

KAUNO TECHNOLOGIJOS UNIVERSITETAS
Informatikos fakultetas

P170B115 Skaitiniai metodai ir algoritmai

Laboratorinis darbas Nr. 4

Variantas 1

Dėstytojas:

prof. BARAUSKAS Rimantas

Studentė:

Laura Capaitė IFK-0

KAUNAS, 2022

Turiny

1.	Užduotis	3
2.	Diferencialinės lygties sudarymas	3
3.	Eulerio metodas	5
4.	IV eilės Rungės ir Kutos metodas	7
5.	Sprendinio patikrinimas	8
	Išvados	9

1. Užduotis

Varianto užduotis (1.1 pav.):

Sujungti m_1 ir m_2 masių objektai iššaujami vertikaliai į viršų pradiniu greičiu v_0 . Oro pasipriešinimo koeficientas sujungtiems kūnams lygus k_s . Praėjus laikui t_s , objektai pradeda judėti atskirai. Oro pasipriešinimo koeficientai atskirai judantiems objektams atitinkamai yra k_1 ir k_2 . Oro pasipriešinimas proporcingas objekto greičio kvadratui. Raskite, kaip kinta objektų greičiai nuo 0 s iki t_{max} . Kada kiekvienas objektas pasieks aukščiausią tašką ir pradės leistis?

1.1 pav. užduotis

Užduoties pradiniai duomenys (1.2 pav.):

Varianto numeris	m_1 , kg	m_2 , kg	v_0 , m/s	k_s , kg/m	t_s , s	k_1 , kg/m	k_2 , kg/m	t_{max} , s
1	0,2	0,4	80	0,015	1	0,02	0,005	15

1.2 pav. užduoties pradiniai duomenys

2. Diferencialinės lygties sudarymas

2.1 pav. nurodomi pradiniai įverčiai nurodyti užduotyje. Nuliniu laiko momentu, aukštis abiejų objektų yra 0, o greitis yra 80m/s.

$$\begin{Bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ v_1 \\ v_2 \end{Bmatrix}_{t=0} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 80 \\ 80 \end{Bmatrix}$$

2.1 pav. pradinis aukštis ir greitis

Kol nepraėjo 1 sekundė po objektų iššovimo, abu objektai juda vienodu greičiu, taikoma tokia pati formulė (2.2 pav.). Abiejų objektų aukštis išlieka toks pat, kuris priklauso nuo greičio.

If $t < 1$:

$$\frac{d}{dt} \begin{Bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ v_1 \\ v_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} v \\ v \\ -g - \frac{kv^2 \text{sign}(v)}{m_1+m_2} \\ -g - \frac{kv^2 \text{sign}(v)}{m_1+m_2} \end{Bmatrix}$$

2.2 pav. diferencialinė lygtis, kai laikas yra mažesnis nei 1 sekundė

Praėjus vienai sekundei objektai pradeda kilti skirtingu greičiu, yra veikiami skirtingo oro pasipriešinimo. Greičio skaičiavimui formulė nesikeičia, tačiau pasikeičia naudojamos reikšmės (2.3 pav.). Oro pasipriešinimo ir greičio reikšmės naudojamos priklausomai nuo objekto. Objektų aukštis priklauso nuo jų greičio.

Else:

$$\frac{d}{dt} \begin{Bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ v_1 \\ v_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ -g - \frac{k_1 v_1^2 \text{sign}(v_1)}{m_1} \\ -g - \frac{k_2 v_2^2 \text{sign}(v_2)}{m_2} \end{Bmatrix}$$

2.3 pav. diferencialinė lygtis, kai laikas yra didesnis nei 1 sekundė

Pagal šias formules yra parašomas metodas kiekvieno įvertio skaičiavimui (2.4 pav.):

```
def funk(X, t): # PDL desinės pusės funkcija
    h1=X[0];h2=X[1];v1=X[2];v2=X[3];
    m1=0.2; m2=0.4; k1=0.02; k2=0.005; k = 0.015
    rez=np.zeros(4,dtype=float) # k = 1, p = 2

    if 1 > t: # iki atsiskyrimo
        rez[0]=v1;rez[1]=v2;
        rez[2]=-9.81+(-k*v1**2*np.sign(v1))/(m2+m1);
        rez[3]=rez[2];
    else: # po atsiskyrimo
        rez[0]=v1;rez[2]=-9.81-k1*v1**2*np.sign(v1)/m1
        rez[1]=v2; rez[3]=-9.81-k2*v2**2*np.sign(v2)/m2;

    return rez
```

2.4 pav. metodas lygties reikšmių skaičiavimui

3. Eulerio metodas

3.1 pav. pavaizduotas Eulerio metodas.

```
if 1: # sprendimas Eulerio metodu
    for i in range (N-1):
        rez[:,i+1]=rez[:,i]+funk(rez[:,i],t[i])*dt
        if rez[0,i+1] <= 0 : rez[[0,2],i+1]=0
        if rez[1,i+1] <= 0 : rez[[1,3],i+1]=0
```

3.1 pav. Eulerio metodas

Eulerio metodo veikimas: norint gauti sekančią y reikšmę, reikia prie dabartinės y reikšmės pridėti x žingsnio ir lygties dešinės funkcijos (nuo dabartinio x ir y) sandaugą. Jeigu objektas pasiekia žemę ir aukštis tampa 0, tai automatiškai jo greitis prilyginamas 0.

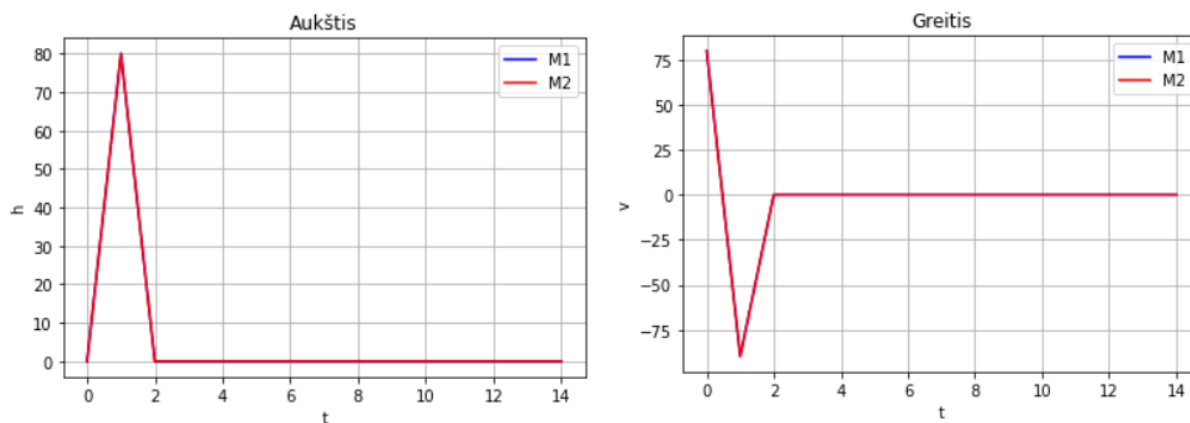
Šiuo atveju y yra rez, x yra t, o dt yra žingsnis.

Sprendinio tikslumas priklauso nuo metodo formulės ir nuo žingsnio dydžio.

Žingsnis: 1. Su šiuo žingsniu rezultatai yra labai neaiškūs. Rezultatai rodo kad abu objektai juda vienodai, kas yra netiesa. Reikia šiek tiek pamažinti žingsnį.

M1 pasiekė aukščiausią tašką 80.0m. - 1s.

M2 pasiekė aukščiausią tašką 80.0m. - 1s.

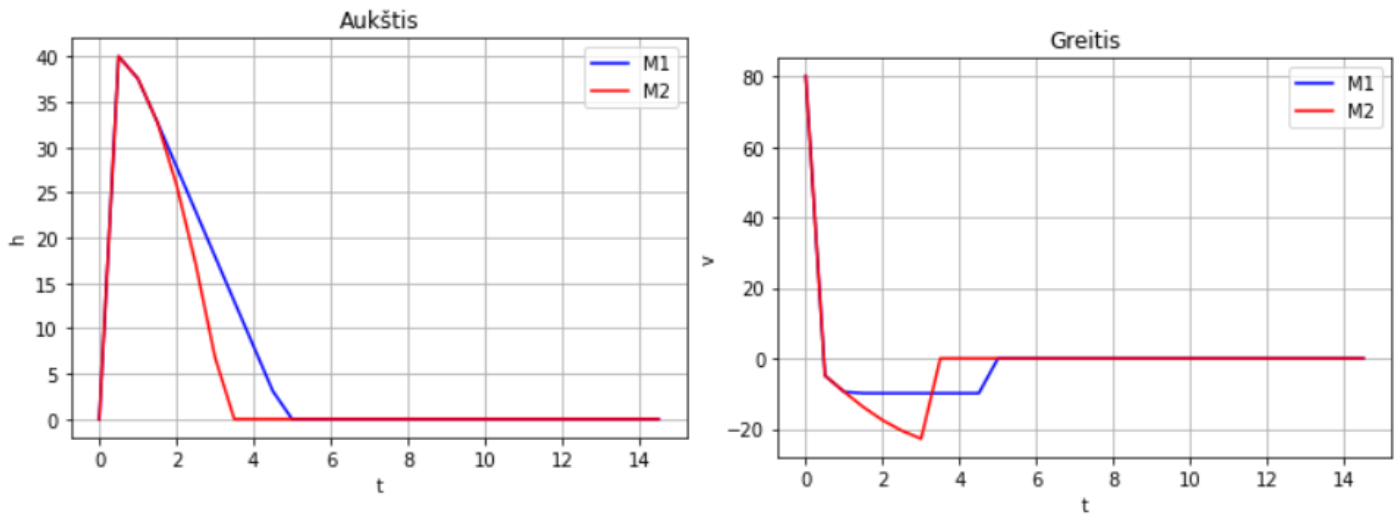


3.2 pav. rezultatai su žingsniu 1

Žingsnis: 0.5. Su šiuo žingsniu rezultatai pradeda aiškėti, bet kreivės vis dar kampuotos. Reikia dar kartą mažinti žingsnio dydį.

M1 pasiekė aukščiausią tašką 40.0m. - 0.5s.

M2 pasiekė aukščiausią tašką 40.0m. - 0.5s.

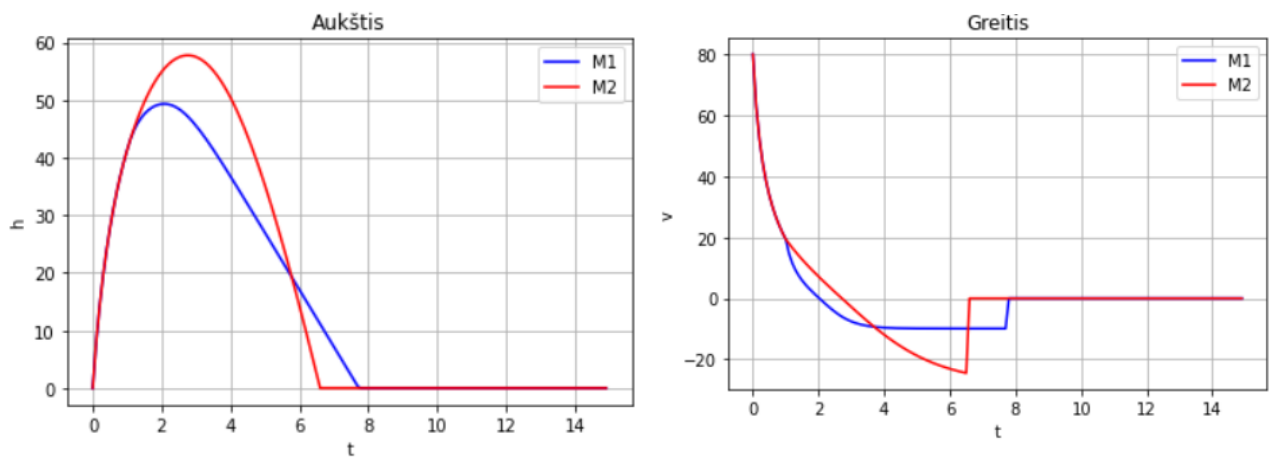


3.3 pav. rezultatai su žingsniu 0.5

Žingsnis: 0.1. Su šiuo žingsniu rezultatai jau matomi aiškūs. Išsiskiria dviejų objektų aukščiai ir greičiai.

M1 pasiekė aukščiausia tašką 49.34315828881041m. - 2.1s.

M2 pasiekė aukščiausia tašką 57.77336774858929m. - 2.8s.



3.4 pav. rezultatai su žingsniu 0.1

4. IV eilės Rungės ir Kutos metodas

4.1 pav. pavaziduota metodo implementacija:

```
else:
    for i in range (N-1) : # sprendimas IV RK metodu
        fz=rez[:,i]+funk(rez[:,i],t[i])*dt/2
        fzz=rez[:,i]+funk(fz,t[i]+dt/2)*dt/2
        fzzz=rez[:,i]+funk(fzz,t[i]+dt/2)*dt
        rez[:,i+1]=rez[:,i]+dt/6*(funk(rez[:,i],t[i])+2*funk(fz,t[i]+dt/2)+2*funk(fzz,t[i]+dt/2)+funk(fzzz,t[i]+dt))
        if rez[0,i+1] <= 0 : rez[[0,2],i+1]=0
        if rez[1,i+1] <= 0 : rez[[1,3],i+1]=0
```

4.1 pav. IV eilės Rungės ir Kutos metodas

PDL funkcija apskaičiuojama kelis kartus

Metodo 4 žingsniai: taikomas Eulerio metodo žingsniu $dx/2$, taikomas atgalinis

Eulerio metodas žingsniu $dx/2$, taikomas vidutinio taško formulę žingsniu dx , taikoma

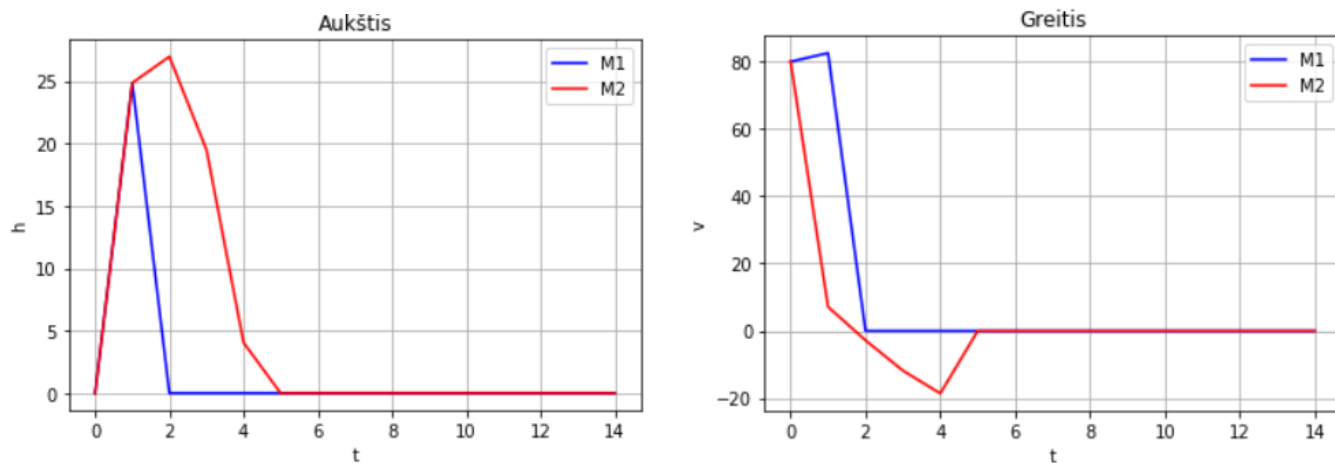
Simpsono koreguojanti formulė su prieš tai gautais rezultatais žingsniu dx

Metodo pabaigoje: jeigu objektas pasiekia žemę ir aukštis tampa 0, tai automatiškai jo greitis prilyginamas 0.

Žingsnis: 1. Gaunami tam tikri rezultatai, tačiau jie nėra itin geri. Žingsnis per didelis.

M1 pasiekė aukščiausią tašką 24.84309060295316m. - 1s.

M2 pasiekė aukščiausią tašką 26.944249595269802m. - 2s.

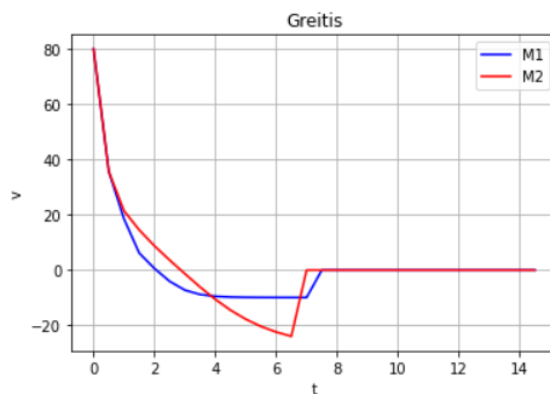
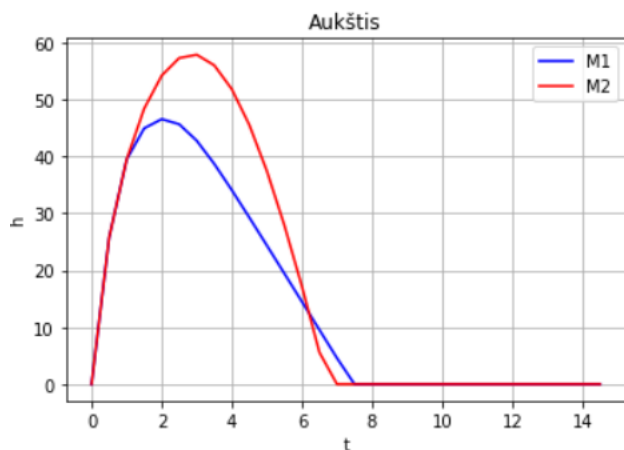


4.2 pav. rezultatai su žingsniu 1

Žingnis: 0.5. Rezultatai šiuo atveju gaunami teisingesni. Kreivės atrodo tolygesnės, tačiau šiek tiek per daug kampuotos. Dar kartą pamažinamas žingsnis.

M1 pasiekė aukščiausią tašką 46.538208505743036m. - 2.0s.

M2 pasiekė aukščiausią tašką 57.84317612061794m. - 3.0s.

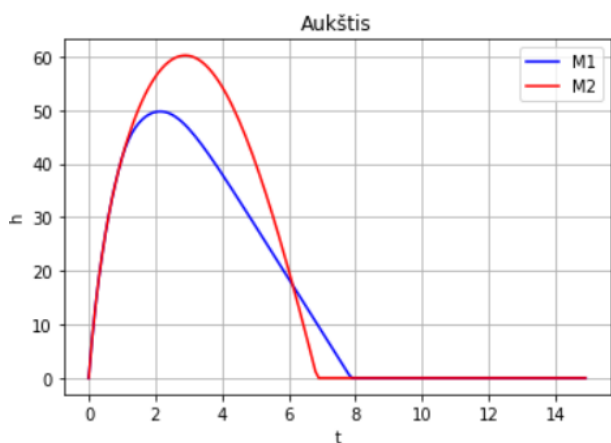


4.3 pav. rezultatai su žingsniu 0.5

Žingsnis: 0.1. Su šiuo žingsniu rezultatai atrodo pakankamai geri. Palyginus su Eulerio metodu gautais rezultatais, jie beveik sutampa. Skiriasi M2 objekto aukščiausio taško pasiekimo laikas per 0.1s.

M1 pasiekė aukščiausią tašką 49.7542210881103m. - 2.1s.

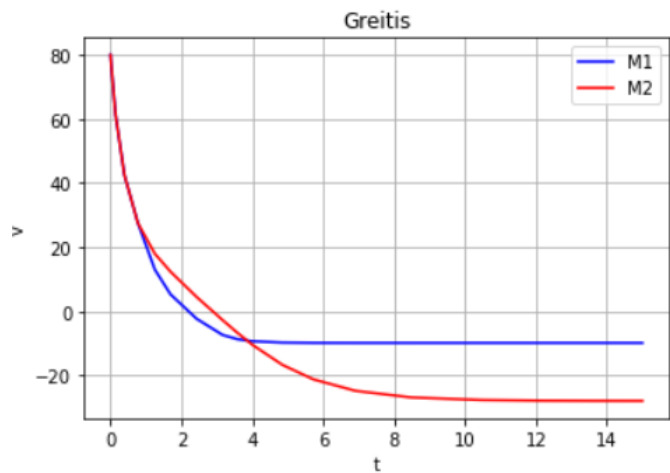
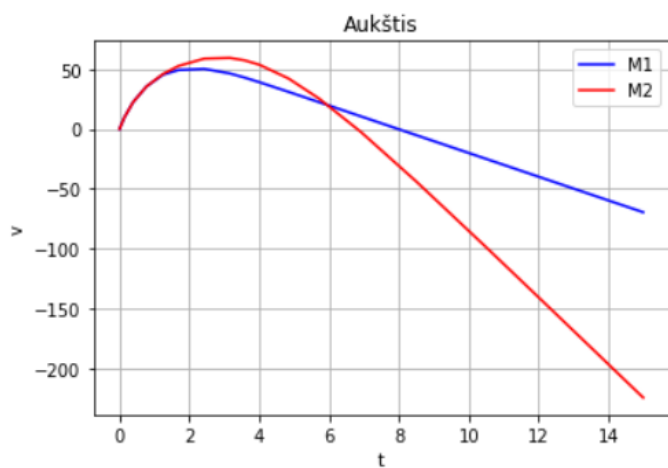
M2 pasiekė aukščiausią tašką 60.22386271321104m. - 2.90s.



4.4 pav. rezultatai su žingsniu 0.1

5. Sprendinio patikrinimas

Sprendinio patikrinimui naudojama Python scipy.integrate bibliotekos funkcija solve_ivp.



5.1 pav. rezultatai su solve_ivp

Rezultatai (5.1 pav.) atrodo panašūs kaip ir aukščiau gauti, tik čia nėra priverstinai priskiriami nuliai kai objektas pasiekia žemę. Aukštis ir greitis pasiekia minusines reikšmes, nes skaičiavimams naudojami vektoriai.

Išvados

1. Rezultatai geriausi gaunami su žingsniu 0.1.
2. Blogiausi rezultatai gaunami su žingsniu 1.
3. Naudojant Eulerio ir IV Rungės ir Kutos metodus su žingsniu 0.1 rezultatai gaunami beveik tokie patys, paklaida tik 0.1s.