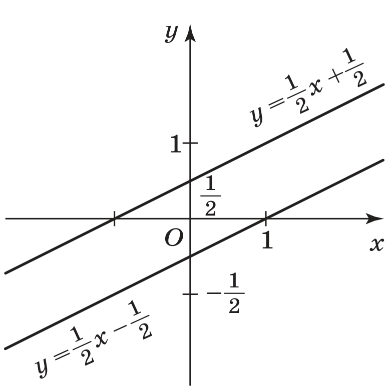


Рис. 1

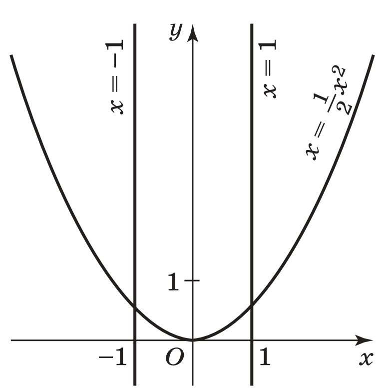


Рис. 2

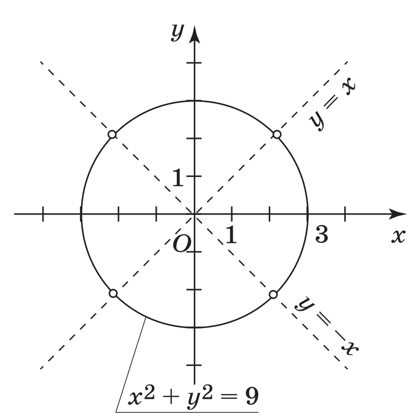


Рис. 3

Диагностические работы

Вариант 1

21. $\left(7;\, 7+\sqrt{11}\right)$. **22.** 49%. **23.** –5; –5,5. **24.** 18. **26.** $\frac{99\sqrt{3}}{4}$.

Вариант 2
21. (0; 0), (0,1; 0,1). **22.** 400 м. **23.** 4. **24.** 20. **26.** 32.

Вариант 3

21. –3; –2; 1. **22.** 20. **23.** 1. **24.** $\frac{120}{13}$. **26.** 56.

Вариант 4

21. $(-\infty;\, -9] \cup [9;\, +\infty)$. **22.** 55 км/ч. **23.** 1; 2. **24.** $11\sqrt{3}$. **26.** 33,6.

Вариант 5
21. –3. **22.** 576 мин. **23.** –5; 2,5. **24.** 50. **26.** 23; 3.

Вариант 6
21. 16,2. **22.** 25 км/ч. **23.** –1; 1. **24.** 8. **26.** 49 : 81.

Вариант 7
21. –2. **22.** 396 кг. **23.** –12,25; 6,25. **24.** 20. **26.** 42.

Вариант 8
21. $(-\infty;\, -4) \cup (3;\, +\infty)$. **22.** 90 км/ч. **23.** 0; 1. **24.** 32. **26.** 589.

Вариант 9

21. (–5; 1). **22.** 80 км. **23.** $\frac{4}{25}$. **24.** 12. **26.** 8.

Вариант 10
21. –10; –5; 0. **22.** 6 км/ч. **23.** 0,25. **24.** 20. **26.** 1008.

СОДЕРЖАНИЕ